

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Научно-теоретический журнал

Издается с 2001 года

Выходит 4 раза в год

Свидетельство о регистрации

СМИ: ПИ № ФС77-47855

ISSN 2226-8383

Том XX

Выпуск 2 (70)

Тула

2019

Учредитель: ФГБОУ ВО
«ТГПУ им. Л. Н. Толстого»

Каталог «Пресса России»
Подписной индекс 10642

Адрес редакции: 300026,

г. Тула, пр. Ленина, 125,
каб. 310

Тел: +79156812638,
8(4872)374051

E-mail: cheb@tsput.ru

URL:
<http://www.chebsbornik.ru>

В журнале публикуются оригинальные статьи по направлениям современной математики: теория чисел, алгебра и математическая логика, теория функций вещественного и комплексного переменного, функциональный анализ, дифференциальные уравнения, математическая физика, геометрия и топология, теория вероятностей и математическая статистика, численные методы, теория оптимизации и др.

Также публикуются статьи о памятных датах и юбилеях.

Журнал включен в перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание ученых степеней кандидата наук и доктора наук (перечень ВАК), индексируются и/или реферируются: Scopus, MathSciNet, Zentralblatt MATH, Russian Science Citation Index (RSCI), РЖ «Математика», «Mathematical Reviews», РИНЦ, Google Scholar Metrics.

Журнал выходит под эгидой Министерства науки и высшей школы Российской Федерации, Российской академии наук, Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Московского педагогического государственного университета, Тульского государственного университета.

Главный редактор

В. Н. Чубариков (Россия, г. Москва)

Ответственный секретарь

Н. Н. Добровольский (Россия, г. Тула)

Заместители главного редактора: Н. М. Добровольский (Россия, г. Тула),

А. В. Михалёв (Россия, г. Москва), А. И. Нижников (Россия, г. Москва)

Редакционная коллегия:

В. А. Артамонов (Россия, г. Москва)

Ю. В. Матиясевич (Россия, г. Санкт-Петербург)

В. А. Быковский (Россия, г. Хабаровск)

С. П. Мищенко (Россия, г. Ульяновск)

С. В. Востоков (Россия, г. Санкт-Петербург)

Ю. В. Нестеренко (Россия, г. Москва)

А. Е. Гвоздев (Россия, г. Тула)

В. А. Панин (Россия, г. Тула)

Д. В. Георгиевский (Россия, г. Москва)

У. М. Пачев (Россия, г. Нальчик)

С. А. Гриценко (Россия, г. Москва)

А. А. Фомин (Россия, г. Москва)

С. С. Демидов (Россия, г. Москва)

В. Г. Чирский (Россия, г. Москва)

В. Г. Дурнев (Россия, г. Ярославль)

А. Я. Белов (Израиль, г. Рамат Ган)

А. М. Зубков (Россия, г. Москва)

В. И. Берник (Беларусь, г. Минск)

В. И. Иванов (Россия, г. Тула)

П. О. Касьянов (Украина, г. Киев)

В. К. Карташов (Россия, г. Волгоград)

А. Лауринчикас (Литва, г. Вильнюс)

М. А. Королёв (Россия, г. Москва)

Лю Юнпин (Китай, г. Пекин)

В. Н. Кузнецов (Россия, г. Саратов)

М. Дж. Марданов (Азербайджан, г. Баку)

В. Н. Латышев (Россия, г. Москва)

З. Рахмонов (Таджикистан, г. Душанбе)

Х. М. Салиба (Ливан)

А. Х. Табари (Таджикистан, г. Куляб)

От редакции

По решению программного комитета и редакционной коллегии данный выпуск
Чебышевского сборника содержит избранные труды

XVI Международной конференции «Алгебра, теория чисел и дискретная
геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории»,
посвященной 80-летию со дня рождения профессора Мишеля Деза.

СОДЕРЖАНИЕ

Том 20 Выпуск 2

От редакции	3
Abu-Saleem Ahmad, A. R. Rustanov, T. L. Melekhina. Generalized Kenmotsu manifold constancy of type	7
Ю. А. Басалов. О методике оценки критических определителей в рамках вопроса оценки константы совместных диофантовых приближений	22
Н. В. Бударина Точные оценки для специального класса целочисленных многочленов с задан- ным дискриминантом	39
Д. В. Васильев, А. С. Кудин. Об оценках сверху числа минимальных полиномов с малой производной в корне	47
Л. В. Варухина. Избранные вопросы теории сумматорных функций рядов Дирихле	55
Д. В. Горбачев, В. И. Иванов. Условия Макенхаута для кусочно-степенных весов в евклидовом пространстве с мерой Данкля	82
Д. В. Горбачев, Е. П. Офицеров. Новый подход к поиску строковой медианы и визуализация строковых кластеров	93
Д. С. Григорьев, А. О. Иванов, А. А. Тужилин. Расстояния Громова–Хаусдорфа до симплексов	108
Л. А. Громаковская, Б. М. Широков. Распределение значений функции Жордана в классах вычетов	123
Е. И. Деза. Конусы и многогранники обобщенных метрик	140
Н. Н. Добровольский, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский. Об одном обобщенном эйлеровом произведении, задающем мероморфную функцию на всей комплексной плоскости	156
M. Dutour. The hypermetric cone and polytope on graphs	169
П. Л. Иванков. О значениях гипергеометрической функции с параметром из квадратичного поля	178
O. Ivanova, S. Vostokov, I. Zhukov. On two approaches to classification of higher local fields	186
A. Jurišić, J. Vidali. No strongly regular graph is locally Heawood	198
Э. И. Ковалевская. Тригонометрические суммы в метрической теории диофантовых приближений	207
Е. И. Компанцева, А. А. Фомин. Факторно делимые группы и группы без кручения, соответствующие конечным абелевым группам	221

D. Malinin. On some characters of group representations	234
С. С. Мамонов, И. В. Ионова, А. О. Харламова. Матричные уравнения систем фазовой синхронизации	244
В. А. Молчанов, Е. В. Хворостухина. Об абстрактной определяемости универсальных гиперграфических автоматов полугруппами входных сигналов	259
A. Mucherino. Introducing the Interaction Distance in the context of Distance Geometry for Human Motions	273
О. А. Пихтилькова, Е. В. Мещерина, А. А. Горелик. О почти локально разрешимых алгебрах Ли с нулевым радикалом Джекобсона и локально нильпотентном радикале для алгебр Ли	284
Н. С. Полякова. Дифференцирование функций кватернионной переменной	298
Л. А. Толоконников, Т. Ш. Нгуен. Прохождение звука через упругую пластину с неоднородным покрытием, граничащую с вязкими жидкостями	311
Н. Д. Тutyшкин, В. Ю. Травин. Анализ пространственных полей напряжений и скоростей в процессах пластического течения	325
В. Н. Чубариков. Среднее значение произведений символов Лежандра по простым	336
М. Ш. Шабозов, М. О. Аюбиршоев. О неравенствах типа Колмогорова для периодических функций двух переменных в L_2	348
КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ	
А. Н. Кормачева. Приближение квадратичных алгебраических решёток целочисленными решётками	366
Е. С. Крупицын. Арифметические свойства рядов некоторых классов	374
В. Ю. Матвеев. Свойства элементов прямых произведений полей	383
В. И. Мурашко. О дисперсивных по Оре $\mathfrak{F}$ -гиперцентральных подгруппах конечных групп	391
Е. М. Рарова. Тригонометрические суммы сеток алгебраических решеток	399
ДОКЛАДЫ МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ	
Ф. Д. Рухович. Внешние бильярды вне правильного десятиугольника: периодичность почти всех орбит и существование аперiodической орбиты	406
ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ И ПРИЛОЖЕНИЙ	
М. М. Абдуразаков, Д. Д. Гаджиев, Н. В. Гусева, Г. В. Токмазов. Основы формирования у учащихся исследовательских умений и ИКТ-компетенций при обучении решению задач с использованием компьютера	442
Г. М. Журавлев, А. Е. Гвоздев, А. П. Навоев, А. А. Жуков, Н. Н. Добровольский, А. А. Шатульский, Д. В. Малый. Развитие математических моделей пластических сред для ресурсосберегающих технологий металлических систем	462
Е. А. Зайцев. От доклассической физики к классической механике	478

Е. В. Ларкин, А. Н. Привалов. Математические модели нагрева и расплавления частиц мелкодисперсного порошка	488
Е. В. Ларкин, А. Н. Привалов. Моделирование компьютерных систем с FIFO-дисциплиной обработки прерываний	499
В. А. Левин, К. М. Зингерман, А. В. Вершинин, И. А. Подпужников. Динамические эффекты в решетчатых структурах, изготовленных с помощью аддитивных технологий	512
В. А. Левин, К. М. Зингерман, М. Я. Яковлев, Е. О. Курденкова, Д. В. Немтинова. О численной оценке эффективных характеристик периодических ячеистых структур с использованием балочных и оболочечных конечных элементов с помощью CAE Fidesys	523
Э. С. Макаров, А. Е. Гвоздев, Г. М. Журавлев, И. В. Минаев, Н. Н. Добровольский, С. В. Сапожников, А. А. Калинин. Определение материальных математических функций в условиях текучести дилатирующих сред из порошковых и слитковых металлических систем	538
Г. И. Синкевич. Историографическая дискуссия о происхождении китайской астрономии	562
ПАМЯТНЫЕ ДАТЫ	
В. Н. Чубариков, Н. М. Добровольский, В. А. Артамонов, А. В. Михалев, В. Н. Латышев, Ю. В. Нестеренко, А. Я. Белов, А. В. Гришин, Е. И. Компанцева, А. В. Царев, Е. И. Деза, П. А. Крылов, А.А. Туганбаев. Александр Александрович Фомин (к 70-летию со дня рождения)	580
Н. М. Добровольский, Т. К. Иконникова, Е. С. Крупицын, В. Ю. Матвеев, Ю. В. Нестеренко, В. Н. Чубариков, М. В. Шамолин. Владимир Григорьевич Чирский (к 70-летию со дня рождения)	584
РЕДКОЛЛЕГИЯ	595
THE EDITORIAL BOARD	599
TABLE OF CONTENTS	603

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 2.

УДК 514.76

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-7-21

Обобщенные многообразия Кенмоцу постоянного типа

Абу-Салеем Ахмад, А. Р. Рустанов, Т. Л. Мелехина

Абу-Салеем Ахмад — доцент кафедры математики (геометрия и топология), Университет Аль-Байт (Мафрак, Иордания).

e-mail: abusaleem2@yahoo.com

Рустанов Алигаджи Рабаданович — кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры прикладной математики, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ), Институт фундаментального образования (ИФО МГСУ) (г. Москва).

e-mail: aligadzhi@yandex.ru

Мелехина Татьяна Леонидовна — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры анализа данных, принятия решений и финансовых технологий, Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации (г. Москва).

e-mail: TMelehina@fa.ru

Аннотация

В работе мы рассматриваем обобщенные многообразия Кенмоцу, мы вводим четвертое и пятое фундаментальные тождества обобщенных многообразий Кенмоцу, вводятся первый и второй структурные тензоры обобщенных многообразий Кенмоцу и доказаны их свойства, вводится понятие присоединенной Q -алгебры для обобщенных многообразий Кенмоцу. Доказано, что обобщенное многообразие Кенмоцу, а также специальные обобщенные многообразия Кенмоцу II рода имеют антикоммутативную присоединенную Q -алгебру. А многообразия Кенмоцу и специальные обобщенные многообразия Кенмоцу I рода имеют абелеву присоединенную Q -алгебру. Вводится контактный аналог постоянства типа и подробно исследуются обобщенные многообразия Кенмоцу постоянного типа. Получены условия точечного постоянства типа обобщенных многообразий Кенмоцу на пространстве присоединенной G -структуры. Доказано, что класс GK -многообразий нулевого постоянного типа совпадает с классом многообразий Кенмоцу, а класс GK -многообразий ненулевого постоянного типа конциркулярным преобразованием переводится в почти контактное метрическое многообразие локально эквивалентное произведению шестимерного собственного NK -многообразия на вещественную прямую.

Ключевые слова: многообразия Кенмоцу, обобщенные многообразия Кенмоцу, специальные обобщенные многообразия Кенмоцу I рода, специальные обобщенные многообразия Кенмоцу II рода, GK -многообразия постоянного типа, точнее косимплектическое многообразие.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:

Абу-Салеем Ахмад, А. Р. Рустанов, Т. Л. Мелехина. Обобщенные многообразия Кенмоцу постоянного типа // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 2, с. 7–21.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 2.

UDC 514.76

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-7-21

Generalized Kenmotsu manifold constancy of type

Abu-Saleem Ahmad, A. R. Rustanov, T. L. Melekhina

Abu-Saleem Ahmad — Professor, Department of Mathematics , Al al-Bayt University (Mafrq, Jordan).

e-mail: abusaleem2@yahoo.com

Rustanov Aligadzhi Rabadanovich — Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Applied Mathematics, Federal state budget educational institution of higher education "NATIONAL RESEARCH MOSCOW STATE UNIVERSITY OF CIVIL ENGINEERING"(NRU MGSU) (Moscow).

e-mail: aligadzhi@yandex.ru

Melekhina Tatyana Leonidovna — Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of Data Analysis, Decision Making and Financial Technologies, Financial University under the Government of the Russian Federation (Moscow).

e-mail: TMelekhina@fa.ru

Abstract

In this work we consider generalized Kenmotsu manifolds, we introduce: the fourth and the fifth fundamental identities of generalized Kenmotsu manifolds; the first and the second structural tensors of generalized Kenmotsu manifolds (and we prove their properties); the concept of adjoint Q -algebra for generalized Kenmotsu manifolds. We prove that generalized Kenmotsu manifolds and the II kind special generalized Kenmotsu manifolds have anticommutative adjoint Q -algebra. And the Kenmotsu manifolds and the I kind special generalized Kenmotsu manifolds have Abelian adjoint Q -algebra. The type constancy contact analog is introduced and the constant-type generalized Kenmotsu manifolds are thoroughly examined. We have identified the type point constancy conditions of the generalized Kenmotsu manifolds in the adjoint G -structure space. We prove that the zero constant type GK-manifold class coincides with the Kenmotsu manifold class and the non-zero constant type GK-manifold class can be concircularly transformed into the almost contact metric manifolds locally equivalent to the product of the six dimensional NK-eigenmanifold and the real straight line.

Keywords: Kenmotsu manifolds, generalized Kenmotsu manifolds, the I kind special generalized Kenmotsu manifolds, the II kind special generalized Kenmotsu manifolds, constant type GK-manifolds, most precise cosymplectic manifold.

Bibliography: 15 titles.

For citation:

Abu-Saleem Ahmad, A. R. Rustanov, T. L. Melekhina, 2019, "Generalized Kenmotsu manifold constancy of type", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 2, pp. 7–21.

1. Introduction

Contact and almost contact structures are one of the most substantial examples of differential geometrical structures. Nevertheless the most important geometrical properties of almost contact

metric manifolds are revealed when the additional limitations are applied to them. The most natural limitation is the isotropy condition.

The almost Hermitian manifold isotropy can be characterized by the constancy of their type [1], [2]. The type constancy of approximately Keller manifolds was introduced by A. Gray [2] and proved to be very useful for approximately Keller manifold studying. The complete characteristics of approximately Keller manifolds were obtained by V.F. Kirichenko [3].

In this work we consider the type constancy contact analog for generalized Kenmotsu manifolds which were introduced in the thesis work of Umnova S.V. [4]. In the work [4] Umnova S.V. singles out two subsets of generalized Kenmotsu manifolds, called special generalized Kenmotsu manifolds (shorter, SGK-) of the I and II kind. In the work [4] it's proved that generalized Kenmotsu manifolds of the constant curvature are the Kenmotsu manifolds [5] of the constant curvature (-1). Moreover, it's proved that the class of SGK- manifolds of the II kind coincides with the class of almost contact metrical manifolds received from the most precise cosymplectic manifolds [6] through canonical transformation of the most precise cosymplectic structure and the local construction of these manifolds is given. In this article we explore the generalized Kenmotsu manifolds of the constant type and give their complete local characteristics.

This article is organized in the next way. In Section 2 we present the preliminaries for the next statements, build the space of adjoint G-structure and put down the first structural equation group on the adjoint G-structure space. In Section 3 we give the definition of generalized Kenmotsu manifolds, give the full structural equation group, we prove that a generalized Kenmotsu manifold in a dimension different from 5 is a special generalized Kenmotsu manifold of the II kind and we provide fundamental identities of generalized Kenmotsu manifolds.

In the Section 4 we consider the adjoint Q-algebra of a generalized Kenmotsu manifold. We establish the theorem which is the basic result of the present paragraph and which means that the adjoint Q-algebra of a generalized Kenmotsu manifold is anticommutative. Three Conclusions are given for this theorem; they characterize the adjoint Q-algebras of generalized Kenmotsu manifold special cases.

In the Section 5 we explore the generalized Kenmotsu manifolds of a constant type. It's proved that the generalized Kenmotsu manifolds of the non-zero constant type are the generalized Kenmotsu manifolds of the II kind and we received their local structure. Generalized Kenmotsu manifolds of the non-zero type coincide with the Kenmotsu manifolds.

2. Preliminaries

Assume, that M is a smooth manifold of dimension $2n + 1$, $\mathcal{X}(M) - C^\infty$ is a module of smooth vector fields on the manifold M . Further all manifolds, tensor fields and the like are supposed to be smooth of the class C^∞ .

DEFINITION 1. [7] *An almost contact structure on the manifold M is the triplet (η, ξ, Φ) of tensor fields on this manifold where η is a differential 1-form which is called a contact form of structure, ξ is a vector field which is called characteristic, Φ is the endomorphism of module $\mathcal{X}(M)$ which is called structural endomorphism. Here*

$$1) \eta(\xi) = 1; 2) \eta \circ \Phi = 0; 3) \Phi(\xi) = 0; 4) \Phi^1 = -id + \eta \otimes \xi. \quad (1)$$

Besides, if such a Riemannian structure $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ is fixed on M that

$$\langle \Phi X, \Phi Y \rangle = \langle X, Y \rangle - \eta(X)\eta(Y), \quad X, Y \in \mathcal{X}(M). \quad (2)$$

quadruple $(\eta, \xi, \Phi, g = \langle \cdot, \cdot \rangle)$ is called *almost contact metrical (shorter, AC-) structure*. The manifold where an almost contact (metrical) structure is fixed is called an *almost contact (metrical (shorter, AC-)) manifold*.

Skew-symmetric tensor $\Omega(X, Y) = \langle X, \Phi Y \rangle$, $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ is called *the fundamental form of an AC-structure* [7].

Assume, that $(\eta, \xi, \Phi g = \langle \cdot, \cdot \rangle)$ is an almost contact metrical structure on the manifold M^{2n+1} . In the module $\mathcal{X}(M)$ two mutually complementing projections $m = \eta \otimes \xi$ and $l = id - m = -\Phi^2$ [8]; are internally defined in the way that $\mathcal{X}(M) = \mathcal{L} \oplus \mathcal{M}$, where $\mathcal{L} = Im(\Phi) = ker \eta$ – a so-called contact distribution, $\dim \mathcal{L} = 2n$, $\mathcal{M} = Imm = ker(\Phi) = L(\xi)$ – a linear span of a structure vector (also l and m are the projectors for submodules $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$ accordingly). Obviously that distributions $\mathcal{L}$ and $\mathcal{M}$ are invariant towards Φ and are mutually orthogonal. It's also obvious that $\tilde{\Phi}^2 = -id$, $\langle \tilde{\Phi} X, \tilde{\Phi} Y \rangle = \langle X, Y \rangle$, $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, where $\tilde{\Phi} = \Phi|_{\mathcal{L}}$. Consequently $\{\tilde{\Phi}_p, g_p|_{\mathcal{L}}\}$ is a Hermitian structure on the space $\mathcal{L}_p$ (p – some point of M).

The complexification $\mathcal{X}(M)^C$ of the module $\mathcal{X}(M)$ disintegrates into a direct sum

$$\mathcal{X}(M)^C = D_{\Phi}^{\sqrt{-1}} \oplus D_{\Phi}^{-\sqrt{-1}} \oplus D_{\Phi}^0$$

of structural endomorphism Φ own spaces corresponding to their own values $\sqrt{-1}$, $-\sqrt{-1}$ and 0 accordingly. Besides, the projectors for the summands of this direct sum will be endomorphisms ([7], [8]): $\pi = \sigma \circ l = -\frac{1}{2}(\Phi^2 + \sqrt{-1}\Phi)$, $\bar{\pi} = \bar{\sigma} \circ l = \frac{1}{2}(-\Phi^2 + \sqrt{-1}\Phi)$, $m = id + \Phi^2$, where $\sigma = \frac{1}{2}(id - \sqrt{-1}\Phi)$, $\bar{\sigma} = \frac{1}{2}(id + \sqrt{-1}\Phi)$.

The depictions $\sigma_p : \mathcal{L}_p \rightarrow D_{\Phi}^{\sqrt{-1}}$ and $\bar{\sigma}_p : \mathcal{L}_p \rightarrow D_{\Phi}^{-\sqrt{-1}}$ are the isomorphism and the anti-isomorphism of Hermitian spaces, accordingly. That's why to every point $p \in M^{2n+1}$ it's possible to add a family of reference frames of space $T_p(M)^C$ of the kind $(p, \epsilon_0, \epsilon_1, \dots, \epsilon_n, \epsilon_{\hat{1}}, \dots, \epsilon_{\hat{n}})$ where $\epsilon_a = \sqrt{2}\sigma_p(e_a)$, $\epsilon_{\hat{a}} = \sqrt{2}\bar{\sigma}_p(e_a)$, $\sigma_0 = \xi_p$ where $\{e_a\}$ is the orthonormalized base of the Hermitian space $\mathcal{L}_p$. This reference frame is called an A-reference frame [8]. It's clear that matrices are the element of tensors Φ_p and g_p in the A-reference frame; they have the according forms of:

$$(\Phi_j^i) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{-1}I_n & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{-1}I_n \end{pmatrix}, (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & I_n & 0 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

where I_n is the unity matrix of the n -order. It is well known [7], [8] that the aggregate of such reference frames determines the G-structure on M with structural group $\{1\} \times U(n)$ represented by

such matrices as $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix}$, where $A \in U(n)$. This G-structure is called *adjoint* [7], [8].

Assume that $(M^{2n+1}, \eta, \xi, \Phi g = \langle \cdot, \cdot \rangle)$ is an almost contact metrical manifold. We will make a convention that in this entire work indices i, j, k, l run through values from 1 to $2n$, indices a, b, c, d , – through values from 1 to n , and let's assume that $\hat{a} = a + n$, $\hat{\hat{a}} = a$, $\hat{0} = 0$, unless it is stated otherwise. Let (U, φ) be a local chart on manifold M . According to the tensor analysis fundamental theorem the assignment of the structural endomorphism Φ and the Riemann structure $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ on the manifold M inspires on the total BM space of a bundle of frames above M a system of functions $\{\Phi_j^i\}$, $\{g_{ij}\}$, complying in the coordinate neighborhood $W = \pi^{-1}(U) \subset BM$ with a differential equation system of the following form

$$d\Phi_j^i + \Phi_j^k \theta_k^i - \Phi_k^i \theta_j^k = \Phi(j, k)^i \omega^k, \quad dg_{ij} - g_{kj} \theta_i^k - g_{ik} \theta_j^k = g_{ij, k} \omega^k, \quad (4)$$

where $\{\omega^i\}$, $\{\theta_j^i\}$ are the components of the solder forms and the Riemannian connection, correspondingly; $\Phi_{j, k}^i$, $g_{ij, k}$ are the components of the covariant tensor differential Φ and g in this connection correspondingly. Moreover, because of the Riemannian connection definition $\nabla g = 0$, and it means that

$$g_{ij, k} = 0. \quad (5)$$

With account of (3) and (5) relations (4) on the adjoint G-structure space can be put down as [7], [8]

$$\begin{aligned}
\Phi_{b,k}^a &= 0, \quad \Phi_{\hat{b},k}^{\hat{a}} = 0, \quad \Phi_{0,k}^0 = 0, \\
\theta_b^a &= \frac{\sqrt{-1}}{2} \Phi_{b,k}^a \omega^k, \quad \theta_{\hat{b}}^{\hat{a}} = -\frac{\sqrt{-1}}{2} \Phi_{b,k}^{\hat{a}} \omega^k, \\
\theta_0^a &= \sqrt{-1} \Phi_{0,k}^a \omega^k, \quad \theta_0^{\hat{a}} = -\sqrt{-1} \Phi_{0,k}^{\hat{a}} \omega^k, \\
\theta_a^0 &= -\sqrt{-1} \Phi_{a,k}^0 \omega^k, \quad \theta_{\hat{a}}^0 = \sqrt{-1} \Phi_{\hat{a},k}^0 \omega^k, \\
\theta_j^i + \theta_{\hat{j}}^{\hat{i}} &= 0, \quad \theta_0^0 = 0.
\end{aligned} \tag{6}$$

Besides, note that because of the real type nature of the corresponding forms and tensors $\overline{\omega^i} = \omega^{\hat{i}}$, $\overline{\theta_j^i} = \theta_{\hat{j}}^{\hat{i}}$, $\overline{\nabla \Phi_{j,k}^i} = \nabla \Phi_{\hat{j},\hat{k}}^{\hat{i}}$, where $t \rightarrow \bar{t}$ is a complex conjugation operator.

With regard to the obtained relations the first structural equation group of the Riemannian connection $d\omega^i = -\theta_j^i \wedge \omega^j$ on the adjoint G-structure space of the almost contact metrical manifold can be formulated as the first group of almost contact metrical manifold structural equations [7], [8]:

$$\begin{aligned}
d\omega &= C_{ab}\omega^a \wedge \omega^b + C^{ab}\omega_a \wedge \omega_b + C_a^b \omega^a \wedge \omega_b + C_a \omega \wedge \omega^a + C^a \omega \wedge \omega_a; \\
d\omega^a &= -\theta_b^a \wedge \omega^b + B^{ab} \omega_b^c \wedge \omega_c + B^{abc} \omega_b \wedge \omega_c + B^{ab}_b + B^a_b \omega \wedge \omega^b; \\
d\omega_a &= \theta_a^b \wedge \omega_b + B_{ab}^c \omega_c \wedge \omega^b + B_{abc} \omega^b \wedge \omega^c + B_{ab} \omega \wedge \omega^b + B_a^b \omega \wedge \omega_b,
\end{aligned} \tag{7}$$

where $\omega = \omega^0 = \pi^*(\eta)$; π is a natural projection of the adjoint G-structure space on the manifold M , $\omega_i = g_{ij}\omega^j$,

$$\begin{aligned}
B^{ab}_c &= -\frac{\sqrt{-1}}{2} \Phi_{b,c}^a, \quad B_{ab}^c = \frac{\sqrt{-1}}{2} \Phi_{b,\hat{c}}^{\hat{a}}, \quad B^{abc} = \frac{\sqrt{-1}}{2} \Phi_{b,\hat{c}}^a, \\
B_{abc} &= -\frac{\sqrt{-1}}{2} \Phi_{b,c}^{\hat{a}}, \quad B^a_b = \sqrt{-1} \Phi_{0,b}^a, \quad B_a^b = -\sqrt{-1} \Phi_{0,\hat{b}}^{\hat{a}}, \\
B^{ab} &= \sqrt{-1} (\Phi_{0,\hat{b}}^a - \frac{1}{2} \Phi_{b,0}^a), \quad B_{ab} = -\sqrt{-1} (\Phi_{0,b}^{\hat{a}} - \frac{1}{2} \Phi_{b,0}^{\hat{a}}), \\
C^{ab} &= \sqrt{-1} \Phi_{[\hat{a},\hat{b}]}^0, \quad C_{ab} = -\sqrt{-1} \Phi_{[a,b]}^0, \quad C_a^b = -\sqrt{-1} (\Phi_{\hat{b},a}^0 + \Phi_{a,\hat{b}}^0), \\
C^a &= -\sqrt{-1} \Phi_{\hat{a},0}^0, \quad C_a = \sqrt{-1} \Phi_{a,0}^0.
\end{aligned} \tag{8}$$

3. Generalized Kenmotsu manifolds

Assume that $(M^{2n+1}, \Phi, \xi, \eta, g = \langle \cdot, \cdot \rangle)$ is an almost contact metrical manifold.

DEFINITION 2. [4]. *The class of almost contact metrical manifolds characterized by equality*

$$\nabla_X(\Phi)Y + \nabla_Y(\Phi)X = -\eta(Y)\Phi X - \eta(X)\Phi Y; \quad X, Y \in \mathcal{X}(M), \tag{9}$$

is called generalized Kenmotsu manifolds (shorter, GK- manifolds).

The full group of GK-manifold structural equations takes the form [9]:

$$\begin{aligned}
1) \quad d\omega &= F_{ab}\omega^a \wedge \omega^b + F^{ab}\omega_a \wedge \omega_b; \\
2) \quad d\omega^a &= -\theta_b^a \wedge \omega^b + C^{abc}\omega_b \wedge \omega_c - \frac{3}{2}F^{ab}\omega \wedge \omega_b + \delta_b^a \omega \wedge \omega^b; \\
3) \quad d\omega_a &= \theta_a^b \wedge \omega_b + C_{abc}\omega^b \wedge \omega^c - \frac{3}{2}F_{ab}\omega \wedge \omega^b + \delta_a^b \omega \wedge \omega_b; \\
4) \quad d\theta_b^a &= -\theta_c^a \wedge \theta_b^c + (A_{bc}^{ad} - 2C^{adh}C_{hbc} - \frac{3}{2}F^{ad}F_{bc})\omega^c \wedge \omega_d + \\
&+ (-\frac{1}{3}\delta_b^a F_{cd} + \frac{2}{3}\delta_c^a F_{db} + \frac{2}{3}\delta_d^a F_{bc})\omega^c \wedge \omega^d + (\frac{1}{3}\delta_b^a F^{cd} - \frac{2}{3}\delta_b^c F^{da} - \frac{2}{3}\delta_b^d F^{ac})\omega_c \wedge \omega_d;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
5) \quad & dC^{abc} + C^{dbc}\theta_d^a + C^{adc}\theta_d^b + C^{abd}\theta_d^c = C^{abcd}\omega_d - 2\delta_d^{[a}F^{bc]}\omega^d - C^{abc}\omega; \\
6) \quad & dC_{abc} - C_{dbc}\theta_a^d - C_{adc}\theta_b^d - C_{abd}\theta_c^d = C_{abcd}\omega^d - 2\delta_{[a}^dF_{bc]}\omega_d - C_{abc}\omega; \\
7) \quad & dF^{ab} + F^{cb}\theta_c^a + F^{ac}\theta_c^b = -2F^{ab}\omega; \\
8) \quad & dF_{ab} - F_{cb}\theta_a^c - F_{ac}\theta_b^c = -2F_{ab}\omega;
\end{aligned} \tag{10}$$

where

$$\begin{aligned}
C^{abc} &= \frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi_{\hat{b},\hat{c}}^a; \quad C_{abc} = -\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi_{\hat{b},\hat{c}}^a; \quad C^{[abc]} = C^{abc}; \quad C_{[abc]} = C_{abc}; \\
\overline{C^{abc}} &= C_{abc}; \quad F^{ab} = \sqrt{-1}\Phi_{\hat{a},\hat{b}}^0; \quad F_{ab} = -\sqrt{-1}\Phi_{\hat{a},\hat{b}}^0; \\
F^{ab} + F^{ba} &= 0; \quad F_{ab} + F_{ba} = 0; \quad \overline{F^{ab}} = F_{ab}; \quad A_{[bc]}^{ad} = A_{bc}^{[ad]} = 0; \\
C^{a[bcd]} &= \frac{3}{2}F^{a[b}F^{cd]}; \quad C_{a[bcd]} = \frac{3}{2}F_{a[b}F_{cd]}; \quad F_{ad}C^{dbc} = F^{ad}C_{dbc} = 0.
\end{aligned}$$

PROPOSITION 1. [9]. If $C^{abc} = C_{abc} = 0$ and $F^{ab} = F_{ab} = 0$, then a GK-manifold is a Kenmotsu manifold.

Differentiating externally (10₄ - 10₆) we get:

$$\begin{aligned}
1) \quad & dA_{bc}^{ad} + A_{bc}^{hd}\theta_h^a + A_{bc}^{ah}\theta_h^d - A_{hc}^{ad}\theta_b^h - A_{bh}^{ad}\theta_c^h = A_{bch}^{ad}\omega^h + A_{bc}^{adh}\omega_h + A_{bc0}^{ad}\omega; \\
2) \quad & dC^{abcd} + C^{hbcd}\theta_h^a + C^{ahcd}\theta_h^b + C^{abhd}\theta_h^c + C^{abch}\theta_h^d = \\
& = C^{abcdh}\omega_h + C^{abcd0}\omega; \\
3) \quad & dC_{abcd} - C_{hbcd}\theta_a^h - C_{ahcd}\theta_b^h - C_{abhd}\theta_c^h - C_{abch}\theta_d^h = \\
& = C_{abcdh}\omega^h + C_{abcd0}\omega.
\end{aligned} \tag{11}$$

Herewith:

$$\begin{aligned}
1) \quad & A_{b[ch]}^{ad} = 0; \quad 2) \quad A_{bc}^{a[dh]} = 0; \\
3) \quad & A_{bc0}^{ad} = -2A_{bc}^{ad} + F^{ad}F_{bc} - 2\delta_b^aF^{dh}F_{hc} - 2\delta_c^aF^{dh}F_{hb} - 2\delta_b^dF^{ah}F_{hc}; \\
4) \quad & (A_{b[c}^{ag} - 2C^{agf}C_{fb[c]}C_{|g|dh]}) = 0; \quad 5) \quad (A_{bg}^{a[c} - 2C^{a[c|f|}C_{fbg]})C^{g|dh]} = 0; \\
6) \quad & (A_{b[c}^{ah} - \frac{3}{2}F^{ah}F_{b[c]}F_{h|d]}) = 0; \quad 7) \quad (A_{bh}^{a[d} - \frac{3}{2}F^{a[d}F_{bh})F^{h|c]} = 0; \\
8) \quad & C^{abc[dh]} = -2\{C^{abc}F^{dh} + \frac{1}{3}(C^{adh}F^{bc} + C^{bdh}F^{ca} + C^{cdh}F^{ab} + \\
& + C^{abh}F^{dc} + C^{acd}F^{hb} + C^{ahc}F^{db} + C^{dbc}F^{ah} + C^{hbc}F^{da})\}; \\
9) \quad & C^{abcd0} = -(2C^{abcd} + F^{ab}F^{cd} + F^{ac}F^{db} + F^{ad}F^{bc}); \\
10) \quad & C^{abcg}C_{gdh} = 0; \quad 11) \quad C^{abch}F_{hd} = 0; \\
12) \quad & C_{abc[dh]} = -2\{C_{abc}F_{dh} + \frac{1}{3}(C_{adh}F_{bc} + C_{bdh}F_{ca} + C_{cdh}F_{ab} + C_{dbc}F_{ah} + \\
& + C_{hbc}F_{da} + C_{acd}F_{hb} + C_{ahc}F_{db} + C_{abd}F_{ch} + C_{abh}F_{dc})\}; \\
13) \quad & C_{abcd}^h = (A_{ad}^{gh} - 2C^{ghf}C_{fad})C_{gbc} + (A_{bd}^{gh} - 2C^{ghf}C_{fbd})C_{agc} + \\
& + (A_{cd}^{gh} - 2C^{ghf}C_{fcd})C_{abg}; \\
14) \quad & C_{abcd0} = -(2C_{abcd} + F_{ab}F_{cd} + F_{ac}F_{db} + F_{ad}F_{bc}); \\
15) \quad & C_{abcg}C^{gdh} = 0; \quad 16) \quad C_{abch}F^{hd} = 0.
\end{aligned} \tag{12}$$

Differentiating externally (10₇) and (10₈), we get:

$$\begin{aligned}
1) \quad & A_{hc}^{ad}F^{hb} - A_{hc}^{bd}F^{ha} = \frac{3}{2}F^{ad}F_{hc}F^{hb} - \frac{3}{2}F^{bd}F_{hc}F^{ha}; \\
2) \quad & 2F^{ab}F_{cd} = (\delta_d^a F_{ch} - \delta_c^a F_{dh})F^{hb} + (\delta_c^b F_{dh} - \delta_d^b F_{ch})F^{ha}; \\
3) \quad & 2F^{ab}F^{cd} = F^{ac}F^{db} + F^{ad}F^{bc}; \\
4) \quad & F_{ah}A_{bc}^{hd} - F_{bh}A_{ac}^{hd} = \frac{3}{2}(F_{ad}F_{bh} - F_{bd}F_{ah})F^{hc}; \\
5) \quad & 2F_{ab}F^{cd} = (\delta_b^c F^{dh} - \delta_b^d F^{ch})F_{ha} + (\delta_a^d F^{ch} - \delta_a^c F^{dh})F_{hb}; \\
6) \quad & 2F_{ab}F_{cd} = F_{ac}F_{db} + F_{ad}F_{bc}.
\end{aligned} \tag{13}$$

As a useful consequence (13₂) we prove the next theorem.

THEOREM 1. [9] *A GK-manifold of dimension different from 5 is a SGK-manifold of the II kind.*

The identity

$$(A_{b[c}^{ag} - 2C^{agf}C_{fb|c})C_{|g|dh]} = 0 \tag{14}$$

we call **the first fundamental equality of GK-manifolds** [10].

The identity

$$(A_{b[c}^{ah} - \frac{3}{2}F^{ah}F_{b|c})F_{|h|d]} = 0 \tag{15}$$

we call **the second fundamental equality of GK-manifolds** [10].

The identity

$$2F^{ab}F^{cd} = F^{ac}F^{db} + F^{ad}F^{bc} \tag{16}$$

we call **the third fundamental equality of GK-manifolds** [10].

The identity

$$F_{ad}C^{dbc} = F^{ad}C_{dbc} = 0 \tag{17}$$

we call **the forth fundamental equality of GK-manifolds**.

The identity

$$C_{abcg}C^{gdh} = 0 \tag{18}$$

we call **the fifth fundamental equality of GK-manifolds**.

The system of functions (C^{abc}, C_{abc}) determines the tensor (2,1) which is called **the first structural tensor**, the system of functions (F^{ab}, F_{ab}) determines the tensor (1,0) which is called **the second structural tensor**. The structural tensors of a GK-structure have the following equations [10]:

$$\begin{aligned}
1) \quad & C(X, Y) = -\frac{1}{2}\Phi \circ \nabla_{\Phi Y}(\Phi)\Phi X = -\frac{1}{2}\Phi^2 \circ \nabla_{\Phi Y}(\Phi)\Phi^2 X; \\
2) \quad & F(X) = \Phi \circ \nabla_{\Phi^2 X}(\Phi)\xi - \Phi^2 X = -\Phi \circ \nabla_X(\Phi)\xi - \Phi^2 X = -\nabla_X \xi - \Phi^2 X = \\
& = -\Phi^2 \circ \nabla_{\Phi X}(\Phi)\xi - \Phi^2 X = -\Phi \circ \nabla_{\Phi X}(\Phi)\xi - \Phi^2 X; \quad X, Y \in \mathcal{X}(M).
\end{aligned} \tag{19}$$

DEFINITION 3. [4] *A generalized Kenmotsu manifold with a zero first structural tensor is called a **special generalized Kenmotsu manifold** (SGK-, for short) **of the I kind**.*

DEFINITION 4. [4] *A generalized Kenmotsu manifold with a zero second structural tensor is called a **special generalized Kenmotsu manifold** (SGK-, for short) **of the II kind**.*

4. Q-algebras of generalized Kenmotsu manifolds

In this section we discuss the Q-algebra adjoint to a GK-manifold.

DEFINITION 5. [11] **A Q-algebra** is a triplet $\{V, \langle \cdot, \cdot \rangle, *\}$ where V is a module of the commutative associative ring $\mathbf{K}$ with nontrivial involution; $\langle \cdot, \cdot \rangle$ is a non-degenerated Hermitian form on V ; $*$ is a binary operation $* : V \times V \rightarrow V$, antilinear for each argument for which the Q-algebra axiom is accomplished $\langle \langle X * Y, Z \rangle \rangle + \langle \langle Z * X, Y \rangle \rangle = 0$, $X, Y, Z \in V$.

If $\mathbf{K}=\mathbf{C}$, then Q-algebra V is called **complex**.

DEFINITION 6. [12] Q-algebra V is called:

- **Abelian**, or **commutative Q-algebra**, if $X * Y = 0$, $(X, Y \in V)$;
- **K-algebra**, or **anti-commutative Q-algebra**, if $X * Y = -Y * X$, $(X, Y \in V)$;
- **A-algebra**, or **pseudo-commutative Q-algebra**, if

$$\langle X * Y, Z \rangle + \langle Y * Z, X \rangle + \langle Z * X, Y \rangle = 0, \quad (X, Y, Z \in V).$$

We recall [13] that in the module $\mathcal{X}(M)$ of an almost contact metrical manifold the structure of Q-algebra Re is naturally introduced over the ring of complex-valued smooth functions with the operation

$$X * Y = T(X, Y) = \frac{1}{4} \{ \Phi \nabla_{\Phi X}(\Phi) \Phi Y - \Phi \nabla_{\Phi^2 X}(\Phi) \Phi^2 Y \}; \quad X, Y \in \mathcal{X}(M) \quad (20)$$

and metrics

$$\langle \langle X, Y \rangle \rangle = \langle X, Y \rangle + \sqrt{-1} \langle X, \Phi Y \rangle; \quad X, Y \in \mathcal{X}(M). \quad (21)$$

This Q-algebra is called adjoint.

Assume that M is a GK-manifold. In the $C^\infty(M)$ — module $\mathcal{X}(M)$ of smooth vector fields of manifold M a binary operation " $*$ " is introduced by the formula

$$X * Y = T(X, Y) = \frac{1}{4} \{ \Phi \nabla_{\Phi X}(\Phi) \Phi Y - \Phi \nabla_{\Phi^2 X}(\Phi) \Phi^2 Y \}; \quad X, Y \in \mathcal{X}(M)$$

THEOREM 2. The GK-structure has an anti-commutative adjoint Q-algebra, h.e. a K-algebra.

Proof. From Definition 2 it is easy to follow that $\Phi \nabla_{\Phi X}(\Phi) \Phi Y + \Phi \nabla_{\Phi Y}(\Phi) \Phi X$; $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, so $\Phi \nabla_{\Phi X}(\Phi) \Phi Y = -\Phi \nabla_{\Phi Y}(\Phi) \Phi X$; $X, Y \in \mathcal{X}(M)$.

And it means that $\Phi \nabla_{\Phi^2 X}(\Phi) \Phi^2 Y = -\Phi \nabla_{\Phi^2 Y}(\Phi) \Phi^2 X$; $X, Y \in \mathcal{X}(M)$. Then

$$\begin{aligned} T(X, Y) &= \frac{1}{4} \{ \Phi \nabla_{\Phi X}(\Phi) \Phi Y - \Phi \nabla_{\Phi^2 X}(\Phi) \Phi^2 Y \} = \\ &= -\frac{1}{4} \{ \Phi \nabla_{\Phi Y}(\Phi) \Phi X - \Phi \nabla_{\Phi^2 Y}(\Phi) \Phi^2 X \} = -T(Y, X); \quad X, Y \in \mathcal{X}(M). \end{aligned}$$

H.e. the adjoint Q-algebra of GK-structures is a K-algebra.

COROLLARY 1. SGK-manifolds of the I kind and Kenmotsu manifolds have **Abelian** adjoint Q-algebra.

Proof. For SGK-manifolds of the I kind and Kenmotsu manifolds the identity is realized ([9]) $\Phi \nabla_{\Phi X}(\Phi) \Phi Y = -\Phi \nabla_{\Phi Y}(\Phi) \Phi X = 0$; $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, and it means that

$$T(X, Y) = \frac{1}{4} \{ \Phi \nabla_{\Phi X}(\Phi) \Phi Y - \Phi \nabla_{\Phi^2 X}(\Phi) \Phi^2 Y \} = 0;$$

$X, Y \in \mathcal{X}(M)$, h.e. adjoint Q-algebra is Abelian.

COROLLARY 2. *SGK-manifolds of the II kind have anti-commutative adjoint Q-algebra.*

Proof. From (9) we have $\Phi\nabla_{\Phi X}(\Phi)\Phi Y + \Phi\nabla_{\Phi Y}(\Phi)\Phi X$; $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, than according to the obtained equality

$$\begin{aligned} X * Y &= T(X, Y) = \frac{1}{4}\{\Phi\nabla_{\Phi X}(\Phi)\Phi Y - \Phi\nabla_{\Phi^2 X}(\Phi)\Phi^2 Y\} = \\ &= -\frac{1}{4}\{\Phi\nabla_{\Phi Y}(\Phi)\Phi X - \Phi\nabla_{\Phi^2 Y}(\Phi)\Phi^2 X\} = \\ &= -T(Y, X) = -X * Y; \quad X, Y \in \mathcal{X}(M), \end{aligned}$$

h.e. the adjoint Q-algebra is commutative, h.e. a K-algebra.

COROLLARY 3. *Kenmotsu manifolds have an Abelian adjoint Q-algebra.*

Proof. For Kenmotsu manifolds the equality is executed ([11])

$$T(X, Y) = \frac{1}{4}\{\Phi\nabla_{\Phi X}(\Phi)\Phi Y - \Phi\nabla_{\Phi^2 X}(\Phi)\Phi^2 Y\} = 0, \quad X, Y \in \mathcal{X}(M),$$

h.e. the adjoint Q-algebra is Abelian.

5. The type constancy of generalized Kenmotsu manifolds

In this section we consider a contact analog of the type constancy and examine it in detail for generalized Kenmotsu manifolds.

DEFINITION 7. [14] *The complex K-algebra Re is called the K-algebra of constant type, if $\exists c \in \mathbb{C} \quad \forall X, Y \in \text{Re} : \langle\langle X, Y \rangle\rangle = 0 \Rightarrow \|X * Y\|^2 = c \|X\|^2 \|Y\|^2$.*

DEFINITION 8. *The GK-manifold M is called a **pointlike constant type** manifold, if its adjoint Q-algebra has a constant type in each point of manifold M. Function c, if it exists, is called **the type constant** of the GK-manifold. If $c = \text{const}$, than M is called a **global constant type** GK-manifold.*

Assume that M is a GK-manifold. Let us consider Q-algebra Re, adjoint to manifold M, with operation $*$: $\mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$, defined by the identity

$$X * Y = T(X, Y) = \frac{1}{4}\{\Phi\nabla_{\Phi X}(\Phi)\Phi Y - \Phi\nabla_{\Phi^2 X}(\Phi)\Phi^2 Y\};$$

$X, Y \in \mathcal{X}(M)$. From (9) it follows that on the GK-manifold $\Phi\nabla_{\Phi X}(\Phi)\Phi Y = -\Phi\nabla_{\Phi^2 X}(\Phi)\Phi^2 Y$; $X, Y \in \mathcal{X}(M)$. Thus $X * Y = \frac{1}{2}\Phi\nabla_{\Phi X}(\Phi)\Phi Y = -\frac{1}{2}\Phi\nabla_{\Phi^2 X}(\Phi)\Phi^2 Y$; $X, Y \in \mathcal{X}(M)$. Because of (21), the condition $\langle X, Y \rangle = \langle X, \Phi Y \rangle = 0$ equals the condition $\langle\langle X, Y \rangle\rangle = 0$. Thus, the following is true

THEOREM 3. *A GK-manifold is a manifold of pointlike constant type c then and only then, when*

$$\forall X, Y \in \mathcal{X}(M) \quad \langle\langle X, Y \rangle\rangle = 0 \Rightarrow \|C(X, Y)\|^2 = c \|X\|^2 \|Y\|^2. \quad (22)$$

We introduce into consideration a 4-form

$$C(X, Y, Z, W) = \langle\langle X * Y, Z * W \rangle\rangle = \langle\langle C(X, Y), C(Z, W) \rangle\rangle.$$

It is directly verified that it has the following properties:

1) Antilinearity at the first pair of arguments

$$\sqrt{-1}C(X, Y, Z, W) = -C(\Phi X, Y, Z, W) = -C(X, \Phi Y, Z, W).$$

2) Linearity at the second pair of arguments

$$\sqrt{-1}\mathcal{C}(X, Y, Z, W) = -\mathcal{C}(X, Y, \Phi Z, W) = -\mathcal{C}(X, Y, Z, \Phi W).$$

3) Skew symmetry at the first and second pairs of arguments

$$\mathcal{C}(X, Y, Z, W) = -\mathcal{C}(Y, X, Z, W) = -\mathcal{C}(X, Y, W, Z).$$

4) Hermiticity

$$\mathcal{C}(X, Y, Z, W) = \overline{\mathcal{C}(Z, W, X, Y)}, X, Y, Z, W \in \mathcal{X}(M).$$

Because

$$\mathcal{C}(X, Y, X, Y) = \langle\langle X * Y, X * Y \rangle\rangle = \langle\langle C(X, Y), C(X, Y) \rangle\rangle = \|C(X, Y)\|^2,$$

GK-manifold M is of a pointlike constant type c then and only then, when

$$\mathcal{C}(X, Y, X, Y) = c \|X\|^2 \|Y\|^2, \quad X, Y \in \mathcal{X}(M), \quad \langle\langle X, Y \rangle\rangle = 0. \quad (23)$$

We polarize this equality, replacing Y with $Y + Z$, where $Z \in \mathcal{X}(M)$, $\langle\langle X, Z \rangle\rangle = 0$: $\mathcal{C}(X, Y + Z, X, Y + Z) = c \|X\|^2 \|Y + Z\|^2$. After distribution through its linearity and the required reduction considering (23), we get

$$\mathcal{C}(X, Y, X, Z) + \mathcal{C}(X, Z, X, Y) = c \|X\|^2 (\langle\langle Y, Z \rangle\rangle + \langle\langle Z, Y \rangle\rangle). \quad (24)$$

Replacing Z with ΦZ here, while considering the properties 1) and the non-degeneracy of endomorphism Φ we get:

$$\mathcal{C}(X, Y, X, Z) - \mathcal{C}(X, Z, X, Y) = c \|X\|^2 (-\langle\langle Y, Z \rangle\rangle + \langle\langle Z, Y \rangle\rangle). \quad (25)$$

Summing the identities (24) and (25) term by term we get:

$$\mathcal{C}(X, Y, X, Z) = c \|X\|^2 \langle\langle Z, Y \rangle\rangle. \quad (26)$$

Let now $Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ be arbitrary vectors. Let us distribute them over the linear hull of vector X and its orthogonal complement: $Y = \frac{\langle\langle Y, X \rangle\rangle}{\|X\|^2} X + Y'$; $Z = \frac{\langle\langle Z, X \rangle\rangle}{\|X\|^2} X + Z'$. Considering (26) and the property 3) after the required reduction we get:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(X, Y, X, Z) &= \mathcal{C}(X, Y', X, Z') = c \|X\|^2 \langle\langle Z', Y' \rangle\rangle = \\ &= c \|X\|^2 \left\langle\left\langle Z - \frac{\langle\langle Z, X \rangle\rangle}{\|X\|^2} X, Y - \frac{\langle\langle Y, X \rangle\rangle}{\|X\|^2} X \right\rangle\right\rangle = \\ &= c \{ \langle\langle Z, Y \rangle\rangle \|X\|^2 - \langle\langle Z, X \rangle\rangle \langle\langle X, Y \rangle\rangle \}. \end{aligned}$$

So,

$$\mathcal{C}(X, Y, X, Z) = c \{ \langle\langle Z, Y \rangle\rangle \|X\|^2 - \langle\langle Z, X \rangle\rangle \langle\langle X, Y \rangle\rangle \}. \quad (27)$$

Let us replace Z with W in the obtained equality, then

$$\mathcal{C}(X, Y, X, W) = c \{ \langle\langle W, Y \rangle\rangle \|X\|^2 - \langle\langle W, X \rangle\rangle \langle\langle X, Y \rangle\rangle \}.$$

In the last identity we replace X with $X + Z$ and after removal through linearity and after the required reduction while considering (27) we get:

$$\mathcal{C}(X, Y, Z, W) = c \{ \langle\langle W, Y \rangle\rangle \langle\langle Z, X \rangle\rangle - \langle\langle W, X \rangle\rangle \langle\langle Z, Y \rangle\rangle \}. \quad (28)$$

Inverse, it is obvious that because (28), (23) is fulfilled, thus, M is a GK-manifold of a pointlike constant type c .

Thus the following theorem is proved.

THEOREM 4. *A GK-manifold is a manifold of pointlike constant type c then and only then, when the following is realized*

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(X, Y, Z, W) = & \langle \langle C(X, Y), C(Z, W) \rangle \rangle c\{ \langle \langle W, Y \rangle \rangle \langle \langle Z, X \rangle \rangle - \\ & - \langle \langle W, X \rangle \rangle \langle \langle Z, Y \rangle \rangle \}. \end{aligned}$$

We introduce the following theorem giving the structural tensor properties.

THEOREM 5. *GK-structure structural tensors have the following properties:*

$$\begin{aligned} 1) \quad & \Phi \circ C(X, Y) = -C(\Phi X, Y) = -C(X, \Phi Y); \\ 2) \quad & \Phi \circ F = -F \circ \Phi; \\ 3) \quad & \langle \langle C(X, Y), Z \rangle \rangle + \overline{\langle \langle Y, C(X, Z) \rangle \rangle} = 0; \\ 4) \quad & F(\xi) = 0; \\ 5) \quad & \eta \circ F = 0. \end{aligned} \tag{29}$$

Proof. 1) After covariant differentiation of the equality $\Phi^2 = -id + \eta \otimes \xi$, we get $\nabla_Y(\Phi)\Phi X + \Phi \circ \nabla_{\Phi Y}(\Phi)X = \xi \nabla_Y(\eta)X + \eta(X)\nabla_Y \xi$. In the last equality we change $X \rightarrow \Phi X$, and the received identity will be influenced by operator Φ^2 , then we get $\Phi \circ \nabla_Y(\Phi)\Phi X = \Phi^2 \circ \nabla_Y(\Phi)\Phi^2 X$. In the received identity we change $Y \rightarrow \Phi Y$, then

$$\Phi \circ \nabla_{\Phi Y}(\Phi)\Phi X = \Phi^2 \circ \nabla_{\Phi Y}(\Phi)\Phi^2 X; \forall X, Y \in \mathcal{X}(M). \tag{30}$$

In the received identity we change $X \rightarrow \Phi X$, then we get $\Phi \circ \nabla_{\Phi Y}(\Phi)\Phi^2 X = -\Phi^2 \circ \nabla_{\Phi Y}(\Phi)\Phi X; \forall X, Y \in \mathcal{X}(M)$. Considering the last identity, from (19) we have

$$\Phi \circ C(X, Y) = -\frac{1}{2}\Phi^2 \circ \nabla_{\Phi Y}(\Phi)\Phi X = -\frac{1}{2}\Phi \circ \nabla_{\Phi Y}(\Phi)\Phi^2 X = -C(\Phi X, Y)$$

and

$$\begin{aligned} C(\Phi X, \Phi) &= -\frac{1}{2}\Phi \circ \nabla_{\Phi Y}(\Phi)\Phi^2 X = \frac{1}{2}\Phi \circ \nabla_{\Phi^2 X}(\Phi)\Phi Y = \\ &= \frac{1}{2}\Phi^2 \circ \nabla_{\Phi^2 X}(\Phi)\Phi^2 Y = -\frac{1}{2}\Phi^2 \circ \nabla_{\Phi^2 Y}(\Phi)\Phi^2 X = \\ &= -\frac{1}{2}\Phi \circ \nabla_{\Phi^2 Y}(\Phi)\Phi X = C(X, \Phi Y). \end{aligned}$$

2) From the analytic expression of the second structural tensor and from the expression $F(X) = -\Phi^2 \circ \nabla_{\Phi X}(\Phi)\xi - \Phi^2 X = -\Phi \circ \nabla_{\Phi X}(\Phi)\xi - \Phi^2 X; \forall X, Y \in \mathcal{X}(M)$, it follows that $\Phi \circ F = -F \circ \Phi$.

3) Considering (18) and (21) we have

$$\begin{aligned} \langle \langle C(X, Y), Z \rangle \rangle &= \langle C(X, Y), Z \rangle + \sqrt{-1} \langle C(X, Y), \Phi Z \rangle = \\ &= \langle -\frac{1}{2}\Phi \circ \nabla_{\Phi Y}(\Phi)\Phi X, Z \rangle + \sqrt{-1} \langle -\frac{1}{2}\Phi \circ \nabla_{\Phi Y}(\Phi)\Phi X, \Phi Z \rangle = \\ &= -\frac{1}{2} \langle \Phi X, \nabla_{\Phi Y}(\Phi)\Phi Z \rangle + \frac{1}{2}\sqrt{-1} \langle \Phi X, \nabla_{\Phi Y}(\Phi)\Phi^2 Z \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \langle X, \Phi \circ \nabla_{\Phi Y}(\Phi)\Phi Z \rangle - \frac{1}{2}\sqrt{-1} \langle X, \Phi \circ \nabla_{\Phi Y}(\Phi)\Phi^2 Z \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \langle X, \Phi \circ \nabla_{\Phi Y}(\Phi)\Phi Z \rangle - \frac{1}{2}\sqrt{-1} \langle X, \Phi^2 \circ \nabla_{\Phi Y}(\Phi)\Phi Z \rangle = \\ &= -\langle X, C(Y, Z) \rangle - \sqrt{-1} \langle X, \Phi C(Y, Z) \rangle = -\overline{\langle \langle X, C(Y, Z) \rangle \rangle}. \end{aligned}$$

4) Because $\Phi(\xi) = 0$, we have $F(\xi) = -\Phi \circ \nabla_{\Phi \xi}(\Phi)\xi - \Phi^2 \xi = 0$.

5) Because the almost contact metrical manifold has equalities $\eta \circ \Phi = 0$ and $\eta(\nabla_X \xi) = 0$, then $\eta(F(X)) = -\eta(\nabla_X \xi) - \eta(\Phi^2 X) = 0$, h.e. $\eta \circ F = 0$.

Let us find the representation of the equality (28) of the adjoint G-structure. We fix the point $p \in M$, orthonormal frame $r = (p, e_1, \dots, e_n)$ of space $T_p(M)$, that is considered as a $\mathbf{C}$ -module, and the corresponding A-frame

$$r = (p, \epsilon_0, \epsilon_1, \dots, \epsilon_n, \epsilon_{\hat{1}}, \dots, \epsilon_{\hat{n}}),$$

where $\epsilon_a = \sqrt{2}\sigma_p(e_a)$, $\epsilon_{\hat{a}} = \sqrt{2}\bar{\sigma}_p(e_a)$, $\epsilon_0 = \xi_p$. Putting into (28) $X = e_a$, $Y = e_b$, $Z = e_c$, $W = e_d$, we get an equivalent (in point p) identity

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(e_a, e_b, e_c, e_d) &= \langle \langle C(e_a, e_b), C(e_c, e_d) \rangle \rangle = \\ &= c\{\langle \langle e_d, e_b \rangle \rangle \langle \langle e_c, e_a \rangle \rangle - \langle \langle e_d, e_a \rangle \rangle \langle \langle e_c, e_b \rangle \rangle\}. \end{aligned} \quad (31)$$

Because

$$\langle \langle e_a, e_b \rangle \rangle = \langle \sigma e_a, \sigma e_b \rangle + \sqrt{-1} \langle \sigma e_a, \bar{\sigma} e_b \rangle = 2 \langle \sigma e_a, \bar{\sigma} e_b \rangle = \langle \epsilon_a, \epsilon^b \rangle = \delta_a^b,$$

which also comes from the orthonormal nature of the frame r . Because $C^{abc} = \frac{1}{2}C(\epsilon_{\hat{b}}, \epsilon_{\hat{c}})^a$, then

$$\begin{aligned} \langle \langle C(e_a, e_b), C(e_c, e_d) \rangle \rangle &= \langle C(e_a, e_b), C(e_c, e_d) \rangle + \sqrt{-1} \langle C(e_a, e_b), \bar{C}(e_c, e_d) \rangle = \\ &= 2 \langle \sigma C(e_a, e_b), \bar{\sigma} C(e_c, e_d) \rangle = 2 \langle C(\bar{\sigma} e_a, \bar{\sigma} e_b), C(\sigma e_c, \sigma e_d) \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \langle C(\epsilon_{\hat{a}}, \epsilon_{\hat{b}}), C(\epsilon_c, \epsilon_d) \rangle = 2 \langle C^{hab} \epsilon_h, C_{gcd} \epsilon^g \rangle = \\ &= 2C^{hab} C_{gcd} \langle \epsilon_h, \epsilon^g \rangle = 2C^{hab} C_{gcd} = 2C^{abh} C_{hcd}. \end{aligned}$$

Then relations (31) can be formulated as $C^{abh} C_{hcd} = \frac{c}{2} \delta_{cd}^{ab}$, where $\delta_{cd}^{ab} = \delta_c^a \delta_d^b - \delta_c^b \delta_d^a$ is a Kronecker delta of the second order. Through this we prove the following theorem.

THEOREM 6. *Let M be a GK-manifold. Then the following statements are equivalent:*

- 1) *M is a GK-manifold of a pointlike constant type c .*
- 2) *The first structural tensor of a GK-manifold satisfies the identity*

$$\langle \langle C(X, Y), C(Z, W) \rangle \rangle = c\{\langle \langle W, Y \rangle \rangle \langle \langle Z, X \rangle \rangle - \langle \langle W, X \rangle \rangle \langle \langle Z, Y \rangle \rangle\}.$$

- 3) *On the adjoint G-structure space the following relation is correct*

$$C^{abh} C_{hcd} = \frac{c}{2} \delta_c^a \delta_d^b. \quad (32)$$

Let us differentiate externally the following equality (32)

$$dC^{abh} C_{hcd} + C^{abh} dC_{hcd} = 2dc \delta_{cd}^{ab}.$$

Considering the structural equations of GK-manifolds we have

$$\begin{aligned} &(-C^{gbh} \theta_g^a - C^{agh} \theta_g^b - C^{abg} \theta_g^h + C^{abhg} \omega_g - 2\delta_g^{[a} F^{bh]} \omega^g - \\ &- C^{abh} \omega) C_{hcd} + C^{abh} (C_{gcd} \theta_h^g + C_{hgd} \theta_c^g + C_{hcg} \theta_d^g + C_{hcdg} \omega^g - \\ &- 2\delta_{[h}^g F_{cd]} \omega_g - C_{hcd} \omega) = 2\delta_{cd}^{ab} dc. \end{aligned}$$

Opening the brackets and collecting similar terms considering (32), (12₁₀), (12₁₄), (11), we have

$$\begin{aligned} &(C^{abh} C_{hcgd} - \frac{2}{3} F^{ab} C_{gcd}) \omega^g - (C^{ahgb} C_{hcd} + \frac{2}{3} C^{abg} F_{cd}) \omega_g - 4c \delta_{cd}^{ab} = \\ &= 2\delta_{cd}^{ab} (c_g \omega^g + c^g \omega_g + c_0 \omega). \end{aligned}$$

From here we have

$$\begin{aligned} &1) \delta_{cd}^{ab} c_g = C^{abh} C_{hcgd} - \frac{2}{3} F^{ab} C_{gcd}; \\ &2) \delta_{cd}^{ab} c^g = -C^{ahgb} C_{hcd} - \frac{2}{3} F_{cd} C^{abg}; \quad 3) c_0 = -2c. \end{aligned} \quad (33)$$

Contracting equalities (33₁) and (33₂) at first by indices a and c , and then by indices b and d , considering the equalities $F_{ad}C^{dbc} = F^{ad}C_{dbc} = 0$ and $C^{abcg}C_{gdh} = C_{abcg}C^{gdh} = 0$, we get $n(n-1)c_g = n(n-1)c^g = 0$, h.e. either $\dim M = 3$, or $c_g = c^g = 0$.

Thus $dc = -2c$. Differentiating the last equality externally we get $cd\omega = 0$, which, considering (10₁) will be written as: $c(F_{ab}\omega^a \wedge \omega^b + F^{ab}\omega_a \wedge \omega_b) = 0$, h.e. $cF_{ab}\omega^a \wedge \omega^b + cF^{ab}\omega_a \wedge \omega_b = 0$.

Therefore either $c = 0$, or $F_{ab} = F^{ab} = 0$.

Thus the following theorem is proved.

THEOREM 7. *AGK-manifold of a constant non-zero type is a SGK-manifold of the II kind.*

Assume that M is a SGK-manifold of the II kind then we will perform a complete convolution (23): $\sum_{a,b,c} |C^{abc}|^2 = C^{abc}C_{abc} = 2cn(n-1)$, where n is a complex dimensionality of the contact distribution L . This implies that $c \geq 0$, $c \in R$, at that $c = 0$ then and only then, when $C^{abc} = 0$, h.e. M is a Kenmotsu manifold. Thus it's proved that

THEOREM 8. *The class of SGK-manifolds of the II kind of the zero constant type coincides with the class of Kenmotsu manifolds.*

We have to investigate SGK-manifolds of the II kind of the non-zero constant type. According to [4] SGK-manifolds of the II kind of the non-zero constant type are concircularly transformed into most precise cosymplectic manifolds which, in turn, are locally equivalent to the product of own (h.e. non-Keller) almost Keller eigenmanifold and the real straight line. Because the class of almost Keller manifolds of the non-zero constant type coincides with the class of six-dimensional almost Keller eigenmanifolds ([3], [14]), we can formulate the following theorem.

THEOREM 9. *The class of SGK-manifolds of the II kind of the zero constant type coincides with the class of Kenmotsu manifolds. The class of SGK-manifolds of the II kind of the non-zero constant type is concircularly transformed into the almost contact metrical manifolds locally equivalent to the product of the six-dimensional NK-eigenmanifold and the real straight line.*

Theorems 8 and 9 can be combined into the following Fundamental theorem.

THEOREM 10. *Fundamental theorem.* *The class of GK-manifolds of the zero constant type coincides with the class of Kenmotsu manifolds. The class of GK-manifolds of the non-zero constant type is concircularly transformed into the almost contact metrical manifolds locally equivalent to the product of the six-dimensional NK-eigenmanifold and the real straight line.*

6. Conclusions

In this work fully research generalized Kenmotsu manifolds constancy of type. The local characteristic of these manifolds is obtained. The main theorem gives a complete solution to the assigned task.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кириченко, В. Ф. Почти эрмитовы многообразия постоянного типа / В. Ф. Кириченко // Докл. АН СССР. – 1981. – Т. 256, № 6. – С. 1293–1297.
2. Gray, A. Curvature identities for Hermitian and almost Hermitian manifolds / A. Gray // Tôhoku Math. J. – 1976. – Vol. 28. – P. 601–612.
3. Кириченко, В. Ф. К-пространства постоянного типа / В. Ф. Кириченко // Сибирский Математический журнал. – 1976. – Т. 17, № 2. – С. 282–289.

4. Umnova, S. V. On conformal invariants of Kenmotsu manifolds / S. V. Umnova // *Webs and Quasigroups*, Tver State Univ. – 2002. – P. 155–160
5. Kenmotsu, K. A class of almost contact Riemannian manifolds / K. Kenmotsu // *Tôhoku Math. J.* 1972. – Vol. 24. – P. 93–103.
6. Blair, D. E. Almost contact manifolds with Killing structure tensors / D. E. Blair, D. K. Showers // *J. Differential Geom.* – 1974. – vol. 9. – P. 577–582.
7. Кириченко, В. Ф. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях / В. Ф. Кириченко. – Одесса: Печатный Дом, 2013. – 458 с.
8. Кириченко, В. Ф. Дифференциальная геометрия квази-сасакиевых многообразий / В. Ф. Кириченко, А. Р. Рустанов // *Математический сборник*. – 2002. – Т. 193, № 8. – С. 71–100.
9. Abu-Saleem Ahmad. Some aspects geometry of generalized manifolds Kenmotsu / Abu-Saleem Ahmad, A. R. Rustanov // *Far East Journal of Mathematical Sciences (FJMS)*. – 2018. – vol. 103, no. 9. – pp. 1407–1432.
10. Абу-Салеем Ахмад. Свойства интегрируемости обобщенных многообразий Кенмоцу / Абу-Салеем Ахмад, А. Р. Рустанов, С. В. Харитоновна // *Владикавказский математический журнал*. – 2018, т. 20, вып. 3. – С. 4–20.
11. Kirichenko, V. F. Generalized quasi-Kaehlerian manifolds and axioms of CR-submanifolds in generalized Hermitian geometry / V. F. Kirichenko // *Geom. Dedicata*. – 1994. – vol. 51. – pp. 75–104.
12. Арсеньева, О. Е. Q-алгебры основных типов почти эрмитовых и почти контактных метрических многообразий / О. Е. Арсеньева, В. Ф. Кириченко // *Proc. Intern. Geom. Center*. – 2013. – т. 6(4). – p. 34–43.
13. Кириченко, В. Ф. Аксиома голоморфных плоскостей в обобщенной эрмитовой геометрии / В. Ф. Кириченко // *Доклады АН СССР*. – 1981. – т. 260, № 4. – С. 795–799.
14. Кириченко, В. Ф. К-алгебры и К-пространства постоянного типа с индефинитной метрикой / В. Ф. Кириченко // *Мат. заметки*. – 1981. – т. 29, № 2. – С. 265–278.
15. Abu-Saleem Ahmad. Curvature Identities Special Generalized Manifolds Kenmotsu Second Kind / Abu-Saleem Ahmad, A. R. Rustanov // *Malaysian Journal of Mathematical Sciences*. – 2015. – vol. 9(12), pp. 187–207.

REFERENCES

1. Kirichenko, V. F., 1981, “Almost Hermitian manifolds of the constant type“, *Report. ASUSSR*, vol. 256, no. 16, pp. 1293–1297.
2. Gray, A., 1976, “Curvature identities for Hermitian and almost Hermitian manifolds“, *Tôhoku Math. J.*, vol. 28, pp. 601–612.
3. Kirichenko, V. F. 1976, “Constant type K-spaces“, *Sib. Math. J.*, vol. 17, no. 12, pp. 282–289.
4. Umnova, S. V., 2002, “On conformal invariants of Kenmotsu manifolds“, *Webs and Quasigroups*, Tver State Univ., pp. 155–160.

5. Kenmotsy, K., 1972, “A class of almost contact Riemannian manifolds“, *Tôhoku Math. J.*, vol. 24, pp. 93–103.
6. Blair, D. E., Showders, D. K., 1974, “Almost contact manifolds with Killing structure tensors“, *J. Differential Geom.*, vol. 9, pp. 577–582.
7. Kirichenko, V. F., 2013, *Differential geometric structures on manifolds*, Petchatny Dom, Odessa, 458 p.
8. Kirichenko, V. F., Rustanov, A. R., 2002, “Quasi-Sasakian manifolds differential“, *Mathematical collection*, vol. 193(18), pp. 71–100.
9. Abu-Saleem Ahmad, Rustanov, A. R., 2018, “Some aspects geometry of generalized manifolds Kenmotsu“, *Far East Journal of Mathematical Sciences (FJMS)*, vol. 103, no. 9, pp. 1407–1432.
10. Abu-Saleem, A., Rustanov, A. R., Kharitonova S. V., 2018, “Generalized Kenmotsu manifold integrability properties“, *Vladikavkasian Mathematical Journal*, vol. 20(3), pp. 4–20. DOI 10.23671/VNC.2018.3.13829.
11. Kirichenko, V. F., 1994, “Generalized quasi-Kaehlerian manifolds and axioms of CR-sub-manifolds in generalized Hermitian geometry“, *Geom. Dedicata*, vol. 51, pp. 75–104.
12. Arsenyeva, O. E., Kirichenko, V. F., 2013, “Q-algebras of the main types of almost Hermitian and almost contact metrical manifolds“, *Proc. Intern. Geom. Center*, vol. 6, no. 4, pp. 34–43.
13. Kirichenko, V. F., 1981, “Holomorphic plane axiom in generalized Hermitian geometry“, *ASUSSR reports*, vol. 260(14), pp. 795–799.
14. Kirichenko, V. F., 1981, “K-algebras and K-spaces of the constant type with indefinite metrics“, *Math. notes*, vol. 29(12), pp. 265–278.
15. Abu-Saleem, A., Rustanov, A. R., 2015, “Curvature Identities Special Generalized Manifolds Kenmotsu Second Kind“, *Malaysian Journal of Mathematical Sciences*, vol. 9(12), pp. 187–207.

Получено 6.03.2019 г.

Принято в печать 12.07.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 2.

УДК 511.9

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-22-38

О методике оценки критических определителей в рамках вопроса оценки константы совместных диофантовых приближений¹

Ю. А. Басалов

Басалов Юрий Александрович — аспирант кафедры алгебры, математического анализа и геометрии, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: basalov_yuriy@mail.ru

Аннотация

Данная работа посвящена вопросам оценки константы совместных диофантовых приближений для n действительных чисел. В работе развивается подход, заложенный Г. Дэвенпортом и Дж. В. С. Касселсом. Г. Дэвенпорт обнаружил связь между значением критического определителя звездного тела и оценкой некоторых форм. В частном случае это позволяет, вычислив критический определитель $(n+1)$ -мерного звездного тела Дэвенпорта

$$\mathbb{F}_n : |x_0| \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|^n < 1,$$

получить значение константы совместных диофантовых приближений. Однако, вычисление критических определителей для тел такого вида является сложной задачей. Поэтому Дж. В. С. Касселс перешел от непосредственного вычисления критического определителя, к оценке его значения. Для этого он использовал оценку наибольшего значения $V_{n,s}$ — объема параллелепипеда с центром в начале координат, находящегося внутри $(n+1)$ -мерного звездного тела

$$\mathbb{F}_{n,s} : f_{n,s} = \frac{1}{2^s} \prod_{i=1}^s |x_i^2 + x_{s+i}^2| \prod_{i=2s+1}^n |x_i| < 1.$$

Эти результаты сводят задачу оценки константы совместных диофантовых приближений к оценке объема наибольшего параллелепипеда $V_{n,s}$. Ранее оценки для $V_{n,s}$ были получены в работах Дж. В. С. Касселса, Т. Кьюзика, С. Красса. Данная работа посвящена методике формирования гипотез о значениях $V_{n,s}$ на основе результатов численных экспериментов. В статье изложен подход к получению параллелепипедов, содержащихся внутри звездного тела и обладающих наибольшим объемом. Этот подход сочетает в себе использование как численных, так и аналитических методов.

Ключевые слова: наилучшие совместные диофантовы приближения, геометрия чисел, звездные тела, критические определители.

Библиография: 21 название.

Для цитирования:

Ю. А. Басалов. О методике оценки критических определителей в рамках вопроса оценки константы совместных диофантовых приближений // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 2, с. 22–38.

¹Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ (грант 19-41-710004_p_a).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 2.

UDC 511.9

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-22-38

About the method of estimating critical determinants within the question of the estimation of the constant of simultaneous diophantine approximations²

Yu. A. Basalov

Basalov Yuriy Aleksandrovich — Postgraduate Student, Department of Algebra, Mathematical Analysis and Geometry, Tula State Pedagogical University of Leo Tolstoy (Tula).

e-mail: basalov_yuriy@mail.ru

Abstract

This paper is devoted to the estimation of the constant of simultaneous Diophantine approximations for n real numbers. The approach developed by H. Davenport and J. W. S. Cassels. H. Davenport discovered the connection between the value of the critical determinant of a star body and the estimation of some forms. In the particular case, this allows calculating the critical determinant of the $(n + 1)$ -dimensional star body of Davenport

$$\mathbb{F}_n : |x_0| \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|^n < 1,$$

get the value of the constant of joint Diophantine approximations. However, the calculation of critical determinants for bodies of this type is a difficult task. Therefore, J. W. S. Cassels moved from directly calculating the critical determinant, to estimating its value. For this, he used the estimate of the largest value of $V_{n,s}$ — the volume of a parallelepiped centered at the origin of coordinates located inside the $(n + 1)$ -dimensional star body

$$\mathbb{F}_{n,s} : f_{n,s} = \frac{1}{2^s} \prod_{i=1}^s |x_i^2 + x_{s+i}^2| \prod_{i=2s+1}^n |x_i| < 1.$$

These results reduce the problem of estimating the constant of joint Diophantine approximations to an estimate of the volume of the largest parallelepiped $V_{n,s}$. Earlier, estimates for $V_{n,s}$ were obtained in the works of J. W. S. Cassels, T. Cusick, S. Krass. This paper is devoted to methods of forming hypotheses about the values of $V_{n,s}$ based on the results of numerical experiments. The article outlines the approach to obtaining parallelepipeds contained within a star body and possessing the largest volume. This approach combines the use of both numerical and analytical methods.

Keywords: best joint Diophantine approximations, geometry of numbers, star bodies, critical determinants.

Bibliography: 21 titles.

For citation:

Yu. A. Basalov, 2019, "About the method of estimating critical determinants within the question of the estimation of the constant of simultaneous Diophantine approximations", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 2, pp. 22–38.

²The study was supported by RFBR (grant 19-41-710004_p_a).

1. Введение

Данная работа посвящена вопросам оценки константы совместных диофантовых приближений для n действительных чисел.

Мы будем следовать подходу Г. Дэвенпорта, Дж. В. С. Касселса. Г. Дэвенпорт [4] обнаружил связь между значением критического определителя (определение см. 5) звездного тела и оценкой некоторых форм. В частном случае это позволяет, вычислив критический определитель $(n + 1)$ -мерного звездного тела Дэвенпорта

$$\mathbb{F}_n : |x_0| \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|^n < 1,$$

получить значение константы совместных диофантовых приближений. Однако, вычисление критических определителей для тел такого вида является сложной задачей. Поэтому Дж. В. С. Касселс [2] перешел от непосредственного вычисления критического определителя, к оценке его значения. Для этого он использовал оценку наибольшего значения $V_{n,s}$ — объема параллелепипеда с центром в начале координат, находящегося внутри $(n + 1)$ -мерного звездного тела

$$\mathbb{F}_{n,s} : f_{n,s} = \frac{1}{2^s} \prod_{i=1}^s |x_i^2 + x_{s+i}^2| \prod_{i=2s+1}^n |x_i| < 1.$$

Параллелепипеды, имеющие объем $V_{n,s}$, в дальнейшем мы будем называть *наибольшими*.

Таким образом задача оценки константы совместных диофантовых приближений сводится к оценке *объема наибольшего параллелепипеда*. Оценки для $V_{n,s}$ были получены в работах Дж. В. С. Касселса [2], Т. Кьюзика [3], С. Красса [9, 10]. В работе [17] представлены оценки для $V_{5,2}$ и $V_{6,3}$. В данной работе мы сосредоточимся на методике формирования гипотез о значениях $V_{n,s}$ на основе результатов численных экспериментов. Будет изложен подход к получению параллелепипедов, содержащихся внутри звездного тела и обладающих наибольшим объемом.

2. Необходимые обозначения

Сформулируем задачу наилучших совместных диофантовых приближений n действительных чисел. Пусть

$$\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

— произвольный вектор действительных чисел. Нас будут интересовать приближения $\vec{\alpha}$ рациональными дробями

$$\frac{\vec{p}}{q} = \left(\frac{p_1}{q}, \frac{p_2}{q}, \dots, \frac{p_n}{q} \right).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Мерой качества совместных приближений первого рода вектора $\vec{\alpha}$ рациональным вектором $\vec{p}/q$ называется величина

$$D(\vec{\alpha}, \vec{p}/q) = \max_{i=1, n} q |\alpha_i - p_i|^n.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Константой наилучших диофантовых приближений $C(\vec{x})$ для вектора $\vec{x}$ называется точная нижняя грань величины C , для которой существует бесконечное число рациональных векторов $\vec{p}/q$, удовлетворяющих неравенству

$$D(\vec{x}, \vec{p}/q) < C.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Константой наилучших диофантовых приближений C_n называется точная верхняя грань числа $C(\vec{x})$ по всем векторам $\vec{x}$ размерности n :

$$C_n = \sup_{\vec{x} \in \mathbb{R}^s} C(\vec{x}).$$

Напомним некоторые понятия из геометрии чисел.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть $a_1, \dots, a_n$ – линейно независимые точки вещественного евклидова пространства. Множество всех точек

$$x = u_1 a_1 + \dots + u_n a_n$$

с целыми коэффициентами $u_1, \dots, u_n$ называется решеткой Λ . Величина

$$d(\Lambda) = |\det(a_1, \dots, a_n)|$$

называется определителем решетки Λ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть $\mathbb{F}$ – точечное тело. Если решетка Λ не имеет в $\mathbb{F}$ отличных от $\mathcal{O}$ точек ($\mathcal{O} \in \mathbb{F}$), то Λ допустима для $\mathbb{F}$ или $\mathbb{F}$ -допустима. Точную нижнюю грань

$$\Delta(\mathbb{F}) = \inf d(\Lambda)$$

определителей $d(\Lambda)$ всех $\mathbb{F}$ -допустимых решеток Λ называют критическим определителем множества $\mathbb{F}$. Если $\mathbb{F}$ -допустимых решеток нет, то $\mathbb{F}$ является множеством бесконечного типа и $\Delta(\mathbb{F}) = \infty$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Под звездным телом понимают множество, обладающее следующими свойствами

- существует точка, называемая "началом", которая является внутренней точкой множества;
- любой луч, выходящий из "начала", либо не пересекается с границей множества, либо имеет с ней только одну общую точку.

Г. Дэвенпортом[4] был получен следующий фундаментальный результат.

Пусть $\mathbb{F}_n$ – это $(n + 1)$ -мерное звездное тело

$$\mathbb{F}_n : |x_0| \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|^n < 1,$$

а $\Delta \mathbb{F}$ – его критический определитель. Тогда

ТЕОРЕМА 1.

$$C_n = \frac{1}{\Delta \mathbb{F}_n}. \quad (1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [18]. $\square$

Дж. В.С. Касселс [2, 3] получил следующую оценку для $\Delta \mathbb{F}_n$.

Пусть $\mathbb{E}$ – это n -мерный единичный куб, состоящий из точек

$$\vec{e} = (e_1, e_2, \dots, e_n), \quad 0 \leq e_i \leq 1, \quad i = \overline{1, n}.$$

Матрица A преобразует его в n -мерный параллелепипед

$$\mathbb{A} : \vec{a} = A \cdot \vec{e} \quad (9)$$

Заметим, что описанным выше образом каждому n -мерному параллелепипеду соответствует матрица A . Объем этого параллелепипеда равен $2^n \det A$.

Пусть $\mathbb{F}_{n,s}$ – это n -мерное звездное тело

$$\mathbb{F}_{n,s} : f_{n,s} \leq 1,$$

где $f_{n,s}$ это (2).

В рамках оценки $V_{n,s}$ нас будут интересовать параллелепипеды $\mathbb{A}$, находящиеся внутри звездного тела $\mathbb{F}_{n,s}$. Можно предложить следующий метод проверки того, находится ли $\mathbb{A}$ внутри $\mathbb{F}_{n,s}$ или нет. Составим оптимизационную задачу

$$\begin{aligned} f_{n,s} &\rightarrow \max, \\ |b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \dots + b_{1n}x_n| &\leq 1, \\ |b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \dots + b_{2n}x_n| &\leq 1, \\ &\dots \\ |b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + \dots + b_{nn}x_n| &\leq 1. \end{aligned} \quad (10)$$

Если решение задачи ≤ 1 , то параллелепипед $\mathbb{A}$ полностью лежит внутри звездного тела $\mathbb{F}_{n,s}$, в противном случае, часть его находится вне звездного тела. Таким образом, задача определения, лежит ли параллелепипед $\mathbb{A}$ внутри звездного тела $\mathbb{F}_{n,s}$, сводится к задаче многомерной оптимизации. Очевидно, что если параллелепипед $\mathbb{A}$ лежит внутри звездного тела $\mathbb{F}_{n,s}$, имеет место оценка

$$V_{n,s} \geq \det A. \quad (11)$$

Нашей целью является построение матрицы A такого вида, чтобы задача (10) имела решение $\max f_{n,s} \leq 1$. Параллелепипеды $\mathbb{A}$ для которых $\det A$ "велико" будем называть *наибольшими*. Соответствующую наибольшему параллелепипеду матрицу мы также будем называть *наибольшей*. Таким образом, задача нахождения наибольшего параллелепипеда также является оптимизационной задачей.

4. Численные эксперименты

В рамках исследования были проведены вычислительные эксперименты по численному нахождению наибольших значений $V_{n,s}$. Это стало возможным, потому что исходная задача свелась к композиции оптимизационных задач. В качестве инструмента численных исследований был выбран математический пакет **Wolfram Mathematica**.

Идея эксперимента состоит в следующем. Будем производить направленный перебор матриц A (см. (8)) с целью найти матрицу, обладающую наибольшим $\det A$ и удовлетворяющую условию (10). Процесс перебора следующий: построим "сетку" из коэффициентов матрицы и будем постепенно сужать ее в сторону, соответствующую большим значениям $\det A$.

Такой подход имеет право на существование по следующим причинам:

- Во-первых, небольшое изменение параметров параллелепипеда $\mathbb{A}$ приводит к небольшому изменению значения $\max f_{n,s}$ на нем. Это позволяет применить к задаче итерационные методы поиска экстремума. Например, деление попалам. Применение градиентных

методов в данном случае невозможно, так как нам ничего неизвестно об аналитическом представлении оптимизируемой функции

$$F^*(A) = |\det A|, \quad \text{при условии } \max_A f_{n,s} \leq 1.$$

Для сужения интервала поиска мы будем использовать следующую эвристику – делим текущий интервал на три части (пусть длина части равна h_i) по каждому измерению, находим среди полученных точек точку, где значение $F^*(A)$ максимально, строим вокруг этой точки параллелепипед со сторонами $2h_i$ и продолжаем поиск в нем.

Отметим, что в первой итерации целесообразно делить текущий интервал не на три, а на большее число частей.

- Самой сложной подзадачей которую необходимо решить в рамках работы алгоритма является нахождение $\max_A f_{n,s}$ – это задача оптимизации нелинейной функции при линейных ограничениях. Как показывает практика, она может быть достаточно успешно решена с помощью системы компьютерной алгебры **Wolfram Mathematica**. Подробнее этот вопрос рассматривается в разделе 4.1.

Заметим также, что в общем случае описанный выше подход не гарантирует сходимости к локальному экстремуму и соответственно не позволяет найти абсолютное наибольшее значение $V_{n,s}$ для какой-то конкретной размерности. С другой стороны, этот подход позволяет получить предварительные результаты и выдвинуть гипотезы о структуре наибольшего параллелепипеда A .

4.1. Методика оценки $\max f_{n,s}$

Отдельный вопрос встает о проверке допустимости конкретного параллелепипеда A (находится ли A внутри звездчатого тела $F_{n,s}$). Как уже отмечалось выше, для этого достаточно решить задачу (10). На практике выяснилось, что математический пакет **Wolfram Mathematica**, не всегда корректно может решить данную оптимизационную задачу. Далее мы опишем технические проблемы возникшие в процессе численного решения задачи (10).

Так как нам необходимо найти максимум значения функции, мы использовали метод **NMaximize** $f_{n,s}$. Помимо оптимизируемой функции и ограничений он имеет следующие параметры

- **AccuracyGoal** и **PrecisionGoal** – точность полученного результата;
- **WorkingPrecision** – точность вычислений;
- **Method** – метод, возможные варианты **DifferentialEvolution**, **NelderMead**, **SimulatedAnnealing**, **RandomSearch**.

Потенциальными способами повысить точность полученного результата являются изменение этих параметров. Повышение **AccuracyGoal**, **PrecisionGoal**, **WorkingPrecision** на практике не имеет особого смысла так как, во-первых, значительно увеличивает время выполнения **NMaximize**, а во-вторых, чаще всего не решает проблемы сходимости к “неправильному” локальному минимуму. Этот эффект достаточно наглядно иллюстрируется на задаче

$$g(x, y) = -x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \rightarrow \min, \quad x^2 + y^2 \leq 4$$

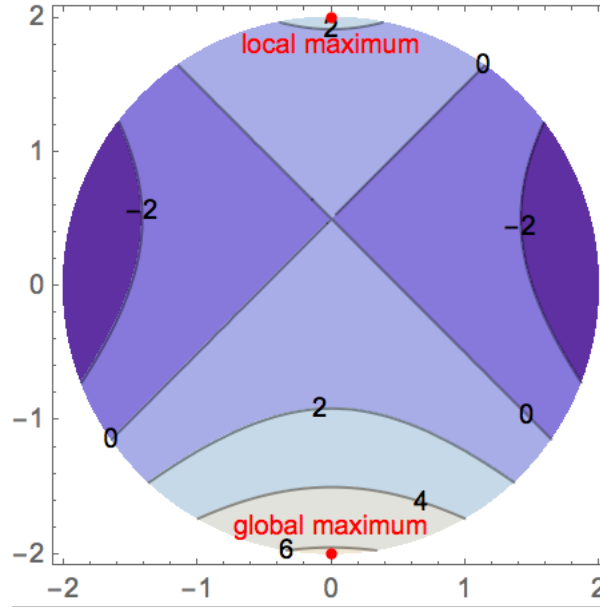


Рис. 1: Пример нескольких локальных минимумов

График значений функции $g(x, y)$ изображен на рисунке 1. На нем видно, что в данной области существует два локальных минимума, и оптимизационные алгоритмы теоретически могут сходиться к любому из них.

Теперь остановимся на зависимости результата оптимизации от параметра **Method**. Выяснилось, что в случае задач типа (10) результаты могут значительно различаться. Например, для задачи

$$f = -\frac{1}{4}c(-y_4 + y_5) \left(a^2 y_1^2 + b^2 (-y_2 + y_3)^2 \right) \left(b^2 (y_2 + y_3)^2 + c^2 (y_4 + y_5)^2 \right),$$

$$\text{где } a = 0.657, b = 1.138, c = 0.893,$$

$$-1 \leq y_1 \leq 1, -1 \leq y_2 \leq 1, -1 \leq y_3 \leq 1, -1 \leq y_4 \leq 1, -1 \leq y_5 \leq 1$$

результаты имеют следующий вид

Метод	Значение	Точка
DifferentialEvolution	1.18409	(-1, -1, -1, 0.3333, 1)
NelderMead	1.04968	(1, -0.2113, -1, -1, 1)
SimulatedAnnealing	1.18409	(1, 1, -1, -1, -0.3333)
RandomSearch	1	(-1, -1, -1, -1, 1)

Поэтому было решено: во-первых отказаться от использования методов **NelderMead** и **RandomSearch**, а во-вторых – производить предварительную проверку значений $f_{n,s}$ в вершинах, на ребрах и диагоналях параллелипипеда. Это позволяет, во-первых отсеять значительную часть некорректных значений, даже не решая оптимизационную задачу (на решение этой задачи требуется значительное количество ресурсов, поэтому такой подход также является и оптимизацией скорости), а во-вторых это может нивелировать ошибки возможные при работе функции **NMaximize**.

Полную программную реализацию экспериментов можно найти в работе [16].

4.2. Результаты численных экспериментов

В результате экспериментов, проводимых для размерностей 3 и 4, выяснилось, что существует множество наибольших матриц (а соответственного и параллелепипедов) с одинаковыми $\det A$. Поэтому было произведено исследование с целью получить наибольшую матрицу A с наиболее простой структурой. Оказалось, что можно найти наибольшую матрицу A следующего вида (примеры таких матриц см. в пункте 5)

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 & a_1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 & a_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_k & a_k \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_k & a_k \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Стоит отметить следующие моменты [17].

Во-первых, исходя из вида матрицы A , можно описать структуру параллелепипеда $V_{n,s}$ – все его грани прямоугольники (причем часть из них – квадраты), ребра либо параллельны осям координат, либо образуют с ними угол 45° .

Во-вторых, уже для $n = 7$ наибольшая матрица A_7^* может быть получена как комбинация наибольших матриц A_3^* и A_4^* (точные их значения см. в разделе 5)

$$A_3^* = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & \alpha_1 \\ 0 & -\alpha_1 & \alpha_1 \end{pmatrix},$$

$$A_4^* = \begin{pmatrix} \alpha_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}\alpha_2 & \sqrt{2}\alpha_2 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2}\alpha_2 & \sqrt{2}\alpha_2 \end{pmatrix},$$

$$A_7^* = \begin{pmatrix} \alpha_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}\alpha_3 & \sqrt{2}\alpha_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2}\alpha_3 & \sqrt{2}\alpha_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_3 & \alpha_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_3 & \alpha_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_3 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_3 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}}_{A_3^*} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}\alpha_3 & \sqrt{2}\alpha_3 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2}\alpha_3 & \sqrt{2}\alpha_3 \end{pmatrix}}_{A_4^*} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_3 & \alpha_3 \\ -\alpha_3 & \alpha_3 & 0 \end{pmatrix}}_{A_3^*}.$$

Вообще, для $n > 6$, скорее всего, матрицу A_n^* можно получить из A_{n-4}^* и A_4^* . Этот факт схож с результатом, полученным С. Крассом [9]

$$V_{n,s} V_{n',s'} \leq V_{n+n',s+s'}, \quad (13)$$

только вместо знака неравенства здесь стоит равенство. Поэтому, нас в дальнейшем будут интересовать только оценки для $n \leq 6$, а именно $V_{3,1}$, $V_{4,2}$, $V_{5,2}$ и $V_{6,3}$.

5. Вывод значений A_n

Основной интерес для нас представляют не численные значения матриц A_n , а их аналитические представления. Для их нахождения поступим следующим образом. Можно постараться определить точки, в которых наибольший параллелепипед A_n “касается” звездного тела $\mathbb{F}_{n,[n/2]}$, выписать в этих точках граничные условия и на основании этих условий получить параметры параллелепипеда A_n .

Начнем с рассмотрения случая $n = 3$. В этом случае в результате численных экспериментов была найдена матрица

$$A_3^N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим матрицу вида (12)

$$A_3^* = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & b \\ 0 & -b & b \end{pmatrix}.$$

Посторим задачу обратную (10). Выберем набор точек в которых $f_{3,1}$ должна быть ≤ 1 (Если выбрать в качестве него все точки $\mathbb{A}_3^*$ (набор δ_{max}), то матрица гарантировано будет удовлетворять задаче (10)). При фиксированном наборе δ_0 точек будет максимизировать значение $\det A_3^*$. Если $\det A_3^*$ совпадет с $\det A_3$ наибольшей матрицы для $n = 3$, это будет означать, что можно перейти при проверке задачи (10) от набора δ_{max} к набору δ_0 . Сужая набор δ_0 до минимума, мы получим граничные точки в которых $f_{3,1} = 1$.

Было решено начать с набора точек δ_1 со значениями координат $-1, 0, 1$ (на единичном кубе, единичный куб с помощью преобразования (9) приводится к $\mathbb{A}_3^*$). Программа, проверяющая этот набор точек, на языке Wolfram Mathematica имеет вид

```
transform = {{a, 0, 0}, {0, b, b}, {0, -b, b}};
f31 = Function[{x1, x2, x3}, (x1^2 + x2^2)*x3/2];
m = {Det[transform]};
Do[AppendTo[m, Abs[Apply[f31, transform. point]] <= 1],
  {point, Tuples[{-1, 0, 1}, 3]};
NMaximize[m, {a, b}]
```

ее результат

```
{2., {a -> 0.999978, b -> 1.00001}}
```

Опытным путем было выявлено, что в если в качестве граничных точек взять набор только из одной точки $\delta_2 = (1, 1, 0)$, результат оптимизации не изменится. Это иллюстрирует следующая программа

```
transform = {{a, 0, 0}, {0, b, b}, {0, -b, b}};
f31 = Function[{x1, x2, x3}, (x1^2 + x2^2)*x3/2];
m = {Det[transform], Abs[Apply[f31, transform.{1, 1, 0}]] <= 1};
NMaximize[m, {a, b}]
```

Точка $(1, 1, 0)$ с помощью преобразования (9) превращается в точку (a, b, b) , что приводит нас к задаче

$$2ab^2 \rightarrow \max,$$

$$\frac{1}{2} (a^2 + b^2) b = 1.$$

Решив эту задачу мы получим точное значение

$$A_3^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$V_{3,1} \geq \det A_3^* = 2.$$

5.1. Случай $n = 4$

Стоит отметить, что переход от набора δ_1 к набору δ_2 может быть достаточно трудоемким. Постараемся упростить эту процедуру. Так как у нас уже есть примерные значения искомой матрицы, мы можем вычислить значение $f_{n,s}$ в граничных точках и взять только те, где абсолютное значение $f_{n,s}$ близко к 1. Применим этот подход для $n = 4$. В этом случае, в результате численных экспериментов была найдена матрица

$$A_4^N \approx \begin{pmatrix} 0.81649 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.81649 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.15469 & 1.15469 \\ 0 & 0 & -1.15469 & 1.15469 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим матрицу вида (12)

$$A_4^* = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & b \\ 0 & 0 & -b & b \end{pmatrix}.$$

Во-первых, убеждаемся, что в качестве ограничений можно взять множество точек с координатами 0, 1

```
transform = {{a, 0, 0, 0}, {0, a, 0, 0}, {0, 0, b, b}, {0, 0, -b, b}};
f42 = Function[{x1, x2, x3, x4}, (x1^2 + x3^2)*(x2^2 + x4^2)/4];
m = {Det[transform]};
Do[AppendTo[m, Abs[Apply[f42, transform.point]] <= 1],
  {point, Tuples[{0, 1}, 4]};
NMaximize[m, {a, b}, Method -> "DifferentialEvolution"]
```

Далее, с помощью процедуры

```
transform = {{a, 0, 0, 0}, {0, a, 0, 0}, {0, 0, b, b}, {0, 0, -b, b}};
f42 = Function[{x1, x2, x3, x4}, (x1^2 + x3^2)*(x2^2 + x4^2)/4];
w = {};
Do[AppendTo[w, Simplify[Apply[f42, transform.point]]],
  {point, Tuples[{0, 1}, 4]};
Do[v = x /. a -> 0.81649 /. b -> 1.15469; If[Abs[v] > 0.999, Print[x]],
  {x, Union[w]}]
```

находим минимальный набор ограничений

$$\frac{1}{4} (a^2 + b^2)^2, \quad \frac{a^4}{4} + a^2 b^2.$$

Этим ограничениям соответствует точки $(1, 1, 1, 0)$ и $(1, 1, 1, 1)$. Получаем задачу

$$\begin{aligned} 2a^2b^2 &\rightarrow \max, \\ \frac{1}{4}(a^2 + b^2)^2 &= 1, \\ \frac{1}{4}a^2(a^2 + 4b^2) &= 1, \end{aligned}$$

откуда

$$a = \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad b = \sqrt{\frac{4}{3}},$$

$$V_{4,2} \geq \det A_4^* = \frac{16}{9}.$$

5.2. Случай $n = 5$

Для $n = 5$ численные эксперименты дают следующую матрицу

$$A_5^N \approx \begin{pmatrix} 0.67958 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.13157 & 1.13157 & 0 & 0 \\ 0 & -1.13157 & 1.13157 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.84550 & 0.84550 \\ 0 & 0 & 0 & -0.84550 & 0.84550 \end{pmatrix},$$

$$\det A_5^N \approx 2.48831 \dots$$

Рассмотрим матрицу

$$A_5^* = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & b & 0 & 0 \\ 0 & -c & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & b \\ 0 & 0 & 0 & -b & b \end{pmatrix}.$$

В этом случае исходный набор точек не ограничивается простыми значениями $-1, 0, 1$ и угадать его не получится. В самом деле

```
transform = {
  {a, 0, 0, 0, 0},
  {0, b, b, 0, 0},
  {0, -b, b, 0, 0},
  {0, 0, 0, c, c},
  {0, 0, 0, -c, c}
};
f52 = Function[{x1, x2, x3, x4, x5}, (x1^2 + x3^2)*(x2^2 + x4^2)*x5/4];
m = {Det[transform]};
Do[AppendTo[m, Abs[Apply[f52, transform. point]] <= 1],
  {point, Tuples[{-1, 0, 1}, 5]};
NMaximize[Union[m], {a, b, c}, Method -> "DifferentialEvolution"]
```

дает значительно большее значение 2.71746. Снова воспользуемся тем, что нам известны примерные значения a, b, c . Решим задачу нахождения максимума $f_{n,s}$ отсекая часть граничных точек параллелипипеда

```

a = 0.67958; b = 1.13157; c = 0.84550;
NMaximize[{(a^2*y1^2 + b^2*(-y2 + y3)^2) *
  (b^2*(y2 + y3)^2 + c^2*(y4 + y5)^2) *c*(-y4 + y5) / 4,
  -1 <= y1 <= 1,
  -1 <= y2 <= 1,
  -0.9 <= y3 <= 0.9,
  -1 <= y4 <= 1,
  -1 <= y5 <= 1
}, {y1, y2, y3, y4, y5}, Method -> {"DifferentialEvolution", RandomSeed -> 10}]

```

и получим точку с $f_{n,s} = 1$ – это $(1, 1, \sqrt{5} - 2, -1, 1)$. Аналогично получаем еще одну точку $(1, 1, -1, \frac{1}{3}, 1)$. Беря еще одну точку $(1, 1, 1, -1, 1)$, получим задачу

$$\begin{aligned}
 4ab^2c^2 &\rightarrow \max, \\
 2a^2b^2c &= 1, \\
 \frac{8}{27}(a^2 + 4b^2)c^3 &= 1, \\
 (3 - \sqrt{5})b^2(a^2 + (3 - \sqrt{5})^2b^2)c &= 1.
 \end{aligned}$$

с решением

$$a = \sqrt{7 - 3\sqrt{5}} \cdot \sqrt[10]{\frac{134 + 30\sqrt{5}}{27}}, \quad b = a \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{8(4\sqrt{5} - 9)}}, \quad c = \frac{1}{2a^2b^2},$$

$$V_{5,2} \geq \det A_5^* = \sqrt{\frac{27(9 + 5\sqrt{5})}{88}}.$$

5.3. Случай $n = 6$

Для $n = 6$ в результате численных экспериментов была выбрана матрица

$$A_6^N \approx \begin{pmatrix} 0.62510 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.62510 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.04085 & 1.04085 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.04085 & 1.04085 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.04085 & 1.04085 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1.04085 & 1.04085 \end{pmatrix}$$

Заменяем ее на

$$A_6^* = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -b & b \end{pmatrix}.$$

В этом случае, поступая аналогично случаю $n = 5$, получаем две граничные точки: $(1, 1, 1, 1, 1, 1)$ и $(1, 1, \sqrt{5} - 2, 1, 1, 1)$. Соответствующая задача имеет вид

$$\begin{aligned}
 4a^2b^4 &\rightarrow \max, \\
 \frac{1}{2}a^2b^2(a^2 + 4b^2) &= 1, \\
 \frac{1}{4}(3 - \sqrt{5})b^2(a^2 + 4b^2)(a^2 + (3 - \sqrt{5})^2b^2) &= 1.
 \end{aligned}$$

Ее решение

$$a = \sqrt[6]{\frac{8(30\sqrt{5} - 67)}{11}}, \quad b = \sqrt[6]{\frac{56 + 25\sqrt{5}}{88}},$$

$$V_{6,3} \geq \det A_6 = \frac{9 + 5\sqrt{5}}{11}.$$

6. Заключение

Изложенное в данной работе сочетание численных и аналитических подходов позволило преобразовать задачу оценки критического определителя звездного тела Дэвенпорта в комбинацию оптимизационных задач и по-новому взглянуть на задачу оценки константы совместных диофантовых приближений.

Полученные результаты для размерности $n = 3$ и $n = 4$ совпадают с результатами Т. Кьюзика [3] и С. Красса [9]. Для $n = 5$ и $n = 6$ полученные результаты позволяют записать (так как $\Delta_{5,2} = 28\,037$, $\Delta_{6,3} = 184\,607$, см. [21]) следующие оценки константы совместных диофантовых приближений

$$C_5 \geq \frac{V_{4,2}}{\Delta_{5,2}} \geq \sqrt{\frac{27(9 + 5\sqrt{5})}{88 \cdot 28\,037}} \approx 0.014860... \quad C_6 \geq \frac{V_{6,3}}{\Delta_{6,3}} \geq \frac{9 + 5\sqrt{5}}{11\sqrt{184\,607}} \approx 0.004269...$$

что превосходит известные ранее значения. Например, оценка Ф. Фуртвенлера [6, 7] дает

$$C_5 \geq \frac{1}{\Delta_{5,3}} = \frac{1}{\sqrt{9\,747}} \approx 0.010128... \quad C_6 \geq \frac{1}{\Delta_{6,3}} = \frac{1}{\sqrt{184\,607}} \approx 0.002327...$$

а оценка С. Красса [10] дает

$$C_5 \geq \frac{V_{4,2}}{\Delta_{5,2}} \geq \frac{16}{9\sqrt{28\,037}} \approx 0.010617... \quad C_6 \geq \frac{V_{4,2}}{\Delta_{6,3}} \geq \frac{16}{9\sqrt{184\,607}} \approx 0.004137...$$

Для получения более сильных оценок, скорее всего, потребуются принципиально новые подходы. На это указывает полученная нами в разделе 5 информация о том, что A_n^* можно представить в виде композиции A_{n-4}^* и A_4^* .

В качестве возможного подхода по усилению оценок C_n снизу можно предложить непосредственную оценку значения критического определителя звездного тела $\mathbb{F}_n$. Это сложная задача, но в случае оценки сверху были получены достаточно значительные результаты [11, 12, 13, 14, 15, 19].

Стоит также отметить, что предложенный в данной работе подход может быть применен для оценки снизу значений критического определителя ограниченного точечного тела. Эта задача достаточно схожа с задачей оценки $V_{n,s}$. На наш взгляд, применение описанной в работе методики может дать определенные результаты в этой области.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Basalov Yu. A. On estimating the constant of simultaneous Diophantine approximation // arXiv.org. 2019. Дата обновления: 09.04.2019. URL: <https://arxiv.org/abs/1804.05385> (дата обращения: 10.04.2019).
2. Cassels J. W. S. Simultaneous Diophantine approximation // J. London Math. Soc. 1955. Vol. 30. P. 119–121.

3. Cusick T. W. Estimates for Diophantine approximation constants // Journal of Number Theory. 1980. Vol. 12(4). P. 543–556.
4. Davenport. H. On a theorem of Furtwängler // J. London Math. Soc. 1955. Vol. 30. P. 186–195.
5. Finch S. R. Mathematical Constants. Cambridge University Press, 2003 (Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Book 94).
6. Furtwängler H. Über die simultatene Approximation von Irrationalzahlen. I // Math. Ann. 1927. Vol. 96. P. 169–175;
7. Furtwängler H. Über die simultatene Approximation von Irrationalzahlen. II // Math. Ann. 1928. Vol. 99. P. 71–83.
8. Hurwitz A. Über die angenaherte Darstellung der Irrationalzahlen durch rationale Briiche // Math. Ann. 1891. Vol. 39. P. 279–284.
9. Krass S. Estimates for n -dimensional Diophantine approximation constants for $n \geq 4$ // J. Number Theory. 1985. Vol. 20(2). P. 172–176.
10. Krass S. The N -dimensional diophantine approximation constants // Australian Mathematical Society. 1985. Vol 32(2). P. 313–316.
11. Mack J. M. Simultaneous Diophantine approximation // J. Austral. Math. Soc. A. 1977. Vol. 24. P. 266–285.
12. Nowak W. G. A note on simultaneous Diophantine approximation // Manusc. Math. 1981. Vol. 36. P. 33–46.
13. Nowak W. G. A remark concerning the s -dimensional simultaneous Diophantine approximation constants // Graz. Math. Ber. 1993. Vol. 318. P. 105–110.
14. Nowak W. G. Lower bounds for simultaneous Diophantine approximation constants // Comm. Math. 2014. Vol. 22, Is. 1, P. 71–76.
15. Nowak W. G. Simultaneous Diophantine approximation: Searching for analogues of Hurwitz's theorem // In: T.M. Rassias and P.M. Pardalos (eds.), Essays in mathematics and its applications. Springer/ Switzerland. 2016. P. 181–197.
16. Басалов Ю. А. Об истории оценок константы наилучших совместных диофантовых приближений // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, вып. 2. С. 388–405.
<https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-19-2-394-411>.
17. Басалов Ю. А. Оценка константы наилучших диофантовых приближений для $n = 5$ и $n = 6$. // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 1. С. 0-0. <https://doi.org/10.22405/2226-8383-00000000000000000000000000000000>
18. Касселс Дж. В. С. Введение в геометрию чисел: Пер. с англ. – М.: Мир, 1965.
19. Мошевитин Н. Г. К теореме Бlichфельда-Мюллендера-Спона о совместных приближениях // Тр. МИАН, 2002, том 239, с. 268–274.
20. Шмидт В. М. Диофантовы приближения: Пер. с англ. – М.: Мир, 1983.
21. A Database for Number Fields // A Database for Number Fields.
URL: <http://galoisdb.math.upb.de/> (дата обращения: 05.05.2018).

18. Cassels J. W. S. 1965, *An Introduction to the Geometry of Numbers*, Mir.
19. Moshchevitin N. G. 2002, “To the Blichfeldt-Mullender-Spohn theorem on simultaneous approximations“, *Proceedings of the Steklov Mathematical Institute*, Vol. 239, pp. 268–274.
20. Schmidt W. M. 1983, *Diophantine Approximation*, Mir.
21. A Database for Number Fields. Available at: <http://galoisdb.math.upb.de/>

Получено 23.05.2019 г.

Принято в печать 12.07.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 2.

УДК 511.42

DOI 10.22405/2226-8383-2018-20-2-39-46

**Точные оценки для специального класса целочисленных
многочленов с заданным дискриминантом**

Н. В. Бударина (г. Дандолк)

Н. В. Бударина — доктор физ.-мат. наук, Ирландия, Дандолк, Дандолкский технологический институт.

e-mail: buda77@mail.ru

Аннотация

В статье получена верхняя и нижняя оценка для числа целочисленных многочленов, которые имеют только два близких корня и малый дискриминант в терминах Евклидовой метрики.

Ключевые слова: диофантовы приближения, дискриминант многочлена.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:

Н. В. Бударина Точные оценки для специального класса целочисленных многочленов с заданным дискриминантом // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 2, с. 39–46.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 2.

UDC 511.42

DOI 10.22405/2226-8383-2018-20-2-39-46

**Exact bounds for the special class of integer polynomials with
given discriminant**

N. V. Budarina (Dundalk)

N. V. Budarina — Ph.D, Republic of Ireland, Dundalk, Dundalk Institute of Technology.

e-mail: buda77@mail.ru

Abstract

An upper bound and lower bound for the number of integer polynomials which have only two close to each other roots, and small discriminant in terms of the Euclidean metric is obtained.

Keywords: Diophantine approximation, discriminant of polynomial.

Bibliography: 15 titles.

For citation:

N. V. Budarina, 2019, "Exact bounds for the special class of integer polynomials with given discriminant", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 2, pp. 39–46.

1. Introduction

Denote by $\mathcal{P}_n$ the class of integer polynomials P of degree n . For a given polynomial $P = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathcal{P}_n$ define $H(P) = \max_{0 \leq j \leq n} |a_j|$ to be the height of P .

Given a parameter $Q \in \mathbb{N}_{>1}$, let

$$\mathcal{P}_n(Q) = \{P(x) \in \mathbb{Z}[x], \deg P = n, H(P) \leq Q\}$$

denote the set of integer polynomials P of degree n and height $H(P) \leq Q$. Throughout, $D(P)$ will stand for the discriminant of a polynomial P which is defined by

$$D(P) = a_n^{2n-2} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_i - \alpha_j)^2$$

where $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ are the roots of P (see [15]). The discriminant contains the information regarding the distance between different algebraic numbers, and it was important tool for the solving Mahler's conjecture by Sprindzuk [14] as well for a various generalisations of Sprindzuk's techniques [3, 4, 5, 8, 11].

In what follows we will use the Vinogradov symbols $\ll$ (and $\gg$) where $a \ll b$ implies that there exists a constant C such that $a \leq Cb$. If $a \ll b \ll a$ then we write $a \asymp b$. The cardinality of a set B will be denoted by $\#B$. Positive constants which depend only on n will be denoted by $c(n)$; where necessary these constants will be numbered $c_j(n)$, $j = 1, 2, \dots$

Given $v \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, define the subset of $\mathcal{P}_n(Q)$ as follows:

$$\mathcal{P}_n(Q, v) = \{P(x) \in \mathcal{P}_n(Q) : 1 \leq |D(P)| < Q^{2n-2-2v}\}.$$

Establishing exact upper bounds and lower bounds for $\#\mathcal{P}_n(Q, v)$ have been the subject of numerous papers in recent years, and became a new branch of Diophantine approximation. We now briefly recall the results that have been obtained to date. In the case of quadratic polynomials it was shown in [13] that $\#\mathcal{P}_2(Q, v) \asymp Q^{3-2v}$ for $0 < v < 3/4$ and in the case of cubic polynomials it was established in [12] that $\#\mathcal{P}_3(Q, v) \asymp Q^{4-5v/3}$ for $0 \leq v < 3/5$. Establishing the lower bounds for an arbitrary n has been the subject of numerous papers including [1, 2, 6]. The most general and best estimate for the lower bound with arbitrary n was found in [2] where it was shown that $\#\mathcal{P}_n(Q, v) \gg Q^{n+1-(n+2)v/n}$, $0 \leq v \leq n-1$. It is much harder to get the upper bounds for $\#\mathcal{P}_n(Q, v)$ with arbitrary n .

There are also p -adic [7] and mixed analogues [9, 10] of the above problem, which along with the size of the discriminant take into account their arithmetic structure.

Let $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ be the roots of $P \in \mathcal{P}_n(Q, v)$ ordered so that

$$|\alpha_1 - \alpha_2| \leq |\alpha_1 - \alpha_3| \leq \dots \leq |\alpha_1 - \alpha_n|, \quad (1)$$

and satisfy

$$|\alpha_1 - \alpha_j| \ll 1, \quad 3 \leq j \leq n. \quad (2)$$

Also, define the real number ρ such that

$$|\alpha_1 - \alpha_2| = Q^{-\rho}, \quad \rho \geq 0. \quad (3)$$

Let $\mathcal{P}'_n(Q, v)$ denote the set of irreducible polynomials $P \in \mathcal{P}_n(Q, v)$ which have only one root α_2 close to α_1 . Thus, we investigate the set of irreducible polynomials $P \in \mathcal{P}_n(Q, v)$ with the roots satisfy (1)–(3). In this paper we obtain an upper bound and lower bound for the number of polynomials $P \in \mathcal{P}'_n(Q, v)$.

ТЕОРЕМА 1. Let $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ be given. For any $\epsilon > 0$ and for any sufficiently large Q the following estimates

$$\begin{aligned} \#\mathcal{P}'_n(Q, v) &\gg Q^{n+1-2v} \\ \#\mathcal{P}'_n(Q, v) &\ll Q^{n+1-2v} \quad \text{for } \rho \geq \frac{n-1+2v}{3} + \epsilon \end{aligned}$$

hold if

$$0 \leq v \leq (n+2)/4 - \epsilon,$$

where the constant implied by the Vinogradov symbol depends on n only.

2. Lower Bound

2.1. Preliminary results

Now we give several lemmas which are used to obtain lower bounds for the Lebesgue measure of certain sets. In what follows given a Lebesgue measurable set $A \subset \mathbb{R}$, $|A|$ stand for its Lebesgue measure.

LEMMA 1. [2] Let $n \geq 2$ and $v_0, v_1, \dots, v_n$ be a collection of real numbers such that

$$v_0 + v_1 + \dots + v_n = 0 \quad \text{and} \quad v_0 \geq v_1 \geq \dots \geq v_n \geq -1. \quad (4)$$

Then there are positive constants δ_0 and c_0 depending on n only with the following property. For any interval $J \subset [-1/2, 1/2]$ there is a sufficiently large Q_0 such that for all $Q > Q_0$ there is a measurable set $G_J \subset J$ satisfying $|G_J| \geq |J|/2$ such that for every $x \in G_J$ there are $n+1$ linearly independent primitive irreducible polynomials $P \in \mathbb{Z}[x]$ of degree exactly n such that

$$\delta_0 Q^{-v_0} \leq |P(x)| \leq c_0 Q^{-v_0}, \quad \delta_0 Q^{-v_j} \leq |P^{(j)}(x)| \leq c_0 Q^{-v_j} \quad (1 \leq j \leq n). \quad (5)$$

LEMMA 2. [2] Let n and v_j be the same as in Lemma 1. Let

$$d_j = v_{j-1} - v_j \quad (1 \leq j \leq n). \quad (6)$$

Suppose that

$$d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n \geq 0 \quad (7)$$

and that for some $x \in \mathbb{C}$ and $Q > 1$ inequalities (5) are satisfied by some polynomial P over $\mathbb{C}$ of degree $\deg P = n$. Then there are roots $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ of P such that

$$|x - \alpha_j| \leq c_j Q^{-d_j} \quad (1 \leq j \leq n) \quad (8)$$

where

$$c_1 = nc_0 \delta_0^{-1} \quad \text{and} \quad c_{j+1} = \max \left(\frac{2c_0 n!}{\delta_0 (j+1)! (n-j-1)!}, \frac{2c_j n!}{j! (n-j)!} \right) \quad (1 \leq j \leq n-1).$$

2.2. Obtaining a lower bound in Theorem 1

Let $v_0, v_1, \dots, v_n$ be given and satisfy (4) and let the parameters d_j be given by (6) and (7). Consider the system

$$\delta_0 Q^{-v_0} \leq |P(x)| \leq c_0 Q^{-v_0}, \quad \delta_0 Q^{-v_1} \leq |P'(x)| \leq c_0 Q^{-v_1} \delta_0 Q \leq |P^{(j)}(x)| \leq c_0 Q \quad (2 \leq j \leq n). \quad (9)$$

Therefore, we have $v_2 = v_3 = \dots = v_n = -1$. From (4), we have

$$v_0 + v_1 = - \sum_{i=2}^n v_i = n-1. \quad (10)$$

Let $J = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, Q be sufficiently large and $x \in G_J$, where G_J is the same as in Lemma 1. By Lemma 1, inequalities (9) are satisfied for some irreducible polynomial $P \in \mathbb{Z}[x]$ of degree n . Then by Lemma 2 we have (8). Hence, for any pair of integers (i, j) satisfying $1 \leq i < j \leq n$ we have by (8) that

$$|\alpha_i - \alpha_j| \leq |x - \alpha_i| + |x - \alpha_j| \ll Q^{-d_j}. \quad (11)$$

By (9), we have that $H(P) \ll Q$, where the implicit constant depends on n only. Therefore, using $D(P) = a_n^{2n-2} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_i - \alpha_j)^2$, we have that

$$1 \leq |D(P)| \ll Q^{2n-2-2 \sum_{i=2}^n (i-1)d_i}. \quad (12)$$

Note that the left hand side inequality is due to the irreducibility of P . By (12), inequalities $1 \leq |D(P)| \ll Q^{2n-2-2v}$ are fulfilled if we impose the condition

$$\sum_{i=2}^n (i-1)d_i = v. \quad (13)$$

By (9), we have that

$$d_1 = v_0 - v_1, \quad d_2 = v_1 + 1, \quad d_i = 0, \quad 3 \leq i \leq n. \quad (14)$$

Thus, from (13), we get $d_2 = v$. By (10) and (14), we have that

$$v_1 = v - 1, \quad v_0 = n - v. \quad (15)$$

Next we obtain that $d_1 = v_0 - v_1 = n + 1 - 2v$. A quick check shows that $d_1 \geq d_2 \geq 0$ for $0 \leq v \leq \frac{n+1}{3}$. Using (3), (11), (14) and (15), it can be shown that $\rho \geq v$.

Now, we estimate the number of polynomials that can obtain this way. By (8) and Lemma 1, for every $x \in G_J$ we have that $|x - \alpha_1(P)| \ll Q^{-d_1}$, where P arises from Lemma 1. Therefore, we have that

$$G_J \subset \cup_{P \in \mathcal{P}'_n(Q, v)} \cup_{j=1}^n \{|x - \alpha_j(P)| \ll Q^{-d_1}\}.$$

Hence,

$$\frac{3}{4} = \frac{3}{4}|J| \ll Q^{-d_1} \#\mathcal{P}'_n(Q, v).$$

This results in the required lower bound

$$\#\mathcal{P}'_n(Q, v) \gg Q^{d_1} \gg Q^{n+1-2v}$$

for $0 \leq v \leq \frac{n+1}{3}$.

3. Upper Bound

3.1. Auxiliary results

The following Lemma is a quantitative description of the fact that two relatively prime integer polynomials cannot both have very small absolute values in an interval.

LEMMA 1. *Let $\delta, \eta, \mu \in \mathbb{R}^+$ and let $Q_0(\delta, n)$ be a sufficiently large real numbers. Furthermore, let $P(x), T(x) \in \mathbb{Z}[x]$ be polynomials of degree $n > 1$ without common roots such that $\max(H(P), H(T)) = Q^\mu$, where $Q > Q_0(\delta, n)$. Assume that the interval $I \subset (-n, n) \subset \mathbb{R}$ with $|I| = Q^{-\eta}$. If there exists $\tau > 0$ such that for all $x \in I$*

$$\max(|P(x)|, |T(x)|) < Q^{-\tau},$$

then

$$\tau + \mu + 2 \max(\tau + \mu - \eta, 0) < 2\mu n + \delta. \quad (16)$$

Lemma 1 is proved in [3].

For a given number $\epsilon_1 > 0$ let $T = [\epsilon_1^{-1}] + 1$, where $[a]$ is the integer part of $a \in \mathbb{R}$. For a polynomial $P \in \mathcal{P}'_n(Q, v)$ the real number ρ was defined in (3). Also define the integer l by

$$(l-1)/T < \rho \leq l/T.$$

It is not difficult to show that the number of integers l is finite and depends only on ϵ_1 and does not depend on Q and $H(P)$. Define the class $\mathcal{P}'_{n,l}(Q, v)$ which consists of the polynomials $P \in \mathcal{P}'_n(Q, v)$ corresponding to an integer l .

In order for the polynomial $P(x)$ to belong to the class $\mathcal{P}'_n(Q, v)$ it is necessary and sufficient that the inequality

$$\rho \geq v$$

holds. By (2)–(3) and using the fact that $|D(P)| \geq 1$ for the irreducible polynomial P , we have

$$\rho \leq n-1.$$

3.2. Obtaining an upper bound in Theorem 1

In this section we are going to obtain the upper bound

$$\#\mathcal{P}'_n(Q, v) \ll Q^{n+1-2v} \quad (17)$$

for the number of polynomials $P \in \mathcal{P}_n(Q, v)$ with only two close roots α_1 and α_2 .

Assume that the estimate (17) does not hold, so

$$\#\mathcal{P}'_n(Q, v) \gg Q^{n+1-2v}.$$

Then there must exist an interval $I \subset \mathbb{R}$ of size $|I| = Q^{-\gamma}$, $\gamma \geq 0$, containing a root of P such that

$$\#\mathcal{P}'_n(Q, v, I) \gg Q^{n+1-2v-\gamma}$$

where $\mathcal{P}'_n(Q, v, I)$ is the set of polynomials $P \in \mathcal{P}'_n(Q, v)$ which have a root in the interval I . Since $\#l \ll 1$ there exist an integer l such that

$$\#\mathcal{P}'_{n,l}(Q, v, I) \gg Q^{n+1-2v-\gamma}$$

where $\mathcal{P}'_{n,l}(Q, v, I)$ denotes the subset of $\mathcal{P}'_{n,l}(Q, v)$ which have a root in the interval I .

Expand the polynomial $P \in \mathcal{P}'_{n,l}(Q, v, I)$ into its Taylor series in the neighbourhood of α_1 to obtain

$$P(x) = P(\alpha_1) + \sum_{i=1}^n \frac{P^{(i)}(\alpha_1)(x - \alpha_1)^i}{i!}.$$

Using (1)–(3) and estimating each term, gives

$$\begin{aligned} |P'(\alpha_1)(x - \alpha_1)| &\ll Q^{1-\rho-\gamma}, \\ |P^{(i)}(\alpha_1)(x - \alpha_1)^i| &\ll Q^{1-i\gamma}, \quad 2 \leq i \leq n, \end{aligned}$$

for $x \in I$. Thus

$$\begin{aligned} |P(x)| &\ll Q^{1-2\gamma} & \text{if } \gamma \leq \rho \\ |P(x)| &\ll Q^{1-\rho-\gamma} & \text{if } \gamma \geq \rho \end{aligned} \quad (18)$$

for $x \in I$.

For sufficiently large Q , we have that $\#\mathcal{P}'_{n,l}(Q, v, I) \geq 2$ for $\gamma \leq n+1-2v$. Next we show that the assumption that at least two irreducible polynomials without common roots have small values

in the interval I will lead to a contradiction. Suppose that two polynomials $P_1, P_2 \in \mathcal{P}'_{n,l}(Q, v)$ without common roots belong to I , i.e. $\alpha_1(P_1) \in I$ and $\alpha_1(P_2) \in I$. Then the estimates (18) hold for P_i , $i = 1, 2$, on the interval I .

Consider the following three cases.

Case A: $\frac{n-1+2v}{3} + \epsilon \leq \rho \leq n/2 + 3\epsilon/4$.

Choose $\gamma = 2n - 3\rho + 3\epsilon$. Applying Lemma 1 to polynomials P_1 and P_2 with $\tau = -1 + \rho + \gamma$, $\eta = \gamma$, $\mu = 1$, leads to a contradiction in (16) for $\delta \leq 3\epsilon$.

Case B: $n/2 + 3\epsilon/4 < \rho < n + 1 - 2v \leq n - 1$ for $v \geq 1$ or $n/2 + 3\epsilon/4 < \rho \leq n - 1$ for $v \leq 1$.

Choose $\gamma = \rho$. Applying Lemma 1 to polynomials P_1 and P_2 with $\tau = -1 + 2\gamma$, $\eta = \gamma$, $\mu = 1$, leads to a contradiction in (16) for $\delta \leq 3\epsilon$.

Case C: $n + 1 - 2v \leq \rho \leq n - 1$ for $v \geq 1$.

Choose $\gamma = n + 1 - 2v$. Applying Lemma 1 to polynomials P_1 and P_2 with $\tau = -1 + 2\gamma$, $\eta = \gamma$, $\mu = 1$, leads to a contradiction in (16) for $\delta \leq 8\epsilon$ and $v \leq \frac{n+2}{4} - \epsilon$.

Thus it has been shown that $\#\mathcal{P}'_n(Q, v) \ll Q^{n+1-2v}$ for $\rho \geq \frac{n-1+2v}{3} + \epsilon$ and $v \leq \frac{n+2}{4} - \epsilon$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Beresnevich V. V., Bernik V. I., Goetze F. Simultaneous approximations of zero by an integral polynomial, its derivative, and small values of discriminants // Dokl. Nats. Nauk Belarusi. 2010. Vol. 54, № 2. P. 26–28, 125.
2. Beresnevich V. V., Bernik V. I., Goetze F. Integral polynomials with small discriminants and resultants // Advances in Mathematics. 2016. Vol. 298. P. 393–412.
3. Bernik V. I. An application of Hausdorff dimension in the theory of Diophantine approximation // Acta Arith. 1983. Vol. 42. P. 219–253.
4. Bernik V. I. The exact order of approximating zero by values of integral polynomials // Acta Arith. 1989. Vol. 53. P. 17–28.
5. Bernik V. I., Dodson M. M. Metric Diophantine approximation on manifolds // Cambridge: CUP, 1999, Vol. 137, 172 p.
6. Bernik V. I., Goetze F., Kukso O. Lower bounds for the number of integral polynomials with given order of discriminants // Acta Arith. 2008. Vol. 133. P. 375–390.
7. Bernik V. I., Goetze F., Kukso O. On the divisibility of the discriminant of an integral polynomial by prime powers // Lith. Math. J. 2008. Vol. 48. P. 380–396.
8. Budarina N., Dickinson D., Bernik V. I. Simultaneous Diophantine approximation in the real, complex and p -adic fields // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 2010. Vol. 149. P. 193–216.
9. Budarina N., Dickinson D., Yuan Jin Yuan. On the number of polynomials with small discriminants in the euclidean and p -adic metrics // Acta Mathematica Sinica. 2012. Vol. 28. P. 469–476.
10. Bernik V. I., Budarina N., O'Donnell H. Discriminants of polynomials in the Archimedean and non-Archimedean metrics // Acta Math. Hungar. 2018. Vol. 154, № 2. P. 265–278.
11. Bugeaud Y. Approximation by algebraic numbers // Cambridge Tracts in Mathematics, Vol. 160, Cambridge University Press (Cambridge, 2004).
12. Goetze F., Kaliada D., Kukso O. The asymptotic number of integral cubic polynomials with bounded heights and discriminants // Lith. Math. J. 2014. Vol. 54. P. 150–165.

13. Goetze F., Kaliada D., Korolev M. On the number of quadratic polynomials with bounded discriminants // Retrieved from: arXiv:1308.2091v1.
14. Sprindzuk V. G. Mahler's problem in metric number theory // Translated from the Russian by B. Volkmann. Translations of Mathematical Monographs, Vol. 25, American Mathematical Society (Providence, R.I., 1969).
15. Van Der Waerden B. L. Algebra // Springer-Verlag (Berlin, Heidelberg, 1971).

REFERENCES

1. Beresnevich, V. V., Bernik, V. I. & Goetze, F. 2010, "Simultaneous approximations of zero by an integral polynomial, its derivative, and small values of discriminants", *Dokl. Nats. Nauk Belarusi*, vol. 54, no. 2, pp. 26–28, 125.
2. Beresnevich, V. V., Bernik, V. I. & Goetze, F. 2016, "Integral polynomials with small discriminants and resultants", *Advances in Mathematics*, vol. 298, pp. 393–412.
3. Bernik, V. I. 1983, "An application of Hausdorff dimension in the theory of Diophantine approximation", *Acta Arith.*, vol. 42, pp. 219–253.
4. Bernik, V. I. 1989, "The exact order of approximating zero by values of integral polynomials", *Acta Arith.*, vol. 53, pp. 17–28.
5. Bernik, V. I. & Dodson, M. M. 1999, "Metric Diophantine approximation on manifolds", Cambridge: CUP, Vol. 137, 172 p.
6. Bernik, V. I., Goetze, F. & Kukso, O. 2008, "Lower bounds for the number of integral polynomials with given order of discriminants", *Acta Arith.*, vol. 133, pp. 375–390.
7. Bernik, V. I., Goetze, F. & Kukso, O. 2008, "On the divisibility of the discriminant of an integral polynomial by prime powers", *Lith. Math. J.*, vol. 48, pp. 380–396.
8. Budarina, N., Dickinson, D. & Bernik, V. 2010, "Simultaneous Diophantine approximation in the real, complex and p -adic fields", *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, vol. 149, pp. 193–216.
9. Budarina, N., Dickinson, D. & Jin, Yuan 2012, "On the number of polynomials with small discriminants in the euclidean and p -adic metrics", *Acta Mathematica Sinica*, vol. 28, pp. 469–476.
10. Bernik, V., Budarina, N. & O'Donnell, H. 2018, "Discriminants of polynomials in the Archimedean and non-Archimedean metrics", *Acta Math. Hungar.*, vol. 154, no. 2, pp. 265–278.
11. Bugeaud, Y. 2004, "Approximation by algebraic numbers", Cambridge Tracts in Mathematics, Vol. 160, Cambridge University Press.
12. Goetze, F., Kaliada, D. & Kukso, O. 2014, "The asymptotic number of integral cubic polynomials with bounded heights and discriminants", *Lith. Math. J.*, vol. 54, pp. 150–165.
13. Goetze, F., Kaliada, D. & Korolev, M. "On the number of quadratic polynomials with bounded discriminants", Retrieved from: arXiv:1308.2091v1.
14. Sprindzuk, V. G. 1969, "Mahler's problem in metric number theory", Translated from the Russian by B. Volkmann. Translations of Mathematical Monographs, Vol. 25, American Mathematical Society (Providence, R.I.).

15. Van Der Waerden, B.L. 1971, "Algebra". Springer-Verlag (Berlin, Heidelberg).

Получено 30.07.2018 г.

Принято в печать 12.07.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 2.

УДК 511.42

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-47-54

Об оценках сверху числа минимальных полиномов
с малой производной в корне¹

Д. В. Васильев, А. С. Кудин

Васильев Денис Владимирович — кандидат физико-математических наук, заведующий отделом теории чисел, Институт математики НАН Беларуси (г. Минск).

e-mail: vasilyev@im.bas-net.by

Кудин Алексей Сергеевич — кандидат физико-математических наук, научный сотрудник отдела теории чисел, Институт математики НАН Беларуси (г. Минск).

e-mail: knxd@yandex.ru

Аннотация

В статье рассматривается проблема получения оценок числа минимальных целочисленных полиномов $P(x)$ степени n и высоты не более Q таких, что производная полинома в одном из его корней α ограничена, $|P'(\alpha)| < Q^{1-v}$ для некоторого $v > 0$.

Данная проблема естественным образом возникает во многих задачах метрической теории чисел, связанных с получением эффективных оценок меры точек, в которых целочисленные полиномы из некоторого класса принимают малые значения. Например, в работе Р. Бейкера 1976 года подобный результат использовался для оценки сверху размерности Хаусдорфа в проблеме Бейкера-Шмидта.

Доказано, что число полиномов $P(x)$, определенных выше, с корнями α на интервале $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ не превосходит $c_1(n)Q^{n+1-\frac{3}{5}v}$ при $Q > Q_0(n)$ и $1.5 \leq v \leq \frac{1}{2}(n+1)$. Результат основан на усиленной версии леммы из монографии А.О. Гельфонда "Трансцендентные и алгебраические числа" о выделении малого делителя целочисленного полинома.

Ключевые слова: диофантовы приближения, размерность Хаусдорфа, трансцендентные числа, результат, матрица Сильвестра, неприводимый делитель, лемма Гельфонда

Библиография: 13 названий.

Для цитирования:

Д. В. Васильев, А. С. Кудин. Об оценках сверху числа минимальных полиномов с малой производной в корне // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 2, с. 47–54.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 2.

UDC 511.42

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-47-54

On upper bounds for the number of minimal polynomials with
bounded derivative at a root²

D. V. Vasilyev, A. S. Kudin

¹Работа выполнена при финансовой поддержке гранта БРФФИ Ф17-101.

²The work was supported by the BRFFI grant F17-101.

Vasilyev Denis Vladimirovich — Ph. D., head of number theory department, Institute of Mathematics NAS Belarus (Minsk).

e-mail: vasilyev@im.bas-net.by

Kudin Alexey Sergeevich — Ph. D., research fellow, number theory department, Institute of Mathematics NAS Belarus (Minsk).

e-mail: knxd@yandex.ru

Abstract

In the paper we consider the problem of obtaining estimates for the number of minimal integer polynomials $P(x)$ of degree n and height not exceeding Q , such that the derivative is bounded at a root α , i.e. $|P'(\alpha)| < Q^{1-v}$ for some $v > 0$.

This problem occurs naturally in many problems of metric number theory related to obtaining effective estimates for the measure of points at which integral polynomials from some class take small values. For example, in 1976 R. Baker has used such an estimate for obtaining an upper bound for the Hasdorff dimension in Baker-Schmidt problem.

We prove that the number of polynomials $P(x)$ defined above having roots α on the interval $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ doesn't exceed $c_1(n)Q^{n+1-\frac{3}{5}v}$ for $Q > Q_0(n)$ and $1.5 \leq v \leq \frac{1}{2}(n+1)$. The result is based on an improvement to the lemma on small integer polynomial divisor extraction from A.O. Gelfond's monograph "Transcendental and algebraic numbers".

Keywords: Diophantine approximation, Hausdorff dimension, transcendental numbers, resultant, Sylvester matrix, irreducible divisor, Gelfond's lemma

Bibliography: 13 titles.

For citation:

D. V. Vasilyev, A. S. Kudin, 2019, "On upper bounds for the number of minimal polynomials with bounded derivative at a root", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 2, pp. 47–54.

1. Введение

Многие проблемы в метрической теории диофантовых приближений и теории трансцендентных чисел формулируются в терминах множеств вещественных, комплексных, или p -адических чисел, удовлетворяющих неравенствам

$$|P(x)| < H(P)^{-w_1}, \quad |P(z)| < H(P)^{-w_2}, \quad |P(\omega)|_p < H(P)^{-w_3}, \quad (1)$$

где $w_i > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$, $\omega \in \mathbb{Q}_p$, для бесконечного числа полиномов $P(x)$ из некоторого класса $\mathcal{P} \subset \mathbb{Z}[x]$. Множества, задаваемые неравенствами (1), устроены как правило сложно, поэтому их включают в более простые множества: вещественные интервалы, комплексные круги, p -адические цилиндры. При этом необходимо, чтобы меры включающих и включаемых множеств были как можно более близки.

Для целочисленного полинома $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ обозначим как $H(P) = \max_{0 \leq j \leq n} |a_j|$ его высоту и как $\deg P = n$ его степень. Множества целочисленных полиномов ограниченной степени и высоты обозначим как

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_n &:= \{P(x) \in \mathbb{Z}[x] : \deg P \leq n\}, \\ \mathcal{P}_n(Q) &:= \{P(x) \in \mathbb{Z}[x] : \deg P \leq n, H(P) \leq Q\}. \end{aligned}$$

Для матрицы $M \in \mathbb{R}^{m \times n} = (a_{ij})$ определим ее перманент как

$$\text{perm } M = \begin{cases} \sum_{\sigma \in \mathcal{P}(n, m)} a_{1\sigma(1)} \cdot \dots \cdot a_{m\sigma(m)}, & m \leq n, \\ \text{perm } M^T, & m > n, \end{cases}$$

где $P(n, m)$ — множество всех m -перестановок $\{1, \dots, n\}$.

Рассмотрим, например, вещественный случай (1). Решения первого неравенства (1) принадлежат интервалам вида

$$|x - \alpha_1| < 2^{n-1} |P(x)| |P'(\alpha_1)|^{-1},$$

где α_1 — ближайший к x корень $P(x)$. Эти интервалы могут быть достаточно велики при малых значениях $|P'(\alpha_1)|$. Естественный подход к решению этой проблемы — найти оценку сверху для числа полиномов с малой производной в корне.

Этот подход был использован в работе Р. Бейкера [1]. Для некоторого целого $n \geq 1$ и вещественных $H \geq 1$, $v \geq 0$ Бейкер рассматривает множество $\tilde{\mathcal{P}}_n(H, v)$ примитивных неприводимых полиномов $P(x)$ степени n и высоты H , которые также являются лидирующими (а именно, $|a_n| = H$), для которых найдется корень $\alpha_1 \in \mathbb{C}$ с условием $|P'(\alpha_1)| < H^{1-v}$. Бейкер доказал, что при $0 \leq v < 1$ и достаточно больших H справедливо

$$\#\tilde{\mathcal{P}}_n(H, v) < c_1(n) H^{n-v}, \quad (2)$$

где $c_1(n)$ — некоторая величина, которая зависит только от n . Используя этот результат, он получил для $n \geq 3$ и $w_1 > \frac{1}{3}(n^2 + n - 3)$ точную оценку сверху размерности Хаусдорфа множества чисел $x \in \mathbb{R}$, для которых найдется бесконечное число целочисленных полиномов степени n , удовлетворяющих первому неравенству (1). Проблема вычисления размерности Хаусдорфа этого множества была окончательно решена В. Берником [4] с использованием других методов. Тем не менее, оценки вида (2) могут найти применение во многих проблемах метрической теории диофантовых приближений, таких как [12, 8, 11, 9, 2, 7, 3, 6].

Для некоторого подмножества $D \subseteq \mathbb{C}$, целого $n \geq 1$ и действительных $Q \geq 1$, $v \geq 0$ обозначим как $\mathcal{P}_n(Q, v, D)$ множество примитивных неприводимых полиномов $P \in \mathcal{P}_n(Q)$ с положительным старшим коэффициентом, которые имеют корень $\alpha \in D$ такой, что $|P'(\alpha)| < Q^{1-v}$. По определению, множество $\mathcal{P}_n(Q, v, D)$ содержит только минимальные полиномы, следовательно, подсчитывая элементы в $\mathcal{P}_n(Q, v, D)$, мы по сути подсчитываем алгебраические числа с определенными свойствами.

Мы будем рассматривать алгебраические числа на интервале $I_0 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Ранее была получена оценка сверху вида (2) для несколько более широкого диапазона v .

ТЕОРЕМА 1 ([5]). *Для $n \geq 1$ найдутся $c_1(n) > 0$ и $Q_0(n) > 0$ такие, что для любого $Q > Q_0(n)$ и для всех $0 \leq v \leq \frac{3}{2}$ верно*

$$\#\mathcal{P}_n(Q, v, I_0) \leq c_1(n) Q^{n+1-v}.$$

В теореме 1 диапазон v не зависит от n , что значительно ограничивает приложения для больших значений n . Получена следующая оценка сверху, которая частично разрешает данную проблему.

ТЕОРЕМА 2. *Для $n \geq 9$ найдутся $c_1(n) > 0$ и $Q_0(n) > 0$ такие, что для любого $Q > Q_0(n)$ и для всех $1.5 \leq v \leq \frac{1}{2}(n+1)$ справедлива оценка*

$$\#\mathcal{P}_n(Q, v, I_0) \leq c_1(n) Q^{n+1-v\gamma}, \quad (3)$$

где $\gamma = \frac{3}{5}$.

Доказательство теоремы 2 достаточно объемно, поэтому мы приведем лишь его основные шаги. Важной частью доказательства является следующая лемма из работы К.И. Тищенко.

ЛЕММА 1 ([13, лемма 3.3]). *Пусть даны полиномы $P_1(x), P_2(x) \in \mathbb{C}[x]$, $\deg P_i = n_i \geq 0$. Для любого $\xi \in \mathbb{C}$ результат полиномов P_1 и P_2 равен определителю матрицы Сильвестра для их сдвинутых аналогов $S_1(x) = P_1(x + \xi)$ и $S_2(x) = P_2(x + \xi)$.*

В доказательстве будет применяться адаптированная версия леммы 1, которую мы приводим ниже. Заметим, что если взять в (4) перманент с одним столбцом, мы получим лемму А.О. Гельфонда [10, глава 3, §4, лемма V], а (5) является расширенной версией леммы В.И. Берника [4, лемма 12] для случая полиномов разных степеней и высот.

ЛЕММА 2. Пусть заданы целые числа $n_1, n_2 \geq 1$ такие, что $n_1 + n_2 \leq n$ для некоторого целого n , а также действительные числа $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, Q \geq 1$. Пусть $P_1(x) \in \mathcal{P}_{=n_1}(Q^{\lambda_1})$, $P_2(x) \in \mathcal{P}_{=n_2}(Q^{\lambda_2})$ — целочисленные полиномы без общих корней и $\xi \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Для любого натурального $k \leq n_1 + n_2$ справедливо

$$1 \ll_n \text{perm} \begin{pmatrix} |\overline{P}_1(\xi)| & \cdots & |\overline{P}_1^{(k)}(\xi)| \\ & \ddots & \vdots \\ |\overline{P}_2(\xi)| & \cdots & |\overline{P}_2^{(k)}(\xi)| \\ & \ddots & \vdots \\ & & |\overline{P}_2(\xi)| \end{pmatrix} Q^{n_1\lambda_2 + n_2\lambda_1}, \quad (4)$$

где $\overline{P}_i^{(j)}(x) = P_i^{(j)}(x)Q^{-\lambda_i}$, $j \geq 0$, $i = 1, 2$.

Если $3 \leq n_1 + n_2$ и дополнительно $|P_i(\xi)| \leq Q^{-\tau_i}$, $\tau_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, для всех точек $\xi \in I$ некоторого интервала $I \subseteq (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $\mu_1 I = Q^{-\eta}$, $\eta > 0$, тогда для любого $\delta > 0$ и для всех $Q > Q_0(n, \delta)$ справедливо

$$3 \min \{\tau_1 + \lambda_1, \tau_2 + \lambda_2\} - 2\eta < n_1\lambda_2 + n_2\lambda_1 + \delta. \quad (5)$$

2. Основные шаги доказательства теоремы 2

Предположим, что выполняется противное, а именно, найдется $n \geq 9$ такое, что для любого $c_1(n) > 0$ существует бесконечно много пар (Q, v) с $Q \rightarrow \infty$ и $1.5 \leq v \leq \frac{1}{2}(n+1)$, для которых

$$\#\mathcal{P}_n(Q, v, I_0) > c_1(n)Q^{n+1-v\gamma},$$

и получим противоречие при $Q > Q_0(n)$.

Пусть $\mathcal{J}$ — минимальное покрытие интервала I_0 непересекающимися полуоткрытыми интервалами $J \subset \mathbb{R}$ длины Q^{-v} . Очевидно,

$$\#\mathcal{J} \asymp_n Q^v, \quad \mathcal{P}_n(Q, v, I_0) \subseteq \bigcup_{J \in \mathcal{J}} \mathcal{P}_n(Q, v, J), \quad \#\mathcal{P}_n(Q, v, I_0) \leq \sum_{J \in \mathcal{J}} \#\mathcal{P}_n(Q, v, J).$$

Зафиксируем некоторое достаточно малое значение $\Delta(n) > 0$, с помощью которого мы будем контролировать точность наших оценок. Например, $c(n) < Q^{\Delta(n)}$ для $Q > Q_0(n)$ для любого фиксированного значения $c(n)$. В соответствии с принципом ящиков Дирихле, найдется интервал $J \in \mathcal{J}$ с условием $\#\mathcal{P}_n(Q, v, J) \gg_n Q^{n+1-v(1+\gamma)}$. Однако, нам понадобится несколько более точное утверждение, приведенное ниже.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Для любого $c_2(n) > 0$ найдется $c_1(n) > 0$ такое, что для всех $Q > Q_0(n)$ существует действительное число ρ , $0 \leq \rho \leq v$, и множество интервалов $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{J}$,

$$\#\mathcal{K} \geq Q^{v-\rho-\Delta}, \quad \mu_1 \left(\bigcup_{K \in \mathcal{K}} K \right) \geq Q^{-\rho-\Delta},$$

каждый интервал $K \in \mathcal{K}$ из которого удовлетворяет

$$\#\mathcal{P}_n(Q, v, K) \geq c_2(n)Q^{n+1-v(1+\gamma)+\rho}.$$

Среди интервалов $K \in \mathcal{K}$ выберем специальный интервал K_0 , точки которого удалены от алгебраических чисел ограниченной степени и высоты. В данных точках, имея оценку для значений полиномов, мы можем оценить значения их производных.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Для любого $Q > Q_0(n)$ найдется интервал $K_0 \in \mathcal{K}$ и измеримое множество $B_0 \subseteq K_0$, $\mu_1 B_0 \geq \frac{1}{2}\mu_1 K_0$, такое, что для любого целочисленного полинома $s(x)$ с условием $\deg s = m \leq n$, $H(s) = Q^\lambda \leq Q^{1+\Delta}$, и для любой точки $\xi \in B_0$ справедливо $|s'(\xi)| < |s(\xi)|Q^{\rho+\lambda(m+1)+3\Delta}$.

Точки множества B_0 являются в некотором смысле особенными. В частности, если некоторый целочисленный полином $R(x)$ достаточно мал в точке $\xi \in B_0$, то согласно предложениям 3 и 4, один из его делителей принимает намного меньшее значение в точке $\xi \in B_0$, чем остальные. Отметим, что предложение 4 является усиленной версией леммы А.О. Гельфонда [10, глава 3, §4, лемма VI].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть задан целочисленный полином $S(x) \in \mathcal{P}_{\leq m}(Q^\lambda)$, $2 \leq m \leq n$, $0 \leq \lambda$, который является произведением двух целочисленных полиномов $s_1(x)$ и $s_2(x)$, $\deg s_i = m_i \geq 1$, $H(s_i) = Q^{\lambda_i} \leq Q^{1+\Delta}$, не имеющих общих корней, и в некоторой точке $\xi \in B_0$ выполняется:

$$\begin{aligned} |S(\xi)| &= Q^{-\tau}, |s_i(\xi)| = Q^{-\tau_i}, i = 1, 2, \\ \frac{|s_1(\xi)|}{H(s_1)} &= Q^{-\tau_1-\lambda_1} \leq Q^{-\tau_2-\lambda_2} = \frac{|s_2(\xi)|}{H(s_2)}. \end{aligned}$$

Если также $\tau > \rho + m\lambda + 5\Delta$, то для $Q > Q_0(n)$ справедливо следующее:

$$\tau_1 > \tau - \frac{1}{2}m\lambda + \frac{1}{2}m_1\lambda_1 + \frac{1}{2}(m - m_1)(\lambda - \lambda_1) - \Delta.$$

Мы доказываем предложение 3, используя перманент (4) с двумя столбцами, и подставляя оценки для $s'_1(x)$ и $s'_2(x)$ из предложения 2. Оказывается, в разложении перманента слагаемые вида $|s_1(x)s'_2(x)|$ и $|s'_1(x)s_2(x)|$ не могут доминировать, поэтому должно доминировать слагаемое $|s_2(x)s_2(x)|$, что дает искомую оценку. Из предложения 3 непосредственно следует предложение 4.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть задан примитивный целочисленный полином $R(x) \in \mathcal{P}_{\leq m}(Q^\lambda)$, $2 \leq m \leq n$, $0 \leq \lambda \leq 1$, который является произведением k , $2 \leq k \leq n$, степеней $t_i(x) = p_i(x)^{e_i}$, $e_i \in \mathbb{N}$, различных примитивных неприводимых целочисленных полиномов $p_i(x)$. Если в некоторой точке $\xi \in B_0$ справедливо $|R(\xi)| = Q^{-\tau}$, $\tau > \rho + m\lambda + 7\Delta$, то для одного из множителей $t_d(x) = t_i(x)$ при $Q > Q_0(n)$ выполняется:

$$\begin{aligned} \deg t_d &= m_d \geq 2, H(t_d) = Q^{\lambda_d}, |t_d(\xi)| = Q^{-\tau_d}, \\ \tau_d &> \tau - \frac{1}{2}m\lambda + \frac{1}{2}m_d\lambda_d + \frac{1}{2}(m - m_d)(\lambda - \lambda_d) - \Delta. \end{aligned}$$

Используя принцип ящиков Дирихле, мы можем находить полиномы из множества $\mathcal{P}_n(Q, v, K_0)$, старшие коэффициенты которых близки. Вычитая их, получим новые полиномы $R_m(x)$ для различных m .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть m_0 — целое число с условием $v(1+\gamma) - \rho - 1 \leq m_0 < v(1+\gamma) - \rho$. Можно считать, что $v(1+\gamma) > \rho + 2$, поэтому $m_0 \geq 2$. Если выбрать $c_2(n)$ достаточно большим, то для $Q > Q_0(n)$ и для всех целых $m_0 \leq m \leq n$ найдется примитивный целочисленный полином $R_m(x)$ с условием:

$$\begin{cases} 2 \leq \deg R_m \leq m, \\ H(R_m) \leq Q^{\lambda_m}, \lambda_m = \frac{v(1+\gamma)-2-\rho}{m-1}, \\ |R_m(\xi)| < Q^{1-2v+\Delta} \quad \forall \xi \in K_0, \\ |R'_m(\xi)| < Q^{1-v+\Delta} \quad \forall \xi \in K_0. \end{cases}$$

У каждого $R_m(x)$ найдется делитель $t_{d,m}(x)$, который является степенью некоторого примитивного неприводимого целочисленного полинома, с условием

$$\begin{aligned} \deg t_{d,m} = k_{d,m} &\geq 2, H(t_{d,m}) = Q^{\lambda_{d,m}}, |t_{d,m}(\xi)| < Q^{-\tau_{d,m}} \quad \forall \xi \in K_0, \\ \tau_{d,m} &= (2v-1) - \frac{1}{2}m\lambda_m + \frac{1}{2}k_{d,m}\lambda_{d,m} + \frac{1}{2}(m-k_{d,m})(\lambda_m - \lambda_{d,m}) - 3\Delta, \\ \tau_{d,m} &> \frac{1}{2}(\rho + v(3-\gamma) + k_{d,m}\lambda_{d,m} - 1) - 3\Delta. \end{aligned} \quad (6)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Делители $t_{d,m}(x)$ всех полиномов $R_m(x)$, $m_0 \leq m \leq n$, являются степенями одного и того же примитивного неприводимого целочисленного полинома $p_0(x)$, т.е. $t_{d,m}(x) = p_0(x)^{e_{d,m}}$. Пусть $t_e(x) = p_0(x)^{\min e_{d,m}}$. Тогда $t_e(x)$ удовлетворяет следующему:

$$\begin{cases} \deg t_e = m_e \leq m_0 < v(1+\gamma) - \rho, \\ H(t_e) = Q^{\lambda_e} < Q^{\frac{v(1+\gamma)-2-\rho}{n-1} + \frac{\Delta}{n}}, \\ |t_e(\xi)| < Q^{-\tau_e} \quad \forall \xi \in K_0, \end{cases}$$

где τ_e оценивается (6).

Используя (5) для $t_e(x)$ и некоторого $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q, v, K_0)$ на интервале K_0 , докажем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Полином $t_e(x)$ имеет общие корни с каждым $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q, v, K_0)$. Отсюда следует, что все полиномы $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q, v, K_0)$ имеют общие корни, что противоречиво по определению. Это завершает доказательство теоремы 2.

3. Заключение

Использованный метод имеет перспективы для дальнейшего развития и получения более сильных оценок. С помощью индуктивного перехода к полиномам меньшей степени в теореме 2 можно получить более сильные оценки для производной полинома в предложении 2. Также в предложении 5 можно дополнительно рассмотреть полиномы $R_{m,\lambda}$ с условием $(m-1)\lambda > v(1+\gamma) - 2 - \rho$ и доказать, что их делители $t_{d,m,\lambda}(x)$ также являются степенями $p_0(x)$. Эти рассуждения дают более сильные оценки для $|t_e(\xi)|$. Авторы полагают, что данные идеи позволят им получить оценку (3) с $\gamma = 1$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Baker R. Sprindzuk's theorem and Hausdorff dimension // Mathematika. 1976. Т. 23, № 2. С. 184–197.

2. Beresnevich V., Bernik V., Götze F. The distribution of close conjugate algebraic numbers // *Compos. Math.* 2010. Т. 146, № 5. С. 1165–1179.
3. Beresnevich V., Bernik V., Götze F. Integral polynomials with small discriminants and resultants // *Advances in Mathematics.* 2016. Т. 298. С. 393–412.
4. Bernik V.I., Application of the Hausdorff dimension in the theory of Diophantine approximations // *Acta Arith.* 1983. Т. 42, №3. С. 219–253.
5. Берник В. И., Васильев Д. В., Кудин А. С. О числе целочисленных многочленов заданной степени и ограниченной высоты с малой производной в корне многочлена // *Труды Института математики НАН Беларуси.* 2014. Т. 22, № 2. С. 3–8.
6. Bernik V.I. Götze F. Distribution of real algebraic numbers of arbitrary degree in short intervals // *Izvestiya: Mathematics.* 2015. Т. 79, № 1. С. 18–39.
7. Bugeaud Y., Mignotte M. Polynomial root separation // *Int. J. Number Theory.* 2010. Т. 6, № 3. С. 587–602.
8. Cassels J. W. S. *An Introduction to Diophantine Approximation* (Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, №45) — Cambridge: Cambridge University Press. 1957.
9. Evertse J.-H. Distances between the conjugates of an algebraic number // *Publ. Math. Debrecen.* 2004. Т. 65. С. 323–340.
10. Гельфонд А. О. *Трансцендентные и алгебраические числа.* — Москва. 1952.
11. Schmidt W. *Diophantine approximation* (Lecture Notes in Math. № 785) — Berlin: Springer. 1980.
12. Спринджук В. Г. *Проблема Малера в метрической теории чисел* — Минск: Наука и Техника. 1967.
13. Tishchenko K. I., On approximation of real numbers by algebraic numbers of bounded degree // *Acta Arith.* 2000. Т. 94, №. 1. С. 1–24.

REFERENCES

1. Baker, R. 1976, “Sprindzuk’s theorem and Hausdorff dimension“, *Mathematika*, vol. 23, no. 2, pp. 184–197.
2. Beresnevich, V., Bernik, V. & Götze, F. 2010, “The distribution of close conjugate algebraic numbers“, *Compos. Math.*, vol. 146, no. 5, pp. 1165–1179.
3. Beresnevich, V., Bernik, V. & Götze, F. 2016, “Integral polynomials with small discriminants and resultants“, *Advances in Mathematics.*, vol. 298, pp. 393–412.
4. Bernik, V. 1983, “Application of the Hausdorff dimension in the theory of Diophantine approximations“, *Acta Arith.*, vol. 42, no. 3, pp. 219–253.
5. Bernik, V., Vasiliev, D. & Kudin, A. 2014, “On the number of integral polynomials of given degree and bounded height with small value of derivative at root of polynomial“, *Trudy Instituta matematiki NAN Belarusi*, vol. 22, no. 2, pp. 3–8.
6. Bernik, V. & Götze, F. 2015, “Distribution of real algebraic numbers of arbitrary degree in short intervals“, *Izvestiya: Mathematics*, vol. 79, no. 1, pp. 18–39.

7. Bugeaud, Y. & Mignotte, M. 2010, "Polynomial root separation" *Int. J. Number Theory*, vol. 6, no. 3, pp. 587–602.
8. Cassels, J. W. S. 1957, "An Introduction to Diophantine Approximation (Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, №45)" — Cambridge: Cambridge University Press.
9. Evertse, J.-H. 2004, "Distances between the conjugates of an algebraic number", *Publ. Math. Debrecen*, vol. 65, pp. 323–340.
10. Gelfond, A. 1952, "Transcendental and Algebraic Numbers" — Moscow.
11. Schmidt, W. 1980, "Diophantine approximation (Lecture Notes in Math. no. 785)" — Berlin: Springer.
12. Sprindzhuk, V. 1967, "Mahler's Problem in Metric Number Theory" — Minsk: Nauka i Tehnika.
13. Tishchenko, K. 2000, "On approximation of real numbers by algebraic numbers of bounded degree", *Acta Arith.*, vol. 94, no. 1, pp. 1–24.

Получено 28.05.2019 г.

Принято в печать 12.07.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 2.

УДК 511.331

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-55-81

Избранные вопросы теории сумматорных функций рядов Дирихле

Л. В. Варухина

Варухина Лидия Владимировна — Московский педагогический государственный университет (г. Москва).

e-mail: Lidadgema@mail.ru

Аннотация

Вопросы, связанные с исследованием *рядов Дирихле*

$$f(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^{-s}$$

и их сумматорных функций

$$\Phi(x) = \sum_{n \leq x} a_n$$

формируют один из центральных разделов классической теории чисел.

При определенных условиях на ряд

$$f(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^{-s}$$

функция $\Phi(x)$ может быть выражена через функцию $f(s)$, которую в этом случае называют *производящей функцией для коэффициентов ряда Дирихле*. Эта связь выражается известной *формулой Перрона*

$$\sum_{n \leq x} a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_0 - i\infty}^{c_0 + i\infty} f(s) \frac{x^s}{s} ds, \quad c_0 > \sigma_0,$$

где ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$$

для $f(s)$ абсолютно сходится при $\sigma > \sigma_0$. Точнее, классическая схема исследования сумматорной функции

$$\Phi(x) = \sum_{n \leq x} a_n$$

коэффициентов ряда Дирихле

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$$

опирается на формулу, при определенных условиях выражающую функцию $\Phi(x)$ через интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \frac{f(s)x^s}{s} ds.$$

В 1972 г. А. А. Карацуба получил "интегральную" формулу такого рода, которая связывает

$$\int_1^x \Phi(y) dy$$

с интегралом

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \frac{f(s)x^{s+1}}{s(s+1)} ds,$$

что позволяет получить новые результаты при исследовании соответствующих теоретико-числовых вопросов.

В данной статье представлена новая формула, выражающая сумматорную функцию

$$\Phi(x) = \sum_{n \leq x} a_n$$

ряда Дирихле

$$f(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^{-s}$$

через $f(s)$, родственная формуле Перрона и интегральной формуле А. А. Карацубы. Именно, доказано следующее утверждение.

- Пусть ряд

$$f(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^{-s}$$

абсолютно сходится при $\operatorname{Re} s > 1$, $a_n = O(n^\varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$ — произвольно малое действительное число, и при $\sigma \rightarrow 1+$ имеет место оценка

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n^{-\sigma} = O((\sigma - 1)^{-\alpha}), \quad \alpha > 0.$$

Тогда при любых $b \geq b_0 > 1$, $T \geq 1$, $x = N + 0,5$, $H > b$ имеет место формула

$$\begin{aligned} \Phi(x) = \sum_{n \leq x} a_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} f(s) \frac{x^s H}{s(H-s)} ds + \\ &+ O\left(\frac{x^b H}{T^2(b-1)^\alpha}\right) + O\left(\frac{x^{1+\varepsilon} H \log x}{T^2}\right) + O\left(x^\varepsilon e^{H \log \frac{x}{x+0,5}} \left(1 + \frac{x}{H}\right)\right). \end{aligned}$$

Наиболее известным рядом Дирихле является дзета-функция Римана, при $\operatorname{Re} s > 1$ определяемая равенством

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}.$$

Возведение дзета-функции Римана в k -ю степень при $\operatorname{Re} s > 1$ даст нам ряд Дирихле

$$\zeta^k(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \tau_k(n) n^{-s},$$

где $\tau_k(n)$ — число натуральных решений уравнения $x_1 \cdot \dots \cdot x_k = n$. Сумматорная функция коэффициентов этого ряда

$$D_k(x) = \sum_{n \leq x} \tau_k(n)$$

есть число точек с натуральными координатами под гиперболической поверхностью $x_1 \cdot \dots \cdot x_k = x$. Задачу об асимптотической оценке суммы $D_k(x)$ принято называть *проблемой делителей Дирихле*.

В данной статье мы доказываем две теоремы, дающие новые асимптотические формулы для функций

$$\sum_{n \leq x} \tau_{k_1}(n) \cdot \dots \cdot \tau_{k_l}(n)$$

и

$$\sum_{n \leq x} \tau_k(n^2),$$

родственных функции $D_k(x)$.

•

$$\sum_{n \leq x} \tau_{k_1}(n) \cdot \dots \cdot \tau_{k_l}(n) = xP_m(\log x) + \theta x^{1-\frac{1}{13}m^{-2/3}}(C \log x)^m,$$

где $l \geq 1$, $k_1, \dots, k_l \geq 2$, $m = k_1 \cdot \dots \cdot k_l$, P_m – многочлен степени $m-1$, θ – комплексное число, $|\theta| \leq 1$, $m \ll \log^{\frac{5}{6}} x$, $C > 0$ – абсолютная постоянная.

•

$$\sum_{n \leq x} \tau_k(n^2) = xP_m(\log x) + \theta x^{1-\frac{1}{13}m^{-2/3}}(C \log x)^m,$$

где $k \geq 2$, $m = \frac{k(k+1)}{2}$, P_m – многочлен степени $m-1$, θ – комплексное число, $|\theta| \leq 1$, $m \ll \log^{\frac{5}{6}} x$, $C > 0$ – абсолютная постоянная.

Другим хорошо известным примером рядов Дирихле являются L -функции Дирихле, при $\operatorname{Re} s > 1$ определяемые равенством

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n)n^{-s},$$

где χ – характер Дирихле по некоторому модулю D . Произведение нескольких L -функций Дирихле дает при $\operatorname{Re} s > 1$ ряд

$$L_1(s, \chi_1) \cdot \dots \cdot L_k(s, \chi_k) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n^{-s},$$

сумматорная функция коэффициентов которого имеет вид

$$C_k(x) = \sum_{n \leq x} c_n = \sum_{n_1 \cdot \dots \cdot n_k \leq x} \chi_1(n_1) \cdot \dots \cdot \chi_k(n_k).$$

Задача об асимптотической оценке функции $C_k(x)$ является обобщением проблемы делителей Дирихле и связана с проблемой делителей в числовых полях, в частности, квадратичном и круговом.

В данной статье получены новые асимптотические формулы для средних значений арифметических функций $\tau_{k_1}^K(n) \cdot \dots \cdot \tau_{k_l}^K(n)$ и $\tau_k^K(n^2)$, родственных функции делителей $\tau_k(n)$, в квадратичном поле $K = Q(\sqrt{D})$, D – бесквадратное число, и t -круговом поле $K = Q(\varsigma)$, $\varsigma^t = 1$, с константой $c = \frac{1}{13}$ в показателе остаточного члена.

Ключевые слова: ряды Дирихле, сумматорные функции коэффициентов рядов Дирихле, дзета-функция Римана, L -функции Дирихле, функция делителей, проблема делителей Дирихле.

Библиография: 22 названия.

Для цитирования:

Л. В. Варухина. Избранные вопросы теории сумматорных функций рядов Дирихле // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 2, с. 55–81.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 2.

UDC 511.331

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-55-81

Selected questions of the theory of adding functions of Dirichlet series

L. V. Varukhina

Varukhina Lidiya Vladimirovna — Moscow State Pedagogical University (Moscow).*e-mail: Lidadgema@mail.ru***Abstract**Investigation of *Dirichlet series*

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$$

and the *adding functions*

$$\Phi(x) = \sum_{n \leq x} a_n$$

of their coefficients forms one of central domains of classical Number Theory.

Under some special conditions for

$$f(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^{-s},$$

the function $\Phi(x)$ can be represented using $f(s)$. This connection is given by the famous *Perron formula*

$$\sum_{n \leq x} a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_0 - i\infty}^{c_0 + i\infty} f(s) \frac{x^s}{s} ds, \quad c_0 > \sigma_0,$$

where

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$$

for $f(s)$ is absolutely convergent for $\sigma > \sigma_0$. More precisely, classical scheme of a research of the adding function

$$\Phi(x) = \sum_{n \leq x} a_n$$

of coefficients of

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$$

leans on a formula, which (under certain conditions) is expressing the function $\Phi(x)$ through the integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \frac{f(s)x^s}{s} ds.$$

In 1972, A. A. Karatsuba received an "integrated" formula of such kind, which connects

$$\int_1^x \Phi(y) dy$$

with the integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \frac{f(s)x^{s+1}}{s(s+1)} ds.$$

This formula allows to receive new results in the research of corresponding number-theoretical questions.

In this paper we present a new formula, expressing the adding function

$$\Phi(x) = \sum_{n \leq x} a_n$$

of

$$f(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^{-s}$$

through $f(s)$, related to the Perron formula and to the integrated formula of A. A. Karatsuba. In fact, the following statement is proved.

- *Let the row*

$$f(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^{-s}$$

is absolutely convergent for $\operatorname{Re} s > 1$, $a_n = O(n^\varepsilon)$, where $\varepsilon > 0$ is any small real number, and for $\sigma \rightarrow 1+$ there is an estimation

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n^{-\sigma} = O((\sigma - 1)^{-\alpha}), \quad \alpha > 0.$$

Then for any $b \geq b_0 > 1$, $T \geq 1$, $x = N + 0,5$, $H > b$ we have the formula

$$\begin{aligned} \Phi(x) = \sum_{n \leq x} a_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} f(s) \frac{x^s H}{s(H-s)} ds + \\ &+ O\left(\frac{x^b H}{T^2(b-1)^\alpha}\right) + O\left(\frac{x^{1+\varepsilon} H \log x}{T^2}\right) + O\left(x^\varepsilon e^{H \log \frac{x}{x+0,5}} \left(1 + \frac{x}{H}\right)\right). \end{aligned}$$

The most famous Dirichlet series is the *Riemann zeta function* $\zeta(s)$, defined for any $s = \sigma + it$ with $\operatorname{Re} s = \sigma > 1$ as

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

The square of zeta function is connected with the *divisor function*

$$\tau(n) = \sum_{d|n} 1,$$

giving the number of positive integer divisors of positive integer number n . Generally,

$$\zeta^k(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_k(n)}{n^s}, \quad \operatorname{Re} s > 1,$$

where function

$$\tau_k(n) = \sum_{n=n_1 \dots n_k} 1$$

gives the number of representations of a positive integer number n as a product of k positive integer factors. The adding function of the Dirichlet series $\zeta^k(s)$ is the function

$$D_k(x) = \sum_{n \leq x} \tau_k(n);$$

its research is known as the *Dirichlet divisor problem*.

In this article we prove two new asymptotic formulas for the functions

$$\sum_{n \leq x} \tau_{k_1}(n) \cdot \dots \cdot \tau_{k_l}(n)$$

и

$$\sum_{n \leq x} \tau_k(n^2),$$

connected with $D_k(x)$.

•

$$\sum_{n \leq x} \tau_{k_1}(n) \cdot \dots \cdot \tau_{k_l}(n) = xP_m(\log x) + \theta x^{1-\frac{1}{13}m^{-2/3}} (C \log x)^m,$$

where $l \geq 1$, $k_1, \dots, k_l \geq 2$, $m = k_1 \cdot \dots \cdot k_l$, P_m is a polynomial of degree $m - 1$, θ is a complex number, $|\theta| \leq 1$, $m \ll \log^{\frac{5}{6}} x$, $C > 0$ is an absolute constant.

•

$$\sum_{n \leq x} \tau_k(n^2) = xP_m(\log x) + \theta x^{1-\frac{1}{13}m^{-2/3}} (C \log x)^m,$$

where $k \geq 2$, $m = \frac{k(k+1)}{2}$, P_m is a polynomial of degree $m - 1$, θ is a complex number, $|\theta| \leq 1$, $m \ll \log^{\frac{5}{6}} x$, $C > 0$ is an absolute constant.

Other well-known example of Dirichlet series is given by Dirichlet L -function

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^{-s}, \operatorname{Re} s > 1,$$

where χ is a Dirichlet character modulo D . A product of several L -functions gives for $\operatorname{Re} s > 1$ a row

$$L_1(s, \chi_1) \cdot \dots \cdot L_k(s, \chi_k) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n^{-s},$$

with adding function

$$C_k(x) = \sum_{n \leq x} c_n = \sum_{n_1 \cdot \dots \cdot n_k \leq x} \chi_1(n_1) \cdot \dots \cdot \chi_k(n_k).$$

The problem of asymptotic behavior of $C_k(x)$ is a generalisation of the Dirichlet divisor problem. It is connected with the divisor problem in number fields, in particular, in quadratic fields and in cyclotomic fields.

In this article we give new asymptotic formulas for the mean values of the two functions $\tau_{k_1}^K(n) \cdot \dots \cdot \tau_{k_l}^K(n)$ and $\tau_k^K(n^2)$, connected with the function $\tau_k(n)$, in the quadratic field $K = Q(\sqrt{D})$, D is squarefree integer number, and in cyclotomic field $K = Q(\varsigma)$, $\varsigma^t = 1$, with the constant $c = \frac{1}{13}$ in the exponent of the error term.

Keywords: Dirichlet series, adding functions of the coefficients of Dirichlet series, Riemann zeta function, Dirichlet L -function, divisor function, Dirichlet divisor problem.

Bibliography: 22 titles.

For citation:

L. V. Varukhina, 2019, "Selected questions of the theory of adding functions of Dirichlet series", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 2, pp. 55–81.

1. Введение

Вопросы, связанные с исследованием *рядов Дирихле*, то есть выражений вида

$$f(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^{-s}, \quad (1)$$

где a_n – комплексные числа, называемые *коэффициентами ряда Дирихле*, а $s = \sigma + it$ – комплексная переменная, формируют один из центральных разделов классической теории чисел ([1], [2], [15], [16], [21] и др.).

С рядом $f(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^{-s}$ (1) тесно связана функция

$$\Phi(x) = \sum_{n \leq x} a_n,$$

которую называют *сумматорной функцией коэффициентов ряда Дирихле* (1).

При определенных условиях на ряд (1) функция $\Phi(x)$ может быть выражена через функцию $f(s)$, которую в этом случае называют *производящей функцией для коэффициентов ряда Дирихле*. Эта связь выражается известной *формулой Перрона* (см., например, [17]):

$$\sum_{n \leq x} a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_0 - i\infty}^{c_0 + i\infty} f(s) \frac{x^s}{s} ds, \quad c_0 > \sigma_0,$$

где ряд (1) для $f(s)$ абсолютно сходится при $\sigma > \sigma_0$.

Точнее, классическая схема исследования сумматорной функции $\Phi(x) = \sum_{n \leq x} a_n$ коэффициентов ряда Дирихле (1) опирается на формулу, при определенных условиях выражающую функцию $\Phi(x)$ через интеграл $\frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \frac{f(s)x^s}{s} ds$. Именно, имеет место следующее утверждение ([8], с. 75).

Пусть ряд $f(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^{-s}$ для $f(s)$ абсолютно сходится при $\operatorname{Re} s > 1$, $|a_n| \leq A(n)$, и при $\sigma \rightarrow 1+$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| n^{-\sigma} = O((\sigma - 1)^{-\alpha}), \quad \alpha > 0.$$

Тогда при любых $b \geq b_0 > 1$, $T \geq 1$, $x = N + 0,5$ имеет место формула

$$\Phi(x) = \sum_{n \leq x} a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} f(s) \frac{x^s}{s} ds + O\left(\frac{x^b}{T(b-1)^\alpha}\right) + O\left(\frac{x A(2x) \log x}{T}\right).$$

В 1972 г. А. А. Карацуба получил новую "интегральную" формулу такого рода ([6]), которая связывает $\int_1^x \Phi(y) dy$ с интегралом $\frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \frac{f(s)x^{s+1}}{s(s+1)} ds$, что позволяет получить новые результаты при исследовании соответствующих теоретико-числовых вопросов. Именно, имеет место следующее утверждение.

ЛЕММА 1. Пусть ряд $f(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^{-s}$ для $f(s)$ абсолютно сходится при $\operatorname{Re} s > 1$; пусть $\Phi(\xi) = \sum_{n \leq \xi} a_n$, и при некотором $b > 1$

$$B(b) = \int_1^{+\infty} \frac{|\Phi(\xi)|}{\xi^{b+1}} d\xi.$$

Тогда при любых $x \geq 1$, $T \geq 2$ имеет место формула

$$\int_1^x \Phi(\xi) d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \frac{F(s)x^{s+1}}{s(s+1)} ds + R(x),$$

где

$$R(x) \leq C \left(B(b) \frac{x^{b+1}}{T} + 2^b \left(\frac{x \log x}{T} + \log T \left(\max_{0,5x \leq \xi \leq 1,5x} |A(\xi)| \right) \right) \right).$$

Во втором разделе данной статьи представлена новая формула, выражающая сумматорную функцию $\Phi(x) = \sum_{n \leq x} a_n$ ряда Дирихле (1) через $f(s)$, родственная формуле Перрона ([8]) и интегральной формуле А. А. Карацубы ([6]).

ТЕОРЕМА 1. (Стр. 66) Пусть ряд $f(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^{-s}$ абсолютно сходится при $\operatorname{Re} s > 1$, $a_n = O(n^\varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$ - произвольно малое действительное число, и при $\sigma \rightarrow 1+$ имеет место оценка

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n^{-\sigma} = O((\sigma - 1)^{-\alpha}), \quad \alpha > 0.$$

Тогда при любых $b \geq b_0 > 1$, $T \geq 1$, $x = N + 0,5$, $H > b$ имеет место формула

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \sum_{n \leq x} a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} f(s) \frac{x^s H}{s(H-s)} ds + \\ &+ O\left(\frac{x^b H}{T^2(b-1)^\alpha}\right) + O\left(\frac{x^{1+\varepsilon} H \log x}{T^2}\right) + O\left(x^\varepsilon e^{H \log \frac{x}{x+0,5}} \left(1 + \frac{x}{H}\right)\right). \end{aligned}$$

Наиболее известным рядом Дирихле является дзета-функция Римана, при $\operatorname{Re} s > 1$ определяемая равенством

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}, \quad \operatorname{Re} s > 1.$$

Используя тождество Эйлера ([8], с. 61)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s} = \prod_{p \in P} (1 - p^{-s})^{-1}, \quad \operatorname{Re} s > 1,$$

можно получить некоторые связанные с дзета-функцией Римана ряды Дирихле, сумматорные функции коэффициентов которых играют важную роль при решении ряда классических задач теории чисел (см. [3], [4], [6], [7], [10], [11], [12], [13], [14], [18], [19], [20], [22] и др.).

Так, логарифмическая производная $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ дзета-функции Римана при $\operatorname{Re} s > 1$ задается рядом Дирихле

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \Lambda(n) n^{-s}, \quad \operatorname{Re} s > 1,$$

коэффициентами которого являются значения функции Мангольдта $\Lambda(n)$.

Сумматорной функцией коэффициентов этого ряда будет известная функция Чебышева

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n).$$

Используя формулу Перрона и сведения о границе нулей дзета-функции Римана в критической полосе, нетрудно получить для $\psi(x)$ асимптотическую формулу ([8])

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) = x + O(xe^{-C_1 \sqrt{\log x}}),$$

что равносильно асимптотическому закону распределения простых чисел ([8])

$$\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1 = \operatorname{li} x + O(xe^{-0,5C_1\sqrt{\log x}}).$$

Хорошо известно и следующее представление функции Чебышева $\psi(x)$ в виде суммы по нулям дзета-функции Римана ([8], с. 80):

$$\psi(x) = x - \sum_{|\operatorname{Im} \rho| \leq T} \frac{x^\rho}{\rho} + O\left(\frac{x \log^2 x}{T}\right),$$

где $x = N + 0,5$, $N \in \mathbb{N}$, $2 \leq T \leq x$, и $\rho = \beta + i\gamma$ — нетривиальные нули дзета-функции Римана $\zeta(s)$.

Данное соотношение является классическим примером явных формул, связывающих различные суммы по простым числам с нулями $\zeta(s)$.

В работе Е. И. Деза и Л. В. Варухиной [4] получено аналогичное разложение по нетривиальным нулям дзета-функции Римана для двух арифметических функций, родственных функции Чебышева:

$$\psi_1(x) = \sum_{n \leq x} (x - n)\Lambda(n) \text{ и } \psi_2(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \log \frac{x}{n}.$$

Возведение дзета-функции Римана в k -ю степень при $\operatorname{Re} s > 1$ даст нам ряд Дирихле

$$\zeta^k(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \tau_k(n) n^{-s}, \quad \operatorname{Re} s > 1,$$

где $\tau_k(n)$ — число натуральных решений уравнения $x_1 \cdot \dots \cdot x_k = n$. Сумматорная функция коэффициентов этого ряда

$$D_k(x) = \sum_{n \leq x} \tau_k(n)$$

есть число точек с натуральными координатами под гиперболической поверхностью

$$x_1 \cdot \dots \cdot x_k = x,$$

в частности, для $k = 2$, под гиперболой $x_1 \cdot x_2 = x$.

Задачу об асимптотической оценке суммы $D_k(x)$ принято называть *проблемой делителей Дирихле*. Наряду с *проблемой Гаусса о числе целых точек в круге*, она является частным случаем проблемы о числе целых точек в некоторой замкнутой области.

Пользуясь формулой Перрона, нетрудно получить соотношение

$$D_k(x) = \sum_{n \leq x} \tau_k(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_1 - i\infty}^{c_1 + i\infty} \zeta^k(s) \frac{x^s}{s} ds, \quad c_1 > 1.$$

Переноса прямую интегрирования влево, мы перейдем через полюс функции $\zeta^k(s) \frac{x^s}{s}$ порядка k с вычетом $xP_k(\log x)$ в точке $s = 1$, где P_k — многочлен степени $k - 1$. Таким образом,

$$D_k(x) = xP_k(\log x) + \Delta_k(x),$$

где

$$\Delta_k(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_2 - i\infty}^{c_2 + i\infty} \zeta^k(s) \frac{x^s}{s} ds, \quad 0 < c_2 < 1.$$

Классические теоремы Дирихле (1849 г., [20]) и Ландау (1912 г., [22]) дают для остаточного члена $\Delta_k(x)$ оценку

$$\Delta_k(x) = O(x^{\alpha_k + \varepsilon}),$$

где

$$\alpha_k \leq 1 - \frac{1}{k}, \quad k \geq 2. \quad (2)$$

А. А. Карацуба (1971 г., [5]) доказал, что

$$\alpha_k \leq 1 - \frac{c}{k^{2/3}}, \quad k \geq 2, \quad (3)$$

получив, кроме того (1972 г., [6]), оценку $\Delta_k(x)$, равномерную по всем $2 \leq x \leq \log x$. (Развернутую историю вопроса см., например, в [3].)

В работе Пантелеевой (Деза) Е. И. (1988 г., [10]) была получена оценка

$$\alpha_k \leq 1 - \frac{2}{31k^{2/3}}, \quad k \geq 2,$$

равномерная по всем $2 \leq k \leq \log x$.

В статье [3] Е. И. Деза и Е. И. Варухиной удалось улучшить значение константы c в показателе остаточного члена $O(x^{1-ck^{-2/3}+\varepsilon})$ асимптотической формулы для $D_k(x) = \sum_{n \leq x} \tau_k(n)$, получив величину $c = \frac{1}{13}$.

Аналогичные результаты (улучшающие [12]) могут быть получены и для средних значений двух других арифметических функций, подобных функции делителей. Именно, в данной статье мы доказываем две теоремы, дающие асимптотические формулы для функций $\sum_{n \leq x} \tau_{k_1}(n) \cdot \dots \cdot \tau_{k_l}(n)$ и $\sum_{n \leq x} \tau_k(n^2)$.

ТЕОРЕМА 2. (Стр. 69) *Имеет место формула*

$$\sum_{n \leq x} \tau_{k_1}(n) \cdot \dots \cdot \tau_{k_l}(n) = xP_m(\log x) + \theta x^{1-\frac{1}{13}m^{-2/3}} (C \log x)^m,$$

где $l \geq 1$, $k_1, \dots, k_l \geq 2$, $m = k_1 \cdot \dots \cdot k_l$, P_m — многочлен степени $m-1$, θ — комплексное число, $|\theta| \leq 1$, $m \ll \log^{\frac{5}{6}} x$, $C > 0$ — абсолютная постоянная.

ТЕОРЕМА 3. (Стр. 70) *Имеет место формула*

$$\sum_{n \leq x} \tau_k(n^2) = xP_m(\log x) + \theta x^{1-\frac{1}{13}m^{-2/3}} (C \log x)^m,$$

где $k \geq 2$, $m = \frac{k(k+1)}{2}$, P_m — многочлен степени $m-1$, θ — комплексное число, $|\theta| \leq 1$, $m \ll \log^{\frac{5}{6}} x$, $C > 0$ — абсолютная постоянная.

Другим хорошо известным примером рядов Дирихле являются L -функции Дирихле, при $\operatorname{Re} s > 1$ определяемые равенством

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n)n^{-s}, \quad \operatorname{Re} s > 1,$$

где χ — характер Дирихле по некоторому модулю D . Произведение нескольких L -функций Дирихле дает при $\operatorname{Re} s > 1$ ряд

$$L_1(s, \chi_1) \cdot \dots \cdot L_k(s, \chi_k) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n^{-s}, \quad \operatorname{Re} s > 1,$$

сумматорная функция коэффициентов которого имеет вид

$$C_k(x) = \sum_{n \leq x} c_n = \sum_{n_1 \dots n_k \leq x} \chi_1(n_1) \cdot \dots \cdot \chi_k(n_k).$$

Задача об асимптотической оценке функции $C_k(x)$ является обобщением проблемы делителей Дирихле и связана с проблемой делителей в числовых полях, в частности, квадратичном и t -круговом.

Классическими в этой области являются результаты Ландау (1912 г., [22]), который получил для $C_k(x)$ асимптотическую формулу

$$C_k(x) = \sum_{n \leq x} c(n) = \text{Res}_{s=1} \frac{L_1(s, \chi_1) \cdot \dots \cdot L_k(s, \chi_k)}{s} + O(x^{\alpha_k + \varepsilon}),$$

где

$$\alpha_k \leq 1 - \frac{2}{k+1}, \quad k \geq 2. \quad (4)$$

Отметим, что эта оценка является улучшением результата

$$\alpha_k \leq 1 - \frac{1}{k}, \quad k \geq 2,$$

который следует из работы Дирихле [20].

А. А. Карацуба (1972 г., [7]) получил для α_k оценку

$$\alpha_k \leq 1 - \frac{c}{k^{2/3}}, \quad k \geq 2, \quad (5)$$

где k — фиксированное натуральное число, $\chi_1, \dots, \chi_k$ — характеры Дирихле по некоторым фиксированным модулям $D_1, \dots, D_k$, а c — абсолютная постоянная.

В работе Пантелеевой (Деза) Е. И. (1988 г., [10]) была получена оценка

$$\alpha_k \leq 1 - \frac{2}{31k^{2/3}}, \quad k \geq 2,$$

равномерная по всем $2 \leq k \leq \log x$, причем здесь была учтена возможность некоторого роста модулей $D_1, \dots, D_k$, по которым рассматриваются характеры Дирихле $\chi_1, \dots, \chi_k$.

В статье Деза Е. И. и Варухиной Л. В. [3] было доказано, что можно заменить константу $\frac{2}{31}$ в показателе остаточного члена на константу $c = \frac{1}{13}$. Это дало возможность улучшить остаточные члены проблемы делителей в числовых полях, именно, в квадратичном поле $K = Q(\sqrt{D})$, где D — бесквадратное число, и в t -круговом поле $K = Q(\varsigma)$, где $\varsigma^t = 1$, $t > 1$ — натуральное число ([3]).

Новые результаты о поведении функции $C_k(x)$ позволяют нам получить новые асимптотические формулы для средних значений арифметических функций $\tau_k^K(n) = \sum_{N(U_1 \dots U_k)=n} 1$, $\tau_{k_1}^K(n) \cdot \dots \cdot \tau_{k_l}^K(n)$ и $\tau_k^K(n^2)$, родственных функции делителей $\tau_k(n)$, в квадратичном поле $K = Q(\sqrt{D})$, D — бесквадратное число, и t -круговом поле $K = Q(\varsigma)$, $\varsigma^t = 1$, с константой $c = \frac{1}{13}$ в показателе остаточного члена. Это уточняет и обобщает результаты работы Пантелеевой (Деза) Е. И. ([12]), где соответствующие формулы с константой $c = \frac{2}{31}$ в показателе остаточного члена были получены для классического случая функций $\tau_{k_1}(n) \cdot \dots \cdot \tau_{k_l}(n)$ и $\tau_k(n^2)$ в поле рациональных чисел, а также работы [18], где для случая квадратичного и кругового полей получены оценки остаточного члена с константой $\frac{1}{15}$.

ТЕОРЕМА 4. (Стр. 70) *Для квадратичного поля $K = Q(\sqrt{D})$, D — бесквадратное число, имеет место формула*

$$\sum_{n \leq x} \tau_{k_1}^K(n) \cdot \dots \cdot \tau_{k_l}^K(n) = x P_m(\log x) + \theta x^{1 - \frac{1}{19} m^{-2/3}} (C \log x)^{2m},$$

где $l \geq 1$, $k_1, \dots, k_l \geq 2$, $m = k_1 \cdot \dots \cdot k_l$, P_m – многочлен степени $m-1$, $m \ll \log^{\frac{5}{6}} x$, $|D| \ll \log^2 x$, θ – комплексное число, $|\theta| \leq 1$, $C > 0$ – абсолютная постоянная.

ТЕОРЕМА 5. (Стр. 73) Для квадратичного поля $K = Q(\sqrt{D})$, D – бесквадратное число, имеет место формула

$$\sum_{n \leq x} \tau_k^K(n^2) = xP_m(\log x) + \theta x^{1-\frac{1}{19}m^{-2/3}} (C \log x)^{2m},$$

где $k \geq 2$, $m = \frac{k(k+1)}{2}$, P_m – многочлен степени $m-1$, $m \ll \log^{\frac{5}{6}} x$, $|D| \ll \log^2 x$, θ – комплексное число, $|\theta| \leq 1$, $C > 0$ – абсолютная постоянная.

ТЕОРЕМА 6. (Стр. 75) Для t -кругового поля $K = Q(\varsigma)$, $\varsigma^t = 1$, имеет место формула

$$\sum_{n \leq x} \tau_{k_1}^K(n) \cdot \dots \cdot \tau_{k_l}^K(n) = xP_m(\log x) + \theta x^{1-\frac{1}{13}(\varphi(t)m)^{-2/3}} (C \log x)^{\varphi(t)m},$$

где $t > 1$ – натуральное число, $t \ll \log^{5/6} x$, $l \geq 1$, $k_1, \dots, k_l \geq 2$, $m = k_1 \cdot \dots \cdot k_l$, P_m – многочлен степени $m-1$, $m \ll \log^{\frac{5}{6}} x$, $\varphi(t) = |\{x \in \mathbb{N} : x \leq t, (x, t) = 1\}|$ – функция Эйлера, θ – комплексное число, $|\theta| \leq 1$, $C > 0$ – абсолютная постоянная.

ТЕОРЕМА 7. (Стр. 77) Для t -кругового поля $K = Q(\varsigma)$, $\varsigma^t = 1$, имеет место формула

$$\sum_{n \leq x} \tau_k^K(n^2) = xP_m(\log x) + \theta x^{1-\frac{1}{13}(\varphi(t)m)^{-2/3}} (C \log x)^{\varphi(t)m},$$

где $t > 1$ – натуральное число, $t \ll \log^{5/6} x$, $k \geq 2$, $m = \frac{k(k+1)}{2}$, P_m – многочлен степени $m-1$, $m \ll \log^{\frac{5}{6}} x$, $\varphi(t) = |\{x \in \mathbb{N} : x \leq t, (x, t) = 1\}|$ – функция Эйлера, θ – комплексное число, $|\theta| \leq 1$, $C > 0$ – абсолютная постоянная.

2. Оценка сумматорных функций рядов Дирихле

В этом разделе мы представляем новую формулу, связывающую ряд Дирихле и его сумматорную функцию. Именно, имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Пусть ряд $f(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^{-s}$ абсолютно сходится при $\operatorname{Re} s > 1$, $a_n = O(n^\varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$ – произвольно малое действительное число, и при $\sigma \rightarrow 1+$ имеет место оценка

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n^{-\sigma} = O((\sigma - 1)^{-\alpha}), \quad \alpha > 0.$$

Тогда при любых $b \geq b_0 > 1$, $T \geq 1$, $x = N + 0,5$, $H > b$ имеет место формула

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \sum_{n \leq x} a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} f(s) \frac{x^s H}{s(H-s)} ds + \\ &+ O\left(\frac{x^b H}{T^2(b-1)^\alpha}\right) + O\left(\frac{x^{1+\varepsilon} H \log x}{T^2}\right) + O\left(x^\varepsilon e^{H \log \frac{x}{x+0,5}} \left(1 + \frac{x}{H}\right)\right). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

I. Докажем сначала, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \frac{a^s H}{s(H-s)} ds = \begin{cases} 1 + O\left(\frac{a^b H}{T^2 |\log a|}\right), & a > 1, \\ -a^H + O\left(\frac{a^b H}{T^2 |\log a|}\right), & 0 < a < 1. \end{cases}$$

1. Пусть $a > 1$. Рассмотрим контур Γ с вершинами $b \pm iT$, $-U \pm iT$, где U – произвольное действительное число, большее b . Тогда

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{a^s H}{s(H-s)} ds = \operatorname{Res}_{a=0} \frac{a^s H}{s(H-s)} = a^0 = 1,$$

откуда

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \frac{a^s H}{s(H-s)} ds = 1 - I_1 - I_2 - I_3,$$

где I_1, I_2, I_3 – интегралы по верхней, нижней и левой сторонам контура Γ . Интегралы I_1 и I_2 по верхней и нижней сторонам контура Γ оцениваются одинаково:

$$\begin{aligned} |I_1| = |I_2| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-U}^b \frac{a^\sigma H}{\sqrt{\sigma^2 + T^2} \cdot \sqrt{(H-\sigma)^2 + T^2}} d\sigma \leq \frac{H}{T^2} \int_{-U}^b a^\sigma d\sigma = \\ &= \frac{Ha^\sigma}{T \log a} \Big|_{-U}^b = \frac{H(a^b - a^{-U})}{T^2 \log a} \leq \frac{a^b H}{T^2 |\log a|}. \end{aligned}$$

Для интеграла I_3 по левой стороне контура Γ имеет место оценка

$$|I_3| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{a^{-U} H}{\sqrt{U^2 + t^2} \cdot \sqrt{(H+U)^2 + t^2}} dt \leq \frac{a^{-U} H}{(H+U)U} \int_{-T}^T dt \leq \frac{2Ta^{-U}}{U}.$$

Так как для $a > 1$ при $U \rightarrow +\infty$ имеет место соотношение $\frac{a^{-U}}{U} \rightarrow 0$, то

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \frac{a^s H}{s(H-s)} ds = 1 + O\left(\frac{a^b H}{T^2 |\log a|}\right).$$

2. Пусть $0 < a < 1$. Рассмотрим контур Γ с вершинами $b \pm iT$, $U \pm iT$, где U – произвольное действительное число, большее H . Тогда

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{a^s H}{s(H-s)} ds = \operatorname{Res}_{s=H} \frac{a^s H}{s(H-s)} = \lim_{s \rightarrow H} \frac{(s-H)a^s H}{s(H-s)} = a^{-H},$$

откуда

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \frac{a^s H}{s(H-s)} ds = a^{-H} - I_1 - I_2 - I_3,$$

где I_1, I_2, I_3 – интегралы по верхней, нижней и левой сторонам контура Γ , соответственно. Интегралы I_1 и I_2 по верхней и нижней сторонам контура Γ оцениваются одинаково:

$$\begin{aligned} |I_1| = |I_2| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_b^U \frac{a^\sigma H}{\sqrt{\sigma^2 + T^2} \cdot \sqrt{(H-\sigma)^2 + T^2}} d\sigma \leq \frac{H}{T^2} \int_b^U a^\sigma d\sigma = \\ &= \frac{H(a^b - a^U)}{T^2 |\log a|} \leq \frac{a^b H}{T^2 |\log a|}. \end{aligned}$$

Для интеграла I_3 по левой стороне контура Γ имеет место оценка

$$|I_3| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{a^U H}{\sqrt{U^2 + t^2} \cdot \sqrt{(U - H)^2 + t^2}} dt \leq \frac{a^U H}{U(U - H)} \int_{-T}^T dt \leq \frac{2Ta^U H}{U(U - H)}.$$

Так как для $0 < a < 1$ при $U \rightarrow +\infty$ имеет место соотношение $\frac{a^U}{U} \rightarrow 0$, то

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \frac{a^s H}{s(H-s)} ds = a^{-H} + O\left(\frac{a^b H}{T^2 |\log a|}\right).$$

II. Ряд $f(s)$ абсолютно и равномерно сходится при $s = b + it$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} f(s) \frac{x^s H}{s(H-s)} ds &= \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^{-s} \right) \frac{x^s H}{s(H-s)} ds = \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \frac{\left(\frac{x}{n}\right)^s H}{s(H-s)} ds \right) = \sum_{n \leq x} a_n \left(1 + O\left(\frac{\left(\frac{x}{n}\right)^b H}{T^2 |\log \frac{x}{n}|}\right) \right) + \\ &+ \sum_{n > x} a_n \left(-\left(\frac{x}{n}\right)^H + O\left(\frac{\left(\frac{x}{n}\right)^b H}{T^2 |\log \frac{x}{n}|}\right) \right) = \sum_{n \leq x} a_n + R_1 + R_2, \end{aligned}$$

где

$$R_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n O\left(\frac{\left(\frac{x}{n}\right)^b H}{T^2 |\log \frac{x}{n}|}\right), \quad R_2 = -\sum_{n > x} a_n \left(\frac{x}{n}\right)^H.$$

Другими словами,

$$\Phi(x) = \sum_{n \leq x} a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} f(s) \frac{x^s H}{s(H-s)} ds - R_1 - R_2.$$

1. Оценим сумму R_1 . Пусть $R_1 = R'_1 + R''_1$, где R'_1 содержит слагаемые, для которых $\frac{x}{n} \leq 0,5$ или $\frac{x}{n} \geq 2$, а R''_1 содержит слагаемые с $0,5 < \frac{x}{n} < 2$. Тогда для R'_1 выполняется оценка $|\log \frac{x}{n}| \geq 2$, и, с учетом оценки $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^{-b} = O((b-1)^{-\alpha})$, мы получаем, что

$$R'_1 = O\left(\frac{x^b H}{T^2 (b-1)^\alpha}\right).$$

Условие $0,5 < \frac{x}{n} < 2$ равносильно условию $\frac{x}{2} < n < 2x$, то есть

$$R''_1 = O\left(\left(\sum_{\frac{x}{2} < n < 2x} |a_n| n^{-b}\right) \frac{x^b H}{T^2 |\log \frac{x}{n}|}\right).$$

Если $n = N$, то

$$\log \frac{x}{n} = \log \frac{N+0,5}{N} = \log \left(1 + \frac{1}{2N}\right) = \frac{1}{2N} - \frac{1}{8N^2} + \dots \geq \frac{1}{2N} - \frac{1}{8N^2} \geq \frac{1}{4N}.$$

Если $n = N-1$, то

$$\log \frac{x}{n} = \log \frac{N+0,5}{N-1} = \log \left(1 + \frac{1,5}{N-1}\right) = \frac{1,5}{N-1} - \frac{2,25}{2(N-1)^2} + \dots \geq \frac{1}{4N}.$$

Если $n = N + 1$, то

$$\begin{aligned} \left| \log \frac{x}{n} \right| &= \left| \log \frac{N+0,5}{N+1} \right| = \left| \log \left(1 - \frac{0,5}{N+1} \right) \right| = \\ &= \left| -\frac{0,5}{N+1} - \frac{0,25}{2(N+1)^2} - \dots \right| = \frac{0,5}{N+1} + \frac{0,25}{2(N+1)^2} + \dots \geq \frac{1}{4N}. \end{aligned}$$

Тогда, с учетом оценки $a_n = O(n^\varepsilon)$, мы получаем, что

$$O \left(\left(\sum_{N-1 \leq n \leq N+1} |a_n| n^{-b} \right) \frac{x^b H}{T^2 |\log \frac{x}{n}|} \right) = O \left(\frac{x^\varepsilon H N}{T^2} \right) = O \left(\frac{x^{1+\varepsilon} H}{T^2} \right).$$

Так как при $\frac{x}{2} < n < N - 1$ и при $N + 1 < n < 2x$ имеет место оценка

$$\sum_{\frac{x}{2} < n < x - \frac{3}{2}} \left| \log \frac{x}{n} \right|^{-1} + \sum_{x + \frac{1}{2} < n < 2x} \left| \log \frac{x}{n} \right|^{-1} = O(x \log x),$$

то

$$R_1'' = O \left(\frac{x^{1+\varepsilon} H \log x}{T^2} \right).$$

2. Оценим сумму R_2 . С учетом оценки $a_n = O(n^\varepsilon)$ получим, что

$$\begin{aligned} R_2 &= O \left(\sum_{n > x} |a_n| \left(\frac{x}{n} \right)^H \right) = O \left(x^H \sum_{n=N+1}^{+\infty} n^{-H+\varepsilon} \right) = \\ &= O \left(x^H \left((N+1)^{-H+\varepsilon} + \int_{N+1}^{+\infty} u^{-H+\varepsilon} du \right) \right) = \\ &= O \left(x^H \left((N+1)^{-H+\varepsilon} + \frac{(N+1)^{-H+\varepsilon+1}}{H-\varepsilon-1} \right) \right) = \\ &= O \left(\left(\frac{x}{N+1} \right)^H (N+1)^\varepsilon \left(1 + \frac{N+1}{H-\varepsilon-1} \right) \right) = \\ &= O \left(\left(\frac{x}{x+0,5} \right)^H x^\varepsilon \left(1 + \frac{x}{H} \right) \right) = O \left(x^\varepsilon e^{H \log \frac{x}{x+0,5}} \left(1 + \frac{x}{H} \right) \right). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$R_1' + R_1'' + R_2 = O \left(\frac{x^b H}{T^2 (b-1)^\alpha} \right) + O \left(\frac{x^{1+\varepsilon} H \log x}{T^2} \right) + O \left(x^\varepsilon e^{H \log \frac{x}{x+0,5}} \left(1 + \frac{x}{H} \right) \right),$$

откуда следует утверждение теоремы. $\square$

3. Средние значения функций, родственных функции делителей

В этом разделе мы прежде всего представляем две теоремы, дающие асимптотические формулы для функций $\sum_{n \leq x} \tau_{k_1}(n) \cdot \dots \cdot \tau_{k_l}(n)$ и $\sum_{n \leq x} \tau_k(n^2)$.

ТЕОРЕМА 2. *Имеет место формула*

$$\sum_{n \leq x} \tau_{k_1}(n) \cdot \dots \cdot \tau_{k_l}(n) = x P_m(\log x) + \theta x^{1-\frac{1}{13}m^{-2/3}} (C \log x)^m,$$

где $l \geq 1$, $k_1, \dots, k_l \geq 2$, $m = k_1 \cdot \dots \cdot k_l$, P_m – многочлен степени $m-1$, θ – комплексное число, $|\theta| \leq 1$, $m \ll \log^{\frac{5}{6}} x$, $C > 0$ – абсолютная постоянная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство теоремы 2 может быть получено по схеме, приведенной в [12], с использованием новых результатов об оценке дзета-функции Римана в критической полосе, полученной в [3]. Подробное изложение указанной схемы в несколько более общем случае мы приводим ниже при доказательстве теоремы 4. $\square$

ТЕОРЕМА 3. *Имеет место формула*

$$\sum_{n \leq x} \tau_k(n^2) = xP_m(\log x) + \theta x^{1-\frac{1}{13}m^{-2/3}}(C \log x)^m,$$

где $k \geq 2$, $m = \frac{k(k+1)}{2}$, P_m – многочлен степени $m-1$, θ – комплексное число, $|\theta| \leq 1$, $m \ll \log^{\frac{5}{6}} x$, $C > 0$ – абсолютная постоянная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство теоремы 3 может быть получено по схеме, приведенной в [12], с использованием новых результатов об оценке дзета-функции Римана в критической полосе, полученной в [3]. Подробное изложение указанной схемы в несколько более общем случае мы приводим ниже при доказательстве теоремы 5. $\square$

Аналогичные результаты могут быть получены для соответствующих арифметических функций в числовых полях. В теоремах 4 и 5 данного раздела мы получим новые асимптотические формулы для двух арифметических функций $\tau_{k_1}^K(n) \cdot \dots \cdot \tau_{k_l}^K(n)$ и $\tau_k^K(n^2)$, родственных функции делителей $\tau_k^K(n) = \sum_{N(U_1 \dots U_k) = n} 1$, в квадратичном поле $K = Q(\sqrt{D})$, D – бесквадратное число.

ТЕОРЕМА 4. *Для квадратичного поля $K = Q(\sqrt{D})$, D – бесквадратное число, имеет место формула*

$$\sum_{n \leq x} \tau_{k_1}^K(n) \cdot \dots \cdot \tau_{k_l}^K(n) = xP_m(\log x) + \theta x^{1-\frac{1}{19}m^{-2/3}}(C \log x)^{2m},$$

где $l \geq 1$, $k_1, \dots, k_l \geq 2$, $m = k_1 \cdot \dots \cdot k_l$, P_m – многочлен степени $m-1$, $m \ll \log^{\frac{5}{6}} x$, $|D| \ll \log^2 x$, θ – комплексное число, $|\theta| \leq 1$, $C > 0$ – абсолютная постоянная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I. Дзета-функция Дедекинда квадратичного поля $K = Q(\sqrt{D})$ имеет вид

$$\zeta_K(s) = \zeta(s)L(s, \chi),$$

где χ – неглавный характер по модулю $|D|$. Тогда при $\operatorname{Re} s > 1$ для натурального числа $m = k_1 \cdot \dots \cdot k_l$ имеет место равенство

$$\zeta_K^m(s) = \zeta^m(s)L^m(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \sum_{N(U_1 \dots U_m) = n} 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_m^K(n)}{n^s}.$$

Рассмотрим функцию $\Phi_m(s)$, при $\operatorname{Re} s > 1$ задаваемую равенством

$$\Phi_m(s) = \prod_p (1 + a_1 p^{-s} + a_2 p^{-2s} + \dots + a_{m-1} p^{-(m-1)s}),$$

где произведение взято по всем простым числам, а коэффициенты a_ν , $\nu = 1, \dots, m-1$, определяются по формуле

$$a_\nu = \sum_{\lambda=1}^{\nu} (-1)^\lambda \binom{k_1 + \nu - \lambda - 1}{\nu - \lambda} \cdot \dots \cdot \binom{k_l + \nu - \lambda - 1}{\nu - \lambda} \binom{m}{\lambda}.$$

При этом $a_1 = 0$. Отсюда следует, что

$$\zeta_K^m(s)\Phi_m(s) = \prod_p (1 + \tau_m^K(p)p^{-s} + \tau_m^K(p^2)p^{-2s} + \dots) \cdot (1 + a_1p^{-s} + a_2p^{-2s} + \dots + a_{m-1}p^{-(m-1)s}) = \prod_p (1 + b_1p^{-s} + b_2p^{-2s} + \dots),$$

где

$$b_i = \begin{cases} \tau_m^K(p^i) + \tau_m^K(p^{i-1})a_1 + \dots + \tau_m^K(p)a_{i-1} + a_i, & i \leq m-1, \\ \tau_m^K(p^i) + \tau_m^K(p^{i-1})a_1 + \dots + \tau_m^K(p^{i-m+1})a_{m-1}, & i > m-1. \end{cases}$$

Пользуясь тождеством

$$\tau_k(p_1^{m_1} \dots p_r^{m_r}) = \binom{k+m_1-1}{m_1} \cdot \dots \cdot \binom{k+m_r-1}{m_r}$$

и определением величин a_ν , получим соотношение

$$b_i = \tau_{k_1}^K(p^i) \cdot \dots \cdot \tau_{k_l}^K(p^i).$$

Таким образом,

$$\zeta_K^m(s)\Phi_m(s) = \prod_p (1 + \tau_{k_1}^K(p) \cdot \dots \cdot \tau_{k_l}^K(p)p^{-s} + \tau_{k_1}^K(p^2) \cdot \dots \cdot \tau_{k_l}^K(p^2)p^{-2s} + \dots),$$

откуда при $\operatorname{Re} s > 1$ получаем равенство

$$\zeta_K^m(s)\Phi_m(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\tau_{k_1}^K(n) \cdot \dots \cdot \tau_{k_l}^K(n)}{n^s}.$$

Сумматорная функция коэффициентов этого ряда имеет вид

$$D_m^K(x) = \sum_{n \leq x} \tau_{k_1}^K(n) \cdot \dots \cdot \tau_{k_l}^K(n).$$

II. В ходе доказательства нам потребуется оценить сверху величину $|D_m^K(\xi)|$. Чтобы использовать для этого известную лемму Марджанишвили [9], используем неравенство ([12])

$$\tau_{k_1}(n) \cdot \dots \cdot \tau_{k_l}(n) \leq \tau_{k_1 \dots k_l}(n).$$

Воспользовавшись данным неравенством и леммой Марджанишвили, мы получим теперь для $|D_m^K(\xi)|$ следующую оценку:

$$0 \leq |D_m^K(\xi)| \leq \sum_{n \leq \xi} \tau_{2m}(n) \leq \xi \frac{(\log \xi + 2m-1)^{2m-1}}{(2m-1)!}.$$

III. Для исследования сумматорной функции $D_m^K(x)$ мы можем применить интегральную формулу А. А. Карацубы. Возьмем

$$F(s) = \zeta_K^m(s)\Phi_m(s) = \zeta^m(s)L^m(s, \chi)\Phi_m(s),$$

$$a_n = \tau_{k_1}^K(n) \cdot \dots \cdot \tau_{k_l}^K(n),$$

$$A(\xi) = D_m^K(\xi) = \sum_{x \leq \xi} \tau_{k_1}^K(n) \cdot \dots \cdot \tau_{k_l}^K(n),$$

$$b = 1 + (\log x)^{-1}, \quad e^2 \leq T \leq x.$$

Тогда

$$\int_1^x A(\xi) d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \frac{\zeta^m(s) L^m(s, \chi) \Phi_m(s) x^{s+1}}{s(s+1)} ds + R(x),$$

где

$$R(x) \leq C \left(\int_1^{+\infty} \frac{|A(\xi)|}{\xi^{b+1}} d\xi \frac{x^{b+1}}{T} + 2^b \left(\frac{x \log x}{T} + \log T \left(\max_{0.5x \leq \xi \leq 1.5x} |A(\xi)| \right) \right) \right).$$

Как было доказано в пункте II,

$$|A(\xi)| = |D_m^K(\xi)| \leq \xi \frac{(\log \xi + 2m - 1)^{2m-1}}{(2m - 1)!},$$

поэтому

$$B(b) = \int_1^{+\infty} \frac{|A(\xi)|}{\xi^{b+1}} d\xi \leq (4 \log x)^{2m},$$

откуда следует, что

$$|R(x)| \leq \frac{x^2}{T} (C \log x)^{2m}.$$

Взяв $\eta = 1 - ((2(1 + \varepsilon)am)^{-2/3})$, $a = 15, 24$, $T = x^{1-\eta}$, рассмотрим интеграл

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\zeta^m(s) L^m(s, \chi) \Phi_m(s) x^{s+1}}{s(s+1)} ds$$

по контуру Γ с вершинами $b \pm iT$, $\eta \pm iT$. По теореме Коши,

$$I = \operatorname{Res}_{s=1} \frac{\zeta^m(s) L^m(s, \chi) \Phi_m(s) x^{s+1}}{s(s+1)}.$$

Функция $\Phi_m(s)$ является регулярной при $\operatorname{Re} s > 0, 5$, и в окрестности точки $s = 1$ имеет место разложение

$$\Phi_m(s) = \Phi_m(1) + \Phi'_m(1)(s-1) + \frac{\Phi''_m(1)}{2!}(s-1)^2 + \dots$$

Аналогично ведет себя и функция $L(s, \chi)$, поскольку характер χ не является главным. Кроме того,

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma_0 + \gamma_1(s-1) + \gamma_2(s-1)^2 + \dots$$

Наконец,

$$x^{s+1} = x^2 \left(1 + \frac{\log x}{1!}(s-1) + \frac{\log^2 x}{2!}(s-1)^2 + \dots \right),$$

$$s^{-1} = b_{01} + b_{11}(s-1) + \dots,$$

$$(s+1)^{-1} = b_{02} + b_{12}(s-1) + \dots$$

Отсюда следует, что

$$I = x^2 P_m(\log x).$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \frac{\zeta^m(s) L^m(s, \chi) \Phi_m(s) x^{s+1}}{s(s+1)} ds = I - I_1 - I_2 - I_3,$$

где I_1 , I_2 и I_3 – интегралы по верхней, нижней и левой сторонам контура Γ . Используя оценку дзета-функции Римана в критической полосе, доказанную в [3], и аналогичную оценку L -функций Дирихле из той же статьи, мы получаем, что интегралы по верхней, нижней и левой сторонам контура Γ оцениваются величиной $x^{\eta+1}(C \log x)^{2m}$:

$$\max\{|I_1|, |I_2|, |I_3|\} = \theta x^{1+\eta}(C \log x)^{2m}.$$

Отсюда следует равенство

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \frac{\zeta^m(s) L^m(s, \chi) \Phi_m(s) x^{s+1}}{s(s+1)} ds = x^2 \bar{P}_m(\log x) + \bar{\theta} x^{1+\eta} (\bar{C} \log x)^{2m}.$$

Таким образом, мы получаем, что

$$\int_1^x A(\xi) d\xi = x^2 \bar{P}_m(\log x) + \bar{\theta} x^{1+\eta} (\bar{C} \log x)^{2m}.$$

Возьмем $h = x^{\frac{1+\eta}{2}}$. Так как функция $A(\xi)$ монотонно не убывает, то

$$h^{-1} \int_{x-h}^x A(y) dy \leq A(x) \leq h^{-1} \int_x^{x+h} A(y) dy.$$

С другой стороны, используя оценку $A(\xi)$ и формулу конечных приращений Лагранжа, получим:

$$h^{-1} \int_x^{x+h} A(y) dy = x P_m(\log x) + \theta_1 x^{\frac{1+\eta}{2}} (C \log x)^k.$$

Аналогично,

$$h^{-1} \int_{x-h}^x A(y) dy = x P_m(\log x) + \theta_2 x^{\frac{1+\eta}{2}} (C \log x)^k.$$

Тогда

$$A(x) = x P_m(\log x) + \theta_2 x^{\frac{1+\eta}{2}} (C \log x)^{2m}.$$

При заданном η имеем

$$\frac{1+\eta}{2} = 1 - \frac{1}{2(2(1+\varepsilon)a)^{2/3}} m^{-2/3},$$

где $a = 15, 24$ – константа из оценки $\zeta(s)$ в критической полосе. Поскольку

$$0, 5(2(1+\varepsilon)15, 24)^{-2/3} > \frac{1}{19},$$

то

$$\frac{1+\eta}{2} < 1 - \frac{1}{19} m^{-2/3},$$

и мы получаем формулу

$$\sum_{n \leq x} \tau_{k_1}^K(n) \cdot \dots \cdot \tau_{k_l}^K(n) = x P_m(\log x) + \theta x^{1-\frac{1}{19}m^{-2/3}} (C \log x)^{2m}.$$

Теорема доказана. $\square$

ТЕОРЕМА 5. Для квадратичного поля $K = Q(\sqrt{D})$, D – бесквадратное число, имеет место формула

$$\sum_{n \leq x} \tau_k^K(n^2) = x P_m(\log x) + \theta x^{1-\frac{1}{19}m^{-2/3}} (C \log x)^{2m},$$

где $k \geq 2$, $m = \frac{k(k+1)}{2}$, P_m – многочлен степени $m-1$, $m \ll \log^{\frac{5}{6}} x$, $|D| \ll \log^2 x$, θ – комплексное число, $|\theta| \leq 1$, $C > 0$ – абсолютная постоянная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. **I.** Дзета-функция Дедекинда квадратичного поля $K = Q(\sqrt{D})$ имеет вид

$$\zeta_K(s) = \zeta(s)L(s, \chi),$$

где χ – неглавный характер по модулю $|D|$. Тогда при $\operatorname{Re} s > 1$ для натурального числа $m = \frac{k(k+1)}{2}$ справедливо равенство

$$\zeta_K^m(s) = \zeta^m(s)L^m(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \sum_{N(U_1 \dots U_m)=n} 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_m^K(n)}{n^s}.$$

При $\operatorname{Re} s > 1$ рассмотрим ряд Дирихле

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \tau_k^K(n^2)n^{-s} = \prod_p (1 + \tau_k^K(p^2)p^{-s} + \tau_k^K(p^4)p^{-2s} + \dots).$$

Так как $\tau_k(p^2) = \frac{k(k+1)}{2}$, и при $\operatorname{Re} s > 1$ имеет место равенство

$$\zeta^{\frac{k(k+1)}{2}}(s) = \prod_p (1 + \frac{k(k+1)}{2}p^{-s} + \dots),$$

а функция $L(s, \chi)$ регулярна в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 0,5$, то

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \tau_k^K(n^2)n^{-s} = \zeta^m(s)L^m(s, \chi)\Phi(s), \operatorname{Re} s > 1,$$

где $\Phi(s)$ — регулярная в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 0,5$ функция. Сумматорная функция этого ряда имеет вид

$$D_m^K(x) = \sum_{n \leq x} \tau_k^K(n^2).$$

II. В ходе доказательства нам потребуется оценить сверху величину $|D_m^K(\xi)|$. Для этого используем доказанное в [12] неравенство

$$\tau_k(n^2) \leq \tau_{\frac{k(k+1)}{2}}(n).$$

Воспользовавшись леммой Марджанишвили [9], мы получим теперь для $|D_m^K(\xi)|$ следующую оценку:

$$0 \leq |D_m^K(\xi)| \leq \sum_{n \leq \xi} \tau_{2m}(n) \leq \xi \frac{(\log \xi + 2m - 1)^{2m-1}}{(2m - 1)!}.$$

III. Для исследования сумматорной функции $D_m^K(x)$ вновь применим интегральную формулу А. А. Карацубы, взяв

$$F(s) = \zeta^m(s)L^m(s, \chi)\Phi(s), \quad a_n = \tau_k^K(n^2), \quad A(\xi) = D_m^K(\xi) = \sum_{x \leq \xi} \tau_k^K(n^2),$$

$b = 1 + (\log x)^{-1}$, $e^2 \leq T \leq x$. Тогда, действуя по стандартной схеме, мы получим равенство

$$\int_1^x A(\xi) d\xi = x^2 \bar{P}_m(\log x) + \bar{\theta} x^{1+\eta} (\bar{C} \log x)^{2m}.$$

Взяв $h = x^{\frac{1+\eta}{2}}$ и применяя метод асимптотического дифференцирования, мы получим асимптотическую формулу

$$A(x) = xP_m(\log x) + \theta_2 x^{\frac{1+\eta}{2}} (C \log x)^{2m},$$

что при заданных параметрах дает утверждение теоремы. Теорема доказана.

В следующих двух теоремах данного раздела мы получим новые асимптотические формулы для двух арифметических функций $\tau_{k_1}^K(n) \cdot \dots \cdot \tau_{k_l}^K(n)$ и $\tau_k^K(n^2)$, родственных функции делителей $\tau_k^K(n)$, в t -круговом поле $K = Q(\zeta)$, $\zeta^t = 1$.

ТЕОРЕМА 6. Для t -кругового поля $K = Q(\zeta)$, $\zeta^t = 1$, имеет место формула

$$\sum_{n \leq x} \tau_{k_1}^K(n) \cdot \dots \cdot \tau_{k_l}^K(n) = xP_m(\log x) + \theta x^{1 - \frac{1}{13}(\varphi(t)m)^{-2/3}} (C \log x)^{\varphi(t)m},$$

где $t > 1$ – натуральное число, $t \ll \log^{5/6} x$, $l \geq 1$, $k_1, \dots, k_l \geq 2$, $m = k_1 \cdot \dots \cdot k_l$, P_m – многочлен степени $m - 1$, $m \ll \log^{5/6} x$, $\varphi(t) = |\{x \in \mathbb{N} : x \leq t, (x, t) = 1\}|$ – функция Эйлера, θ – комплексное число, $|\theta| \leq 1$, $C > 0$ – абсолютная постоянная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Дзета-функция Дедекинда t -кругового поля имеет вид

$$\zeta_K(s) = \zeta(s) L_2(s, \chi_2^*) \cdot \dots \cdot L_{\varphi(t)}(s, \chi_{\varphi(t)}^*),$$

где $\chi_2^*, \dots, \chi_{\varphi(t)}^*$ – неглавные характеры по модулям $d_2(d_2|t)$, $\dots$, $d_{\varphi(t)}(d_{\varphi(t)}|t)$.

Тогда при $\operatorname{Re} s > 1$ для натурального числа $m = k_1 \cdot \dots \cdot k_l$ справедливо равенство

$$\zeta_K^m(s) = \zeta^m(s) L_2^m(s, \chi_2^*) \cdot \dots \cdot L_{\varphi(t)}^m(s, \chi_{\varphi(t)}^*) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \sum_{N(U_1 \dots U_m)=n} 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_m^K(n)}{n^s}.$$

Пользуясь соображениями, подробно рассмотренными выше, и учитывая, что L -функции Дирихле, возникающие в представлении дзета-функции Дедекинда t -кругового поля, есть функции с неглавными характерами, мы можем перейти от ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \tau_m^K(n) n^{-s}$ к нужному нам ряду $\sum_{n=1}^{+\infty} \tau_{k_1}^K(n) \cdot \dots \cdot \tau_{k_l}^K(n) n^{-s}$, использовав вспомогательную функцию $\Phi_m(s)$. Именно, при $\operatorname{Re} s > 1$ имеет место равенство

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\tau_{k_1}^K(n) \cdot \dots \cdot \tau_{k_l}^K(n)}{n^s} = \zeta_K^m(s) \Phi_m(s),$$

где $\Phi_m(s)$ – регулярная в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 0,5$ функция. Сумматорная функция коэффициентов этого ряда имеет вид

$$D_m^K(x) = \sum_{n \leq x} \tau_{k_1}^K(n) \cdot \dots \cdot \tau_{k_l}^K(n).$$

II. В ходе доказательства нам потребуется оценить сверху величину $|D_m^K(\xi)|$. Поскольку, как было доказано ранее,

$$\tau_{k_1}(n) \cdot \dots \cdot \tau_{k_l}(n) \leq \tau_{k_1 \dots k_l}(n),$$

то, воспользовавшись леммой Марджанишвили, мы получим для $|D_m^K(\xi)|$ следующую оценку:

$$0 \leq |D_m^K(\xi)| \leq \xi^{\frac{(\log \xi + \varphi(t)m - 1)\varphi(t)m - 1}{(\varphi(t)m - 1)!}}.$$

III. Для исследования сумматорной функции $D_m^K(x)$ мы можем применить лемму 1. Возьмем

$$F(s) = \zeta_K^m(s) \Phi_m(s) = \zeta^m(s) L_2^m(s, \chi_2^*) \cdot \dots \cdot L_{\varphi(t)}^m(s, \chi_{\varphi(t)}^*) \Phi_m(s),$$

$$a_n = \tau_{k_1}^K(n) \cdot \dots \cdot \tau_{k_l}^K(n),$$

$$A(\xi) = D_m^K(\xi) = \sum_{x \leq \xi} \tau_{k_1}^K(n) \cdot \dots \cdot \tau_{k_l}^K(n),$$

$$b = 1 + (\log x)^{-1}, \quad e^2 \leq T \leq x.$$

Тогда

$$|A(\xi)| = |D_m^K(\xi)| \leq \xi \frac{(\log \xi + \varphi(t)m - 1)^{\varphi(t)m-1}}{(\varphi(t)m - 1)!},$$

поэтому

$$B(b) = \int_1^{+\infty} \frac{|A(\xi)|}{\xi^{b+1}} d\xi \leq (4 \log x)^{\varphi(t)m},$$

откуда следует, что

$$|R(x)| \leq \frac{x^2}{T} (C \log x)^{\varphi(t)m}.$$

Взяв $\eta = 1 - (((1 + \varepsilon)a(\varphi(t)m))^{-2/3})$, $a = 15, 24$, $T = x^{1-\eta}$, рассмотрим интеграл

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\zeta^m(s) L_2^m(s, \chi_2^*) \cdot \dots \cdot L_{\varphi(t)}^m(s, \chi_{\varphi(t)}^*) \Phi_m(s) x^{s+1}}{s(s+1)} ds$$

по контуру Γ с вершинами $b \pm iT$, $\eta \pm iT$. Нетрудно показать ([12]), что

$$I = x^2 P_m(\log x).$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \frac{\zeta^m(s) L_2^m(s, \chi_2^*) \cdot \dots \cdot L_{\varphi(t)}^m(s, \chi_{\varphi(t)}^*) \Phi_m(s) x^{s+1}}{s(s+1)} ds = I - I_1 - I_2 - I_3,$$

где I_1 , I_2 и I_3 — интегралы по верхней, нижней и левой сторонам контура Γ . Используя оценку дзета-функции Римана в критической полосе, доказанную в теореме [3], и аналогичную оценку L -функций Дирихле, мы получаем, что интегралы по верхней, нижней и левой сторонам контура Γ оцениваются величиной $x^{\eta+1} (C \log x)^{\varphi(t)m}$:

$$\max\{|I_1|, |I_2|, |I_3|\} = \theta x^{1+\eta} (C \log x)^{\varphi(t)m}.$$

Таким образом, мы получаем, что

$$\int_1^x A(\xi) d\xi = x^2 \bar{P}_m(\log x) + \bar{\theta} x^{1+\eta} (\bar{C} \log x)^{\varphi(t)m}.$$

Взяв $h = x^{\frac{1+\eta}{2}}$ и пользуясь стандартными рассуждениями, получим равенство

$$A(x) = x P_m(\log x) + \theta_2 x^{\frac{1+\eta}{2}} (C \log x)^{\varphi(t)m}.$$

При заданном η имеем

$$\frac{1+\eta}{2} = 1 - \frac{1}{2((1+\varepsilon)a)^{2/3} (\varphi(t)m)^{-2/3}},$$

где $a = 15, 24$ – константа из оценки $\zeta(s)$ в критической полосе. Поскольку

$$0,5((1+\varepsilon)15,24)^{-2/3} > \frac{1}{13},$$

то

$$\frac{1+\eta}{2} < 1 - \frac{1}{13}(\varphi(t)m)^{-2/3},$$

и мы получаем формулу

$$\sum_{n \leq x} \tau_{k_1}^K(n) \cdot \dots \cdot \tau_{k_l}^K(n) = xP_m(\log x) + \theta x^{1-\frac{1}{15}m-2/3} (C \log x)^{\varphi(t)m}.$$

Теорема доказана. $\square$

ТЕОРЕМА 7. Для t -кругового поля $K = Q(\varsigma)$, $\varsigma^t = 1$, имеет место формула

$$\sum_{n \leq x} \tau_k^K(n^2) = xP_m(\log x) + \theta x^{1-\frac{1}{13}(\varphi(t)m)^{-2/3}} (C \log x)^{\varphi(t)m},$$

где $t > 1$ – натуральное число, $t \ll \log^{5/6} x$, $k \geq 2$, $m = \frac{k(k+1)}{2}$, P_m – многочлен степени $m-1$, $m \ll \log^{\frac{5}{6}} x$, $\varphi(t) = |\{x \in \mathbb{N} : x \leq t, (x, t) = 1\}|$ – функция Эйлера, θ – комплексное число, $|\theta| \leq 1$, $C > 0$ – абсолютная постоянная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как было показано ранее, дзета-функция Дедекинда t -кругового поля имеет вид

$$\zeta_K(s) = \zeta(s)L_2(s, \chi_2^*) \cdot \dots \cdot L_{\varphi(t)}(s, \chi_{\varphi(t)}^*),$$

где $\chi_2^*, \dots, \chi_{\varphi(t)}^*$ – неглавные характеры по модулям $d_2(d_2|t)$, $\dots$, $d_{\varphi(t)}(d_{\varphi(t)}|t)$.

Тогда при $\operatorname{Re} s > 1$ для натурального числа $m = \frac{k(k+1)}{2}$ справедливо равенство

$$\zeta_K^m(s) = \zeta^m(s)L_2^m(s, \chi_2^*) \cdot \dots \cdot L_{\varphi(t)}^m(s, \chi_{\varphi(t)}^*) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \sum_{N(U_1, \dots, U_m)=n} 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_m^K(n)}{n^s}.$$

Учитывая, что L -функции Дирихле, возникающие в представлении дзета-функции Дедекинда t -кругового поля, есть функции с неглавными характерами, мы можем перейти от ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \tau_m^K(n)n^{-s}$ к нужному нам ряду $\sum_{n=1}^{+\infty} \tau_k^K(n^2)n^{-s}s$, использовав вспомогательную функцию $\Phi(s)$. Именно, при $\operatorname{Re} s > 1$ имеет место равенство

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\tau_k^K(n)}{n^s} = \zeta_K^m(s)\Phi(s),$$

где $\Phi(s)$ — регулярная в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 0,5$ функция. Сумматорная функция коэффициентов этого ряда имеет вид

$$D_m^K(x) = \sum_{n \leq x} \tau_k^K(n^2).$$

II. В ходе доказательства нам потребуется оценка сверху величины $|D_m^K(\xi)|$:

$$0 \leq |D_m^K(\xi)| \leq \xi^{\frac{(\log \xi + \varphi(t)m - 1)\varphi(t)m - 1}{(\varphi(t)m - 1)!}}.$$

III. Для исследования сумматорной функции $D_m^K(x)$ мы можем применить лемму 1. Возьмем

$$F(s) = \zeta_K^m(s)\Phi(s) = \zeta^m(s)L_2^m(s, \chi_2^*) \cdot \dots \cdot L_{\varphi(t)}^m(s, \chi_{\varphi(t)}^*)\Phi(s),$$

$$a_n = \tau_k^K(n^2),$$

$$A(\xi) = D_m^K(\xi) = \sum_{x \leq \xi} \tau_k^K(n^2),$$

$$b = 1 + (\log x)^{-1}, \quad e^2 \leq T \leq x.$$

Тогда

$$\int_1^x A(\xi) d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \frac{\zeta^m(s) L_2^m(s, \chi_2^*) \cdot \dots \cdot L_{\varphi(t)}^m(s, \chi_{\varphi(t)}^*) \Phi(s) x^{s+1}}{s(s+1)} ds + R(x),$$

где

$$R(x) \leq C \left(\int_1^{+\infty} \frac{|A(\xi)|}{\xi^{b+1}} d\xi \frac{x^{b+1}}{T} + 2^b \left(\frac{x \log x}{T} + \log T \left(\max_{0.5x \leq \xi \leq 1.5x} |A(\xi)| \right) \right) \right).$$

Взяв $\eta = 1 - (((1+\varepsilon)a(\varphi(t)m))^{-2/3})$, $a = 15, 24$, $T = x^{1-\eta}$ и используя стандартные рассуждения, мы получим равенство

$$\int_1^x A(\xi) d\xi = x^2 \bar{P}_m(\log x) + \bar{\theta} x^{1+\eta} (\bar{C} \log x)^{\varphi(t)m}.$$

Взяв $h = x^{\frac{1+\eta}{2}}$ и применяя метод асимптотического дифференцирования, мы получим, что

$$A(x) = x P_m(\log x) + \theta_2 x^{\frac{1+\eta}{2}} (C \log x)^{\varphi(t)m},$$

что при заданных параметрах дает утверждение теоремы. Теорема доказана. $\square$

4. Заключение

Полученные результаты находят свои применения в различных вопросах аналитической теории чисел. Так, пользуясь общими формулами, можно получить соответствующие результаты для кольца $G = \mathbb{Z}[i]$ целых чисел Гаусса: $\mathbb{Z}[i] = \{\alpha = a + bi | a, b \in \mathbb{Z}\}$. Арифметическая функция $\tau_k^G(n) = \sum_{N(\alpha_1 \dots \alpha_k) = n} 1$, $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{Z}[i]$, $n \in \mathbb{N}$, дает количество представлений натурального числа n как нормы произведения k чисел Гаусса. Поскольку для целого положительного числа m его норма $N(m)$ вычисляется по формуле $N(m) = m^2$, то функция $\tau_k^G(n)$ является обобщением функции делителей $\tau_k(n)$. Таким образом, доказанные выше теоремы могут быть использованы при получении асимптотических формул для средних значений функции делителей $\tau_k^G(n)$, равно как и для двух арифметических функций $\tau_{k_1}^G(n) \cdot \dots \cdot \tau_{k_l}^G(n)$ и $\tau_k^G(n^2)$, родственных функции делителей $\tau_k^G(n)$, в кольце целых чисел Гаусса (см. [13]).

С другой стороны, было бы интересно рассмотреть конкретные задачи на применение полученной в разделе 2 формулы, родственной формуле Перрона (см. [14]).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Виноградов И. М. Основы теории чисел. – М.: Наука, 1981.
2. Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. – М.: Физматлит, 1994.
3. Деза Е. И., Варухина Л. В. Об оценке дзетовой суммы и проблеме делителей Дирихле // Вестник Санкт-Петербургского Университета. Серия 1 (математика, механика, астрономия). 2013. Вып. 4. С. 15–24.

4. Деза Е. И., Варухина Л. В. Вопросы суммирования арифметических функций, родственных функции Чебышева // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, № 2. С. 319–333.
5. Карацуба А. А. Оценки тригонометрических сумм методом И.М. Виноградова и их применение // Труды Матем. института им. В. А. Стеклова АН СССР. 1971. Т. 112. С. 241–255.
6. Карацуба А. А. Равномерная оценка остаточного члена в проблеме делителей Дирихле // Известия АН СССР. Сер. матем. 1972. Т. 36, № 3. С. 475–483.
7. Карацуба А. А. Проблема делителей Дирихле в числовых полях // Доклады АН СССР. 1972. Т. 204, № 3. С. 55–59.
8. Карацуба А. А. Основы аналитической теории чисел. – М.: Наука, 1983.
9. Марджанишвили К. К. Оценка одной арифметической суммы // Доклады АН СССР. 1939. Т. 22, № 7. С. 391–393.
10. Пантелеева (Деза) Е. И. К вопросу о проблеме делителей Дирихле в числовых полях // Математические заметки. 1988. Т. 44, вып. 4. С. 494–505.
11. Пантелеева (Деза) Е. И. Одно замечание к вопросу о проблеме делителей // Математические заметки. 1993. Т. 53, вып. 4. С. 148–152.
12. Пантелеева (Деза) Е. И. О средних значениях некоторых арифметических функций // Математические заметки. 1994. Т. 55, вып. 5. С. 7–12.
13. Пантелеева (Деза) Е. И. Проблема делителей Дирихле в кольце целых Гауссовых чисел // Труды МПГУ. 2001. № 4. С. 23–34.
14. Пантелеева (Деза) Е. И., Варухина Л. В. Об оценке сумматорных функций рядов Дирихле // Научные труды математического факультета МПГУ. Юбилейный сборник. – М.: МПГУ, 2000. С. 45–56.
15. Прахар К. Распределение простых чисел. – М.: Мир, 1967.
16. Титчмарш Е. К. Теория дзета-функции Римана. – М.: ИЛ, 1953.
17. Титчмарш Е. К. Теория функций. – М.: Наука, 1980.
18. Deza E., Varukhina L. On mean values of some arithmetic functions in number fields // Discrete Mathematics. 2008. Vol. 308. P. 4892–4899.
19. Deza E., Varukhina L. Representations of arithmetic sums over non-trivial zeros of the zeta function // Asian-European Journal of Mathematics. 2008. Vol. 1, issue 4. P. 509–519.
20. Dirichlet P. Über die Bestimmung der mittleren Werte in der Zahlentheorie // Abh. Acad. Wiss., Berlin. 1849. Werke 2. P. 49–66.
21. Ivić A. The Riemann zeta-function. – New York: J. Wiley & Sons, 1985.
22. Landau E. Über die Anzahl der Gitterpunkte in gewissen Bereichen // Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. Math-Phys. Kl. 1912. Hft. 6. S. 687–771.

REFERENCES

1. Vinogradov, I. M. 1981, "Bases of the theory of numbers", *M.: Nauka*.
2. Voronin, S. M. & Karatsuba, A. A. 1994, "Riemann zeta function", *M.: Fizmatlit*.
3. Deza, E. I., Varukhina, L. V. 2013, "On an estimation of zeta sum and on Dirichlet divisor problem", *Vestnik of Saint Petersburg University. Ser. 1 (Mathematics, Mechanics, Astronomy)*, Vol. 4, pp. 15–24.
4. Deza, E. I., Varukhina, L. V. 2018, "Problems of the summation of arithmetical functions, relative to Chebyshev function", *Chebyshevskii sbornik*, Vol. 19, N 2, pp. 319–333.
5. Karatsuba, A. A. 1971, "Estimates of trigonometric sums by Vinogradov method and their application", *Works of Math. instute of Steklov*, Vol. 112, pp. 241–255.
6. Karatsuba, A. A. 1972, "Uniform estimate of error term in Dirichlet divisor problem", *Izv. Acad. of Sci. SSSR, Math.*, Vol. 36, № 3, pp. 475–483.
7. Karatsuba, A. A. 1972, "Dirichlet divisor problem in Number Fields", *Dokl. of Acad. of Sc. URSS*, Vol. 204, № 3, pp. 55–59.
8. Karatsuba, A. A. 1983, "Bases of the analytical theory of numbers", *M.: Nauka*.
9. Mardganishvili K. K. 1939, "An estimate of one arithmetic sum", *Dokl. Acad. of Sci. URSS*, Vol. 22, № 7.
10. Panteleeva (Deza), E. I. 1988, "Dirichlet divisor problem in number fields", *Mathematical notes*, Vol. 44, issue 4, pp. 494–505.
11. Panteleeva (Deza), E. I. 1993, "A remark to Divisor problem", *Mathematical notes*, Vol. 53, issue 4, pp. 148–152.
12. Panteleeva (Deza), E. I. 1994, "Average values of some arithmetic functions", *Mathematical notes*, Vol. 55, issue 5, pp. 7–12.
13. Panteleeva (Deza), E. I. 2001, "Dirichlet divisor problem in the ring of the Gaussian integers", *Works of MPGU*, № 4, pp. 23–34.
14. Panteleeva (Deza), E. I. & Varukhina, L. V. 2000, "Estimations of adding function of Dirichlet series", in *Scientific works of mathematical department of MPGU*, *M.: MPGU*, pp. 45–56.
15. Prahar, K. 1967, "Distribution of prime numbers", *M.: Mir*.
16. Titchmarsh, E. K. 1953, "The theory of the Riemann zeta function", *M.: IL*.
17. Titchmarsh, E. K. 1980, "The theory of functions", *M.: Nauka*.
18. Deza, E. & Varukhina, L. 2008, "On mean values of some arithmetic functions in number fields", *Discrete Mathematics*, Vol. 308, pp. 4892–4899.
19. Deza, E. & Varukhina, L. 2008, "Representations of arithmetic sums over non-trivial zeros of the zeta function", *Asian-European Journal of Mathematics*, Vol. 1, issue 4, pp. 509–519.
20. Dirichlet, P. 1849, "Über die Bestimmung der mittleren Werte in der Zahlentheorie", *Abh. Acad. Wiss., Berlin*, Werke 2, pp. 49–66.

-
21. Ivić, A. 1985, "The Riemann zeta function", *New York: J. Wiley & Sons*.
22. Landau, E. 1912, "Über die Anzahl der Gitterpunkte in gewissen Bereichen", *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. Math-Phys. Kl.*, Hft. 6, ss. 687–771.

Получено 9.06.2019 г.

Принято в печать 12.07.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 2.

УДК 517.5

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-82-92

**Условия Макенхаута для кусочно-степенных весов
в евклидовом пространстве с мерой Данкля¹**

Д. В. Горбачев, В. И. Иванов

Горбачев Дмитрий Викторович — доктор физико-математических наук, профессор, кафедры прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: dvgtail@mail.ru

Иванов Валерий Иванович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой, кафедра прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: ivaleryi@mail.ru

Аннотация

В результате многолетних исследований в гармоническом анализе Фурье был выделен класс линейных интегральных операторов Кальдерона–Зигмунда, ограниченных в пространствах L^p на $\mathbb{R}^d$ с мерой Лебега при $1 < p < \infty$. Б. Макенхаутом были найдены условия на вес, необходимые и достаточные для ограниченности операторов Кальдерона–Зигмунда в пространствах L^p с одним весом. Они теперь известны как A_p -условия Макенхаута. Г.Х. Харди и Дж.И. Литлвудом ($d = 1$) и С.Л. Соболевым ($d > 1$) была доказана (L^p, L^q) -ограниченность потенциала Рисса I_α при $1 < p < q < \infty$, $\alpha = d\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$. Б. Макенхаут и Р.Л. Виден нашли $A_{p,q}$ -условие на вес для одновесовой (L^p, L^q) -ограниченности потенциала Рисса. Важным обобщением потенциала Рисса стал потенциал Данкля–Рисса, определенный С. Тангавелу и Ю. Шу в евклидовом пространстве с мерой Данкля. Для потенциала Данкля–Рисса нами была доказана (L^p, L^q) -ограниченность с двумя радиальными кусочно-степенными весами. В настоящей работе мы определяем A_p и $A_{p,q}$ -условия Макенхаута для весов в $\mathbb{R}^d$ с мерой Данкля и выясняем, когда они выполняются для кусочно-степенных весов. Полученные результаты показывают, что условия (L^p, L^q) -ограниченности потенциала Данкля–Рисса с одним кусочно-степенным весом могут быть охарактеризованы с помощью $A_{p,q}$ -условия. Это позволяет предположить, что условия (L^p, L^q) -ограниченности потенциала Данкля–Рисса с одним произвольным весом могут также быть записаны с помощью $A_{p,q}$ -условия.

Ключевые слова: весовая функция, условия Макенхаута, кусочно-степенной вес, мера Данкля, потенциал Данкля–Рисса.

Библиография: 13 названий.

Для цитирования:

Д. В. Горбачев, В. И. Иванов. Условия Макенхаута для кусочно-степенных весов в евклидовом пространстве с мерой Данкля // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 2, с. 82–92.

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 18-11-00199).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 2.

UDC 517.5

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-82-92

**Muckenhoupt conditions for piecewise-power weights
in Euclidean space with Dunkl measure²**

D. V. Gorbachev, V. I. Ivanov

Gorbachev Dmitry Viktorovich — Doctor of physical and mathematical sciences, Professor, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Tula State University (Tula).

e-mail: dvgmail@mail.ru

Ivanov Valerii Ivanovich — Doctor of physical and mathematical sciences, Professor, Head of Department, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Tula State University (Tula).

e-mail: ivaleryi@mail.ru

Abstract

As a result of many years of research in the Fourier harmonic analysis, a class of linear integral Calderon–Zygmund operators was defined that are bounded in the spaces L^p on $\mathbb{R}^d$ with the Lebesgue measure for $1 < p < \infty$. B. Muckenhoupt found conditions on weight that are necessary and sufficient for the boundedness of the Calderon–Zygmund operators in L^p -spaces with one weight. They are now known as the Muckenhoupt A_p -conditions. G.H. Hardy and J.E. Littlewood ($d = 1$) and S.L. Sobolev ($d > 1$) proved (L^p, L^q) -boundedness of the Riesz potential I_{α} for $1 < p < q < \infty$, $\alpha = d\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$. B. Muckenhoupt and R.L. Wheeden found $A_{p,q}$ -weight condition for one weight (L^p, L^q) -boundedness of the Riesz potential. An important generalization of the Riesz potential has become the Dunkl–Riesz potential defined by S. Thangavelu and Yu. Xu in Euclidean space with the Dunkl measure. For the Dunkl–Riesz potential, we proved (L^p, L^q) -boundedness with two radial piecewise-power weights. In this paper, we define the Muckenhoupt A_p and $A_{p,q}$ -conditions for weights in Euclidean space with the Dunkl measure and find out when they are satisfied for piecewise-power weights. The obtained results show that the conditions of (L^p, L^q) -boundedness of the Dunkl–Riesz potential with one piecewise-power weight can be characterized using the $A_{p,q}$ -condition. This suggests that the conditions of (L^p, L^q) -boundedness of the Dunkl–Riesz potential with one arbitrary weight can also be written using the $A_{p,q}$ -condition.

Keywords: weighted function, Muckenhoupt conditions, piecewise-power weight, Dunkl measure, Dunkl–Riesz potential.

Bibliography: 13 titles.

For citation:

D. V. Gorbachev, V. I. Ivanov, 2019, "Muckenhoupt conditions for piecewise-power weights in Euclidean space with Dunkl measure", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 2, pp. 82–92.

²This Research was performed by a grant of Russian Science Foundation (project 18-11-00199).

1. Введение

Пусть $\mathbb{R}^d$ — действительное d -мерное евклидово пространство со скалярным произведением (x, y) и нормой $|x| = \sqrt{(x, x)}$, $\mathbb{S}^{d-1} = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| = 1\}$ — евклидова сфера, $L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leq p < \infty$, — пространства Лебега с нормой $\|f\|_p = (\int_{\mathbb{R}^d} |f|^p dx)^{1/p} < \infty$.

Мы будем писать $M \lesssim N$, если $M \leq CN$ с константой $C > 0$, зависящей только от несущественных параметров, и $M \asymp N$, если $M \lesssim N$ и $N \lesssim M$. Как обычно, для $p > 1$ $p' = \frac{p}{p-1}$ — сопряженный гёльдеров показатель, $\chi_E(x)$ — характеристическая функция множества $E \subset \mathbb{R}^d$, B — произвольный замкнутый евклидов шар вида $B(x_0, R) = \{x \in \mathbb{R}^d : |x - x_0| \leq R\}$, Q — произвольный замкнутый куб со сторонами, параллельными осям координат, $Q(x_0, R) = \prod_{j=1}^d [x_{0j} - R, x_{0j} + R]$.

В гармоническом анализе Фурье важное место занимают исследования ограниченности линейных интегральных операторов в пространствах $L^p(\mathbb{R}^d)$. В результате этих исследований был выделен класс сингулярных интегральных операторов Кальдерона–Зигмунда (класс CZSIO), для которых ограниченность имеет место при $1 < p < \infty$ (см. [1, Chapter 4], [2, Chapter 8]). Доказательство этого факта в значительной степени основано на ограниченности в $L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 < p < \infty$, максимальной функции Харди–Литтлвуда Mf .

В дальнейшем ограниченность интегральных операторов исследовалась в пространствах $L^p(\mathbb{R}^d)$ с весом. Весом w называют локально интегрируемую функцию в $\mathbb{R}^d$, принимающую значения в интервале $(0, \infty)$ почти всюду. В 1972 году Б. Макенхаут [3] доказал, что одновесовое неравенство

$$\|wMf\|_p \lesssim \|wf\|_p, \quad 1 < p < \infty,$$

справедливо тогда и только тогда, когда для веса $\omega = w^p$ выполнено следующее условие:

$$\sup_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega dx \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega^{-\frac{1}{p-1}} dx \right)^{p-1} < \infty,$$

где $|Q|$ — мера Лебега куба Q . Это условие известно теперь как A_p -условие Макенхаута. A_p -условие оказалось необходимым и достаточным и для весовой ограниченности в $L^p(\mathbb{R}^d)$ операторов из класса CZSIO [2, Chapter 9].

Потенциал Рисса или дробный интеграл

$$I_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) |x - y|^{\alpha-d} dy, \quad 0 < \alpha < d,$$

не является ограниченным оператором в $L^p(\mathbb{R}^d)$. Г.Х. Харди и Дж.И. Литтлвуд [5] ($d = 1$) и С.Л. Соболев [6] ($d > 1$) показали, что этот положительный оператор ограничен из $L^p(\mathbb{R}^d)$ в $L^q(\mathbb{R}^d)$ при $1 < p < q < \infty$ и $\alpha = d\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$. В 1974 году Б. Макенхаут и Р.Л. Виден [4] доказали, что при $1 < p < q < \infty$ и $\alpha = d\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$ одновесовое неравенство

$$\|wI_\alpha f\|_q \lesssim \|wf\|_p$$

справедливо тогда и только тогда, когда для веса $\omega = w^q$ выполнено так называемое $A_{p,q}$ -условие:

$$\sup_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega dx \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega^{-\frac{p'}{q}} dx \right)^{\frac{q}{p'}} < \infty.$$

Отметим, что условия $A_{p,p}$ и A_p совпадают.

Пусть $S = \{a_1, \dots, a_m\} \subset \mathbb{S}^{d-1}$ — множество различных единичных векторов, функция $k: S \rightarrow \mathbb{R}_+$, степенной вес типа Данкля $v_k(x) = \prod_{j=1}^m |(a_j, x)|^{k_j}$, где $k_j = k(a_j)$. Классический вес Данкля получается в том случае, когда S является системой корней, а функция k инвариантна относительно конечной группы отражений, порожденной отражениями

$\sigma_a x = x - 2(a, x)a$, $a \in S$. Евклидово пространство $\mathbb{R}^d$ с мерой Данкля $d\mu_k(x) = v_k(x) dx$ допускает содержательный гармонический анализ Данкля (см. [7]). Используя его, С. Тангавелу и Ю. Шу [8] определили потенциал Данкля–Рисса $I_\alpha^k f$. В [9, 10, 11] для потенциала Данкля–Рисса $I_\alpha^k f$ мы доказали весовые (L_p, L_q) -неравенства с двумя степенными или кусочно-степенными весами. Отметим, что по сравнению с этими работами, мы опускаем в весе Данкля несущественную здесь константу Макдональда–Мета–Сельберга.

Настоящая работа посвящена изучению A_p и $A_{p,q}$ -условий для радиальных кусочно-степенных весов в $\mathbb{R}^d$ с мерой Данкля и анализу их роли в весовых (L_p, L_q) -неравенствах для потенциала Данкля–Рисса. В разделе 2 получены порядковые оценки меры Данкля шаров и кубов и условия удвоения для радиальных кусочно-степенных весов в пространстве с мерой Данкля. В разделе 3 для них исследуются A_p и $A_{p,q}$ -условия.

2. Условия удвоения для кусочно-степенных весов в пространстве $\mathbb{R}^d$ с мерой Данкля

Пусть $x, y \in \mathbb{R}^d$, $x = |x|x'$, $y = |y|y'$, $x', y' \in \mathbb{S}^{d-1}$, $d(x', y') = \arccos(x', y')$ — геодезическое расстояние на $\mathbb{S}^{d-1}$, $\tilde{B}(x'_0, r) = \{x' \in \mathbb{S}^{d-1} : d(x'_0, x') \leq \theta\}$ — сферическая шапочка с центром в x'_0 и радиусом $\theta \in (0, \pi)$, $|E|_{d\mu_k} = \int_E d\mu_k$ — мера Данкля множества $E \subset \mathbb{R}^d$, $w(x)$ — весовая функция в $\mathbb{R}^d$, $|E|_{d\mu_k, w} = \int_E w d\mu_k$, $d_k = d + \sum_{j=1}^m k_j$ — обобщенная размерность пространства $\mathbb{R}^d$ с мерой Данкля.

ТЕОРЕМА 1. Для всех $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $R > 0$

$$|B(x_0, R)|_{d\mu_k} \asymp R^d \prod_{j=1}^m (|(a_j, x_0)| + R)^{k_j} \quad (1)$$

с константами, не зависящими от x_0 и R .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим два случая $|x_0| \geq 3R$ и $|x_0| \leq 3R$.

Пусть сначала $|x_0| \geq 3R$. Имеем

$$\begin{aligned} |B(x_0, R)|_{d\mu_k} &= \int_{B(x_0, R)} d\mu_k = c_d \int_{|x_0|-R}^{|x_0|+R} r^{d_k-1} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \chi_{B(x_0, R)}(rx') v_k(x') d\sigma(x') dr \\ &= c_d \int_{|x_0|-R}^{|x_0|+R} r^{d_k-1} \int_{\tilde{B}(x'_0, \theta(r))} v_k(x') d\sigma(x') dr, \end{aligned} \quad (2)$$

где $c_d > 0$. Из соотношений $|x| = r$, $|x|^2 + |x_0|^2 - 2|x||x_0|(x'_0, x') = R^2$ выводим:

$$\begin{aligned} \cos \theta(r) &= \frac{|x_0|^2 + r^2 - R^2}{2r|x_0|}, \\ \sin \theta(r) &= \frac{\sqrt{(|x_0| + r + R)(|x_0| + r - R)(|x_0| + R - r)(R + r - |x_0|)}}{2r|x_0|}, \\ \sin \theta(r) &\leq \frac{R}{|x_0|}, \quad \theta(r) \leq \frac{\pi R}{2|x_0|} < \frac{2R}{|x_0|}. \end{aligned} \quad (3)$$

Положим

$$A = \left\{ j \in [1, m] : |(a_j, x'_0)| < \frac{3R}{|x_0|} \right\}, \quad B = \left\{ j \in [1, m] : |(a_j, x'_0)| \geq \frac{3R}{|x_0|} \right\}.$$

Пусть $x' \in \tilde{B}(x'_0, \theta(r))$. Согласно (3)

$$|(a_j, x') - (a_j, x'_0)| \leq |\cos d(a_j, x') - \cos d(a_j, x'_0)| \leq d(x', x'_0) \leq \theta(r) < \frac{2R}{|x_0|},$$

поэтому

$$\prod_{j \in A} |(a_j, x')|^{k_j} \leq \prod_{j \in A} \left(\frac{5R}{|x_0|} \right)^{k_j}, \quad \prod_{j \in B} |(a_j, x')|^{k_j} \asymp \prod_{j \in B} |(a_j, x'_0)|^{k_j}. \quad (4)$$

Применяя (2), (4), получим

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{B}(x'_0, \theta(r))} v_k(x') d\sigma(x') &\lesssim \prod_{j \in A} \left(\frac{R}{|x_0|} \right)^{k_j} \prod_{j \in B} |(a_j, x'_0)|^{k_j} \int_{\tilde{B}(x'_0, \theta(r))} d\sigma(x') \\ &\lesssim \prod_{j \in A} \left(\frac{R}{|x_0|} \right)^{k_j} \prod_{j \in B} |(a_j, x'_0)|^{k_j} (\theta(r))^{d-1} \\ &\lesssim \left(\frac{R}{|x_0|} \right)^{d-1} \prod_{j \in A} \left(\frac{R}{|x_0|} \right)^{k_j} \prod_{j \in B} |(a_j, x'_0)|^{k_j} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} |B(x_0, R)|_{d\mu_k} &\lesssim \int_{|x_0|-R}^{|x_0|+R} r^{d_k-1} dr \left(\frac{R}{|x_0|} \right)^{d-1} \prod_{j \in A} \left(\frac{R}{|x_0|} \right)^{k_j} \prod_{j \in B} |(a_j, x'_0)|^{k_j} \\ &\lesssim R^d \prod_{j \in A} R^{k_j} \prod_{j \in B} |(a_j, x_0)|^{k_j} \lesssim R^d \prod_{j=1}^m (|(a_j, x_0)| + R)^{k_j}. \end{aligned}$$

Оценка сверху в (1) при $|x_0| \geq 3R$ доказана.

Получим оценку снизу. В [13, Lemma 5.5] доказано, что для некоторого $\varepsilon \in (0, 1/2)$, не зависящего от x_0 и R , и $y'_0 \in \tilde{B}(x'_0, \theta(r)/2)$

$$\tilde{B}(y'_0, \varepsilon\theta(r)) \subset \tilde{B}(x'_0, \theta(r)) \quad \text{и} \quad |(a_j, x')| \geq \varepsilon\theta(r) \quad \text{для} \quad x' \in \tilde{B}(y'_0, \varepsilon\theta(r)), \quad j \in A.$$

Отсюда и из (4)

$$v_k(x') \gtrsim \prod_{j \in A} (\theta(r))^{k_j} \prod_{j \in B} |(a_j, x'_0)|^{k_j}, \quad x' \in \tilde{B}(y'_0, \varepsilon\theta(r)).$$

Если $r \in [|x_0| - R/2, |x_0| + R/2]$, то из (3) $\theta(r) \gtrsim \frac{R}{|x_0|}$, следовательно

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{B}(x'_0, \theta(r))} v_k(x') d\sigma(x') &\gtrsim \int_{\tilde{B}(y'_0, \varepsilon\theta(r))} v_k(x') d\sigma(x') \\ &\gtrsim \prod_{j \in A} \left(\frac{R}{|x_0|} \right)^{k_j} \prod_{j \in B} |(a_j, x'_0)|^{k_j} \int_{\tilde{B}(y'_0, \varepsilon\theta(r))} d\sigma(x') \\ &\gtrsim \prod_{j \in A} \left(\frac{R}{|x_0|} \right)^{k_j} \prod_{j \in B} |(a_j, x'_0)|^{k_j} (\theta(r))^{d-1} \\ &\gtrsim \left(\frac{R}{|x_0|} \right)^{d-1} \prod_{j \in A} \left(\frac{R}{|x_0|} \right)^{k_j} \prod_{j \in B} |(a_j, x'_0)|^{k_j} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} |B(x_0, R)|_{d\mu_k} &\gtrsim \int_{|x_0|-R/2}^{|x_0|+R/2} r^{d_k-1} dr \left(\frac{R}{|x_0|} \right)^{d-1} \prod_{j \in A} \left(\frac{R}{|x_0|} \right)^{k_j} \prod_{j \in B} |(a_j, x'_0)|^{k_j} \\ &\gtrsim R^d \prod_{j \in A} R^{k_j} \prod_{j \in B} |(a_j, x_0)|^{k_j} \gtrsim R^d \prod_{j=1}^m (|(a_j, x_0)| + R)^{k_j}. \end{aligned}$$

Оценка снизу и в целом соотношение (1) при $|x_0| \geq 3R$ доказано.

Пусть теперь $|x_0| \leq 3R$. В этом случае

$$R^d \prod_{j=1}^m (|(a_j, x_0)| + R)^{k_j} \asymp R^{d_k} \asymp |B(0, R)|_{d\mu_k}.$$

Если $|x_0| \leq R/2$, то $B(0, R/2) \subset B(x_0, R) \subset B(0, 3R/2)$ и

$$|B(x_0, R)|_{d\mu_k} \asymp R^{d_k}.$$

Если $R/2 \leq |x_0| \leq 3R$, то $B(x_0, R/6) \subset B(x_0, R) \subset B(0, 4R)$. Следовательно,

$$|B(x_0, R)|_{d\mu_k} \leq |B(0, 4R)|_{d\mu_k} \lesssim R^{d_k}.$$

Если $\tilde{R} = R/6$, то $|x_0| \geq 3\tilde{R}$. Случай шара $B(x_0, \tilde{R})$ уже был рассмотрен. Он дает

$$|B(x_0, R)|_{d\mu_k} \geq |B(x_0, R/6)|_{d\mu_k} \gtrsim R^{d_k}.$$

Теорема 1 доказана. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 1. Мера Данкля удовлетворяет условию удвоения:

$$|B(x_0, 2R)|_{d\mu_k} \lesssim |B(x_0, R)|_{d\mu_k}.$$

Так как пространство $(\mathbb{R}^d, d\mu_k)$ однородно, то следствие 1 также вытекает из [12, Chapter 1].

Вложения $B(x_0, R) \subset Q(x_0, R) \subset B(x_0, \sqrt{d}R)$ дают

СЛЕДСТВИЕ 2. Имеем

$$|Q(x_0, R)|_{d\mu_k} \asymp R^d \prod_{j=1}^m (|(a_j, x_0)| + R)^{k_j}$$

и

$$|Q(x_0, 2R)|_{d\mu_k} \lesssim |Q(x_0, R)|_{d\mu_k}.$$

Рассмотрим случай радиального кусочно-степенного веса. Для $x \in \mathbb{R}^d$, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) \in \mathbb{R}^2$ он имеет вид

$$u_\gamma(x) = |x|^{\gamma_1} \chi_{B_1}(x) + |x|^{\gamma_2} \chi_{B_1^c}(x) = u_\gamma^0(|x|),$$

где $B_1 = B(0, 1)$, $B_1^c = \mathbb{R}^d \setminus B(0, 1)$, а $u_\gamma^0(r) = r^{\gamma_1} \chi_{[0,1]}(r) + r^{\gamma_2} \chi_{(1,\infty)}(r)$. При $\gamma = \gamma_1 = \gamma_2$ получаем степенной вес $u_\gamma(x) = |x|^\gamma$.

Из требования локальной интегрируемости весовой функции $u_\gamma(x)$ вытекает необходимое условие

$$\gamma_1 > -d_k.$$

Будем предполагать, что оно выполнено.

Нас интересуют оценки меры

$$|B(x_0, R)|_{d\mu_k, u_\gamma} = \int_{B(x_0, R)} u_\gamma d\mu_k.$$

Отметим, что для кусочно-степенных весов справедливы следующие легко проверяемые свойства:

$$\begin{aligned} c_1(\lambda) u_\gamma(x) &\leq u_\gamma(\lambda x) \leq c_2(\lambda) u_\gamma(x), \quad \lambda > 0, \\ u_\gamma(x) u_\beta(x) &= u_{\gamma+\beta}(x), \quad (u_\gamma(x))^s = u_{s\gamma}(x), \quad s \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{5}$$

ТЕОРЕМА 2. Если $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $R > 0$, $\gamma_1, \gamma_2 > -d_k$, то

$$|B(x_0, R)|_{d\mu_k, u_\gamma} \asymp u_\gamma^0(|x_0| + R) R^d \prod_{j=1}^m (|(a_j, x_0)| + R)^{k_j}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из доказательства теоремы 1 вытекают следующие оценки. Если $|x_0| \geq 3R$, то

$$\begin{aligned} |B(x_0, R)|_{d\mu_k, u_\gamma} &\lesssim \int_{|x_0|-R}^{|x_0|+R} r^{d_k-1} u_\gamma^0(r) dr \left(\frac{R}{|x_0|}\right)^{d-1} \prod_{j \in A} \left(\frac{R}{|x_0|}\right)^{k_j} \prod_{j \in B} |(a_j, x'_0)|^{k_j} \\ &\lesssim u_\gamma^0(|x_0|) R^d \prod_{j=1}^m (|(a_j, x_0)| + R)^{k_j}, \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} |B(x_0, R)|_{d\mu_k, u_\gamma} &\gtrsim \int_{|x_0|-R/2}^{|x_0|+R/2} r^{d_k-1} u_\gamma^0(r) dr \left(\frac{R}{|x_0|}\right)^{d-1} \prod_{j \in A} \left(\frac{R}{|x_0|}\right)^{k_j} \prod_{j \in B} |(a_j, x'_0)|^{k_j} \\ &\gtrsim u_\gamma^0(|x_0|) R^d \prod_{j=1}^m (|(a_j, x_0)| + R)^{k_j}, \end{aligned}$$

поэтому

$$|B(x_0, R)|_{d\mu_k, u_\gamma} \asymp u_\gamma^0(|x_0|) R^d \prod_{j=1}^m (|(a_j, x_0)| + R)^{k_j}.$$

Если $|x_0| \leq R/2$, то с учетом условий $\gamma_1, \gamma_2 > -d_k$

$$|B(x_0, R)|_{d\mu_k, u_\gamma} \leq |B(0, 3R/2)|_{d\mu_k, u_\gamma} \lesssim \int_0^{3R/2} r^{d_k-1} u_\gamma^0(r) dr \lesssim u_\gamma^0(R) R^{d_k}$$

и

$$|B(x_0, R)|_{d\mu_k, u_\gamma} \geq |B(0, R/2)|_{d\mu_k, u_\gamma} \gtrsim \int_0^{R/2} r^{d_k-1} u_\gamma^0(r) dr \gtrsim u_\gamma^0(R) R^{d_k},$$

поэтому

$$|B(x_0, R)|_{d\mu_k, u_\gamma} \asymp u_\gamma^0(R) R^{d_k}.$$

Если $R/2 \leq |x_0| \leq 3R$, то аналогично $|B(x_0, R)|_{d\mu_k, u_\gamma} \asymp u_\gamma^0(R) R^{d_k}$. Теорема 2 доказана. $\square$

Пусть w — весовая функция. Будем говорить, что пара $(w, d\mu_k)$ удовлетворяет условию удвоения, если для всех $x_0 \in \mathbb{R}^d$ и $R > 0$

$$|B(x_0, 2R)|_{d\mu_k, w} \lesssim |B(x_0, R)|_{d\mu_k, w}$$

с константой, не зависящей от x_0 и R .

СЛЕДСТВИЕ 3. Если $\gamma_1, \gamma_2 > -d_k$, то пара $(u_\gamma, d\mu_k)$ удовлетворяет условию удвоения.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если $R \geq 1$, $\gamma_1 > -d_k$, а $\gamma_2 \leq -d_k$, то

$$\begin{aligned} |B(0, R)|_{d\mu_k, u_\gamma} &= c_{d,k} \int_0^R r^{d_k-1} u_\gamma^0(r) dr \\ &= c_{d,k} \int_0^R \{r^{\gamma_1+d_k-1} \chi_{[0,1]}(r) + r^{\gamma_2+d_k-1} \chi_{(1,\infty)}(r)\} dr \\ &\asymp \begin{cases} 1, & \gamma_2 + d_k < 0, \\ \ln(R+1), & \gamma_2 + d_k = 0. \end{cases} \end{aligned} \tag{6}$$

3. Условия Макенхаута для кусочно-степенных весов в пространстве $\mathbb{R}^d$ с мерой Данкля

Пусть $1 \leq p < \infty$, B — евклидовы шары. Будем говорить, что пара $(w, d\mu_k)$ удовлетворяет A_p -условию Макенхаута $((w, d\mu_k) \in A_p)$, если

$$\sup_B \left\{ \left(\frac{1}{|B|_{d\mu_k}} \int_B w d\mu_k \right) \left(\frac{1}{|B|_{d\mu_k}} \int_B w^{-\frac{1}{p-1}} d\mu_k \right)^{p-1} \right\} < \infty, \quad 1 < p < \infty,$$

и

$$\sup_B \left\{ \left(\frac{1}{|B|_{d\mu_k}} \int_B w d\mu_k \right) \operatorname{vrai\,sup}_B (w^{-1}) \right\} < \infty, \quad p = 1.$$

ТЕОРЕМА 3. *Пара $(u_\gamma, d\mu_k)$ удовлетворяет A_p -условию Макенхаута тогда и только тогда, когда $-d_k < \gamma_1, \gamma_2 < d_k(p-1)$ при $1 < p < \infty$ и $-d_k < \gamma_1, \gamma_2 \leq 0$ при $p = 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Из условий локальной интегрируемости весов u_γ , $u_{-\frac{\gamma}{p-1}}$ при $1 < p < \infty$ вытекают необходимые условия $-d_k < \gamma_1 < d_k(p-1)$. При $p = 1$ они имеют вид $-d_k < \gamma_1 \leq 0$.

Если $\gamma_2 + d_k \leq 0$ и $1 < p < \infty$, то $-\frac{\gamma_2}{p-1} + d_k > 0$. Отсюда, применяя (6) и теоремы 1 и 2, для $R \geq 1$ получим

$$\begin{aligned} |B(0, R)|_{d\mu_k, u_\gamma} &\asymp \begin{cases} 1, & \gamma_2 + d_k < 0, \\ \ln(R+1), & \gamma_2 + d_k = 0, \end{cases} \\ |B(0, R)|_{d\mu_k} &\asymp R^{d_k}, \quad |B(0, R)|_{d\mu_k, (u_\gamma)^{-\frac{1}{p-1}}} \asymp R^{-\frac{\gamma_2}{p-1} + d_k}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \sup_{R \geq 1} \left\{ \left(\frac{1}{|B(0, R)|_{d\mu_k}} \int_{B(0, R)} u_\gamma d\mu_k \right) \left(\frac{1}{|B(0, R)|_{d\mu_k}} \int_{B(0, R)} u_\gamma^{-\frac{1}{p-1}} d\mu_k \right)^{p-1} \right\} \\ \asymp \sup_{R \geq 1} \begin{cases} R^{-\gamma_2 - d_k}, & \gamma_2 + d_k < 0, \\ \ln(R+1), & \gamma_2 + d_k = 0 \end{cases} = \infty. \end{aligned}$$

При $p = 1$ аналогично

$$\begin{aligned} \sup_{R \geq 1} \left\{ \left(\frac{1}{|B(0, R)|_{d\mu_k}} \int_{B(0, R)} u_\gamma d\mu_k \right) \operatorname{vrai\,sup}_{B(0, R)} (u_\gamma^{-1}) \right\} \\ \asymp \sup_{R \geq 1} \begin{cases} R^{-\gamma_2 - d_k}, & \gamma_2 + d_k < 0, \\ \ln(R+1), & \gamma_2 + d_k = 0 \end{cases} = \infty. \end{aligned}$$

Необходимость условия $\gamma_2 + d_k > 0$ при $1 \leq p < \infty$ доказана.

Если $\gamma_2 \geq d_k(p-1)$ и $1 < p < \infty$, то $\gamma_2 + d_k > 0$. Отсюда, применяя (6) и теоремы 1 и 2, для $R \geq 1$ получим $|B(0, R)|_{d\mu_k, u_\gamma} \asymp R^{\gamma_2}$,

$$|B(0, R)|_{d\mu_k, (u_\gamma)^{-\frac{1}{p-1}}} \asymp \begin{cases} 1, & \gamma_2 > d_k(p-1), \\ \ln(R+1), & \gamma_2 = d_k(p-1). \end{cases}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \sup_{R \geq 1} \left\{ \left(\frac{1}{|B(0, R)|_{d\mu_k}} \int_{B(0, R)} u_\gamma d\mu_k \right) \left(\frac{1}{|B(0, R)|_{d\mu_k}} \int_{B(0, R)} u_\gamma^{-\frac{1}{p-1}} d\mu_k \right)^{p-1} \right\} \\ \asymp \sup_{R \geq 1} \begin{cases} R^{\gamma_2 - d_k(p-1)}, & \gamma_2 > d_k(p-1), \\ \ln^{p-1}(R+1), & \gamma_2 = d_k(p-1) \end{cases} = \infty. \end{aligned}$$

Необходимость условия $\gamma_2 < d_k(p-1)$ при $1 < p < \infty$ доказана. Остается рассмотреть случай $p = 1$ и $\gamma_2 > 0$:

$$\sup_{R \geq 1} \left\{ \left(\frac{1}{|B(0, R)|_{d\mu_k}} \int_{B(0, R)} u_\gamma d\mu_k \right) \operatorname{vrai\,sup}_{B(0, R)} (u_\gamma^{-1}) \right\} \asymp \sup_{R \geq 1} R^{\gamma_2} = \infty.$$

Необходимость условия $\gamma_2 \leq 0$ при $p = 1$ также доказана.

Достаточность. Пусть $p > 1$, $-d_k < \gamma_1, \gamma_2 < d_k(p-1)$. Согласно (5)

$$\begin{aligned} J_p &= \left(\frac{1}{|B(x_0, R)|_{d\mu_k}} \int_{B(x_0, R)} u_\gamma d\mu_k \right) \left(\frac{1}{|B(x_0, R)|_{d\mu_k}} \int_{B(x_0, R)} u_\gamma^{-\frac{1}{p-1}} d\mu_k \right)^{p-1} \\ &= \left(\frac{1}{|B(x_0, R)|_{d\mu_k}} \int_{B(x_0, R)} u_\gamma d\mu_k \right) \left(\frac{1}{|B(x_0, R)|_{d\mu_k}} \int_{B(x_0, R)} u_{-\frac{\gamma}{p-1}} d\mu_k \right)^{p-1}. \end{aligned}$$

Применяя теоремы 1 и 2 и свойство (5) получим

$$J_p \asymp u_\gamma(|x_0| + R) (u_{-\frac{\gamma}{p-1}}(|x_0| + R))^{p-1} = u_\gamma(|x_0| + R) u_{-\gamma}(|x_0| + R) = 1.$$

Если $p = 1$ и $-d_k < \gamma_1, \gamma_2 \leq 0$, то

$$\operatorname{vrai\,sup}_B (u_\gamma^{-1}) = \lim_{p \rightarrow 1+0} \left(\frac{1}{|B(x_0, R)|_{d\mu_k}} \int_{B(x_0, R)} u_\gamma^{-\frac{1}{p-1}} d\mu_k \right)^{p-1} \asymp u_{-\gamma}(|x_0| + R).$$

Следовательно, $J_1 \asymp u_\gamma(|x_0| + R) u_{-\gamma}(|x_0| + R) = 1$. Теорема 3 полностью доказана. $\square$.

Пусть $1 < p < q < \infty$. Будем говорить, что пара $(w, d\mu_k)$ удовлетворяет $A_{p,q}$ -условию Макенхаута $((w, d\mu_k) \in A_{p,q})$, если

$$\sup_B \left\{ \left(\frac{1}{|B|_{d\mu_k}} \int_B w d\mu_k \right) \left(\frac{1}{|B|_{d\mu_k}} \int_B w^{-\frac{p'}{q}} d\mu_k \right)^{q/p'} \right\} < \infty.$$

Аналогично теореме 3 доказывается следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $1 < p < q < \infty$. Пара $(u_\gamma, d\mu_k)$ удовлетворяет $A_{p,q}$ -условию Макенхаута тогда и только тогда, когда $-d_k < \gamma_1, \gamma_2 < \frac{q}{p'} d_k$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В определениях A_p и $A_{p,q}$ -условий Макенхаута шары B можно заменить на кубы Q и условия на весовые функции в теоремах 3, 4 останутся те же самые.

4. Заключение

Рассмотрим задачу о (L_p, L_q) -неравенстве для потенциала Данкля–Рисса с одним весом w :

$$\|w I_\alpha^k f\|_{(L^q, d\mu_k)} \lesssim \|w f\|_{(L^p, d\mu_k)}. \quad (7)$$

В [11] установлено, что неравенство (7) выполняется для кусочно-степенного веса $w = u_{-\gamma}$ и $1 < p < q < \infty$ тогда и только тогда, когда выполнены условия

$$\alpha = d_k \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right), \quad -\frac{d_k}{p'} < \gamma_1, \gamma_2 < \frac{d_k}{q}. \quad (8)$$

С учетом теоремы 4 условия (8) эквивалентны следующим

$$\alpha = d_k \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) \quad \text{и} \quad (u_{-\gamma}^q, d\mu_k) \in A_{p,q}.$$

Мы предполагаем, что эти условия являются необходимыми и достаточными для произвольного веса w .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Grafacos L. Classical Fourier Analysis. Graduate Texts in Mathematics 249. New York: Springer, 2008. 489 p.
2. Grafacos L. Classical Fourier Analysis. Graduate Texts in Mathematics 250. New York: Springer, 2009. 504 p.
3. Muckenhoupt B. Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function // Trans. Amer. Math. Soc. 1972. Vol. 165. P. 207–226.
4. Muckenhoupt B., Wheeden R.L. Weighted norm inequalities for fractional integrals // Trans. Amer. Math. Soc. 1974. Vol. 192. P. 261–274.
5. Hardy G.H., Littlewood J.E. Some properties of fractional integrals, I // Math. Zeit. 1928. Vol. 27. P. 565–606.
6. Соболев С. Об одной теореме функционального анализа // Матем. сб. 1938. Т. 4(46), № 4. С. 471–497.
7. Rösler M. Dunkl operators. Theory and applications, in Orthogonal Polynomials and Special Functions. Lecture Notes in Math. Springer-Verlag, 2003. Vol. 1817. P. 93–135.
8. Thangavelu S., Xu Y. Riesz transform and Riesz potentials for Dunkl transform // J. Comput. Appl. Math. 2007. Vol. 199. P. 181–195.
9. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Tikhonov S. Yu. Positive L^p -bounded Dunkl-Type generalized translation operator and its applications // Constructive approximation. 2019. Vol. 49. No. 3. P. 555–605.
10. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Tikhonov S. Yu. Riesz potential and maximal function for Dunkl transform. Preprint CRM, Barcelona, 2018. № 1238. P. 1–28.
11. Горбачев Д. В., Иванов В. И. Весовые неравенства для потенциала Дункля–Рисса // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 1. С. 131–147.
12. Stein E. M. Harmonic analysis: Reals-variable methods, orthogonality and oscillatory integrals. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1993. 716 p.
13. Dai F. Multivariate polynomial inequalities with respect to doubling weights and A_∞ weights // J. Funct. Anal. 2006. Vol. 235. P. 137–170.

REFERENCES

1. Grafacos L., 2008, “Classical Fourier Analysis”, Graduate Texts in Mathematics 249. *New York: Springer*, 489 p.
2. Grafacos L., “Modern Fourier Analysis”, Graduate Texts in Mathematics 250. *New York: Springer*, 504 p.
3. Muckenhoupt B., 1972, “Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 165, pp. 207–226.
4. Muckenhoupt B., Wheeden R. L., 1974, “Weighted norm inequalities for fractional integrals”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 192, pp. 261–274.

5. Hardy G.H., Littlewood J.E., 1928, “Some properties of fractional integrals, I”, *Math. Zeit.*, vol. 27, pp. 565–606.
6. Soboleff S., 1963, “Sur un théorème d’analyse fonctionnelle”, *Amer. Math. Soc. Transl.*, № 2(34), pp. 39–68.
7. Rösler M., 2003, “Dunkl operators. Theory and applications, in Orthogonal Polynomials and Special Functions”, *Lecture Notes in Math. Springer-Verlag*, vol. 1817, pp. 93–135.
8. Thangavelu S., Xu Y., 2007, “Riesz transform and Riesz potentials for Dunkl transform”, *J. Comput. Appl. Math.*, vol. 199, pp. 181–195.
9. Gorbachev D.V., Ivanov V.I., Tikhonov S.Yu., 2019, “Positive L^p -bounded Dunkl-Type Generalized Translation Operator and Its Applications”, *Constructive approximation*, vol. 49, No. 3, pp. 555–605.
10. Gorbachev D.V., Ivanov V.I., Tikhonov S.Yu., 2018, “Riesz potential and maximal function for Dunkl transform”, *Preprint CRM, Barcelona*, № 1238, pp. 1–28.
11. Gorbachev D.V., Ivanov V.I., 2019, “Weighted inequalities for Dunkl–Riesz potential”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 20, № 1, pp. 131–147. (In Russian)
12. Stein E.M., 1993, “Harmonic analysis: Reals-variable methods, orthogonality and oscillatory integrals”, *Princeton, New Jersey: Princeton University Press*, 716 p.
13. Dai F., 2006, “Multivariate polynomial inequalities with respect to doubling weights and A_∞ weights”, *J. Funct. Anal.*, vol. 235, pp. 137–170.

Получено 18.05.2019 г.

Принято в печать 12.07.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 2.

УДК 519.72

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-93-107

Новый подход к поиску строковой медианы и визуализация строковых кластеров¹

Д. В. Горбачев, Е. П. Офицеров

Горбачев Дмитрий Викторович — доктор физико-математических наук, профессор, кафедры прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: dvgmail@mail.ru

Офицеров Евгений Петрович — кафедра прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: eofitserov@gmail.com

Аннотация

Рассматривается следующая задача о поиске медианы набора строк:

$$c = \operatorname{argmin}_{a \in U} \sum_{b \in D} d(a, b),$$

где $D \subset G^*$ — конечный набор строк над алфавитом G , $U \subseteq G^*$, d — редакционное расстояние Левенштейна. Эта задача имеет важные приложения, например в биоинформатике при анализе белковых последовательностей. Однако известно, что в общем случае для $U = G^*$ задача о медиане является NP-сложной. Поэтому для приближенного решения были предложены эвристические алгоритмы, в частности, жадный алгоритм. Мы предлагаем новый гибкий подход, базирующийся на гладкой аппроксимации расстояния Левенштейна $\tilde{d}$. В его основе лежит стохастическое кодирование символьных последовательностей и следующая формула для редакционного расстояния:

$$d(X_1, X_2) = \min_{(X'_1, X''_2)_e \subseteq X_1 \times X_2} \left\{ \frac{1}{2} \|X'_1 - X''_2\|_1 + |X_1| - |X'_1| + |X_2| - |X''_2| \right\},$$

где минимум берется по всем подпоследовательностям $(X'_1, X''_2)_e$ равной длины. С одной стороны, стохастическое кодирование расширяет класс, на котором ищется экстремум. Однако наш основной результат показывает, что медиана не меняется. С другой стороны, теперь мы можем воспользоваться гладкими методами оптимизации, если заменить минимум в определении выше его гладким приближением. Мы приводим детали реализации на основе градиентного спуска, включая рекуррентные формулы расчета $\tilde{d}$. Эффективный расчет приближенной медианы позволяет, например, применить метод k -средних для кластеризации строк. Мы даем способ визуализации этих кластеров на основе метода стохастического вложения соседей tSNE.

Ключевые слова: редакционное расстояние Левенштейна, строковая медиана, гладкий минимум, градиентный спуск, метод k -средних, визуализация строкового кластера.

Библиография: 19 названий.

¹Результаты исследования опубликованы при финансовой поддержке ТулГУ в рамках научного проекта №:НИР_2018_28.

Для цитирования:

Д. В. Горбачев, Е. П. Офицеров. Новый подход к поиску строковой медианы и визуализация строковых кластеров // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 2, с. 93–107.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 2.

UDC 519.72

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-93-107

New approach to searching for string median and visualization of string clusters²

D. V. Gorbachev, E. P. Ofitserov

Gorbachev Dmitry Viktorovich — Doctor of physical and mathematical sciences, Professor, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Tula State University (Tula).

e-mail: dvgmail@mail.ru

Ofitserov Evgenii Petrovich — Department of Applied Mathematics and Computer Science, Tula State University (Tula).

e-mail: eofitserov@gmail.com

Abstract

We consider the following problem of searching the median of a string set:

$$c = \operatorname{argmin}_{a \in U} \sum_{b \in D} d(a, b),$$

where $D \subset G^*$ is the finite set of strings over the alphabet G , $U \subseteq G^*$, d is the Levenshtein edit distance. This problem has important applications, e.g., in bioinformatics in the analysis of protein sequences. However, it is known that in the general case for $U = G^*$ the median problem is NP-hard. Therefore, for an approximate solution, heuristics algorithms were proposed, in particular, the greedy algorithm. We give a new flexible approach based on smooth Levenshtein distance approximation $\tilde{d}$. It uses stochastic character encoding of sequences and the following formula for the edit distance:

$$d(X_1, X_2) = \min_{(X'_1, X''_2)_e \subseteq X_1 \times X_2} \left\{ \frac{1}{2} \|X'_1 - X''_2\|_1 + |X_1| - |X'_1| + |X_2| - |X''_2| \right\},$$

where the minimum is taken over all subsequences $(X'_1, X''_2)_e$ of equal length. On the one hand, stochastic coding extends the class, over which the extremum is searched. However, our main result shows that the median is the same. On the other hand, now we can use smooth optimization methods, replacing the minimum in the definition above with a smooth approximation. We give implementation details based on the gradient descent, including the recursion formulas for calculating $\tilde{d}$. Effective calculation of the approximate median allows, e.g., to use the k-means method for string clustering. We propose an approach to visualize such clusters based on tSNE stochastic nesting method.

Keywords: Levenshtein edit distance, string median, smooth minimum, gradient descent, k-means, string cluster visualization.

Bibliography: 19 titles.

For citation:

D. V. Gorbachev, E. P. Ofitserov, 2019, "New approach to searching for string median and visualization of string clusters", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 2, pp. 93–107.

²The results of the study are published with the financial support of Tulsu within the framework of the scientific project №:НИП_2018_28.

1. Введение

В этой работе мы приведем теоретическое обоснование метода гладкой аппроксимации редакционного расстояния Левенштейна в задаче поиска строковой медианы. Эти результаты продолжают исследования второго автора, связанные с применением методов дифференцируемого выравнивания в задачах машинного обучения [2, 3, 4, 14, 5]. Мы приведем основные факты численной реализации методами математического программирования. Также дается способ визуализации строкового кластера и его приближенной медианы.

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $G_n = \{g_1, \dots, g_n\}$ — алфавит, $|G| = n$ — число элементов, G_n^L — множество строк или последовательностей $a = a[1] \dots a[L]$ над G_n длины $L = |a| \geq 0$ (при $L = 0$ имеем пустую строку λ), $G_n^* = \bigcup_{L \geq 0} G_n^L$.

Через $d(a_1, a_2): G_n^* \times G_n^* \rightarrow \mathbb{Z}_+$ обозначим дискретное редакционное расстояние Левенштейна. Оно определяется как минимальное количество операций замены, вставки и удаления символа, необходимых для преобразования строки a_1 в строку a_2 [1, гл. 11]. Свойства d и разные варианты подсчета приводятся в пункте 2.1.

Строковой медианой или центроидом конечного набора строк $D \subseteq G_n^*$ на подмножестве $U \subseteq G_n^*$ называется строка $c = c(D, U) \in U$, для которой [12]

$$c = \operatorname{argmin}_{a \in U} \sum_{b \in D} d(a, b). \quad (1)$$

Основными являются случаи $U = D$ и $U = G_n^*$. Назовем медиану $c(D, D)$ локальной, а $c(D, G_n^*)$ — глобальной.

Дискретная экстремальная задача (1) имеет большое прикладное значение (см., например, результаты, упомянутые в [9, 12, 10]). Однако, несмотря на то, что сложность вычисления расстояния Левенштейна по алгоритму Вагнера–Фишера полиномиальная (см. пункт 2.1), доказано, что задача поиска глобальной медианы набора D будет NP-сложной, если количество и длины строк в D могут быть произвольными. Для родственной задачи о множественном выравнивании этот факт был установлен в [19]. NP-сложность задачи (1) в работе [9] доказана при помощи сведения к NP-сложной задаче о нахождении длиннейшей общей подпоследовательности строк из D .

Были предложены различные методы для приближенного нахождения медианы. Самый простой способ состоит в поиске локальной медианы (см., например, [12]). Это задача сложности $O(L_{\max}^2 |D|^2)$, где $L_{\max}$ — максимальная длина строки из D . Однако результаты [12] показывают, что $c(D, D)$ может заметно отличаться от глобальной медианы $c(D, G_n^*)$.

В [8] был предложен жадный алгоритм приближенного поиска глобальной медианы (см. пункт 2.2). Он прост в реализации, быстр и дает неплохое приближение, которое имеет смысл использовать для сравнения методов. Сложность жадного алгоритма $O(L_{\max}^2 |D| |G|)$ за итерацию (которых не более $2L_{\max}$ по лемме 1). Были предложены варианты этого алгоритма (см., например, [11]). Отметим вариант получения приближенной глобальной медианы модификацией локальной медианы, имеющий сложность $O(L_{\max}^3 |D| |G|)$ за итерацию [12]. В [10] проблема (1) сводится к задаче целочисленного программирования.

В работе [15] применяется вероятностный подход на основе представления символов стохастическими векторами. Нам потребуется такое представление, поэтому напомним, что вектор $w = (w_1, \dots, w_n)$ называется стохастическим (вероятностным) или весовым, если $w_1, \dots, w_n \in [0, 1]$ и $w_1 + \dots + w_n = 1$. Множество таких векторов обозначим через W_n .

Мы отсылаем к упомянутым выше работам за более подробным обзором проблемы.

В данной работе предлагается метод приближенного вычисления медианы на основе стохастического кодирования последовательностей и гладкой аппроксимацией расстояния Левенштейна $\tilde{d}$. Мы предполагаем, что максимальная длина $L_{\max}$ подпоследовательности из D много меньше $|D|$. Подробнее идея состоит в следующем.

Пусть $E_n = \{e_1, \dots, e_n\}$, где $e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \{0, 1\}^n$ — бинарный вектор с единицей на j -м месте, $j = \overline{1, n}$. Закодируем символ $g_j \in G_n$ вектором e_j . Тогда произвольная последовательность $a = a[1] \dots a[L]$ над алфавитом G_n биективно отображается в бинарную последовательность $B = B[1] \dots B[L]$ над алфавитом E_n .

Непустую последовательность B также можно интерпретировать как бинарную прямоугольную матрицу со строками $B[i] = (B[i, 1], \dots, B[i, n])$, $i = \overline{1, L}$, и элементами

$$B[i, j] = \begin{cases} 1, & \text{если } a[i] = g_j, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases} \quad j = \overline{1, n}.$$

В итоге имеем $E_n^* \cong G_n^*$ и можно не делать различия между бинарными последовательностями (матрицами) и символьными последовательностями.

Метрику Левенштейна можно перенести на бинарные матрицы из E_n^* с помощью следствия 1 из пункта 2.1:

$$d(B_1, B_2) = \min_{(B'_1, B''_2)_{e \subseteq B_1 \times B_2}} \left\{ \frac{1}{2} \|B'_1 - B''_2\|_1 + |B_1| - |B'_1| + |B_2| - |B''_2| \right\}. \quad (2)$$

Тогда задача о строковой медиане набора $D \subseteq E_n^*$ на подмножестве $U \subseteq E_n^*$ эквивалентно записывается как

$$S(D, U) = \min_{A \in U} \sum_{B \in D} d(A, B), \quad C(D, U) \in \arg S(D, U). \quad (3)$$

Множество E_n является множеством крайних точек W_n . Следуя [15] вложим дискретное множество E_n^* в непрерывное пространство W_n^* последовательностей (матриц) вида $X = X[1] \dots X[L]$, где $X[i]$ — стохастический вектор:

$$X[i] \in [0, 1]^n, \quad \sum_{j=1}^n X[i, j] = 1, \quad i = \overline{1, L}, \quad L = |X| \geq 0$$

($L = 0$ отвечает пустой матрице Λ). Будем называть такие матрицы или последовательности весовыми.

Округлением $\text{round}(w): E_n \rightarrow W_n$ стохастического вектора $w \in W_n$ называется бинарный вектор e_j , в котором единица стоит на месте максимального w_j (если таких несколько, то выбирается последний). Соответственно, округлением $\text{round}(X): W_n^* \rightarrow E_n^*$ весовой матрицы X называется бинарная матрица, которая состоит из округлений строк X .

Формула (2) справедлива для произвольных весовых матриц $X_1, X_2 \in W_n^*$. Поэтому задачу (3) можно рассмотреть на более широком множестве $U = W_n^*$. Следующая основная теорема показывает, что минимум не изменится и решение (3) можно восстановить, применяя округление.

ТЕОРЕМА 1. *Для любого конечного набора $D \subseteq E_n^*$ имеем*

$$S(D, E_n^*) = S(D, W_n^*), \quad C(D, E_n^*) = \text{round}(C(D, W_n^*)).$$

Вычисление $S(D, W_n^*)$ сводится к решению серии задач $\min \sum_{B \in D} d(X, B)$, где $X \in W_n^*$ и $|X|$ фиксировано. Пространство W_n^* непрерывно, однако функция $X \mapsto \sum_{B \in D} d(X, B)$ не везде дифференцируема из-за взятия минимума в (2). Это не позволяет применить эффективные методы математического программирования, в частности, градиентного спуска. Чтобы обойти этот момент мы воспользуемся гладкой аппроксимацией $\tilde{d}$ расстояния Левенштейна, основанной на применении гладкого минимума. Для эффективного вычисления функции $\tilde{d}$ и

ее градиента предлагаются рекуррентных формулы, являющиеся аналогами формулы динамического программирования для d . Данные результаты были получены вторым автором в работе [14].

Структура работа следующая. В разделе 2 приведены основные утверждения относительно редакционного расстояния Левенштейна: необходимые для понимания классические результаты (пункт 2.1), сведения о жадном алгоритме (пункт 2.2), доказательство основной теоремы 1 (пункт 2.3). В разделе 3 даются основные факты для дифференцируемого редакционного расстояния (ДРР) $\tilde{d}$: определение ДРР (пункт 3.1), рекуррентные формулы для расчета (пункт 3.2), детали градиентного спуска (пункт 3.3). В разделах 4 и 5 приведены краткие сведения о визуализации кластеров строк и возможном развитии темы соответственно.

2. Основные утверждения

2.1. Редакционное расстояние Левенштейна

Мы воспользуемся хорошо известными результатами, связанными с расстоянием Левенштейна d , взятыми из [1, гл. 11].

Для строки $a = a[1]a[2] \dots a[L] \in G_n^*$ через

$$a[i] = a[i_1, \dots, i_\ell] = a[i_1] \dots a[i_\ell] \subseteq a, \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_\ell \leq L,$$

обозначается подпоследовательность длины ℓ (пустая при $\ell = 0$ или $L = 0$), определяемая индексами $\mathbf{i} = i_1, \dots, i_\ell$, $a[i:j] = a[i]a[i+1] \dots a[j]$ — подстрока от индекса i до j (пустая при $i > j$), $a[1:i]$ — префикс длины $i = \overline{0, L}$.

Пусть далее $a_1 = a_1[1] \dots a_1[L_1]$, $a_2 = a_2[1] \dots a_2[L_2]$ и

$$\delta(i, j) = d(a_1[1:i], a_2[1:j]), \quad i = \overline{0, L_1}, \quad j = \overline{0, L_2}.$$

Для вычисления расстояния Левенштейна применяется следующая рекуррентная формула:

$$d(a_1, a_2) = \delta(L_1, L_2),$$

где $\delta(i, 0) = i$, $\delta(0, j) = j$ и при $i, j \geq 1$

$$\delta(i, j) = \min\{\delta(i, j-1) + 1, \delta(i-1, j) + 1, \delta(i-1, j-1) + \theta\}, \quad \theta = \begin{cases} 1, & a_1[i] \neq a_2[j], \\ 0, & a_1[i] = a_2[j]. \end{cases} \quad (4)$$

Эта формула лежит в основе алгоритма динамического программирования Вагнера–Фишера и позволяет за $O(L_1 L_2)$ операций вычислить $\delta(L_1, L_2)$, а также оптимальное редакционное предписание — список длины $d(a_1, a_2)$ необходимых замен, вставок и удалений.

Расстояние Левенштейна удовлетворяет всем аксиомам метрики и

$$||a_1| - |a_2|| \leq d(a_1, a_2) \leq \max\{|a_1|, |a_2|\}. \quad (5)$$

Можно дать другое выражение для расстояния Левенштейна, используя термин выравнивание последовательностей [1, гл. 11]. Глобальным выравниванием двух строк называется вставка в строки пробелов (в том числе и на их концах) до равной длины так, чтобы i -й символ или пробел первой строки отвечал i -му символу или пробелу второй строки для всех $i = 1, 2, \dots$ (пара пробел–пробел не допускается). Приведем пример выравнивания из [1] для строк `vintner` и `writers`:

$$\begin{pmatrix} \text{v} & \text{ - } & \text{i} & \text{ n } & \text{t} & \text{ n } & \text{e} & \text{ r } & \text{ - } \\ \text{w} & \text{ r } & \text{ i } & \text{ - } & \text{t} & \text{ - } & \text{e} & \text{ r } & \text{ s} \end{pmatrix}.$$

По выравниванию легко получить редакционное предписание и наоборот: совпадающая пара символ–символ пропускается, несовпадающая пара символ–символ отвечает замене, пара пробел–символ — вставке и символ–пробел — удалению. Для примера выше имеем предписание длины 5, которое является оптимальным.

Произвольное выравнивание последовательностей a_1, a_2 можно построить, задав список пар символ–символ. Символы этих пар образуют подпоследовательности одинаковой длины. Для примера выше имеем **viter** и **witer**. Оставшиеся символы будут отвечать пробелам. В связи с этим введем следующее определение (где « e » в индексе означает equal length).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. (1) *Соответствием $(a'_1, a''_2)_e \subseteq a_1 \times a_2$ последовательностей a_1, a_2 называется произвольная пара подпоследовательностей $a'_1 = a_1[i'_1, \dots, i'_\ell]$, $a''_2 = a_2[i''_1, \dots, i''_\ell]$ равной длины $\ell = |a'_1| = |a''_2|$, где $0 \leq \ell \leq \min\{L_1, L_2\}$ ($\ell = 0$ отвечает пустому соответствию). Здесь символ $a_1[i'_s]$ первой последовательности отвечает символу $a_2[i''_s]$ второй последовательности, $s = \overline{1, \ell}$.*

(2) *Также положим $a'_1 = a'_1[1] \dots a'_1[\ell]$, $a''_2 = a''_2[1] \dots a''_2[\ell]$, где $a'_1[s] = a_1[i'_s]$, $a''_2[s] = a_2[i''_s]$.*

(3) *Соответствие $(a'_1, a''_2)_e$ однозначно определяется индексами подпоследовательностей $(i', i'')_e \in \overline{1, L_1} \times \overline{1, L_2}$, где $i' = i'_1, \dots, i'_\ell$, $i'' = i''_1, \dots, i''_\ell$ (для пустого соответствия имеем пустой набор индексов).*

В выравнивании, построенном по соответствию $(a'_1, a''_2)_e$, $L_1 - \ell$ символов первой строки, не вошедших в соответствие, должны отвечать пробелам второй строки, а $L_2 - \ell$ символов второй строки — пробелам первой. Например, для соответствия **(vine, rite)_e** имеем выравнивание

$$\begin{pmatrix} - & v & i & n & t & n & e & r & - & - \\ w & r & i & t & - & - & e & - & r & s \end{pmatrix}.$$

Несмотря на то, что пробелы расставляются неоднозначно, длина предписания будет всегда равна 8. Она складывается из 2 различий в соответствии (замены), 3 пробелов вверху (вставки) и 3 пробелов внизу (удаления).

Таким образом, в общем случае длина предписания, отвечающего соответствию

$$(a'_1, a''_2)_e \subseteq a_1 \times a_2,$$

будет содержать $|a_1| - |a'_1|$ позиций для вставок и $|a_2| - |a''_2|$ для удалений. При этом число замен определяется числом различий в подпоследовательностях a'_1, a''_2 , которое можно задать с помощью расстояния Хемминга

$$d_H(a'_1, a''_2) = |\{i: a'_1[i] \neq a''_2[i], i = \overline{1, \ell}\}|.$$

(равно нулю при $\ell = 0$). В итоге, получаем следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Расстояние Левенштейна между строками $a_1, a_2 \in G_n^*$ равно*

$$d(a_1, a_2) = \min_{(a'_1, a''_2)_e \subseteq a_1 \times a_2} \{d_H(a'_1, a''_2) + |a_1| - |a'_1| + |a_2| - |a''_2|\}.$$

Отметим, что мы не встречали это утверждение в литературе.

Предложение 1 следующим образом обобщается на бинарное представление последовательностей.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Пусть $B_1, B_2 \in E_n^*$. Тогда*

$$d(B_1, B_2) = \min_{(B'_1, B''_2)_e \subseteq B_1 \times B_2} \left\{ \frac{1}{2} \|B'_1 - B''_2\|_1 + |B_1| - |B'_1| + |B_2| - |B''_2| \right\}, \quad (6)$$

где для $\ell = |B'_1| = |B''_2|$

$$\|B'_1 - B''_2\|_1 = \sum_{i=1}^{\ell} \|B'_1[i] - B''_2[i]\|_1 = \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^n |B'_1[i, j] - B''_2[i, j]|$$

(нуль при $\ell = 0$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что $\|B'_1 - B''_2\|_1 = 2d_H(B'_1, B''_2)$. Это легко следует из следующего равенства для строк матриц:

$$\|B'_1[i] - B''_2[i]\|_1 = \begin{cases} 0, & B'_1[i] = B''_2[i], \\ 2, & B'_1[i] \neq B''_2[i], \end{cases} \quad i = \overline{1, \ell}.$$

Оно верно, так как в каждом из бинарных векторов $B'_1[i]$, $B''_2[i]$ только по одной единице. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 2. (1) Формула (6) позволяет определить редакционное расстояние $d(X_1, X_2)$ для произвольных весовых матриц $X_1, X_2 \in W_n^*$.

(2) Функция $d(X_1, X_2)$ по-прежнему удовлетворяет неравенствам (5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Часть 1 следствия очевидна.

Часть 2 вытекает из (6). Пусть для определенности $|X_1| \leq |X_2|$. Соответствием максимальной длины будет (X_1, X''_2) , $|X_1| = |X''_2|$, поэтому

$$d(X_1, X_2) \leq \frac{1}{2} \|X_1 - X''_2\|_1 + |X_1| - |X_1| + |X_2| - |X''_2| \leq \frac{1}{2} (\|X_1\|_1 + \|X''_2\|_1) + |X_2| - |X''_2|.$$

Имеем

$$\|X_1\|_1 = \sum_{i=1}^{|X_1|} \sum_{j=1}^n |X_1[i, j]| = \sum_{i=1}^{|X_1|} 1 = |X_1|,$$

аналогично $\|X''_2\|_1 = |X''_2|$. Поэтому

$$d(X_1, X_2) \leq |X''_2| + |X_2| - |X''_2| = |X_2|.$$

С другой стороны, для любых соответствий

$$\frac{1}{2} \|X'_1 - X''_2\|_1 + |X_1| - |X'_1| + |X_2| - |X''_2| \geq |X_1| + |X_2| - 2|X'_1| = |X_2| - |X_1|,$$

откуда следует, что $d(X_1, X_2) \geq |X_2| - |X_1|$ и, аналогично, $d(X_1, X_2) \geq |X_1| - |X_2|$. $\square$

Для доказательства теоремы 1 нам потребуется следующая лемма (где « $\cdot$ » обозначает скалярное произведение векторов).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $X \in W_n^*$, $B \in E_n^*$. Тогда

$$d(X, B) = |X| + |B| - \max_{(\mathbf{i}, \mathbf{i}'')_{e \subseteq \overline{1, |X|} \times \overline{1, |B|}}} \sum_{i=1}^{|\mathbf{i}|} \tilde{B}_{\mathbf{i}', \mathbf{i}''}[i] \cdot X[i], \quad (7)$$

где $\mathbf{i}' = i'_1, \dots, i'_\ell$, $\mathbf{i}'' = i''_1, \dots, i''_\ell$ — индексы соответствий, $0 \leq \ell \leq \min\{|X|, |B|\}$,

$$\tilde{B}_{\mathbf{i}', \mathbf{i}''}[i, j] = \begin{cases} B[i''_s, j] + 1, & i = i'_s, \quad s \in \overline{1, \ell}, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases} \quad j = \overline{1, n}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя индексы $(\mathbf{i}', \mathbf{i}'')_e$ для задания соответствия

$$(X', B'')_e, \quad X' = X[\mathbf{i}'], \quad B'' = B[\mathbf{i}''],$$

по формуле (6) находим

$$d(X, B) = \min_{(\mathbf{i}', \mathbf{i}'')_e} \left\{ \frac{1}{2} \|X' - B''\|_1 + |X| - |X'| + |B| - |B''| \right\}.$$

Учтем, что X — весовая матрица, а B — бинарная. Поэтому $X[i'_s, j] \in [0, 1]$,

$$\sum_{j=1}^n X[i'_s, j] = 1$$

и $B[i''_s] = e_{j_s}$ для некоторого j_s . Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|X' - B''\|_1 - |X'| - |B''| &= \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{\ell} \sum_{j=1}^n |X[i'_s, j] - B[i''_s, j]| - 2\ell = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{\ell} \left(\sum_{j \neq j_s} X[i'_s, j] + 1 - X[i'_s, j_s] \right) - 2\ell = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{\ell} (2 - 2X[i'_s, j_s]) - 2\ell = - \sum_{s=1}^{\ell} (1 + X[i'_s, j_s]) = \\ &= - \sum_{s=1}^{\ell} \left(\sum_{j=1}^n X[i'_s, j] + \sum_{j=1}^n B[i''_s, j] X[i'_s, j] \right) = - \sum_{s=1}^{\ell} \sum_{j=1}^n X[i'_s, j] (B[i''_s, j] + 1) = \\ &= - \sum_{i=1}^{|X|} \sum_{j=1}^n X[i, j] \tilde{B}_{\mathbf{i}', \mathbf{i}''}[i, j] = - \sum_{i=1}^{|X|} \tilde{B}_{\mathbf{i}', \mathbf{i}''}[i] \cdot X[i]. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\frac{1}{2} \|X' - B''\|_1 + |X| - |X'| + |B| - |B''| = |X| + |B| - \sum_{i=1}^{|X|} \tilde{B}_{\mathbf{i}', \mathbf{i}''}[i] \cdot X[i],$$

откуда следует утверждение леммы. $\square$

Как хорошо известно максимум конечного числа линейных функций — выпуклая кусочно-линейная функция (см. [7, пример 3.5]). Отсюда и из предложения 2 немедленно вытекает

СЛЕДСТВИЕ 3. Для каждого $i = \overline{1, L}$ функция $X[i] \mapsto d(X[1] \dots X[i] \dots X[L], B)$ на множестве W_n является выпуклой (вниз) кусочно-линейной функцией.

2.2. Жадный алгоритм

Жадный алгоритм поиска строковой медианы был предложен в работе [8]. Напомним, что решается дискретная задача оптимизации

$$c = \operatorname{argmin}_{a \in G_n^*} F(a), \quad F(a) = \sum_{b \in D} d(a, b), \quad D \subseteq G_n^*.$$

Для известного a функция $F(a)$ вычисляется эффективно по алгоритму Вагнера–Фишера.

ЛЕММА 1. Пусть $\bar{L}_D = \frac{1}{|D|} \sum_{b \in D} |b|$ — средняя длина строки в наборе D . Тогда для длины медианы справедлива оценка

$$|c| \leqslant 2\bar{L}_D. \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для пустой строки имеем $F(\lambda) = \sum_{b \in D} |b|$.

Если $|c| > \frac{2}{|D|} \sum_{b \in D} |b|$, то в силу (5) находим

$$F(c) = \sum_{b \in D} d(c, b) \geq \sum_{b \in D} ||c| - |b|| \geq \left| \sum_{b \in D} (|c| - |b|) \right| = \left| |D||c| - \sum_{b \in D} |b| \right| > \sum_{b \in D} |b| = F(\lambda).$$

Поэтому c не может быть медианой и (8) верно. $\square$

Шаги жадного алгоритма. Начинаем с присваиваний $c_0 = \lambda$ и $F_0 = F(c_0) = \sum_{b \in D} |b|$.

Далее для $k = 0, 1, \dots$ решается задача

$$c_{k+1} = \operatorname{argmin} \{F(a) : a = c_k g, g \in G\}, \quad F_{k+1} = F(c_{k+1}),$$

т.е. перебором по $g \in G_n$ к текущей строке c_k добавляется символ g и среди таких строк $a = c_k g$ вычисляются минимальное значение F_{k+1} функции $F(a)$ и соответствующая оптимальная строка c_{k+1} . Сложность этого шага $O((k+1)L_{\max}|G||D|)$, где $L_{\max} = \max_{b \in D} |b|$.

Если $F_{k+1} < \min_{i=0, \dots, k} F_i$, то итерации продолжаются и c_{k+1} новое приближение медианы. Иначе алгоритм останавливается и строка c_k ответ.

Число итераций в силу леммы 1 ограничено $2\bar{L}_D$.

2.3. Доказательство теоремы 1

Пусть $D, U \subseteq E_n^*$, $F_D(X) = \sum_{B \in D} d(X, B)$. Напомним, что в матричной постановке медиана $C = C(D, U)$ определяется из решения дискретной задачи

$$S(D, U) = \min_{X \in U} F_D(X), \quad C = C(D, U) \in \arg S(D, U).$$

Покажем, что

$$S(D, E_n^*) = S(D, W_n^*).$$

По лемме 1 с учетом следствия 2 находим

$$\min_{X \in U} F_D(X) = \min_{0 \leq L \leq 2\bar{L}_D} \min_{\substack{X \in U \\ |X|=L}} F_D(X), \quad (9)$$

поэтому достаточно доказать

$$S(D, E_n^L) = S(D, W_n^L). \quad (10)$$

При $L = 0$ это равенство очевидно и реализуется на пустой матрице. Поэтому пусть $L \geq 1$.

Очевидно, что минимум в непрерывной задаче $S(D, W_n^L)$ достигается на некоторой весовой матрице $\hat{X} \in W_n^L$. Этот минимум можно искать следующим образом:

$$S(D, W_n^L) = \min_{X[1] \in W_n} \dots \min_{X[L] \in W_n} F_D(X)$$

В силу следствия 3 функция $X[i] \mapsto F_D(X[1] \dots X[i] \dots X[L])$ выпуклая на множестве W_n . Поэтому ее минимум достигается в некоторой крайней точке (бинарном векторе) $\hat{X}[i] = e_{j_0} \in E_n$. Это доказывает (10).

В общем случае минимум может также достигаться в выпуклой комбинации крайних точек $\hat{X}[i] = \sum_{s=1}^m w_{j_s} e_{j_s}$, $1 \leq m \leq n$. Тогда по определению округления вектор $\operatorname{round}(\hat{X}[i])$ совпадает с одним из e_{j_s} и также дает решение. Следовательно, $\operatorname{round}(\hat{X})$ — решение $S(D, E_n^L)$. Теорема 1 доказана.

3. Гладкая аппроксимация расстояния Левенштейна

Детали гладкой аппроксимации расстояния Левенштейна подробно даны в работе [14]. Здесь мы приведем основные факты.

3.1. Гладкое расстояние

По теореме 1 медиану $C \in E_n^*$ дискретного набора $D \subset E_n^*$ можно искать в непрерывном пространстве весовых матриц W_n^* . Для этого с учетом (9) для каждого $0 \leq L \leq 2\bar{L}_D$ ищется медиана C_L заданной длины L :

$$C_L = \text{round}(\hat{C}_L), \quad \hat{C}_L = \underset{X \in W_n^L}{\operatorname{argmin}} F_D(X), \quad (11)$$

где, напомним, $F_D(X) = \sum_{B \in D}^m d(X, B)$. Глобальная медиана C определяется как лучшая из медиан C_L .

Для задачи оптимизации на непрерывном пространстве W_n^L естественно воспользоваться гладкими методами оптимизации. Однако функция $X \mapsto d(X, B)$ в силу следствия (3) является только кусочно-дифференцируемой. Поэтому в [14] было предложено заменить в определении (6) минимум на его гладкую аппроксимацию, называемую гладким минимумом. Этот прием известен в выпуклой оптимизации [7].

Для конечного множества $Y \subset \mathbb{R}$ гладкий τ -минимум определяется равенством

$$\operatorname{smin}(Y; \tau) = \frac{\sum_{y \in Y} y e^{\tau y}}{\sum_{y \in Y} e^{\tau y}}, \quad (12)$$

где $\tau < 0$ — параметр аппроксимации (при $\tau > 0$ имеем гладкий максимум). Нетрудно показать, что

$$\min Y \leq \operatorname{smin}(Y; \tau) \leq \min Y + C e^{\tau \Delta}, \quad (13)$$

где $C = |Y|(\max Y - \min Y)$ и $\Delta = \min_{y' \neq y'' \in Y} |y' - y''|$. Отсюда следует, что гладкий минимум стремится к обычному экспоненциально быстро. Далее параметр τ часто опускается, если это не вызывает недоразумений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $X_1, X_2 \in W_n^*$, $\tau < 0$. Гладкой аппроксимацией расстояния Левенштейна называется функция

$$\tilde{d}(X_1, X_2; \tau) = \underset{(X'_1, X''_2)_{e \subseteq X_1 \times X_2}}{\operatorname{smin}} \left\{ \frac{1}{2} \|X'_1 - X''_2\|_1 + |X_1| - |X'_1| + |X_2| - |X''_2| \right\}. \quad (14)$$

Из определения гладкого минимума следует, что функция $\tilde{d}(X_1, X_2)$ будет дифференцируемой по аргументам, понимая под градиентом функции $\|X\|_1 = \sum_{s=1}^L \sum_{t=1}^n |X[s, t]|$ матричную функцию

$$\nabla \|X\|_1 = (\operatorname{sign} X[s, t]), \quad s = \overline{1, L}, \quad t = \overline{1, n}. \quad (15)$$

Поэтому $\tilde{d}$ также называется дифференцируемым редакционным расстоянием (ДРР).

ДРР обладает свойствами симметричности и неотрицательности. Однако, в отличие от оригинального редакционного расстояния, $\tilde{d}(X, X) \neq 0$. Поэтому также вводится следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Несмещенным ДРР называется функция

$$\tilde{d}_0(X_1, X_2) = \tilde{d}(X_1, X_2) - \frac{1}{2} (\tilde{d}(X_1, X_1) + \tilde{d}(X_2, X_2)).$$

Из (13) следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. При $\tau \rightarrow -\infty$ экспоненциально быстро $\tilde{d}_0(X_1, X_2; \tau) \rightarrow d(X_1, X_2)$.

3.2. Рекуррентные формулы

Расчет ДРР $\tilde{d}$ напрямую по формуле (14) затруднителен из-за перебора соответствий, число которых растет экспоненциально с ростом $|X_1|$ и $|X_2|$. Напомним, что для классического редакционного расстояния d данная проблема решается при помощи рекуррентной формулы (4) и основанной на ней алгоритме динамического программирования Вагнера–Фишера, который позволяет вычислить d за полиномиальное время.

В [14] аналогичные рекуррентные формулы установлены для $\tilde{d}$. Пусть $X_1, X_2 \in W_n^*$, $|X_1| = L_1$, $|X_2| = L_2$, $i = \overline{0, L_1}$, $j = \overline{0, L_2}$, Ω_{ij} — множество всевозможных соответствий $(X'_1, X''_2)_e \in X_1[1 : i] \times X_2[1 : j]$ и для таких соответствий длины $k = |X'_1| = |X''_2|$

$$R_{ij}(X'_1, X''_2) = \frac{1}{2} \|X'_1 - X''_2\|_1 + i + j - 2k.$$

Положим

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} &= \alpha_{ij}(X_1, X_2) = \sum_{(X'_1, X''_2)_e \in \Omega_{ij}} R_{ij}(X'_1, X''_2) e^{\tau R_{ij}(X'_1, X''_2)}, \\ \beta_{ij} &= \beta_{ij}(X_1, X_2) = \sum_{(X'_1, X''_2)_e \in \Omega_{ij}} e^{\tau R_{ij}(X'_1, X''_2)}, \end{aligned}$$

что отвечает числителю и знаменателю в гладком минимуме (12). Тогда

$$\tilde{d}(X_1, X_2) = \frac{\alpha_{L_1 L_2}}{\beta_{L_1 L_2}}.$$

ТЕОРЕМА 2 ([14]). Для $i = \overline{1, L_1}$, $j = \overline{1, L_2}$

$$\alpha_{ij} = (\alpha_{i-1, j} + \beta_{i-1, j} + \alpha_{i, j-1} + \beta_{i, j-1})e^\tau + (\alpha_{i-1, j-1} + \beta_{i-1, j-1}\delta_{ij})e^{\tau\delta_{ij}} - (\alpha_{i-1, j-1} + 2\beta_{i-1, j-1})e^{2\tau},$$

$$\beta_{ij} = (\beta_{i-1, j} + \beta_{i, j-1})e^\tau + \beta_{i-1, j-1}(e^{\tau\delta_{ij}} - e^{2\tau}),$$

где

$$\alpha_{i0} = ie^{\tau i}, \quad \alpha_{0j} = je^{\tau j}, \quad \beta_{i0} = e^{\tau i}, \quad \beta_{0j} = e^{\tau j}, \quad \delta_{ij} = \frac{1}{2} \|X_1[i] - X_2[j]\|_1.$$

Рекуррентные формулы из теоремы 2 дают эффективный способ вычисления $\tilde{d}(X_1, X_2)$ за полиномиальное время. Дифференцирование этих формул с учетом (15) позволяет получить рекуррентные соотношения для эффективного расчета градиента $\nabla_{X_1} \tilde{d}(X_1, X_2)$. Отсюда получаем значение и градиент несмещенного ДРР.

3.3. Градиентный спуск

Рассмотрим задачу приближенного вычисления медианы C_L на множестве W_n^L (см. (11)). Из определения W_n^L имеем задачу условной оптимизации. Возможность вычисления градиента несмещенного ДРР позволяет воспользоваться методом проекции градиента.

В качестве начального приближения X_0 берется случайная матрица из W_n^L . Очередная итерация имеет вид

$$X_{k+1/2} = X_k - \gamma_k \frac{1}{|D|} \sum_{B \in D} \nabla_X(\tilde{d}_0(X, B))(X_k), \quad X_{k+1} = \text{Pr}(X_{k+1/2}), \quad (16)$$

где $\gamma_k > 0$ — шаг метода и проекция $\text{Pr}: \mathbb{R}^{L \times n} \rightarrow W_n^L$ определяется равенством

$$\text{Pr}(Y) = \underset{X \in W_n^L}{\operatorname{argmin}} \|Y - X\|_2^2.$$

Для практических приложений важен случай, когда число строк $|D|$ велико. В этом случае можно применить стохастический градиентный спуск, когда в (16) вместо D берется случайная подвыборка из D много меньшего размера [16].

Было проведено сравнение предложенного подхода с жадным алгоритмом. Для этого проведен вычислительный эксперимент на синтетических данных. Генерировалось 100 наборов случайных строк D над алфавитом из 4 букв длиной от 5 до 20 символов. Далее на этом множестве выполнялся поиск медианы двумя алгоритмами. Оценивалась величина

$$\delta(D) = \sum_{B \in D} (d(C, B) - d(C_g, B)),$$

где C — медиана, найденная предложенным алгоритмом, а C_g — жадным. Было установлено, что для наборов из 10 строк $\text{mean } \delta = -0.23$, $\text{std } \delta = 0.034$ на уровне значимости $p = 0.99$. Это означает, что в данном примере точность алгоритма чуть выше жадного. Однако с увеличением числа строк они сравниваются по точности, поэтому требуется дальнейшее исследование проблемы.

4. Визуализация кластеров строк

Одно из интересных и важных приложений строковой медианы является визуализация строковых кластеров. Эта задача имеет прикладное значение, например, в биоинформатике. При этом часто достаточно знать медиану приближенно, например, при визуализации больших данных.

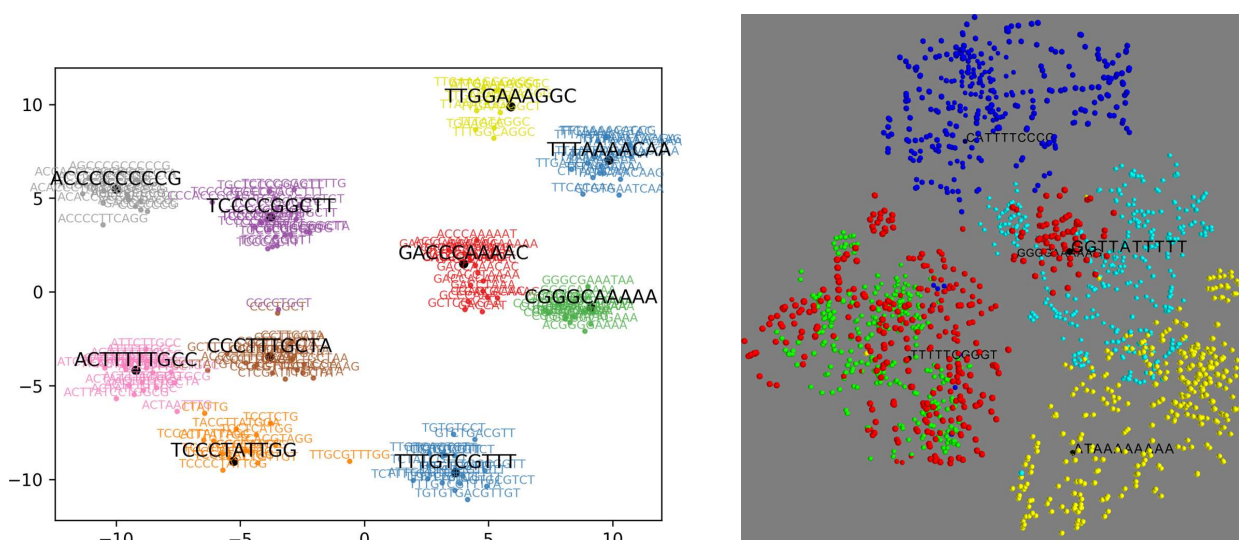
Рассмотрим данную задачу. Имеется набор строк S . Требуется разбить S на непересекающиеся кластеры $S = \bigcup_{k=1}^K S_k$, так чтобы строки каждого кластера были близки по редакционному расстоянию к соответствующим медианам $c(S_k)$. В случае векторных данных для решения этой задачи применяется популярный алгоритм k -средних (см., например, [6, гл. 3]), позволяющий находить заданное число кластеров. Он основан на нахождении центроидов. Для строк центроидом является медиана. Поэтому для адаптации метода k -средних к строкам важно эффективно находить медиану, пусть приближенно. Результаты данной работы позволяют это сделать. Отметим еще алгоритм k -медоидов, в котором среднее ищется среди точек кластера. В случае строк это будет отвечать локальной медиане. Однако этот метод имеет свои ограничения, в частности, он требует знания матрицы расстояний $(d(B_i, B_j))_{i,j=1}^{|S|}$. Кроме того, как уже отмечалось, локальная медиана может быть далека от глобальной, что может привести к смещению кластеров.

Чтобы проанализировать получившиеся кластеры, интересно их визуализировать. Основная проблема состоит в большой размерности данных. Стандартным подходом в этом случае является проекция данных в пространство низкой размерности (два или три) с сохранением метрических свойств (см. классические работы [18, 17]).

Популярным методом визуализации, активно используемом в машинном обучении, является метод стохастического вложения соседей с t -распределением (tSNE), предложенный в работе [13]. Данный метод позволяет визуализировать многомерные данные путем их нелинейной проекции на пространство малой размерности. В отличие от классических линейных алгоритмов снижения размерности [18] данный метод лучше отображает структуру многомерных данных. Он позволяет рассчитать координаты проекций строк на основе матрицы парных расстояний. В данном случае вычисление такой матрицы не является проблемой, поскольку для визуализации достаточно использовать небольшие подвыборки кластеров.

На рисунке приведен пример визуализации кластеров строк. Он сделан в Python с помощью класса TSNE из пакета машинного обучения Sklearn. Двумерный график (слева) получен функцией `scatter` из пакета Matplotlib, предназначенного для построения 2D-графиков. Для

вывода трехмерного графика (справа) применялась функция `points3d` из пакета научной 3D-визуализации `Mayavi`.



5. Заключение

В работе предложено теоретическое обоснование нового подхода для поиска строковой медианы с помощью гладких методов оптимизации. Основным преимуществом данного подхода по сравнению с существующими дискретными методами является его гибкость. Это позволяет применять его в задачах поиска медианы с ограничениями, а также во многих других связанных проблемах строковой оптимизации. Благодаря тому, что ДРР является дифференцируемой функцией ее можно использовать для сравнения последовательностей в составе различных дифференцируемых моделях машинного обучения, включая нейронные сети. Такие задачи строковой оптимизации в том числе играют важную роль при визуализации строковых данных. Планируется исследовать перечисленные направления.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гасфилд Д. Строки, деревья и последовательности в алгоритмах: Информатика и вычислительная биология. СПб.: Невский Диалект, БХВ-Петербург, 2003.
2. Офицеров Е.П. Статистическая модель периферической селекции Т-клеточных рецепторов // Известия ТулГУ. Технические науки. 2017. Вып. 2. С. 138–143.
3. Офицеров Е.П. Глубокая модель селекции Т-клеточных рецепторов // Известия ТулГУ. Технические науки. 2017. Вып. 12. Ч. 2. С. 350–355.
4. Офицеров Е.П. Классификация последовательностей на основе коротких мотивов. Чебышевский сборник. 2018. Том 19, №1. С. 187–199. doi: 10.22405/2226-8383-2018-19-1-187-199
5. Офицеров Е.П. Программный комплекс для решения задач машинного обучения на строковых данных при помощи дифференцируемого редакционного расстояния // Известия ТулГУ. Технические науки. 2019. Вып. 5. С. 370–376.
6. Ту Дж., Гонсалес Р. Принципы распознавания образов. М.: Мир, 1978.

7. Boyd S., Vandenberghe L. Convex Optimization. Cambridge University Press, 2004.
8. Casacuberta F., de Antonio M. A greedy algorithm for computing approximate median strings // In: VII Simposium Nacional de Reconocimiento de Formas y Análisis de Imágenes. 1997. P. 193–198.
9. De la Higuera C., Casacuberta F. Topology of strings: Median string is NP-complete // Theoretical Computer Science. 2000. Vol. 230, no. 1–2. P. 39–48. doi: 10.1016/s0304-3975(97)00240-5
10. Hayashida M., Koyano H. Finding median and center strings for a probability distribution on a set of strings under Levenshtein distance based on integer linear programming // In: Fred A., Gamboa H. (eds) Biomedical Engineering Systems and Technologies. BIOSTEC 2016. Communications in Computer and Information Science. Springer, Cham. 2017. Vol 690. P. 108–121.
11. Kruzslicz F. Improved greedy algorithm for computing approximate median strings // Acta Cybernetica. 1999. Vol. 14, no. 2. P. 331–339.
12. Martínez-Hinarejos C.D., Juan A., Casacuberta F. Use of median string for classification // Proc. 15th Int. Conf. on Pattern Recognition. ICPR-2000, Barcelona, Spain. 2000. Vol. 2. P. 903–906. doi: 10.1109/ICPR.2000.906220
13. Van der Maaten L., Hinton G. Visualizing data using t-SNE // J. Mach. Learn. Res. 2008. Vol. 9. P. 2579–2605.
14. Ofitserov E., Tsvetkov V., Nazarov V. Soft edit distance for differentiable comparison of symbolic sequences // arXiv:1904.12562. 2019.
15. Olivares-Rodríguez C., Oncina J. A stochastic approach to median string computation // In: da Vitoria Lobo N. et al. (eds) Structural, Syntactic, and Statistical Pattern Recognition. SSPR /SPR 2008. Lecture Notes in Computer Science. Springer, Berlin, Heidelberg. 2008. Vol. 5342. P. 431–440.
16. Ruder S. An overview of gradient descent optimization algorithms // arXiv:1609.04747. 2016.
17. Sammon J.W. A nonlinear mapping for data structure analysis // IEEE Transactions on Computers, 18(5):401–409, 1969.
18. Torgerson W.S. Multidimensional scaling I: Theory and method // Psychometrika. 1952. Vol. 17. P. 401–419.
19. Wang L., Jiang T. On the complexity of multiple sequence alignment // J. Computat. Biol. 1994. Vol. 1, no. 4. P. 337–348.

REFERENCES

1. Gusfield D. Algorithms on strings, trees, and sequences: Computer science and computational biology. New York: Cambridge University Press, 1997.
2. Ofitserov E.P. Statistical model of T-cell receptor pereferic selection // Izvestiya of Tula State University. Technical sciences. 2017. No. 2. P. 138–143.
3. Ofitserov E.P. Deep model of T-cell receptor selection // Izvestiya of Tula State University. Technical sciences. 2017. No. 12, part 2. P. 350–355.

4. Ofitserov E.P. Motif based sequence classification // *Chebyshevskii Sbornik*. 2018. Vol. 19, no. 1. P. 187–199. (In Russ.) <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-19-1-187-199>
5. Ofitserov E.P. Software package for solving machine learning problems on string data using soft edit distance // *Izvestiya of Tula State University. Technical sciences*. 2019. No. 5. P. 370–376.
6. Tou J.T., Gonzalez R.C. Pattern recognition principles. Addison-Wesley Publishing Company, 1974.
7. Boyd S., Vandenberghe L. Convex Optimization. Cambridge University Press, 2004.
8. Casacuberta F., de Antonio M. A greedy algorithm for computing approximate median strings // In: VII Simposium Nacional de Reconocimiento de Formas y Análisis de Imágenes. 1997. P. 193–198.
9. De la Higuera C., Casacuberta F. Topology of strings: Median string is NP-complete // *Theoretical Computer Science*. 2000. Vol. 230, no. 1–2. P. 39–48. doi: 10.1016/s0304-3975(97)00240-5
10. Hayashida M., Koyano H. Finding median and center strings for a probability distribution on a set of strings under Levenshtein distance based on integer linear programming // In: Fred A., Gamboa H. (eds) Biomedical Engineering Systems and Technologies. BIOSTEC 2016. Communications in Computer and Information Science. Springer, Cham. 2017. Vol 690. P. 108–121.
11. Kruzsliz F. Improved greedy algorithm for computing approximate median strings // *Acta Cybernetica*. 1999. Vol. 14, no. 2. P. 331–339.
12. Martínez-Hinarejos C.D., Juan A., Casacuberta F. Use of median string for classification // *Proc. 15th Int. Conf. on Pattern Recognition. ICPR-2000, Barcelona, Spain*. 2000. Vol. 2. P. 903–906. doi: 10.1109/ICPR.2000.906220
13. Van der Maaten L., Hinton G. Visualizing data using t-SNE // *J. Mach. Learn. Res*. 2008. Vol. 9. P. 2579–2605.
14. Ofitserov E., Tsvetkov V., Nazarov V. Soft edit distance for differentiable comparison of symbolic sequences // *arXiv:1904.12562*. 2019.
15. Olivares-Rodríguez C., Oncina J. A stochastic approach to median string computation // In: da Vitoria Lobo N. et al. (eds) Structural, Syntactic, and Statistical Pattern Recognition. SSPR /SPR 2008. Lecture Notes in Computer Science. Springer, Berlin, Heidelberg. 2008. Vol. 5342. P. 431–440.
16. Ruder S. An overview of gradient descent optimization algorithms // *arXiv:1609.04747*. 2016.
17. Sammon J.W. A nonlinear mapping for data structure analysis // *IEEE Transactions on Computers*, 18(5):401–409, 1969.
18. Torgerson W.S. Multidimensional scaling I: Theory and method // *Psychometrika*. 1952. Vol. 17. P. 401–419.
19. Wang L., Jiang T. On the complexity of multiple sequence alignment // *J. Computat. Biol*. 1994. Vol. 1, no. 4. P. 337–348.

Получено 18.05.2019 г.

Принято в печать 12.07.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 2.

УДК 514

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-108-122

Расстояния Громова – Хаусдорфа до симплексов¹

Д. С. Григорьев, А. О. Иванов, А. А. Тужилин

Григорьев Д. С. — студент, механико-математический факультет, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: d.grigoriev@yahoo.com

Иванов Александр Олегович — профессор, механико-математический факультет, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова; профессор, кафедра ФН-12, Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (г. Москва).

e-mail: aoiva@mech.math.msu.su

Тужилин Алексей Августинovich — профессор, механико-математический факультет, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: tuz@mech.math.msu.su

Аннотация

В работе изучаются геометрические характеристики метрических пространств, участвующие в формулах расстояний Громова–Хаусдорфа от этих пространств до так называемых симплексов, т.е. метрических пространств, в которых все ненулевые расстояния равны между собой. При вычислении этих расстояний важную роль играет геометрия разбиений этих пространств, приводящая, в случае конечных пространств, к аналогу длин ребер минимального остовного дерева. Ранее была разработана аналогичная теория для компактных метрических пространств. Эти результаты обобщены на случай произвольного ограниченного пространства, упрощая при этом ряд доказательств, а также выписывая явные формулы

Ключевые слова: расстояние Громова–Хаусдорфа, метрическая геометрия, метрическое пространство.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:

Д. С. Григорьев, А. О. Иванов, А. А. Тужилин. Расстояния Громова – Хаусдорфа до симплексов // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 2, с. 108–122.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 2.

UDC 514

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-108-122

¹Исследование выполнено при частичной поддержке Программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ России (Проект НШ–6399.2018.1, Соглашение 075–02–2018–867), РФФИ, Проект 19-01-00775-а, а также Программы поддержки научных школ МГУ.

The Gromov – Hausdorff distances to simplexes²

D. S. Grigor'ev, A. O. Ivanov, A. A. Tuzhilin

Grigor'ev D. S. — student, Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: d.grigoriev@yahoo.com

Ivanov Alexander Olegovich — professor, Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University; professor FN-12, Bauman Moscow State Technical University (Moscow).

e-mail: aoiva@mech.math.msu.su

Tuzhilin Alexey Augustinovich — professor, Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: tuz@mech.math.msu.su

Abstract

In the paper geometrical characteristics of metric spaces appearing in explicit formulas for the Gromov–Hausdorff distance from this spaces to so-called simplexes, i.e., the metric spaces, all whose non-zero distances are the same. For the calculation of those distances the geometry of partitions of these spaces is important. In the case of finite metric spaces that leads to some analogues of the edges lengths of minimal spanning trees. Earlier, a similar theory was elaborated for compact metric spaces. These results are generalised to the case of an arbitrary bounded metric space, explicit formulas are obtained, and some proofs are simplified.

Keywords: Gromov–Hausdorff distance, metric geometry, metric space.

Bibliography: 15 titles.

For citation:

D. S. Grigor'ev, A. O. Ivanov, A. A. Tuzhilin, 2019, "The Gromov – Hausdorff distances to simplexes", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 2, pp. 108–122.

1. Введение

«Пространства пространств» и «пространства подмножеств» часто появляются в таких важных приложениях как сравнение и распознавание образов, а также имеют очевидную теоретическую значимость, поэтому привлекают внимание специалистов на протяжении многих лет. Один из естественных подходов к изучению таких пространств — определить на них функцию расстояния как «меру несхожести» соответствующих объектов. В 1914 году Ф. Хаусдорф [1] ввел в рассмотрение неотрицательную симметричную функцию на парах непустых подмножеств метрического пространства X , равную точной нижней грани таких чисел r , что каждое из этих множеств содержится в r -окрестности оставшегося. Эта функция превращает семейство замкнутых ограниченных подмножеств X в метрическое пространство. Позднее, см. исторический обзор в [2], Д. Эдвардс [3] и, независимо, М. Громов [4] обобщили конструкцию Хаусдорфа на семейство всех компактных метрических пространств, используя их изометрические вложения во всевозможные объемлющие пространства, см. определение ниже. Полученная функция называется расстоянием по Громову–Хаусдорфу, а соответствующее метрическое пространство $\mathcal{M}$ метрических компактов, рассматриваемых с точностью до изометрии, — пространством Громова–Хаусдорфа или гиперпространством. Геометрия этого пространства оказалась довольно причудливой и активно изучается в последнее время.

²The study was performed under the partial support of the Program of President of Russian Federation for support of leading scientific schools of Russia (Project NSH-6399.2018.1, the Agreement 075-02-2018-867), RFBR, research Project 19-01-00775-a, and the program of support of scientific schools of Moscow state University.

Хорошо известно, что $\mathcal{M}$ — линейно связное, полное, сепарабельное пространство, а также, что $\mathcal{M}$ не является ограниченно компактным. Подробное введение в геометрию пространства Громова–Хаусдорфа можно найти в [5, гл. 7] или в [6].

Задача вычисления расстояния по Громову–Хаусдорфу между двумя конкретными пространствами весьма нетривиальна. Даже в случае конечных пространств эффективный алгоритм не известен, а прямой перебор, основанный на технике соответствий, см. ниже, является экспоненциальным и не работает уже для пространств, состоящих из десятков точек. Однако, техника соответствий, активно развивающаяся в последнее время, см. например [7], [8], [12] [14] или [9], позволяет и здесь получить некоторые продвижения.

В данной работе изучается задача вычисления расстояний Громова–Хаусдорфа от произвольных ограниченных метрических пространств до так называемых симплексов — метрических пространств, в которых все ненулевые расстояния одинаковы. Знание таких расстояний между конечными метрическими пространствами и конечными симплексами позволило, например, получить новую интерпретацию длин ребер минимального остовного дерева [10]. Также симплексы и расстояния до них играют важную роль в изучении группы симметрий пространства $\mathcal{M}$, см. [8]. В работе [11], в ряде частных случаев, были вычислены расстояния от конечных симплексов до компактных метрических пространств. В частности, полученные результаты позволили привести пример двух неизометричных конечных пространств, от которых расстояния до всех конечных симплексов одинаковы.

В настоящей работе мы не ограничиваемся ни конечными симплексами, ни компактными пространствами. Мы определяем ряд дополнительных характеристик ограниченных метрических пространств, в терминах которых мы или приводим точные формулы для расстояния Громова–Хаусдорфа до произвольных симплексов, или даем точные верхние и нижние оценки этих расстояний.

2. Основные определения и предварительные результаты

Пусть X — произвольное множество. Через $\#X$ будем обозначать *мощность* множества X .

Пусть X — произвольное метрическое пространство. Расстояние между его точками x и y будем обозначать через $|xy|$. Если $A, B \subset X$ — непустые подмножества, то положим $|AB| = \inf\{|ab| : a \in A, b \in B\}$. Если $A = \{a\}$, то вместо $|\{a\}B| = |B\{a\}|$ будем писать $|aB| = |Ba|$.

Для каждой точки $x \in X$ и числа $r > 0$ через $U_r(x)$ будем обозначать открытый шар с центром в точке x и радиусом r ; для каждого непустого $A \subset X$ и числа $r > 0$ положим $U_r(A) = \cup_{a \in A} U_r(a)$.

2.1. Расстояния Хаусдорфа и Громова–Хаусдорфа

Для непустых $A, B \subset X$ положим

$$d_H(A, B) = \inf\{r > 0 : A \subset U_r(B) \text{ и } B \subset U_r(A)\} = \max\{\sup_{a \in A} |aB|, \sup_{b \in B} |Ab|\}.$$

Полученная величина называется *расстоянием Хаусдорфа между A и B* . Хорошо известно [5], [6], что расстояние Хаусдорфа, рассматриваемое на множество всех непустых замкнутых ограниченных подмножеств из X , является метрикой.

Пусть X и Y — метрические пространства. Тройку (X', Y', Z) , состоящую из метрического пространства Z и двух его подмножеств X' и Y' , изометричных соответственно X и Y , назовем *реализацией пары (X, Y)* . Расстоянием $d_{GH}(X, Y)$ по Громову–Хаусдорфу между X и Y назовем точную нижнюю грань чисел r , для которых существует реализация (X', Y', Z) пары

(X, Y) такая, что $d_H(X', Y') \leq r$. Хорошо известно [5], [6], что на множестве $\mathcal{M}$ всех компактных метрических пространств, рассматриваемых с точностью до изометрии, функция d_{GH} является метрикой.

Для вычисления расстояния Громова–Хаусдорфа удобно воспользоваться техникой соответствий.

Пусть X и Y — произвольные непустые множества. Напомним, что *отношением* между множествами X и Y называется каждое подмножество декартова произведения $X \times Y$. Множество всех **непустых** отношений между X и Y обозначим через $\mathcal{P}(X, Y)$. Будем смотреть на каждое отношение $\sigma \in \mathcal{P}(X, Y)$ как на многозначное отображение, которое может иметь область определения меньшую, чем X . Тогда, по аналогии с тем, как это принято для отображений, для каждого $x \in X$ и каждого $A \subset X$ определены их образы

$$\sigma(x) = \{y \in Y : (x, y) \in \sigma\} \quad \text{и} \quad \sigma(A) = \bigcup_{a \in A} \sigma(a),$$

а для каждого $y \in Y$ и каждого $B \subset Y$ — их прообразы

$$\sigma^{-1}(y) = \{x \in X : (x, y) \in \sigma\} \quad \text{и} \quad \sigma^{-1}(B) = \bigcup_{b \in B} \sigma^{-1}(b).$$

Отношение $R \in \mathcal{P}(X, Y)$ называется *соответствием*, если $R(X) = Y$ и $R^{-1}(Y) = X$. Множество всех соответствий между X и Y обозначим через $\mathcal{R}(X, Y)$.

Пусть X и Y — произвольные метрические пространства. *Искажением* $\text{dis } \sigma$ отношения $\sigma \in \mathcal{P}(X, Y)$ назовем число

$$\text{dis } \sigma = \sup \{ ||xx'| - |yy'| : (x, y), (x', y') \in \sigma \}.$$

Легко видеть, что для любых отношений $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{P}(X, Y)$ таких, что $\sigma_1 \subset \sigma_2$, выполняется $\text{dis } \sigma_1 \leq \text{dis } \sigma_2$. Иными словами, отображение $\text{dis} : \mathcal{P}(X, Y) \rightarrow \mathbb{R}$ монотонно, если на $\mathcal{P}(X, Y)$ рассматривается частичный порядок, заданный включением.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 ([5], [6]). *Для любых метрических пространств X и Y имеем*

$$d_{GH}(X, Y) = \frac{1}{2} \inf \{ \text{dis } R : R \in \mathcal{R}(X, Y) \}.$$

Минимальные по включению соответствия из $\mathcal{R}(X, Y)$ назовем *неприводимыми*. Множество всех неприводимых соответствий между X и Y обозначим через $\mathcal{R}^0(X, Y)$.

Отметим (см. [13]), что каждое неприводимое соответствие $R \in \mathcal{R}^0(X, Y)$ задает разбиения D_X^R и D_Y^R пространств X и Y , а также биекцию $f_R : D_X^R \rightarrow D_Y^R$, для которой

$$R = \bigcup_{X_i \in D_X^R} X_i \times f_R(X_i). \quad (1)$$

При этом, если $\#X_i > 1$, то $\#f_R(X_i) = 1$, и если $\#f_R(X_i) > 1$, то $\#X_i = 1$. Более того, каждая биекция f между произвольными разбиениями D_X и D_Y пространств X и Y , удовлетворяющая описанным только что свойствам, порождает неприводимое соответствие по формуле (1).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2 ([13]). *Для каждого $R \in \mathcal{R}(X, Y)$ существует неприводимое соответствие R_0 такое, что $R_0 \subset R$. В частности, $\mathcal{R}^0(X, Y) \neq \emptyset$.*

Учитывая монотонности искажения dis , мгновенно получаем следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 1. Для любых метрических пространств X и Y имеем

$$d_{GH}(X, Y) = \frac{1}{2} \inf \{ \text{dis } R : R \in \mathcal{R}^0(X, Y) \}.$$

С помощью соответствий легко доказываются следующие хорошо известные факты. Для произвольного метрического пространства X и числа $\lambda > 0$ через λX обозначим метрическое пространство, которое отличается от X умножением всех расстояний на λ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3 ([5], [6]). Пусть X и Y — метрические пространства. Тогда

(i) если X — одноточечное метрическое пространство, то $d_{GH}(X, Y) = \frac{1}{2} \text{diam } Y$;

(ii) если $\text{diam } X < \infty$, то

$$d_{GH}(X, Y) \geq \frac{1}{2} |\text{diam } X - \text{diam } Y|;$$

(iii) $d_{GH}(X, Y) \leq \frac{1}{2} \max\{\text{diam } X, \text{diam } Y\}$, в частности, для ограниченных X и Y имеем $d_{GH}(X, Y) < \infty$;

(iv) для любых $X, Y \in \mathcal{M}$ и любого $\lambda > 0$ имеем $d_{GH}(\lambda X, \lambda Y) = \lambda d_{GH}(X, Y)$. Более того, при $\lambda \neq 1$ единственным пространством, которое при такой операции не меняется, является одноточечное пространство. Иными словами, операция умножения метрики на число $\lambda > 0$ является гомотетией пространства $\mathcal{M}$ с центром в одноточечном метрическом пространстве.

2.2. Несколько элементарных соотношений

Для конкретных вычислений расстояний Громова–Хаусдорфа нам будут полезны следующие несложные соотношения, доказательства которых приведены в [11].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Для любых неотрицательных a и b выполнено неравенство

$$\max\{a, |b - a|\} \leq \max\{a, b\}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть $A \subset \mathbb{R}$ — непустое ограниченное подмножество вещественной прямой, и пусть $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\sup_{a \in A} |\lambda - a| = \max\{\lambda - \inf A, \sup A - \lambda\} = \left| \lambda - \frac{\inf A + \sup A}{2} \right| + \frac{\sup A - \inf A}{2}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Пусть $A \subset \mathbb{R}$ — непустое ограниченное подмножество вещественной прямой, $\inf A \geq 0$, и пусть $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\sup_{a \in A} \{\lambda, |\lambda - a|\} = \max\{\lambda, \sup A - \lambda\}.$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Для любого $a \geq 0$ и любого λ выполняется

$$\max\{\lambda, |a - \lambda|\} = \max\{\lambda, a - \lambda\}.$$

3. Расстояние между ограниченным метрическим пространством и симплексом

Метрическое пространство X назовем *симплексом*, если все его ненулевые расстояния одинаковы. Симплекс, в котором ненулевые расстояния равны $\lambda > 0$, обозначим через $\lambda\Delta$. При $\lambda = 1$ пространство $\lambda\Delta$ будем для краткости обозначать через Δ .

3.1. Расстояние до симплексов с большим числом точек

Следующий результат обобщает теорему 4.1 из [11].

ТЕОРЕМА 1. Пусть X — произвольное ограниченное метрическое пространство и $\#X < \#\lambda\Delta$, тогда

$$2d_{GH}(\lambda\Delta, X) = \max\{\lambda, \text{diam } X - \lambda\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\#X = 1$, то $\text{diam } X = 0$ и, по предложению 3,

$$2d_{GH}(\lambda\Delta, X) = \text{diam } \lambda\Delta = \lambda = \max\{\lambda, \text{diam } X - \lambda\}.$$

Пусть теперь $\#X > 1$. Выберем произвольное $R \in \mathcal{R}(\lambda\Delta, X)$. Так как $\#X < \#\lambda\Delta$, то существует $x \in X$ такое, что $\#R^{-1}(x) \geq 2$, поэтому $\text{dis } R \geq \lambda$ и, значит, $2d_{GH}(\lambda\Delta, X) \geq \lambda$.

Рассмотрим произвольную последовательность $(x_i, y_i) \in X \times X$ такую, что $|x_i y_i| \rightarrow \text{diam } X$. Если в ней существует подпоследовательность (x_{i_k}, y_{i_k}) , для которой при каждом i_k можно найти такое $z \in \lambda\Delta$, что $(z, x_{i_k}), (z, y_{i_k}) \in R$, то $\text{dis } R \geq \text{diam } X$ и, значит,

$$2d_{GH}(\lambda\Delta, X) \geq \max\{\lambda, \text{diam } X\}.$$

Если такой подпоследовательности нет, то существует подпоследовательность (x_{i_k}, y_{i_k}) , для которой при каждом i_k можно найти различные $z_k, w_k \in \lambda\Delta$ такие, что $(z_k, x_{i_k}), (w_k, y_{i_k}) \in R$, и тогда $2d_{GH}(\lambda\Delta, X) \geq \max\{\lambda, |\text{diam } X - \lambda|\}$.

По предложению 4,

$$\max\{\lambda, \text{diam } X\} \geq \max\{\lambda, |\text{diam } X - \lambda|\},$$

поэтому в любом случае $2d_{GH}(\lambda\Delta, X) \geq \max\{\lambda, |\text{diam } X - \lambda|\}$.

Выберем произвольное $x_0 \in X$, тогда, в силу предположения, $\#X > 1$ и, значит, множество $X \setminus \{x_0\}$ непусто. Так как $\#X < \#\lambda\Delta$, то в $\lambda\Delta$ существует подмножество $\lambda\Delta'$, равномощное $X \setminus \{x_0\}$. Пусть $g: \lambda\Delta' \rightarrow X \setminus \{x_0\}$ — произвольная биекция, и $\lambda\Delta'' = \lambda\Delta \setminus \lambda\Delta'$, тогда $\lambda\Delta'' \neq \emptyset$. Рассмотрим соответствие

$$R_0 = \{(z', g(z')) : z' \in \lambda\Delta'\} \cup (\{x_0\} \times \lambda\Delta'').$$

Тогда $\text{dis } R_0 \leq \max\{\lambda, |\text{diam } X - \lambda|\}$, откуда

$$2d_{GH}(\lambda\Delta, X) = \max\{\lambda, |\text{diam } X - \lambda|\}.$$

Осталось применить следствие 2.

3.2. Расстояние от ограниченного метрического пространства до симплексов с не превосходящим числом точек

Пусть X — произвольное множество и m — кардинальное число, не превосходящее $\#X$. Через $\mathcal{D}_m(X)$ обозначим семейство всевозможных разбиений множества X на m непустых подмножеств.

Пусть теперь X — метрическое пространство. Тогда для каждого $D = \{X_i\}_{i \in I} \in \mathcal{D}_m(X)$ положим

$$\text{diam } D = \sup_{i \in I} \text{diam } X_i.$$

Далее, для любых непустых $A, B \subset X$ пусть

$$|AB| = \inf\{|ab| : (a, b) \in A \times B\} \quad \text{и} \quad |AB|' = \sup\{|ab| : (a, b) \in A \times B\},$$

и для каждого $D = \{X_i\}_{i \in I} \in \mathcal{D}_m(X)$ определим

$$\alpha(D) = \inf\{|X_i X_j| : i \neq j\} \quad \text{и} \quad \beta(D) = \sup\{|X_i X_j|' : i \neq j\}.$$

Пусть теперь $\lambda\Delta$ — симплекс мощности m . Выберем произвольное $D \in \mathcal{D}_m(X)$, любую биекцию $g: \lambda\Delta \rightarrow D$ и зададим соответствие $R_D \in \mathcal{R}(\lambda\Delta, X)$ следующим образом:

$$R_D = \bigcup_{z \in \lambda\Delta} \{z\} \times g(z).$$

Ясно, что каждое соответствие R_D — неприводимое.

Следующий результат непосредственно обобщает предложение 4.5 из [11].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Пусть X — произвольное ограниченное метрическое пространство и $m = \#\lambda\Delta \leq \#X$. Тогда для любого $D \in \mathcal{D}_m(X)$ имеем

$$\text{dis } R_D = \max\{\text{diam } D, \lambda - \alpha(D), \beta(D) - \lambda\}.$$

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть X — произвольное ограниченное метрическое пространство и $m = \#\lambda\Delta \leq \#X$. Тогда для любого $D \in \mathcal{D}_m(X)$ имеем

$$\text{dis } R_D = \max\{\text{diam } D, \lambda - \alpha(D), \text{diam } X - \lambda\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что $\text{diam } D \leq \text{diam } X$ и $\beta(D) \leq \text{diam } X$. При этом, если $\text{diam } D < \text{diam } X$, и $(x_i, y_i) \in X \times X$ — последовательность, для которой $|x_i y_i| \rightarrow \text{diam } X$, то, начиная с некоторого номера i , точки x_i и y_i лежат в разных элементах разбиения D , следовательно, в этом случае $\beta(D) = \text{diam } X$, и формула доказана.

Пусть теперь $\text{diam } D = \text{diam } X$, тогда $\beta(D) - \lambda \leq \text{diam } X$ и $\text{diam } X - \lambda \leq \text{diam } X$, поэтому

$$\begin{aligned} \max\{\text{diam } D, \lambda - \alpha(D), \beta(D) - \lambda\} &= \max\{\text{diam } X, \lambda - \alpha(D)\} = \\ &= \max\{\text{diam } D, \lambda - \alpha(D), \text{diam } X - \lambda\}. \end{aligned}$$

Доказательство закончено.

Докажем теперь аналог предложения 4.6 из [11], не используя теорему 4.3 оттуда же.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Пусть X — произвольное ограниченное метрическое пространство и $m = \#\lambda\Delta \leq \#X$. Тогда

$$2d_{GH}(\lambda\Delta, X) = \inf_{D \in \mathcal{D}_m(X)} \text{dis } R_D.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По следствию 1, $2d_{GH}(\lambda\Delta, X) = \inf_{R \in \mathcal{R}^0(\lambda\Delta, X)} \text{dis } R$, поэтому достаточно показать, что для любого неприводимого соответствия $R \in \mathcal{R}^0(\lambda\Delta, X)$ существует такое $D \in \mathcal{D}_m(X)$, что $\text{dis } R_D \leq \text{dis } R$.

Выберем произвольное $R \in \mathcal{R}^0(\lambda\Delta, X)$, не представимое в виде R_D , тогда разбиение $D_{\lambda\Delta}^R$ не точечное, т.е. существует $x \in X$, для которого $\#R^{-1}(x) \geq 2$, поэтому $\text{dis } R \geq \lambda$.

Зададим на множестве $D_{\lambda\Delta}^R$ метрику, положив расстояние между различными элементами равным λ , тогда это множество представляет собой некоторый симплекс $\lambda\Delta'$. Соответствие R порождает естественным образом соответствие $R' \in \mathcal{R}(\lambda\Delta', X)$: если $D_{\lambda\Delta}^R = \{\Delta_i\}_{i \in I}$ и $f_R: D_{\lambda\Delta}^R \rightarrow D_X^R$ — биекция, порожденная R , то

$$R' = \bigcup_{i \in I} \{\Delta_i\} \times f_R(\Delta_i).$$

Легко видеть, что $\text{dis } R = \max\{\lambda, \text{dis } R'\}$. Кроме того, R' порождается разбиением $D' := D_X^R$, т.е. $R' = R_{D'}$, поэтому, в силу следствию 3, имеем

$$\text{dis } R' = \max\{\text{diam } D', \lambda - \alpha(D'), \text{diam } X - \lambda\},$$

откуда

$$\text{dis } R = \max\{\lambda, \text{diam } D', \lambda - \alpha(D'), \text{diam } X - \lambda\} = \max\{\lambda, \text{diam } D', \text{diam } X - \lambda\}.$$

Так как $\#D' \leq m$, у разбиения D' существует подразбиение $D \in \mathcal{D}_m(X)$. Ясно, что $\text{diam } D \leq \text{diam } D'$, поэтому

$$\text{dis } R_D = \max\{\text{diam } D, \lambda - \alpha(D), \text{diam } X - \lambda\} \leq \max\{\text{diam } D', \lambda, \text{diam } X - \lambda\} = \text{dis } R,$$

что и требовалось.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть X — произвольное ограниченное метрическое пространство и $m = \#\lambda\Delta \leq \#X$. Тогда

$$2d_{GH}(\lambda\Delta, X) = \inf_{D \in \mathcal{D}_m(X)} \max\{\text{diam } D, \lambda - \alpha(D), \text{diam } X - \lambda\}.$$

Для произвольного метрического пространства X положим

$$E(X) = \inf\{|xy| : x, y \in X, x \neq y\}.$$

Отметим, что $E(X) \leq \text{diam } X$, причем для ограниченного X равенство достигается, если и только если X является симплексом.

Из следствия 4 мгновенно вытекает следующая теорема, доказанная в [11].

ТЕОРЕМА 2 ([11]). Пусть X — конечное метрическое пространство и $\#\lambda\Delta = \#X$, тогда

$$2d_{GH}(\lambda\Delta, X) = \max\{\lambda - E(X), \text{diam } X - \lambda\}.$$

Приведем ряд новых результатов.

Для произвольного метрического пространства X , $m \leq \#X$, положим

$$\begin{aligned} \alpha_m^-(X) &= \inf_{D \in \mathcal{D}_m(X)} \alpha(D), & \alpha_m(X) &= \alpha_m^+(X) = \sup_{D \in \mathcal{D}_m(X)} \alpha(D), \\ d_m(X) &= d_m^-(X) = \inf_{D \in \mathcal{D}_m(X)} \text{diam } D, & d_m^+(X) &= \sup_{D \in \mathcal{D}_m(X)} \text{diam } D. \end{aligned}$$

REMARK 1. Мы ввели упрощенные переобозначения для $\alpha_m^+(X)$ и $d_m^-(X)$ потому, что эти величины, в отличие от их «близнецов» $\alpha_m^-(X)$ и $d_m^+(X)$, встречаются в приводимых ниже формулах намного чаще.

Отметим, что $\alpha_m(X) = 0$ тогда и только тогда, когда для любого $D \in \mathcal{D}_m(X)$ выполняется $\alpha(D) = 0$.

ПРИМЕР 1. Пусть X — бесконечное компактное метрическое пространство, а m — любой бесконечный кардинал, $m \leq \#X$. Тогда $\alpha_m(X) = 0$.

Действительно, выберем произвольное $D = \{X_i\}_{i \in I} \in \mathcal{D}_m(X)$, а в каждом X_i — по одной точке $x_i \in X_i$. Тогда, в силу компактности X , множество $\{x_i\}_{i \in I}$ содержит сходящуюся последовательность $\{x_{i_k}\}$, состоящую из попарно различных точек. Но тогда $|X_{i_k} X_{i_{k+1}}| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, поэтому $\alpha(D) = 0$.

ПРИМЕР 2. Пусть X — ограниченное бесконечное метрическое пространство, представленное в виде дизъюнктного объединения n бесконечных компактов, и t — бесконечное кардинальное число, $n < t \leq \#X$, тогда $\alpha_m(X) = 0$.

Действительно, пусть $\{Z_j\}_{j \in J}$, $\#J = n$, — разбиение пространства X на n компактов Z_j . Выберем произвольное $D = \{X_i\}_{i \in I} \in \mathcal{D}_m(X)$. Так как $n < t$, то для некоторого $j \in J$ семейство всех непустых пересечений $X_i \cap Z_j$ образует бесконечное разбиение компакта Z_j . Осталось воспользоваться рассуждениями примера 1.

ПРИМЕР 3. Пусть X — связное ограниченное метрическое пространство, а $t \geq 2$ — любой кардинал, $t \leq \#X$. Тогда $\alpha_m(X) = 0$.

Действительно, выберем произвольное $D = \{X_i\}_{i \in I} \in \mathcal{D}_m(X)$, в нем — произвольное X_i , и положим $X'_i = \cup_{i \neq j \in I} X_j$, тогда $D' = \{X_i, X'_i\} \in \mathcal{D}_2(X)$. Так как пространство X — связное, то $|X_i X'_i| = 0$, поэтому можно выбрать последовательность X_{j_k} , $j_k \neq i$, для которой $|X_i X_{j_k}| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, откуда $\alpha(D) = 0$.

Аналогично разбирается следующий пример.

ПРИМЕР 4. Пусть X — произвольное ограниченное метрическое пространство, состоящее из n связных компонент, и t — кардинальное число, $n < t \leq \#X$, тогда $\alpha_m(X) = 0$.

Из следствия 4 вытекает следующий результат.

ТЕОРЕМА 3. Пусть X — произвольное ограниченное метрическое пространство, $t = \#\lambda\Delta \leq \#X$, и $\alpha_m(X) = 0$, тогда

$$2d_{GH}(\lambda\Delta, X) = \max\{d_m(X), \lambda, \text{diam } X - \lambda\}.$$

Рассмотрим график зависимости величины $2d_{GH}(\lambda\Delta, X)$ из теоремы 3 от λ , см. рис. 1.

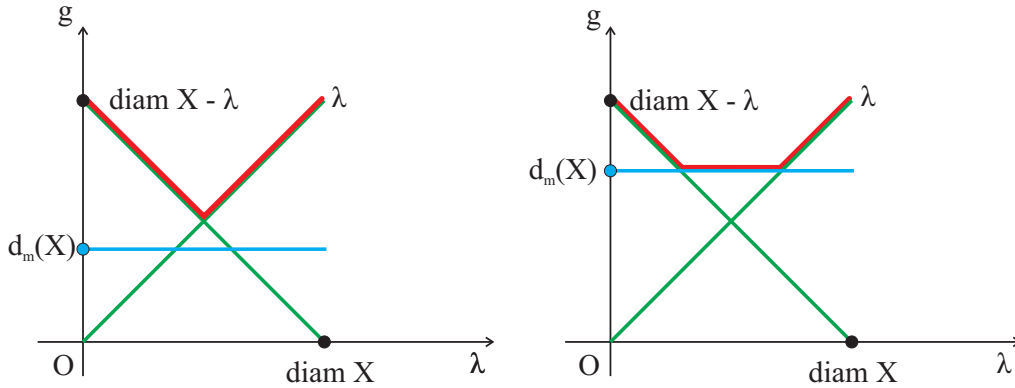


Рис. 1: График функции $g(\lambda) = 2d_{GH}(\lambda\Delta, X)$ при $\alpha_m(X) = 0$ и разных значениях $d_m(X)$.

Из графика, приведенного на рис. 1, непосредственно получается следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть X — произвольное ограниченное метрическое пространство, $t = \#\lambda\Delta \leq \#X$, причем $\alpha_m(X) = 0$, тогда

(i) если $d_m(X) \leq \frac{1}{2} \text{diam } X$, то

$$2d_{GH}(\lambda\Delta, X) = \begin{cases} \text{diam } X - \lambda & \text{при } \lambda \leq \frac{1}{2} \text{diam } X, \\ \lambda & \text{при } \lambda \geq \frac{1}{2} \text{diam } X; \end{cases}$$

(ii) если $d_m(X) > \frac{1}{2} \text{diam } X$, то

$$2d_{GH}(\lambda\Delta, X) = \begin{cases} \text{diam } X - \lambda & \text{при } \lambda \leq \text{diam } X - d_m(X), \\ d_m(X) & \text{при } \text{diam } X - d_m(X) \leq \lambda \leq d_m(X), \\ \lambda & \text{при } \lambda \geq d_m(X). \end{cases}$$

Еще один частный случай получается, если $d_m(X) = \text{diam } X$, что случается в точно тогда, когда $\text{diam } D = \text{diam } X$ для всех $D \in \mathcal{D}_m(X)$.

ПРИМЕР 5. Для каждого симплекса $X = \lambda\Delta$, кардинального числа $0 < m < \#\lambda\Delta$ и любого $D \in \mathcal{D}_m(X)$ имеем $\text{diam } D = \lambda = \text{diam } X$, поэтому $d_m(X) = \text{diam } X$.

ПРИМЕР 6. Пусть $X = S^1$ — стандартная единичная окружность на евклидовой плоскости, и $m = 2$. Тогда $d_m(X) = \text{diam } X = 2$.

Действительно, предположим противное, т.е. существует $D = \{X_1, X_2\} \in \mathcal{D}_m(X)$ такое, что $\text{diam } D < 2$. Для $x \in X$ через x' обозначим диаметрально противоположную x точку окружности X . Из сделанного предположения вытекает, что для каждого $x \in X_1$ точка x' лежит в X_2 вместе с некоторой ее открытой окрестностью, поэтому X_2 — открытое множество. Аналогично, X_1 — открытое множество и, значит, окружность разбилась на два непустых открытых множества, что противоречит связности.

СЛЕДСТВИЕ 6. Пусть X — произвольное ограниченное метрическое пространство, $m = \#\lambda\Delta \leq \#X$, причем $d_m(X) = \text{diam } X$, тогда

$$2d_{GH}(\lambda\Delta, X) = \max\{\text{diam } X, \lambda - \alpha_m(X)\}.$$

В частности,

- (i) при $\lambda \leq \text{diam } X + \alpha_m(X)$ имеем $2d_{GH}(\lambda\Delta, X) = \text{diam } X$;
- (ii) при $\lambda \geq \text{diam } X + \alpha_m(X)$ выполняется $2d_{GH}(\lambda\Delta, X) = \lambda - \alpha_m(X)$.

Рассмотрим теперь общий случай. Оказывается, и здесь тоже удастся получить некоторые явные формулы, но уже не для всех λ . Пусть A — точка пересечения графиков функций $\text{diam } X - \lambda$, $\lambda \in [0, \text{diam } X]$, и $\lambda - \alpha_m^-(X)$, $\lambda \geq \alpha_m^-(X)$. Рассмотрим различные варианты взаимного расположения точки A и горизонтальной полосы S между $d_m(X)$ и $d_m^+(X)$.

(1) Точка A лежит ниже полосы S . Соответствующая иллюстрация приведена на рис. 2.

Вертикальные пунктирные линии делят рисунок на три части: левую, среднюю и правую. В левой и правой частях жирная линия дает точное значения функции g . В средней части жирная линия ограничивает ромб: именно в нем лежат все точки $(\alpha(D), \text{diam } D)$, поэтому «верхняя и левая части» границы ромба дает верхнюю оценку на функцию g , а «нижняя и правая части» — нижнюю оценку.

Вычисляя координаты точек пересечения графиков, получаем следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 7. Пусть X — произвольное ограниченное метрическое пространство, $m = \#\lambda\Delta \leq \#X$. Предположим, что $\text{diam } X - \alpha_m^-(X) \leq 2d_m(X)$, тогда

- если $\lambda \leq \alpha_m^-(X) + d_m(X)$, то

$$2d_{GH}(\lambda\Delta, X) = \max\{\text{diam } X - \lambda, d_m(X)\};$$

- если $\alpha_m^-(X) + d_m(X) \leq \lambda \leq \alpha_m(X) + d_m^+(X)$, то

$$\max\{\lambda - \alpha_m(X), d_m(X)\} \leq 2d_{GH}(\lambda\Delta, X) \leq \min\{\lambda - \alpha_m^-(X), d_m^+(X)\};$$

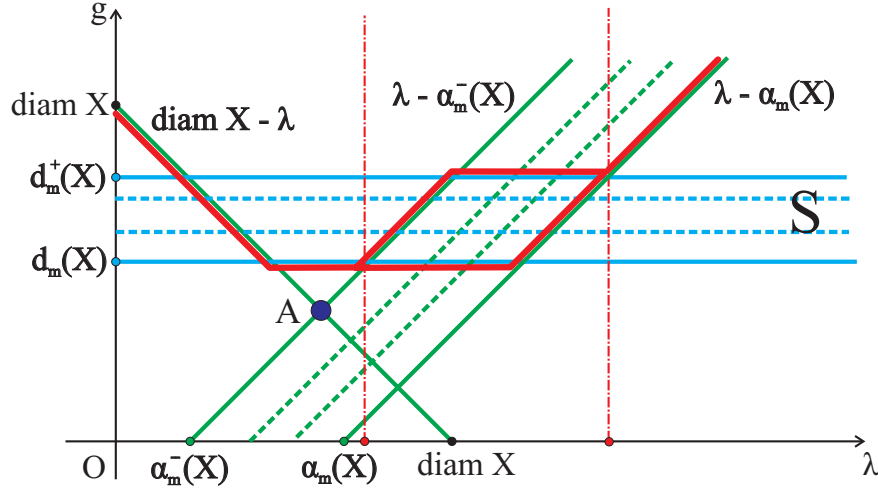


Рис. 2: График функции $g(\lambda) = 2d_{GH}(\lambda\Delta, X)$, точка A лежит ниже полосы S .

- если $\lambda \geq \alpha_m(X) + d_m^+(X)$, то

$$2d_{GH}(\lambda\Delta, X) = \lambda - \alpha_m(X).$$

(2) Точка A лежит в полосе S . Соответствующая иллюстрация приведена на рис. 3.

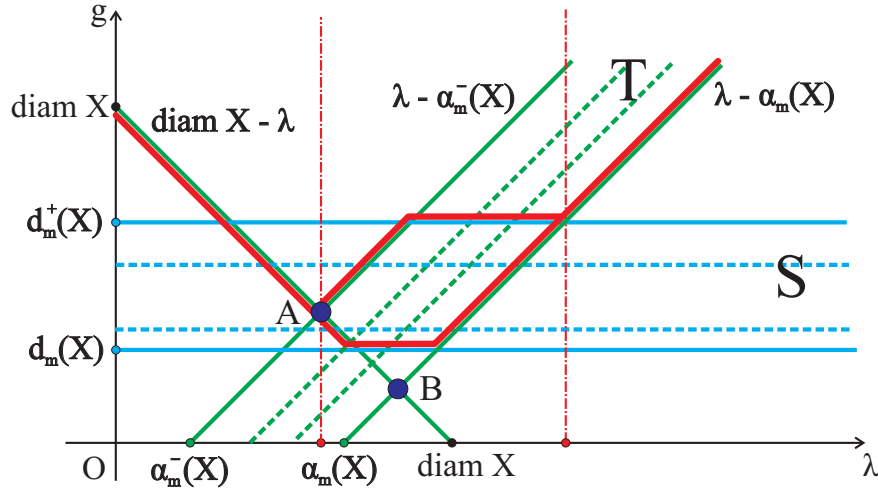


Рис. 3: График функции $g(\lambda) = 2d_{GH}(\lambda\Delta, X)$, точка A лежит в полосе S .

Пусть B — точка пересечения графиков функций $\text{diam } X - \lambda$ и $\lambda - \alpha_m(X)$. Снова вертикальные пунктирные линии делят рисунок на три части, и снова в крайних частях вычисляется точное значения функции g . В средней части жирная линия ограничивает пятиугольник, который вырождается в четырехугольник, если точка B тоже попадает в полосу S : хотя все точки $(\alpha(D), \text{diam } D)$ лежат в ромбе, полученном пересечением полосы S и наклонной полосы T между графиками функций $\lambda - \alpha_m^-(X)$ и $\lambda - \alpha_m(X)$, значение функции g не может опуститься ниже графика функции $\text{diam } X - \lambda$, который и отрезает от ромба соответствующую фигуру (треугольник в случае, когда B не попадает внутрь полосы S , и четырехугольник в противном случае). Вычисляя координаты точек пересечения графиков, получаем следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 8. Пусть X – произвольное ограниченное метрическое пространство, $m = \#\lambda\Delta \leq \#X$. Предположим, что $2d_m(X) \leq \text{diam } X - \alpha_m^-(X) \leq 2d_m^+(X)$, тогда

- если $\lambda \leq \frac{1}{2}(\alpha_m^-(X) + \text{diam}(X))$, то

$$2d_{GH}(\lambda\Delta, X) = \text{diam } X - \lambda;$$

- если $\frac{1}{2}(\alpha_m^-(X) + \text{diam}(X)) \leq \lambda \leq \alpha_m(X) + d_m^+(X)$, то

$$\max\{\text{diam } X - \lambda, \lambda - \alpha_m(X), d_m(X)\} \leq 2d_{GH}(\lambda\Delta, X) \leq \min\{\lambda - \alpha_m^-(X), d_m^+(X)\};$$

- если $\lambda \geq \alpha_m(X) + d_m^+(X)$, то

$$2d_{GH}(\lambda\Delta, X) = \lambda - \alpha_m(X).$$

(3) Точка A лежит выше полосы S . Этот случай разбивается на два подслучая, в зависимости от положения точки B .

(3.1) Верхняя граница полосы S лежит между точками A и B . Соответствующая иллюстрация приведена на рис. 4.

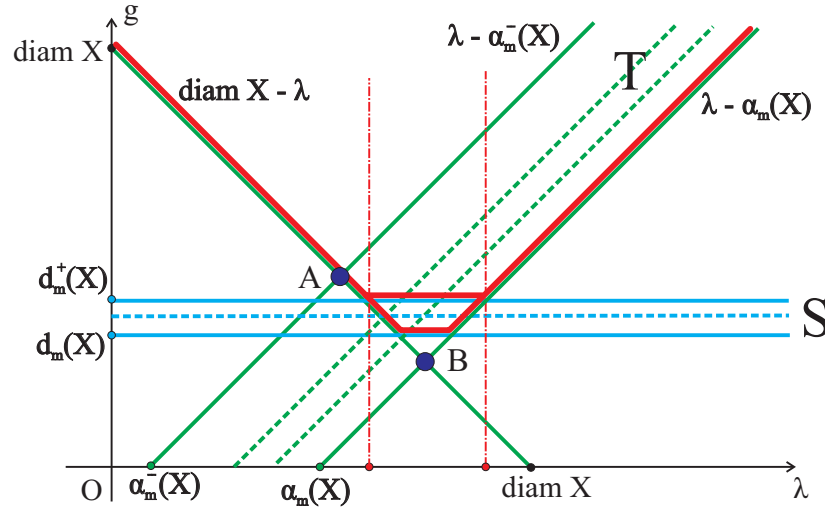


Рис. 4: График функции $g(\lambda) = 2d_{GH}(\lambda\Delta, X)$, верхняя граница полосы S лежит между точками A и B .

На сей раз «область неопределенности» в средней части рисунка представляет собой трапецию, если B лежит строго ниже полосы S , и эта трапеция вырождается в треугольник, когда B оказывается в полосе. Вычисляя координаты точек пересечения графиков, получаем следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 9. Пусть X – произвольное ограниченное метрическое пространство, $m = \#\lambda\Delta \leq \#X$. Предположим, что $\text{diam } X - \alpha_m(X) \leq 2d_m^+(X) \leq \text{diam } X - \alpha_m^-(X)$, тогда

- если $\lambda \leq \text{diam}(X) - d_m^+(X)$, то

$$2d_{GH}(\lambda\Delta, X) = \text{diam } X - \lambda;$$

- если $\text{diam}(X) - d_m^+(X) \leq \lambda \leq \alpha_m(X) + d_m^+(X)$, то

$$\max\{\text{diam } X - \lambda, \lambda - \alpha_m(X), d_m(X)\} \leq 2d_{GH}(\lambda\Delta, X) \leq d_m^+(X);$$

- если $\lambda \geq \alpha_m(X) + d_m^+(X)$, то

$$2d_{GH}(\lambda\Delta, X) = \lambda - \alpha_m(X).$$

(3.2) Точка B лежит выше полосы S . Соответствующая иллюстрация приведена на рис. 5.

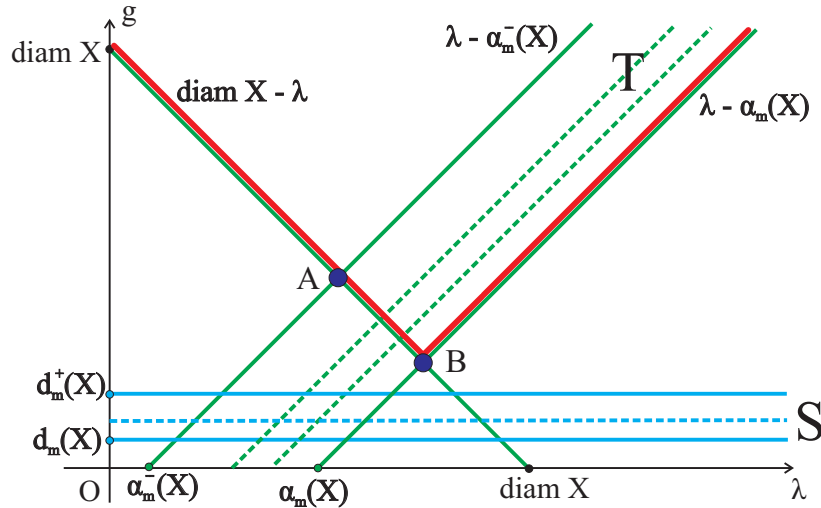


Рис. 5: График функции $g(\lambda) = 2d_{GH}(\lambda\Delta, X)$, точка B лежит выше полосы S .

На этот раз функция g вычисляется точно при всех λ .

СЛЕДСТВИЕ 10. Пусть X — произвольное ограниченное метрическое пространство, $m = \#\lambda\Delta \leq \#X$. Предположим, что $2d_m^+(X) \leq \text{diam } X - \alpha_m(X)$, тогда

$$2d_{GH}(\lambda\Delta, X) = \max\{\text{diam } X - \lambda, \lambda - \alpha_m(X)\}.$$

4. Заключение

Таким образом, в работе получены или явные формулы, или точные верхние и нижние оценки для расстояний Громова–Хаусдорфа от ограниченного метрического пространства до симплекса — пространства, все ненулевые расстояния в котором одинаковы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hausdorff F. Grundzüge der Mengenlehre. Leipzig: Veit, 1914 [reprinted by Chelsea in 1949].
2. Tuzhilin A.A. Who Invented the Gromov-Hausdorff Distance? // ArXiv e-prints. 2017. arXiv:1612.00728.
3. Edwards D. The Structure of Superspace. // В сборнике: Studies in Topology, ed. by Stavrakas N.M. and Allen K.R., New York London San Francisco: Academic Press, Inc., 1975.

4. Gromov M. Groups of Polynomial growth and Expanding Maps. // В сборнике: Publications Mathematiques Paris: I.H.E.S., Vol. 53, 1981.
5. Бураго Д. Ю., Бураго Ю. Д., Иванов С. В. Курс метрической геометрии. Москва – Ижевск: Изд-во Института компьютерных исследований, 2004. — 496 с.
6. Иванов А. О., Тужилин А. А. Геометрия расстояний Хаусдорфа и Громова-Хаусдорфа: случай компактов. М.: Изд-во Попечительского совета мех-мат ф-та МГУ, 2017. — 111 с.
7. Иванов А. О., Николаева Н. К., Тужилин А. А. Метрика Громова-Хаусдорфа на пространстве метрических компактов — строго внутренняя // Матем. заметки. 2016. Т. 100, № 6. С. 947–950 ([arXiv:1504.03830](https://arxiv.org/abs/1504.03830)).
8. Ivanov A. O., Tuzhilin A. A. Isometry group of Gromov–Hausdorff space // Matematicki Vesnik. 2019. Vol. 71, № 1–2. P. 123–154.
9. Memoli F. On the Use of Gromov–Hausdorff Distances for Shape Comparison // В сборнике: Proceedings of Point Based Graphics 2007, Ed. by Botsch M., Pajarola R., Chen B., and Zwicker M., The Eurographics Association, Prague, 2007, pp. 81–90.
10. Tuzhilin A. A. Calculation of Minimum Spanning Tree Edges Lengths using Gromov–Hausdorff Distance // ArXiv e-prints, 2016. [arXiv:1605.01566](https://arxiv.org/abs/1605.01566).
11. Iliadis S. D., Ivanov A. O., Tuzhilin A. A. Geometry of Compact Metric Space in Terms of Gromov-Hausdorff Distances to Regular Simplexes // ArXiv e-prints, 2016. [arXiv:1607.06655](https://arxiv.org/abs/1607.06655).
12. Iliadis S. D., Ivanov A. O., Tuzhilin A. A. Realizations of Gromov-Hausdorff Distance. // ArXiv e-prints, 2016. [arXiv:1603.08850](https://arxiv.org/abs/1603.08850).
13. Ivanov A. O., Tuzhilin A. A. Gromov–Hausdorff Distance, Irreducible Correspondences, Steiner Problem, and Minimal Fillings. // ArXiv e-prints, 2016. [arXiv:1604.06116](https://arxiv.org/abs/1604.06116).
14. Ivanov A. O., Tuzhilin A. A., Hausdorff realization of linear geodesics of Gromov–Hausdorff space // ArXiv e-prints. 2019. [arXiv: 1904.09281](https://arxiv.org/abs/1904.09281).
15. Ivanov A., Tuzhilin A. Geometry of Gromov–Hausdorff metric space // Bulletin de l’Academie Internationale CONCORDE. 2017. № 3. P. 47–57.

REFERENCES

1. Hausdorff, F. 1914, *Grundzüge der Mengenlehre*, Veit, Leipzig [reprinted by Chelsea in 1949].
2. Tuzhilin, A. A. 2017, “Who Invented the Gromov-Hausdorff Distance?”, ArXiv e-prints, [arXiv:1612.00728](https://arxiv.org/abs/1612.00728).
3. Edwards, D. 1975, “The Structure of Superspace”, In: *Studies in Topology*, ed. by Stavrakas, N. M. and Allen, K. R., Academic Press, Inc. New York, London, San Francisco.
4. Gromov, M. 1981, “Groups of Polynomial growth and Expanding Maps“, In: *Publications Mathematiques*, I.H.E.S., Paris, Vol. 53.
5. Burago, D. Yu., Burago, Yu. D. & Ivanov, S. V., 2001, *A Course in Metric Geometry*, American Mathematical Society, Providence, RI.

6. Ivanov, A. O. & Tuzhilin, A. A., 2017, *Geometry of Hausdorff and Gromov–Hausdorff distances, the case of compact spaces*, Izd-vo Popech. Soveta Mech.-Mat. Facult. MGU, Moscow [in Russian].
7. Ivanov, A. O., Nikolaeva, N. K. & Tuzhilin, A. A. 2016, “The Gromov–Hausdorff Metric on the Space of Compact Metric Spaces is Strictly Intrinsic”, *Mathematical Notes*, vol. 100, no. 6, pp. 171–173.
8. Ivanov, A. O. & Tuzhilin, A. A. 2019, “Isometry group of Gromov–Hausdorff space”, *Matematicki Vesnik*, vol. 71, no. 1–2, pp. 123–154.
9. Memoli, F. 2007, “On the Use of Gromov–Hausdorff Distances for Shape Comparison, In: *Proceedings of Point Based Graphics 2007*, Ed. by Botsch M., Pajarola R., Chen B., and Zwicker M., The Eurographics Association, Prague, 2007, pp. 81–90.
10. Tuzhilin, A. A. 2016, “Calculation of Minimum Spanning Tree Edges Lengths using Gromov–Hausdorff Distance”, ArXiv e-prints, [arXiv:1605.01566](https://arxiv.org/abs/1605.01566).
11. Iliadis, S. D., Ivanov, A. O. & Tuzhilin, A. A. 2016, “Geometry of Compact Metric Space in Terms of Gromov-Hausdorff Distances to Regular Simplexes”, ArXiv e-prints, [arXiv:1607.06655](https://arxiv.org/abs/1607.06655).
12. Iliadis, S. D., Ivanov, A. O. & Tuzhilin A. A. 2016, “Realizations of Gromov-Hausdorff Distance”, ArXiv e-prints, [arXiv:1603.08850](https://arxiv.org/abs/1603.08850).
13. Ivanov, A. O., Tuzhilin, A. A. 2016, “Gromov–Hausdorff Distance, Irreducible Correspondences, Steiner Problem, and Minimal Fillings”, ArXiv e-prints, [arXiv: 1604.06116](https://arxiv.org/abs/1604.06116).
14. Ivanov, A. O., Tuzhilin, A. A. 2019, “Hausdorff realization of linear geodesics of Gromov–Hausdorff space”, ArXiv e-prints, [arXiv: 1904.09281](https://arxiv.org/abs/1904.09281).
15. Ivanov, A., Tuzhilin, A. 2017, “Geometry of Gromov–Hausdorff metric space”, *Bulletin de l’Academie Internationale CONCORDE*, no. 3, pp. 47–57.

Получено 13.06.2019 г.

Принято в печать 12.07.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 2.

УДК 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-123-139

Распределение значений функции Жордана в классах вычетов

Л. А. Громаковская, Б. М. Широков

Громаковская Лариса Александровна — старший преподаватель, Петрозаводский государственный университет (г. Петрозаводск).

e-mail: gromak_la@mail.ru

Широков Борис Михайлович — кандидат физико-математических наук, доцент, Петрозаводский государственный университет (г. Петрозаводск).

e-mail: bmshir@mail.ru

Аннотация

Понятие равномерного распределения целозначных арифметических функций в классах вычетов по модулю N было введено И. Нивеном [3]. Для мультипликативных функций более удобным оказалось понятие слабо равномерного распределения по модулю N , которое было введено В. Наркевичем [6].

В работах о распределении в классах вычетов обычно приводятся асимптотические формулы для числа попаданий значений функции в тот или иной класс, содержащие лишь главные члены, что объясняется применением к производящим функциям тауберовой теоремы Х. Деланжа [12], хотя эти производящие функции обладают лучшими аналитическими свойствами, чем это нужно для теоремы Х. Деланжа.

В настоящей работе рассматривается распределение значений функции Жордана $J_2(n)$. Для натурального числа n значение $J_2(n)$ есть количество попарно несравнимых между собой примитивных по модулю n пар целых чисел. Доказывается, что $J_2(n)$ слабо равномерно распределена по модулю N тогда и только тогда, когда N взаимно просто с числом 6. Кроме того, работа содержит асимптотическую формулу, представляющую собой асимптотический ряд, что достигается применением леммы 3, являющейся теоремой тауберова типа, заменяющей теорему Х. Деланжа.

Ключевые слова: тауберовы теоремы, распределение значений, классы вычетов

Библиография: 17 названий.

Для цитирования:

Л. А. Громаковская, Б. М. Широков. Распределение значений функции Жордана в классах вычетов // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 2, с. 123–139.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 2.

UDC 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-123-139

Distribution of values of Jordan function in residue classes

L. A. Gromakovskaya, B. M. Shirokov

Gromakovskaya Larisa Aleksandrovna — senior lecturer, Petrozavodsk State University (Petrozavodsk).

e-mail: gromak_la@mail.ru

Shirokov Boris Mikhailovich — candidate of physics-mathematical Sciences, associate Professor, Petrozavodsk State University (Petrozavodsk).

e-mail: bmshir@mail.ru

Abstract

The concept of a uniform distribution of integral-valued arithmetic functions in residue classes modulo N was introduced by I. Niven [3]. For multiplicative functions, the concept of a weakly uniform distribution modulo N , which was introduced by V. Narkevich [6], turned out to be more convenient. In papers on the distribution in residue classes, we usually give asymptotic formulas for the number of hits of the values of functions in a particular class containing only the leading terms, which is explained by the application to the generating functions of the Tauberian theorem of H. Delange [12], although these generating functions have better analytical properties, which is necessary for the theorem of H. Delange. In this paper we consider the distribution of values of the Jordan function $J_2(n)$. For a positive integer n , the value of $J_2(n)$ is the number of pairwise incongruent pairs of integers that are primitive in modulo n . It is proved that $J_2(n)$ is weakly uniformly distributed modulo N if and only if N is relatively prime to 6. Moreover, the paper contains an asymptotic formula representing an asymptotic series, which is achieved by applying Lemma 3, which is a Tauberian theorem type that replaces the theorem of H. Delange.

Keywords: tauberian theorem, distribution of values, residue classes

Bibliography: 17 titles.

For citation:

L. A. Gromakovskaya, B. M. Shirokov, 2019, "Distribution of values of Jordan function in residue classes", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 2, pp. 123–139.

1. Введение

Работы, связанные с конгруэнциальными свойствами целочисленных арифметических функций, стали появляться с середины 20 века. В них, как правило, устанавливались асимптотические формулы для количества значений функций, удовлетворяющих некоторым условиям конгруэнтности, в основном, по простому модулю ([1, 2]).

В 1961 году И. Нивен [3] ввел понятие равномерного распределения в классах вычетов по произвольному модулю и в кольце $\mathbb{Z}$. Эта работа положила начало изучению условий наличия равномерного распределения в классах вычетов. Учияма [5] получил критерий равномерного распределения последовательности по заданному модулю и установил двойственность этого понятия понятию равномерного распределения последовательности по модулю 1 (см. также [4, глава V]). В 1967 году В. Наркевич [6] перенес понятие равномерного распределения функций на группу приведенных вычетов по некоторому модулю N и назвал его слабо равномерным распределением (с.р.р.) по модулю N . Это понятие оказалось более удобным для мультипликативных функций. В работах [6, 7] изучается с.р.р. по модулю N для некоторого класса мультипликативных функций.

В статье О. М. Фоменко [8] установлено с.р.р. по простому модулю для некоторых функций, не попадающих в класс В. Наркевича. В работе Б. М. Широкова [9] перенесена теория В. Наркевича на более широкий класс функций, а в [10, 11] приведены необходимые и достаточные условия на модуль N для с.р.р. по модулю N некоторых функций, не попадающих в класс полиномоподобных.

Отметим, что в работах о распределении значений функций в классах вычетов приводятся асимптотические формулы для количества значений функций, попадающих в заданный класс вычетов, которые содержат только главный член асимптотики. Это объясняется тем, что для используемых при этом производящих функций применяется тауберова теорема Деланжа [12]. Но эти производящие функции обладают лучшими аналитическими свойствами, чем необходимо для применения этой теоремы.

Ключевую роль при выводе асимптотических формул в нашей работе играет лемма 3, которая представляет собой теорему тауберова типа и является более точной формой тауберовой теоремы 1 работы [13]. Проф. Е. В. Подсыпанин обратил наше внимание на то, что в этой теореме не отражена зависимость асимптотики в случае нецелого показателя z от числа n , количества слагаемых асимптотики и не ясно, можно ли считать асимптотику асимптотическим рядом. Лемма 3 содержит более точный результат, чем упомянутая выше теорема 1. В ней отражена зависимость асимптотики от n . В связи с этим она приводится с полным доказательством.

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ. $N, a, b, d, i, j, k, m, n, r$ — целые числа; p, q — простые числа; x — действительное число, большее 1; $s = \sigma + it$ — комплексное число; $(a_1, \dots, a_k)$ — наибольший общий делитель чисел $a_1, \dots, a_k$; $G(N)$ — группа вычетов, взаимно простых с N ; χ и h — характеры Дирихле по модулю N ; $f(n)$ — мультипликативная целозначная функция; $|M|$ — количество элементов конечного множества M ; $S(x, r, f)$ — количество чисел $n \leq x$, для которых $f(n) \equiv r \pmod{N}$, или $S(x, r)$, когда из контекста ясно, о какой функции $f(n)$ идет речь; для некоторой постоянной $c_0 > 0$

$$\sigma(t) = \max \left\{ \frac{3}{4}, 1 - \frac{c_0}{\ln(|t| + 2)} \right\}, \quad \Omega = \{s \mid \sigma(t) < \sigma, -\infty < t < +\infty\};$$

$\varphi(n)$ — функция Эйлера; $\Gamma(s)$ — гамма-функция Эйлера;

$$\lambda = \prod_{q|N} \frac{q-3}{q-1}; \quad z(\chi) = \frac{1}{\varphi(N)} \sum_{r \in G(N)} \chi(r^2 - 1).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Функция $f(n)$ называется слабо равномерно распределенной по модулю N , если для любых a и b , взаимно простых с N ,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{S(x, a, f)}{S(x, b, f)} = 1,$$

при условии, что множество $\{n \mid (f(n), N) = 1\}$ бесконечно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пара чисел a и b называется примитивной по модулю N , если $(a, b, N) = 1$.

Количество несравнимых между собой по модулю n примитивных пар обозначается через $J_2(n)$ и называется функцией Жордана. В дальнейшем будем обозначать ее $J(n)$. Она мультипликативна и

$$J(n) = n^2 \prod_{q|n} \left(1 - \frac{1}{q^2}\right).$$

Свойства этой функции и некоторых ее обобщений изучались в работах [14, 15, 16].

В нашей работе рассматривается распределение значений функции Жордана в классах вычетов по модулю N и доказываются следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1. Функция $J(n)$ слабо равномерно распределена по модулю N тогда и только тогда, когда $(N, 6) = 1$.

ТЕОРЕМА 2. Если $(N, 6) = 1$, то для любого натурального n и для любого $r \in G(N)$ при $x \rightarrow \infty$ для функции $J(n)$ справедлива асимптотика

$$S(x, r) = \frac{1}{\varphi(N)} \frac{x}{(\ln x)^{1-\lambda}} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k(\chi_0)}{\Gamma(k-\lambda) \ln^k x} + \\ + \frac{1}{\varphi(N)} \sum_{\chi \neq \chi_0} \frac{\bar{\chi}(r)x}{(\ln x)^{1-z(\chi)}} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k(\chi)}{\Gamma(k-z(\chi)) \ln^k x} + O\left(\frac{x\Gamma(n+3-\lambda)}{R^n(\ln x)^{n+1-\lambda}}\right),$$

причем, $|z(\chi)| < \lambda$ для любого $\chi \neq \chi_0$, где $a_k(\chi)$ и R , $0 < R < 1$, — постоянные, не зависящие от n , и константа в символе O тоже не зависит от n .

2. Доказательство теоремы 1

Для доказательства теоремы нам потребуются следующие леммы.

ЛЕММА 1. Если $(N, 6) = 1$ и для характера χ по модулю N справедливо равенство

$$\sum_{r \in G(N)} \chi(r^2 - 1) = \varphi(N) \prod_{q|N} \frac{q-3}{q-1}, \quad (1)$$

то χ — главный характер по модулю N .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала $N = q^k$ и $q > 7$. Вычет $r \in G(N)$ представим в виде

$$r = aq + b, \quad 0 \leq a \leq q^{k-1} - 1, \quad 1 \leq b \leq q - 1.$$

Равенство $\chi(r^2 - 1) = 0$ верно тогда и только тогда, когда

$$r^2 - 1 \equiv 0 \pmod{q},$$

т. е. $r^2 \equiv 1 \pmod{q}$. Значит, $r = aq + 1$ или $r = aq + q - 1$, $0 \leq a \leq q^{k-1} - 1$. Количество таких вычетов равно $2q^{k-1}$. Поэтому количество ненулевых слагаемых в сумме, стоящей в равенстве (1), равно

$$\varphi(q^k) - 2q^{k-1} = \varphi(q^k) \frac{q-3}{q-1},$$

т. е. правой части равенства (1) при $N = q^k$. Так как $|\chi(n)| = 1$ при условии, что $\chi(n) \neq 0$, то для ненулевых слагаемых суммы в равенстве (1) имеем: $\chi(r^2 - 1) = 1$. Дальше доказательство проведем индукцией по a .

Пусть $a = 0$. Если $r = 2$, то $\chi(1) = \chi(3) = 1$. Вычет $r = 3$ приводит к равенству $\chi^3(2) = 1$. При $r = 7$ получаем $\chi(48) = \chi(3)\chi^4(2) = \chi(2) = 1$.

Итак, $\chi(1) = \chi(2) = 1$. Если для $r < q - 1$ верны равенства $\chi(r - 1) = \chi(r) = 1$, то из равенства $\chi(r^2 - 1) = 1$ следует, что $\chi(r + 1) = 1$. Таким образом, для всех r , удовлетворяющих неравенству $1 \leq r \leq q - 1$ мы получили $\chi(r) = 1$.

Допустим, что для всех вычетов $r \leq aq + q - 1$, $a < q^{k-1} - 1$ выполняется равенство $\chi(r) = 1$.

Положим $a' = a + 1$. Нам достаточно показать, что

$$\chi(a'q + 1) = \chi(a'q + 2) = 1.$$

Если a' нечетно, то $\frac{a'q+1}{2} \leq aq + q - 1$. Следовательно,

$$\chi(a'q + 1) = \chi(2)\chi\left(\frac{a'q + 1}{2}\right) = 1.$$

Далее, одно из чисел $a'q + 2$, $a'q + 4$, $a'q + 6$ делится на 3. Если это $a'q + 2$, то

$$\chi(a'q + 2) = \chi(3)\chi\left(\frac{a'q + 2}{3}\right) = 1.$$

Если это $a'q + 4$, то аналогично находим, что $\chi(a'q + 4) = 1$. Но

$$\chi(a'q + 2)\chi(a'q + 4) = 1.$$

Значит, и $\chi(a'q + 2) = 1$.

Если это $a'q + 6$, то так же видим, что $\chi(a'q + 4) = 1$, а отсюда и $\chi(a'q + 2) = 1$.

А теперь так же, как и при $a = 0$, индуктивно устанавливаем, что $\chi(a'q + b) = 1$ для всех таких значений b , что $1 \leq b \leq q - 1$.

Если же a' четно, то одно из чисел $a'q + 1$, $a'q + 3$, $a'q + 5$ делится на 3. Тогда рассуждая так же, как выше, получим, что $\chi(a'q + 1) = 1$. В силу четности числа $a'q + 2$, как и прежде, выводим, что $\chi(a'q + 2) = 1$. Опять, повторяя рассуждение при $a = 0$, находим, что $\chi(a'q + b) = 1$ для всех значений b , удовлетворяющих неравенству $1 \leq b \leq q - 1$.

Пусть теперь $q = 5$ или $q = 7$. При $r = 2$ имеем: $2^2 - 1 = 3$ и $\chi(3) = 1$. Но 3 — первообразный корень по модулю q^k . Поэтому $\chi = \chi_0$.

Если $N = q_1^{k_1} \cdots q_l^{k_l}$, $q_i > 3$, то, в силу китайской теоремы об остатках, каждому $r \in G(N)$ взаимно однозначно соответствует такой набор $(r_1, \dots, r_l)$, $r_i \in G(q_i^{k_i})$, что $r \equiv r_i \pmod{q_i^{k_i}}$. Кроме того, характер χ определяется как произведение характеров χ_i групп $G(q_i^{k_i})$. Следовательно,

$$\chi(r^2 - 1) = \chi_1(r_1^2 - 1) \cdots \chi_l(r_l^2 - 1)$$

Подставим это в равенство (1). Обозначая $G_i = G(q_i^{k_i})$ и $N_i = q_i^{k_i}$, получим

$$\sum_{r \in G} \chi_1(r_1^2 - 1) \cdots \chi_l(r_l^2 - 1) = \prod_{i=1}^l \sum_{r_i \in G_i} \chi_i(r_i^2 - 1) = \prod_{i=1}^l \varphi(N_i) \frac{q_i - 3}{q_i - 1}.$$

Как показано выше, для каждой суммы в произведении справедливо неравенство

$$\left| \sum_{r_i \in G_i} \chi_i(r_i^2 - 1) \right| \leq \varphi(N_i) \frac{q_i - 3}{q_i - 1}.$$

Следовательно для каждого i , $1 \leq i \leq l$,

$$\sum_{r_i \in G_i} \chi_i(r_i^2 - 1) = \varphi(N_i) \frac{q_i - 3}{q_i - 1}.$$

По доказанному отсюда следует, что для любого i характер χ_i — главный. Тогда и характер χ тоже главный. Лемма доказана. $\square$

Введем дополнительные обозначения: $R(N, f)$ — множество тех вычетов $r \in G(N)$, для которых существует такое простое число p , $(p, N) = 1$, что $f(p) \equiv r \pmod{N}$; $\Lambda(N, f)$ — подгруппа $G(N)$, порожденная множеством $R(N, f)$. Для функции Жордана положим $R(N) = R(N, J)$ и $\Lambda(N) = \Lambda(N, J)$.

Функция $f(n)$ называется полиномоподобной, если для любого натурального k существует такой многочлен $P_k(x)$ степени k с целыми коэффициентами, что для любого простого числа p $f(p^k) = P_k(p)$.

ЛЕММА 2. Если для полиномоподобной мультипликативной функции $f(n)$ выполняется равенство $\Lambda(N, f) = G(N)$, то функция $f(n)$ слабо равномерно распределена по модулю N .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эта лемма есть непосредственное следствие теоремы 1 работы В. Наркевича [6, с. 270]. $\square$

Приступим к доказательству теоремы 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Итак, пусть $(N, 6) = 1$. Допустим, что $\Lambda(N) \neq G(N)$. Тогда существует неглавный характер χ по модулю N , равный 1 на подгруппе $\Lambda(N)$. Если $r \in G(N)$ и простое число $p \equiv r \pmod{N}$, то $J(p) \equiv r^2 - 1 \pmod{N}$. Значит, множество

$$R(N) = \{a | a \equiv r^2 - 1 \pmod{N}, r \in G(N), (r^2 - 1, N) = 1\}.$$

Так как $R(N) \subset \Lambda(N)$, то

$$\sum_{r \in G(N)} \chi(r^2 - 1) = |R(N)| = \varphi(N) \prod_{q|N} \frac{q-3}{q-1}.$$

Тогда из леммы 1 следует, что χ — главный характер и $\Lambda(N) = G(N)$. В виду леммы 2 функция $J(n)$ с. р. р. по модулю N .

Нам осталось убедиться, что если N делится на 2 или на 3, то функция $J(n)$ не обладает слабо равномерным распределением по этому модулю. Покажем, что в этом случае множество $M = \{n | (J(n), N) = 1\}$ конечно.

1) Пусть N четно.

Если существует $p > 2$, делящее n , то $p^2 - 1 | J(n)$ и $J(n)$ четно и $n \notin M$. Если же $n = 2^m$, то $J(n)$ нечетна только при $m = 0$ или 1, т. е. множество M содержит не больше двух чисел.

2) Пусть N нечетно, но делится на 3.

Если $n = 3^k n_1$ и $(n_1, 3) = 1$, то при $k > 1$ число $J(n)$ делится на 3 и $n \notin M$. Пусть $n = n_1$ или $n = 3n_1$. Если n_1 четно, то в обоих случаях $3 | J(n)$ и $n \notin M$. Если n_1 нечетно и не равно 1, то существует $p \geq 5$, делящее n_1 . Тогда из трех чисел $p - 1$, p , $p + 1$ одно делится на 3 и это не число p , т. е. $3 | J(n)$ и $n \notin M$. Остается только две возможности: $n = 1$ и $n = 3$, т. е. M конечно.

Таким образом, если $(N, 6) > 1$, то множество M конечно и функция $J(n)$ не обладает с. р. р. по модулю N . Теорема 1 полностью доказана. $\square$

3. Доказательство теоремы 2

Нам потребуется лемма, которая представляет собой теорему тауберова типа для рядов Дирихле. Именно эта лемма заменит теорему Деланжа, о которой шла речь во введении.

ЛЕММА 3. Пусть для арифметической функции $f(n)$ существуют такие постоянные $A > 0$ и $B > 0$, что $|f(n)| \leq B(\ln n)^A$ и определенная при $\sigma > 1$ функция

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$$

удовлетворяет условиям:

1) существует такая регулярная в Ω и непрерывная на ее границе функция $G(s)$, что при $\sigma > 1$ для некоторого $z \in \mathbb{C}$

$$F(s) = G(s)(s-1)^{-z}, \quad (2)$$

причем, если z — нецелое, то фиксируем главную ветвь $\ln(s-1)$;

2) для продолжения $F(s)$ в области Ω существует такая постоянная $A_1 > 0$, что $F(s) = O(\ln^{A_1}(|t| + 2))$, $|t| \geq 1$.

Тогда существует такая постоянная $c \in (0, 1)$, что при $x \rightarrow \infty$

а) если $z = 1, 0, -1, -2, \dots$, то

$$S(x) = \sum_{n \leq x} f(n) = \nu(z)G(1)x + O(xe^{-c\sqrt{\ln x}}),$$

где $\nu(z) = 1$, если $z = 1$ и $\nu(z) = 0$ в противном случае;

б) если $z \notin \mathbb{Z}$ и $\xi = \operatorname{Re} z$, то для любого натурального n

$$S(x) = \frac{x}{(\ln x)^{1-z}} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{\ln^k x \Gamma(k-z)} + O\left(\frac{x \Gamma(n+3-\xi)}{R^n (\ln x)^{n+1-\xi}}\right),$$

где a_k — коэффициенты Тейлора функции $G(s)s^{-1}$ в точке $s = 1$, а R — произвольное положительное число, меньшее 1 и радиуса регулярности этой функции в точке $s = 1$, и константы a_k и в символе O не зависят от n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Обозначим $\ln^{-1} \mathbf{x}$ и $\sigma_0 = 1 + 2$. На основании теоремы П.3.1 в книге К. Прахара [17] существует такая постоянная $B_1 > 0$, что для полуцелого $x > 1$

$$\sum_{n \leq x} f(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_0 - iT}^{\sigma_0 + iT} F(s) \frac{x^s}{s} ds + O\left(\frac{x \ln^{B_1} x}{T}\right). \quad (3)$$

Используя продолжение функции $F(s)$ влево от прямой $\sigma = 1$, заменим контур интегрирования.

Пусть $z \leq 1$ — целое число. Опишем дополнительные контуры.

$L_1^+ : \sigma(T) \leq \sigma \leq \sigma_0, t = T, \quad L_1^- : \sigma(T) \leq \sigma \leq \sigma_0, t = -T;$

$L_2^+ : \sigma = \sigma(t), \leq t \leq \mathbf{T}; \quad L_2^- : \sigma = \sigma(t), -T \leq t \leq -;$

$L_3 : \sigma = \sigma(), |t| \leq; \quad L = L_1^+ \cup L_2^+ \cup L_3 \cup L_2^- \cup L_1^-.$

Обозначим для некоторого контура Γ

$$I(\Gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} F(s) \frac{x^s}{s} ds.$$

В случае а) функция $F(s)s^{-1}x^s$ либо регулярна в Ω , если $z \leq 0$, либо содержит один простой полюс при $s = 1$, если $z = 1$. Поэтому

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_0 - iT}^{\sigma_0 + iT} F(s) \frac{x^s}{s} ds = \nu(z)G(1)x + O(|I(L)|). \quad (4)$$

Далее,

$$|I(L_1^+)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma(T)}^{\sigma_0} |F(s)| \frac{x^\sigma}{|\sigma + iT|} d\sigma.$$

Из условия 2) леммы следует, что существует такая постоянная $C_1 > 0$, что при $T = e^{\sqrt{\ln x}}$

$$|I(L_1^+)| \leq C_1 \frac{x \ln^{A_1} T}{T} \int_{\sigma(T)}^{\sigma_0} x^\sigma d\sigma = O((\ln x)^{\frac{A_1}{2}} - 1 x e^{-\sqrt{\ln x}}). \quad (5)$$

Оценка по контуру L_1^- будет такой же, так как интегралы по этим контурам комплексно сопряжены.

Перейдем к оценке $I(L_2^+)$. Пусть $t_0 = \max\{e^{4c_0} - 2, 0\}$. Если $t_0 > 0$ и $0 \leq t \leq t_0$, то $\Delta\sigma(t) = \frac{3}{4}$; если $t \geq t_0$, то $\Delta\sigma(t) = 1 - \frac{c_0}{\ln(t+2)}$. Если $t_0 > 0$, то $\delta < t_0$ при достаточно большом x . Представим $I(L_2^+)$ следующим образом

$$I(L_2^+) = \frac{1}{2\pi} \int_{\delta}^{t_0} \frac{F(3/4 + it)x^{3/4+it}}{3/4 + it} dt + \frac{x}{2\pi} \int_{t_0}^T \frac{F(\sigma(t) + it)}{\sigma(t) + it} x^{it+\sigma(t)-1} dt.$$

В первом интеграле функция $\Delta F\left(\frac{3}{4} + it\right)$ ограничена, поэтому он имеет оценку $O(x^{3/4})$. Во втором — можно считать, что $F(s) = O(\ln^{A_1}(t+2))$ (условие 2) леммы, так как при $|t| \leq 1$ это условие равносильно ограниченности $F(\sigma(t) + it)$, что справедливо. Так что для второго интеграла найдутся такие постоянные $C_2 > 0$ и $C_3 > 0$, что при $T = e^{\sqrt{\ln x}}$ он не превосходит

$$\begin{aligned} C_2 x \int_{t_0}^T \frac{\ln^{A_1}(t+2)}{t+2} x^{-c_0/\ln(t+2)} dt &\leq C_2 x e^{\frac{-c_0 \ln x}{\ln(T+2)}} \frac{(\ln(T+2))^{A_1+1}}{A_1+1} \leq \\ &\leq C_3 x (\ln x)^{A_1+1} e^{-(c_0 \sqrt{\ln x})/2}. \end{aligned}$$

Соединяя полученные две оценки, получим

$$I(L_2^+) = O(x(\ln x)^{A_1+1} e^{-(c_0 \sqrt{\ln x})/2}). \quad (6)$$

Для контура L_3 при $\gamma = \min\left\{\frac{1}{4}, \frac{c_0}{\ln 3}\right\}$ справедлива оценка

$$I(L_3) = O(x^{1-\gamma}),$$

которая поглощается предыдущими, поэтому в дальнейшем ее можно не учитывать. Выберем $c > 0$ так, чтобы $c < 1$ и $c < c_0/2$. Тогда правые части неравенств (5) и (6) оценятся как $O(xe^{-c\sqrt{\ln x}})$. Подставим полученные оценки в формулу (4), затем — в равенство (3) и получим утверждение пункта а) леммы.

Перейдем к доказательству пункта б). Допустим, что z — нецелое число. Теперь при интегрировании по новому контуру мы не должны пересекать полупрямую $t = 0$, $-\infty < \sigma \leq 1$, поэтому в контуре L заменим контур L_3 на контур Γ , состоящий из трех частей:

$$L_4^+ : \sigma(\delta) \leq \sigma \leq 1, \quad t = \delta;$$

$$L_5 : s - 1 = \delta e^{i\varphi}, \quad -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2;$$

$$L_4^- : \sigma(\delta) \leq \sigma \leq 1, \quad t = -\delta.$$

Обозначим через L' новый контур, заменяющий контур L . Тогда

$$I(L') = I(L_1^+) + I(L_2^+) + I(\Gamma) + I(L_2^-) + I(L_1^-) = I(\Gamma) + O(xe^{-c\sqrt{\ln x}}), \quad (7)$$

так как оценки интегралов по контурам $L_1^\pm$, $L_2^\pm$ остаются те же, что и в случае 1).

Пусть R' — радиус круга регулярности функции $G(s)$ с центром в точке $s = 1$. Выберем $R < 1$ так, чтобы $0 < R < R'$. Можно считать, что точка $s = \sigma(\delta) + i\delta$ пересечения контуров L_2^+ и L_4^+ находится в круге $|s - 1| < R$. В противном случае добавим контур, лежащий на прямой $t = \delta$, от этой точки до точки $\sigma' + i\delta$, лежащей в левом полукруге $|s - 1| < R$, причем интеграл по этому контуру оценится как $O(x^{\sigma'})$, $\sigma' < 1$.

Итак, контур Γ находится внутри круга $|s-1| \leq R$, в котором функция $G(s)s^{-1}$ регулярна. Выберем произвольно натуральное число $n \geq 1$. Пусть a_k и $R_n(s)$ — коэффициенты и остаточный член в формуле Тейлора для функции $G(s)s^{-1}$ в круге $|s-1| < R$. Для интеграла по контуру Γ получим представление

$$I(\Gamma) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{n-1} a_k \int_{\Gamma} (s-1)^{k-z} x^s ds + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{x^s R_n(s)}{(s-1)^z} ds. \quad (8)$$

В интегралах под знаком суммы контур Γ дополним двумя контурами

$$\Gamma_{\delta}^{+}: -\infty < \sigma \leq \sigma(\delta), \quad t = \delta; \quad \Gamma_{\delta}^{-}: -\infty < \sigma \leq \sigma(\delta), \quad t = -\delta.$$

Обозначим $H_{\delta} = \Gamma_{\delta}^{+} \cup \Gamma \cup \Gamma_{\delta}^{-}$. Тогда

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (s-1)^{k-z} x^s ds = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{H_{\delta}} - \int_{\Gamma_{\delta}^{+}} - \int_{\Gamma_{\delta}^{-}} \right) (s-1)^{k-z} x^s ds. \quad (9)$$

В интеграле по H_{δ} используем преобразование $s-1 = \delta\zeta$ и обозначим через H контур, в который переходит контур H_{δ} . Благодаря представлению Ханкеля для Γ -функции, получим

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{H_{\delta}} (s-1)^{k-z} x^s ds = \frac{x\delta^{k+1-z}}{2\pi i} \int_H \zeta^{k-z} e^{\zeta} d\zeta = \frac{x}{(\ln x)^{k+1-z}} \cdot \frac{1}{\Gamma(z-k)}.$$

Оценим интеграл по контуру Γ_{δ}^{+} , обозначая его величину через I_k :

$$I_k = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\delta}^{+}} (s-1)^{k-z} x^s ds \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\sigma(\delta)} |(\sigma-1+i\delta)^{k-z}| x^{\sigma} d\sigma. \quad (10)$$

Пусть $z = \xi + i\eta$. Ввиду закрепления главной ветви $\ln(s-1)$ на Γ_{δ}^{+} , с некоторой постоянной $C_4 > 0$ справедливо неравенство

$$|(s-1)^{-z}| = |s-1|^{-\xi} e^{\eta \arg(s-1)} \leq C_4 |s-1|^{-\xi}. \quad (11)$$

В последнем интеграле положим $1-\sigma = \delta u$. Тогда

$$I_k \leq \frac{C_4 x}{2\pi} \delta^{k+1-\xi} \int_{(1-\sigma(\delta))/\delta}^{\infty} e^{-u} (u+1)^{k-\xi} du.$$

По определению $\sigma(t)$

$$1 - \sigma(\delta) = \min \left\{ \frac{1}{4}, \frac{c_0}{\ln(2+\delta)} \right\} \geq \min \left\{ \frac{1}{4}, \frac{c_0}{\ln 3} \right\} \stackrel{Def}{=} \varepsilon.$$

Так как $\delta = (\ln x)^{-1}$, то $(1 - \sigma(\delta))/\delta \geq \varepsilon \ln x$. Следовательно,

$$I_k \leq \frac{C_4}{2\pi} \delta^{k+1-\xi} x \int_{\varepsilon \ln x}^{\infty} e^{-u} (u+1)^{k-\xi} du.$$

С некоторыми положительными постоянными c' и c'' в этом интеграле справедливо неравенство $c'u \leq u + 1 \leq c''u$. Поэтому найдется такая постоянная $C_5 > 0$, что

$$I_k \leq \frac{C_5 x}{(\ln x)^{k+1-\xi}} \int_{\varepsilon \ln x}^{\infty} u^{k-\xi} e^{-u} du.$$

Пусть $[\xi] = m$, $\xi = m + \alpha$ и $l = k - m$. Так как $0 \leq k \leq n - 1$, то $-m \leq l \leq n - m - 1$. Если $l \leq 0$, то

$$I_k = I_{l+m} \leq \frac{C_5 x}{(\ln x)^{k+1-\xi}} \int_{\varepsilon \ln x}^{\infty} u^{l-\alpha} e^{-u} du \leq \frac{C_5 x^{1-\varepsilon}}{\ln x}. \quad (12)$$

Если $l > 0$, то

$$\int_{\varepsilon \ln x}^{\infty} u^{l-\alpha} e^{-u} du \leq \frac{x^{-\varepsilon}}{(\varepsilon \ln x)^{\alpha}} (l+1)! (\ln x)^l.$$

С некоторой постоянной $C_6 > 0$ это приводит к оценке

$$I_k = I_{l+m} \leq C_6 \frac{x^{1-\varepsilon}}{\ln x} (l+1)!. \quad (13)$$

Оценка по контуру Γ_{δ}^{-} будет такой же. Пусть $\Delta M = \max_{|s-1|=R} |G(s)s^{-1}|$. Тогда $|a_k| \leq MR^{-k}$. Из формул (10), (12) и (13) с некоторой постоянной $C_7 > 0$ следует

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{n-1} a_k \left(\int_{\Gamma_{\delta}^{+}} + \int_{\Gamma_{\delta}^{-}} \right) (s-1)^{k-z} x^s ds \right| &\leq C_7 \frac{x^{1-\varepsilon}}{\ln x} \sum_{k=m}^{n-1} \frac{(k-m+1)!}{R^k} \leq \\ &\leq C_7 \frac{x^{1-\varepsilon}}{\ln x} \cdot \frac{(n-m)(n-m)!}{R^n} \leq C_7 \frac{x^{1-\varepsilon}}{\ln x} \cdot \frac{\Gamma(n+3-\xi)}{R^n}. \end{aligned} \quad (14)$$

Нам осталось оценить интеграл от остаточного члена $R_n(s)$, который будем рассматривать как остаток ряда Тейлора. Его коэффициенты удовлетворяют неравенству $|a_k| \leq MR^{-k}$. Следовательно,

$$|R_n(s)| \leq \frac{M|s-1|^n}{R^n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|s-1|^k}{R^k}.$$

Так как контур Γ целиком лежит внутри круга $|s-1| = R$, то существует такое положительное число $\rho < R$, что для $s \in \Gamma$ справедливо неравенство $|s-1| \leq \rho$. Поэтому с некоторой положительной постоянной C_8 имеем:

$$|R_n(s)| \leq C_8 \frac{|s-1|^n}{R^n}.$$

Учитывая, что неравенство (11) справедливо и для контура Γ , с некоторой постоянной $C_9 > 0$ получим

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{L_4^{+}} R_n(s) x^s (s-1)^{-z} ds \right| \leq C_9 \frac{\delta^{n+1-\xi}}{R^n} \int_0^{\infty} e^{-u} u^{n-\xi} du = C_9 \frac{\Gamma(n+1-\xi)}{(\ln x)^{n+1-\xi} R^n} \quad (15)$$

Оценка по контуру L_4^{-} такая же.

На контуре L_5 : $s-1 = \delta e^{i\varphi}$; поэтому $|(s-1)^{-\xi-i\eta}| = \delta^{-\xi} e^{\varphi\eta} \leq \delta^{-\xi} e^{\pi|\eta|}$; $R_n(s) = O(\delta^n) R^{-n}$; величина x^{s-1} ограничена. С некоторой постоянной $C_{10} > 0$ справедливо неравенство

$$\left| \int_{L_5} R_n(s) (s-1)^{-z} x^s ds \right| \leq C_{10} x \delta^{n+1-\xi} R^{-n}. \quad (16)$$

Из равенств (8) и (9) и оценок (14), (15) и (16) получаем

$$I(\Gamma) = \frac{x}{(\ln x)^{1-z}} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{(\ln x)^k \Gamma(z-k)} + O\left(\frac{x \Gamma(n+3-\xi)}{(\ln x)^{n+1-\xi} R^n}\right).$$

Из этого равенства и формул (3), (7) и (8) следует второе утверждение леммы. Лемма доказана. $\square$

Перейдем к доказательству теоремы 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть N — фиксированное натуральное число, взаимно простое с 6. Используя свойство ортогональности характеров, представим сумму $S(x, r)$ в виде

$$S(x, r) = \sum_{\substack{n \leq x \\ J(n) \equiv r \pmod{N}}} 1 = \frac{1}{\varphi(N)} \sum_{\chi} \bar{\chi}(r) \sum_{n \leq x} \chi(J(n)).$$

Обозначим

$$S(x, \chi) = \sum_{n \leq x} \chi(J(n)).$$

Это сумматорная функция для коэффициентов ряда

$$F(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(J(n))}{n^s}. \quad (17)$$

Таким образом, задача свелась к применению леммы 3 к ряду Дирихле (17). Для применения леммы нужно изучить аналитические свойства функции $F(s, \chi)$ и ее аналитического продолжения в области Ω .

Функция $\chi(J(n))$ мультипликативна, а ряд (17) абсолютно сходится при $\sigma > 1$, поэтому

$$F(s, \chi) = \prod_p \left(1 + \frac{\chi(J(p))}{p^s} + \frac{\chi(J(p^2))}{p^{2s}} + \dots \right).$$

Так как $\chi(J(p^k)) = \chi(p^{2k-2}(p^2-1)) = \chi(p^2-1)\chi^{2k-2}(p)$, то

$$F(s, \chi) = \prod_p \left(1 + \frac{\chi(p^2-1)}{p^s - \chi^2(p)} \right).$$

Обозначим

$$H(s, \chi) = \prod_{(p, N)=1} \left(1 - \frac{\chi(p^2-1)}{p^s} \right)^{-1}.$$

Умножим и разделим $F(s, \chi)$ на $H(s, \chi)$ и представим в виде

$$F(s, \chi) = A(s, \chi) H(s, \chi).$$

Через $A(s, \chi)$ обозначена функция

$$A(s, \chi) = \left(1 + \frac{\chi(3)(\chi^2(2) - \chi(3))}{2^s(2^s - \chi^2(2))}\right) \prod_{p|N} \left(1 + \frac{\chi(p^2 - 1)}{p^s}\right) \times \\ \times \prod_{\substack{(p, N)=1 \\ p > 2}} \left(1 + \frac{\chi(p^2 - 1)(\chi^2(p) - \chi(p^2 - 1))}{p^s(p^s - \chi^2(p))}\right).$$

Функция $A(s, \chi)$ регулярна и ограничена при $\sigma \geq 3/4$. Для конечного произведения по простым числам, делящим N , и $p = 2$ это ясно. Проверим это для произведения по всем $p > 2$, не делящим N . В виду неравенства

$$\left| \frac{\chi(p^2 - 1)(\chi^2(p) - \chi(p^2 - 1))}{p^s(p^s - \chi^2(p))} \right| \leq \frac{2}{p^\sigma(p^\sigma - 1)} \leq \frac{4}{p^{3/2}},$$

это произведение сходится абсолютно и равномерно в указанной области, а его значение ограничено. Таким образом, чтобы продолжить $F(s, \chi)$ в область Ω , нужно найти продолжение $H(s, \chi)$. Для этого рассмотрим $\ln H(s, \chi)$, выбирая ту ветвь, для которой при $\sigma > 1$ справедливо равенство

$$\ln H(s, \chi) = - \sum_{(p, N)=1} \ln \left(1 - \frac{\chi(p^2 - 1)}{p^s}\right).$$

Равенство будет верно, если при $z_p = \chi(p^2 - 1)p^{-s}$ абсолютно сходятся ряды

$$\sum_{(p, N)=1} \ln |1 - z_p| \quad \text{и} \quad \sum_{(p, N)=1} \arg(1 - z_p).$$

Первый ряд абсолютно сходится в виду оценки

$$|\ln |1 - z_p|| \leq \frac{|z_p|}{1 - |z_p|} \leq \frac{1}{p^\sigma - 1}.$$

Так как $|z_p| \leq p^{-\sigma}$, то выбираем ту ветвь, для которой справедливо неравенство

$$|\arg(1 - z_p)| \leq \arctg \frac{|z_p|}{|1 + z_p|} \leq |z_p| \leq \frac{1}{p^\sigma}.$$

Для выбранной ветви

$$\ln H(s, \chi) = \sum_{(p, N)=1} \frac{\chi(p^2 - 1)}{p^s} + \sum_{(p, N)=1} \sum_{k \geq 2} \frac{\chi^k(p^2 - 1)}{kp^{ks}}. \quad (18)$$

Обозначим второе слагаемое в формуле (18) через $B(s, \chi)$. Эта функция регулярна и ограничена в области $\sigma \geq 3/4$. Это следует из неравенства

$$\left| \sum_{k \geq 2} \frac{\chi^k(p^2 - 1)}{kp^{ks}} \right| \leq \frac{1}{p^\sigma(p^\sigma - 1)} \leq 2p^{-3/2}.$$

Преобразуем первое слагаемое в равенстве (18) следующим образом

$$\sum_{(p, N)=1} \frac{\chi(p^2 - 1)}{p^s} = \sum_{r \in G(N)} \chi(r^2 - 1) \sum_{p \equiv r \pmod{N}} p^{-s} = \\ = \sum_{h \bmod N} \frac{1}{\varphi(N)} \sum_{r \in G(N)} \chi(r^2 - 1) \bar{h}(r) \sum_p \frac{h(p)}{p^s}.$$

Ряд по простым числам свяжем с L -функцией $L(s, h)$ с помощью равенства

$$\ln L(s, h) = \sum_p \frac{h(p)}{p^s} + \sum_p \sum_{k \geq 2} \frac{h^k(p)}{kp^{ks}},$$

где ветвь логарифма выбирается аналогично тому, как это сделано на с. 134. Обозначим

$$C(s, h) = - \sum_p \sum_{k \geq 2} \frac{h^k(p)}{kp^{ks}} \quad \text{и} \quad z(\chi, h) = \frac{1}{\varphi(N)} \sum_{r \in G(N)} \chi(r^2 - 1) \bar{h}(r).$$

Функция $C(s, h)$ так же, как и $B(s, \chi)$, регулярна и ограничена в области Ω . Тогда из равенства (18) получим

$$\ln H(s, \chi) = B(s, \chi) + \sum_{h \bmod N} z(\chi, h) (\ln L(s, h) + C(s, \chi)).$$

Отсюда приходим к представлению для $H(s, \chi)$:

$$H(s, \chi) = e^{B(s, \chi)} \prod_{h \bmod N} (L(s, h) e^{C(s, h)})^{z(\chi, h)}.$$

Следовательно, для $F(s, \chi)$ имеем:

$$F(s, \chi) = A(s, \chi) e^{B(s, \chi)} \prod_h e^{z(\chi, h) C(s, h)} \cdot \prod_h (L(s, h))^{z(\chi, h)}. \quad (19)$$

Так как $|z(\chi, h)| \leq 1$, то множитель

$$A(s, \chi) e^{B(s, \chi)} \prod_h e^{z(\chi, h) C(s, h)},$$

как показано выше, есть регулярная и ограниченная при $\sigma \geq 3/4$ функция. Произведение L -функций по характерам h в равенстве (19) запишем в виде

$$(s-1)^{-z(\chi)} (L(s, h_0)(s-1))^{z(\chi)} \prod_{h \neq h_0} (L(s, h))^{z(\chi, h)},$$

где $z(\chi) = z(\chi, h_0)$. Функция $(s-1)L(s, h_0)$ регулярна в области Ω и не обращается там в 0. В произведение по характерам $h \neq h_0$ входят L -функции, которые регулярны в области Ω и, если $h^2 \neq h_0$, то и не обращаются там в 0. Возможный для вещественного характера так называемый зигелевский нуль можем считать лежащим вне области Ω , так как модуль характеров h фиксирован, и на основании теоремы Зигеля уменьшением постоянной c_0 можно отодвинуть границу области Ω правее этого нуля.

Так как выбор ветви $\ln L(s, h)$ уже сделан на с. 135, то для каждого $h \neq h_0$ функция $(L(s, h))^{z(\chi, h)}$ также регулярна в области Ω .

Итак, функция

$$\begin{aligned} G(s, \chi) &= \\ &= A(s, \chi) e^{B(s, \chi)} \prod_h e^{z(\chi, h) C(s, h)} \cdot (L(s, h_0)(s-1))^{z(\chi)} \prod_{h \neq h_0} (L(s, h))^{z(\chi, h)} \end{aligned}$$

регулярна в области Ω . При помощи равенства

$$F(s, \chi) = \frac{G(s, \chi)}{(s-1)^{z(\chi)}}$$

функция $F(s, \chi)$ продолжается аналитически в область Ω , причем для $\ln(s-1)$ закреплена главная ветвь.

Покажем, что $F(s, \chi)$ удовлетворяет условию 2) леммы 3. Для этого используем представление $F(s, \chi)$ равенством (19). Произведение

$$A(s, \chi) e^{B(s, \chi)} \prod_h e^{z(\chi, h) C(s, h)}$$

ограничено на всей области Ω . Для L -функций $L(s, h)$ в области Ω при $|t| \geq 1$ справедлива оценка $L(s, h) = O(\ln(|t| + 2))$ [17, Глава IV]. Обозначим $\tau = \arg L(s, h)$. В виду выбора ветви $\ln L(s, h)$ на с. 135, величина τ ограничена. Если положим $z(\chi, h) = \xi + i\eta$, то

$$\left| (L(s, h))^{z(\chi, h)} \right| = |L(s, h)|^\xi e^{-\tau\eta}.$$

Если $\xi > 0$, то при $|t| \geq 1$

$$(L(s, h))^{z(\chi, h)} = O(\ln(|t| + 2)).$$

Если $\xi < 0$, то нужна оценка $L^{-1}(s, h) = O(\ln^B |t| + 2)$ с некоторой постоянной $B > 0$. Для $h = h_0$ она следует из такой же оценки для $\zeta^{-1}(s)$ [17, с. 83]. Если $h \neq h_0$ то она доказывается аналогично.

Таким образом, $F(s, \chi)$ удовлетворяет условию 2) леммы 3. Для каждого характера χ к функции $F(s, \chi)$ применяем лемму 3 с показателем $z = z(\chi)$. Для главного характера этот показатель $z(\chi_0) = \lambda$. Если $\chi \neq \chi_0$, то, в силу леммы 1, $|z(\chi)| < \lambda$, а тогда и его действительная часть $\xi(\chi) \in (-\lambda, \lambda)$. Обозначая через $a_k(\chi)$ коэффициенты ряда Тейлора функции $G(s, \chi)s^{-1}$ в точке $s = 1$, с некоторым числом R , $0 < R < 1$, получим

$$S(x, \chi) = \frac{x}{(\ln x)^{1-z(\chi)}} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k(\chi)}{\Gamma(k - z(\chi)) \ln^k x} + O\left(\frac{\Gamma(n+3 - \xi(\chi))x}{R^n (\ln x)^{n+1-\xi(\chi)}}\right).$$

Подставим величины $S(x, \chi)$ в формулу

$$S(x, r) = \frac{1}{\varphi(N)} \sum_{\chi} \bar{\chi}(r) S(x, \chi).$$

Из $\varphi(N)$ входящих в правую часть остатков выберем один с показателем λ . Так как $(\ln x)^{\xi(\chi)} = O((\ln x)^\lambda)$, то, выделяя слагаемое с $\chi = \chi_0$, получим

$$\begin{aligned} S(x, r) &= \frac{1}{\varphi(N)} \frac{x}{(\ln x)^{1-\lambda}} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k(\chi_0)}{\Gamma(k - \lambda) \ln^k x} + \\ &+ \frac{1}{\varphi(N)} \sum_{\chi \neq \chi_0} \bar{\chi}(r) \frac{x}{(\ln x)^{1-z(\chi)}} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k(\chi)}{\Gamma(k - z(\chi)) \ln^k x} + O\left(\frac{\Gamma(n+3 - \lambda)x}{R^n (\ln x)^{n+1-\lambda}}\right). \end{aligned}$$

Доказательство теоремы 2 завершено. $\square$

4. Заключение

Приведенная в работе теорема 2 показывает, что производящие функции, с помощью которых выводятся асимптотические формулы для распределения значений функций в классах вычетов, обладают свойствами, позволяющими получать более точные асимптотические

формулы, чем при применении теоремы Деланжа. Например, в работе В. Наркевича [6] для функции Эйлера $\varphi(n)$ доказывается утверждение:

Если N взаимно просто с b , то при $x \rightarrow \infty$ с некоторой постоянной C

$$S(x, r, \varphi) \sim \frac{Cx}{(\ln x)^{1-\lambda}},$$

где

$$\lambda = \prod_{q|N} \frac{q-2}{q-1}.$$

Этот результат может быть усилен при более детальном изучении соответствующей производящей функции. Пусть

$$z(\chi) = (-\chi(-1))^{\omega(N)} \prod_{q|N} (q-1)^{-1},$$

где $\omega(n)$ — количество простых делителей n без учета кратности. Можно доказать, что

если $(N, 6) = 1$, то при $x \rightarrow \infty$ с некоторыми постоянными C и $C(\chi)$ справедливо следующее равенство

$$S(x, r, \varphi) = \frac{Cx}{\ln^{1-\lambda} x} + \sum_{\chi \neq \chi_0} \frac{C(\chi)x}{(\ln x)^{1-z(\chi)}} + O\left(\frac{x}{(\ln x)^{2-\lambda}}\right).$$

Это равенство дает лемма 3 при выборе $n = 1$. Но можно выбрать любое $n \geq 1$ и получить более точное равенство.

Такому же уточнению могут быть подвергнуты все асимптотические формулы, встречающиеся в работах [1, 2, 6, 8].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Sathe L. G. On a congruence property of the divisor functions // Amer. J. Math. 1945. V. 67. P. 397–406.
2. Rankin R. A. The distribution of divisor functions // Proc. Glasgow Math. Assoc. 1961. V. 5. No 1. P. 35–40.
3. Niven I. Uniform distribution of sequences of integers // Trans. Amer. Math. Soc. 1961. V. 98. P. 52–61.
4. Kuipers L., Niederreiter H. Uniform distribution of sequences. New-York: Wiley-Interscience, 1974. Русский перевод: Кейперс Л., Нидеррейтер Г. Равномерное распределение последовательностей. М.: Наука, 1985.
5. Uchiyama S. On the uniform distribution of sequences of integer // Proc. Japan Acad. 1961. V. 37. P. 605–609.
6. Narkiewicz W. On distribution of values of multiplicative functions in residue classes // Acta Arithm. 1967. V. 12. No 3. P. 269–279.
7. Šliva J. On distribution of values of $\sigma(n)$ in residue classes // Colloq. Math. 1973. V. 27. No 2. P. 283–271.

8. Фоменко О. М. Распределение значений мультипликативных функции по простому модулю // Записки науч. сем. ЛОМИ. 1980. Т. 93. С. 218–224.
9. Широков Б. М. Распределение значений арифметических функций в классах вычетов // Записки науч. сем. ЛОМИ. 1983. Т. 121. С. 176–186.
10. Широков Б. М. Распределение $d(n, \omega)$ в классах вычетов // Труды ПетрГУ. Серия математика. 1995. Вып. 2. С. 136–144.
11. Широков Б. М. Распределение значений обобщенной суммы делителей // Труды ПетрГУ. Серия математика. 1996. Вып. 3. С. 176–189.
12. Delange H. Sur la distribution des entiers ayant certaines proprietes // Ann. Sci. Ecole norm. super. 1956. V. 73. No 1. P. 15–74.
13. Shirokov B. M., Gromakovskaya L. A. Distribution of values of the sum of unitary division in residue classes // Issues of Analysis. 2016. V. 5(23). No 1. P. 31–44.
14. Sandor J. Note on Jordan's arithmetical function // Octagon Math. Mag. 1993. V. 1. P. 1–4.
15. Shulte J. Uber die Jordansche Verallgemeinerung der Eulerschen Funktion // Resultate der Mathematik. 1999. V. 36. No. 3/4. P. 354–364.
16. Andrica D., Piticary M. On some extensions of Jordan arithmetic Functions // Acta. Univ. Apulensis Math. Inform. 2004. V. 7. P. 13–22.
17. Прахар К. Распределение простых чисел. М.: Мир, 1967.

REFERENCES

1. Sathe, L. G. 1945, "On a congruence property of the divisor functions *Amer. J. Math.*, V. 67, pp. 397–406.
2. Rankin, R. A. 1961, "The distribution of divisor functions *Proc. Glasgow Math. Assoc.*, V. 5, No 1, pp. 35–40.
3. Niven, I. 1961, "Uniform distribution of sequences of integers *Trans. Amer. Math. Soc.*, V. 98, pp. 52–61.
4. Kuipers, L., Niederreiter, H. 1974, *Uniform distribution of sequences*. Wiley-Interscience, New-York, 390 pp.
5. Uchiyama, S. 1961, "On the uniform distribution of sequences of integer *Proc. Japan Acad.*, V. 37, pp. 605–609.
6. Narkiewicz, W. 1967, "On distribution of values of multiplicative functions in residue classes *Acta Arithm.*, V. 12, No 3, pp. 269–279.
7. Šliva, J. 1973, "On distribution of values of $\sigma(n)$ in residue classes *Colloq. Math.*, V. 27, No 2, pp. 283–271.
8. Fomenko, O. M. 1980, "Distribution of values of the multiplicative functions prime modulo" ["Распределение значений мультипликативных функций по простому модулю"], *Zapisky nauch. sem. LOMI*, V. 93, pp. 218–224.

9. Shirokov, B. M. 1983, "Distribution of values arithmetical functiones in residue classes" ["Распределение значений арифметических функций в классах вычетов"], *Zapisky nauch. sem. LOMI*, V. 121, pp. 176–186.
10. Shirokov, B. M. 1995, "Distribution of $d(n, \omega)$ in residue classes" ["Распределение $d(n, \omega)$ в классах вычетов"], *Tudy PetrSU. Ser. Math.*, Issue 2, pp. 136–144.
11. Shirokov, B. M. 1996, "Distribution of values of the extended sum of divisors" ["Распределение значений обобщенной суммы делителей"], *Tudy PetrSU. Ser. Mathematic.*, Issue 3, pp. 176–189.
12. Delange, H. 1956, "Sur la distribution des entiers ayant certaines proprietes", *Ann. Sci. Ecole norm. super.*, V. 73, No 1, pp. 15–74.
13. Shirokov, B. M., Gromakovskaya, L. A. 2016, "Distribution of values of the sum of unitary division in residue classes", *Issues of Analysis*, V. 5(23), No 1, pp. 31–44.
14. Sandor, J. 1993, "Note on Jordan's arithmetical function", *Octogon Math. Mag.*, V. 1, pp. 1–4.
15. Shulte, J. 1999, "Uber die Jordansche Verallgemeinerung der Eulerschen Funktion", *Resultate der Mathematik*, V. 36, No. 3/4, pp. 354–364.
16. Andrica, D., Piticary, M. 2004, "On some extensions of Jordan arithmetic Functions", *Acta. Univ. Apulensis Math. Inform.*, V. 7, pp. 13–22.
17. Prachar, K., 1967, "Распределение простых чисел.", (russian) [Distribution of prime numbers] Translated from Deutsch by A. A. Karacuba. Edited by A. I. Vinogradov. With two supplements by M. B. Barban and A. I. Vinogradov, and N. M. Korobov *Izdat. "Mir"*, Moscow 512 pp.

Получено 7.12.2017 г.

Принято в печать 12.07.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 2.

УДК 519.1

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-140-155

Конусы и многогранники обобщенных метрик

Е. И. Де́за

Де́за Елена Ивановна — доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, доцент, профессор кафедры теоретической информатики и дискретной математики, Московский педагогический государственный университет (г. Москва).

e-mail: elena.deza@gmail.com

Аннотация

В данной работе рассмотрены проблемы, связанные с построением и исследованием конусов и многогранников обобщенных метрических структур: конечных квазиполуметрик, которые являются несимметричными аналогами классических — симметричных — полуметрик, и конечных m -полуметрик, которые являются многомерными аналогами классических — двумерных — полуметрик.

Во введении рассмотрена история вопроса, приведены примеры использования метрик, квазиметрик и m -метрик в математике и ее приложениях, дан обзор основных идей и результатов, представленных в статье.

В первом разделе даны определения рассматриваемых в работе обобщенных метрических структур: конечных метрики и полуметрики, их ориентированных аналогов — конечных квазиметрики и квазиполуметрики, и их многомерных аналогов — конечных m -метрики и m -полуметрики.

Во втором разделе приведены классические примеры соответствующих обобщенных метрических структур. Именно, понятие метрики продемонстрировано на четырех базовых примерах (дискретная метрика — метрика Хаусдорфа — метрика симметрической разности — метрика пути связного графа). Для ориентированного случая представлены четыре соответствующих квазиметрики, в то время как для многомерного случая построены четыре соответствующих m -метрики.

В третьем разделе рассмотрен интересный пример одного специального случая квазиметрики: среднее время первого прохода для цепей Маркова. В ходе анализа свойств указанной структуры продемонстрирована ее связь со взвешиваемыми квазиметриками и частичными метриками, а также с другими, достаточно экзотичными, метрическими объектами.

В четвертом разделе введены понятия важнейших частных случаев полуметрики: разреза и мультиразреза. Построены их ориентированные и многомерные аналоги: ориентированные разрезы и ориентированные мультиразрезы, а также m -полуметрики разбиений.

В пятом разделе осуществлено построение конусов и многогранников рассмотренных обобщенных метрических структур. Рассмотрены метрический и разрезный конусы и многогранники на конечном числе точек. Построены ориентированные и многомерные аналоги указанных конусов и многогранников. Выделены свойства, связывающие указанные классы обобщенных дискретных метрических структур. Особое внимание уделено симметриям построенных конусов. Представлены результаты вычислений, посвященных конусам полуметрик, разрезов, квазиполуметрик, ориентированных разрезов, ориентированных мультиразрезов, m -полуметрик и m -полуметрик разбиений на малом числе вершин (на 3, 4, 5 и 6 точках). Указаны размерность объекта, число экстремальных лучей (вершин) и их орбит, число гиперграней и их орбит, диаметры скелетона и реберного графа.

В заключении представлены выводы исследования.

Ключевые слова: Полуметрика, разрез, мультиразрез, конусы и многогранники полуметрик и разрезов, квазиполуметрика, ориентированные разрез и мультиразрез, конусы и многогранники квазиполуметрик, ориентированных разрезов и мультиразрезов, m -полуметрика, m -полуметрика разбиения, конусы и многогранники m -полуметрик и m -полуметрик разбиений.

Библиография: 29 названий.

Для цитирования:

Е. И. Деца. Конусы и многогранники обобщенных метрик // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 2, с. 140–155.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 2.

UDC 519.1

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-140-155

Cones and polytopes of geleralized metrics

E. I. Deza

Deza Elena Ivanovna — doctor of pedagogical Sciences, candidate of physical and mathematical Sciences, associate Professor, Professor of the Department of theoretical Informatics and discrete mathematics, Moscow State Pedagogical University (Moscow).

e-mail: elena.deza@gmail.com

Abstract

In this paper the problems of construction and research of cones and polytopes of generalized metric structures are considered: finite quasisemimetrics, which are oriented analogs of classical — symmetric — case of semimetrics, and finite m -semimetrics, which are multidimensional analogs of classical — two-dimensional — case of semimetrics.

In the introduction the background of the research is considered, examples of use of metrics, quasimetrics and m -metrics in Mathematics and in Applications are given, a review of main ideas and results presented in the article is represented.

In the first section definitions of main generalized metric structures considered in the paper are given: finite metrics and semimetrics, their oriented analogs — finite quasimetrics and quasisemimetrics, and their multidimensional analogs — finite m -metrics and m -semimetrics.

In the second section classical examples of the corresponding generalized metric structures are given. The concept of a metric is shown by four basic examples (discrete metric — Hausdorff metric — symmetric difference metric — path metric of connected graphs). For the oriented case four corresponding quasimetrics are presented, while for the multidimensional case four corresponding m -metrics are constructed.

In the third section an interesting example of a special case of quasimetrics is reviewed: the mean first passage time for Markov's chains. During the analysis of properties of this special structure its connections with weightable quasimetrics, partial metrics and other, rather exotic, metric structures are shown.

In the fourth section the most important special cases of semimetrics are considered: cuts and multicuts. Their oriented and multidimensional analogs are constructed: oriented cuts, oriented multicuts and also partition m -semimetrics.

In the fifth section creation of cones and polytopes of the considered generalized metric structures is carried out. Metric and cut cones and polytopes on n points are considered. The oriented and multidimensional analogs of these cones and polytopes are constructed. The properties of these classes of generalized discrete metric structures are marked out.

Special attention is paid to the questions of symmetries of the constructed objects. Results of the calculations devoted to cones of semimetrics, cuts, quasisemimetrics, oriented cuts and multicuts, m -semimetrics and partition m -semimetrics on small number of points (3, 4, 5 and 6 points) are presented. In fact, the dimension of an object, the number of its extreme rays (vertices) and their orbits, the number of its facets and their orbits, the diameters of the skeleton and the the ridge graph of the constructed cones and polyhedrons are specified.

In the conclusion the main research results are presented.

Keywords: Semimetric, cut, multicut, cones and polytopes of semimetrics and cuts, quasisemimetric, oriented cut and multicut, cones and polytopes of quasisemimetrics, oriented cuts and multicuts, m -semimetric, partition m -semimetric, cones and polytopes of m -semimetrics and partition m -semimetrics.

Bibliography: 29 titles.

For citation:

Е. И. Деца, 2019, "Cones and polytopes of gederalized metrics", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 2, pp. 140–155.

1. Введение

Понятие расстояния является одним из основных во всей человеческой деятельности. В повседневной жизни термин *расстояние* обычно означает некоторую степень близости двух физических объектов или идей, в то время как термин *метрика* чаще используется как стандартное понятие меры или измерения. В нашей работе рассматривается математическое значение этих терминов, которое представляет собой абстракцию измерения.

Математические понятия метрики на множестве X как функции $d(x, y)$ из $X \times X$ в $\mathbb{R}$, удовлетворяющей условиям $d(x, y) \geq 0$ с равенством только при $x = y$, $d(x, y) = d(y, x)$ и $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, и метрического пространства (X, d) были введены в обращение в начале двадцатого века М. Фреше (в 1906 г.) и Ф. Хаусдорфом (в 1914 г.), прежде всего - в качестве специального случая бесконечного топологического пространства. Впрочем, упомянутое выше неравенство треугольника $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ можно найти уже у Евклида. В дальнейшем те или иные бесконечные метрические пространства появлялись в различных приложениях обычно как обобщения естественной метрики $|x - y|$ на множестве действительных чисел. Основными их классами стали измеримые пространства (добавим меру) и банаховы пространства (добавим норму и полноту).

Однако, начиная с К. Менгера (который в 1928 г. ввел понятие метрического пространства в геометрию) и особенно Л. М. Блюменталю (1953 г.), резко повысился интерес к конечным метрическим пространствам. Другой тенденцией стало то, что многие математические теории в процессе их обобщения стабилизировались именно на уровне метрического пространства ([19, 13, 16, 27]).

Этот процесс продолжается и сейчас. Метрики и расстояния стали важным инструментом исследований в самых разных областях математики и ее приложений, включая геометрию, теорию вероятностей, статистику, теорию кодирования, теорию графов, кластерный анализ, анализ данных, распознавание образов, теорию сетей, математическую инженерию, компьютерную графику, машинное зрение, астрономию, космологию, молекулярную биологию и многие другие отрасли науки. Создание наиболее удобных метрик стало центральной задачей для многих исследователей. Особенно интенсивно ведутся поиски таких расстояний, в частности, в математической биологии, сфере распознавании речи и образов. Нередки случаи, когда одни и те же метрики появляются независимо друг от друга в совершенно разных сферах ([13]).

В частности, к центральным объектам дискретной математики принадлежат метрический и разрезной конусы ([19, 16]). Проблема максимального разреза, состоящая в нахождении для

данного графа разреза максимального веса, является одной из наиболее значимых в комбинаторной оптимизации и имеет множество применений, в том числе в статистической механике.

Представляют значительный интерес и другие полиэдральные конструкции, связанные с конечными метриками, их аналогами и обобщениями: квазиметриками (несимметричный случай), m -метриками (многомерный случай) и т.д.

В данной статье мы даем обзор вопросов, касающиеся конусов и многогранников обобщенных метрических структур: конечных полуметрик и разрезов, квазиполуметрик, ориентированных разрезов и мультиразрезов, других ориентированных объектов, родственных метрикам, и соответствующую многомерную теорию, в том числе анализируем результаты машинных вычислений, полученные для таких конусов небольших размеров (см. [16, 19, 20, 17] и др.).

2. Основные определения: полуметрики и их ориентированные и многомерные аналоги

В этом разделе мы даем все основные определения, необходимые в дальнейшем.

- *Метрикой* на n точках называется функция $d : \{1, \dots, n\}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, для всех $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$ удовлетворяющая условиям $d(i, i) = 0$; $d(i, j) \neq 0$ при $i \neq j$; $d(i, j) = d(j, i)$ (*симметричность*); $d(i, k) \leq d(i, j) + d(j, k)$ (*неравенства треугольника*).

При построении полиэдральных конструкций значительно удобнее пользоваться следующим ослабленным аналогом понятия метрики.

- *Полуметрикой* на n точках называется симметричная функция $d : \{1, \dots, n\}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, для всех $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$ удовлетворяющая условиям $d(i, j) = 0$ и неравенствам треугольника $d(i, k) \leq d(i, j) + d(j, k)$.

Говоря коротко, полуметрика - это метрика, позволяющая расстояние "ноль" между различными точками.

Метрики были введены в начале 20-го века Фреше и Хаусдорфом ([23], [25]; см. историю вопроса в [13]). Первое исследование конечных метрик принадлежит Блюменталю. Обширная библиография и детальный обзор имеющийся в этой области литературы дан в [19].

Одним из возможных обобщений метрик (полуметрик) являются квазиметрики (квазиполуметрики), представляющие собой аналогичные, но несимметричные конструкции.

- *Квазиметрикой* на n точках называется функция $q : \{1, \dots, n\}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, для всех $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$ удовлетворяющая условиям $q(i, i) = 0$; $q(i, j) \neq 0$ при $i \neq j$; $q(i, k) \leq q(i, j) + q(j, k)$ (*ориентированные неравенства треугольника*).

Другими словами, квазиметрика не обязана удовлетворять условию симметричности $q(i, j) = q(j, i)$.

- *Квазиполуметрикой* q на n точках называется функция $q : \{1, \dots, n\}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, для всех $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$ удовлетворяющая условиям $q(i, i) = 0$ и ориентированным неравенствам треугольника $q(i, k) \leq q(i, j) + q(j, k)$.

Следовательно, квазиполуметрика - это "несимметричная полуметрика", или, что то же, "несимметричная метрика, позволяющая значение ноль на различных точках".

Квазиметрики были введены Хаусдорфом ([25]). Их топология рассматривалась, начиная с Вильсона ([29]). Конусы и многогранники квазиполуметрик изучались в [17, 14, 15, 20, 13].

Для нашего исследования представляет интерес еще одно обобщение метрик (полуметрик): так называемые m -метрики (m -полуметрики), являющиеся многомерными аналогами классического двумерного случая.

- *m -метрикой* на n точках называется функция $d : \{1, \dots, n\}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, для всех $x_1, \dots, x_{m+2} \in \{1, \dots, n\}$ удовлетворяющая условиям $d(x_1, \dots, x_1) = 0$ (*положительная определенность*); $d(x_1, \dots, x_{m+1}) = d(\pi(x_1), \dots, \pi(x_{m+1}))$ для любой перестановки π множества

$\{x_1, \dots, x_{m+1}\}$ (*тотальная симметрия*); $d(x_1, \dots, x_{m+1}) \leq \sum_{i=1}^{m+1} d(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{m+2})$ (*неравенства m -симплекса*).

Ослабленная версия m -метрики, более подходящая для построения полиэдральных конструкций, выглядит так.

- *m -полуметрикой* на n точках называется функция $d : \{1, \dots, n\}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, для всех $x_1, \dots, x_{m+2} \in \{1, \dots, n\}$ удовлетворяющая условиям $d(x_1, \dots, x_{m+1}) = 0$ в случае если $x_1, \dots, x_{m+1}$ не являются попарно различными (*слабая положительная определенность*); $d(x_1, \dots, x_{m+1}) = d(\pi(x_1), \dots, \pi(x_{m+1}))$ для любой перестановки π множества $\{x_1, \dots, x_{m+1}\}$ (*тотальная симметрия*); $d(x_1, \dots, x_{m+1}) \leq \sum_{i=1}^{m+1} d(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{m+2})$ (*неравенства m -симплекса*).

m -полуметрики были введены в [21].

3. Классические примеры полуметрик и их ориентированных и многомерных аналогов

Рассмотрим ряд базовых примеров, иллюстрирующих формальные определения предыдущего раздела.

- *Дискретная метрика*. Для данного множества X , *дискретная метрика* — метрика на X , определенная как

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \neq y, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

- *Метрика Хаусдорфа*. Пусть (X, D) — конечное метрическое пространство и $X = X_1 \cup \dots \cup X_n$ — разбиение X . *Метрика Хаусдорфа* — метрика на $Y = \{X_1, \dots, X_n\}$, определенная как

$$d(X_i, X_j) = \max_{x \in X_i, y \in X_j} D(x, y).$$

- *Метрика симметрической разности*. Для заданной антицепи множеств

$$Z = \{x, y, z, \dots \mid x \not\subseteq y \text{ для любых } x \neq y\},$$

метрика симметрической разности — метрика на Z , определенная как

$$d(x, y) = |x \Delta y|.$$

Она равна числу элементов в *симметрической разности* $x \Delta y = (x \setminus y) \cup (y \setminus x)$ множеств x и y из Z .

- *Метрика пути связного графа*. Для связного графа $G = (V, E)$ *метрика пути* d_{path} — метрика на множестве V его вершин, определенная для любых $u, v \in V$ как длина кратчайшего $(u-v)$ пути в G . *Взвешенная метрика пути* d_{wpath} — метрика на множестве вершин V связного взвешенного графа $G = (V, E)$ с положительными весами ребер $(w(e))_{e \in E}$, определенная как $\min_P \sum_{e \in P} w(e)$, где минимум берется по всем $(u-v)$ путям P в G .

Перейдем к рассмотрению соответствующих примеров для ориентированного случая.

- *Дискретная квазиполуметрика*. Пусть $X = \{1, 2, \dots, n\}$. *Дискретная квазиполуметрика* — квазиполуметрика на X , определенная как

$$q(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x > y, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

• *Квазиметрика Хаусдорфа.* Пусть (X, D) — конечное метрическое пространство, и $X = X_1 \cup \dots \cup X_n$ — разбиение X . *Квазиметрика Хаусдорфа* — квазиметрика на $Y = \{X_1, \dots, X_n\}$, определенная как

$$q(X_i, X_j) = \min_{x \in X_i} \max_{y \in X_j} D(x, y).$$

• *Квазиполуметрика асимметричной разности.* Для заданной антицепи множеств

$$Z = \{x, y, z, \dots \mid x \not\subset y \text{ для любых } x \neq y\},$$

квазиполуметрика симметрической разности — квазиполуметрика на Z , определенная как

$$q(x, y) = |x \setminus y|.$$

Она равна числу элементов в *асимметрической разности* $x \setminus y$ множеств x и y из Z .

• *Квазиметрика пути в орграфе.* Для сильно связного ориентированного графа $\Gamma = (V, E)$ *квазиметрика пути* d_{orpath} — квазиметрика на множестве V его вершин, определенная для любых $u, v \in V$ как длина кратчайшего ориентированного $(u - v)$ пути в Γ .

Наконец, рассмотрим еще четыре примера — они иллюстрируют соответствующие метрические структуры для многомерного случая.

• *Дискретная 2-метрика.* Для заданного множества X , $|X| \geq 4$, *дискретная 2-метрика* — 2-метрика на X , определенная как

$$d(x, y, z) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = y, \text{ или } y = z, \text{ или } x = z, \\ 1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

• *2-метрика Хаусдорфа.* Пусть (X, D) — конечное метрическое пространство, и $X = X_1 \cup \dots \cup X_n$ — разбиение X . *2-метрика Хаусдорфа* — 2-метрика на $Y = \{X_1, \dots, X_n\}$, определенная как

$$d(X_i, X_j, X_k) = \frac{1}{3} \left(\max_{x \in X_i, y \in X_j} D(x, y) + \max_{x \in X_i, y \in X_k} D(x, y) + \max_{x \in X_k, y \in X_j} D(x, y) \right).$$

• *2-полуметрика симметрической разности.* Для заданной антицепи множеств

$$Z = \{x, y, z, \dots \mid x \not\subset y \text{ для всех } x \neq y\},$$

2-метрика симметрической разности — 2-метрика на Z , определенная как

$$d(x, y, z) = \frac{1}{2}(|x \Delta y| + |y \Delta z| + |x \Delta z|);$$

это число элементов, которые принадлежат x, y или z , но не всем трем множествам x, y, z .

• *2-метрика пути в гиперграфе.* Если перейти от понятия графа к понятию гиперграфа, в котором "гиперребрами" будут связаны не пары вершин, а их тройки, то мы получим естественное обобщение метрики пути в графе, представляющее собой 2-метрику. Предлагаем читателю проделать эту операцию самим.

Мы привели три группы примеров по четыре примера в каждой группе: для классического симметрического двумерного случая, для ориентированного случая и для трехмерного (многомерного) случая. Заинтересованный читатель может рассмотреть свои примеры, в частности, l_1 - и l_2 - и l_∞ -метрики на $\mathbb{R}^n$, и построить их ориентированные аналоги. Эти построения, как и множество других интересных объектов, можно найти в [16] и [13].

4. Специальный пример: среднее время первого прохода для цепей Маркова

В этом разделе мы рассмотрим одну обобщенную метрическую конструкцию, которая естественным образом, но тем не менее достаточно неожиданно, возникает в приложениях математической кибернетики.

Пусть $T = ((t_{ij})) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – матрица перехода эргодической однородной цепи Маркова с состояниями $1, 2, \dots, n$. Тогда T – стохастическая матрица (см., например, [2, 3, 4, 8]).

Определим *среднее время первого прохода* из состояния i в состояние j как

$$m_{ij} = E(F_{ij}) = \sum_{k=1}^{\infty} k \Pr(F_{ij} = k),$$

где $E(\cdot)$ – математическое ожидание, а $F_{ij} = \min\{p \geq 1 : X_p = j \mid X_0 = i\}$.

Среднее время первого прохода можно рассматривать как квазиметрику на множестве вершин орграфа Γ , соответствующего цепи Маркова с матрицей перехода T . Именно, пусть Γ – взвешенный орграф без петель, вершины которого равны $1, 2, \dots, n$, а веса дуг равны соответствующим вероятностям перехода в T . В этом случае мы говорим о *квазиметрике среднего времени первого прохода* m на $V = \{1, 2, \dots, n\}$, такой, что $m(i, j) = m_{ij}$ – ожидаемое количество шагов (дуг) для случайного блуждания на Γ , начинающегося с i , для достижения j в первый раз; это 0 для $i = j$ (см. [8]).

Метрика коммутирующего времени первого прохода c на V определяется теперь как $c(i, j) = m(i, j) + m(j, i)$. Коммутирующее время $c(i, j)$ первого прохода – среднее число шагов, которые совершают при случайном блуждании, чтобы достичь j от i и вернуться к i .

Существует естественная связь между случайными блужданиями на графах и электрическими сетями (см., например, [22]). Пусть дан взвешенный связный неориентированный граф G ; базовая электрическая сеть, соответствующая G , представляет собой сеть, полученную путем замены вершин и ребер данного графа узлами и электрическими резисторами, соответственно. Вес ребер соответствует проводимости. *Эффективное сопротивление* $\Omega(i, j)$ между любыми двумя узлами i и j определяется как напряжение, которое образуется между i и j , когда единица тока проходит через них (т.е. входит в один и покидает другой узел). Очевидно, что для всех узлов i, j, k имеют место следующие соотношения: $\Omega(i, j) \geq 0$, $\Omega(i, j) = 0$ тогда и только тогда, когда $i = j$, $\Omega(i, j) = \Omega(j, i)$. Легко показать ([28, 24]), что $\Omega(i, j) + \Omega(j, k) \geq \Omega(i, k)$. Таким образом, Ω является метрикой, называемой *метрикой сопротивления* ([26]).

Нетрудно доказать, что расстояние сопротивления на G тесно связано с квазиметрикой среднего времени первого прохода достаточно простой формулой, использующей *матрицу Лапласа* графа G (см., например, [8]).

Простейший пример квазиметрики среднего времени первого прохода может быть получен для *простого случайного блуждания* по связному невзвешенному графу G , в котором из любой вершины графа существует равная вероятность перемещения в любую соседнюю вершину.

Это означает, что мы строим из связного графа G с множеством вершин $V = \{1, 2, \dots, n\}$ орграф Γ на том же множестве вершин V ; две вершины i и j связаны дугами ij и ji в Γ тогда и только тогда, когда они образуют ребро ij в G . Если степень вершины $i \in V$ равна $d(i)$ в G , то вес всех дуг ik в Γ равен $\frac{1}{d(i)}$. Итак, Γ – взвешенный орграф без циклов, множество вершин которого совпадает с множеством состояний цепи Маркова простого случайного блуждания, а веса дуг равны соответствующим вероятностям перехода.

Оказывается, что в этом случае квазиметрика m является *взвешиваемой квазиметрикой* (см. [16, 14, 15, 13]), т.е. существует *весовая функция* $w: V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, такая, что для всех $i, j \in V$ имеет место соотношение $m(i, j) + w_i = m(j, i) + w_j$.

Метрика коммутирующего времени первого прохода c на V имеет теперь форму $c(i, j) = t(i, j) + t(j, i) = 2t(i, j) + w_i - w_j$. В этом случае пара (c, w) является взвешенной метрикой на V , т.е. метрикой с весовой функцией $w : V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, такой, что условие взвешенности снизу $c(i, j) \geq w_i - w_j$ выполнено ([16], глава 6). Кроме того, функция p , $p(i, j) = t(i, j) + w_i = \frac{c(i, j) + w_i + w_j}{2}$, окажется в этом случае частичной метрикой на V ([16]), поскольку для всех $i, j, k \in V$ имеют место следующие соотношения: $p(i, j) \geq 0$; $p(i, j) \geq p(i, i)$; $p(i, i) = p(j, j) = p(i, j) \Rightarrow i = j$; $p(i, j) = p(j, i)$ (симметрия); $p(i, j) \leq p(i, k) + p(k, j) - p(k, k)$ (острое неравенство треугольника).

Легко проверить, что

$$\begin{aligned} 0,5(c(i, j) + c(i, k) - c(j, k)) &= p(i, j) + p(i, k) - p(j, k) - p(i, i) = \\ &= t(j, i) + t(i, k) - t(j, k), \end{aligned}$$

т.е. неравенства треугольника эквивалентны на всех трех уровнях: взвешенной метрики c , частичной метрики p , и взвешиваемой квазиметрики t .

Более того,

$$t(i, j) \geq 0 \Leftrightarrow c(i, j) \geq w_i - w_j \Leftrightarrow p(i, j) \geq p(i, i).$$

Таким образом, условие неотрицательности $t(i, j) \geq 0$ для (взвешиваемой) квазиметрики t эквивалентно условию взвешиваемости снизу $c(i, j) \geq w_i - w_j$ для взвешенной метрики c , и условию маленьких саморасстояний $p(i, j) \geq p(i, i)$ для частичной метрики p .

Квазиметрика среднего времени первого прохода t тесно связана с другими метрическими структурами на графах.

При $\alpha > 0$ связный взвешенный мультиграф (допускается использование параллельных ребер) $G = (V, E; w)$ с положительной реберной весовой функцией $w = (w(e))_{e \in E}$ обладает α -метрикой леса $forest^\alpha$ ([9, 10]). Метрика леса $forest$ ([11]) – это частный случай $\alpha = 1$ для α -метрики леса. С α -метрикой леса тесно связана и нормализованная α -метрика леса $\rho^\alpha(u, v)$; она пропорциональна α -метрике леса, но в ряде случаев более удобна для приложений.

Эти метрические структуры обладают рядом интересных и полезных свойств.

Так, можно показать ([9, 10]), что увеличенная в два раза α -метрика леса на G является метрикой сопротивления связного взвешенного мультиграфа $G' = (V', E'; w')$, где $V' = V \cup \{0\}$, $E' = E \cup \{u0 : u \in V\}$, а $w'(e) = \alpha w(e)$ для всех $e \in E$, и $w'(u0) = 1$ для всех $u \in V$.

Известно ([9]), что для $\alpha \rightarrow 0$ мы получаем из d^α дискретную метрику $d^0(i, i) = 0$, $d^0(i, j) = 1$, $i \neq j$; более того, мы получаем из ρ^α недискретную полуметрику $\rho^0(i, j) \equiv 0$. Для $\alpha \rightarrow +\infty$ мы получаем (в случае связного графа) из d^α недискретную полуметрику $d^0(i, j) \equiv 0$, и мы получаем из ρ^α метрику сопротивления.

В случае орграфов мы можем получить аналогичное построение. На самом деле, мы можем попытаться использовать рекуррентную процедуру построения матрицы среднего времени первого прохода ([8]) в качестве основы для построения (q, α) -квазиметрики леса $qforest^\alpha$ и нормализованной (q, α) -метрики леса $q\rho^\alpha$ на G .

5. Разрезы, мультиразрезы и их ориентированные и многомерные аналоги

Среди огромного числа различных полуметрик особую роль играют так называемые разрезы и мультиразрезы.

- Разрезом на n точках для множества $S \subseteq \{1, \dots, n\}$ называется функция

$$\delta_S : \{1, \dots, n\}^2 \rightarrow \mathbb{R},$$

определенная по закону

$$\delta_S(i, j) = \begin{cases} 1, & \text{если } |S \cap \{i, j\}| = 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Легко проверить, что любой разрез является полуметрикой.

- *Мультиразрезом* (точнее, *m-мультиразрезом*) на n точках для разбиения

$$\cup_{i=1}^m S_i = \{1, \dots, n\}$$

называется функция $\delta_{S_1, \dots, S_m} : \{1, \dots, n\}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, определенная по закону

$$\delta_{S_1, \dots, S_m}(i, j) = \begin{cases} 1, & \text{если } i \in S_a, j \in S_b, \text{ и } a \neq b, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Очевидно, что 2-мультиразрезы совпадают с разрезами. Более того, любой мультиразрез можно представить в виде неотрицательной линейной комбинации разрезов: $\delta_{S_1, \dots, S_m} = \sum_{i=1}^m \delta_{S_i, \bar{S}_i}$.

Число всех мультиразрезов на n точках представляет собой *число Белла* $B(n)$, то есть число всех разбиений n -множества.

Ориентированные разрезы и мультиразрезы являются, в свою очередь, специальным случаем квазиполуметрик, несимметричным аналогом разрезов и мультиразрезов.

- *Ориентированным разрезом* на n точках для множества $S \subseteq \{1, \dots, n\}$ называется функция $\delta'_S : \{1, \dots, n\}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, определенная по закону

$$\delta'_S(i, j) = \begin{cases} 1, & \text{если } i \in S, j \notin S, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Легко проверить, что любой ориентированный разрез является квазиполуметрикой.

- *Ориентированным мультиразрезом* (точнее, *ориентированным m-мультиразрезом*) для ориентированного разбиения $\cup_{i=1}^m S_i = \{1, \dots, n\}$ множества $\{1, \dots, n\}$ на m частей $S_1, \dots, S_m$ называется функция $\delta'_{S_1, \dots, S_m} : \{1, \dots, n\}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, определенная по закону

$$\delta'_{S_1, \dots, S_m}(i, j) = \begin{cases} 1, & \text{если } i \in S_a, j \in S_b, \text{ и } a < b, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Очевидно, что ориентированные 2-мультиразрезы совпадают с ориентированными разрезами: $\delta'_S = \delta'_{S, \bar{S}}$. Однако, в отличие от симметричного случая, не каждый ориентированный мультиразрез (даже в простейшем случае $n = 3$) можно представить в виде линейной комбинации ориентированных разрезов.

Число всех ориентированных мультиразрезов на n точках представляет собой *число Фубини* (*упорядочное число Белла*) $p'(n)$, то есть число всех упорядоченных разбиений множества $\{1, \dots, n\}$; оно равно $\sum_{\pi \in \text{Sym}(n)} 2^{D(\pi)}$, где $D(\pi) = |\{i \leq n : a_i > a_{i+1}\}|$ для перестановки $\pi = (a_1, \dots, a_n) \in \text{Sym}(n)$.

m -полуметрики разбиений представляют собой многомерный аналог двумерного мультиразреза.

- Для $(m+1)$ -разбиения $S_1, \dots, S_{m+1}$ множества $\{1, \dots, n\}$ *m-полуметрикой разбиения* называется функция $\alpha_{S_1, \dots, S_{m+1}} : \{1, \dots, n\}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}$, определенная по закону

$$\alpha_{S_1, \dots, S_{m+1}}(i_1, \dots, i_{m+1}) = \begin{cases} 1, & \text{если } i_1 \in S_{\alpha_1}, \dots, i_{m+1} \in S_{\alpha_{m+1}}, \alpha_k \neq \alpha_t \text{ для } k \neq t, \\ 0, & \text{если } i_k, i_t \in S_{\alpha} \text{ для некоторого } k \neq t, 1 \leq \alpha \leq m+1. \end{cases}$$

Другими словами, величина $\alpha_{S_1, \dots, S_{m+1}}(i_1, \dots, i_{m+1})$ равна 1, если для всех $1 \leq j < l \leq m+1$ элементы i_j и i_l принадлежат разным подмножествам разбиения, и равна 0 во всех остальных случаях. Легко видеть, что $\alpha_{S_1, \dots, S_{m+1}}$ является m -полуметрикой. Для $m = 1$ она превращается в обычный разрез (см., например, [19]).

6. Конусы и многогранники обобщенных дискретных метрических структур

Центральным разделом теории конечных полуметрик являются задачи комбинаторной оптимизации, решаемые полиэдральным методом, ведущим к построению соответствующих конусов и многогранников.

В данной работе мы дадим обзор конусов и многогранников соответствующих конечных полуметрик и их ориентированных и многомерных аналогов. Более подробную информацию об этих и других обобщенных метрических структурах можно найти в [16].

- *Метрическим конусом* на n точках MET_n называется множество всех полуметрик на $\{1, \dots, n\}$.

- *Разрезным конусом* (или *конусом разрезов*) на n точках CUT_n называется коническая оболочка (множество всех линейных комбинаций с неотрицательными коэффициентами) всех $2^{n-1} - 1$ ненулевых разрезов на $\{1, \dots, n\}$.

Следует заметить, что разрезный конус CUT_n представляет собой множество n -точечных l_1 -полуметрик, то есть полуметрик, изометрически вложимых в пространство

$$l_1 = (\mathbb{R}^m, \|x - y\|_1)$$

с l_1 -нормой $\|z\|_1 = \sum_{i=1}^m |z_i|$. В пространстве меры величине $\|x - y\|_1$ соответствует $\mu(A \Delta B)$, где A, B — множества, представляющие x и y ([19]).

Конусы MET_n и CUT_n представляют собой полноразмерные конусы в $\mathbb{R}^{n(n-1)/2}$. Поскольку любой разрез является полуметрикой, то выполняется очевидное включение $CUT_n \subseteq MET_n$ с равенством лишь для $n = 3, 4$. Поскольку любой мультиразрез представляет собой неотрицательную линейную комбинацию разрезов, то говорить о конусе мультиразрезов смысла не имеет: коническая оболочка множества мультиразрезов является частью конуса CUT_n .

Полная группа симметрий конусов CUT_n и MET_n представляет собой группу $Sym(n)$ для $n \neq 4$ и группу $Sym(4) \times Sym(3)$ для $n = 4$.

- *Квазиметрическим конусом* на n точках $QMET_n$ называется множество всех квазиполуметрик на $\{1, \dots, n\}$.

- *Конусом ориентированных мультиразрезов* на n точках $OMCUT_n$ называется коническая оболочка всех $p'(n) - 1$ ненулевых ориентированных мультиразрезов на $\{1, \dots, n\}$. Пользуясь формулой $\delta_{S_1, \dots, S_m} = \delta'_{S_1, \dots, S_m} + \delta'_{S_m, \dots, S_1}$, мы получаем, что $CUT_n = \{q + q^T : q \in OMCUT_n\}$.

- *Конусом ориентированных разрезов* на n точках $OCUT_n$ называется коническая оболочка всех $2^n - 2$ ненулевых ориентированных разрезов на $\{1, \dots, n\}$.

Поскольку в несимметричном случае ориентированный мультиразрез может и не быть линейной комбинацией ориентированных разрезов, то конусы $OMCUT_n$ и $OCUT_n$ не совпадают.

Конус $OCUT_n$ представляет собой множество всех n -точечных l_1 -квазиполуметрик, то есть квазиполуметрик, вложимых в квазиметрическое пространство $(\mathbb{R}^m, \|x - y\|_{or,1})$ с *ориентированной l_1 -нормой* $\|z\|_{or,1} = \sum_{i=1}^m \max(z_i, 0)$. На пространстве меры величине $\|x - y\|_{or,1}$ соответствует $\mu(B \setminus A)$, где множества B, A представляют x, y ([17, 5]).

Конусы $QMET_n$ и $OMCUT_n$ являются полномерными конусами в пространстве $\mathbb{R}^{n(n-1)}$.

Кроме очевидных строгих включений $OCUT_n \subset OMCUT_n$, мы имеем, с равенством только для $n = 3$, включения $OMCUT_n \subseteq QMET_n$.

В [18] показано, что конус $OCUT_n$ (определенный на множестве $\{1, \dots, n\}$) есть проекция конуса CUT_{n+1} (определенного на $\{0, 1, \dots, n\}$), на подпространство, ортогональное к $\delta_{\{0\}}$.

Экстремальные лучи конуса $QMET_n$ исследовались в [17]. Здесь было доказано, что они не являются симметричными и имеют по меньше мере $n - 1$ нулей, то есть не могут быть

расстояниями на ориентированном графе. Ориентированные мультиразрезы соответствуют экстремальным лучам конуса $QMET_n$. Кроме того, расщепление экстремального луча вновь дает экстремальный луч.

В [17] была представлена и таблица несмежности гиперграней конуса $QMET_n$; было сделано предположение о том, что во всех остальных случаях гиперграни смежны, откуда следует, что диаметр скелетона дуального конуса $QMET_n^*$ равен 2. Диаметр скелетона $QMET_n$ равен 3 для $n = 4, 5$.

Существует предположение, что диаметры $OCUT_n$ и $OMCUT_n$ равны 1 и 2, соответственно. Более того, если $f \geq 0$ определяет гипергрань $OMCUT_n$, то нулевое расширение f в $OMCUT_{n+1}$ останется гипергранью, как и в классическом случае конуса разрезов CUT_n .

Группа $Sym(n)$ всех перестановок на n точках является группой симметрий конусов $QMET_n$ и $OMCUT_n$. Но существует и другая симметрия, называемая *реверселем*. Для осуществления операции реверселя нужно поставить в соответствие каждому лучу q луч q^T , определенный как $q_{ij}^T = q_{ji}$. (Другими словами, в матричных терминах реверсель соответствует транспонированию матриц.) Из этого факта следует, что группа $Z_2 \times Sym(n)$ также является группой симметрий для конусов $QMET_n$ и $OMCUT_n$. Мы предполагаем, что это их полная группа симметрий. Для конуса $OCUT_n$ этот факт доказан в [17].

- Конусом t -полуметрик $HMET_n^m$ называется множество всех t -полуметрик на n точках.

- Конусом t -полуметрик разбиений $HCUT_n^m$ называется коническая оболочка всех t -полуметрик разбиений на n точках.

Конусы $HMET_n^m$ и $HCUT_n^m$ являются полномерными конусами в пространстве $\mathbb{R}_n^{E^{m+1}}$.

Поскольку каждая t -полуметрика разбиений является t -полуметрикой, мы получаем, что

$$HCUT_n^m \subseteq HMET_n^m \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}^{E_n^{m+1}}.$$

Очевидно, что все грани конусов $HMET_n^m$ и $HCUT_n^m$ сохраняются при любой перестановке вершин. Из этого следует, что любая такая перестановка порождает симметрию конусов $HMET_n^m$ и $HCUT_n^m$, то есть группа $Sym(n)$ является группой симметрий указанных двух конусов. Применяя компьютерные подсчеты, мы проверили, что $Sym(n)$ является полной группой симметрий для исследуемых конусов.

- Метрическим многогранником на n точках $METP_n$ называется множество всех полуметрик из MET_n , удовлетворяющих неравенствам периметра $d_{ik} + d_{ij} + d_{jk} \leq 2$.

- Разрезным многогранником (или многогранником разрезов) на n точках $CUTP_n$ называется выпуклая оболочка всех 2^{n-1} разрезов на $\{1, \dots, n\}$.

- Квазиметрическим многогранником на n точках $QMETP_n$ называется множество квазиполуметрик из $QMET_n$, удовлетворяющих неравенствам периметра $q_{ki} + q_{ij} + q_{jk} \leq 2$.

- Многогранником ориентированных мультиразрезов на n точках $OMCUTP_n$ естественно назвать выпуклую оболочку всех $p'(n)$ ориентированных мультиразрезов на $\{1, \dots, n\}$, в то время как многогранник ориентированных разрезов на n точках $OCUTP_n$ будет обозначать выпуклую оболочку всех 2^n ориентированных разрезов на $\{1, \dots, n\}$.

Многогранники $CUTP_n$ и $METP_n$ инвариантны, помимо перестановок, относительно так называемого свичинга, осуществляющегося по закону $(i, j) \rightarrow 1 - d_{ij}$, если $|S \cap \{i, j\}| = 1$, и $(i, j) \rightarrow d_{ij}$, иначе. В целом это дает группу порядка $2^{n-1} \times n!$. Для $n \neq 4$ это полная группа симметрий. Для $n = 4$ полная группа симметрий имеет порядок $2^3 \times 144$ ([16]).

Для многогранника $QMETP_n$ можно определить ориентированный аналог операции свичинга на $METP_n$, осуществляемый аналогичным образом: $(i, j) \rightarrow 1 - q_{ij}$, если $|S \cap \{i, j\}| = 1$,

и $(i, j) \rightarrow q_{ij}$, иначе. Ориентированный свичинг, вместе с перестановками и реверселем, образует группу порядка $2^n \times n!$. Мы предполагаем, что эта группа является полной группой симметрий для многогранников $QMETP_n$ (проверено для $n \leq 9$, см. [16]).

7. Таблицы параметров рассматриваемых конусов и многогранников

В таблице 1 представлена информация о конусах ориентированных и многомерных обобщенных метрических структур на малом числе вершин. Для каждого конуса представлены его размерность, число экстремальных лучей и число их орбит, число его гиперграней (фасет) и число их орбит, наконец, диаметры 1-скелетон-графа и реберного графа (см. [16, 1]).

Конус	Размерность	Число экстр. лучей (орбит)	Число гиперграней (орбит)	Диаметры
$OMCUT_3=QMET_3$	6	12(2)	12(2)	2; 2
$OMCUT_4$	12	74(5)	72(4)	2; 2
$QMET_4$	12	164(10)	36(2)	3; 2
$OMCUT_5$	20	540(9)	35320(194)	2; 3
$QMET_5$	20	43590(229)	80(2)	3; 2
$OMCUT_6$	30	4682(19)	$\geq 217847040(\geq 163822)$	2; ?
$QMET_6$	30	$\geq 182403032(\geq 127779)$	150(2)	?; 2
$HCUT_5^2$	10	25(2)	120(4)	2; 3
$HMET_5^2$	10	37(3)	30(2)	2; 2
$HCUT_6^3$	15	65(2)	4065(16)	2; 3
$HMET_6^3$	15	287(5)	45(2)	3; 2
$HCUT_7^4$	21	140(2)	474390(153)	2; 3
$HMET_7^4$	21	3692(8)	63(2)	3; 2
$HCUT_8^5$	28	266(2)	$\geq 409893148(\geq 11274)$	2; ?
$HMET_8^5$	28	55898(13)	84(2)	3; 2
$HMET_9^6$	36	864174(20)	108(2)	?; 2
$HCUT_6^2$	20	90(3)	2095154(3086)	2; ?
$HMET_6^2$	20	12492(41)	80(2)	3; 2
$HMET_7^2$	35	$\geq 454191608(\geq 91836)$	175(2)	?; 2
$HMET_7^3$	35	$\geq 551467967(\geq 110782)$	140(2)	?; 2

Таблица 1: Парметры конусов на n точках для малых n

В таблице 2 представлена информация о числе вершин и гиперграней для некоторых квазисимметрических многогранников (см. [16, 1]).

Многогранник	Размерность	Число вершин (орбит)	Число гиперграней (орбит)
$OCUTP_3$	5	16(2)	16(2)
$OCUTP_4$	9	64(3)	40(2)
$OCUTP_5$	14	256(3)	1056(5)
$OCUTP_6$	20	1024(4)	1625068(97)
$OMCUTP_3$	6	22(3)	20(2)
$OMCUTP_4$	12	136(5)	1160(9)
$OMCUTP_5$	20	1016(7)	? (?)
$QMETP_4$	12	544(8)	56(2)
$QMETP_5$	20	155136(392)	120(2)

Таблица 2: Парметры многогранников на n точках для малых n

8. Заключение

Помимо несимметричных и многомерных обобщенных метрических структур, представляющих собой аналоги классического симметричного двумерного случая метрик, разрезов,

мультиразрезов и других родственных конструкций, интерес представляют их специальные частные случаи: взвешиваемые квазиметрики, частичные метрики, m -суперметрики и др. Определения и примеры некоторых объектов такого рода были рассмотрены в третьем разделе работы. Построение и исследование соответствующих конусов и многогранников на малом числе точек можно провести по той же схеме (см., например, [14], [15] и др.). Однако в силу большого числа используемых параметров исследование поведения таких объектов, построенных на малом числе точек, очень быстро приводит к комбинаторному взрыву. Это затрудняет процесс построения и доказательства гипотез о поведении конусов и многогранников обобщенных метрических структур такого рода.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Де́за М. М., Де́за Е. И., Дютур Сикирич М. Полиэдральные конструкции, связанные с квази-метриками // Чебышевский сборник. 2015. Т. 16, выпуск 2. С. 79–92.
2. Кудряшов Б. Д. Теория информации: Учебник для вузов. – СПб.: Петир, 2009.
3. Лидовский В. В. Теория информации: Учебное пособие. – М.: Компания Спутник, 2004.
4. Шеннон К. Математическая теория связи. – М.: ИЛ, 1963.
5. Charikar M., Makarychev K., Makarychev V. Directed metrics and directed graph partitioning problem // Proc. of 11-th ACM-SIAM Symp. on Discrete Algorithms. 2006. P. 51–60.
6. Chebotarev P. Studying new classes of graph metrics // Proceedings of the SEE Conference "Geometric Science of Information" (GSI-2013), Lecture Notes in Computer Science, LNCS 8085. 2013. P. 207–214.
7. Chebotarev P., Agaev R. Forest matrices around the Laplacian matrix // Linear Algebra and its Applications. 2002. No 356. P. 253–274.
8. Chebotarev P., Deza E. Hitting time quasi-metric and its forest representation // Optimization Letters. 2018. URL: <https://link.springer.com/article/10.1007%2Fs11590-018-1314-2>.
9. Chebotarev P., Shamis E. The forest metric for graph vertices // arXiv:060257v1. 2006.
10. Chebotarev P., Shamis E. Matrix forest theorems // arXiv:0602575v1. 2006.
11. Chebotarev P., Shamis E. On proximity measures for graph vertices // Automation and Remote Control. 1998. No 59. P. 1443–1459.
12. Chebotarev P., Shamis E. The matrix-forest theorem and measuring relations in small social groups // Automation and Remote Control. 1997. No 58. P. 1505–1514.
13. Deza M. M., Deza E. I. Encyclopedia of Distances, 4-rd edition. – Springer-Verlag, Berlin, 2016.
14. Deza M.M., Deza E.I. Cones of partial metrics // Contrib. Discrete Math. 2011. No 6(1). P. 26–47.
15. Deza M. M., Deza E. I., Vidali J. Cones of weighted and partial metrics // Proceedings of the International Conference on Algebra. 2010. P. 177–197.
16. Deza M. M., Dutour M., Deza E. I. Generalizations of finite metrics and cuts. – World Scientific, 2016.

17. Deza M. M., Dutour M., Panteleeva E. I. Small cones of oriented semi-metrics // Forum for Interdisciplinary Mathematics Proceedings on Statistics, Combinatorics and Related Areas. 2002. Vol. 22. P. 199–225.
18. Deza M. M., Grishukhin V. P., Deza E. I. Cones of weighted quasi-metrics, weighted quasi-hypermetrics and of oriented cuts // Mathematics of Distances and Applications, ITEA, Sofia. 2012. P. 31–53.
19. Deza M. M., Laurent M. Geometry of cuts and metrics. - Springer-Verlag, Berlin, 1997.
20. Deza M. M., Panteleeva E. I. Quasi-semi-metrics, oriented multi-cuts and related polyhedra // European Journal of Combinatorics. 2000. No 21(6). P. 777–795.
21. Deza M. M., Rosenberg I. G. n -semimetrics // European Journal of Combinatorics, Special Issue *Discrete Metric Spaces*. 2000. No 21(6). P. 797–806.
22. Doyle P. G., Snell J. L. Random Walks and Electric Networks. - Mathematical Association of America, Washington D.C., 1984.
23. Fréchet M. Sur quelques points du calcul fonctionnel // Rend. Circolo mat. Palermo. 1906. Vol. 22. P. 1–74.
24. Gvishiani A. D., Gurvich V. A. Metric and ultrametric spaces of resistances // Russian Mathematical Surveys. 1987. No 42. P. 235–236.
25. Hausdorff F. Grundzüge der Mengenlehre. – Leipzig, 1914.
26. Klein D. J., Randic M. Resistance distance // Journal of Mathematical Chemistry. 1993. No 12. P. 81–95.
27. Seda A.K. Quasi-metrics and the semantic of logic programs // Fundamenta Informaticae. 1997. Vol. 29. P. 97–117.
28. Sharpe G. E. Solution of the $(m + 1)$ -terminal resistive network problem by means of metric geometry // Proceedings of the First Asilomar Conference on Circuits and Systems, Pacific Grove, CA. 1967. P. 319–328.
29. Wilson W.A. On quasi-metric spaces // American J. of Math. 1931. Vol. 53. P. 575–681.

REFERENCES

1. Deza, M. M., Deza, E. I., Dutour Sikirić, M. 2015, "Polyhedral structures associated with quasi-metrics", *Chebyshevskii sbornik*, Vol. 16 (2), P. 79–92.
2. Kudryashov, B. D. 2009, "Information Theory", *StPb.: Petir*.
3. Lidovskii, V. V. 2004, "Information Theory", *M.: Sputnik*.
4. Shannon, C. E. 1948, "A Mathematical Theory of Communication", *M.: IL*.
5. Charikar, M., Makarychev, K., Makarychev, V. 2006, "Directed metrics and directed graph partitioning problem", *Proc. of 11-th ACM-SIAM Symp. on Discrete Algorithms*, P. 51–60.
6. Chebotarev, P. 2013, "Studying new classes of graph metrics", *Proceedings of the SEE Conference "Geometric Science of Information" (GSI-2013)*, Lecture Notes in Computer Science, LNCS 8085, P. 207–214.

7. Chebotarev, P., Agaev, R. 2002, "Forest matrices around the Laplacian matrix", *Linear Algebra and its Applications*, No 356, P. 253–274.
8. Chebotarev, P., Deza, E. 2018, "Hitting time quasi-metric and its forest representation", *Optimization Letters*, URL: <https://link.springer.com/article/10.1007%2Fs11590-018-1314-2>.
9. Chebotarev, P., Shamis, E. 2006, "The forest metric for graph vertices", *arXiv:060257v1*.
10. Chebotarev, P., Shamis, E. 2006, "Matrix forest theorems", *arXiv:060257v1*.
11. Chebotarev, P., Shamis, E. 1998, "On proximity measures for graph vertices", *Automation and Remote Control*, No 59, P. 1443–1459.
12. Chebotarev, P., Shamis, E. 1997, "The matrix-forest theorem and measuring relations in small social groups", *Automation and Remote Control*, No 58, P. 1505–1514.
13. Deza, M. M., Deza, E. I. 2016, "Encyclopedia of Distances", 4-rd edition, *Springer-Verlag, Berlin*.
14. Deza, M. M., Deza, E. I. 2011, "Cones of partial metrics", *Contrib. Discrete Math.*, No 6(1), P. 26–47.
15. Deza, M. M., Deza, E. I., Vidali, J. 2010, "Cones of weighted and partial metrics", *Proceedings of the International Conference on Algebra*, P. 177–197.
16. Deza, M. M., Dutour, M., Deza, E. I. 2016, "Generalizations of finite metrics and cuts", *World Scientific*.
17. Deza, M. M., Dutour, M., Panteleeva, E. I. 2002, "Small cones of oriented semi-metrics", *Forum for Interdisciplinary Mathematics Proceedings on Statistics, Combinatorics and Related Areas*, Vol. 22, P. 199–225.
18. Deza, M. M., Grishukhin, V. P., Deza, E. I. 2012, "Cones of weighted quasi-metrics, weighted quasi-hypermetrics and of oriented cuts", *Mathematics of Distances and Applications*, ITEA, Sofia, P. 31–53.
19. Deza, M. M., Laurent, M. 1997, "Geometry of cuts and metrics", *Springer-Verlag, Berlin*.
20. Deza, M. M., Panteleeva, E. I. 2000, "Quasi-semi-metrics, oriented multi-cuts and related polyhedra", *European Journal of Combinatorics*, No 21(6), P. 777–795.
21. Deza, M. M., Rosenberg, I. G. 2000, " n -semimetrics", *European Journal of Combinatorics*, Special Issue *Discrete Metric Spaces*, No 21(6), P. 797–806.
22. Doyle, P. G., Snell, J. L. 1984, "Random Walks and Electric Networks", *Mathematical Association of America, Washington D.C.*.
23. Fréchet, M. 1906, "Sur quelques points du calcul fonctionnel", *Rend. Circolo mat. Palermo*, Vol. 22, P. 1–74.
24. Gvishiani, A. D., Gurvich, V. A. 1987, "Metric and ultrametric spaces of resistances", *Russian Mathematical Surveys*, No 42, P. 235–236.
25. Hausdorff, F. 1914, "Grundzüge der Mengenlehre", *Leipzig*.
26. Klein, D. J., Randic, M. 1993, "Resistance distance", *Journal of Mathematical Chemistry*, No 12, P. 81–95.

-
27. Seda, A. K. 1997, "Quasi-metrics and the semantic of logic programs", *Fundamenta Informaticae*, Vol. 29, P. 97–117.
 28. Sharpe, G. E. 1967, "Solution of the $(m + 1)$ -terminal resistive network problem by means of metric geometry", *Proceedings of the First Asilomar Conference on Circuits and Systems*, Pacific Grove, CA, P. 319–328.
 29. Wilson, W. A. 1931, "On quasi-metric spaces", *American J. of Math.*, Vol. 53, P. 575–681.

Получено 28.05.2019 г.

Принято в печать 12.07.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 2.

УДК 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-156-168

Об одном обобщенном эйлеровом произведении, задающем мероморфную функцию на всей комплексной плоскости¹

Н. Н. Добровольский, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский

Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Добровольский Михаил Николаевич — кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Геофизический центр РАН (г. Москва).

e-mail: m.dobrovolsky@gcras.ru

Добровольский Николай Михайлович — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой алгебры, математического анализа и геометрии, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: dobrovol@tsput.ru

Аннотация

В работе изучается произведение Эйлера вида

$$P_{\pi}(M, a(p)|\alpha) = \prod_{p \in P(M)} \left(1 - \frac{a(p)}{p^{\alpha+\pi(p)}}\right)^{-1},$$

где M — произвольный моноид натуральных чисел, образованный множеством простых чисел $P(M)$.

Другим объектом изучения является ряд Дирихле вида

$$f_{\pi}(M|\alpha) = \sum_{n \in M} \frac{1}{n^{\alpha+\pi(n)}}.$$

Оказывается, что они обладают совершенно разными свойствами. Ряд Дирихле $f_{\pi}(M|\alpha)$ определяет голоморфную функцию на всей комплексной плоскости.

А эйлерово произведение $P_{\pi}(M|\alpha)$ для моноида M , у которого множество простых $P(M)$ бесконечно, задает на всей комплексной плоскости мероморфную функцию, у которой имеется счетное множество особых вертикальных прямых, на каждой из которых счетное множество полюсов.

В заключении рассмотрена актуальная задача о нулях функции $f_{\pi}(M|\alpha)$.

Ключевые слова: дзета-функция Римана, ряд Дирихле, дзета-функция моноида натуральных чисел, эйлерово произведение.

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:

Н. Н. Добровольский, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский. Об одном обобщенном эйлеровом произведении, задающем мероморфную функцию на всей комплексной плоскости // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 2, С. 156–168.

¹Работа подготовлена по гранту РФФИ № 19-41-710004_p_a.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 2.

UDC 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-156-168

On a generalized Eulerian product defining a meromorphic function on the whole complex plane²

N. N. Dobrovol'skii, M. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii

Dobrovol'skii Nikolai Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, assistant of the department of applied mathematics and computer science, Tula State University (Tula).

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Dobrovol'skii Mikhail Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, senior researcher, Geophysical centre of RAS (Moscow).

e-mail: m.dobrovolsky@gcras.ru

Dobrovol'skii Nikolai Mihailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the department of algebra, mathematical analysis and geometry, Tula State L. N. Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: dobrovol@tspu.ru

Abstract

The paper studies the Euler product of the form

$$P_{\pi}(M, a(p)|\alpha) = \prod_{p \in P(M)} \left(1 - \frac{a(p)}{p^{\alpha + \pi(p)}}\right)^{-1},$$

where M is an arbitrary monoid of natural numbers formed by the set of primes $P(M)$.

Another object of study is the Dirichlet series of the form

$$f_{\pi}(M|\alpha) = \sum_{n \in M} \frac{1}{n^{\alpha + \pi(n)}}.$$

It turns out that they have completely different properties. The Dirichlet series $f_{\pi}(M|\alpha)$ defines a holomorphic function on the entire complex plane.

And the Euler product $P_{\pi}(M|\alpha)$ for a monoid M whose set of primes $P(M)$ is infinite, sets on the entire complex plane a meromorphic function that has a countable set of special vertical lines, each of which has a countable set of poles.

In conclusion, the relevant problem of the zeros of the function $f_{\pi}(M|\alpha)$ is considered.

Keywords: Riemann zeta function, Dirichlet series, zeta function of the monoid of natural numbers, Euler product.

Bibliography: 16 titles.

For citation:

N. N. Dobrovol'skii, M. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, 2019, "On a generalized Eulerian product defining a meromorphic function on the whole complex plane", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 2, pp. 156–168.

²This work was prepared under a grant from the RFBR № 19-41-710004 _r_a.

1. Введение

За последние полтора года начало интенсивно развиваться новое направление исследований, связанное с изучением дзета-функций моноидов натуральных чисел [4, 5, 6, 8, 9, 10, 11].

В последней работе из этого списка показано, что теория дзета-функций моноидов натуральных чисел входит как составная часть в более общую теорию Алгебры рядов Дирихле моноида натуральных чисел, основы которой и были в ней изложены. Из анализа предыдущих статей видно, что особое место в данной теории занимают те ряды Дирихле моноидов натуральных чисел, которые имеют разложение в произведение Эйлера.

В настоящей работе центральное место занимает изучение произведения Эйлера вида

$$P_\pi(\alpha) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^{\alpha+\pi(p)}}\right)^{-1}. \quad (1)$$

Кроме этого будут изучены и другие обобщённые произведения Эйлера для моноидов натуральных чисел.

С произведением Эйлера (1) тесно связан следующий ряд Дирихле

$$\zeta_\pi(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha+\pi(n)}}, \quad (2)$$

который, как будет показано далее, задает голоморфную функцию на всей комплексной плоскости.

2. Основные определения и обозначения

Пусть $M \subset \mathbb{N}$ — произвольный моноид натуральных чисел. Рассмотрим множество $P(M)$ — простых элементов из M . Если $P(M) \subset \mathbb{P}$, где $\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел, то моноид M будет моноид с однозначным разложением на простые множители. В работе [5] описан общий вид моноидов с однозначным разложением на простые множители.

В работе [4] показано, что равенство эйлера произведения $P(M|\alpha)$ и дзета-функции $\zeta(M|\alpha)$ моноида M равносильно однозначности разложения на простые элементы в этом моноиде:

$$\zeta(M|\alpha) = \sum_{n \in M} \frac{1}{n^\alpha} = \prod_{r \in P(M)} \left(1 - \frac{1}{r^\alpha}\right)^{-1} = P(M|\alpha) \quad \alpha = \sigma + it, \quad \sigma > \sigma_M, \quad (3)$$

где σ_M — абсцисса абсолютной сходимости дзета-функции $\zeta(M|\alpha)$. Как хорошо известно [12, 15], для любого моноида $\sigma_M \leq 1$. Если $M \neq \{1\}$ не является тривиальным моноидом, то он содержит бесконечно много элементов и, следовательно, $\sigma_M \geq 0$.

В работе [4] показано, что для любого $q \geq 2$ и любой экспоненциальной последовательности простых чисел $PE = \{p_1, p_2, \dots, p_n, \dots\}$ дзета ряд для дзета-функции $\zeta(M(PE)|\alpha)$ абсолютно сходится для любого α в полуплоскости $\sigma > 0$ и равномерно в полуплоскости $\sigma \geq \sigma_0$ для любого $\sigma_0 > 0$.

В работе [6] показано, что областью голоморфности дзета-функции $\zeta(M(PE)|\alpha)$ является α -полуплоскость $\sigma > 0$. Таким образом, в данном случае $\sigma_M = 0$.

В случае, когда нет однозначности разложения на простые множители

$$P(M|\alpha) = \sum_{x \in M} \frac{k(x)}{x^\alpha}, \quad (4)$$

где $k(x)$ — количество различных канонических представлений числа x и каноническим разложением элемента x из мультипликативного моноида M натуральных чисел называется представление вида

$$x = r_1^{\alpha_1} \dots r_k^{\alpha_k}, \quad 1 < r_1 < \dots < r_k, \quad r_1, \dots, r_k \in P(M).$$

В работе [11] было показано, что ряд Дирихле $f_1(M|\alpha) \in \mathbb{D}(M)_{\mathbb{Q}}$, заданный равенством

$$f_1(M|\alpha) = \sum_{n \in M} \frac{1}{n^{\alpha} n!},$$

будет сходиться для любого комплексного α . Так как $\mathbb{D}(M)_{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{D}(M)_{\mathbb{K}}$ для любого числового поля $\mathbb{K}$, то для любого числового поля $\mathbb{K}$ имеем: $\mathbb{DC}(M)_{\mathbb{K}}$ — множество рядов Дирихле, сходящихся для любого комплексного α , непусто.

Рассмотрим ряд Дирихле $f_{\pi}(M|\alpha) \in \mathbb{D}(M)_{\mathbb{Q}}$, заданный равенством

$$f_{\pi}(M|\alpha) = \sum_{n \in M} \frac{1}{n^{\alpha + \pi(n)}}.$$

ТЕОРЕМА 1. *Ряд Дирихле $f_{\pi}(M|\alpha) \in \mathbb{D}(M)_{\mathbb{Q}}$ сходится для любого комплексного α : $f_{\pi}(M|\alpha) \in \mathbb{DC}(M)_{\mathbb{K}}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 24 мая 1848 г. П. Л. Чебышёв представил в Санкт-Петербургскую Академию наук мемуар “Об определении числа простых чисел, не превосходящих данной величины” (Полн. собр. соч., т. I, с. 173–190). Таким образом, в прошлом году исполнилось 170 лет со дня выхода этой принципиальной работы, с которой началась современная теория распределения простых чисел.

Во втором мемуаре он доказал оценки

$$(0, 92 \dots) \frac{x}{\ln x} \leq \pi(x) \leq (1, 105 \dots) \frac{x}{\ln x}.$$

Обозначим через $c_1 = 0,92 \dots$ и $c_2 = 1,105 \dots$ константы из неравенств Чебышёва для функции $\pi(x)$. Заметим, что конечная разность $\Delta\pi(n) = \pi(n) - \pi(n-1)$ является на множестве натуральных чисел характеристической функцией множества простых чисел.

Из оценок П. Л. Чебышёва следует, что

$$\frac{1}{e^{\alpha \ln n + c_2 n}} \leq \frac{1}{n^{\alpha + \pi(n)}} \leq \frac{1}{e^{\alpha \ln n + c_1 n}}.$$

Для любого $\alpha = \sigma + it$ мажорирующим рядом для $f_{\pi}(M|\alpha)$ будет ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma} e^{c_1 n}},$$

который сходится по интегральному признаку Коши, так как сходится несобственный интеграл

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\sigma} e^{c_1 x}}, \quad \int_{x_{\sigma}}^{\infty} \frac{dx}{x^{\sigma} e^{c_1 x}} \leq \int_{x_{\sigma}}^{\infty} \frac{dx}{e^{\frac{x}{2}}} = \frac{2}{e^{\frac{x_{\sigma}}{2}}},$$

где $x_{\sigma} \geq 1$ определяется из условия $x > -\frac{2\sigma \ln x}{2c_1 - 1}$ при $x > x_{\sigma}$. $\square$

Рассмотрим множество $\mathbb{D}_{\pi}(M)$ — произвольных рядов Дирихле вида

$$f(\alpha) = \sum_{n \in M} \frac{a(n)}{n^{\alpha + \pi(n)}} \quad \alpha = \sigma + it, \quad \sigma > \sigma_f \geq \sigma_f^*,$$

где σ_f — абсцисса абсолютной сходимости и σ_f^* — абсцисса сходимости. Как хорошо известно [12, 15], для любых рядов Дирихле справедливо неравенство $\sigma_f \leq \sigma_f^* + 1$.

Пусть $\mathbb{K}$ — произвольное числовое поле. Таким образом, $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{K} \subseteq \mathbb{C}$. Если все коэффициенты $a(n) \in \mathbb{K}$, то множество всех таких рядов Дирихле будем обозначать через $\mathbb{D}_\pi(M)_\mathbb{K}$ и оно является бесконечномерным линейным функциональным пространством над полем $\mathbb{K}$.

Выделим подпространство $\mathbb{D}_\pi^\infty(M)_\mathbb{K}$ условием $\sup_{n \in M} |a(n)| < \infty$. Из теоремы 1 сразу следует, что $\mathbb{D}_\pi^\infty(M)_\mathbb{K} \subset \mathbb{DC}(M)_\mathbb{K}$.

На $\mathbb{D}_\pi^\infty(M)_\mathbb{K}$ зададим норму

$$\|f(\alpha)\| = \sup_{n \in M} |a(n)|.$$

Относительно заданной нормы $\mathbb{D}_\pi^\infty(M)_\mathbb{K}$ является несепарабельным пространством. Оно будет банаховым, если поле $\mathbb{K}$ — банахово пространство над полем $\mathbb{Q}$ относительно нормы, заданной абсолютной величиной числа из поля $\mathbb{K}$. Так как отсюда следует, что либо $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, либо $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, то $\mathbb{D}_\pi^\infty(M)_\mathbb{K}$ — банахово пространство, только для $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, либо $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Нетрудно понять, что пространство $\mathbb{D}_\pi^\infty(M)_\mathbb{K}$ над полем $\mathbb{K}$ не является алгеброй, так как нет замкнутости относительно произведения рядов Дирихле. Действительно, если перемножить два ряда Дирихле из $\mathbb{D}_\pi^\infty(M)_\mathbb{K}$:

$$f(\alpha) = \sum_{n \in M} \frac{a(n)}{n^{\alpha + \pi(n)}}, \quad g(\alpha) = \sum_{n \in M} \frac{b(n)}{n^{\alpha + \pi(n)}},$$

то получим

$$f(\alpha)g(\alpha) = \sum_{n \in M} \frac{c(n)}{n^{\alpha + \pi(n)}},$$

$$c(n) = n^{\pi(n)} \sum_{m|n, m \in M} \frac{a(m)b\left(\frac{n}{m}\right)}{m^{\pi(m)}\left(\frac{n}{m}\right)^{\pi\left(\frac{n}{m}\right)}} = \sum_{m|n, m \in M} a(m)b\left(\frac{n}{m}\right) m^{\pi(n) - \pi(m)} \left(\frac{n}{m}\right)^{\pi(n) - \pi\left(\frac{n}{m}\right)}.$$

Таким образом, ограниченность коэффициентов $c(n)$, вообще говоря, отсутствует.

3. Ряд Дирихле геометрической прогрессии и теоремы Вейерштрасса и Миттаг–Леффлера

Рассмотрим геометрическую прогрессию $M(p)$:

$$M(p) = \{1, p, p^2, \dots, p^n, \dots\}$$

и ряд Дирихле из $\mathbb{D}_\pi(M(p))$

$$f_\pi(M(p), a|\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{p^{n(\alpha + \pi(p))}} = \left(1 - \frac{a}{p^{\alpha + \pi(p)}}\right)^{-1}, \quad |a| < \left|p^{\alpha + \pi(p)}\right|.$$

Для дальнейшего нам потребуются сведения из работы [8] относительно дзета-функции геометрической прогрессии, которые приведём без доказательства.

Прежде всего, рассмотрим целую функцию $q^\alpha - 1$, которая имеет бесконечно много нулей, а, именно, $\alpha = 0$ и $\alpha_n = \frac{2\pi ni}{\ln q}$ ($n = \pm 1, \pm 2, \dots$).

ЛЕММА 1. *Справедливо равенство*

$$e^\alpha - 1 = e^{\frac{\alpha}{2}} \alpha \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha^2}{4\pi^2 n^2}\right). \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [8]. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 1. *Справедливо равенство*

$$q^\alpha - 1 = q^{\frac{\alpha}{2}} (\alpha \ln q) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha^2 \ln^2 q}{4\pi^2 n^2} \right). \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [8]. $\square$

Таким образом, для целой функции $q^\alpha - 1$ теорема Вейерштрасса имеет вид:

$$q^\alpha - 1 = q^{\frac{\alpha}{2}} (\alpha \ln q) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha^2 \ln^2 q}{4\pi^2 n^2} \right). \quad (7)$$

Дзета-функция геометрической прогрессии $M(q)$ задается формулой

$$\zeta(M(q)|\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(q^n)^\alpha} = \frac{1}{1 - \frac{1}{q^\alpha}} \quad (\alpha = \sigma + it, \sigma > 0). \quad (8)$$

Из формулы (8) следует, что дзета-функция геометрической прогрессии аналитическая функция во всей α -плоскости кроме точек $\alpha_0 = 0$, где у неё простой полюс с вычетом

$$\text{Res}_0 \zeta(M(q)|\alpha) = \frac{1}{\ln q}.$$

и точек $\alpha_k = \frac{2ki\pi}{\ln q}$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$), в которых простые полюса с вычетами

$$\text{Res}_{\frac{2ki\pi}{\ln q}} \zeta(M(q)|\alpha) = \frac{1}{\ln q}.$$

Отсюда следует, что $\zeta(M(q)|\alpha)$ — мероморфная функция на комплексной α -плоскости, которая имеет следующее разложение в бесконечное произведение

$$\zeta(M(q)|\alpha) = \frac{q^{\frac{\alpha}{2}}}{\alpha \ln q} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha^2 \ln^2 q}{4\pi^2 n^2} \right)^{-1}. \quad (9)$$

А следовательно, к ней применима теорема Миттаг–Леффлера (см. [16], стр. 225). Как показано в работе [8], теорема Миттаг–Леффлера для дзета-функции геометрической прогрессии записывается следующим образом:

$$\zeta(M(q)|\alpha) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha \ln q} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha \ln q}{\alpha^2 \ln^2 q + 4n^2 \pi^2}. \quad (10)$$

Из равенств (8)–(10) легко получаются функциональные уравнения для дзета-функции геометрической прогрессии:

$$\zeta(M(q)|\alpha) = -q^\alpha \zeta(M(q)|-\alpha), \quad (11)$$

$$\zeta(M(q)|\alpha) = 1 - \zeta(M(q)|-\alpha). \quad (12)$$

Нетрудно видеть, что справедливо равенство

$$f_\pi(M(p), a|\alpha) = \left(1 - \frac{a}{p^{\alpha+\pi(p)}} \right)^{-1} = \left(1 - \frac{1}{p^{\alpha+\pi(p)-\frac{\ln a}{\ln p}}} \right)^{-1} = \zeta \left(M(p) \middle| \alpha + \pi(p) - \frac{\ln a}{\ln p} \right). \quad (13)$$

Отсюда следует, что ряд Дирихле $f_\pi(M(p), a|\alpha)$ аналитически продолжается и задаёт мероморфную функцию на всей комплексной плоскости, у которой бесконечное множество полюсов первого порядка с одним и тем же вычетом $\frac{1}{\ln p}$ в точках $\alpha_0 = -\pi(p) + \frac{\ln a}{\ln p}$ и $\alpha_k = -\pi(p) + \frac{\ln a}{\ln p} + \frac{2ki\pi}{\ln p}$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$).

Для этого ряда Дирихле теоремы Вейерштрасса и Миттаг-Леффлера запишутся следующим образом:

$$f_\pi(M(p), a|\alpha) = \frac{p^{\frac{\alpha+\pi(p)}{2}}}{((\alpha + \pi(p)) \ln p - \ln a) a^{\frac{1}{2}}} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{((\alpha + \pi(p)) \ln p - \ln a)^2}{4\pi^2 n^2} \right)^{-1}, \quad (14)$$

$$f_\pi(M(p), a|\alpha) = \frac{1}{2} + \frac{1}{(\alpha + \pi(p)) \ln p - \ln a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2((\alpha + \pi(p)) \ln p - \ln a)}{((\alpha + \pi(p)) \ln p - \ln a)^2 + 4n^2\pi^2}. \quad (15)$$

Из найденных соотношений несложно вывести функциональные уравнения для функции $f_\pi(M(p), a|\alpha)$:

$$f_\pi(M(p), a|\alpha) = 1 - f_\pi \left(M(p), a \left| -\alpha - 2\pi(p) + \frac{2 \ln a}{\ln p} \right. \right), \quad (16)$$

$$f_\pi(M(p), a|\alpha) = -\frac{p^{\alpha+\pi(p)}}{a} f_\pi \left(M(p), a \left| -\alpha - 2\pi(p) + \frac{2 \ln a}{\ln p} \right. \right). \quad (17)$$

4. Ряд Дирихле геометрической прогрессии и гамма-функция Эйлера

Хорошо известна формула (см. [1], стр. 326)

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} = \alpha e^{\gamma\alpha} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{n} \right) e^{-\frac{\alpha}{n}}. \quad (18)$$

Из неё следует, что

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(-\alpha)} = -\alpha^2 \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\alpha^2}{n^2} \right).$$

Отсюда вытекает, что

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha^2 \ln^2 q}{4\pi^2 n^2} \right)^{-1} = - \left(\frac{\alpha i \ln q}{2\pi} \right)^2 \Gamma \left(\frac{\alpha i \ln q}{2\pi} \right) \Gamma \left(-\frac{\alpha i \ln q}{2\pi} \right).$$

Но тогда из равенства (9) следует, что

$$\zeta(M(q)|\alpha) = \frac{q^{\frac{\alpha}{2}} \alpha \ln q}{4\pi^2} \Gamma \left(\frac{\alpha i \ln q}{2\pi} \right) \Gamma \left(-\frac{\alpha i \ln q}{2\pi} \right). \quad (19)$$

Из формулы (19) сразу следует, что дзета-функция геометрической прогрессии имеет полюса в точках $\alpha = \frac{2\pi ni}{\ln q}$, ($n \in \mathbb{Z}$), так как гамма функция имеет полюса в 0 и в отрицательных целых точках.

Также из формулы (19) сразу следует функциональное уравнение для дзета-функции геометрической прогрессии:

$$\zeta(M(q)|-\alpha) = \frac{q^{\frac{-\alpha}{2}} (-\alpha) \ln q}{4\pi^2} \Gamma \left(\frac{\alpha i \ln q}{2\pi} \right) \Gamma \left(-\frac{\alpha i \ln q}{2\pi} \right) = -\frac{\zeta(M(q)|\alpha)}{q^\alpha}. \quad (20)$$

Так как

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \zeta(M(q)|\alpha) = 1 \quad (\alpha = \sigma + it),$$

то

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \zeta(M(q)|-\alpha) = 0 \quad (\alpha = \sigma + it).$$

Из равенств 13 и 19 следует, что

$$f_{\pi}(M(p), a|\alpha) = \frac{p^{\frac{\alpha+\pi(p)}{2}} \beta}{4\pi^2 a^{\frac{1}{2}}} \Gamma\left(\frac{i\beta}{2\pi}\right) \Gamma\left(-\frac{i\beta}{2\pi}\right), \quad \beta = (\alpha + \pi(p)) \ln q - \ln a. \quad (21)$$

5. Ряд Дирихле моноида с конечным числом простых чисел

Пусть $\vec{p} = (p_1, \dots, p_n)$ — произвольный вектор с простыми $p_1 < p_2 < \dots < p_n$. Через $M(\vec{p})$ обозначим минимальный моноид натуральных чисел, образованный простыми числами $p_1, \dots, p_n$, а через $a(p) \neq 0$ — произвольную функцию на множестве указанных простых, удовлетворяющую условию $0 < |a(p)| \leq p^{\pi(p)}$ и $\sigma_n < \sigma_{n-1} < \dots < \sigma_1$, где $\sigma_{\nu} = \operatorname{Re}\left(-\pi(p_{\nu}) + \frac{\ln a(p_{\nu})}{\ln p_{\nu}}\right)$ ($\nu = 1, 2, \dots, n$).

Рассмотри ряд Дирихле

$$f_{\pi}(M(\vec{p}), a(p)|\alpha) = \sum_{m_1, \dots, m_n=0}^{\infty} \frac{a^{m_1}(p_1) \dots a^{m_n}(p_n)}{p_1^{m_1(\alpha+\pi(p_1))} \dots p_n^{m_n(\alpha+\pi(p_n))}} = \prod_{\nu=1}^n \left(1 - \frac{a(p_{\nu})}{p_{\nu}^{\alpha+\pi(p_{\nu})}}\right)^{-1},$$

который задает мероморфную функцию на всей комплексной плоскости с бесконечным множеством полюсов первого порядка в точках $\alpha_{\nu,0} = -\pi(p_{\nu}) + \frac{\ln a(p_{\nu})}{\ln p_{\nu}}$ и $\alpha_{\nu,k} = -\pi(p_{\nu}) + \frac{\ln a(p_{\nu})}{\ln p_{\nu}} + \frac{2ki\pi}{\ln p_{\nu}}$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$), ($\nu = 1, \dots, n$).

Через $P_{\pi}(M(\vec{p}), a(p)|\alpha)$ будем обозначать соответствующее обобщённое произведение Эйлера:

$$P_{\pi}(M(\vec{p}), a(p)|\alpha) = \prod_{\nu=1}^n f_{\pi}(M(p_{\nu}), a(p_{\nu})|\alpha) = \prod_{\nu=1}^n \left(1 - \frac{a(p_{\nu})}{p_{\nu}^{\alpha+\pi(p_{\nu})}}\right)^{-1}.$$

Если взять $a(p) = p^{\pi(p)}$, то получим дзета-функцию моноида $M(\vec{p})$:

$$P_{\pi}(M(\vec{p}), p^{\pi(p)}|\alpha) = \prod_{\nu=1}^n \left(1 - \frac{1}{p_{\nu}^{\alpha}}\right)^{-1} = \sum_{n \in M(\vec{p})} \frac{1}{n^{\alpha}} = \zeta(M(\vec{p})|\alpha) \quad (\alpha = \sigma + it, \quad \sigma > 0).$$

Очевидно, что для дзета-функции $\zeta(M(\vec{p})|\alpha)$ справедливо равенство

$$\zeta(M(\vec{p})|\alpha) = \prod_{\nu=1}^n \zeta(M(p_{\nu})|\alpha) = \prod_{\nu=1}^n \frac{1}{1 - \frac{1}{p_{\nu}^{\alpha}}}. \quad (22)$$

Из равенств (22) и (9) следует, что дзета-функция $\zeta(M(\vec{p})|\alpha)$ — мероморфная функция на комплексной α -плоскости, которая имеет следующее разложение в бесконечное произведение

$$\zeta(M(\vec{p})|\alpha) = \prod_{\nu=1}^n \left(\frac{p_{\nu}^{\frac{\alpha}{2}}}{\alpha \ln p_{\nu}} \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha^2 \ln^2 p_{\nu}}{4\pi^2 m^2}\right)^{-1} \right). \quad (23)$$

Если положить $P(\vec{p}) = p_1 \dots p_n$, $Q(\vec{p}) = \ln p_1 \dots \ln p_n$, то равенство (23) можно переписать в следующем виде:

$$\zeta(M(\vec{p})|\alpha) = \frac{P(\vec{p})^{\frac{\alpha}{2}}}{\alpha^n Q(\vec{p})} \prod_{\nu=1}^n \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha^2 \ln^2 p_{\nu}}{4\pi^2 m^2}\right)^{-1}. \quad (24)$$

Будем через $S(A)$ обозначать множество полюсов дзета-функции

$$\zeta(A|\alpha) = \sum_{n \in A} \frac{1}{n^\alpha} \quad (\alpha = \sigma + it, \sigma > 1)$$

произвольного множества натуральных чисел A . Если A — конечное множество, то $S(A) = \emptyset$.

Используя эти обозначения, получим равенство

$$S(M(\vec{p})) = \bigcup_{\nu=1}^n S(M(p_\nu)) = \left\{ \frac{2\pi ki}{\ln p_\nu} \mid k \in \mathbb{Z}, \nu = 1, 2, \dots, n \right\}.$$

Для дзета-функции $\zeta(M(\vec{p})|\alpha)$ справедливо функциональное уравнение

$$\zeta(M(\vec{p})|-\alpha) = (-1)^n \frac{\zeta(M(\vec{p})|\alpha)}{P(\vec{p})^\alpha}. \quad (25)$$

Рассмотрим обратный ряд $\zeta^*(M(\vec{p})|\alpha)$ для дзета-функции $\zeta(M(\vec{p})|\alpha)$. По принципу вложенности из работы [5] получаем, что

$$\begin{aligned} \zeta^*(M(\vec{p})|\alpha) &= \sum_{n \in M(\vec{p})} \frac{\mu(n)}{n^\alpha} = \prod_{\nu=1}^n \left(1 - \frac{1}{p_\nu^\alpha}\right), \\ \zeta^*(M^*(\vec{p})|\alpha) &= \sum_{n \in M^*(\vec{p})} \frac{\mu(n)}{n^\alpha} = \prod_{p \neq p_\nu (\nu=1, \dots, n)} \left(1 - \frac{1}{p^\alpha}\right), \end{aligned}$$

где $\mu(n)$ — обычная функция Мёбиуса.

Функция $\zeta^*(M(\vec{p})|\alpha)$ задается своим эйлеровым произведением на всей комплексной плоскости и является целой функцией, для которой множество нулей совпадает с множеством полюсов $S(M(\vec{p}))$ дзета-функции $\zeta(M(\vec{p})|\alpha)$. Для неё справедливо функциональное уравнение

$$\zeta^*(M(\vec{p})|-\alpha) = (-1)^n P(\vec{p})^\alpha \zeta^*(M(\vec{p})|\alpha).$$

6. Обобщённые произведения Эйлера

Рассмотрим произвольную функцию $a(p) \neq 0$, удовлетворяющую условию $0 < |a(p)| \leq p^{\pi(p)}$. Ряд Дирихле

$$f\pi(M(p), a(p)|\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n(p)}{p^{n(\alpha+\pi(p))}} = \left(1 - \frac{a(p)}{p^{\alpha+\pi(p)}}\right)^{-1}$$

задает мероморфную функцию на всей комплексной плоскости с бесконечным множеством полюсов первого порядка с одним и тем же вычетом $\frac{1}{\ln p}$ в точках $\alpha_0 = -\pi(p) + \frac{\ln a(p)}{\ln p}$ и $\alpha_k = -\pi(p) + \frac{\ln a(p)}{\ln p} + \frac{2ki\pi}{\ln p}$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$).

Пусть M — произвольный моноид с однозначным разложением на простые множители: $P(M) \subset \mathbb{P}$, где $\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел.

Через $P_\pi(M, a(p)|\alpha)$ обозначим обобщённое произведение Эйлера:

$$P_\pi(M, a(p)|\alpha) = \prod_{p \in P(M)} f\pi(M(p), a(p)|\alpha) = \prod_{p \in P(M)} \left(1 - \frac{a(p)}{p^{\alpha+\pi(p)}}\right)^{-1}.$$

При $a(p) \equiv 1$ будем писать просто $P_\pi(M|\alpha)$.

Если взять $a(p) = p^{\pi(p)}$, то получим дзета-функцию моноида M :

$$P_{\pi}(M, p^{\pi(p)}|\alpha) = \prod_{p \in P(M)} \left(1 - \frac{1}{p^{\alpha}}\right)^{-1} = \sum_{n \in M} \frac{1}{n^{\alpha}} \quad \alpha = \sigma + it, \quad \sigma > \sigma_M,$$

где σ_M — абсцисса абсолютной сходимости.

В частности, при $M = \mathbb{N}$ получим дзета-функцию Римана:

$$P_{\pi}(\mathbb{N}, p^{\pi(p)}|\alpha) = \zeta(\alpha), \quad \alpha = \sigma + it, \quad \sigma > 1.$$

ТЕОРЕМА 2. Если $a(p) \neq 0$ — произвольная ограниченная функция, то обобщённое произведение Эйлера $P_{\pi}(M, a(p)|\alpha)$ задаёт мероморфную функцию на всей комплексной плоскости, которая имеет бесконечное множество полюсов первого порядка $S_{\pi}(M, a(p))$:

$$S_{\pi}(M, a(p)) = \bigcup_{p \in P(M)} \left\{ \alpha_{p,0} = -\pi(p) + \frac{\ln a(p)}{\ln p}, \alpha_{p,k} = -\pi(p) + \frac{\ln a(p)}{\ln p} + \frac{2ki\pi}{\ln p} (k = \pm 1, \pm 2, \dots) \right\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $P(M)$ — конечное множество, то обобщённое произведение Эйлера $P_{\pi}(M, a(p)|\alpha)$ состоит из конечного числа сомножителей, каждый из которых мероморфная функция на всей комплексной плоскости, и, значит, утверждение теоремы выполнено.

Пусть теперь $P(M)$ — бесконечное множество:

$$P(M) = \{p_{\nu_1} < p_{\nu_2} < \dots < p_{\nu_n} < \dots\},$$

где используется естественная нумерация простых чисел в $\mathbb{P}$. Отсюда следует, что $\pi(p_{\nu_n}) = \nu_n$.

Рассмотрим последовательность абсцисс абсолютной сходимости сомножителей

$$f\pi(M(p_{\nu_n}), a(p_{\nu_n})|\alpha) : \quad \sigma_n = \operatorname{Re} \left(-\pi(p_{\nu_n}) + \frac{\ln a(p_{\nu_n})}{\ln p_{\nu_n}} \right),$$

придел которой равен $-\infty$. Отсюда следует, что для любого вещественного σ_0 найдётся номер N такой, что последовательность $\frac{a(p_{\nu_n})}{p_{\nu_n}^{\alpha + \pi(p_{\nu_n})}}$ мажорируется последовательностью $\frac{1}{p_{\nu_n}^2}$ в полуплоскости $\alpha = \sigma + it$, $\sigma > \sigma_0$.

Отсюда следует, что произведение

$$\prod_{n=N}^{\infty} \left(1 - \frac{a(p_{\nu_n})}{p_{\nu_n}^{\alpha + \pi(p_{\nu_n})}}\right)^{-1}$$

в полуплоскости $\alpha = \sigma + it$, $\sigma > \sigma_0$ абсолютно и равномерно сходится, так как сходится произведение

$$\prod_{n=N}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_{\nu_n}^2}\right)^{-1}.$$

Тем самым теорема полностью доказана в силу произвольности σ_0 . $\square$

7. Заключение

Известно логарифмическое свойство числа простых: $\pi(xy) > \pi(x) + \pi(y)$. Отсюда следует, что $\pi(p^n) > n\pi(p)$. Тогда для любого $\alpha > -\pi(p)$ имеем

$$\left(1 - \frac{1}{p^{\alpha + \pi(p)}}\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p^{n(\alpha + \pi(p))}} > \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p^{n(\alpha + \pi(p^n))}}.$$

Отметим, что последний ряд абсолютно сходится для любого комплексного α .

Так как для любого вещественного α имеем

$$\frac{1}{(nm)^{\alpha+\pi(nm)}} < \frac{1}{n^{\alpha+\pi(n)}m^{\alpha+\pi(m)}},$$

то

$$f_{\pi}(M|\alpha) = \sum_{n \in M} \frac{1}{n^{\alpha+\pi(n)}} < \prod_{p \in P(M)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p^{n(\alpha+\pi(p^n))}} < \prod_{p \in P(M)} \left(1 - \frac{1}{p^{\alpha+\pi(p)}}\right)^{-1} = P_{\pi}(M|\alpha).$$

Эта цепочка неравенств объясняет почему функция $f_{\pi}(M|\alpha)$ голоморфна на всей плоскости, а произведение $P_{\pi}(M|\alpha)$ мероморфно, причём имеет счетное множество особых вертикальных прямых, на каждой из которых имеется счетное множество полюсов.

Интересно было бы выяснить: имеет ли функция $f_{\pi}(M|\alpha)$ нули на комплексной плоскости? Очевидно, что их нет на вещественной прямой. Кроме того, если они есть, то они симметричны относительно вещественной прямой, так как образуют пары сопряженных значений.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. — М.: Физ-матлит, 1994. — 376 с.
2. Гурвиц А., Курант Р. Теория функций. — М.: Наука, 1968. — 618 с.
3. Демидов С. С., Морозова Е. А., Чубариков В. Н., Реброва И. Ю., Балаба И. Н., Добровольский Н. Н., Добровольский Н. М., Добровольская Л. П., Родионов А. В., Пихтилькова О. А. Теоретико-числовой метод в приближенном анализе // Чебышевский сб. 2017. Т. 18, вып. 4. С. 6–85.
4. Добровольский Н. Н. Дзета-функция моноидов натуральных чисел с однозначным разложением на простые множители // Чебышевский сб. 2017. Т. 18, вып. 4. С. 187–207.
5. Добровольский Н. Н. О моноидах натуральных чисел с однозначным разложением на простые элементы // Чебышевский сб. 2018. Т. 19, вып. 1. С. 79–105.
6. Добровольский Н. Н. Дзета-функция моноидов с заданной абсциссой абсолютной сходимости // Чебышевский сб. 2018. Т. 19, вып. 2. С. 142–150.
7. Добровольский Н. Н. Одна модельная дзета-функция моноида натуральных чисел // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 1, С. 148–163.
8. Добровольский Н. Н., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М., Балаба И. Н., Реброва И. Ю. Гипотеза о "заградительном ряде" для дзета-функций моноидов с экспоненциальной последовательностью простых // Чебышевский сб. 2018. Т. 19, вып. 1. С. 106–123.
9. Добровольский Н. Н., Калинина А. О., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М. О количестве простых элементов в некоторых моноидах натуральных чисел // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, вып. 2, С. 123–141.
10. Добровольский Н. Н., Калинина А. О., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М. О моноиде квадратичных вычетов // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, вып. 3, С. 95–108.
11. Добровольский Н. Н., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М., Балаба И. Н., Реброва И. Ю. Алгебра рядов Дирихле моноида натуральных чисел // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 1, С. 180–196.

12. Чандрасекхаран К. Введение в аналитическую теорию чисел. — М.: Мир, 1974. 188 с.
13. Чебышёв П. Л. Полное собрание сочинений, т. I–V. — М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1944–1951.
14. Чебышёв П. Л. Избранные труды. — М.: Изд-во АН СССР, 1955, 926 с.
15. Чудаков Н. Г. Введение в теорию L -функций Дирихле. — М.-Л.: ОГИЗ, 1947. 204 с.
16. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. — М.: Наука, 1969. — 576 с.

REFERENCES

1. Voronin S. M., Karacuba A. A., 1994, *Dzeta-funkcija Rimana*, Izd-vo Fiz-matlit, Moskva, 376 p.
2. Gurvic A., Kurant R., 1968, *Teorija funkcij*, Izd-vo Nauka, Moskva, 618 p.
3. Demidov S. S., Morozova E. A., Chubarikov V. N., Rebrov I. Yu., Balaba I. N., Dobrovol'skii N. N., Dobrovol'skii N. M., Dobrovol'skaya L. P., Rodionov A. V., Pikhtil'kova O. A., 2017, "Number-theoretic method in approximate analysis" *Chebyshevskii Sbornik* vol. 18, № 4. pp. 6–85.
4. Dobrovolsky N. N., 2017, "The zeta-function is the monoid of natural numbers with unique factorization", *Chebyshevskii Sbornik*, vol 18, № 4 pp. 188–208.
5. N. N. Dobrovol'skii, 2018, "On monoids of natural numbers with unique factorization into prime elements", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 1, pp. 79–105.
6. N. N. Dobrovol'skii, 2018, "The zeta function of monoids with a given abscissa of absolute convergence", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 2, pp. 142–150.
7. N. N. Dobrovol'skii, 2019, "One model Zeta function of the monoid of natural numbers", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 148–163.
8. N. N. Dobrovol'skii, M. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, I. N. Balaba, I. Yu. Rebrova, 2018, "About «zagrobelna the series» for the zeta function of monoids with exponential sequence of simple", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 1, pp. 106–123.
9. N. N. Dobrovol'skii, A. O. Kalinina, M. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii 2018, "On the number of prime elements in certain monoids of natural numbers", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 2, pp. 123–141.
10. N. N. Dobrovol'skii, A. O. Kalinina, M. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii 2018, "On the monoid of quadratic residues", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 3, pp. 95–108.
11. N. N. Dobrovol'skii, M. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, I. N. Balaba, I. Yu. Rebrova, 2019, "Dirichlet series algebra of a monoid of natural numbers", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 180–196.
12. Chandrasekharan K., 1974, *Vvedenie v analiticheskiju teoriju chisel*, Izd-vo Mir, Moskva, 188 p.
13. Chebyshev P. L., 1944–1951, "Complete works, v. I–V. ", *M.-L.: Izd-vo AN SSSR*.
14. Chebyshev P. L., 1955, "Selected works.", *M.: Izd-vo AN SSSR*, 926 p.
15. Chudakov N. G., 1947, *Introduction to the theory of L-Dirichlet functions* — M.-L.: OGIZ, — 204 p.

16. Shabat B. V., 1969, *Introduction to complex analysis*. — М.: Science, 576 p.

Получено 18.05.2019 г.

Принято в печать 12.07.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 2.

УДК 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-169-177

Гиперметрический конус и многогранник на графах

М. Дьютор

Дютур-Сикирич Мэтью — старший научный сотрудник Института Рудьер Боскович Биеница, Загреб, Хорватия

e-mail: mathieu.dutour@gmail.com

Аннотация

Гиперметрический конус был определен в [9] и был широко изучен Мишелем Дезой и его сотрудниками. Еще одним ключевым его интересом был отрезной и метрический многогранник, который он рассматривал в своих последних работах в случае графов.

Здесь мы объединяем оба интереса, рассматривая гиперметрию на графах. Мы определяем их для любого графа и даем алгоритм вычисления экстремальных лучей и граней гиперметрического конуса на графах. Мы вычисляем гиперметрический конус для первого нетривиального случая $K_7 - \{e\}$. Мы также вычисляем гиперметрический конус в случае графов без K_5 минора.

Ключевые слова: алгебраические решётки, алгебраические сетки, тригонометрические суммы алгебраических сеток с весами, весовые функции.

Библиография: 21 название.

Для цитирования:

М. Dutour. The hypermetric cone and polytope on graphs // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 2, с. 169–177.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 2.

UDC 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-169-177

The hypermetric cone and polytope on graphs

M. Dutour

M. Dutour — Senior Associate Researcher, Institut Rudjer Boskovic Bijenicka, Zagreb, Croatia
e-mail: mathieu.dutour@gmail.com

Abstract

The hypermetric cone was defined in [9] and was extensively studied by Michel Deza and his collaborators. Another key interest of him was cut and metric polytope which he considered in his last works in the case of graphs.

Here we combine both interest by considering the hypermetric on graphs. We define them for any graph and give an algorithm for computing the extreme rays and facets of hypermetric cone on graphs. We compute the hypermetric cone for the first non-trivial case of $K_7 - \{e\}$. We also compute the hypermetric cone in the case of graphs with no K_5 minor.

Keywords: algebraic lattices, algebraic net, trigonometric sums of algebraic net with weights, weight functions.

Bibliography: 21 titles.

For citation:

M. Dutour, 2019, "The hypermetric cone and polytope on graphs *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 2, pp. 169–177.

1. Introduction

Given an integer n and a vector $b \in \mathbb{Z}^n$ such that $\sum_i b_i = 1 + 2s$ with $s \in \mathbb{Z}$ the *hypermetric inequality* is defined as

$$H(b, d) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} b_i b_j d(i, j) \leq s(s + 1)$$

The *hypermetric cone* $\text{HYP}(K_n)$ is the set of functions $d : \{1, \dots, n\}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, such that $H(b, d) \leq 0$ is satisfied for all $b \in \mathbb{Z}^n$ with $\sum_i b_i = 1$. The elements of $\text{HYP}(K_n)$ are named *hypermetric*.

A priori the hypermetric cone is not polyhedral since it is defined by an infinity of inequalities. However, the polyhedrality of the hypermetric cone was proved in [19, 9, 10]. The hypermetric cone is interpreted in term of parameter space of Delaunay polytopes and this viewpoint was introduced first in [3]. A complete description of the facets of the hypermetric cone was achieved in [4] for $n = 6$, [5, 20, 7] for $n = 7$ and [8].

Another viewpoint for the parameter space of Delaunay polytopes is the *Erdahl cone*. It is the set of quadratic functions on $\mathbb{R}^n$ such that $f(x) \geq 0$ for $x \in \mathbb{Z}^n$. This viewpoint is used and developed in [18, 17, 14].

The *hypermetric polytope* $\text{HYPP}(K_n)$ is the set of functions $d : \{1, \dots, n\}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, such that $H(b, d) \leq s(s + 1)$ is satisfied for all $b \in \mathbb{Z}^n$ with $\sum_i b_i = 1 + 2s$ and $s \in \mathbb{Z}$. It was defined in [8, 15] and it is related to centrally symmetric Delaunay polytopes (see 2.2 for some summary).

In this work we define the hypermetric cone $\text{HYP}(G)$ and polytope $\text{HYPP}(G)$ of a graph G . This extends the construction of cut and metric cone and polytopes of graphs (see [19, 11]). We provide algorithms for checking if an hypermetric belong to those.

In Section 2 we provide needed preliminaries on cut, metric cones and polytopes of graphs G . We also define the hypermetric cone and polytopes for the complete graph K_n .

In Section 4 we define the hypermetric cone and polytope for a graph G . In Theorem 3 we give algorithms to test if a distance function on the edge set of a graph is an hypermetric or not.

In Section 4 we compute the facets and extreme rays of the first non-trivial case $K_7 - \{e\}$. We also prove that for graphs with k edges removed, the facet defining inequalities are obtained as sum of at most k hypermetric inequalities. We also characterize the facets of the hypermetric cone of graphs without K_5 minor.

Characterizing the facet inequalities of other graphs is an interesting problem. In particular one good question is characterize the graphs G for which $\text{MET}(G) = \text{HYP}(G)$ or $\text{HYP}(G) = \text{CUT}(G)$.

2. Preliminary definitions**2.1. Cut and metric cones and polytopes**

Given a graph $G = (V, E)$ with $n = |V|$, for a vertex subset $S \subseteq V = \{1, \dots, n\}$, the *cut semimetric* $\delta_S(G)$ is a vector (actually, a symmetric $\{0, 1\}$ -matrix) defined as

$$\delta_S(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{if } \{x, y\} \in E \quad \text{and} \quad |S \cap \{x, y\}| = 1 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

If G is connected, which will be the case in our work, there are exactly 2^{n-1} distinct cut semimetrics. The *cut polytope* $\text{CUTP}(G)$ and the *cut cone* $\text{CUT}(G)$ are defined as the convex hull of all such

semimetrics and the positive span of all non-zero ones among them, respectively. Their number of vertices, respectively extreme rays is 2^{n-1} , respectively $2^{n-1} - 1$ and their dimension is $|E|$, i.e., the number of edges of G .

The *metric cone* $\text{MET}(K_n)$ is the set of all *semimetrics* on n points, i.e., the functions $d : \{1, \dots, n\}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ satisfying $d(i, i) = 0$, $d(i, j) = d(j, i)$ for $1 \leq i, j \leq n$ and the *triangle inequalities*

$$d(i, j) \leq d(i, k) + d(j, k) \text{ for } 1 \leq i, j, k \leq n. \quad (1)$$

The *metric polytope* $\text{METP}(K_n)$ is defined as the elements of $\text{MET}(K_n)$ satisfying the *perimeter inequalities*

$$d(i, j) + d(j, k) + d(k, i) \leq 2 \text{ for } 1 \leq i, j, k \leq n. \quad (2)$$

For a graph $G = (V, E)$ of order $|V| = n$, let $\text{MET}(G)$ and $\text{METP}(G)$ denote the projections of $\text{MET}(K_n)$ and $\text{METP}(K_n)$, respectively, on the subspace $\mathbb{R}^E$ indexed by the edge set of G . Clearly, $\text{CUT}(G)$ and $\text{CUTP}(G)$ are the projections of, respectively, $\text{CUT}(K_n)$ and $\text{CUTP}(K_n)$ on $\mathbb{R}^E$. We have the relaxation property:

$$\text{CUT}(G) \subseteq \text{MET}(G) \text{ and } \text{CUTP}(G) \subseteq \text{METP}(G).$$

DEFINITION 9. Let $G = (V, E)$ be a graph.

(i) Given an edge $e \in E$, the edge inequality is

$$x(e) \geq 0.$$

(ii) For a cycle C , and an odd size set $F \subseteq C$ the cycle inequality is

$$x(F) - x(C \setminus F) \leq |F| - 1$$

where $x(U) = \sum_{u \in U} x(u)$.

$\text{METP}(G)$ is defined by all edge, bounding inequality $x(e) \leq 1$ and s -cycle inequalities, while $\text{MET}(G)$ is defined by all edge inequalities and s -cycle inequalities with $|F| = 1$ (see [2] and [12, Section 27.3]).

2.2. Hypermetric cone and Delaunay polytope

By a *distance matrix* $D = (D_{i,j})_{0 \leq i, j \leq n}$ we mean a matrix with $D_{i,i} = 0$ and $D_{i,j} = D_{j,i}$. We define $e_0 = 0$, $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\dots$, $e_n = (0, \dots, 0, 1)$.

We can associate to this a $n \times n$ symmetric matrix Q , a vector $v \in \mathbb{R}^n$, a scalar $c \in \mathbb{R}$ and a function f defined on $\mathbb{R}^n$ by

$$f(x) = Q[x] + \langle v, x \rangle + c$$

and which satisfies $f(e_0) = f(e_1) = \dots = f(e_n) = 0$. The matrix D satisfies $D_{i,j} = Q[e_i - e_j]$.

This correspondence relates the hypermetric cone $\text{HYP}(K_n)$ with the Erdahl cone. See for example [14]. In other words we have that $D \in \text{HYP}(K_{n+1})$ if and only if $f(x) \geq 0$ for all $x \in \mathbb{Z}^n$.

If we express the problem purely in term of geometry of numbers what we have is that a distance matrix $D \in \text{HYP}(K_{n+1})$ if and only there exist a k -dimensional lattice L with $k \leq n$, a Delaunay polytopes P of L and $D_{i,j} = \|v_i - v_j\|^2$ for some vertices v_i of P (see [12, Chapter 2]).

Given a $D \in \text{HYP}(K_{n+1})$ which correspond to a Delaunay polytope P of dimension n . Then the set of vertices corresponds to the set of vector $b \in \mathbb{Z}^{n+1}$ with $H(b, D) = 0$. In this respect the set $v_0, v_1, \dots, v_n$ form an *affine basis*. The set of vertices of P is then expressed as $\sum_{i=0}^n b_i v_i$ for $H(b, D) = 0$. This can be used to describe the Delaunay polytopes and this method was used in [13] for describing the Delaunay polytopes of dimension six.

Unfortunately, while powerful the method of hypermetric does not work out completely because there are Delaunay polytopes which are not basic (see [16]). We found out that the Erdahl cone provides a better replacement in many contexts (see [18, 17, 14]).

The symmetries of the hypermetric cone $\text{HYP}(K_n)$ is $\text{Sym}(n)$ for $n \neq 4$ (see [6]).

2.3. Hypermetric polytope and centrally symmetric Delaunay polytope

We cite following [8, Theorem 6]:

THEOREM 1. *A distance function d belongs to $\text{HYPP}(K_n)$ if and only if there exist a centrally symmetric n -dimensional Delaunay polytope of center c , circumradius 1 and vertices v_i , $2c - v_i$ for $1 \leq i \leq n$ with $\|v_i - v_j\|^2 = 4d_{ij}$.*

The correspondence can be made more precise. Consider the lattice

$$L = \left\{ x \in \mathbb{Z}^{n+1} \text{ s.t. } \sum_i x_i \equiv 0 \pmod{2} \right\}.$$

and the point $b^0 = (1, 0^{n-1})$. We define the matrix

$$A(d) = (A_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \text{ with } A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j \\ 1 - 2d_{ij} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Then we have that $d \in \text{HYPP}(K_n)$ if and only if we have (see [8]):

$$b^t A(d) b \geq 1 \text{ for all } b \in b^0 + L. \quad (3)$$

The set of $b \in b^0 + L$ such that $b^t A(d) b = 1$ correspond to the vertices of the centrally symmetric Delaunay polytope of center b^0 for the lattice L . The points $\pm e_i$ for $1 \leq i \leq n$ will always be among those.

It is important to point out that it is unlikely that all centrally symmetric Delaunay polytopes could be expressed in this way because of the negative result [16] but we do not know any counterexample. However, we could construct a variant of the Erdahl cone for this centrally symmetric setting

$$\text{Erdahl}_{\text{Cent}}(n) = \{Q \in S^n \text{ such that } Q[x - e_1/2] \geq 1\}$$

with S^n the set of $n \times n$ quadratic forms. The center of the Delaunay polytope will be $e_1/2$ and the circumradius 1. The vertices of the Delaunay polytope will be the set of $x \in \mathbb{Z}^n$ such that $Q[x - e_1/2] = 1$.

3. Definition of hypermetric cone on graphs

The hypermetric cone $\text{HYP}(K_n)$ is defined as the set of metrics satisfying all hypermetric inequalities, that is

$$\text{HYP}(K_n) = \left\{ d \in \mathbb{R}^{E(K_n)} \text{ with } H(b, d) \leq 0 \text{ for } b \in \mathbb{Z}^n, \sum_i b_i = 1 \right\}.$$

DEFINITION 10. *Given a graph G on n vertices the hypermetric cone $\text{HYP}(G)$ is defined as the projection of $\text{HYP}(K_n)$ on $\mathbb{R}^{E(G)}$.*

Since we know that $\text{HYP}(K_n) = \text{CUT}(K_n)$ for $n \leq 6$ we have $\text{HYP}(G) = \text{CUT}(G)$ for G on graph on at most 6 vertices.

Another elementary property is that $\text{HYP}(G)$ is polyhedral since it is the projection of a polyhedral cone.

THEOREM 2. *Given a graph G on n vertices and a $d \in \text{HYP}(G)$. The set of possible distances $D \in \text{HYP}(K_n)$ such that $\text{proj}(D) = d$ is bounded if and only if G is a connected graph.*

PROOF. Given a $d \in \text{HYP}(G)$ with G being connected. Given two vertices v and w there exist a path $v = v_0, v_1, \dots, v_m = w$ with v_i adjacent to v_j . By iterating the triangle inequality one obtains

$$D(v, w) \leq d(v_0, v_1) + \dots + d(v_{m-1}, v_m) = C(d)$$

The value $C(d)$ does not depend on D and so the set of possible D is connected.

If $d \in \text{HYP}(G)$ then there exist at least one D with $\text{Proj}(D) = d$. Since G is not connected, there exist a subset $S \subset \{1, \dots, n\}$ with vertices in S and $\{1, \dots, n\} - S$ not being adjacent. As a consequence we have $\text{Proj}(\delta_S) = 0$. Since $\delta_S \in \text{HYP}(K_n)$ we have that for all $\alpha > 0$ the relation $\text{Proj}(D + \alpha\delta_S) = d$ with $D + \alpha\delta_S \in \text{HYP}(K_n)$. ■

THEOREM 3. *Given a graph G on n vertices, testing if a given $d \in \mathbb{R}^{E(G)}$ belongs to $\text{HYP}(G)$ can be done by iteratively solving linear programs.*

PROOF. We take a distance function $d \in \mathbb{R}^{E(G)}$ and we want to find a matrix D with $\text{Proj}(D) = d$. Thus we need to find the possible values D_{ij} with $\{i, j\} \notin E(G)$.

We need to solve following linear program:

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \sum_{\{i,j\} \notin E(G)} D_{i,j} \\ \text{satisfying to} & H(b, D) \leq 0 \\ & \text{for } b \in \mathbb{Z}^n \text{ with } \sum_i b_i = 1 \end{array}$$

In other words what we have is an infinite linear program. What we can solve only is finite linear system.

The algorithm for solving that is to start from a finite set S of vectors b and then gradually expand it until a conclusion is reached. The finite starting point is the triangular inequalities of the metric cone. Then we iterate:

- (i) We solve the program for a fixed set S .
- (ii) If the program is unfeasible then this means that the elements d does not belong to $\text{HYP}(K_n)$. The problem is resolved.
- (iii) If the optimal solution D_0 of the linear program belongs to $\text{HYP}(K_n)$ then the problem is resolved.
- (iv) On the other hand if D_0 is not an hypermetric then there exist a d such that $H(b, D_0) > 0$. We add b in D and reiterate.

Since the hypermetric cone is polyhedral, after a finite set of addition one will eventually obtain a solution of the problem. ■

THEOREM 4. *If $f(x)$ is a linear function defined on $\mathbb{R}^{E(G)}$ then we can check whether f is valid on $\text{HYP}(G)$ by a sequence of linear program.*

PROOF. Since f is defined on $\mathbb{R}^{E(G)}$ we can trivially extend it to $\mathbb{R}^{E(K_n)}$ by setting $f(e) = 0$ for all $e \notin E(G)$.

The idea is to consider the linear program

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f(D) \\ \text{satisfying to} & H(b, D) \leq 0 \\ & \text{for } b \in \mathbb{Z}^n \text{ with } \sum_i b_i = 1 \\ & \text{and } \sum_{1 \leq i, j \leq n} D_{i,j} \leq 1. \end{array}$$

This infinite linear programming is very similar to the one of Theorem 3 and the same iterative strategy can be used. Let's denote D_0 the optimal solution which is an hypermetric. If $f(D_0) < 0$ then we have proved that f is not valid on $\text{HYP}(G)$. If on the other hand $f(D_0) \geq 0$ then the inequality is valid. ■

In practice the implementation of the above algorithms can be fairly complex. The linear programs are large and hard to solve. In our implementation we use `cdd` which uses exact arithmetic and provides both primal and dual solution in exact rational arithmetic. However, `cdd` uses the simplex algorithm and is very small in some cases. The idea is then to use floating point arithmetic and the `glpk` program which has better algorithm and can approximately solve linear programs. From the approximate solution we can derive the incidence and from the incidence get an exact solution in most cases. If this approach fails, then we fall back to the more expensive in time `cdd`. We only accept an approximate solution if we can derive a primal and dual solution. In any case of failure we fall back to `cdd`.

If we have a distance matrix D checking if it belongs to $\text{HYP}(K_n)$ is done in the following way. This defines a $n \times n$ -rational quadratic form Q , a vector $v \in \mathbb{Q}^n$ and a scalar C such that

$$f(x) = Q[x] + \langle v, x \rangle + C$$

with $f(0) = f(e_1) = \dots = f(e_n) = 0$. What we need is check if there is a $x \in \mathbb{Z}^n$ such that $f(x) < 0$. If Q is not positive semidefinite then we can find a negative eigenvalue and a corresponding eigenvector. By approximating the eigenvector with a rational vector and multiplying with some factor we can find a $x \in \mathbb{Z}^n$ with $f(x) < 0$. If Q is positive semidefinite then take the kernel $K = \{x \in \mathbb{Z}^n \text{ with } Q[x] = 0\}$ and L a subspace of $\mathbb{Z}^n$ such that $K \oplus_{\mathbb{Z}} L = \mathbb{Z}^n$. By restricting the problem to L we can restrict to the positive definite case. In the positive definite case, the decision problem of finding $x \in \mathbb{Z}^n$ with $f(x) < 0$ is a Closest Vector Problem and we can solve it by using a [19].

The interest of above two algorithms is that they give an algorithm for computing $\text{HYP}(G)$. We can start with a list of hypermetric of full dimension in $\text{HYP}(G)$. This is not difficult to obtain: We can for example take the cuts and project them on $\mathbb{R}^{E(G)}$.

Then we iterate the following:

- (i) We compute the facets of the convex body defined by those hypermetrics.
- (ii) For each facet we check if the corresponding facet defining inequality $f(x)$ is also valid on $\text{HYP}(G)$.
- (iii) If all inequalities are also valid on $\text{HYP}(G)$ then we have computed the list of extreme rays and facets of $\text{HYP}(G)$.

If not then we insert the hypermetrics that were found to be counterexample to the initial list of hypermetrics and reiterate.

Each insertion will increase the hypermetric cone until one has the complete description of $\text{HYP}(G)$.

We haven't implemented the algorithms of this section and it would be hard to do so. The main measure of the complexity should be the number of edges of the graph because it is a direct measure of the complexity of the problem. A way to speed up the process is to use the symmetries of the graph for the computation. Based on that, the first interesting case would likely be $\text{HYP}(Petersen)$.

All of the above is for hypermetric cone. But we can just as well define the hypermetric polytope for a graph: Take $\text{HYPP}(G)$ be the projection of $\text{HYPP}(K_n)$ on $\mathbb{R}^{E(G)}$. The algorithms can be adapted just as well to this case.

4. Computing $\text{HYP}(G)$ for some graphs

THEOREM 5. *The hypermetric cone $\text{HYP}(K_7 - \{e\})$ has 8782 extreme rays and 7210 facets.*

PROOF. The hypermetric cone $\text{HYP}(K_7)$ is defined by 3773 facet inequalities in 14 orbits and it has 37170 extreme rays in 29 orbits (see [7]). Let us denote $e = \{1, 2\}$. We consider the projection obtained by eliminating the component d_e . The normal to the equation $d_e = 0$ is the distance function determined by $d_{i,j}^e = 1$ if $\{i, j\} = e$ and 0 otherwise.

The facets F_i of the cone $\text{HYP}(K_7)$ are defined by inequalities $f_i(d) \geq 0$. The facets of $\text{HYP}(K_7 - \{e\})$ are obtained in two ways:

- (i) The facets f_i of $\text{HYP}(K_7)$ with $f_i(d^e) = 0$. The corresponding facet defining inequality of $\text{HYP}(K_7 - \{e\})$ is $f_i(x) \geq 0$.
- (ii) The ridges of $\text{HYP}(K_7)$ obtained as intersection $F_i \cap F_j$ of two facets with $f_i(d^e) \times f_j(d^e) < 0$. We can find $\alpha > 0$ and $\beta > 0$ with $(\alpha f_i + \beta f_j)(d^e) = 0$. The corresponding facet defining inequality of $\text{HYP}(K_7 - \{e\})$ is $\alpha f_i(x) + \beta f_j(x) \geq 0$.

By using this result and computing the ridges of $\text{HYP}(K_7)$ we can get the facets of the projection in The symmetries of $\text{HYP}(K_7 - \{e\})$ are induced by the symmetries of the graph $K_7 - \{e\}$ and the group is $\text{Sym}(\{1, 2\}) \times \text{Sym}(\{3, 4, 5, 6, 7\})$ of order 240. The total number of orbits of facets is thus 7210 in 80 orbits.

The extreme rays of $\text{HYP}(K_7 - \{e\})$ are the projection of extreme rays of $\text{HYP}(K_7)$. We check whether the projection are extreme rays or not by using the facets. This gives us 8782 extreme rays in 73 orbits. ■

THEOREM 6. *If G is a complete graph with k edges removed then the facets of $\text{HYP}(G)$ are determined as a sum $\sum_{i=1}^m \alpha_i H(b^i, d)$ for $m \leq k$, $\alpha_i > 0$ and $b^i \in \mathbb{Z}^n$ with $\sum_j b_j^i = 1$.*

PROOF. The method of 5 can be generated to any n . It implies that the facets of $\text{HYP}(K_n - \{e\})$ are induced by hypermetric inequalities and sum with positive coefficient of two hypermetric inequalities. The method extends to any number of edges and give us that the facets of $\text{HYP}(K_n - \{e_1, \dots, e_k\})$ are formed by hypermetric inequalities and sums with positive coefficients of at most k hypermetric inequalities. ■

Above theorem is in a sense a relatively negative result. For graphs with few edges it gives the facets as sums of too many hypermetric inequality to be practical.

THEOREM 7. *If G is a graph without K_5 minor then the facets of $\text{HYP}(G)$ and $\text{HYPP}(G)$ are induced by the cycle inequalities and the non-negative inequalities.*

PROOF. By the result of [21, 1] we have that $\text{MET}(G) = \text{CUT}(G)$ and $\text{METP}(G) = \text{CUTP}(G)$ if G has no K_5 minor. Since we have

$$\text{CUT}(K_n) \subset \text{HYP}(K_n) \subset \text{MET}(K_n) \quad \text{and} \quad \text{CUTP}(K_n) \subset \text{HYPP}(K_n) \subset \text{METP}(K_n).$$

As a consequence we get that the facets of $\text{MET}(G) = \text{HYP}(G)$ and $\text{METP}(G) = \text{HYPP}(G)$. Thus the facets of $\text{MET}(G)$ and $\text{METP}(G)$ are induced by the cycle and facet inequalities. ■

Seymour's theorem [21] is even stronger and states that $\text{CUT}(G) = \text{MET}(G)$ occurs if and only if G has no K_5 minor. Could it be that $\text{MET}(G) = \text{HYP}(G)$ occurs for other graphs that have K_5 as minor?

Also interesting would be to characterize cases where $\text{HYP}(G) = \text{CUT}(G)$. If G has at most 6 vertices then equality holds. The example of $K_7 - \{e\}$ shows that we cannot characterize the equality with K_6 minor.

REFERENCES

1. F. Barahona. The max-cut problem on graphs not contractible to K_s . *Oper. Res. Lett.*, 2(3):107–111, 1983.
2. F. Barahona. On cuts and matchings in planar graphs. *Math. Programming*, 60(1, Ser. A):53–68, 1993.
3. E. P. Baranovskii. Volumes of L -simplexes of five-dimensional lattices. *Mat. Zametki*, 13:771–782, 1973.
4. E. P. Baranovskii. About l -simplexes of 6-dimensional lattices (in russian). In *Second International conference “Algebraic, Probabilistic, Geometrical, Combinatorial and Functional Methods in the theory of numbers*. 1995.
5. E. P. Baranovskii. The conditions for a simplex of 6-dimensional lattice to be l -simplex (in russian). *Nauch. Trud. Ivan.*, (2):18–24, 1999.
6. A. Deza, B. Goldengorin, and D. V. Pasechnik. The isometries of the cut, metric and hypermetric cones. *J. Algebraic Combin.*, 23(2):197–203, 2006.
7. M. Deza and M. Dutour. The hypermetric cone on seven vertices. *Experiment. Math.*, 12(4):433–440, 2003.
8. M. Deza and M. Dutour Sikirić. The hypermetric cone and polytope on eight vertices and some generalizations. *J. Symbolic Comput.*, 88:67–84, 2018.
9. M. Deza, V. P. Grishukhin, and M. Laurent. Extreme hypermetrics and L -polytopes. In *Sets, graphs and numbers (Budapest, 1991)*, volume 60 of *Colloq. Math. Soc. János Bolyai*, pages 157–209. North-Holland, Amsterdam, 1992.
10. M. Deza, V. P. Grishukhin, and M. Laurent. Hypermetrics in geometry of numbers. In *Combinatorial optimization (New Brunswick, NJ, 1992–1993)*, volume 20 of *DIMACS Ser. Discrete Math. Theoret. Comput. Sci.*, pages 1–109. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.
11. M. Deza and M. D. Sikirić. Enumeration of the facets of cut polytopes over some highly symmetric graphs. *Int. Trans. Oper. Res.*, 23(5):853–860, 2016.
12. M. M. Deza and M. Laurent. *Geometry of cuts and metrics*, volume 15 of *Algorithms and Combinatorics*. Springer, Heidelberg, 2010. First softcover printing of the 1997 original [MR1460488].
13. M. Dutour. The six-dimensional Delaunay polytopes. *European J. Combin.*, 25(4):535–548, 2004.
14. M. Dutour Sikirić. The seven dimensional perfect Delaunay polytopes and Delaunay simplices. *Canad. J. Math.*, 69(5):1143–1168, 2017.
15. M. Dutour Sikirić, M.-M. Deza, and E. I. Deza. Computations of metric/cut polyhedra and their relatives. In *Handbook of geometric constraint systems principles*, Discrete Math. Appl. (Boca Raton), pages 213–231. CRC Press, Boca Raton, FL, 2019.
16. M. Dutour Sikirić and V. Grishukhin. How to compute the rank of a Delaunay polytope. *European J. Combin.*, 28(3):762–773, 2007.

-
17. M. Dutour Sikirić, A. Schürmann, and F. Vallentin. Inhomogeneous extreme forms. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 62(6):2227–2255 (2013), 2012.
 18. R. Erdahl. A cone of inhomogeneous second-order polynomials. *Discrete Comput. Geom.*, 8(4):387–416, 1992.
 19. U. Fincke and M. Pohst. Improved methods for calculating vectors of short length in a lattice, including a complexity analysis. *Math. Comp.*, 44(170):463–471, 1985.
 20. S. S. Ryshkov and E. P. Baranovskii. Repartitioning complexes in n -dimensional lattices (with full description for $n \leq 6$). In *Proceedings of conference "Voronoi impact on modern science Book 2*, pages 115–124. 1998.
 21. P. D. Seymour. Matroids and multicommodity flows. *European J. Combin.*, 2(3):257–290, 1981.

Получено 13.06.2019 г.

Принято в печать 12.07.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 2.

УДК 511.361

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-178-185

О значениях гипергеометрической функции с параметром из квадратичного поля

П. Л. Иванков

Иванков Павел Леонидович — доктор физико-математических наук, Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (г. Москва).

e-mail: ivankovpl@mail.ru

Аннотация

Для исследования арифметических свойств значений обобщенных гипергеометрических функций с рациональными параметрами обычно применяют метод Зигеля. Этим методом были получены наиболее общие результаты, относящиеся к упомянутым свойствам. Основной недостаток метода Зигеля состоит в невозможности его применения к гипергеометрическим функциям с иррациональными параметрами. В этой ситуации исследование обычно основывается на эффективной конструкции функциональной приближающей формы (в методе Зигеля существование такой формы доказывается с помощью принципа Дирихле). Построение и исследование приближающей формы является первым шагом в сложном рассуждении, которое ведет к получению арифметического результата.

Используя эффективный метод, мы сталкиваемся по крайней мере с двумя проблемами, которые в значительной степени сужают область его применимости. Во-первых, неизвестна более или менее общая конструкция приближающей формы для произведений гипергеометрических функций. Используя метод Зигеля, мы не имеем дела с такой проблемой. По этой причине приходится рассматривать лишь вопросы линейной независимости над тем или иным алгебраическим полем. Выбор этого поля является второй проблемой. Подавляющее большинство опубликованных результатов, относящихся к рассматриваемому кругу задач, имеет дело с мнимым квадратичным полем (или с полем рациональных чисел). Лишь в отдельных случаях удастся провести соответствующее исследование для какого-либо другого алгебраического поля.

Мы рассматриваем здесь случай вещественного квадратичного поля. С помощью специального технического приема мы устанавливаем линейную независимость значений некоторой гипергеометрической функции с иррациональным параметром над таким полем.

Ключевые слова: гипергеометрическая функция, эффективная конструкция, линейная независимость, вещественное квадратичное поле.

Библиография: 25 названий.

Для цитирования:

П. Л. Иванков. О значениях гипергеометрической функции с параметром из квадратичного поля // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 2, с. 178–185.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 2.

UDC 511.361

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-178-185

On the values of hypergeometric function with parameter from quadratic field

P. L. Ivankov

Ivankov Pavel Leonidovich — doctor of physical and mathematical Sciences, Bauman Moscow state technical University (Moscow).

e-mail: ivankovpl@mail.ru

Abstract

In order to investigate arithmetic properties of the values of generalized hypergeometric functions with rational parameters one usually applies Siegel's method. By means of this method have been achieved the most general results concerning the above mentioned properties. The main deficiency of Siegel's method consists in the impossibility of its application for the hypergeometric functions with irrational parameters. In this situation the investigation is usually based on the effective construction of the functional approximating form (in Siegel's method the existence of that form is proved by means of pigeon-hole principle). The construction and investigation of such a form is the first step in the complicated reasoning which leads to the achievement of arithmetic result.

Applying effective method we encounter at least two problems which make extremely narrow the field of its employment. First, the more or less general effective construction of the approximating form for the products of hypergeometric functions is unknown. While using Siegel's method one doesn't deal with such a problem. Hence the investigator is compelled to consider only questions of linear independence of the values of hypergeometric functions over some algebraic field. Choosing this field is the second problem. The great majority of published results concerning corresponding questions deals with imaginary quadratic field (or the field of rational numbers). Only in exceptional situations it is possible to investigate the case of some other algebraic field.

We consider here the case of a real quadratic field. By means of a special technique we establish linear independence of the values of some hypergeometric function with irrational parameter over such a field.

Keywords: hypergeometric function, effective construction, linear independence, real quadratic field.

Bibliography: 25 titles.

For citation:

P. L. Ivankov, 2019, "On the values of hypergeometric function with parameter from quadratic field", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 2, pp. 178–185.

1. Введение

Пусть

$$F(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{a(x)}{b(x)} \quad (1)$$

где $a(x)$ и $b(x)$ — многочлены, причем $a(x)b(x) \neq 0$ при $x = 1, 2, \dots$. Изучению арифметической природы значений функций вида (1) посвящен ряд работ; см., например, [4]–[13].

Рассмотрим функцию, получающуюся из (1) при $a(x) \equiv 1$, $b(x) = x(\lambda + x)$, т.е. функцию

$$K(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^{\nu}}{\nu!} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{\lambda + x}, \quad \lambda \neq -1, -2, \dots$$

Арифметическая природа чисел

$$K(\xi), \text{ и } K'(\xi), \quad (2)$$

$\xi \neq 0$, изучалась во многих работах; наиболее общие результаты получены при рациональных λ , см. [1], [2], а также [3, гл. 6,]. В частности, если $\lambda \in \mathbb{Q}$, то при некоторых естественных ограничениях на λ и ξ доказана алгебраическая независимость чисел (2). При иррациональном λ известные методы, как правило, позволяют доказать лишь линейную независимость этих чисел над соответствующим полем, причем в этом случае участвующие в рассуждениях линейные приближающие формы обычно строят эффективно. В частности, из результатов работы [14] следует линейная независимость чисел (2) над мнимым квадратичным полем, если λ и ξ берутся из этого же поля. Наибольшее внимание в этом направлении исследований уделяется количественным результатам. Применительно к рассматриваемому случаю это означает получение оценок снизу модуля линейной формы

$$h_1 K(\xi) + h_2 K'(\xi) \quad (3)$$

в зависимости от максимума модулей коэффициентов h_1 и h_2 , которые должны быть целыми в соответствующем поле; см. по этому поводу работы [15]—[21]. В некоторых из перечисленных работ получены точные по высоте оценки, а также вычислены входящие в эти оценки постоянные. Эффективные конструкции линейных приближающих форм можно использовать также для изучения ситуации, в которой λ и ξ лежат не в мнимом квадратичном, а в каком-либо другом поле алгебраических чисел. Отметим в связи с этим работы [22] — [24]. В работе [22] рассмотрен случай мнимого кубического поля. В работах [23] и [24] изучается, как и в настоящей работе, случай вещественного квадратичного поля. Оценки линейных форм вида (3) в данной работе не рассматриваются в основном из-за того, что ожидаемые здесь результаты весьма далеки от окончательных.

2. Результаты

Пусть

$$\chi_1(\zeta) = 1, \quad \chi_2(\zeta) = \zeta, \quad \chi_3(\zeta) = \zeta(\zeta + \lambda);$$

рассмотрим при $j = 1, 2$ и при $\lambda \neq -1, -2, \dots$ функции

$$K_j(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\chi_j(\nu) z^{\nu}}{\nu!} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{\lambda + x}.$$

ТЕОРЕМА 1. *При $\lambda = \sqrt{2}$ числа*

$$K_j\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad j = 1, 2, \quad (4)$$

отличны от нуля и их отношение не принадлежит полю $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

В сформулированной теореме параметр λ и точка, в которой вычисляются значения функций $K_j(z)$ лежат в вещественном квадратичном поле; аналогичная ситуация рассматривается и в теоремах 2 и 3 работы [23], но там речь идет о линейной независимости чисел (2) над полем

$\mathbb{Q}$, и точка, в которой вычисляются значения функции, также рациональна; последнее замечание относится и к теоремам из [24]. В теореме 4 из [23] на число ξ из (2) наложены некоторые специальные ограничения, связанные с применяемым там методом. В теореме 1 настоящей работы мы отказываемся от этих ограничений, что удастся сделать за счет использования новых технических приемов.

3. Леммы

Пусть n — натуральное число. Рассмотрим многочлены

$$P_j(z) = \sum_{s=0}^n p_{js} z^s,$$

где

$$p_{js} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\prod_{x=0}^{2n} (\zeta - x) d\zeta}{\chi_{j+1}(\zeta - s) \prod_{x=0}^{s-1} (\zeta - x)(\zeta + \lambda - x)}; \quad (5)$$

в последнем выражении γ есть положительно ориентированная окружность, охватывающая все полюсы подынтегральной функции.

ЛЕММА 1. *Имеет место равенство*

$$\sum_{j=1}^2 P_j(z) K_j(z) = R(z), \quad (6)$$

где

$$R(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^{\nu} \prod_{x=0}^{2n} (\nu - x)}{\nu!} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{\lambda + x}. \quad (7)$$

Доказательство. Заметим сначала, что (6) равносильно тому, что тождественно по ν выполняется равенство

$$\sum_{s=0}^n \sum_{j=1}^2 p_{js} \chi_j(\nu - s) \prod_{x=0}^{s-1} (\nu - x)(\nu + \lambda - x) = \prod_{x=0}^{2n} (\nu - x). \quad (8)$$

Мы видим здесь разложение в ряд Ньютона многочлена от ν из правой части. Известно, что коэффициенты такого разложения вычисляются по формулам (5); по поводу рядов Ньютона см., например, [25, гл. 4, § 4]. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. *Пусть $\lambda \notin \mathbb{Z}$, а ξ — ненулевое число. Тогда при $n \rightarrow \infty$*

$$P_j(\xi) = \Gamma(\lambda + 2n + 1) \left(\frac{(-1)^j K_{3-j}(\xi)}{\Gamma(\lambda + 1)} + O\left(\frac{1}{n}\right) \right), \quad (9)$$

$$R(\xi) = \frac{\xi^{2n+1} \Gamma(\lambda + 1)}{(\lambda + 2n + 1) \Gamma(\lambda + 2n + 1)} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right). \quad (10)$$

Доказательство. Пусть $j = 1$. Очевидно, $p_{10} = 0$; далее, по теореме о вычетах имеем

$$p_{1s} = -\frac{\prod_{x=0}^{2n} (\lambda + x)}{(s-1)! \prod_{x=0}^s (\lambda + x)} + \sum_{\tau=1}^{s-1} \frac{(-1)^{\tau-1} \prod_{x=0}^{2n-\tau} (\lambda + x)}{\tau! (s-\tau-1)! \prod_{x=0}^{s-\tau} (\lambda + x)}, \quad (11)$$

$s = 1, \dots, n$. При $j = 2$ аналогично получаем при $s = 0, 1, \dots, n$

$$p_{2s} = \frac{\prod_{x=0}^{2n} (\lambda + x)}{s! \prod_{x=0}^s (\lambda + x)} + \sum_{\tau=1}^s \frac{(-1)^\tau \prod_{x=0}^{2n-\tau} (\lambda + x)}{\tau! (s-\tau)! \prod_{x=0}^{s-\tau} (\lambda + x)}. \quad (12)$$

При рассматриваемых значениях λ модули сумм, входящих в правые части (11) и (12), оцениваются сверху (при достаточно большом n) величиной

$$C_1 \frac{(s+1)2^s}{s!} \Gamma(2n + \lambda), \quad s = 0, 1, \dots, n,$$

где положительная постоянная C_1 зависит лишь от λ . Отсюда следуют соотношения (9). Равенство (10) вытекает непосредственно из (7). Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Пусть α_1 и α_2 — ненулевые вещественные числа, а h_1 и h_2 — целые числа из поля $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Тогда, если $\alpha_1/\alpha_2 \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, и $h_1\alpha_1 + h_2\alpha_2 \neq 0$, то

$$|h_1\alpha_1 + h_2\alpha_2| > C_2 H^{-1}, \quad (13)$$

где $C_2 > 0$ — постоянная, не зависящая от h_1 и h_2 ; H — максимум абсолютных величин чисел h_1 , h_2 и их сопряженных в рассматриваемом поле.

Доказательство. Если $h_1\alpha_1 + h_2\alpha_2 \neq 0$, то и $h_1\eta + h_2 \neq 0$, где $\eta = \alpha_1/\alpha_2$. Обозначим $\tilde{h}_1$, $\tilde{h}_2$ и $\tilde{\eta}$ числа, сопряженные соответственно h_1 , h_2 и η в поле $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Тогда при некотором натуральном q , зависящем лишь от η , выполняется неравенство

$$q|(h_1\eta + h_2)(\tilde{h}_1\tilde{\eta} + \tilde{h}_2)| \geq 1,$$

из которого вытекает (13). Лемма доказана.

4. Доказательство теоремы

Обратимся к доказательству теоремы 1. Утверждение теоремы о том, что числа (4) отличны от нуля, очевидно. Предположим, что их отношение лежит в поле $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. В лемме 3 положим

$$h_j = (\sqrt{2})^n P_j \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right), \quad \alpha_j = K_j \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right), \quad j = 1, 2.$$

Заметим, что так определенные h_1 и h_2 будут целыми в поле $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Чтобы убедиться в этом, следует записать в виде вычета относительно бесконечно удаленной точки интеграл из правой части (5). Далее,

$$\sum_{j=1}^2 h_j \alpha_j = (\sqrt{2})^n R \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right), \quad (14)$$

причем правая часть последнего равенства отлична от нуля в силу (7). Из (9) и (10) вытекает, что при указанном выборе чисел α_j и h_j , $j = 1, 2$, и при $n \rightarrow \infty$ левая часть неравенства (13) бесконечно мала по сравнению с правой частью, т.е. это неравенство противоречиво, что и доказывает теорему.

5. Заключение

Применяемый в данной работе технический прием, основанный на использовании асимптотики коэффициентов эффективно построенных линейных приближающих форм, может, по видимому, привести и к решению других аналогичных задач. Дело в том, что в последнее время опубликовано довольно много различных вариантов эффективных конструкций линейных приближающих форм, причем асимптотика величин, связанных с этими конструкциями, изучена недостаточно. Причиной последнего обстоятельства является то, что непосредственно не видно, каким образом можно было бы применить соответствующие асимптотические оценки для получения новых результатов. Заметим, что в теореме, доказанной в настоящей работе, к успеху привела именно высокая точность оценок (9) и (10).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Siegel C. L. Über einige Anwendungen Diophantischer Approximationen // Abh. Preuss. Acad. Wiss., Phys.-Math. Kl. 1929. № 1. S. 1–70.
2. Siegel C. L. Transcendental numbers. Princeton University Press. Princeton, 1949.
3. Шидловский А. Б. Трансцендентные числа М.: Наука, 1987.
4. Шидловский А. Б. О трансцендентности и алгебраической независимости значений целых функций некоторых классов // ДАН СССР. 1954. Т. 96, № 4. С. 697–700.
5. Шидловский А. Б. О трансцендентности и алгебраической независимости значений E -функций, удовлетворяющих линейным неоднородным дифференциальным уравнениям второго порядка // ДАН СССР. 1966. Т. 169, № 1. С. 42–45.
6. Шидловский А. Б. Об алгебраической независимости значений некоторых гипергеометрических E -функций // Труды Московского математического общества. 1967. Т. 18. С. 55–64.
7. Белогривов И. И. О трансцендентности и алгебраической независимости значений некоторых гипергеометрических E -функций // ДАН СССР. 1967. Т. 174, № 2. С. 267–270.
8. Чирский В. Г. Об арифметических свойствах значений гипергеометрических функций с иррациональными параметрами // Вестник МГУ. Серия 1, математика, механика. 1978, № 5. С. 3–8.
9. Салихов В. Х. Неприводимость гипергеометрических уравнений и алгебраическая независимость значений E -функций // Acta Arithm. 1990. **53**:5. P. 453–471.
10. Черепнев М. А. Об алгебраической независимости значений гипергеометрических E -функций // Математические заметки. 1995. **57**:6. С. 896–912.
11. Салихов В. Х. Критерий алгебраической независимости значений гипергеометрических E -функций (четный случай) // Математические заметки. 1998. **64**:2. С. 273–284.
12. Горелов В. А. Об алгебраической независимости значений обобщенных гипергеометрических функций // Математические заметки. 2013. **94**:1. С. 94–108.
13. Горелов В. А. Об алгебраических свойствах решений неоднородных гипергеометрических уравнений // Математические заметки. 2016. **99**:5. С. 658–672.
14. Osgood Ch. F. Some theorems on diophantine approximation // Trans. Amer. Math. Soc. 1966. Vol. 123, № 1. P. 64–87.

15. Галочкин А. И. Оценки снизу линейных форм от значений некоторых гипергеометрических функций // Математические заметки. 1970. Т. 8, № 1. С. 19–28.
16. Галочкин А. И. Уточнение оценок некоторых линейных форм // Математические заметки. 1976. Т. 20, № 1. С. 35–45.
17. Галочкин А. И. Об арифметических свойствах значений некоторых целых гипергеометрических функций // Сибирский математический журнал. 1976. Т. 17, № 6. С. 1220–1235.
18. Галочкин А. И. О неулучшаемых по высоте оценках некоторых линейных форм // Математический сборник. 1984. Т. 124, № 3. С. 416–430.
19. Коробов А. Н. Оценки некоторых линейных форм // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1983, № 6. С. 36–41.
20. Попов А. Ю. Приближения некоторых степеней числа e // Диофантовы приближения, часть I. Изд-во МГУ, 1985. С. 77–85.
21. Иванков П. Л. О приближении значений некоторых функций // Вестник МГУ. Серия 1. Математика, механика. 1994, № 4. С. 12–15.
22. Иванков П. Л. О совместных приближениях значений некоторых целых функций числами из кубического поля // Вестник МГУ. Серия 1. Математика, механика. 1987. № 3. С. 53–56.
23. Иванков П. Л. О линейной независимости значений целых гипергеометрических функций с иррациональными параметрами // Сибирский математический журнал. 1993. Т. 34, № 5. С. 53–62.
24. Иванков П. Л. О приближении значений гипергеометрической функции с параметром из вещественного квадратичного поля // Математика и математическое моделирование. 2017, № 1. С. 25–33.
25. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций, том 1. М.: Наука, 1967.

REFERENCES

1. Siegel, C. L. 1929, "Über einige Anwendungen Diophantischer Approximationen *Abh. Preuss. Acad. Wiss., Phys.-Math. Kl.* no. 1, pp. 1–70.
2. Siegel, C. L. 1949, "Transcendental numbers." Princeton University Press.
3. Shidlovskii, A. B. 1987, "*Transsendentnye chisla*", [Transcendental numbers] Nauka, Moscow, 448 pp. (Russian)
4. Shidlovskii, A. B. 1954, "On transcendentality and algebraic independence of the values of entire functions of certain class *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 96, № 4, pp. 697–700. (Russian)
5. Shidlovskii, A. B. 1954, "Transcendence and algebraic independence of values of E -functions satisfying linear nonhomogeneous differential equations of the second order *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 169, № 1. pp. 42–45. (Russian)
6. Shidlovskii, A. B. 1968, "Algebraic independence of the values of certain hypergeometric E -functions *Trudy Moskov. Mat. Obsh.*, vol. 18, № 4. pp. 55–64. (Russian)
7. Belogrivov, I. I., 1967, "On transcendence and algebraic independence of values of certain hypergeometric E -functions *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 174, № 2, pp. 267–270. (Russian)

8. Chirsky, V. G., 1978, "On arithmetic properties of the values of hypergeometric functions with irrational parameters *Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1. Mat. Meh.* no. 5, pp. 3–8.
9. Salikhov, V. Kh., 1990, "Irreducibility of hypergeometric equations and algebraic independence of values of E -functions 1990, *Acta Arithm.*, **53**:5, pp. 453–471.
10. Cherepnev, M. A., 1995, "On algebraic independence of values of hypergeometric E -functions *Mat. Zametki*, vol. 57, no. 6, pp. 896–912.
11. Salikhov, V. Kh., 1998, "Criterion for the algebraic independence of the values of hypergeometric E -functions (even case) *Mat. Zametki*, vol. 64, no. 2, pp. 273–284.
12. Gorelov, V. A., 2013, "On algebraic independence of the values of hypergeometric functions *Mat. Zametki*, vol. 94, no. 1, pp. 94–108.
13. Gorelov, V. A., 2016, "On algebraic properties of the solutions of nonhomogeneous hypergeometric equations", *Mat. Zametki*, vol. 99, no. 5, pp. 658–672.
14. Osgood, Ch. F. 1966, "Some theorems on diophantine approximation" *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1966, vol. 123, no. 1, pp. 64–87.
15. Galochkin, A. I. 1970, "Lower estimates of the linear forms in the values of some hypergeometric functions *Mat. Zametki*, v. 8, no. 1, pp. 19–28. (Russian).
16. Galochkin, A. I. 1976, "Sharpening of the estimates of some linear forms *Mat. Zametki*, v. 20, no. 1, pp. 35–45. (Russian).
17. Galochkin, A. I. 1976, "On arithmetic properties of the values of some entire hypergeometric functions *Sibirsk. Mat. Zh.*, vol. 17, no. 6, pp. 1220–1235. (Russian)
18. Galochkin, A. I., 1984, "Estimates, unimprovable with respect to height, for certain linear forms *Mat. Sb.*, vol. 124(166), no. 3, pp. 416–430. (Russian).
19. Korobov, A. N. 1983, "Estimates of some linear forms *Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Meh.*, no. 6, pp. 36–41. (Russian).
20. Popov, A. Yu. 1985, "Approximations of some degrees of the number e ", *Diophantovy priblizheniya*, part 1. Moskov. Gos. Univ., Moscow (Russian).
21. Ivankov, P. L. 1994, "On approximation of the values of some functions *Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Meh.*, no. 4, pp. 12–15. (Russian).
22. Ivankov, P. L. 1987, "On simultaneous approximations of the values of some entire functions by the numbers from a cubic field *Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1, Mat. Meh.*, no. 3, pp. 53–56. (Russian).
23. Ivankov, P. L. 1993, "On linear independence of values of entire hypergeometric functions with irrational parameters *Sibirsk. Mat. Zh.*, vol. 34, no. 5, pp. 839–847. (Russian)
24. Ivankov, P. L. 2017, "On approximation of the values of hypergeometric function with a parameter from real quadratic field *Mathematics and Mathematical Modelling*, no. 1, pp. 25–33. (Russian)
25. Markushevich, A. I. 1967, "Teoriya analiticheskikh funktsii"[Theory of analytic functions], v. I. "Nauka Moscow, 486 pp. (Russian)

Получено 1.04.2018 г.

Принято в печать 12.07.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 2.

УДК 512.62

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-186-197

О двух подходах к классификации высших локальных полей

О. Ю. Иванова, С. В. Востоков, И. Б. Жуков

Иванова Ольга Юрьевна — Санкт-Петербургский государственный университет авиационного приборостроения, г. Санкт-Петербург.

e-mail: olgaiv80@mail.ru

Востоков Сергей Владимирович — Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург.

e-mail: s.vostokov@spbu.ru

Жуков Игорь Борисович — Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург.

e-mail: i.zhukov@spbu.ru

Аннотация

Эта статья связывает классификацию Курихары о полных дискретных оценочных полях и теории устранения дикого ветвления Эппа.

Для любого полного дискретного поля оценки K с произвольным полем вычетов простой характеристики можно определить некоторый численный инвариант $\Gamma(K)$, который лежит в основе классификации Курихары таких полей на 2 типа: поле K имеет тип I тогда и только тогда, когда $\Gamma(K)$ положительно. Значение этого инварианта указывает, насколько далеко данное поле от стандартного, т. е. от поля, которое неразветвлено над его постоянным подполем k , которое является максимальным подполем с совершенным полем вычетов. (Стандартные 2-мерные локальные поля являются точными полями вида $k\{\{t\}\}$.)

Мы доказываем (при некотором мягком ограничении на K), что для смешанного характеристического 2-мерного локального поля типа I K существует оценка снизу для $[l : k]$, где l/k является расширением, таким что lK является стандартным полем (существующим из-за теории Ерр); логарифм этой степени может быть оценен линейно в терминах $\Gamma(K)$ с коэффициентом, зависящим только от $e_{K/k}$.

Ключевые слова: Высшие локальные поля, дикое ветвление

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:

О. Ю. Иванова, С. В. Востоков, И. Б. Жуков. О двух подходах к классификации высших локальных полей // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 2, с. 186–197.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 20. No. 2.

UDC 512.62

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-186-197

On two approaches to classification of higher local fields¹

O. Ivanova, S. Vostokov, I. Zhukov

¹The authors are grateful to RSF for support (project 16-11-10200).

Ivanova Olga Yu. — Saint-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, SUAI, St. Petersburg, Russia.

e-mail: s.vostokov@spbu.ru

Vostokov Sergei V. — Saint Petersburg State University, St. Petersburg, Russia.

e-mail: s.vostokov@spbu.ru

Zhukov Igor B. — Saint Petersburg State University, St. Petersburg University, 7/9 Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034 Russia.

e-mail: i.zhukov@spbu.ru

Abstract

This article links Kurihara's classification of complete discrete valuation fields and Epp's theory of elimination of wild ramification.

For any complete discrete valuation field K with arbitrary residue field of prime characteristic one can define a certain numerical invariant $\Gamma(K)$ which underlies Kurihara's classification of such fields into 2 types: the field K is of Type I if and only if $\Gamma(K)$ is positive. The value of this invariant indicates how distant is the given field from a standard one, i.e., from a field which is unramified over its constant subfield k which is the maximal subfield with perfect residue field. (Standard 2-dimensional local fields are exactly fields of the form $k\{\{t\}\}$.)

We prove (under some mild restriction on K) that for a Type I mixed characteristic 2-dimensional local field K there exists an estimate from below for $[l : k]$ where l/k is an extension such that lK is a standard field (existing due to Epp's theory); the logarithm of this degree can be estimated linearly in terms of $\Gamma(K)$ with the coefficient depending only on $e_{K/k}$.

Keywords: Higher local fields, wild ramification

Bibliography: 15 titles.

For citation:

O. Ivanova, S. Vostokov, I. Zhukov, 2019, "On two approaches to classification of higher local fields", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 2, pp. 186–197.

1. Introduction

In the current paper we develop and compare two approaches to the classification of 2-dimensional local fields in the mixed characteristic case. Here a 2-dimensional local field is a complete discrete valuation field K such that its residue field $\overline{K}$ has, in its turn, a structure of a complete discrete valuation field with perfect residue field of characteristic $p > 0$.

If $\text{char } K = \text{char } \overline{K}$, the field K can be identified (non-canonically) with the field of formal Laurent series $\overline{K}((X))$. However, if $\text{char } K = 0$ and $\text{char } \overline{K} = p$, there is no explicit description and exhausting classification of such fields K . Here are some known results in this direction.

First of all, there is an important subclass of such fields K , so called standard fields. For any complete discrete valuation field K with the residue field of characteristic $p > 0$, one can introduce its constant subfield k which is a maximal subfield of K with perfect residue field. It can be proved that in the mixed characteristic case such k is unique. The field K is said to be standard if $e_{K/k} = 1$, where $e_{K/k}$ is defined in 2.1.

This rather abstract definition working for any complete discrete valuation field with imperfect residue field, takes a very explicit form if K is a 2-dimensional local field. Namely, if K is standard and k is its constant subfield, then

$$K \simeq k\{\{t\}\} = \left\{ \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i t^i, \quad v(a_i) \gg -\infty, \quad v(a_i) \xrightarrow{i \rightarrow -\infty} \infty \right\};$$

conversely, if $K = k\{\{t\}\}$ for a (one-dimensional) local field k , then K is standard, and k is its constant subfield (see [8] or [14]). Note that in the very classical case, when the residue field of $\bar{K}$ is finite, k can be constructed as the maximal algebraic extension of $\mathbb{Q}_p$ inside K .

Obviously, any 2-dimensional local field K with local parameters (π, t) is a finite totally ramified extension of its standard subfield $K_0 = k\{\{t\}\}$, where k is the constant subfield of K , and π, t are as in 2.2. A non-trivial result following from Epp's theorem on elimination of wild ramification (see [1], [13]) is that for any such K there exists a constant (i. e. defined over k) finite extension K'/K such that K' is a standard field. In fact, there is a huge freedom in the choice of such K'/K , see [6]. However, the minimal degree $d_m(K)$ of such K'/K can be arbitrarily large even in the simplest case $[K : K_0] = p$. Thus, $d_m(K)$ seems to be an interesting invariant in the classification of 2-dimensional local fields.

Another approach to classification of mixed characteristic complete discrete valuation fields was initiated by Kurihara in [7] to study Milnor K -groups (see [9] or [4]). These groups are applied in class field theory (see [10], [11], [4], [5]). Kurihara subdivides such fields into 2 types. For this, one considers any non-trivial relation $a \cdot d\pi + b \cdot dt$ in the module of differentials of the given field K over its constant subfield k , where (π, t) are any local parameters of K . The field K belongs to Type I if $v_K(a) < v_K(b)$ and to Type II otherwise (see [7], corollary 1.2 and definition 1.3). In particular, all standard fields belong to Type I since π can be chosen from k , and one can take $a = 1, b = 0$. Kurihara showed that the structure of extensions for the fields of Type I and Type II is very different. For example, K has cyclic wild (resp. ferocious) p -extensions of any degree if and only if K is of Type I (resp. Type II).

A refinement of this classification along with a number of new properties has been given in [2, 3]. It was suggested to consider values like

$$\Delta(\pi, t) = \frac{1}{e_K} \left(v_K(d\pi t_L) - v_K(dtt_L) \right),$$

where t_L is a second local parameter in a certain standard field L containing K , and the partial derivatives are used in the usual sense via identification $L = l\{\{t_L\}\}$. It is easy to see that

$$\Delta(\pi, t) = \frac{1}{e_K} (v_K(b) - v_K(a)),$$

so, the field K is of Type I if and only if $\Delta(\pi, t) > 0$ for any choice of local parameters π, t . It can be shown that for the fields of Type I $\Delta(\pi, t)$ does not depend on the choice of t . For such fields, the value

$$\Gamma(K) = \sup_{v(\pi)=1} \Delta(\pi, t)$$

is an invariant of K measuring resemblance between K and standard fields. In particular, $\Gamma(K) = \infty$ if and only if K is "almost standard": a certain unramified extension of K is a standard field.

In this article we obtain a lower bound for $d_m(K)$ for a mixed characteristic 2-dimensional local field of Type I, in terms of $\Gamma(K)$ and ramification index of the field over its standard subfield. This is accomplished under a certain mild restriction on K (Corollary 5.3.1).

We are grateful to the referee of the first version of this article for valuable remarks.

2. Notation and basic definitions

The following notation is used throughout the paper:

p always denote a prime integer;

$v_p(x)$ is the p -adic exponent of an integer number x .

2.1. Discrete valuation fields

For a discrete valuation field F , we denote its valuation by v_F and its residue field by $\overline{F}$. For any such F it will be always assumed that $\text{char } \overline{F} = p > 0$. If $\text{char } \overline{F} = p > 0$, we put $e_F = v_F(p)$. An element π_F such that $v_F(\pi_F) = 1$ is said to be a uniformizer of F .

Denote

$$\mathcal{O}_F = \{x \in F \mid v_F(x) \geq 0\};$$

$$U_F = \{x \in F \mid v_F(x) = 0\};$$

$$U_F(n) = \{x \in F \mid v_F(x - 1) \geq n\} \text{ for } n \in \mathbb{N}.$$

Let L/F be an extension of valuation fields, v_L be a valuation on L , and v_L induces the valuation w on F . We denote by $e_{L/F}$ the index of $w(F^*)$ in $v_L(L^*)$.

A finite extension E/F of discrete valuation fields is said to be

- unramified, if $e_{E/F} = 1$, and $\overline{E}/\overline{F}$ is separable;
- tame, if $p \nmid e_{E/F}$, and $\overline{E}/\overline{F}$ is separable;
- ferocious, if $e_{E/F} = 1$, and $\overline{E}/\overline{F}$ is purely inseparable;
- totally ramified, if $e_{E/F} = |E : F|$.

By v_0 we denote the valuation on any field normalized so that $v_0(p) = 1$.

For a Galois extension L/F of degree p we denote by $s(L/F)$ the (Swan) ramification number of any generator σ of $\text{Gal}(L/K)$:

$$s(L/F) = \inf_{x \in L^*} v_L(\sigma(x)x^{-1} - 1).$$

2.2. Two-dimensional local fields

Let K be a two-dimensional local field; denote by $K^{(1)} = \overline{K}$ its first residue field, and by $K^{(0)} = \overline{K^{(1)}}$ its last residue field. It is always assumed in this article that $\text{char } K = 0$, $\text{char } \overline{K} = p > 0$, and $K^{(0)}$ is perfect.

Any two-dimensional mixed-characteristic local field K satisfies the conditions of 2.1. We will use the same notation, that is $e_K = v_K(p)$, $\mathcal{O}_K = \{x \in K \mid v_K(x) \geq 0\}$ and v_0 is such that $v_0(p) = 1$.

For the valuation of rank 2 on K we use notation $\overline{v}_K = (v_{\overline{K}}, v_K): K \rightarrow \mathbb{Z}^2$; here $\mathbb{Z}^2$ is linearly ordered as follows: $(a, b) < (c, d)$, if $b < d$ or $b = d$ and $a < c$.

Since $\theta \in K^{(0)}$ is a perfect subfield in $K^{(1)} = \overline{K}$, for $\theta \in K^{(0)}$, its Teichmüller representative in $\mathcal{O}_K$ is well defined. We denote it by $[\theta]$.

Given $\overline{v}_K$, we can define local parameters: a uniformizer π with $\overline{v}_K(\pi) = (0, 1)$, and a "second local parameter" t with $\overline{v}_K(t) = (1, 0)$.

The *constant subfield* of K is its maximal subfield such that its residue field (with respect to v_K) is perfect. In particular, if the last residue field of K is finite, the constant subfield of K is the algebraic closure of $\mathbb{Q}_p$ in K .

In what follows K denotes always a two-dimensional local field, and k is its constant subfield.

The field K is said to be *standard*, if $e_{K/k} = 1$.

A finite extension L/K is said to be *constant* if $L = lK$ where l is an algebraic extension of k .

2.3. Kurihara's classification and related invariants

Let $K_0 = k\{\{t\}\}$ be a standard 2-dimensional field. For $x \in K_0$ its formal derivative $\frac{\partial x}{\partial t}$ is defined as follows. If $x = \sum a_i t^i$ with $a_i \in k$, then

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \sum i a_i t^{i-1}.$$

It is easy to see that $\frac{\partial x}{\partial t}$ is a well defined element of K_0 .

Let K_0 and L_0 be standard fields with $K_0 \subset L_0$, and let t, t' be second local parameters of these fields. Then

$$\frac{\partial x}{\partial t'} = \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial t'},$$

where the first factor in the right hand side is the image in L_0 of the respective element of K_0 .

Let K_0 be a standard field, t a second local parameter of K_0 , and $a, b \in K_0^*$. Introduce

$$c(a, b) = v_0\left(\frac{\partial a}{\partial t_0}\right) - v_0\left(\frac{\partial b}{\partial t_0}\right) - v_0(a) + v_0(b).$$

Now we check that $c(a, b)$ is independent of the choice of K_0 and the second local parameter t_0 . Let K_1 and K_2 be standard fields with the second local parameters t_1 and t_2 , and let $c_1(a, b)$ and $c_2(a, b)$ be functions corresponding to these fields. There exists a standard field E containing both K_1 and K_2 . Let t_E be any second local parameter of E . We have

$$v_0\left(\frac{\partial x}{\partial t_i}\right) = v_0\left(\frac{\partial x}{\partial t_i}\right) + v_0\left(\frac{\partial t_i}{\partial t_L}\right), \quad i = 1, 2;$$

therefore,

$$\begin{aligned} c_1(a, b) - c_2(a, b) &= v_0\left(\frac{\partial a}{\partial t_1}\right) - v_0\left(\frac{\partial b}{\partial t_1}\right) - v_0\left(\frac{\partial a}{\partial t_2}\right) + v_0\left(\frac{\partial b}{\partial t_2}\right) = \\ &= v_0\left(\frac{\partial a}{\partial t_E}\right) - v_0\left(\frac{\partial b}{\partial t_E}\right) - v_0\left(\frac{\partial a}{\partial t_E}\right) + v_0\left(\frac{\partial b}{\partial t_E}\right) = 0. \end{aligned}$$

Note that for any x, y, z we have

$$c(x, y) = c(x, z) - c(y, z), \quad c(x, y) = -c(y, x).$$

In [2, 3] the notation $\Delta_K(\pi, t)$ was used for $v_K(d\pi t_L) - v_K(dtt_L)$, where π, t are local parameters of K , and t_L is a second local parameter of a standard field L which is a finite extension of K . In this article we redefine $\Delta_K(\pi, t)$ using v_0 instead of v_K , i. e.,

$$\Delta(\pi, t) = \Delta_K(\pi, t) = v_0(d\pi t_L) - v_0(dtt_L).$$

It is shown in [7, 2] that if the condition $\Delta_K(\pi, t) > 0$ is satisfied for some local parameters π and t of K , then it is satisfied for any pair of local parameters. A field K is of Type I if this condition is satisfied and K is of Type II otherwise (see [2], proposition 4.3). For a field of Type I, $\Delta(\pi, t)$ is independent of the choice of the second local parameter t (see [2], Cor. 4.4); its value will be denoted by $\Delta_K(\pi)$. Note that

$$\Delta_K(\pi, t) = c(\pi, t) + v_0(\pi) - v_0(t) = c(\pi, t) + \frac{1}{e_K}.$$

For a field K of Type I, denote

$$\Gamma(K) = \max(\Delta_K(\pi) | \pi \in K^*, v_K(\pi) = 1),$$

$$\Gamma_c(K) = \max(\Delta_K(\pi) | \pi \in K^*, v_K(\pi) = 1) - \frac{1}{e_K}.$$

Then for any second local parameter t of K we have

$$\Gamma_c(K) = \max(c(\pi, t) | \pi \in K^*, v_K(\pi) = 1).$$

3. Properties of $c(a)$

3.1 Proposition. *Let $a, b \in K$. Then:*

1. $\min\{c(ab, a), c(ab, b)\} \geq 0$.
2. $c(a^{-1}, a) = 0$.
3. $c(a^p, a) = 1$.

Proof. Direct calculation.

3.2 Lemma. *Let $K = k\{\{t\}\}$ be standard, and let π_k be a uniformizing element of k . Then any $a \in K$ can be represented (non-uniquely) as*

$$a = a_\infty + \sum_{r=0}^N \pi_k^{\alpha_r} f_r, \quad (1)$$

where $a_\infty \in k$, $N \geq 0$, $\alpha_r \in \mathbb{Z}$, and for each r either $f_r = 0$ or

$$f_r = \sum_{i \in \mathbb{Z}} [\theta_{r,i}] t^{p^r i},$$

$\theta_{r,i} \in K^{(0)}$, exists i such that $\theta_{r,i} \neq 0$, $p \nmid i$.

For any such representation we have

$$v_0\left(\frac{\partial a}{\partial t}\right) = \min_{r: f_r \neq 0} (\alpha_r e_K^{-1} + r).$$

Proof. See [2, Lemma 4.5].

3.3 Proposition. *Let K be of Type I. Let $a \in \mathcal{O}_K$; assume*

$$a \equiv \pi^m f \pmod{\pi^{m+1} \mathcal{O}_K}, \quad (2)$$

$$f = \sum_{i \in \mathbb{Z}} [\theta_i] t^i,$$

$\theta_i \in K^{(0)}$, exists i such that $\theta_i \neq 0$. Then

$$\min\{c(\pi^m f, a), c(\pi^m f, \pi)\} \geq 0.$$

Proof. It is sufficient to prove that

$$c(\pi^m f, t) \geq \min(c(a, t), c(\pi, t)).$$

Let L be a standard field, $L \supset K$, and let t_L be a second local parameter of L . For any $x \in L$ let

$$d(x) = v_0(dx t_L).$$

We have

$$d(a) = c(a, t) + v_0(a) - d(t) \geq M + m e_K^{-1} - d(t)$$

with $M = \min(c(a, t), c(\pi, t))$. Note that the value of d for each term in the expansion (1) for a cannot be less than $d(a)$; it follows

$$\overline{\pi_L^{-m e_{L/K}}} a \in \bar{k}((\bar{t}^{p^{M-d(t)}})). \quad (3)$$

In particular,

$$\overline{\pi_L^{-e_{L/K}}} \pi \in \bar{k}((\bar{t}^{p^{M-d(t)}})). \quad (4)$$

Let

$$r = \min\{v_p(i) \mid \theta_i \neq 0\}.$$

Combining (2), (3) and (4), we conclude that $r \geq M - d(t)$. Therefore,

$$c(f, t) = c(f, t_L) + d(t) \geq r + d(t) \geq M.$$

Applying Lemma 3.1, we obtain

$$c(\pi^m f, t) \geq \min(c(\pi, t), c(f, t)) \geq M.$$

Let us say that $f \in k\{\{T\}\}$ is *normalized* if either $f \in U_k$, or $f \in \mathcal{O}_{k\{\{T\}\}}$ and $\bar{f} \notin \bar{k}((\bar{T}^p))$.

Let π, t be any local parameters of K .

3.3.1 Corollary. *Let $u \in U_K$, where K is of Type I. Then*

$$u = \prod_{i \geq 0} (1 + \pi^i f_i(t^{p^{n_i}})),$$

where for any i either $f_i = 0$ or f_i is normalized and $n_i \geq 0$, and for any such representation we have

$$\min\{c(1 + \pi^i f_i(t^{p^{n_i}}), u), c(1 + \pi^i f_i(t^{p^{n_i}}), \pi)\} \geq 0$$

for any i .

Proof. This follows from Propositions 3.3 and 3.1 by induction.

4. Behavior of $c(a)$ in field extensions

4.1 Lemma. *Let K'/K be a finite extension of 2-dimensional local fields, and let $x_1, x_2 \in K'$ be conjugate over K . Then $c(x_1, x_2) = 0$.*

Proof. Let $L_1/K(x_1)$ be a finite extension such that $L_1 = l_1\{\{t_1\}\}$ is a standard field. Then there exists a field $L_2 \supset K(x_2)$ and an isomorphism $\tau : L_1 \rightarrow L_2$ over K such that $\tau(x_1) = x_2$.

The field l_1 is exactly the set of elements of L_1 algebraic over k . Therefore, $l_2 = \tau(l_1)$ is the constant subfield of L_2 .

For any $z \in L_1$, we have $\bar{v}_{L_2}(\tau(z)) = \bar{v}_{L_1}(z)$, since for any L/K the valuation $\bar{v}_K$ has a unique extension to L . Therefore, $e_{L_1} = e_{L_2}$, $e_{L_2/l_2} = e_{L_1/l_1} = 1$, L_2 is standard, and $t_2 = \tau(t_1)$ is a second local parameter of L_2 .

Next, for any $z \in L_1$ it follows from $\tau(l_1) = l_2$ and $\tau(t_1) = t_2$ that

$$\tau\left(\frac{\partial z}{\partial t_1}\right) = \frac{\partial(\tau(z))}{\partial t_2},$$

and

$$\bar{v}_{L_1}\left(\frac{\partial z}{\partial t_1}\right) = \bar{v}_{L_2}\left(\frac{\partial(\tau(z))}{\partial t_2}\right).$$

Since $e_{L_1} = e_{L_2}$, the same relation is true for v_0 instead of v_{L_1} and v_{L_2} . Applying this to $z = x_1$, we obtain $c(x_1, x_2) = 0$.

4.1.1 Corollary. *Let K'/K be a finite Galois extension. Then for any $x \in K'$ we have $c(N_{K'/K}(x), x) \geq 0$.*

Proof. This follows from Lemma 4.1 and Proposition 3.1.

4.2 Lemma. *Let K'/K be a finite totally ramified Galois extension, and let K' be of Type I. Then K is of Type I, and $\Gamma_c(K') \leq \Gamma_c(K)$.*

Proof. The field K is of Type I by [7, Proposition 1.7].

Set $s = \Gamma_c(K')$, if $\Gamma_c(K')$ is finite, and denote an arbitrary number by s otherwise. We claim that $\Gamma_c(K) \geq s$. Let t' be a common second local parameter of K and K' . Let $\pi_{K'}$ be a uniformizer of K' such that $c(\pi_{K'}, t') \geq s$. Then $\pi_K = N_{K'/K}(\pi_{K'})$ is a uniformizer of K . Applying Corollary 4.1.1, we obtain

$$\Gamma_c(K) \geq c(\pi_K, t') = c(\pi_{K'}, t') + c(\pi_K, \pi_{K'}) = s + c(N_{K'/K}(\pi_{K'}), \pi_{K'}) \geq s.$$

4.3 Lemma. *Let K'/K be a tame extension. Then K and K' are of the same type, and, if they are of Type I, then $\Gamma_c(K') = \Gamma_c(K)$.*

rank

Our definition of $\Gamma(K)$ is tailored for fields of Type I only, and we do not know how a parallel result for Type II case can look like.

Proof. The fields K and K' are of the same type by [7, Corollary 1.6].

Assume they are of Type I. Let M/K be the maximal unramified subextension in K'/K . Then M/K' is totally ramified. We will prove that $\Gamma(M) = \Gamma(K), \Gamma(K') = \Gamma(M)$. It is sufficient to check the inequalities:

$$\Gamma_c(K) \leq \Gamma_c(M) \leq \Gamma_c(K') \leq \Gamma_c(M) \leq \Gamma_c(K).$$

Denote by t_K and t_M arbitrary second local parameters of K and M . Then t_M is also a second local parameter of K' . We will prove that

$$c(t_K, t_M) = 0. \tag{5}$$

Let L be any standard field containing M , and t_L be its second local parameter. The extension $\overline{M}/\overline{K}$ is separable; therefore,

$$\bar{t}_K = \alpha_i \bar{t}_M^i,$$

where $\alpha_i \in \overline{M}$, and there exists i such that $p \nmid i$, $\alpha_i \neq 0$. It follows

$$v_0\left(\frac{\partial t_K}{\partial t_L}\right) = v_0\left(\frac{\partial t_M}{\partial t_L}\right),$$

and so $c(t_K, t_M) = c(t_K, t_L) - c(t_M, t_L) = 0$.

1) We prove $\Gamma_c(K) \leq \Gamma_c(M)$. Denote $s = \Gamma_c(K)$ if $\Gamma_c(K)$ is finite, and let s be arbitrary otherwise.

Let π_K be a uniformizer of K such that $c(\pi_K, t_K) \geq s$. Then π_K is also a uniformizer of M . Using 5 we obtain

$$\Gamma_c(M) \geq c(\pi_K, t_M) = c(\pi_K, t_K) \geq s.$$

2) Now we prove $\Gamma_c(M) \leq \Gamma_c(K'), \Gamma_c(M) \leq \Gamma_c(K)$. In view of 5, it is sufficient to prove that for any uniformizer π_M of M there exist uniformizers π_K and $\pi_{K'}$ of K and K' such that $c(\pi_K, \pi_M) \geq 0$ and $c(\pi_{K'}, \pi_M) \geq 0$. Let E be either K or K' . Denote

$$q = \begin{cases} |M : K|, & E = K \\ |K' : M|, & E = K' \end{cases},$$

$$x = \begin{cases} N_{M/K} \pi_M, & E = K \\ \pi_M, & E = K' \end{cases}.$$

In both cases we have $x \in E$ and $v_0(x) = qe_E$.

Let $\pi_{E,1}$, t_E be arbitrary local parameters of E , and let $\theta \in E^{(0)}$, $s_1 \in \mathbb{Z}$, $u \in U_E(1)$ be such that $\pi_{E,1}^q = [\theta]t_E^{s_1}ux$. Denote by t a second local parameter of any standard field which is a finite extension of K' , and denote by r any integer number with $v_0(s_1 - rq) \geq v_0(\frac{\partial x}{\partial t})$; put $s = s_1 - rq$. We will prove that the uniformizer

$$\pi_E = t_E^{-r} u^{-1/q} \pi_{E,1}$$

is appropriate. Since $\pi_E^q = [\theta]t_E^s x$, we have

$$q\pi_E^{q-1} \frac{\partial \pi_E}{\partial t} = \frac{\partial(\pi_E^q)}{\partial t} = \frac{\partial([\theta]t_E^s x)}{\partial t} = [\theta]st_E^{s-1} x \frac{\partial t_E}{\partial t} + [\theta]t_E^s \frac{\partial x}{\partial t}.$$

Taking into account

$$v_0\left([\theta]st_E^{s-1} x \frac{\partial t_E}{\partial t}\right) \geq v_0(s) \geq v_0\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right),$$

we obtain

$$v_0\left(\frac{\partial \pi_E}{\partial t}\right) + (q-1)e_E \geq v_0\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)$$

and

$$c(\pi_E, x) = \left(v_0\left(\frac{\partial \pi_E}{\partial t}\right) - v_0(\pi_E)\right) - \left(v_0\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right) - v_0(x)\right) \geq 0.$$

In the case $E = K'$ we obtained the desired inequality, whereas in the case $E = K$ it is a consequence of the above formula and Corollary 4.1.1.

3) It remains to prove $\Gamma_c(K') \leq \Gamma_c(M)$. This follows from Lemma 4.2.

5. Estimate

We generalize the notion of “being not in touch” introduced in [15] in the prime characteristic case. Let L_1/F and L_2/F be totally ramified Galois extensions of degree p , and denote $s_1 = s(L_1/F)$, $s_2 = s(L_2/F)$. The extensions L_1/F and L_2/F are said to be not in touch if either $s_1 \neq s_2$ or $s(L/F) = s_1 = s_2$ for any subextension L/F in L_1L_2/F of degree p .

Next, finite totally ramified Galois p -extensions L_1/F and L_2/F are not in touch, if for any intermediate fields $F \subset S_i \subset T_i \subset L_i$, where S_i/F is normal and T_i/S_i is a Galois extension of degree p ($i = 1, 2$), the extensions T_1S_2/S_1S_2 and S_1T_2/S_1S_2 are not in touch.

The idea behind this notion is that we consider extensions “in general position” such that the ramification of their compositum can be computed in terms of ramification of the original extensions, compare [12, 4.3].

We say that an extension K'/K is *constant free*, if K'/K is not in touch with any constant extension of K . For example, for $K = k\{\{t\}\}$, where k contains a primitive p th root of unity, a Kummer extension $K(\sqrt[p]{1 + \pi_k^n a})/K$ with $a \in U_K$ is constant free iff $\bar{a} \notin \bar{k}$.

5.1 Lemma. *Let L_1/K and L_2/K be Galois extensions of degree p that are not in touch. Assume that L_1L_2/K is totally ramified. Then:*

1. $s(L_1L_2/L_2) \geq s(L_1/K)$;
2. If $s(L_1/K) = \frac{pe_K}{p-1}$, then $s(L_1L_2/L_2) > s(L_1/K)$.

Proof. The first part follows immediately from Lemma 3.3.1 in [12]. (It is assumed there that the residue field is perfect but the proof goes through assuming only that L_1L_2/K is totally ramified.)

For the second part it is sufficient to notice that $s(L_2/K) < \frac{pe_K}{p-1}$. Indeed, if

$$s(L_1/K) = s(L_2/K) = \frac{pe_K}{p-1},$$

and L_1L_2/K is totally ramified, then L_1/K and L_2/K are always in touch; this can be seen from the explicit form of Kummer equations (after adjoining a primitive p th root of unity).

5.2 Lemma. *Let K contain a primitive p th root of unity. Let K_1/K be a totally ramified extension of degree p ; denote by π_1 any uniformizer of K_1 . Let $u \in K$ be such that $K(\sqrt[p]{u})$ is not in touch with K_1/K and either $v_K(u) = 1$ or $0 < v_K(u-1) < \frac{pe_K}{p-1}$; $p \nmid v_K(u-1)$. Assume that $c(u, t_L) \geq N$ and $c(\pi_1, t_L) \geq N$ for some integer $N \geq 3$ and for some standard field $L = l\{\{t_L\}\}$ containing K_1 . Then $u = u_1b^p$, where $u_1, b \in K_1$ are such that $p \nmid v_{K_1}(u_1-1)$ and $c(u_1, t_L) \geq N-1$.*

Proof. Let $c(x) = c(x, t_L)$ and let $i_0 = v_K(u-1)$. By Corollary 3.3.1

$$u = \pi_1^{pv_K(u)} \prod_{i \geq pi_0} (1 + \pi_1^i f_i(t^{p^{n_i}}))$$

with f_i normalized or $f_i = 0$, and $c(1 + \pi_1^i f_i(t^{p^{n_i}})) \geq N$. It follows for $f_i \neq 0$ that

$$c(1 + \pi_1^i f_i(t^{p^{n_i}})) \geq N$$

and by Lemma 3.2

$$n_i = c(f_i(t^{p^{n_i}})) \geq \min(c(\pi_1), c(\pi_1^i f_i(t^{p^{n_i}}))) \geq N - ie_{K_1}^{-1}.$$

We conclude that $n_i > 0$ for $i < Ne_{K_1}$.

Denote $i_1 = \min\{i : f_i \neq 0, p \nmid i\}$; we have $i_1 \leq pe_{K_1}/(p-1) < Ne_{K_1}$ since $N \geq 3$. Introduce

$$\begin{aligned} u_1 &= \prod_{i \geq i_1} (1 + \pi_1^i f_i(t^{p^{n_i}})) \times \prod_{i_0 \leq i < \frac{i_1}{p}} \frac{1 + \pi_1^{pi} f_{pi}(t^{p^{n_{pi}}})}{(1 + \pi_1^{i\phi^{-1}}(t^{p^{n_{pi}-1}}))^p} \\ &= (1 + S_1)(1 + S_2). \end{aligned}$$

Here ϕ denotes application of Frobenius automorphism to the coefficients of a power series from $k\{\{T\}\}$.

We see from Lemma 5.1 and [12] that

$$\begin{aligned} v(u_1 - 1) &\leq \frac{pe_{K_1}}{p-1} - s(K_1(\sqrt[p]{u_1})/K_1) \\ &\leq \frac{pe_{K_1}}{p-1} - s(K(\sqrt[p]{u_1})/K) \\ &= \frac{pe_{K_1}}{p-1} - \left(\frac{pe_K}{p-1} - i_0\right) = e_{K_1} + i_0. \end{aligned} \tag{6}$$

Since $v_{K_1}(S_1) = i_1$ and $v_{K_1}(S_2) = e_{K_1} + i_0$, we obtain that the initial terms in S_1 and S_2 do not cancel, whence $v_{K_1}(S_1 + S_2)$ is exactly $\min(v_{K_1}(S_1), v_{K_1}(S_2))$. If $i_0 \neq 0$, this gives $p \nmid v(u_1 - 1)$, since both i_1 and $e_{K_1} + i_0$ are not divisible by p . If $i_0 = 0$, we still have $p \nmid v(u_1 - 1)$. Indeed, in this case we have a strict inequality in (6) by the second part of Lemma 5.1, whence $v(u_1 - 1) = i_1$.

Obviously, we have $u = u_1b^p$ with

$$b = \pi_1^{v_K(u)} \prod_{i_0 \leq i < \frac{i_1}{p}} (1 + \pi_1^i f_{pi}^{\phi^{-1}}(t^{p^{n_{pi}-1}}))^{-1}.$$

It remains to estimate $c(1 + \pi_1^i f_{pi}^{\phi^{-1}}(t^{p^{n_{pi}-1}}))$. Denoting $f_{pi}^{\phi^{-1}}$ by g , by definition we have

$$\begin{aligned} c(1 + \pi_1^i g(t^{p^{n_{pi}-1}})) &\geq \min\left(v_0\left(\pi_1^{i-1} g(t^{p^{n_{pi}-1}}) d\pi_1 t_L\right), \right. \\ &\quad \left. v_0\left(p^{n_{pi}-1} \pi_1^i g'(t^{p^{n_{pi}-1}}) t^{p^{n_{pi}-1}} dt t_L\right)\right) \\ &\geq \min(ie_{K_1}^{-1} + c(\pi_1), (n_{pi} - 1) + ie_{K_1}^{-1} + c(t)) \\ &\geq \min(ie_{K_1}^{-1} + N, N - pie_{K_1}^{-1} - 1 + ie_{K_1}^{-1} + c(t)) > N - 2. \end{aligned}$$

It follows $c(b) \geq N - 2$, and $c(u_1) \geq \min(c(u), c(b^{-p})) \geq N - 1$.

5.3 Proposition. *Let K be of Type I, not almost standard, with $\Gamma_c(K) > n+3$, where $n = v_p(e_{K/k})$. Assume that $K/k\{\{t\}\}$ is constant free (for some choice of t). Let K'/K be a constant extension of degree p . Then K' is of Type I, not almost standard, and $\Gamma_c(K') \geq \Gamma_c(K) - n - 3$.*

Proof. Let $K' = k'K$, where k'/k is an extension of degree p .

By Lemma 4.3 the proof is reduced to the case of cyclic totally ramified k'/k and K'/K . We have $K' = K(x_0)$, where $x_0^p = a \in k^*$.

Consider a chain of subfields

$$K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset K_n = K,$$

where each K_{i+1}/K_i is totally ramified of degree p , and $K_0/k\{\{t\}\}$ is tame.

Denote by L any standard field containing K' ; put $c(x) = c_L(x, t_L)$.

Let $\pi_n = \pi$ be a uniformizer of K with $c(\pi) = N$, where $N = \Gamma_c(K)$, and let $\pi_i = N_{K/K_i} \pi$; we have $c(\pi_i) \geq N$, $0 \leq i \leq n$ (by Corollary 4.1.1).

Applying Lemma 5.2 to $K_1/K_0, \dots, K_n/K_{n-1}$, we obtain that $K' = K(x)$, $x^p = u \in K$, $p \nmid v(u - 1)$, $c(u) \geq N - n$. In particular, K'/K is totally ramified, whence K' is not almost standard. We have

$$\begin{aligned} c(x - 1) &= c(x) + v_0(x) - v_0(x - 1) = \\ &= c(u) - 1 - v_0(x - 1) \geq N - n - 1 - \frac{p}{p-1} \geq N - n - 3. \end{aligned}$$

Pick integers i and j such that $v_{K'}(\pi') = 1$, where $\pi' = (x - 1)^i \pi^j$. Then

$$c(\pi') \geq \min(c(x - 1), c(\pi)) \geq N - n - 3,$$

and this proves that K' is of Type I with

$$\Gamma_c(K') \geq c(\pi') \geq \Gamma_c(K) - n - 3.$$

5.3.1 Corollary. *Let K be as in Proposition 5.3, with $\Gamma(K) > m(n + 3)$, where $n = v_p(e_{K/k})$, m a positive integer. Assume that l/k is an extension such that lK is almost standard. Then the inequality $[l : k] \geq p^m$ holds.*

Afterword

Thus, we have established, under some restrictions, a relation between two invariants measuring how far is a given 2-dimensional local field from being standard. We expect that this relation, in some refined form, can be extended to all higher local fields.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. H. Epp, *Eliminating wild ramification*, Invent. Math. **19** (1973), 235–249.
2. O. Yu. Ivanova, *On the relationship between Kurihara's classification and the theory of ramification removal*, Algebra i Analiz **24:2** (2012), 130–153; translation in St. Petersburg Math. J. **24:2** (2013), 283–299.
3. O. Yu. Ivanova, *Kurihara's classification and extensions of the maximal depth for multi-dimensional local fields*, Algebra i Analiz **24:6** (2012), 42–76; translation in St. Petersburg Math. J. **24:6** (2013), 877–901.
4. K. Kato, *A generalization of local class field theory by using K-groups, I*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sect. 1A Math **26**(1979), 303–376.
5. K. Kato, *A generalization of local class field theory by using K-groups, II*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sect. 1A Math **27**(1980), 603–683.
6. M. V. Koroteev, I. B. Zhukov, *Elimination of wild ramification*, Algebra i Analiz **11** (1999), 153–177; translation in St. Petersburg Math. J. **11** (2000), 1063–1083.
7. M. Kurihara, *On two types of complete discrete valuation fields*, Compos. Math. **63** (1987), 237–257.
8. A. I. Madunts, I. B. Zhukov, *Multidimensional complete fields: topology and other basic constructions*, Proceedings of the St. Petersburg Mathematical Society, Vol. III, 1–34, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 166, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.
9. J. Milnor, *Algebraic K-Theory and Quadratic Forms*, Inventiones math. **9**(1970), 318–344.
10. А. Н. Паршин, *Поля классов и алгебраическая K-теория*, УМН, **30:1(181)** (1975), 253–254.
11. А. Н. Паршин, *Локальная теория полей классов*, Труды мат. ин-та АН СССР **165**(1985), 143–170.
12. L. Xiao, I. Zhukov, *Ramification in the imperfect residue field case, approaches and questions*, Algebra i Analiz **26** (2014), 1–63; translation in St. Petersburg Math. J. **26** (2015), 695–740.
13. И. Б. Жуков, *Структурная теорема для полных полей*, Тр. С.-Петербург. мат. общ-ва **3**(1995), 194–214.
14. I. Zhukov, *Higher dimensional local fields*, (Münster, 1999), Geom. Topol. Monogr., vol. 3, Geom. Topol. Publ., Coventry, 2000, pp. 5–18.
15. I. B. Zhukov, G. K. Pak, *Approximation approach to ramification theory*, Algebra i Analiz **27:6** (2015), 150–162; translation in St. Petersburg Math. J. **27** (2016), 967–976.

Получено 26.08.2018 г.

Принято в печать 12.07.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 2.

УДК 517

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-198-206

Нет строго регулярного графа локально Хивуд

Aleksandar Jurišić, Janoš Vidali

Jurišić Aleksandar — Faculty of Computer Science and Informatics, University of Ljubljana, and Institute of Mathematics, Physics and Mechanics (Ljubljana, Slovenia).

e-mail: aj@fri.uni-lj.si

Vidali J. — Faculty of Mathematics and Physics, University of Ljubljana, and Institute of Mathematics, Physics and Mechanics (Ljubljana, Slovenia).

e-mail: janos.vidali@fmf.uni-lj.si

Аннотация

Мы исследуем, когда сильно регулярный граф локально Хивуд. Мы фокусируемся на предполагаемом сильно регулярном графе с параметрами $(v, k, \lambda, \mu) = (85, 14, 3, 2)$, который является единственным кандидатом на такой график. Предполагая, что граф является локально Хивудом, мы анализируем его структуру, в конце концов приходя к противоречию, которое позволяет нам заключить, что никакой сильно регулярный граф не является локально Хивудом.

Ключевые слова: сильно регулярные графы, локальные графы, граф Хивуд.

Библиография: 6 названий.

Для цитирования:

A. Jurišić, J. Vidali. Нет строго регулярного графа локально Хивуд // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 2, с. 198–206.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 2.

UDC 517

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-198-206

No strongly regular graph is locally Heawood

Aleksandar Jurišić, Janoš Vidali

Jurišić Aleksandar — Faculty of Computer Science and Informatics, University of Ljubljana, and Institute of Mathematics, Physics and Mechanics (Ljubljana, Slovenia).

e-mail: aj@fri.uni-lj.si

Vidali J. — Faculty of Mathematics and Physics, University of Ljubljana, and Institute of Mathematics, Physics and Mechanics (Ljubljana, Slovenia).

e-mail: janos.vidali@fmf.uni-lj.si

Abstract

We investigate when a strongly regular graph is locally Heawood. We focus on a putative strongly regular graph with parameters $(v, k, \lambda, \mu) = (85, 14, 3, 2)$, which is the only candidate for such a graph. Assuming that the graph is locally Heawood, we analyze its structure, finally arriving to a contradiction, which allows us to conclude that no strongly regular graph is locally Heawood.

Keywords: strongly regular graphs, local graphs, Heawood graph.

Bibliography: 6 titles.

For citation:

A. Jurišić, J. Vidali, 2019, "No strongly regular graph is locally Heawood", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 2, pp. 198–206.

1. Introduction

Let Γ be a k -regular graph with v vertices such that each pair of adjacent vertices has λ common neighbours, and each pair of nonadjacent vertices has μ common neighbours. Such a graph is said to be *strongly regular* with parameters (n, k, λ, μ) , or $\text{SRG}(n, k, \lambda, \mu)$ for short. Note that for a given parameter set, there may be one strongly regular graph, or there may be more or none at all. Looking at the tables of feasible parameters of strongly regular graphs by Andries E. Brouwer [2], one finds only 10 open cases on at most 100 vertices, see Table 1.

	n	k	λ	μ	σ	τ	m_σ	m_τ	graph	# of edges
O1	65	32	15	16	3.531	−3.531	32	32	2-graph*?	1040
O2	69	20	7	5	5	−3	23	45		690
O3	85	14	3	2	4	−3	34	50		595
O4	85	30	11	10	5	−4	34	50	$S(2, 6, 51)?$	1275
O5	85	42	20	21	4.110	−5.110	42	42	2-graph*?	1785
O6	88	27	6	9	3	−6	55	32		1188
O7	96	35	10	14	3	−7	63	32	$\text{pg}(5, 6, 2)$	2030
O8	99	14	1	2	3	−4	55	44		693
O9	99	42	21	15	9	−3	21	77		2079
O10	100	33	8	12	3	−7	66	33		1650

Таблица 1: Feasible parameters of strongly regular graphs on at most 100 vertices, with their parameters, spectrum, some graph information and the number of edges.

Related to the open case O8, John H. Conway asked if there is a graph on 99 vertices in which every edge belongs to a unique triangle and every nonedge to a unique quadrilateral (see [5], cf. [1])

Out of all these 10 cases, O3 has the smallest number of edges. The graph induced by the neighbours of a vertex is a cubic graph (i.e., all vertices have degree 3) on 14 vertices. It is known that there are precisely 509 connected cubic graphs on 14 vertices [6]. If we add the restriction that each pair of nonadjacent vertices has at most one common neighbour, then we are left with only 36 potential candidates. Among them, the Heawood graph has the largest girth, namely 6. One can describe it as the cycle C_{14} (labeled with elements of $\mathbb{Z}_{14}$), where we add the following chords: $x \sim x + 5$ for all even $x \in \mathbb{Z}_{14}$, and $x \sim x - 5$ for all odd $x \in \mathbb{Z}_{14}$. Three more possibilities are shown in Figure 1(b, c, d). There are also three more possibilities in the case the local graph is disconnected. In each case, one component is K_4 , while the other component is either (a) the Petersen graph, (b) the cycle C_9 (labeled with the elements of $\mathbb{Z}_9$), with 3 triangles ($x \sim x + 2$ for $x = 0, 3, 6$) and the vertex 9 adjacent to 1, 4 and 7, (c) the 3-prism with vertical edges subdivided and the new vertices adjacent to one more vertex.

We will prove that no strongly regular graph is locally Heawood.

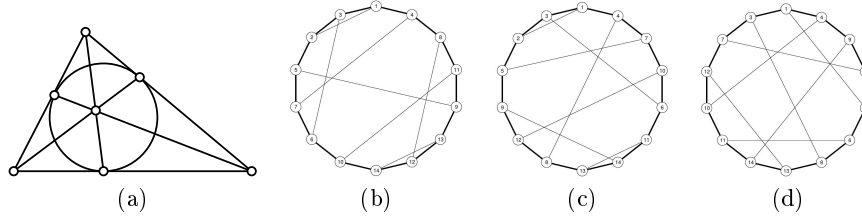


Рис. 1: (a) The Fano plane. (b, c, d) Some trivalent graphs on 14 points.

2. Preliminaries

It is easy to see that a strongly regular graph is either a disjoint sum of complete graphs (if $\lambda = k - 1$), or a connected graph with diameter 2. We may generalize the latter case.

Let Γ be a connected graph of diameter d and assume that there exist constants a_i, b_i, c_i ($0 \leq i \leq d$) such that for each pair of vertices u, v at distance i , there are precisely c_i neighbours of v at distance $i - 1$ from u , a_i neighbours of v at distance i from u , and b_i neighbours of v at distance $i + 1$ from u . Such a graph is said to be *distance-regular* with *intersection array* $\{b_0, b_1, \dots, b_{d-1}; c_1, c_2, \dots, c_d\}$. Clearly, such a graph is k -regular for $k = b_0$, and $k = a_i + b_i + c_i$ for all i ($0 \leq i \leq d$). Furthermore, we see that we always have $a_0 = c_0 = b_d = 0$ and $c_1 = 1$. Equivalently, we could say that a graph is distance-regular if all of its *distance partitions* (the partitions of vertices with respect to the distance from a fixed vertex) are *equitable* (the number of neighbours a vertex u has in a part C only depends on C and the part containing u) with the same parameters (which are precisely the numbers a_i, b_i, c_i).

Given an intersection array of a distance-regular graph, it is possible to compute the *intersection numbers* p_{ij}^h ($0 \leq h, i, j \leq d$) counting the number of vertices at distances i and j from any pair of vertices at distance h [3]. Just like in the case of strongly regular graphs, there might be zero, one or multiple distance-regular graphs with a given intersection array. It is easy to see that a graph $\text{SRG}(n, k, \lambda, \mu)$ of diameter 2 is distance-regular with intersection array $\{k, k - \lambda - 1; 1, \mu\}$ – conversely, every strongly regular graph with $\lambda \neq k - 1$ arises in this way. For more on strongly regular and distance-regular graphs, see BROUWER, COHEN & NEUMAIER [3].

Let Γ be a graph with n vertices, and let u be a vertex of Γ . We define $\Gamma_i(u)$ as the set of vertices at distance i from u in Γ (also called the *i -th subconstituent*). We abbreviate $\Gamma_1(u)$ as $\Gamma(u)$. For vertices u, v of Γ , we also define $\Gamma(u, v) = \Gamma(u) \cap \Gamma(v)$. By abuse of notation, we will also denote by $\Gamma(u)$ the *local graph at u* , i.e., the graph induced by the set $\Gamma(u)$. If there is a graph Δ such that $\Gamma(u)$ is isomorphic to Δ for every vertex u of Γ , then the graph Γ is said to be *locally Δ* . If u and v are vertices of Γ at distance 2, then the graph induced by $\Gamma(u, v)$ is called a *μ -graph* of Γ .

Let $A \in \{0, 1\}^{n \times n}$ be the adjacency matrix of Γ . An *eigenvalue* of the graph Γ is a number θ such that there exists a vector x for which $Ax = \theta x$ holds. The subspace of all such vectors is called the *eigenspace* of the eigenvalue θ ; its dimension is the *multiplicity* of θ . The multiset of all eigenvalues of Γ counted with their multiplicity is called the *spectrum* of Γ and is usually written in the form $\theta_1^{m_1} \theta_2^{m_2} \dots \theta_\ell^{m_\ell}$, where the eigenvalues θ_i ($1 \leq i \leq \ell$) are given in decreasing order, and the numbers m_i represent their multiplicities.

For sets $\mathbb{P}$ of *points* and $\mathbb{L}$ of *lines* and an *incidence relation* $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{P} \times \mathbb{L}$, we define an *incidence structure* as the triple $(\mathbb{P}, \mathbb{L}, \mathcal{I})$. A pair (p, ℓ) ($p \in \mathbb{P}, \ell \in \mathbb{L}$) is called a *flag* if $p \mathcal{I} \ell$ and an *antiflag* otherwise. A *projective geometry* $\text{PG}(d, q)$ is an incidence structure $(\mathbb{P}, \mathbb{L}, \in)$ in which the points are 1-dimensional subspaces of $\mathbb{F}_q^d$ (i.e., the d -dimensional vector space over the finite field of size q), the lines are 2-dimensional subspaces of $\mathbb{F}_q^d$, and the incidence relation is inclusion (i.e., for $p \in \mathbb{P}$ and $\ell \in \mathbb{L}$, $p \in \ell$ holds whenever $p \leq \ell$). Such an incidence relations has precisely $q^2 + q + 1$ points and $q^2 + q + 1$ lines.

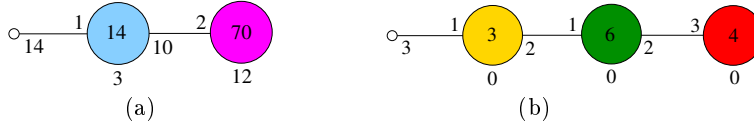


Рис. 2: Distance partitions of (a) $\text{SRG}(85, 14, 3, 2)$, spectrum $14^1 4^{34} - 3^{50}$, $b_1 = 10$, $a_2 = 12$, $k_2 = 70$, $p_{22}^2 = 57$, $p_{22}^1 = 60$, $\dots$, and (b) the Heawood graph, which is the $(3, 6)$ -cage and is bipartite with spectrum $3^1 \sqrt{2}^6 - \sqrt{2}^6 - 3^1$.

3. Locally Heawood

Let $F = (\mathbb{P}, \mathbb{L}, \mathcal{I})$ be the Fano plane $\text{PG}(2, 2)$ and H its incidence graph, which is known as the Heawood graph (see Figure 1(a)). It is the unique distance-regular graph with intersection array $\{b_0, b_1, b_2; 1, c_2, c_3\} = \{3, 2, 2; 1, 1, 3\}$. We try to construct a strongly regular graph with parameters $(n, k, \lambda, \mu) = (85, 14, 3, 2)$ denoted by Γ that is locally Heawood. Figure 2 shows the distance partitions of Γ and H .

Let ∞ be a vertex of Γ . As Γ is locally Heawood, we identify the vertices of the local graph $\Gamma(\infty)$ with points and lines of F , with a point and line adjacent when they are incident in F . Now consider the second subconstituent graph $\Gamma_2(\infty)$. It has 70 vertices that are divided corresponding to their μ -graphs into

- (i) $42 = 2 \cdot 7 \cdot 3$ vertices that correspond to signed flags of F : by $\lambda = 3$, there are 2 vertices per each flag, which we denote by $(p, \ell)^+$ and $(p, \ell)^-$, where $p \in \ell$, and
- (ii) $28 = 7 \cdot 4$ vertices that correspond to the antiflags of F : by $\mu = 2$, there is one such vertex for each antiflag, and we denote it by (p, ℓ) , where $p \notin \ell$.

Therefore, $V\Gamma = \{\infty\} \cup (\mathbb{P} \cup \mathbb{L}) \cup (A \cup B)$, where

$$\begin{aligned} A &:= \{(p, \ell) \mid p \in \mathbb{P}, \ell \in \mathbb{L}, p \notin \ell\} && \text{(the antiflags), and} \\ B &:= \{(p, \ell)^\delta \mid p \in \mathbb{P}, \ell \in \mathbb{L}, p \in \ell, \delta \in \{+, -\}\} && \text{(the signed flags)} \end{aligned}$$

and we have established all adjacencies when both vertices do not belong to $\Gamma_2(\infty)$:

$$\begin{aligned} \forall p \in \mathbb{P} : \infty &\sim p \\ \forall \ell \in \mathbb{L} : \infty &\sim \ell \\ \forall p \in \mathbb{P}, \ell \in \mathbb{L} : p &\sim \ell && \Leftrightarrow p \in \ell \\ \forall p \in \mathbb{P}, (q, m) \in A : p &\sim (q, m) && \Leftrightarrow p = q \\ \forall \ell \in \mathbb{L}, (q, m) \in A : \ell &\sim (q, m) && \Leftrightarrow \ell = m \\ \forall p \in \mathbb{P}, (q, m)^\delta \in B : p &\sim (q, m)^\delta && \Leftrightarrow p = q \\ \forall \ell \in \mathbb{L}, (q, m)^\delta \in B : \ell &\sim (q, m)^\delta && \Leftrightarrow \ell = m \end{aligned}$$

However, we can also say something about adjacencies in $\Gamma_2(\infty)$.

LEMMA 1. *Let $\mathbf{e} = (p, k)$ and $\mathbf{f} = (q, \ell)$ be flags of F , and $\mathbf{g} = (r, m)$ and $\mathbf{h} = (s, n)$ be antiflags of F . Then the following statements (i)-(iv) hold:*

- (i) *signed flags corresponding to the same point or line (or both) are not adjacent, i.e.,*
 $(p = q \vee k = \ell) \Rightarrow \mathbf{e}^\delta \not\sim \mathbf{f}^\varepsilon$ *for all* $\delta, \varepsilon \in \{+, -\}$,

- (ii) *antiflags corresponding to the same point or line are not adjacent, i.e.,*
 $(r = s \vee m = n) \Rightarrow \mathbf{g} \not\sim \mathbf{h},$
- (iii) *a signed flag is adjacent to two of the four antiflags corresponding to the same point or line,*
- (iv) *any antiflag is adjacent to precisely one of the signed flags $\mathbf{f}^+$ and $\mathbf{f}^-$ corresponding to the same point or line, i.e., $(q = r \vee \ell = m) \Rightarrow (\mathbf{f}^+ \sim \mathbf{g} \Leftrightarrow \mathbf{f}^- \not\sim \mathbf{g}),$*
- (v) *two distinct antiflags corresponding to the same point or line have precisely one common neighbour in $\Gamma_2(\infty)$, which is a signed flag corresponding to the common point or line.*
- (vi) *the signed flags $\mathbf{f}^+$ and $\mathbf{f}^-$ have no common neighbours in $\Gamma_2(\infty)$,*

In particular, the second subconstituent graph $\Gamma_2(\infty)$ has diameter 3 and only the opposite signed flags are at distance 3 in it.

PROOF. Let us consider the local graph $\Gamma(p)$ (resp. $\Gamma(\ell)$). Then

$$\{\infty\} \cup (\Gamma(p) \cap \Gamma(\infty)) \cup (\Gamma(p) \cap B) \cup (\Gamma(p) \cap A)$$

is its distance partition as a Heawood graph H , where the last two sets consist of signed flags and antiflags corresponding to the point p , respectively. A similar distance partition can be obtained for a line ℓ . As H is bipartite, (i) and (ii) follow immediately. The parameter $b_2 = 2$ implies (iii), and the parameters $c_2 = 1$ and $c_3 = 3$ of H then imply (iv). Considering (ii), (v) also follows. Finally, the signed flags $\mathbf{f}^+$ and $\mathbf{f}^-$ are nonadjacent by (i) and their common neighbours are $q, \ell \in \Gamma(\infty)$, so (vi) follows by $\mu = 2$. Let $\mathbf{f} = (p, \ell)$ be an antiflag or a flag of F , i.e., $\mathbf{f}^\varepsilon \in \Gamma_2(\infty)$, where $\varepsilon \in \{\emptyset, +, -\}$. Suppose that there exists an antiflag or signed flag $\mathbf{g}^\delta \in \Gamma_2(\infty)$ (where $\delta \in \{\emptyset, +, -\}$) that is not adjacent to $\mathbf{f}^\varepsilon$ and has no common neighbours with it in $\Gamma_2(\infty)$. Then $\Gamma(\mathbf{f}^\varepsilon, \mathbf{g}^\delta) = \{p, \ell\} \subset \Gamma(\infty)$ and $\Gamma(p, \ell) = \{\infty, \mathbf{f}^\varepsilon, \mathbf{g}^\delta\}$. Since $|\Gamma(p, \ell)| = 3$, we conclude $\mathbf{f}$ is a flag and $\mathbf{g} = \mathbf{f}$, $\delta = -\varepsilon$. Therefore, each antiflag is at distance at most 2 from every other vertex in $\Gamma_2(\infty)$, so the diameter of the latter graph is 3 by (vi). $\square$

LEMMA 2. *Let $\mathbf{g} = (q, m)$ be an antiflag of F .*

- (i) *The graph induced on $\Gamma(\mathbf{g}) \cap A$ is an induced subgraph of a hexagon.*
- (ii) *Let $\mathbf{f} = (p, \ell)$ be a flag of F such that $\mathbf{f}^\delta$ is adjacent to $\mathbf{g}$ for some $\delta \in \{+, -\}$. Then there is a signed flag $(r, n)^\varepsilon \in B$ with $q = r$ or $m = n$ for some $\varepsilon \in \{+, -\}$ that is adjacent to $\mathbf{f}^\delta$ and $\mathbf{g}$.*
- (iii) *Let $\mathbf{f} = (p, \ell)$ be an antiflag of Γ such that $\mathbf{g} \sim \mathbf{f}$. Then $p \not\in m$ or $q \not\in \ell$.*
- (iv) *Let $\mathbf{e} = (s, k)$ and $\mathbf{f} = (p, \ell)$ be flags of F such that $\mathbf{e}^\varepsilon$, $\mathbf{f}^\delta$ and $\mathbf{g}$ are mutually adjacent for some $\delta, \varepsilon \in \{+, -\}$. If $s = q$, then $p \not\in m$. If $k = m$, then $q \not\in \ell$.*
- (v) *Let $\mathbf{e} = (s, k)$ and $\mathbf{e}' = (s', k')$ be distinct flags of F , and let $\mathbf{f} = (p, \ell)$ and $\mathbf{f}' = (p', \ell')$ be flags or antiflags of F such that $\mathbf{g}, \mathbf{e}^\varepsilon, \mathbf{f}^\delta$ and $\mathbf{g}, \mathbf{e}'^{\varepsilon'}, \mathbf{f}'^{\delta'}$ induce triangles for some $\delta, \delta' \in \{\emptyset, +, -\}$ and $\varepsilon, \varepsilon' \in \{+, -\}$. If $s = s' = q$ and $\ell \neq m$, or $k = k' = m$ and $p \neq q$, then $p \neq p'$ and $\ell \neq \ell'$.*

PROOF. Consider the local graph $\Gamma(\mathbf{g}) \cong H$. It contains the nonadjacent vertices q and m , whose common neighbours ∞ and $\mathbf{g}$ are both outside $\Gamma(\mathbf{g})$. Therefore, q and m are at distance 3 in $\Gamma(\mathbf{g})$. Let D_j^i be the set of vertices at distances i and j from q and m in $\Gamma(\mathbf{g})$. Since the Heawood graph has $p_{12}^3 = p_{23}^3 = 3$, we have $|D_2^1| = |D_1^2| = |D_3^2| = |D_2^3| = 3$, and these four sets cover all the vertices of $\Gamma(\mathbf{g})$ except q and m . By $c_2 = 1$, there are matchings between D_2^1 and D_1^2 , D_2^1 and D_3^2 , and between D_1^2 and D_3^2 . $b_2 = 2$ implies that each vertex from D_3^2 or D_2^3 has two neighbours in D_2^3 or D_3^2 , respectively.

By Lemma 1(iv), the antiflag $\mathbf{g}$ is adjacent to six signed flags $(q, n_i)^{\varepsilon_i} \in D_2^1$ and $(r_i, m)^{\zeta_i} \in D_1^2$ for $i = 1, 2, 3$ with $n_i \neq n_j$ and $r_i \neq r_j$ if $i \neq j$. Since, by Lemma 1(ii), the vertices in $D_2^1 \cup D_1^2$

are all flags, it follows that $\Gamma(\mathbf{g}) \cap A \subseteq D_3^2 \cup D_2^3$. The graph induced on $D_3^2 \cup D_2^3$ is bipartite on 6 vertices of valency 2, i.e., a hexagon. This proves (i).

Let $\mathbf{f}$ be a flag of F such that $\mathbf{f}^\delta \sim \mathbf{g}$ for some $\delta \in \{+, -\}$. Then we have $\mathbf{f}^\delta \in D_2^1 \cup D_1^2 \cup D_3^2 \cup D_2^3$, so $\mathbf{f}^\delta$ must be adjacent to a vertex in $D_2^1 \cup D_1^2$ and (ii) follows.

Let $\mathbf{f} = (p, \ell)$ be a flag or antiflag such that $\mathbf{f}^\delta$ is in D_3^2 (resp. D_2^3) for some $\delta \in \{\emptyset, +, -\}$. Then there is a flag $\mathbf{e} = (s, k)$ such that $s = q$ and $\mathbf{e}^\varepsilon \in D_2^1$ (resp. $k = m$ and $\mathbf{e}^\varepsilon \in D_1^2$) and $\mathbf{e}^\varepsilon$ is adjacent to $\mathbf{f}^\delta$ for some $\varepsilon \in \{+, -\}$. Each signed flag in D_1^1 (resp. D_2^1) is nonadjacent to $\mathbf{f}^\delta$, and their $\mu = 2$ common neighbours are $\mathbf{g}$ and another flag or antiflag of $\Gamma(\mathbf{g})$. Therefore, $p \neq r_i$ (resp. $\ell \neq n_i$) for $i = 1, 2, 3$, i.e., $p \notin m$ (resp. $q \notin \ell$), so (iii) and (iv) follow.

Now let $\mathbf{f}' = (p', \ell')$ be another flag or antiflag such that $\mathbf{f}'^{\delta'}$ is in D_3^2 (resp. D_2^3) for some $\delta' \in \{\emptyset, +, -\}$. Then $\mathbf{f}^\delta$ and $\mathbf{f}'^{\delta'}$ are at distance 2 in $\Gamma(\mathbf{g})$, so their $\mu = 2$ common neighbours are $\mathbf{g}$ and another flag or antiflag of $\Gamma(\mathbf{g})$. Therefore, $p \neq p'$ and $\ell \neq \ell'$, which proves (v). $\square$

LEMMA 3. Let $\mathbf{f} = (p, \ell)$ be a flag of F and $\delta \in \{+, -\}$.

- (i) The graph induced on $\Gamma(\mathbf{f}^\delta) \cap B$ is an induced subgraph of an octagon.
- (ii) Let $\mathbf{g} = (q, m)$, $\mathbf{g}' = (q', m')$ and $\mathbf{h} = (r, n)$ be three distinct antiflags adjacent to $\mathbf{f}^\delta$ with either $p = q = q'$ and $m = n$, or $\ell = m = m'$ and $q = r$. Then $\mathbf{h} \sim \mathbf{g}'$.
- (iii) Let $\mathbf{g} = (q, m)$ and $\mathbf{g}' = (q', m')$ be two distinct antiflags adjacent to $\mathbf{f}^\delta$, and $\mathbf{e} = (s, k)$ and $\mathbf{e}' = (s', k')$ be two flags with $\mathbf{f}^\delta, \mathbf{g} \sim \mathbf{e}^\varepsilon$ and $\mathbf{f}^\delta, \mathbf{g}' \sim \mathbf{e}'^{\varepsilon'}$ for some $\varepsilon, \varepsilon' \in \{+, -\}$. If either $p = q = q'$, $m = k$ and $m' = k'$, or $\ell = m = m'$, $q = s$ and $q' = s'$, then $s \neq s'$ and $k \neq k'$.

PROOF. Let $\mathbf{f} = (p, \ell)$ be a flag of F , and consider the local graph $\Gamma(\mathbf{f}^\delta) \cong H$. It contains the adjacent vertices p and ℓ , two antiflags $(p, m), (p, m')$ adjacent to p , and two antiflags $(q, \ell), (q', \ell)$ adjacent to ℓ . Let D_j^i be the set of vertices at distances i and j from p and ℓ in $\Gamma(\mathbf{f}^\delta)$. Then $D_2^1 = \{(p, m), (p, m')\}$, $D_1^2 = \{(q, \ell), (q', \ell)\}$ and $|D_3^2| = |D_2^3| = 4$ by $p_{23}^1 = 4$. These sets cover all vertices of $\Gamma(\mathbf{f}^\delta)$. By $b_2 = 2$ and $c_2 = 1$, each vertex in D_3^2 or D_2^3 has two neighbours in D_2^2 or D_3^2 and one neighbour in D_2^1 or D_1^2 , respectively.

Since the vertices in $D_2^1 \cup D_1^2$ are all antiflags, it follows that $\Gamma(\mathbf{f}^\delta) \cap B \subseteq D_3^2 \cup D_2^3$. The graph induced on $D_3^2 \cup D_2^3$ is bipartite on 8 vertices of valency 2, and since $\Gamma(\mathbf{f}^\delta)$ is square-free by $c_2 = 1$, it follows that it must be an octagon. This proves (i).

Let $\mathbf{g}, \mathbf{g}'$ be the two antiflags in D_2^1 (resp. D_1^2), and $\mathbf{h}$ an antiflag in $\mathbf{f}^\delta$ corresponding to the same line (resp. point) as $\mathbf{g}$. Since $\mathbf{g}$ and $\mathbf{h}$ are nonadjacent by Lemma 1 and their $\mu = 2$ common neighbours are $\mathbf{f}^\delta$ and the common corresponding line (resp. point), it follows that they must be at distance 3 in $\Gamma(\mathbf{f}^\delta)$. The vertices at distance 3 from $\mathbf{g}$ are in $D_1^2 \cup D_3^2$ (resp. $D_2^1 \cup D_2^3$). As $r \neq p$ and $n \neq \ell$ by Lemma 1(iii), we have $\mathbf{h} \notin D_2^1 \cup D_1^2$. Therefore, $\mathbf{h}$ must be adjacent to $\mathbf{g}'$ and (ii) follows.

Let $\mathbf{g}, \mathbf{g}'$ be the two antiflags in D_2^1 (resp. D_1^2), and $\mathbf{e}^\varepsilon$ and $\mathbf{e}'^{\varepsilon'}$ be two signed flags in D_3^2 (resp. D_2^3) adjacent to $\mathbf{g}$ and $\mathbf{g}'$, respectively, with each adjacent pair corresponding to the same point (resp. line). As $\Gamma(\mathbf{f}^\delta)$ is bipartite, $\mathbf{e}^\varepsilon$ and $\mathbf{e}'^{\varepsilon'}$ must be at even distance in the octagon induced on $D_3^2 \cup D_2^3$. But as $\Gamma(\mathbf{f}^\delta)$ has girth 6 and $c_3 = 3$, two vertices at distance 4 in this octagon must have a common neighbour in $D_2^1 \cup D_1^2$. Therefore, $\mathbf{e}^\varepsilon$ and $\mathbf{e}'^{\varepsilon'}$ are at distance 2 in the octagon. They are nonadjacent, with their $\mu = 2$ common neighbours being $\mathbf{f}^\delta$ and an antiflag or signed flag in the octagon. It follows that $\mathbf{e}^\varepsilon$ and $\mathbf{e}'^{\varepsilon'}$ cannot correspond to the same point or line, so (iii) holds. $\square$

LEMMA 4. The following hold.

- (i) Let $\mathbf{e} = (p, \ell)$ and $\mathbf{f} = (q, m)$ be flags and $\mathbf{g} = (r, n)$ be an antiflag such that $\mathbf{e}^\varepsilon \sim \mathbf{g} \sim \mathbf{f}^\delta$ for some $\delta, \varepsilon \in \{+, -\}$. If $p = r$ or $\ell = n$, and $q = r$ or $m = n$, then $\Gamma(\mathbf{e}^\varepsilon) \cap \Gamma(\mathbf{f}^\delta) \cap \Gamma(\mathbf{g}) \cap A = \emptyset$.
- (ii) Each antiflag $\mathbf{g} \in A$ has 3 neighbours in A and 9 neighbours in B .

- (iii) Each signed flag $\mathbf{f}^\delta \in B$ has 6 neighbours in A and 6 neighbours in B , of which no two correspond to the same point or line.
- (iv) Let $\mathbf{g} = (r, n)$ and $\mathbf{h} = (s, k)$ be two adjacent antiflags. Then there are flags $\mathbf{e} = (p, \ell)$ with $p = r$ or $\ell = n$ and $\mathbf{f} = (q, m)$ with $q = s$ or $m = k$ such that $\mathbf{g}$ and $\mathbf{h}$ are adjacent to both $\mathbf{e}^\varepsilon$ and $\mathbf{f}^\delta$ for some $\delta, \varepsilon \in \{+, -\}$.

PROOF. Let $\mathbf{e} = (p, \ell)$ and $\mathbf{f} = (q, m)$ be flags and $\mathbf{g} = (r, n)$ be an antiflag such that $\mathbf{e}^\varepsilon \sim \mathbf{g} \sim \mathbf{f}^\delta$ for some $\delta, \varepsilon \in \{+, -\}$. If $p = q = r$ (resp. $\ell = m = n$), the common neighbours of $\mathbf{e}^\varepsilon$ and $\mathbf{f}^\delta$ are p (resp. ℓ) and $\mathbf{g}$ – in particular, no antiflag adjacent to $\mathbf{g}$ is among them. If $p = r \neq q$ and $m = n \neq \ell$, then $\mathbf{e}^\varepsilon$ and $\mathbf{f}^\delta$ are at odd distance in $\Gamma(\mathbf{g})$, so they do not share a common neighbour with $\mathbf{g}$. This proves (i).

Consider two distinct signed flags $(p, \ell)^\delta$ and $(p, m)^\varepsilon$. By Lemma 1(i), they are nonadjacent and their $\mu = 2$ common neighbours are p and an antiflag corresponding to p (or ℓ if $\ell = m$ and $\delta = -\varepsilon$). Therefore, a signed flag can be adjacent to at most one signed flag corresponding to a chosen point (and by a similar argument, a chosen line), i.e., a signed flag can have at most 6 neighbours in B and therefore at least 6 neighbours in A . Thus, there are at least $42 \cdot 6 = 252$ edges between A and B .

Now consider the local graph $\Gamma(\mathbf{f}^\delta)$. By Lemma 3(i), the at most 6 adjacent signed flags of $\mathbf{f}^\delta$ are on an octagon, and by Lemma 1(i), they are not adjacent to q and m , which are also in the local graph. The remaining vertices must then be antiflags. Consider only the four of them that are adjacent to q or m . There are at least 2 antiflags in $\Gamma(\mathbf{f}^\delta)$ adjacent to one of them. By Lemma 1(iv) and picking all possibilities for $\mathbf{f}^\delta$, each antiflag occurs six times in this position (for signed flags corresponding to the same point or line), and in each local graph $\Gamma(\mathbf{f}^\delta)$ it has distinct adjacent antiflags by (i). Therefore, there are at least $42 \cdot 2 = 84$ ordered pairs of adjacent antiflags, so the average valency on the graph induced on A is at least $84/28 = 3$. Thus, there are at most $28 \cdot (12 - 3) = 252$ edges between A and B .

We have thus established that there are precisely 252 edges between A and B , i.e., on average, an antiflag $\mathbf{g} \in A$ has 3 neighbours in A and 9 neighbours in B , while each signed flag $\mathbf{f}^\delta \in B$ has precisely 6 neighbours in each of A and B – this proves (iii). Consider the quotient matrix M of the partition of the vertices of Γ into $\{\infty\}$, $\Gamma(\infty)$, A and B

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 14 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 2 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

with average valencies between parts as entries. Its spectrum is $14^1 \ 4^1 \ -3^2$, which interlaces the spectrum of Γ tightly. The aforementioned partition is therefore equitable (see [4]). Hence, (ii) holds.

Let $\mathbf{g} = (r, n)$ be an antiflag. The above argument shows that each edge between $\mathbf{g}$ and another antiflag lies in the local graph $\Gamma(\mathbf{e}^\varepsilon)$ for precisely one choice of $\mathbf{e} = (p, \ell)$ with $p = r$ or $\ell = n$, and $\varepsilon \in \{+, -\}$. Let $\mathbf{h} = (s, k)$ be an antiflag that is adjacent to $\mathbf{g}$ and one of the aforementioned signed flags $\mathbf{e}^\varepsilon$. By applying the same argument to $\mathbf{h}$, we see that there is precisely one flag $\mathbf{f} = (q, m)$ with $q = s$ or $m = k$ such that $\mathbf{f}^\delta$ is adjacent to both $\mathbf{g}$ and $\mathbf{h}$ for some $\delta \in \{+, -\}$. This proves (iv). $\square$

We are now ready to prove the main result.

THEOREM 1. *No strongly regular graph is locally Heawood.*

PROOF. We have $k = 14$ and $\lambda = 3$, therefore $\mu \mid k(k - 1 - \lambda) = 140$ and hence $\mu \in \{2, 4, 5, 7, 10\}$, i.e., $n \in \{85, 50, 43, 35, 29\}$. By examining the tables by Brouwer [2], we see that only the first possibility is feasible. We therefore continue with the labels introduced above.

Consider an antiflag $\mathbf{g} = (p, \ell)$ and a point $q \neq p$ such that $q \notin \ell$ (resp. a line $m \neq \ell$ such that $p \notin m$). They are not adjacent, and no point or line or ∞ is among their common neighbours, which must then be two antiflags or signed flags corresponding to the point q (resp. line m). Since these are not adjacent to p or ℓ and they are distinct for the 3 possible choices of q (resp. m), it follows that the 6 neighbours of $\mathbf{g}$ not equal or adjacent to p or ℓ are, by Lemma 4(ii, iii), three antiflags and three signed flags, each one of which corresponds to one choice of q and one choice of m . Therefore, any antiflag (q, m) adjacent to $\mathbf{g}$ must have $p \notin m$ and $q \notin \ell$, and there are three such neighbours (actually, all three antiflags satisfying the condition), so the graph induced on the antiflags is the Coxeter graph with intersection array $\{3, 2, 2, 1; 1, 1, 1, 2\}$.

Since the Coxeter graph is triangle-free, the three common neighbours of two adjacent antiflags $\mathbf{g} = (p, \ell)$ and $\mathbf{h} = (q, m)$ are all signed flags: by Lemma 4(iv), one corresponding to p or ℓ and one corresponding to q or m , and by Lemma 4(i), another signed flag $\mathbf{f}^\delta$ for $\mathbf{f} = (r, n)$, $r \neq p, q$, $n \neq \ell, m$ and some $\delta \in \{+, -\}$. In the local graph $\Gamma(\mathbf{f}^\delta)$, the antiflags $\mathbf{g}$ and $\mathbf{h}$ are not adjacent to r or n , so they are adjacent to an antiflag $\mathbf{g}' = (r, \ell')$ and an antiflag $\mathbf{h}' = (q', n)$, thus forming a path $\mathbf{g}' \sim \mathbf{g} \sim \mathbf{h} \sim \mathbf{h}'$ or $\mathbf{g}' \sim \mathbf{h} \sim \mathbf{g} \sim \mathbf{h}'$. Since there are $28 \cdot 3/2 = 42$ edges in the Coxeter graph, it follows that such a path of four antiflags occurs in the local graphs at each of the $|B| = 42$ signed flags.

Consider a signed flag $\mathbf{f}^\delta$ for $\mathbf{f} = (r, n)$ and some $\delta \in \{+, -\}$, and a line ℓ' such that $r \notin \ell'$ (resp. a point q' such that $q' \notin n$). They are not adjacent, and by Lemma 4(iii), precisely one of their two common neighbours is a signed flag corresponding to ℓ' (resp. q'), so the second common neighbour is an antiflag $\mathbf{g}'$, also corresponding to ℓ' (resp. $\mathbf{h}'$ corresponding to q'). For a fixed choice of $\mathbf{f}^\delta$, Lemma 1(iii) implies that the antiflag $\mathbf{g}'$ is (r, ℓ') (resp. $\mathbf{h}' = (q', n)$) for precisely two of the four possible choices of ℓ' (resp. q'). Therefore, the two antiflags $\mathbf{g} = (p, \ell)$ and $\mathbf{h} = (q, m)$ adjacent to $\mathbf{f}^\delta$ with $r \neq p, q$, $n \neq \ell, m$ have $r \notin \ell, m$ and $p, q \notin n$. By the above argument, $\mathbf{g}$ and $\mathbf{h}$ are adjacent, so $p \notin m$ and $q \notin \ell$ also holds. As p, q, ℓ, m cover all points and lines of the Fano plane F , we are forced to conclude that r and n are not on the plane F , contradiction. Thus, the statement follows. $\square$

Acknowledgements

Aleksandar Jurišić and Janoš Vidali are supported by the Slovenian Research Agency research program P1-0285. Janoš Vidali is also supported by Slovenian Research Agency project J1-8130.

REFERENCES

1. D. Brandfonbrener. Algebraic graph theory, strongly regular graphs, and Conway's 99 problem, 2017. https://davidbrandfonbrener.github.io/Files/senior_paper.pdf.
2. A. E. Brouwer. Strongly regular graphs, 2013. <http://www.win.tue.nl/~aeb/graphs/srg/srgtab.html>.
3. A. E. Brouwer, A. M. Cohen, and A. Neumaier. *Distance-regular graphs*, volume 18 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Springer-Verlag, Berlin, 1989. DOI:10.1007/978-3-642-74341-2.
4. A. E. Brouwer and W. H. Haemers. The Gewirtz graph: An exercise in the theory of graph spectra. *European J. Combin.*, 14:397–407, 1993. DOI:10.1006/eujc.1993.1044.
5. J. H. Conway. Five \$1,000 problems (Update 2017), 2017. <https://oeis.org/A248380/a248380.pdf>.
6. G. Royle. Cubic graphs, 1996. <http://staffhome.ecm.uwa.edu.au/~00013890/remote/cubics/index.html>.

Получено 27.06.2019 г.

Принято в печать 12.07.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 20. Выпуск 2.

УДК 511.36

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-207-220

Тригонометрические суммы в метрической теории
диофантовых приближений

Э. И. Ковалевская

Ковалевская Элла Ивановна — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, Белорусский государственный аграрный технический университет (г. Минск).

e-mail: ekovalevsk@mail.ru

Аннотация

Это обзор результатов по метрической теории диофантовых приближений на многообразиях в n -мерном евклидовом пространстве, в доказательстве которых используются тригонометрические суммы.

Мы приводим как классические теоремы, так и современные результаты для многообразий Γ , $\dim \Gamma = m$, $n/2 < m < n$. Мы также показываем, как происходит переход от задачи о диофантовых приближениях к оценке тригонометрической суммы или тригонометрического интеграла, и приводим необходимые соображения теории меры.

Если $m \leq n/2$, то обычно используют другие методы. Например, метод существенных и несущественных областей или методы эргодической теории.

Здесь даны две фундаментальные теоремы рассматриваемой теории. Одну из них в 1977 г. доказал В. Г. Спринджук. Другую теорему в 1998 г. получили Д. И. Клейнбок и Г. А. Маргулис. Первая теорема была доказана методом *тригонометрических сумм*. Вторая теорема — *методами эргодической теории*. Для ее доказательства авторами была найдена связь между диофантовыми приближениями и однородными динамическими системами.

В заключении кратко упоминаем о тенденциях развития метрической теории диофантовых приближений зависимых величин, даем ссылки на ее современные аспекты.

Ключевые слова: диофантовы приближения, метрическая теория, дифференцируемые многообразия, тригонометрические суммы, метод Ван дер Корпута, метод тригонометрических сумм И. М. Виноградова.

Библиография: 31 название

Для цитирования:

Э. И. Ковалевская. Тригонометрические суммы в метрической теории диофантовых приближений // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 2, с. 207–220.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 20. No. 2.

UDC 511.36

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-207-220

Trigonometric sums in the metric theory of Diophantine
approximation

E. I. Kavaleuskaya

Kavaleuskaya Ela Ivanaŭna — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor of department of vysshaya mathematics, Belarusian State Agricultural Technic University (Minsk).

e-mail: ekovalevsk@mail.ru

Abstract

It is a survey with respect to using trigonometric sums in the metric theory of Diophantine approximation on the manifolds in n -dimensional Euclidean space.

We represent both classical results and contemporary theorems for Γ , $\dim \Gamma = m$, $n/2 < m < n$. We also discuss reduction of a problem about Diophantine approximation to trigonometric sum or trigonometric integral, and indicate measure-theoretic considerations.

If $m \leq n/2$ then usually it is used the other methods. For example, the essential and inessential domains method or methods of Ergodic Theory.

Here we cite two fundamental theorems of this theory. One of them was obtained by V. G. Sprindzuk (1977). The other theorem was proved by D. Y. Kleinbock and G. A. Margulis (1998). The first result was obtained using *method of trigonometric sums*. The second theorem was proved using *methods of Ergodic Theory*. Here the authors applied new technique which linked Diophantine approximation and homogeneous dynamics.

In conclusion, we add a short comment concerning the tendencies of a development of the metric theory of Diophantine approximation of dependent quantities and its contemporary aspects.

Keywords: Diophantine approximation, metric theory, differentiable manifolds, trigonometric sums, Van der Corput's method, I. M. Vinogradov's method of trigonometric sums.

Bibliography: 31 titles.

For citation:

E. I. Kavaleuskaya, 2019, "Trigonometric sums in the metric theory of Diophantine approximation", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 2, pp. 207–220.

1. Введение

Эта работа расширяет и дополняет [7], [8]. Мы приводим как классические теоремы, так и современные результаты по метрической теории диофантовых приближений на многообразиях.

В теории диофантовых приближений выделяют три подхода [14]. Один из них, *глобальный*, изучает общие законы аппроксимации, справедливые для всех чисел определенных классов. Второй, *индивидуальный подход*, имеет дело с аппроксимационными свойствами специальных чисел. Например, e , π , $\ln 2$, $\sqrt[3]{2}$ и т. д. Третий, *метрический подход*, занимает промежуточное положение между двумя названными и требует для описания аппроксимационных свойств чисел применения понятий *теории меры* [14].

Напомним, что метрическая теория диофантовых приближений на многообразиях начала формироваться во 2-й половине прошлого столетия после появления работ Й. П. Кубилюса [10], [11], Дж. В. С. Касселса (1951) (см. [3] гл. 7, с. 161; 197), В. М. Шмидта [28], [29] и В. Г. Спринджука (1964 г., см. [12]). Эта теория была связана с решением задач, мотивированных классификациями К. Малера (1932 г.) и Дж. Коксмы (1939 г.) трансцендентных чисел. Точнее, с определением меры Лебега множеств "*плохо*" и "*хорошо*" *аппроксимируемых чисел* рациональными дробями. С тех пор многие авторы внесли большой вклад в исследование по диофантовым приближениям на многообразиях, установив их арифметические и геометрические свойства. В частности, для более полного описания меры указанных точек была использована размерность Хаусдорфа [2], [17]–[23].

К настоящему времени сформировалось несколько методов для исследования диофантовых приближений на многообразиях: **(1) метод тригонометрических сумм**, использующий методы математического анализа [1], [2] (гл. 3, § 2), [4]–[8], [10], [11], [16], [21]–[23], [26], [28], [29]; **(2) метод существенных и несущественных областей** В. Спринджук, основанный на специальных свойствах целочисленных многочленов, [2], [9], [12], [13], [17]–[23]; **(3) методы эргодической теории** [20], [24], [25].

Для полноты изложения отметим также публикации [30], [31] и приложения метрической теории диофантовых приближений к задачам математической физики [24] (изучение явления резонанса) и к задачам теории коммуникаций [15] (регулировка помех при передаче сигналов).

2. Основная задача

Пусть $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \mathbb{R}$, и пусть $w(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ обозначает точную верхнюю грань таких $w > 0$, для которых неравенство

$$\|\gamma_1 a_1 + \dots + \gamma_n a_n\| < a^{-w}, \quad a = \max_{1 \leq i \leq n} |a_i| \neq 0, \quad (2.1)$$

где $\|x\|$ — расстояние от $x \in \mathbb{R}$ до ближайшего целого, имеет бесконечно много решений в наборах целых чисел $(a_1, \dots, a_n)$.

Из "принципа ящиков" Дирихле следует, что

$$w(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \geq n.$$

В 1926 г. А. Я. Хинчин показал, что $w(\gamma_1, \dots, \gamma_n) = n$ для почти всех $(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{R}^n$. Здесь и далее мы имеем в виду меру Лебега.

Вместо неравенства (2.1) можно рассматривать систему неравенств

$$\max(\|\gamma_1 q\|, \dots, \|\gamma_n q\|) < q^{-v}, \quad v > 0, \quad q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \quad (2.2)$$

Пусть $v(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ обозначает точную верхнюю грань таких $v > 0$, для которых система неравенств (2.2) имеет бесконечно много решений в целых числах $q > 0$. В этом случае из "принципа ящиков" Дирихле получим неравенство

$$v(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \geq 1/n.$$

Здесь нижняя граница также достижима (А. Хинчин, 1925 г.) для почти всех $(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{R}^n$. В силу "принципа переноса" Хинчина существуют определенные соотношения между величинами $w(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ и $v(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ [14] с. 65. В частности, равенства

$$w(\gamma_1, \dots, \gamma_n) = n, \quad v(\gamma_1, \dots, \gamma_n) = 1/n \quad (2.3)$$

эквивалентны.

Определение 1. Будем называть числа $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ "плохо" аппроксимируемыми, если для них выполняются неравенства (2.3).

Здесь мы имеем в виду, что они "плохо" аппроксимируются рациональными дробями с одним и тем же знаменателем, так как для них система неравенств (2.2) имеет только конечное число решений в целых числах $q > 0$ для $v > 1/n$.

Основная задача состоит в следующем: дать описание многообразий Γ in $\mathbb{R}^n$, $\dim \Gamma < n$, почти все точки которых (в смысле меры на Γ) являются системами плохо аппроксимируемых чисел.

Определение 2. Многообразие Γ , удовлетворяющее этому условию, называется *экстремальным* (согласно [14] с. 137).

Отметим, что раньше всех были найдены экстремальные многообразия Γ размерности $\dim \Gamma = 1$ в [10]–[12], [29].

3. Некоторые результаты

Сформулируем шесть теорем, в доказательствах которых применяется *метод тригонометрических сумм*. Более полную информацию можно найти в [2], [13]–[14], [22], [23]. Многообразие Γ в этих теоремах имеет *большую* размерность, т. е.

$$n/2 < \dim \Gamma < n.$$

Так как $\dim \Gamma < n$, то между точками на Γ существуют функциональные связи. Так возникает метрическая теория диофантовых приближений *зависимых величин*, которая исследует многообразия на *экстремальность*.

Чтобы упростить формулировку результатов, будем предполагать ([14], с. 66), что Γ определено в $\mathbb{R}^{m+n}$, $\dim \Gamma = m$,

$$\Gamma = (t_1, \dots, t_m, f_1, \dots, f_n) \quad (3.1)$$

где $t_1, \dots, t_m$ — независимые переменные в некоторой области $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$, $f_1, \dots, f_n$ — непрерывные функции от $(t_1, \dots, t_m) \subseteq \Omega$. Это предположение не является каким-либо ограничением, так как на Γ всегда можно выбрать локальные координаты так, чтобы получить представление Γ в виде (3.1). Далее, если будет установлена "локальная" экстремальность Γ , то, очевидно, получим и его "глобальную" экстремальность.

Когда мы делаем переход от *независимых* величин к *зависимым* величинам, то первоначально исследуется случай "слабой" зависимости. Итак, рассмотрим топологическое произведение

$$\Gamma = \Gamma_1 \times \dots \times \Gamma_m, \quad (3.2)$$

где m — *достаточно велико* по сравнению с размерностями компонент Γ_i .

Экстремальность следующих двух многообразий Γ обусловлена *арифметическими* свойствами. Здесь имеем $\dim \Gamma_i = 1$ ($1 \leq i \leq m$). В доказательствах соответствующих теорем используется *метод оценки тригонометрических сумм И. М. Виноградова*.

Теорема 3.1 ([26]). Пусть $k_1, \dots, k_m \in \mathbb{N}$, $K = \max(k_1, \dots, k_m)$, $K > 1$, $k = \min(k_1, \dots, k_m)$. Предположим, что действительные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ таковы, что неравенство

$$\|\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_m a_m\| < (a'_1 \dots a'_m)^{-1-\gamma}, \quad a'_i = |a_i| + 1,$$

при некотором фиксированном γ , $0 < \gamma < (k_1 + \dots + k_m)t^{-2}$, имеет только конечное число решений в целых числах $a_1, \dots, a_m$. Тогда произведение многообразий

$$\Gamma_i = (\lambda_i, \lambda_i x, \lambda_i x^2, \dots, \lambda_i x^{k_i}) \quad (i = 1, \dots, m) \quad (3.3)$$

экстремально, если : 1) $m \geq 2$, $K = 1$, и 2) $m \gg K^3 k^{-1} \ln K$, $K \geq 2$.

В следующей теореме многообразие задается *квадратичными* многочленами.

Теорема 3.2 ([5]). Для любого данного $\delta > 0$, неравенство

$$\prod_{1 \leq i \leq m} \|t_i q\| \prod_{1 \leq i \leq j \leq m} \|t_i t_j q\| < q^{-1-\delta} \quad (3.4)$$

имеет только конечное число решений в целых числах $q > 0$ для почти всех $(t_1, \dots, t_m) \in \mathbb{R}^m$.

Экстремальность следующего многообразия обусловлена определенными свойствами дифференцируемых функций. Пусть I_i ($i = 1, \dots, m$) — интервалы в $\mathbb{R}$. Пусть $k_1, \dots, k_m$ определены как в теореме 3.1. Пусть

$$f_{ij}(x) \quad (j = 1, \dots, k_i)$$

— $(k_i + 1)$ -раз непрерывно дифференцируемые действительные функции на интервалах I_i , и вронскианы

$$W(f'_{i1}, \dots, f'_{ik_i}) \neq 0 \quad (i = 1, \dots, m) \quad (3.5)$$

почти всюду на I_i . Рассмотрим многообразие (3.2), где

$$\Gamma_i = (f_{i1}, \dots, f_{ik_i}) \quad (i = 1, \dots, m). \quad (3.6)$$

Здесь каждая компонента является *одномерным* многообразием общего типа. В [1] было найдено простое условие, связывающее величины $m, k_1, \dots, k_m$ и гарантирующее экстремальность Γ .

Теорема 3.3 ([1]). *Многообразие Γ , определенное в (3.2), (3.5), (3.6) экстремально, если*

$$K^2 \leq 1 + k_1 + \dots + k_m.$$

В доказательстве теорем 3.2 и 3.3 используется *метод Ван дер Корпута* для оценки тригонометрических сумм. Отметим, что приведенные теоремы являются примерами "гладких" (дифференцируемых) экстремальных многообразий.

Теперь приведем один из фундаментальных результатов метрической теории диофантовых приближений на многообразиях, доказанный методом тригонометрических сумм.

Теорема 3.4 ([14] с. 78). *Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $1 \leq n < m$. Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^m$, и пусть $f_j = f_j(t_1, \dots, t_m)$ ($1 \leq j \leq n$) — действительные функции, определенные в Ω , удовлетворяющие условиям:*

- а)** *частные производные $\partial^2 f_j / \partial t_i \partial t_k$ непрерывны в Ω ($1 \leq j \leq n$), ($1 \leq i, k \leq m$);*
- б)** *определитель (якобиан)*

$$\det(\partial^2 f_j / \partial t_i \partial t_k)_{j,k=1,2,\dots,n} \neq 0 \quad \text{почти всюду в } \Omega,$$

- в)** *любая линейная комбинация*

$$h(t_k) = c_1(\partial^2 f_1 / \partial t_1 \partial t_k) + \dots + c_n(\partial^2 f_n / \partial t_1 \partial t_k)$$

с целыми коэффициентами $c_1, \dots, c_n$, рассматриваемая как функция одной переменной t_k ($1 \leq k \leq n$) при фиксированных остальных переменных, такова, что любой интервал, где она определена, можно разбить на ограниченное, не зависящее от $c_1, \dots, c_n$ число подынтервалов, на которых $h(t_k)$ монотонна.

Тогда Γ , определяемое по (3.1), экстремально.

В этой теореме экстремальность Γ обусловлена общими *аналитическими* предпосылками. Условие **в)**, имеющее длинную формулировку, просто по содержанию и выполняется для "стандартных" функций ([14] с. 78). Если же f_j — *аналитические* функции, то условие **в)** всегда выполняется, и его можно исключить из формулировки. Некоторые детали доказательства этой теоремы будут приведены в §§4 — 7 настоящей работы.

Следующая теорема является двумерным аналогом результата Шмидта [29].

Теорема 3.5 ([6]). *Пусть поверхность $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ задана уравнением $z = f(x, y)$, где функция f — трижды непрерывно дифференцируема в $\mathbb{R}^2$. Пусть общая (гауссова) кривизна поверхности Γ отлична от нуля почти всюду в $\mathbb{R}^2$. Тогда Γ экстремальна.*

Доказательство этой теоремы основывается на теореме 3.4 ($n = 1, m = 2$).

Следующая теорема является новым результатом в теории экстремальных непрерывно дифференцируемых m -мерных многообразий $\Gamma = (f_1(\bar{x}), \dots, f_N(\bar{x}))$, $\bar{x} \in \mathbb{E}^m = [0, 1] \times \dots \times [0, 1]$ в $\mathbb{R}^N$ ($1 \leq m < N$).

Пусть $h \geq 1$ — целое число, $mh > N$. Рассмотрим преобразование

$$\varphi_j : \mathbb{E}^{mh} \rightarrow \mathbb{R}^N,$$

определяемое уравнениями

$$\varphi_j(\bar{x}) = \varphi_j(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_h) = f_j(\bar{x}_1) + \dots + f_j(\bar{x}_h), \quad \bar{x}_s = (x_{s1}, \dots, x_{sm}) \quad (1 \leq j \leq N), \quad (1 \leq s \leq h).$$

Матрица Якоби этого преобразования $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_h) \rightarrow (\varphi_1(\bar{x}), \dots, \varphi_N(\bar{x}))$ имеет вид

$$J(\varphi_1, \dots, \varphi_h) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{11}} \dots \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{hm}} \\ \dots \dots \dots \\ \frac{\partial \varphi_N}{\partial x_{11}} \dots \frac{\partial \varphi_N}{\partial x_{hm}} \end{pmatrix}.$$

Теорема 3.6 ([16]). Если для некоторого числа h , определенного выше, якобиан $J(\varphi_1, \dots, \varphi_h)$ имеет минимальный ранг почти всюду в $\mathbb{E}^m$, то многообразие Γ экстремально.

В доказательстве теоремы используется теория знакопеременных интегралов и формула Парсевалю.

4. Рациональные точки вблизи гладких многообразий

Рассмотрим многообразие Γ , определенное в (3.1), точки которого удовлетворяют неравенству (2.2), где n заменяется на $m + n$. Покажем, что доказательство экстремальности Γ приводится к отысканию оценки сверху для числа рациональных точек, имеющих один и тот же знаменатель q и находящихся вблизи Γ . Идея такого приведения принадлежит Касселсу (1950) (см. [3] гл. 7).

Асимптотическая оценка числа этих точек при $q \rightarrow \infty$ должна быть "неулучшаемой" т. е. иметь порядок истинного числа таких точек ([14] с. 82-83). Этого можно достичь при определенных ограничениях на Γ , как в теоремах 3.1-3.6.

Пусть $\mathbb{E}^m = [0, 1) \times \dots \times [0, 1)$ в $\mathbb{R}^m$, и пусть $f_1, \dots, f_n$ — действительные функции от $t_1, \dots, t_m$, определенные в $\mathbb{E}^m$ с непрерывными производными

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t_i \partial t_j} \quad (i, j = 1, 2, \dots, m).$$

Рассмотрим систему диофантовых неравенств

$$\max(|t_1 q|, \dots, |t_m q|, |f_1 q|, \dots, |f_n q|) < q^{-v} \quad (4.1)$$

для точек многообразия Γ . Из (4.1) следует, что

$$\begin{aligned} |t_i - a_i/q| &< q^{-1-v} \quad (1 \leq i \leq m), \\ |f_j - b_j/q| &< q^{-1-v} \quad (1 \leq j \leq n) \end{aligned}$$

при некоторых целых числах a_i, b_j . Отсюда находим

$$\begin{aligned} f_j(t_1, \dots, t_m) &= f_j(a_1/q, \dots, a_m/q) + O(q^{-1-v}), \\ |q f_j(a_1/q, \dots, a_m/q)| &\ll q^{-v} \quad (j = 1, 2, \dots, n), \end{aligned} \quad (4.2)$$

где $0 \leq a_i \leq q$, так как переменные t_i принадлежат $\mathbb{E}^m$. Запись $X \ll Y$ эквивалентна обозначению $X = O(Y)$. Таким образом, мы видим, что при заданном q мера множества тех точек $(t_1, \dots, t_m) \in \mathbb{E}^m$, для которых выполняется (4.1), оценивается величиной

$$\ll q^{-m(1+v)} N_v(q),$$

где $N_v(q)$ — число решений в целых числах $a_1, \dots, a_m$, $0 \leq a_i \leq q$, системы неравенств (4.2).

5. Редукция к тригонометрической сумме или тригонометрическому интегралу

Следующая лемма позволяет получить оценку сверху для числа решений системы диофантовых неравенств, не прибегая к разложению в ряды Фурье характеристических функций соответствующих интервалов. Она дает возможность сразу работать с конечными суммами вместо бесконечных рядов. Й. Кубилюс [11] был первым, кто применил эти конструктивные соображения.

Лемма 5.1 ([14] с. 81). Пусть n, q, Q — натуральные числа, $g_{ij}, r_i > 0$ — действительные числа ($1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq Q$). Пусть $N(q, Q)$ — число таких чисел j , для которых величины $g_{1j}, \dots, g_{nj}$ одновременно удовлетворяют неравенствам

$$\|g_{1j}\| < q^{-r_1}, \dots, \|g_{nj}\| < q^{-r_n}. \quad (5.1)$$

Тогда

$$N(q, Q) \ll q^{-r} \sum_{|c_1| < q^{r_1}} \dots \sum_{|c_n| < q^{r_n}} \left| \sum_{j=1}^Q e^{2\pi i(c_1 g_{j1} + \dots + c_n g_{jn})} \right|,$$

где $r = r_1 + \dots + r_n$ и символ $\ll$ скрывает величину, зависящую только от n .

Эта лемма применяется при доказательствах теорем 3.1, 3.4 и 3.5.

Следующая лемма позволяет сразу оценивать меру точек $(t_1, \dots, t_m) \in \mathbb{E}^m$, для которых выполняется, например, (3.4), без перехода к промежуточным неравенствам типа (4.2). Это используется в доказательстве теорем 3.2, 3.3, 3.5 и 3.6.

Лемма 5.2 ([14] с. 99-100). Для заданных натуральных чисел m, n и Q пусть $f_j(\bar{x})$ — действительные измеримые функции, определенные в $\mathbb{E}^m$ ($1 \leq j \leq n$), и пусть $r_j > 0$ как в лемме 5.1. Обозначим через $\mu(q)$ меру множества тех точек $\bar{x} \in \mathbb{E}^m$, для которых выполняется система неравенств

$$\max_{(j)} \|f_j(\bar{x})\| < q^{-r_j} \quad (1 \leq j \leq n).$$

Тогда

$$\mu(q) \ll q^{-r} \sum_{|c_1| < q^{r_1}} \dots \sum_{|c_n| < q^{r_n}} \left| \int_{\mathbb{E}^m} e^{2\pi i(c_1 f_1 + \dots + c_n f_n)} d\bar{x} \right|,$$

где $r = r_1 + \dots + r_n$ и символ $\ll$ скрывает величину, зависящую только от n .

6. Упрощения, использующие соображения теории меры

В. Шмидт [29] был первым, кто предложил такие упрощения. Они подробно изложены в [14] с. 85–87. Мы покажем их применение на примере теоремы 3.3. Согласно условиям (3.5) этой теоремы можно считать, что *вронскианы* $W(f'_{i1}, \dots, f'_{ik_i})$ удовлетворяют неравенствам

$$0 < \alpha \leq W(f'_{i1}, \dots, f'_{ik_i}) \leq \beta \quad (1 \leq i \leq m)$$

с некоторыми числами α, β и что они монотонны на соответствующих интервалах I_i .

Действительно, для заданного $\delta > 0$ пусть $A_i(\delta)$ — множество таких точек $x \in I_i$, для которых $|W(f'_{i1}, \dots, f'_{ik_i})| > \delta$. Так как $W(f'_{i1}, \dots, f'_{ik_i})$ — непрерывная функция, то $A_i(\delta)$ — открытое множество, т. е.

$$A_i(\delta) = \sum_{k=1}^{\infty} I_{ik}(\delta),$$

где $I_{ik}(\delta)$ — интервалы и знак суммы означает объединение *непересекающихся* множеств. Из того, что $W(f'_{i1}, \dots, f'_{ik_i}) \neq 0$ почти всюду на I_i следует, что $|A_i(\delta)| \rightarrow |I_i|$, когда $\delta \rightarrow 0$. Поэтому, рассматривая множество

$$A_1(\delta) \times \dots \times A_m(\delta) = \sum_{k_1, \dots, k_m} I_{1k_1}(\delta) \times \dots \times I_{mk_m}(\delta),$$

вместо $I = I_1 \times \dots \times I_m$, мы сделаем переход к множеству, *мера* которого при достаточно малом δ будет *сколь угодно мало* отличаться от *меры исходного множества*. Следовательно, достаточно доказать экстремальность Γ на интервалах $I_{1k_1}(\delta), \dots, I_{mk_m}(\delta)$. Но на этих интервалах вронскианы $W(f'_{i1}, \dots, f'_{ik_i})$ удовлетворяют неравенствам $|W(f'_{i1}, \dots, f'_{ik_i})| > \delta$, и будучи непрерывными функциями, они ограничены в любом замкнутом подынтервале. Несколько уменьшив длины интервалов, $I_{1k_1}(\delta), \dots, I_{mk_m}(\delta)$, мы перейдем к *замкнутым* интервалам, на которых $|W(f'_{i1}, \dots, f'_{ik_i})| \leq \Delta < \infty$. Каждый такой интервал представляет собой *не более чем счетную* систему подынтервалов, на которых $W(f'_{i1}, \dots, f'_{ik_i})$ монотонны [14] с. 86. Действительно, функции $W'(f'_{i1}, \dots, f'_{ik_i})$ непрерывны по условию теоремы, и множества $\{x : W(f'_{i1}, \dots, f'_{ik_i}) > 0\}$, $\{x : W(f'_{i1}, \dots, f'_{ik_i}) < 0\}$ открыты и представляют собой не более чем счетные системы интервалов, так что $W'(f'_{i1}, \dots, f'_{ik_i})$ *не более чем счетное число раз меняет знак*.

Таким образом, получены разбиения интервалов $I_{1k_1}(\delta), \dots, I_{mk_m}(\delta)$, в которых обеспечено выполнение условий, указанных в начале этого параграфа. Не прибегая к новым обозначениям, будем полагать, что эти новые интервалы и есть $I_1, \dots, I_m$. Более того, можем считать, что $I_1, \dots, I_m$ — интервалы единичной длины [14] с. 87.

Далее, следует обратить внимание на следующий факт: согласно лемме *Бореля-Кантелли* [14, с. 10] *для того, чтобы доказать экстремальность Γ , достаточно установить сходимость ряда $\sum_{q=1}^{\infty} q^{-m(1+v)} N_v(q)$, где $N_v(q)$ определено в конце §4, при любом $v > 1/(m+n)$* (см. [14] с. 83). Очевидно, этот ряд сходится, если при $v > 1/(m+n)$ сходится ряд

$$\sum_{q=1}^{\infty} q^{-m(1+v)} N(q), \quad (6.1)$$

где $N(q)$ — число решений системы неравенств (4.2) при $v = v_0 = 1/(m+n)$, так как $N_v(q) \leq N(q)$. Получение оценки

$$N(q) \ll q^{m(1+v_0)-1+\varepsilon}, \quad (6.2)$$

где $\varepsilon > 0$ — как угодно мало, достаточно для *обеспечения* сходимости ряда (6.1) при любом $v > v_0$.

7. Некоторые этапы доказательства теоремы 3.4

Основываясь на §§4–6, обсудим доказательство теоремы 3.4. Чтобы оценить число решений неравенств во второй строке формул (4.2), применим лемму 5.1. Тогда получим

$$N(q) \ll q^{-nv_0} \sum_{\bar{c}} \left| \sum_{\bar{a}} e^{2\pi i q F(a/q)} \right|, \quad (7.1)$$

где $F(t_1, \dots, t_m) = c_1 f_1 + \dots + c_n f_n$, векторы $\bar{c} \in \mathbb{Z}^n$ с условием $|\bar{c}| \ll q^{v_0}$, векторы $\bar{a} \in \mathbb{Z}^m$ имеют координаты $a_1, \dots, a_m$, удовлетворяющие условиям

$$0 \leq a_i \leq q \quad (1 \leq i \leq m). \quad (7.2)$$

Далее, применяем следующие аргументы [14] с. 84-85. Пусть q_0 — целое число из интервала $[q^{(1-v_0)/2}] \leq q_0 \leq 2[q^{(1-v_0)/2}]$, где $[x]$ — целая часть $x \in \mathbb{R}$. Разделим множество $A(q)$ всех целых точек $\bar{a} = (a_1, \dots, a_m)$ с координатами, удовлетворяющими (7.2), на подмножества $A_{\bar{s}}(q_0)$, полагая $\bar{a} = q_0 \bar{s} + \bar{a}_0$, $\bar{a}_0 = (a_{01}, \dots, a_{0m})$, $0 \leq a_{0i} < q_0$ ($1 \leq i \leq m$), $\bar{s} = (s_1, \dots, s_m)$, $0 \leq s_i \leq S = [qq_0^{-1}]$ ($1 \leq i \leq m$). Собираем в $A_{\bar{s}}(q_0)$ все векторы $\bar{a}$ с одним и тем же $\bar{s}$. Получим

$$f_j\left(\frac{\bar{a}}{q}\right) = f_j\left(\frac{q_0 \bar{s}}{q}\right) + \frac{1}{q} \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial t_i} f_j\left(\frac{q_0 \bar{s}}{q}\right) a_{0i} + O(q^{-1-v_0})$$

для $\bar{a} \in A_{\bar{s}}(q_0)$. Следовательно, соответственно различным множествам $A_{\bar{s}}(q_0)$ система неравенств во второй строке формулы (4.2) распадается на $\ll S^m$ систем вида

$$\|\alpha_{0j} + \sum_{i=1}^m \beta_{ij} \alpha_{0i}\| \ll q^{-v_0} \quad (i = 1, \dots, n), \quad (7.3)$$

где

$$\alpha_{0j} = q f_j\left(\frac{q_0 \bar{s}}{q}\right), \quad \beta_{ij} = \frac{\partial}{\partial t_i} f_j\left(\frac{q_0 \bar{s}}{q}\right)$$

и $a_{0i} \in \mathbb{Z}$, $0 \leq a_{0i} < q_0$ ($1 \leq i \leq m$).

Чтобы оценить N_0 — число решений системы (7.3), применим лемму 5.1. Получим

$$N_0 \ll q^{-nv_0} \sum_{\bar{c}} \left| \sum_{\bar{a}} e^{2\pi i \{ \sum_{j=1}^n c_j (\alpha_{0j} + \sum_{i=1}^m \beta_{ij} \alpha_{0i}) \}} \right|,$$

где $\bar{c} \in \mathbb{Z}^n$, $|\bar{c}| \ll q^{v_0}$, и $\bar{a}_0 \in \mathbb{Z}^m$, $0 \leq a_{0i} < q_0$ ($1 \leq i \leq m$). Далее, суммируя по $\bar{a}_0$, находим

$$N_0 \ll q^{-nv_0} \sum_{\bar{c}} \prod_{i=1}^m \min(q_0, \|L_i(\bar{c})\|^{-1}), \quad (7.4)$$

где

$$L_i(\bar{c}) = \sum_{j=1}^n \beta_{ij} c_j, \quad \beta_{ij} = \frac{\partial}{\partial t_i} f_j\left(\frac{q_0 \bar{s}}{q}\right) \quad (i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n),$$

$$\max_{(j)} |c_j| \ll q^{v_0} \quad (j = 1, \dots, n).$$

Далее для оценивания соответствующих тригонометрических сумм применяется метод *Ван дер Корпута*. Затем, суммируя найденные для (7.4) оценки по различным целым векторам $\bar{s}$, получим оценку для $N(q)$ вида (6.2). Другие детали доказательства теоремы 3.4 можно найти в [14] § 8.

8. Заключение

Здесь дадим краткий комментарий относительно тенденций развития метрической теории диофантовых приближений в 80-е и 90-е годы прошедшего столетия (см. также [22]). Современные аспекты развития и результаты см. в [9], [15]–[21], [23], [27], [31].

1) Вместо (2.1) можно рассматривать обобщенное неравенство

$$\|\gamma_1 a_1 + \dots + \gamma_n a_n\| < \psi(a), \quad a = \max_{1 \leq i \leq n} |a_i| \neq 0,$$

где $\psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $\psi(a) \downarrow 0$, когда $a \rightarrow \infty$ и

$$\sum_{a_1, \dots, a_n=1}^{\infty} \psi^n(a) < \infty.$$

Такие точки $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ называются ψ -аппроксимлируемыми.

2) Отметим, что большинство теорем, которые мы рассмотрели, можно усилить, если экстремальность заменить на "усиленную" экстремальность (оценивать приближения в терминах произведения коэффициентов, а не в терминах высоты линейных форм). Например, см. [5], [18], [22].

3) Стоит упомянуть следующую работу: V. Sprindžuk "Eine diophantische Eigenschaft der Traectorien der Brownischen Bewegung". Wiss. Z. Friedrich-Schiller-Univ. Jena/Thüringen, 21 (1972), p. 157–160. Здесь доказаны две теоремы о приближениях на траекториях случайных процессов. Приведем одну из них.

Теорема ([14] с. 113–116). Пусть $\xi(t)$ — вероятностный процесс броуновского движения. Тогда случайные кривые $\Gamma = (t, \xi(t))$, $0 \leq t \leq T$, с вероятностью 1 экстремальны.

4) Метрическая теория диофантовых приближений получила развитие и в полях $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}_p$, $\mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{Q}_p$, рассматриваемых с соответствующими архимедовыми или неархимедовыми метриками (см. [18], [22], [23], [27]).

5) Отметим, что в 1972 г. Спринджук сформулировал центральную проблему рассматриваемой теории ([13], см. также [14] с. 136):

Если $f_1(x), \dots, f_n(x)$ — действительные аналитические функции, определенные на интервале I , причем $1, f_1(x), \dots, f_n(x)$ линейно независимы над полем действительных чисел, то многообразие

$$\Gamma = (f_1(x), \dots, f_n(x)), \quad x \in I,$$

экстремально.

Д. Клейнбок и Г. Маргулис в 1998 г. доказали это утверждение [25]. Они нашли связь между диофантовыми приближениями и однородными динамическими системами и использовали методы эргодической теории.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Берник В. И., Ковалевская Э. И. Экстремальное свойство некоторых поверхностей в n -мерном евклидовом пространстве // Матем. Заметки, 1974, Т. 15, № 2. С. 247–254.
2. Берник В. И., Мельничук Ю. В. Диофантовы приближения и размерность Хаусдорфа. — Минск: Наука и техника, 1988.
3. Касселс Дж. В. С. Введение в теорию диофантовых приближений. М: Иностран. лит. 1961. (перевод с англ. А.М. Полосюева); Cassels J. W. S. An introduction to Diophantine Approximation. Cambridge Tracts in Math and Math. Phys., 45. Cambridge Univ. Press. 1957.
4. Ковалевская Э. И. "Гиперболические" диофантовы приближения на аналитических многообразиях // Докл. АН БССР, 1975, Т. 19, № 3. С. 200–203.
5. Ковалевская Э. И. Диофантовы приближения с квадратичными многочленами // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. н. 1975, № 4. С. 5–14.
6. Ковалевская Э. И. Одно геометрическое свойство экстремальной поверхности // Матем. заметки. 1978. № 23(2). С. 177–181.
7. Ковалевская Э. И. Тригонометрические суммы и метрическая теория диофантовых приближений на многообразиях. Материалы конференции // XV Международная конференция "Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения посвященная столетию со дня рождения доктора физико-математических наук, профессора Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, Коробова

- Николая Михайловича: тезисы докладов международной конференции (Тула, 28–31 мая 2018 г.). — Тула, 2018. С. 257–260.
8. Ковалевская Э. И. Геометрическое и арифметическое описание экстремальных многообразий в метрической теории диофантовых приближений. Материалы конференции // XVI Международная конференция "Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения и проблемы истории посвященная 80-летию со дня рождения профессора Мишеля Деза.: тезисы докладов международной конференции (Тула, 13–18 мая 2019 г.). — Тула, 2019. С. 239–241.
 9. Ковалевская Э. И., Рыкова О. В. Развитие метода существенных и несущественных областей для подсчета векторов с действительными алгебраическими координатами вблизи гладких поверхностей // Чебышевский сборник — Тула: Изд-во ТПГУ, 2013, Т. 14, вып. 4. С. 119–126.
 10. Кубилюс Й. П. О применении метода академика Виноградова к решению одной задачи метрической теории чисел // Докл. АН СССР. 1949. Том 67. С. 783–786.
 11. Кубилюс Й. П. О применении метода академика Виноградова к решению одной задачи метрической теории чисел // Докл. АН СССР. 1949. Том 67. С. 783–786.
 12. Спринджук В. Г. Проблема Малера в метрической теории чисел // Минск: Изд-во Наука и техника, 1967. 184 с.
 13. Спринджук В. Г. Метод тригонометрических сумм в метрической теории диофантовых приближений зависимых величин // Труды Матем. ин-та АН СССР, 1972. Т. 128, № 2. С. 212–254.
 14. Спринджук В. Г. Метрическая теория диофантовых приближений / В. Г. Спринджук // Москва: Изд-во Наука, 1977. 144 с.
 15. Adiceam F., Beresnevich V., Levesley V., Velani S., Zorin E. Diophantine approximation and applications in interference alignment // Advances in Math. 302. 2016, P. 231–279.
 16. Bayramoglu M., Jabbarov I. Sh., Kazimova L. G. On some theoretic-functional results concerning the theory of extremality and their application // Proc. Inst. Math. Mech. Natl. Acad. Sci. Azerb. 44(2). 2018, P. 229–237.
 17. Beresnevich V., Bernik V., Götze F. Integral polynomials with small discriminants and resultants // Advances in Math. 298. 2016, P. 393–412.
 18. Beresnevich V., Ramirez F., Velani S. Metric Diophantine approximation: aspects on recent work. In Dynamics and Analytic Number Theory. LMS Lecture Notes Ser. 437. 2016 (eds. D. Badziahin, A. Gorodnik, N. Reyerimhoff). Cambridge Univ. Press (Cambridge. 2016). P. 1–95.
 19. Beresnevich V., Lee L., Vaughan R. C., Velani S. Diophantine approximation on manifolds and lower bounds Hausdorff dimension // Math. 63. 2017. P. 762–779.
 20. Beresnevich V., Velani S. A note on three problems in metric Diophantine approximation. In recent Trends in Ergodic Theory and Dynamical Systems, Contemp. Math. 631. 2015. Amer. Math. Soc. Providence. R. I. 2015. P. 211–229.
 21. Beresnevich V., Vaughan R. C., Velani S., Zorin E. Diophantine approximation on manifolds and the distribution of rational points: contributions to the convergence theory // Int. Math. Research Notices. 2016. P. 1–24.

22. Bernik V. I., Dodson M. M. *Metric Diophantine Approximation of Manifolds*. Cambridge Tracts in Math. Vol. 137. Cambridge University Press. Cambridge. 1999.
23. Bugeaud Y. *Approximation by algebraic numbers*. Cambridge Tracts in Math. Vol. 169. Cambridge Univ. Press, 2004.
24. Dodson M. M., Vickers J. A. G. *Number Theory and dynamical systems* // London Math. Soc. Lecture Note Ser. Vol. 134. Cambridge Univ. Press. 1989.
25. Kleinbock D. Y., Margulis G. A. *Flows on homogeneous spaces and Diophantine approximation on manifolds* // Ann. Math. 1998. Vol. 148. P. 339–360.
26. Kovalevskaja E. I. *Metric theorems on the approximation of zero by a linear combination of polynomials with integral coefficients*, Acta Arith. 1973. Vol. 25. P. 93–104.
27. Kovalevskaya E. *The convergence part of a Khintchine-type theorem in the ring of adeles* // Tatra Mountains Math. Publ. 59. 2014. P. 39–50.
28. Schmidt W. M. *Über Gitterpunkte auf gewissen Flächen* // Monatsh. Math. 68. 1964, No. 1. P. 59–74.
29. Schmidt W. M. *Metrische Sätze Über simultane Approximation abhängiger Größen* // Monatsh. Math. 1964. Vol. 68, No. 2. P. 154–166.
30. Schmidt W. M. *Diophantine Approximation*. Lecture Notes in Math. Vol. 785. Springer-Verlag, 1980.
31. Steuding J. *Diophantine analysis*. Course notes from a Summer School. Trends in Math. Birkhäuser. Springer Int. Publ. AG. 2016.

REFERENCES

1. Bernik V. I., Kovalevskaja E. I. *Extremal properties of some surface in n -dimensional Euclidean space*, Math. Notes, 15(2). 1974, pp. 247–254.
2. Bernik V. I., Melnichuk Yu. V. *Diophantine approximation and Hausdorff dimension*. Nauka i Nechnika, Minsk, 1988. 23. Cassels J. W. S. *An introduction to Diophantine Approximation*. Cambridge Tracts in Math and Math. Phys., 45. Cambridge Univ. Press. 1957.
3. Cassels J. W. S. *An introduction to Diophantine Approximation*. Cambridge Tracts in Math and Math. Phys., 45. Cambridge Univ. Press. 1957.
4. Kovalevskaja E. I. *"Hyperbolic" approximation on analytic manifolds*, Dokl. Akad. Nauk BSSR, vol. 19(3), 1975, pp. 200–203.
5. Kovalevskaja E. I. *Diophantine approximation with quadratic polynomials*, Vesci Akad. Navuk BSSR. Ser. Fiz.-Mat. Navuk, 4, 1975, pp. 5–14.
6. Kovalevskaja E. I. *One geometric property of extremal surface*, Math. Notes, 23(2), 1978, pp. 177–181.
7. Kovalevskaya, E. I. *The trigonometric sums and the metric theory of Diophantine approximation on manifolds*, Proc. XV Int. Conf. on Algebra, Number Theory and Discrete Geometry: Contemporary Problems and Applications devoted to centenary of professor N. M. Korobov. Tula, Russia, 28–31 May 2018, P. 257–260. (In Russian)

8. Kavaleuskaya, E. I. Geometric and arithmetic description of extremal manifolds in the metric theory of Diophantine approximation, Proc. XVI Int. Conf. on Algebra, Number Theory and Discrete Geometry: Contemporary Problems, Applications and Problem of History, devoted to eighty of professor Mishel Deza. Tula, Russia, 13–18 May 2019, P. 239–241.
9. Kovalevskaya, E. I., Rykova O. V. The development of the essential and inessential domains method for the calculation of vectors with real algebraic coordinates near smooth surfaces, Chebyshevskii Sbornik. — Tula: 14, 2013, pp. 119–126.
10. Kubilius I. P. On the application of I. M. Vinogradov's method to the solution of a problem of the metric theory of numbers, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 67, 1949, pp. 783–786.
11. Kubilius I. P. On the metrical problem in the theory of Diophantine approximation, Trudy Akad. Nauk Litov. SSR, Ser. B, 2(18), 1959, pp. 3–7.
12. Sprindžuk V. G. Mahler's problem in metric number theory. Minsk: Izdat. Nauka i Tehnika. 1967. English translation by B. Volkman. Transl. Math. Monographs, 25, Amer. Math. Soc., Providence, RI. 1969.
13. Sprindžuk V. G. The method of trigonometric sums in the metric theory of diophantine approximation of dependent quantities, Proc. Steklov Inst. Math. Akad. Nauk SSSR, 128(2), 1972, pp. 212–228.
14. Sprindžuk V. G. Metric theory of Diophantine approximations. Izdat. Nauka. Moscow, 1977. English translation by R. A. Silverman. John Wiley and Sons. New York – Toronto – London, 1979.
15. Adiceam F., Beresnevich V., Levesley V., Velani S., Zorin E. Diophantine approximation and applications in interference alignment, Advances in Math., 302 2016, pp. 231–279.
16. Bayramoglu M., Jabbarov I. Sh., Kazimova L. G. On some theoretic-functional results concerning the theory of extremality and their application, Proc. Inst. Math. Mech. Natl. Acad. Sci. Azerb., 44(2), 2018, pp. 229–237.
17. Beresnevich V., Bernik V., Götze F. Integral polynomials with small discriminants and resultants, Advances in Math., 298, 2016, pp. 393–412.
18. Beresnevich V., Ramirez F., Velani S. Metric Diophantine approximation: aspects on recent work. In Dynamics and Analytic Number Theory. LMS Lecture Notes Ser., 437, 2016 (eds. D. Badziahin, A. Gorodnik, N. Reyerimhoff). Cambridge Univ. Press (Cambridge. 2016), pp. 1–95.
19. Beresnevich V., Lee L., Vaughan R. C., Velani S. Diophantine approximation on manifolds and lower bounds Hausdorff dimension Math., 63, 2017, pp. 762–779.
20. Beresnevich V., Velani S. A note on three problems in metric Diophantine approximation. In recent Trends in Ergodic Theory and Dynamical Systems, Contemp. Math., 631, 2015, Amer. Math. Soc. Providence. R. I., 2015, pp. 211–229.
21. Beresnevich V., Vaughan R. C., Velani S., Zorin E. Diophantine approximation on manifolds and the distribution of rational points: contributions to the convergence theory. Int. Math. Research Notices, 2016, pp. 1–24.
22. Bernik V. I., Dodson M. M. Metric Diophantine Approximation of Manifolds. Cambridge Tracts in Math, 137. Cambridge Univ. Press. Cambridge, 1999.

23. Bugeaud Y. Approximation by algebraic numbers. Cambridge Tracts in Math., 169. Cambridge Univ. Press, 2004.
24. Dodson M. M., Vickers J. A. G. Number Theory and dynamical systems, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 134. Cambridge Univ. Press, 1989.
25. Kleinbock D. Y., Margulis G.A. Flows on homogeneous spaces and Diophantine approximation on manifolds, Ann. Math., 148, 1998, pp. 339–360.
26. Kovalevskaja E. I. Metric theorems on the approximation of zero by a linear combination of polynomials with integral coefficients, Acta Arith., 25, 1973, pp. 93–104.
27. Kovalevskaya E. The convergence part of a Khintchine-type theorem in the ring of adeles, Tatra Mountains Math. Publ., 59, 2014, pp. 39–50.
28. Schmidt W. M. Über Gitterpunkte auf gewissen Flächen, Monatsh. Math. 68(1), 1964, pp. 59–74.
29. Schmidt W. M. Metrische Sätze Über simultane Approximationabhängiger Grössen, Monatsh. Math., 68(2), 1964, pp. 154–166.
30. Schmidt W. M. Diophantine Approximation, Lecture Notes in Math., 785. Springer-Verlag, 1980.
31. Steuding J. Diophantine analysis. Course notes from a Summer School. Trends in Math., Birkhäuser. Springer Int. Publ. AG, 2016.

Получено 14.05.2019 г.

Принято в печать 12.07.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 2.

УДК 517

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-221-233

**Факторно делимые группы и группы без кручения,
соответствующие конечным абелевым группам**

Е. И. Компанцева, А. А. Фомин

Компанцева Екатерина Игоревна — доктор технических наук, доцент, профессор кафедры алгебры, Московский педагогический государственный университет; профессор кафедры теории вероятностей и математической статистики, Финансовый университет при Правительстве РФ (г. Москва).

e-mail: kompantseva@yandex.ru

Фомин Александр Александрович — доктор физико-математических наук, профессор, Московский педагогический государственный университет (г. Москва).

e-mail: alexander.fomin@mail.ru

Аннотация

Категория последовательностей $\mathcal{S}$ была введена в [1, 2, 3]. Объектами категории $\mathcal{S}$ являются конечные последовательности вида $a_1, \dots, a_n$, где элементы $a_1, \dots, a_n$ принадлежат конечно представимому модулю над кольцом полиадических чисел $\hat{Z}$. Кольцо полиадических чисел $\hat{Z} = \prod_p \hat{Z}_p$ — это произведение колец целых p -адических чисел по всем простым числам p . Морфизмами категории $\mathcal{S}$ из объекта $a_1, \dots, a_n$ в объект $b_1, \dots, b_k$ являются все возможные пары (φ, T) , где $\varphi : \langle a_1, \dots, a_n \rangle_{\hat{Z}} \rightarrow \langle b_1, \dots, b_k \rangle_{\hat{Z}}$ — гомоморфизм $\hat{Z}$ -модулей, порожденных данными элементами, и T — целочисленная матрица размера $k \times n$, которые удовлетворяют следующему матричному равенству

$$(\varphi a_1, \dots, \varphi a_n) = (b_1, \dots, b_k)T.$$

В [2] доказано, что категория $\mathcal{S}$ эквивалентна категории $\mathcal{D}$ смешанных факторно делимых абелевых групп с отмеченными базисами. В [3] доказано, что категория $\mathcal{S}$ двойственна категории $\mathcal{F}$ абелевых групп без кручения конечного ранга с отмеченными базисами, под базисом мы понимаем здесь любую максимальную линейно независимую систему элементов. Композиция этой эквивалентности и двойственности является двойственностью, введенной в [1] и в [4], которую можно также рассматривать как версию двойственности, введенной в [5].

Если объект категории $\mathcal{S}$ состоит из одного элемента, то ему соответствуют группы ранга 1 в категориях $\mathcal{D}$ и $\mathcal{F}$. Этот случай разобран в [6]. При этом двойственность $\mathcal{S} \leftrightarrow \mathcal{F}$ дает нам классическое описание Р. Бэра [7] групп без кручения ранга 1. Эквивалентность $\mathcal{S} \leftrightarrow \mathcal{D}$ согласуется с описанием О. И. Давыдовой [8] факторно делимых групп ранга 1.

В настоящей статье мы рассматриваем другой вырожденный случай. Любая периодическая абелева группа может рассматриваться как модуль над кольцом полиадических чисел. При этом периодическая группа является конечно представимым $\hat{Z}$ -модулем тогда и только тогда, когда она конечна. Следовательно, для любой системы образующих $g_1, \dots, g_n$ любой конечной абелевой группы G последовательность $g_1, \dots, g_n$ является объектом категории $\mathcal{S}$. Более того, такие объекты определяют полную подкатегорию категории $\mathcal{S}$.

В данной статье показано, что объекту $g_1, \dots, g_n$ категории $\mathcal{S}$ соответствует в категории $\mathcal{D}$ факторно делимая группа вида $G \oplus Q^n$ с отмеченным базисом $g_1 + e_1, \dots, g_n + e_n$, где $e_1, \dots, e_n$ — стандартный базис векторного пространства Q^n над полем рациональных чисел Q . В категории $\mathcal{F}$ данному объекту соответствует свободная группа A , удовлетворяющая

условиям $Z^n \subset A \subset Q^n$ и $A/Z^n \cong G^*$, где $G^* = \text{Hom}(G, Q/Z)$ – дуальная группа. Мы также рассматриваем гомоморфизмы групп, соответствующие морфизмам категории $\mathcal{S}$.

Ключевые слова: абелевы группы, модули, двойственные категории.

Библиография: 36 названий.

Для цитирования:

Е. И. Компанцева, А. А. Фомин. Факторно делимые группы и группы без кручения, соответствующие конечным абелевым группам // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 2, с. 221–233.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 2.

UDC 517

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-221-233

Quotient divisible groups and torsion-free groups corresponding to finite Abelian groups

E. I. Kompantseva, A. A. Fomin

Kompantseva Ekaterina Igorevna — doctor of engineering, professor, Professor, Department of algebra, Moscow state pedagogical University; Professor of the Department of probability theory and mathematical statistics, Financial University under the Government of the Russian Federation (Moscow).

e-mail: kompantseva@yandex.ru

Fomin Alexander Alexandrovich — Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Moscow State Pedagogical University (Moscow).

e-mail: alexander.fomin@mail.ru

Abstract

The category of sequences $\mathcal{S}$ has been introduced in [1, 2, 3]. Objects of the category $\mathcal{S}$ are finite sequences of the form $a_1, \dots, a_n$, where the elements $a_1, \dots, a_n$ belong to a finitely presented module over the ring of polyadic numbers $\hat{Z}$. The ring of polyadic numbers $\hat{Z} = \prod_p \hat{Z}_p$ is the product of the rings of p -adic integers over all prime numbers p . Morphisms of the category $\mathcal{S}$ from the object $a_1, \dots, a_n$ to an object $b_1, \dots, b_k$ are all possible pairs (φ, T) , where $\varphi : \langle a_1, \dots, a_n \rangle_{\hat{Z}} \rightarrow \langle b_1, \dots, b_k \rangle_{\hat{Z}}$ is a homomorphism of $\hat{Z}$ -modules, generated by given elements, and T is a matrix of dimension $k \times n$ with integer entries such that the following matrix equality takes place

$$(\varphi a_1, \dots, \varphi a_n) = (b_1, \dots, b_k)T.$$

It is proved in [2] that the category $\mathcal{S}$ is equivalent to the category $\mathcal{D}$ of mixed quotient divisible abelian groups with marked bases. It is proved in [3] that the category $\mathcal{S}$ is dual to the category $\mathcal{F}$ of torsion-free finite-rank abelian groups with marked bases, a basis means here a maximal linearly independent set of elements. The composition of these equivalence and duality is the duality introduced in [1] and in [4], which can be considered as a version of the duality introduced in [5].

If an object of the category $\mathcal{S}$ consists of one element, then it corresponds to rank-1 groups of the categories $\mathcal{D}$ and $\mathcal{F}$. This case is considered in [6] and we obtain the following. The duality $\mathcal{S} \leftrightarrow \mathcal{F}$ gives us the classical description by R. Baer [7] of rank-1 torsion-free groups. The equivalence $\mathcal{S} \leftrightarrow \mathcal{D}$ coincides with the description by O.I. Davydova [8] of rank-1 quotient divisible groups.

We consider another marginal case in the present paper. Every torsion abelian group can be considered as a module over the ring of p -adic numbers. Moreover, a torsion group is a finitely presented $\widehat{Z}$ -module if and only if it is finite. Thus, for every set of generators $g_1, \dots, g_n$ of every finite abelian group G the sequence $g_1, \dots, g_n$ is an object of the category $\mathcal{S}$. Such objects determine a complete subcategory of the category $\mathcal{S}$.

We show in the present paper that the object $g_1, \dots, g_n$ of the category $\mathcal{S}$ corresponds to an object of the category $\mathcal{D}$, which is of the form $G \oplus Q^n$ with the marked basis $g_1 + e_1, \dots, g_n + e_n$, where $e_1, \dots, e_n$ is the standard basis of the vector space Q^n over the field of rational numbers Q . The same object $g_1, \dots, g_n$ corresponds to an object of the category $\mathcal{F}$, which is a free group A , satisfying the conditions $Z^n \subset A \subset Q^n$ and $A/Z^n \cong G^*$, where $G^* = \text{Hom}(G, Q/Z)$ is the dual finite group.

We consider also the group homomorphisms corresponding to morphisms of the category $\mathcal{S}$.

Keywords: abelian groups, modules, dual categories.

Bibliography: 36 titles.

For citation:

E. I. Kompantseva, A. A. Fomin, 2019, "Quotient divisible groups and torsion-free groups corresponding to finite Abelian groups", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 2, pp. 221–233.

1. Введение

Все рассматриваемые группы являются абелевыми. $Z, Q, \widehat{Z}_p, Z_n$ обозначают соответственно кольца целых, рациональных, целых p -адических чисел и кольцо классов вычетов по модулю n . Так же обозначаются их аддитивные группы. Кольцо полиадических чисел $\widehat{Z} = \prod_p \widehat{Z}_p$ – это произведение колец целых p -адических чисел по всем простым числам p .

Под характеристикой $\chi = (m_p)$ понимается любая последовательность целых неотрицательных чисел и символов ∞ , занумерованная всеми простыми числами. Для каждой характеристики $\chi = (m_p)$ определяется кольцо $Z_\chi = \prod_p K_p$ как произведение по всем простым числам p колец K_p , где $K_p = Z_{p^{m_p}}$ при $m_p < \infty$ или $K_p = \widehat{Z}_p$ при $m_p = \infty$.

Если $a_1, \dots, a_n$ – элементы модуля M над коммутативным кольцом R , то $\langle a_1, \dots, a_n \rangle_R$ обозначает подмодуль, порожденный данными элементами, $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ – подгруппа, порожденная этими элементами, $\langle a_1, \dots, a_n \rangle_*$ – сервантная оболочка этих элементов, которая состоит из таких элементов $a \in M$, для которых существует целое число $m \neq 0$, при котором $ma \in \langle a_1, \dots, a_n \rangle$. Модуль M называется конечно представимым, если для некоторых целых положительных чисел m и n существует точная последовательность R -модулей

$$R^m \rightarrow R^n \rightarrow M \rightarrow 0.$$

Любой конечно представимый модуль M над кольцом полиадических чисел $\widehat{Z}$ имеет вид $M = Z_{\chi_1} \oplus \dots \oplus Z_{\chi_n}$. При дополнительном условии $\chi_1 \leq \dots \leq \chi_n$ последовательность характеристик определена однозначно. Для любого конечно порожденного подмодуля N конечно представимого $\widehat{Z}$ -модуля M оба модуля N и M/N являются конечно представимыми.

Абелева группа A называется факторно делимой, если она содержит свободную подгруппу F конечного ранга такую, что факторгруппа A/F является периодической делимой группой. При этом сама группа A не содержит ненулевых делимых периодических подгрупп. Свободный базис группы F называется базисом факторно делимой группы A . Ранг группы F называется рангом факторно делимой группы A .

Факторно делимые группы в настоящее время активно исследуются разными авторами (см. [9–23]). Мы рассматриваем категорию $\mathcal{D}$ факторно делимых групп с отмеченными базисами.

Объектами категории $\mathcal{D}$ являются пары $A; a_1, \dots, a_n$, состоящие из факторно делимой группы A и какого-либо базиса $a_1, \dots, a_n$ этой группы. Морфизмами из объекта $A; a_1, \dots, a_n$ в объект $B; b_1, \dots, b_k$ являются любые гомоморфизмы групп $f : A \rightarrow B$, для которых матрица T размера $k \times n$, определяемая равенством

$$(fa_1, \dots, fa_n) = (b_1, \dots, b_k)T,$$

состоит из целых чисел. В [2] были построены два ковариантных функтора $\Phi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{S}$ и $\Psi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{D}$, композиция которых в любом порядке изоморфна тождественному функтору, то есть $\Psi\Phi \cong id_{\mathcal{D}}$ и $\Phi\Psi \cong id_{\mathcal{S}}$. Таким образом, категории $\mathcal{D}$ и $\mathcal{S}$ эквивалентны.

Аналогичным образом определяется категория $\mathcal{F}$ абелевых групп без кручения конечного ранга с отмеченными базисами. Под базисом группы без кручения здесь понимается любая максимальная линейно независимая система элементов этой группы.

Объектами категории $\mathcal{F}$ являются пары $A; a_1, \dots, a_n$, состоящие из группы без кручения конечного ранга A и какого-либо базиса $a_1, \dots, a_n$ этой группы. Морфизмами из объекта $A; a_1, \dots, a_n$ в объект $B; b_1, \dots, b_k$ являются любые гомоморфизмы групп $f : A \rightarrow B$, для которых матрица T размера $k \times n$, определяемая равенством

$$(fa_1, \dots, fa_n) = (b_1, \dots, b_k)T,$$

состоит из целых чисел. В [3] (см. также [1]) были построены два контравариантных функтора $\Delta : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{S}$ и $\Theta : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{F}$, композиция которых в любом порядке изоморфна тождественному функтору, то есть $\Theta\Delta \cong id_{\mathcal{F}}$ и $\Delta\Theta \cong id_{\mathcal{S}}$. Таким образом, категории $\mathcal{F}$ и $\mathcal{S}$ являются двойственными.

Заметим, что в категориях $\mathcal{D}$ и $\mathcal{F}$ матрицы морфизмов однозначно определены соответствующими гомоморфизмами групп. Это, вообще говоря, не так в категории $\mathcal{S}$. Например, для объекта категории $\mathcal{S}$, состоящего из n нулей, морфизмы из этого объекта в себя представляют собой пары (φ, T) , где φ – один и тот же нулевой гомоморфизм модулей, а в качестве T можно взять любую целочисленную матрицу размера $n \times n$.

Мы понимаем Z -адическое пополнение $\hat{A}$ группы A как обратный предел следующего обратного спектра гомоморфизмов

$$\pi_n^m : A/mA \rightarrow A/nA$$

для всех пар (m, n) натуральных чисел таких, что число n является делителем числа m . Здесь $\pi_n^m(a + mA) = a + nA$. Элемент $a = (a_1, a_2, \dots)$ группы $\prod_{n=1}^{\infty} A/nA$ называется сетью, если $\pi_n^m(a_m) = a_n$ для любой пары (m, n) натуральных чисел такой, что n делит m . Легко видеть, что все сети составляют подгруппу группы $\prod_{n=1}^{\infty} A/nA$. Эта подгруппа $\hat{A}$ является обратным пределом данного спектра, то есть Z -адическим пополнением группы A . Для любого элемента $a \in A$, последовательность $\mu(a) = (a + A, a + 2A, a + 3A, \dots)$ является сетью. Таким образом мы получаем естественный гомоморфизм $\mu : A \rightarrow \hat{A}$, который мы также называем Z -адическим пополнением группы A . Заметим, что кольцо полиадических чисел $\hat{Z}$ является Z -адическим пополнением кольца целых чисел Z , а пополнение $\hat{A}$ любой группы A является также модулем над кольцом $\hat{Z}$.

Все остальные определения и обозначения стандартны и соответствуют книге [24].

2. Факторно делимые группы

ТЕОРЕМА 1. Пусть U – делимая группа без кручения ранга n и $u_1, \dots, u_n \in U$ – максимальная линейно независимая система элементов, G – произвольная конечная группа, по-

рожденная элементами $g_1, \dots, g_n$. Тогда группа $G \oplus U$ является факторно делимой группой с базисом $g_1 + u_1, \dots, g_n + u_n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что система элементов $g_1 + u_1, \dots, g_n + u_n$ является максимальной линейно независимой в группе $G \oplus U$. Подгруппа $F = \langle g_1 + u_1, \dots, g_n + u_n \rangle$ является свободной группой со свободным базисом $g_1 + u_1, \dots, g_n + u_n$ и факторгруппа $(G \oplus U)/F$ является периодической группой. Рассмотрим произвольный элемент $g + u \in G \oplus U$, $g \in G$, $u \in U$, и произвольное целое положительное число m . Так как элементы $g_1, \dots, g_n$ порождают группу G , то для подходящих целых коэффициентов имеет место равенство $g = k_1 g_1 + \dots + k_n g_n$. Тогда элемент $(g + u) - (k_1(g_1 + u_1) + \dots + k_n(g_n + u_n))$ принадлежит группе U и поэтому делится в группе $G \oplus U$ на m . Следовательно, любой элемент группы $G \oplus U$ по модулю подгруппы F делится на любое целое положительное число. Это означает, что факторгруппа $(G \oplus U)/F$ является делимой группой, то есть группа $G \oplus U$ является факторно делимой с базисом $g_1 + u_1, \dots, g_n + u_n$. $\square$

Как известно, любая конечная группа полна в своей Z -адической топологии, т. е. $\widehat{G} = G$. Обозначим через $A = G \oplus U$ факторно делимую группу из Теоремы 1. Гомоморфизм Z -адического пополнения $\mu : A \rightarrow \widehat{A}$ совпадает с проекцией $G \oplus U \rightarrow G$. Таким образом, гомоморфизм $\mu : A \rightarrow \widehat{A}$ переводит элементы $g_1 + u_1, \dots, g_n + u_n$ соответственно в элементы $g_1, \dots, g_n$. Так как элементы $g_1, \dots, g_n$ порождают группу $G = \widehat{A}$, то группа A является факторно делимой еще и по теореме о вложении 3.3 [2].

Согласно определению функтора $\Phi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{S}$ (Теорема 6.3 [2]), Φ переводит факторно делимую группу A с отмеченным базисом $g_1 + u_1, \dots, g_n + u_n$ в объект $\mu(g_1 + u_1), \dots, \mu(g_n + u_n)$ категории $\mathcal{S}$, т. е. в объект $g_1, \dots, g_n$. С другой стороны, согласно определению функтора $\Psi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{D}$ (Теоремы 6.3 и 3.5 [2]), $\Psi(g_1, \dots, g_n)$ совпадает с сервантной оболочкой элементов $g_1 + u_1, \dots, g_n + u_n$ в группе $A = G \oplus U$, т. е. с самой группой A .

Заметим, что $U \cong Q^n$ и в качестве максимальной линейно независимой системы можно взять стандартный базис $u_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, u_n = (0, \dots, 0, 1)$ векторного пространства $U = Q^n$ над полем рациональных чисел Q . Подведем итог всему вышесказанному в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 2. Пусть G – конечная группа, порожденная элементами $g_1, \dots, g_n$. Тогда эквивалентность $\mathcal{S} \leftrightarrow \mathcal{D}$ ставит в соответствие объекту $g_1, \dots, g_n$ категории $\mathcal{S}$ факторно делимую группу $G \oplus Q^n$ с базисом $g_1 + u_1, \dots, g_n + u_n$, где $u_1, \dots, u_n$ – стандартный базис векторного пространства Q^n над полем рациональных чисел Q .

СЛЕДСТВИЕ 1. Последовательности из n нулей $0, \dots, 0$ в категории $\mathcal{S}$ соответствует группа Q^n со стандартным базисом в категории $\mathcal{D}$.

Теперь мы рассмотрим произвольный морфизм

$$(1) \quad (\varphi, T) : g_1, \dots, g_n \rightarrow h_1, \dots, h_k$$

категории $\mathcal{S}$. Здесь элементы $h_1, \dots, h_k$ также порождают конечную группу $H = \langle h_1, \dots, h_k \rangle$. Групповой гомоморфизм $\varphi : G \rightarrow H$ связан с целочисленной матрицей T матричным равенством $(\varphi g_1, \dots, \varphi g_n) = (h_1, \dots, h_k)T$. Согласно Теореме 2, объекту $h_1, \dots, h_k$ категории $\mathcal{S}$ соответствует в категории $\mathcal{D}$ факторно делимая группа $H \oplus Q^k$ с базисом $h_1 + v_1, \dots, h_k + v_k$, где $v_1, \dots, v_k$ – стандартный базис векторного пространства Q^k . Целочисленная матрица T размера $k \times n$ определяет гомоморфизм $f_T : Q^n \rightarrow Q^k$ при помощи следующего матричного равенства $(f_T(u_1), \dots, f_T(u_n)) = (v_1, \dots, v_k)T$. Наконец мы определяем гомоморфизм факторно делимых групп $f = \Psi(\varphi, T) : G \oplus Q^n \rightarrow H \oplus Q^k$ следующим образом: $f(g + u) = \varphi(g) + f_T(u)$, $g \in G$, $u \in Q^n$.

ТЕОРЕМА 3. Гомоморфизм факторно делимых групп $f : G \oplus Q^n \rightarrow H \oplus Q^k$, соответствующий морфизму (1) является морфизмом категории $\mathcal{D}$ с матрицей T .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нужно показать, что этому гомоморфизму соответствует целочисленная матрица T относительно выделенных базисов. Действительно,

$$\begin{aligned} (f(g_1 + u_1), \dots, f(g_n + u_n)) &= (\varphi(g_1) + f_T(u_1), \dots, \varphi(g_n) + f_T(u_n)) = \\ &= (\varphi(g_1), \dots, \varphi(g_n)) + (f_T(u_1), \dots, f_T(u_n)) = \\ &= (h_1, \dots, h_k)T + (v_1, \dots, v_k)T = (h_1 + v_1, \dots, h_k + v_k)T. \end{aligned}$$

□

Пример 1. Предположим, что все элементы $g_1, \dots, g_n$ имеют одинаковый порядок m и группа G раскладывается в прямую сумму $G = \langle g_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle g_n \rangle$. Тогда соответствующая факторно делимая группа $G \oplus Q^n$ также раскладывается в прямую сумму факторно делимых групп ранга 1, $G \oplus Q^n \cong Z_m^n \oplus Q^n = (Z_m \oplus Q)^n$, т. е. такая группа является однородной вполне разложимой факторно делимой группой. В общем случае под однородной вполне разложимой факторно делимой группой мы понимаем группу вида R^n , где R – произвольная факторно делимая группа ранга 1. Таким группам посвящена статья [9]. В ней, в частности, доказывается следующая теорема. Если в короткой точной последовательности факторно делимых групп $0 \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow 0$ группа A является однородной вполне разложимой, то группы B и C также являются однородными вполне разложимыми и последовательность расщепляется. Эта теорема является дуализацией классической теоремы Р. Бэра [7] о том, что сервантные подгруппы однородной вполне разложимой группы без кручения выделяются в качестве прямых слагаемых.

3. Группы без кручения

Объектами категории $\mathcal{F}$ являются группы без кручения конечного ранга с отмеченными базисами (максимальными линейно независимыми системами элементов). Наличие выделенного базиса $a_1, \dots, a_n$ в группе A определяет вложение этой группы в векторное пространство Q^n над полем рациональных чисел Q . Всякий элемент $a \in A$ однозначно представляется в виде $a = r_1 a_1 + \dots + r_n a_n$, где $r_1, \dots, r_n \in Q$. Тогда вложение определяется правилом

$$a \mapsto (r_1, \dots, r_n) \in Q^n.$$

При этом элементы базиса переходят в элементы стандартного базиса

$$a_1 \mapsto (1, 0, \dots, 0), \dots, a_n \mapsto (0, \dots, 0, 1).$$

Мы можем отождествить объект категории $\mathcal{F}$ с подгруппой аддитивной группы векторного пространства Q^n , то есть считать, что $Z^n \subset A \subset Q^n$. При этом роль отмеченного базиса всегда будет играть стандартный базис этого векторного пространства.

Отметим, что, согласно [24], любая кольцевая структура на группе без кручения G ранга n вкладывается в однозначно определенное кольцо на делимой оболочке группы G , которую можно отождествить с Q^n . Сам термин факторно делимая группа был введен в [25] для описания групп без кручения конечного ранга, допускающих кольцевую структуру, которая индуцирует на делимой оболочке группы полупростую алгебру. Возможность вложения кольца без кручения конечного ранга в конечномерную сепарабельную алгебру, строение которой описывается основной теоремой Веддерберна, позволяет изучать как сами группы, так и кольца на них (см., например, [26–30]).

Рассмотрим короткую точную последовательность $0 \rightarrow Z^n \xrightarrow{id} Q^n \xrightarrow{q} (Q/Z)^n \rightarrow 0$, где первый гомоморфизм $id : Z^n \rightarrow Q^n$ является тождественным вложением, второй гомоморфизм $q : Q^n \rightarrow Q^n/Z^n$ является каноническим. Заметим, что группы A со свойством $Z^n \subset A \subset Q^n$ находятся во взаимно однозначном соответствии с подгруппами группы $(Q/Z)^n$. Таким образом, чтобы задать объект категории $\mathcal{F}$ достаточно указать какую-либо подгруппу G группы $(Q/Z)^n$. Тогда полный прообраз этой подгруппы $Z^n \subset A = q^{-1}(G) \subset Q^n$ является группой без кручения ранга n с отмеченным базисом $u_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, u_n = (0, \dots, 0, 1)$, то есть объектом категории $\mathcal{F}$.

Пусть $Z^k \subset B \subset Q^k$ – другой объект категории $\mathcal{F}$ и $v_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, v_k = (0, \dots, 0, 1)$ – его отмеченный базис. Пусть $f : B \rightarrow A$ – произвольный гомоморфизм групп. Он продолжается до линейного отображения $f : Q^k \rightarrow Q^n$ и определяет матрицу T размера $n \times k$ с рациональными элементами, для которой выполнено равенство $(fv_1, \dots, fv_k) = (u_1, \dots, u_n)T$. Легко видеть, что если $(r_1, \dots, r_k) \in B, r_1, \dots, r_k \in Q$, то $f(r_1, \dots, r_k) = (r_1, \dots, r_k)T^t$, где T^t – транспонированная матрица. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \rightarrow & Z^k & \rightarrow & Q^k & \rightarrow & (Q/Z)^k & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow f & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & Z^n & \rightarrow & Q^n & \rightarrow & (Q/Z)^n & \rightarrow & 0. \end{array}$$

Линейное отображение $f : Q^k \rightarrow Q^n$ индуцирует два других вертикальных гомоморфизма коммутативной диаграммы тогда и только тогда, когда матрица T состоит из целых чисел, то есть гомоморфизм $f : B \rightarrow A$ является морфизмом категории $\mathcal{F}$. В этом случае все вертикальные гомоморфизмы представляют собой домножение строки справа на матрицу T^t .

Рассмотрим действие контравариантного функтора $\Theta : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{F}$ на объекте $g_1, \dots, g_n$ категории $\mathcal{S}$, где группа $G = \langle g_1, \dots, g_n \rangle$ является конечной. Обозначим через $G^* = \text{Hom}(G, Q/Z)$ дуальную конечную группу. Согласно [3] определим гомоморфизм $\omega_G : G^* \rightarrow (Q/Z)^n$ следующим образом: $\omega_G(\gamma) = (\gamma(g_1), \dots, \gamma(g_n)) \in (Q/Z)^n, \gamma \in G^*$. Так как элементы $g_1, \dots, g_n$ порождают группу G , то $\omega_G(\gamma) = 0$ тогда и только тогда, когда $\gamma = 0$. Следовательно, гомоморфизм $\omega_G : G^* \rightarrow (Q/Z)^n$ является вложением. Согласно выше сказанному подгруппа $\text{Im}(\omega_G) \subset (Q/Z)^n$ определяет объект категории $\mathcal{F}$, то есть группу $Z^n \subset A \subset Q^n$ с отмеченным стандартным базисом такую, что $A/Z^n \cong G^*$. Так как группа G^* является конечной, то группа A является свободной группой ранга n . Мы получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 4. Пусть G – конечная группа, порожденная элементами $g_1, \dots, g_n$. Тогда двойственность $\mathcal{S} \leftrightarrow \mathcal{F}$ ставит в соответствие объекту $g_1, \dots, g_n$ категории $\mathcal{S}$ свободную группу A ранга n такую, что $Z^n \subset A \subset Q^n$ и факторгруппа A/Z^n изоморфна дуальной группе G^* . Отмеченным базисом в группе A является стандартный базис векторного пространства Q^n .

СЛЕДСТВИЕ 2. Последовательности из n нулей $0, \dots, 0$ в категории $\mathcal{S}$ соответствует в категории $\mathcal{F}$ свободная группа ранга n со свободным базисом.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $(\varphi, T) : g_1, \dots, g_n \rightarrow h_1, \dots, h_k$ – морфизм (1) категории $\mathcal{S}$, где $G = \langle g_1, \dots, g_n \rangle$ и $H = \langle h_1, \dots, h_k \rangle$ – конечные группы. Пусть при этом объектам $g_1, \dots, g_n$ и $h_1, \dots, h_k$ соответствуют в категории $\mathcal{F}$ свободные группы A и B такие, что $Z^n \subset A \subset Q^n, Z^k \subset B \subset Q^k, A/Z^n \cong G^*, B/Z^k \cong H^*$.

Тогда морфизму (1) категории $\mathcal{S}$ в категории $\mathcal{F}$ соответствует гомоморфизм $g : B \rightarrow A$, который определяется домножением строки $(r_1, \dots, r_k) \in B$ справа на матрицу T , то есть $g(r_1, \dots, r_k) = (r_1, \dots, r_k)T \in A$. При этом гомоморфизм $g : B \rightarrow A$ индуцирует гомоморфизм конечных групп $\bar{g} : B/Z^k \rightarrow A/Z^n$, где $\bar{g}(b + Z^k) = g(b) + Z^n$, который совпадает с дуальным гомоморфизмом $\varphi^* : H^* \rightarrow G^*$. Матрицей гомоморфизма $g : B \rightarrow A$ относительно отмеченных базисов является транспонированная матрица T^t .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим диаграмму

$$(2) \quad \begin{array}{ccc} H^* & \xrightarrow{\varphi^*} & G^* \\ \omega_H \downarrow & & \downarrow \omega_G \\ (Q/Z)^k & \rightarrow & (Q/Z)^n \end{array}$$

в которой гомоморфизм $\varphi^* : H^* \rightarrow G^*$ является дуальным гомоморфизму $\varphi : G \rightarrow H$ и определяется равенством $(\varphi^*(\gamma))(x) = \gamma(\varphi(x))$, $x \in G, \gamma \in H^*$. Вложения ω_H и ω_G определяют соответственно группы $Z^k \subset B \subset Q^k$ и $Z^n \subset A \subset Q^n$. Нижний гомоморфизм диаграммы (2) является домножением справа на матрицу T , т. е.

$$(r_1 + Z, \dots, r_k + Z) \mapsto (r_1 + Z, \dots, r_k + Z)T \in (Q/Z)^n.$$

По определению морфизма $(\varphi, T) : g_1, \dots, g_n \rightarrow h_1, \dots, h_k$ категории $\mathcal{S}$ имеет место матричное равенство $(\varphi g_1, \dots, \varphi g_n) = (h_1, \dots, h_k)T$. Это равенство влечет следующую цепочку равенств для любого $\gamma \in H^*$:

$$\begin{aligned} (\gamma \varphi g_1, \dots, \gamma \varphi g_n) &= (\gamma h_1, \dots, \gamma h_k)T \\ ((\varphi^*(\gamma))(g_1), \dots, (\varphi^*(\gamma))(g_n)) &= \omega_H(\gamma)T \\ \omega_G(\varphi^*(\gamma)) &= \omega_H(\gamma)T. \end{aligned}$$

Последнее равенство означает, что диаграмма (2) коммутативна.

Таким образом, если определить гомоморфизм $g : B \rightarrow A$ как домножение справа на матрицу T , то, во-первых, он будет правильно определен. Действительно, если $(r_1, \dots, r_k) \in B$, то $(r_1 + Z, \dots, r_k + Z)T \in \text{Im}(\omega_G)$ и поэтому $(r_1, \dots, r_k)T \in A$. А во-вторых, нижний гомоморфизм в диаграмме (2) совпадет с индуцированным гомоморфизмом $\bar{g} : B/Z^k \rightarrow A/Z^n$, где $\bar{g}(b + Z^k) = g(b) + Z^n$. Этот же гомоморфизм совпадает с дуальным гомоморфизмом $\varphi^* : H^* \rightarrow G^*$, если произвести отождествление по вложениям ω_H и ω_G . $\square$

Композиция эквивалентности $\mathcal{S} \leftrightarrow \mathcal{D}$ и двойственности $\mathcal{S} \leftrightarrow \mathcal{F}$ является двойственностью. В [5] была построена аналогичная двойственность для категорий, в которых объектами являлись группы (без выделенных базисов), а морфизмами – квазигомоморфизмы.

Следующая теорема вытекает из предыдущих теорем и показывает как наша двойственность $\mathcal{D} \leftrightarrow \mathcal{F}$ действует на морфизмах свободных групп в категории $\mathcal{F}$.

ТЕОРЕМА 6. Пусть A и B – свободные группы, с отмеченными максимальными линейно независимыми системами элементов $a_1, \dots, a_n \in A$ и $b_1, \dots, b_k \in B$ и $f : A \rightarrow B$ гомоморфизм групп, для которого матрица размера $k \times n$, определенная равенством $(fa_1, \dots, fa_n) = (b_1, \dots, b_k)T$ состоит из целых чисел, то есть $f : A \rightarrow B$ является морфизмом категории $\mathcal{F}$.

Обозначим $G = A/\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ и $H = B/\langle b_1, \dots, b_k \rangle$. Так как матрица T состоит из целых чисел, то гомоморфизм $f : A \rightarrow B$ индуцирует гомоморфизм конечных групп $\bar{f} : G \rightarrow H$, при котором $\bar{f}(a + \langle a_1, \dots, a_n \rangle) = f(a) + \langle b_1, \dots, b_k \rangle$.

Тогда двойственность $\mathcal{F} \leftrightarrow \mathcal{D}$ ставит в соответствие группам A и B с отмеченными базисами факторно делимые группы $A^\circ = G^* \oplus Q^n$ и $B^\circ = H^* \oplus Q^k$ также с некоторыми отмеченными базисами. Двойственность $\mathcal{F} \leftrightarrow \mathcal{D}$ ставит в соответствие гомоморфизму $f : A \rightarrow B$ гомоморфизм факторно делимых групп $f^\circ : B^\circ \rightarrow A^\circ$. Матрица этого гомоморфизма относительно отмеченных базисов является транспонированной матрицей T^t . При этом ограничение гомоморфизма $f^\circ : B^\circ \rightarrow A^\circ$ на периодическую часть H^* группы $B^\circ = H^* \oplus Q^k$ совпадает с гомоморфизмом $\bar{f}^* : H^* \rightarrow G^*$, который является дуальным гомоморфизму $\bar{f} : G \rightarrow H$ в смысле двойственности конечных групп.

Пример 2. Предположим, что все элементы $g_1, \dots, g_n$ имеют одинаковый порядок m и группа G раскладывается в прямую сумму $G = \langle g_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle g_n \rangle$ (см. Пример 1). Тогда объекту $g_1, \dots, g_n$ категории $\mathcal{S}$ соответствует в категории $\mathcal{F}$ свободная группа A с отмеченным базисом $a_1, \dots, a_n \in A$ такая, что имеет место равенство подгрупп $\langle a_1, \dots, a_n \rangle = mA$. При этом ясно, что $A/\langle a_1, \dots, a_n \rangle \cong G$. По Теореме 4 должно было бы быть G^* , но мы напомним, что в двойственности конечных групп имеет место изоморфизм $G^* \cong G$ для любой конечной группы G .

Пример 3. Предположим, что объект категории $\mathcal{S}$ имеет вид $g, \dots, g$, где элемент g порядка m повторяется n раз, $G = \langle g \rangle$ – циклическая группа порядка m . Этому объекту в категории $\mathcal{F}$ соответствует подгруппа A группы Q^n , порожденная $n+1$ элементом: стандартным базисом $e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)$ и элементом $(\frac{1}{m}, \frac{1}{m}, \dots, \frac{1}{m})$. Стандартный базис является отмеченным. Ясно, что $A/\langle e_1, \dots, e_n \rangle \cong G$. В категории $\mathcal{D}$ нашему объекту соответствует факторно делимая группа $G \oplus Q^n$ с отмеченным базисом $g + e_1, \dots, g + e_n$.

4. Заключение

Считается общепризнанным тот факт, что класс абелевых групп без кручения конечного ранга является чрезвычайно сложным. Сначала А. В. Яковлев [31] показал, что этот класс является "диким" с точки зрения теории представлений, потом С. Томас [32] показал, что сложность возрастает с увеличением ранга. В силу двойственности $\mathcal{D} \leftrightarrow \mathcal{F}$ можно сказать, что класс смешанных факторно делимых групп является не менее сложным. Кроме того, он еще является мало изученным, так как был введен относительно недавно [5].

Тем больший интерес представляет подход, при котором оба класса групп изучаются одновременно в терминах категории $\mathcal{S}$. На этом пути пока проделано следующее:

1. Случай, когда объект категории $\mathcal{S}$ представляет собой последовательность из одного элемента, разобрал О. И. Давыдовой [8].

2. Случай, когда объект категории $\mathcal{S}$ представляет собой последовательность элементов свободного базиса свободного Z_χ -модуля, разобрал в [9]. При этом мы получили новый результат для факторно делимых групп, который является дуализацией классической теоремы Р. Бэра.

3. Случай, когда объект категории $\mathcal{S}$ представляет собой последовательность периодических элементов разобрал в настоящей статье.

Интересно отметить, что на любой факторно делимой группе ранга 1 может быть определено хотя бы одно кольцо с ненулевым умножением. В то время как для групп без кручения ранга 1 это верно только в том случае, когда они являются факторно делимыми, об этом смотри, например, в [2]. В связи с этим интересно исследовать кольца на факторно делимых группах в стиле работ [26–30].

В заключение мы сформулируем некоторые задачи, которые, на наш взгляд, представляют большой интерес:

Задача 1. Исследовать кольца на факторно делимых группах.

Задача 2. Рассмотреть в категории $\mathcal{S}$ последовательности из двух элементов. То есть сопоставить классическое описание групп без кручения ранга 2 Бьюмонта и Пирса [33] с нашим подходом и получить описание факторно делимых групп ранга 2. Смотри в этой связи также статью [22].

Задача 3. Рассмотреть полные подкатегории категории $\mathcal{S}$, объекты которых являются числовыми последовательностями. Например, полиадические числа, или элементы кольца Z_χ для некоторой характеристики χ (см. [34]), в частности, целые p -адические числа (см. [35]), или псевдорациональные числа (см. [36]).

Задача 4. Дуализировать результаты о почти вполне разложимых группах без кручения в категорию $\mathcal{S}$ и в категорию $\mathcal{D}$ в духе статьи [23].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Fomin A. A. Invariants for Abelian groups and dual exact sequences // J. Algebra 2009. Vol. 322. № 7. P. 2544–2565.
2. Фомин А. А. К теории факторно делимых групп. II // Фундамент. и прикл. Матем. 2015. Vol. 20. № 5. P. 157–196.
3. Фомин А. А. Абелевы группы без кручения конечного ранга с отмеченными базисами // Фундамент. и прикл. Матем. (to appear)
4. Яковлев А. В. Двойственность категорий абелевых групп без кручения конечного ранга и факторно делимых групп // Зап. научн. сем. ПОМИ 2010. Vol. 375. № 1. P. 195–202.
5. Fomin A. A., Wickless W. J. Quotient divisible abelian groups // Proc. A.M.S. 1998. Vol. 126. № 1. P. 45–52.
6. Фомин А. А. Двойственные абелевы группы ранга 1 // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения, Матер. XV Международной конференции, посвященной столетию профессора Н. М. Коробова, Тула: Изд-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого, 2018. P. 62–63.
7. Baer R. Abelian groups without elements of finite order // Duke Math. 1937. Vol. 3. № 1. P. 68–122.
8. Давыдова О. И. Факторно делимые группы ранга 1 // Фундамент. и прикл. Матем. 2007. Vol. 13. № 3. P. 25–33.
9. Гордеева Е. В., Фомин А. А., Вполне разложимые однородные факторно делимые абелевы группы // Чебышевский сборник 2018. Vol. 19. № 2. С. 376–387.
10. Фомин А. А. К теории факторно делимых групп. I // Фундамент. и прикл. Матем. 2012. Vol. 17. № 8. P. 153–167.
11. Wickless W. J. Direct sums of quotient divisible groups // Communications in Algebra 2003. Vol. 31. № 1. P. 79–96.
12. Albrecht U., Breaz S., Vinsonhaler C., Wickless W. Cancellation properties for quotient divisible groups // Journal of Algebra 2007. Vol. 317. № 1. P. 424–434 .
13. Wickless W. Multi-isomorphism for quotient divisible groups // Houston J. Math. 2006. Vol. 31. № 1. P. 1–19.
14. Albrecht U., Wickless B. Finitely generated and cogenerated QD groups // Rings, modules, algebras, and abelian 2004. Vol. 236. № 1. P. 13–26.
15. Любимцев О. В. Вполне разложимые факторно делимые абелевы группы с UA -кольцами эндоморфизмов // Матем. заметки 2015. Vol. 98. № 1. С. 125–133.
16. Любимцев О. В. Об определяемости вполне разложимых факторно делимых абелевых групп своими полугруппами эндоморфизмов // Изв. вузов. Матем. 2017. Vol. 10. № 1. С. 75–82.

17. Царев А. В. Модули над кольцом псевдорациональных чисел и факторноделимые группы // Алгебра и анализ 2006. Vol. 18. № 4. С. 198–214.
18. Царев А. В. Модуль псевдорациональных отношений факторно делимой группы // Алгебра и анализ 2010. Vol. 22. № 1. С. 223–239.
19. Царев А. В. Псевдорациональный ранг факторно делимой группы // Фундамент. и прикл. матем. 2005. Vol. 11. № 3. С. 201–213.
20. Царев А. В. T -кольца и факторно делимые группы ранга 1 // Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех. 2013. Vol. 24. № 4. С. 50–53.
21. Крючков Н. И. Компактные группы, двойственные факторно делимым абелевым группам // Фундамент. и прикл. матем. 2015. Vol. 20. № 5. С. 113–119.
22. Fomin A. A., Wickless W. Self-small mixed abelian groups G with $G/T(G)$ finite rank divisible // Communications in Algebra. 1998. Vol. 26. № 11. P. 3563–3580.
23. Fomin A. A. Quotient divisible and almost completely decomposable groups // Models, Modules and Abelian Groups in Memory of A. L. S. Corner, de Gruyter, Berlin - New York, 2008. Vol. 1. № 1. P. 147–167.
24. Fuchs L. Abelian groups. Switz.: Springer International Publishing, 2015.
25. Beaumont R. A., Pierce R. S. Torsion-free rings // Illinois J. Math. 1961. Vol. 5. P. 61–98.
26. Kompantseva E. I. Semisimple rings on completely decomposable Abelian groups // J. Math. Sci., 2008. Vol. 154. № 3. P. 324–332.
27. Kompantseva E. I. Rings on almost completely decomposable Abelian groups // J. Math. Sci. 2009. Vol. 163. № 6. P. 688–693.
28. Kompantseva E. I. Torsion-free rings // J. Math. Sci. 2010. Vol. 171. № 2. P. 213–247.
29. Компанцева Е. И., Фомин А. А. Абсолютные идеалы почти вполне разложимых абелевых групп // Чебышевский сб. 2015. Vol. 16. № 4. P. 200–211.
30. Благовещенская Е. А. Почти вполне разложимые абелевы группы и их кольца эндоморфизмов. СПб: Изд-во Политехн. ун-та, 2009.
31. Яковлев А. В. К проблеме классификации абелевых групп без кручения конечного ранга // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1976. Vol. 57. P. 171–175.
32. Thomas S. The Classification Problem for Torsion-Free Abelian Groups of Finite Rank // JAMS. 2003. Vol. 16. P. 233–256.
33. Beaumont R., Pierce R. Torsion free groups of rank two // Mem. Amer. Math. Soc. 1961. Vol. 38.
34. Фомин А. А. Абелевы группы с одним τ -адическим соотношением // Алгебра и логика. 1989. Vol. 28. № 1. P. 83–104.
35. Фомин А. А. Абелевы группы со свободными подгруппами бесконечного индекса и их кольца эндоморфизмов // Мат. заметки, 1984. Vol. 36. № 2. P. 179–187.
36. Fomin A. A. Some mixed abelian groups as modules over the ring of pseudo-rational numbers // Trends in Math., Burkhauser verlag, Basel/Switzerland. 1999. P. 87–100.

REFERENCES

1. Fomin, A. A. 2009, "Invariants for Abelian groups and dual exact sequences", *J. Algebra*, vol. 322, no. 7, pp. 2544–2565.
2. Fomin, A. A. 2018, "On the Quotient Divisible Group Theory. II", *J. Math. Sci.*, vol. 230, no. 3, pp. 457–483.
3. Fomin, A. A. (to appear), "Torsion free abelian groups of finite rank with marked bases", *J. Math. Sci.*
4. Yakovlev, A. V. 2010, "Duality of the categories of torsion-free Abelian groups of finite rank and quotient divisible Abelian groups", *J. Math. Sci.*, vol. 171, no. 3, pp. 416–420.
5. Fomin, A. A. & Wickless, W. J. 1998, "Quotient divisible abelian groups", *Proc. A.M.S.*, vol. 126, no. 1, pp. 45–52.
6. Fomin, A. A. 2018, "Dual abelian groups of rank 1", *Proceedings of the XV International conference devoted to the 100-th Birthday of Professor N.M. Korobov, May 28–31, 2018, Tula*, pp. 62–63. (Russian)
7. Baer, R. 1937, "Abelian groups without elements of finite order", *Duke Math.*, vol. 3, no. 1, pp. 68–122.
8. Davydova, O. I. 2008, "Rank-1 quotient divisible groups", *J. Math. Sci.*, vol. 154, no. 3, pp. 295–300.
9. Gordeeva, E. V. & Fomin, A. A. "Completely decomposable homogeneous quotient divisible abelian groups", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 19, no. 2, pp. 376–387. (Russian)
10. Fomin, A. A. 2014, "On the Quotient Divisible Group Theory. I", *J. Math. Sci.*, vol. 197, no. 5, pp. 688–697.
11. Wickless, W. J. 2003, "Direct sums of quotient divisible groups", *Communications in Algebra*, vol. 31, no. 1, pp. 79–96.
12. Albrecht, U. & Breaz, S. & Vinsonhaler, C. & Wickless W. 2007, "Cancellation properties for quotient divisible groups", *Journal of Algebra*, vol. 317, no. 1, pp. 424–434.
13. Wickless, W. 2006, "Multi-isomorphism for quotient divisible groups", *Houston J. Math.*, vol. 31, no. 1, pp. 1–19.
14. Files, S. & Wickless, W. 1999, "Direct Sums of Self-Small Mixed Groups", *J. Algebra*, vol. 222, no. 1, pp. 1–16.
15. Lyubimtsev, O. V. 2015, "Completely decomposable quotient divisible abelian groups with UA -rings of endomorphisms", *Mathematical Notes*, vol. 98, no. 1, pp. 130–137.
16. Lyubimtsev, O. V. 2017, "On determinacy of completely decomposable quotient divisible abelian groups by its endomorphism semigroups", *Russian Math. (Iz. VUZ)*, vol. 61, no. 10, pp. 65–71.
17. Tsarev, A. V. 2007, "Modules over the ring of pseudorational numbers and quotient divisible groups", *St. Petersburg Math. J.*, vol. 18, no. 4, pp. 657–669.
18. Tsarev, A. V. 2010, "The module of pseudo-rational relations of a quotient divisible group", *St. Petersburg Math. J.*, vol. 22, no. 1, pp. 163–174.

19. Tsarev, A. V. 2007, "Pseudorational rank of a quotient divisible group", *J. Math. Sci.*, vol. 144, no. 2, pp. 4013–4022.
20. Tsarev, A. V. 2013, " T -rings and quotient divisible groups of rank 1", *Vestn. Tomsk. Gos. Univ. Mat. Mekh.*, vol. 24, no. 4, pp. 50–53.
21. Kryuchkov, N. I. 2018, "Compact Groups That Are Duals of Quotient Divisible Abelian Groups", *J. Math. Sci.*, vol. 230, no. 3, pp. 428–432.
22. Fomin, A. A. & Wickless, W. 1998, "Self-small mixed abelian groups G with $G/T(G)$ finite rank divisible", *Communications in Algebra*, vol. 26, no. 11, pp. 3563–3580.
23. Fomin, A. A. 2008, "Quotient divisible and almost completely decomposable groups", *Models, Modules and Abelian Groups in Memory of A. L. S. Corner, de Gruyter, Berlin – New York*, vol. 1, no. 1, pp. 147–167.
24. Fuchs, L. 2015, "Abelian groups", Switz.: Springer International Publishing.
25. Beaumont, R. A. & Pierce, R. S. 1961, "Torsion free rings", *Ill. J. Math.*, vol. 5, no. 1, pp. 61–98.
26. Kompantseva, E. I. 2008, "Semisimple rings on completely decomposable Abelian groups", *J. Math. Sci.*, vol. 154, no. 3, pp. 324–332.
27. Kompantseva, E. I. 2009, "Rings on almost completely decomposable Abelian groups", *J. Math. Sci.*, vol. 163, no. 6, pp. 688–693.
28. Kompantseva, E. I. 2010, "Torsion-free rings", *J. Math. Sci.*, vol. 171, no. 2, pp. 213–247.
29. Kompantseva, E. I. & Fomin, A. A. 2015 "Absolute ideals of almost completely decomposable abelian groups", *Chebyshevskii Sb.*, vol. 16, no. 4, pp. 200–211.
30. Blagoveshchenskaya, E. A. 2009, "Almost completely decomposable abelian groups and their endomorphism rings", SPb: Izdelstvo Politehnicheskogo universiteta (Russian).
31. Yakovlev, A. V. 1979, "On the problem of classification of finite rank groups without torsion", *J. Soviet Math.*, vol. 11, no. 4, pp. 660–663.
32. Thomas, S. 2003, "The Classification Problem for Torsion-Free Abelian Groups of Finite Rank", *JAMS.*, vol. 16, pp. 233–256.
33. Beaumont, R. & Pierce, R. 1961, "Torsion free groups of rank two", *Mem. Amer. Math. Soc.*, vol. 38.
34. Fomin, A. A. 1989. "Abelian groups with one τ -adic relation", *Algebra and Logic*, vol. 28, no. 1, pp. 57–73.
35. Fomin, A. A. 1984, "Abelian groups with free subgroups of infinite index and their endomorphism groups", *Mathematical Notes*, vol. 36, no. 2, pp. 581–585.
36. Fomin, A. A. 1999, "Some mixed abelian groups as modules over the ring of pseudo-rational numbers", *Trends in Math.*, Burkhauser verlag, Basel/Switzerland, pp. 87–100.

Получено 13.02.2019 г.

Принято в печать 12.07.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 2.

УДК 511.6

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-234-243

О некоторых характерах представлений групп

Д. Малинин

Малинин Дмитрий — кафедра математики и информатики, Университет Флоренции (Флоренция, Италия)

e-mail: dmalinin@gmail.com

Аннотация

Мы изучаем поля реализации и целочисленность характеров дискретных и конечных подгрупп $SL_2(\mathbb{C})$ и связанные с ним решетки, а также целочисленность характеров конечных групп G .

Теория характеров конечных и бесконечных групп играет центральную роль в теории групп, теории представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. Классические результаты связаны с некоторыми арифметическими задачами: описание целочисленных представлений существенно для конечных групп над кольцами целых чисел в числовых полях, локальных полях или, в более общем случае, для дедекиндовых колец.

Существенная часть этой статьи посвящена следующему вопросу, восходящему к В. Бернсайду: каждое ли представление над числовым полем может быть сделано целочисленным.

Всякое ли линейное представление $\rho : G \rightarrow GL_n(K)$ конечной группы G над числовым полем $K/\mathbb{Q}$ сопряжено в $GL_n(K)$ с представлением $\rho : G \rightarrow GL_n(O_K)$ над кольцом целых чисел O_K поля K ? Чтобы изучить этот вопрос, используется связь целочисленных представлений и решеток.

Этот вопрос тесно связан с глобально неприводимыми представлениями; концепция, предложенная Дж. Томпсоном и Б. Гроссом, была изучена Фам Хыу Тиеном и обобщена Ф. Ван Ойстаеном и А. Е. Залесским, однако остается много открытых вопросов.

Нас интересуют арифметические аспекты целочисленной реализуемости представлений конечных групп, и, в частности, рассматриваются условия реализуемости в терминах символов Гильберта и алгебр кватернионов.

Ключевые слова: Гиперболические решетки, группы, порожденные отражениями, характеры дискретных и конечных групп, индекс Шура, дедекиндовы кольца, глобально неприводимые представления, простые алгебры над числовыми полями, кватернионы, решетки в простых алгебрах, символ Гильберта, роды, поля расщепления.

Библиография: 29 названий.

Для цитирования:

D. Malinin. On some characters of group representations // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 2, с. 234–243.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 2.

UDC 511.6

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-234-243

On some characters of group representations

D. Malinin

Malinin Dmitry — Dipartimento di Matematica e Informatica U. Dini, Università degli Studi di Firenze, (Firenze, Italy)
e-mail: dmalinin@gmail.com

Abstract

We study realization fields and integrality of characters of discrete and finite subgroups of $SL_2(\mathbf{C})$ and related lattices with a focus on the integrality of characters of finite groups G . Theory of characters of finite and infinite groups plays the central role in the group theory and the theory of representations of finite groups and associative algebras. The classical results are related to some arithmetic problems: the description of integral representations are essential for finite groups over rings of integers in number fields, local fields, or, more generally, for Dedekind rings. A substantial part of this paper is devoted to the following question, coming back to W. Burnside: whether every representation over a number field can be made integral. Given a linear representation $\rho : G \rightarrow GL_n(K)$ of finite group G over a number field $K/\mathbf{Q}$, is it conjugate in $GL_n(K)$ to a representation $\rho : G \rightarrow GL_n(O_K)$ over the ring of integers O_K ? To study this question, it is possible to translate integrality into the setting of lattices.

This question is closely related to globally irreducible representations; the concept introduced by J. G. Thompson and B. Gross, was developed by Pham Huu Tiep and generalized by F. Van Oystaeyen and A.E. Zalesskii, and there are still many open questions. We are interested in the arithmetic aspects of the integral realizability of representations of finite groups, splitting fields, and, in particular, consider the conditions of realizability in the terms of Hilbert symbols and quaternion algebras.

Keywords: Hyperbolic lattices, groups generated by reflections, characters of discrete and finite groups, Schur index, Dedekind ring, globally irreducible representations, simple algebras over number fields, quaternions, lattices in simple algebras, Hilbert symbol, genera, splitting fields.

Bibliography: 29 titles.

For citation:

D. Malinin, 2019, "On some characters of group representations", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 2, pp. 234–243.

Dedicated to the 80th anniversary of the birth of Professor Michel Deza

1. Introduction

In this paper we are interested to study the integrality of characters of discrete subgroups of $SL_2(\mathbf{C})$ and related lattices.

Hyperbolic lattices in dimension three, that is, discrete cofinite subgroups of $SL_2(\mathbf{C})$, show a preference for having integrally valued character functions, see [29]. Probably, the first known lattice with non-integral character seems to be the one presented by Vinberg at the very end

of his fundamental paper [29] where it plays the role of an example for reflection groups. We can present a version of this example and then discuss a series of lattices which contains, most probably, infinitely many with no integer valued character. This is a lattice in three-dimensional hyperbolic space generated by reflections. Let P be the solid in H^3 described combinatorially as a prism with two opposite triangular and three planar quadrangular faces.

Proposition 1. (Vinberg [29]). The group Γ generated by reflections on the faces of P is a cofinite but not cocompact lattice in hyperbolic space H^3 . It is not arithmetic.

Consider the following presentation of a subgroup Γ_1 of Γ :

Generators: $\sigma_1, \sigma_2, \tau_1, \tau_2$,

Relations:

- (1) $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = (\sigma_1\tau_1)^2 = (\sigma_2\tau_1)^2 = (\sigma_2\tau_2)^2 = (\tau_2^{-1}\tau_1)^2 = I$,
- (2) $(\sigma_1\tau_2)^3 = I$,
- (3) $\tau_1^6 = \tau_2^6 = I$.

Proposition 2. Γ_1 has trace field equal to $\mathbf{Q}(\sqrt{-3})$, the field of cube roots of unity. Its character values (squared) are unbounded at the nonarchimedean valuation at the prime 2 and integral at all other non-archimedean places. It is cofinite with exactly one cusp.

The character of Γ_1 is determined by the following representation $G \rightarrow GL_n(\mathbf{C})$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} -i & \frac{3}{\sqrt{2}}i \\ 0 & i \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}-3i}{2} & \sqrt{2}i \\ -\sqrt{2}i & \frac{\sqrt{3}-3i}{2} \end{pmatrix}, \tau_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}+i}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}-i}{2} \end{pmatrix}$$

In [10] H. Helling considered explicit hyperbolic manifolds obtained by Dehn surgeries of type $(4n, n)$ on the figure of eight knot 4_1 . These share the properties of an earlier paper [15] and the above propositions of having associated lattices $SL_2(\mathbf{C})$ with non-integrally valued character functions. See also [15] and [27]. This gives a series of examples of lattices $SL_2(\mathbf{C})$ having non-integral characters.

2. Integrality of characters for finite groups

Starting from this section in this paper we focus on the integrality of characters of finite groups G . Though the traces of $g \in G$ are always algebraic integers, the representations $G \rightarrow GL_n(K)$ are not always realizable in the rings of integers of algebraic number fields K .

Let us consider the following

Assumption 1. Let G be a finite group, K a number field with the ring of integers O_K and $\rho : G \rightarrow GL_n(K)$ an irreducible representation of G . We denote by M_K the associated irreducible KG -module.

Definition. The representation $\rho : G \rightarrow GL_n(K)$ is integral, if and only if $\rho(g) \in GL_n(O_K)$ for all $g \in G$. We say that $\rho(G)$ can be made integral, if and only if there exists an integral representation $G \rightarrow GL_n(O_K)$ which is equivalent to ρ . We call M_K integral if $\rho(G)$ can be made integral.

In other words, $\rho(G)$ can be made integral if and only if we can apply a base change such that all matrices have integral entries.

W. Burnside asked the question whether every representation over a number field can be made integral. To study this question, it is possible to translate integrality into the setting of lattices.

Question. (*W. Burnside, I. Schur, later W. Feit, J.-P. Serre*). Given a linear representation $\rho : G \rightarrow GL_n(K)$ of finite group G over a number field $K/\mathbf{Q}$, is it conjugate to a representation $\rho : G \rightarrow GL_n(O_K)$ over the ring of integers O_K ?

There is an algorithm which efficiently answers this question, it decides whether this representation can be made integral, and, if this is the case, a conjugate integral representation can be computed. Integral realizability of ρ over the ring of integers O_K depends strongly on the class number cl_K of K . The following proposition is well-known, see e.g. [4].

Proposition 3A. Assume that one of the conditions hold:

- (i) We have $K = \mathbf{Q}$.
- (ii) We have $cl_K = 1$.
- (iii) We have the greatest common divisor $GCD(cl_K; n) = 1$.
- (iv) We have $cl_K/cl_K^2 = 1$.

Then the representation $\rho : G \rightarrow GL_n(K)$ can be made integral.

In the papers by D. K. Faddeev (1965, 1995), see [6] and [7], some new ideas on generalized integral representations over Dedekind rings were discussed.

The following theorem is contained in [2].

Theorem 1 (*Cliff, Ritter, Weiss, [2]*). Let G be a finite solvable group. Then every absolutely irreducible character χ of G can be realized over $\mathbf{Z}[\zeta_m]$, where m is the exponent of G .

Example. The metacyclic group $G = \langle x; y | x^9 = y^{19} = 1; y^x = y^7 \rangle$ admits an absolutely irreducible representation $G \rightarrow GL_3(K)$ which cannot be made integral, where K is the unique subfield of $\mathbf{Q}(\zeta_{57})$ of degree 12.

Theorem 2 (*Serre, [28]*).

Let $G = Q_8$, $K = \mathbf{Q}(\sqrt{-d})$, and $d > 0$. Then

- 1) G is realizable over K , $\rho : G \rightarrow GL_2(K)$, if and only if $d = a^2 + b^2 + c^2$ for some integers a, b, c .
- 2) G is realizable over O_K , $\rho : G \rightarrow GL_2(O_K)$, if and only if $d = a^2 + b^2$ for some integers a, b or $d = a^2 + 2b^2$ for some integers a, b .

The starting point of studying absolutely irreducible representations of finite groups with the property of irreducibility modulo all primes was the concept of global irreducibility. The notion of globally irreducible representations for the ring of rational integers appeared in papers by B. H. Gross, see [8], [9] in order to explain new series of Euclidean lattices discovered by N. Elkies and T. Shioda using Mordell-Weil lattices of elliptic curves.

The concept of global irreducibility for arithmetic rings has been introduced by F. Van Oystaeyen and A.E. Zaleskii: a finite group $G \subset GL_n(F)$ over an algebraic number field F is globally irreducible if for every non-archimedean valuation v of F a Brauer reduction reduction of $G \pmod{v}$ is absolutely irreducible. The following theorem is proven in [25].

Theorem 3 (F. Van Oystaeyen and A.E. Zaleskii, see [25]).

O_F -span $O_F G$ of a group $G \subset GL_n(O_F)$ is equal to $M_n(O_F)$ if and only if $G \subset GL_n(O_F)$ is globally irreducible.

The natural problem is to describe the possible n and arithmetic rings O_F such that there is a globally irreducible $G \subset GL_n(O_F)$. In our particular situation it is interesting, what happens for $n = 2$? This question was considered in [20], [22]. The answer is given in the theorem below, see [22], Theorem, p. 9.

Theorem 4 ([22]).

- 1) Let $G = Q_{4m}$ be the group of generalized quaternions, and let $H = G = Q_8$ be the group of quaternions. Then there is a quadratic subfield $K_1 \subset K$ and an $O_{K_1}H$ -module I which is an ideal in an extended field $L_1 = K_1(i)$, such that: $G = Q_{4m}$ is realizable over O_K if and only if H is realizable over O_{K_1} , and all Hilbert symbols $\left(\frac{-d, N_{L_1/\mathbf{Q}}(I)}{p}\right) = 1$ for all $p|d$.
- 2) If $G = Q_{4m}$ is not realizable over O_K , the minimal realization field such that H is realizable over its ring of integers is a biquadratic extension $\mathbf{Q}(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2})$, where $d = d_1 d_2$ and d_1, d_2 are integers not equal to ± 1 or to $\pm d$.
- 3) The explicit computation of I in $L_1 = K_1(i)$ is relevant to a representation of the integer $d = a^2 + b^2 + c^2$. N_{L_1/K_1} of either of these ideals is a principal ideal in O_{K_1} if:
 - (1) $b = c$; then $d = a^2 + 2b^2$ $((a, b) = 1)$ - equivalently, d has no prime factors $p \equiv 5(\text{mod}8)$ and $p \equiv 7(\text{mod}8)$, or
 - (2) $c = 0$; then $d = a^2 + b^2$ $((a, b) = 1)$ or equivalently, d has no prime factors $p \equiv 3(\text{mod}4)$.

Let G be a finite group and χ its complex irreducible character. A number field $K/\mathbf{Q}$ is a splitting field of χ , if there exists a representation of G over K affording χ . A splitting field K is of the minimal degree, if there is no splitting field of χ with degree smaller than K . We say that a splitting field K of χ is integral, if any representation of G over K affording χ can be made integral. Otherwise, the splitting field K is nonintegral.

Let χ be an irreducible complex character of a finite group. All minimal splitting fields of χ have the same relative degree over the character field $\mathbf{Q}(\chi)$, which is called the Schur index of χ over $\mathbf{Q}$, [18]. Let us use for this degree the following notation: $m_{\mathbf{Q}(\chi)}(\chi)$.

For each place v of $\mathbf{Q}(\chi)$, there is an associated local Schur index of χ at v , denoted by $m_{\mathbf{Q}(\chi)_v}(\chi)$, and the least common multiple

$$m_{\mathbf{Q}(\chi)}(\chi) = LCM_v \{m_{\mathbf{Q}(\chi)_v}(\chi)\}.$$

The field $\mathbf{Q}(\chi) \subset \mathbf{K}$ is a splitting field of χ if and only if $m_{\mathbf{Q}(\chi)_v}(\chi)$ divides $[K_w : \mathbf{Q}(\chi)_v]$ for all places v of $\mathbf{Q}(\chi)$ and all divisors w of v .

If $m_{\mathbf{Q}(\chi)}(\chi) > 1$, then there are infinitely many minimal splitting fields of χ , and if $m_{\mathbf{Q}(\chi)}(\chi) = 1$, then the field of characters $\mathbf{Q}(\chi)$ is the unique minimal splitting field of χ .

Do there exist integral and nonintegral minimal splitting fields of a given character? If so, how many are there?

Let us consider the case of trivial Schur index. In this case $\mathbf{Q}(\chi)$ is the only minimal splitting field of χ . The example above shows that it can be nonintegral. On the other hand, for a character χ with $\mathbf{Q}(\chi) = \mathbf{Q}$ the minimal splitting field of χ is integral. Thus in general both cases will occur. We will now concentrate on the case $m_{\mathbf{Q}(\chi)}(\chi) > 1$, more precisely on the case $m_{\mathbf{Q}(\chi)}(\chi) > 1$, $\mathbf{Q}(\chi) = \mathbf{Q}$ and $\deg(\chi) = 2$.

Let G be a finite group, K a number field with the ring of integers $O = O_K$. We will now concentrate on a special situation, originally treated by Serre in [Ser08], for which the existence of integral and nonintegral minimal splitting fields is closely connected to the theory of quaternion algebras and Hilbert symbols. Below we consider (the Hilbert symbol (a, b) over $\mathbf{Q}$ and for a place v of $\mathbf{Q}$ we denote by $(a; b)_v$ the corresponding local Hilbert symbol over $\mathbf{Q}_v$. By $Br_2(\mathbf{Q})$ we denote the subgroup of the Brauer group of $\mathbf{Q}$ generated by quaternion algebras.

We denote by Cl_K the group of ideal classes of K . For a finitely generated O_K -module (a lattice) M we denote by $cl(M)$ its Steinitz class. The simple component of $\mathbf{Q}G$, corresponding to the irreducible character χ , is a non-split quaternion algebra over $\mathbf{Q}$, which we denote by D . The proof of the proposition 3 below is contained in the paper by J.-P. Serre [28].

Definition (see [28].) Let K be an imaginary quadratic number field with discriminant $-d, d > 0$. We define the map

$$e_K : Cl_K / Cl_K^2 \rightarrow Br_2(\mathbf{Q}); [\mathbf{a}] \rightarrow (\mathbf{N}(\mathbf{a}), -\mathbf{d}).$$

Proposition 3 (see [28]). *Let K be an imaginary quadratic number field with discriminant $-d$, which splits D and which we consequently view as a subfield of D . Then the following conditions hold true:*

- (i) *The map e_K is well-defined and injective.*
- (ii) *Let R be a maximal order of D containing O . Then the O -module R is G -invariant. In particular R is an OG -lattice.*
- (iii) *If R and R_0 are two maximal orders of D containing O , then $cl(R) = cl(R_0)$ in Cl_K / Cl_K^2 .*
- (iv) *Let R be a maximal order of D containing O . Then we have $e_K(cl(R)) = (D) \cdot (d_D; -d)$, where d_D is the product of all primes ramified in D including -1 if ∞ is ramified, (D) is the class of D in $Br_2(\mathbf{Q})$.*

Proposition 4 ([22], proposition 5).

- (1) *An algebraic number field K is a splitting field for the group G of quaternions if and only if K is totally imaginary and for all localizations K_v for all prime divisors v of 2 the local degree $[K_v : \mathbf{Q}_2]$ is even.*
- (2) *If K is a splitting field for the group G of quaternions, then $[K : \mathbf{Q}]$ is even.*
- (3) *K is a splitting field for the group G of quaternions and $K/\mathbf{Q}$ is abelian, then K has a quadratic subfield $\mathbf{Q}(\sqrt{\mathbf{d}})$.*

For the convenience of the reader we include the proof of proposition 4.

Proof. By the theorem of Hasse-Brauer-Noether, K is a splitting field for $\langle G \rangle_{\mathbf{Q}}$ if and only if the localization K_v is a splitting field locally for $\langle G \rangle_{\mathbf{Q}_p} = \mathbf{Q}_p G$ for all prime divisors v of p . Since the quaternion algebra has invariants $1/2$ at 2 and ∞ in the Brauer group, and 0 at all other primes p , K is a splitting field for G if and only if K is totally imaginary and for all localizations K_v for all prime divisors v of 2 the local degree $[K_v : \mathbf{Q}_2]$ is even [5], Satz 2, ch. VII, sect. 5.

Since $[K : \mathbf{Q}]$ is the sum of $[K_v : \mathbf{Q}_2]$, it must be even, and this implies (2).

If $K/\mathbf{Q}$ is abelian, its degree is even, and its Galois group has a subgroup of index 2, therefore, the fixed subfield of this subgroup is a quadratic extension of $\mathbf{Q}$.

This completes the proof of proposition 4.

Let us consider the following

Assumption 2. Let G be a finite group and let χ be an irreducible character of a finite group with $m_{\mathbf{Q}}(\chi) > 1$, $\mathbf{Q}(\chi) = \mathbf{Q}$ and $\deg(\chi) = 2$.

Consider the simple component D of $\mathbf{Q}G$, corresponding to the irreducible character χ , which was used in proposition 3 above. Below we consider classes of sublattices $L(R)$ of a maximal order R of D . Recall that a quaternion algebra is just a 4-dimensional $\mathbf{Q}$ -algebra with center $\mathbf{Q}$. We have the following equivalence:

- (1) A quadratic field K is a splitting field of χ ,
- (2) all places v of $\mathbf{Q}$ with $m_{\mathbf{Q}_v}(\chi) = 2$ do not split in K over $\mathbf{Q}$,
- (3) the field K can be embedded as a maximal subfield of D ,
- (4) For all places v of $\mathbf{Q}$ at which D is ramified, the field K_w splits D_v for all places w of K lying above v .

Let K be an imaginary quadratic field which splits D . Then we can view D as a KG -module, which we denote by M_K , and we have seen that a maximal order R of D containing O is an OG -lattice of M_K . To determine integrality, it is now sufficient to consider the set $cl(L(R))$ of classes of sublattices of R or, since e_K is injective, the set $e_K(cl(L(R)))$. Let K be a minimal splitting field of the character χ . Let us denote by S_K the set of prime ideals of $O = O_K$ such that a Brauer reduction of M_K is reducible, let $S' = S'_K$ be the set of rational primes lying over ideals in S_K . Let S be the intersection of all $S' = S'_K$ over all minimal splitting fields K ; following [28], we denote by $e(D, K) = e_K(cl(R))$ for a maximal order R of D containing O . Remind that $-d$ is the discriminant of K .

Lemma 1.

$$e_K(cl(L(M_K))) \subset e(D, K) \cdot \{\Pi_{p \in S_0}(p, -d) | S_0 \subset S\}$$

Proof. It follows from [26], theorem 2.5, and the observation that the class of a sublattice of R can only change by a square or the class of $[I] \in Cl_K/Cl_K^2$, where I is a prime ideal whose I -reduction is reducible, that $cl(L(M_K)) \subset cl(R) \cdot \{\Pi_{I|p \in S_0}[I] | S_0 \subset S\}$. By applying the map e_K to the equation obtained, we get $e_K(cl(L(M_K))) \subset e(D, K) \cdot \{\Pi_{p \in S_0}(p^{f(I)}, -d) | S_0 \subset S\}$, where $f(I)$ is the inertia index of $f(I)$ in $K/\mathbf{Q}$. Assume that $I \in S_K$, but not in S and I is a prime ideal of K above p . Then there exists a minimal splitting field L and a prime ideal q of L lying above p such that the reduction of M_K modulo I is reducible, while the reduction of M_K modulo q is irreducible. This is only possible if the residue field of I is strictly larger than the residue field of I . Thus the norm $N(I) = p^2$ and therefore $(p^{f(I)}, -d) = 1$.

This completes the proof of lemma 1.

Lemma 2 ([3], Theorem 5.3.2, see also [24], Theorem 2.8, compare also [16], sect 81, p.144, Theorem 112). Let $(a_i)_{i \in I}$ be a finite set of elements of $\mathbf{Q}^*$, and let $(\epsilon_{i,v})_{i \in I, v \in P}$ be a set of numbers equal to ± 1 . There exist an infinite number of $x \in \mathbf{Q}^*$ such that $(a_i, x) = \epsilon_{i,v}$ for all $i \in I$ and all $v \in P$ if and only if the following three conditions are satisfied:

- (1) Almost all of the $\epsilon_{i,v}$ are equal to 1, say, $\epsilon_{i,v} = 1$ for $v \notin P_0$ and a finite subset $P_0 \subset P$.
- (2) For all $i \in I$ we have $\Pi_{v \in P}(\epsilon_{i,v}) = 1$.
- (3) For all $v \in P$ there exists $x_v \in \mathbf{Q}_v^*$ such that $(a_i, x_v)_v = \epsilon_{i,v}$ for all $i \in I$.

Note that infiniteness of the number of x follows from Dirichlet's theorem on primes in arithmetic progressions which is involved in the proof.

Lemma 3. There is an infinite number of splitting fields $K = \mathbf{Q}(\sqrt{-d})$ of χ such that $Cl_K/Cl_K^2 = 1$.

Proof. It follows from [12] that $Cl_K/Cl_K^2 = 1$ for quadratic fields $K = \mathbf{Q}(\sqrt{-p})$ for $-p \equiv 1 \pmod{4}$. Let $T = \cup_i q_i$ be the set of rational primes such that Schur indices of χ at q_i are 2. An extension K of the character field $\mathbf{Q}$ is a splitting field of χ if all places of K above the $p \in T$ have inertia degrees divisible by 2. The Legendre symbol $\left(\frac{d_K}{q_i}\right) = (-1)^{(q_i-1)/2} \left(\frac{p}{q_i}\right)$ for the discriminant $d_K = -p$. It follows from proposition 4 that for primes $q_i \neq 2$ the character χ splits iff $\left(\frac{p}{q_i}\right) = (-1)^{(q_i+1)/2}$. For $q_i = 2$ we can see that the inertia degree is 2 iff $d_K = -p \equiv 1 \pmod{8}$. Now we can use Dirichlet's theorem on primes in arithmetic progression to conclude that there are infinitely many primes p satisfying the above congruence conditions for all p_i . This completes the proof of lemma 3.

Theorem 5. Let χ be an irreducible character of a finite group with $m_{\mathbf{Q}}(\chi) > 1$, $\mathbf{Q}(\chi) = \mathbf{Q}$ and $\deg(\chi) = 2$. Then there exist infinitely many integral minimal splitting fields of χ , and there is infinitely many nonintegral minimal splitting fields of χ .

Proof.

1) We can use proposition 3, (iv) together with lemma 3 to prove that there exist infinitely many integral minimal splitting fields of χ . It follows from proposition 4 that the infinite number of K from lemma 3 are minimal splitting fields of χ .

2) Let P be the set of all finite rational primes and ∞ . Let $Ram(D)$ be the set of all finite ramified primes in D together with -1 in the case if D is ramified at ∞ . Let for the elements $p_i \in S \cup Ram(D)$ the set $\epsilon_i = \pm 1$ be prescribed elements. It follows from [11], ch 5, sect. 6, and Dirichlet's theorem on primes in arithmetic progressions that there is an infinite number of primes q and integers x such that Hilbert symbols $(p_i, x)_q = \epsilon_i$ for all indices i .

According to proposition 3, (iv) and lemma 1, it is sufficient to prove that the unit class is not contained in the set of classes $(D) \cdot \{\Pi_{p \in S_0}(p, -d) | S_0 \subset S\}$ for any $S_0 \subset S_1 = S \cup Ram(D)$ and for an infinite number of d ; D is a non-split algebra, and we can assume that S_0 is not empty. For any $S_0 \subset S \cup Ram(D)$ take elements $\epsilon_p \pm 1, p \in S_1$ such that $\Pi_{p \in S_1} \epsilon_p = -1$; according to the above argument there are integers x and a prime $q_1 \notin S_1$ such that D splits at q_1 and $(p, x)_{q_1} = \epsilon_p$ for all $p \in S_1$, thus $((D) \cdot \Pi_{p \in S_0}(p, -x))_{q_1} = \Pi_{p \in S_0}(p, x)_{q_1} = -1$ since $(p, -1)_{q_1} = 1$. Also we can take $q_1 \neq q_1''$ if the corresponding $S_1 \neq S_1''$. Now we can use lemma 2 for $I = S_1, \{a_i\}_{i \in I} = \{p\}_{p \in S_1}, \epsilon_{i,v} = \epsilon_p, P_0 = \{q_1\}$, where q_1 corresponds to $S_0 \subset S$.

The sufficient conditions for an imaginary quadratic field $K = \mathbf{Q}(\sqrt{-d})$, where $d > 0$, to be a splitting field of D is that for all $q \in Ram(D)$ the condition $(q, d)_q = (-1)^{(q+1)/2}$ if $q \neq 2$, or the condition $(q, d)_2 = 1$ if $q = 2$ hold true; since K is imaginary, the sufficient condition at the infinite place is also satisfied. We can also assume that since the conditions for $K = \mathbf{Q}(\sqrt{-d})$ to be a splitting field affect only $v \in Ram(D)$ which do not intersect P_0 , and the second claim of theorem 5 follows from lemma 2.

Remark 1. A similar theorem holds in a more general settings, we have can find minimal integral and nonintegral splitting fields for a large number of characters of various groups assuming that χ is an irreducible character of G with $m_{\mathbf{Q}}(\chi) > 1$.

Remark 2. In some earlier papers, see e.g [21], the author considered the conditions of integrality for representations of finite groups together with conditions of stability of Galois action. The following question has a deep topological motivation, see [1].

Let $\rho : G \rightarrow GL_n(\mathbf{C})$ be a complex n -dimensional representation of a finite group G . Let τ be an automorphism of the field $\mathbf{C}$, not necessarily continuous. For $g \in G$, we act by τ on the matrix coefficients of $\rho(g)$ and obtain a new matrix $\tau(\rho(g))$.

We obtain a new subgroup $\tau(\rho(G))$ in $GL_n(\mathbf{C})$. Is it possible that the subgroup $\tau(\rho(G))$ is not conjugate to $\rho(G)$ in $GL_n(\mathbf{C})$, i.e. there is no matrix $X \in GL_n(\mathbf{C})$ such that $\tau(\rho(G)) = X\rho(G)X^{-1}$?

Acknowledgement. The author is grateful to the referee for useful remarks and suggestions.

3. Conclusion

Theory of characters of finite and infinite groups plays the central role in the group theory and the theory of representations of finite groups and associative algebras. The classical results are related to some arithmetic problems: the description of integral representations are essential for finite groups over rings of integers in number fields, local fields, or, more generally, for Dedekind rings. In this paper we are interested to study the integrality of characters of discrete and finite subgroups of $SL_2(\mathbf{C})$ and related lattices. A substantial part of this paper is devoted to the following question, coming back to W. Burnside: whether every representation over a number field can be made integral. To study this question, it is possible to translate integrality into the setting of lattices.

Question. (*W. Burnside, I. Schur, later W. Feit, J.-P. Serre*). Given a linear representation $\rho : G \rightarrow GL_n(K)$ of finite group G over a number field $K/\mathbf{Q}$, is it conjugate to a representation $\rho : G \rightarrow GL_n(O_K)$ over the ring of integers O_K ?

This question is closely related to globally irreducible representations; the concept introduced by J. G. Thompson and B. Gross, was developed and generalized by Pham Huu Tiep, F. Van Oystaeyen and A.E. Zalesskii, and there are still many open questions. We are interested in the arithmetic aspects of the integral realizability of representations of finite groups, and, in particular, prove the existence of infinite number of splitting fields where the representations are not realizable.

REFERENCES

1. Mikhail Borovoi, Yves Cornulier, Conjugate complex homogeneous spaces with non-isomorphic fundamental groups, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, v. 353, 2015, 1001–1005.
2. G. Cliff, J. Ritter, A. Weiss, Group representations and integrality, J. Reine Angew. Math. v. 426, 1992, 193–202.
3. Henri Cohen, Number Theory Volume I: Tools and Diophantine Equations, Graduate Texts in Mathematics (Book 239), Springer; 2007
4. Ch. Curtis and I. Reiner, Representaion theory of finite groups and associative algebras, 1962.
5. Max Deuring, Algebren, Springer, 1968.
6. D. K. Faddeev, An introduction to the multiplicative theory of modules of integral representations. (Russian) Trudy Mat. Inst. Steklov 80, p. 145–182, 1965.
7. D. K. Faddeev, On generalized integral representations over Dedekind rings. J. Math. Sci. (New York) 89, 1998, no. 2, p. 1154–1158
8. B. H. Gross, Group representations and lattices, J. Amer. Math. Soc. 3, 1990, 929–960.
9. B. H. Gross, Groups over $\mathbf{Z}$, Invent. Math. 124, 1996, 263–279.
10. H. Helling, Lattices with non-integral character. In: Groups: Topological, Combinatorial and Arithmetic Aspects. London Mathematical Society Lecture Note Series 311, 306–317. Cambridge University Press, 2004.
11. H. Hasse, Number Theory, Akademie-Verlag, Berlin, 1979.
12. H. Hasse, Zur Geschlechtertheorie in quadratischen Zahlkörpern, J. Math. Soc. Japan 3 (1951), 45–51.
13. H. Hasse, A supplement to Leopoldt’s theory of genera in abelian number fields, J. Number Theory 1 (1969), 4–7.
14. E. Hecke, Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Zahlen, Leipzig 1923.
15. H. Helling, The trace field of a series of hyperbolic manifolds. Preprint 99-072, SFB 343. Bielefeld, 1999, p. 1–33.
16. D. Hilbert, The theory of algebraic number fields/David Hilbert. Transl. from the German by Iain T. Adamson. With an introd. by Franz Lemmermeyer and Norbert Schappacher. Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg 1998.

17. H. M. Hilden, M. T. Lozano, and J. A. Montesinos-Amilibia, Characterization of Arithmetic Subgroups of $SL_2(\mathbf{R})$ and $SL_2(\mathbf{C})$, *Math. Nachr.* 159 (1992), p. 245–270.
18. I. M. Isaacs, *Character Theory of finite groups*. Academic Press, 1976.
19. V. V. Ishkhanov, B. B. Lurje, D. K. Faddeev, *The Embedding Problem in Galois Theory*, Volume 7; *Transl. Math. Monographs*, AMS, vol. 165, 1997.
20. Dmitry Malinin, Freddy Van Oystaeyen, Realizability of two-dimensional linear groups over rings of integers of algebraic number fields, *Algebras and Representation Theory*, 2011, vol. 14, nr. 2, p. 201–211.
21. Dmitry Malinin, Galois stability for integral representations of finite groups, *Algebra i Analiz*, 2000, *St.-Petersburg Math. J.*, 2001, vol. 12, nr. 3, p. 423–449.
22. Dmitry Malinin, On the integral and globally irreducible representations of finite groups. *Journal of Algebra and Its Applications*, World Scientific, v. 17, No. 3, 2018.
23. Dmitry Malinin, One construction of integral representations of p-groups and some applications, *Chebyshevskii. Sbornik*, vol. 16, nr. 3 (2015), p. 322–338.
24. Travis Morrison, Diophantine definability of non-norms of cyclic extensions of global fields, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 2019. DOI: <https://doi.org/10.1090/tran/7810>
25. Freddy Van Oystaeyen and A.E. Zalesskii, Finite groups over arithmetic rings and globally irreducible representations, *J. Algebra*, vol. 215, p. 418–436, 1999.
26. W. Plesken, On absolutely irreducible representations of orders, In Hans Zassenhaus, editor, *Number theory and algebra*, Academic Press, New York, (1977), 241–262.
27. U. Rehmann, E. Vinberg, On a phenomenon discovered by Heinz Helling. (English), *Transform. Groups* 22, No. 1, p. 259–265, 2017.
28. J.-P. Serre, Three letters to Walter Feit on group representations and quaternions. *J. Algebra* 319, nr. 2, p. 549–557, 2008.
29. E. B. Vinberg, The smallest field of definition of a subgroup of the group PSL_2 , *Russian Acad. Sci. Sb. Math.* 80, 1995, no. 1, 179–190.

Получено 16.06.2017 г.

Принято в печать 12.07.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 2.

УДК 517.925

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-244-258

Матричные уравнения систем фазовой синхронизации

С. С. Мамонов, И. В. Ионова, А. О. Харламова (г. Рязань)

Мамонов Сергей Станиславович — доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики и методики преподавания математических дисциплин физико-математического факультета Рязанского государственного университета имени С. А. Есенина (г. Рязань).
e-mail: s.mamonov@365.rsu.edu.ru

Ионова Ирина Викторовна — кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры математики и методики преподавания математических дисциплин физико-математического факультета Рязанского государственного университета имени С. А. Есенина (г. Рязань).
e-mail: i.ionova@365.rsu.edu.ru

Харламова Анастасия Олеговна — кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры математики и методики преподавания математических дисциплин физико-математического факультета Рязанского государственного университета имени С. А. Есенина (г. Рязань).
e-mail: a.harlamova@365.rsu.edu.ru

Аннотация

В статье рассматривается система матричных уравнений Лурье. Такая система имеет прикладное значение при исследовании асимптотической устойчивости состояний равновесия системы дифференциальных уравнений, нахождении областей притяжения состояний равновесия, определения условий существования предельных циклов для систем дифференциальных уравнений, исследовании глобальной устойчивости, скрытой синхронизации систем фазовой и частотно-фазовой автоподстройки частоты. Известно, что условия разрешимости матричных уравнений Лурье определяются «частотной теоремой Якубовича-Калмана». Для изучения нелинейных колебаний фазовых систем возникает необходимость нахождения решений матричных уравнений Лурье.

В данной статье рассматривается случай, когда матричное неравенство Ляпунова, входящее в состав уравнений Лурье, имеет матрицу с действительными собственными значениями, часть из которых могут быть нулевыми. Для такого случая получены необходимые и достаточные условия разрешимости уравнений Лурье и определен вид решений, что позволяет провести их спектральный анализ. Явный вид решений матричных уравнений дал возможность провести их геометрическую интерпретацию в зависимости от спектра, показать взаимосвязь уравнения линейной связи с квадратичными формами решений уравнений Лурье. В основе метода анализа матричных уравнений лежит подход, базирующийся на использовании прямого произведения матриц и применении обобщенно обратных матриц для нахождения решений систем линейных уравнений. Результаты работы позволили исследовать систему трех матричных уравнений возникающую при изучении фазовых систем частотно-фазовой автоподстройки частоты.

Ключевые слова: система дифференциальных уравнений, матричные уравнения Лурье, скрытая синхронизация, система частотно-фазовой автоподстройки частоты.

Библиография: 18 названий.

Для цитирования:

С. С. Мамонов, И. В. Ионов, А. О. Харламова. Матричные уравнения систем фазовой синхронизации // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 2, С. 244–258.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 2.

UDC 517.925

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-244-258

Matrix equations of the system of phase synchronization

S. S. Mamonov, I. V. Ionova, A. O. Kharlamova (Ryazan)

Mamonov Sergey Stanislavovich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Ryazan State University named after S. A. Yesenin (Ryazan).

e-mail: s.mamonov@365.rsu.edu.ru

Ionova Irina Viktorovna — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Lecturer of the Department of Mathematics and Methods of Teaching Mathematical Disciplines, Ryazan State University named after S. A. Yesenin (Ryazan).

e-mail: i.ionova@365.rsu.edu.ru

Kharlamova Anastasia Olegovna — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Lecturer of the Department of Mathematics and Methods of Teaching Mathematical Disciplines, Ryazan State University named after S. A. Yesenin (Ryazan).

e-mail: a.kharlamova@365.rsu.edu.ru

Abstract

The system of matrix Lurie equations is considered. Such a system is of practical importance in the study of the asymptotic stability of equilibrium states of a system of differential equations, finding the regions of attraction of equilibrium states, determining the conditions for the existence of limit cycles for systems of differential equations, investigating global stability, hidden synchronization of phase and frequency-frequency self-tuning systems. It is known that the conditions for the solvability of the matrix Lurie equations are determined by the "Yakubovich-Kalman frequency theorem". To study nonlinear oscillations of phase systems, it becomes necessary to find solutions of the matrix Lurie equations.

In this paper we consider the case when the matrix Lyapunov inequality, which is part of the Lurie equation, has a matrix with real eigenvalues, some of which may be zero. For such a case, necessary and sufficient conditions for the solvability of the Lurie equations are obtained and the form of the solutions is determined, which makes it possible to carry out their spectral analysis. The explicit form of the solutions of the matrix equations made it possible to make their geometric interpretation depending on the spectrum, to show the relationship of the linear connection equation to the quadratic forms of solutions of the Lurie equations. The method of analyzing matrix equations is based on an approach based on the use of a direct product of matrices and the application of generalized inverse matrices to find solutions to systems of linear equations. The results of the work made it possible to investigate the system of three matrix equations arising in the study of phase-frequency frequency-phase self-tuning systems.

Keywords: system of differential equations, matrix Lurie equations, hidden synchronization, frequency-phase frequency-locked loop.

Bibliography: 18 titles.

For citation:

S. S. Mamonov, I. V. Ionova, A. O. Kharlamova, 2019, "Matrix equations of the system of phase synchronization", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 2, pp. 244–258.

1. Введение

Рассмотрим систему матричных уравнений

$$AX + XA^T = L, \quad (1)$$

$$Xq = r, \quad (2)$$

где $A, X, L \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $q, r \in \mathbb{R}^n$, " T " — транспонирование, X, L — неизвестные матрицы. Для матричного уравнения Ляпунова (1) известны условия существования решения X [1-4]. Если $\lambda_i(A)$, $i = \overline{1, n}$ — собственные значения матрицы A и $\lambda_i(A) + \lambda_j(A) \neq 0$, $i, j = \overline{1, n}$, то уравнение (1) однозначно разрешимо для любой матрицы L . Для случая $L < 0$ необходимые и достаточные условия разрешимости системы (1), (2) определяются частотной теоремой Якубовича–Калмана [5-7].

Одним из методов определения нелинейных колебаний системы дифференциальных уравнений является принцип тора [6]. Суть этого метода заключается в построении в фазовом пространстве рассматриваемой системы тороидального множества Ω , положительно инвариантного для её решений и не содержащего состояний равновесия. Далее выбирается сечение тороидального множества Ω плоскостью P , обладающее свойствами «бесконтактности» и «возвращаемости». На полученном сечении определяется функция Пуанкаре, которая под действием непрерывного оператора T отображает сечение множества Ω плоскостью P в себя, тогда по теореме Брауэра существует неподвижная точка оператора T , которая определяет начальные условия колебательного цикла. В настоящее время нет универсального подхода построения положительно инвариантного тороидального множества. Для построения тороидального множества используются решения матричных уравнений [6, 8-15]. В качестве границ положительно инвариантных множества предлагаются эллипсоиды и цилиндрические поверхности, определяемые решениями уравнений (1), (2).

Нахождения начальных условий циклов использует численные методы определения вращения векторного поля на границе тороидального множества. Вычисление вращения приводит к необходимости использовать не только условия существования матричных уравнений, но и определению самих решений [11].

В статье продолжены исследования работ [16, 17], рассматриваются матричные уравнения, когда матрица A имеет действительные собственные значения, среди которых могут быть и нулевые. Для уравнения (1) с матрицей A , для которой $\lambda_i(A) = -\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$, сформулированы необходимые и достаточные условия разрешимости и получены решения системы уравнений (1), (2).

2. Матричное уравнение Ляпунова

Пусть $A_{n \times m}$, $B_{m \times k}$, $C_{k \times p}$ — произвольные матрицы, E_n — единичная матрица $E_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $[A_{n, m}] = colon(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1m}, a_{21}, \dots, a_{2m}, \dots, a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nm})$, тогда справедливы соотношения [16, 17]

$$[ABC] = (A \otimes C^T) [B], \quad (3)$$

$$A_{n \times m} = (E_n \otimes [E_m]^T) ([A] \otimes E_m), \quad (4)$$

$$A_{n \times m} B_{m \times k} C_{k \times p} = (E_n \otimes [E_p]^T) ((A \otimes C^T) [B] \otimes E_p), \quad (5)$$

где " $\otimes$ " — прямое произведение матриц [1, 2, 4].

ТЕОРЕМА 1. Пусть для матрицы A справедливо равенство

$$Q = A \otimes E + E \otimes A, \det(A \otimes E + E \otimes A) = 0,$$

Q^+ — обобщенно обратная матрица [2] для матрицы Q , тогда для того чтобы уравнение (1) имело решение необходимо и достаточно чтобы $QQ^+[L] = [L]$. Решение уравнения (1) имеет вид $X = X_1 + X_2$, $[X_1] = Q^+[L]$, $[X_2] = (E - Q^+Q)[Y]$, где Y — произвольная матрица.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя соотношение (3), уравнение (1) запишем в виде

$$(A \otimes E)[X] + (E \otimes A)[X] = [L]. \quad (6)$$

Пусть $Q = A \otimes E + E \otimes A$, Q^+ — обобщенно обратная матрица для матрицы Q , тогда необходимым и достаточным условием разрешимости уравнения (6) является выполнение соотношения $QQ^+[L] = [L]$ [2, стр.268], уравнение (6) имеет решение $[X]$

$$[X] = Q^+[L] + (E - Q^+Q)[Y] = [X_1] + [X_2], \quad (7)$$

где Y — произвольная матрица. Применяя (4) к соотношению (7), решение X можно записать в виде

$$X = \left(E \otimes [E]^T \right) ((Q^+[L] + [Y] - Q^+QY) \otimes E). \quad (8)$$

Теорема 1 доказана. $\square$

Рассмотрим уравнение (1) с матрицей $A = \text{diag}(\underbrace{0, \dots, 0}_m, -\alpha_1, \dots, -\alpha_k)$, где $\alpha_i + \alpha_j \neq 0, i, j = \overline{1, k}$.

Матрица A имеет m нулевых собственных значений и k действительных собственных значений отличных от нуля.

Введем обозначения $e_i^T = (\underbrace{0, \dots, 0}_i, 1, 0, \dots, 0)$, $e_i \in \mathbb{R}^n$, $E_{ni} = e_i \otimes e_i^T$, $E_{ni} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Первый индекс матрицы E_{ni} определяет её размерность, а второй индекс расположение единиц на диагонали.

Пусть A^+ обобщенно обратная матрица для матриц A , тогда справедливы соотношения

$$A = \sum_{i=1}^k (-\alpha_i) E_{n(m+i)}, \quad A^+ = \sum_{i=1}^k (-\alpha_i)^{-1} E_{n(m+i)}, \quad AA^+ = A^+A = \sum_{i=1}^k E_{n(m+i)}, \quad (9)$$

$$A^+ E_{ni} = 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad \sum_{i=1}^n E_{ni} = E_n, \quad E_{ni}^T = E_{ni}, \quad E_{ni} E_{nj} = 0, \quad i \neq j. \quad (10)$$

Для матрицы

$$\begin{aligned} Q_{n^2} &= A \otimes E_n + E_n \otimes A = E_{n1} \otimes A + \dots + E_{nm} \otimes A + \\ &+ E_{n(m+1)} \otimes (-\alpha_1 E_n + A) + \dots + E_{nn} \otimes (-\alpha_k E_n + A) \end{aligned} \quad (11)$$

непосредственно по определению показывается, что обобщенно обратная матрица имеет вид

$$\begin{aligned} Q_{n^2}^+ &= E_{n1} \otimes A^+ + \dots + E_{nm} \otimes A^+ + E_{n(m+1)} \otimes \\ &\otimes (-\alpha_1 E_n + A)^{-1} + \dots + E_{nn} \otimes (-\alpha_k E_n + A)^{-1}. \end{aligned} \quad (12)$$

В силу Теоремы 1, матрица L уравнения (1) должна удовлетворять равенству

$$(Q_{n^2} Q_{n^2}^+ - E_{n^2})[L] = 0. \quad (13)$$

Для нахождения решения $[L]$ уравнения (13) используем Теорему 2 [2].

Пусть $D_{n^2} = Q_{n^2} Q_{n^2}^+ - E_{n^2}$, тогда с учетом (9), (10), (11), (12) получим

$$\begin{aligned} D_{n^2} &= (E_{n1} \otimes A + \dots + E_{nm} \otimes A + E_{n(m+1)} \otimes (-\alpha_1 E_n + A) + \dots + E_{nn} \otimes \\ &\otimes (-\alpha_k E_n + A)) \times (E_{n1} \otimes A^+ + \dots + E_{nm} \otimes A^+ + E_{n(m+1)} \otimes (-\alpha_1 E_n + A)^{-1} + \dots \\ &+ E_{nn} \otimes (-\alpha_k E_n + A)^{-1}) - E_{n^2} = -(E_{n1} + \dots + E_{nm}) \otimes (E_{n1} + \dots + E_{nm}). \end{aligned} \quad (14)$$

Покажем, что обобщенно обратная матрица для D_{n^2} определяется соотношением $D_{n^2}^+ = D_{n^2}$. Действительно, так как

$$\begin{aligned} D_{n^2}^+ D_{n^2} &= (E_{n1} + \dots + E_{nm}) \otimes (E_{n1} + \dots + E_{nm}) = D_{n^2} D_{n^2}^+, \\ D_{n^2} D_{n^2}^+ D_{n^2} &= D_{n^2}, \quad D_{n^2}^+ D_{n^2} D_{n^2}^+ = D_{n^2}^+, \end{aligned} \quad (15)$$

то $D_{n^2}^+$ — обобщенно обратная матрица для D_{n^2} . В силу соотношения $D_{n^2} D_{n^2}^+ 0_{n^2} = \theta_{n^2}$ для уравнения (13) выполнены необходимые и достаточные условия разрешимости. Из Теоремы 2 [2] и (15) следует, что решение $[L]$ уравнения (13) имеет вид

$$[L] = (E_{n^2} - D_{n^2}^+ D_{n^2}) [Z] = [Z] - ((E_{n1} + \dots + E_{nm}) \otimes (E_{n1} + \dots + E_{nm})) [Z], \quad (16)$$

где Z — произвольная матрица размерности $n \times n$. Используя (4), (5), (16), (10) получим

$$\begin{aligned} L &= (E_n \otimes [E_n]^T) ([L] \otimes E_n) = Z - (E_n \otimes [E_n]^T) \times \\ &\times (((E_{n1} + \dots + E_{nm}) \otimes (E_{n1} + \dots + E_{nm})) [Z] \otimes E_n) = \\ &= Z - (E_{n1} + \dots + E_{nm}) Z (E_{n1} + \dots + E_{nm}). \end{aligned} \quad (17)$$

Таким образом, доказана теорема.

ТЕОРЕМА 2. Для того чтобы уравнение (1) с матрицей $A = \text{diag}(\underbrace{0, \dots, 0}_m, -\alpha_1, \dots, -\alpha_k)$,

$\alpha_i + \alpha_j \neq 0$, $i, j = \overline{1, k}$ имело решение необходимо и достаточно, чтобы матрица L имела вид (17), где Z — произвольная матрица размерности $n \times n$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если матрица A не имеет нулевых собственных значений и $(\alpha_i + \alpha_j) \neq 0$, $i, j = \overline{1, n}$, то уравнение (1) при любой матрице L имеет решение X .

Пусть для уравнения (1) выполнены условия Теоремы 2, найдем решение уравнения (1). В силу соотношения (7) для матрицы X справедливо равенство $[X] = [X_1] + [X_2]$, где

$$[X_1] = Q_{n^2}^+ [L], \quad (18)$$

$$[X_2] = (E_{n^2} - Q_{n^2}^+ Q_{n^2}) [Y], \quad (19)$$

Y — произвольная матрица размерности $n \times n$. С учетом (18), (4), (5), (12), (9), (10) найдем X_1

$$\begin{aligned} X_1 &= (E \otimes [E]^T) ([X_1] \otimes E) = (E \otimes [E]^T) (Q_{n^2}^+ [L] \otimes E) = \\ &= (E_{n1} + \dots + E_{nm}) L A^+ + E_{n(m+1)} L (A - \alpha_1 E)^{-1} + \dots + E_{nn} L (A - \alpha_k E)^{-1}. \end{aligned} \quad (20)$$

Принимая во внимание (14), для матриц Q_{n^2} , $Q_{n^2}^+$, выполняется равенство

$$E_{n^2} - Q_{n^2}^+ Q_{n^2} = -D = (E_{n1} + \dots + E_{nm}) \otimes (E_{n1} + \dots + E_{nm}). \quad (21)$$

Используя (19), (21), (4), (5), найдем матрицу X_2

$$\begin{aligned} X_2 &= \left(E_{2n} \otimes [E_{2n}]^T \right) ([X_2] \otimes E_{2n}) = - \left(E_{2n} \otimes [E_{2n}]^T \right) (D[Y] \otimes E) = \\ &= \left(E \otimes [E]^T \right) (((E_{n1} + \dots + E_{nm}) \otimes (E_{n1} + \dots + E_{nm})) [Y] \otimes E) = \\ &= (E_{n1} + \dots + E_{nm}) Y (E_{n1} + \dots + E_{nm})^T = (E_{n1} + \dots + E_{nm}) Y (E_{n1} + \dots + E_{nm}). \end{aligned} \quad (22)$$

Из (7), (20), (22) следует, что справедливо утверждение.

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполнены условия Теоремы 2, тогда решение уравнения (1) имеет вид

$$\begin{aligned} X &= (E_{n1} + \dots + E_{nm}) LA^+ + E_{n(m+1)} LB_1 + \dots + \\ &+ E_{nn} LB_k + (E_{n1} + \dots + E_{nm}) Y (E_{n1} + \dots + E_{nm}), \end{aligned} \quad (23)$$

где $B_i = (A - \alpha_1 E)^{-1}$, $i = \overline{1, k}$, Y — произвольная матрица.

Пример 1. Рассмотрим уравнение (1) с матрицей $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix}$, $\alpha > 0$, тогда по Теореме 2 в классе симметрических матриц получим, что матрица L определяется равенством $L = \begin{pmatrix} 0 & l_{12} \\ l_{12} & l_{22} \end{pmatrix}$. Из формулы (23) найдем множество решений уравнения (1)

$$X = E_{21} LA^+ + E_{22} L (A - \alpha E)^{-1} + E_{21} Y E_{21}.$$

Матрица A^+ в силу соотношений (9) имеет вид $A^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (-\alpha)^{-1} \end{pmatrix}$. Справедливы равенства

$$B = (A - \alpha E)^{-1} = (-2\alpha)^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X_{11} = E_{21} LA^+ = (-\alpha)^{-1} \begin{pmatrix} 0 & l_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$X_{12} = E_{22} L (A - \alpha E)^{-1} = E_{22} LB = (-2\alpha)^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2l_{12} & l_{22} \end{pmatrix}.$$

Пусть $Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix}$, тогда с учетом (22) матрица X_2 имеет вид $X_2 = E_{21} Y E_{21} = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, где $t = y_{11} \in \mathbb{R}$. Из Теоремы 3 получим, что решение X определяется соотношением

$$X = -\alpha^{-1} \begin{pmatrix} 0 & l_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - (2\alpha^{-1}) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2l_{12} & l_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \alpha^{-1} \begin{pmatrix} t\alpha & -l_{12} \\ -l_{12} & -2^{-1}l_{22} \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Используя (24) найдем $\det X = \alpha^{-1} (-2^{-1}t\alpha l_{22} - l_{12}^2)$.

Если выполнено неравенство $l_{12}^2 > -2^{-1}t\alpha l_{22}$, то $\det X < 0$. Для матрицы L получим, что $\det L = -l_{12}^2$ при этом $\det L \geq 0$ только в случае когда $l_{12} = 0$.

Если $l_{12} = 0$, то $\det X = -2^{-1}tl_{22}$. Пусть $l_{12} = 0$, $l_{22} < 0$, тогда $\det L \leq 0$. Используя критерий Сильвестра для матрицы X , получим, что при $t < 0$ выполняется неравенство $\det X < 0$, а при $t > 0$ справедливы соотношения $\det X > 0$, $X = X^T > 0$, матрица X является положительно определенной.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $A, B \in \mathbb{M}^{n \times m}$, $A_{n,m} = (a_{i,j})$, $B_{n,m} = (b_{i,j})$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$ под Адамаровым произведением матриц A и B будем понимать матрицу $C = A \circ B = (a_{ij}b_{ij})$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть

$$A = \text{diag}(-\alpha_1, -\alpha_2, \dots, -\alpha_n), \quad (\alpha_i + \alpha_j) \neq 0, \quad i, j = \overline{1, n},$$

$$B_i = (A - \alpha_i E)^{-1} = \text{diag}(b_{i1}, b_{i2}, \dots, b_{in}), \quad i = \overline{1, n}, \quad B = (b_{ij}), \quad i, j = \overline{1, n},$$

тогда решение уравнения (1) имеет вид $X = L \circ B$. Если $L < 0$, $B < 0$, то $X > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя условие Теоремы 4, $A = \text{diag}(-\alpha_1, -\alpha_2, \dots, -\alpha_n)$ и обозначения $e_i = \text{colon}(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, $E_{ni} = e_i \otimes e_i^T$, найдем матрицу Q

$$Q = (A \otimes E + E \otimes A)^{-1} = e_1 \otimes e_2^T \otimes (A - \alpha_2 E)^{-1} + \dots +$$

$$+ e_n \otimes e_n^T \otimes (A - \alpha_n E)^{-1} = E_{n1} \otimes B_1 + E_{n2} \otimes B_2 + \dots + E_{nn} \otimes B_n. \quad (25)$$

Соотношения (8), (25), (3), (5), (10) позволяют определить решение уравнения (1)

$$X = (E \otimes [E]^T) ((E_{n1} \otimes B_1 + E_{n2} \otimes B_2 + \dots + E_{nn} \otimes B_n) [L] \otimes E) =$$

$$= E_{n1} L B_1^T + E_{n2} L B_2^T + \dots + E_{nn} L B_n^T = L \circ B.$$

Используя, теорему Шура [2] для решения $X = L \circ B$ получим, что если $L < 0$, $B < 0$, то $X > 0$. Теорема 4 доказана. $\square$

3. Система матричных уравнений

Рассмотрим систему матричных уравнений (1), (2) относительно неизвестных матриц X , L . Пусть для уравнения (1) выполнены условия Теоремы 3, тогда его решение определяется соотношением (23). С учетом (23) для матрицы X справедливо равенство

$$X = (E_{n1} + \dots + E_{nm}) L A^+ + E_{n(m+1)} L B_1 + \dots + E_{nn} L B_k + X_2, \quad (26)$$

где $B_i = (A - \alpha_i E)^{-1}$, $i = \overline{1, k}$, $X_2 = (E_{n1} + \dots + E_{nm}) Y (E_{n1} + \dots + E_{nm})$, Y — произвольная матрица. Подставим решение X в уравнение линейной связи (2)

$$[(E_{n1} + \dots + E_{nm}) L A^+ q + E_{n(m+1)} L B_1 q + \dots + E_{nn} L B_k q] = [r - X_2 q]. \quad (27)$$

Используя формулу (3) и то, что $A^{+T} = A^+$, $B_i^T = B_i$, получим

$$[(E_{n1} + \dots + E_{nm}) L A^+ q + E_{n(m+1)} L B_1 q + \dots + E_{nn} L B_k q] =$$

$$= ((E_{n1} + \dots + E_{nm}) \otimes q^T A^+ + E_{n(m+1)} \otimes q^T B_1 + \dots + E_{nn} \otimes q^T B_k) [L]. \quad (28)$$

Принимая во внимание условия Теоремы 2, для матрицы L справедливо соотношение

$$[L] = [Z] - ((E_{n1} + \dots + E_{nm}) \otimes (E_{n1} + \dots + E_{nm})) [Z] =$$

$$= (E_{n^2} - (E_{n1} + \dots + E_{nm}) \otimes (E_{n1} + \dots + E_{nm})) [Z], \quad (29)$$

где Z — произвольная матрица. С учетом (9), (10), (28) определим

$$[(E_{n1} + \dots + E_{nm}) L A^+ q + E_{n(m+1)} L B_1 q + \dots + E_{nn} L B_k q] =$$

$$= ((E_{n1} + \dots + E_{nm}) \otimes q^T A^+ + E_{n(m+1)} \otimes q^T B_1 + \dots + E_{nn} \otimes q^T B_k) [Z]. \quad (30)$$

Принимая во внимание (27), (30), уравнение (2) можно записать в виде

$$K [Z] = [b], \quad (31)$$

где Z — произвольная матрица,

$$K = (E_{n1} + \dots + E_{nm}) \otimes q^T A^+ + E_{n(m+1)} \otimes q^T B_1 + \dots + E_{nn} \otimes q^T B_k, \quad K \in \mathbb{R}^{n \times n^2}, \quad (32)$$

$$b = r - X_2 q. \quad (33)$$

Введем следующие обозначения $q_0 = \text{colon}(0, \dots, 0, q_{m+1}, \dots, q_n)$,

$$\Delta_{q_0} = q^T A^+ A q = q_{m+1}^2 + \dots + q_n^2, \quad \Delta_{q^T B_i} = q^T B_i B_i q, \quad i = \overline{1, k}.$$

По определению обобщенно обратной матрицы показывается, что K^+ имеет вид

$$K^+ = \Delta_{q_0}^{-1} (E_{n1} + \dots + E_{nm}) \otimes A q + E_{n(m+1)} \otimes \Delta_{q^T B_1}^{-1} B_1 q + \dots + E_{nn} \otimes \Delta_{q^T B_k}^{-1} B_k q. \quad (34)$$

В силу соотношений (32), (34) справедливы равенства

$$\begin{aligned} K K^+ &= \Delta_{q_0}^{-1} (E_{n1} + \dots + E_{nm}) \otimes \underbrace{q^T A^+ A q}_{\Delta_{q_0}} + 0 + \dots + 0 + E_{n(m+1)} \otimes \Delta_{q^T B_1}^{-1} \underbrace{q^T B_1 B_1 q}_{\Delta_{q^T B_1}} + \dots + \\ &+ E_{nn} \otimes \Delta_{q^T B_k}^{-1} \underbrace{q^T B_k B_k q}_{\Delta_{q^T B_k}} = (E_{n1} + \dots + E_{nm}) \otimes 1 + (E_{n(m+1)} + \dots + E_{nn}) \otimes 1 = E_n, \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} K K^+ &= \Delta_{q_0}^{-1} (E_{n1} + \dots + E_{nm}) \otimes A q q^T A^+ + E_{n(m+1)} \otimes \Delta_{q^T B_1}^{-1} B_1 q q^T B_1 + \dots + \\ &+ E_{nn} \otimes \Delta_{q^T B_k}^{-1} B_k q q^T B_k, \quad K^+ \underbrace{K K^+}_{E_n} = K^+, \quad \underbrace{K K^+}_{E_n} K = K. \end{aligned} \quad (36)$$

Из (35) вытекает $K K^+ [b] = [b]$, следовательно для уравнения (31) выполнены необходимые и достаточные условия разрешимости. В силу Теоремы 2 [2] решение $[Z]$ уравнения (31) имеет вид

$$[Z] = K^+ [b] + (E_{n^2} - K^+ K) [W], \quad (37)$$

где W — произвольная матрица. Введем обозначения

$$[Z_1] = K^+ [b], \quad (38)$$

$$[Z_2] = (E_{n^2} - K^+ K) [W]. \quad (39)$$

Используя (4), (38), (34), (5), (33) найдем Z_1

$$\begin{aligned} Z_1 &= (E \otimes [E]^T) ([Z_1] \otimes E) = (E \otimes [E]^T) (K^+ [b] \otimes E) = \\ &= \Delta_{q_0}^{-1} (E_{n1} + \dots + E_{nm}) r q^T A + E_{n(m+1)} r \Delta_{q^T B_1}^{-1} q^T B_1 + \dots + \\ &+ E_{nn} r \Delta_{q^T B_k}^{-1} q^T B_k - \Delta_{q_0}^{-1} (E_{n1} + \dots + E_{nm}) X_2 q q^T A - \\ &- \Delta_{q^T B_1}^{-1} E_{n(m+1)} X_2 q q^T B_1 - \dots - \Delta_{q^T B_k}^{-1} E_{nn} X_2 q q^T B_k. \end{aligned} \quad (40)$$

Учитывая, что $(E_{n1} + \dots + E_{nm}) X_2 = (E_{n1} + \dots + E_{nm}) Y (E_{n1} + \dots + E_{nm})$, $E_{n(m+i)} X_2 = 0$, $i = \overline{1, k}$ выражение (40) примет вид

$$\begin{aligned} Z_1 &= \Delta_{q_0}^{-1} (E_{n1} + \dots + E_{nm}) r q^T A + E_{n(m+1)} r \Delta_{q^T B_1}^{-1} q^T B_1 + \dots + E_{nn} r \Delta_{q^T B_k}^{-1} q^T B_k - \\ &- \Delta_{q_0}^{-1} (E_{n1} + \dots + E_{nm}) Y (E_{n1} + \dots + E_{nm}) q q^T A. \end{aligned} \quad (41)$$

В силу соотношений (4), (39), (36), (5) матрица Z_2 определяется равенством

$$\begin{aligned} Z_2 &= W - (E \otimes E^T) ((K^+ K) [W] \otimes E) = W - \Delta_{q_0}^{-1} (E_{n1} + \dots + E_{nm}) W A q q^T A^+ + \\ &+ \Delta_{q^T B_1}^{-1} E_{n(m+1)} W B_1 q q^T B_1 + \dots + \Delta_{q^T B_k}^{-1} E_{nn} W B_k q q^T B_k. \end{aligned} \quad (42)$$

Из (41), (42), (37), (38), (39) получим

$$\begin{aligned} Z = & \Delta_{q_0}^{-1} (E_{n1} + \dots + E_{nm}) r q^T A + E_{n(m+1)} r \Delta_{q^T B_1}^{-1} q^T B_1 + \dots + E_{nn} r \Delta_{q^T B_k}^{-1} q^T B_k - \\ & - \Delta_{q_0}^{-1} (E_{n1} + \dots + E_{nm}) Y (E_{n1} + \dots + E_{nm}) q q^T A + W - \Delta_{q_0}^{-1} (E_{n1} + \dots + E_{nm}) \times \\ & \times W A q q^T A^+ + \Delta_{q^T B_1}^{-1} E_{n(m+1)} W B_1 q q^T B_1 + \dots + \Delta_{q^T B_k}^{-1} E_{nn} W B_k q q^T B_k. \end{aligned} \quad (43)$$

Из соотношений (8), (29), (43) найдем вид матрицы L

$$\begin{aligned} L = & \Delta_{q_0}^{-1} (E_{n1} + \dots + E_{nm}) r q^T A + E_{n(m+1)} r \Delta_{q^T B_1}^{-1} q^T B_1 + \dots + E_{nn} r \Delta_{q^T B_k}^{-1} q^T B_k - \\ & - \Delta_{q_0}^{-1} (E_{n1} + \dots + E_{nm}) Y (E_{n1} + \dots + E_{nm}) q q^T A + W - \Delta_{q_0}^{-1} (E_{n1} + \dots + E_{nm}) \times \\ & \times W A q q^T A^+ + \Delta_{q^T B_1}^{-1} E_{n(m+1)} W B_1 q q^T B_1 + \dots + \Delta_{q^T B_k}^{-1} E_{nn} W B_k q q^T B_k - \\ & - \Delta_{q_0}^{-1} (E_{n1} + \dots + E_{nm}) r q^T A (E_{n1} + \dots + E_{nm}) - \Delta_{q_0}^{-1} (E_{n1} + \dots + E_{nm}) Y \times \\ & \times (E_{n1} + \dots + E_{nm}) q q^T A (E_{n1} + \dots + E_{nm}) - (E_{n1} + \dots + E_{nm}) W \times \\ & \times (E_{n1} + \dots + E_{nm}) + \Delta_{q_0}^{-1} (E_{n1} + \dots + E_{nm}) W A q q^T A^+ (E_{n1} + \dots + E_{nm}). \end{aligned} \quad (44)$$

Тогда в силу (26), (44) решение X представимо в виде

$$\begin{aligned} X = & (E_{n1} + \dots + E_{nm}) L A^+ + E_{n(m+1)} L B_1 + \dots + E_{nn} L B_k + \\ & + (E_{n1} + \dots + E_{nm}) Y \times (E_{n1} + \dots + E_{nm}) = \Delta_{q_0}^{-1} (E_{n1} + \dots + E_{nm}) \times \\ & \times r q^T A A^+ - \Delta_{q_0}^{-1} (E_{n1} + \dots + E_{nm}) Y \times (E_{n1} + \dots + E_{nm}) q q^T A A^+ + \\ & + (E_{n1} + \dots + E_{nm}) W A^+ - \Delta_{q_0}^{-1} (E_{n1} + \dots + E_{nm}) W A \times q q^T A^+ A^+ - \\ & - \Delta_{q_0}^{-1} (E_{n1} + \dots + E_{nm}) r q^T A (E_{n1} + \dots + E_{nm}) A^+ - \Delta_{q_0}^{-1} (E_{n1} + \dots + E_{nm}) \times \\ & \times Y (E_{n1} + \dots + E_{nm}) q q^T A (E_{n1} + \dots + E_{nm}) A^+ - (E_{n1} + \dots + E_{nm}) \times \\ & \times W (E_{n1} + \dots + E_{nm}) \times A^+ + \Delta_{q_0}^{-1} (E_{n1} + \dots + E_{nm}) W A q q^T A^+ \times \\ & \times (E_{n1} + \dots + E_{nm}) A^+ + E_{n(m+1)} r \Delta_{q^T B_1}^{-1} q^T B_1 B_1 + \dots + E_{nn} r \Delta_{q^T B_k}^{-1} q^T B_k B_k + \\ & + E_{n(m+1)} W B_1 + \dots + E_{nn} W B_k + \Delta_{q^T B_1}^{-1} E_{n(m+1)} W B_1 q q^T B_1 B_1 + \dots \\ & + \Delta_{q^T B_k}^{-1} q^T E_{nn} W B_k q q^T B_k B_k + (E_{n1} + \dots + E_{nm}) Y (E_{n1} + \dots + E_{nm}), \end{aligned} \quad (45)$$

где W, Y — произвольные матрицы.

ТЕОРЕМА 5. Для того чтобы система матричных уравнений (1), (2) имела решение необходимо и достаточно чтобы выполнялись условия Теоремы 2. Матрицы X, L системы уравнений (1), (2) определяются соотношениями (44), (45).

4. Практическое приложение результатов

Пример 2. Рассмотрим уравнение (1) с матрицей $A = \begin{pmatrix} -\alpha_1 & 0 \\ 0 & -\alpha_2 \end{pmatrix}, n = 2, m = 0, k = 2$.

Следуя (41), (42) получим

$$Z_1 = \Delta_{q^T B_1}^{-1} E_{21} r q^T B_1 + \Delta_{q^T B_2}^{-1} E_{22} r q^T B_2,$$

$$Z_2 = W - \Delta_{q^T B_1}^{-1} E_{21} W B_1 q q^T B_1 + \Delta_{q^T B_2}^{-1} E_{22} W B_2 q q^T B_2, \quad W \in \mathbb{R}^{2 \times 2}.$$

Из равенства $L = Z = Z_1 + Z_2$ найдем, что матрица $L = L^T$ имеет вид

$$L = L(t) = \begin{pmatrix} -2r_1\alpha_1q_1^{-1} - 2q_2\alpha_1tq_1^{-1}(\alpha_1 + \alpha_2)^{-1} & t \\ t & -2r_2\alpha_2q_2^{-1} - 2q_1\alpha_2tq_2^{-1}(\alpha_1 + \alpha_2)^{-1} \end{pmatrix}, \quad (46)$$

где $t \in \mathbb{R}$.

В силу Теоремы 5 решение системы (1), (2) определяется равенством

$$X = X(t) = \begin{pmatrix} r_1q_1^{-1} + q_2tq_1^{-1}(\alpha_1 + \alpha_2)^{-1} & -t(\alpha_1 + \alpha_2)^{-1} \\ -t(\alpha_1 + \alpha_2)^{-1} & r_2q_2^{-1} + q_1tq_2^{-1}(\alpha_1 + \alpha_2)^{-1} \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \quad (47)$$

Пусть $B = \begin{pmatrix} (2\alpha_1)^{-1} & (\alpha_1 + \alpha_2)^{-1} \\ (\alpha_1 + \alpha_2)^{-1} & (2\alpha_2)^{-1} \end{pmatrix}$, тогда с учетом (46), (47) выполняется соотношение $X = L \circ B$, что подтверждается результатами Теоремы 4. Система матричных уравнений (1), (2) имеет бесконечно много решений L, X .

ЛЕММА 1. Пусть существует t , для которого выполнены неравенства

$$f_1(t) = l_{11} = -2r_1\alpha_1q_1^{-1} - 2q_2\alpha_1tq_1^{-1}(\alpha_1 + \alpha_2)^{-1} < 0, \quad (48)$$

$$f_2(t) = \begin{vmatrix} -2r_1\alpha_1q_1^{-1} - 2q_2\alpha_1tq_1^{-1}(\alpha_1 + \alpha_2)^{-1} & t \\ t & -2r_2\alpha_2q_2^{-1} - 2q_1\alpha_2tq_2^{-1}(\alpha_1 + \alpha_2)^{-1} \end{vmatrix} > 0. \quad (49)$$

тогда существуют матрицы $X = X^T, L = L^T < 0$, определяемые формулами (46), (47), удовлетворяющие соотношениям (1), (2).

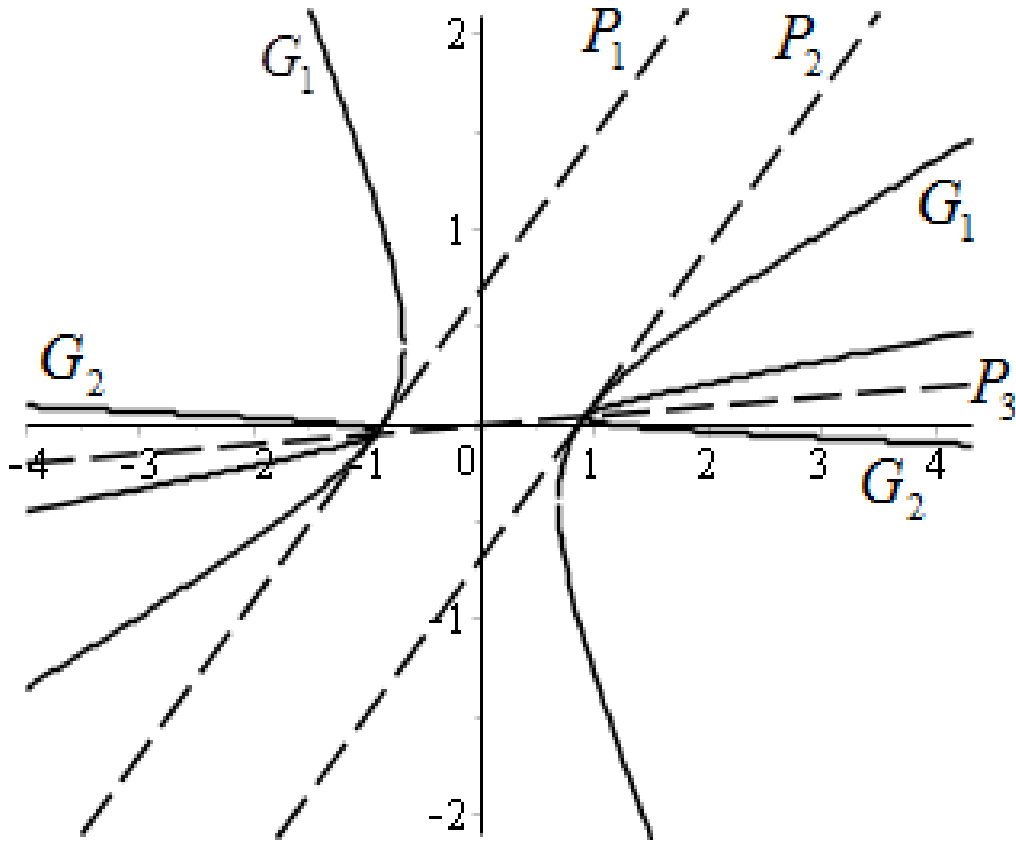
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Доказательство Леммы 1 следует из Теоремы 5 и примера 2. Решения системы (1), (2) определяется числом решений системы уравнений (46), (47). $\square$

Пример 3. Рассмотрим систему уравнений (1) и (2) с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & -0.8 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.05 \end{pmatrix}, \quad r = \begin{pmatrix} -0.8 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_1 = -0.1, \quad \alpha_2 = 0.8.$$

Найдем $\Gamma = -r^T q = -0.75, \nu = r^T A q = -0.12$. Матрицы L, X определяются соотношениями (46), (47). Используя неравенства (48), (49), определим условия, при которых $L < 0$. Получим, что если $t < T = 11.2$, то $f_1(t) < 0$. Если $t \in (T_1; T_2) = (-0.646; 4.7942)$, то $f_2(t) > 0$. Таким образом, при любом $t \in (-0.646; 4.7942)$ для матрицы L будет выполняться соотношение $L < 0$. Решение системы (1), (2) будет зависеть от переменной t и представимо в виде (47) $X = X_1(t)$. Пусть $R = 0.8$. Изобразим графически решение системы на концах интервала $(T_1; T_2)$, с помощью матриц $X_1(T_1), X_1(T_2)$. Определим линии $G_1 = \{x : x^T X_1(T_1) x = -R^2, R = 0.8\}$, $G_2 = \{x : x^T X_1(T_2) x = -R^2, R = 0.8\}$. Обозначим $l^T = c^T A$, $P_1 = \{x : c^T x = \sqrt{\Gamma} R, R = 0.8\}$, $P_2 = \{c^T x = -\sqrt{\Gamma} R, R = 0.8\}$, $P_3 = \{l^T x + \nu \Gamma^{-1} c^T x = 0\}$. На рисунке 1 изображены линии $G_1, G_2, G_3, P_1, P_2, P_3$.

Рис.1 $\det X_1 < 0$

Пример 4. Рассмотрим систему матричных уравнений

$$A^T H + H A = L < 0, \quad (50)$$

$$H b = -c. \quad (51)$$

Пусть $A = \begin{pmatrix} -\alpha_1 & 0 \\ 0 & -\alpha_2 \end{pmatrix}$, $q = b = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} -\alpha_2 \\ 1 \end{pmatrix} = -r$, $c^T b = -\Gamma < 0$, $c^T A b = \nu > 0$, $\alpha_1 = 0.2$, $\alpha_2 = 1.05$, $q_1 = 0.04$, $q_2 = -0.3$, тогда $\nu = 0.3234$, $\Gamma = 0.342$, матрицы L , $H = X$, определяются соотношениями (46), (47). Для неравенств (48), (49) получим, что если $t < T = 4.375$, то $f_1(t) < 0$. Если $t \in (T_1; T_2) = (-44.9545; 3.5358)$, то $f_2(t) > 0$. Таким образом, при любом $t \in (-44.9545; 3.5358)$ для матрицы L будет выполняться соотношение $L < 0$. Решение системы (50), (51) будет зависеть от переменной t и представимо в виде $X = X_2(t)$. Элементы матрицы $X_2(t) = X$ определяются формулой (47). Изобразим графически решение системы (50), (51) на концах интервала $(T_1; T_2)$. С помощью матриц $X_2(T_1)$, $X_2(T_2)$ определим линии $G_1 = \{x : x^T X_2(T_1) x = R^2\}$, $G_2 = \{x : x^T X_1(T_2) x = -R^2, R = 0.8\}$. На рисунке 2 изображены линии G_1 , G_2 , G_3 , P_1 , P_2 , P_3 .

Для построения положительно инвариантных и гиперболических множеств систем фазовых систем частотно-фазовой автоподстройки частоты возникает необходимость изучения системы трех матричных уравнений [12,18]

$$A^T H + H A = -L_1 - 2\alpha_1 H, \quad (52)$$

$$(A + 2kdc^T)^T H + H (A + 2kdc^T) = -L_2 + 2m_1 cc^T - 2\alpha_1 H, \quad (53)$$

$$H b = -c. \quad (54)$$

Решения уравнений (52), (53), (54) позволяют определить область начальных условий автомодуляционных колебаний и предложить эффективные численные методы обнаружения скрытой синхронизации [13].

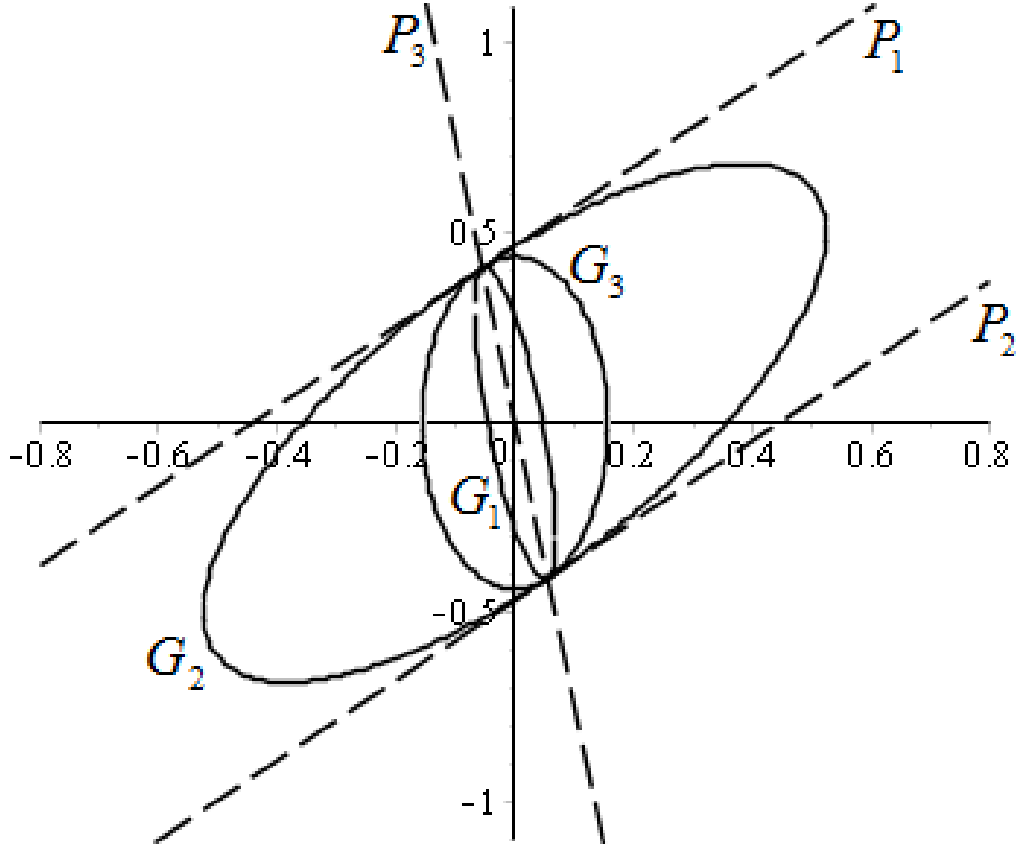


Рис.2 $X_2 = X_2^T$

Изучение системы (52), (54) основано на использовании Теоремы 5, которая позволяет найти матрицы H , L_1 , для уравнений (52), (53), (54). Уравнение (53) рассматривается относительно неизвестной матрицы L_2 и значения m_1 . Практическое значение имеет представление матриц H , L_1 , L_2 через векторы $l^T = c^T A$, c , b [10-15]. Справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА 2. Система матричных уравнений (52), (53), (54) относительно матриц H , L_1 , L_2 и значения m_1 , для случая, когда $H = H_1 > 0$, $A = \begin{pmatrix} -\alpha_1 & 0 \\ 0 & -\alpha_2 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, $d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$, $c_1 b_1^{-1} < 0$, $c_2 b_2^{-1} < 0$, $c^T b = -\Gamma < 0$, $c^T A b = \nu > 0$, $\varepsilon_0 = \Gamma^{-1} \nu$, $\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$ имеет решение $H = H_1$, L_1 , L_2 , такое что

$$H_1 = \gamma_1 c c^T + \gamma_2 (l + \nu \Gamma^{-1} c) (l + \nu \Gamma^{-1} c)^T, \quad (55)$$

$$\gamma_1 = \Gamma^{-1}, \quad \gamma_2 = (\Gamma (\alpha_2 - \varepsilon_0) (\varepsilon_0 - \alpha_1))^{-1}, \quad (56)$$

$$L_1 = 2\eta_1 (l + \eta_2 c) (l + \eta_2 c)^T, \quad \eta_1 = (\Gamma (\varepsilon_0 - \alpha_1))^{-1}, \quad \eta_2 = \alpha_1,$$

$$L_2 = 2\nu_1 (l + \nu_2 c) (l + \nu_2 c)^T, \quad \nu_1 = -(\alpha b_2 c_2)^{-1}, \quad \nu_2 = \alpha_1 + k c_2 b_2 (d_1 b_1^{-1} - d_2 b_2^{-1}),$$

$$m_1 = -\alpha^{-1} k^2 c_2 b_2 (d_1 b_1^{-1} - d_2 b_2^{-1})^2 - 2k d_1 b_1^{-1}.$$

Пример 5. Рассмотрим систему матричных уравнений (52), (53), (54) при $k = 0$, $m_2 = 0$, в этом случае система трех матричных уравнений эквивалентна системе двух матричных уравнений (1), (2). Пусть $A = \begin{pmatrix} -\alpha_1 & 0 \\ 0 & -\alpha_2 \end{pmatrix}$, $q = b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} -\alpha_2 \\ 1 \end{pmatrix} = -r$, $c^T b = -\Gamma < 0$, $c^T A b = \nu > 0$, $\alpha_1 = 0.2$, $\alpha_2 = 1.05$, $b_1 = 0.04$, $b_2 = -0.3$, тогда $\nu = 0.3234$, $\Gamma = 0.342$, выполнены условия Леммы 2. Матрица H_1 , определяется соотношениями (55), (56). Изобразим графически решение системы (1), (2) при $R = 0.8$. На Рис.2 добавлена линия: $G_3 = \{x : x^T H_1 x = R^2\}$.

5. Заключение

В статье получены условия существования решения системы матричных уравнений Лурье. Практическая значимость полученных результатов заключается в возможности их использования при определении режимов скрытой синхронизации и синхронизации второго рода в системах фазовой и частотно-фазовой автоподстройки частоты [6-8,10-15,18].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Икрамов Х. Д. Численное решение матричных уравнений. М.: Наука, 1984. 192с.
2. Прасолов В. В. Задачи и теоремы линейной алгебры. М.: Наука, 1996. 304с.
3. Чурилов А. Н. О разрешимости матричных неравенств // Математические заметки. 1984. Т.36, №5. С.725-732.
4. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989. 655с.
5. Гелиг А. Х., Леонов Г. А., Якубович В. А. Устойчивость систем с неединственным состоянием равновесия. М.: Наука, 1978. 400 с.
6. Леонов Г. А., Буркин И. М., Шепелявый А. И. Частотные методы в теории колебаний. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1992.
7. Якубович В. А. Решение некоторых матричных неравенств, встречающихся в теории автоматического регулирования // Докл. АН СССР. 1962. Т.143, №6. С.1304-1307.
8. Леонов Г. А., Смирнова В. Б. Математические проблемы теории фазовой синхронизации. СПб.: Наука, 2000. 400с.
9. Нелинейные системы. Частотные и матричные неравенства. Под ред. А.Х. Гелига, Г.А. Леонова, А.Л. Фрадкова. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. 608с.
10. Мамонов С. С., Ионова И. В. Исследование биений поисковой системы фазовой автоподстройки частоты // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2014. № 48. С. 52–59.
11. Ионова И. В. Численно-аналитический подход построения области начальных условий циклов второго рода. // Вестник РАЕН. Дифференциальные уравнения. 2015. № 3. С. 49–55.
12. Мамонов С. С., Харламова А. О. Квазисинхронные режимы фазовой системы // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2016. № 56. С. 45–51.

13. Мамонов С. С., Харламова А. О. Вынужденная синхронизация систем фазовой автоподстройки с запаздыванием // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2017. № 62. С. 26–35.
14. Мамонов С. С., Харламова А. О. Определение условий существования предельных циклов первого рода систем с цилиндрическим фазовым пространством // Журнал Средневолжского математического общества. 2017. Т.19. №1. С. 67–76.
15. Харламова А. О. Предельные циклы первого рода фазовых систем. // Вестник РАЕН. Дифференциальные уравнения. 2016. № 16. С. 68–74.
16. Мамонов С. С. Решение матричных неравенств // Дифференциальные уравнения (качественная теория): межвуз. сб. науч. тр. Рязань: Изд-во РГПУ, 1994. С. 71–74.
17. Мамонов С. С., Ионова И. В. Решение системы матричных уравнений при наличии линейной связи // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2014. № 2. С. 90–102.
18. Шалфеев В. Д., Матросов В. В. Нелинейная динамика систем фазовой синхронизации. Н. Новгород.: Изд-во ННГУ, 2013.

REFERENCES

1. Ikramov, Kh. D. 1984, "Numerical solution of matrix equations" Moscow, Nauka Publ., 192 p.
2. Prasolov, V. V. 1996. "Problems and theorems of linear algebra" Moscow, Nauka Publ., 304 p.
3. Churilov, A. N. 1984, "On the solvability of matrix inequalities" Mathematical Notes. vol. 36, no.5. pp.725-732.
4. Horn, R. & Johnson, Ch. 1989, "Matrix analysis" Moscow, Mir Publ., 655p.
5. Gelig, A. Kh. & Leonov, G. A. & Yakubovich, V. A. 1978, "The stability of nonlinear systems with nonunique equilibrium" Moscow, Nauka Publ., 400 p.
6. Leonov, G. A. & Burkin, I. M. & Shepelyavy, A. I. 1992, "Frequency methods in the theory of oscillations" SPb., Science Publ. of St. Petersburg State University.
7. Yakubovich, V. A. 1962. "Solution of certain matrix inequalities encountered in the theory of automatic control" Dokl. AN SSSR. vol.143, no. 6. pp. 1304-1307.
8. Leonov, G. A. & Smirnova, V. B. 2000, "Mathematical problems of the theory of phase synchronization". SPb., Science Publ., 400 p.
9. "Nonlinear systems. Frequency and matrix inequalities". Ed. Gelig, A. KH., Leonova, G.A., Fradkov, A.L., Moscow. FIZMATLIT, 2008. 608 p.
10. Mamonov, S. S. & Ionova, I. V. 2014, "Investigation of the beats of the search system of phase-locked loop frequency" Bulletin of the Ryazan State Radio Engineering University. no. 48. pp. 52–59.
11. Ionova, I. V. 2015, "A numerical-analytical approach to constructing a domain of initial conditions for cycles of the second kind" Bulletin of the Russian Academy of Natural Sciences. Differential equations. no. 3. pp. 49-55.

12. Mamonov, S. S. & Kharlamova, A.O. 2016, "Quasisynchronous regimes of the phase system" Bulletin of the Ryazan State Radio Engineering University. no. 56. pp. 45–51.
13. Mamonov, S. S. & Kharlamova, A.O. 2017, "Forced synchronization of phase-locked loop systems with delay" Bulletin of the Ryazan State Radio Engineering University. no. 62. pp. 26–35.
14. Mamonov, S. S. & Kharlamova, A.O. 2017, "Determination of the conditions for the existence of limit cycles of the first kind of systems with cylindrical phase space" Journal of the Srednevolzhsky Mathematical Society. vol.19. no.1. pp. 67-76.
15. Kharlamova, A.O. 2016, "Limit cycles of the first kind of phase systems" Bulletin of the Russian Academy of Natural Sciences. Differential equations. no. 16. pp. 68–74.
16. Mamonov, S. S. 1994. "Solution of matrix inequalities" Differential equations (qualitative theory): interuniversity. Sat. sci. tr. Ryazan Publ.,. of the RSPU. pp. 71-74.
17. Mamonov, S. S. & Ionova, I. V. 2014, "Solution of the system of matrix equations in the presence of linear coupling" Izvestiya Tula State University. Natural Sciences. no. 2. pp. 90-102.
18. Shalfeev, V. D. & Matrosov, V. V. 2013, "Nonlinear dynamics of phase synchronization systems" N. Novgorod Publ. of the UNN.

Получено 18.07.2018 г.

Принято в печать 12.07.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 2.

УДК 512, 519.7

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-259-272

Об абстрактной определяемости универсальных гиперграфических автоматов полугруппами входных сигналов

В. А. Молчанов, Е. В. Хворостухина

Молчанов Владимир Александрович — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского (г. Саратов).

e-mail: v.molchanov@inbox.ru

Хворостухина Екатерина Владимировна — кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры «Информационно-коммуникационные системы и программная инженерия», Саратовский государственный технический университет имени Ю. А. Гагарина (г. Саратов).

e-mail: khvorostukhina85@gmail.com

Аннотация

Гиперграфическими автоматами называются автоматы, у которых множества состояний и выходных символов наделены структурами гиперграфов, сохраняющимися функциями переходов и выходными функциями. Универсальные притягивающие объекты в категории таких автоматов называются универсальными гиперграфическими автоматами. Для таких автоматов полугруппы входных символов являются производными алгебрами отображений, свойства которых взаимосвязаны со свойствами алгебраических структур данных автоматов. Это позволяет изучать универсальные гиперграфические автоматы с помощью исследования их полугрупп входных символов. В работе исследуется проблема абстрактной определяемости таких автоматов их полугруппами входных символов, суть которой заключается в нахождении условий изоморфности полугрупп входных символов универсальных гиперграфических автоматов. Основным результатом работы дает решение этой задачи для универсальных гиперграфических автоматов над эффективными гиперграфами с p -определимыми ребрами. Это достаточно широкий и весьма важный класс автоматов, так как он содержит, в частности, автоматы, у которых гиперграфы состояний и выходных символов являются плоскостями (например, проективными или аффинными), а также автоматы, у которых множества состояний и выходных символов разбиваются на классы некоторой эквивалентности без одноэлементных классов. В настоящей работе доказано, что универсальные гиперграфические автоматы над эффективными гиперграфами с p -определимыми ребрами полностью (с точностью до изоморфизма) определяются своими полугруппами входных символов, а также описано строение изоморфизмов таких автоматов.

Ключевые слова: проблема абстрактной определяемости, автомат, гиперграф, полугруппа.

Библиография: 17 названий.

Для цитирования:

В. А. Молчанов, Е. В. Хворостухина. Об абстрактной определяемости универсальных гиперграфических автоматов полугруппами входных сигналов // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 2, с. 259–272.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 2.

UDC 512, 519.7

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-259-272

On problem of abstract definability of universal hypergraphic automata by input symbol semigroup

V. A. Molchanov, E. V. Khvorostukhina

Molchanov Vladimir Alexandrovich — doctor of physical and mathematical Sciences, Professor, Professor of the Department of theoretical foundations of computer security and cryptography, Saratov national research state University named after N. G. Chernyshevsky (Saratov).

e-mail: v.molchanov@inbox.ru

Khvorostukhina Ekaterina Vladimirovna — candidate of physical and mathematical sciences, Associate Professor of Information and Communication Systems and Software Engineering Yuri Gagarin State Technical University of Saratov (Saratov).

e-mail: khvorostukhina85@gmail.com

Abstract

Hypergraphic automata are automata, state sets and output symbol sets of which are hypergraphs, being invariant under actions of transition and output functions. Universally attracting objects in the category of such automata are called universal hypergraphic automata. The semigroups of input symbols of such automata are derivative algebras of mappings for such automata. Semigroup properties are interconnected with properties of the automaton. Therefore, we can study universal hypergraphic automata by investigation of their input symbol semigroups. In this paper, we solve a problem of abstract definability of such automata by their input symbol semigroups. This problem is to find the conditions of isomorphism of semigroups of input symbols of universal hypergraphic automata. The main result of the paper is the solving of this problem for universal hypergraphic automata over effective hypergraphs with p -definable edges. It is a wide and a very important class of automata because such algebraic systems contain automata whose state hypergraphs and output symbol hypergraphs are projective or affine planes. Also they include automata whose state hypergraphs and output symbol hypergraphs are divided into equivalence classes without singleton classes. In the current study, we proved that such automata were determined up to isomorphism by their input symbol semigroups and we described the structure of isomorphisms of such automata.

Keywords: problem of abstract definability, automaton, hypergraph, semigroup.

Bibliography: 17 titles.

For citation:

V. A. Molchanov, E. V. Khvorostukhina, 2019, "On problem of abstract definability of universal hypergraphic automata by input symbol semigroup", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 2, pp. 259–272.

1. Введение

Как известно [1], в алгебраической теории автоматов главный объект исследования – автомат рассматривается как многосортная алгебраическая система $A = (X, S, Y, \delta, \lambda)$ с тремя базисными множествами – множество состояний автомата X , множество входных символов S , множество выходных символов Y , и с двумя сигнатурными операциями – функция переходов $\delta : X \times S \rightarrow X$ и выходная функция $\lambda : X \times S \rightarrow Y$. При этом в зависимости от

рассматриваемых задач автоматы могут структуризоваться в подходящих алгебраических категориях, т.е. компоненты автоматов могут быть объектами некоторых специальных категорий. Так, множество входных символов автомата обычно рассматривается с ассоциативным умножением и, следовательно, является объектом категории полугрупп.

С другой стороны, множества состояний автомата и его выходных символов могут наделяться некоторой алгебраической структурой и являться объектами категории **K** соответствующих алгебраических систем. Важными примерами таких алгебраических систем являются графы, упорядоченные множества, линейные пространства, вероятностные пространства и др. Исследованию структуризованных в таких категориях автоматов посвящены многочисленные работы известных алгебраистов (см., например, обзор в [1]).

Как следует из [1], универсальные притягивающие объекты в категории автоматов, структуризованных в любой категории **K**, представляются универсальными автоматами $\text{Atm}(A, B)$ с алгебраической системой состояний $A \in \mathbf{K}$, алгебраической системой выходных символов $B \in \mathbf{K}$ и полугруппой входных символов $S = \text{End } A \times \text{Hom}(A, B)$. При таком подходе многие результаты алгебраической теории автоматов имеют непосредственное отношение к одному из основных разделов современной алгебры – обобщенной теории Галуа, которая посвящена изучению математических объектов путем исследования некоторых производных алгебр отношений, специальным образом связанных с исходными объектами.

В нашем случае изучаемым математическим объектом является универсальный автомат и производной алгеброй отношений – его полугруппа входных символов. Например, Л. М. Глускин, Е. С. Ляпин, Б. М. Шайн, Ю. М. Важенин и другие авторы (см., например, обзор в [2]) исследовали полугруппы эндоморфизмов графов, которые могут рассматриваться как графические полуавтоматы (т.е. автоматы без выходных символов, для которых системы состояний являются объектами категории графов **Gr**). Более того, хорошо известная проблема Л. М. Глускина и Л. А. Скорнякова о полугруппах эндоморфизмов проективных плоскостей может быть рассмотрена как проблема определимости планарных полуавтоматов их полугруппами входных символов (см. проблему 1.20 в [3] и ее решение Лендером [4] и первым автором настоящей работы [5]). Позже этот результат был обобщен в работе [6] на автоматы с выходными символами, для которых системы состояний и выходных символов являются объектами категории плоскостей **P1**.

Настоящая работа продолжает исследования в этом направлении. В ней рассматриваются гиперграфические автоматы, т.е. автоматы, структуризованные в категории гиперграфов **Hgr** [7]. Универсальные притягивающие объекты в категории таких автоматов представляются универсальными гиперграфическими автоматами $\text{Atm}(H_1, H_2)$ с гиперграфом состояний H_1 , гиперграфом выходных символов H_2 и полугруппой входных символов $S = \text{End } H_1 \times \text{Hom}(H_1, H_2)$. Для такого автомата $\text{Atm}(H_1, H_2)$ полугруппа входных символов S является производной алгеброй отображений, что позволяет изучать универсальные гиперграфические автоматы с помощью исследования их полугрупп входных символов.

Ввиду известной проблемы С. Улама [8] об определимости математических структур их эндоморфизмами, особый интерес представляет исследование проблемы абстрактной определяемости таких автоматов полугруппами их входных символов, которая формулируется следующим образом: при каких условиях два универсальных гиперграфических автомата будут иметь изоморфные полугруппы входных символов?

Первые результаты в этом направлении были получены в работе [6], где доказано, что для любых плоскостей (например, проективных или аффинных) H_1, H_2 универсальный гиперграфический автомат $\text{Atm}(H_1, H_2)$ определяется с точностью до изоморфизма своей полугруппой входных символов. В настоящей статье этот результат обобщается на универсальные гиперграфические автоматы $\text{Atm}(H_1, H_2)$, у которых H_1, H_2 являются эффективными гиперграфами с p -определимыми ребрами. Это достаточно широкий и весьма важный класс автоматов,

так как он содержит, в частности, не только автоматы, у которых гиперграфы состояний и выходных символов являются плоскостями, но и автоматы, у которых гиперграфы состояний и выходных символов являются разбиениями на классы эквивалентностей, содержащие более p элементов, и многие другие. Для таких автоматов в работе [9] уже была решена задача абстрактной характеристики. Главный результат данной работы – теорема 3.5 показывает, что универсальные гиперграфические автоматы над эффективными гиперграфами с p –определимыми ребрами в том и только том случае имеют изоморфные полугруппы входных символов, если эти автоматы изоморфны.

Результаты работы докладывались на XIV Международной конференции «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения», посвященной 70-ти летию со дня рождения С. М. Воронина и Г. И. Архипова (Саратов, СГУ им. Н. Г. Чернышевского, 2016) [10].

2. Основные понятия

В работе используется общепринятая терминология и основные понятия теории автоматов [1], теории полугрупп [11], теории гиперграфов [7] и алгебры отношений [12].

Пусть X, Y – непустые множества. Всюду определенное однозначное бинарное отношение $\varphi \subset X \times Y$ называется отображением множества X в множество Y и обозначается символом $\varphi : X \rightarrow Y$. Постоянное отображение множества X в элемент $a \in Y$ обозначается символом C_a . Тождественное отображение множества X в себя обозначается символом Δ_X .

Согласно [7] гиперграфом называется система вида $H = (X, L)$, где X – это непустое множество вершин гиперграфа и L – семейство некоторых подмножеств множества X , называемых ребрами гиперграфа. Множество вершин гиперграфа называется ограниченным, если оно содержится в некотором его ребре, и неограниченным в противном случае. Вершины гиперграфа, принадлежащие некоторому его ребру, называются смежными. Гиперграф $H = (X, L)$ называется эффективным, если любая его вершина принадлежит некоторому ребру этого гиперграфа.

Пусть p – некоторое натуральное число. Гиперграф H будем называть гиперграфом с p –определимыми ребрами, если в каждом ребре этого гиперграфа найдется по крайней мере $p + 1$ вершина и, с другой стороны, любые p вершин этого гиперграфа содержатся не более, чем в одном ребре.

В частности, эффективными гиперграфами с p –определимыми ребрами являются исследуемые в работах [13]–[15] слабые p –гиперграфы. Кроме того, эффективными гиперграфами с p –определимыми ребрами являются гиперграфы, ребра которых образуют разбиения множества вершин на классы, содержащие более p вершин. Наконец, если рассматривать плоскости [16] как гиперграфы, вершинами которых являются точки, а ребрами – прямые этих плоскостей, то любая проективная плоскость и любая аффинная плоскость с числом точек более четырех являются эффективными гиперграфами с 2–определимыми ребрами.

Пусть $H = (X, L)$, $H_1 = (X_1, L_1)$ – произвольные гиперграфы. Гомоморфизмом гиперграфа $H = (X, L)$ в гиперграф $H_1 = (X_1, L_1)$ называется отображение φ множества X в множество X_1 , которое смежные в гиперграфе H вершины переводит в смежные вершины гиперграфа H_1 , т.е. выполняется свойство

$$(\forall l \in L)(\exists l' \in L_1)(\varphi(l) \subset l').$$

Заметим, что для ребра $l \in L_1$ всякое отображение $\varphi : X \rightarrow l$ является гомоморфизмом гиперграфа H в гиперграф H_1 .

Множество всех гомоморфизмов гиперграфа H в гиперграф H_1 обозначим $\text{Hom}(H, H_1)$.

Гомоморфизм гиперграфа $H = (X, L)$ в себя называется эндоморфизмом гиперграфа H . Множество всех эндоморфизмов гиперграфа H с операцией композиции образует полугруппу

End H .

Гомоморфизм гиперграфов $f : H \longrightarrow H_1$ называется изоморфизмом гиперграфа H на гиперграф H_1 , если f – взаимно однозначное отображение множества X на множество X_1 и обратное отображение f^{-1} является гомоморфизмом гиперграфа H_1 на гиперграф H , т.е. выполняется условие

$$(\forall Y \subset X)(Y \in L \iff f(Y) \in L_1).$$

Если существует изоморфизм $f : H \longrightarrow H_1$, то гиперграфы H и H_1 называются изоморфными и записывают $H \cong H_1$.

Изоморфизм гиперграфа $H = (X, L)$ на себя называется автоморфизмом гиперграфа H .

Для гиперграфов $H_X = (X, L_X)$, $H_Y = (Y, L_Y)$ через $S(H_X, H_Y)$ обозначим полугруппу $\text{End } H_X \times \text{Hom}(H_X, H_Y)$ с ассоциативной бинарной операцией, определяющейся по правилу [1]: $(\varphi, \psi) \cdot (\varphi_1, \psi_1) = (\varphi\varphi_1, \varphi\psi_1)$ для пар $(\varphi, \psi), (\varphi_1, \psi_1) \in \text{End } H_X \times \text{Hom}(H_X, H_Y)$.

Следуя [1], под автоматом будем понимать алгебраическую систему $A = (X, S, Y, \delta, \lambda)$, состоящую из множества состояний X , полугруппы входных символов S , множества выходных символов Y , функции переходов $\delta : X \times S \longrightarrow X$ и выходной функции $\lambda : X \times S \longrightarrow Y$, таких что для любых $x \in X$ и $s, t \in S$ выполняются условия $\delta(x, st) = \delta(\delta(x, s), t)$, $\lambda(x, st) = \lambda(\delta(x, s), t)$. Для любого $s \in S$ определим отображения $\delta_s : X \longrightarrow X$, $\lambda_s : X \longrightarrow Y$ по формулам $\delta_s(x) = \delta(x, s)$, $\lambda_s(x) = \lambda(x, s)$, где $x \in X$.

Изоморфизмом автомата $A = (X, S, Y, \delta, \lambda)$ на автомат $A_1 = (X_1, S_1, Y_1, \delta_1, \lambda_1)$ называется упорядоченная тройка $\gamma = (f, \pi, g)$ биекций $f : X \longrightarrow X_1$, $\pi : S \longrightarrow S_1$ и $g : Y \longrightarrow Y_1$, сохраняющих алгебраическую структуру таких автоматов, т.е. π является изоморфизмом полугруппы S на полугруппу S_1 и для любых значений $s, t \in S$, $x \in X$ выполняются условия $\pi(s \cdot t) = \pi(s) \cdot \pi(t)$, $f(\delta(x, s)) = \delta_1(f(x), \pi(s))$ и $g(\lambda(x, s)) = \lambda_1(f(x), \pi(s))$.

Автомат $A = (X, S, Y, \delta, \lambda)$ будем называть гиперграфическим автоматом, если множество состояний X и множество выходных символов Y наделены такими структурами гиперграфов $H_X = (X, L_X)$ и $H_Y = (Y, L_Y)$, что при каждом фиксированном входном сигнале $s \in S$ преобразование $\delta_s : X \longrightarrow X$ – это эндоморфизм гиперграфа H_X и отображение $\lambda_s : X \longrightarrow Y$ – это гомоморфизм гиперграфа H_X в гиперграф H_Y . Такие автоматы будем также обозначать $A = (H_X, S, H_Y, \delta, \lambda)$.

Гомоморфизмом гиперграфического автомата $A = (H_X, S, H_Y, \delta, \lambda)$ в гиперграфический автомат $A_1 = (H_{X_1}, S_1, H_{Y_1}, \delta_1, \lambda_1)$ называется упорядоченная тройка $\gamma = (f, \pi, g)$ отображений $f : X \longrightarrow X_1$, $\pi : S \longrightarrow S_1$ и $g : Y \longrightarrow Y_1$, сохраняющих алгебраическую структуру таких автоматов, т.е. f является гомоморфизмом гиперграфа H_X в гиперграф H_{X_1} , π – гомоморфизмом полугруппы S в полугруппу S_1 , g – гомоморфизмом гиперграфа H_Y в гиперграф H_{Y_1} и для любых значений $x \in X$, $s \in S$ выполняются условия $f(\delta(x, s)) = \delta_1(f(x), \pi(s))$, $g(\lambda(x, s)) = \lambda_1(f(x), \pi(s))$.

Пример гиперграфического автомата дает алгебраическая система

$$\text{Atm}(H_X, H_Y) = (H_X, S(H_X, H_Y), H_Y, \delta', \lambda'),$$

где $H_X = (X, L_X)$, $H_Y = (Y, L_Y)$ – некоторые гиперграфы и для любых $x \in X$, $(\varphi, \psi) \in S(H_X, H_Y)$ определены значения $\delta'(x, (\varphi, \psi)) = \varphi(x)$, $\lambda'(x, (\varphi, \psi)) = \psi(x)$. Легко проверить, что $\text{Atm}(H_X, H_Y)$ удовлетворяет следующему универсальному свойству: для любого гиперграфического автомата $A = (H_X, S, H_Y, \delta, \lambda)$ существует такой гомоморфизм $\pi : S \longrightarrow S(H_X, H_Y)$, что упорядоченная тройка $\gamma = (\Delta_X, \pi, \Delta_Y)$ является гомоморфизмом A в $\text{Atm}(H_X, H_Y)$. По этой причине такой гиперграфический автомат $\text{Atm}(H_X, H_Y)$ называется универсальным гиперграфическим автоматом над гиперграфами H_X, H_Y .

3. Основной результат

В настоящем разделе исследуется вопрос о том, как универсальные гиперграфические автоматы над эффективными гиперграфами с p -определимыми ребрами определяются своими полугруппами входных сигналов.

Обозначим через $Z(H_X, H_Y)$ – множество правых нулей полугруппы $S(H_X, H_Y)$, а через $U(H_X, H_Y)$ – множество всех левых единиц полугруппы $S(H_X, H_Y)$. Эти множества в полугруппе $S(H_X, H_Y)$ соответственно определяются по следующим формулам теории полугрупп: $\Phi(x) = (\forall y)(yx = x)$ и $\Psi(x) = (\forall y)(xy = y)$.

ЛЕММА 1. Пусть $H_X = (X, L_X), H_Y = (Y, L_Y)$ – эффективные гиперграфы с p -определимыми ребрами. Тогда элемент $z \in S(H_X, H_Y)$ является правым нулем полугруппы $S(H_X, H_Y)$ тогда и только тогда, когда найдутся $a \in X, b \in Y$ такие, что $z = (C_a, C_b)$, где C_a и C_b – постоянные отображения множества X соответственно в точки a и b .

Доказательство. В силу эффективности гиперграфа H_X константы вида $C_a : X \rightarrow \{a\}$ (где $a \in X$) являются эндоморфизмами гиперграфа H_X . Аналогично в силу эффективности гиперграфа H_Y все константы вида $C_b : X \rightarrow \{b\}$, где $b \in Y$, являются гомоморфизмами гиперграфа H_X в гиперграф H_Y . Тогда элемент $z = (C_a, C_b)$ принадлежит полугруппе $S(H_X, H_Y)$.

Для произвольной пары $s = (\mu, \pi) \in S$ выполняется:

$$s \cdot z = (\mu, \pi)(C_a, C_b) = (\mu C_a, \pi C_b) = (C_a, C_b) = z.$$

Значит, (C_a, C_b) – правый ноль полугруппы $S(H_X, H_Y)$, т.е. $(C_a, C_b) \in Z(H_X, H_Y)$.

Обратно, пусть $z = (\varphi, \psi)$ – правый ноль полугруппы $S(H_X, H_Y)$. Тогда для любого $d \in X$ и значений $a = \varphi(d), b = \psi(d), a \in X, b \in Y$ выполняется:

$$(\varphi, \psi) = (C_d, C_b)(\varphi, \psi) = (C_d \varphi, C_d \psi) = (C_{\varphi(d)}, C_{\psi(d)}) = (C_a, C_b),$$

т.е. $z = (\varphi, \psi) = (C_a, C_b)$, где C_a и C_b – постоянные отображения множества X соответственно в точки a и b .

ЛЕММА 2. Пусть $H_X = (X, L_X), H_Y = (Y, L_Y)$ – эффективные гиперграфы с p -определимыми ребрами. Тогда элемент $i \in S(H_X, H_Y)$ является левой единицей полугруппы $S(H_X, H_Y)$ тогда и только тогда, когда $i = (\Delta_X, \psi)$ для некоторого $\psi \in \text{Hom}(H_X, H_Y)$.

Доказательство. Пусть $i = (\Delta_X, \psi)$ для некоторого $\psi \in \text{Hom}(H_X, H_Y)$. Возьмем произвольный элемент $i_1 \in S(H_X, H_Y)$, $i_1 = (\varphi_1, \psi_1)$. Имеют место следующие равенства: $i \cdot i_1 = (\Delta_X, \psi) \cdot (\varphi_1, \psi_1) = (\Delta_X \cdot \varphi_1, \Delta_X \cdot \psi_1) = (\varphi_1, \psi_1) = i_1$. Это означает, что элемент i является левой единицей полугруппы $S(H_X, H_Y)$.

Обратно, пусть элемент $i = (\varphi, \psi)$ является левой единицей полугруппы $S(H_X, H_Y)$. Тогда для любого $i_1 = (\varphi_1, \psi_1)$, принадлежащего полугруппе $S(H_X, H_Y)$, выполняется: $i \cdot i_1 = (\varphi, \psi) \cdot (\varphi_1, \psi_1) = (\varphi \cdot \varphi_1, \varphi \cdot \psi_1) = (\varphi_1, \psi_1)$. Это возможно только в случае $\varphi = \Delta_X$. Следовательно, $i = (\Delta_X, \psi)$. Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Пусть $H_X = (X, L_X), H_Y = (Y, L_Y)$ – эффективные гиперграфы с p -определимыми ребрами. Тогда для произвольных элементов $s, s_1 \in S(H_X, H_Y)$ следующие условия равносильны:

- 1) $s = (\varphi, \psi)$ и $s_1 = (\varphi, \psi_1)$ для некоторых $\varphi \in \text{End } H_X, \psi, \psi_1 \in \text{Hom}(H_X, H_Y)$;
- 2) $s \cdot i = s_1 \cdot i$ для некоторой левой единицы $i \in U(H_X, H_Y)$;

3) $s \cdot i = s_1 \cdot i$ для любой левой единицы $i \in U(H_X, H_Y)$.

Доказательство. Очевидно, что из 3) следует 2).

Пусть выполняется условие 1), т.е. $s = (\varphi, \psi)$ и $s_1 = (\varphi, \psi_1)$ для некоторых $\varphi \in \text{End } H_X$, $\psi, \psi_1 \in \text{Hom}(H_X, H_Y)$, и пусть i – левая единица полугруппы $S(H_X, H_Y)$, т.е. $i \in U(H_X, H_Y)$. Согласно лемме 2 $i = (\Delta_X, \psi')$ для некоторого $\psi' \in \text{Hom}(H_X, H_Y)$. Имеют место равенства: $s \cdot i = (\varphi, \psi) \cdot (\Delta_X, \psi') = (\varphi \Delta_X, \varphi \psi') = (\varphi, \psi_1) \cdot (\Delta_X, \psi') = s_1 \cdot i$, т.е. выполняется условие 3).

Остается показать, что из 2) следует 1). Пусть для элементов $s = (\varphi, \psi)$, $s_1 = (\varphi_1, \psi_1)$ выполняется $s \cdot i = s_1 \cdot i$ для некоторой левой единицы $i \in U(H_X, H_Y)$. Согласно лемме 2 $i = (\Delta_X, \psi')$ для некоторого $\psi' \in \text{Hom}(H_X, H_Y)$. Имеют место следующие равенства:

$$\begin{aligned} s \cdot i &= (\varphi, \psi) \cdot (\Delta_X, \psi') = (\varphi \Delta_X, \varphi \psi') = (\varphi, \varphi \psi'), \\ s_1 \cdot i &= (\varphi_1, \psi_1) \cdot (\Delta_X, \psi') = (\varphi_1 \Delta_X, \varphi_1 \psi') = (\varphi_1, \varphi_1 \psi'). \end{aligned}$$

Значит, $(\varphi, \varphi \psi') = (\varphi_1, \varphi_1 \psi')$. Следовательно, $\varphi = \varphi_1$, т.е. выполняется условие 1). Лемма доказана.

ЛЕММА 4. Пусть $H_X = (X, L_X), H_Y = (Y, L_Y)$ – эффективные гиперграфы с p -определимыми ребрами. Тогда формула

$$\Omega(x, y) = \Phi(x) \wedge \Phi(y) \wedge (\forall i)(\Psi(i) \Rightarrow x \cdot i = y \cdot i)$$

теории полугрупп определяет отношение эквивалентности ε на множестве правых нулей $Z(H_X, H_Y)$ такое, что выполняются следующие условия:

- 1) для любых элементов $s, s_1 \in Z(H_X, H_Y)$ выполняется $s \equiv s_1(\varepsilon)$ тогда и только тогда, когда $s = (C_a, C_b), s_1 = (C_a, C_{b_1})$ для некоторых $a \in X, b, b_1 \in Y$;
- 2) для любого правого нуля $s = (C_a, C_b)$ полугруппы $S(H_X, H_Y)$ класс эквивалентности $\varepsilon(s) = \{(C_a, C_y) : y \in Y\}$.

Доказательство. В самом деле, нетрудно проверить, что отношение ε рефлексивно, симметрично и транзитивно, т.е. является эквивалентностью на множестве правых нулей $Z(H_X, H_Y)$. Пусть для произвольных элементов $s, s_1 \in Z(H_X, H_Y)$ выполняется $s \equiv s_1(\varepsilon)$. Согласно лемме 1 $s = (C_a, C_b), s_1 = (C_{a_1}, C_{b_1})$. По определению отношения ε имеем: $s \cdot i = s_1 \cdot i$ для любого $i \in U(H_X, H_Y)$. Согласно лемме 2 имеем $C_a = C_{a_1}$. Обратно, пусть $s = (C_a, C_b), s_1 = (C_a, C_{b_1})$ для некоторых $a \in X, b, b_1 \in Y$. Тогда согласно лемме 2 $s \cdot i = s_1 \cdot i$ для любой левой единицы $i \in U(H_X, H_Y)$. По определению отношения ε получаем $s \equiv s_1(\varepsilon)$.

Для любых элементов $s, s_1 \in Z(H_X, H_Y)$ выполняется $s \equiv s_1(\varepsilon)$ тогда и только тогда, когда $s = (C_a, C_b), s_1 = (C_a, C_{b_1})$ для некоторых $a \in X, b, b_1 \in Y$. Это означает, что $\varepsilon(s) = \{(C_a, C_y) : y \in Y\}$. Лемма доказана.

ЛЕММА 5. Пусть $H_X, H_Y, H_{X_1}, H_{Y_1}$ – эффективные гиперграфы с p -определимыми ребрами, f – изоморфизм гиперграфа H_X на гиперграф H_{X_1} , g – изоморфизм гиперграфа H_Y на гиперграф H_{Y_1} и отображение $\pi : S(H_X, H_Y) \rightarrow S(H_{X_1}, H_{Y_1})$ определяется по формуле $\pi = (f^2, f \times g)$, т.е. для любых $(\varphi, \psi) \in S(H_X, H_Y)$ выполняется равенство $\pi(\varphi, \psi) = (f^2(\varphi), (f \times g)(\psi))$. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) отображение π является изоморфизмом полугруппы $S(H_X, H_Y)$ на полугруппу $S(H_{X_1}, H_{Y_1})$;
- 2) упорядоченная тройка отображений $\gamma = (f, \pi, g)$ является изоморфизмом автомата $\text{Atm}(H_X, H_Y)$ на автомат $\text{Atm}(H_{X_1}, H_{Y_1})$;

- 3) если для отображения $\chi : S(H_X, H_Y) \longrightarrow S(H_{X_1}, H_{Y_1})$ упорядоченная тройка отображений $\gamma = (f, \chi, g)$ является изоморфизмом автомата $\text{Atm}(H_X, H_Y)$ на автомат $\text{Atm}(H_{X_1}, H_{Y_1})$, то $\chi = \pi$.

Доказательство. Пусть отображение $\pi : S(H_X, H_Y) \longrightarrow S(H_{X_1}, H_{Y_1})$ определяется по формуле $\pi = (f^2, f \times g)$, где $f : H_X \longrightarrow H_{X_1}$, $g : H_Y \longrightarrow H_{Y_1}$ – изоморфизмы гиперграфов. Так как для произвольной пары $(\varphi, \psi) \in S(H_X, H_Y)$ отображение φ – эндоморфизм гиперграфа H_X и отображение ψ – гомоморфизм гиперграфа H_X в гиперграф H_Y , то очевидно образ $f^2(\varphi) = f^{-1}\varphi f$ – эндоморфизм гиперграфа H_{X_1} и образ $f \times g(\psi) = f^{-1}\psi g$ – гомоморфизм гиперграфа H_{X_1} в гиперграф H_{Y_1} . Это означает, что $\pi(\varphi, \psi) \in S(H_{X_1}, H_{Y_1})$. Ясно, что π – биекция $S(H_X, H_Y)$ на $S(H_{X_1}, H_{Y_1})$.

Возьмем произвольные элементы $s = (\varphi, \psi)$, $s_1 = (\varphi_1, \psi_1)$ полугруппы $S(H_X, H_Y)$. Так как $ss_1 = (\varphi\varphi_1, \varphi\psi_1)$, то выполняются равенства

$$\begin{aligned} \pi(s) \cdot \pi(s_1) &= \pi(\varphi, \psi) \cdot \pi(\varphi_1, \psi_1) = (f^2(\varphi), (f \times g)(\psi)) \cdot (f^2(\varphi_1), (f \times g)(\psi_1)) = \\ &= (f^2(\varphi)f^2(\varphi_1), f^2(\varphi)(f \times g)(\psi_1)) = (f^{-1}\varphi f f^{-1}\varphi_1 f, f^{-1}\varphi f f^{-1}\psi_1 g) = \\ &= (f^{-1}\varphi\varphi_1 f, f^{-1}\varphi\psi_1 g) = (f^2(\varphi\varphi_1), (f \times g)(\varphi\psi_1)) = \pi(ss_1). \end{aligned}$$

Таким образом, π – изоморфизм полугруппы $S(H_X, H_Y)$ на полугруппу $S(H_{X_1}, H_{Y_1})$, т.е. справедливо утверждение 1).

Более того, для произвольных $x \in X$, $s = (\varphi, \psi) \in S(H_X, H_Y)$ имеют место равенства:

$$\begin{aligned} f(\delta(x, s)) &= f(\varphi(x)) = f(\varphi(f^{-1}(f(x)))) = f^{-1}\varphi f(f(x)) = f^2(\varphi)(f(x)) = \\ &= \delta_1(f(x), (f^2(\varphi), (f \times g)(\psi))) = \delta_1(f(x), \pi(s)), \\ g(\lambda(x, s)) &= g(\psi(x)) = g(\psi(f^{-1}(f(x)))) = f^{-1}\psi g(f(x)) = \\ &= (f \times g)(\psi)(f(x)) = \lambda_1(f(x), (f^2(\varphi), (f \times g)(\psi))) = \lambda_1(f(x), \pi(s)). \end{aligned}$$

Это означает, что $\gamma = (f, \pi, g)$ является изоморфизмом автомата $\text{Atm}(H_X, H_Y)$ на автомат $\text{Atm}(H_{X_1}, H_{Y_1})$, т.е. справедливо утверждение 2).

Пусть для отображения $\chi : S(H_X, H_Y) \longrightarrow S(H_{X_1}, H_{Y_1})$ упорядоченная тройка отображений $\gamma = (f, \chi, g)$ – изоморфизм автомата $\text{Atm}(H_X, H_Y)$ на автомат $\text{Atm}(H_{X_1}, H_{Y_1})$. Тогда для любых элементов $x \in X$, $(\varphi, \psi) \in S(H_X, H_Y)$ имеют место равенства:

$$f(\delta(x, s)) = \delta_1(f(x), \chi(s)), \quad g(\lambda(x, s)) = \lambda_1(f(x), \chi(s)).$$

По определению универсального гиперграфического автомата выполняются равенства:

$$\delta(x, s) = \delta(x, (\varphi, \psi)) = \varphi(x), \quad \lambda(x, s) = \lambda(x, (\varphi, \psi)) = \psi(x).$$

Обозначим $\chi(s) = (\varphi_1, \psi_1)$, тогда $f(\varphi(x)) = \varphi_1(f(x))$, $g(\psi(x)) = \psi_1(f(x))$, т.е. $\varphi f = f\varphi_1$, $\psi g = f\psi_1$, следовательно, $\varphi_1 = f^{-1}\varphi f = f^2(\varphi)$, $\psi_1 = f^{-1}\psi g = (f \times g)(\psi)$. Значит, $\chi = (f^2, f \times g) = \pi$, т.е. справедливо утверждение 3). Лемма доказана.

Описанный в лемме 5 с помощью изоморфизмов гиперграфов $f : H_X \longrightarrow H_{X_1}$, $g : H_Y \longrightarrow H_{Y_1}$ изоморфизм $\pi = (f^2, f \times g)$ полугрупп входных сигналов универсальных гиперграфических автоматов $\text{Atm}(H_X, H_Y)$, $\text{Atm}(H_{X_1}, H_{Y_1})$ называется каноническим изоморфизмом таких полугрупп. Помимо канонических изоморфизмов такие полугруппы могут иметь иные, более сложные изоморфизмы. Например, для произвольного натурального числа p рассмотрим универсальный гиперграфический автомат $\text{Atm}(H_X, H_Y)$ над эффективными гиперграфами $H_X = (X, L_X)$, $H_Y = (Y, L_Y)$, ребра которых образуют разбиения множеств вершин X и Y на такие классы эквивалентностей ε_X и ε_Y , что каждый класс эквивалентности содержит более p вершин. Очевидно, что H_X, H_Y – эффективные гиперграфы с p -определимыми

ребрами. Для элементов $x \in X$ произвольно выберем такие автоморфизмы g_x гиперграфа H_Y , которые сохраняют все классы эквивалентности ε_Y , т.е. выполняется $g_x(r) = r$ для любого $x \in X$ и любого ребра $r \in L_Y$.

Для произвольных отображений $\varphi : X \rightarrow X, \psi : X \rightarrow Y$ обозначим $\pi(\varphi, \psi) = (\varphi, \psi^\varphi)$, где отображение $\psi^\varphi : X \rightarrow Y$ определяется по формуле: $\psi^\varphi(x) = g_{\varphi(x)}(\psi(x))$ для всех $x \in X$. Покажем, что π является автоморфизмом полугруппы входных сигналов $S(H_X, H_Y)$ универсального гиперграфического автомата $\text{Atm}(H_X, H_Y)$. Если $(\varphi, \psi) \in S(H_X, H_Y)$, то φ – эндоморфизм гиперграфа H_X и ψ – гомоморфизм гиперграфа H_X в гиперграф H_Y . Убедимся, что в этом случае отображение $\psi^\varphi : X \rightarrow Y$ также будет гомоморфизмом гиперграфа H_X в гиперграф H_Y . Пусть l – некоторое ребро гиперграфа H_X . По определению гомоморфизма $\psi : H_X \rightarrow H_Y$ найдется такое ребро l' гиперграфа H_Y , что $\psi(l) \subset l'$. С другой стороны, для любого элемента $x \in X$ по определению автоморфизма $g_x : H_Y \rightarrow H_Y$ выполняется равенство $g_x(l') = l'$. Тогда для любого элемента $a \in l$ выполняется условие $\psi^\varphi(a) = g_{\varphi(a)}(\psi(a)) \subset g_{\varphi(a)}(l') = l'$. Следовательно, $\psi^\varphi(l) \subset l'$, ψ^φ – гомоморфизм гиперграфа H_X в гиперграф H_Y и элемент $\pi(\varphi, \psi)$ принадлежит полугруппе $S(H_X, H_Y)$. Значит, $\pi : S(H_X, H_Y) \rightarrow S(H_X, H_Y)$.

Возьмем произвольные элементы $(\varphi, \psi), (\varphi_1, \psi_1) \in S(H_X, H_Y)$. По определению имеет место равенство: $(\varphi, \psi) \cdot (\varphi_1, \psi_1) = (\varphi\varphi_1, \varphi\psi_1)$. Обозначим $\varphi\varphi_1 = \varphi', \varphi\psi_1 = \psi'$. Тогда $\pi((\varphi, \psi) \cdot (\varphi_1, \psi_1)) = \pi(\varphi', \psi') = (\varphi', \psi'^{\varphi'})$. По определению

$$\pi(\varphi, \psi) \cdot \pi(\varphi_1, \psi_1) = (\varphi, \psi^\varphi) \cdot (\varphi_1, \psi_1^{\varphi_1}) = (\varphi\varphi_1, \varphi\psi_1^{\varphi_1}) = (\varphi', \psi'^{\varphi'}),$$

т.к. для любого $x \in X$ выполняется

$$\varphi\psi_1^{\varphi_1}(x) = \psi_1^{\varphi_1}(\varphi(x)) = g_{\varphi_1(\varphi(x))}(\psi_1(\varphi(x))) = g_{\varphi\varphi_1(x)}(\varphi\psi_1(x)) = g_{\varphi'(x)}(\psi'(x)) = \psi'^{\varphi'}(x).$$

Это означает, что π – эндоморфизм полугруппы $S(H_X, H_Y)$.

Покажем, что для различных $s, s_1 \in S(H_X, H_Y)$ их образы $\pi(s), \pi(s_1)$ также различны. Очевидно, что это выполняется для всех (φ, ψ) и $(\varphi_1, \psi_1) \in S(H_X, H_Y)$, когда $\varphi \neq \varphi_1$. Рассмотрим теперь $(\varphi, \psi), (\varphi, \psi_1) \in S(H_X, H_Y)$, где $\psi \neq \psi_1$. Поскольку $\psi \neq \psi_1$, то найдется такой $x \in X$, что $\psi(x) \neq \psi_1(x)$. В силу того, что $g_{\varphi(x)}$ – биекция, выполняются следующие условия: $\psi^\varphi(x) = g_{\varphi(x)}(\psi(x)) \neq g_{\varphi(x)}(\psi_1(x)) = \psi_1^\varphi(x)$, т.е. $\psi^\varphi \neq \psi_1^\varphi$. Значит, $\pi(\varphi, \psi) = (\varphi, \psi^\varphi) \neq (\varphi, \psi_1^\varphi) = \pi(\varphi, \psi_1)$. Следовательно, отображение π взаимно однозначное.

Покажем теперь, что π – сюръекция.

Рассмотрим произвольный элемент $(\varphi, \psi) \in S(H_X, H_Y)$. Для любого элемента $x \in X$ найдется элемент $y \in Y$, для которого $\psi(x) = y$. Поскольку $g_{\varphi(x)}$ – автоморфизм, сохраняющий ребра, то найдется такой элемент $z \in Y$, что $g_{\varphi(x)}(z) = y$ и, значит, $z \equiv y(\varepsilon_Y)$. Обозначим $z = \psi'(x)$. В результате получаем отображение $\psi' : X \rightarrow Y$, для которого при любом $x \in X$ выполняется $\psi'(x) \equiv \psi(x)(\varepsilon_Y)$. Очевидно, что по построению для любого $x \in X$ выполняется равенство $\psi'(x) = g_{\varphi(x)}^{-1}(\psi(x))$. Так как $\psi \in \text{Hom}(H_X, H_Y)$, то для любого ребра l гиперграфа H_X найдется такое ребро l' гиперграфа H_Y , что $\psi(l) \subset l'$ и, значит, $\psi'(x)(l) \subset l'$. Следовательно, ψ' – гомоморфизм гиперграфа H_X в гиперграф H_Y , удовлетворяющий для любого $x \in X$ свойству $\psi'^\varphi(x) = g_{\varphi(x)}(\psi'(x)) = g_{\varphi(x)}(g_{\varphi(x)}^{-1}(\psi(x))) = \psi(x)$. Следовательно, $\pi(\varphi, \psi') = (\varphi, \psi'^\varphi) = (\varphi, \psi)$ и отображение π сюръективно.

Таким образом, отображение $\pi : S(H_X, H_Y) \rightarrow S(H_X, H_Y)$ является автоморфизмом полугруппы $S(H_X, H_Y)$.

Ясно, что в общем случае этот автоморфизм не будет каноническим в силу произвольного построения семейства автоморфизмов $g_x : H_Y \rightarrow H_Y, (x \in X)$.

Основной результат этого раздела показывает, что универсальные гиперграфические автоматы над эффективными гиперграфами с p -определимыми ребрами полностью определяются своими полугруппами входных сигналов.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\text{Atm}(H_X, H_Y), \text{Atm}(H_{X_1}, H_{Y_1})$ – универсальные гиперграфические автоматы над эффективными гиперграфами с p -определимыми ребрами H_X, H_Y и H_{X_1}, H_{Y_1} соответственно. Тогда полугруппы входных сигналов этих автоматов изоморфны в том и только том случае, если автоматы $\text{Atm}(H_X, H_Y), \text{Atm}(H_{X_1}, H_{Y_1})$ изоморфны.

Доказательство. По определению из изоморфизма автоматов $\text{Atm}(H_X, H_Y), \text{Atm}(H_{X_1}, H_{Y_1})$ следует изоморфизм полугрупп входных сигналов этих автоматов.

Обратно, пусть $\pi : S(H_X, H_Y) \rightarrow S(H_{X_1}, H_{Y_1})$ – изоморфизм полугруппы $S(H_X, H_Y)$ на полугруппу $S(H_{X_1}, H_{Y_1})$. Изоморфизм π сохраняет истинностные значения формул $\Phi(x), \Psi(x), \Omega(x, y)$ теории полугрупп. Следовательно π сохраняет правые нули этих полугрупп и, значит, отображает множество $Z(H_X, H_Y)$ правых нулей полугруппы $S(H_X, H_Y)$ на множество $Z(H_{X_1}, H_{Y_1})$ правых нулей полугруппы $S(H_{X_1}, H_{Y_1})$, а множество $U(H_X, H_Y)$ левых единиц полугруппы $S(H_X, H_Y)$ на множество $U(H_{X_1}, H_{Y_1})$ левых единиц полугруппы $S(H_{X_1}, H_{Y_1})$. Кроме того, согласно лемме 4 π^2 отображает отношение эквивалентности ε на множестве правых нулей $Z(H_X, H_Y)$ на отношение эквивалентности ε_1 на множестве правых нулей $Z(H_{X_1}, H_{Y_1})$. Из леммы 1 для любых $a \in X, b \in Y$ пара $(C_a, C_b) \in Z(H_X, H_Y)$. При этом $\pi(C_a, C_b) = (C_{a_1}, C_{b_1})$ для некоторых $a_1 \in X_1, b_1 \in Y_1$, т.е. образ $\pi(C_a, C_b)$ является правым нулем полугруппы $S(H_{X_1}, H_{Y_1})$, и π отображает класс эквивалентности $\varepsilon(C_a, C_b)$ на класс эквивалентности $\varepsilon_1(C_{a_1}, C_{b_1})$.

Этот факт позволяет определить отображения $f : X \rightarrow X_1, g_a : Y \rightarrow Y_1, (a \in X)$ по правилу: для любых $a \in X, b \in Y$ значения $f(a) = a_1, g_a(b) = b_1$, если $\pi(C_a, C_b) = (C_{a_1}, C_{b_1})$ для соответствующих $a_1 \in X_1, b_1 \in Y_1$. Тогда по определению выполняется равенство $\pi(C_a, C_{a_1}) = (C_{f(a)}, C_{g_a(a_1)})$.

Нетрудно проверить, что отображение f является биекцией множества X на множество X_1 и для любого $a \in X$ отображение g_a является биекцией множества Y на множество Y_1 . Действительно, сюръективность отображений f, g_a следует из равенства

$$\pi(Z(H_X, H_Y)) = Z(H_{X_1}, H_{Y_1}).$$

Кроме того, для любых $x_1, x_2 \in X, y \in Y$ эквивалентны следующие условия:

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2), C_{f(x_1)} = C_{f(x_2)}, (C_{f(x_1)}, C_{g_{x_1}(y)}) &\equiv (C_{f(x_2)}, C_{g_{x_2}(y)})(\varepsilon_1), \\ \pi(C_{x_1}, C_y) &\equiv \pi(C_{x_2}, C_y)(\varepsilon_1), (C_{x_1}, C_y) \equiv (C_{x_2}, C_y)(\varepsilon), C_{x_1} = C_{x_2}, x_1 = x_2. \end{aligned}$$

Значит, отображение f взаимно-однозначное и f – биекция множества X на множество X_1 .

Аналогично для любого $a \in X$ и любых $y_1, y_2 \in Y$ эквивалентны следующие условия:

$$\begin{aligned} g_a(y_1) = g_a(y_2), C_{g_a(y_1)} = C_{g_a(y_2)}, (C_{f(a)}, C_{g_a(y_1)}) &= (C_{f(a)}, C_{g_a(y_2)}), \\ \pi(C_a, C_{y_1}) &= \pi(C_a, C_{y_2}), C_{y_1} = C_{y_2}, y_1 = y_2. \end{aligned}$$

Значит, отображение g_a взаимно-однозначное и g_a – биекция множества Y на множество Y_1 .

Для произвольных $(\varphi, \psi) \in S$ и $a \in X$ рассмотрим значения $\varphi(a) = b, \psi(a) = d$. Тогда для любого $c \in Y$ имеет место

$$(C_a, C_c) \cdot (\varphi, \psi) = (C_a\varphi, C_a\psi) = (C_{\varphi(a)}, C_{\psi(a)}) = (C_b, C_d),$$

и, значит, для гомоморфизма π выполняется равенство:

$$\pi(C_a, C_c) \cdot \pi(\varphi, \psi) = \pi(C_b, C_d). \quad (1)$$

По определению отображений f, g_a ($a \in X$) вычислим значения

$$\pi(C_a, C_c) = (C_{f(a)}, C_{g_a(c)}), \quad \pi(C_b, C_d) = (C_{f(b)}, C_{g_b(d)}).$$

Обозначим $\pi(\varphi, \psi) = (\varphi_1, \psi_1)$. Тогда по формуле (1) получаем

$$(C_{f(a)}, C_{g_a(c)}) \cdot (\varphi_1, \psi_1) = (C_{f(b)}, C_{g_b(d)}).$$

С другой стороны, по определению умножения выполняются равенства

$$(C_{f(a)}, C_{g_a(c)}) \cdot (\varphi_1, \psi_1) = (C_{f(a)}\varphi_1, C_{f(a)}\psi_1) = (C_{\varphi_1(f(a))}, C_{\psi_1(f(a))}) = (C_{f(b)}, C_{g_b(d)})$$

и, следовательно, $\varphi_1(f(a)) = f(b) = f(\varphi(a))$, $\psi_1(f(a)) = g_b(d) = g_{\varphi(a)}(\psi(a))$.

Таким образом, выполняются равенства $f\varphi_1 = \varphi f$, $\varphi_1 = f^{-1}\varphi f = f^2(\varphi)$ и $\psi_1 = \psi^\varphi$, где отображение $\psi^\varphi : X_1 \rightarrow Y_1$, определяется по формуле: $\psi^\varphi(f(a)) = g_{\varphi(a)}(\psi(a))$ для всех $a \in X$.

В результате получаем, что для любой пары $(\varphi, \psi) \in S$ выполняется равенство

$$\pi(\varphi, \psi) = (f^2(\varphi), \psi^\varphi). \quad (2)$$

Обозначим $f^2 = \pi_1$. Очевидно, что отображение π_1 является биекцией полугруппы $\text{End } H_X$ на полугруппу $\text{End } H_{X_1}$. Кроме того, выполняется равенство:

$$\begin{aligned} \pi_1(\varphi\varphi') &= f^2(\varphi\varphi') = f^{-1}\varphi\varphi'f = f^{-1}\varphi f f^{-1}\varphi'f = (f^{-1}\varphi f)(f^{-1}\varphi'f) = f^2(\varphi)f^2(\varphi') = \\ &= \pi_1(\varphi)\pi_1(\varphi'). \end{aligned}$$

Следовательно, отображение π_1 является изоморфизмом полугруппы $\text{End } H_X$ на полугруппу $\text{End } H_{X_1}$. Согласно основному результату работы [17] отображение f является изоморфизмом гиперграфа H_X на гиперграф H_{X_1} .

Покажем, что для любого $a \in X$ биекция g_a является изоморфизмом гиперграфа H_Y на гиперграф H_{Y_1} . Рассмотрим произвольное ребро $l \in L_Y$. По определению гиперграфа с p -определимыми ребрами всякое ребро содержит по меньшей мере $p+1$ вершин, т. е. найдутся различные вершины $y_1, \dots, y_{p+1} \in Y$, принадлежащие ребру l .

Возьмем произвольное ребро $r \in L_X$. В силу p -определимости гиперграфа H_X это ребро содержит по меньшей мере $p+1$ вершин $x_1, \dots, x_{p+1}$.

Построим отображение $\psi : X \rightarrow Y$ по правилу:

$$\psi(x) = \begin{cases} y_i, & \text{если } x = x_i \text{ для некоторого } 1 \leq i \leq p; \\ y_{p+1}, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Ясно, что отображение ψ будет гомоморфизмом гиперграфа H_X в гиперграф H_Y .

Рассмотрим элемент $(C_a, \psi) \in S$ для произвольного $a \in X$. Тогда по формуле (2) и определению отображения f имеем $\pi(C_a, \psi) = (C_{f(a)}, \psi^{C_a})$, где $\psi^{C_a}(f(x_i)) = g_{C_a(x_i)}(\psi(x_i)) = g_a(y_i)$ для всех $i = \overline{1, p+1}$. Ясно, что $\psi^{C_a} \in \text{Hom}(H_{X_1}, H_{Y_1})$.

Поскольку отображение f – изоморфизм гиперграфа H_X на гиперграф H_{X_1} , то вершины $f(x_1), \dots, f(x_{p+1})$ однозначно определяют ребро $r_1 = f(r)$, $r_1 \in L_{X_1}$. Тогда условие $\psi^{C_a} \in \text{Hom}(H_{X_1}, H_{Y_1})$ равносильно тому, что множество

$$\{\psi^{C_a}(f(x_1)), \dots, \psi^{C_a}(f(x_{p+1}))\} = \{g_a(y_1), \dots, g_a(y_{p+1})\}$$

– ограниченное $(p+1)$ -элементное множество в гиперграфе H_{Y_1} , т. е. найдется ребро $l_1 \in L_{Y_1}$, для которого выполняется $\{g_a(y_1), \dots, g_a(y_{p+1})\} \subseteq l_1$. Это означает, что $g_a(l) \subseteq l_1$.

С другой стороны, аналогичным образом можно показать, что для ребра l_1 гиперграфа H_{Y_1} выполняется $g_a^{-1}(l_1) \subseteq l'$ для некоторого ребра $l' \in L_Y$. По построению множество $g_a^{-1}(l_1)$ содержит $p+1$ вершин $y_1, \dots, y_{p+1}$, которые принадлежат ребру $l \in L_Y$. В силу p -определимости ребер гиперграфа H_Y выполняется $l = l'$. Следовательно, $g_a^{-1}(l_1) \subseteq l$. Значит, $g_a(l) = l_1$.

Таким образом, биекция g_a является изоморфизмом гиперграфа H_Y на гиперграф H_{Y_1} . Тогда в силу леммы 5 упорядоченная тройка отображений $(f, (f^2, f \times g_a), g_a)$ является каноническим изоморфизмом автомата $\text{Atm}(H_X, H_Y)$ на автомат $\text{Atm}(H_{X_1}, H_{Y_1})$. Теорема доказана.

Таким образом, полученный результат показывает, что универсальные гиперграфические автоматы над эффективными гиперграфами с p -определимыми ребрами определяются с точностью до изоморфизма своими полугруппами входных сигналов.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\text{Atm}(H_X, H_Y), \text{Atm}(H_{X_1}, H_{Y_1})$ – универсальные гиперграфические автоматы над эффективными гиперграфами с p -определимыми ребрами H_X, H_Y и H_{X_1}, H_{Y_1} соответственно. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) гиперграфы H_X, H_Y изоморфны соответственно гиперграфам H_{X_1}, H_{Y_1} ;
- 2) существует изоморфизм полугруппы входных сигналов $S(H_X, H_Y)$ автомата $\text{Atm}(H_X, H_Y)$ на полугруппу входных сигналов $S(H_{X_1}, H_{Y_1})$ автомата $\text{Atm}(H_{X_1}, H_{Y_1})$;
- 3) существует канонический изоморфизм полугруппы входных сигналов $S(H_X, H_Y)$ автомата $\text{Atm}(H_X, H_Y)$ на полугруппу входных сигналов $S(H_{X_1}, H_{Y_1})$ автомата $\text{Atm}(H_{X_1}, H_{Y_1})$;
- 4) автоматы $\text{Atm}(H_X, H_Y), \text{Atm}(H_{X_1}, H_{Y_1})$ изоморфны.

Доказательство. Из теоремы 1 следует равносильность условий 2) и 4). По определению изоморфизма автоматов из условия 4) следует условие 1). В силу леммы 5 из условия 1) следуют условия 3), 4). Очевидно, что из условия 3) следует условие 2). Следствие доказано.

4. Заключение

Таким образом, полученный результат показывает, что универсальные гиперграфические автоматы над эффективными гиперграфами с p -определимыми ребрами полностью (с точностью до изоморфизма) определяются полугруппами своих входных сигналов. Это обосновывает изучение таких автоматов с помощью исследования их полугрупп входных символов и, в частности, обосновывает актуальность исследования взаимосвязи свойств таких автоматов и их полугрупп входных символов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Плоткин Б. И., Гринглаз Л. Я., Гварамя А. А. Элементы алгебраической теории автоматов. М.: Высшая школа, 1994. 192 с.
2. Molchanov V. A. Semigroups of mappings on graphs // Semigroup Forum. 1983. № 27. P. 155–199.
3. Свердловская тетрадь: Сборник нерешенных проблем теории полугрупп. Свердловск: Урал. гос. ун-т, 1979. 41 с.
4. Лендер В. Б. Об эндоморфизмах проективных геометрий // Исследования алгебраических систем (Матем.записки Урал. ун-та). 1984. С. 48–50.

5. Молчанов В. А. Как проективные плоскости определяются своими полугруппами // Теория полугрупп и ее приложения. Полугруппы и связанные с ними алгебраические системы, Саратов. гос. ун-т. 1984. С. 42–50.
6. Molchanov V. A universal planar automaton is determined by its semigroup of input symbols // Semigroup Forum. 2011. № 82. P.1–9.
7. Bretto A. Hypergraph theory. An Introduction. Cham: Springer, 2013. 133 p. DOI: 10.1007/978-3-319-00080-0.
8. Улам С. Нерешенные математические задачи. М. : Наука, 1964. 168 с.
9. Молчанов В. А., Хворостухина Е. В. О задаче абстрактной характеристики универсальных гиперграфических автоматов // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. - Саратов: Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, 2017. Т. 17, № 2. С. 148–159.
10. Молчанов В. А., Хворостухина Е. В. Об абстрактной определяемости универсальных гиперграфических автоматов полугруппами их входных сигналов // Материалы XIV Международной конференции «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения», посвященная 70-ти летию со дня рождения С. М. Воронина и Г. И. Архипова. -- Саратов: Изд-во Саратовского гос. ун-та, Издательский центр «Наука», 2016. С. 67–69.
11. Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп. М. : Мир, 1972. Т. 1. 286 с.
12. Вагнер В. В. Теория отношений и алгебра частичных отображений // Теория полугрупп и ее приложения; Сб. научн. тр. 1965. № 1. С. 3–178.
13. Молчанов А. В. Полугруппы эндоморфизмов слабых p -гиперграфов // Известия вузов. Математика. Саратов. 2000. № 3(454). С. 80–83.
14. Molchanov A. V. On definability of hypergraphs by their semigroups of homomorphisms // Semigroup Forum. 2001. № 62. P. 53–65.
15. Молчанов А. В. Об определяемости гиперграфических автоматов их выходными функциями // Теоретические проблемы информатики и ее приложений. Саратов. 1998. № 2. С. 74–84.
16. Хартсхорн Р. Основы проективной геометрии. М.: Мир, 1970. 161 с.
17. Хворостухина Е. В. Об одном классе гиперграфических автоматов // Теорет. проблемы информатики и ее приложений. Саратов. 2008. № 8. С. 112–118.

REFERENCES

1. Plotkin, B. I., Geenglaz, L. Ja., Gvaramija, A. A. 1992, *Algebraic structures in automata and databases theory*, River Edge, World Scientific, Singapore, NJ, 192 p.
2. Molchanov, V. A. 1983, "Semigroups of mappings on graphs", *Semigroup Forum*, № 27, pp. 155–199.
3. *Sverdlovskaja tetrad: Sb. nereshjonnyh zadach po teorii polugrupp*. [Sverdlovsk notebook: A collection of unsolved problems of semigroup theory], 1979, Ural. univ., Sverdlovsk, 41 p.

4. Lender, V. B. 1984, “On endomorphisms of projective geometries“, *Issledovaniya algebraicheskikh sistem (Matem. zapiski Ural.un.)*, pp. 48–50.
5. Molchanov V. A. 1984, “Projective planes are determined by their semigroups“, *Teoriya polugrupp i ego prilozheniya. Polugruppy i svyazannye s nimi algebraicheskie sistemy*, pp. 42–50.
6. Molchanov, V. 2011, “A universal planar automaton is determined by its semigroup of input symbols“, *Semigroup Forum*, № 82, pp. 1–9.
7. Bretto, A. 2013, *Hypergraph theory. An Introduction*. Springer, Cham, 133 p. doi: 10.1007/978-3-319-00080-0
8. Ulam, S. 1960, *A Collection of Mathematical Problems*. Interscience, New York, 168 p.
9. Molchanov, V. A., Khvorostukhina, E. V. 2017, “On problem of abstract characterization of universal hypergraphic automata“, *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, vol. 17, iss. 2, pp. 148–159.
10. Molchanov, V. A., Khvorostukhina, E. V. 2016, “On problem of abstract definability of universal hypergraphic automata by semigroups of their input symbols“, *Materialy XIV Mezhdunarodnoj konferencii “Algebra i teoriya chisel: sovremennye problemy i prilozheniya“, posvjashhennaja 70-ti letiju so dnja rozhdenija S.M. Voronina i G.I. Arhipova (XIV Int. Conf. “Algebra and Number theory“)*, Saratov, pp. 67–69.
11. Clifford, A. H., Preston, G. B. 1961, *The algebraic theory of semigroups, volume 1*, American Mathematical society, Providence, 224 p.
12. Vagner, V. V. 1965, “Relation theory and algebra of partial mappings“, *Teoriya polugrupp i ego prilozheniya, sbornik nauch.trud.*, № 1, pp. 3–178.
13. Molchanov, A. V. 2000, “Endomorphism semigroups of weak p -hypergraphs“, *Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*, vol. 44, № 3, pp. 77–80.
14. Molchanov, A. V. 2001, “On definability of hypergraphs by their semigroups of homomorphisms“, *Semigroup Forum*, № 62, pp. 53–65.
15. Molchanov, A. V. 1998, “Ob opredeljaemosti gipergraficheskikh avtomatov ih vyhodnymi funkcijami“, *Teoreticheskie problemy informatiki*, iss. 2, pp. 74–84.
16. Hartshorne, R. 2009, *Foundations of Projective Geometry*, New York, 190 p.
17. Khvorostukhina, E. V. 2008, “On a class of hypergraphic automata“, *Teoreticheskie problemy informatiki and its applications*, Saratov, iss. 8, pp. 112–118.

Получено 18.03.2017 г.

Принято в печать 12.07.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 2.

УДК 512, 519.7

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-273-283

Введение расстояния взаимодействия в контексте геометрии расстояния для движений человека

A. Mucherino (Rennes, France)

Mucherino Antonio — ИРИСА, университет Ренна 1, Ренн, Франция
e-mail: antonio.mucherino@irisa.fr

Аннотация

Задача динамической геометрии расстояния (dynDGP) — это недавно введенный подкласс геометрии расстояния, где проблемы имеют динамическую составляющую.

Графы

$$G = (V \times T, E, \{\delta, \pi\})$$

dynDGP имеют множество вершин, которое является произведением множества двух множеств: множества V , содержащего объекты для анимации, и множества T , представляющего время.

В этой статье основное внимание уделяется специальным экземплярам dynDGP, которые используются для представления движения человека в проблеме адаптации, где множество V допускает скелетную структуру (S, χ) .

"Расстояние взаимодействия" — это понятие введено в качестве возможной замены евклидова расстояния, которое способно улавливать информацию о представлении динамики задачи и некоторые начальные свойства этого нового расстояния.

Ключевые слова: динамическая дистанционная геометрия, дистанция взаимодействия, адаптация человеческого движения, ретаргетинг, анимированные скелетные структуры, симметричное квази-расстояние.

Библиография: 22 titles.

Для цитирования:

A. Mucherino, 2019, "Introducing the Interaction Distance in the context of Distance Geometry for Human Motions", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 2, pp. 273–283.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 2.

UDC 512, 519.7

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-273-283

Introducing the Interaction Distance in the context of Distance Geometry for Human Motions

A. Mucherino (Rennes, France)

Mucherino Antonio — IRISA, University of Rennes 1, Rennes, France
e-mail: antonio.mucherino@irisa.fr

Abstract

The dynamical Distance Geometry Problem (dynDGP) is a recently introduced subclass of the distance geometry where problems have a dynamical component. The graphs

$$G = (V \times T, E, \{\delta, \pi\})$$

of dynDGPs have a vertex set that is the set product of two sets: the set V , containing the objects to animate, and the set T , representing the time. In this article, the focus is given to special instances of the dynDGP that are used to represent human motion adaptation problems, where the set V admits a skeletal structure (S, χ) .

The “interaction distance” is introduced as a possible replacement of the Euclidean distance which is able to capture the information about the dynamics of the problem, and some initial properties of this new distance are presented.

Keywords: dynamical distance geometry, interaction distance, human motion adaptation, retargeting, animated skeletal structures, symmetric quasi-distance.

Bibliography: 22 titles.

For citation:

A. Mucherino, 2019, "Introducing the Interaction Distance in the context of Distance Geometry for Human Motions", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 2, pp. 273–283.

1. Introduction

Given a weighted undirected graph $G = (V \times T, E, \{\delta, \pi\})$, the dynamical Distance Geometry Problem (dynDGP) [16, 20] in dimension 3 consists in finding a realization

$$x : (v, t) \in V \times T \longrightarrow (x_v^t, y_v^t, z_v^t) \in \mathbb{R}^3 \quad (1)$$

of G in the Euclidean space $\mathbb{R}^3$ such that the following objective is minimized:

$$\sigma(x) = \sum_{(u_q, v_t) \in E} \pi(u_q, v_t) \frac{|d((x_u^q, y_u^q, z_u^q), (x_v^t, y_v^t, z_v^t)) - \delta(u_q, v_t)|}{\delta(u_q, v_t)}, \quad (2)$$

where d is a distance function, and $|\cdot|$ indicates the absolute value of a real number.

It is important to point out the two different roles of δ and d in equ. (2). The former is one of the weights associated to the edges of the graph G , which corresponds to the available distance value between a vertex pair. The latter is instead a distance function: d associates, to every pair of positions, their corresponding distance. In the majority of the applications of distance geometry [19], the distance function d is the Euclidean distance:

$$d((x_u^q, y_u^q, z_u^q), (x_v^t, y_v^t, z_v^t)) = \sqrt{(x_v^t - x_u^q)^2 + (y_v^t - y_u^q)^2 + (z_v^t - z_u^q)^2}.$$

The value of π associated to every distance represents the “importance” of such a distance, and it is generally referred to as the *priority* of the distance δ [9, 16].

The vertex (v, t) of the graph G is an ordered pair that represents a given object v at a certain instant t , and a realization x corresponds to an animation of the objects in V over the time steps in $T = \{1, 2, \dots, n\}$. As in the equations already introduced above, the compact notations v_t and $\{u_q, v_t\}$ are employed for indicating a vertex and an edge of G , respectively. The coordinates of the object v at the time t obtained through the realization function x are indicated with compact notations x_v^t , y_v^t and z_v^t . Notice that, from a formal point of view, the only particularity of the dynDGP (w.r.t a standard distance geometry problem) is the fact that the vertex set of G is the

set product of two sets: V (the objects) and T (the time). In other words, a dynDGP with $T = \{1\}$ is a “standard” distance geometry problem [12].

This article focuses on a particular application of the dynDGP, where the main interest is in analyzing human motions through the study of animated skeletal structures which resemble the human body [20]. Some initial works have shown that tools for distance geometry can be employed in this context [2, 17], but they consider, as in the majority of the applications in distance geometry, the Euclidean distance as a metric.

In fact, only a few examples of use of non-Euclidean distances in the context of distance geometry can currently be found in the scientific literature: in [4], for example, the L_∞ distance is used to reformulate the distance geometry problem as an optimization problem whose constraints only include linear terms; in [13], distance geometry on the sphere is studied, where the distances can be either Euclidean, or geodesic distances. In the present work, the possibility to replace the Euclidean distance with another distance function, which is able to “better” capture the features of the motion adaptation problem, is discussed. To this aim, the *interaction distance* will be introduced, and some of its basic properties will be studied.

The rest of the article is organized as follows. Section 2 will introduce more in details the mathematical objects that are involved in motion adaptation. Section 3 will propose a definition of the human motion adaptation problem which is based on the formulation of a dynDGP. Then, the interaction distance will be introduced in Section 4, and some initial properties will be presented. Finally, Section 5 will conclude the paper.

2. The objects that come to play

Human-like characters are sets of bars that represent “bones” (i.e. the rigid components) of a human body, while the intersection points between two bars are named “joints”. This kind of structure is widely used in applied mathematics and can be represented by a simple graph $S = (V, E_S)$, where vertices in V are the joints and the existence of an edge $\{u, v\} \in E_S$ between two joints u and v indicates that they are connected by a bar [11].

The graph S provides information about the structure (a hand is connected through a bar to an elbow, which is then connected through another bar to the shoulder, and so on), but it gives no information about the morphology of the character. For a predefined accuracy level of the skeletal representation of the character (not all human bones are generally represented, but only a few of them, often a little more than 20 bones), in fact, it is actually possible to consider the graph S as a constant for an entire group of characters. Then, the difference between pairs of characters can be evaluated by simply comparing their morphology. Notice that, for the majority of the skeletal representations, the graph S is a tree.

The simplest way to add morphology information to a character is to include in the graph S a weight function that associates a real positive value (the bone length) to all its edges in E_S . This way, a “tall guy” has larger values associated to the weights of its “leg” edges, in comparison with a normal-sized guy. Naturally, lengths can be provided in absolute values for all edges:

$$w : \{u, v\} \in E \longrightarrow w(u, v) \in \mathbb{R}_+,$$

or rather the propositions among them can be provided in order to obtain a more efficient character description which is independent from the metric scale.

Even though the simple, and weighted, graph $S = (V, E, w)$ provides enough information to represent a character bone structure and morphology, it is typical (in the works signed by the computer graphics community) to represent characters by *skeletal structures* [1, 11]. A skeletal structure is a pair consisting of a graph (S in our case, without weights), and a function χ that is able to assign a position in $\mathbb{R}^3$ to every joint $v \in V$. This initial set of positions corresponds to the

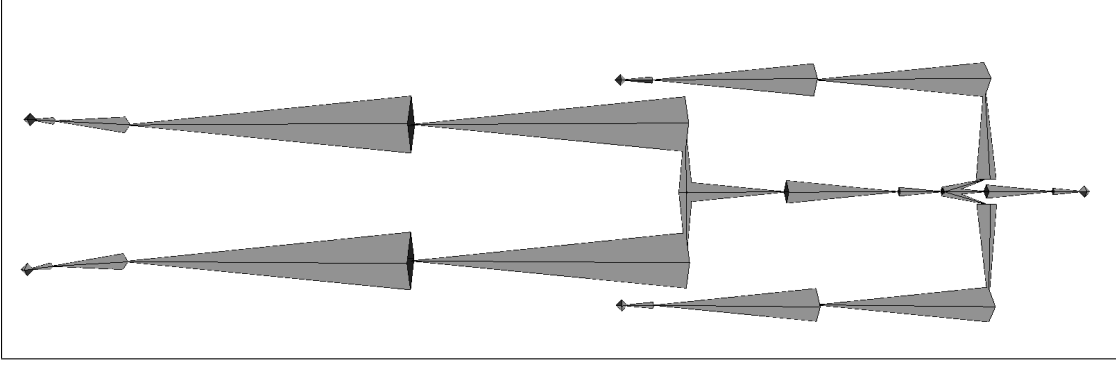


Рис. 1: The initial pose for the skeletal structure (S, χ) . S is a tree and, in its realization shown in this figure, the joint positions are computed by setting the position of its root to $(0,0,0)$ and by using the displacement function χ to compute the coordinates of all other joints.

“initial pose” of the character (Fig. 1 shows an example of initial pose for a human-like character). The function χ takes into consideration the hierarchical information in the graph S , and actually provides the *displacement* $(\xi_v^x, \xi_v^y, \xi_v^z)$ of every vertex $v \in V$ w.r.t. its parent (when S is a tree, every vertex has only one parent):

$$\chi : v \in V \longrightarrow (\xi_v^x, \xi_v^y, \xi_v^z) \in \mathbb{R}^3,$$

from which all vertex positions in the initial pose can be obtained.

The most common way to represent the animation of the character (S, χ) is through the function:

$$\rho : (v, t) \in V \times T \longrightarrow (\theta_v^t, \phi_v^t, \eta_v^t) \in \mathbb{R}^3, \quad (3)$$

where θ_v^t , ϕ_v^t and η_v^t are three Euler angles (pitch: θ , roll: ϕ and yaw: η) used to control the relative rotations of every character edge in the local coordinate system of the hierarchically lowest (closest to the root) joint of the edge [14]. This representation has the great advantage of keeping the skeletal structure, as well as its morphology, constant during the animation.

From the initial pose for the character, and by using the Euler angles $(\theta_v^t, \phi_v^t, \eta_v^t)$ for all following time steps t , it is possible to calculate the vertex coordinates of all subsequent character poses, so that the entire animation can be represented through a function x (see equ. (1)). This procedure is detailed, for example, in [14]. A solutions (realization) x to a dynDGP has exactly the same form.

3. Human motion adaptation

Character animation is nowadays largely used in movie and video game industries. Typically, a 3D model and its associated skeletal structure (S, χ) are designed by an artist, then animated either manually or using recorded motion capture data. However, it is often the case that animations created for a specific character, or captured from a given actor, need to be reused on characters with a different morphology: this problem is known in the specialized literature as the *motion adaptation problem*.

Since the early works of Gleicher [8], and Choi and Ko [3], the problem of adapting a given animation to the special features of a given character is taking particular attention from the research community. The main problem consists *extracting* the information about the animation played by character A (the actor), and to *transfer* this piece of information to another character B (the character to be animated), which is generally morphologically different from character A (see Section 2 for the representation of the characters and the animations).

Let (S, χ_A) be the skeletal structure that describes the morphology of character A, and suppose that the initial animation is captured from character A; let (S, χ_B) be the skeletal structure of the target character B. The two characters have a common graph S , but the two functions χ_A and χ_B are different. When the two initial poses described by the two displacement functions χ_A and χ_B are the same (different numerical values for the displacements over the three components may represent the same pose, such as the typical **T** pose), one possible (and easy) approach to motion adaptation is to simply *transfer* the function ρ_A (see equ. (3)), representing the animation of character A, to character B (in other words, it is imposed that $\rho_B \equiv \rho_A$). However, the Euler angles in ρ_A are not able to take into consideration the spatial relationship between pairs of character joints [2, 10], and as a consequence undesired effects may be introduced in the animation. Typical undesired effects include creating body contacts that were not present in the original animation, or to miss body contacts that actually occur in the original animation.

As already remarked in Section 2, the coordinates (x_v^t, y_v^t, z_v^t) for every joint and for every time t can be computed by combining the displacement function of the skeletal structure (S, χ_A) with the function ρ_A . With the obtained representation x_A of the animation, Euclidean distances between pairs of joints, at every time frame t , can be computed. As it is well-known, the Euclidean distance is widely used in several scientific disciplines, and provides information that is easily understandable by humans, which is, the simple measure of proximity between object pairs. A character that flaps its hands, for example, needs to bring, at particular time frames, the Euclidean distance between the two hands to zero in order to perform this movement; the distance provides this simple and fundamental feature of the movement.

When the animations are represented by functions having the form of equ. (1), the motion adaptation problem can be formulated as follows [2, 17]. Let x_A be the initial animation of (S, χ_A) , given in terms of absolute vertex positions. In order to capture the spatial relationships between joint pairs in the animation, *all* relative distances δ , for every time frame, can be computed. If some distances are considered to be more important than others, then a higher priority value π can be associated to them. This procedure allows to define the simple undirected graph $G = (V \times T, E, \{\delta, \pi\})$, which represents the animation in terms of distances.

DEFINITION 11. (dynDGP-based human motion adaptation).

Given a skeletal structure (S, χ_B) and a simple weighted undirected graph $G = (V \times T, E, \{\delta, \pi\})$ obtained from an animation of (S, χ_A) , find an animation x_B for the skeletal structure (S, χ_B) that is solution to $\text{dynDGP}(G)$.

It is important to remark that “an animation for (S, χ_B) ” is meant to be an animation where the morphology described by the skeletal structure is preserved. Naturally, finding an animation for (S, χ_A) , when G was obtained from an animation of the same skeletal structure, is an easy problem, because all distance constraints are precise and compatible to each other [15]. When the morphology changes from the original character to the target character, instead, it is unlikely that the all distance constraints can be satisfied, so that the best *trade-off* needs to be identified by minimizing the function $\sigma(x)$ (see equ. (2)).

Some initial studies where the motion adaptation problem is formulated as a dynDGP can be found in [2, 15, 17]. However, these studies pointed out some limitations in the use of the Euclidean distance for this particular application. The Euclidean distance, in fact, can fail in providing information about the dynamics of the considered animation, because it focuses only on one snapshot of the animation per time. This observation motivated the main aim of this paper: the next section will introduce the concept of interaction distance, and will study some basic properties.

4. The interaction distance

Immanuel Kant, whose works preceding the *criticism* were influenced by his readings of Newton and Leibniz, compared *time* (in his early writings on the topic) to a point moving on an infinite line [22]. Moreover, such a line was oriented, because “time instants do not depend reciprocally on each other, it is rather the instant that precedes which determines the one that follows; this is the reason why time admits only one dimension” [7].

In the same spirit, the main idea behind the interaction distance is to consider the dynamics of the problem through the semi-straight lines (only the future information is taken into consideration) defined by given joint positions at two consecutive time frames. Let u and $v \in V$ be two distinct joints. The orientation of the joint u at the current frame $t > 1$ can be obtained by using two positions: the position of u at the previous frame $p_u^{t-1} = (x_u^{t-1}, y_u^{t-1}, z_u^{t-1})$, and its current position p_u^t . The semi-straight line ℓ_u defined by p_u^{t-1} and p_u^t , having as a boundary p_v^t and *not* including p_u^{t-1} , provides an approximation of the trajectory of u at further frames in the hypothesis there will be no changes in the joint orientation. Moreover, in the hypothesis the joint speed is also constant, it is possible to select a discrete subset of equidistant points on ℓ_u representing potential positions for u at future time steps. The discrete set of potential future positions for u is therefore given by the equation:

$$p(u, \alpha_u) = p_u^{t-1} + \alpha_u \cdot (p_u^t - p_u^{t-1}), \quad \alpha_u \in \{1, 2, \dots, +\infty\}.$$

Once a similar discrete set of potential positions for the joint v is computed, the interaction distance between u and v can be measured by studying how these potential position points on the two semi-straight lines ℓ_u and ℓ_v approach one another.

DEFINITION 12. (The interaction distance).

Given a skeletal structure (S, χ) and an animation x , the “interaction distance” $D(p_u^t, p_v^t)$ at frame $t > 1$ between two joints $u, v \in V$ is:

$$\begin{aligned} \min_{\alpha \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} d(p(v, \alpha), p(u, \alpha)), & \quad \text{if } p_u^{t-1} \neq p_u^t \text{ and } p_v^{t-1} \neq p_v^t, \\ \min_{\alpha \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} d(p(v, \alpha), p_u^t), & \quad \text{if } p_u^{t-1} = p_u^t \text{ and } p_v^{t-1} \neq p_v^t, \\ d(p_v^t, p_u^t), & \quad \text{if } p_u^{t-1} = p_u^t \text{ and } p_v^{t-1} = p_v^t, \end{aligned}$$

where d is the Euclidean distance.

From a geometric point of view, the interaction distance gives a measure of the relative approach between two joints by using only the information about their current position and orientation. It follows immediately from the definition that interaction distances between joints can be computed at every frame of the animation, except the frame 1, and that two consecutive frames are involved in the computation of this distance. Fig. 2 shows a graphical representation of the interaction distance for a simple animation.

It is important to remark that the idea to use semi-straight lines to define a distance function is not completely new. A distance with exactly the same name (“interaction distance”) was already introduced in the context of ballistics [6] (see Ch.24, Distances in Physics), but it differs from the definition given above for the domain of α (which is discrete in the definition above). Moreover, in the context of robotics, semi-straight lines were also used in [21] with the aim of verifying an entire set of intermediary configurations for robot arms, instead of only a few positions. This use of the semi-straight lines is evidently different from the one in the definition of interaction distance.

Since the interaction distance is, by definition, the smallest Euclidean distance between selected points on two straight lines, which also include the two points p_u^t and p_v^t , it follows that the interaction distance between two joints u and v at frame $t > 1$ is always smaller than, or at most equal to, the Euclidean distance between the current positions of the two joints at frame t .

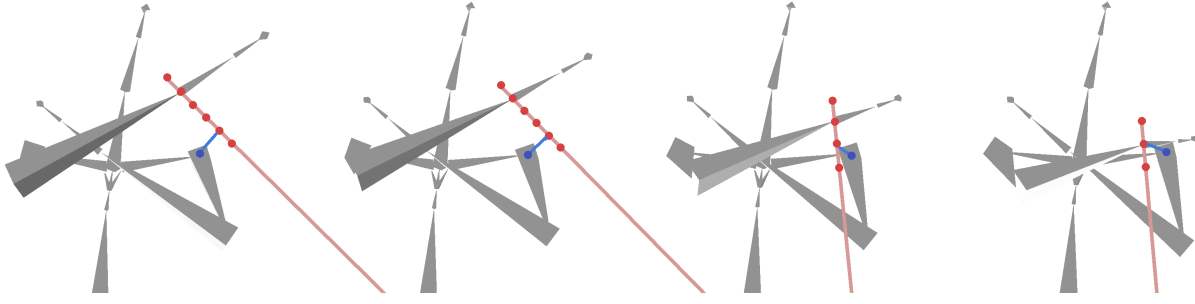


Рис. 2: A graphical representation of the interaction distance between two joints (wrist of approaching arm in red, and steady opposite shoulder in blue) in a simple animation. Since one joint is steady, it is necessary to compute the semi-straight line (light red) only for one of the two joints. It is possible to notice that the interaction distance (blue segment) is able to “anticipate” the detection of potential joint contacts. The potential interaction is finally not completely attained, because the value of the interaction distance at the third shown frame is smaller than the Euclidean distance in the last frame, where the Euclidean and interaction distances coincide.

PROPOSITION 2. *The interaction distance is not a metric, but rather a symmetric quasi-distance.*

Proof The three properties that a symmetric quasi-distance and a metric have in common can be easily verified:

- nonnegativity: $\forall t \in T, \forall u, v \in V, \quad D(p_u^t, p_v^t) \geq 0$;
- reflexivity: $\forall t \in T, \forall v \in V, \quad D(p_v^t, p_v^t) = 0$;
- symmetry: $\forall t \in T, \forall u, v \in V : u \neq v, \quad D(p_u^t, p_v^t) = D(p_v^t, p_u^t)$.

The other two additional properties of a metric are instead not satisfied. The interaction distance does not satisfy the “identity of indiscernibles” property, because a distance equal to 0 does not necessarily imply that p_u^t and p_v^t are actually the same. As the reflexivity property shows, in fact, the distance between one joint and itself is 0 (because the two straight lines ℓ_u and ℓ_v coincide), but the converse implication is not true in general: $D(p_u^t, p_v^t)$ can be equal to 0 when two distinct joints will collide when continuing to travel along their current trajectories in future frames (in other words, when the two straight lines ℓ_u and ℓ_v intersect in the common point where the collision occurs).

The second property of a metric that is not satisfied is the triangular inequality. Suppose that the joints u and v are fixed in two distinct positions during the animation, while the joint w “travels” on the straight line defined by p_u^t and p_v^t in their direction, so that $D(p_u^t, p_w^t)$ and $D(p_v^t, p_w^t)$ are both equal to 0. Let c be the Euclidean distance between p_u^t and p_v^t , which is strictly larger than 0 by hypothesis. The triangular inequality would imply:

$$D(p_u^t, p_v^t) \leq D(p_u^t, p_w^t) + D(p_w^t, p_v^t) \Rightarrow c \leq 0,$$

which brings to a contradiction. □

Notice that, for any given distance function $d(p_u^t, p_v^t)$, if the distance value $\hat{d}$ is known and one of the two points is fixed, say p_u^t , then the set

$$\Pi = \left\{ p \in \mathbb{R}^3 : d(p_u^t, p) = \hat{d} \right\}$$

contains all points p such that the distance between p_u^t and p is equal to $\hat{d}$. When d is the Euclidean distance, it is well-known that Π is a sphere centered in p_u^t and having radius $\hat{d}$. When the interaction distance is concerned, fixing p_u^t implies the definition of the semi-straight line ℓ_u , from which all potential *interaction points* $p(u, \alpha)$, for every α , can be extracted (because the step $p_u^t - p_u^{t-1}$ is known).

Let $\hat{D}$ be the known value for the interaction distance between the two joints u and v at the time step t . Every interaction point $p(u, \alpha)$ on ℓ_u corresponds to a sphere $\mathcal{S}_\alpha(p_u^{t-1})$ centered in $p(u, \alpha)$ and having radius $\hat{D}$. The points in Π are therefore those lying on the semi-straight lines passing through p_v^{t-1} and any other point of $\mathcal{S}_\alpha(p_u^{t-1})$, for any α . Once one semi-straight line ℓ_v is selected, the corresponding value of α can be deduced from the sphere $\mathcal{S}_\alpha(p_u^{t-1})$ that ℓ_v intersects. This value is necessary to set the intersection point α time steps after p_v^{t-1} : the position p_v^t corresponds to the point of ℓ_v placed only one time step further ($\alpha = 1$).

In the hypothesis that more than one distance constraint concerns the same point p_v^t (the unknown), so that the system of equations

$$\begin{cases} D(p_u^t, p_v^t) = \hat{D}_{uv}, \\ \dots \\ D(p_w^t, p_v^t) = \hat{D}_{wv}, \end{cases}$$

can be defined, the feasible points for p_v^t lie on the intersection of the several sets Π . Intuitively, this intersection is related to a set of semi-straight lines which do not only pass through the point p_v^t , but also through the points of $\mathcal{S}_\alpha(p_u^{t-1}) \cap \dots \cap \mathcal{S}_\alpha(p_w^{t-1})$, for every α . Since the value of α needs to be the same for every semi-straight line, each intersection concerns only the spheres related to the same α : the number of spheres to intersect, for every α , depends on the number of distance constraints (see Fig. 3 for a graphical representation in 2D). These sphere intersections may be for example empty (indicating that the target distance cannot be attained for the fixed value of α), or they could enjoy special properties, such as the ones studied in [18] in the context of distance geometry with the Euclidean distance. This is the current research direction.

5. Conclusions

Some initial empirical studies on the interaction distance computed for the joints of human-like character animations have shown that this new distance can, differently from the Euclidean distance, anticipate joint contacts and collisions of several frames before they actually occur (see Fig. 2). This is of fundamental importance in real-time applications, where the *future* is actually not known yet (differently from other applications where an animation may be preprocessed in order to find out its critical parts).

Even if the interaction distance is introduced in this article in the context of human motion adaptation, it is important to point out that the problem of “collision detection” arises in many other contexts, such as aircraft and robot trajectory planning, and crowd simulations, to name a few important examples. In some early studies of pedestrians collision avoidance [5], a short survey on previous works proposed a classification on the two main approaches to the problem: those which focus on the idea to predict *when* a collision is going to occur; the others where the main question is *whether* the collision is going to take place or not. The interaction distance introduced in this work makes a bridge between these two main approaches: small values of the distance indicates in fact that joints are going to approach each other; moreover, the value of α (see Def. 12) corresponding to the distance value indicates how many time steps are necessary for the contact to actually take place.

However, while the interaction distance already finds its interest from a mathematical point of view, the real practical benefits in using it in real-life applications still need to be verified.

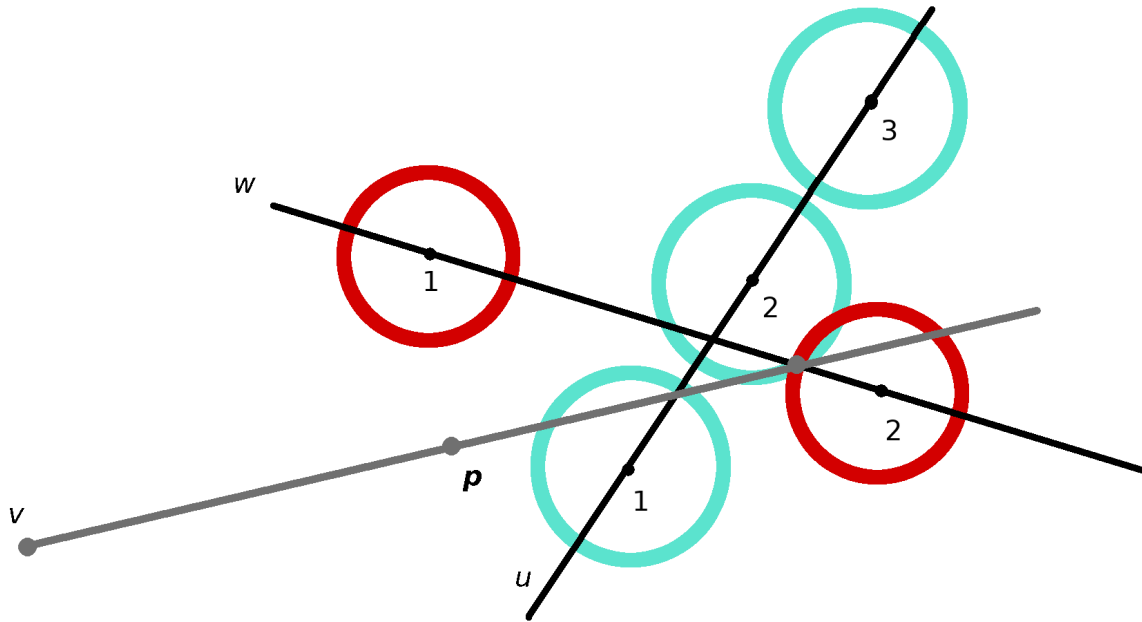


FIG. 3: An example in 2D where the set of feasible semi-straight lines for v reduces to two lines when $\alpha = 2$ (only one of the two is reported in gray in the figure). The spheres $\mathcal{S}_\alpha(p_u^t)$ on ℓ_u , as well as the spheres $\mathcal{S}_\alpha(p_w^t)$ on ℓ_w , intersect in fact only when α is set to 2 (the values of α are reported inside the spheres). Once one semi-straight line ℓ_v is selected, the point p (the unknown) is the point on the line corresponding to $\alpha = 1$.

In particular, the definition and solution of dynDGP instances related to human-like character animations, where the interaction distance replaces the classical Euclidean distance, will be the subject of future publications.

Dedication

This article is dedicated to the memory of Michel Deza (1939–2016). The reason to dedicating this work to him is not only because it is going to appear in a journal special issue where contributions from a recent conference, dedicated to his 80th birthday, are collected. The main reason is actually that most of this work was inspired by the reading of the wonderful Encyclopedia of Distances, that Michel authored with his wife.

REFERENCES

1. A.Y. Alfakih, *On Dimensional Rigidity of Bar-and-Joint Frameworks*, Discrete Applied Mathematics **155**(10), 1244–1253, 2007.
2. A. Bernardin, L. Hoyet, A. Mucherino, D.S. Gonçalves, F. Multon, *Normalized Euclidean Distance Matrices for Human Motion Retargeting*, ACM Conference Proceedings, Motion in Games 2017 (MIG17), Barcelona, Spain, November 2017.
3. K.J. Choi, H.S. Ko, *Online Motion Retargeting*, The Journal of Visualization and Computer Animation **11**(5), 223–235, 2000.

4. G.M. Crippen, *An Alternative Approach to Distance Geometry using L^∞ Distances*, Discrete Applied Mathematics **197**, 20–26, 2015.
5. J.E. Cutting, P.M. Vishton, P.A. Braren, *How We Avoid Collisions With Stationary and Moving Objects*, Psychological Review **102**(4), 627–651, 1995.
6. M.M. Deza, E. Deza, *Encyclopedia of Distances*, 756 pages, Springer, 2016.
7. B. Erdmann, *Reflexionen Kants zur Kritischen Philosophie*, Part II “Reflexionen Kants zur Kritik der Reinen Vernunft, aus Kants Handschriftlichen Aufzeichnungen”, Leipzig, Fues’s Verlag, 1884.
8. M. Gleicher, *Retargetting Motion to New Characters*. ACM Proceedings of the 25th annual conference on Computer Graphics and Interactive Techniques, 33–42, 1998.
9. W. Glunt, T.L. Hayden, M. Raydan, *Molecular Conformations from Distance Matrices*, Journal of Computational Chemistry **14**(1), 114–120, 1993.
10. E.S.L Ho, T. Komura, C-L. Tai, *Spatial Relationship Preserving Character Motion Adaptation*, Proceedings of the 37th International Conference and Exhibition on Computer Graphics and Interactive Techniques, ACM Transactions on Graphics **29**(4), 8 pages, 2010.
11. G. Laman, *On Graphs and Rigidity of Plane Skeletal Structures*, Journal of Engineering Mathematics **4**(4), 331–340, 1970.
12. L. Liberti, C. Lavor, N. Maculan, A. Mucherino, *Euclidean Distance Geometry and Applications*, SIAM Review **56**(1), 3–69, 2014.
13. L. Liberti, G. Swirszcz, C. Lavor, *Distance Geometry on the Sphere*, Proceedings of the Japanese Conference on Discrete and Computational Geometry and Graphs (JCDCGG15), Lecture Notes in Computer Science **9943**, J. Akiyama, H. Ito, T. Sakai Y. Uno (Eds.), Kyoto, Japan, 204–215, 2015.
14. M. Meredith, S. Maddock, *Motion Capture File Formats Explained*, Technical Report 211, Department of Computer Science, University of Sheffield, 36 pages, 2001.
15. A. Mucherino, *On the Discretization of Distance Geometry: Theory, Algorithms and Applications*, HDR Monograph, University of Rennes 1. INRIA Hal archive id: [tel-01846262](https://hal.inria.fr/tel-01846262). July 17, 2018.
16. A. Mucherino, D.S. Gonçalves, *An Approach to Dynamical Distance Geometry*, Lecture Notes in Computer Science **10589**, F. Nielsen, F. Barbaresco (Eds.), Proceedings of Geometric Science of Information (GSI17), Paris, France, 821–829, 2017.
17. A. Mucherino, D.S. Gonçalves, A. Bernardin, L. Hoyet, F. Multon, *A Distance-Based Approach for Human Posture Simulations*, IEEE Conference Proceedings, Federated Conference on Computer Science and Information Systems (FedCSIS17), Workshop on Computational Optimization (WCO17), Prague, Czech Republic, 441–444, 2017.
18. A. Mucherino, C. Lavor, L. Liberti, *The Discretizable Distance Geometry Problem*, Optimization Letters **6**(8), 1671–1686, 2012.
19. A. Mucherino, C. Lavor, L. Liberti, N. Maculan (Eds.), *Distance Geometry: Theory, Methods and Applications*, 410 pages, Springer, 2013.

20. A. Mucherino, J. Omer, L. Hoyet, P. Robuffo Giordano, F. Multon, *An Application-based Characterization of Dynamical Distance Geometry Problems*, to appear in Optimization Letters, Springer, 2019.
21. F. Schwarzer, M. Saha, J-C. Latombe, *Exact Collision Checking of Robot Paths*. In: Algorithmic Foundations of Robotics V, Springer, 25–41, 2004.
22. J. Sivadjian, *Le Temps. Étude Philosophique Physiologique et Psychologique*, Part III “Le Problème Psychologique”, Hermann & C^{le} (Eds.), 1938.

Получено 13.06.2019 г.

Принято в печать 12.07.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 2.

УДК 517

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-284-297

О почти локально разрешимых алгебрах Ли с нулевым радикалом Джекобсона и локально нильпотентном радикале для алгебр Ли

О. А. Пихтилькова, Е. В. Мещерина, А. А. Горелик

Пихтилькова Ольга Александровна — кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой алгебры и дискретной математики, Оренбургский государственный университет (г. Оренбург).

e-mail: opikhtilkova@mail.ru

Мещерина Елена Владимировна — кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры алгебры и дискретной математики, Оренбургский государственный университет (г. Оренбург).

e-mail: elena_lipilina@mail.ru

Горелик Анна Александровна — старший преподаватель кафедры геометрии и компьютерных наук, Оренбургский государственный университет (г. Оренбург).

e-mail: anna_gmn3@rambler.ru

Аннотация

В статье доказывается аналог теоремы Ф. Кубо [1] для почти локально разрешимых алгебр Ли с нулевым радикалом Джекобсона. Первый раздел направлен на выяснение некоторых аспектов гомологического описания радикала Джекобсона. Доказана теорема, обобщающая теорему Е. Маршалла на случай почти локально разрешимых алгебр Ли, следствием которой и является аналог теоремы Кубо. Во втором разделе исследуются некоторые свойства локально нильпотентного радикала алгебры Ли. Рассматриваются примитивные алгебры Ли. Приведены примеры, показывающие, что бесконечномерные коммутативные алгебры Ли являются примитивными над любыми полями; конечномерная абелева алгебра, размерности больше 1, над алгебраически замкнутым полем не является примитивной; пример неартиновой некоммутативной алгебры Ли являющейся примитивной. Показано, что для специальных алгебр Ли над полем характеристики нуль PI -неприводимо представленный радикал совпадает с локально нильпотентным. Приведен пример алгебры Ли, локально нильпотентный радикал которой не является ни локально нильпотентным, ни локально разрешимым. Даются достаточные условия примитивности алгебры Ли, приводятся примеры примитивных алгебр Ли и алгебры Ли не являющейся примитивной.

Ключевые слова: алгебра Ли, примитивная алгебра Ли, специальная алгебра Ли, неприводимое PI -представление, радикал Джекобсона, локально нильпотентный радикал, редуктивная алгебра Ли, почти локально разрешимая алгебра Ли.

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:

О. А. Пихтилькова, Е. В. Мещерина, А. А. Горелик. О почти локально разрешимых алгебрах Ли с нулевым радикалом Джекобсона и локально нильпотентном радикале для алгебр Ли // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 2, с. 284–297.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 2.

UDC 517

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-284-297

On almost locally solvable Lie algebras with null Jacobson radical of a locally nilpotent radical for Lie algebras

O. A. Pikhtilkova, E. V. Mescherina, A. A. Gorelik

Pikhtilkova Olga Alexandrovna — Candidate of Physics and Mathematics Sciences, docent, Head of department of algebra and discrete mathematics, Orenburg State University (Orenburg).
e-mail: opikhtilkova@mail.ru

Мещерина Елена Владимировна — Candidate of Physics and Mathematics Sciences, Senior Lecturer, Department of Algebra and discrete mathematics, Orenburg State University (Orenburg).
e-mail: elena_lipilina@mail.ru

Горелик Анна Александровна — Senior Lecturer, Department of geometry and computer science, Orenburg State University (Orenburg).
e-mail: anna_gmn3@rambler.ru

Abstract

In paper proves an analogue of the theorem of F. Kubo [1] for almost locally solvable Lie algebras with zero Jacobson radical. The first section aims to clarify some aspects of the homological description of the Jacobson radical. We prove a theorem generalizing E. Marshall's theorem to the case of almost locally solvable Lie algebras, the consequence of which is an analogue of Kubo's theorem. In the second section, we investigate some properties of a locally nilpotent radical of a Lie algebra. Primitive Lie algebras are considered. Examples are given to show that infinite-dimensional commutative Lie algebras are primitive over any fields; finite-dimensional Abelian algebra, dimensions greater than 1, over an algebraically closed field is not primitive; an example of a non-Artin noncommutative Lie algebra being primitive. It is shown that for special Lie algebras over the characteristic field, the zero *PI*-irreducibly presented radical coincides with the locally nilpotent one. An example of a Lie algebra whose locally nilpotent radical is neither locally nilpotent nor locally solvable is given. Sufficient conditions for the primitiveness of a Lie algebra are given, examples of primitive Lie algebras and a non-primitive Lie algebra are given.

Keywords: Lie algebra, primitive Lie algebra, special Lie algebra, irreducible *PI*-representation, Jacobson radical, locally nilpotent radical, reductive Lie algebra, almost locally solvable Lie algebra.

Bibliography: 16 titles.

For citation:

O. A. Pikhtilkova, E. V. Mescherina, A. A. Gorelik, 2019, "On almost locally solvable Lie algebras with null Jacobson radical of a locally nilpotent radical for Lie algebras", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 2, pp. 284–297.

1. Введение

На Международной алгебраической конференции, посвященной 100-летию со дня рождения А. Г. Куроша (Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова, 2008) Борис Исаакович Плоткин поставил вопрос о гомологическом описании радикала Джекобсона для алгебр Ли.

Первый раздел направлен на выяснение некоторых аспектов гомологического описания радикала Джекобсона и локально нильпотентного радикала. Во втором разделе исследуются некоторые свойства и примеры примитивных алгебр Ли и локально нильпотентного радикала специальных алгебр Ли.

2. Основной текст статьи

1. О почти локально разрешимых алгебрах Ли с нулевым радикалом Джекобсона

Радикалом конечномерной алгебры Ли называется наибольший разрешимый идеал [2].

Определение радикала Джекобсона было дано Е. Маршаллом и дополнено Ф. Кубо:

Назовем радикалом Джекобсона $J(L)$ алгебры Ли L пересечение максимальных идеалов и саму алгебру L , если их нет. [3]

В определении Е. Маршалла было только пересечение максимальных идеалов, фраза "сама алгебра L , если их нет" добавлена Ф. Кубо для бесконечномерных алгебр Ли [1].

Назовем нильпотентным радикалом $N(L)$ для конечномерной алгебры Ли L пересечение ядер ее неприводимых конечномерных представлений [2].

Отметим, что для конечномерной алгебры Ли над полем характеристики нуль нильпотентный радикал совпадает с радикалом Джекобсона [3].

Е. Маршалл доказал следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1. *Если конечномерная алгебра Ли L над полем характеристики нуль имеет разложение Леви в прямую сумму $L = S \oplus \sigma(L)$, тогда радикал Джекобсона алгебры Ли L равен $J(L) = [L, \sigma(L)]$, где S – полупростая алгебра, а $\sigma(L)$ – разрешимый радикал L .*

В формулировке следующей теоремы важную роль играет понятие подидеала. Назовем подидеалом идеал идеала алгебры Ли.

ТЕОРЕМА 2. ([4]) *Если алгебра Ли L порождена конечномерными локальными подидеалами L , тогда радикал Джекобсона алгебры Ли L равен $J(L) = [L, \sigma(L)]$, где $\sigma(L)$ – максимальный локально разрешимый идеал L .*

Свойства радикала Джекобсона для бесконечномерных алгебр Ли исследовал также Ф. Кубо [1].

Он показал, что результаты Е. Маршалла и Н. Камийя в общем случае неверны для бесконечномерных алгебр Ли даже в случае локально-конечных алгебр. Им были также изучены бесконечномерные алгебры Ли с нулевым радикалом Джекобсона.

ТЕОРЕМА 3. ([1]) *Пусть L – локально-конечная алгебра Ли. Справедливо: $J(L) = 0$ тогда и только тогда, когда алгебра Ли L имеет разложение Леви $L = S \oplus Z(L)$, где $Z(L)$ – центр алгебры L , S – подалгебра L такая, что $J(S) = 0$.*

В 1963 г. В. Н. Латышев ввел новый класс алгебр Ли [5], которые он назвал специальными по аналогии с йордановыми алгебрами.

Скажем, что алгебра Ли L специальная или SPI -алгебра Ли, если существует ассоциативная PI -алгебра A такая, что L вложена в $A^{(-)}$ как алгебра Ли, где $A^{(-)}$ – алгебра Ли, заданная на A с помощью операции коммутирования $[x, y] = xy - yx$.

Назовем присоединенной ассоциативной алгеброй $\text{Ad } L$ ассоциативную алгебру, порожденную в алгебре $\text{End}(L)$ линейными преобразованиями $\{\text{ad } x | x \in L\}$, где $\text{ad } x(y) = [x, y]$, $x, y \in L$.

Следующее определение, обобщающее определение В. Н. Латышева, было дано С. А. Пихтильниковым [6].

Алгебра Ли L называется обобщенно специальной, если ее присоединенная алгебра $\text{Ad } L$ является PI -алгеброй.

Свойство быть обобщенно специальной алгеброй сохраняется при гоморфизмах в отличие от специальности [6], [7].

Назовем алгебру Ли L почти разрешимой (почти локально разрешимой), если в ней существует разрешимый (локально разрешимый) идеал R такой, что алгебра L/R — конечномерна.

Пусть R — идеал алгебры Ли L , G — подалгебра. Скажем, что L представима в виде полупрямого произведения $L = G \ltimes R$, если:

1. $L = G + R$;
2. $G \cap R = 0$.

Пусть R — разрешимый (почти разрешимый) радикал алгебры Ли L , если он существует. Назовем полупростую конечномерную подалгебру G алгебры Ли L подалгеброй Леви, если L представима в виде полупрямого произведения $L = G \ltimes R$.

ТЕОРЕМА 4. (Леви [8]) Пусть L — конечномерная алгебра Ли над полем характеристики нуль с радикалом R . Тогда в L существует полупростая подалгебра G такая, что $L = G \ltimes R$. Заметим, что подалгебра G является подалгеброй Леви.

Ю. А. Бахтурин доказал следующий аналог теоремы Леви.

ТЕОРЕМА 5. ([9, стр. 266–268]) Пусть L — конечно порожденная почти разрешимая специальная алгебра Ли над полем характеристики нуль. Тогда в L существует подалгебра Леви.

Ю. А. Терехова следующим образом обобщила теорему Ю. А. Бахтурина.

ТЕОРЕМА 6. ([10]) Пусть L — специальная алгебра Ли над полем характеристики нуль, R — локально разрешимый радикал, фактор-алгебра L/R — конечномерна. Тогда в L существует полупростая конечномерная подалгебра G такая, что L представима в виде полупрямой суммы $L = G \ltimes R$.

Обобщим теорему Е. Маршалла на случай почти локально разрешимых алгебр Ли. Доказательство теоремы основано на идеях из [3].

ТЕОРЕМА 7. Пусть L — почти локально разрешимая алгебра Ли над полем F характеристики нуль. Если алгебра Ли L имеет разложение Леви $L = S \oplus R$, где S — конечномерная подалгебра L такая, что $J(L) = 0$, а R — разрешимый радикал, то $J(L) = [L, R]$.

Доказательство. Сделаем сначала очевидное замечание: радикал Джекобсона абелевой алгебры Ли равен нулю.

Следовательно, $J(L) \subset L^2$.

Пусть I — максимальный идеал алгебры L . Фактор алгебра L/I не содержит собственных идеалов, является простой или абелевой.

Если алгебра L/I — простая, то идеал I содержит R и представим в виде $I = M + R$, где M — максимальный идеал S . Мы пользуемся тем, что алгебра $S \cap R$ является разрешимой и, следовательно, $S \cap R = 0$.

Полупростая конечномерная алгебра S над полем характеристики нуль представима в виде суммы идеалов, являющихся простыми алгебрами Ли.

Следовательно, пересечение идеалов I таких, что фактор-алгебра L/I — простая, совпадает с R и $J(L) \subset R$.

Учитывая замечание, получили $J(L) \subset L^2 \cap R$.

Если фактор-алгебра L/I — абелева, то I содержит L^2 и пересечение всех таких идеалов содержит L^2 .

Пересечение всех максимальных идеалов содержит $L^2 \cap R$.

Получаем включение $J(L) \supset L^2 \cap R$.

Следовательно, $J(L) = L^2 \cap R$.

Запишем один из коммутаторов алгебры L .

Пусть $l_i = s_i + r_i$, где $i = 1, 2$, $s_i \in S$, $r_i \in R$.

Тогда $[l_1, l_2] = [g_1, g_2] + [g_1, r_2] + [r_1, g_2] + [r_1, r_2]$.

Если $[l_1, l_2] \in R$, то $[g_1, g_2] = 0$.

Тогда $[l_1, l_2] = [g_1, r_2] - [g_2, r_1] + [r_1, r_2]$.

Следует $L^2 \cap R \subset [L, R]$.

Включение $[L, R] \subset L^2 \cap R$ — очевидно.

Окончательно получили $J(L) = [L, R]$.

Докажем следствие, которое является аналогом теоремы Ф. Кубо.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть L — специальная почти локально разрешимая алгебра Ли над полем F характеристики нуль. Справедливо: $J(L) = 0$ тогда и только тогда, когда алгебра Ли L имеет разложение Леви $L = S \oplus Z(L)$, где $Z(L)$ — центр алгебры L , S — конечномерная подалгебра L такая, что $J(L) = 0$.

Доказательство. Пусть L — специальная почти локально разрешимая алгебра Ли, R ее локально разрешимый радикал.

Согласно теореме 6, для алгебры L имеет место разложение Леви $L = S + R$, где S — полупростая конечномерная алгебра, а R — локально разрешимый радикал.

Из теоремы 7 получаем $J(L) = [L, R]$.

Следовательно, $J(L) = 0$ тогда и только тогда, когда $R = Z(L)$.

2. О локально нильпотентном радикале для алгебр Ли

Локально нильпотентный радикал специальных алгебр Ли является обобщением нильпотентного радикала конечномерных алгебр Ли [2], [11].

Если модуль M — конечномерный, то наибольший идеал U , алгебры L такой, что эндоморфизм x_M , соответствующий элементу x , является нильпотентным для всех $x \in L$, в алгебре $\text{End}M$, — называется наибольшим идеалом нильпотентности представления.

Для конечномерной алгебры Ли L нильпотентный радикал $N(L)$ характеризуется также как пересечение наибольших идеалов нильпотентности конечномерных представлений алгебры L [2].

Говоря о представлениях алгебры Ли, следует рассмотреть и случай, когда представление неприводимо.

2.1 О примитивных алгебрах Ли

Алгебру Ли, имеющую точное неприводимое представление называют примитивной.

Идеал алгебры Ли назовем примитивным, если фактор-алгебра по нему примитивна.

Д.Товерс [12] разбивает примитивные алгебры Ли на 3 типа:

- 1) примитивность типа 1, если алгебра Ли имеет единственный минимальный идеал, являющийся абелевым;
- 2) примитивность типа 2, если алгебра Ли имеет единственный минимальный идеал, не являющийся абелевым;
- 3) примитивность типа 3, если Алгебра Ли имеет ровно два различных минимальных идеала каждый из которых не является абелевым.

Он утверждает, что всякая примитивная разрешимая алгебра Ли является примитивной 1 типа, всякая простая алгебра Ли — примитивной второго типа. И если S — простая алгебра Ли, то $L = S \oplus S$ является примитивной типа 3 с безъядерной максимальной подалгеброй $D = \{s + s : s \in S\}$ — диагональной подалгеброй L . [12]

Рассмотрим пример, предложенный Ю. А. Бахтуриным.

Пример 1. Пусть $F[x]$ — кольцо многочленов над полем F характеристики нуль.

Рассмотрим следующие линейные отображения векторного пространства

$$F[x] : a(f(x)) = f'(x); \quad b(f(x)) = x \cdot f(x); \quad e(f(x)) = f(x).$$

Легко проверить соотношение $[a, b] = e$, где через $[x, y]$ в ассоциативной алгебре обозначено $[x, y] = xy - yx$.

Обозначим через L линейную оболочку преобразований a, b, e . Алгебра Ли L является трехмерной нильпотентной степени 2 примитивной алгеброй.

Этот пример показывает, что даже нильпотентная конечномерная алгебра Ли степени 2 может быть примитивной.

Известно, что разрешимый идеал конечномерной алгебры Ли и локально разрешимый идеал специальной алгебры Ли совпадают с первичным радикалом [13].

Парадоксальность примера состоит в том, что радикальная алгебра Ли по отношению к первичному радикалу является примитивной. Напомним, что в ассоциативном случае радикал Джекобсона, а следовательно и первичный, примитивной алгебры равны нулю [14]. Более того, примитивная алгебра является первичной.

Примитивных алгебр Ли достаточно много.

Скажем, что алгебра Ли является артиновой, если любая убывающая цепочка ее идеалов — стабилизируется.

Справедливы следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 8. Пусть L — артинова алгебра Ли над полем, имеющая единственный минимальный идеал. Тогда алгебра Ли L — примитивна.

ТЕОРЕМА 9. Пусть L_1 и L_2 — примитивные алгебры Ли, имеющие такие точные неприводимые представления

$$\varphi_i : L_i \rightarrow M_i$$

такие, что центродиды Δ_i модулей M_i совпадают с основным полем и $\varphi_i(L_i) \cap \Delta_i = 0$, где $i = 1, 2$. Тогда их прямая сумма $L_1 \oplus L_2$ также примитивна.

В 70-ых годах прошлого века была известна проблема: является ли универсальная обертывающая алгебра $U(L)$ полупростой конечномерной алгебры Ли L над полем характеристики нуль примитивной?

Наибольших успехов в решении этой проблемы добился Ж. Диксмье [15]. Он исследовал не только примитивность универсальной обертывающей алгебры Ли, но и примитивность отдельных ее идеалов.

Очевидна следующая импликация: если $U(L)$ — примитивна, то алгебра Ли L также является примитивной. Обратное в общем случае неверно (смотрите пример 2).

Относительно примитивности полупростых алгебр Ли справедливы следующие утверждения.

Следствие 1 Полупростые конечномерные алгебры Ли над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль — примитивны.

Скажем, что простая алгебра Ли L — центральная простая, если центроид представления $\text{ad} : L \rightarrow \text{Ad } L$ совпадает с основным полем. Центральными простыми алгебрами над полем характеристики нуль являются, например, простые конечномерные алгебры Ли больших классов A, B, C, D [8].

Применяя теорему 9, получим утверждение.

Следствие 2 *Если полупростая конечномерная алгебра Ли над полем характеристики нуль раскладывается в прямую сумму центральных простых алгебр, то она является примитивной.*

В [16] была доказана примитивность свободной ассоциативной алгебры Ли с конечным или счетным множеством образующих. Свободная ассоциативная алгебра является универсальной обертывающей свободной алгебры Ли. Следовательно, свободная алгебра Ли является примитивной.

Все коммутативные алгебры Ли над полями $\mathbb{Z}_p$, где p — простое, и $\mathbb{Q}$ также являются примитивными. Бесконечномерные коммутативные алгебры Ли являются примитивными над любыми полями (см. пример 3).

Конечномерная абелева алгебра, размерности больше 1, над алгебраически замкнутым полем не является примитивной (см. пример 4).

Приведен пример неартиновой некоммутативной алгебры Ли являющейся примитивной (см. пример 6).

Рассмотрим примитивность некоторых алгебр Ли.

ЛЕММА 1. *Пересечение примитивных идеалов произвольной алгебры Ли равно нулю.*

Доказательство.

Обозначим через X пересечение аннуляторов неприводимых представлений алгебры Ли L или саму алгебру L если их нет.

Легко проверить, что модуль M — неприводим над алгеброй Ли L тогда и только тогда, когда M является $U(L)$ неприводимым модулем, где $U(L)$ — универсальная обертывающая алгебры Ли L .

Это означает, что $X = L \cap J(U(L))$.

Известно, что $J(U(L)) = 0$ для произвольной алгебры Ли L (см., например, [15, стр. 126])

Следовательно, множество X равно пересечению примитивных идеалов алгебры Ли L , равно 0, что завершает доказательство леммы.

Пример 2. Пусть $L = \mathbb{C}$ двумерная абелева алгебра Ли над $\mathbb{R}$.

Представление L умножениями на $\mathbb{C}$ задает точное неприводимое представление. Следовательно, алгебра Ли L — примитивна. Ее универсальная обертывающая, изоморфная алгебре многочленов над $\mathbb{R}$ от двух коммутирующих переменных, не является примитивной.

Согласно теореме Капланского, примитивная PI -алгебра изоморфна алгебре матриц Δ_n для некоторого тела Δ [14]. В силу коммутативности, примитивная алгебра многочленов от двух переменных должна быть полем, что не выполнено.

Пример 3. Пусть L — абелева алгебра Ли над полем F . Если размерность $\dim_F L = n$ — конечна и существует алгебраический элемент α степени n над F , то рассмотрим простое алгебраическое расширение $F(\alpha)$.

Поле $F(\alpha)$ является абелевой алгеброй Ли размерности n и имеет точное неприводимое представление.

К числу полей, имеющих алгебраические элементы любой степени относятся поле рациональных чисел и кольцо классов вычетов $\mathbb{Z}_p$, где p — простое.

Если $\dim_F L$ — бесконечна, рассмотрим поле K той же размерности над F . Оно тоже является реализацией абелевой примитивной алгебры Ли над F .

Пример 4. Покажем, что абелева алгебра $L = F \oplus \dots \oplus F$ размерности k , где F — алгебраически замкнутое поле, $k \geq 2$, — не является примитивной.

Универсальная обертывающая алгебра $U(L)$ алгебры Ли L изоморфна кольцу многочленов от k коммутирующих переменных

$$U(L) = F[x_1, \dots, x_k].$$

Примитивность алгебры Ли L означает, что в $U(L)$ существует максимальный регулярный правый идеал I не содержащий переменные $x_1, \dots, x_k$ [14]. Алгебра $U(L)$ коммутативна и содержит 1. Следовательно, идеал I является максимальным и фактор-алгебра $H = U(L)/I$ является полем. Можно считать, что H расширение поля F .

Отметим, что алгебра H порождена образами образующих $U(L)$. Следовательно, элементы $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k$ не могут быть трансцендентными — алгебра рациональных функций не может быть порождена как кольцо конечным числом элементов.

Мы установили, что H — алгебраическое расширение поля F и, следовательно, $H = F$. Получили $x_1, \dots, x_k \in I$ — противоречие.

Следовательно, алгебра L — не является примитивной.

Теорема 8 следует из леммы 1 и того, что любой ненулевой примитивный идеал артиновой алгебры Ли содержит единственный минимальный.

Доказательство теоремы 9.

Пусть алгебры Ли L_1 и L_2 имеют точные неприводимые представления в алгебре эндоморфизмов модулей M_1 и M_2 , такие, что их центроиды совпадают с основным полем F .

Рассмотрим модуль $M_1 \otimes_F M_2$ над $\text{End}(M_1) \otimes_F \text{End}(M_2)$ и вложения алгебр Ли

$$\varphi_i : L_i \rightarrow \text{End}(M_i), \quad i = 1, 2.$$

Пострим следующие отображения L_1 и L_2 в алгебру

$$\text{End}(M_1) \otimes_F \text{End}(M_2) :$$

$$\varphi'_1(l_1) = \varphi_1(l_1) \otimes 1 \text{ и } \varphi'_2(l_2) = 1 \otimes \varphi_2(l_2), \quad l_1 \in L_1, l_2 \in L_2$$

Тогда $\varphi_1 + \varphi_2$ задает вложение $L_1 \oplus L_2$ в $(\text{End}(M_1) \otimes_F \text{End}(M_2))^{(-)}$.

Покажем, что $M_1 \otimes_F M_2$ является $L_1 \oplus L_2$ неприводимым модулем.

Рассмотрим ненулевой элемент $x \in M_1 \otimes_F M_2$. Можно считать, что он представлен в виде

$$x = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l \alpha_{i,j} m_i \otimes n_j,$$

где хотя бы одно $\alpha_{i,j} \neq 0$ и элементы $m_1, \dots, m_k \in M_1$ и $n_1, \dots, n_l \in M_2$ — линейно независимы над центроидами соответствующих модулей и, следовательно, над полем F . Без ограничения общности можно считать, что $\alpha_{1,1} \neq 0$.

Обозначим через $A(L_i)$ ассоциативные алгебры, порожденные в $\text{End}(M_1)$ множествами L_i , где $i = 1, 2$.

Возьмем произвольный элемент $u \otimes v \in M_1 \otimes_F M_2$. Согласно теореме плотности Джекобсона [14], существуют элементы $a \in A(L_1)$ и $b \in A(L_2)$ такие, что

$$am_1 = \frac{1}{\alpha_{1,1}} u, am_2 = 0, \dots, am_k = 0, bn_1 = v, bn_2 = 0, \dots, bn_l = 0.$$

Тогда $(a \otimes 1)(1 \otimes b)x = u \otimes v$, что завершает доказательство неприводимости модуля $M_1 \otimes_F M_2$ и примитивности алгебры $L_1 \oplus L_2$.

Условие $\varphi_i(L_i) \cap \Delta_i = \emptyset$, где $i = 1, 2$ требуется для того, чтобы $a \otimes 1$ и $1 \otimes b$ не могли совпадать.

Отметим, что в общем случае тензорное произведение неприводимых модулей может не быть примитивным, что показывает следующий пример.

Пример 5. Мы уже использовали то, что поле комплексных чисел является двумерной абелевой примитивной алгеброй Ли над $\mathbb{R}$.

Рассмотрим модуль $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ над алгеброй Ли $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$.

Отметим, что ассоциативная подалгебра $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ алгебры $\mathbf{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$, порожденная множествами $\mathbb{C} \otimes 1$ и $1 \otimes \mathbb{C}$ содержит также элементы $1 \otimes 1, i \otimes i$.

Покажем, что модуль $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ не является неприводимым.

Следующие элементы $1 \otimes 1, 1 \otimes i, i \otimes 1, i \otimes i$ образуют базис $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ над $\mathbb{R}$.

Рассмотрим подпространство $M \subseteq \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ над $\mathbb{R}$, порожденное элементами $1 \otimes 1 + i \otimes i, 1 \otimes i - i \otimes 1$ и подпространство N , порожденное элементами $1 \otimes 1 - i \otimes i, 1 \otimes i + i \otimes 1$.

Легко проверить, что M и N являются подмодулями $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ над $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ и $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = M \oplus N$.

Следовательно, модуль $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ не является неприводимым над алгеброй Ли $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$.

Мы уже отмечали, что алгебра Ли $(\mathbb{C} \oplus \mathbb{C})^{(-)}$ не является примитивной. Пример 5 дает одно из представлений алгебры $(\mathbb{C} \oplus \mathbb{C})^{(-)}$ не являющееся неприводимым.

Доказательство следствия 1.

Пусть L – простая конечномерная алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем F характеристики нуль.

Рассмотрим представление $\text{ad} : L \rightarrow \text{Ad } L^{(-)}$.

Тогда алгебра Ли L , рассматриваемая как модуль, является неприводимым L модулем. Центроид этого представления Δ является полем (см., например, [8, с. 314]).

Из конечномерности L следует, что Δ – конечное расширение поля F . Конечным расширением алгебраически замкнутого поля может быть только оно само. Следовательно, ad является центральным представлением алгебры Ли L .

Из простоты L получим $\text{ad}(L) \cap \Delta = 0$.

Выполнены условия теоремы 9. Осталось использовать разложение полупростой конечномерной алгебры Ли над полем характеристики нуль в прямую сумму простых [2], [8].

Пример 6. Пусть алгебра Ли G является прямой суммой счетного количества алгебр, изоморфных алгебре L из примера 1 над полем $\mathbb{Q}$. Покажем, что она является примитивной. Очевидно, что G не является артиновой алгеброй Ли.

Рассмотрим различные иррациональные алгебраические числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$.

Пусть $M = F[x_1, x_2, \dots, x_n, \dots]$ кольцо многочленов от счетного числа коммутирующих переменных с коэффициентами из поля $F = \mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots)$.

Рассмотрим следующие линейные отображения векторного пространства M :

$$a_k(f) = \frac{\partial f}{\partial x_k}; b_k(f) = \alpha_k x_k \cdot f; e_k(f) = \alpha_k f, f \in M.$$

Легко проверить соотношение $[a_k, b_k] = e_k$.

Рассмотрим представления $\varphi_k : L \rightarrow (\text{End}_{\mathbb{Q}} M)^{(-)}$, заданные соотношениями

$$\varphi_k(a) = a_k, \varphi_k(b) = b_k, \varphi_k(e) = e_k, k = 1, 2, \dots$$

Гомоморфизм $\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n + \dots$ задает представление алгебры Ли G в $\text{End}_{\mathbb{Q}} M^{(-)}$.

Проверка того, что M является неприводимым G -модулем предоставляется читателю.

Аналогично можно показать, что прямая сумма конечного числа алгебр, изоморфных алгебре L из примера 1 над полем $\mathbb{Q}$ является примитивной алгеброй Ли.

2.2 О локально нильпотентном радикале для специальных алгебр Ли

Рассмотрим понятие PI -представления алгебры Ли.

Назовем PI -представлением алгебры Ли L представление алгебры L в алгебре эндоморфизмов $\text{End}(M)^{(-)}$ модуля M над алгеброй L , для которого ассоциативная ассоциированная алгебра представления $A(L)$, порожденная образами элементов из L , является PI -алгеброй.

Обозначим через $\text{Irr}PI(L)$ пересечение аннуляторов всех неприводимых PI -представлений алгебры Ли L и саму алгебру L если их нет. Назовем идеал $\text{Irr}PI(L)$ алгебры Ли L PI -неприводимо представленным радикалом.

Если алгебра Ли имеет точное PI -представление, то она является специальной. Для PI -представлений алгебр Ли можно ввести аналог наибольшего идеала нильпотентности.

ТЕОРЕМА 10. А ([11]) Пусть алгебра Ли L имеет PI -представление в кольце эндоморфизмов векторного пространства M . Тогда

i) Все идеалы J алгебры L такие, что x_M нильпотентно для любого $x \in L$, содержатся в одном из них, например U .

ii) Образ $\bar{U}$ идеала U является локально нильпотентным в алгебре $\text{End}M$.

iii) Идеал U является множеством элементов $x \in L$ таких, что x_M принадлежит первичному радикалу P ассоциативной алгебры $A(L)$, ассоциированной с представлением алгебры L .

По аналогии с конечномерными алгебрами, назовем идеал U наибольшим идеалом локальной нильпотентности представления.

Назовем локально нильпотентным радикалом $N(L)$ специальной алгебры Ли L над полем F пересечение наибольших идеалов локальной нильпотентности всех PI -представлений алгебры Ли L над полем F и саму алгебру Ли, если их нет.

В работе [11] показано, что радикал $N(L)$ специальной алгебры Ли L является локально нильпотентным идеалом.

Известно, что справедливо включение $N(L) \subset \text{Irr}PI(L)$ для специальных алгебр Ли над полем F характеристики нуль. Этот результат обобщает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 11. Для произвольной специальной алгебры Ли L над полем F характеристики нуль справедливо равенство $N(L) = \text{Irr}PI(L)$.

Скажем, что алгебра Ли – редуктивная, если она является произведением полупростой и коммутативной подалгебр.

Для доказательства теоремы нам потребуются следующие леммы.

ЛЕММА 2. Пусть Δ – тело характеристики нуль, удовлетворяющее полиномиальному тождеству. Рассмотрим алгебру матриц $L = \Delta_n^{(-)}$ как алгебру Ли по отношению к операции коммутирования над простым подполем $\mathbb{Q}$. Рассмотрим лиевский разрешимый идеал I алгебры L . Тогда множество I лежит в центре алгебры матриц Δ_n .

Доказательство. Обозначим через Z центр тела Δ . Согласно теореме Капланского, тело Δ является конечномерным над центром Z .

Рассмотрим представление Δ_n над Δ^n (пространство векторов-столбцов) с помощью левых умножений.

Хорошо известно, что такое представление матричной алгебры над телом – неприводимо.

Алгебра L имеет точное конечномерное над Z представление. Следовательно, $N(L) = 0$.

Согласно [2, предложение 5 е), стр. 71], алгебра Ли L – редуктивна.

Редуктивная алгебра L является произведением полупростой алгебры S и центра Z .

Полупростая конечномерная алгебра Ли S над полем характеристики нуль раскладывается в произведение простых подалгебр $\sigma_i, i = 1, \dots, k$.

Подалгебры σ_i являются идеалами алгебры Ли L . Любой идеал алгебры L является суммой нескольких идеалов σ_i и, возможно, $\mathbb{Q}$ -подпространства центра Z .

Множество ZI является разрешимым лиевским идеалом алгебры Ли L над Z . Оно не может содержать простых подалгебр σ_i .

Следовательно, $ZI \subset Z$ и $I \subset Z$.

ЛЕММА 3. Пусть алгебра Ли L над полем F характеристики нуль имеет неприводимое PI -представление в алгебре эндоморфизмов $End(M)^{(-)}$ векторного пространства M над F . Пусть I – некоторый локально разрешимый идеал L . Тогда образ $\bar{I}$ идеала I в алгебре $End(M)^{(-)}$ лежит в центре алгебры $\bar{L}$.

Доказательство. Пусть M -неприводимый $A(L)$ -модуль, алгебра $A(L)$ порождена как ассоциативная алгебра гомоморфным образом $\bar{L}$ алгебры Ли L .

Алгебра $A(L)$ является примитивной PI -алгеброй.

Согласно теореме Капланского [14], она простая, конечномерная над своим центром Z изоморфна алгебре матриц над телом $A(L) \simeq \Delta_m$, $m \in \mathbb{N}$.

Пусть $\bar{I}$ – гомоморфный образ идеала I в алгебре $A(L)$. В конечномерной алгебре локально разрешимый идеал является разрешимым.

Согласно лемме 2, идеал $\bar{I}$ лежит в центре Z алгебры $A(L)$.

Следовательно, идеал $\bar{I}$ лежит в центре алгебры $\bar{L}$.

Доказательство теоремы. Локально нильпотентный идеал $N(L)$ специальной алгебры Ли L является локально нильпотентным [11]. Заметим, что локально нильпотентный идеал является локально разрешимым.

Пусть специальная алгебра Ли L имеет неприводимое PI -представление в алгебре эндоморфизмов $\varphi : L \rightarrow End(M)^{(-)}$ векторного пространства M над полем F .

Тогда, согласно лемме 3, $\varphi(N(L)) \subseteq Z(\varphi(L))$.

Алгебра Ли $\varphi(L)$ порождает ассоциативную алгебру $A(L)$. Ее центр $Z(\varphi(L))$ лежит в центре неприводимого L -модуля M .

Согласно лемме Шура [14], центроид неприводимого модуля является телом. Вложение в тело можно было также вывести из теоремы Капланского.

Следовательно ненулевые элементы $\varphi(N(L))$ не лежат в наибольшем идеале локальной нильпотентности модуля M . Получили $\varphi(N(L)) = 0$.

Из произвольности неприводимого PI -представления M следует включение

$$N(L) \subseteq IrrPI(L).$$

Снова рассмотрим неприводимое PI -представление алгебры Ли L в алгебре эндоморфизмов $\varphi : L \rightarrow End(M)^{(-)}$ векторного пространства M над полем F .

Согласно пункту iii теорема 10 А наибольший идеал U локальной нильпотентности представления является пересечением $\bar{L} \cap P(A(L))$.

Первичный радикал ассоциативной алгебры $A(L)$ является локально нильпотентным идеалом алгебры $A(L)$ и, следовательно, содержится в радикале Джекобсона $P(A(L)) \subset J(P(L))$.

Алгебра $A(L)$ является примитивной ассоциативной алгеброй, радикал Джекобсона которой равен нулю.

Следовательно, U содержится в ядре неприводимого PI -представления M алгебры L .

Тогда в нем же будет содержаться локально нильпотентный радикал $N(L)$ алгебры Ли L .

Учитывая произвольность неприводимого PI -представления получаем включение

$$IrrPI(L) \subseteq N(L),$$

которое завершает доказательство теоремы.

Также как и для специальных алгебр Ли, назовем локально нильпотентным радикалом $N(L)$ алгебры Ли L над полем F пересечение наибольших идеалов локальной нильпотентности всех PI -представлений алгебры Ли L над полем F и саму алгебру Ли, если их нет.

Приведем пример алгебры Ли, локально нильпотентный радикал которой не является ни локально нильпотентным, ни локально разрешимым. Он основан на примере Ф.Кубо [1], но используется для других целей.

Пример 7. Пусть L – множество линейных отображений конечного ранга бесконечномерного векторного пространства V над полем F в себя.

Обозначим через S множество отображений из L со следом нуль. Рассмотрим L и S как алгебры Ли по отношению к операции коммутирования.

Легко проверить, что $L^2 = S$, S простая алгебра Ли.

Все нетривиальные идеалы L – это векторные пространства, содержащие S .

Алгебра Ли S не является специальной и, следовательно, содержится в аннуляторах неприводимых PI -представлений.

Алгебра $H = L/S$ является абелевой. Радикал Джекобсона абелевой алгебры Ли равен нулю. Следовательно, $J(H) = 0$ и $IrrPI(H) = 0$.

Установили равенства $J(L) = S$, $IrrPI(L) = S$.

Фактор-алгебра $H = L/S$ – абелева и, следовательно, специальная. Согласно теореме 11, локально нильпотентный радикал $N(H)$ алгебры H равен нулю. Получили $N(L) = S$.

Алгебра S не является ни локально разрешимой, ни локально нильпотентной.

Следовательно, радикал Джекобсона $J(L)$, $IrrPI(L)$ и локально нильпотентный радикал $N(L)$ произвольной алгебры Ли L могут не быть ни локально разрешимыми, ни локально нильпотентными.

3. Заключение

Радикалы играют важную роль при построении структурной теории специальных алгебр Ли.

Мы доказали аналог теоремы Ф. Кубо для почти локально разрешимых алгебр Ли с нулевым радикалом Джекобсона, рассмотрели некоторые свойства и примеры примитивных алгебр Ли, а так же радикалы примитивных алгебр Ли.

К сожалению, есть вопросы, ответы на которые не известны авторам статьи:

- 1) существует ли неабелева алгебра Ли, которая не является примитивной?
- 2) всегда ли полупростая алгебра Ли (первичный радикал равен нулю) является примитивной?

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kubo, F. Infinite-dimensional Lie algebras with null Jacobson radical / F. Kubo // Bull. Kyushu Inst. Technol. Math. Nat. Sci. — 1991. — V. 38. — P. 23–30.
2. Бурбаки, Н. Группы и алгебры Ли (главы I-III) / Н. Бурбаки. — М.: Мир, 1976. — 496 с.
3. Marshall, E. I. The Frattini subalgebras of a Lie algebra / E. I. Marshall // J. London Math. Soc. — 1967. — V. 42. — P. 416–422.
4. Kamiya, N. On the Jacobson radicals of infinite-dimensional Lie algebras/ N.Kamiya // Hiroshima Math. J. — 1979. — V. 9. — P. 37–40.
5. Латышев, В. Н. Об алгебрах Ли с тождественными соотношениями / В. Н. Латышев// Сиб. мат. журнал. — 1963. — Т. 4. — № 4. — С. 821–829.

6. Пихтильков, С. А. О специальных алгебрах Ли / С. А. Пихтильков // Успехи матем. наук. — 1981. — Т. 36. — № 6. — С. 225–226.
7. Биллиг Ю. В. О гомоморфном образе специальной алгебры Ли / Ю. В. Биллиг // Матем. сборник. — 1988. — Т. 136. — № 3. — С. 320–323.
8. Джекобсон, Н. Алгебры Ли / Н. Джекобсон. — М.: Мир, 1964.
9. Бахтурин, Ю. А. Тожества в алгебрах Ли // Ю. А. Бахтурин. — М.: Наука, 1985. — 447 с.
10. Терехова, Ю. А. О теореме Леви для специальных алгебр Ли / Ю. А. Терехова // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп: Межвуз. сб. науч. тр. — Тула: Изд-во ТГПИ им. Л. Н. Толстого, 1994. — С. 97–103.
11. Пихтильков, С. А. О локально нильпотентном радикале специальных алгебр Ли / С. А. Пихтильков // Фундаментальная и прикладная математика. — 2002. — Т. 8. — Вып. 3. — С. 769–782.
12. Towers, D. A. Maximal subalgebras and chief factors of Lie algebras / D. A. Towers // J. Pure Appl. Algebra 220. — 2016. — P. 482–493.
13. Бейдар, К. И. Первичный радикал специальных алгебр Ли / К. И. Бейдар, С. А. Пихтильков // Фундаментальная и прикладная математика. — 2000. — Т. 6. — Вып. 3. — С. 643–648.
14. Херстейн, И. Некоммутативные кольца / И. Херстейн. — М.: Мир, 1972. — 191 с.
15. Диксмье, Ж. Универсальные обертывающие алгебры / Ж. Диксмье. — М.: Мир, 1978.
16. Пихтильков, С. А. Примитивность свободной ассоциативной алгебры с конечным числом образующих / С. А. Пихтильков // УМН. — 1974. — № 1. — С. 183–184.

REFERENCES

1. Kubo, F. 1991, “Infinite-dimensional Lie algebras with null Jacobson radical“, *Bull. Kyushu Inst. Technol. Math. Nat. Sci.*, v. 38. p. 23–30.
2. Burbaki, N. 1976, “Gruppy i algebrы Li (glavy I–III) [Lie groups and algebras (chapters I–III)]“, Mir, Moscow, 496 pp.
3. Marshall, E. I. 1967, “The Frattini subalgebras of a Lie algebra“, *J. London Math. Soc.*, v. 42. p. 416–422.
4. Kamiya, N. 1979, “On the Jacobson radicals of infinite-dimensional Lie algebras“, *Hiroshima Math. J.*, v. 9. p. 37–40.
5. Latyshev, V. N. 1963, “On Lie Algebras with Identities ratios“, *Sib. mat. magazine*, t. 4. № 4. p. 821–829.
6. Pikhtil'kov, S. A. 1981, “On special Lie algebras“, *Uspehi Mat. nauk*, t. 36. № 6. p. 225–226.
7. Billig Yu. V. 1988, “On the homomorphic image of a special Lie algebras“, *Mat. sbornik*, t. 136. № 3. p. 320–323.
8. Jacobson, N. 1964, “Lie Algebras“, Mir, Moscow.

9. Bakhturin, Yu. A. 1985, "Tozhdestva v algebrakh Li [Identities in Lie algebras]", Nauka, Moscow, 447 pp.
10. Terekhova, Yu. A. 1994, "On the Levi theorem for special Lie algebras", *Algorithmic Problems group and semigroup theories. Interuniversity collection of scientific works*, Tula: Izd-vo TGPI im. L. N. Tolstogo, p. 97–103.
11. Pikhtilov, S. A. 2002, "On a locally nilpotent radical special Lie algebras", *Fundamental and Applied Mathematics*, t. 8. v. 3. p. 769–782.
12. Towers, D. A. 2016, "Maximal subalgebras and chief factors of Lie algebras", *J. Pure Appl. Algebra* 220., p. 482–493.
13. Beidar, K. I., Pikhtilov, S. A. 2000, "Primary radical special Lie algebras", *Fundamental and applied mathematics*, t. 6. v. 3. p. 643–648.
14. Herstein, I., 1972, "Nekommutativnye kol'ca [Noncommutative rings]", Mir, Moscow. 191 pp.
15. Dixmier, J. 1978, "Universal'nyye obertyvayushchiye algebrы [Universal enveloping algebras]", Mir, Moscow.
16. Pikhtilov, S. A. 1974, "Primitive free associative algebra with a finite number of generators", УМН, № 1. p. 183–184.

Получено 18.03.2017 г.

Принято в печать 12.07.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 2.

УДК 517.9

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-298-310

Дифференцирование функций кватернионной переменной

Н. С. Полякова

Полякова Надия Салихжановна — кандидат физико-математических наук, доцент, Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана (г. Москва).

e-mail: polyakova.nadiya@mail.ru

Аннотация

В данной работе рассматривается определение дифференцируемости и регулярности по Фютеру [1–2] и примеры регулярных по Фютеру функций, приводится и определение S -регулярности и S -производной или производной Куллена [3], на основе которой строится новая теория регулярных функций в [4], которая уже включает полиномы и сходящиеся ряды гиперкомплексной переменной как дифференцируемые функции. Затем предлагается новое определение дифференцируемости, имеющее классический вид, но со специфической сходимостью, которое позволяет доказать теоремы о дифференцируемости суммы и произведения дифференцируемых функций, о дифференцируемости “частного” дифференцируемых функций. Далее выводится производная степени и доказывается дифференцируемость полиномов и степенных рядов, что позволяет строить обобщения элементарных функций для кватернионных аргументов. Приводится пример, показывающий, что без специфической сходимости приведенное определение дифференцируемости теряет смысл. С помощью степенных рядов задаются функции, которые являются решениями дифференциальных уравнений с постоянными кватернионными коэффициентами. Рассматривается задача отыскания корней квадратного уравнения с кватернионными коэффициентами, которая возникает при решении дифференциальных уравнений

Ключевые слова: кватернион, мнимые единицы, тригонометрическая форма, аргумент кватерниона, модуль кватерниона, векторная часть кватерниона, вещественно дифференцируемая функция, S -регулярная функция, дифференциальное уравнение.

Библиография: 17 названий.

Для цитирования:

Н. С. Полякова. Дифференцирование функций кватернионной переменной // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 2, с. 298–310.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 2.

UDC 517.9

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-298-310

Differentiation of functions of quaternionic variable

N. S. Polyakova

Poliakova Nadiia Salikhzhanovna — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, Bauman Moscow State Technical University (Moscow).

e-mail: polyakova.nadiya@mail.ru

Abstract

In this paper it is considered the definition of differentiability and regularity by Fueter [1, 2] and examples of regular function by Fueter, and the definition of C-regularity and C-derivative or Cullen derivative, on the basis of which a new theory of regular functions, which already includes polynomials and converging series of hypercomplex variable as differentiable and regular functions. Then a new definition of differentiability is proposed. It has a classical form, but specific convergence, which allows to prove theorems about differentiability of the sum and product of differentiable functions, differentiability of the “quotient” of differentiable functions. Further, it is deduced the derivative of power and is proved differentiability of polynomials and power series that allows to construct generalization of elementary functions for quaternionic argument. An example is given to show that without specific convergence the given definition of differentiability loses its meaning. With the help of power series functions are given, which are solutions of differential equations with constant quaternion coefficients. It is considered the problem of finding the roots of a square equation that arises in solving differential equations.

Keywords: quaternion, imaginary units, trigonometric form, the argument of the quaternion, the module of the quaternion, the vector part of the quaternion, a real differential function, C-regular function, differential equation.

Bibliography: 17 titles.

For citation:

N. S. Polyakova, 2019, "Differentiation of functions of quaternionic variable", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 2, pp. 298–310.

1. Введение

Кватернионы имеют большие преимущества в задачах вращения твердого тела [5–7] и могут быть использованы в математической физике [8–13], поэтому задача построения анализа кватернионных функций является актуальной.

Кватернионы – это четырехкомпонентные числа, то есть числа, которые задаются с помощью четырех действительных чисел и, значит, могут быть интерпретированы как четырехмерные векторы $q = (q_0, q_1, q_2, q_3)$, обычно записываются в виде:

$$q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k \quad (1)$$

при этом, q_0 называется действительной или скалярной частью и обозначается $Re q$, вектор $\vec{a} = q_1i + q_2j + q_3k$ мнимой или векторной частью кватерниона q и обозначается $\vec{v}(q)$, то есть кватернион может быть записан в виде:

$$q = Re(q) + \vec{v}(q), \quad (2)$$

а векторы i, j, k называются мнимыми единицами, так как их квадраты в смысле кватернионного умножения равны -1. Учитывая применение кватернионов в теоретической механике в записи оператора поворота, мы будем рассматривать их в тригонометрической форме:

$$q = |q| \cdot (\cos \varphi + \vec{a}_0 \sin \varphi), \quad (3)$$

где $|q| = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$ – длина кватерниона как четырехмерного вектора, $\varphi = \arg q$ – аргумент кватерниона q ,

$$\varphi = \arccos \frac{q_0}{|q|}, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi, \quad (4)$$

$\vec{a}_0$ – вектор единичной длины в трехмерном пространстве – направляющий вектор векторной части кватерниона, то есть, $|q| \cdot \cos \varphi = q_0 = Re q$ – действительная (скалярная) часть кватерниона, $|q| \cdot \vec{a}_0 \cdot \sin \varphi = \vec{v}(q)$ – векторная часть q .

Кватернионы можно складывать и умножать на действительные числа как обычные четырехмерные векторы, но, кроме этого, их можно умножать и “делить” как числа. Умножение кватернионов можно определить, задав результаты умножения мнимых единиц между собой и результат умножения на скалярную единицу, а затем распространить на произвольные кватернионы по дистрибутивности (см., например, [14-15]). При использовании формы записи для $\lambda = Re\lambda + \bar{v}(\lambda)$, $\mu = Re\mu + \bar{v}(\mu)$ их произведение может быть записано в виде:

$$\lambda \circ \mu = Re\lambda \cdot Re\mu - (\bar{v}(\lambda), \bar{v}(\mu)) + Re\lambda \cdot \bar{v}(\mu) + Re\mu \cdot \bar{v}(\lambda) + \bar{v}(\lambda) \times \bar{v}(\mu), \quad (5)$$

где $(\bar{v}(\lambda), \bar{v}(\mu))$ – скалярное произведение векторов $\bar{v}(\lambda)$ и $\bar{v}(\mu)$, а $\bar{v}(\lambda) \times \bar{v}(\mu)$ – их векторное произведение.

Через $\tilde{\lambda}$ обозначим кватернион, сопряженный к λ , $\tilde{\lambda} = Re\lambda - \bar{v}(\lambda)$, при этом $\lambda \circ \tilde{\lambda} = |\lambda|^2$. Заметим, что, если $Re\lambda = 0$, то λ – чисто векторный кватернион и $\tilde{\lambda} = -\lambda$. Если $\bar{v}(\lambda) = 0$, то $\lambda = Re\lambda = \tilde{\lambda}$. Если $\lambda \neq 0$, то существует обратный (относительно кватернионного умножения) кватернион $\lambda^{-1} = \frac{\tilde{\lambda}}{|\lambda|^2}$, такой, что $\lambda \circ \lambda^{-1} = \lambda^{-1} \circ \lambda = 1$. Если $|\lambda| = 1$, то $\lambda^{-1} = \tilde{\lambda}$. Оператор поворота в трехмерном пространстве задается формулой $\tilde{r}' = \lambda \circ \tilde{r} \circ \lambda^{-1}$ [5, 14, 15], при этом происходит поворот вектора $\tilde{r}$ на угол $\alpha = 2 \arg \lambda$ вокруг оси с направляющим вектором $\bar{v}(\lambda)$. Так как $|\lambda|$ при этом не оказывает влияния на результат, то обычно для поворотов используются нормированные кватернионы, то есть такие, что $|\lambda| = 1$, тогда поворот записывается в виде:

$$\tilde{r}' = \lambda \circ \tilde{r} \circ \tilde{\lambda}. \quad (6)$$

Множество всех кватернионов с определенными на них операциями сложения и умножения кватернионов обозначим $\mathbf{H}$.

Сходимость во множестве кватернионов определим как сходимость в четырехмерном векторном пространстве.

Определение. Кватернион $\lambda^{(0)}$ является пределом последовательности кватернионов $\{\lambda^{(n)}\}$: $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^{(n)} = \lambda^{(0)}$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda^{(n)} - \lambda^{(0)}| = 0.$$

Это определение позволяет рассматривать степенные ряды кватернионной переменной и определить основные элементарные функции с помощью рядов.

Аналогично мы можем определить предел и непрерывность кватернионных функций кватернионной переменной.

Определение. Пусть функция $f(q)$ определена в $\mathbf{H}$ и принимает значения в $\mathbf{H}$. $\lim_{q \rightarrow q^{(0)}} f(q) = \lambda$ тогда и только тогда, когда для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, такое, что из неравенства $0 < |q - q^{(0)}| < \delta$ следует неравенство $|f(q) - \lambda| < \varepsilon$.

Определение. Кватернионная функция кватернионной переменной $f(q)$ называется непрерывной в точке $q^{(0)}$, если $\lim_{q \rightarrow q^{(0)}} f(q) = f(q^{(0)})$.

2. Регулярность по Фютеру.

Попытки построить дифференциальное исчисление функций кватернионной переменной предпринимались неоднократно. Одна из наиболее известных представлена в работах Фютера ([1]-[2]). Автором ставилась задача не просто определить производные функций кватернионной переменной и установить свойства дифференцируемых функций, но определить дифференцирование так, чтобы получить теорию голоморфных функций кватернионной переменной аналогичную теории голоморфных функций комплексной переменной.

Сначала рассматриваются кватернионные функции кватернионной переменной как вектор-функции четырех аргументов в четырехмерном пространстве, то есть как отображения четырехмерного пространства в себя.

Определение. Пусть $f = f_0(q) + if_1(q) + jf_2(q) + kf_3(q)$, где $q = q_0 + q_1\vec{i} + q_2\vec{j} + q_3\vec{k}$, f называется вещественно дифференцируемой, если существуют непрерывные частные производные компонент f_n , $n = 0, 1, 2, 3$ по переменным q_m , $m = 0, 1, 2, 3$ не менее, чем до второго порядка включительно.

Затем определяются дифференциальные операторы

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{q}} = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial f}{\partial q_0} + i \frac{\partial f}{\partial q_1} + j \frac{\partial f}{\partial q_2} + k \frac{\partial f}{\partial q_3} \right) \quad (7)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{q}} = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial f}{\partial q_0} + \frac{\partial f}{\partial q_1} i + \frac{\partial f}{\partial q_2} j + \frac{\partial f}{\partial q_3} k \right) \quad (8)$$

ныне известные как операторы Коши-Фютера и множество решений уравнения $\frac{\partial f}{\partial \bar{q}} = 0$ объявляется пространством голоморфных или регулярных функций, причем, если оператор определен по формуле (7), то леворегулярных функций, а если по формуле (8) – праворегулярных. В дальнейшем для определенности будем рассматривать леворегулярные функции. Эта теория в настоящее время очень хорошо развита и весьма успешна в воспроизведении многих важных свойств голоморфных функций. С ее дальнейшим развитием можно ознакомиться в работах В. В. Кравченко, В. Г. Кравченко и М. В. Шапиро [12–13], а также в работах ряда других авторов [8]–[11]. Недостатком этой теории является то, что тождественная функция $f(q) = q$, а, следовательно, многочлены и ряды не являются голоморфными функциями в указанном смысле.

Однако, это не значит, что таких функций, отличных от константы, нет. Проекторы $P_i(q) = q_0 + iq_1$, $P_j(q) = q_0 + jq_2$, $P_k(q) = q_0 + kq_3$, где $q = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3$ — кватернион, i, j, k — мнимые единицы, являются голоморфными по Фютеру. Ясно, что их линейная комбинация (с действительными коэффициентами) $f(q) = (a_1 + a_2 + a_3)q_0 + ia_1q_1 + ja_2q_2 + ka_3q_3$ также будет голоморфной функцией.

Рассмотрим наиболее общий вид голоморфного линейного преобразования. Пусть

$$f = f_0 + if_1 + jf_2 + kf_3,$$

где f_n ($n = 0, 1, 2, 3$) — вещественные функции вещественных переменных q_0, q_1, q_2, q_3 . Условие голоморфности по Фютеру $\frac{\partial f}{\partial \bar{q}} = 0$ для леворегулярных функций равносильно одновременному выполнению следующих четырех равенств:

$$\frac{\partial f_0}{\partial q_0} - \frac{\partial f_1}{\partial q_1} - \frac{\partial f_2}{\partial q_2} - \frac{\partial f_3}{\partial q_3} = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial f_0}{\partial q_1} + \frac{\partial f_1}{\partial q_0} + \frac{\partial f_3}{\partial q_2} - \frac{\partial f_2}{\partial q_3} = 0 \quad (10)$$

$$\frac{\partial f_0}{\partial q_2} + \frac{\partial f_2}{\partial q_0} + \frac{\partial f_1}{\partial q_3} - \frac{\partial f_3}{\partial q_1} = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\partial f_0}{\partial q_3} + \frac{\partial f_3}{\partial q_0} + \frac{\partial f_2}{\partial q_1} - \frac{\partial f_1}{\partial q_2} = 0 \quad (12)$$

Если $f(q) = A\vec{q}$, где $A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, тогда

$$f_0 = a_{00}q_0 + a_{01}q_1 + a_{02}q_2 + a_{03}q_3,$$

$$\begin{aligned} f_1 &= a_{10}q_0 + a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + a_{13}q_3, \\ f_2 &= a_{20}q_0 + a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + a_{23}q_3, \\ f_3 &= a_{30}q_0 + a_{31}q_1 + a_{32}q_2 + a_{33}q_3 \text{ и из (9) – (12) получаем:} \end{aligned}$$

$$a_{00} = a_{11} + a_{22} + a_{33}, \quad (13)$$

$$a_{01} = -a_{10} - a_{32} + a_{23}, \quad (14)$$

$$a_{02} = -a_{20} - a_{13} + a_{31}, \quad (15)$$

$$a_{03} = -a_{30} - a_{21} + a_{12}. \quad (16)$$

Пример. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, значит

$$f(q) = 3q_0 - q_1 - q_2 - q_3 + i(q_0 + q_1 + q_2 + q_3) + j(q_0 + q_1 + q_2 + q_3) + k(q_0 + q_1 + q_2 + q_3).$$

Заметим, что умножение функции на нескаларную константу может вывести ее из множества голоморфных функций. Например, пусть $f(q) = 3q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3$, тогда

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ очевидно удовлетворяет условиям (13)-(16), но}$$

$$\varphi(q) = i \circ f(q) = -q_1 + i3q_0 - jq_3 + kq_2, \text{ этой функции соответствует матрица}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ которая не удовлетворяет условию (14). Однако, если рассмотреть}$$

$f(q) \circ i$, то голоморфность не нарушится, и это не случайно.

Докажем, что если f — левоголоморфная функция, то $g = f \circ i$ — тоже левоголоморфная. Действительно, если $f = f_0 + f_1i + f_2j + f_3k$, то $g = -f_1 + f_0i + f_3j - f_2k$, отсюда $g_0 = -f_1$, $g_1 = f_0$, $g_2 = f_3$, $g_3 = -f_2$, тогда $\frac{\partial g_0}{\partial q_0} - \frac{\partial g_1}{\partial q_1} - \frac{\partial g_2}{\partial q_2} - \frac{\partial g_3}{\partial q_3} = -\frac{\partial f_1}{\partial q_0} - \frac{\partial f_0}{\partial q_1} - \frac{\partial f_3}{\partial q_2} + \frac{\partial f_2}{\partial q_3} = 0$ в силу (10), то есть условие (9) для g выполнено.

Далее, $\frac{\partial g_0}{\partial q_1} + \frac{\partial g_1}{\partial q_0} + \frac{\partial g_3}{\partial q_2} - \frac{\partial g_2}{\partial q_3} = -\frac{\partial f_1}{\partial q_1} + \frac{\partial f_0}{\partial q_0} - \frac{\partial f_2}{\partial q_2} - \frac{\partial f_3}{\partial q_3} = 0$ по условию (9) для f , значит для g выполнено условие (10). Так как $\frac{\partial g_0}{\partial q_2} + \frac{\partial g_2}{\partial q_0} + \frac{\partial g_1}{\partial q_3} - \frac{\partial g_3}{\partial q_1} = -\frac{\partial f_1}{\partial q_2} + \frac{\partial f_3}{\partial q_0} + \frac{\partial f_0}{\partial q_3} + \frac{\partial f_2}{\partial q_1} = 0$ в силу (12), то для g выполнено условие (11). Наконец, $\frac{\partial g_0}{\partial q_3} + \frac{\partial g_3}{\partial q_0} + \frac{\partial g_2}{\partial q_1} - \frac{\partial g_1}{\partial q_2} = -\frac{\partial f_1}{\partial q_3} - \frac{\partial f_2}{\partial q_0} + \frac{\partial f_3}{\partial q_1} - \frac{\partial f_0}{\partial q_2} = 0$ по условию (11) для f , следовательно для g выполнено условие (12). Так как условия (9)-(12) для g выполнены, значит g голоморфна.

Докажем, что если f — голоморфная функция, то $g = f \circ j$ — тоже голоморфная.

Действительно, если $f = f_0 + f_1i + f_2j + f_3k$, то $g = -f_2 - f_3i + f_0j + f_1k$, отсюда $g_0 = -f_2$, $g_1 = -f_3$, $g_2 = f_0$, $g_3 = f_1$, тогда

$$\frac{\partial g_0}{\partial q_0} - \frac{\partial g_1}{\partial q_1} - \frac{\partial g_2}{\partial q_2} - \frac{\partial g_3}{\partial q_3} = -\frac{\partial f_2}{\partial q_0} + \frac{\partial f_3}{\partial q_1} - \frac{\partial f_0}{\partial q_2} - \frac{\partial f_1}{\partial q_3} = 0$$

в силу (11), то есть условие (9) для g

выполнено.

Далее, $\frac{\partial g_0}{\partial q_1} + \frac{\partial g_1}{\partial q_0} + \frac{\partial g_3}{\partial q_2} - \frac{\partial g_2}{\partial q_3} = -\frac{\partial f_2}{\partial q_1} - \frac{\partial f_3}{\partial q_0} + \frac{\partial f_1}{\partial q_2} - \frac{\partial f_0}{\partial q_3} = 0$ по условию (12) для f , значит для g выполнено условие (10).

Так как $\frac{\partial g_0}{\partial q_2} + \frac{\partial g_2}{\partial q_0} + \frac{\partial g_1}{\partial q_3} - \frac{\partial g_3}{\partial q_1} = -\frac{\partial f_2}{\partial q_2} + \frac{\partial f_0}{\partial q_0} - \frac{\partial f_3}{\partial q_3} - \frac{\partial f_1}{\partial q_1} = 0$ в силу (9), то для g выполнено условие (11).

Наконец, $\frac{\partial g_0}{\partial q_3} + \frac{\partial g_3}{\partial q_0} + \frac{\partial g_2}{\partial q_1} - \frac{\partial g_1}{\partial q_2} = -\frac{\partial f_2}{\partial q_3} + \frac{\partial f_1}{\partial q_0} + \frac{\partial f_0}{\partial q_1} + \frac{\partial f_3}{\partial q_2} = 0$ по условию (10) для f , следовательно для g выполнено условие (12). Так как условия (9)-(12) для g выполнены, значит g голоморфна.

Аналогично доказывается, что если f — голоморфная функция, то $g = f \circ k$ — тоже голоморфная. Таким образом, линейная комбинация леворегулярных функций с кватернионными константами при умножении справа на эти константы остается леворегулярной.

Еще один простой пример регулярной функции дает следующая конструкция. Пусть

$$F_1(z) = u_1(x, y) + iv_1(x, y),$$

$$F_2(z) = u_2(x, y) + iv_2(x, y),$$

$$F_3(z) = u_3(x, y) + iv_3(x, y) -$$

голоморфные функции комплексной переменной.

Положим $f_0 = u_1(q_0, q_1) + u_2(q_0, q_2) + u_3(q_0, q_3)$, $f_1 = v_1(q_0, q_1)$, $f_2 = v_2(q_0, q_2)$, $f_3 = v_3(q_0, q_3)$, тогда условие (9) равносильно равенству $\frac{\partial u_1}{\partial q_0} + \frac{\partial u_2}{\partial q_0} + \frac{\partial u_3}{\partial q_0} - \frac{\partial v_1}{\partial q_1} - \frac{\partial v_2}{\partial q_2} - \frac{\partial v_3}{\partial q_3} = 0$, которое справедливо в силу условий Коши-Римана. Условие (10) равносильно равенству $\frac{\partial u_1}{\partial q_1} + \frac{\partial u_2}{\partial q_1} + \frac{\partial u_3}{\partial q_1} + \frac{\partial v_1}{\partial q_0} - \frac{\partial v_2}{\partial q_3} + \frac{\partial v_3}{\partial q_2} = 0$, которое верно по причине того, что для u_1 , v_1 выполняются условия Коши-Римана, u_2 , u_3 не зависят от q_1 , функция v_2 не зависит от q_3 , а v_3 не зависит от q_2 . Выполнение условий (11)-(12) проверяется аналогично, следовательно $f(q) = f_0 + f_1i + f_2j + f_3k$ — голоморфная функция кватернионной переменной.

3. Дифференцирование по Куллину.

Несколько иной способ дифференцирования и определения голоморфных функций предлагается в работе G. Gentili и D. C. Struppa [4].

Для всякого не скалярного кватерниона q рассматривается двумерное линейное подпространство $L_{\bar{v}_0(q)}$, являющееся линейной оболочкой вещественной оси и вектора $\bar{v}_0(q)$ — единичного направляющего вектора векторной части кватерниона q , который представляется в виде: $q = x + y \cdot \bar{v}_0(q)$ (очевидно, $x = q_0 = |q| \cos \varphi$, $y = |q| \sin \varphi$, где $\varphi = \arg q$) и функция $f(q)$ называется С-регулярной, если она вещественно дифференцируема и удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \bar{v}_0(q) \frac{\partial}{\partial y} \right) f(x + y \cdot \bar{v}_0(q)) = 0 \quad (17)$$

для всех q из области определения f , при этом дается следующее определение производной по направлению $\bar{v}_0(q) = \bar{e}$ [4] со ссылкой на Куллину [3].

Определение. Пусть Ω — область в $\mathbf{H}$, на которой определена вещественно дифференцируемая функция f . Для любого кватерниона $q \in \Omega$, $q = x + y\bar{e}$, где $x = q_0 = \text{Re} q$, $\bar{e} = \bar{v}_0(q)$ — единичный направляющий вектор векторной части q , производная f по направлению $\bar{e}$ в точке q задается формулой

$$\partial_{\bar{e}} f(x + y\bar{e}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \bar{e} \frac{\partial}{\partial y} \right) f(x + y\bar{e}). \quad (18)$$

Если при этом f С-регулярна, то ее производная в точке q может быть вычислена по формуле

$$\partial!(f)(q) = \begin{cases} \partial_{\bar{e}}(f)(q), & \text{если } q = x + y\bar{e} \text{ при } y \neq 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x), & \text{если } q = x \text{ (} y = 0 \text{)} \end{cases} \quad (19)$$

Данное определение замечательно тем, что все степенные функции и ряды с центром в нуле вида $\sum_{n=0}^{\infty} q^n \circ \lambda_n$ будут С-регулярны, их производные будут такими же как и в случае комплексной переменной. Это значит, что мы можем определить все элементарные функции в

области кватернионов и что все голоморфные функции комплексной переменной переносятся в область кватернионов и при этом остаются голоморфными, то есть S -регулярными.

Для S -регулярных функций доказываются также аналоги теорем Коши, Морера, Шварца, а также Миттаг-Лефлера [16]

Однако, этот способ дифференцирования тоже имеет ряд проблем. Ясно, что, если $q \in L_{\bar{v}_0(q)}$ и $f(q) \in L_{\bar{v}_0(q)}$, то регулярность $f(q)$ — это регулярность функции комплексного переменного. Но, если $f(q) \notin L_{\bar{v}_0(q)}$, то самые простые функции оказываются нерегулярными, что показывает следующий пример.

Пусть $f(q) = \bar{i} \circ q$, $q = x + y\bar{e}$, $\bar{i}$ — мнимая единица, $\bar{e} = \bar{v}_0(q)$ — единичный вектор в направлении векторной части q . Для проверки регулярности по формуле (17) необходимо вычислить $\left(\frac{\partial}{\partial x} + \bar{e} \frac{\partial}{\partial y}\right)(\bar{i}x + \bar{i} \circ \bar{e}y) = \bar{i} + \bar{e} \circ \bar{i} \circ \bar{e} \neq 0$, если $\bar{i} \neq \bar{e}$. Следовательно, $f(q)$ не является регулярной.

Рассмотренное определение дифференцируемости имеет то важное достоинство, что включает в себя все регулярные функции комплексного переменного, но, все-таки, стоит заметить, дифференцирование идет далеко не по всем направлениям, выходящим из данной точки, а только по тем, у которых векторные части коллинеарны векторной части рассматриваемой точки.

4. Еще один способ дифференцирования

Далее предлагается еще один вариант дифференцирования кватернионных функций кватернионной переменной.

Определение. Пусть $f(q)$ определена на открытом множестве Ω в $\mathbf{H}$. Назовем $f(q)$ элементарно дифференцируемой, если существует $\lim_{(|h| \rightarrow 0) \& (\arg h \rightarrow 0)} (f(q+h) - f(q)) \circ h^{-1}$, который мы и назовем производной $f(q)$ и будем обозначать, как обычно $f'(q)$.

Здесь производная тоже берется не по всем направлениям, а только по тем, которые близки к действительной оси. Действительно, так как $\arg(q) = \arccos\left(\frac{q_0}{|q|}\right)$, но при этом $|q| \rightarrow 0$, то это означает, что $|\bar{v}(q)| \rightarrow 0$ быстрее, чем q_0 , то есть $\frac{|\bar{v}(q)|}{q_0} \rightarrow 0$.

Если не требовать, чтобы $\arg h \rightarrow 0$, то уже для $f(q) = q^2 = q \circ q$ получится $((q+h)^2 - q^2) \circ h^{-1} = q \circ h \circ h^{-1} + h \circ q \circ h^{-1} + h \circ h \circ h^{-1} = q + h \circ q \circ h^{-1} + h$ и при $h \rightarrow 0$ слагаемое $h \circ q \circ h^{-1}$ не имеет предела (если $\bar{v}(q)$ и $\bar{v}(h)$ не коллинеарны), так как это поворот кватерниона q на угол $2 \arg h$ и результат не зависит от $|h|$ [5,14,15].

Из определения получаем следующие теоремы.

Теорема 1. Если функции $f(q)$ и $g(q)$ элементарно дифференцируемы, то для любых кватернионов α и β функция $\alpha \circ f(q) + \beta \circ g(q)$ будет также элементарно дифференцируема и

$$(\alpha \circ f(q) + \beta \circ g(q))' = \alpha \circ f'(q) + \beta \circ g'(q).$$

Теорема 2. Если функции $f(q)$ и $g(q)$ элементарно дифференцируемы, то функция $p(q) = f(q) \circ g(q)$ также элементарно дифференцируема и

$$(f(q) \circ g(q))' = f(q) \circ g'(q) + f'(q) \circ g(q).$$

Доказательство. Рассмотрим

$$\begin{aligned} (p(q+h) - p(q)) \circ h^{-1} &= (f(q+h) \circ g(q+h) - f(q) \circ g(q)) \circ h^{-1} = \\ &= f(q+h) \circ (g(q+h) - g(q)) \circ h^{-1} + (f(q+h) - f(q)) \circ h^{-1} \circ (h \circ g(q) \circ h^{-1}). \end{aligned}$$

Так как $f(q)$ дифференцируема, то существует $\lim_{(|h| \rightarrow 0) \& (\arg h \rightarrow 0)} f(q+h) = f(q)$. Выражение $h \circ g(q) \circ h^{-1}$ — это поворот кватерниона $g(q)$ вокруг оси с направляющим вектором $\bar{v}(h)$ на угол $2 \cdot \arg h$, но $\arg h \rightarrow 0$, следовательно $\lim_{(|h| \rightarrow 0) \& (\arg h \rightarrow 0)} h \circ g(q) \circ h^{-1} = g(q)$, отсюда $p'(q) = \lim_{(|h| \rightarrow 0) \& (\arg h \rightarrow 0)} (p(q+h) - p(q)) \circ h^{-1} = f(q) \circ g'(q) + f'(q) \circ g(q)$, что и требовалось доказать.

Терема 3. Пусть $g(q) \neq 0$ и $g(q)$ — элементарно дифференцируемая функция. Тогда $g^{-1}(q)$ также элементарно дифференцируема и $(g^{-1}(q))' = -g^{-1}(q) \circ g'(q) \circ g^{-1}(q)$.

Доказательство. Так как $g^{-1}(q) = \frac{\tilde{g}(q)}{|g(q)|^2} = \frac{\tilde{g}(q)}{\tilde{g}(q) \circ g(q)}$, то

$$(g^{-1}(q+h) - g^{-1}(q)) \circ h^{-1} = \left(\frac{\tilde{g}(q+h)}{\tilde{g}(q+h) \circ g(q+h)} - \frac{\tilde{g}(q)}{\tilde{g}(q) \circ g(q)} \right) \circ h^{-1}.$$

Далее, пользуясь тем, что $\tilde{g}(q) \circ g(q) = g(q) \circ \tilde{g}(q)$ — действительное число, получим

$$(g^{-1}(q+h) - g^{-1}(q)) \circ h^{-1} = \frac{\tilde{g}(q+h) \circ g(q) \circ \tilde{g}(q) - \tilde{g}(q+h) \circ g(q+h) \circ \tilde{g}(q)}{\tilde{g}(q+h) \circ g(q+h) \circ g(q) \circ \tilde{g}(q)} \circ h^{-1}$$

Теперь, используя дистрибутивность и определение обратного кватерниона, выведем

$$\begin{aligned} (g^{-1}(q+h) - g^{-1}(q)) \circ h^{-1} &= \frac{\tilde{g}(q+h) \circ (g(q) - g(q+h)) \circ \tilde{g}(q)}{\tilde{g}(q+h) \circ g(q+h) \circ g(q) \circ \tilde{g}(q)} \circ h^{-1} = \\ &= (g(q+h))^{-1} \circ (-(g(q+h) - g(q)) \circ h^{-1}) \circ h \circ (g(q))^{-1} \circ h^{-1}, \end{aligned}$$

отсюда

$$\begin{aligned} (g^{-1}(q))' &= \lim_{(|h| \rightarrow 0) \& (\arg h \rightarrow 0)} ((g(q+h))^{-1} \circ (-(g(q+h) - g(q)) \circ h^{-1}) \circ (h \circ (g(q))^{-1} \circ h^{-1})) = \\ &= -g^{-1}(q) \circ g'(q) \circ g^{-1}(q) \end{aligned}$$

Что и требовалось доказать.

Следствие. Если функции $f(q)$ и $g(q)$ элементарно дифференцируемы и $g(q) \neq 0$, то функция $f(q) \circ (g(q))^{-1}$ элементарно дифференцируема и ее производная $(f(q) \circ (g(q))^{-1})' = -f(q) \circ (g(q))^{-1} \circ g'(q) \circ (g(q))^{-1} + f'(q) \circ (g(q))^{-1}$.

Примеры. Пусть $f(q) = q$, тогда $f'(q) = \lim_{(|h| \rightarrow 0) \& (\arg h \rightarrow 0)} (q+h-q) \circ h^{-1} = 1$.

Утверждение. Производная $(q^n)' = nq^{n-1}$.

Доказательство. Докажем это по индукции. Сначала для $n=2$. По теореме о дифференцировании произведения $(q^2)' = (q \circ q)' = q \circ 1 + 1 \circ q = q + q = 2q$. Теперь, пусть доказано, что $(q^{n-1})' = (n-1)q^{n-2}$, тогда $(q^n)' = (q^{n-1} \circ q)' = (n-1)q^{n-2} \circ q + q^{n-1} \circ 1 = nq^{n-1}$, что и требовалось доказать.

Следствие. Многочлены кватернионной переменной элементарно дифференцируемы.

Заметим, что, если $f(q)$ дифференцируема в окрестности некоторой точки, то она дифференцируема по любой кривой, входящей в эту точку по касательной, параллельной вещественной координате, а, следовательно, и по прямой, параллельной вещественной координате, при этом $f'(q) = \frac{\partial f(q)}{\partial q_0} = \frac{\partial f_0}{\partial q_0} + \frac{\partial f_1}{\partial q_0}i + \frac{\partial f_2}{\partial q_0}j + \frac{\partial f_3}{\partial q_0}k$, где $f = f_0 + if_1 + jf_2 + kf_3$. Это дает возможность восстановить $f(q)$ по ее производной на отрезке параллельном вещественной оси с помощью обычного определенного интеграла с переменным верхним пределом, если известно значение этой функции в какой-либо точке этого отрезка. Пусть q^* и q два кватерниона в области, в которой $f(q)$ дифференцируема и $\bar{v}(q) = \bar{v}(q^*) = iq_1 + jq_2 + kq_3$, тогда $f(q) = \int_{q_0^*}^{q_0} ((f_0)'_{q_0}(t + \bar{v}(q)) + i(f_1)'_{q_0}(t + \bar{v}(q)) + j(f_2)'_{q_0}(t + \bar{v}(q)) + k(f_3)'_{q_0}(t + \bar{v}(q)))dt +$

$$+ f(q^*) = \int_{q_0^*}^{q_0} ((f_0)'_{q_0}(t + \bar{v}(q))dt + i \int_{q_0^*}^{q_0} (f_1)'_{q_0}(t + \bar{v}(q))dt + j \int_{q_0^*}^{q_0} (f_2)'_{q_0}(t + \bar{v}(q))dt +$$

$+k \int_{q_0^0}^{q_0} (f_3)'_{q_0}(t + \bar{v}(q))dt + f(q^*)$ Здесь $(f_n)'_{q_0}(t + \bar{v}(q))$, $n = 0, 1, 2, 3$ – вещественная функция вещественной переменной.

Определение. Функция $f(q)$ называется элементарно и непрерывно дифференцируемой, если она элементарно дифференцируема и ее производная $f'(q)$ непрерывна.

Определение. Пусть последовательность элементарно и непрерывно дифференцируемых функций $\{(f(q))_n\}$ в некоторой окрестности точки q^0 равномерно сходится к $f(q)$, а последовательность производных $\{(f'(q))_n\}$ в той же окрестности равномерно сходится к $g(q)$. Тогда $f(q)$ называется дифференцируемой и $f'(q) = g(q)$.

Для доказательства корректности определения нам понадобится лемма.

Лемма. Пусть последовательность элементарно дифференцируемых функций $\{(f(q))_n\}$ в некоторой окрестности точки q^0 равномерно сходится к $f(q)$, а последовательность производных $\{(f'(q))_n\}$ в той же окрестности равномерно сходится к $\varphi(q) = \varphi_0(q) + i\varphi_1(q) + j\varphi_2(q) + k\varphi_3(q)$. Тогда $f(q) = \int_{q_0^0}^{q_0} \varphi(t + iq_1^0 + jq_2^0 + kq_3^0)dt + f(q^0)$, где $q = q_0 + iq_1^0 + jq_2^0 + kq_3^0$, $q^0 = q_0^0 + iq_1^0 + jq_2^0 + kq_3^0$.

Доказательство. Используя для краткости обозначение $\bar{v}(q) = q_1i + q_2j + q_3k$, получим $|f(q) - \int_{q_0^0}^{q_0} \varphi(t + \bar{v}(q^0))dt - f(q^0)| = |f(q) - (f(q))_n + (f(q))_n - \int_{q_0^0}^{q_0} \varphi(t + \bar{v}(q^0))dt - f(q^0)| =$

$$= |f(q) - (f(q))_n + \int_{q_0^0}^{q_0} (f'(t + \bar{v}(q^0)))_n dt + (f(q^0))_n - \int_{q_0^0}^{q_0} \varphi(t + \bar{v}(q^0))dt - f(q^0)| \leq$$

$$\leq |f(q) - (f(q))_n| + \left| \int_{q_0^0}^{q_0} ((f'(t + \bar{v}(q^0)))_n - \varphi(t + \bar{v}(q^0)))dt \right| + |(f(q^0))_n - f(q^0)| \leq$$

$\leq |f(q) - (f(q))_n| + \int_{q_0^0}^{q_0} |((f'(t + \bar{v}(q^0)))_n - \varphi(t + \bar{v}(q^0)))|dt + |(f(q^0))_n - f(q^0)|$. В силу равномерной сходимости для всякого $\varepsilon > 0$ найдется N такое, что при $n > N$

$|f(q) - (f(q))_n| < \frac{\varepsilon}{3}$, $|(f(q^0))_n - f(q^0)| < \frac{\varepsilon}{3}$ и $|((f'(t + \bar{v}(q^0)))_n - \varphi(t + \bar{v}(q^0)))| < \frac{\varepsilon}{3}$, а следовательно $|f(q) - \int_{q_0^0}^{q_0} \varphi(t + \bar{v}(q^0))dt| < \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}|q_0 - q_0^0|$, то есть при фиксированных q_0 и q_0^0 эту разность можно сделать сколь угодно малой, значит $f(q) = \int_{q_0^0}^{q_0} \varphi(t + \bar{v}(q^0))dt$, что и требовалось доказать.

Теперь докажем корректность определения.

Теорема. Пусть последовательность элементарно и непрерывно дифференцируемых функций $\{(f(q))_n\}$ в некоторой окрестности точки q^0 равномерно сходится к $f(q)$, последовательность производных $\{(f'(q))_n\}$ в той же окрестности равномерно сходится к некоторой функции, которую мы обозначим $f'(q)$. Кроме того, последовательность элементарно и непрерывно дифференцируемых функций $\{(g(q))_n\}$ в той же окрестности равномерно сходится к $f(q)$, а последовательность производных $\{(g'(q))_n\}$ в той же окрестности равномерно сходится к некоторой функции $g'(q)$. Тогда $f'(q) = g'(q)$.

Доказательство. Так как функции элементарно дифференцируемы и равномерно сходятся в окрестности, то фиксируем некоторую точку этой окрестности $q^0 = q_0^0 + iq_1^0 + jq_2^0 + kq_3^0$, для нее найдется отрезок, параллельный вещественной оси, проходящий через эту точку и целиком лежащий в этой окрестности. Пусть точка $q = q_0 + iq_1^0 + jq_2^0 + kq_3^0$ – второй конец этого отрезка, тогда по лемме $f(q) = \int_{q_0^0}^{q_0} f'(t + iq_1^0 + jq_2^0 + kq_3^0)dt + f(q^0)$ и $f(q) = \int_{q_0^0}^{q_0} g'(t + iq_1^0 + jq_2^0 + kq_3^0)dt + f(q^0)$. Так как точку q мы можем двигать вдоль отрезка и подынтегральные функции непрерывны как функции вещественной переменной t , то из этого равенства получаем $f'(q) = g'(q)$, что и требовалось.

5. Дифференциальные уравнения.

Теперь мы можем рассматривать расширения элементарных функций на область кватернионов с помощью рядов:

$$e^q = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{n!}, \quad \sin q = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos q = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{2n}}{(2n)!}.$$

Очевидно, $(e^q)' = e^q$, а вот $(e^{\lambda \circ q})' = \lambda \circ e^{\lambda \circ q}$ только для $\lambda \in \mathbb{R}$, если, как обычно, определить $e^{\lambda \circ q} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda \circ q)^n}{n!}$. Определим новую экспоненту $nex(\lambda, q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n \circ q^n}{n!}$, тогда $(nex(\lambda, q))'_q = \lambda \circ nex(\lambda, q)$ для произвольного фиксированного кватерниона λ , что позволит решать дифференциальное уравнение

$$f'(q) = \lambda \circ f(q).$$

Так как $nex(q, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n \circ \lambda^n}{n!}$, то $(nex(q, \lambda))'_q = nex(q, \lambda) \circ \lambda$, а значит $nex(q, \lambda)$ будет решением уравнения

$$f'(q) = f(q) \circ \lambda$$

Аналогично определим новый синус и косинус тригонометрический и новый синус и косинус гиперболический:

$$\begin{aligned} nst(\lambda, q) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2n+1} \circ (-1)^n q^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad nst(q, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{2n+1} \circ \lambda^{2n+1}}{(2n+1)!}, \\ nct(\lambda, q) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \lambda^{2n} \circ q^{2n}}{(2n)!}, \quad nct(q, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{2n} \circ \lambda^{2n}}{(2n)!}, \\ nsh(\lambda, q) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2n+1} \circ q^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad nch(\lambda, q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2n} \circ q^{2n}}{(2n)!} \end{aligned}$$

тогда для производных тригонометрических функций справедливы равенства:

$$\begin{aligned} (nst(\lambda, q))'_q &= \lambda \circ nct(\lambda, q), \quad (nst(q, \lambda))'_q = nct(q, \lambda) \circ \lambda, \\ (nct(\lambda, q))'_q &= -\lambda \circ nst(\lambda, q), \quad (nct(q, \lambda))'_q = -nst(q, \lambda) \circ \lambda. \end{aligned}$$

Для гиперболических аналогично:

$$\begin{aligned} (nsh(\lambda, q))'_q &= \lambda \circ nch(\lambda, q), \quad (nsh(q, \lambda))'_q = nch(q, \lambda) \circ \lambda, \\ (nch(\lambda, q))'_q &= \lambda \circ nsh(\lambda, q), \quad (nch(q, \lambda))'_q = nsh(q, \lambda) \circ \lambda. \end{aligned}$$

Для решения дифференциальных уравнений с постоянными кватернионными коэффициентами нам достаточно функции nex . Рассмотрим некоторые примеры.

Пусть дано дифференциальное уравнение

$$f''(q) + pf'(q) + r = 0 \tag{20}$$

со скалярными, то есть действительными коэффициентами: $p, r \in \mathbb{R}$. Составим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + p\lambda + r = 0. \tag{21}$$

Будем искать корни этого уравнения среди кватернионов. Пусть $\lambda_{(1)} = \lambda_{(1)0} + \bar{v}(\lambda_{(1)})$ – один из его корней. Тогда $(\lambda_{(1)0} + \bar{v}(\lambda_{(1)}))^2 + p(\lambda_{(1)0} + \bar{v}(\lambda_{(1)})) + r = 0$, следовательно, $\lambda_{(1)0}^2 - |\bar{v}(\lambda_{(1)})|^2 + p\lambda_{(1)0} + r + (2\lambda_{(1)0} + p)\bar{v}(\lambda_{(1)}) = 0$,

что равносильно одновременному выполнению двух равенств:

$$\lambda_{(1)0}^2 - |\bar{v}(\lambda_{(1)})|^2 + p\lambda_{(1)0} + r = 0 \quad (22)$$

$$(2\lambda_{(1)0} + p)\bar{v}(\lambda_{(1)}) = 0 \quad (23)$$

Если $v(\lambda_{(1)}) \neq 0$, то $\lambda_{(1)0} = -\frac{p}{2}$, подставим это значение в (22) и получим

$\frac{p^2}{4} - |\bar{v}(\lambda_{(1)})|^2 - \frac{p^2}{2} + r = 0$ или $|\bar{v}(\lambda_{(1)})|^2 = -\frac{p^2}{4} + r = -\frac{D}{4}$, где D – дискриминант уравнения (21). Если $D < 0$, то любое

$$\lambda_e = -\frac{p}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{|D|}e, \quad (24)$$

является корнем уравнения (21), где e – произвольный единичный вектор трехмерного пространства. Если $D > 0$, то $|\bar{v}(\lambda_{(1)})|^2 < 0$, что невозможно, значит $v(\lambda_{(1)}) = 0$, так же, как и при $D = 0$, следовательно, при $D \geq 0$ уравнение (21) имеет только 2 обычных действительных корня. Таким образом, доказано следующее.

Утверждение. Квадратное уравнение (21) с действительными коэффициентами в области кватернионов при неотрицательном дискриминанте имеет только 2 обычных действительных корня. При отрицательном дискриминанте оно имеет бесконечно много корней вида (24). Следствием этого утверждения является то, что дифференциальное уравнение (20) имеет либо 2 линейно независимых решения при неотрицательном дискриминанте, либо бесконечно много линейно независимых решений вида: $f = pex(\lambda_e, q)$, где λ_e – константа, вычисляемая по формуле (24).

Квадратное уравнение (21) может иметь и кватернионные коэффициенты. В этом случае еще более разнообразны результаты: оно может вообще не иметь решений. Достаточно полно этот вопрос рассмотрен в [17], хотя там несколько другого типа квадратные уравнения.

6. Заключение

Таким образом, для нового определения дифференцируемости доказаны классические теоремы о производной суммы, производной произведения, что позволило перейти к производным многочленов и рядов.

С помощью рядов были определены продолжения элементарных функций на множестве кватернионов.

Полученные результаты позволили найти решения некоторых дифференциальных уравнений с постоянными кватернионными коэффициентами. Решения этих дифференциальных уравнений связаны с решением характеристических уравнений, которые являются алгебраическими уравнениями. Здесь было замечено, что ситуация резко отличается от случая уравнений с действительными или комплексными коэффициентами, так как даже со скалярными коэффициентами уравнение может иметь только 2 корня, а может иметь бесконечно много корней во множестве кватернионов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Fueter R. Zur Theorie der regularen Funktionen einer Quaternionenvariablen // Monatshefte f. Math. & Phys., 1932, vol. 43, p. 69–84.
2. Fueter R. Die Funktionentheorie der Differentialgleichungen $\Delta u = 0$ und $\Delta \Delta u = 0$ mit vier reellen Variablen // Comment. Math. Helv. 1934, vol. 7, p. 307–330.

3. Cullen C. G. An integral theorem for analytic intrinsic function on quaternions // *Duke Math. J.* 1965, 32, p. 139–148.
4. Gentili G., Struppa D. C. A new theory of regular functions of a quaternionic variable // *Advances in Mathematics*, 2007, 216, p. 279–301.
5. Бранец А. В., Шмыглевский И. П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.
6. Амелькин Н. И. Кинематика и динамика твердого тела. М.: МФТИ, 2000. 65 с.
7. Журавлев В. Ф. Основы теоретической механики. М.: Физматлит, 2001. 320 с.
8. Шамаров Н. Н. Применение нестандартных числовых систем в математической физике // *Современная математика. Фундаментальные направления*. М.: Изд-во РУДН, 2007. Т. 23. С. 182–194.
9. Ефремов А. П. Исследование кватернионных пространств и их взаимосвязи с системами отсчета и физическими полями. М.: Изд-во РУДН, 2005. 274 с.
10. Yefremov A. P., Relativistic Oscillator in Quaternion Relativity // *Quantization in Astrophysics, Brounian Motion, and Supersymmetry*, Chennai Ed., 2007, p. 440–457.
11. Ефремов А. П. Предгеометрическая структура ассоциативных алгебр и кватернионные пространства как среда обитания физических законов // *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия*. 2014. № 1. С. 5–19.
12. Kravchenko V. G., Kravchenko V. V. On some nonlinear equations, generated by Fueter type operators // *Zeitschrift fur Analysis und ihre Anwendungen*, 1994, vol. 13, no. 4, p. 599–602.
13. Kravchenko V. V., Shapiro M. V. Integral Representation for Spatial Models of Mathematical Physics // *Pitman Res. Notes Math.*, 1996, vol. 351, Longman, Harlow, 247 pp.
14. Полякова Н. С., Дерябина Г. С. Кватернионы и их применение. М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2003. 56 с.
15. Полякова Н. С., Дерябина Г. С. Гиперкомплексные числа. М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2017. 72 с.
16. Gentili G., Sarfatti G. The Mittag-Leffler Theorem for regular functions of a quaternionic variable // *New York Journal of Mathematics*, 2017, v. 23, p. 583–592.
17. Farouki R. T., Gentili G., Giannelli C., Sestini A., Stoppato C. Solution of a quadratic quaternion equation with mixed coefficients // *J. of Symbolic Computation*, 2016, vol. 74, p. 140–151.

REFERENCES

1. Fueter R. 1932, “Zur Theorie der regularen Funktionen einer Quaternionenvariablen” , *Monatshefte f. Math. & Phys.*, vol. 43, p. 69–84.
2. Fueter R. 1934, “Die Funktionentheorie der Differentialgleichungen $\Delta u = 0$ und $\Delta \Delta u = 0$ mit vier reellen Variablen” , *Comment. Math. Helv.* 7, p. 307–330.
3. Cullen C. G. 1965, “An integral theorem for analytic intrinsic function on quaternions” , *Duke Math. J.* 32, p. 139–148.

4. Gentili G., Struppa D. C. 2007, “A new theory of regular functions of a quaternionic variable” . *Advances in Mathematics*, 216, p. 279–301.
5. Branets A. V., Shmiglevsky I. P. 1973, “Primenenie quaternionov v zadachah orientatsiy tverdogo tela [The application of quaternions in problems of orientation a solid body]”. M.: Nauka, 320 pp.
6. Amelkin N. I. 2000, “Kinematika i dinamika tverdogo tela [Kinematics and dynamics of a solid body]” , MFTI, Moscow, 65 pp.
7. Zhuravlev V. F. 2001, “Osnovi teoreticheskoy mekhaniki [Fundamentals of theoretical mechanics]” , Fismatlit, Moscow, 320 pp.
8. Shamarov N. N. 2007, “Primenenie nestandartnikh chislovikh system v matematicheskoy fizike [Application of non-standard numerical systems in mathematical physics]” , *Sovremennaya matematika. Fundamentalnie napravleniya*. RUDN, Moscow, vol. 23, p. 182–194.
9. Yefremov A. P. 2005, “Issledovanie kvaternionnikh prostranstv i ikh vzaimosvyazi s systemami otscheta i fisicheskimi polyami [Study of quaternion spaces and their relationship with reference systems and physical fields]” , RUDN, Moscow, 274 pp.
10. Yefremov A. P. 2007, “Relativistic Oscillator in Quaternion Relativity” , *Quantization in Astrophysics, Brounian Motion, and Supersymmetry*, Chennai Ed., p. 440-457.
11. Yefremov A. P. 2014, “Predgeometricheskaya struktura assotsiativnikh algebr i kvaternionniye prostranstva kak sreda obitaniya fisicheskikh zakonov [Predgeometric structure of associative algebras and quaternion spaces as a habitat of physical laws]” , *Prostranstvo, vreme i fundamentalnye vzaimodejstvia*, no. 1, p. 5–19.
12. Kravchenko V. G., Kravchenko V. V., 1994, “On some nonlinear equations, generated by Fueter type operators” . *Zeitschrift fur Analysis und ihre Anwendungen*, vol. 13, no. 4, p. 599–602.
13. Kravchenko V. V., Shapiro M. V., 1996, “Integral Representation for Spatial Models of Mathematical Physics” , *Pitman Res. Notes Math.*, vol. 351, Longman, Harlow, 247 pp.
14. Polyakova N. S., Deryabina G. S. 2003, “Kvaternioni i ikh primeneniye [Quaternions and their applications]” , MGTU, Moscow, 56 pp.
15. Polyakova N. S., Deryabina G. S. 2017, “Giperkompleksnyye chisla [Hypercomplex numbers]” , MGTU, Moscow, 72 pp.
16. Gentili G., Sarfatti G. 2017, “The Mittag-Leffler Theorem for regular functions of a quaternionic variable” *New York Journal of Mathematics*, 2017, v. 23, p. 583–592.
17. Farouki R. T., Gentili G., Giannelli C., Sestini A., Stoppato C., 2016, “Solution of a quadratic quaternion equation with mixed coefficients” , *J. of Symbolic Computation*, vol. 74, p. 140–151.

Получено 24.10.2018 г.

Принято в печать 12.07.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 2.

УДК 539.3:534.26

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-311-324

Прохождение звука через упругую пластину с неоднородным покрытием, граничащую с вязкими жидкостями¹

Л. А. Толоконников, Т. Ш. Нгуен

Толоконников Лев Алексеевич — доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет (г. Тула).
e-mail: tolokonnikovla@mail.ru

Нгуен Тхи Шанг — аспирант кафедры прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет (г. Тула).
e-mail: nguyensangnb@gmail.com

Аннотация

В статье рассматривается задача об отражении и прохождении плоской звуковой волны через однородную упругую пластину с непрерывно-неоднородным упругим покрытием, граничащую с вязкими жидкостями. Полагается, что законы неоднородности покрытия пластины описываются дифференцируемыми функциями.

Распространение малых возмущений в вязкой жидкости в случае установившихся колебаний описывается скалярным и векторным уравнениями Гельмгольца. Распространение упругих волн в однородной изотропной упругой пластине описывается двумя волновыми уравнениями для продольных и поперечных волн. Колебания неоднородного изотропного упругого покрытия описываются общими уравнениями движения сплошной среды.

Для нахождения поля смещений в неоднородном покрытии построена краевая задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

Получено аналитическое описание отраженного и прошедшего через пластину акустических полей.

Представлены результаты численных расчетов зависимостей коэффициентов отражения и прохождения продольных волн от угла падения плоской волны.

Ключевые слова: отражение и прохождение звуковых волн, однородная упругая пластина, непрерывно-неоднородное покрытие.

Библиография: 25 названий.

Для цитирования:

Л. А. Толоконников, Т. Ш. Нгуен. Прохождение звука через упругую пластину с неоднородным покрытием, граничащую с вязкими жидкостями // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 2, с. 311–324.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 2.

UDC 539.3:534.26

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-311-324

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 18-11-00199).

The transmission of sound through an elastic plate with an inhomogeneous coating adjoining viscous liquids²

L. A. Tolokonnikov, T. S. Nguyen

Tolokonnikov Lev Alexeevich — doctor of physical and mathematical Sciences, Professor of the Department of Applied Mathematics and Computer Science, Tula State University (Tula).

e-mail: tolokonnikovla@mail.ru

Nguyen Thi Sang — undergraduate department of of the Department of Applied Mathematics and Computer Science, Tula State University (Tula).

e-mail: nguyensangnb@gmail.com

Abstract

In paper the problem of the reflection and transmission of a plane sound wave through a homogeneous elastic plate with an continuously inhomogeneous plate elastic coating adjoining viscous liquids is considered. It is believed that heterogeneity laws of a coating are described by differentiable functions.

The propagation of small perturbations in a viscous fluid in the case of steady state oscillations is described by scalar and vector Helmholtz's equations. The propagation of elastic waves in a uniform isotropic elastic plate is described by two wave equations for longitudinal and transverse waves. Oscillations of an inhomogeneous isotropic elastic coating are described by general motion equations of the continuous medium.

The boundary-value problem for the system of ordinary second order differential equations is constructed for determination of the displacement field in inhomogeneous coating.

An analytical description of the reflected and transmitted through the plate acoustic fields is obtained.

The results of numerical calculations of dependences of coefficients of reflection and transmission of longitudinal waves from the angle of incidence of plane wave are presented.

Keywords: reflection and transmission of sound waves, homogeneous elastic plate, continuously inhomogeneous coating.

Bibliography: 25 titles.

For citation:

L. A. Tolokonnikov, T. S. Nguyen, 2019, "The transmission of sound through an elastic plate with an inhomogeneous coating adjoining viscous liquids", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 2, pp. 311–324.

1. Введение

Существует большое количество работ по изучению прохождения звуковых волн через плоский однородный изотропный упругий слой, граничащий с идеальными жидкостями, например, [1, 2]. Отражение звука анизотропными однородными упругими пластинами рассматривалось в [3, 4]. Прохождение звука через однородный изотропный термоупругий плоский слой исследовалось в [5, 6]. Прохождение звуковых волн через плоский неоднородный изотропный упругий слой изучалось в [7], а через трансверсально-изотропный неоднородный упругий слой — в [8, 9]. В [10] рассматривалась задача об отражении и преломлении плоской звуковой волны неоднородным упругим плоским слоем, материал которого обладает анизотропией общего вида. В [11] решена обратная задача об определении линейных законов неоднородности плоского упругого слоя, имеющего наименьшее отражение при заданном угле падения плоской звуковой волны. Задача об определении законов неоднородности трансверсально-изотропного

²The study was carried out for by the grant of Russian scientific Foundation (project 18-11-00199).

плоского упругого слоя по коэффициенту прохождения плоской звуковой волны решена в [12]. В указанных выше работах полагалось, что упругий слой граничит с идеальными жидкостями.

При распространении звука в реальной жидкости часть звуковой энергии превращается в тепловую. Причиной диссипации энергии является наличие вязкости и теплопроводности. Однако, если для газов указанные причины поглощения вносят примерно одинаковый вклад, то для капельных жидкостей основную роль в поглощении звука играет вязкость и влиянием теплопроводности можно пренебречь. Вопрос о поглощении звука при распространении звуковых волн вблизи твердых границ представляет значительный интерес для различных областей физической и технической акустики.

Прохождение плоской звуковой волны через неоднородный анизотропный плоский слой, граничащий с вязкими жидкостями, изучалось в [13]. Прохождение звука через непрерывно-неоднородный и дискретно-неоднородный термоупругие плоские слои, граничащие с невязкими теплопроводными жидкостями, рассматривалось в [14, 15].

Ряд работ посвящен исследованию отражения и прохождения звуковых волн на однородных изотропных упругих пластинах с неоднородными покрытиями, находящимися в невязкой жидкости. С помощью неоднородных покрытий можно изменять характер отражения и прохождения звука, добиваясь требуемых акустических характеристик путем выбора соответствующих законов неоднородности для механических параметров покрытия пластины. Задача об отражении и преломлении плоской звуковой волны упругим плоским слоем с неоднородным по толщине покрытием решена в [16]. Моделирование неоднородного покрытия упругой пластины с оптимальными звукоотражающими свойствами проведено в [17]. Задача определения толщины и вида зависимостей материальных параметров неоднородного покрытия конечной упругой пластины со сферической полостью, обеспечивающих требуемые характеристики отражения плоской звуковой волны, рассмотрена в [18]. Прямая и обратная задачи о прохождении плоской звуковой волны через однородную термоупругую пластину с непрерывно-неоднородным покрытием решены в [19]. В [20] исследуется влияние непрерывно-неоднородного покрытия однородной упругой пластины на отражение и прохождение плоской звуковой волны при расположении покрытия на разных поверхностях пластины и разных законах неоднородности механических параметров материала покрытия.

В настоящей работе рассматривается задача об отражении и прохождении плоской звуковой волны через однородную упругую пластину с непрерывно-неоднородным упругим покрытием, граничащую с вязкими жидкостями.

2. Постановка задачи

Рассмотрим однородную изотропную упругую пластину толщиной H , материал которой характеризуется плотностью ρ_0 и упругими постоянными λ_0 и μ_0 . Пластина имеет покрытие в виде неоднородного по толщине изотропного упругого слоя толщиной h . Полагаем, что модули упругости λ и μ материала неоднородного покрытия описываются дифференцируемыми функциями координаты z , а плотность ρ — непрерывной функцией координаты z : $\rho = \rho(z)$, $\lambda = \lambda(z)$, $\mu = \mu(z)$. При этом система прямоугольных координат x, y, z выбрана так, что ось x лежит в плоскости, разделяющей однородную пластину и ее неоднородное покрытие, а ось z направлена вниз по нормали к поверхности пластины (рис.1). Пластина с покрытием граничит с вязкими однородными жидкостями, которые имеют плотности ρ_1, ρ_2 , скорости звука c_1, c_2 , кинематические коэффициенты вязкости (первый и второй) ν_1, ν_2 и ξ_1, ξ_2 соответственно.

волн в j -ой среде соответственно;

$$k_1^{(j)2} = \frac{\omega^2}{c_j^2 - i\omega(\xi_j + \frac{4}{3}\nu_j)}, \quad k_2^{(j)2} = i\frac{\omega}{\nu_j}.$$

При этом

$$\Psi_1 = \Psi_0 + \Psi_s, \quad (4)$$

где Ψ_s — потенциал скорости отраженной звуковой волны, удовлетворяющий уравнению Гельмгольца

$$\Delta\Psi_s + k_1^{(1)2}\Psi_s = 0, \quad (5)$$

Так как рассматриваемая задача является двумерной, то $\Phi = \Phi(x, z)\mathbf{e}_y$, где $\mathbf{e}_y$ — единичный вектор оси y . Тогда векторное уравнение (3) сведется к одному скалярному уравнению Гельмгольца относительно функции $\Phi(x, z)$

$$\Delta\Phi_j + k_2^{(j)2}\Phi_j = 0, \quad (6)$$

Вектор скорости частиц и акустическое давление в j -ой вязкой жидкости определяются по формулам

$$\mathbf{v}^{(j)} = \text{grad}\Psi_j + \text{rot}\Phi_j, \quad (7)$$

$$p_j = i\rho_j\omega \left[1 + i\frac{k_1^{(j)2}}{\omega} \left(\xi_j + \frac{4}{3}\nu_j \right) \right] \Psi_j. \quad (8)$$

Компоненты тензора напряжений в j -ой вязкой жидкости $\sigma_{zz}^{(j)}$ и $\sigma_{xz}^{(j)}$ определяются по формулам [22]

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}^{(j)} &= -p_j + \rho_j \left(\xi_j - \frac{2}{3}\nu_j \right) \text{div}\mathbf{v}^{(j)} + 2\nu_j \frac{\partial v_z^{(j)}}{\partial z}, \\ \sigma_{xz}^{(j)} &= \rho_j\nu_j \left(\frac{\partial v_x^{(j)}}{\partial z} + \frac{\partial v_z^{(j)}}{\partial x} \right), \end{aligned} \quad (9)$$

где $v_x^{(j)}$ и $v_z^{(j)}$ — компоненты вектора скорости $\mathbf{v}^{(j)}$;

$$v_x^{(j)} = \frac{\partial\Psi_j}{\partial x} - \frac{\partial\Phi_j}{\partial z}, \quad v_z^{(j)} = \frac{\partial\Psi_j}{\partial z} + \frac{\partial\Phi_j}{\partial x}. \quad (10)$$

Решения уравнений (5), (2) (при $j = 2$) и (6) будем искать в виде

$$\Psi_s = A_1 \exp\{i[k_{1x}^{(1)}x - k_{1z}^{(1)}(z + h)]\}, \quad \Psi_2 = A_2 \exp\{i[k_{1x}^{(2)}x + k_{1z}^{(2)}(z - H)]\}, \quad (11)$$

$$\Phi_1 = B_1 \exp\{i[k_{2x}^{(1)}x - k_{2z}^{(1)}(z + h)]\}, \quad \Phi_2 = B_2 \exp\{i[k_{2x}^{(2)}x + k_{2z}^{(2)}(z - H)]\}, \quad (12)$$

где $k_{1x}^{(2)}, k_{1z}^{(2)}$ — проекции волнового вектора прошедшей продольной волны $\mathbf{k}_1^{(2)}$ на оси x и z ; $k_{1x}^{(2)} = \sqrt{k_1^{(2)2} - k_{1z}^{(2)2}}$; $k_{2x}^{(j)}, k_{2z}^{(j)}$ — проекции волнового вектора $\mathbf{k}_2^{(j)}$ на оси x и z в j -ой жидкости; $k_{2z}^{(j)} = \sqrt{k_2^{(j)2} - k_{2x}^{(j)2}}$. При этом согласно закону Снеллиуса [1] $k_{1x}^{(2)} = k_{2x}^{(1)} = k_{2x}^{(2)} = k_{1x}^{(1)}$.

Если выполняются соотношения

$$\frac{\omega\nu}{c_j^2} \ll 1, \quad \frac{\omega\xi}{c_j^2} \ll 1,$$

то

$$k_1^{(j)} \approx \frac{\omega}{c_j}, \quad p_j \approx i\rho_j\omega\Psi_j \quad (j = 1, 2).$$

Распространение малых возмущений в однородном изотропном упругом слое описывается двумя волновыми уравнениями для продольных и поперечных волн, которые в случае установившихся колебаний переходят в уравнения Гельмгольца [2]

$$\Delta\varphi + k_l^2\varphi = 0, \quad (13)$$

$$\Delta\mathbf{\Pi} + k_\tau^2\mathbf{\Pi} = 0, \quad (14)$$

где φ и $\mathbf{\Pi}$ — скалярный и векторный потенциалы смещения; $k_l = \omega/c_l$ и $k_\tau = \omega/c_\tau$ — волновые числа продольных и поперечных упругих волн; $c_l = \sqrt{(\lambda_0 + 2\mu_0)/\rho_0}$ и $c_\tau = \sqrt{\mu_0/\rho_0}$ — скорости продольных и поперечных волн соответственно. При этом вектор смещения частиц упругого однородного слоя

$$\mathbf{u}^{(0)} = \text{grad}\varphi + \text{rot}\mathbf{\Pi}. \quad (15)$$

Так как $\mathbf{\Pi} = \Pi(x, z)\mathbf{e}_y$, то векторное уравнение (14) сведется к одному скалярному уравнению Гельмгольца относительно функции $\Pi(x, z)$

$$\Pi + k_\tau^2\Pi = 0. \quad (16)$$

Компоненты вектора $\mathbf{u}^{(0)}$ записываются через функции φ и Π следующим образом:

$$u_x^{(0)} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial\Pi}{\partial z}, \quad u_z^{(0)} = \frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\partial\Pi}{\partial x}. \quad (17)$$

Связь между компонентами тензора напряжений и компонентами вектора смещения в однородной упругой пластине имеет вид [23]

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^{(0)} &= \lambda_0 \text{div}\mathbf{u}^{(0)} + 2\mu_0 \frac{\partial u_x^{(0)}}{\partial x}, & \sigma_{zz}^{(0)} &= \lambda_0 \text{div}\mathbf{u}^{(0)} + 2\mu_0 \frac{\partial u_z^{(0)}}{\partial z}, \\ \sigma_{xz}^{(0)} &= \mu_0 \left(\frac{\partial u_x^{(0)}}{\partial z} + \frac{\partial u_z^{(0)}}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (18)$$

Решения уравнений (13) и (16) будем искать в виде

$$\varphi = C_1 \exp[i(k_{lx}x + k_{lz}z)] + C_2 \exp[i(k_{lx}x - k_{lz}z)], \quad (19)$$

$$\Pi = D_1 \exp[i(k_{\tau x}x + k_{\tau z}z)] + D_2 \exp[i(k_{\tau x}x - k_{\tau z}z)], \quad (20)$$

где $k_{lz} = \sqrt{k_l^2 - k_{lx}^2}$, $k_{\tau z} = \sqrt{k_\tau^2 - k_{\tau x}^2}$. Согласно закону Снеллиуса $k_{lx} = k_{\tau x} = k_{1x}^{(1)}$.

Распространение упругих волн в неоднородном покрытии описывается общими уравнениями движения сплошной среды [23], которые при отсутствии массовых сил для установившегося режима движения имеют вид

$$\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial z} = -\omega^2\rho(z)u_x, \quad \frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z} = -\omega^2\rho(z)u_z. \quad (21)$$

Компоненты тензора напряжений σ_{ij} связаны с составляющими вектора смещения $\mathbf{u}$ в неоднородном упругом покрытии следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \lambda(z)\text{div}\mathbf{u} + 2\mu(z)\frac{\partial u_x}{\partial x}, & \sigma_{zz} &= \lambda(z)\text{div}\mathbf{u} + 2\mu(z)\frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ \sigma_{xz} &= \mu(z)\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right). \end{aligned} \quad (22)$$

Согласно закону Снеллиуса зависимость составляющих вектора смещения $\mathbf{u}$ от координаты x будет иметь вид $\exp(ik_{1x}x)$. Поэтому компоненты вектора $\mathbf{u}$ будем искать в виде

$$u_x = U_1(z) \exp(ik_{1x}x), \quad u_z = U_3(z) \exp(ik_{1x}x). \quad (23)$$

Подставляя выражения (23) в уравнения (21) с учетом (22), получим систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных функций $U_i(z)$ ($i = 1, 3$):

$$AU'' + BU' + CU = 0, \quad (24)$$

где $\mathbf{U} = (U_1, U_3)^T$,

$$A = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \lambda + 2\mu \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \mu' & ik_{1x}(\lambda + \mu) \\ ik_{1x}(\lambda + \mu) & \lambda' + 2\mu' \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} -k_{1x}^2(\lambda + 2\mu) + \omega^2\rho & ik_{1x}\mu' \\ ik_{1x}\lambda' & -k_{1x}^2\mu + \omega^2\rho \end{pmatrix}.$$

Здесь штрихи обозначают производные по координате z .

Коэффициенты A_i , B_i , C_i , D_i ($i = 1, 2$) в выражениях (11), (12), (19) и (20) подлежат определению из граничных условий.

На поверхностях, соприкасающихся с вязкими жидкостями, граничные условия заключаются в равенстве скоростей частиц упругой среды и жидкости, непрерывности нормальных и тангенциальных напряжений:

$$\begin{aligned} \text{при } z = -h \quad & -i\omega u_x = v_x^{(1)}, \quad -i\omega u_z = v_z^{(1)}, \quad \sigma_{zz} = \sigma_{zz}^{(1)}, \quad \sigma_{xz} = \sigma_{xz}^{(1)}, \\ \text{при } z = H \quad & -i\omega u_x^{(0)} = v_x^{(2)}, \quad -i\omega u_z^{(0)} = v_z^{(2)}, \quad \sigma_{zz}^{(0)} = \sigma_{zz}^{(2)}, \quad \sigma_{xz} = \sigma_{xz}^{(2)}. \end{aligned} \quad (25)$$

На поверхности $z = 0$, разделяющей однородный слой и неоднородное покрытие, должны быть непрерывны составляющие вектора смещения частиц, а также нормальные и тангенциальные напряжения:

$$\text{при } z = 0 \quad u_x = u_x^{(0)}, \quad u_z = u_z^{(0)}, \quad \sigma_{zz} = \sigma_{zz}^{(0)}, \quad \sigma_{xz} = \sigma_{xz}^{(0)}. \quad (26)$$

Подставим выражения (1), (11), (12), (19) и (20) в граничные условия (25) и (26) с учетом (4), (8)-(10), (17), (18) и (22).

Из первых двух условий (25) получаем систему двух уравнений, из которой находим коэффициенты A_1 и B_1 , выраженные через значения функций $U_1(z)$ и $U_3(z)$ на поверхности неоднородного покрытия $z = -h$:

$$A_1 = [A_0(k_{1z}^{(1)}k_{2z}^{(1)} - k_{1x}^{(1)2}) - \omega k_{1x}^{(1)}U_1(-h) + \omega k_{2z}^{(1)}U_3(-h)]\Delta_1^{-1},$$

$$B_1 = -[2A_0k_{1x}^{(1)}k_{1z}^{(1)} + \omega k_{1x}^{(1)}U_1(-h) + \omega k_{1x}^{(1)}U_3(-h)]\Delta_1^{-1}.$$

Из четырех граничных условий при $z = H$ и первых двух условий (26) получаем систему уравнений, из которых определяем коэффициенты A_2 , B_2 , C_j , D_j ($j = 1, 2$), выраженные через значения функций $U_1(z)$ и $U_3(z)$ на поверхности неоднородного покрытия $z = 0$:

$$A_2 = -i\omega (C_1a_1e_{1l} + C_2a_2e_{2l} + D_1b_1e_{1\tau} + D_2b_2e_{2\tau}) \Delta_2^{-1},$$

$$B_2 = -i\omega (C_1c_1e_{1l} - C_2c_2e_{2l} + D_1d_1e_{1\tau} + D_2d_2e_{2\tau}) \Delta_2^{-1},$$

$$C_1 = \beta_{12}U_1(0) + \beta_{22}U_3(0), \quad C_2 = \beta_{11}U_1(0) + \beta_{21}U_3(0),$$

$$D_1 = \gamma_{12}U_1(0) + \gamma_{22}U_3(0), \quad D_2 = \gamma_{11}U_1(0) + \gamma_{21}U_3(0).$$

Здесь

$$\begin{aligned}
e_{1l} &= e^{ik_{lz}H}, \quad e_{2l} = e^{-ik_{lz}H}, \quad e_{1\tau} = e^{ik_{\tau z}H}, \quad e_{2\tau} = e^{-ik_{\tau z}H}, \\
\Delta_j &= k_{1z}^{(j)}k_{2z}^{(j)} + k_{1x}^{(j)2}, \quad a_j = k_{1x}^{(1)2} + (-1)^{j+1}k_{2z}^{(2)}k_{lz}, \quad b_j = k_{1x}^{(1)}[k_{2z}^{(2)} + (-1)^j k_{\tau z}], \\
c_j &= k_{1x}^{(1)}[k_{lz} + (-1)^j k_{1z}^{(2)}], \quad d_j = k_{1x}^{(1)2} + (-1)^{j+1}k_{1z}^{(2)}k_{\tau z}, \\
\beta_{1j} &= (-1)^j i[t_j k_{1x}^{(1)}(w_2 - w_1) + k_{lz}(r_2 w_1 - r_1 w_2) + h_j k_{1x}^{(1)}(r_1 - r_2)]\Delta_3^{-1}, \\
\beta_{2j} &= -i[t_j k_{\tau z}(w_2 + w_1) + k_{1x}^{(1)}(r_1 w_2 - r_2 w_1) + (-1)^j h_j k_{\tau z}(r_1 + r_2)]\Delta_3^{-1}, \\
\gamma_{1j} &= -i[w_j k_{lz}(t_1 + t_2) + k_{1x}^{(1)}(t_1 h_2 - t_2 h_1) - r_j k_{lz}(h_1 + h_2)]\Delta_3^{-1}, \\
\gamma_{2j} &= (-1)^{j+1} i[w_j k_{1x}^{(1)}(t_2 - t_1) + (-1)^j k_{\tau z}(t_1 h_2 - t_2 h_1) + r_j k_{1x}^{(1)}(h_1 - h_2)]\Delta_3^{-1}, \\
t_j &= e_{jl}[s_1 - i\omega(m_2 a_j + n_2 c_j)]\Delta_2^{-1}, \quad r_j = e_{j\tau}[(-1)^{j+1} s_2 - i\omega(m_2 b_j + n_2 d_j)]\Delta_2^{-1}, \\
w_j &= e_{j\tau}[s_4 - i\omega(q_2 b_j + p_2 d_j)]\Delta_2^{-1}, \quad h_j = e_{jl}[(-1)^{j+1} s_3 - i\omega(q_2 a_j + p_2 c_j)]\Delta_2^{-1}, \\
m_j &= (-1)^{j+1} \left\{ i\omega \rho_j \left[1 + i \frac{k_{1x}^{(j)2}}{\omega} \left(\xi_j + \frac{4}{3} \nu_j \right) \right] + (k_{1x}^{(j)2} + k_{1z}^{(j)2}) \rho_j \left(\xi_j - \frac{2}{3} \nu_j \right) + 2\nu_j k_{1z}^{(j)2} \right\}, \\
n_j &= -2\nu_j k_{1x}^{(j)} k_{2z}^{(j)}, \quad q_j = -2\rho_j \nu_j k_{1x}^{(j)} k_{1z}^{(j)}, \quad p_j = (-1)^{j+1} \rho_j \nu_j (k_{1x}^{(j)2} - k_{2z}^{(j)2}), \\
&\quad (j = 1, 2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_1 &= \lambda_0 k_{1x}^{(1)2} + (\lambda_0 + 2\mu_0) k_{lz}^2, \quad s_2 = 2\mu_0 k_{1x}^{(1)} k_{\tau z}, \quad s_3 = 2\mu_0 k_{1x}^{(1)} k_{lz}, \quad s_4 = \mu_0 (k_{1x}^{(1)2} - k_{\tau z}^2), \\
\Delta_3 &= k_{1x}^{(1)} [(t_1 - t_2)(w_1 - w_2) + (h_1 - h_2)(r_2 - r_1)] + k_{lz} k_{\tau z} [(t_1 + t_2)(w_1 + w_2) - (h_1 + h_2)(r_1 + r_2)] + \\
&\quad + 2k_{1x}^{(1)} [k_{lz}(r_1 w_2 - r_2 w_1) + k_{\tau z}(t_1 h_2 - t_2 h_1)].
\end{aligned}$$

Таким образом, чтобы вычислить коэффициенты A_j, B_j, C_j, D_j ($j = 1, 2$) необходимо найти величины $U_1(-h)$, $U_3(-h)$, $U_1(0)$ и $U_3(0)$. Эти величины подлежат определению из решения краевой задачи для системы дифференциальных уравнений (24).

Краевые условия, получаемые из оставшихся неиспользованными граничных условий, имеют вид

$$\begin{aligned}
(AU' + EU)_{z=-h} &= G, \\
(AU' + FU)_{z=0} &= 0,
\end{aligned} \tag{27}$$

где

$$E = \begin{pmatrix} e_{11} & ik_{1x}^{(1)}\mu + e_{12} \\ ik_{1x}^{(1)}\lambda + e_{21} & e_{22} \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} f_{11} & ik_{1x}^{(1)}\mu + f_{12} \\ ik_{1x}^{(1)}\lambda + f_{21} & f_{22} \end{pmatrix}, \quad G = (g_1, g_2)^T,$$

$$\begin{aligned}
e_{11} &= -i\omega(q_1 k_{1x}^{(1)} + p_1 k_{1z}^{(1)})\Delta_1^{-1}, \quad e_{12} = -i\omega(p_1 k_{1x}^{(1)} - q_1 k_{2z}^{(1)})\Delta_1^{-1}, \\
e_{21} &= -i\omega(m_1 k_{1x}^{(1)} + n_1 k_{1z}^{(1)})\Delta_1^{-1}, \quad e_{22} = -i\omega(n_1 k_{1x}^{(1)} - m_1 k_{2z}^{(1)})\Delta_1^{-1}, \\
f_{1j} &= s_4(\beta_{j2} - \beta_{j1}) + s_3(\gamma_{j2} + \gamma_{j1}), \quad f_{2j} = s_1(\beta_{j2} + \beta_{j1}) + s_2(\gamma_{j2} - \gamma_{j1}), \\
g_1 &= q_1 + [q_1 k_{1x}^{(1)2} + (2p_1 - q_1)k_{1z}^{(1)}k_{2z}^{(1)}]\Delta_1^{-1}, \quad g_2 = -m_1 + [m_1 k_{1x}^{(1)2} + (2n_1 - m_1)k_{1z}^{(1)}k_{2z}^{(1)}]\Delta_1^{-1}.
\end{aligned}$$

После решения линейной краевой задачи (24), (27), получаем аналитическое описание акустических полей в жидкостях, а также полей смещений в однородной части пластины и неоднородном покрытии.

Для оценки влияния вязкости жидкостей, граничащих с пластиной, покрытой неоднородным упругим слоем, на процесс отражения и прохождения звука, воспользуемся коэффициентом поглощения α , характеризующим потерю энергии падающей звуковой волны вследствие вязкости жидкостей. При этом будем учитывать, что вязкие волны являются быстрозатухающими и существенны лишь в тонком пограничном слое вблизи твердой поверхности. Поэтому коэффициент поглощения будем определять следующим образом:

$$\alpha = I_0 - I_1 - I_2,$$

где I_0 , I_1 и I_2 — интенсивности в направлении, нормальном к пластине, падающей, продольной отраженной и продольной прошедшей плоских волн.

Интенсивность гармонической плоской волны в направлении, нормальном к пластине, определяется формулой [24, 25]

$$I = \frac{1}{2} |p| |v_z| \cos(\varphi_p - \varphi_v), \quad (28)$$

где $|p|$, φ_p и $|v_z|$, φ_v — модули и фазы давления и нормальной скорости частиц в акустическом поле.

Согласно (28) получаем

$$I_0 = \frac{1}{2} \frac{\rho_1 \omega^2}{c_1} \cos \theta_0 A_0^2, \quad I_1 = \frac{1}{2} \frac{\rho_1 \omega^2}{c_1} \cos \theta_0 A_1^2, \quad I_2 = \frac{1}{2} \rho_2 \omega k_{1z}^{(2)} A_2^2.$$

Тогда

$$\alpha = I_0 \left(1 - \left| \frac{A_1}{A_0} \right|^2 - \frac{\rho_2 c_1 |k_{1z}^{(2)}|}{\rho_1 \omega \cos \theta_0} \left| \frac{A_2}{A_0} \right|^2 \right).$$

4. Численные исследования

На основе полученного аналитического решения задачи были проведены численные расчеты зависимостей коэффициентов отражения и прохождения продольных волн от угла падения плоской волны. При этом исследовался случай, когда жидкости по обе стороны тела являются одинаковыми ($k_1^{(1)} = k_1^{(2)} = k_1$). Полагалось, что амплитуда падающей волны $A_0 = 1$, а отношение толщины покрытия h к толщине однородной пластины H , равно 0,2.

Рассматривалась алюминиевая пластина толщиной $H = 0,1$ м ($\rho_0 = 2,7 \cdot 10^3$ кг/м³, $\lambda_0 = 5,3 \cdot 10^{10}$ Н/м², $\mu_0 = 2,6 \cdot 10^{10}$ Н/м²) с покрытием на основе поливинилбутирала, находящаяся в воде ($\rho_1 = \rho_2 = 10^3$ кг/м³, $c_1 = c_2 = 1485$ м/с, $\nu_1 = \nu_2 = 1,006 \cdot 10^{-6}$ м²/с, $\xi_1 = \xi_2 = 0$ м²/с) и в глицерине ($\rho_1 = \rho_2 = 1,26 \cdot 10^3$ кг/м³, $c_1 = c_2 = 1920$ м/с, $\nu_1 = \nu_2 = 1111,11 \cdot 10^{-6}$ м²/с, $\xi_1 = \xi_2 = 0$ м²/с).

Расчеты проводились как для однородного покрытия с плотностью $\tilde{\rho} = 1,07 \cdot 10^3$ кг/м³ кг/м и модулями упругости $\tilde{\lambda} = 3,9 \cdot 10^9$ Н/м², $\tilde{\mu} = 9,8 \cdot 10^8$ Н/м², так и для неоднородных покрытий, механические характеристики которых менялись по толщине слоя по линейным законам

$$\rho = \tilde{\rho} f_j(z) \quad (j = 1, 2), \quad \lambda = \tilde{\lambda}, \quad \mu = \tilde{\mu},$$

где

$$f_1(z) = a_1 \left(-\frac{z}{h} + 0,5 \right), \quad f_2(z) = a_2 \left(\frac{z}{h} + 1,5 \right), \quad a_1 = a_2 = 1.$$

Множитель a_j ($j = 1, 2$) выбран так, чтобы среднее значение функции $f_j(z)$ по толщине покрытия было равно единице.

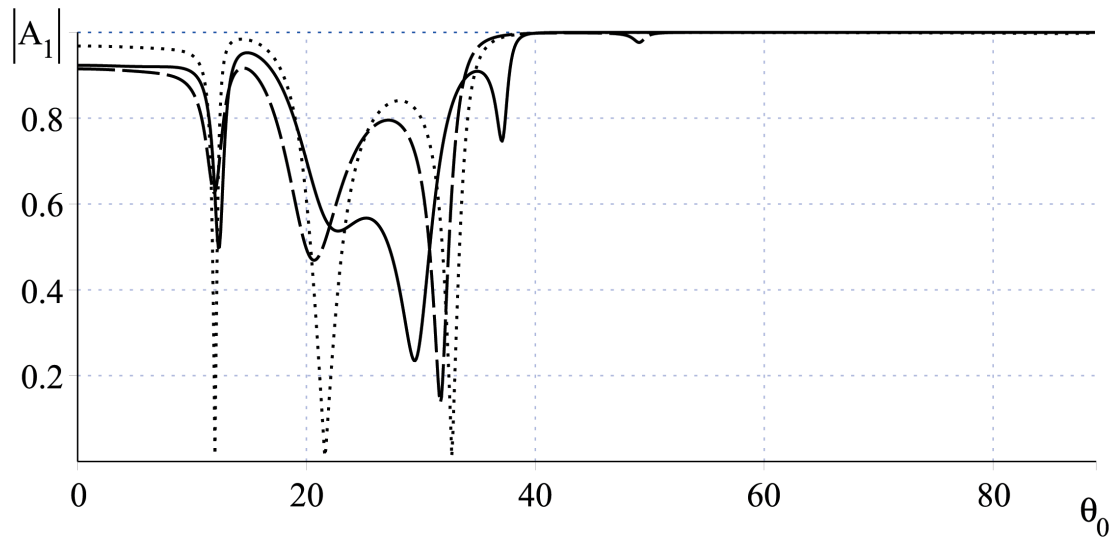


Рис. 2: Зависимость коэффициента отражения $|A_1|$ от угла падения θ_0 для пластины, помещенной в воду

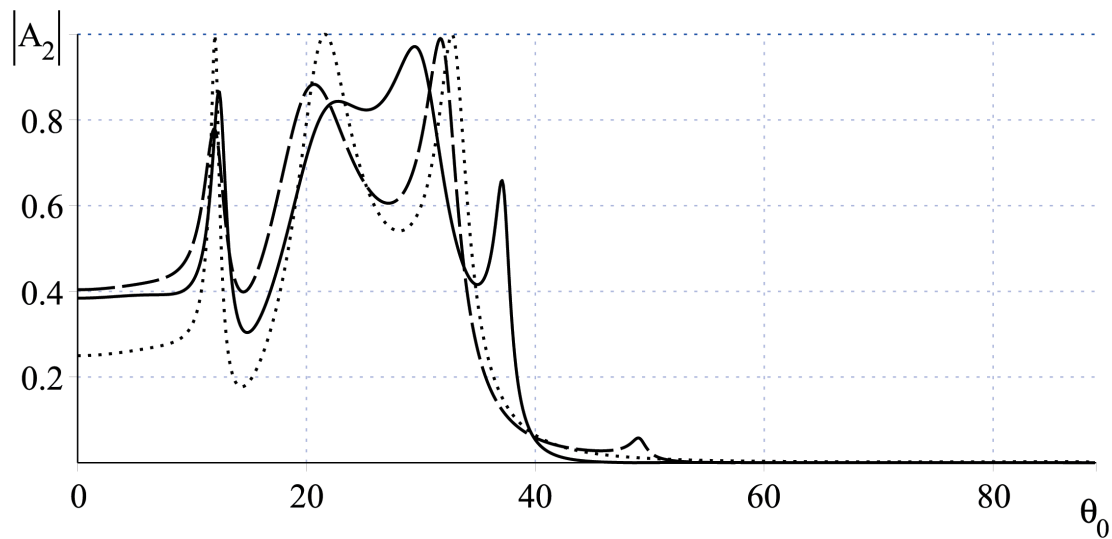


Рис. 3: Зависимость коэффициента прохождения $|A_2|$ от угла падения θ_0 для пластины, помещенной в воду

Зависимости $f_1(z)$ и $f_2(z)$ выбраны такими, что их графики являются зеркальным отражением друг друга относительно прямой $z = -h/2$. При этом на внутренней поверхности покрытия ($z = 0$) функция $f_2(z)$ достигает максимума, равного $1,5a_2$, а на внешней поверхности ($z = -h$) — минимума, равного $0,5a_2$. Функции $f_1(z)$ достигает тех же максимальных и минимальных значений, но уже на внешней и внутренней поверхностях покрытия.

На рис. 2–5 представлены зависимости $|A_1|$ и $|A_2|$ от θ_0 при фиксированной частоте падающей волны ($k_1H = 10$), когда тело помещено в воду и глицерин. Пунктирные линии соответствуют однородному покрытию, штриховые и сплошные — неоднородным покрытиям с законами неоднородности $f_1(z)$ и $f_2(z)$ соответственно.

Сравнение угловых зависимостей показывает существенное влияние неоднородности материала покрытия на отражение и прохождение звука через пластину с покрытием. Это проявляется в смещении максимумов и минимумов коэффициентов отражения и прохождения и изменении их уровней.

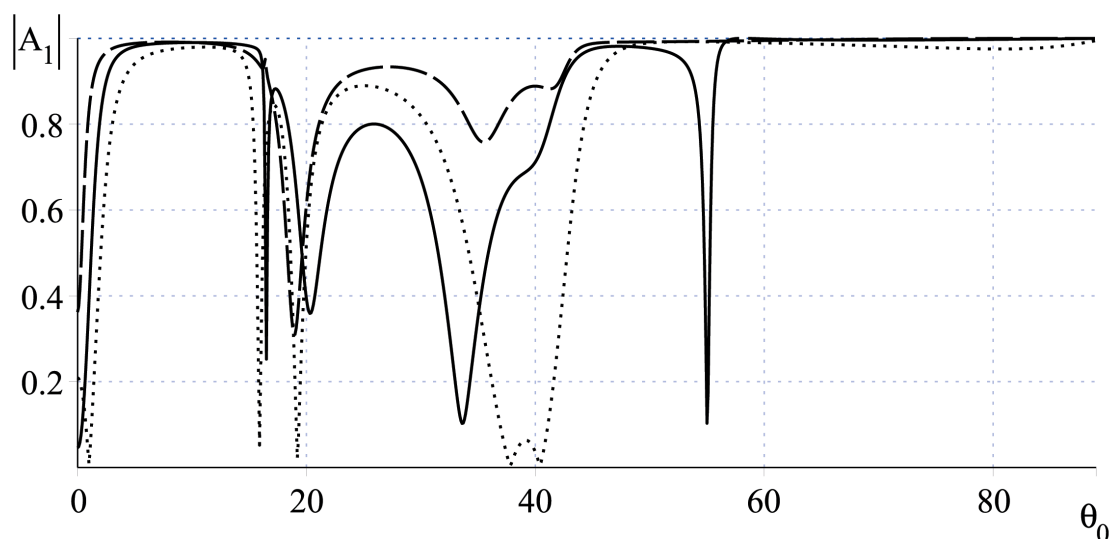


Рис. 4: Зависимость коэффициента отражения $|A_1|$ от угла падения θ_0 для пластины, помещенной в глицерин

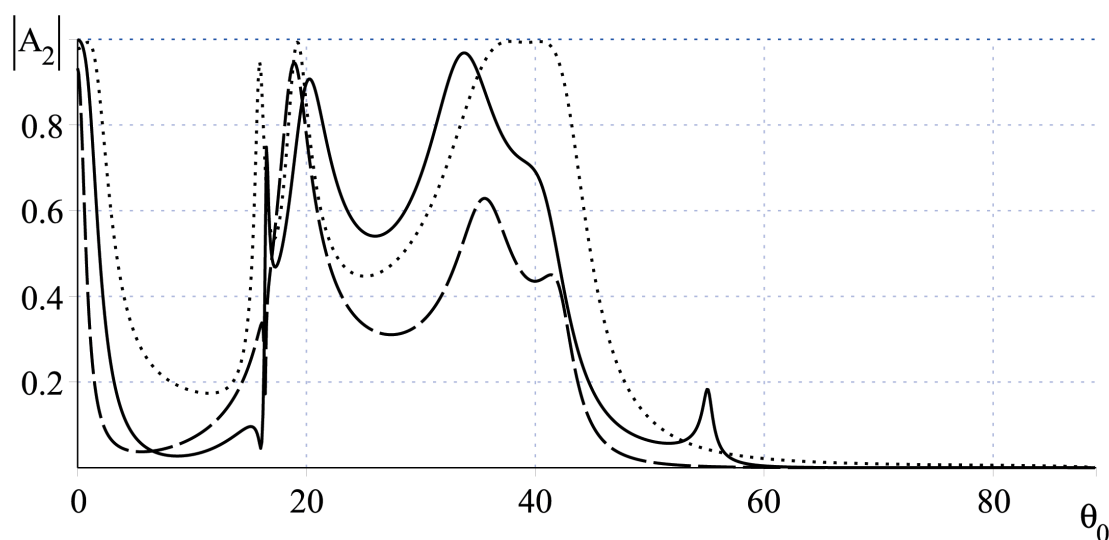


Рис. 5: Зависимость коэффициента прохождения $|A_2|$ от угла падения θ_0 для пластины, помещенной в глицерин

5. Заключение

В настоящей работе получено аналитическое решение задачи об отражении и прохождении плоской звуковой волны через однородную упругую пластину с непрерывно-неоднородным по толщине упругим покрытием, граничащую с вязкими жидкостями. Представлены результаты численных расчетов зависимостей коэффициентов отражения и прохождения продольных волн от угла падения плоской волны.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 344 с.
2. Шендеров Е. Л. Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 352 с.

3. Лонкевич М. П. Прохождение звука через слой трансверсально-изотропного материала конечной толщины // Акустический журн. 1971. Т. 17. Вып. 1. С. 85–92.
4. Шендеров Е. Л. Прохождение звука через трансверсально-изотропную пластину // Акустический журн. 1984. Т. 30. Вып. 1. С. 122–129.
5. Ларин Н. В. Прохождение звука через однородный термоупругий плоский слой // Известия Тульского гос. ун-та. Естественные науки. 2015. Вып. 3. С. 145–153.
6. Ларин Н. В. Анализ резонансного рассеяния звука термоупругой пластиной // Известия Тульского гос. ун-та. Технические науки. 2017. Вып. 4. С. 109–123.
7. Приходько В. Ю., Тюткин В. В. Расчет коэффициента отражения звуковых волн от твердых слоисто-неоднородных сред // Акустический журн. 1986. Т. 32. Вып. 2. С. 212–218.
8. Скобельцын С. А., Толоконников Л. А. Прохождение звуковых волн через трансверсально-изотропный неоднородный плоский слой // Акустический журн. 1990. Т. 36. Вып. 4. С. 740–744.
9. Ринкевич А. Б., Смирнов А. Н. Распространение упругих волн в неоднородной трансверсально-изотропной пластине // Дефектоскопия. 2000. № 8. С. 78–83.
10. Толоконников Л. А. Отражение и преломление плоской звуковой волны анизотропным неоднородным слоем // Прикладная механика и техническая физика. 1999. Т. 40. № 5. С. 179–184.
11. Ларин Н. В., Скобельцын С. А., Толоконников Л. А. Определение законов неоднородности плоского упругого слоя с заданными звукоотражающими свойствами // Акустический журнал. 2015. Т. 61. № 5. С. 552–558.
12. Скобельцын С. А. Определение параметров неоднородности анизотропного упругого слоя по прохождению звука // Известия Тульского гос. ун-та. Технические науки. 2016. Вып. 7. Ч. 2. С. 246–257.
13. Толоконников Л. А. Прохождение звука через неоднородный анизотропный слой, граничащий с вязкими жидкостями // Прикладная математика и механика. 1998. Т. 62. Вып. 6. С. 1029–1035.
14. Ларин Н. В., Толоконников Л. А. Прохождение плоской звуковой волны через неоднородный термоупругий слой // Прикладная математика и механика. 2006. Т. 70. Вып. 4. С. 650–659.
15. Толоконников Л. А., Ларин Н. В. Прохождение звука через термоупругий дискретно-неоднородный плоский слой, граничащий с теплопроводными жидкостями // Прикладная механика и техническая физика. 2017. Т. 58. № 1. С. 108–116.
16. Толоконников Л. А., Юдачев В. В. Отражение и преломление плоской звуковой волны упругим плоским слоем с неоднородным покрытием // Известия Тульского гос. ун-та. Естественные науки. 2015. Вып. 3. С. 219–226.
17. Ларин Н. В., Скобельцын С. А., Толоконников Л. А. Моделирование неоднородного покрытия упругой пластины с оптимальными звукоотражающими свойствами // Прикладная математика и механика. 2016. Т. 80. Вып. 4. С. 480–488.

18. Скобельцын С. А. Оценка свойств покрытия конечной упругой пластины с полостью, обеспечивающих заданные параметры отражения звука // Известия Тульского гос. ун-та. Технические науки. 2017. Вып. 7. С. 83–92.
19. Ларин Н. В. Определение законов неоднородности покрытия термоупругой пластины, обеспечивающих наименьшее звукоотражение // Известия Тульского гос. ун-та. Технические науки. 2016. Вып. 11. Ч. 2. С. 216–234.
20. Толоконников Л. А., Нгуен Т. Ш. О влиянии неоднородного покрытия упругой пластины на отражение и прохождение звука // Известия Тульского гос. ун-та. Технические науки. 2018. Вып. 6. С. 362–372.
21. Толоконников Л. А., Скобельцын С. А. Дифракция звуковых волн на неоднородных и анизотропных телах. Тула: Изд-во ТулГУ, 2004. 200 с.
22. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 736 с.
23. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
24. Исакович М. А. Общая акустика. М.: Наука, 1973. 496 с.
25. Лепендин Л. Ф. Акустика. М.: Высш. школа, 1978. 448 с.

REFERENCES

1. Brekhovskikh, L. M. 1973, “*Waves in Layered Media*”, Nauka, Moscow, 344 p., [in Russian].
2. Shenderov, E. L. 1972, “*Wave problems of underwater acoustics*”, Sudostroenie, Leningrad, 352 p., [in Russian].
3. Lonkevitch, M. P. 1971, “Transmission of sound through a finite-thickness layer of a transversal-isotropic materia”, *Akust. Zhurnal*, vol. 17, no 1, pp. 85–92, [in Russian].
4. Shenderov, E. L. 1984, “Sound propagation through transversally-isotropic plate”, *Akust. Zhurnal*, vol. 30, no 1, pp. 122–129, [in Russian].
5. Larin, N. V. 2015, “The transmission of sound through a uniform thermoelastic plane layer”, *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no 3, pp. 145–153, [in Russian].
6. Larin, N. V. 2017, “Analysis of the resonance sound scattering by a thermoelastic plate”, *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki*, no 4, pp. 109–123, [in Russian].
7. Prikhod'ko, V. Yu. & Tyutekin, V. V. 1986, “Calculation of reflection coefficient of sound waves from solid layered media”, *Akust. Zhurnal*, vol. 32, no 2, pp. 212–218, [in Russian].
8. Skobel'tsyn, S. A. & Tolokonnikov, L. A. 1990, “Transmission of sound waves through a transversely isotropic inhomogeneous plane layer”, *Akust. Zhurnal*, vol. 36, no 4, pp. 740–744, [in Russian].
9. Rinkevich, A. B. & Smirnov, A. N. 2000, “Propagation of elastic waves in a non-uniform transversely isotropic plate”, *Defektoskopiya*, no 8, pp. 78–83, [in Russian].
10. Tolokonnikov, L. A. 1999, “Reflection and refraction of a planar acoustic waves in an anisotropic inhomogeneous layer”, *J. Appl. Mech. and Techn. Physics*, vol. 40, no 5, pp. 936–941.

11. Larin, N. V., Skobel'tsyn, S. A. & Tolokonnikov, L. A. 2015, "Determination of the Inhomogeneity Laws for an Elastic Layer with Preset Sound-Reflecting Properties", *Acoustical Physics*, vol. 61, no 5, pp. 504–510.
12. Skobel'tsyn, S. A. 2016, "Determining the parameters of anisotropic elastic layer on the sound transmission", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki*, no 7-2, pp. 246–257, [in Russian].
13. Tolokonnikov, L. A. 1998, "The transmission of sound through an inhomogeneous anisotropic layer adjoining viscous liquids", *J. Appl. Mech. and Techn. Physics*, vol. 62, no 6, pp. 953–958.
14. Larin, N. V. & Tolokonnikov, L. A. 2006, "The transmission of a plane acoustic wave through a non-uniform thermoelastic layer", *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 70, no 4, pp. 590–598.
15. Tolokonnikov, L. A. & Larin, N. V. 2017, "Sound propagation through a discretely inhomogeneous thermoelastic plane layer adjacent to heat-conducting liquids", *J. Appl. Mech. and Techn. Physics*, vol. 58, no 1, pp. 95–102.
16. Tolokonnikov, L. A. & Yudachev, V. V. 2015, "Reflection and refraction of a planar acoustic waves in an elastic planar layer with a non-uniform covering", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no 3, pp. 219–226, [in Russian].
17. Larin, N. V., Skobel'tsyn, S. A. & Tolokonnikov, L. A. 2016, "Modelling the inhomogeneous coating of an elastic plate with optimum sound-reflecting properties", *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 80, no 4, pp. 339–344.
18. Skobel'tsyn, S. A. 2017, "Estimation of the coating properties of a finite plate with a cavity providing the given parameters of the sound reflection", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki*, no 7, pp. 83–92, [in Russian].
19. Larin, N. V. 2016, "Determination of the inhomogeneity laws for coating of the thermoelastic plate to obtain minimum sound reflection", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki*, no 11-2, pp. 216–234, [in Russian].
20. Tolokonnikov, L. A. & Nguyen, T. S. 2018, "About the influence of an non-uniform covering of the elastic plate on sound reflection and transmission", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki*, no 6, pp. 362–372, [in Russian].
21. Tolokonnikov, L. A. & Skobel'tsyn, S. A. 2004, "*Diffraction of sound waves on inhomogeneous and anisotropic bodies*", Tul. Gos. Univ., Tula, 200 p., [in Russian].
22. Landau, L. D. & Lifshitz, E. M. 1988, "*Hydrodynamics*", Nauka, Moscow, 736 p., [in Russian].
23. Nowacki, W. 1975, "*Teoria sprężystości*", Mir, Moscow, 872 p., [in Russian].
24. Isakovich, M. A. 1973, "*General Acoustics*", Nauka, Moscow, 496 p., [in Russian].
25. Lependin L. F. 1978, "*Acoustics*", Vishaya shkola, Moscow, 448 p., [in Russian].

Получено 12.04.2019 г.

Принято в печать 12.07.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 2.

УДК 539.374

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-325-335

**Анализ пространственных полей напряжений и скоростей
в процессах пластического течения**

Н. Д. Тутышкин, В. Ю. Травин

Тутышкин Николай Дмитриевич — доктор технических наук, профессор, кафедра строительства, строительных материалов и конструкций, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: nikolai.tutyshkin@mail.ru

Травин Вадим Юрьевич — кандидат технических наук, старший научный сотрудник, АО НПО "Сплав" имени А. Н. Ганичева (г. Тула).

*e-mail: travin.vu@mail.ru***Аннотация**

Приводится метод анализа пространственных полей напряжений и скоростей в процессах пластического течения, основанный на отображении зон текучести в девиаторном пространстве напряжений. В качестве поверхности нагружения принимается обобщенная функция текучести Мизеса, соответствующая многочисленным экспериментальным данным. Показано, что обобщенная модель Мизеса является удобной для анализа процессов пространственной деформации с помощью специального изображающего параметрического пространства. Численная реализация метода иллюстрируется на примере пластического сжатия материала в условиях трехмерной деформации. Показано, что распределение напряжений и скоростей течения зависит от текущего соотношения размеров слоя при осаживании.

Ключевые слова: пластичность, пластическое течение, напряжение, скорость течения, деформация, основные уравнения, определяющие соотношения, моделирование, пластическое сжатие.

Библиография: 10 названий.

Для цитирования:

Н. Д. Тутышкин, В. Ю. Травин. Анализ пространственных полей напряжений и скоростей в процессах пластического течения // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 2, с. 325–335.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 2.

UDC 539.374

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-325-335

**Analysis of spatial stress and velocity fields
in plastic flow processes**

N. D. Tutyshkin, V. Yu. Travin

Tutyshkin Nikolai Dmitrievich — Doctor of technical sciences, Professor, Department of Construction, Building Materials and Structures, Tula State University (Tula).

e-mail: nikolai.tutyshkin@mail.ru

Travin Vadim Yurievich — Candidate of technical sciences, Senior Researcher, Joint Stock Company "Scientific and Production Association "SPLAV" named after A. N. Ganichev" (Tula).

e-mail: travin.vu@mail.ru

Abstract

The method of analysis of spatial fields of stresses and velocities in processes of plastic flow is given, based on mapping of flow zones in deviator space of stresses. A generalized Mises flow function corresponding to numerous experimental data is taken as the loading surface. It is shown that the generalized Mises model is convenient for analysis of spatial deformation processes with the power of a special depicting parametric space. The numerical implementation of the method is illustrated by the example of plastic compression of a material under three-dimensional deformation conditions. It is shown that the distribution of stresses and flow rates depends on the current ratio of layer sizes during settling.

Keywords: plasticity, plastic flow, stress, flow rate, deformation, basic equations defining ratios, modeling, plastic compression.

Bibliography: 10 titles.

For citation:

N. D. Tutyshkin, V. Yu. Travin, 2019, "Analysis of spatial stress and velocity fields in plastic flow processes", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 2, pp. 325–335.

1. Введение

Многие сложные вопросы анализа, проектирования и разработки технологических процессов пластического формообразования изделий связаны с их математическим моделированием и остаются недостаточно изученными. Особенно трудными для анализа и математического моделирования являются процессы пластического формоизменения, в которых обрабатываемый материал находится в условиях трехмерной деформации и испытывает сложное нагружение с сильным изменением напряженного состояния (фазы напряжений) [1, 2]. Анализ технологических возможностей и прогнозирование свойств готовых изделий в нестационарных процессах пластического формоизменения в условиях пространственной деформации с применением вычислительной техники требует использования надежных, с точки зрения быстрой сходимости и высокой точности, методов расчета пространственных полей напряжений и деформаций. Многие вопросы проектирования технологии: обоснованного выбора типа и числа формоизменяющих и сопутствующих операций, режима обработки, обеспечения надежной прочности рабочего инструмента, — связаны с распределением напряжений, скоростей течения и деформаций в обрабатываемых изделиях.

2. Основные уравнения и определяющие соотношения

Пластическое формоизменение материалов в интенсивных и скоростных технологических процессах описывается в ортогональной системе координат x^i ($i = 1, 2, 3$) следующими уравнениями

$$\Delta_j \sigma^{ij} = \rho(a^i - F^i), \quad (1)$$

$$\Delta_i \nu^i = 0, \quad (2)$$

$$f(s^{ij}, e_{ij}, \chi_s) = 0, \quad (3)$$

$$\dot{e}_{ij} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial s^{ij}}, \quad (4)$$

где σ^{ij} — контравариантные компоненты тензора напряжений; ν^i , a^i , F^i — компоненты векторов скорости, ускорения и плотности внешних сил; e_{ij} — ковариантные компоненты тензора деформации; ρ — плотность материала; χ_s — параметры, связанные с деформациями неголомными соотношениями; Δ_j — символ, означающий ковариантное дифференцирование; $\dot{\lambda}$ — скалярная величина, пропорциональная мощности пластической деформации; s^{ij} — девиаторные компоненты напряжений; $\dot{e}_{ij}$ — компоненты тензора скорости деформации.

В системе уравнений (1)–(4)

$$\Delta_j \sigma^{ij} = \frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial x^j} + \sigma^{kj} \Gamma_{kj}^i + \sigma^{ik} \Gamma_{kj}^j, \quad (5)$$

$$\Delta_i \nu^i = \frac{\partial \nu^i}{\partial x^i} + \nu^k \Gamma_{ik}^i, \quad (6)$$

$$a^i = \frac{\partial \nu^i}{\partial t} + \nu^j \left(\frac{\partial \nu^i}{\partial x^j} + \nu^k \Gamma_{kj}^i \right), \quad (7)$$

$$\dot{e}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \nu_i}{\partial x^j} + \frac{\partial \nu_j}{\partial x^i} - 2\nu_k \Gamma_{ij}^k \right), \quad (8)$$

где t — время; Γ_{kj}^i — символы Кристоффеля.

Условия градиентности скоростей деформации (4) сводятся к уравнениям соосности

$$\frac{\dot{e}_{ij}}{e_{ij}} = \frac{\dot{e}_{ii} - \dot{e}_{jj}}{e_{ii} - e_{jj}} \quad (i, j = 1, 2, 3, i \neq j) \quad (9)$$

и условию подобия

$$\omega_{\dot{e}} = \omega_{\sigma} \quad (10)$$

девиаторов скорости деформации $D_{\dot{e}}$ и напряжения D_{σ} ($\omega_{\dot{e}}$, ω_{σ} — фазовые углы девиаторов).

В качестве поверхности нагружения $f = 0$ принимается обобщенная функция текучести Мизеса [3]

$$f(s^{ij}, e_{ij}, \chi_s) = \frac{1}{2} \left(s_{\cdot j}^i s_{\cdot i}^j - s_{\cdot i}^i s_{\cdot j}^j \right) - \tau_s^2 (e_{ij}, \chi_s), \quad (11)$$

где τ_s — предел текучести материала при сдвиге; $s_{\cdot j}^i$ — смешанные компоненты девиатора напряжений.

Как показали многочисленные эксперименты [4, 5], обобщенная функция текучести (3) вполне удовлетворительно описывает поведение металлических конструкционных материалов при больших конечных деформациях, характерных для технологических процессов обработки давлением.

В качестве параметров χ_s , связанных с деформациями e_{ij} , принимается степень деформации сдвига (параметр Одквиста)

$$\Lambda = \int_s \sqrt{2 \left(ds_{\cdot j}^i ds_{\cdot i}^j - ds_{\cdot i}^i ds_{\cdot j}^j \right)}, \quad (12)$$

где $ds_{\cdot j}^i$ — компоненты девиатора приращения деформации D_{de} и интенсивность скоростей деформации сдвига $H = \frac{d\Lambda}{dt}$. Значения параметра определяются интегрированием соотношения (12) по известному пути деформации s .

Сложность анализа процессов пластического формоизменения материалов с пространственными полями напряжений и деформаций связана с большим числом искомых параметров σ_{ij} , ν^i , независимых переменных x^i , t и локальной статической неопределенностью системы уравнений (1)–(4). Распространенными приемами преодоления этих трудностей является

уменьшение числа искомых компонент напряжений и скоростей и независимых переменных (условие плоской деформации, предположение о том, что некоторые компоненты напряжений или скоростей являются известными). Методы анализа, основанные на сильном упрощении основных уравнений, могут приводить к потере качественных свойств решений.

Компоненты напряжений σ^{ij} можно выразить с помощью условий градиентности скоростей деформации (4) через производные от компонент скорости ν^i по координатам x^i . Этот прием позволяет представить уравнения (1), (2) как систему четырех нелинейных дифференциальных уравнений относительно четырех искомых функций σ , ν^i . Решение подобных систем уравнений [6] сопряжено с огромными математическими трудностями, так как при всем многообразии оригинальных методов решения отдельных систем нелинейных уравнений [7, 8] нет универсального метода и общих теорем существования и единственности их решения. Для анализа и математического моделирования пространственных процессов пластического формоизменения с сильным изменением фазы напряжений предлагается метод, основанный на построении опорного решения в напряжениях и скоростях и направленного к точному решению итерационного процесса. Для построения опорного решения целесообразно временно придать системе уравнений (1)–(4) свойство локальной определенности в напряжениях, например, использованием дополнительных условий в напряжениях. Использование для построения опорного решения "жестких" дополнительных условий, фиксирующих фазу напряжений и скоростей деформации, может приводить при анализе процессов пластического формоизменения к большим затруднениям при обеспечении условия подобия (10) девиаторов скорости деформации и напряжения. Поэтому более эффективным является использование "гибких" дополнительных условий, не накладывающих ограничений на фазу напряжений и скоростей деформаций в опорном решении. Дополнительные условия должны быть универсальными, инвариантными относительно среднего напряжения и позволять использовать известные решения и экспериментальную информацию для анализа технологических задач. Подобные дополнительные условия можно составить для параметров, определяющих дифференциальную геометрию траекторий максимальных касательных напряжений в характерных сечениях пластической области.

В каждой точке сечения пластической области некоторой плоскостью с нормалью $\vec{n}^k$ существуют два взаимно ортогональных направления α_k, β_k , вдоль которых касательное напряжение в этой плоскости достигает экстремальной величины $\tau_{\alpha_k \beta_k}$, а нормальные напряжения $\sigma_{\alpha_k} = \sigma_{\beta_k}$ (рис. 1). Направления α_k, β_k образуют в заданной плоскости два семейства взаимно ортогональных линий. Если векторы $\vec{n}^k$ совпадают с векторами базиса декартовой системы координат x_k , то траектории α_k, β_k описываются в сечениях $x_k = \text{const}$ дифференциальными уравнениями

$$\frac{dx_j}{dx_i} = \text{tg } \delta_k(\text{линии } \alpha_k), \quad \frac{dx_j}{dx_i} = -\text{ctg } \delta_k(\text{линии } \beta_k) \quad (i, j, k = 1, 2, 3, i \neq j \neq k), \quad (13)$$

где δ_k — угол, отсчитываемый от направления оси x_i до направления линии α_k .

Параметры δ_k связаны с компонентами напряжений правилом их преобразования при плоском повороте вокруг оси x_k на угол δ_k

$$\text{tg } 2\delta_k = -\frac{\sigma_{\cdot i}^{j\cdot} - \sigma_{\cdot j}^{i\cdot}}{2\sqrt{\sigma_{\cdot k}^{j\cdot} \sigma_{\cdot j}^{k\cdot}}} \quad (i \neq j, \text{ но } i \text{ и } j \text{ не суммировать}). \quad (14)$$

Два дополнительных условия к (14)

$$\frac{\sigma_{\cdot j}^{j\cdot} - \sigma_{\cdot k}^{k\cdot}}{2\sqrt{\sigma_{\cdot k}^{j\cdot} \sigma_{\cdot j}^{k\cdot}}} = -\text{tg } 2\delta_i, \quad \frac{\sigma_{\cdot k}^{k\cdot} - \sigma_{\cdot i}^{i\cdot}}{2\sqrt{\sigma_{\cdot i}^{k\cdot} \sigma_{\cdot k}^{i\cdot}}} = -\text{tg } 2\delta_j \quad (15)$$

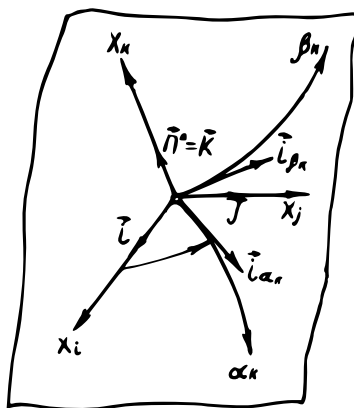


Рис. 1. Траектория α_k, β_k в сечении пластической области с нормалью $\vec{n}^k$

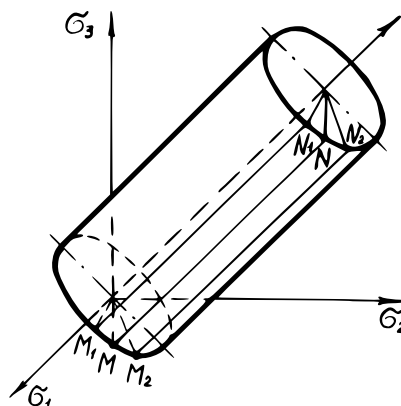


Рис. 2. Отображение решения для компонент σ, ν^i в пространстве главных напряжений

в физических плоскостях пластической области с нормальными x_i и x_j определяют для каждой точки пластической области ребро на поверхности текучести $f = 0$ в пространстве напряжений σ^{ij} .

Уравнения (1), (3) и дополнительные условия (15) образуют локально определимую систему уравнений относительно шести искомых компонент σ^{ij} . Если рассматривается инерционное пластическое течение, то входящие в правые части уравнений движения (1) компоненты скорости ν^i могут быть определены в опорном решении из условия подобия полей скоростей квазистатического и инерционного решений. Условие (2) и два соотношения (из трех) (9) образуют замкнутую систему относительно трех искомых компонент ν^i . Решение этих подсистем уравнений позволяет отобразить для каждой узловой точки пластической области два ребра (M_1N_1 и M_2N_2) на поверхности текучести в пространстве главных напряжений (рис.2), одно из которых соответствует допустимым напряжениям, а другое — допустимым скоростям. Соответствующее точному решению ребро MN находится между ребрами M_1N_1 и M_2N_2 . Поэтому направленный к точному решению итерационный процесс можно интерпретировать как встречное вращение образующих M_1N_1 и M_2N_2 вокруг гидростатической оси $p = -\sigma$ до тех пор, пока третье соотношение (9) в плоскостях $x_k = \text{const}$ и условие подобия (10) девиаторов D_e и D_σ не будут удовлетворяться с заданной точностью.

Обобщенная модель Мизеса (11) пластического материала является удобной для анализа процессов пространственной деформации с помощью специального изображающего пространства параметров ($i = 1, 2, 3$), связанных с компонентами напряжений соотношениями [9]

$$\begin{aligned}\sigma_{\cdot k}^k &= \frac{1}{3}I_1(T_\sigma) + \sqrt{\frac{2}{3}I_2(D_\sigma)}(m_i \sin 2\varphi_i - m_j \sin 2\varphi_j), \\ \sqrt{\sigma_{\cdot j}^j \sigma_{\cdot i}^i} &= \sqrt{I_2(D_\sigma)}m_k \cos 2\varphi_k \quad (i, j, k = 1, 2, 3, i \neq j \neq k),\end{aligned}\quad (16)$$

где $I_1(T_\sigma)$ — линейный инвариант тензора напряжений.

Параметры φ_i связаны с углами δ_i зависимостью $\tan 2\delta_i = \sqrt{3/2} \tan 2\varphi_i$ и определяют ориентацию октаэдрической площадки. Параметры m_i определяют направление вектора касательного октаэдрического напряжения.

3. Пластическое сжатие материала в условиях трехмерной деформации (пример)

Рассмотрим процесс пластического сжатия материала в условиях трехмерной деформации (рис.3а) при следующих данных: исходные ширина, высота и длина слоя материала в форме параллелепипеда $a_{\text{заг}} = 2a_0 = 80$ мм, $h_{\text{заг}} = 2h_0 = 35,8$ мм, $l_{\text{заг}} = 2l_0 = 95$ мм; высота после деформации $2h_k = 28,6$ мм, материал — сталь 40Х, температура рекомендуемого температурного интервала штамповки для стали 40Х $T = 1450$ К (1180°C), скорость и время деформации $e_{\cdot i} = 10 \dots 20 \cdot 10^2 \text{ c}^{-1}$, $\tau = 0,2 \cdot 10^{-2} \text{ c}$, контактное касательное напряжение $\tau_K = \tau_s$.

Распределение напряжений и скоростей течения зависит от текущего соотношения размеров поковки при осаживании. Поэтому при анализе рассматриваем четыре этапа:

$$\Delta h_1 = \Delta h_2 = \Delta h_3 = \Delta h_4 = 1,8 \text{ мм}.$$

Поля напряжений и скоростей находим по отношению к середине этапов. Для удобства выбираем систему декартовых координат $x y z$, центр O которой совпадает с центром тяжести поковки (рис.3а). В силу симметрии достаточно найти решение для $1/8$ части заготовки, ограниченной координатными плоскостями с положительными направлениями осей координат.

В связи с численным решением основных уравнений пластического течения делим объем заготовки плоскостями $\Delta x = \text{const}$ и $\Delta y = \text{const}$ с шагом между ними $\Delta x = a/8$ и $\Delta y = l/8$.

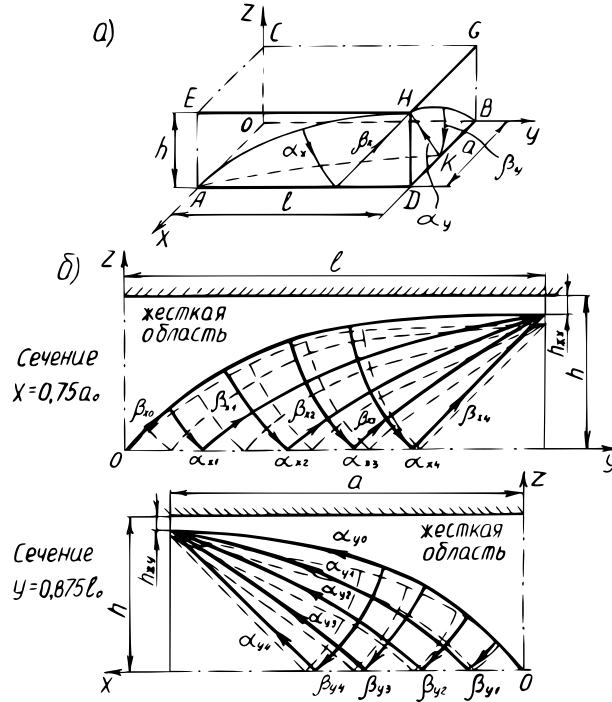


Рис. 3. Пластическое осаживание коротких элементов:
 а – пластическая область; б – поле напряжений
 в сечениях $x_0 = 0,75a_0$ и $y_0 = 0,875l_0$

Для повышения точности опорного решения и быстрой сходимости итерационного процесса необходимо выбирать сечения, в которых действуют наибольшие по модулю касательные напряжения. Для рассматриваемого процесса осаживания $\sigma_x, \sigma_y > \sigma_z$ и $|\tau_{zx}|, |\tau_{yz}| > |\tau_{xy}|$. Поэтому в сечениях $x = \text{const}$, $y = \text{const}$ действуют значительно большие по модулю касательные напряжения, чем в сечениях $z = \text{const}$.

Опорное поле напряжений находится из квазистатического решения системы уравнений (1), (3) с учетом параметрической формы (16) и дополнительных условий (17) в форме

$$\begin{aligned} \sigma_y - \sigma_z + 2\tau_{yz} \operatorname{tg} 2\delta_x &= 0 \quad (\text{сечения к } x = \text{const}), \\ \sigma_z - \sigma_x + 2\tau_{zx} \operatorname{tg} 2\delta_y &= 0 \quad (\text{сечения к } y = \text{const}). \end{aligned} \quad (17)$$

Значения углов $\delta_x^{(0)}(y, z)$, $\delta_y^{(0)}(y, z)$ в нулевом приближении, входящие в дополнительные условия (17), выбираются из известных решений задач пластического сжатия в предположении плоской деформации в сечении $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$ [10], т.е. траектории наибольших по модулю касательных напряжений (α_x, β_x и α_y, β_y) в нулевом приближении принимаются совпадающими с траекториями максимальных касательных напряжений при плоской деформации в этих сечениях пластической области (рис.3б, тонкие линии).

Поля траекторий α_x, β_x и α_y, β_y определяют направляющий девиатор напряжений во всех узловых точках. К контактной поверхности СЕНQ, в силу симметрии тензора напряжений, должна примыкать жесткая зона материала (рис.3а). Чтобы вычислить тензор напряжений, необходимо сначала установить среднее напряжение хотя бы в одной точке пластической области. Рассмотрим условие равновесия области ADKH, свободной от действия внешних сил (рис.3а). Так как образующими поверхности АКН являются прямые линии α_y , расположенные под углом $\delta_y = \frac{\pi}{4}$ к оси x , то уравнение равновесия области ADKH можно представить в виде

$$\int_{AK}^{AH} \int_A^{KH} (\sigma_{\delta_y} + \tau_{\beta_y} \alpha_y) ds_{\alpha_y} ds = 0, \quad (18)$$

где s — дуга линий на поверхности АКН, ортогональных к α_y . Среднее напряжение в произвольной точке на поверхности АКН можно выразить через среднее напряжение в другой точке, принадлежащей этой поверхности, например, точке К. Численным интегрированием уравнения (18) установлено, что среднее напряжение в точке К $\sigma_K = -0,886\tau_s$.

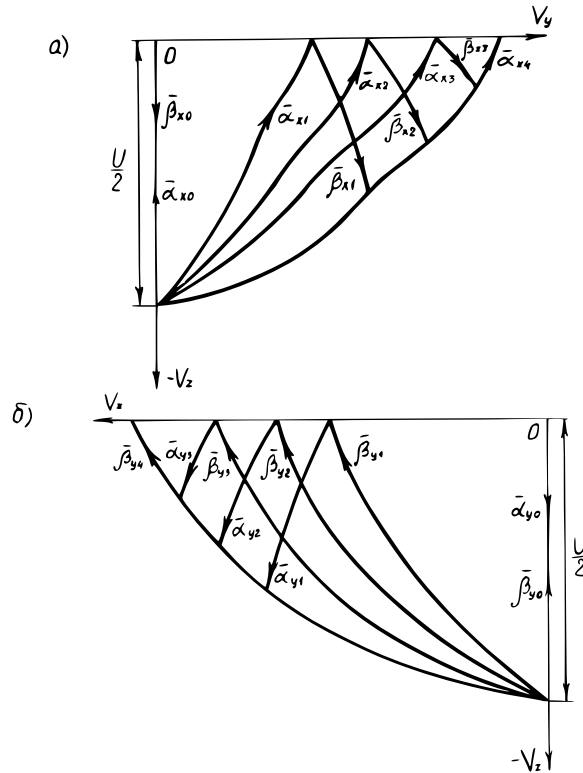


Рис. 4. Поле скоростей в характерных сечениях при осаживании коротких элементов, первый этап:
а — сечение $x/a = 0,75$; б — сечение $x/l = 0,875$

Решение двух уравнений (9) для $x_i = x, y$ и условия несжимаемости (2) позволяет найти вектор скорости $\vec{v}$ пластического течения. Эта задача эквивалентна определению компонент $\nu_{\alpha_x}^*, \nu_{\beta_x}^*, \nu_x$ и $\nu_{\alpha_y}^*, \nu_{\beta_y}^*, \nu_y$, в системах координат α_x^*, β_x^*, x и α_y^*, β_y^*, y . Поле скоростей (рис.4) удовлетворяет краевым условиям

$$\nu_x|_{x=0} = \nu_y|_{y=0} = \nu_z|_{z=0} = 0, \quad \nu_x|_{x=a} = \frac{al^2U}{(a^2 + l^2)h},$$

$$\nu_y|_{y=1} = \frac{a^2lU}{(a^2 + l^2)h}, \quad \nu_z|_{z=h} = -U,$$

где U — скорость сближения плит.

Степень соответствия между полями напряжений и скоростей опорного решения в узловых точках пластической области оценивалась с помощью параметров

$$\Delta\delta_z = \delta_z^e - \delta_z^\sigma \leq [\Delta\delta_z], \quad \Delta\omega = \omega_e - \omega_\sigma \leq [\omega_\sigma] \quad (19)$$

для направляющих девиаторов $\bar{D}_e$ и $\bar{D}_\sigma$. Направленный к точному решению итерационный процесс сводился к обеспечению неравенств (19) путем коррекции параметров m_x, m_y, m_z .

Удельная сила осадки (рис.5) находится из условия равновесия жесткой зоны, примыкающей к верхней плите

$$p = \frac{1}{al} \int_{OB}^{AH} \int_{OA}^{KH} (\sigma_{\delta_y} + \tau_{\beta_y \alpha_y}) ds_{\alpha_y} ds = 119 \text{ МПа},$$

где s — дуга линий, образованных от пересечения плоскостей $x = \text{const}$ с поверхностью ОАНВ. Удельная сила в предположении плоской деформации в сечениях $y = \text{const}$ при $a/h = 2,28$, $p = 129 \text{ МПа}$, т.е. больше на 8,7 %.

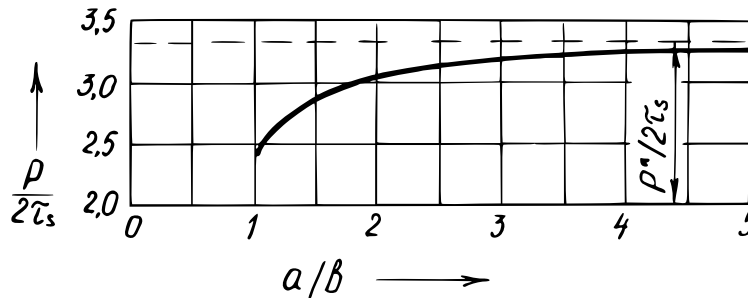


Рис. 5. Зависимость удельной силы штамповки тонкослойных элементов от соотношения их размеров в плане

4. Заключение

Рассмотрим результаты решения. Вид напряженного состояния изменяется от одноосного сжатия на оси симметрии до сжатия, граничащего со сдвигом, в пределах пластической области.

Использование условия плоской деформации приводит к погрешности в определении удельных и технологических усилий порядка 10 %. При определении локальных характеристик напряжений и деформаций эта погрешность заметно увеличивается до 20...25 %, так как "жестко" фиксируется состояние чистого сдвига во всей пластической области, что не соответствует трехмерному решению.

Таким образом можно заключить, что более эффективным является использование "гибких" дополнительных условий, не накладывающих ограничений на фазу напряжений и скоростей деформаций в опорном решении. Дополнительные условия должны быть универсальными, инвариантными относительно среднего напряжения и позволять использовать известные решения и экспериментальную информацию для анализа технологических задач. Подобные дополнительные условия можно составить для параметров, определяющих дифференциальную геометрию траекторий максимальных касательных напряжений в характерных сечениях пластической области.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильюшин А. А. Пластичность: Основы общей математической теории. М.: АН СССР, 1963. 271 с.
2. Ивлев Д. Д. Механика пластических сред: в 2 т. Т.1.: Теория идеальной пластичности. М.: Физматлит, 2001. 232 с.
3. Тутышкин Н. Д., Трегубов В. И. Связанные задачи теории пластичности и повреждаемости деформируемых материалов. Тула: ТулГУ, 2016. 248 с.

4. Tutyshkin N. D., Lofink P., Müller W. H., Wille R., Stahn O. Constitutive equations of a tensorial model for strain-induced damage of metals based on three invariants // *International Journal Continuum mechanics and thermo-dynamics*. 2017. Vol. 29. P. 251–269.
5. Tutyshkin N. D., Müller W. H., Wille R., Zapara M. A. Strain-induced damage of metals under large plastic deformation: Theoretical framework and experiments // *International Journal of Plasticity*. 2014. Vol. 59. P. 133–151.
6. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978. 687 с.
7. Бригаднов И. А. Математическая корректность и численные методы решения начально-краевых задач пластичности // *Изв. РАН. Механика твердого тела*. 1996. № 4. С. 62–74.
8. Яненко Н. Н., Бояринцев Ю. И. Теория и методы интегрирования систем нелинейных уравнений в частных производных // *Труды IV Всесоюзного матем. съезда*. М., 1964. Т. 2. С. 613–621.
9. Tutyshkin N. D. Metal plastic straining processes with predictable mechanical and constitutive properties modeling // *IASME Transactions*. 2005. Vol. 2. № 9. P. 1819–1825.
10. Соколовский В. В. Теория пластичности. М.: Высшая школа, 1969. 608 с.

REFERENCES

1. Ilyushin A. A., 1963, “Plasticity: Fundamentals of General Mathematical Theory”, *M.: AN SSSR*, 271 p. (In Russian)
2. Ivlev D. D., 2001, “Mechanics of Plastic Environments: in 2 vol. Vol.1.: Theory of Perfect Plasticity”, *M.: Fizmatlit*, 232 p. (In Russian)
3. Tutyshkin N. D., Tregubov V. I., 2016, “Related problems of the theory of plasticity and damage to deformable materials”, *Tula: TulGU*, 248 p. (In Russian)
4. Tutyshkin N. D., Lofink P., Müller W. H., Wille R., Stahn O., 2017, “Constitutive equations of a tensorial model for strain-induced damage of metals based on three invariants”, *International Journal Continuum mechanics and thermo-dynamics*, vol. 29, pp. 251–269.
5. Tutyshkin N. D., Müller W. H., Wille R., Zapara M. A., 2014, “Strain-induced damage of metals under large plastic deformation: Theoretical framework and experiments”, *International Journal of Plasticity*, vol. 59, pp. 133–151.
6. Rozhdestvenskiy B. L., Yanenko N. N., 1978, “Systems of quasilinear equations and their applications to gas dynamics”, *M.: Science*, 687 p. (In Russian)
7. Brigadnov I. A., 1996, “Mathematical correctness and numerical methods for solving initial-boundary problems of plasticity”, *Izvestiya RAN. Solid mechanics*, № 4, pp. 62–74. (In Russian)
8. Yanenko N. N., Boyarintsev Yu. I., 1964, “Theory and methods of integration of systems of nonlinear partial differential equations”, *Trudy IV Vsesoyuznogo math. s'ezda*, *M.*, vol. 2., pp. 613–621. (In Russian)
9. Tutyshkin N. D., 2005, “Metal plastic straining processes with predictable mechanical and constitutive properties modeling”, *IASME Transactions*, vol. 2, № 9, pp. 1819–1825.

-
10. Sokolovskiy V. V., 1969, "Plasticity theory", *M.: Higher School*, 608 p. (In Russian)

Получено 15.02.2019 г.

Принято в печать 12.07.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 2.

УДК 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-336-347

Среднее значение произведений символов Лежандра по простым¹

В. Н. Чубариков

Чубариков Владимир Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математических и компьютерных методов анализа, декан механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: chubarik1@mech.math.msu.su; chubarik2009@live.ru

Аннотация

В статье найдена асимптотическая формула при $N \rightarrow \infty$ для количества простых чисел $p \leq N$, удовлетворяющих системе уравнений

$$\left(\frac{p + k_s}{q_s} \right) = \vartheta_s, s = 1, \dots, r,$$

где $q_1, \dots, q_r$ — различные простые числа, ϑ_s может принимать лишь два значения $+1$ или -1 , а натуральные числа k_s принимают значения несравнимые между собой по модулям $q_s, s = 1, \dots, r$, т.е. $k_s \not\equiv k_t \pmod{q_s}, t = 1, \dots, r$.

Найденная асимптотика является нетривиальной при $q = q_1 \dots q_r \gg N^{1+\varepsilon}$, причём количество r может расти как $o(\ln N)$. Здесь $\varepsilon > 0$ — произвольная постоянная.

Ключевые слова: Символ Лежандра, метод Виноградова оценок сумм по простым, характер Дирихле, комбинаторное решето Виноградова, метод двойных сумм.

Библиография: 14 названий.

Для цитирования:

В. Н. Чубариков, Среднее значение произведений символов Лежандра по простым // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 2, с. 336–347.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 2.

UDC 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-336-347

The mean value of products of Legendre symbol over primes²

V. N. Chubarikov

¹Работа выполнена на механико-математическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова.

²The work was performed at the faculty of Mechanics and mathematics of Lomonosov Moscow state University.

Chubarikov Vladimir Nikolaevich — Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of the Department of Mathematical and Computer Methods of Analysis, Dean of the Mechanics and Mathematics Faculty, Moscow State University named after M. V. Lomonosov (Moscow).

e-mail: chubarik1@mech.math.msu.su; chubarik2009@live.ru

Abstract

In the paper the asymptotical formula as $N \rightarrow \infty$ for the number of primes $p \leq N$, satisfying to the system of equations

$$\left(\frac{p+k_s}{q_s}\right) = \vartheta_s, s = 1, \dots, r,$$

where $q_1, \dots, q_r$ — different primes, ϑ_s may be take only two values $+1$ or -1 , but natural numbers k_s take noncongruent values on modulus $q_s, s = 1, \dots, r$, i.e. $k_s \not\equiv k_t \pmod{q_s}, t = 1, \dots, r$, is found.

The finding asymptotics is nontrivial as $q = q_1 \dots q_r \gg N^{1+\varepsilon}$, moreover the number of r may grow up as $o(\ln N)$. Here $\varepsilon > 0$ is an arbitrary constant.

Keywords: The Legendre symbol, the Vinogradov method of estimating on sums over primes, the Dirichlet's character, the Vinogradov's combinatorial sieve, the method of double sums.

Bibliography: 14 titles.

For citation:

V. N. Chubarikov, 2019, The mean value of products of Legendre symbol over primes, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 2, pp. 336–347.

Введение. Формулировка основных результатов

В настоящей работе дано ещё одно применение метода И. М. Виноградова оценок арифметических сумм с простыми числами, касающегося проблемы распределения значений неглавного характера Дирихле на последовательности “сдвинутых простых чисел”, т.е. последовательности вида $p + k$ по модулю нечётного простого числа q при $q \rightarrow \infty$, причём p пробегает последовательные простые числа, k — фиксированное целое число с условием $(k, q) = 1$.

Здесь мы рассматриваем последовательность p последовательных значений простых чисел, $q_1, \dots, q_r$ — различные нечётные простые числа, $q = q_1 \dots q_r, (k_s, q_s) = 1, 1 \leq k_s \leq q_s, k_s \not\equiv k_t \pmod{q_t}, s \neq t, s, t = 1, \dots, r, \left(\frac{n}{q_s}\right)$ — символ Лежандра вычета n по модулю q , и $\vartheta_1, \dots, \vartheta_r$ — постоянные, принимающие всего два значения $+1$ и -1 .

При $q, N \rightarrow \infty$ требуется найти асимптотику $T = T(N, q)$ — числа решений системы уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{p+k_1}{q_1}\right) = \vartheta_1, \\ \dots \dots \\ \left(\frac{p+k_r}{q_r}\right) = \vartheta_r. \end{cases}$$

Нами доказано (теорема 2), что при $N \gg q^{1+\varepsilon}$ величина T асимптотически равна $\pi(N)/2^r$, где $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малая постоянная. Заметим, что асимптотика имеет место при $r = o(\ln N)$.

В основе нашего исследования лежит метод двойных сумм И. М. Виноградова (леммы 1 – 3) и его метод комбинаторного решета (леммы 4 – 6).

ТЕОРЕМА 1. Пусть p пробегает последовательные значения простых чисел, $q_1, \dots, q_r$ — различные нечётные простые числа, $q = q_1 \dots q_r, (k_s, q_s) = 1, 1 \leq k_s \leq q_s, k_s \not\equiv k_t \pmod{q_t}, s \neq t, s, t = 1, \dots, r$, и

$$T = \sum_{p \leq N} \left(\frac{p+k_1}{q_1}\right) \dots \left(\frac{p+k_r}{q_r}\right).$$

Тогда имеем

$$T \ll 2^{r/2} N^{1+\varepsilon} \left(\sqrt{\frac{1}{q} + \frac{q}{N}} + N^{-1/6} \right),$$

где постоянная в знаке $\ll$ зависит только от ε .

ТЕОРЕМА 2. Пусть p пробегает последовательные значения простых чисел, $q_1, \dots, q_r$ — различные нечётные простые числа, $q = q_1 \dots q_r$, $(k_s, q_s) = 1$, $1 \leq k_s \leq q_s$, $k_s \not\equiv k_t \pmod{q_s}$, $s \neq t$, $s, t = 1, \dots, r$, и $S(N)$ — число решений в простых числах $p \leq N$ следующей системы уравнений

$$\left(\frac{p + k_s}{q_s} \right) = \vartheta_s, s = 1, \dots, r,$$

где ϑ_s может принимать лишь два значения $+1$ или -1 .

Тогда имеем

$$S(N) = 2^{-r} \pi(N) + R(N), \quad R(N) \ll 2^{r/2} N^{1+\varepsilon} \left(\sqrt{\frac{1}{q} + \frac{q}{N}} + N^{-1/6} \right),$$

где постоянная в знаке $\ll$ зависит только от ε .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$S(N) = \sum_{p \leq N} 2^{-r} \prod_{s=1}^r \vartheta_s \left(\left(\frac{p + k_s}{q_s} \right) + \vartheta_s \right).$$

Раскрывая скобки и используя результат теоремы 1, находим искомое утверждение теоремы 2. $\square$

1. Вспомогательные утверждения

ЛЕММА 1. Пусть q_0 — нечётное простое число и

$$S_{q_0}(y_1, y_2) = \sum_{x=0}^{q_0-1} \left(\frac{(xy_1 + k)(xy_2 + k)}{q_0} \right).$$

Тогда

$$S_q(y_1, y_2) = \begin{cases} q_0, & \text{если } y_1 \equiv y_2 \equiv 0 \pmod{q_0}, \\ 0, & \text{если } y_1 y_2 \equiv 0 \pmod{q_0}, y_1 + y_2 \not\equiv 0 \pmod{q_0}, \\ q_0 - 1, & \text{если } y_1 \equiv y_2 \not\equiv 0 \pmod{q_0}, \\ -\left(\frac{y_1 y_2}{q_0}\right) & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (см. [2], вопросы к гл. V, § 8 а, с). $\square$

ЛЕММА 2. Пусть $q_1, \dots, q_r$ — различные нечётные простые числа, $q = q_1 \dots q_r$, $(k_s, q_s) = 1$, $1 \leq k_s \leq q_s$, $k_s \not\equiv k_t \pmod{q_s}$, $s \neq t$, $s, t = 1, \dots, r$, $\xi(x) \geq 0$, $\eta \geq 0$, и

$$S = \sum_{x=0}^{q-1} \sum_{y=0}^{q-1} \xi(x) \eta(y) \left(\frac{xy + k_1}{q_1} \right) \dots \left(\frac{xy + k_r}{q_r} \right),$$

$$\sum_{x=0}^{q-1} (\xi(x))^2 \leq X_0, \quad \sum_{y=0}^{q-1} (\eta(y))^2 \leq Y_0$$

Тогда имеем

$$|S| \leq \sqrt{2^r X_0 Y_0 q}.$$

Доказательство. Используя неравенство Коши, имеем

$$|S|^2 \leq X_0 \sum_{y_1, y_2=0}^{q-1} \eta(y_1)\eta(y_2)S_q(y_1, y_2) = X_0 \Sigma,$$

$$S_q(y_1, y_2) = \sum_{x=0}^{q-1} \prod_{s=1}^r \left(\frac{(xy_1 + k_s)(xy_2 + k_s)}{q_s} \right).$$

Далее воспользовавшись китайской теоремой об остатках ([1], гл. IV, §3, с. 57-58), найдём

$$S_q(y_1, y_2) = \prod_{s=1}^r S_{q_s}(Q_s Q'_s y_{1,s}, Q_s Q'_s y_{2,s}),$$

$$q = Q_s q_s, Q_s Q'_s \equiv 1 \pmod{q_s}, y_t = \sum_{s=1}^r Q_s Q'_s y_{t,s}, t = 1, 2,$$

где $y_{t,s}$ принимают значения из полной системы вычетов по модулю q_s .

Из леммы 1 следует, что часть суммы Σ , отвечающая $y_1 \equiv y_2 \pmod{q}$, не превосходит $Y_0 q$. Пусть теперь $y_{1,l_t} \equiv y_{2,l_t} \pmod{q_{l_t}}, t = 1, \dots, s \leq r$, а для остальных номеров l_t сравнения не имеют места. Это множество наборов (y_1, y_2) обозначим $K = K(l_1, \dots, l_s)$. Тогда часть суммы Σ , отвечающую таким наборам $(y_1, y_2) \in K$, обозначим $\Sigma(l_1, \dots, l_s)$. Далее получим

$$\Sigma = \sum_{s=0}^r \sum_{l_1, \dots, l_s} \Sigma(l_1, \dots, l_s).$$

По лемме 1 имеем

$$\begin{aligned} |\Sigma(l_1, \dots, l_s)| &\leq \sum_{(y_1, y_2) \in K(l_1, \dots, l_s)} \left| \prod_{s=1}^r S_{q_s}(Q_s Q'_s y_{1,s}, Q_s Q'_s y_{2,s}) \right| \leq \\ &\leq q \sum_{y_1=0}^{Q-1} \eta(y_1) \frac{1}{q_{l_{s+1}} \dots q_{l_r}} \sum_{y_{2,l_{s+1}}=0}^{q_{l_{s+1}}} \dots \sum_{y_{2,l_r}=0}^{q_{l_r}} \eta(y_2) = q \Sigma_s, \end{aligned}$$

где набор $(l_1, \dots, l_s, l_{s+1}, \dots, l_r)$ является перестановкой набора чисел $(1, \dots, r)$.

Из неравенства Коши находим

$$\Sigma_s^2 \leq Y_0 \sum_{y_{l_1}=0}^{q_{l_1}-1} \dots \sum_{y_{l_s}=0}^{q_{l_s}-1} \left(\frac{1}{q_{l_{s+1}} \dots q_{l_r}} \sum_{y_{2,l_{s+1}}=0}^{q_{l_{s+1}}} \dots \sum_{y_{2,l_r}=0}^{q_{l_r}} \eta(y_2) \right)^2 = Y_0 \Sigma_{s,0},$$

где $y_2 = \sum_{s=1}^r Q_s Q'_s y_{2,s}, 0 \leq y_{2,s} < q_s$.

Вновь воспользуемся неравенством Коши. Получим

$$\Sigma_{s,0} \leq Y_0.$$

Поскольку количество всевозможных наборов $(l_1, \dots, l_s), 1 \leq l_1, \dots, l_s \leq r$, равно $\binom{r}{s}$, имеем искомое неравенство.

Лемма 2 доказана. $\square$

ЛЕММА 3. Пусть $q_1, \dots, q_r$ — различные нечётные простые числа, $q = q_1 \dots q_r$, $(k_s, q_s) = 1$, $1 \leq k_s \leq q_s$, $k_s \not\equiv k_t \pmod{q_s}$, $s \neq t$, $s, t = 1, \dots, r$, $\xi(x) \geq 0$, $\eta(y) \geq 0$, и

$$S = \sum_{x=M+1}^{M+X} \sum_{y=N+1}^{N+Y} \xi(x)\eta(y) \left(\frac{xy+k_1}{q_1} \right) \dots \left(\frac{xy+k_r}{q_r} \right),$$

$$\xi(x) \leq \alpha, \eta(y) \leq \beta.$$

Тогда имеем

$$|S| \leq 5\alpha\beta 2^{r/2}XYF, \quad F = \sqrt{\frac{1}{X} + \frac{1}{Y} + \frac{1}{q} + \frac{q}{XY}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся результатом леммы 2. Имеем

$$X_0 \leq \begin{cases} \alpha^2 X, & \text{если } X \leq q, \\ 4\alpha^2 X^2 q^{-1}, & \text{если } X > q, \end{cases} \quad Y_0 \leq \begin{cases} \alpha^2 Y, & \text{если } Y \leq q, \\ 4\alpha^2 Y^2 q^{-1}, & \text{если } Y > q. \end{cases}$$

Поэтому

$$|S| \leq 2^{r/2} \alpha \beta ((XYq)^{1/2} + 4XYq^{-1/2} + 2XY^{1/2} + 2X^{1/2}Y) \leq 5 \cdot 2^{r/2} \alpha \beta XYF.$$

Лемма 3 доказана. $\square$

ЛЕММА 4. Пусть $\varepsilon_0 < 0,001$, $N^{0,2} \leq H \leq N^{0,5}$, F — произведение простых с условием $p \leq H$. Тогда, полагая

$$D = r^{\frac{\ln r - 1}{\ln(1+\varepsilon_0)}}; r = \ln N,$$

делители d числа F , не превосходящие N , можно распределить среди $< D$ совокупностей со следующими свойствами:

а). Числа d , принадлежащие одной и той же совокупности, обладают одним и тем же числом β простых сомножителей, а следовательно, одним и тем же значением $\mu(d) = (-1)^\beta$.

б). Одна из совокупностей, которую мы будем называть простейшей, состоит из единственного числа $d = 1$. Для этой совокупности полагаем $\varphi = 1$ и, следовательно, имеем $\varphi = d = 1$. Каждой из оставшихся совокупностей отвечает своё φ такое, что все числа этой совокупности удовлетворяют условию

$$\varphi < d \leq \varphi^{1+\varepsilon_0}.$$

в). При этом при любом U с условием $0 \leq U < \varphi$ существуют две такие совокупности чисел d : числа d' и числа d'' (совокупность чисел d'' может оказаться и простейшей) с соответствующими φ' и φ'' , удовлетворяющими условиям $\varphi'\varphi'' = \varphi$, $U \leq \varphi' < UH$, что при некотором натуральном B все числа d выбранной совокупности, каждое B раз получим, если из всех произведений $d'd''$ выберем лишь удовлетворяющие условию $(d', d'') = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (см. [1], лемма 4, с. 71). $\square$

ЛЕММА 5. Пусть при $x \leq N$ функция $\Phi(x)$ подчинена условию $|\Phi(x)| \leq \Phi_0$. Пусть p пробегает простые числа, Q обозначает произведение простых чисел с условием $N^{0,2} < p \leq N$, наконец,

$$S = \sum_{p \leq N} \Phi(p), \quad W_s = \sum_{\substack{y_1 | Q \\ y_1 \dots y_s \leq N}} \dots \sum_{y_s | Q} \Phi(y_1 \dots y_s).$$

Тогда при некоторых постоянных $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ будем иметь

$$S = \lambda_1 W_1 + \lambda_2 W_2 + \lambda_3 W_3 + \lambda_4 W_4 + O(N^{0,8} \Phi_0).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (см.[1], лемма 5, с.73). $\square$

ЛЕММА 6. Пусть при $x \leq N$ функция $\Phi(x)$ подчинена условию $|\Phi(x)| \leq \Phi_0$. Пусть p пробегает простые числа, Q обозначает произведение простых чисел с условием $N^{0,2} < p \leq N$, наконец, при натуральном $s \leq 4$, имеем

$$W_s = \sum_{\substack{y_1|Q \\ y_1 \dots y_s \leq N}} \dots \sum_{\substack{y_s|Q}} \Phi(y_1 \dots y_s).$$

Тогда

$$W_s \ll \sum |T| + N^{0,8+\varepsilon} \Phi_0,$$

где суммирование распространяется на $\ll N^\varepsilon$ слагаемых двух видов.

Слагаемое $|T|$ первого вида удовлетворяет неравенству

$$|T| \leq \sum_{\delta} |T_{\delta}|,$$

где δ пробегает возрастающую последовательность натуральных чисел. Иногда последовательность сводится к единственному числу $\delta = 1$ и тогда слагаемое называется простейшим,

$$T_{\delta} = \sum_{\substack{X \leq \delta x < X^{1+\varepsilon_0} \\ \delta^2 xy \leq N}} \sum_{Y \leq \delta y < Y^{1+\varepsilon_0}} \Phi(\delta^2 xy);$$

$$N^{0,4} \leq X \ll N^{0,6}, \quad N^{0,6} \leq XY \leq N, X \geq Y.$$

При этом x и y пробегают неубывающие последовательности натуральных чисел с условием, что $x = x_0$ при заданном x_0 имеет $\ll N^\varepsilon$ решений, а $y = y_0$ при заданном y_0 имеет $\ll N^\varepsilon$ решений.

Слагаемое $|T|$ второго вида представляется равенством

$$T = \sum_{\substack{X \leq x < X^{1+\varepsilon_0} \\ xt \leq N}} \sum_{\substack{M \leq t < M' \\ xt \leq N}} \Phi(xt), \quad X < N^{0,8}, M > N^{0,2}.$$

При этом x пробегает неубывающую последовательность натуральных чисел с условием, что $x = x_0$ при заданном x_0 имеет $\ll N^\varepsilon$ решений, а t пробегает последовательные натуральные числа.

Кроме описанного "основного" подразделения слагаемых $|T|$ на два вида, иногда будем применять "особое" подразделение на два вида, причём первый особый вид отличается от первого основного вида лишь условием

$$N^{1/3} < X \ll N^{2/3} \quad (\text{вместо } N^{0,4} < X \ll N^{0,6}).$$

А второй особый вид отличается от второго основного вида лишь условием

$$X < N^{1/3}, M > N^{2/3} \quad (\text{вместо } X < N^{0,8}, M > N^{0,2}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. см.[1], лемма 6, с.74-78. $\square$

2. Доказательство теоремы 1.

Положим

$$\Phi(p) = \left(\frac{p+k_1}{q_1} \right) \dots \left(\frac{p+k_r}{q_r} \right), S = \sum_{p \leq N} \Phi(p).$$

По лемме 4 при некоторых постоянных $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, получим

$$S = \lambda_1 W_1 + \lambda_2 W_2 + \lambda_3 W_3 + \lambda_4 W_4,$$

где при $Q = \prod_{N^{0,2} < p \leq N} p$ и при $s = 1, 2, 3, 4$, имеем

$$W_s = \sum_{\substack{y_1 | Q \\ y_1 \dots y_s \leq N}} \dots \sum_{\substack{y_s | Q \\ y_1 \dots y_s \leq N}} \Phi(y_1 \dots y_s).$$

Далее, по лемме 5, рассматривая особое подразделение сумм на два вида, находим

$$W_s \ll \sum |T| + N^{0,8} \Phi_0,$$

причём для слагаемого $|T|$ первого вида имеем

$$|T| \leq \sum_{\delta} |T_{\delta}|, \quad T_{\delta} = \sum_{\substack{X \leq \delta x \ll X^{1+\varepsilon_0} \\ \delta^2 xy \leq N}} \sum_{\substack{Y \leq \delta y \ll Y^{1+\varepsilon_0} \\ \delta^2 xy \leq N}} \Phi(\delta^2 xy);$$

$$N^{1/3} < X \ll N^{2/3}, N^{0,8} \leq XY \leq N, X \geq Y;$$

а слагаемое $|T|$ второго вида имеет форму

$$T = \sum_{X \leq x < X^{1+\varepsilon_0}} \sum_{\substack{M \leq m < M' \\ xm \leq N}} \Phi(xm), \quad X < N^{1/3}, M > N^{2/3}.$$

ЛЕММА 7. Пусть $q_1, \dots, q_r$ — различные нечётные простые числа, $q = q_1 \dots q_r$, $(k_s, q_s) = 1$, $1 \leq k_s \leq q_s$, $k_s \not\equiv k_t \pmod{q_s}$, $s \neq t$, $s, t = 1, \dots, r$; u — натуральное число, δ пробегает некоторую последовательность натуральных чисел, и T_{δ} — сумма вида

$$T_{\delta} = \sum_{X \leq \delta x \ll Xg} \sum_{\substack{Y \leq \delta y \ll Yh \\ \delta^2 xy \leq N}} \Phi(\delta^2 xy); g \ll X^{\varepsilon_0}, h \ll Y^{\varepsilon_0},$$

где X и Y — числа с условиями $N^{1/3} < X < N^{2/3}$, $XY > N^{2/3}$, причём при заданном x_0 уравнение $x = x_0$ имеет $\ll N^{\varepsilon_0}$ решений, а при заданном y_0 уравнение $y = y_0$ имеет $\ll Y^{\varepsilon_0}$ решений.

Для любого фиксированного целого δ представим q в виде $q = q'q''$, где $q' \mid \delta$, $(q'', \delta) = 1$. Тогда имеем $q'' > q^{2/3}$ и

$$T_{\delta} \ll 2^{r/2} N^{1+\varepsilon_1} \delta^{-1} \Delta, \Delta = \sqrt{\frac{1}{X} + \frac{X}{N} + \frac{1}{q} + \frac{q}{N}} + N^{-1/6}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ограничимся значениями $Y > N^{1/6}$, так как в противном случае ($Y \leq N^{1/6}$) тривиальная оценка

$$T \ll XY \leq N^{5/6} \ll N\Delta$$

является достаточной для утверждения леммы.

Далее можно считать, что $\delta < \Delta^{-1}$, поскольку при $\delta \geq \Delta^{-1}$ тривиальная оценка

$$|T_\delta| \ll N^{1+\varepsilon'} \delta^{-2} \ln N \ll N^{1+\varepsilon'} \delta^{-1} \Delta$$

даёт искомую в утверждении леммы оценку.

Отсюда, поскольку

$$\Delta = \sqrt{\frac{1}{X} + \frac{q''}{N} + \frac{1}{q''} + \frac{q''}{N}} + N^{-1/6} > \sqrt{\frac{1}{q''}},$$

выполняется неравенство

$$\delta < \Delta^{-1} < \sqrt{q''}.$$

Следовательно, $q' = (\delta, q) < \sqrt{q''}$ и $q'' > q^{2/3}$.

Положим $X_1 = X\delta^{-1}$, $Y_1 = Y\delta^{-1}$, $N_1 = N\delta^{-2}$. Находим

$$|T_\delta| = \left| \sum_{\substack{X_1 \leq x \ll X_1 g \\ xy \leq N_1}} \sum_{Y_1 \leq y \ll Y_1 h} \Phi_1(xy) \right|,$$

где

$$\Phi_1(u) = \prod_{q_s | q''} \left(\frac{u + k'_s}{q_s} \right), \delta^2 k'_s \equiv k_s \pmod{q_s},$$

и q_s пробегает все простые делители числа q'' .

Далее разбиваем промежуток $X_1 \leq x \leq X_1 g$ на промежутки вида $X'_1 \leq x < X''_1$, $2X'_1 \leq X''_1 < 4X'_1$, в количестве, не превосходящем $\ln N$. Имеем

$$T_\delta \ll |T'_\delta| \ln N, T'_\delta = \sum_{\substack{X'_1 \leq x \ll X''_1 \\ xy \leq N_1}} \sum_{Y_1 \leq y \ll Y_1 h} \Phi_1(xy).$$

Затем область суммирования в сумме T'_δ разбиваем на две: область Ω_1 , определяемую неравенствами

$$X'_1 \leq x < X''_1, \quad 0 < y \leq N_1/X''_1,$$

и область Ω_2 , определяемую неравенствами

$$X'_1 \leq x < X''_1, \quad N_1/X''_1 < y \leq N_1/x.$$

В соответствии с разбиением области Ω на области Ω_1 и Ω_2 положим

$$T'_\delta = T_{\delta,1} + T_{\delta,2},$$

где

$$T_{\delta,1} = \sum_{(x,y) \in \Omega_1} \Phi_1(xy), T_{\delta,2} = \sum_{(x,y) \in \Omega_2} \Phi_1(xy).$$

По лемме 3 имеем

$$T_{\delta,1} \ll 2^{r/2} N^{1+\varepsilon_1} \sqrt{\frac{1}{X'_1} + \frac{X'_1}{N_1} + \frac{1}{q''} + \frac{q''}{N_1}}.$$

Область Ω_2 разобьем на прямоугольные области $\Omega_{2,t,s}$, $1 \leq t \leq 2^{s-1}$, с основанием

$$X'_{t,s} = X'_1 + \frac{(t-1)(X''_1 - X'_1)}{2^{s-1}} \leq x < X'_1 + \frac{(2t-1)(X''_1 - X'_1)}{2^s} = X''_{t,s},$$

и высотой

$$Y'_{t,s} = \frac{N_1}{X'_1 + 2t\Delta_s} < Y''_{t,s} = y \leq \frac{N_1}{X'_1 + (2t-1)\Delta_s}, \Delta_s = \frac{X''_1 - X'_1}{2^s},$$

и область Ω'_2 , площадь которой не превосходит

$$\frac{X'_1}{2^s} \frac{N_1}{X'_1} = \frac{N_1}{2^s}.$$

Положим $s_0 = [-\log_2 \Delta] + 1$. Тогда

$$T_{\delta,2} = \sum_{s=1}^{s_0} \sum_{t=1}^{2^{s-1}} T_{\delta,2,t,s} + T'_{\delta,2}, T_{\delta,2,t,s} = \sum_{(x,y) \in \Omega_{2,t,s}} \Phi_1(x,y), T'_{\delta,2} = \sum_{(x,y) \in \Omega'_2} \Phi_1(x,y).$$

Следовательно, при $s = s_0$ из тривиальной оценки имеем

$$T'_{\delta,2} = \sum_{(x,y) \in \Omega'_2} \Phi_1(x,y) \leq \frac{N_1}{2^{s_0}} \leq N_1 \Delta$$

Далее при $1 \leq t \leq 2^s$, $s \leq s_0$, по лемме 3 находим

$$\begin{aligned} T_{\delta,2,t,s} &\ll 2^{r/2} 2^{-2s} N_1^{1+\varepsilon_2} \sqrt{\frac{2^s}{X'_1} + \frac{X'_1}{2^s N_1} + \frac{1}{q''} + \frac{q''}{N_1 2^{2s}}} \ll \\ &\ll \frac{N_1^{1+\varepsilon}}{2^s} \cdot 2^{r/2} \sqrt{\frac{1}{X''_1} + \frac{X''_1}{N_1} + \frac{1}{q''} + \frac{q''}{N_1}}. \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$T_{2,\delta} \ll \frac{N^{1+\varepsilon}}{\delta} 2^{r/2} \sqrt{\frac{1}{X} + \frac{X}{N} + \frac{1}{q} + \frac{q}{N}}.$$

Лемма 7 доказана. $\square$

ЛЕММА 8. Пусть $q_1, \dots, q_r$ — различные нечётные простые числа, $q = q_1 \dots q_r$, $(k_s, q_s) = 1$, $1 \leq k_s \leq q_s$, $k_s \not\equiv k_t \pmod{q_s}$, $s \neq t$, $s, t = 1, \dots, r$, $\Phi(u) = \left(\frac{u+k_1}{q_1}\right) \dots \left(\frac{u+k_r}{q_r}\right)$,
и

$$T = \sum_{X < x \leq Xg} \sum_{\substack{M \leq m < M' \\ xm \leq N}} \Phi(xm), g \ll N^{\varepsilon_0}, M > N^{2/3}, M < M' \leq 2M,$$

где $1 \leq X < N^{1/3}$, x пробегает неубывающую последовательность целых чисел с условием, что при заданном x_0 уравнение $x = x_0$ имеет $\ll N^{\varepsilon_0}$ решений, а переменная t пробегает последовательные натуральные числа.

Тогда имеем

$$T \ll 2^{r/2} N^{1+\varepsilon_1} \sqrt{\frac{1}{q} + \frac{q}{N}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $xt \leq N$ оценим сверху модуль внутренней суммы T_x . Имеем

$$T_x = \sum_{M \leq m < M'} \Phi(xm), M > N^{2/3}, M < M' \leq 2M.$$

Пусть $(x, q) = q', q'' = q/q'$. Тогда, поскольку при $q' < q$ полная сумма

$$\sum_{m=M_0+1}^{m=M_0+q} \Phi(mx) = 0,$$

находим

$$T_x \ll \sqrt{q''} \ln q''.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} T &= \sum_{X < x \leq Xg} T_x = \sum_{\substack{q' | q \\ q' < q}} \sum_{\substack{X < x \leq Xg \\ (x, q) = q'}} T_x + N^{\varepsilon_0} M \left(\frac{X}{q} + 1 \right) \ll \\ &\ll N^{\varepsilon_0} \left(\sum_{\substack{q' | q \\ q' < q}} X \sqrt{q''} \ln q'' + M \left(\frac{X}{q} + 1 \right) \right) \ll \\ &\ll N^{\varepsilon_0} \left(\frac{N}{M} \sqrt{q} \ln q \prod_{s=1}^r \left(1 + \frac{1}{\sqrt{q_s}} \right) + \frac{N}{q} \right) \ll \\ &\ll N^{\varepsilon_0} \left(\frac{N}{M} 2^{2\sqrt{r}} \sqrt{q} \ln q + \frac{N}{q} \right) \ll N^{1+\varepsilon_1} 2^{r/2} \sqrt{\frac{1}{q} + \frac{q}{N}}. \end{aligned}$$

Лемма доказана. $\square$

Далее теорема 1 прямо следует из лемм 4 – 7.

Заключение

Теорема 2 является следствием теоремы 1 и показывает "асимптотическую независимость" символов Лежандра по различным простым модулям на последовательности простых, сдвинутых на различные фиксированные вычеты, при условии, что промежуток осреднения больше, чем произведение модулей. В доказательстве мы следуем схеме рассуждений И. М. Виноградова для оценки сумм неглавного характера Дирихле по сдвинутым простым [1], с. 88–93. В дальнейшем мы предполагаем доказать это утверждение при условии, что промежуток осреднения будет больше квадратного корня из этого произведения. Путь этого улучшения указан И. М. Виноградовым [2]–[5] и А. А. Карацубой [6, 7]. Отметим также, что количество модулей может расти вместе с ростом промежутка осреднения. В настоящей работе использовались идеи и методы работ [1]–[14].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Виноградов И. М. Особые варианты метода тригонометрических сумм. — М.: Наука, 1976, 119 с.
2. Виноградов И. М. Распределение квадратичных вычетов и невычетов вида $p + k$ по простому модулю // Матем. сб., 1938, **3(45)**, 311–320.

3. Виноградов И. М. Уточнение метода оценок с простыми числами// Изв. АН СССР. Серия матем., 1943, **7**, 17–34.
4. Виноградов И. М. Новый подход к оценке суммы значений $\chi(p+k)$ // Изв. АН СССР. Серия матем., 1952, **16**, 197–210.
5. Виноградов И. М. Улучшение оценки для суммы значений $\chi(p+k)$ // Изв. АН СССР. Серия матем., 1953, **17**, 285–290.
6. Карацуба А. А. Суммы характеров с простыми числами// Изв. АН СССР. Серия матем., 1970, **34**, 299–321.
7. Карацуба А. А. Суммы характеров с простыми числами, принадлежащими арифметической прогрессии// Изв. АН СССР. Серия матем., 1971, **35**, 469–484.
8. Виноградов И. М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел. — М.: Наука, 1980.
9. Виноградов И. М. Основы теории чисел. Изд. 10-е. — СПб.: Изд-во "Лань" 2004, 176 с.
10. Hua L.-K. Selected Papers. — New York Inc.: Springer Verlag, 1983, pp. 888.
11. Хуа Л.-Г. Метод тригонометрических сумм и его применения в теории чисел. — М.: Мир, 1964, с. 188.
12. Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н. Теория кратных тригонометрических сумм. — М.: Наука, 1987.
13. Архипов Г. И. Избранные труды. — Орёл: Изд-во Орловского государственного университета, 2013. 464 с.
14. Arkhipov G. I., Chubarikov V. N., Karatsuba A. A. Trigonometric Sums in Number Theory and Analysis. — Berlin–New York: Walter de Gruyter (de Gruyter Expositions in Mathematics 39). 2004.

REFERENCES

1. Vinogradov I. M. Special Variants of the Method of Trigonometric Sums. Moscow: Nauka, 1976, pp. 119.
2. Vinogradov I. M. Distribution of quadratic residues and non-residues of the type $p+k$ with the respect to prime modulus// Matem.sb., 1938, **3(45)**, 311–320 (abstract in English).
3. Vinogradov I. M. An improvement of the method of estimating sums of primes// Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Matem., 1943, **7**, 17–34 (abstract in English).
4. Vinogradov I. M. A new approach to estimating the values of $\chi(p+k)$ // Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Matem., 1952, **16**, 17–34 (abstract in English).
5. Vinogradov I. M. An improved estimate of the sums of $\chi(p+k)$ // Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Matem., 1953, **17**, 17–34 (abstract in English).
6. Karatsuba A. A. Character sums over primes// Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Matem., 1970, **34**, 299–321. (abstract in English).
7. Karatsuba A. A. Character sums over primes belonging to the arithmetic progression// Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Matem., 1971, **35**, 469–484 (abstract in English).

8. Vinogradov I. M. The method of trigonometric sums in number theory. 2-nd edition, revised and enlarged, Moscow, Nauka, 1980, pp. 144.
9. Vinogradov I. M. Elements of Number Theory. 10-th Edition. Sankt-Petersburg.: Publ. house "Lan' 2004, pp. 176.
10. Hua L.-K. Selected Papers. New York Inc.: Springer Verlag, 1983, pp. 888.
11. Hua L.-K. The method of trigonometric sums in number theory. Moscow: Mir, 1964, pp. 188.
12. Arkhipov G. I., Karatsuba A. A., Chubarikov V. N. The theory of multiple trigonometric sums. Moscow: Nauka. 1987, pp. 368.
13. Arkhipov G. I. Selected Papers. Orjol: Izd-vo Orlovskogo gosudarstvennogo universiteta. 2013, pp. 464.
14. Arkhipov G. I., Chubarikov V. N., Karatsuba A. A. Trigonometric Sums in Number Theory and Analysis. — Berlin–New York: Walter de Gruyter (de Gruyter Expositions in Mathematics 39). 2004.

Получено 19.05.2019 г.

Принято в печать 12.07.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 2.

УДК 517.5

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-348-365

О неравенствах типа Колмогорова для периодических функций двух переменных в L_2

М. Ш. Шабозов, М. О. Ақобиршоев

Шабозов Мирганд Шабозович — доктор физико-математических наук, профессор, кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений, Таджикский национальный университет (г. Душанбе).

e-mail: shabozov@mail.ru

Ақобиршоев Мухиддин Отамшоевич — кандидат физико-математических наук, доцент, кафедры информационных систем и технологий, Технологический университет Таджикистана (г. Душанбе).

e-mail: —

Аннотация

Пусть $L_2 := L_2(Q)$, $Q := \{0 \leq x, y \leq 2\pi\}$ — гильбертово пространство суммируемых с квадратом функций $f(x, y)$ в области Q с конечной нормой

$$\|f\|_2 := \|f\|_{L_2(Q)} := \left\{ \frac{1}{4\pi^2} \iint_{(Q)} |f(x, y)|^2 dx dy \right\}^{1/2} < \infty,$$

а $L_2^{(r,s)}(Q)$ — класс функций $f \in L_2$, у которых производные $f^{(k,l)} \in C(Q)$, а $f^{(r,l)}$, $f^{(k,s)}$ ($0 \leq k \leq r-1$, $0 \leq l \leq s-1$, $r, s \geq 2$, $r, s \in \mathbb{N}$), $f^{(r,s)}$ — кусочно-непрерывны и $f^{(r,s)} \in L_2$. В работе доказано, что для произвольной $f \in L_2^{(r,s)}$ имеет место точное неравенство типа Колмогорова следующего вида

$$\|f^{(r-k,s-l)}\|_{L_2(Q)} \leq \|f\|_{L_2(Q)}^{kl/rs} \cdot \|f^{(r,0)}\|_{L_2(Q)}^{(1-\frac{k}{r})\frac{l}{s}} \cdot \|f^{(0,s)}\|_{L_2(Q)}^{\frac{k}{r}(1-\frac{l}{s})} \cdot \|f^{(r,s)}\|_{L_2(Q)}^{(1-\frac{k}{r})(1-\frac{l}{s})}.$$

Найдено также точное неравенство типа Колмогорова для наилучших приближений $\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f^{(r-k,s-l)})_2$ промежуточных производных $f^{(r-k,s-l)}$ функций $f \in L_2^{(r,s)}$ тригонометрическими “углами”, имеющее вид

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{m-1,n-1}(f^{(r-k,s-l)})_2 &\leq \\ &\leq (\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f)_2)^{kl/rs} \cdot \left(\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f^{(r,0)})_{L_2} \right)^{(1-\frac{k}{r})\frac{l}{s}} \cdot \\ &\cdot \left(\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f^{(0,s)})_2 \right)^{\frac{k}{r}(1-\frac{l}{s})} \cdot \left(\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f^{(r,s)})_2 \right)^{(1-\frac{k}{r})(1-\frac{l}{s})}, \end{aligned}$$

и дано приложение к задаче об одновременном приближении функции и ее промежуточных производных в L_2 . Вычислены точные значения линейных и колмогоровских квазипоперечников некоторых классов функций.

Ключевые слова: неравенства типа Колмогорова, тригонометрические “углы”, квазиполином, наилучшее приближение, квазипоперечники.

Библиография: 25 названий.

Для цитирования:

М. Ш. Шабозов, М. О. Акобиршоев. О неравенствах типа Колмогорова для периодических функций двух переменных в L_2 // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 2, с. 348–365.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 2.

UDC 517.5

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-348-365

About Kolmogorov type of inequalities for periodic functions of two variables in L_2

M. Sh. Shabozov, M. O. Akobirshoev

Shabozov Mirgand Shabozovich — doctor of physical and mathematical Sciences, Professor, Department of functional analysis and differential equations, Tajik national University (Dushanbe).
e-mail: shabozov@mail.ru

Akobirshoev Mukhiddin Otasevic — candidate of physical and mathematical Sciences, associate Professor, Department of information systems and technologies, Technological University of Tajikistan (Dushanbe).
e-mail: —

Abstract

Let $L_2 := L_2(Q)$, $Q := \{0 \leq x, y \leq 2\pi\}$ be the Hilbert space of summable with square of functions $f(x, y)$ in Q domain with norm

$$\|f\|_2 := \|f\|_{L_2(Q)} := \left\{ \frac{1}{4\pi^2} \iint_{(Q)} |f(x, y)|^2 dx dy \right\}^{1/2} < \infty,$$

and $L_2^{(r,s)}(Q)$ is class of functions $f \in L_2$ whose derivatives $f^{(k,l)} \in C(Q)$, a $f^{(r,l)}$, $f^{(k,s)}$ ($0 \leq k \leq r-1$, $0 \leq l \leq s-1$, $r, s \geq 2$, $r, s \in \mathbb{N}$), $f^{(r,s)}$ are sectionally continuous and $f^{(r,s)} \in L_2$. In this paper was proved that for arbitrary function $f \in L_2^{(r,s)}$ is hold the following sharp Kolmogorov type inequality

$$\|f^{(r-k,s-l)}\|_{L_2(Q)} \leq \|f\|_{L_2(Q)}^{kl/rs} \cdot \|f^{(r,0)}\|_{L_2(Q)}^{(1-\frac{k}{r})\frac{l}{s}} \cdot \|f^{(0,s)}\|_{L_2(Q)}^{\frac{k}{r}(1-\frac{l}{s})} \cdot \|f^{(r,s)}\|_{L_2(Q)}^{(1-\frac{k}{r})(1-\frac{l}{s})}.$$

Also, the Kolmogorov type inequality was found for the best approximation $\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f^{(r-k,s-l)})_2$ of intermediate derivatives $f^{(r-k,s-l)}$ of functions $f \in L_2^{(r,s)}$ by trigonometric “angles” with form

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{m-1,n-1}(f^{(r-k,s-l)})_2 &\leq \\ &\leq (\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f)_2)^{kl/rs} \cdot \left(\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f^{(r,0)})_{L_2} \right)^{(1-\frac{k}{r})\frac{l}{s}} \cdot \\ &\cdot \left(\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f^{(0,s)})_2 \right)^{\frac{k}{r}(1-\frac{l}{s})} \cdot \left(\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f^{(r,s)})_2 \right)^{(1-\frac{k}{r})(1-\frac{l}{s})}, \end{aligned}$$

This obtained inequality was applied for the problems of joint approximation and their application in L_2 . The sharp values of linear and Kolmogorov widths for some classes of functions were calculated.

Keywords: Kolmogorov’s type of inequalities, generalized polynomial, quasipolynomial, the best approximation, quasiwidth.

Bibliography: 25 titles.

For citation:

M. Sh. Shabozov, M. O. Akobirshoev, 2019, "About Kolmogorov type of inequalities for periodic functions of two variables in L_2 ", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 2, pp. 348–365.

1. Введение

Неравенства, в которых нормы промежуточных производных оцениваются через нормы самих функций и нормы производных более высокого порядка, называются неравенствами типа Колмогорова. Особенно важны неулучшаемые неравенства такого типа. Для функций одной переменной один из наиболее ярких результатов был получен А. Н. Колмогоровым [1, 2]. Именно в связи с этим неравенства для промежуточных производных часто называются неравенствами типа Колмогорова. В монографии [3] приведены и систематизированы результаты исследований по неравенствам для норм промежуточных производных функций как классических, так и полученных в последнее время. К настоящему времени известно значительное количество точных неравенств типа Колмогорова для функции одной переменной, обстоятельный обзор которых можно найти в [3, 4, 5]. Для производных же целого порядка функций двух и более переменных точных неравенств типа Колмогорова известно намного меньше (см., например, [6, 7, 8, 9, 10, 11]). Во многих вопросах анализа, наряду с производными целого порядка, рассматриваются и производные дробного порядка [12]. В последнее время получены некоторые точные неравенства типа Колмогорова для производных дробного порядка [13, 14, 15, 16, 17]. Хорошо известно, что задача о получении точных неравенств типа Колмогорова тесно связана с задачей Стечкина о приближении неограниченного оператора ограниченными (см., например, [3, 4, §7.1]).

В данной статье мы докажем новые точные неравенства для периодических функций двух переменных, оценивающие L_2 -норму промежуточных частных производных через L_2 -норму самой функции и L_2 -норму старшей частной производной, а также обобщим этот результат на наилучшие приближения функции и её последовательности производных тригонометрическими “углами” [17] или обобщенными полиномами (квазиполиномами) [18].

Статья структурирована следующим образом. В пункте 1 мы приводим необходимые определения, постановки задач и упоминаем известные результаты, непосредственно примыкающие к теме данной статьи, доказываем неравенства типа Колмогорова для дифференцируемых периодических функций двух переменных. В пункте 2 изучаем вопрос наилучшего приближения функций тригонометрическими “углами” и докажем ряд точных неравенств для наилучшего приближения частных и смешанных промежуточных производных. В пункте 3 доказываем неравенство типа Колмогорова для наилучшего приближения промежуточных частных производных через наилучшего приближения самой функции, старших частных и смешанных производных и дадим её приложения к одной экстремальной задаче аппроксимации. Наконец, в пункте 4 вычисляем точные значения квазипоперечников некоторых классов функций.

2. Определения, вспомогательные факты.

Неравенство Колмогорова для $L_2^{(r,s)}(Q)$

В этом пункте излагается неравенства типа Колмогорова для периодических дифференцируемых функций двух переменных в $L_2 := L_2(Q)$, $Q := \{0 \leq x, y \leq 2\pi\}$ с конечной нормой

$$\|f\|_{L_2(Q)} := \left\{ \frac{1}{4\pi^2} \iint_{(Q)} |f(x, y)|^2 dx dy \right\}^{1/2} < \infty.$$

Отметим, что неравенство типа Колмогорова для функций двух переменных в различных нормах найдены В. Н. Коноваловым [6], О. А. Тимошиным [8], В. Ф. Бабенко [10], а для промежуточных производных в многомерном случае — А. П. Буслаевым, В. М. Тихомировым [7] и В. Г. Тимофеевым [9]. Затем эта тематика была развита в ряде работ С. Б. Вакарчука

с учениками [11,19] как в действительной, так и в комплексных областях, а также многими другими авторами (см., например, цитированную литературу в [20]).

Через $C^{(r,s)}(Q)$, $r, s \in \mathbb{N}$ обозначим множество функций $f(x, y)$, имеющих в квадрате Q непрерывные частные производные $f^{(\mu,\nu)}(x, y) := \partial^{\mu+\nu} f / \partial x^\mu \partial y^\nu$, $\mu \leq r$, $\nu \leq s$, а через $L_2^{(r,s)}(Q)$, $r, s \in \mathbb{N}$ — множество функций $f(x, y) \in C^{(r-1,s-1)}(Q)$, $r, s \in \mathbb{N}$, у которых частные производные $f^{(r,\nu)}(x, y)$, $r \in \mathbb{N}$, $\nu = \overline{0, s-1}$, $f^{(\mu,s)}(x, y)$, $\mu = \overline{0, r-1}$, $s \in \mathbb{N}$ существуют, кусочно-непрерывны, допускают перемену порядка дифференцирования и $f^{(r,s)}(x, y) \in L_2(Q)$.

Пусть $f \in L_2(Q)$ имеет формальное разложение в двойной ряд Фурье

$$f(x, y) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} c_{pq}(f) e^{i(px+qy)}, \quad (1)$$

где

$$c_{pq}(f) := \frac{1}{4\pi^2} \iint_{(Q)} f(x, y) e^{-i(px+qy)} dx dy.$$

Для функции $f \in L_2^{(r,s)}(Q)$, её частных производных $f^{(r,0)}(x, y)$ ($r \in \mathbb{N}$), $f^{(0,s)}(x, y)$ ($s \in \mathbb{N}$), а также смешанных производных $f^{(r-k,s-l)}(x, y)$ ($k, l \in \mathbb{Z}_+$, $0 \leq k \leq r$, $0 \leq l \leq s$), исходя из равенства (1), в силу тождества Парсеваля запишем:

$$\|f\|_{L_2(Q)}^2 = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \rho_{p,q}^2(f), \quad (2)$$

$$\|f^{(r,0)}\|_{L_2(Q)}^2 = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} p^{2r} \rho_{p,q}^2(f), \quad (3)$$

$$\|f^{(0,s)}\|_{L_2(Q)}^2 = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} q^{2s} \rho_{p,q}^2(f), \quad (4)$$

$$\|f^{(r-k,s-l)}\|_{L_2(Q)}^2 = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} p^{2(r-k)} q^{2(s-l)} \rho_{p,q}^2(f), \quad (5)$$

$$\|f^{(r,s)}\|_{L_2(Q)}^2 = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} p^{2r} q^{2s} \rho_{p,q}^2(f), \quad (6)$$

где

$$\rho_{pq}^2(f) = |c_{-p,-q}(f)|^2 + |c_{-p,q}(f)|^2 + |c_{p,-q}(f)|^2 + |c_{p,q}(f)|^2. \quad (7)$$

В этих обозначениях имеет место следующая

Теорема 1. Для произвольной функции $f \in L_2^{(r,s)}(Q)$ ($r, s = 2, 3, \dots$) при всех $k = \overline{1, r-1}$ и $l = \overline{1, s-1}$ имеют место неравенства

$$\|f^{(r-k,s-l)}\|_{L_2(Q)} \leq \|f\|_{L_2(Q)}^{kl/rs} \cdot \|f^{(r,0)}\|_{L_2(Q)}^{(1-\frac{k}{r})\frac{l}{s}} \cdot \|f^{(0,s)}\|_{L_2(Q)}^{\frac{k}{r}(1-\frac{l}{s})} \cdot \|f^{(r,s)}\|_{L_2(Q)}^{(1-\frac{k}{r})(1-\frac{l}{s})}. \quad (8)$$

Знак равенства в (8) реализуется, например, функцией

$$f_0(x, y) = \gamma \cos m(x + \alpha) \cdot \cos n(y + \beta) \in L_2^{(r,s)}(Q), \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Используя формулу (5), запишем

$$\begin{aligned} \|f^{(r-k, s-l)}\|_{L_2(Q)}^2 &= \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} p^{2(r-k)} q^{2(s-l)} \rho_{pq}^2(f) = \\ &= \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \{\rho_{p,q}^2(f)\}^{kl/rs} \cdot \{p^{2k} \rho_{p,q}^2(f)\}^{(1-\frac{k}{r})\frac{l}{s}} \cdot \\ &\cdot \{q^{2l} \rho_{pq}^2(f)\}^{\frac{k}{r}(1-\frac{l}{s})} \cdot \{p^{2k} q^{2l} \rho_{pq}^2(f)\}^{(1-\frac{k}{r})(1-\frac{l}{s})}. \end{aligned} \quad (9)$$

Воспользуемся далее обобщенным неравенством Гельдера для сумм двойных рядов, простое доказательство которого приведено в [20]:

$$\begin{aligned} &\sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} a_{p,q}^{\alpha} b_{p,q}^{\beta} d_{p,q}^{\gamma} \delta_{p,q}^c \leq \\ &\leq \left(\sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} a_{pq} \right)^{\alpha} \left(\sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} b_{pq} \right)^{\beta} \left(\sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} d_{pq} \right)^{\gamma} \left(\sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \delta_{pq} \right)^c, \end{aligned} \quad (10)$$

где $a_{pq}, b_{pq}, d_{pq}, \delta_{pq}$ – произвольные неотрицательные числа, $\alpha + \beta + \gamma + c = 1$ ($\alpha, \beta, \gamma, c \geq 0$). Учитывая неравенство (10), из соотношения (9) в силу равенств (2)-(4) и (6) получаем

$$\begin{aligned} \|f^{(r-k, s-l)}\|_{L_2(Q)} &\leq \left\{ \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \rho_{pq}^2(f) \right\}^{kl/rs} \cdot \left\{ \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} p^{2r} \rho_{p,q}^2(f) \right\}^{(1-\frac{k}{r})\frac{l}{s}} \cdot \\ &\cdot \left\{ \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} q^{2s} \rho_{p,q}^2(f) \right\}^{\frac{k}{r}(1-\frac{l}{s})} \cdot \left\{ \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} p^{2r} q^{2s} \rho_{p,q}^2(f) \right\}^{(1-\frac{k}{r})(1-\frac{l}{s})} = \\ &= \|f\|_{L_2(Q)}^{2kl/rs} \cdot \|f^{(r,0)}\|_{L_2(Q)}^{2(1-\frac{k}{r})\frac{l}{s}} \cdot \|f^{(0,s)}\|_{L_2(Q)}^{2\frac{k}{r}(1-\frac{l}{s})} \cdot \|f^{(r,s)}\|_{L_2(Q)}^{2(1-\frac{k}{r})(1-\frac{l}{s})}, \end{aligned}$$

откуда и следует требуемое неравенство (8). Покажем его неулучшаемость для функции $f_0(x, y) = \gamma \cos m(x + \alpha) \cdot \cos n(y + \beta) \in L_2^{(r,s)}(Q)$. Так как

$$\begin{aligned} f_0^{(r,0)}(x, y) &= \gamma m^r \cos \left[m(x + \alpha) + \frac{r\pi}{2} \right] \cdot \cos n(y + \beta), \\ f_0^{(0,s)}(x, y) &= \gamma n^s \cos m(x + \alpha) \cdot \cos \left[n(y + \beta) + \frac{s\pi}{2} \right], \\ f_0^{(r,s)}(x, y) &= \gamma m^r n^s \cos \left[m(x + \alpha) + \frac{r\pi}{2} \right] \cdot \cos \left[n(y + \beta) + \frac{s\pi}{2} \right], \end{aligned}$$

то, вычислив норму этих функций, имеем:

$$\begin{aligned} \|f_0\|_{L_2(Q)} &\equiv \gamma, \quad \|f_0^{(r,0)}\|_{L_2(Q)} \equiv \gamma m^r, \quad \|f_0^{(0,s)}\|_{L_2(Q)} \equiv \gamma n^s, \\ \|f_0^{(r-k, s-l)}\|_{L_2(Q)} &\equiv \gamma m^{r-k} n^{s-l}, \quad \|f_0^{(r,s)}\|_{L_2(Q)} \equiv \gamma m^r n^s. \end{aligned}$$

Учитывая эти равенства, получаем

$$\begin{aligned} \|f_0^{(r-k, s-l)}\|_{L_2(Q)} &\equiv \gamma m^{r-k} n^{s-l} = \\ &= (\gamma)^{kl/rs} \cdot (\gamma m^r)^{\frac{k}{r}(1-\frac{l}{s})} (\gamma n^s)^{\frac{l}{s}(1-\frac{k}{r})} \cdot (\gamma m^r n^s)^{(1-\frac{k}{r})(1-\frac{l}{s})} = \\ &= \|f_0\|_{L_2(Q)}^{\frac{kl}{rs}} \cdot \|f_0^{(r,0)}\|_{L_2(Q)}^{\frac{k}{r}(1-\frac{l}{s})} \cdot \|f_0^{(0,s)}\|_{L_2(Q)}^{(1-\frac{k}{r})\frac{l}{s}} \cdot \|f_0^{(r,s)}\|_{L_2(Q)}^{(1-\frac{k}{r})(1-\frac{l}{s})}, \end{aligned}$$

откуда и следует точность неравенства (8), что и завершает доказательство теоремы 1.

3. Приближение “углом” в L_2 и некоторые приложения

В этом пункте рассматривается экстремальная задача нахождения точных значений величины наилучшего приближения периодических функций двух переменных тригонометрическими “углами” [18] или обобщенными полиномами (квазиполиномами) [19] в гильбертовом пространстве $L_2(Q)$.

Напомним необходимые понятия и определения, нужные нам в дальнейшем (см., например [21, 22, 23, 24]). Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — линейные нормированные пространства функций одной переменной, а

$$U_m := \text{span} \{u_0(x), u_1(x), \dots, u_m(x)\}, \quad V_n := \text{span} \{v_0(y), v_1(y), \dots, v_n(y)\}$$

их конечномерные подпространства, то есть $U_m \subset X$, $V_n \subset Y$.

Выражение вида

$$g_{m,n}(x, y) = \sum_{p=0}^m u_p(x) \psi_p(y) + \sum_{q=0}^n v_q(y) \phi_q(x),$$

где $\{\phi_q(x)\}_{q=0}^n$ и $\{\psi_p(y)\}_{p=0}^m$ — наборы произвольных функций, соответственно из пространств X и Y , назовем обобщенным полиномом (квазиполиномом), порожденным подпространствами U_m и V_n . Указанные обобщенные полиномы образуют подпространство пространств Z , которое обозначим

$$G(U_m, V_n) : U_m \otimes Y + V_n \otimes X,$$

где операции “ $\otimes$ ” и “ $+$ ” обозначают соответственно операции декартова произведения и прямой суммы множеств. Обозначим

$$\mathcal{E}_{m,n}(f)_Z = \mathcal{E}(f; G(U_m, V_n))_Z = \inf \{\|f - g_{m,n}\|_Z : g_{m,n} \in G(U_m, V_n)\} \quad (11)$$

и если $\mathfrak{M}$ — некоторый класс функций, принадлежащий пространству Z , то положим

$$\mathcal{E}(\mathfrak{M}; G(U_m, V_n))_Z := \sup \{\mathcal{E}(f; G(U_m, V_n))_Z : f \in \mathfrak{M}\}. \quad (12)$$

Величина (11) характеризует наилучшее приближение элемента $f \in \mathfrak{M}$ множеством $G(U_m, V_n)$, а (12) — отклонение множества $\mathfrak{M}$ от $G(U_m, V_n)$ в нормированном пространстве $(Z, \|\cdot\|_Z)$. Для центрально-симметричного множества $\mathfrak{M} \subset Z$ величину

$$d_{m,n}(\mathfrak{M}; Z) = \inf \{\mathcal{E}(\mathfrak{M}; G(U_m, V_n))_Z : U_m \subset X, V_n \subset Y\} \quad (13)$$

называют квазипоперечником множества $\mathfrak{M}$ по Колмогорову [22, 23, 24].

Пусть Λ — линейный оператор, действующий на функцию $f \in \mathfrak{M}$, причем образ $\Lambda(\mathfrak{M}) := \{\Lambda(f) : f \in \mathfrak{M}\}$ принадлежит $G(U_m, V_n)$. Положим

$$e(\mathfrak{M}, \Lambda)_Z = \sup \{\|f - \Lambda(f)\|_Z : f \in \mathfrak{M}\},$$

$$e(\mathfrak{M}, G(U_m, V_n))_Z = \inf \{e(\mathfrak{M}, \Lambda)_Z : \Lambda(\mathfrak{M}) \subset G(U_m, V_n)\}.$$

Следуя [22, 23, 24], величину

$$d'_{m,n}(\mathfrak{M}; Z) = \inf \{e(\mathfrak{M}; G(U_m, V_n))_Z : U_m \subset X, V_n \subset Y\} \quad (14)$$

назовем линейным квазипоперечником множества $\mathfrak{M}$ в пространстве Z . Непосредственно из приведенных определений следуют неравенства

$$e(\mathfrak{M}, G(U_m, V_n))_Z \geq \mathcal{E}(\mathfrak{M}; G(U_m, V_n))_Z, \quad d'_{m,n}(\mathfrak{M}; Z) \geq d_{m,n}(\mathfrak{M}; Z).$$

Всюду далее полагаем $X = Y = L_2[0, 2\pi]$ — пространства суммируемых с квадратам 2π -периодических функций f на отрезке $[0, 2\pi]$, а $Z = L_2(Q)$.

Пусть теперь $U_{2m+1}^* \subset L_2[0, 2\pi]$, $V_{2n+1}^* \subset L_2[0, 2\pi]$ — два конечномерных подпространства тригонометрических полиномов порядка $2m+1$ по переменной x и $2n+1$ — по переменной y , то есть

$$U_{2m+1}^* := \text{span} \{e^{ipx}\}_{p=-m}^m, \quad V_{2n+1}^* := \text{span} \{e^{iqy}\}_{q=-n}^n.$$

Очевидно, что каждый элемент $g_{m,n}(x, y) \in G(U_{2m+1}^*, V_{2n+1}^*)$ представим в виде

$$g_{m,n}(x, y) = \sum_{|p| \leq m} \psi_p(y) e^{ipx} + \sum_{|q| \leq n} \phi_q(x) e^{iqy}, \quad p, q \in \mathbb{N}, \quad (15)$$

где последовательности $\{\psi_p(y)\}_{p=-m}^m \subset L_2[0, 2\pi]$, $\{\phi_q(x)\}_{q=-n}^n \subset L_2[0, 2\pi]$ — произвольные наборы функций. Функции вида (15) называют квазиполиномами [19] или тригонометрическими “углами” [18]. Всюду далее

$$Z = L_2(Q) := L_2[0, 2\pi] \times L_2[0, 2\pi]$$

— линейное нормированное пространство 2π -периодических по каждой из переменных x и y функций $f(x, y)$, суммируемых с квадратом в области Q , а $G(U_{2m+1}^*, V_{2n+1}^*) \subset L_2(Q)$. Для произвольной функции $f \in L_2(Q)$ равенством

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{m,n}(f)_{L_2(Q)} &:= \mathcal{E}(f; G(U_{2m+1}, V_{2n+1}))_{L_2(Q)} = \\ &= \inf \{ \|f - g_{m,n}\|_{L_2(Q)} : g_{m,n} \in G(U_{2m+1}, V_{2n+1}) \} \end{aligned} \quad (16)$$

определим величину наилучшего приближения функции f элементами множества

$$G(U_{2m+1}^*, V_{2n+1}^*).$$

Для $f \in L_2(Q)$ с формальным разложением в двойной ряд Фурье (1) квазиполиномом Фурье порядка (m, n) , $m, n \in \mathbb{N}$ называют выражение

$$\Phi_{m,n}(f; x, y) := \left(\sum_{|p| \leq m} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} + \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{|q| \leq n} - \sum_{|p| \leq m} \sum_{|q| \leq n} \right) c_{pq}(f) e^{i(px+qy)}.$$

Очевидно, что функцию $\Phi_{m,n}(f)$ можно также записать в виде

$$\Phi_{m,n}(f; x, y) := \left(\sum_{|p| \leq m} \sum_{|q| \leq n} + \sum_{|p| \geq m+1} \sum_{|q| \leq n} + \sum_{|p| \leq m} \sum_{|q| \geq n+1} \right) c_{pq}(f) e^{i(px+qy)}. \quad (17)$$

Ряд Фурье (1) функции $f \in L_2(Q)$ с учетом (17) запишем в виде

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} c_{pq}(f) e^{i(px+qy)} = \\ &= \left(\sum_{|p| \leq m} \sum_{|q| \leq n} + \sum_{|p| \geq m+1} \sum_{|q| \leq n} + \sum_{|p| \leq m} \sum_{|q| \geq n+1} + \sum_{|p| \geq m+1} \sum_{|q| \geq n+1} \right) c_{pq}(f) e^{i(px+qy)} = \\ &= \Phi_{m,n}(f; x, y) + \sum_{|p| \geq m+1} \sum_{|q| \geq n+1} c_{pq}(f) e^{i(px+qy)}. \end{aligned} \quad (18)$$

Откуда

$$f(x, y) - \Phi_{m,n}(f; x, y) = \sum_{|p| \geq m+1} \sum_{|q| \geq n+1} c_{pq}(f) e^{i(px+qy)}. \quad (19)$$

Применяя равенство Парсеваля, из (19) будем иметь

$$\|f - \Phi_{m,n}(f)\|_{L_2(Q)}^2 = \sum_{|p| \geq m+1} \sum_{|q| \geq n+1} |c_{pq}(f)|^2. \quad (20)$$

Предварительно докажем следующее утверждение.

Лемма 1. Среди всех обобщенных полиномов вида (15), принадлежащих множеству $G(U_{2m-1}^*, V_{2n-1}^*)$, наилучшее приближение функции $f \in L_2(Q)$ доставляет ее квазиполином Фурье порядка $(m-1, n-1)$. При этом

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{m-1, n-1}^2(f)_{L_2(Q)} &= \inf \left\{ \|f - g_{m-1, n-1}\|_{L_2(Q)}^2 : g_{m-1, n-1} \in G(U_{2m-1}, V_{2n-1}) \right\} = \\ &= \|f - \Phi_{m-1, n-1}(f)\|_{L_2(Q)}^2 = \sum_{|p| \geq m} \sum_{|q| \geq n} |c_{pq}(f)|^2. \end{aligned} \quad (21)$$

Доказательство. Отметим, что лемма 1 приведена без доказательства в [20]. Здесь приведем строгое доказательство леммы 1 опираясь на схему рассуждений, приведенную в работах [11, 21]. Рассмотрим произвольный элемент $g_{m-1, n-1} \in G(U_{2m-1}^*, V_{2n-1}^*)$. Поскольку последовательности $\{\psi_p(y)\}_{p=-(m-1)}^{m-1} \in L_2[0, 2\pi]$, $\{\phi_q(y)\}_{q=-(n-1)}^{n-1} \in L_2[0, 2\pi]$, то в смысле сходимости в метрике пространства $L_2[0, 2\pi]$ имеют место следующие равенства

$$\psi_p(y) = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} c_q(\psi_p) e^{iqy}, \quad p = \overline{-(m-1), m-1}, \quad (22)$$

$$\phi_q(x) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} c_p(\phi_q) e^{ipx}, \quad q = \overline{-(n-1), n-1}. \quad (23)$$

Подставляя вместо $\psi_p(y)$ и $\phi_q(x)$ в равенство (15) их разложения в ряды Фурье, стоящие в правых частях соотношений (22) и (23), в смысле сходимости в метрике $L_2(Q)$ получим равенство

$$g_{m-1, n-1}(x, y) = \sum_{|p| \leq m-1} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} c_q(\psi_p) e^{i(px+qy)} + \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{|q| \leq n-1} c_p(\phi_q) e^{i(px+qy)},$$

которое, ради удобства, запишем также в виде

$$\begin{aligned} g_{m-1, n-1}(x, y) &= \left(\sum_{|p| \leq m-1} \sum_{|q| \leq n-1} + \sum_{|p| \leq m-1} \sum_{|q| \geq n} \right) c_q(\psi_p) e^{i(px+qy)} + \\ &+ \left(\sum_{|p| \leq m-1} \sum_{|q| \leq n-1} + \sum_{|p| \geq m} \sum_{|q| \leq n-1} \right) c_p(\phi_q) e^{i(px+qy)}. \end{aligned} \quad (24)$$

Пользуясь равенствами (18) и (24), запишем

$$f(x, y) - g_{m-1, n-1}(x, y) = \sum_{|p| \leq m-1} \sum_{|q| \leq n-1} (c_{pq}(f) - c_p(\phi_q) - c_q(\psi_p)) e^{i(px+qy)} +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{|p| \leq m-1} \sum_{|q| \geq n} (c_{pq}(f) - c_q(\psi_p)) e^{i(px+qy)} + \sum_{|p| \geq m} \sum_{|q| \leq n-1} (c_{pq}(f) - c_p(\phi_q)) e^{i(px+qy)} + \\
& + \sum_{|p| \geq m} \sum_{|q| \geq n} c_{pq}(f) e^{i(px+qy)}.
\end{aligned}$$

Выполнив простые выкладки с учетом ортогональности системы $\{e^{i(px+qy)}\}_{p,q=-\infty}^{+\infty}$ в квадрате $Q := \{0 \leq x, y \leq 2\pi\}$, получаем равенство

$$\begin{aligned}
& \|f - g_{m-1,n-1}\|_{L_2(Q)} = \\
& = \sum_{|p| \leq m-1} \sum_{|q| \leq n-1} |c_{pq}(f) - c_p(\phi_q) - c_q(\psi_p)|^2 + \sum_{|p| \leq m-1} \sum_{|q| \geq n} |c_{pq}(f) - c_q(\psi_p)|^2 + \\
& + \sum_{|p| \geq m} \sum_{|q| \leq n-1} |c_{pq}(f) - c_p(\phi_q)|^2 + \sum_{|p| \geq m} \sum_{|q| \geq n} |c_{pq}(f)|^2.
\end{aligned} \tag{25}$$

Из соотношения (25) сразу вытекает, что величина (16) принимает минимальное значение, равное правой части (21), тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} c_{pq}(f) = c_p(\phi_q) + c_q(\psi_p), & |p| \leq m-1, |q| \leq n-1, m, n \in \mathbb{N}, \\ c_{pq}(f) = c_q(\psi_p), & |p| \leq m-1, |q| \geq n, m, n \in \mathbb{N}, \\ c_{pq}(f) = c_p(\phi_q), & |p| \geq m, |q| \leq n-1, m, n \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{26}$$

Подставляя в правую часть (24) вместо коэффициентов $c_q(\psi_p)$ и $c_p(\phi_q)$ их значение через коэффициенты $c_{pq}(f)$ из системы (26), мы получим общий вид квазиполинома Фурье порядка $(m-1, n-1)$ в виде равенства (17), и следовательно, имеет место равенство (21). Лемма 1 доказана.

Замечание 1. В силу обозначения (7) равенство (21) запишем в более удобном для приложения виде

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}^2(f)_{L_2(Q)} = \sum_{|p| \geq m} \sum_{|q| \geq n} |c_{pq}(f)|^2 = \sum_{p=m}^{\infty} \sum_{q=n}^{\infty} \rho_{pq}^2(f). \tag{27}$$

В частности, из (27) следует, что если $f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$, то

$$\begin{aligned}
& \mathcal{E}_{m-1,n-1}^2(f)_{L_2(Q)} := \mathcal{E}^2(f; G(U_{2m-1}^*, V_{2n-1}^*))_{L_2(Q)} = \\
& = \mathcal{E}^2(f_1; U_{2m-1}^*)_{L_2[0,2\pi]} \cdot \mathcal{E}^2(f_2; V_{2n-1}^*)_{L_2[0,2\pi]} = \mathcal{E}_{m-1}^2(f_1)_{L_2[0,2\pi]} \cdot \mathcal{E}_{n-1}^2(f_2)_{L_2[0,2\pi]},
\end{aligned} \tag{28}$$

где

$$\mathcal{E}(g; G_{2\nu-1})_{L_2[0,2\pi]} := \inf\{\|g - T_{\nu-1}(q)\|_{L_2[0,2\pi]} : T_{\nu-1} \in G_{2\nu-1}\}$$

— величина наилучшего среднеквадратического приближения периодической функции $g(x)$ тригонометрическими полиномами $G_{2\nu-1} := \text{span}\{e^{ijx}\}_{j=-(\nu-1)}^{\nu-1}$ порядка $2\nu-1$ в пространстве $L_2[0, 2\pi]$.

Лемма 2. Для произвольной функции $f \in L_2^{(r,s)}(Q)$ имеет место неравенство

$$\mathcal{E}(f; G(U_{2m-1}^*, V_{2n-1}^*))_{L_2(Q)} \leq m^{-r} n^{-s} \mathcal{E}(f^{(r,s)}; G(U_{2m-1}^*, V_{2n-1}^*))_{L_2(Q)}, \tag{29}$$

которое является точным в том смысле, что для функции

$$f_0(x, y) = \cos mx \cos ny \in L_2^{(r,s)}(Q)$$

обращается в равенство.

Доказательство. В самом деле, из принадлежности функции $f \in L_2^{(r,s)}(Q)$ следует, что $f \in L_2(Q)$. Простыми вычислениями легко доказать, что для произвольной функции $f \in L_2^{(r,s)}(Q)$ справедливо равенство

$$\mathcal{E}^2(f^{(r,s)})_{L_2(Q)} = \sum_{p=m}^{\infty} \sum_{q=n}^{\infty} p^{2r} q^{2s} \rho_{pq}^2(f). \quad (30)$$

Из равенства (27), учитывая (30), запишем

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{m-1,n-1}^2(f)_{L_2(Q)} &:= \sum_{p=m}^{\infty} \sum_{q=n}^{\infty} \rho_{pq}^2(f) = \sum_{p=m}^{\infty} \sum_{q=n}^{\infty} \frac{1}{p^{2r}} \cdot \frac{1}{q^{2s}} \cdot p^{2r} q^{2s} \cdot \rho_{pq}^2(f) \leq \\ &\leq \frac{1}{m^{2r}} \cdot \frac{1}{n^{2s}} \sum_{p=m}^{\infty} \sum_{q=n}^{\infty} p^{2r} q^{2s} \rho_{p,q}^2(f) = m^{-2r} n^{-2s} \mathcal{E}_{m-1,n-1}^2(f^{(r,s)})_{L_2(Q)}, \end{aligned}$$

откуда и вытекает неравенство (29). Для функции $f_0(x, y) = \cos mx \cos ny$ имеем: $\rho_{pq}(f_0) \equiv 0$, для $p \neq m, q \neq n$, $\rho_{mn}(f_0) \equiv 1$,

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f_0)_{L_2(Q)} \equiv 1, \quad \mathcal{E}_{m-1,n-1}(f_0^{(r,s)})_{L_2(Q)} \equiv m^r n^s, \quad (31)$$

а потому имеем:

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f_0)_{L_2(Q)} \equiv 1 = m^{-r} n^{-s} \cdot m^r n^s = m^{-r} n^{-s} \cdot \mathcal{E}_{m-1,n-1}(f_0^{(r,s)})_{L_2(Q)},$$

откуда и следует утверждение леммы 2.

Следствие 2. В условиях леммы 2 справедливо равенство

$$\sup_{f \in L_2^{(r,s)}(Q)} \frac{\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f)_{L_2(Q)}}{\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f^{(r,s)})_{L_2(Q)}} = \frac{1}{m^r n^s}. \quad (32)$$

В самом деле, из неравенства (29) следует, что

$$\sup_{f \in L_2^{(r,s)}(Q)} \frac{\mathcal{E}_{2m-1,2n-1}(f)_{L_2(Q)}}{\mathcal{E}_{2m-1,2n-1}(f^{(r,s)})_{L_2(Q)}} \leq \frac{1}{m^r n^s}. \quad (33)$$

Учитывая равенства (31), получим противоположное неравенство

$$\sup_{f \in L_2^{(r,s)}(Q)} \frac{\mathcal{E}_{2m-1,2n-1}(f)_{L_2(Q)}}{\mathcal{E}_{2m-1,2n-1}(f^{(r,s)})_{L_2(Q)}} \geq \frac{\mathcal{E}_{2m-1,2n-1}(f_0)_{L_2(Q)}}{\mathcal{E}_{2m-1,2n-1}(f_0^{(r,s)})_{L_2(Q)}} = \frac{1}{m^r n^s}. \quad (34)$$

Равенство (32) следует из сопоставления неравенств (33) и (34).

4. Основной результат и некоторые следствия

Пользуясь результатом теоремы 1, докажем следующее утверждение

Теорема 2. Пусть $m > r \geq k \geq 1$, $n > s \geq l \geq 1$, $m, n, r, s, k, l \in \mathbb{N}$. Тогда для произвольной функции $f \in L_2^{(r,s)}(Q)$ имеет место неравенство

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f^{(r-k,s-l)})_{L_2(Q)} \leq$$

$$\leq \left(\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f)_{L_2(Q)} \right)^{kl/rs} \cdot \left(\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f^{(r,0)})_{L_2(Q)} \right)^{\left(1-\frac{k}{r}\right)\frac{l}{s}} \cdot \left(\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f^{(0,s)})_{L_2(Q)} \right)^{\frac{k}{r}\left(1-\frac{l}{s}\right)} \cdot \left(\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f^{(r,s)})_{L_2(Q)} \right)^{\left(1-\frac{k}{r}\right)\left(1-\frac{l}{s}\right)}, \quad (35)$$

которое является точным в вышеуказанном смысле.

Доказательство. Будем следовать схеме рассуждений, приведенной при доказательстве теоремы 5 из работы [21]. Для произвольной функции

$$f(x, y) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} c_{pq}(f) e^{i(px+qy)},$$

принадлежащей классу $L_2^{(r,s)}(Q)$, в силу (19) запишем

$$R_{m,n}(f; x, y) = f(x, y) - \Phi_{m-1,n-1}(f; x, y) = \sum_{|p| \geq m} \sum_{|q| \geq n} c_{pq}(f) e^{i(px+qy)}. \quad (36)$$

Очевидно, что если $f \in L_2^{(r,s)}(Q)$, то и $R_{m,n}(f) \in L_2^{(r,s)}(Q)$, причём легко проверить, что при любых $m, n \in \mathbb{N}, k, l \in \mathbb{Z}_+$ имеют место равенства

$$\Phi_{m-1,n-1}^{(k,0)}(f; x, y) = \Phi_{m-1,n-1}(f^{(k,0)}; x, y), \quad (37)$$

$$\Phi_{m-1,n-1}^{(0,l)}(f; x, y) = \Phi_{m-1,n-1}(f^{(0,l)}; x, y), \quad (38)$$

$$\Phi_{m-1,n-1}^{(k,l)}(f; x, y) = \Phi_{m-1,n-1}(f^{(k,l)}; x, y), \quad (39)$$

а потому из соотношений (36)-(39) при любых значениях $m, n, r \in \mathbb{N}$ имеем

$$\begin{aligned} R_{m,n}^{(r,0)}(f; x, y) &= f^{(r,0)}(x, y) - \Phi_{m-1,n-1}^{(r,0)}(f; x, y) = \\ &= \sum_{|p| \geq m} \sum_{|q| \geq n} (ip)^r c_{pq}(f) e^{i(px+qy)} = R_{m-1,n-1}(f^{(r,0)}; x, y). \end{aligned} \quad (40)$$

Аналогичным образом получаем

$$R_{m,n}^{(0,s)}(f; x, y) = R_{m,n}(f^{(0,s)}; x, y), \quad (41)$$

$$R_{m,n}^{(r,s)}(f; x, y) = R_{m,n}(f^{(r,s)}; x, y), \quad (42)$$

$$R_{m,n}^{(r-k,s-l)}(f; x, y) = R_{m,n}(f^{(r-k,s-l)}; x, y). \quad (43)$$

Используя замечание 1, из равенств (36), (41)-(43) имеем

$$\|R_{m,n}(f)\|_{L_2(Q)}^2 = \sum_{|p| \geq m} \sum_{|q| \geq n} |c_{pq}|^2 = \sum_{p=m}^{\infty} \sum_{q=n}^{\infty} \rho_{pq}^2(f) = \mathcal{E}_{m-1,n-1}^2(f)_{L_2(Q)}, \quad (44)$$

$$\|R_{m,n}^{(r,0)}(f)\|_{L_2(Q)}^2 = \sum_{p=m}^{\infty} \sum_{q=n}^{\infty} p^{2r} \rho_{pq}^2(f) = \mathcal{E}_{m-1,n-1}^2(f^{(r,0)})_{L_2(Q)}, \quad (45)$$

$$\|R_{m,n}^{(0,s)}(f)\|_{L_2(Q)}^2 = \sum_{p=m}^{\infty} \sum_{q=n}^{\infty} q^{2s} \rho_{pq}^2(f) = \mathcal{E}_{m-1,n-1}^2(f^{(0,s)})_{L_2(Q)}, \quad (46)$$

$$\|R_{m,n}^{(r,s)}(f)\|_{L_2(Q)}^2 = \sum_{p=m}^{\infty} \sum_{q=n}^{\infty} p^{2r} p^{2s} \rho_{pq}^2(f) = \mathcal{E}_{m-1,n-1}^2(f^{(r,s)})_{L_2(Q)}, \quad (47)$$

$$\|R_{m,n}^{(r-k,s-l)}(f)\|_{L_2(Q)}^2 = \sum_{p=m}^{\infty} \sum_{q=n}^{\infty} p^{2(r-k)} p^{2(s-l)} \rho_{pq}^2(f) = \mathcal{E}_{m-1,n-1}^2(f^{(r-k,s-l)})_{L_2(Q)}. \quad (48)$$

Применяя теорему 1 к функции $R_{m,n}(f) \in L_2^{(r,s)}(Q)$ и учитывая равенства (44)-(48), запишем

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{m-1,n-1}^2(f^{(r-k,s-l)})_{L_2(Q)} &= \|R_{m,n}^{(r-k,s-l)}(f)\|_{L_2(Q)}^2 \leq \\ &\leq \|R_{m,n}(f)\|_{L_2(Q)}^{kl/(rs)} \cdot \|R_{m,n}^{(r,0)}(f)\|_{L_2(Q)}^{(1-\frac{k}{r})\frac{l}{s}} \cdot \|R_{m,n}^{(0,s)}(f)\|_{L_2(Q)}^{\frac{k}{r}(1-\frac{l}{s})} \cdot \|R_{m,n}^{(r,s)}(f)\|_{L_2(Q)}^{(1-\frac{k}{r})(1-\frac{l}{s})} = \\ &= \left(\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f)_{L_2(Q)}\right)^{kl/(rs)} \cdot \left(\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f^{(r,0)})_{L_2(Q)}\right)^{(1-\frac{k}{r})\frac{l}{s}} \cdot \\ &\cdot \left(\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f^{(0,s)})_{L_2(Q)}\right)^{\frac{k}{r}(1-\frac{l}{s})} \cdot \left(\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f^{(r,s)})_{L_2(Q)}\right)^{(1-\frac{k}{r})(1-\frac{l}{s})}. \end{aligned}$$

Этим неравенство (35) доказано. Неулучшаемость неравенства (35) для функции $f_0 \in L_2^{(r,s)}(Q)$, рассмотренной в теореме 1, проверяется непосредственным вычислением. В самом деле, для $f_0(x, y) = \gamma \cos m(x + \alpha) \cos n(y + \beta)$ коэффициент $\rho_{m,n} \equiv \gamma$, и из (44)-(48) вытекает, что

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{m-1,n-1}(f_0)_{L_2(Q)} &\equiv \gamma, \quad \mathcal{E}_{m-1,n-1}(f_0^{(r,0)})_{L_2(Q)} \equiv \gamma m^r, \\ \mathcal{E}_{m-1,n-1}(f_0^{(0,s)})_{L_2(Q)} &\equiv \gamma n^s, \quad \mathcal{E}_{m-1,n-1}(f_0^{(r,s)})_{L_2(Q)} \equiv \gamma m^r n^s, \\ \mathcal{E}_{m-1,n-1}(f_0^{(r-k,s-l)})_{L_2(Q)} &= \gamma m^{r-k} n^{s-l}. \end{aligned}$$

Используя эти равенства, получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{m-1,n-1}(f_0^{(r-k,s-l)})_{L_2(Q)} &= \gamma m^{r-k} n^{s-l} = (\gamma)^{\frac{kl}{rs} + (1-\frac{k}{r})\frac{l}{s} + \frac{k}{r}(1-\frac{l}{s}) + (1-\frac{k}{r})(1-\frac{l}{s})} \cdot \\ &\cdot (m^r)^{(1-\frac{k}{r})\frac{l}{s} + (1-\frac{k}{r})(1-\frac{l}{s})} \cdot (n^s)^{\frac{k}{r}(1-\frac{l}{s}) + (1-\frac{k}{r})(1-\frac{l}{s})} = \\ &= (\gamma)^{\frac{kl}{rs}} \cdot (\gamma m^r)^{(1-\frac{k}{r})\frac{l}{s}} \cdot (\gamma n^s)^{\frac{k}{r}(1-\frac{l}{s})} \cdot (\gamma m^r n^s)^{(1-\frac{k}{r})(1-\frac{l}{s})} = \\ &= \left(\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f_0)_{L_2(Q)}\right)^{kl/(rs)} \cdot \left(\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f_0^{(r,0)})_{L_2(Q)}\right)^{(1-\frac{k}{r})\frac{l}{s}} \cdot \\ &\cdot \left(\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f_0^{(0,s)})_{L_2(Q)}\right)^{\frac{k}{r}(1-\frac{l}{s})} \cdot \left(\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f_0^{(r,s)})_{L_2(Q)}\right)^{(1-\frac{k}{r})(1-\frac{l}{s})}, \end{aligned}$$

откуда и следует неулучшаемость неравенства (35). Теорема 2 доказана.

Обозначим через $W^{(r,s)}L_2(Q)$ класс функций $f \in L_2^{(r,s)}(Q)$, удовлетворяющих условию $\|f^{(r,s)}\|_{L_2(Q)} \leq 1$. Справедлива следующая

Лемма 3. При любых $m, n, r, s \in \mathbb{N}$ имеют место равенства

$$\sup \left\{ \mathcal{E}_{m-1,n-1}(f)_{L_2(Q)} : f \in W^{(r,s)}L_2(Q) \right\} = \frac{1}{m^r n^s}, \quad (49)$$

$$\sup \left\{ \mathcal{E}_{m-1,n-1}(f^{(r,0)})_{L_2(Q)} : f \in W^{(r,s)}L_2(Q) \right\} = \frac{1}{m^r}, \quad (50)$$

$$\sup \left\{ \mathcal{E}_{m-1,n-1}(f^{(0,s)})_{L_2(Q)} : f \in W^{(r,s)}L_2(Q) \right\} = \frac{1}{n^s}. \quad (51)$$

Доказательство. Не умаляя общности, приводим доказательство равенства (49). Заметим, что для любой функции $f \in W^{(r,s)}L_2(Q)$ выполняется неравенство

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f^{(r,s)})_{L_2(Q)} \leq \|f^{(r,s)}\|_{L_2(Q)} \leq 1, \quad (52)$$

а потому из утверждения леммы 2 для произвольной функции $f \in W^{(r,s)}L_2(Q)$ следует, что

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f)_{L_2(Q)} \leq \frac{1}{m^r n^s} \cdot \mathcal{E}_{m-1,n-1}(f^{(r,s)})_{L_2(Q)} \leq \frac{1}{m^r n^s}. \quad (53)$$

Теперь покажем, что неравенство (53) на множестве функций $W^{(r,s)}L_2(Q)$ является точным. Функция

$$f_1(x, y) = \frac{1}{m^r n^s} \cos mx \cos ny$$

очевидно принадлежит классу $W^{(r,s)}L_2(Q)$. В самом деле, для этой функции

$$f_1^{(r,s)}(x, y) = \cos\left(mx + \frac{r\pi}{2}\right) \cos\left(ny + \frac{s\pi}{2}\right),$$

и так как $\|f_1^{(r,s)}\|_{L_2(Q)} = 1$, то $f \in W^{(r,s)}L_2(Q)$. С другой стороны, как следует из равенства (27),

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f_1)_{L_2(Q)} = \frac{1}{m^r n^s},$$

а потому

$$\sup \left\{ \mathcal{E}_{m-1,n-1}(f)_{L_2(Q)} : f \in W^{(r,s)}L_2(Q) \right\} \geq \mathcal{E}_{m-1,n-1}(f_1)_{L_2(Q)} = \frac{1}{m^r n^s}. \quad (54)$$

Требуемое равенство (49) вытекает из сопоставления неравенств (53) и (54). Аналогичным образом доказываются два других равенства (50) и (51), чем и завершаем доказательство леммы 3.

Утверждение леммы 3 в сочетании с результатом теоремы 2 позволяет решить следующую экстремальную задачу об одновременном приближении функций, её частных и смешанных производных квазиполиномами: требуется найти точное значение величины

$$\sup \left\{ \mathcal{E}_{m-1,n-1}(f^{(r-k,s-l)})_{L_2(Q)} : f \in W^{(r,s)}L_2(Q) \right\}.$$

Теорема 3. Пусть $m, n, r, s, k, l \in \mathbb{N}$ удовлетворяет ограничениям $r \geq k \geq 1$, $s \geq l \geq 1$. Тогда справедливо равенство

$$\sup \left\{ \mathcal{E}_{m-1,n-1}(f^{(r-k,s-l)})_{L_2(Q)} : f \in W^{(r,s)}L_2(Q) \right\} = \frac{1}{m^k n^l}. \quad (55)$$

Доказательство. Так как для произвольной функции $f \in W^{(r,s)}L_2(Q)$ имеют место оценки (49)-(52), то, пользуясь указанными оценками, из неравенства (35) получаем

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f^{(r-k,s-l)})_{L_2(Q)} \leq \left(\frac{1}{m^r n^s}\right)^{kl/rs} \cdot \left(\frac{1}{m^r}\right)^{\frac{k}{r}(1-\frac{l}{s})} \cdot \left(\frac{1}{n^s}\right)^{\frac{l}{s}(1-\frac{k}{r})} = \frac{1}{m^k n^l}. \quad (56)$$

Для получения оценки снизу рассмотрим ту же функцию $f_1(x, y)$, рассмотренную нами в конце леммы 3, для которой

$$f_1^{(r-k,s-l)}(x, y) = \frac{1}{m^k} \cdot \frac{1}{n^l} \cos\left(mx + \frac{(m-k)\pi}{2}\right) \cos\left(ny + \frac{(n-l)\pi}{2}\right),$$

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1} \left(f_1^{(r-k,s-l)} \right)_{L_2(Q)} = \frac{1}{m^k n^l}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \sup \left\{ \mathcal{E}_{m-1,n-1} \left(f^{(r-k,s-l)} \right)_{L_2(Q)} : f \in W^{(r,s)} L_2(Q) \right\} &\geq \\ &\geq \mathcal{E}_{m-1,n-1} \left(f_1^{(r-k,s-l)} \right)_{L_2(Q)} = \frac{1}{m^k n^l}. \end{aligned} \quad (57)$$

Требуемое равенство (55) вытекает из неравенств (56) и (57). Теорема 3 доказана.

5. Точные значения квазипоперечников

В этом пункте вычислим точные значения квазипоперечников (13) и (14) класса функции $W^{(r,s)} L_2(Q)$. Имеет место

Теорема 4. Для любых чисел $m, n, r, s \in \mathbb{N}$ справедливы равенства

$$d_{2m-1,2n-1} \left(W^{(r,s)} L_2(Q), L_2(Q) \right) = d'_{2m-1,2n-1} \left(W^{(r,s)} L_2(Q), L_2(Q) \right) = \frac{1}{m^r n^s}. \quad (58)$$

Доказательство. Оценку сверху для линейного квазипоперечника получим из равенства (49):

$$d'_{2m-1,2n-1} \left(W^{(r,s)} L_2(Q), L_2(Q) \right) \leq \mathcal{E}_{m-1,n-1} \left(W^{(r,s)} L_2(Q) \right)_{L_2(Q)} = \frac{1}{m^r n^s}. \quad (59)$$

Для получения обратного неравенства используем метод оценки снизу квазипоперечников на базе одномерных колмогоровских поперечников [22, 23]. С этой целью для $m, n, r, s \in \mathbb{N}$ вводим в рассмотрение одномерных классов функции

$$W^{(r)} L_2[0, 2\pi] := \left\{ \phi \in L_2^{(r)}[0, 2\pi] : \|\phi^{(r)}\|_{L_2[0, 2\pi]} \leq 1 \right\},$$

$$W^{(s)} L_2[0, 2\pi] := \left\{ \psi \in L_2^{(s)}[0, 2\pi] : \|\psi^{(s)}\|_{L_2[0, 2\pi]} \leq 1 \right\},$$

на основе которых определим класс функций

$$\widetilde{W}^{(r,s)} L_2(Q) := W^{(r)} L_2[0, 2\pi] \otimes W^{(s)} L_2[0, 2\pi].$$

Из равенства (28) следует, что для введенного класса функций

$$\begin{aligned} d_{2m-1,2n-1} \left(\widetilde{W}^{(r,s)} L_2(Q), L_2(Q) \right) &:= \\ &:= d_{2m-1} \left(W^{(r)} L_2[0, 2\pi], L_2[0, 2\pi] \right) \cdot d_{2n-1} \left(W^{(s)} L_2[0, 2\pi], L_2[0, 2\pi] \right), \end{aligned} \quad (60)$$

где $d_\rho(\mathfrak{N}, L_2[0, 2\pi])$ - обычный колмогоровский ρ -поперечник. Учитывая равенство (60), включение $\widetilde{W}^{(r,s)} L_2(Q) \subset W^{(r,s)} L_2(Q)$, а также одномерный результат [24, с.343, теорема 8.1.3]:

$$d_{2\mu-1} \left(W^{(\nu)} L_2[0, 2\pi], L_2[0, 2\pi] \right) = \frac{1}{\mu^\nu}, \quad \mu, \nu \in \mathbb{N},$$

приходим к следующей оценке снизу

$$\begin{aligned} d_{2m-1,2n-1} \left(W^{(r,s)} L_2(Q), L_2(Q) \right) &\geq d_{2m-1,2n-1} \left(\widetilde{W}^{(r,s)} L_2(Q), L_2(Q) \right) = \\ &= d_{2m-1} \left(W^{(r)} L_2[0, 2\pi], L_2[0, 2\pi] \right) \cdot d_{2n-1} \left(W^{(s)} L_2[0, 2\pi], L_2[0, 2\pi] \right) = \frac{1}{m^r n^s}. \end{aligned} \quad (61)$$

Сопоставляя неравенства (59) и (61), получаем требуемое равенство (58). Теорема 4 доказана.

6. Заключение

В данной работе доказано неравенство типа Колмогорова для периодических дифференцируемых функций двух переменных в метрике $L_2 := L_2(Q)$, $Q := \{0 \leq x, y \leq 2\pi\}$ и даны некоторые его приложения в задачах наилучшего приближения функций $f \in L_2(Q)$ тригонометрическими “углами”. Решена задача об одновременном приближении функций, ее частных и смешанных производных тригонометрическими “углами” на классе функций $W^{(r,s)}L_2(Q)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колмогоров А. Н. О неравенствах между верхними гранями последовательных производных функции на бесконечном интервале // Учен. записки МГУ. Математика. 1939. Т.30, № 3. С. 3–16.
2. Колмогоров А. Н. О неравенствах между верхними гранями последовательных производных функции на бесконечном интервале // Избр. тр.: Математика, механика. М.: Наука, 1985. С. 252–263.
3. Бабенко В. Ф., Корнейчук Н. П., Кофанов В. А., Пичугов С. А. Неравенства для производных и их приложения. Киев: Наукова думка, 2003. 590 с.
4. Арестов В. В. Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи // Успехи мат. наук. 1996. Т. 51, № 6. С. 89–124.
5. Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомирова В. М. Выпуклый анализ и его приложения. Эдиториал УРСС. М. 2000.
6. Коновалов В. Н. Точные неравенства для норм функций, третьих частных, вторых смешанных или косых производных // Матем. заметки. 1978. Т. 23, № 1. С. 67–78.
7. Буслаев А. П., Тихомиров В. М. О неравенствах для производных в многомерном случае // Матем. заметки. 1979. Т. 25, № 1. С. 59–74.
8. Тимошин О. А. Точные неравенства между нормами частных производных второго и третьего порядка // ДАН. 1995. Т. 344, № 1. С. 20–22.
9. Тимофеев В. Г. Неравенство типа Ландау для функций нескольких переменных // Матем. заметки. 1985. Т. 37, № 5. С. 676–689.
10. Бабенко В. Ф. О точных неравенствах типа Колмогорова для функций двух переменных // Докл. НАН Укараины. 2000. № 5. С. 7–11.
11. Вакарчук С. Б., Швачко А. В. Неравенства Колмогоровского типа для производных функций двух переменных и их приложение к аппроксимации “углом” // Известия вузов. Математика. 2015. № 11. С. 3–22.
12. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричув О. И. Интегралы и производные дробного порядка и их приложения. Минск, 1987. 650 с.
13. Arestov V. V. Inequalities for fractional derivatives on the half-line // Approximation theory: proc. conf. Warsaw: PWN-Pol. Sci. Publ. 1979. P. 19–34.
14. Magaril-Il'jaev G. G., Tikhomirov V. M. On the Kolmogorov inequality for fractional derivatives on the half-line // Anal. Math. 1981. Vol. 7, no. 1. P. 37–47.

15. Бабенко В. Ф., Чурилова М. С. О неравенствах типа Колмогорова для производных дробного порядка // Вестн. Днепропетровского ун-та. Математика. 2001. Т. 6. С. 16–20.
16. Бабенко В. Ф., Пичугов С. А. Точные оценки для норм дробных производных функций многих переменных, удовлетворяющих условию Гельдера // Матем. заметки. 2010. Т. 87, № 1. С. 26–34.
17. Babenko V. F., Parfinovich N. V., Pichugov S. A. Sharp Kolmogorov-type inequalities for norms of fractional derivatives of multivariate functions // Укр. мат. журн. 2010. Т. 62, № 3. С. 301–314.
18. Потапов М. К. Изучение некоторых классов функций при помощи приближения “углами” // Труды Матем. ин-та. АН СССР. 1972. Т. 117. С. 256–300.
19. Брудный Ю. А. Приближение функций n переменных квазимногочленами // Изв. АН СССР, серия Математика. 1970. Т. 34, № 3. С. 564–583.
20. Вакарчук С. Б., Вакарчук М. Б. Неравенства типа Колмогорова для аналитических функций одной и двух комплексных переменных и их приложение к теории аппроксимации // Укр. матем. журнал. 2011. Т. 63, № 12. С. 1579–1601.
21. Шабозов М. Ш., Сайнаков В. Д. О неравенствах типа Колмогорова в пространстве Бергмана для функций двух переменных // Труды ИММ УрО РАН. 2018. Т. 23, № 4. С. 295–309.
22. Вакарчук С. Б., Шабозов М. Ш. О точных значениях квазипоперечников некоторых функциональных классов // Укр. матем. журнал. 1996. Т. 48, № 3. С. 301–308.
23. Шабозов М. Ш., Акобиршоев М. О. Квазипоперечники некоторых классов дифференцируемых периодических функций двух переменных // Доклады РАН. 2005. Т. 404, № 4. С. 406–464.
24. Шабозов М. Ш., Акобиршоев М. О. О точных значениях квазипоперечников некоторых классов дифференцируемых периодических функций двух переменных // Укр. матем. журнал. 2009. Т. 61, № 6. С. 855–864.
25. Корнейчук Н. П. Точные константы в теории приближения. М.: Наука. 1987. 424 с.

REFERENCES

1. Kolmogorov A. N. 1939, “On inequalities between the upper bounds of the successive derivatives of an arbitrary function on the infinite interval” *Uch. Zap. MGU*, vol. 3. pp. 3–16.
2. Kolmogorov A. N. 1985, “On inequalities between the upper bounds of the successive derivatives of an arbitrary function on the infinite interval” *Selected Works: Mathematics and Mechanics*, pp. 252–263.
3. Babenko V. F., Korneichuk N. P., Kofanov V. A., Pichugov S. A. 2003, “Inequalities for Derivatives and Theory of Application”, *Naukova Dumka, Kiev*, 252 p.
4. Arestov V. V. 1996, “Approximation of unbounded operators by bounded operators and related extremal problems,” *Russ. Math. Surv.*, vol. 51. no 6. pp. 1093–1126.
5. Magaril-Iljaev G. G., Tikhomirov V. M. 2000, “Convex Analysis and Application” *Editorial, URSS*.

6. Konovalov V. N. 1978, "Precise inequalities for norms of functions, third partial, second mixed, or directional derivatives", *Math. Notes of Acad. Sci. of the USSR*, vol. 23. no 1. pp. 38–44.
7. Buslaev A. P., Tikhomirov V. M. 1979, "Inequalities of derivatives in the multidimensional case", *Math. Notes of Acad. Sci. of the USSR*, vol. 25. no 1. pp. 32–40.
8. Timoshin O. A. 1995, "Precise inequalities between the norms of partial derivatives or second and third order", *DAN*, vol. 344. no 1. pp. 20–22.
9. Timofeev V. G. 1985, "Landau inequality for function of several variables", *Math. Notes of Acad. Sci. of the USSR*, vol. 37. no 5. pp. 369–377.
10. Babenko V. F. 2000, "The exact inequalities of the Kolmogorov type for functions of two variables", *Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukr. Mat. Prirodozn. Tekh. Nauki*, no 5. pp. 7–11.
11. Vakarchuk S. B., Shvachko A. V. 2015, "Kolmogorov-type inequalities of derived functions of two variables with application for approximation by an "Angle"", *Russian Mathematics*, vol. 59. no 11. pp. 1–18.
12. Samko S. G., Kilbas A. A., Marychev O. I. 1987, "Fractional and Derivatives. Theory and Applications", *Nauka i Tekhnika. Minsk*, 650 p.
13. Arestov V. V. 1979, "Inequalities for fractional derivatives on the half-line" *Approximation theory: proc. conf. Warsaw: PWN-Pol. Sci. Publ.*, pp. 19–34.
14. Magaril-Il'jaev G. G., Tikhomirov V. M. 1981, "On the Kolmogorov inequality for fractional derivatives on the half-line" *Anal. Math.*, vol. 7, no. 1, pp. 37–47.
15. Babenko V. F., Churilova M. S. 2001, "On Kolmogorov-type inequality for fractional order derivatives" *Researches in Mathematics*, vol. 6, pp. 16–20.
16. Babenko V. F., Pichugov S. A. 2010, "Sharp estimates for the norms of fractional derivatives of functions of several variables satisfying the Hölder conditions" *Math. Notes*, vol. 87, no. 1-2, pp. 23–30.
17. Babenko V.F., Parfinovich N.V., Pichugov S.A. 2010, "Sharp Kolmogorov-type inequalities for norms of fractional derivatives of multivariate functions" *Ukrainian Math. Journal*, vol. 62, no 3, pp. 301–314.
18. Potapov M. K. 1972, "The study of certain classes of functions by means of "angular" approximation" *Trudy Mat. Inst. Steklov*, vol. 117, pp. 301–342.
19. Brudnyi Ju. A. 1970, "Approximation of functions of n variables by quasi-polynomials" *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, vol. 34, pp. 568–586.
20. Vakarchuk S. B., Vakarchuk M. B. 2011, "The Kolmogorov-type inequality for analytic functions of one and two complex variables and their applications in theory of approximation" *Ukr. Mat. Zh.*, vol. 63, no. 12, pp. 1579–1601.
21. Shabozov M. Sh., Saynakov V. D. 2018, "On Kolmogorov type inequality in the Bergman space for functions of two variables" *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, vol. 24, no. 4, pp. 270–282.
22. Vakarchuk S. B., Shabozov M. Sh. 1996, "On exact values of quasiwidths of some classes of functions" *Ukrainian Mathematical Journal*, vol. 48, no. 3, pp. 338–346.

-
23. Shabozov M. Sh., Akobirshoev M. O. 2005, “Quasiwidths of some classes of differentiable periodic functions of two variables” *Dokl. Akad. Nauk*, vol. 404, no. 4, pp. 460–464.
 24. Shabozov M. Sh., Akobirshoev M. O. 2009, “On exact values of quasiwidths of some classes of differentiable functions of two variables” *Ukrainian Mathematical Journal*, vol. 61, no. 6, pp. 1013–1024.
 25. Korneichuk N. P. 1987, “Exact constant in the theory of approximation”, *Moscow. Nauka*, 424 p.

Получено 18.04.2019 г.

Принято в печать 12.07.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 2.

УДК 511.9

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-366-373

**Приближение квадратичных алгебраических решёток
целочисленными решётками¹**

А. Н. Кормачева

Кормачева Антонина Николаевна — аспирант кафедры алгебры, математического анализа и геометрии, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: juska789@mail.ru

Аннотация

Данная работа посвящена вопросам приближения квадратичной алгебраической решётки целочисленной решёткой. В ней вычисляются расстояния между квадратичной алгебраической решёткой и целочисленной решёткой, когда они заданы числителем и знаменателем подходящей дроби к корню квадратному из простого числа p вида $p = 2$ или $p = 4k + 3$.

Результаты данной работы позволяют изучать вопросы о наилучших приближениях квадратичных алгебраических решёток целочисленными решётками.

Ключевые слова: квадратичные поля, приближение алгебраических решёток, метрическое пространство решёток.

Библиография: 6 названий.

Для цитирования:

А. Н. Кормачева. Приближение квадратичных алгебраических решёток целочисленными решётками // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 2, с. 366–373.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 2.

UDC 511.9

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-366-373

Approximation of quadratic algebraic lattices by integer lattices²

A. N. Kormacheva

Kormacheva Antonina Nikolaevna — Postgraduate Student, Department of Algebra, mathematical analysis and geometry, Tula State L. N. Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: juska789@mail.ru

Abstract

¹Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №19-41-710004_r_a.

²Acknowledgments: The reported study was funded by RFBR, project number 19-41-710004_r_a.

This paper is devoted to the approximation of a quadratic algebraic lattice by an integer lattice. It calculates the distances between a quadratic algebraic lattice and an integer lattice when they are given by the numerator and denominator of a suitable fraction to the square root of a Prime p of the form $p = 2$ or $p = 4k + 3$.

The results of this work allow us to study questions about the best approximations of quadratic algebraic lattices by integer lattices.

Keywords: quadratic fields, approximation of algebraic lattices, metric space of lattices.

Bibliography: 6 titles.

For citation:

A. N. Kormacheva, 2019, "Approximation of quadratic algebraic lattices by integer lattices", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 2, pp. 366–373.

1. Введение

В работе [5] рассматривалось квадратичное поле $F = \mathbb{Q}(\sqrt{p})$, где p — простое число и $p = 2$ или $p \equiv 3 \pmod{4}$. Для него кольцо целых алгебраических чисел $\mathbb{Z}_F$ имеет вид: $\mathbb{Z}_F = \{n + k\sqrt{p} | n, k \in \mathbb{Z}\}$.

Через $\Lambda(F)$ обозначается алгебраическая решётка поля F :

$$\Lambda(F) = \{(\Theta^{(1)}, \Theta^{(2)}) | \Theta = \Theta^{(1)} \in \mathbb{Z}_F\}$$

и $\Theta^{(1)}, \Theta^{(2)}$ — целые алгебраически сопряжённые числа.

Таким образом, $\Theta^{(1)} = n + k\sqrt{p}$, $\Theta^{(2)} = n - k\sqrt{p}$ $n, k \in \mathbb{Z}$ и $\Theta^{(1)}, \Theta^{(2)}$ — корни уравнения $x^2 - 2nx + n^2 - pk^2 = 0$. Базис решётки $\Lambda(F)$ имеет вид: $\vec{\lambda}_1 = (1, 1)$, $\vec{\lambda}_2 = (\sqrt{p}, -\sqrt{p})$, а детерминант решётки $\det \Lambda(F) = 2\sqrt{p}$.

Рассмотрим разложение $\sqrt{p}$ в цепную периодическую дробь:

$$\sqrt{p} = q_0 + [(q_1, \dots, q_n, 2q_0)] = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{2q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{\ddots}}}}}$$

с периодом $(q_1, \dots, q_n, 2q_0)$. Через $\frac{P_m}{Q_m}$ обозначается m -ая подходящая дробь к $\sqrt{p}$. Таким образом,

$$\sqrt{p} = \frac{P_m}{Q_m} + \frac{(-1)^m \theta_m}{Q_m^2}, \quad Q_m \sqrt{p} = P_m + \frac{(-1)^m \theta_m}{Q_m}, \quad 0 < \theta_m < 1 \quad (m = 0, 1, \dots). \quad (1)$$

Через $\Lambda_m(F)$ обозначается алгебраическая решётка заданная равенствами:

$$\Lambda_m(F) = \{(Q_m(n + k\sqrt{p}), Q_m(n - k\sqrt{p})) | n, k \in \mathbb{Z}\},$$

а через $\Lambda_m(p)$ — целочисленная решётка заданная равенствами:

$$\Lambda_m(p) = \{(Q_m n + kP_m, Q_m n - kP_m) | n, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Базис решётки $\Lambda_m(F)$ имеет вид $\vec{\lambda}_{m,1} = (Q_m, Q_m)$, $\vec{\lambda}_{m,2} = (Q_m \sqrt{p}, -Q_m \sqrt{p})$, а детерминант решётки $\det \Lambda_m(F) = 2Q_m^2 \sqrt{p}$.

Для целочисленной решётки $\Lambda_m(p)$ базис имеет вид $\vec{\lambda}_{m,1,Z} = (Q_m, Q_m)$, $\vec{\lambda}_{m,2,Z} = (P_m, -P_m)$, а детерминант решётки $\det \Lambda_m(p) = 2Q_m P_m$.

В работах [1], [4]–[6] двумерные решётки изучались с точки зрения построения двумерных параллелепипедальных сеток для квадратурных формул. В данной работе нас будет интересовать вопрос о приближении квадратичных алгебраических решёток целочисленными решётками в метрическом пространстве решёток.

Как известно (см. [3], стр.165) множество всех s -мерных решёток образуют полное метрическое пространство относительно метрики $\rho(\Lambda, \Gamma)$, которая задана равенствами

$$\rho(\Lambda, \Gamma) = \max(\ln(1 + \mu), \ln(1 + \nu)), \quad \mu = \inf_{A \in \Lambda - \Gamma} \|A - E_s\|, \quad \nu = \inf_{B \in \Lambda - \Gamma} \|B - E_s\|,$$

$$E_s = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = (\delta_{ij})_{1 \leq i, j \leq s}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{при } i = j, \\ 0, & \text{при } i \neq j, \end{cases} \quad \|A\| = s \cdot \max_{1 \leq i, j \leq s} |a_{ij}|.$$

Цель данной работы — найти расстояние $\rho(\Lambda_m(F), \Lambda_m(p))$ для любого натурального m и простого p вида $p = 2$ или $p \equiv 3 \pmod{4}$.

2. Сведения из теории решёток

Так как все рассуждения мы проводим для двумерных решёток, то и необходимые сведения из геометрии чисел мы сформулируем только для размерности $s = 2$. Для удобства записи мы будем отождествлять вектор-строку $\vec{x} = (x_1, x_2)$ и транспонированный вектор-столбец

$$\vec{x}^\top = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Целочисленная решётка $\mathbb{Z}^2$ называется фундаментальной решёткой. Обозначим через $\mathbb{U}_2$ множество унимодулярных целочисленных матриц:

$$\mathbb{U}_2 = \left\{ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \middle| a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{Z}, \det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \pm 1 \right\}.$$

$\mathbb{U}_2$ является группой автоморфизмов фундаментальной решётки $\mathbb{Z}^2$:

$$A\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z}^2 \quad \text{для любой матрицы } A \in \mathbb{U}_2.$$

Тем самым задается бесконечное множество базисов фундаментальной решётки $\mathbb{Z}^2$:

$$\vec{\lambda}_{1A} = (a_{11}, a_{21}), \quad \vec{\lambda}_{2A} = (a_{12}, a_{22}) \quad \text{для любой матрицы } A \in \mathbb{U}_2.$$

Векторами такого типа исчерпываются все базисы фундаментальной решётки $\mathbb{Z}^2$.

Через $\mathfrak{M}_2$ обозначим кольцо вещественных квадратных матриц второго порядка, а через $\mathfrak{M}_2^*$ — мультипликативную группу этого кольца.

Через $\mathfrak{M}_2(\mathbb{Z})$ обозначим кольцо целочисленных квадратных матриц второго порядка, а через $\mathfrak{M}_2^*(\mathbb{Z})$ — мультипликативный моноид этого кольца, состоящий из невырожденных целочисленных матриц. Очевидно, что $\mathbb{U}_2 \subset \mathfrak{M}_2^*(\mathbb{Z})$ и это максимальная мультипликативная группа кольца $\mathfrak{M}_2(\mathbb{Z})$.

Рассмотрим произвольную двумерную решётку Λ с базисом $\vec{\lambda}_1 = (\lambda_{11}, \lambda_{21})$, $\vec{\lambda}_2 = (\lambda_{12}, \lambda_{22})$, которая задается невырожденной базисной матрицей A :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{pmatrix}, \quad \Lambda = A\mathbb{Z}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1\lambda_{11} + m_2\lambda_{12} \\ m_1\lambda_{21} + m_2\lambda_{22} \end{pmatrix} \middle| m_1, m_2 \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Ясно, что решётка Λ задается бесконечным множеством базисов, для которых соответствующая базисная матрица A' имеет вид $A' = AB$, где B — произвольная унимодулярная матрица из $\mathbb{U}_2$.

Если через $\text{Aut}(\Lambda)$ обозначить группу автоморфизмов решётки Λ , то нетрудно видеть, что $\text{Aut}(\Lambda) = A\mathbb{U}_2A^{-1}$, где A — произвольная базисная матрица решётки Λ .

Любые две двумерные решётки Λ и Γ изоморфны как абелевы группы. Обозначим множество изоморфизмов решётки Λ в Γ через $\text{Iso}(\Lambda, \Gamma)$. Если A — произвольная базисная матрица решётки Λ и B — решётки Γ , то $\text{Iso}(\Lambda, \Gamma) = B\mathbb{U}_2A^{-1}$, а $\text{Iso}(\Gamma, \Lambda) = A\mathbb{U}_2B^{-1}$.

Отсюда следует, что расстояние между двумя решётками можно записать следующим образом:

$$\rho(\Lambda, \Gamma) = \max(\ln(1 + \mu), \ln(1 + \nu)), \quad \mu = \inf_{A \in \text{Iso}(\Gamma, \Lambda)} \|A - E_2\|, \quad \nu = \inf_{B \in \text{Iso}(\Lambda, \Gamma)} \|B - E_2\|.$$

3. Вычисление расстояния

Обозначим через A_m базисную матрицу решётки $\Lambda_m(F)$:

$$A_m = \begin{pmatrix} Q_m & Q_m\sqrt{p} \\ Q_m & -Q_m\sqrt{p} \end{pmatrix}, \quad A_m^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2Q_m} & \frac{1}{2Q_m} \\ \frac{1}{2Q_m\sqrt{p}} & -\frac{1}{2Q_m\sqrt{p}} \end{pmatrix},$$

а через B_m — базисную матрицу решётки $\Lambda_m(p)$:

$$B_m = \begin{pmatrix} Q_m & P_m \\ Q_m & -P_m \end{pmatrix}, \quad B_m^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2Q_m} & \frac{1}{2Q_m} \\ \frac{1}{2P_m} & -\frac{1}{2P_m} \end{pmatrix}.$$

Пусть $C_m = B_mA_m^{-1}$, $D_m = C_m^{-1} = A_mB_m^{-1}$, $I_m = \text{Iso}(\Lambda_m(F), \Lambda_m(p))$ и $J_m = \text{Iso}(\Lambda_m(p), \Lambda_m(F))$. Тогда $C_m \in I_m$, $D_m \in J_m$. Положим $\nu_m = \|C_m - E_2\|$, $\mu_m = \|D_m - E_2\|$.

ЛЕММА 1. *Справедливы равенства*

$$\nu_m = \frac{\theta_m}{(-1)^m\theta_m + P_mQ_m}, \quad \mu_m = \frac{\theta_m}{P_mQ_m}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно,

$$C_m - E_2 = \begin{pmatrix} \frac{P_m}{2Q_m\sqrt{p}} - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \frac{P_m}{2Q_m\sqrt{p}} \\ \frac{1}{2} - \frac{P_m}{2Q_m\sqrt{p}} & \frac{P_m}{2Q_m\sqrt{p}} - \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \frac{P_m}{2Q_m\sqrt{p}} - \frac{1}{2} = \frac{P_m - Q_m\sqrt{p}}{2Q_m\sqrt{p}} = \frac{-\frac{(-1)^m\theta_m}{Q_m}}{2\left(P_m + \frac{(-1)^m\theta_m}{Q_m}\right)}.$$

Отсюда следует, что

$$\nu_m = \frac{\theta_m}{(-1)^m\theta_m + P_mQ_m},$$

так как $0 < \theta_m < 1$.

Аналогично получаем:

$$D_m - E_2 = \begin{pmatrix} \frac{Q_m\sqrt{p}}{2P_m} - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \frac{Q_m\sqrt{p}}{2P_m} \\ \frac{1}{2} - \frac{Q_m\sqrt{p}}{2P_m} & \frac{Q_m\sqrt{p}}{2P_m} - \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \frac{Q_m\sqrt{p}}{2P_m} - \frac{1}{2} = \frac{Q_m\sqrt{p} - P_m}{2P_m} = \frac{\frac{(-1)^m\theta_m}{Q_m}}{2P_m}.$$

Отсюда следует, что

$$\mu_m = \frac{\theta_m}{P_mQ_m}.$$

□

ЛЕММА 2. Если решётки $\Lambda = A\mathbb{Z}^2$ и $\Gamma = B\mathbb{Z}^2$ с базисными матрицами A и B , соответственно:

$$A = \begin{pmatrix} Q & P + \frac{\theta}{Q} \\ Q & -P - \frac{\theta}{Q} \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2Q} & \frac{1}{2Q} \\ \frac{1}{2(P+\frac{\theta}{Q})} & -\frac{1}{2(P+\frac{\theta}{Q})} \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} Q & P \\ Q & -P \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2Q} & \frac{1}{2Q} \\ \frac{1}{2P} & -\frac{1}{2P} \end{pmatrix}, \quad 0 < |\theta| < 1, \quad P, Q \in \mathbb{N}, \quad P, Q \geq 2$$

связаны соотношениями

$$\Lambda = B^*\Gamma, \quad B^* = AB^{-1} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\theta}{2PQ} & -\frac{\theta}{2PQ} \\ -\frac{\theta}{2PQ} & 1 + \frac{\theta}{2PQ} \end{pmatrix},$$

$$\Gamma = A^*\Lambda, \quad A^* = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\theta}{2(\theta+PQ)} & \frac{\theta}{2(\theta+PQ)} \\ \frac{\theta}{2(\theta+PQ)} & 1 - \frac{\theta}{2(\theta+PQ)} \end{pmatrix},$$

$$\nu_0 = \|A^* - E_2\| = \frac{|\theta|}{\theta + PQ}, \quad \mu_0 = \|B^* - E_2\| = \frac{|\theta|}{PQ}, \quad \varepsilon_0 = \max(\nu_0, \mu_0) < 1,$$

то для расстояния между этими решётками справедливо равенство

$$\rho(\Lambda, \Gamma) = \ln(1 + \varepsilon_0).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$B^* = E_2 + M, \quad M = \begin{pmatrix} \frac{\theta}{2PQ} & -\frac{\theta}{2PQ} \\ -\frac{\theta}{2PQ} & \frac{\theta}{2PQ} \end{pmatrix}, \quad \|M\| = \mu_0 < \frac{1}{4},$$

$$A^* = E_2 + N, \quad N = \begin{pmatrix} -\frac{\theta}{2(\theta+PQ)} & \frac{\theta}{2(\theta+PQ)} \\ \frac{\theta}{2(\theta+PQ)} & -\frac{\theta}{2(\theta+PQ)} \end{pmatrix}, \quad \|N\| = \nu_0 < \frac{1}{3}.$$

Из условия следует, что $\text{Iso}(\Lambda, \Gamma) = BU_2A^{-1}$ и $\text{Iso}(\Gamma, \Lambda) = AU_2B^{-1}$. Пусть C — произвольная унимодулярная матрица из $\mathbb{U}_2$:

$$C = \begin{pmatrix} 1+a & b \\ c & 1+d \end{pmatrix}, \quad C = E_2 + C_1, \quad C_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z},$$

тогда $\det C = 1 + a + d + ad - bc = \pm 1$, и, значит,

$$a + d + ad - bc = \begin{cases} 0, & \text{если } \det C = 1, \\ -2, & \text{если } \det C = -1. \end{cases}$$

Рассмотрим матрицы $D = BCA^{-1} = E_2 + M + BC_1A^{-1}$ и $F = ACB^{-1} = E_2 + N + AC_1B^{-1}$. Нас интересует вопрос: при каких матрицах $C \in \mathbb{U}_2$ будет $\max(\|D - E_2\|, \|F - E_2\|) < \varepsilon_0$? Имеем:

$$D_1 = BC_1A^{-1} = aB_{11} + bB_{12} + cB_{21} + dB_{22}, \quad F_1 = AC_1B^{-1} = aA_{11} + bA_{12} + cA_{21} + dA_{22},$$

$$B_{ij} = B \begin{pmatrix} \delta_{1i}\delta_{1j} & \delta_{1i}\delta_{2j} \\ \delta_{2i}\delta_{1j} & \delta_{2i}\delta_{2j} \end{pmatrix} A^{-1}, \quad A_{ij} = A \begin{pmatrix} \delta_{1i}\delta_{1j} & \delta_{1i}\delta_{2j} \\ \delta_{2i}\delta_{1j} & \delta_{2i}\delta_{2j} \end{pmatrix} B^{-1}.$$

Отсюда следует, что

$$B_{11} + B_{22} = A^* = E_2 + N, \quad A_{11} + A_{22} = B^* = E_2 + M.$$

Матрицы A_{ij} , B_{ij} легко вычисляются:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, & A_{12} &= \begin{pmatrix} \frac{Q}{2P} & -\frac{Q}{2P} \\ \frac{Q}{2P} & -\frac{Q}{2P} \end{pmatrix}, \\ A_{21} &= \begin{pmatrix} \frac{\theta+PQ}{2Q^2} & \frac{\theta+PQ}{2Q^2} \\ -\frac{\theta+PQ}{2Q^2} & -\frac{\theta+PQ}{2Q^2} \end{pmatrix}, & A_{22} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{\theta}{2PQ} & -\frac{1}{2} - \frac{\theta}{2PQ} \\ -\frac{1}{2} - \frac{\theta}{2PQ} & \frac{1}{2} + \frac{\theta}{2PQ} \end{pmatrix}, \\ B_{11} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, & B_{12} &= \begin{pmatrix} \frac{Q^2}{2(\theta+PQ)} & -\frac{Q^2}{2(\theta+PQ)} \\ \frac{Q^2}{2(\theta+PQ)} & -\frac{Q^2}{2(\theta+PQ)} \end{pmatrix}, \\ B_{21} &= \begin{pmatrix} \frac{P}{2Q} & \frac{P}{2Q} \\ -\frac{P}{2Q} & -\frac{P}{2Q} \end{pmatrix}, & B_{22} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{\theta}{2(\theta+PQ)} & -\frac{1}{2} + \frac{\theta}{2(\theta+PQ)} \\ -\frac{1}{2} + \frac{\theta}{2(\theta+PQ)} & \frac{1}{2} - \frac{\theta}{2(\theta+PQ)} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

Будем рассматривать квадратные матрицы второго порядка как вектора в четырёхмерном векторном вещественном пространстве E^4 , тогда матрицы A_{11} , A_{12} , A_{21} , A_{22} образуют ортогональный базис в евклидовом пространстве E^4 . И матрицы B_{11} , B_{12} , B_{21} , B_{22} образуют ортогональный базис в евклидовом пространстве E^4 .

Рассмотрим скалярные квадраты матриц D_1 и F_1 . Из разложения по ортогональным базисам следует, что:

$$\begin{aligned} (D_1, D_1) &= a^2 + b^2 \left(\frac{Q^2}{\theta + PQ} \right)^2 + c^2 \left(\frac{P}{Q} \right)^2 + d^2 \left(1 - \frac{\theta}{\theta + PQ} \right)^2, \\ (F_1, F_1) &= a^2 + b^2 \left(\frac{Q}{P} \right)^2 + c^2 \left(\frac{\theta + PQ}{Q^2} \right)^2 + d^2 \left(1 + \frac{\theta}{PQ} \right)^2. \end{aligned}$$

Если

$$D_1 = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix}, \quad F_1 = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix},$$

то

$$(D_1, D_1) = d_{11}^2 + d_{12}^2 + d_{21}^2 + d_{22}^2, \quad (F_1, F_1) = f_{11}^2 + f_{12}^2 + f_{21}^2 + f_{22}^2.$$

Для дальнейшего нам потребуются неравенства $\|D_1\| \geq \sqrt{(D_1, D_1)}$, $\|F_1\| \geq \sqrt{(F_1, F_1)}$, которые следуют из определения матричной нормы и скалярного квадрата. Действительно, если рассмотрим произвольную квадратную матрицу A :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

то $(A, A) = a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{21}^2 + a_{22}^2 \leq 4(\max(|a_{11}|, |a_{12}|, |a_{21}|, |a_{22}|))^2 = \|A\|^2$, то есть $\|A\| \geq \sqrt{(A, A)}$.

Отсюда следует, что

$$\|D_1\| \geq \rho_1 = \min \left(1, \frac{Q^2}{\theta + PQ}, \frac{P}{Q}, 1 - \frac{\theta}{\theta + PQ} \right), \quad \|F_1\| \geq \rho_2 = \min \left(1, \frac{Q}{P}, \frac{\theta + PQ}{Q^2}, 1 + \frac{\theta}{PQ} \right).$$

Проверим, что $\rho_1 \geq 2\mu_0$, $\rho_2 \geq 2\nu_0$.

Действительно, $1 \geq 2\mu_0 = \frac{2|\theta|}{PQ}$, $\frac{Q^2}{\theta + PQ} \geq \frac{2|\theta|}{PQ}$ так как $Q^2 \geq 4 \geq \frac{2(PQ+1)}{PQ}$, $\frac{P}{Q} \geq \frac{2|\theta|}{PQ}$ так как $P^2 \geq 2$, $1 - \frac{\theta}{\theta + PQ} \geq \frac{2|\theta|}{PQ}$ так как $(PQ)^2 \geq 2(PQ + 1)$. Тем самым первое неравенство доказано.

Аналогично, $1 \geq 2\nu_0 = \frac{2|\theta|}{\theta + PQ}$, $\frac{Q}{P} \geq \frac{2|\theta|}{\theta + PQ}$ так как $Q(PQ - 1) \geq 2P$, $\frac{\theta + PQ}{Q^2} \geq \frac{2|\theta|}{\theta + PQ}$ так как $(PQ - 1)^2 \geq 2Q^2$, $1 + \frac{\theta}{PQ} \geq \frac{2|\theta|}{\theta + PQ}$ так как $(PQ - 1)^2 \geq 2PQ$. Тем самым и второе неравенство доказано.

Далее имеем:

$$\|D - E_2\| = \|M + D_1\| \geq \|D_1\| - \|M\| \geq \|M\|, \quad \|F - E_2\| = \|N + F_1\| \geq \|F_1\| - \|N\| \geq \|N\|,$$

что и доказывает утверждение леммы. $\square$

ТЕОРЕМА 1. При $P_m \geq 2$, $Q_m \geq 2$ справедливо равенство

$$\rho(\Lambda_m(F), \Lambda_m(p)) = \ln \left(1 + \max \left(\frac{\theta_m}{(-1)^m \theta_m + P_m Q_m}, \frac{\theta_m}{P_m Q_m} \right) \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим в лемме 2 $\Lambda = \Lambda_m(F)$, $\Gamma = \Lambda_m(p)$, $A = A_m$, $B = B_m$, тогда получим утверждение теоремы. $\square$

4. Заключение

Для решения вопроса о наилучших приближениях квадратичной алгебраической решётки целочисленной решёткой необходимо вычислить расстояние от произвольной решётки $Q\Lambda(F)$ до целочисленной решётки $\Lambda(P, Q)$, заданной базисом $\vec{\lambda}_1 = (Q, Q)$, $\vec{\lambda}_2 = (P, -P)$, где $\left| \frac{P}{Q} - \sqrt{p} \right| < \frac{1}{2}$. По аналогии с наилучшими приближениями второго рода, можно высказать гипотезу, что наилучшие приближения даются решётками из доказанной теоремы.

Выражаю свою благодарность научному руководителю профессору Н. М. Добровольскому за постановку задачи, полезное обсуждение и постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вронская Г. Т., Добровольский Н. Н. Отклонения плоских сеток. монография / под редакцией Н. М. Добровольского. Тула, 2012.
2. Дэвенпорт Г. Высшая арифметика. — М.: Наука. 1965 г. — 176 с.
3. Касселс Д. Введение в геометрию чисел. М.: Мир, 1965. 422 с.
4. Кормачева А. Н. О неполных частных одной цепной дроби // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 1, с. 293–301.
5. Михляева А. В. Приближение квадратичных алгебраических решёток и сеток целочисленными решётками и рациональными сетками // Чебышевский сборник, 2018, т. 19, вып. 3. С. 241–256.
6. Михляева А. В. Функция качества для приближения квадратичных алгебраических сеток // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 1. С. 302–307.

REFERENCES

1. Vronskaya, G. T., Dobrovol'skii, N. N. 2012, "Deviations of flat grids. monograph", edited by N. M. Dobrovol'skii. Tula.
2. Davenport, H., 1965, "The higher arithmetic", Moscow, Nauka — pp. 176.
3. Kassels, D. 1965, Vvedenie v geometriyu chisel, [Introduction to the geometry of numbers], Mir, Moscow, Russia.

4. Kormacheva, A. N., 2019, "About the partial quotients of one of the continued fractions", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 2, pp. 293–301.
5. Mikhlyeva, A. V., 2018, "Approximation of quadratic algebraic lattices and nets by integer lattices and rational nets", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 3, pp. 241–256.
6. Mikhlyeva, A. V., 2019, "Quality function for the approximation of quadratic algebraic nets", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 302–307.

Получено 18.05.2019 г.

Принято в печать 12.07.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 2.

УДК 517

DOI 10.22405/2226-8383-2018-20-2-374-382

Арифметические свойства рядов некоторых классов

Е. С. Крупицын

Крупицын Евгений Станиславович — старший преподаватель кафедры теории чисел, Институт математики и информатики, Московский педагогический государственный университет (г. Москва).

e-mail: krupitsin@gmail.com

Аннотация

В статье рассматриваются свойства лиувиллевых чисел в p -адической, g -адической и полиадической областях. Каноническое представление p -адического числа имеет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n p^n, \quad a_n \in \{0, 1, \dots, p-1\}.$$

Каноническое представление g -адического числа имеет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n g^n, \quad a_n \in \{0, 1, \dots, g-1\}.$$

Каноническое представление полиадического числа имеет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n n!, \quad a_n \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

Основная цель работы — получение оценок снизу норм в соответствующих областях от значений ненулевых многочленов с целыми коэффициентами, вычисленных при подстановке вместо переменных рассматриваемых совокупностей, соответственно, p -адических, g -адических и полиадических лиувиллевых чисел.

Тем самым, в случае полиадических чисел, доказывается их глобальная трансцендентность и глобальная алгебраическая независимость.

Отметим, что в случае, когда оценивается обычная абсолютная величина значения многочлена от совокупности действительных лиувиллевых чисел, основная трудность состоит в доказательстве отличия от нуля значения этого многочлена в приближающей точке.

В настоящей работе, в случае p -адических, g -адических и полиадических чисел эту трудность удастся обойти, используя известную алгебраическую лемму о величине корней многочлена.

Кроме того, в работе известная теорема П. Эрдёша о представлении действительного числа суммой двух лиувиллевых чисел переносится на случаи p -адических, g -адических и полиадических чисел.

Ключевые слова: оценка многочлена, p -адическое число, g -адическое число, полиадическое число, трансцендентность.

Библиография: 19 названий.

Для цитирования:

Е. С. Крупицын. Арифметические свойства рядов некоторых классов // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 2, с. 374–382.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 2.

UDC 517

DOI 10.22405/2226-8383-2018-20-2-374-382

Arithmetic properties of series of some classes

E. S. Krupitsyn

Krupitsyn Evgeny Stanislavovich — Senior Lecturer, Department of Number Theory, Institute of Mathematics and Computer Science, Moscow State Pedagogical University (Moscow).

e-mail: krupitsin@gmail.com

Abstract

The paper studies properties of Liouvillean numbers in p -adic, g -adic, polyadic domains. The canonical representation of p -adic integer is

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n p^n, \quad a_n \in \{0, 1, \dots, p-1\}.$$

For a g -adic integer it is of the form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n g^n, \quad a_n \in \{0, 1, \dots, g-1\}.$$

Polyadic integers are of the form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n n!, \quad a_n \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

The main purpose of this work is to estimate from below the corresponding norm of the elements, which is the result of substitution of p -adic, g -adic or polyadic integers for the variables into a non-zero polynomial with integer coefficients.

Therefore, in the case of polyadic integers, we prove the global transcendence and global algebraic independence.

Note that when we evaluate the usual absolute value of the considered polynomial, the main difficulty arises to prove the nonvanishing of this polynomial at the approximating point.

In p -adic, g -adic, polyadic cases we avoid it using a well known algebraic lemma on the values of roots of the polynomial.

Besides the paper gives some generalization of a theorem by P. Erdős on representation of real number as a sum of two Liouvillean numbers to the cases of p -adic, g -adic and polyadic numbers.

Keywords: p -adic integer, g -adic integer, polyadic integer, estimates of polynomials.

Bibliography: 19 titles.

For citation:

E. S. Krupitsyn, 2019, "Arithmetic properties of series of some classes", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 2, pp. 374–382.

1. Введение

В 1844 г. Ж. Лиувиль [1] рассмотрел действительные числа, допускающие сколь угодно высокий порядок приближения рациональными числами и доказал их трансцендентность. В 1972 году Цайсов [2] установил оценку меры трансцендентности некоторых лиувиллевых чисел.

Для каждого простого числа p определено p -адическое нормирование поля рациональных чисел: для любого $a \in \mathbb{Q}$, $a = \frac{c}{b}$

$$|a|_p = \begin{cases} p^{\nu_p(b) - \nu_p(c)}, & a \neq 0, \\ 0, & a = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Определённая равенствами (1) величина обладает всеми свойствами нормы. Помимо свойства $|a + b|_p \leq |a|_p + |b|_p$ выполняется более сильное неравенство

$$|a + b|_p \leq \max(|a|_p, |b|_p), \quad (2)$$

и если $|a|_p \neq |b|_p$, то

$$|a + b|_p = \max(|a|_p, |b|_p). \quad (3)$$

Из определения p -адической нормы (1) сразу вытекает формула (называемая формулой произведения): если $x \in \mathbb{Q}$, $x \neq 0$, то

$$|x| \prod |x|_p = 1, \quad (4)$$

где произведение в левой части взято по всем p -адическим нормированиям поля $\mathbb{Q}$.

Пополнение $\mathbb{Q}$ по норме $|\cdot|_p$ называется полем p -адических чисел.

Пусть $g \in \mathbb{N}$. Если $g = p$ — простое число, то $\mathbb{Q}_p$ — поле p -адических чисел, см. [7, гл. 1, §3]. Если g — составное число, то $\mathbb{Q}_g$ — кольцо g -адических чисел, в котором можно определить псевдо-нормирование. Пусть r, s и g — целые числа, такие что

$$r \neq 0, \quad s \geq 1, \quad \text{НОД}(r, s) = 1, \quad g \geq 2.$$

и $a = \frac{r}{s}$, при $a \neq 0$, положим

$$|a|_g = g^f, \quad |0|_g = 0.$$

Так определённая функция $|x|_g$ называется g -адической псевдо-нормой x . Неравенство

$$\left| \frac{r}{s} \right|_g \leq 1$$

выполняется при условии

$$\text{НОД}(g, s) = 1.$$

Числа, для которых выполняется данное свойство называются целыми g -адическими.

Приняв в качестве полной системы окрестностей O кольца $\mathbb{Z}$ целых рациональных чисел систему идеалов (m) , $1 \leq m < +\infty$, можно превратить $\mathbb{Z}$ в топологическое кольцо с неметризуемой топологией.

Полученную топологию в $\mathbb{Z}$ называют полиадической. Символом $\mathbb{Z}_\tau$ обозначают кольцо $\mathbb{Z}$ в полиадической топологии. Можно доказать, что $\mathbb{Z}_\tau$ обладает полной несвязностью и, что кольцо $\mathbb{Z}_\tau$ можно сделать метрическим пространством.

Обозначим $\mathbb{Z}_\tau$ — кольцо целых чисел с топологией τ , в которой идеалы (m) задают полную систему окрестностей нуля аддитивной группы целых чисел. На этом кольце можно ввести расстояние:

$$\rho(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\delta_m(x, y)}{2^m}, \quad (5)$$

где

$$\delta_m(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \equiv y \pmod{m}, \\ 1, & \text{если } x \not\equiv y \pmod{m}. \end{cases} \quad (6)$$

Бесконечная последовательность $\{x_n\}$, $x_n \in \mathbb{Z}$ называется фундаментальной, если для любого $K \in \mathbb{N}$ существует $\mathcal{N} \in \mathbb{N}$, такое что для всех $m, n > \mathcal{N}$ имеет место сравнение $x_m \equiv x_n \pmod{K!}$.

Фундаментальные последовательности элементов $\mathbb{Z}_\tau$ образуют кольцо.

Последовательность $\{z_n\}$ называется нулевой последовательностью, если

$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$, где предел понимается в смысле топологии кольца $\mathbb{Z}_\tau$. Фундаментальные последовательности называются эквивалентными, если их разность является нулевой последовательностью.

Полиадическим числом называется класс эквивалентных фундаментальных последовательностей.

Полношение $\mathbb{Z}_\tau$ приводит к топологическому пространству $\mathfrak{G}_\tau$, называемому кольцом целых полиадических чисел. Это кольцо можно метризовать следующим образом. Пусть $\mathfrak{a} \in \mathfrak{G}_\tau$ состоит из последовательностей $\{\alpha_k\}$, а $\mathfrak{b} \in \mathfrak{G}_\tau$ состоит из последовательностей $\{\beta_k\}$. Положим полиадическое расстояние $\rho(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ равным

$$\rho(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \rho(\alpha_k, \beta_k). \quad (7)$$

Элемент $\mathfrak{a} \in \mathfrak{G}_\tau$ можно представить каноническим рядом

$$\mathfrak{a} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n!, \quad (8)$$

где $a_n \in \{0, 1, \dots, n\}$. Такой ряд сходится в любом поле $\mathbb{Q}_p$, так как степень, в которой простое число p входит в разложение числа $n!$ на простые множители равна

$$\frac{n - S_n}{p - 1},$$

где S_n — сумма цифр в p -ичном разложении числа n , при этом

$$|a_n \cdot n!|_p \rightarrow 0,$$

что является необходимым и достаточным условием сходимости ряда (8) в $\mathbb{Q}_p$.

Представление вида (8) элемента $\mathfrak{a} \in \mathfrak{G}_\tau$ — частный случай представления более общего вида. Пусть $\pi(k) = \mathcal{N}_1 \cdot \dots \cdot \mathcal{N}_k$, $\mathcal{N}_i \in \mathbb{N}$, причём $\mathcal{N}_1 = 1$, $\mathcal{N}_k > 1$ при $k > 1$ и $\pi(k) \rightarrow 0$ в смысле топологии кольца $\mathbb{Z}_\tau$. Любое $\mathfrak{a} \in \mathfrak{G}_\tau$ можно представить единственным образом представить в виде

$$\mathfrak{a} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \pi(k), \quad 0 \leq a_k \leq \mathcal{N}_{k+1} - 1. \quad (9)$$

Кольцо $\mathfrak{G}_\tau$ представляет собой прямое произведение колец $\mathbb{Z}_{p_i}$ по всем простым p_i .

Пусть p_m обозначает простое число с номером m .

Целое полиадическое число L будем называть лиувиллевым, если для любого $m \in \mathbb{N}$ существует число $A \in \mathbb{N}$ такое, что для любого простого числа $p \in \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ выполняется неравенство

$$|L - A|_p < A^{-m} \quad (10)$$

Кольцо целых полиадических чисел представляет собой прямое произведение колец целых p -адических чисел.

Арифметические свойства полиадических чисел и вопросы трансцендентности чисел рассмотрены в статьях [3] – [18].

2. Основной текст статьи

Пусть $\gamma(x)$ – возрастающая функция такая, что $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\gamma(x+1)}{\gamma(x)} = \infty$ и $\gamma(n) \in \mathbb{N}$ при $n \in \mathbb{N}$.

Пусть p – фиксированное простое число, $a(n), \gamma(n)$ – натуральнозначные функции такие, что $1 \leq a(n) < p$, $\gamma(n)$ возрастающая и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\gamma(n+1)}{\gamma(n)} = \infty$. Обозначим $\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)p^{\gamma(n)}$.

ТЕОРЕМА 1. Для любого натурального числа d найдется постоянная $H_0(d)$ такая, что для каждого многочлена $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ степени d и высоты $H \geq H_0(d)$ выполняется неравенство

$$|P(\alpha)|_p \geq \left(H \cdot (d+1) \cdot \left(\frac{p^2}{p-1} \right)^d p^{d(\gamma(\gamma^{-1}(\log_p H)+1))} \right)^{-1}.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть

$$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} p^{n!}. \quad (11)$$

Тогда для любого натурального числа d и любого $\varepsilon > 0$ существует постоянная $H_0 = H_0(\varepsilon, d)$ такая, что для любого многочлена $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ степени d и высоты $H \geq H_0$ выполняется неравенство

$$|P(\alpha)|_p \geq \left(H(d+1) \left(\frac{p}{p-1} \right)^d \right)^{-1} H^{-d(\ln \log_p H)^{1+\varepsilon}}. \quad (12)$$

Пусть $\alpha_i = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,i} p^{\gamma_i(n)}$, $i = 1, \dots, m$, где $a_{n,i} \in \mathbb{N}$ и $1 \leq a_{n,i} < p$. Пусть функции $\gamma_i(x)$ возрастающие, такие что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\gamma_{i+1}(x)}{\gamma_i(x)} = \infty, \quad i = 1, \dots, m-1 \quad (13)$$

$$\text{и} \quad (14)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\gamma_1(n+1)}{\gamma_m(n)} = \infty \quad (15)$$

ТЕОРЕМА 3. Для любого многочлена $P(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_m]$, отличного от тождественного нуля, высоты H и степени d по совокупности переменных $x_1, \dots, x_m$, при условии $H \geq H_0(d)$ выполнено неравенство

$$|P(\alpha_1, \dots, \alpha_m)|_p > H^{-1} \left(\frac{(d+m-1)!}{d!m!} \right)^{-1} \cdot \left(p^{\gamma_m(\tau^{-1}(H)+1)} \right)^{-d} \quad (16)$$

ТЕОРЕМА 4. Любое целое p -адическое число представимо суммой двух Лиувиллевых чисел.

Пусть $g = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m}$, $a(n), \gamma(n)$ – натуральнозначные функции такие, что $1 \leq a(n) < g$, $\gamma(n)$ возрастающая и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\gamma(n+1)}{\gamma(n)} = \infty$. Обозначим $\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} a(n) g^{\gamma(n)}$.

ТЕОРЕМА 5. Для любого натурального числа d найдется постоянная $H_0(d)$ такая, что для каждого многочлена $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ степени d и высоты $H \geq H_0(d)$ выполняется неравенство

$$|P(\alpha)|_g \geq \left(H \cdot (d+1) \cdot \left(\frac{g^2}{g-1} \right)^d g^{d(\gamma(\gamma^{-1}(\log_g H)+1))} \right)^{-1}.$$

ТЕОРЕМА 6. Пусть $\varepsilon > 0$,

$$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} g^{n!}. \quad (17)$$

Существует эффективная постоянная $H_0 = H_0(\varepsilon, d)$ такая, что для любого отличного от нуля многочлена $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ степени d и высоты $H \geq H_0$ выполнена оценка

$$|P(\alpha)|_g \geq \left(H(d+1) \left(\frac{g}{g-1} \right)^d \right)^{-d} H^{-d(\ln \log_g H)^{1+\varepsilon}}. \quad (18)$$

Пусть $\alpha_i = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,i} g^{\gamma_i(n)}$, $i = 1, \dots, m$, где $a_{n,i} \in \mathbb{N}$ и $1 \leq a_{n,i} < g$. Пусть функции $\gamma_i(x)$ возрастающие, такие что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\gamma_{i+1}(x)}{\gamma_i(x)} = \infty, \quad i = 1, \dots, m-1 \quad (19)$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\gamma_1(n+1)}{\gamma_m(n)} = \infty \quad (20)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\gamma_1(n+1)}{\gamma_m(n)} = \infty \quad (21)$$

ТЕОРЕМА 7. Для любого многочлена $P(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_m]$, отличного от тождественного нуля, высоты H и степени d по совокупности переменных $x_1, \dots, x_m$, при условии $H \geq H_0(d)$ выполнено неравенство

$$|P(\alpha_1, \dots, \alpha_m)|_g > H^{-1} \left(\frac{(d+m-1)!}{d!m!} \right)^{-1} \cdot \left(g^{\gamma_m(\tau^{-1}(H))+1} \right)^{-d} \quad (22)$$

ТЕОРЕМА 8. Пусть

$$\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} a_k n_k!, \quad a_k \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq a_k \leq n_k, \quad n_k \in \mathbb{N}, \quad (23)$$

$$\frac{(n_k+1) \ln(n_k+1)}{n_k+1} \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow +\infty. \quad (24)$$

Пусть $\varepsilon(H) \rightarrow 0$ при $H \rightarrow +\infty$. Пусть $\tilde{p} \in \mathbb{N}$. Тогда существует $H_0 = H_0(\tilde{p})$ такая, что для любого простого числа $p \leq \tilde{p}$ и любого многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами, не превосходящими по абсолютной величине числа H , $H \geq H_0$, имеющего степень m , удовлетворяющую неравенству

$$m\varepsilon(H) < \frac{\ln \tilde{p}}{2(\tilde{p}-1)} \quad (25)$$

выполнено неравенство

$$|P(\alpha)|_p > \frac{1}{m+1} \cdot H^{-1-\varepsilon^{-1}(H)(\ln \ln H + \ln \varepsilon^{-1}(H)) \cdot m}. \quad (26)$$

ТЕОРЕМА 9. Пусть

$$\alpha_i = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,i} (\varphi_i(n))!, \quad i = 1, \dots, m, \quad (27)$$

где

$$a_{n,i} \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq a_{n,i} \leq \varphi_i(n), \quad i = 1, \dots, m, \quad (28)$$

а функции $\varphi_i(n)$ принимают натуральные значения и удовлетворяют условиям

$$\frac{\varphi_{i+1}(n)}{\varphi_i(n) \ln \varphi_i(n)} \rightarrow +\infty, \quad n \rightarrow +\infty, \quad i = 1, \dots, m-1 \quad (29)$$

$$\frac{\varphi_1(n+1)}{\varphi_m(m) \ln \varphi_m(n)} \rightarrow +\infty, \quad n \rightarrow +\infty \quad (30)$$

$$\frac{\varphi_1(n) \ln \varphi_1(n) (\ln \varphi_m(n))^{\frac{3}{2}m}}{\varphi_m(n)} \rightarrow +\infty \quad n \rightarrow +\infty. \quad (31)$$

Пусть $p_0 \in \mathbb{N}, \varepsilon > 0, \delta = 1 - \frac{1}{(1+\varepsilon)^{\frac{3}{2}m+2}}$. Тогда существует число $H_0 = H_0(p_0, \varepsilon)$ такое, что для любого отличного от нулевого многочлена $P(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_m]$ высоты H и степени d по совокупности переменных $x_1, \dots, x_m$ при условиях $H \geq H_0$,

$$\ln \frac{(d+m)!}{d!m!} \leq (1+\delta) \ln H \quad (32)$$

для любого простого числа $p \leq p_0$ выполнено неравенство

$$|P(\alpha_1, \dots, \alpha_m)|_p > H^{-d(1+\varepsilon)(\ln \ln H)^{\frac{3}{2}m+1}}. \quad (33)$$

ТЕОРЕМА 10. Любое целое полиадическое число α допускает представление в виде

$$\alpha = L_1 + L_2, \quad (34)$$

где L_1, L_2 — полиадические лиувиллевы числа.

3. Заключение

В работе собраны результаты автора об оценках многочленов от p -адических, g -адических и полиадических чисел и некоторые результаты о представлении этих чисел в виде суммы двух лиувиллевых чисел.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. J. Liouville. Sur des classes tres etendues de quantites don't la valeur n'est ni algebriques, ni meme reductible a des irrationnelles algebriques. C.R. Acad.Sci.Paris, Ser. A, 18, 883–885.
2. Cijssow P. L. Transcendental measures. Doctoral Dissertation, Univ. Amsterdam., 1972, Zbl. 252.10031
3. Chirskii V. G. Topical problems of the theory of Transcendental numbers: Developments of approaches to their solutions in the works of Yu.V. Nesterenko // Russian Journal of Mathematical Physics, vol. 24, № 2, 2017, p. 153–171.

4. Chirskii V. G., Bertrand D., Yebbou J. Effective estimates for global relations on Euler-type series, *Ann. Fac. Sci. Toulouse*, Vol. XIII, № 2, 2004, 241–260.
5. Чирский В. Г. Арифметические свойства полиадических рядов с периодическими коэффициентами // *Известия РАН. Серия математическая*, т. 81, вып. 2, 2017, с. 215–232.
6. Чирский В. Г. О рядах, алгебраически независимых во всех локальных полях // *Вестн. Моск. ун-та. — Сер. 1, матем., механ.*, № 3, 1978, с. 29–34.
7. Чирский В. Г. Арифметические свойства полиадических рядов с периодическими коэффициентами // *Доклады академии наук*, 2014, т. 459, № 6, с. 677–679.
8. Чирский В. Г. Об арифметических свойствах обобщённых гипергеометрических рядов с иррациональными параметрами // *Известия РАН. Серия математическая*, 2014, т. 786, вып. 6, с. 193–210.
9. Чирский В. Г. Об арифметических свойствах ряда Эйлера // *Вестник Московского ун-та. Сер. 1, матем., механ.*, 2015, № 1, с. 59–61.
10. Чирский В. Г. Оценки линейных форм и многочленов от совокупностей полиадических чисел // *Чебышевский сборник*, 2011, т. 12, № 4, с. 129–134.
11. Чирский В. Г. Арифметические свойства некоторых полиадических рядов // *Вестник МГУ, сер. 1, матем., механ.*, 2012, № 5, с. 52–54.
12. Чирский В. Г. Полиадические оценки для F -рядов // *Чебышёвский сборник*, т. 13, вып. 2, 2012, с. 131–136.
13. Чирский В. Г. Арифметические свойства обобщённых гипергеометрических F -рядов // *Доклады академии наук*, 2018, т. 483, № 3, с. 257–259.
14. Chirskii V. G. Product Formula, Global Relations and Polyadic Numbers // *Russian Journal of Math. Physics*, 2019, v. 26, no. 3, pp. 286–305.
15. Крупицын Е. С. Оценка многочлена от полиадического лиувиллева числа // *Материалы международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и физики»*. 2017. С. 113–114.
16. Крупицын Е. С. Оценка многочлена от глобально трансцендентного полиадического числа // *Чебышевский сборник*, 2017, т. 18, вып. 4.
17. Чирский В. Г., Крупицын Е. С. Оценки многочленов от некоторых полиадических чисел // *Преподаватель XXI век*, 2012, № 4, с. 217–224.
18. Чирский В. Г. О рядах, алгебраически независимых во всех локальных полях // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, матем., механ.*, 1994, № 3, с. 93–95.
19. Mahler K. p -adic numbers and their functions. London: Cambridge University Press, 1981.

REFERENCES

1. J. Liouville. Sur des classes tres etendues de quantites don't la valeur n'est ni algebriques, ni meme reductible a des irrationnelles algebriques. *C.R. Acad.Sci.Paris, Ser.A*, 18, 883–885.
2. Cijssow P.L. 1972, *Transcendental measures*. Doctoral Dissertation, Univ. Amsterdam. Zbl. 252.10031.

3. Chirskii V. G. 2017, "Topical problems of the theory of Transcendental numbers: Developments of approaches to their solutions in the works of Yu.V. Nesterenko", *Russian Journal of Mathematical Physics*, vol. 24, no 2, pp. 153–171.
4. Chirskii V. G., D. Bertrand, J. Yebbou 2004, "Effective estimates for global relations on Euler-type series", *Ann. Fac. Sci. Toulouse*, vol. XIII, no 2, pp. 241–260.
5. Chirskii V. G. 2017, "Arithmetic properties of polyadic series with periodic coefficients", *Izvestiya: Mathematics*, vol. 81, iss. 2, pp. 215–232.
6. Chirskii V. G. 1978, "On series that are algebraically independent in all local fields", *Vestn. Moscow. University. Ser. 1, Math., Mechan.*, no 3, pp. 29–34.
7. Chirskii V. G. 2014, "Arithmetic properties of polyadic series with periodic coefficients", *Doklady Mathematics*, vol. 459, no 6, pp. 677–679.
8. Chirskii V. G. 2014, "On the arithmetic properties of generalized hypergeometric series with irrational parameters", *Izvestiya: Mathematics*, vol. 786, iss. 6, pp. 193–210.
9. Chirskii V. G. 2015, "On the arithmetic properties of the Euler series", *Vestn. Moscow. University. Ser. 1, Math., Mechan.*, no 1, pp. 59–61.
10. Chirskii V. G. 2011, "Estimates of linear forms and polynomials from sets of polyadic numbers", *Chebyshevskii sb.*, vol. 12, no 4, pp. 129–134.
11. Chirskii V. G. 2012, "Arithmetic properties of some polyadic series", *Vestn. Moscow. University. Ser. 1, Math., Mechan.*, no 5, pp. 52–54.
12. Chirskii V. G. 2018, "Arithmetic properties of generalized hypergeometric F -series", *Reports of the Academy of Sciences*, vol. 483, no. 3, pp. 257–259.
13. Chirskii V. G. 2019, "Product Formula, Global Relations and Polyadic Numbers", *Russian Journal of Math. Physics*, vol. 26, no. 3, pp. 286–305.
14. Chirskii V. G. 2012, "Polyadic estimates for F -series", *Chebyshevskii sb.*, vol. 13, iss. 2, pp. 131–136.
15. Krupitsyn E. S. 2017, "Estimation of a polynomial from a polyadic Liouville number", *Materials of the international scientific conference «Actual problems of applied mathematics and physics»*, pp. 113–114.
16. Krupitsyn E. S. 2017, "Estimates of polynomials in a Liouvillean polyadic integer", *Chebyshevskii sb.*, vol. 18, iss. 4.
17. Chirskii V. G., Krupitsyn E. S. 2012, "Estimates of polynomials in some polyadic numbers", *Teacher of the XXI century*, no 4, pp. 217–224.
18. Chirskii V. G. 1994, "On series that are algebraically independent in all local fields", *Vestn. Moscow. University. Ser. 1, Math., Mechan.*, no 3, pp. 93–95.
19. Mahler K. p -adic numbers and their functions. London: Cambridge University Press, 1981.

Получено 18.05.2019 г.

Принято в печать 12.07.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 2.

УДК 511.36

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-383-390

Свойства элементов прямых произведений полей

В. Ю. Матвеев

Матвеев Владимир Юрьевич — аспирант кафедры теории чисел, Московский педагогический государственный университет (г. Москва).

e-mail: salomaa@mail.ru

Аннотация

В статье рассказано об арифметических свойствах значений некоторых F -рядов. F -ряд — это ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot n! z^n,$$

коэффициенты a_n которого принадлежат некоторому алгебраическому полю $\mathbb{K}$ конечной степени над полем $\mathbb{Q}$. При этом наибольшая из абсолютных величин сопряженных с a_n чисел не превосходит величину $e^{C_1 n}$, $n = 0, 1, \dots$. Кроме того, существует последовательность натуральных чисел $d_n = d_{0,n} q^n$, $q \in \mathbb{N}$, такая, что $d_n a_k \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$, $n = 0, 1, \dots$, $k = 0, 1, \dots, n$. При этом $d_{0,n}$ делится только на простые числа p , $p \leq C_2 n$ и

$$\text{ord}_p d_{0,n} \leq C_3 \left(\log_p^n + \frac{n}{p^2} \right).$$

Устанавливается некоторая общая теорема, подобная теореме В.Х. Салихова для E -функций. Эта теорема дает условие алгебраической независимости над $\mathbb{C}(z)$ для F -рядов, каждый из которых является решением линейного дифференциального уравнения первого порядка. Приведем примеры применения этой общей теоремы к некоторым гипергеометрическим рядам.

Полученные результаты позволяют применять общие теоремы В.Г. Чирского об арифметических свойствах значений F -рядов.

В результате получено, что значения рассматриваемых рядов как в алгебраических точках, так и в полиадических точках, хорошо приближаемых натуральными числами, бесконечно алгебраически независимы.

В работе также упомянуты некоторые приложения полиадических и почти полиадических чисел к ряду задач.

Ключевые слова: F — ряды, бесконечная алгебраическая независимость, полиадические числа.

Библиография: 26 названий.

Для цитирования:

В. Ю. Матвеев. Свойства элементов прямых произведений полей // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 2, с. 383–390.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 2.

UDC 511.36

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-383-390

Properties of elements of direct products of fields

V. Yu. Matveev

Matveev Vladimir Yurievich — Postgraduate student, Department of Theory of Number, Moscow Pedagogical State University (Moscow).

e-mail: salomaa@mail.ru

Abstract

The paper describes certain arithmetic properties of values of F -series, i.e. of series of the form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot n! z^n.$$

Here $a_n \in \mathbb{K}$, a certain algebraic number field of a finite degree over $\mathbb{Q}$. The maximum of the absolute values of the conjugates to a_n doesn't exceed $e^{C_1 n}$.

Also there exists a sequence of rational integers

$$d_n = d_{0,n} q^n, \quad q \in \mathbb{N}, \quad n = 0, 1, \dots \text{ such that } d_n a_k \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}, \quad n = 0, 1, \dots, k = 0, 1, \dots, n.$$

Meanwhile $d_{0,n}$ is divisible only by primes p , $p \leq C_2 n$ and

$$\text{ord}_p d_{0,n} \leq C_3 \left(\log_p^n + \frac{n}{p^2} \right).$$

Some general theorem is proved in analogy to Salikhov's theorem for the E -functions.

It gives conditions of the algebraic independence over $\mathbb{C}(z)$ of a set of F -series, each being a solution of a linear differential equation of the first order.

Certain applications to hypergeometric series are given.

The results allow to apply general theorems after V.G. Chirskii on the arithmetic properties of the values of F -series.

The result is that the values of the considered series at algebraic points, as well as at polyadic points, which are well approximable by rational integers, are infinitely algebraically independent.

The paper also mentions some applications of polyadic and almost polyadic numbers to some practical problems.

Keywords: F – series, infinite algebraic independence, polyadic numbers.

Bibliography: 26 titles.

For citation:

V. Yu. Matveev, 2019, "Properties of elements of direct products of fields", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 2, pp. 383–390.

1. Введение

Основные понятия теории полиадических чисел изложены в книге А. Г. Постникова [1]. Подробное изложение метода Зигеля–Шидловского содержится в книге А. Б. Шидловского [2]. Теория арифметических свойств F -рядов рассматривается в работах [3]–[26].

2. Основная часть. Формулировки теорем

Назовем полиадическое число $\mathbf{a}$ *алгебраическим*, если существует отличный от нуля многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами такой, что полиадическое число $P(\mathbf{a})$ равно нулю, т.е. для любого простого числа p в кольце $\mathbb{Z}_p$ выполнено равенство $P(a^{(p)}) = 0$.

Полиадическое число, которое не является алгебраическим, естественно называть *трансцендентным полиадическим числом*. В этом случае для любого отличного от нуля многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами существует хотя бы одно простое число p такое, что в кольце $\mathbb{Z}_p$ выполнено неравенство $P(a^{(p)}) \neq 0$.

Будем называть полиадическое число *бесконечно трансцендентным*, если для любого отличного от нуля многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами существует бесконечное множество простых чисел p таких, что в кольце $\mathbb{Z}_p$ выполнено неравенство $P(a^{(p)}) \neq 0$.

Наконец, будем называть полиадическое число *глобально трансцендентным*, если для любого отличного от нуля многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами и любого простого числа p в кольце $\mathbb{Z}_p$ выполнено неравенство $P(a^{(p)}) \neq 0$.

Отметим, что из бесконечной трансцендентности $\mathbf{a}$ не следует трансцендентность $a^{(p)}$ хотя бы для одного простого числа p .

Назовем полиадические числа $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ *алгебраически зависимыми*, если существует отличный от нуля многочлен $P(x_1, \dots, x_m)$ с целыми коэффициентами такой, что полиадическое число $P(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m)$ равно нулю, т.е. для любого простого числа p в кольце $\mathbb{Z}_p$ выполнено равенство $P(a_1^{(p)}, \dots, a_m^{(p)}) = 0$.

Полиадические числа $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ называются *алгебраически независимыми*, если для любого отличного от нуля многочлена $P(x_1, \dots, x_m)$ с целыми коэффициентами существует хотя бы одно простое число p такое, что в кольце $\mathbb{Z}_p$ выполнено неравенство $P(a_1^{(p)}, \dots, a_m^{(p)}) \neq 0$.

Будем называть полиадические числа *бесконечно алгебраически независимыми*, если для любого отличного от нуля многочлена $P(x_1, \dots, x_m)$ с целыми коэффициентами существует бесконечное множество простых чисел p таких, что в кольце $\mathbb{Z}_p$ выполнено неравенство $P(a_1^{(p)}, \dots, a_m^{(p)}) \neq 0$.

Наконец, будем называть полиадические числа *глобально алгебраически независимыми*, если для любого отличного от нуля многочлена $P(x_1, \dots, x_m)$ с целыми коэффициентами и любого простого числа p в кольце $\mathbb{Z}_p$ выполнено неравенство $P(a_1^{(p)}, \dots, a_m^{(p)}) \neq 0$.

Термин *почти полиадическое число* использован для обозначения того случая, когда рассматриваемый ряд сходится во всех полях $\mathbb{Q}_p$, кроме, быть может, конечного их числа.

Термины *алгебраическое почти полиадическое число*, *трансцендентное почти полиадическое число*, *бесконечно трансцендентное почти полиадическое число*, *глобально трансцендентное почти полиадическое число*, *алгебраически зависимые почти полиадические числа*, *алгебраически независимые почти полиадические числа*, *бесконечно алгебраически независимые почти полиадические числа*, *глобально алгебраически независимые почти полиадические числа* определяются аналогично.

Отметим, что из бесконечной трансцендентности $\mathbf{a}$ не следует трансцендентность $a^{(p)}$ хотя бы для одного простого числа p .

ТЕОРЕМА 1. Пусть

$$f_1(z), \dots, f_m(z) \quad (1)$$

представляют собой трансцендентные F -ряды с целыми коэффициентами, составляющие решение системы вида

$$P_{1,i}y'_i + P_{0,i}y_i = Q_i, i = 1, \dots, m \quad (2)$$

где $P_{0,i}, P_{1,i}, Q_i \in \mathbb{Q}(z)$.

Пусть $\xi \in \mathbb{Z}$, $\xi \neq 0$, ξ отлично от особых точек системы (2), а также выполняются следующие условия:

$$\exp \left(\int \left(\frac{P_{0,i}(z)}{P_{1,i}(z)} - \frac{P_{0,j}(z)}{P_{1,j}(z)} \right) dz \right) \notin \mathbb{C}(z), \quad i \neq j. \quad (3)$$

Тогда почти полиадические числа $\alpha_1 = f_1(\xi), \dots, f_m(\xi) = \alpha_m$ бесконечно алгебраически независимы.

Пусть $\mathbb{K}$ – алгебраическое числовое поле конечной степени κ над полем $\mathbb{Q}$

ТЕОРЕМА 2. Пусть

$$f_1(z), \dots, f_m(z) \quad (4)$$

представляют собой трансцендентные F -ряды с целыми коэффициентами, составляющие решение системы вида

$$P_{1,i}y'_i + P_{0,i}y_i = Q_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (5)$$

где $P_{0,i}, P_{1,i}, Q_i \in \mathbb{Q}(z)$,

а также выполняются следующие условия:

$$\exp \left(\int \left(\frac{P_{0,i}(z)}{P_{1,i}(z)} - \frac{P_{0,j}(z)}{P_{1,j}(z)} \right) dz \right) \notin \mathbb{C}(z), \quad i \neq j. \quad (6)$$

Пусть θ_k – целые числа из $\mathbb{K}$ и

$$\xi = \sum_{k=0}^{\infty} \theta_k, \quad \Theta_n = \sum_{i=1}^n \theta_i.$$

Пусть $\varepsilon > 0$, $0 < \delta < 1$, $d \in \mathbb{N}$, $M = \binom{m+d}{m}$ и существует бесконечное множество номеров n таких, что для всех простых чисел p таких, что $p \leq \exp(\ln^{1+2\varepsilon} |\overline{\Theta_n}|)$, и любого нормирования v , продолжающего p – адическое нормирование в поле $\mathbb{K}$, выполнено неравенство

$$|\xi - \Theta_n|_v < \exp \left(- (M - 1 + \delta) \exp(\ln^{1+\varepsilon} |\overline{\Theta_n}|) \ln^{1+2\varepsilon} |\overline{\Theta_n}| \right).$$

Пусть последовательность h_n определена равенством

$$\ln h_n = \delta \exp(\ln^{1+\varepsilon} |\overline{\Theta_n}|) \ln^{1+\varepsilon} |\overline{\Theta_n}| - c_4 \exp(\ln^{1+\varepsilon} |\overline{\Theta_n}|) \ln^{(1+\varepsilon)/2} |\overline{\Theta_n}|,$$

где $c_4 = 2 + c_5$ при $\varepsilon \leq 1$ и $c_4 = 2$ при $\varepsilon < 1$, а

$$c_5 = M^2 (c_1^* \log_p q^* + 1.25c_2^*c_3^* + 2c_3^* + 5).$$

Тогда существует эффективная постоянная n_0 такая, что для любого отличного от тождественного нуля многочлена $P(y_1, \dots, y_m)$ степени d по совокупности переменных с коэффициентами из $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$, высота которого h удовлетворяет условиям $h_{n-1} < h \leq h_n$ при $n > n_0$, существует простое число p в интервале

$$|\overline{\Theta_n}| \leq p \leq M \exp(\ln^{1+\varepsilon} |\overline{\Theta_n}|)$$

и нормирование v , продолжающее p – адическое нормирование в поле $\mathbb{K}$, такие, что в поле $\mathbb{K}_v$

$$\begin{aligned} |P(f_1(\xi), \dots, f_m(\xi))|_v &\geq \exp \left(- \ln h + \left(- \frac{M-1}{\delta} - \frac{c_4(M-1)(1-\delta)}{\delta (\ln \ln h_n)^{\varepsilon/(1+\varepsilon)}} \right) \ln h_n \right) \\ &= \exp(-B(h, h_n)). \end{aligned}$$

Иными словами, $f_1(\xi), \dots, f_m(\xi)$ бесконечно алгебраически независимы почти полиадические числа.

Пусть $\Phi(k, N) - N$ – кратное возведение в степень и $n_N = \Phi(k, N)$.

$$\Phi(k, N) = \underbrace{k^{k \dots k}}_{N \text{ кратное возведение в степень}}$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Для любых натуральных чисел k, N и всякого простого числа p ряд

$$\xi = \sum_{m=0}^{\infty} (n_m)!$$

представляет собой трансцендентный над $\mathbb{Q}$ элемент $\mathbb{Z}_p$ и удовлетворяет условию теоремы 2.

ТЕОРЕМА 3. Пусть

$$f_1(z), \dots, f_m(z) \quad (7)$$

представляют собой трансцендентные F -ряды с целыми коэффициентами, составляющие решение системы вида

$$P_{1,i}y'_i + P_{0,i}y_i = Q_i, i = 1, \dots, m \quad (8)$$

где $P_{0,i}, P_{1,i}, Q_i \in \mathbb{Q}(z)$.

Пусть выполняются следующие условия:

$$\exp \left(\int \left(\frac{P_{0,i}(z)}{P_{1,i}(z)} - \frac{P_{0,j}(z)}{P_{1,j}(z)} \right) dz \right) \notin \mathbb{C}(z), \quad i \neq j. \quad (9)$$

тогда ряды $f_1(z), \dots, f_m(z)$ алгебраически независимы над $\mathbb{C}(z)$.

ТЕОРЕМА 4. Почти полиадические числа $\mathbf{a}_i$, определенные равенствами

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_i (a_i + b_i) \dots (a_i + (n-1)b_i) = \mathbf{a}_i, \quad (10)$$

где $a_i, b_i \in \mathbb{Z}$, $(a_i, b_i) = 1$, $i = 1, \dots, m$;

$$\frac{a_i}{b_i} - \frac{a_j}{b_j} \notin \mathbb{Z}, \quad i \neq j$$

бесконечно алгебраически независимы.

Уточним теорему 4 в представляющем интерес частном случае.

ТЕОРЕМА 5. Для любого ненулевого многочлена $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ существует бесконечное множество непересекающихся интервалов

$(P_n(\ln H), P_6(\ln H))$, где $P_n(x), P_6(x)$ определены равенствами

$$P_n(x) = \ell \left(\frac{x}{\ln x} \right), \quad P_6(x) = u \left(\frac{x}{\ln x} \left(1 + \frac{2(m+3+(m-1)c_5)}{(\ln(\frac{x}{\ln x}))^{\frac{1}{2}}} \right) \right)$$

, в каждом из этих интервалов содержится простое число p такое, что в поле $\mathbb{Q}_p$ элемент $\mathbf{a} \in \mathbb{Q}_p$, определенный равенством

$$\mathbf{a} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(\lambda+1) \dots (\lambda+(n-1)) b^n$$

, удовлетворяет неравенству $P(\mathbf{a}) \neq 0$.

ТЕОРЕМА 6. Пусть числа $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ определяются условиями: при $s \geq \sigma_1$ выполнено $s > (|\lambda| - \frac{1}{2}) \ln s$, при $s \geq \sigma_2$ выполнены неравенства $s \geq \sigma_1$ и $(s+1)\sqrt{\ln s} \geq \ln(s+1)e^{\sqrt[4]{\ln s}}$, при $s \geq \sigma_3$ выполнены неравенства $s \geq \sigma_2$ и $\ln s > C_1 + 3\sqrt{\ln s}$. Рассматриваем теперь последовательность $s_k \in \mathbb{N}$ такую, что $s_1 \geq \sigma_3$ и для каждого $k \geq 1$ выполняются неравенства

$$e^{\sqrt[4]{\ln s_{k+1}}} > a + b s_k.$$

Тогда отрезки

$$\left[e^{\sqrt[4]{\ln s_k}}, a + b s_k \right], \quad k = 1, 2, \dots$$

не пересекаются и в каждом из них есть простое число p такое, что в поле $\mathbb{Q}_p$ выполнено неравенство.

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} a(a+b) \dots (a+b(n-1)) \neq 0 \quad (11)$$

ТЕОРЕМА 7. Пусть ξ - полиадическое число, обладающее следующими свойствами:

(i) Существует бесконечное множество полиадических чисел $\tau_s, s \in \mathbb{N}$ таких, что

$$\xi = \beta_s + \tau_s, \quad \beta_s \in \mathbb{N}, \quad \beta_s \leq C_1 e^{\sqrt{\ln s}} \quad (12)$$

(ii) Для всех простых чисел $p, p \leq a + bs$, выполнено неравенство

$$|\tau_s|_p = |\xi - \beta_s|_p < e^{-s \ln s - 2s\sqrt{\ln s} - C_2 s}. \quad (13)$$

Тогда существует бесконечное множество простых чисел p таких, что в поле $\mathbb{Q}_p$ справедливо неравенство

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(\lambda+1) \dots (\lambda+(n-1)) \xi^n \neq 0. \quad (14)$$

ТЕОРЕМА 8. Асимптотическая оценка длины k разложения

$$N = \sum_{n=1}^k a_n \cdot n!, \quad a_n \in \{0, 1, \dots, n\}, a_k \neq 0$$

имеет вид

$$k \sim \frac{\ln N}{\ln \ln N}, \quad N \rightarrow +\infty.$$

Количество вспомогательных вычислений, используемых в алгоритме полиадического разложения числа N , имеет асимптотическую оценку с главным членом вида

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\ln N}{\ln \ln N} \right)^2, \quad n \rightarrow +\infty.$$

3. Заключение

В работе получены теоремы об арифметических свойствах значений некоторых F -рядов. Кроме того указаны возможные приложения теории полиадических чисел, открывающие дальнейшие перспективы для исследований.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Постников А. Г. Введение в аналитическую теорию чисел. М.: Наука, 1971.
2. Шидловский А. Б. Трансцендентные числа. М.: "Наука", 1987. 417 с.
3. Чирский В. Г. О нетривиальных глобальных соотношениях // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1989, № 5. С. 33–36.
4. Чирский В. Г. Об арифметических свойствах значений гипергеометрических функций // Мат. заметки. 1992. Т. 52. № 2. С. 125–131.
5. Чирский В. Г. Оценки многочленов и линейных форм в прямых произведениях полей // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1994. № 4. С. 35–39.
6. Чирский В. Г. О глобальных соотношениях для гипергеометрических рядов // Труды семинара им. И. Г. Петровского. 1995, № 18. С. 204–212.
7. Чирский В. Г. О линейных глобальных соотношениях // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1998, № 4. С. 70–72.
8. Чирский В. Г., Шакиров Р. Ф. О представлении натуральных чисел с использованием нескольких оснований. М. Чебышевский сборник. 2013, № 1.
9. Chirskii V. G. On the arithmetic properties of polyadic integers // International Mathematical Forum. Vol. 8. 2013, no. 37, 1793–1796.
10. Чирский В. Г. Арифметические свойства целых полиадических чисел, 2015, *Чебышевский сборник*, том 16, вып. 1, с. 254–264.
11. Чирский В. Г. Арифметические свойства полиадических рядов с периодическими коэффициентами, 2014, *Доклады Академии наук, математика*, т. 439, № 6, с. 677–679.
12. Чирский В. Г. Арифметические свойства обобщенных гипергеометрических F – рядов // Доклады Академии Наук, 2018, сер. Матем. т. 483, №3, 257–259. Перевод Doklady math.v.98, N.3, pp. 589–591.
13. Чирский В. Г. Арифметические свойства полиадических рядов с периодическими коэффициентами // Известия РАН, 2017, т. 81, №2, с. 215–232. Перевод Izvestiya Math., v. 81, no. 2, pp. 444–461.
14. Chirskii V. G. Product formula, global relations and polyadic numbers // Russian Journal of Mathematical Physics, 2019, v. 26, no. 3, pp. 286–305.
15. Chirskii V. G. Topical problems of the theory of transcendental numbers // Developments of approach to their solutions in the works of Yu. V. Nesterenko. Russian Journal of Mathematical Physics, 2017, v. 24, no. 2, pp. 153–171.
16. Чирский В. Г. Об арифметических свойствах обобщенных гипергеометрических рядов с иррациональными параметрами // Изв. РАН. Сер. матем., 78:6 (2014), 193–210; Izv. Math., 78:6 (2014), 1244–1260.
17. Чирский В. Г. Об арифметических свойствах ряда Эйлера // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 2015, №1, 59–61; Moscow University Mathematics Bulletin, 70:1 (2015), 41–43.

18. Чирский В. Г., Матвеев В. Ю. О представлениях натуральных чисел // Вестник Московского университета, сер. 1, математика, механика. 2013. №6 с. 57–59; "Representations of positive integers", Moscow University Mathematics Bulletin, 68:6 (2013), 307–308.
19. Чирский В. Г., Матвеев В. Ю. О ряде из произведений членов арифметической прогрессии // Преподаватель 21 век, № 4, 2013.
20. Чирский В. Г., Матвеев В. Ю. О представлениях натуральных чисел // Чебышевский сборник, т. 14, вып. 1(45), 2013, с. 91–101.
21. Чирский В. Г., Матвеев В. Ю. О некоторых свойствах полиадических разложений // Чебышевский сборник, т. 14, вып. 2(46), 2013, с. 163–171.
22. Матвеев В. Ю. О значениях некоторого ряда в полиадических точках, хорошо приближаемых натуральными числами // Преподаватель 21 век, № 4, 2013.
23. Матвеев В. Ю. Алгебраическая независимость некоторых почти полиадических рядов // Чебышевский сборник, т. 16, вып. 3, 2015, с. 339–354.
24. Матвеев В. Ю. Алгебраическая независимость некоторых почти полиадических рядов // Чебышевский сборник, т. 17, вып. 3, 2016, с. 156–167.
25. Матвеев В. Ю. О бесконечной алгебраической независимости некоторых полиадических чисел // Материалы международной конференции «Математика и информатика», Москва, (13–17 марта 2016 года), с. 125–126.
26. Азаматов Т. Р. Эффективные оценки для обобщенных глобальных соотношений // УМН, 62:5(377) (2007), с. 145–146.

Получено 18.05.2019 г.

Принято в печать 12.07.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 2.

УДК 512.542

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-391-398

О дисперсивных по Оре $\mathfrak{F}$ -гиперцентральных подгруппах конечных групп

В. И. Мурашко

Мурашко Вячеслав Игоревич — магистрант, Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины (г. Гомель, Республика Беларусь).

e-mail: mvimath@yandex.ru

Аннотация

Рассматриваются только конечные группы. Пусть A — группа автоморфизмов группы G , содержащая все внутренние автоморфизмы, и F — максимальный внутренний локальный экран насыщенной формации $\mathfrak{F}$. A -композиционный фактор H/K группы G называется A - $\mathfrak{F}$ -центральным, если $A/C_A(H/K) \in F(p)$ для всех $p \in \pi(H/K)$. A - $\mathfrak{F}$ -гиперцентром G называется наибольшая A -допустимая подгруппа G , все A -композиционные факторы ниже которой A - $\mathfrak{F}$ -центральны. Обозначается $Z_{\mathfrak{F}}(G, A)$.

Напомним, что группа G называется дисперсивной по Оре, если G имеет нормальную холлову $\{p_1, \dots, p_i\}$ -подгруппу для $1 \leq i \leq n$, где $p_1 > \dots > p_n$ — все простые делители $|G|$. Главным результатом работы является: Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация, F — её максимальный внутренний локальный экран и N — дисперсивная по Оре A -допустимая подгруппа группы G , где $\text{Inn}G \leq A \leq \text{Aut}G$. Тогда и только тогда $N \leq Z_{\mathfrak{F}}(G, A)$, когда $N_A(P)/C_A(P) \in F(p)$ для любых силовской p -подгруппы P группы N и простого делителя p порядка N .

В качестве следствий были получены известные результаты Р. Бэра о нормальных подгруппах в сверхразрешимом гиперцентре и элементах гиперцентра.

Пусть G — группа. Напомним, что

$$L_n(G) = \{x \in G \mid [x, \alpha_1, \dots, \alpha_n] = 1 \forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \text{Aut}G\}$$

и G называется автонильпотентной, если $G = L_n(G)$ для некоторого натурального n . Из главного результата можно извлечь критерии автонильпотентности групп. В частности, группа G автонильпотентна тогда и только тогда, когда она является прямым произведением своих силовских подгрупп и группа автоморфизмов любой силовской p -подгруппы группы G является p -группой для любого простого делителя p порядка G . Приведены примеры автонильпотентных групп нечетного порядка.

Ключевые слова: Конечная группа, нильпотентная группа, сверхразрешимая группа, автонильпотентная группа, A - $\mathfrak{F}$ -гиперцентр группы, наследственная насыщенная формация.

Библиография: 25 названий.

Для цитирования:

В. И. Мурашко. О дисперсивных по Оре $\mathfrak{F}$ -гиперцентральных подгруппах конечных групп // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 2, с. 391–398.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 2.

UDC 512.542

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-391-398

On the $\mathfrak{F}$ -hypercentral subgroups with the sylow tower property of finite groups

V. I. Murashka

Murashka Viachaslau Igaravich — graduate student, Francisk Skorina Gomel State University (Gomel, Republic of Belarus).

e-mail: mvimath@yandex.ru

Abstract

Throughout this paper all groups are finite. Let A be a group of automorphisms of a group G that contains all inner automorphisms of G and F be the canonical local definition of a saturated formation $\mathfrak{F}$. An A -composition factor H/K of G is called A - $\mathfrak{F}$ -central if $A/C_A(H/K) \in F(p)$ for all $p \in \pi(H/K)$. The A - $\mathfrak{F}$ -hypercenter of G is the largest A -admissible subgroup of G such that all its A -composition factors are A - $\mathfrak{F}$ -central. Denoted by $Z_{\mathfrak{F}}(G, A)$.

Recall that a group G satisfies the Sylow tower property if G has a normal Hall $\{p_1, \dots, p_i\}$ -subgroup for all $1 \leq i \leq n$ where $p_1 > \dots > p_n$ are all prime divisors of $|G|$. The main result of this paper is: Let $\mathfrak{F}$ be a hereditary saturated formation, F be its canonical local definition and N be an A -admissible subgroup of a group G where $\text{Inn}G \leq A \leq \text{Aut}G$ that satisfies the Sylow tower property. Then $N \leq Z_{\mathfrak{F}}(G, A)$ if and only if $N_A(P)/C_A(P) \in F(p)$ for all Sylow p -subgroups P of N and every prime divisor p of $|N|$.

As corollaries we obtained well known results of R. Baer about normal subgroups in the supersoluble hypercenter and elements in the hypercenter.

Let G be a group. Recall that $L_n(G) = \{x \in G \mid [x, \alpha_1, \dots, \alpha_n] = 1 \ \forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \text{Aut}G\}$ and G is called autonilpotent if $G = L_n(G)$ for some natural n . The criteria of autonilpotency of a group also follow from the main result. In particular, a group G is autonilpotent if and only if it is the direct product of its Sylow subgroups and the automorphism group of a Sylow p -subgroup of G is a p -group for all prime divisors p of $|G|$. Examples of odd order autonilpotent groups were given.

Keywords: Finite group, nilpotent group, supersoluble group, autonilpotent group, A - $\mathfrak{F}$ -hypercenter of a group, hereditary saturated formation.

Bibliography: 25 titles.

For citation:

V. I. Murashka, 2019, "On the $\mathfrak{F}$ -hypercentral subgroups with the sylow tower property of finite groups", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 2, pp. 391–398.

1. Introduction and results

Throughout this paper all groups are finite and G always denotes a finite group. Recall that $\text{Aut}G$ and $\text{Inn}G$ are the groups of all and inner automorphisms of G respectively.

Let A be a group of automorphisms of G . Kaloujnine [1] and Hall [2] showed that if A stabilizes some chain of subgroups of G , then A is nilpotent. Huppert [3] and Shemetkov [4] showed that if G has A -admissible series with prime indexes, then A is supersoluble. Shemetkov [4] and Schmid [5] obtained analogues results for a solubly saturated formation $\mathfrak{F}$. Note that the $\mathfrak{F}$ -hypercenter of G with respect to A played an important role in their research.

Recall that $\pi(G)$ is the set of all prime divisors of $|G|$. A *formation* is a class $\mathfrak{F}$ of groups with the following properties: (a) every homomorphic image of an $\mathfrak{F}$ -group is an $\mathfrak{F}$ -group, and (b) if G/M and G/N are $\mathfrak{F}$ -groups, then $G/(M \cap N) \in \mathfrak{F}$. A formation $\mathfrak{F}$ is said to be: *saturated* if $G \in \mathfrak{F}$ whenever $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ where $\Phi(G)$ is the Frattini's subgroup of G ; *hereditary* if $H \in \mathfrak{F}$ whenever $H \leq G \in \mathfrak{F}$. A function of the form $f : \mathbb{P} \rightarrow \{\text{formations}\}$ is called a *formation function*. Recall [6, p. 356] that a formation $\mathfrak{F}$ is called *local* if $\mathfrak{F} = (G \mid G/C_G(H/K) \in f(p) \text{ for every } p \in \pi(H/K) \text{ and every chief factor } H/K \text{ of } G)$ for some formation function f . In this case f is called a *local definition* of $\mathfrak{F}$. By the Gaschütz-Lubeseder-Schmid theorem, a formation is local if and only if it is non-empty and saturated. Recall that if $\mathfrak{F}$ is a local formation, there exists a unique formation function F , defining $\mathfrak{F}$, such that $F(p) = \mathfrak{N}_p F(p) \subseteq \mathfrak{F}$ for every $p \in \mathbb{P}$ by Proposition 3.8 [6, p. 360]. In this case F is called the *canonical local definition* of $\mathfrak{F}$.

Let $\text{Inn}G \leq A$ be a group of automorphisms of G and F be the canonical local definition of a local formation $\mathfrak{F}$. An A -composition factor H/K of G is called *A - $\mathfrak{F}$ -central* if $A/C_A(H/K) \in F(p)$ for all $p \in \pi(H/K)$. The *A - $\mathfrak{F}$ -hypercenter* of G is the largest A -admissible subgroup of G such that all its A -composition factors are A - $\mathfrak{F}$ -central. This subgroup always exists by Lemma 6.4 [6, p. 387]. It is denoted by $Z_{\mathfrak{F}}(G, A)$. If $A = \text{Inn}G$, then it is just the $\mathfrak{F}$ -hypercenter $Z_{\mathfrak{F}}(G)$ of G . If $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}$ is the class of all nilpotent groups, then we use $Z_{\infty}(G, A)$ to denote the A -hypercenter $Z_{\mathfrak{N}}(G, A)$ of G . Recently the subgroups of $Z_{\infty}(G, A)$ have been studied for example in [7, 8, 9, 10, 11].

Recall that $\text{Syl}_p G$ is the set of all Sylow subgroups of G ; G *satisfies the Sylow tower property* if G has a normal Hall $\{p_1, \dots, p_i\}$ -subgroup for all $1 \leq i \leq n$ where $p_1 > \dots > p_n$ are all prime divisors of $|G|$. It is well known that a supersoluble group satisfies the Sylow tower property. Recently series of hereditary saturated formations of groups that satisfy the Sylow tower property have been constructed (see, [12, 13, 14, 15]).

THEOREM 1. *Let $\mathfrak{F}$ be a hereditary saturated formation, F be its canonical local definition and N be an A -admissible subgroup of G where $\text{Inn}G \leq A \leq \text{Aut}G$ that satisfies the Sylow tower property. Then $N \leq Z_{\mathfrak{F}}(G, A)$ if and only if $N_A(P)/C_A(P) \in F(p)$ for all $P \in \text{Syl}_p(N)$ and $p \in \pi(N)$.*

Author obtained particular cases of this theorem for $A = \text{Inn}G$ and two formations of supersoluble type in [16, 17]. Recall that a group G is called *strictly p -closed* if $G/\text{O}_p(G)$ is abelian of exponent dividing $p - 1$. We use $\mathfrak{U}$ to denote the class of all supersoluble groups.

COROLLARY 1 (R. Baer [18]). *Let N be a normal subgroup of G . Then $N \leq Z_{\mathfrak{U}}(G)$ if and only if N satisfies the Sylow tower property and $N_G(P)/C_G(P)$ is strictly p -closed for all $P \in \text{Syl}_p(N)$ and $p \in \pi(N)$.*

M. R. R. Moghaddam and M. A. Rostamyari (see [9]) introduced the concept of autonilpotent group. Let $L_n(G) = \{x \in G \mid [x, \alpha_1, \dots, \alpha_n] = 1 \forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \text{Aut}G\}$. Then G is called *autonilpotent* if $G = L_n(G)$ for some natural n . Some properties of autonilpotent groups were studied in [9]. In [8] all abelian autonilpotent groups were described. In particular, abelian autonilpotent non-unit groups of odd order don't exist. It was shown that if a p -group G is autonilpotent, then $\text{Aut}G$ is a p -group (Theorem 2.2 [10]). In [11, p. 45] it was asked: "Does there exist any odd order autonilpotent group?"

COROLLARY 2. *Let p be a prime. A p -group G is autonilpotent if and only if $\text{Aut}G$ is a p -group.*

An example of a p -group G of order p^5 ($p > 3$) such that $\text{Aut}G$ is also a p -group was constructed in [19]. In the library of small groups of GAP [20] there are 30 groups of order 3^6 such that their automorphism groups are also 3-groups (for example groups [729, 31], [729, 41] and [729, 46]). Hence the answer on the question from [11] is positive. From Theorem 2.3 [9] and Lemma 2.9 [10] it follows that a group is autonilpotent iff it is the direct product of its autonilpotent Sylow subgroups.

COROLLARY 3. *A group G is autonilpotent if and only if it is the direct product of its Sylow subgroups and the automorphism group of a Sylow p -subgroup of G is a p -group for all $p \in \pi(G)$.*

The proof of Corollary 3 doesn't use results from [9, 10]. The following result gives the description of elements in $Z_\infty(G, A)$.

COROLLARY 4. *Let g be a p -element of a group G and $\text{Inn}G \leq A \leq \text{Aut}G$. Then $g \in Z_\infty(G, A)$ if and only if $g^\alpha = g$ for every p' -element α of A .*

COROLLARY 5 (R. Baer [21]). *Let p be a prime and G be a group. Then a p -element g of G belongs to $Z_\infty(G)$ if and only if it permutes with all p' -elements of G .*

COROLLARY 6. *A group G is autonilpotent if and only if every automorphism α of G fixes all elements of G whose orders are coprime to the order of α .*

According to Frobenius p -nilpotency criterion (see Theorem 5.26 [22, p. 171]) a group G is nilpotent if and only if $N_G(P)/C_G(P)$ is a p -group for every p -subgroup P of G and every $p \in \pi(G)$.

COROLLARY 7. *A group G is autonilpotent if and only if $N_{\text{Aut}G}(P)/C_{\text{Aut}G}(P)$ is a p -group for every p -subgroup P of G and every $p \in \pi(G)$.*

2. Proves of the results

LEMMA 1 (Lemma 3.6 [16]). *Let P be a p -subgroup of a group G and R be a normal r -subgroup of G where $r \neq p$ are primes. Then $N_G(P)R/R = N_{G/R}(PR/R)$, $C_G(P)R/R = C_{G/R}(PR/R)$ and $N_G(P)/C_G(P) \simeq N_{G/R}(PR/R)/C_{G/R}(PR/R)$.*

PROOF. [Proof of Theorem 1] Let prove Theorem 1 for $A = \text{Inn}G$. In this case $Z_{\mathfrak{F}}(G, A) = Z_{\mathfrak{F}}(G)$.

Sufficiency. Let N be a normal subgroup of $Z_{\mathfrak{F}}(G)$ with the Sylow tower property. So N has a normal Sylow q -subgroup Q . Note that $Q \trianglelefteq G$ and $Q \leq Z_{\mathfrak{F}}(G)$.

Hence $G/C_G(Q) = N_G(Q)/C_G(Q) \in F(q)$ by Lemma 2.5 from [23]. If $Q = N$, then sufficiency is proven.

Let $Q < N$. From $N \leq Z_{\mathfrak{F}}(G)$ it follows that $N/Q \leq Z_{\mathfrak{F}}(G/Q)$. Using induction on the order of G , we may assume that $N_{G/Q}(PQ/Q)/C_{G/Q}(PQ/Q) \in F(p)$ for every $P \in \text{Syl}_p N$ and $p \in \pi(N) \setminus \{q\}$. Hence $N_G(P)/C_G(P) \simeq N_{G/Q}(PQ/Q)/C_{G/Q}(PQ/Q) \in F(p)$ by Lemma 1. Thus sufficiency is proved.

Necessity. Let a group G be a minimal order counterexample with a normal subgroup $N \not\leq Z_{\mathfrak{F}}(G)$ that satisfies the statement of Theorem 1 and p be the greatest prime divisor of $|N|$. Then a Sylow p -subgroup P of N is normal in G . Let H/K be a chief factor of G and $H \leq P$. Since $C_G(P) \leq C_G(H/K)$ and $G/C_G(P) = N_G(P)/C_G(P) \in F(p)$, $G/C_G(H/K) \in F(p)$. It means that $P \leq Z_{\mathfrak{F}}(G)$. Note that $N_{G/P}(RP/P)/C_{G/P}(RP/P) \simeq N_G(R)/C_G(R) \in F(p)$ for every $R \in \text{Syl}_r N$ and $r \in \pi(N) \setminus \{p\}$ by Lemma 1. From $|G/P| < |G|$ it follows that $N/P \leq Z_{\mathfrak{F}}(G/P)$. Thus $N \leq Z_{\mathfrak{F}}(G)$, the contradiction.

Assume now that $\text{Inn}G \leq A \leq \text{Aut}G$. Let $\Gamma = G \rtimes A$. From $\text{Inn}G \leq A$ it follows that groups of automorphisms that are induced by A and Γ on a given section of G are isomorphic. It means that $N_A(H/K)/C_A(H/K) \simeq N_\Gamma(H/K)/C_\Gamma(H/K)$ for a given section H/K of G . In particular, every A -composition A - $\mathfrak{F}$ -central factor of G is an $\mathfrak{F}$ -central chief factor of Γ .

It means that A -admissible subgroup N of G that satisfies the Sylow tower property lies in $Z_{\mathfrak{F}}(G, A)$ if and only if $N \leq Z_{\mathfrak{F}}(\Gamma)$. The later is equivalent to $N_\Gamma(P)/C_\Gamma(P) \simeq N_A(P)/C_A(P) \in F(p)$ for every $P \in \text{Syl}_p N$ and $p \in \pi(N)$. $\square$

PROOF. [Proof of Corollary 1] Recall that $\mathfrak{U}$ has the canonical local definition F where $F(p)$ is the class of all strictly p -closed groups, every subgroup of $Z_{\mathfrak{U}}(G)$ is supersoluble and every supersoluble group satisfies the Sylow tower property. Thus Corollary 1 directly follows from Theorem 1. $\square$

PROPOSITION 3. A group G is autonilpotent if and only if $G = Z_\infty(G, \text{Aut}G)$.

PROOF. [Proof] Recall that the canonical local definition of $\mathfrak{N}$ is $F(p) = \mathfrak{N}_p$ where $\mathfrak{N}_p$ is the class of all p -groups. Note that $\text{Aut}G/C_{\text{Aut}G}(L_i(G)/L_{i-1}(G)) \simeq 1 \in F(p)$ for all prime p . Hence every $\text{Aut}G$ -composition factor of G between $L_{i-1}(G)$ and $L_i(G)$ is $\text{Aut}G$ - $\mathfrak{N}$ -central. It means that $L_i(G) \leq Z_\infty(G, \text{Aut}G)$ for every i . So if G is autonilpotent group, then $G = Z_\infty(G, \text{Aut}G)$.

Assume that $G = Z_\infty(G, \text{Aut}G)$. Hence there exists an $\text{Aut}G$ -composition series

$$1 = G_0 \leq \dots \leq G_n = G$$

with $\text{Aut}G$ - $\mathfrak{N}$ -central chief factors. Let $\Gamma = G \rtimes \text{Aut}G$. Note that

$$\text{Aut}G/C_{\text{Aut}G}(G_i/G_{i-1}) \simeq \Gamma/C_\Gamma(G_i/G_{i-1}) \in \mathfrak{N}_p$$

for every $p \in \pi(G_i/G_{i-1})$ by analogy with the proof of Theorem 1. Note that $\Gamma/C_\Gamma(G_i/G_{i-1})$ does not have non-trivial p -subgroups for all $p \in \pi(G_i/G_{i-1})$ by Lemma 3.9 [24, p. 26]. So $\text{Aut}G = C_{\text{Aut}G}(G_i/G_{i-1})$. Hence $[G_i, \text{Aut}G] \leq G_{i-1}$. It means that $[x, \alpha_1, \dots, \alpha_n] = 1$ for all $x \in G$ and $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \text{Aut}G$. Thus $G = L_n(G)$ and G is autonilpotent. $\square$

PROOF. [Proof of Corollary 3] Note that every nilpotent group satisfies the Sylow tower property and every autonilpotent group is nilpotent.

So a nilpotent group is autonilpotent if and only if $N_{\text{Aut}G}(P)/C_{\text{Aut}G}(P) \in \mathfrak{N}_p$ for every $P \in \text{Syl}_p G$ and $p \in \pi(G)$ by Proposition 3 and Theorem 1. The automorphism group of a direct product of groups was described in [25]. In particular, if $G = P \times H$, where P is a Sylow subgroup of G , then $\text{Aut}G = \text{Aut}P \times \text{Aut}H$ and $N_{\text{Aut}G}(P)/C_{\text{Aut}G}(P) \simeq \text{Aut}P$. $\square$

PROOF. [Proof of Corollary 2] Directly follows from Corollary 3. $\square$

PROOF. [Proof of Corollary 4] From $\text{Inn}G \leq A$ it follows that $Z_\infty(G, A) \leq Z_\infty(G)$ is nilpotent. Hence every Sylow subgroup of $Z_\infty(G, A)$ is A -admissible. So

$$N_A(P)/C_A(P) = A/C_A(P) \in \mathfrak{N}_p$$

for every $P \in \text{Syl}_p Z_\infty(G, A)$ and $p \in \pi(Z_\infty(G, A))$ by Theorem 1. It means that if g is a p -element of $Z_\infty(G, A)$, then $g^\alpha = g$ for every p' -element α of A .

Let G_p be the set of all elements of G such that $g^\alpha = g$ for every p' -element α of A and every $g \in G_p$. Note that if $x, y \in G_p$, then $xy \in G_p$. Hence G_p is a subgroup of G . Let $g \in G_p$, $\alpha, \beta \in A$ and β be a p' -element. Then $\beta^{\alpha^{-1}}$ is a p' -element too. Hence $(g^\alpha)^\beta = g^{\alpha\beta\alpha^{-1}} = g^{\beta^{\alpha^{-1}}\alpha} = g^\alpha$. It means that $g^\alpha \in G_p$. Thus G_p is an A -admissible subgroup of G . Let x be a p' -element of G_p . From $\text{Inn}G \leq A$ it follows that $\alpha_x : g \rightarrow g^x$ is a p' -element of A . Hence it acts trivially on G_p . It means that $x \leq Z(G_p)$. Let $P \in \text{Syl}_p G_p$. Then $P \trianglelefteq G_p$. So all p -elements of G_p form a subgroup P . Note that P is A -admissible and $N_A(P)/C_A(P) \in \mathfrak{N}_p$. Therefore $P \leq Z_\infty(G, A)$ by Theorem 1. $\square$

PROOF. [Proof of Corollary 5] Let g be a p -element of G . Note that $xg = gx$ is equivalent to $g^x = g$ and $\{\alpha_x : g \rightarrow g^x \mid x \text{ is a } p'\text{-element of } G\}$ is the set of all p' -elements of $\text{Inn}G$. Now Corollary 5 directly follows from Corollary 4. $\square$

PROOF. [Proof of Corollary 6] Directly follows from Proposition 3 and Corollary 4. $\square$

PROOF. [Proof of Corollary 7] Assume that G is autonilpotent. Then

$$N_{\text{Aut}G}(P)/C_{\text{Aut}G}(P) \in \mathfrak{N}_p$$

for every p -subgroup P of G and $p \in \pi(G)$ by Corollary 6.

Assume now that $N_{\text{Aut}G}(P)/C_{\text{Aut}G}(P) \in \mathfrak{N}_p$ for every p -subgroup P of G and $p \in \pi(G)$. Suppose that G is non-nilpotent. So there is a Schmidt subgroup S of G . Then S has a normal q -subgroup Q for some prime q and there is a q' -element x of S with $x \notin C_S(Q)$ (see Theorem 26.1 [24, p. 243]). Since $\alpha_x : g \rightarrow g^x$ is a non-identity inner automorphism of G of q' -order, $N_{\text{Aut}G}(Q)/C_{\text{Aut}G}(Q) \notin \mathfrak{N}_q$, a contradiction.

Thus G is nilpotent. Hence G is autonilpotent by Proposition 3 and Theorem 1. $\square$

Acknowledgments

I am grateful to A. F. Vasil'ev for helpful discussions.

REFERENCES

1. Kaloujnine L. 1953, "Über gewisse Beziehungen zwischen einer Gruppe und ihren Automorphismen", Berliner Mathematische Tagung, Berlin, pp. 164–172.
2. Hall P. 1958, "Some sufficient conditions for a group to be nilpotent", Illinois J. Math., vol. 2, no. 4, pp. 787–801.
3. Huppert B. 1954, "Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen", Math. Z., vol. 60, no. 4, pp. 409–434.
4. Semetkov L. A. 1974, "Graduated formations of groups", Mathematics of the USSR-Sbornik, vol. 23, no. 4, pp. 593–611.
5. Schmid P. 1974, "Lokale Formationen endllicher Gruppen", Math. Z., vol. 137, no. 1, pp. 31–48.
6. Doerk K., Hawkes T. 1992, Finite soluble groups, Walter de Gruyter, Berlin–New York, 891 p.
7. Hegarty P. V. 1994, "The absolute center of a group", J. Algebra, vol. 169, pp. 929–935.
8. Nasrabadi M. M., Gholamiam A. 2014, "On A-nilpotent abelian groups", Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.), vol. 124, no. 4, pp. 517–525.
9. Davoudirad S., Moghaddam M. R. R., Rostamyari M. A. 2016, "Autonilpotent groups and their properties", Asian-European J. Math., vol. 9, no. 2, 1650056 (7 pages).
10. Hoseini S., Moghaddam M. R. R., Tajnia S. 2015, "On Auto-nipoltent groups", Southeast Asian Bull. Math., vol. 39, pp. 219–224.
11. Arora H., Karan R. 2018, "On Autonilpotent and Autosoluble Groups", Note Mat., vol. 38, no. 1, pp. 35–45.
12. Vasil'ev A. F., Vasil'eva T. I., Tyutyaynov V. N. 2010, "On the finite groups of supersoluble type", Sib. Math. J., vol. 51, no. 6, pp. 1004–1012.
13. Monakhov V. S., Kniahina V. N. 2013, "Finite groups with $\mathbb{P}$ -subnormal subgroups", Ricerche mat., vol. 62, pp. 307–322.
14. Zimmermann I. 1989, "Submodular subgroups in finite groups", Math. Z., vol. 202, pp. 545–557.
15. Vasilyev V. A. 2015, "Finite groups with submodular Sylow subgroups", Siberian Math. J., vol. 56, no. 6, pp. 1019–1027.
16. Murashka V. I. 2018, "On analogues of Baer's theorems for widely supersoluble hypercenter of finite groups", Asian-European J. Math., vol. 11, no. 3, 1850043 (8 pages).
17. Murashka V. I. 2014, "Properties of the class of finite groups with P-subnormal cyclic primary subgroups", Dokl. NAN Belarusi, vol. 58, no. 1, pp. 5–8. (In Russian)
18. Baer R. 1959, "Supersoluble immersion", Canad. J. Math., vol. 11, pp. 353–369.
19. Curran M. J. 1988, "Automorphisms of certain p -groups (p odd)", Bull. Austral. Math. Soc., vol. 38, pp. 299–305.

20. Groups, Algorithms, and Programming (GAP), Version 4.9.1 (2018). Available at <http://www.gap-system.org> (accessed 10 June 2018).
21. Baer R. 1953, "Group Elements of Prime Power Index", Trans. Amer. Math. Soc., vol. 75, no. 1, pp. 20–47.
22. Isaacs I. M. 2008, Finite group theory, Graduate studies in mathematics, vol. 92, Providence, American Mathematical Society, 350 p.
23. Skiba A. N. 2012, "On the $\mathfrak{F}$ -hypercentral and the intersection of all $\mathfrak{F}$ -maximal subgroups of a finite group", J. Pure Appl. Algebra, vol. 216, no. 4, pp. 789–799.
24. Shemetkov L. A. 1978, Formations of finite groups, Nauka, Moscow, 272 p. (In Russian)
25. Bidwell J. N. S., Curran M. J., McCaughan D. J. 2006, "Automorphisms of direct products of finite groups", Arch. Math., vol. 86, pp. 481–489.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kaloujnine L. Über gewisse Beziehungen zwischen einer Gruppe und ihren Automorphismen // Berliner Mathematische Tagung, Berlin, 1953, P. 164–172.
2. Hall P. Some sufficient conditions for a group to be nilpotent // Illinois J. Math. 1958. V. 2, № 4. P. 787–801.
3. Huppert B. Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen // Math. Z. 1954. V. 60, № 4. P. 409–434.
4. Шеметков Л. А. Ступенчатые формации групп // Матем. сб. 1974. Т. 94(136), № 4(8), С. 628–648.
5. Schmid P. Lokale Formationen endlicher Gruppen // Math. Z. 1974. V. 137, № 1. P. 31–48.
6. Doerk K., Hawkes T. Finite soluble groups. Berlin–New York: Walter de Gruyter, 1992. 891 p.
7. Hegarty P. V. The absolute center of a group // J. Algebra. 1994. V. 169. P. 929–935.
8. Nasrabadi M. M., Gholamiam A. On A-nilpotent abelian groups // Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.). 2014. V. 124, № 4. P. 517–525.
9. Davoudirad S., Moghaddam M. R. R., Rostamyari M. A. Autonilpotent groups and their properties // Asian-European J. Math. 2016. V. 9, № 2. 1650056 (7 pages).
10. Hoseini S., Moghaddam M. R. R., Tajnia S. On Auto-nilpotent groups // Southeast Asian Bull. Math. 2015. V. 39. P. 219–224.
11. Arora H., Karan R. On Autonilpotent and Autosoluble Groups // Note Mat. 2018. V. 38, № 1. P. 35–45.
12. Васильев А. Ф., Васильева Т. И., Тютянов В. Н. О конечных группах сверхразрешимого типа // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 6. С. 1270–1281.
13. Monakhov V. S., Kniahina V. N. Finite groups with $\mathbb{P}$ -subnormal subgroups // Ricerche mat. 2013. V. 62, P. 307–322.
14. Zimmermann I. Submodular subgroups in finite groups // Math. Z. 1989. V. 202. P. 545–557.

15. Васильев В. А. Конечные группы с субмодулярными силовскими подгруппами // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56, № 6. С. 1277–1288.
16. Murashka V. I. On analogues of Baer's theorems for widely supersoluble hypercenter of finite groups // Asian-European J. Math. 2018. V. 11, №. 3. 1850043 (8 pages).
17. Мурашко, В. И. Свойства класса конечных групп с P -субнормальными циклическими примарными подгруппами // Докл. НАН Беларуси. 2014. Т. 58, № 1. С. 5–8.
18. Baer R. Supersoluble immersion // Canad. J. Math. 1959. V. 11. P. 353–369.
19. Curran M. J. Automorphisms of certain p -groups (p odd) // Bull. Austral. Math. Soc. 1988. V. 38. P. 299–305.
20. Groups, Algorithms, and Programming (GAP), Version 4.9.1. [Электронный ресурс] // URL: <http://www.gap-system.org> (дата обращения 10.06.2018).
21. Baer R. Group Elements of Prime Power Index // Trans. Amer. Math Soc. 1953. V. 75, № 1. P. 20–47.
22. Isaacs I. M. Finite group theory. Graduate studies in mathematics, V. 92. Providence: American Mathematical Society, 2008. 350 p.
23. Skiba A. N. On the $\mathfrak{F}$ -hypercenter and the intersection of all $\mathfrak{F}$ -maximal subgroups of a finite group // J. Pure Appl. Algebra. 2012. V. 216, № 4. P. 789–799.
24. Шеметков Л. А. Формации конечных групп. М.: Наука, 1978. 272 с.
25. Bidwell J. N. S., Curran M. J., McCaughan D. J. Automorphisms of direct products of finite groups // Arch. Math. 2006. V. 86. P. 481–489.

Получено 15.06.2018 г.

Принято в печать 12.07.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 2.

УДК 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-399-405

Тригонометрические суммы сеток алгебраических решеток¹

Е. М. Рарова

Рарова Елена Михайловна — заместитель декана, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: rarova82@mail.ru

Аннотация

В работе продолжены исследования автора по оценки тригонометрических сумм алгебраической сетки с весами с простейшей весовой функцией второго порядка.

Для параметра $\vec{m}$ тригонометрической суммы $S_{M(t), \vec{\rho}_1}(\vec{m})$ выделены три случая.

Если $\vec{m}$ принадлежит алгебраической решётке $\Lambda(t \cdot T(\vec{a}))$, то справедлива асимптотическая формула

$$S_{M(t), \vec{\rho}_1}(t(m, \dots, m)) = 1 + O\left(\frac{\ln^{s-1} \det \Lambda(t)}{(\det \Lambda(t))^2}\right).$$

Если $\vec{m}$ не принадлежит алгебраической решётке $\Lambda(t \cdot T(\vec{a}))$, то определены два вектора $\vec{n}_\Lambda(\vec{m}) = (n_1, \dots, n_s)$ и $\vec{k}_\Lambda(\vec{m})$ из условий $\vec{k}_\Lambda(\vec{m}) \in \Lambda$, $\vec{m} = \vec{n}_\Lambda(\vec{m}) + \vec{k}_\Lambda(\vec{m})$ и произведение $q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m})) = \overline{n_1} \cdot \dots \cdot \overline{n_s}$ минимально. Доказано асимптотическая оценка

$$S_{M(t), \vec{\rho}_1}(t(m, \dots, m)) = \frac{1 - \delta(\vec{k}_\Lambda(\vec{m}))}{q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m}))^2} + O\left(\frac{q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m}))^2 \ln^{s-1} \det \Lambda(t)}{(\det \Lambda(t))^2}\right).$$

Ключевые слова: алгебраические решётки, алгебраические сетки, тригонометрические суммы алгебраических сеток с весами, весовые функции.

Библиография: 5 названий.

Для цитирования:

Е. М. Рарова. Тригонометрические суммы сеток алгебраических решеток // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 2, с. 399–405.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 2.

UDC 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-399-405

Trigonometric sums of nets of algebraic lattices².

E. M. Rarova

Rarova Elena Mikhailovna — deputy dean, Tula State L. N. Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: rarova82@mail.ru

¹Исследование выполнено по гранту РФФИ № 19-41-710004_p_a

²The study was carried out under the RFBR grant № 19-41-710004_r_a

Abstract

The paper continues the author's research on the evaluation of trigonometric sums of an algebraic net with weights with the simplest weight function of the second order.

For the parameter $\vec{m}$ of the trigonometric sum $S_{M(t), \vec{\rho}_1}(\vec{m})$, three cases are highlighted.

If $\vec{m}$ belongs to the algebraic lattice $\Lambda(t \cdot T(\vec{a}))$, then the asymptotic formula is valid

$$S_{M(t), \vec{\rho}_1}(t(m, \dots, m)) = 1 + O\left(\frac{\ln^{s-1} \det \Lambda(t)}{(\det \Lambda(t))^2}\right).$$

If $\vec{m}$ does not belong to the algebraic lattice $\Lambda(t \cdot T(\vec{a}))$, then two vectors are defined $\vec{n}_\Lambda(\vec{m}) = (n_1, \dots, n_s)$ and $\vec{k}_\Lambda(\vec{m})$ from the conditions $\vec{k}_\Lambda(\vec{m}) \in \Lambda$, $\vec{m} = \vec{n}_\Lambda(\vec{m}) + \vec{k}_\Lambda(\vec{m})$ and the product $q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m})) = \overline{n_1} \cdot \dots \cdot \overline{n_s}$ is minimal. Asymptotic estimation is proved

$$S_{M(t), \vec{\rho}_1}(t(m, \dots, m)) = \frac{1 - \delta(\vec{k}_\Lambda(\vec{m}))}{q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m}))^2} + O\left(\frac{q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m}))^2 \ln^{s-1} \det \Lambda(t)}{(\det \Lambda(t))^2}\right).$$

Keywords: algebraic lattices, algebraic net, trigonometric sums of algebraic net with weights, weight functions.

Bibliography: 5 titles.

For citation:

Е. М. Парова, 2019, "Trigonometric sums of nets of algebraic lattices *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 2, pp. 399–405.

1. Введение

Рассматриваются: единичные s -мерные кубы

$$\overline{G}_s = \{\vec{x} \mid 0 \leq x_\nu \leq 1, \nu = 1, 2, \dots, s\}, \quad G_s = \{\vec{x} \mid 0 \leq x_\nu < 1, \nu = 1, 2, \dots, s\}.$$

Для произвольного вектора $\vec{x}$ его дробной частью называется вектор $\{\vec{x}\} = (\{x_1\}, \dots, \{x_s\})$. Отсюда следует, что всегда $\{\vec{x}\} \in G_s$.

Далее везде под произвольной решеткой $\Lambda \subset \mathbb{R}^s$ мы будем понимать только полные решетки, то есть

$$\Lambda = \{m_1 \vec{\lambda}_1 + \dots + m_s \vec{\lambda}_s = \vec{m} \cdot A \mid \vec{m} = (m_1, \dots, m_s) \in \mathbb{Z}^s\},$$

где $\vec{\lambda}_1 = (\lambda_{11}, \dots, \lambda_{1s}), \dots, \vec{\lambda}_s = (\lambda_{s1}, \dots, \lambda_{ss})$ — система линейно-независимых векторов в $\mathbb{R}^s$, а матрица решётки A задана соотношениями

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \dots & \lambda_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{s1} & \dots & \lambda_{ss} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\lambda}_1 \\ \vdots \\ \vec{\lambda}_s \end{pmatrix}.$$

Взаимная решетка $\Lambda^* = \{\vec{x} \mid \forall \vec{y} \in \Lambda (\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{Z}\}$. Непосредственно из определения следует равенство $(q\Lambda)^* = \frac{1}{q}\Lambda^*$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Для произвольной решетки Λ обобщенной параллелепипедальной сеткой $M(\Lambda)$ называется множество $M(\Lambda) = \Lambda^* \cap G_s$. Сетка $M_1(\Lambda) = \Lambda^* \cap [-1; 1)^s$.

Обобщенной параллелепипедальной сеткой II рода $M'(\Lambda)$ называется множество

$$M'(\Lambda) = \{\vec{x} \mid \vec{x} = \{\vec{y}\}, \vec{y} \in M_1(\Lambda)\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Весовой функцией порядка r с константой B называется гладкая функция $\rho(\vec{x})$, удовлетворяющая условиям

$$\sum_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s = -1}^0 \rho(\vec{x} + (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s)) = 1 \text{ при } \vec{x} \in G_s, \quad (1)$$

$$\rho(\vec{x}) = 0 \text{ при } \vec{x} \notin (-1; 1)^s, \quad (2)$$

$$\left| \int_{-1}^1 \dots \int_{-1}^1 \rho(\vec{x}) e^{2\pi i(\vec{\sigma}, \vec{x})} d\vec{x} \right| \leq B(\bar{\sigma}_1 \dots \bar{\sigma}_s)^{-r} \text{ для любого } \vec{\sigma} \in \mathbb{R}^s. \quad (3)$$

Если выполнены условия (1) и (2), то говорим просто о весовой функции $\rho(\vec{x})$. Простейшим примером весовой функции является функция $\rho_1(\vec{x}) = \rho_1(x_1) \cdot \dots \cdot \rho_1(x_s)$, где

$$\rho_1(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & \text{при } |x| \leq 1, \\ 0, & \text{при } |x| > 1. \end{cases}$$

Пусть $\vec{a} = (a_0, a_1, \dots, a_{s-1})$ — целочисленный вектор такой, что многочлен

$$P_{\vec{a}}(x) = \sum_{\nu=0}^{s-1} a_{\nu} x^{\nu} + x^s \quad (4)$$

неприводим над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$ и все корни Θ_{ν} ($\nu = 1, \dots, s$) многочлена (4) действительные.

Обозначим через $T(\vec{a})$ матрицу степеней алгебраически сопряженных целых алгебраических чисел $\Theta_1, \dots, \Theta_s$ — корней многочлена $P_{\vec{a}}(x)$:

$$T(\vec{a}) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \Theta_1 & \dots & \Theta_s \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \Theta_1^{s-1} & \dots & \Theta_s^{s-1} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

а через $\vec{\Theta} = (\Theta_1, \dots, \Theta_s)$ — вектор полного набора алгебраически сопряженных чисел — корней многочлена $P_{\vec{a}}(x)$.

Для любого $t > 0$ решётка $\Lambda(t \cdot T(\vec{a}))$ называется алгебраической. Она имеет вид

$$\Lambda(t \cdot T(\vec{a})) = \left\{ \vec{x} = \left(t \sum_{\nu=1}^s \Theta_1^{\nu-1} m_{\nu}, \dots, t \sum_{\nu=1}^s \Theta_s^{\nu-1} m_{\nu} \right) = t \cdot \vec{m} \cdot T(\vec{a}) \mid \vec{m} \in \mathbb{Z}^s \right\}.$$

Таким образом, алгебраическая решётка $\Lambda(t \cdot T(\vec{a}))$ имеет базис $\vec{\lambda}_{\nu} = t \cdot (\Theta_1^{\nu-1}, \dots, \Theta_s^{\nu-1})$ ($\nu = 1, \dots, s$). Нетрудно видеть, что $\Lambda(t \cdot T(\vec{a})) \cap \mathbb{Z}^s = \{t(m, \dots, m) \mid m \in \mathbb{Z}\}$.

Совокупность $M \subset G_s$ точек $M_k = (\xi_1(k), \dots, \xi_s(k))$ ($k = 1 \dots N$) называется *сеткой* M из N узлов, а сами точки — *узлами квадратурной формулы*. Величины $\rho_k = \rho(M_k)$ называются весами квадратурной формулы. В этой работе будем везде предполагать, что все веса вещественнозначные и являются значениями специальной весовой функции.

ЛЕММА 1. Для любого действительного σ выполняется неравенство

$$\left| \int_{-1}^1 (1 - |x|) e^{2\pi i \sigma x} dx \right| \leq (\bar{\sigma})^{-2}, \quad (6)$$

где $\bar{\sigma} = \max(1, |\sigma|)$.

Для произвольных целых $m_1, \dots, m_s$ суммы $S_{M, \vec{\rho}}(m_1, \dots, m_s)$, определённые равенством

$$S_{M, \vec{\rho}}(m_1, \dots, m_s) = \sum_{k=1}^N \rho_k e^{2\pi i [m_1 \xi_1(k) + \dots + m_s \xi_s(k)]}, \quad (7)$$

называются *тригонометрическими суммами сетки с весами*.

Пусть матрица $T = T(\vec{a})$ и $t > 0$. Рассмотрим алгебраическую сетку $M(t) = M'(t \cdot \Lambda(T))$ из $N'(t \cdot \Lambda(T))$ узлов $\vec{x}_k$ ($k = 1, \dots, N'(t \cdot \Lambda(T))$) с весами

$$\rho_k = \rho_{\vec{x}_k} = (\det(t \cdot \Lambda(T)))^{-1} \sum_{\{\vec{y}\} = \vec{x}_k, \vec{y} \in M_1(t \cdot \Lambda(T))} \rho(\vec{y})$$

и её тригонометрическую сумму с весами

$$S_{M(t), \vec{\rho}}(\vec{m}) = (\det(t \cdot \Lambda(T)))^{-1} \sum_{\vec{x} \in M(t)} \left(\sum_{\{\vec{y}\} = \vec{x}, \vec{y} \in M_1(t \cdot \Lambda(T))} \rho(\vec{y}) \right) e^{2\pi i (\vec{m}, \vec{x})}.$$

ТЕОРЕМА 1. *Для алгебраической решётки $\Lambda(t \cdot T(\vec{a}))$ и произвольной весовой функции $\rho(\vec{x})$ справедливо равенство³*

$$S_{M(t), \vec{\rho}}(\vec{m}) = \delta(\vec{m}) + \sum'_{\vec{x} \in \Lambda(t \cdot T(\vec{a}))} \int_{-1}^1 \dots \int_{-1}^1 \rho(\vec{y}) e^{2\pi i (\vec{y}, \vec{m} - \vec{x})} d\vec{y}, \quad (8)$$

где

$$\delta(\vec{m}) = \begin{cases} 1, & \text{при } \vec{m} = \vec{0}; \\ 0, & \text{при } \vec{m} \neq \vec{0}, \vec{m} \in \mathbb{Z}^s. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [4]. $\square$

С помощью леммы 1 доказываются следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 2. *При $t \rightarrow \infty$ справедлива асимптотическая формула*

$$S_{M(t), \vec{\rho}_1}(\vec{0}) = 1 + O\left(\frac{\ln^{s-1} \det \Lambda(t)}{(\det \Lambda(t))^2}\right). \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [4]. $\square$

ТЕОРЕМА 3. *При $t \rightarrow \infty$ для произвольного вектора $\vec{m} \neq \vec{0}$ справедлива асимптотическая формула*

$$S_{M(t), \vec{\rho}_1}(\vec{m}) = O\left(\frac{(\overline{m_1} \dots \overline{m_s})^2 \ln^{s-1} \det \Lambda(t)}{(\det \Lambda(t))^2}\right). \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [4]. $\square$

Цель данной работы — уточнить теорему 3.

³Здесь и далее символ $\sum'$ означает, что из области суммирования исключена нулевая точка.

2. Новые оценки тригонометрических сумм алгебраических сеток

Теорему 3 можно уточнить. Сначала мы это сделаем для векторов $\vec{m}$ специального вида: $\vec{m} = t(m, \dots, m)$, где $m \in \mathbb{Z}, m \neq 0$.

ТЕОРЕМА 4. Для любого целого $m \neq 0$ и натурального t справедливо равенство

$$S_{M(t), \vec{\rho}_1}(t(m, \dots, m)) = 1 + O\left(\frac{\ln^{s-1} \det \Lambda(t)}{(\det \Lambda(t))^2}\right). \quad (11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если $\vec{m} = t(m, \dots, m)$, и $m \in \mathbb{Z}, m \neq 0$, то по теореме 1 имеем:

$$S_{M(t), \vec{\rho}_1}(t(m, \dots, m)) = \sum_{\vec{x} \in \Lambda(t \cdot T(\vec{a})) \setminus \{t(m, \dots, m)\}} \int_{-1}^1 \dots \int_{-1}^1 \rho(\vec{y}) e^{2\pi i(\vec{y}, \vec{x})} d\vec{y},$$

где $\{t(m, \dots, m)\}$ — одноэлементное множество, состоящее из вектора $\vec{m} = t(m, \dots, m)$. Так как при $\vec{x} = \vec{0}$ имеем:

$$\int_{-1}^1 \dots \int_{-1}^1 \rho(\vec{y}) e^{2\pi i(\vec{y}, \vec{x})} d\vec{y} = 1,$$

то

$$S_{M(t), \vec{\rho}_1}(t(m, \dots, m)) = 1 + \sum'_{\vec{x} \in \Lambda(t \cdot T(\vec{a})) \setminus \{t(m, \dots, m)\}} \int_{-1}^1 \dots \int_{-1}^1 \rho(\vec{y}) e^{2\pi i(\vec{y}, \vec{x})} d\vec{y}.$$

Поэтому, по лемме 1 получим

$$|S_{M(t), \vec{\rho}_1}(t(m, \dots, m)) - 1| \leq \zeta_H(\Lambda(t \cdot T(\vec{a})))2 = O\left(\frac{\ln^{s-1} \det \Lambda(t)}{(\det \Lambda(t))^2}\right),$$

что и доказывает утверждение теоремы. $\square$

Теперь рассмотрим случай, когда $\vec{m} \in \mathbb{Z}^s \setminus \Lambda(t \cdot T(\vec{a}))$ и, следовательно, $\vec{m} \neq t(m, \dots, m)$ для любого $m \in \mathbb{Z}$.

Для решётки $\Lambda = \Lambda(t \cdot T(\vec{a}))$ определим вектора $\vec{n}_\Lambda(\vec{m}) = (n_1, \dots, n_s)$ и $\vec{k}_\Lambda(\vec{m})$ из условий $\vec{k}_\Lambda(\vec{m}) \in \Lambda$, $\vec{m} = \vec{n}_\Lambda(\vec{m}) + \vec{k}_\Lambda(\vec{m})$ и произведение $q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m})) = \overline{n_1} \cdot \dots \cdot \overline{n_s}$ минимально. Ясно, что существует константа $C(\Lambda) \geq 1$ такая, что для любого вектора $\vec{m}$ имеем $q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m})) \leq C(\Lambda)$.

ТЕОРЕМА 5. При $t \rightarrow \infty$ для произвольного вектора $\vec{m} \neq \vec{0}$ и $\vec{m} \notin \Lambda$ справедлива асимптотическая формула

$$S_{M(t), \vec{\rho}_1}(\vec{m}) = \begin{cases} \frac{1}{q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m}))^2} + O\left(\frac{q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m}))^2 \ln^{s-1} \det \Lambda(t)}{(\det \Lambda(t))^2}\right), & \text{при } \vec{k}_\Lambda(\vec{m}) \neq \vec{0}, \\ O\left(\frac{q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m}))^2 \ln^{s-1} \det \Lambda(t)}{(\det \Lambda(t))^2}\right), & \text{при } \vec{k}_\Lambda(\vec{m}) = \vec{0}. \end{cases} \quad (12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, согласно теореме 1 и лемме 1 имеем:

$$|S_{M(t), \vec{\rho}_1}(\vec{m})| \leq \sum'_{\vec{x} \in \Lambda(t \cdot T(\vec{a}))} \frac{1}{(\overline{m_1 - x_1} \dots \overline{m_s - x_s})^2}.$$

Если $\vec{k}_\Lambda(\vec{m}) = \vec{0}$, то

$$\sum'_{\vec{x} \in \Lambda(t \cdot T(\vec{a}))} \frac{1}{(\overline{m_1 - x_1} \dots \overline{m_s - x_s})^2} = \sum'_{\vec{x} \in \Lambda(t \cdot T(\vec{a}))} \frac{1}{(\overline{n_1 - x_1} \dots \overline{n_s - x_s})^2}.$$

Если $\vec{k}_\Lambda(\vec{m}) \neq \vec{0}$, то

$$\sum'_{\vec{x} \in \Lambda(t \cdot T(\vec{a}))} \frac{1}{(\overline{m_1 - x_1} \dots \overline{m_s - x_s})^2} = \frac{1}{(\overline{n_1} \dots \overline{n_s})^2} + \sum'_{\vec{x} \in \Lambda(t \cdot T(\vec{a})) \setminus \{-\vec{k}_\Lambda(\vec{m})\}} \frac{1}{(\overline{n_1 - x_1} \dots \overline{n_s - x_s})^2}.$$

Воспользуемся неравенством

$$\frac{1}{\overline{n - x}} \leq \frac{2\overline{n}}{\overline{x}}, \quad (13)$$

которое доказывается непосредственно, получим

$$\begin{aligned} |S_{M(t), \vec{\rho}_1}(\vec{m})| &\leq \frac{1 - \delta(\vec{k}_\Lambda(\vec{m}))}{q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m}))^2} + \sum'_{\vec{x} \in \Lambda(t \cdot T(\vec{a}))} \frac{4^s (\overline{n_1} \dots \overline{n_s})^2}{(\overline{x_1} \dots \overline{x_s})^2} = \\ &= \frac{1 - \delta(\vec{k}_\Lambda(\vec{m}))}{q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m}))^2} + 4^s (q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m})))^2 \zeta(\Lambda(t \cdot T(\vec{a}))|2). \end{aligned}$$

Повторяя рассуждения из доказательства теоремы 9, получим доказываемое утверждение. $\square$

3. Заключение

Несомненно, что последнюю теорему можно уточнить, если вместо грубого неравенства (13) использовать более точные неравенства, но это требует дальнейших исследований.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рарова Е. М. Разложение тригонометрической суммы сетки с весами в ряд по точкам решетки // Изв. ТулГУ. Естественные науки. 2014. Вып. 1. Ч. 1. С. 37–49.
2. Рарова Е. М. Тригонометрические суммы сетки с весами для целочисленной решётки // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2014. № 3. С. 34–39.
3. Рарова Е. М. Тригонометрические суммы алгебраических сеток // В сборнике: Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения Материалы XIII Международной конференции, посвященной восьмидесятипятилетию со дня рождения профессора Сергея Сергеевича Рышкова. Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого. 2015. С. 356–359.
4. Рарова Е. М. О взвешенном числе точек алгебраической сетки // Чебышевский сборник, 2018, т. 19, вып. 1, с. 200–219.
5. Реброва И. Ю., Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н., Балаба И. Н., Есаян А. Р., Басалов Ю. А. Теоретико-числовой метод в приближённом анализе и его реализация в ПОИВС «ТМК»: Моногр. В 2 ч. Под. ред. Н. М. Добровольского. — Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2016. — Ч. I. — 232 с.

REFERENCES

1. Rarova E. M., 2014, "Decomposition of the trigonometric sum of a grid with weights in a series by lattice points", *Proceedings of Tula state University. Natural science*, vol. 1, part 1, pp. 37–49.

2. Rarova E. M., 2014, "Trigonometric grid sums with weights for integer lattice" , *Proceedings of Tula state University. Natural science*, № 3, pp. 34–39.
3. Rarova E. M., 2015, "Trigonometric sums of algebraic nets" , *In the collection: Algebra, number theory and discrete geometry: modern problems and applications Proceedings of the XIII International conference dedicated to the eighty-fifth anniversary of the birth of Professor Sergei Sergeevich Ryshkov. Tula state pedagogical University. L. N. Tolstoy*, pp. 356–359.
4. Rarova E. M., 2018, "Weighted number of points of algebraic net" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 1, pp. 200–219.
5. Rebrova I. Yu., Dobrovolsky N. M., Dobrovolsky N. N., Balaba I. N., Yesayan A. R., Basalov Yu. A. numerical Theoretic method in approximate analysis and its implementation in POIVS "TMK": Monogr. In Under 2 hours. ed. — Tula: Publishing house of Tula. state PED. UN-TA im. L. N. Tolstoy, 2016. — Part I. — 232 p.

Получено 18.03.2017 г.

Принято в печать 12.07.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 2.

УДК 517.938

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-406-441

**Внешние бильярдные вне правильного десятиугольника:
периодичность почти всех орбит и существование
апериодической орбиты¹**

Ф. Д. Рухович

Рухович Филипп Дмитриевич — аспирант кафедры дискретной математики, ассистент кафедры алгоритмов и технологий программирования факультета инноваций и высоких технологий, Московский физико-технический институт (г. Москва).

e-mail: dprpavlin@gmail.com

Аннотация

Внешние бильярдные были введены Б. Нойманном в 50-х годах XX века и стали популярны в 70-х благодаря Ю. Мозеру, который рассматривал внешний, или двойственный, бильярд как игрушечную модель небесной механики. Задача об устойчивости Солнечной системы обладает тем свойством, что "легко выписать n уравнений движения частиц, но сложно понять это движение интуитивно"; в связи с этим, Мозер предложил рассмотреть ранее поставленную Б. Нойманном задачу внешнего бильярда, обладающую тем же свойством.

Одним из классических примеров динамической системы является внешний бильярд вне правильного n -угольника; в частности, с ним связаны проблемы существования апериодической траектории, а также полноты периодических точек. Эти проблемы решены лишь для ограниченного количества частных случаев.

При $n = 3, 4, 6$ стол является решеточным, и, как следствие, апериодических точек нет, а периодические точки образуют множество полной меры. В 1993 году, С. Табачникову удалось найти апериодическую точку в случае правильного пятиугольника; сделано это было с помощью ренормализационной схемы - метода, имеющего фундаментальное значение при исследовании самоподобных динамических систем.

По мнению Р. Шварца, следующими по сложности являются случаи $n = 10, 8, 12$; в этих случаях, а также в случае $n = 5$ для внешнего бильярда удастся построить ренормализационную схему, которая, как пишет Шварц, "позволяет дать (как минимум, в принципе) полное описание того, что происходит".

Позже, автору удалось обнаружить самоподобные структуры и построить ренормализационную схему для случаев правильных восьми- и двенадцатиугольника.

Данная же статья посвящена внешнему бильярду вне правильного десятиугольника. Доказано существование апериодической орбиты для внешнего бильярда вне правильного десятиугольника, а также, что почти все траектории такого внешнего бильярда являются периодическими; явно выписаны все возможные периоды. В основе работы лежит классическая технология поиска и исследования ренормализационной схемы. Возникающие в случае $n = 10$ периодические структуры похожи на периодические структуры в случае $n = 5$, но все же имеют свои особенности.

Ключевые слова: Внешние бильярдные, самоподобие, апериодическая точка.

Библиография: 17 названий.

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 17-11-01337).

Для цитирования:

Ф. Д. Рухович. Внешние билиарды вне правильного десятиугольника: периодичность почти всех орбит и существование аперiodической орбиты // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 2, с. 406–441.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 2.

UDC 517.938

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-406-441

Outer billiards outside regular decagon: periodicity of almost all orbits and existence of aperiodic orbit ²

F. D. Rukhovich

Rukhovich Filip Dmitrievich — postgraduate student of the Department of discrete mathematics, assistant of the Department of algorithms and programming technologies of the faculty of innovations and high technologies, Moscow Institute of physics and technology (Moscow).

e-mail: dprpavlin@gmail.com

Abstract

Outer billiards were introduced by B. Neumann in 1950s and became popular in 1970s due to J. Moser; Moser considered outer, or dual, billiard as toy model of celestial mechanics. The problem of stability of the Solar system has such a property that “it’s easy to write n equations of particles motion down but hard to understand this motion intuitively”; according to this, Moser suggested to consider Neumann’s outer billiard problem which has the same property.

One of classical examples of dynamical systems is an outer billiard outside regular n -gon; in particular, this billiard is connected with problems of existence of aperiodic trajectory and of fullness of periodic points. These problems resolved only for a few number of a special cases.

In case $n = 3, 4, 6$ table is a lattice polygon; as a consequence, there are no aperiodic points, and periodic points form a set of full measure. In 1993, S. Tabachnikov was managed to find an aperiodic points in case of regular pentagon; it was done using renormalization scheme — method which has a fundamental importance in research of self-similar dynamical systems.

According to R. Schwartz, cases which are next by complexity are $n = 10, 8, 12$; in these cases, and also in case $n = 5$, it’s possible to build a renormalization scheme which, as R. Schwartz writes, “allows one to give (at least in principle) a complete description of what is going on.”

Later, author was managed to discover self-similar structures and build renormalization scheme for cases of regular octagon and dodecagon.

This article is devoted to outer billiard outside regular decagon. The existence of an aperiodic orbit for an outer billiard outside a regular octagon is proved. Additionally, almost all orbits of such an outer billiard are proved to be periodic. All possible periods are explicitly listed. The work is based on classical technology of search and research of renormalization scheme. Periodic structures which occur in case $n = 10$ are similar to periodic structures in case $n = 5$, but has their own features.

Keywords: Outer billiards, self-similarity, aperiodic point.

Bibliography: 17 titles.

For citation:

F. D. Rukhovich, 2019, "Outer billiards outside regular decagon: periodicity of almost all orbits and existence of aperiodic orbit", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 2, pp. 406–441.

²The research was carried out at the expense of a grant from the Russian science Foundation (project 17-11-01337).

1. Введение

Пусть γ — выпуклая фигура на плоскости $\mathbb{R}^2$, а p — точка вне ее. Проведем правую относительно p касательную к γ ; определим $Tr \equiv T(p)$ как точку, симметричную p относительно точки касания.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Отображение T называется внешним бильярдом; фигура γ называется столом внешнего бильярда.*

Обратным к такому преобразованию является «левый» внешний бильярд; будем обозначать его как T^{-1} .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Точку $p \in \mathbb{R}^2 \setminus \gamma$ назовем периодической, если существует такое натуральное n , что $T^n p = p$; минимальное такое n назовем периодом точки p и обозначим как $per(p)$.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Точку $p \in \mathbb{R}^2 \setminus \gamma$ назовем аперiodической, если она — не периодическая, а ее траектория бесконечна в две стороны.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. *Точку $p \in \mathbb{R}^2 \setminus \gamma$ назовем граничной, если $T^n p$ не определено для некоторого $n \in \mathbb{Z}$.*

В данной статье будем полагать, что γ — выпуклый многоугольник.

Внешние бильярды были введены Бернардом Нойманном в 1950-х годах и стали популярны в 1970-х благодаря Ю.Мозеру [4]. Внешние бильярды исследовались рядом авторов (см. например, [3], [5], [6], [14], [15], [16], а также монографию [8]). Так, Р. Шварц [5] показал, что траектория начальной точки может быть неограниченной, тем самым разрешив вопрос Мозера – Нойманна, поставленный в [4].

В центре нашего внимания находятся следующие открытые в общем случае проблемы периодичности:

- (i) Существует ли аперiodическая точка для внешнего бильярда вне правильного n -угольника?
- (ii) Верно ли, что периодические точки образуют вне стола множество полной меры для внешнего бильярда вне правильного n -угольника?

Случаи $n = 3, 4, 6$ являются решеточными и тривиальными; в этих случаях, аперiodической точки нет, а периодические точки, как следствие, образуют множество полной меры. По мнению Р. Шварца, следующими по сложности исследования являются случаи $n = 5, 10, 8, 12$, ибо, по-видимому, только в этих случаях имеют место самоподобные структуры. С. Л. Табачников в [3] в деталях исследовал случай $n = 5$ — для них аперiodические точки существуют, но их мера равна нулю. В дальнейшем правильный пятиугольник и связанная с ним символическая динамика подробно исследовались в работе N.Bedaride и J.Cassaigne [7] (см. также их монографию [10]).

В статье [1] в деталях рассматривается внешний бильярд для случая $n = 8$, а в статье [2] — для случая $n = 12$. В данной же статье исследуется случай $n = 10$. Этот случай похож на случай $n = 5$; связь между ними была доказана в [7]. Однако возникающие в случае $n = 10$ периодические структуры, хоть и похожи на периодические структуры в случае $n = 5$, все же имеют свои особенности. Вследствие этого, детальное описание случая $n = 10$ видится необходимым.

Основным результатом данной работы являются следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1. *Для внешнего бильярда вне правильного десятиугольника существует апериодическая точка.*

ТЕОРЕМА 2. *В случае внешнего бильярда вне правильного десятиугольника, периодические точки образуют вне стола множество полной меры.*

ТЕОРЕМА 3. *Пусть*

$$B_2 = \left\{ \frac{5}{7}(6^{l+2} - (-1)^l), \frac{5}{7}(9 * 6^{l+1} + 2 * (-1)^l), 20 * 6^l, 30, 90 * 6^l, 10, 5, \right. \\ \frac{20}{7}((78 + 120k) * 6^l - (k + 1) * (-1)^l), \frac{5}{7}((276 + 240k) * 6^l - (2k + 3) * (-1)^l), \\ \frac{5}{7}((234 + 180k) * 6^l + (2k + 4) * (-1)^l), \frac{5}{7}((34 + 40k) * 6^l + (2k + 1) * (-1)^l), \\ \left. \frac{10}{7}((20 + 40k) * 6^l + (2k + 2) * (-1)^l), 40k + 70, \frac{5}{7}((306 + 180k) * 6^l + (2k + 2) * (-1)^l), \right. \\ 40k + 50, 60k + 40, 30k + 35, 20k + 30, 20k + 20, 10k + 15, \frac{10}{7}(6^{l+2} - (-1)^l), \\ \left. \frac{10}{7}((276 + 240k) * 6^l - (2k + 3) * (-1)^l), \frac{10}{7}((34 + 40k) * 6^l + (2k + 1) * (-1)^l), \right. \\ \left. 60k + 70, 20k + 30 | k, l \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \right\}.$$

Тогда B_2 есть множество всевозможных периодов периодических точек для внешнего бильярда вне правильного десятиугольника.

2. Внешний бильярд вне многоугольников: базовые определения и замечания

Во всех числовых индексах данной статьи числа будем подразумевать целыми, если не сказано обратное.

Введем основные определения, связанные с внешними бильярдами вне выпуклых многоугольников (здесь мы ссылаемся на [7]). Пусть стол $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ есть произвольный выпуклый n -угольник, $n \geq 3$. Занумеруем его вершины как $A_0 A_1 \dots A_{n-1}$ против часовой стрелки. Проведем лучи $A_1 A_0, A_2 A_1, \dots, A_0 A_{n-1}$; они делят $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$ на n углов, вершины которых суть вершины γ ; пусть $V_i, 0 \leq i < n$, есть один из этих углов с вершиной A_i . На рис. 1 изображен пример этих обозначений в случае $n = 5$.

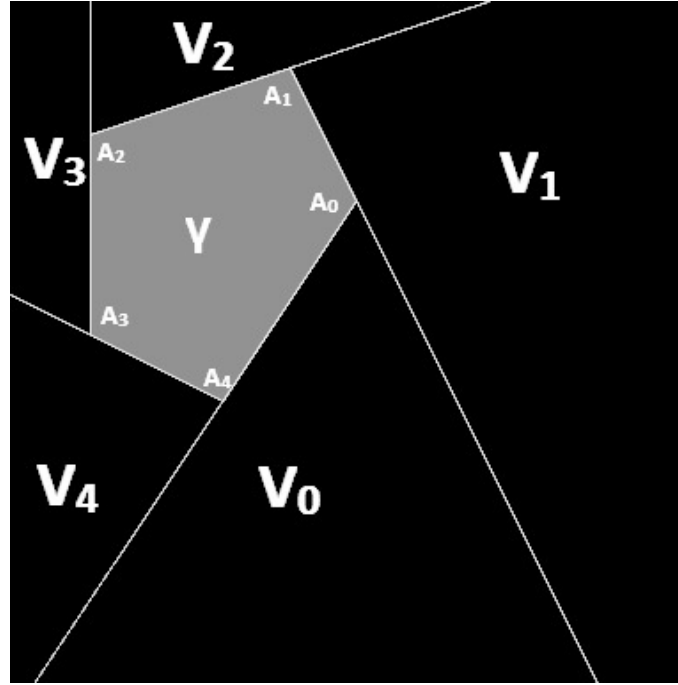
Из определения внешнего бильярда напрямую следует

ЛЕММА 1. *Пусть $p \in \mathbb{R}^2 \setminus \gamma$, а $i \in [0, n)$. Тогда преобразование T для точки p определено и является центральной симметрией относительно вершины A_i , если и только если $p \in \text{int}(V_i)$.*

Поймем, как выглядит множество граничных точек.

ЛЕММА 2. *Множество граничных точек есть объединение счетного числа открытых отрезков и лучей.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если удалить из прямой, являющейся продолжением стороны γ , отрезок, являющийся стороной γ , то прямая распадется на два открытых луча. Проведем такую операцию для каждой из n сторон; пусть L есть множество точек, лежащих на таком образом полученных $2n$ открытых лучах. Очевидно, что множество граничных точек есть $\{T^k(p) | p \in L, k \in \mathbb{Z}\}$, т.е. результат применения неограниченного числа преобразований T и

Рис. 1: Определение стола γ , вершин и углов V_i

T^{-1} к лучам, образующим L . Однако заметим, что если T (или T^{-1}) определено для хотя бы одной точки некоторого открытого луча или отрезка, то T (или T^{-1}) разделит этот луч или отрезок лучами $A_{(i+1) \bmod n} A_i$, $0 \leq i < n$, на конечное число открытых отрезков и/или лучей, для каждого из которых T (или T^{-1}) есть центральная симметрия. Тогда для каждого $k \in \mathbb{Z}$, $T^k(L)$ есть объединение конечного числа отрезков и лучей, а множество граничных точек есть объединение счетного числа отрезков и лучей как объединение конечных множеств отрезков и лучей, QED.

Так прямая, луч и отрезок являются в $\mathbb{R}^2$ множествами меры нуль, то из леммы 2 напрямую следует известный факт, важный ввиду второй проблемы периодичности.

ЛЕММА 3. *Множество граничных точек для внешнего бильярда вне γ является множеством меры нуль.*

Введем «классическое» для внешнего бильярда вне правильных многоугольников *кодирование*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть $p \in \mathbb{R}^2 \setminus \gamma$ — периодическая или аперриодическая точка. Тогда кодом $\rho(p) \equiv \rho_\gamma(p)$ является последовательность $(\dots u_{-2} u_{-1} u_0 u_1 u_2 \dots)$, так что

$$\forall i \in \mathbb{Z} : T^i(p) \in \text{int}(V_{u_i}).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Пусть $p \in \mathbb{R}^2 \setminus \gamma$ — граничная точка, последовательное применение внешнего бильярда T может быть выполнено ровно m раз, а преобразования T^{-1} — l раз, $0 \leq l, m \leq +\infty$. Тогда код $\rho(p) = \rho_\gamma(p)$ есть последовательность $(u_i)_{i \in [-l, m]}$, где $u_i \in [0, n)$ и $u_i = k$, если и только если $T^i(p) \in \text{int}(V_k)$.

Также будем обозначать элемент u_i кода как $\rho(p)[i]$, а подпоследовательность $u_l u_{l+1} \dots u_r$, $-\infty < l \leq r < +\infty$ — как $\rho(p)[l, r]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Компонентой назовем максимальное по включению множество точек с одинаковым кодом ρ ; компоненту, в которой содержится точка p , обозначим за $\text{comp}(p)$.

Непосредственно из определений следует

ЛЕММА 4. Пусть точка p обладает кодом $\rho(p)$ бесконечной длины, равным

$$\dots u_{-2}u_{-1}u_0u_1u_2\dots$$

Тогда $\text{comp}(p) = \bigcap_{i \in \mathbb{Z}} U_i$, где U_i есть:

- $\text{int}(V_{u_0})$, при $i = 0$;
- $T^{-i}(\text{int}(V_{u_i}) \cap T^i(U_{i-1}))$, при $i > 0$;
- $T^{-i}(\text{int}(V_{u_i}) \cap T^i(U_{i+1}))$, при $i < 0$.

Отметим, что множество $U_i, i \in \mathbb{Z}$ представляет собой пересечение конечного числа полуплоскостей, площадь которого отлична от нуля, но может быть бесконечной. Если пересечение ограничено, то это пересечение есть выпуклый многоугольник. Неограниченное пересечение полуплоскостей будем называть бесконечным многоугольником; если же пересечение ограничено, назовем его конечным многоугольником.

Поймем, как выглядит компонента периодической точки.

ЛЕММА 5. Пусть p — периодическая точка с периодом m . Пусть q — некоторая точка, т.ч. определено $T^{2m}(q)$, причем $\rho(p)[0, 2m - 1] = \rho(q)[0, 2m - 1]$. Тогда:

- (i) q — периодическая точка с периодом не более чем $2m$;
- (ii) $q \in \text{comp}(p)$, т.е. $\rho(p) = \rho(q)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\vec{v} = p\vec{q}$. Тогда в силу одинаковости соответствующих частей кода и по свойствам центральной симметрии $T^k(q) = T^k(p) + (-1)^k \vec{v}$, $k = 0, 1, \dots, 2m$; в частности, $T^{2m}(q) = T^{2m}(p) + (-1)^{2m} \vec{v} = p + v = q$. Таким образом, q периодична, а последовательность $T^k(q)$ имеет (возможно, не минимальный) период $2m$. Следовательно, $\rho(q)$ бесконечен в обе стороны, имеет период $2m$ и, как очевидное следствие, совпадает с $\rho(p)$.

Прямым следствием предыдущей леммы является

ЛЕММА 6. Пусть p — периодическая точка с периодом m . Тогда:

- $\text{comp}(p) = U_{2m}$ (определение множества U см. в условии леммы 4);
- все точки $\text{comp}(p)$ периодические, причем каждая из них обладает (возможно, не минимальным) периодом $2m$;
- $\text{comp}(p)$ есть открытый, конечный или бесконечный, выпуклый многоугольник, стороны которого параллельны сторонам γ .

Последнее утверждение леммы 6 очевидно следует из структуры множеств U_i . Понять же устройство периодической компоненты, т. е. компоненты, содержащей периодическую точку, в больших деталях нам поможет следующая лемма.

ЛЕММА 7. Пусть p, q — две точки вне стола γ , и пусть для некоторого $l \in \mathbb{Z}$ $\rho(p)_l$ и $\rho(q)_l$ определены, причем $\rho(p)_l \neq \rho(q)_l$. Тогда на отрезке pq существует граничная точка.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем лемму для случая $l \geq 0$ (случай $l < 0$ может быть рассмотрен аналогично). Без ограничения общности будем считать, что l минимально среди всех подходящих l . Тогда для любой точки x отрезка pq $T^l(x)$ определено и является последовательностью центральных симметрий относительно точек $A_{u_0}, A_{u_1}, \dots, A_{u_{l-1}}$, где $\dots u_0 u_1 u_2 \dots = \rho(p)$. По свойствам центральных симметрий, $T^l(pq)$ есть отрезок $T^l(p)T^l(q)$. Так как $\rho(p)_l \neq \rho(q)_l$, то $T^l(p)$ и $T^l(q)$ лежат в разных углах V_{i_p} и V_{i_q} ; следовательно, отрезок $T^l(p)T^l(q)$ пересекает границу угла V_{i_p} (равно как и V_{i_q}) в некоторой точке y , а точка $x = T^{-l}(y)$ лежит на отрезке pq и является граничной точкой, QED.

Такая лемма дает возможность понять, из чего состоит граница компоненты периодической точки.

ЛЕММА 8. Пусть p — периодическая точка. Тогда $\text{сотр}(p)$ состоит лишь из граничных точек (точки самого стола γ будем также считать граничными).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим точку q , лежащую на границе $\text{сотр}(p)$. Предположим, что q не является граничной; тогда q обладает бесконечным в обе стороны кодом $\rho(q)$. Так как $q \notin \text{сотр}(p)$, то $\rho(p) \neq \rho(q)$; следовательно, по лемме 7 на отрезке pq существует граничная точка с конечной траекторией. Полученное противоречие с леммой 6 завершает доказательство.

ЛЕММА 9. Пусть p — периодическая точка. Тогда $\text{сотр}(p)$ есть конечный многоугольник.

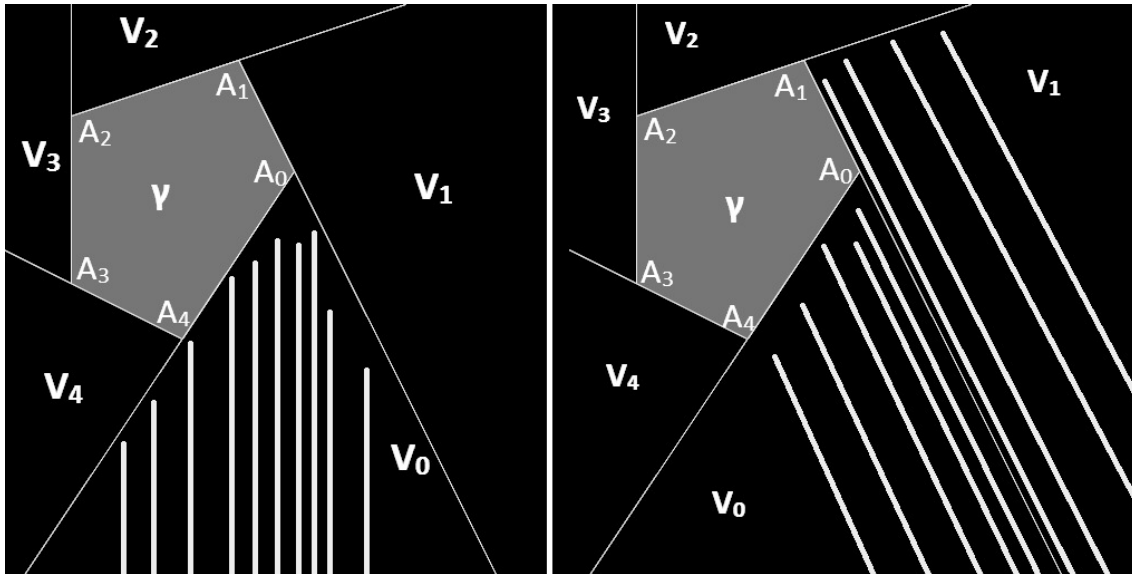


Рис. 2: Сонаправленные лучи, лежащие целиком в одном из секторов

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть это не так. Тогда по лемме 6 $\text{сотр}(p)$ есть бесконечный выпуклый многоугольник; следовательно, существует луч r с началом в некоторой точке s и направляющим вектором $\vec{v}$, целиком лежащий внутри $\text{сотр}(p)$.

Из свойств центральной симметрии следует, что $T^{2l}(r)$, $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ есть луч, сонаправленный с лучом r . Каждый из лучей $T^{2l}(r)$ должен лежать целиком внутри одного из углов V_i . Заметим (см. рис. 2), что если рассмотреть всевозможные лучи с заданным направлением $\vec{v}$, каждый из которых лежит целиком строго внутри какого-то из углов V_i , то эти лучи либо лежат в одном из углов, либо в двух соседних углах, если луч сонаправлен с лучом — стороной одного из углов.

Докажем, что последовательность лучей $T^{2l}(r)$ лежит строго в одном из углов. Пусть это не так, и лучи $T^{2l}(r)$ лежат в двух соседних углах; пусть это, без ограничения общности, V_0 и V_1 (нумерация углов, напомним, идет против часовой стрелки). Так как $T^{2l}(r)$ есть периодическая последовательность (доказательство можно провести аналогично лемме 5), то $\exists l_0 \in \mathbb{N} : T^{2l_0}(r) \subset \text{int}(V_0) \wedge T^{2l_0+2}(r) \subset \text{int}(V_1)$; следовательно, существует луч $r' \subset \text{int}(V_0)$, сонаправленный с r , т.ч. $T^2(r') \subset \text{int}(V_1)$. По свойствам центральных симметрий, для r' T^2 есть параллельный перенос на вектор $2\vec{u}$, где $\vec{u}$ — вектор, начинающийся в вершине A_0 угла V_0 и заканчивающийся в некоторой другой вершине стола γ . Т. к. γ лежит в левой полуплоскости относительно ориентированной прямой A_0A_1 , то и вектор $\vec{u}$ направлен «невправо» относительно прямой A_0A_1 . Как следствие, лучи r' и $T^2(r')$ лежат в левой относительно A_0A_1 полуплоскости, а угол $\text{int}(V_1)$ лежит в правой относительно A_0A_1 полуплоскости — противоречие.

Итак, все лучи последовательности $T^{2l}(r)$, $l \in \mathbb{Z}$, лежат в некотором угле V_i , а, аналогично, лучи последовательности $T^{2l+1}(r)$, $l \in \mathbb{Z}$ — в некотором угле V_j . Тогда код всех вершин луча есть $\dots ijijijijijijijij \dots$; следовательно, по все тем же свойствам центральных симметрий, $T^{2l}(c) = c + 2l\vec{u}$, $\vec{u} = \overrightarrow{A_iA_j}$. Следовательно, $\forall l \in \mathbb{Z} : T^{2l}(c) \neq c$ — противоречие с периодичностью точки p относительно T и, как следствие, T^2 . Таким образом, $\text{comp}(p)$ есть ограниченное множество, QED.

Итак, компонента периодической точки p есть открытый выпуклый не-более-чем- $2n$ -угольник, стороны которого параллельны сторонам стола γ . Более того, из лемм 6, 8 вытекает альтернативное определение понятия «компонента периодической точки»:

ЛЕММА 10. Пусть $p \in \mathbb{R}^2 \setminus \gamma$ — периодическая точка. Тогда компонента периодической точки $\text{comp}(p)$ есть максимальное по включению связное множество периодических точек, содержащее p .

Но как же устроены периоды точек $\text{comp}(p)$?

ЛЕММА 11. Пусть p — периодическая точка. Тогда

$$\forall n \in \mathbb{N} : T^n(\text{comp}(p)) = \text{comp}(p) \vee T^n(\text{comp}(p)) \cap \text{comp}(p) = \emptyset.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $T^n(\text{comp}(p))$ есть открытый выпуклый многоугольник, равный $\text{comp}(p)$; следовательно, ни одно из множеств $T^n(\text{comp}(p))$ и $\text{comp}(p)$ не может быть строгим подмножеством другого множества. В этом случае, либо вышеописанные множества не пересекаются, либо совпадают, либо пересекаются таким образом, что существует точка q , которая лежит внутри $T^n(\text{comp}(p))$ и на границе $\text{comp}(p)$. Последний случай вызывает противоречие, ибо по леммам 6, 8 точка q должна быть и периодической, и граничной. Следовательно, лемма доказана.

Предыдущая лемма дает возможность ввести понятие периода компоненты.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Пусть p — периодическая точка. Тогда периодом компоненты $\text{comp}(p)$, или $\text{per}(\text{comp}(p))$, назовем минимальное такое натуральное k такое, что $T^k(p) = p$.

Как же $\text{per}(\text{comp}(p))$ связано с периодами точек $\text{comp}(p)$?

Следующая лемма есть прямое следствие леммы 11 и того факта, что T^n для компоненты периодической точки p есть параллельный перенос в случае четного n и центральная симметрия в случае нечетного n .

ЛЕММА 12. Пусть p — периодическая точка, и пусть $k = \text{per}(\text{comp}(p))$. Тогда:

- если k четно, то все точки $\text{comp}(p)$ имеют период k ;

- если k нечетно, то: а) $\text{compr}(p)$ есть центрально-симметричный многоугольник с центром в некоторой точке s ; б) период точки s есть k , а всех остальных точек - $2k$.

Пользуясь данной леммой, будем также называть компоненту некоторой периодической точки *периодической компонентой*.

Согласно лемме 12, мы можем найти множество всевозможных периодов точек для внешнего бильярда вне γ , если нам известно множество всевозможных периодов периодических компонент. Точное соотношение между множествами задает следующая лемма, являющаяся прямым следствием леммы 12.

ЛЕММА 13. Пусть B_c и B_p — множества всевозможных периодов компонент и точек соответственно для внешнего бильярда вне многоугольника γ .

Тогда $B_p = B_c \cup \{2 * l \mid l \in B_c, l \text{ нечетно}\}$.

Завершит наше исследование на тему периодических компонент следующая лемма.

ЛЕММА 14. Пусть p — периодическая точка. Тогда $T(\text{compr}(p)) = \text{compr}(T(p))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что $T(\text{compr}(p)) \subset \text{compr}(T(p))$ и

$$T^{-1}(\text{compr}(T(p))) \subset \text{compr}(T^{-1}(T(p))) = \text{compr}(p),$$

откуда следует, что $\text{compr}(T(p)) \subset T(\text{compr}(p))$; следовательно, $T(\text{compr}(p)) = \text{compr}(T(p))$, QED.

3. Внешний бильярд вне правильного десятиугольника

Перейдем к исследованию правильного десятиугольника. С этого момента будем считать, что стол внешнего бильярда есть правильный десятиугольник $\gamma = A_0A_1 \dots A_9$, вершины которого перенумерованы против часовой стрелки. Будем следовать плану, намеченному в [1, 2].

3.1. Ограничение преобразования

Введем ограничение преобразования T , похожее на ограничение, выполненное в работах [7, 3], но отличающееся в итоговой реализации.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Пусть R есть поворот на угол $\frac{\pi}{5}$ по часовой стрелке вокруг центра γ .

Заметим, что T инвариантно относительно R , т. е. $\forall p \in \mathbb{R}^2 \setminus \gamma$,

$$T(p) \text{ определено: } T(R(p)) = R(T(p)).$$

Отождествим точки, переходящие друг в друга с помощью R .

Пусть V' есть угол с вершиной в A_1 , центрально-симметричный углу V_1 относительно A_1 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Пусть $p \in \mathbb{R}^2 \setminus \gamma$. Тогда k_p есть такое минимальное число $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, что $R^k(p) \in V'$, а $R'(p)$ есть $R^{k_p}(p)$.

Другими словами, $R'(p)$ есть представитель класса эквивалентности p в V' (если только p не лежит на продолжении одной из сторон).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. Преобразование $T' : V' \rightarrow V'$ есть преобразование, индуцированное отождествлением точек относительно R , устроенное следующие образом. Пусть $p \in \text{int}(V')$; тогда:

- $T'(p)$ определено, если и только если $T(p)$ определено;
- если $T'(p)$ определено, то $T'(p) = R'(T(p))$.

Для удобства будем считать, что на $\partial V'$ T' не определено.

Любую точку $p \in V'$ будем рассматривать как граничную (периодическую, аperiodическую) относительно T' ровно в том же смысле, в котором ранее мы рассматривали точки $p \in \mathbb{R}^2 \setminus \gamma$. Из структуры отождествления очевидны следующая лемма.

ЛЕММА 15. *Точка $p \in V'$ является граничной (периодической, аperiodической) относительно T' , если и только если $p \in V'$ является граничной (периодической, аperiodической) относительно T . Более того, в этом случае граничными (периодическими, аperiodическими) относительно T будут являться точки $R^k(p)$, $k = 0, 1, \dots, 9$.*

Прямым следствием леммы 15 является следующая лемма, которая сводит решение проблем периодичности для всей плоскости относительно преобразования T к решению тех же проблем, но в $\text{int}(V')$ и относительно преобразования T' .

ЛЕММА 16. (i) *Аperiodическая относительно преобразования T точка существует, если и только если существует аperiodическая точка в $\text{int}(V')$ относительно преобразования T' ;*

(ii) *Периодические относительно T точки образуют вне γ множество полной меры, если и только если периодические относительно T' точки образуют в $\text{int}(V')$ множество полной меры.*

Чтобы свести проблему нахождения периодов к преобразованию T' , введем индуцированный ограничением код относительно T' .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. Пусть $p \in V'$ — периодическая или аperiodическая точка. Тогда индуцированным кодом $\rho'(p) \equiv \rho'_\gamma(p)$ является последовательность $(\dots v_{-2}v_{-1}v_0v_1v_2\dots)$, т.ч. $\forall i \in \mathbb{Z} : T^i(p) \in \text{int}(V_{v_i+1})$.

Заметим, что коды ρ и ρ' связаны между собой следующим образом.

ЛЕММА 17. Пусть $p \in V'$ — периодическая или аperiodическая точка. Тогда $\forall i \in \mathbb{Z} : \rho'(p)[i] = (\rho(p)[i] - \rho(p)[i-1]) \bmod 10$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Преобразования T , T' и R' устроены таким образом, что если $T(q_1) = q_2$, то $T'(R'(q_1)) = R'(q_2)$, и $R'(R(q_1)) = R'(q_1)$.

Отсюда заметим, что если q — произвольная неграничная точка, то при замене q на $R(q)$ все значения кода $\rho(q)$ уменьшаются на один по модулю 10, а значения кода $\rho'(R(q))$ не изменяются. Зафиксируем произвольное $i \in \mathbb{Z}$. Пусть $k = k_{T^i(p)}$, и $p' = R^k(p)$. Тогда $\rho'(R'(p'))[i] = \rho'(p)[i]$, и $(\rho(p')[i] - \rho(p')[i-1]) \bmod 10 = (\rho(p)[i] - \rho(p)[i-1]) \bmod 10$. С другой стороны, $T^i(p') \in \text{int}(V')$, а $T^{-1}(\text{int}(V')) = \text{int}(V_1)$. Следовательно, по определению $\rho(p')[i-1] = 1$, $\rho(p')[i] = 1 + \rho'(R'(p'))[i] = \rho(p')[i-1] + \rho'(p)[i]$, откуда получаем $(\rho(p)[i] - \rho(p)[i-1]) \bmod 10 = \rho'(p)[i]$. Факт произвольности выбора i завершает доказательство леммы.

Очевидно, что внутри V' периодические компоненты относительно ρ и ρ' одни и те же (ибо для любой неграничной точки $p \in V'$ код $\rho(p)$ можно восстановить из $\rho'(p)$ и наоборот), что дает возможность ввести период $\text{per}'(\text{comp})$ как период периодической компоненты $\text{comp} \subset V'$ относительно T' . Отметим, что все элементы $\rho'(p)$ являются целыми числами от 1 до 5.

ЛЕММА 18. Пусть $p \in V'$ — периодическая точка, причем $\text{per}'(p) = m$. Тогда $\text{per}(p) = m * \frac{10}{\text{НОД}(s, 10)}$, где $s = \sum_{i=1}^m \rho'(p)[i]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что для любого $k \in \mathbb{Z}$ верна импликация:

$$(T^k(p) = p) \implies (T'^k(p) = p);$$

следовательно, $\text{per}(p)$ кратен m ; пусть $z = \frac{\text{per}(p)}{m}$. По лемме 17 и в силу периодичности p верно:

$$\begin{aligned} s \bmod 10 &= (\rho(p)[m] - \rho(p)[0]) \bmod 10 = (\rho(p)[2m] - \rho(p)[m]) \bmod 10 = \\ &= (\rho(p)[3m] - \rho(p)[2m]) \bmod 10 = \dots \end{aligned}$$

Так как $p = T^m(p) = T^{2m}(p) = \dots$, то $\forall l \in \mathbb{Z}: f'(T^{lemm}(p)) = p$; следовательно, $\forall l \in \mathbb{Z}: T^{lemm}(p) = p \Leftrightarrow (\rho(p)[lm] - \rho(p)[0]) \bmod 10 = 0$, а z есть минимальное натуральное подходящее l . Так как $\forall l \in \mathbb{Z}: (\rho(p)[lm] - \rho(p)[0]) \bmod 10 = (l * (\rho(p)[m] - \rho(p)[0])) \bmod 10 = (l * s) \bmod 10$, то z есть минимальное натуральное число такое, что $z * s$ делится на 10; из теории чисел очевидно, что $z = \frac{10}{\text{НОД}(s, 10)}$, QED.

Отметим, что лемма 18 останется верна, если вместо точки p рассмотреть её периодическую компоненту. Таким образом, зная всевозможные индуцированные коды периодов относительно T' , можно описать и всевозможные периоды относительно T . Более того, для этого не нужно знать именно слова — достаточно знать, сколько раз в коде периодической траектории появляются единица, двойка, ..., пятерка. Более формально эту мысль описывает следующая лемма, являющаяся прямым следствием леммы 18.

ЛЕММА 19. Пусть $p \in (\subset)V'$ — периодическая точка (компонента), и пусть $\text{per}'(p) = m$. Пусть в последовательности $\rho'(p)[1, m]$ число j встречается ровно a_j раз, $j = 1, 2, \dots, 5$. Тогда $\text{per}(p) = \frac{10 * (a_1 + a_2 + \dots + a_5)}{\text{НОД}(10, a_1 + 2a_2 + \dots + 5a_5)}$.

3.2. T' как «кусочное движение»

Опишем, как выглядит преобразование T' . Для этого определим углы V'_i , $0 \leq i < 10$, как угол, симметричный V_i относительно вершины A_i . В частности, $V' = V'_1$. Из определения очевидно, что $\forall p \in \mathbb{R}^2 \setminus \gamma, j \in [0, 10): \rho(p)[0] = j \Leftrightarrow T(p) \in \text{int}(V'_j)$ (в частности, $\rho(p)[0]$ определено, если и только если $T(p)$ определено), а также $\forall j \in [0, 10): R(V'_j) = V'_{(j-1) \bmod 10}$.

ЛЕММА 20. Пусть $p \in \text{int}(V')$, и $T(p)$ определено. Тогда $T'(p) = R^{v_0}(T(p))$, где $v_0 = \rho'(p)[0]$.

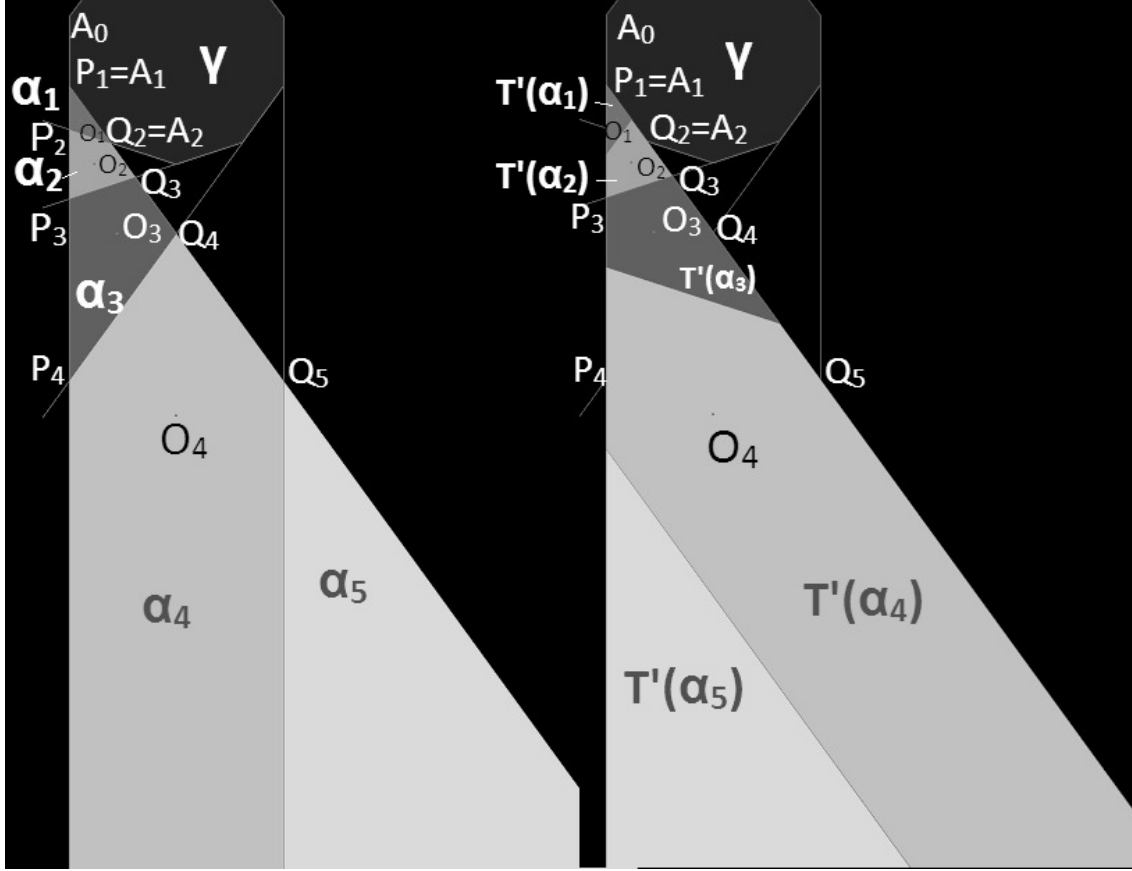
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению ρ' , T для p есть центральная симметрия относительно вершины A_{v_0+1} . Тогда $T(p) \in \text{int}(V'_{v_0+1})$. Так как $R^{v_0}(V'_{v_0+1}) = V'_1 = V'$ (очевидно), то $R^{v_0}(T(p)) \in \text{int}(V')$. Следовательно, $T'(p) = R^{v_0}(T(p))$, QED.

Пусть $\alpha_i \subset V'$, $i = 1, 2, \dots, 5$, есть множество точек $p \in V'$, т.ч. $\rho'(p)[0] = i$; все фигуры α_i изображены на рис. 3. Из леммы 1 очевидно, что $\alpha_i = \text{int}(V') \cap \text{int}(V_{i+1})$, откуда следует следующая лемма.

ЛЕММА 21. (i) α_1 есть открытый треугольник $P_1P_2Q_2$;

(ii) α_i , $i = 2, 3$, есть открытый четырехугольник $P_iQ_iQ_{i+1}P_{i+1}$;

(iii) α_4 есть открытый бесконечный многоугольник, ограниченный лучом A_0A_1 , отрезками P_4Q_4 и Q_4Q_5 и лучом A_6A_5 ;

Рис. 3: Фигуры α_i и индуцированное преобразование T' .

(iv) α_5 есть открытый угол между лучами A_1A_2 и A_6A_5 .

Важными для нашего описания оказываются точки O_i пересечения биссектрисы угла $P_2P_1Q_2$ с биссектрисами углов $V_{i+1} = P_iA_{i+1}P_{i+1}$, $i = 1, 2, 3, 4$.

ЛЕММА 22. $\forall i \in \{1, 2, 3, 4\}: T'(O_i) = O_i$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, а O — центр γ . Заметим, что угол V_{i+1} симметричен углу V' относительно прямой OP_{i+1} ; следовательно, $A_1O_i = A_{i+1}O_i$. С другой стороны, по лемме 20 $T'(O_i) = R^i(T(O_i))$, причем преобразование T переводит с сохранением расстояния биссектрису угла V_{i+1} в биссектрису угла V'_{i+1} , а R^i переведет последнюю биссектрису с сохранением расстояния в биссектрису угла $V'_1 = V'$. Следовательно, $T'(O_i)$ будет лежать на биссектрисе угла V' , причем $A_1T'(O_i) = A_{i+1}O_i = A_1O_i$, откуда $O_i = T'(O_i)$, QED.

Лемма 22 позволяет нам полностью описать преобразование T' .

ЛЕММА 23. (i) $\forall i \in \{1, 2, 3, 4\}: T'(\alpha_i)$ есть поворот на угол $\frac{(5-i)\pi}{5}$ против часовой стрелки вокруг точки O_i ;

(ii) $T'(\alpha_5)$ есть параллельный перенос вдоль вектора $\overrightarrow{A_6A_1}$;

(iii) $\forall i \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \forall p \in \partial(\alpha_i): T'(p)$ не определено.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пункт 3 очевидно следует из определения T' и того факта, что границы α_i лежат на продолжениях сторон стола γ .

Докажем пп.1,2. Согласно лемме 20, $T'(\alpha_i)$, $i = 1, 2, \dots, 5$ есть $R^i(T(\alpha_i))$; т.к. центральная симметрия есть поворот на угол π против часовой стрелки (будем для удобства использовать такое направление), то при $i = 1, 2, 3, 4$, $T'(\alpha_i)$ есть поворот на угол $\pi - i * \frac{\pi}{5}$ против часовой стрелки вокруг некоторой неподвижной точки, которой по лемме 22, и п.1 доказан. Что до п.2, то при $i = 5$ R^i есть центральная симметрия относительно т. O , центра γ ; следовательно, $T'(\alpha_5)$ есть композиция центральных симметрий относительно точек A_6 и O ; из школьной геометрии известно, что это есть параллельный перенос на вектор $2\overrightarrow{A_6O} = \overrightarrow{A_6A_1}$, QED.

Таким образом, T' разбивает V' на пять фигур, для каждой из которых T' есть движение, т.е. T' кусочно изометрично (piecewise isometric).

Введем еще одно определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13. Пусть $\alpha, \beta \subset \mathbb{R}^2$ — конечные или бесконечные многоугольники. Будем говорить, что β вписан в α , если $\beta \subset \alpha$ и каждая из сторон α целиком содержит одну из сторон β .

Рассмотрим периодические компоненты $\text{comp}(O_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$. Каждая такая компонента имеет код $\rho'(\text{comp}(O_i))$, равный $\dots iiiii \dots$ и является, согласно лемме 6, открытым выпуклым многоугольником; назовем эти многоугольники β_i . Будем также обозначать отрезок с концами в точках p, q как $\overline{pq}$.

ЛЕММА 24. (i) β_1 есть правильный пятиугольник $B_0^1 B_1^1 B_2^1 B_3^1 B_4^1$, т.ч. $B_1^1 = P_2$, $\overline{B_0^1 B_1^1} \subset \overline{P_1 P_2}$, $\overline{B_1^1 B_2^1} \subset \overline{P_2 Q_2}$, $\overline{B_3^1 B_4^1} \subset \overline{Q_2 Q_1}$;

(ii) β_2 есть правильный десятиугольник $B_0^2 B_1^2 \dots B_9^2$, т.ч. $B_7^2 = Q_2$, $\overline{B_0^2 B_1^2} \subset \overline{P_2 P_3}$, $\overline{B_3^2 B_4^2} \subset \overline{P_3 Q_3}$, $\overline{B_6^2 B_7^2} \subset \overline{Q_3 Q_2}$, $\overline{B_7^2 B_8^2} \subset \overline{Q_2 P_2}$;

(iii) β_3 есть правильный пятиугольник $B_0^3 B_1^3 \dots B_4^3$, т.ч. $B_0^3 = P_3$, $B_3^4 = Q_4$, $B_3^3 = Q_5$, $B_1^3 \in \overline{P_3 P_4}$, $B_2^3 \in \overline{P_4 Q_4}$;

(iv) β_4 есть правильный десятиугольник $B_0^4 B_1^4 \dots B_9^4$, т.ч. $B_0^4 = P_4$, $B_6^4 = Q_5$, $B_7^4 \in \overline{Q_5 Q_4}$, $B_9^4 \in \overline{Q_4 P_4}$.

Таким образом, β_j есть правильные многоугольники, вписанные в α_j , $j = 1, 2, 3, 4$; этим многоугольниками изображены на рис. 4. Для доказательства достаточно проверить, что при применении преобразования T' фигуры как открытые многоугольники переходят сами в себя, а их границы состоят из граничных точек; проверку этих фактов с помощью леммы 23 (и рис. 4) оставляем читателю.

3.3. Самоподобие 1

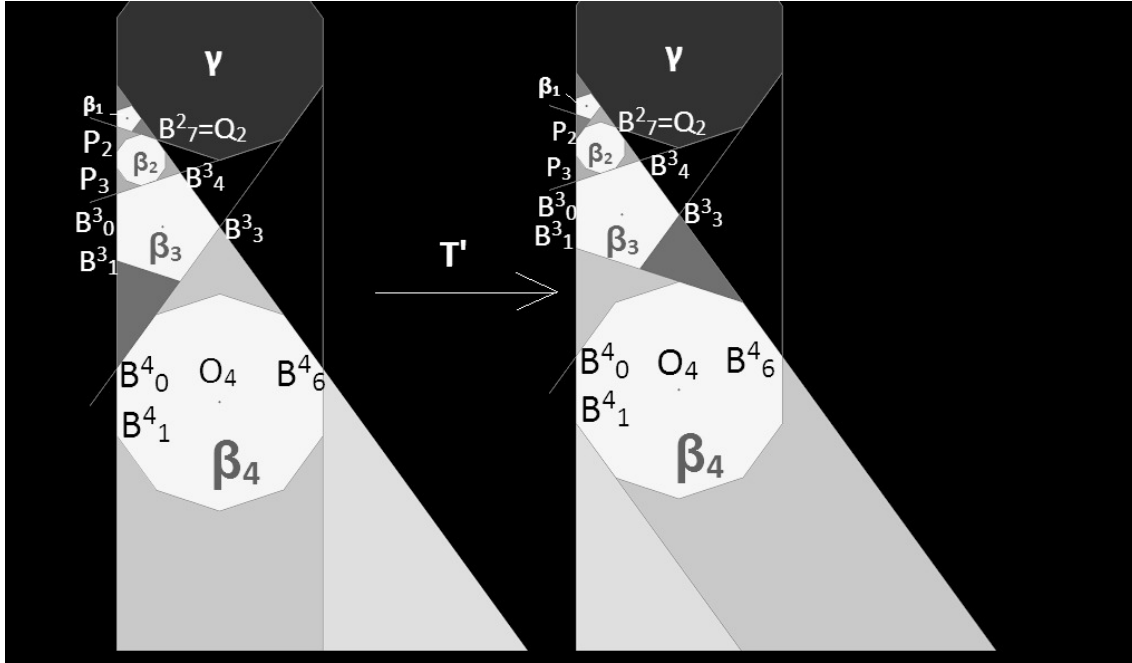
Рассмотрим угол α_5 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14. Определим преобразование $T'' : \alpha_5 \rightarrow \alpha_5$ следующим образом. Пусть $q \in \alpha_5$, и пусть $k = k_{\alpha_5}(q)$ есть минимальное целое положительное число такое, что $q' = T''^k(q)$ определено, и $q' \in \alpha_5$. Тогда $T''(q) = q'$.

Другими словами, T'' есть преобразование первого возвращения (first return map) относительно T' на α_5 .

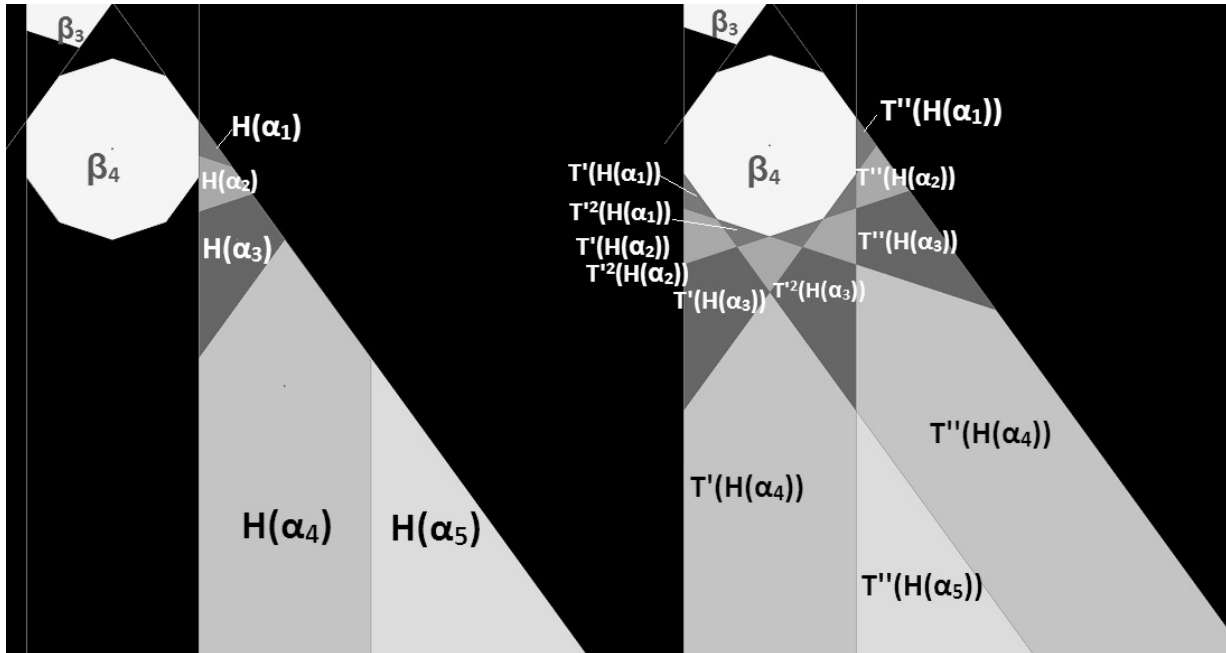
Оказывается, T' для $\text{int}(V')$ идентично T'' для α_5 ! Для формального установления этого соответствия, введем преобразование $H : \text{int}(V') \rightarrow \alpha_5$ как параллельный перенос на вектор $A_1 Q_5$.

ЛЕММА 25. Пусть $p \in \text{int}(V')$, $q = H(p)$. Тогда:

Рис. 4: Инвариантные фигуры β_i

- $T'(p)$ определено, если и только если $T''(q)$ определено;
- если $T'(p)$ определено, то $H(T'(p)) = T''(q) = T''(H(p))$.

Утверждение леммы иллюстрирует рис. 5.

Рис. 5: Преобразование T'' : траектории первого возвращения

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что T' определено для всего α_5 ; обозначим угол $T'(\alpha_5)$ за α'_5 . Также заметим, что правильный десятиугольник β_4 равен γ , а его центр совпадает с O_4 (ибо β_4 центрально-симметричен γ относительно Q_4), а по лемме 24 точка Q_5 , вершина угла α_5 , совпадает с вершиной B_6^4 многоугольника β_4 . Следовательно, по лемме 23 α'_5 есть угол, образованный лучами A_0A_1 и $B_1^4B_2^4$. Обозначим за H' параллельный перенос вдоль вектора $A_0B_0^4$; тогда для $\text{int}(V')$ верно: $H' = H \circ T'$, а $\alpha'_5 = H'(\text{int}(V'))$.

Пусть $V_{j+1}^H = H(V_{j+1})$, $V_{j+1}^{H'} = H'(V_{j+1})$ и $\alpha_j^H = H(\alpha_j)$, $j = 1, 2, 3, 4, 5$. Тогда каждое такое α_j^H есть $\text{int}(V_{j+1}^H) \cap \alpha_5$, а $T'(\alpha_j^H) = \text{int}(V_{j+1}^{H'}) \cap \alpha'_5$.

Так как $\beta_4 = H'(\text{int}(\gamma))$, то углы $H'(V_2), \dots, H'(V_6)$ суть углы, образованные лучами $B_2^4B_1^4, B_3^4B_2^4, \dots, B_7^4B_6^4$. Более того, по лемме 23 $\forall p \in ((H'(V_2) \cup H'(V_3) \cup H'(V_4) \cup H'(V_5)) \cap \text{int}(V'))$: $T'(p) = R'_5(p)$, где R'_5 есть поворот на угол $\frac{\pi}{5}$ против часовой стрелки вокруг точки O_4 ; в частности, $R'_5(H'(V_j)) = H'(V_{j+1})$, $j = 2, 3, 4, 5$. Так как $\alpha_5 = \text{int}(V_6^H)$, то тогда из всего вышесказанного следует:

- $\forall j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$: $\forall p \in \alpha_j^H$: $T''(p)$ корректно определено, причем $T''(p) = T'^{6-j}$;
- $\forall j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$: $T''(\alpha_j^H)$ есть поворот против часовой стрелки на угол $\frac{(5-j)\pi}{5}$; в частности, $T''(\alpha_5^H)$ есть параллельный перенос на вектор A_6A_1 ;
- если же $p \in \alpha_5$ лежит на границе одной из α_j^H , $j = 1, 2, 3, 4, 5$, то $T'(p)$ попадет на один из лучей $B_3^4B_2^4, B_4^4B_3^4, \dots, B_7^4B_6^4$, которые при дальнейшем применении T' попадают на луч $B_7^4B_6^4$, на котором T' не определено; следовательно, $T''(p)$ не определено.

Таким образом, T'' разделяет α_5 на те же фигуры, что T' разделяет $\text{int}(V')$, и применяет к ним те же повороты. Остается лишь показать, что точки $H(O_j)$, $j = 1, 2, 3, 4$, являются неподвижными. Зафиксируем $j \in \{1, 2, 3, 4\}$. Из леммы 23 следует, что O_j есть центр правильного многоугольника β_j , вписанного в α_j ; следовательно, существует такое $r_j \in \mathbb{R}$, что открытый круг S_j с центром в O_j и радиусом r_j вписан в α_j . Тогда $H(S_j)$ вписан в α_j^H ; так как α_j есть пересечение $\text{int}(V')$ и $\text{int}(V_{j+1})$, то $H(S_j)$ вписан как в угол α_5 , так и в угол $H(V_{j+1})$, а $T'(H(S_j))$ - в угол $H''(V_{j+1})$. Так как $T'^{5-j}(\text{int}(H''(V_{j+1}))) = \text{int}(H''(V_6)) = \alpha_5$, то $T''(H(S_j)) = T'^{6-j}(H(S_j))$ есть круг, равный $H(S_j)$ и вписанный в α_5 . Следовательно, $H(O_j)$ и $T''(H(O_j))$ совпадают как центры равных вписанных в один и тот же угол кругов, QED.

Лемма 25 устанавливает самоподобие для преобразования T' внутри V' . В процессе доказательства был практически доказан важный технический факт, который мы вынесем в отдельную лемму.

ЛЕММА 26. Пусть $j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, и $p \in \alpha_j$. Тогда $H(T'(p)) = T'^{6-j}(H(p))$. При этом, $H(p) \in \alpha_5$, и $\forall j' \in \mathbb{Z}, 0 < j' < 6 - j$: $T'^{j'} \in \alpha_4$.

Важнейшее свойство самоподобия, похожих на рассматриваемое нами, выражает следующая лемма.

ЛЕММА 27. Пусть $p \in \text{int}(V')$, и $q = H(p)$. Тогда p граничная (периодическая, аperiodическая), если и только если q граничная (периодическая, аperiodическая).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим двусторонние последовательности

$$tr'(p) = \{T'^k(p) | k \in \mathbb{Z}, T'^k \text{ определено}\},$$

$tr'(q) = \{T'^k(q) | k \in \mathbb{Z}, T'^k \text{ определено}\}$ и $tr''(q) = \{T''^k(q) | k \in \mathbb{Z}, T''^k \text{ определено}\}$. Заметим, что $tr''(q)$ может быть получена из $tr'(q)$ путем удаления всех не лежащих в α_5 точек.

Из леммы 25 известно, что $T'(p)$ определено, если и только если $T''(q)$ определено, причем $T''(q) = H(T(p))$; следовательно, $tr''(q) = H(tr'(p))$, и $tr''(q)$ бесконечна в две стороны, если и только если $tr'(p)$ бесконечна в две стороны. С другой стороны, если $tr'(q)$ ограничена с, например, левой стороны, т.е. для некоторого $k \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ $T'^k(p)$ определено, а $T'^{k-1}(p)$ нет, то тогда в $tr'(q)$ встретится точка $T''^k(q)$, причем слева от нее в $tr'(q)$ будет не более четырех точек (ибо если это не так, то при последовательном применении T'^{-1} к $T''^k(q)$, к точке не более четырех раз будет применен поворот по часовой стрелке на угол $\frac{\pi}{5}$ вокруг O_4 , после чего точка окажется внутри $T'(\alpha_5)$, и следующая итерация вернет точку в α_5); аналогичное утверждение верно и для правой стороны. Следовательно, $tr'(q)$ бесконечна в две стороны $\Leftrightarrow tr''(q)$ бесконечна в две стороны $\Leftrightarrow tr'(p)$ бесконечна в две стороны, откуда и следует утверждение леммы.

3.4. Сведение проблем периодичности к ограниченному случаю

В данном разделе мы покажем, каким образом решить проблемы периодичности и описать периодические траектории для T' в углу V' , если мы сможем сделать это для многоугольника $Z' = A_1 B_0^4 B_9^4 B_8^4 B_7^4$. Отметим, что $Z' = \overline{\alpha_1} \cup \overline{\alpha_2} \cup \overline{\alpha_3} \cup \overline{\alpha'_4}$, где α'_4 есть открытый четырехугольник $Q_4 B_9^4 B_8^4 B_7^4$.

ЛЕММА 28. $T'(Z') \subset Z'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $\text{int}(V') \setminus \beta_4$ разбивается на две не связанные между собой связные фигуры, одной из которых является $\text{int}(Z')$. Тогда $T'(\alpha_j) \subset Z'$, $j = 1, 2, 3$ в силу того, что $O_j \in \alpha_j \subset Z'$ и $T'(O_j) = O_j$. Замечание о том, что $T'(\alpha'_4)$ есть содержащийся в Z' открытый четырехугольник $B_1^3 B_0^4 B_9^4 B_8^4$, завершает доказательство леммы.

Более того, так как T' инъективно и сохраняет площадь, то верна

ЛЕММА 29. $T'(Z'') \subset Z''$, где $Z'' = \overline{V' \setminus (\beta_4 \cup Z')}$.

Итак, докажем, что структура периодических/апериодических точек в $\text{int}(V')$ в некотором смысле порождается структурой периодических/апериодических точек в $Z' \cup \beta_4$.

ЛЕММА 30. Пусть $q \in V'$ - периодическая (апериодическая) точка. Тогда существует периодическая (апериодическая) точка $p \in Z'$, число $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ и последовательность преобразований $f_1, f_2, \dots, f_m$, т.ч. $q = f_m(f_{m-1}(\dots f_2(f_1(p)) \dots))$, а каждое из преобразований f_j , $j = 1, 2, \dots, m$ является либо T' , либо H .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения T' , H и леммы 27 следует, что множество периодических (апериодических) точек в V' инвариантно относительно T' и H ; следовательно, достаточно получить из q с помощью преобразований T'^{-1} , H^{-1} точку, лежащую в Z' .

Пусть S есть бесконечная полоса, ограниченная отрезком $A_1 B_1^4$ и лучами $A_1 A_2$, $B_1^4 B_2^4$. Заметим, что с точностью до граничных точек луча $A_0 A_1$, $V' \setminus S = \alpha'_5 = T'(\alpha_5)$, причем для α'_5 : $T'^{-1}(r)$ есть параллельный перенос на вектор $A_1^1 A_6^1$; будем применять T'^{-1} к точке q до тех пор, пока q не попадет в S . После этого, применим к q H'^{-1} максимальное количество раз так, чтобы точка не вышла за пределы V' .

По построению, теперь q лежит либо в $Z' \cup \beta_4$, либо в фигуре, центрально симметричной Z' относительно O_4 . В первом случае, лемма доказана; во втором же для завершения доказательства достаточно лишь применить к q преобразование T'^{-1} не более трех раз так, чтобы q попала в α'_5 , после чего применить еще раз T'^{-1} ; несложно показать, что в этом случае точка окажется внутри $H(Z')$, и применение H^{-1} поместит точку внутри Z' .

Усилим доказанную лемму.

ЛЕММА 31. Пусть $q \in V'$ - периодическая (апериодическая) точка. Тогда существует периодическая (апериодическая) точка $p \in Z'$ и числа $k, l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, т.ч. $q = T^l(H^k(p))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 26 следует, что для любой неграничной точки q верно: $H(T^j(q)) = T^j(H(q))$ для некоторого $j = j(q), j \in \mathbb{Z}_+$. Для завершения доказательства достаточно применить такое равенство некоторое количество раз к равенству, полученному в лемме 31.

С помощью леммы 31 можно свести ограничить область рассмотрения проблем периодичности с V' до Z' , что мы и сделаем.

ЛЕММА 32. (i) Апериодическая точка $q \in V'$ существует, если и только если существует апериодическая точка $p \in Z'$.

(ii) Периодические точки образуют внутри V' множество полной меры, если и только если периодические точки образуют множество полной меры внутри Z' .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В свете леммы 31, неочевидным остается лишь утверждение о том, что если периодические точки образуют множество полной меры в Z' , то такие точки образуют множество полной меры и в V' .

Помимо периодических точек, в V' существуют лишь точки граничные и апериодические. Так как множество граничных точек внутри Z' , V' и в целом в $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$ имеет меру нуль по лемме 3), то остается лишь доказать, что если апериодические точки внутри Z' имеют меру нуль, то такой мерой обладают и апериодические точки внутри всего угла V' .

По лемме 31, каждую апериодическую точку $q \in V'$ можно представить в виде $q = T^l(H^k(p))$, $p = p(q)$ — апериодическая точка, $k = k(q), l = l(q), k, l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Заметим, что можно рассмотреть процесс вычисления $(H^k \circ T^l)(p)$ как последовательное применение к точке p $k + l$ движений плоскости (всей), каждое из которых является либо параллельным переносом на один из двух векторов ($P_1\vec{Q}_5$ либо $A_6\vec{A}_1$), либо одним из поворотов против часовой стрелки на угол $\frac{(5-j)\pi}{5}$ вокруг точки $O_j, j = 1, 2, 3, 4$ (см. определение H и лемму 23).

Так как композиция движений есть движение, то мы можем сопоставить каждой апериодической точке q движение из счетного множества Φ движений вышеописанного типа.

Пусть V'_∞, Z'_∞ суть множества апериодических точек внутри V' и Z' соответственно. Тогда по построению и 31: $V'_\infty \subset \bigcup_{f \in \Phi} f(Z'_\infty)$. Так как f есть изометрия, а Z'_∞ имеет меру нуль,

то и $f(Z'_\infty)$ имеет меру нуль; следовательно, V'_∞ есть подмножество счетного объединения множеств нулевой меры и, как следствие, само обладает мерой нуль, QED.

Отметим, что в терминах доказательства предыдущей леммы, если бы мера Z'_∞ была положительной, то V'_∞ была бы бесконечной, ибо V'_∞ содержит в себе как подмножество бесконечное число непересекающихся множеств $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} H^k(Z'_\infty)$.

3.5. Сведение нахождения периодов к ограниченному случаю: введение подстановки

Свести нахождение множества периодов для V' к нахождению множества периодов для $Z' \cup \beta_4$ нам поможет символическая динамика.

Введем несколько определений, базируясь на [13]. Пусть A, B — конечные множества, называемые алфавитами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15. Конечным словом длины $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ над алфавитом A назовем последовательность $u_0 u_1 \dots u_{l-1}$, т.ч. $u_i \in A, i = 0, 1, \dots, l-1$. Множество всех конечных слов над A обозначим как A^* .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 16. Бесконечным в две стороны словом над алфавитом A назовем последовательность $(u_i)_{i \in \mathbb{Z}} = \dots u_{-2}u_{-1}u_0u_1u_2\dots$, т.ч. $\forall i \in \mathbb{Z} : u_i \in A$. Множество всех бесконечных в две стороны слов над A обозначим как $A^{\mathbb{Z}}$.

Аналогичным образом можно ввести и бесконечные в одну сторону слова; однако для наших целей ограничимся бесконечными в две стороны словами. Отметим, что такими словами являются коды периодических и аperiodических точек; а именно:

- если $p \in \mathbb{R}^2 \setminus \gamma$ — неграничная точка, то $\rho(p) \in \{0, 1, \dots, 9\}^{\mathbb{Z}}$;
- если при этом $p \in V'$, то $\rho'(p) \in \{0, 1, \dots, 4\}^{\mathbb{Z}}$.

Аналогичным разделу 2 образом для конечного или бесконечного слова U будем употреблять обозначения $U[i]$ и/или $U[l, r]$, если целые индексы i, l, r не выводят нас за пределы слова U и $l \leq r$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 17. Пусть $U, V \in A^*$, $U = u_0u_1\dots u_{l-1}$, $V = v_0v_1\dots v_{m-1}$. Тогда конкатенацией слов U, V назовем слово $UV = u_0u_1\dots u_{l-1}v_0v_1\dots v_{m-1}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 18. Пусть $\forall i \in \mathbb{Z} : U_i \in A^* \setminus \{\epsilon\}$ — непустое слово длины l_i . Тогда конкатенацией слов $\dots, U_{-2}, U_{-1}, U_0, U_1, U_2, \dots$ назовем бесконечное в две стороны слово $U = \dots U_{-2}U_{-1}U_0U_1U_2\dots$, устроенное следующим образом. Пусть $m_i, i \in \mathbb{Z}$ — такая бесконечная в две стороны последовательность целых чисел, что:

- $m_0 = 0$;
- $\forall i \in \mathbb{Z}_+ : m_i = m_{i-1} + l_{i-1}$;
- $\forall i \in \mathbb{Z}_- : m_i = m_{i+1} - l_i$.

Тогда требуемая конкатенация есть такое слово $U \in A^{\mathbb{Z}}$, что $\forall i \in \mathbb{Z} : U[m_i, m_{i+1}-1] = U_i$.

Введем теперь понятие подстановки, играющее ключевую роль в нашем исследовании.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 19. Пусть $\sigma : A \rightarrow B^* \setminus \{\epsilon\}$ — произвольная функция, где ϵ — пустое слово. Расширим ее до $\sigma : A^* \cup A^{\mathbb{Z}} \rightarrow B^* \cup B^{\mathbb{Z}}$ с помощью следующих правил:

- $\sigma(\epsilon) = \epsilon$;
- если $W = u_0u_1\dots u_{l-1} \in A^*$, то $\sigma(W) = \sigma(u_0)\sigma(u_1)\dots\sigma(u_{l-1}) \in B^*$;
- если $W = \dots u_{-2}u_{-1}u_0u_1u_2\dots \in A^{\mathbb{Z}}$, то $\sigma(W) = \dots\sigma(u_{-2})\sigma(u_{-1})\sigma(u_0)\sigma(u_1)\sigma(u_2)\dots$

Таким образом устроенную функцию σ будем называть подстановкой.

Для удобства будем иногда говорить, что σ определена на символах алфавита A , т.е. $A \rightarrow B^* \setminus \{\epsilon\}$, подразумевая ее определение на $A^* \cup A^{\mathbb{Z}}$.

Вернемся к индуцированному внешнему бильярду.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 20. Пусть $p \in \mathbb{R}^2 \setminus \gamma(V')$ — периодическая точка с периодом $l(l')$ относительно $T(T')$. Тогда кодом периода $\rho_{per}(p)(\rho'_{per}(p))$ назовем слово $\rho(p)[0, l-1](\rho'(p)[0, l'-1])$.

Пусть ψ есть подстановка, определенная над алфавитом $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ таким образом, что:

- $\psi(1) = 54444$;

- $\psi(2) = 5444$;
- $\psi(3) = 544$;
- $\psi(4) = 54$;
- $\psi(5) = 5$.

Тогда из структуры преобразования T'' первого возвращения на α_5 (см. лемму 25) напрямую следует

ЛЕММА 33. Пусть $p \in V'$ - периодическая или аperiodическая точка. Тогда:

- $\rho'(H(p)) = \psi(\rho'(p))$;
- $\rho'_{per}(H(p)) = \psi(\rho'_{per}(p))$.

Лемма 33, вкупе с леммой 31, позволяет найти все возможные коды периодов периодических точек множества V' , если таковые коды найдены для множества T' с помощью следующей, очевидно следующей из указанных двух, леммы.

ЛЕММА 34. Пусть

$$P_{Z' \cup \beta_4}(P_{V'}) = \{\rho'_{per}(p) \mid p \in Z' \cup \beta_4(V'), p - \text{периодическая компонента}\}.$$

Тогда $P_{V'} = \{S^l(\sigma^k(W)) \mid W \in P_{Z' \cup \beta_4}, k, l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$, где S есть циклический сдвиг слова (т.е. $S(u_0 u_1 \dots u_{m-1}) = u_1 u_2 \dots u_{m-1} u_0$ для произвольного слова $u_0 u_1 \dots u_{m-1}$ над произвольным конечным алфавитом).

Для удобства поиска самих периодов, введем еще два понятия, используемые в [13].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 21. Пусть $A = \{a_1, a_2, \dots, a_d\}$ - конечный алфавит размера d . Тогда каноническим гомоморфизмом, или гомоморфизмом абелизации, назовем такое преобразование $c : A^* \rightarrow \mathbb{Z}^d$, что для произвольного слова $W \in A^*$: $c(W)$ есть столбец, i -я координата которого есть количество раз, которое символ a_i встречается в W , $i = 1, 2, \dots, d$.

Отметим, что если $p \in V'(\mathbb{R}^2 \setminus \gamma)$ есть периодическая точка с кодом периода

$$w' = \rho'_{per}(p)(w = \rho_{per}(p)),$$

то период точки p относительно $T'(T)$ есть $(1, 1, 1, 1, 1) * c(w')$ $((1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1) * c(w))$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 22. Пусть $A = \{a_1, a_2, \dots, a_d\}$, $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ - конечные алфавиты, а $\sigma : A \rightarrow B \setminus \{\epsilon\}$ - произвольная подстановка. Тогда матрицей подстановки M_σ назовем матрицу $c(\sigma(a_1)), c(\sigma(a_2)), \dots, c(\sigma(a_d))$. Другими словами, $M_\sigma = \|c_{ij}\|_{m \times d}$, где c_{ij} есть количество раз, которое символ b_i встречается в слове $\sigma(a_j)$.

Например, для вышеопределенной подстановки ψ :

$$M_\psi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

В терминах гомоморфизма абелизации и матрицы инцидентности, леммы 19 и 34 могут быть переформулированы следующим образом.

ЛЕММА 35. Пусть $p \in V'$ — периодическая точка или компонента. Пусть $c(p) = c(\rho_{\text{per}}(p))$, а $c'(p) = c(\rho'_{\text{per}}(p))$. Тогда

$$\text{per}(p) = \frac{10 * ((1, 1, 1, 1, 1) * c'(p))}{\text{НОД}(10, (1, 2, 3, 4, 5)) * c'(p)}.$$

ЛЕММА 36. Пусть $C_{Z' \cup \beta_4}(C_{V'}) = \{c(\rho'_{\text{per}}(p)) \mid p \in Z'(V'), p \text{ — периодическая компонента}\}$. Тогда $C_{V'} = \{M_{\psi}^k(w) \mid w \in C_{Z' \cup \beta_4}, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$.

3.6. $Z' \cup \beta_4$: описание структуры

Леммы 32, 35 вкупе с фактом, что β_4 есть периодическая компонента с кодом периода $\rho'_{\text{per}}(\beta_4) = 4$, позволяет нам сосредоточить все внимание на Z' .

Начнем со следующего замечания. Пусть Z'_1 есть треугольник $P_1P_3Q_3$, а Z'_2 есть семиугольник $B_3^3B_2^3B_1^3B_0^4B_9^4B_8^4B_7^4$, лежащий внутри Z' «между» β_3 и β_4 .

ЛЕММА 37. Z' можно разбить на многоугольники-фигуры $Z'_1 = P_1P_3Q_3$, β_3 и

$$Z'_2 = B_3^3B_2^3B_1^3B_0^4B_9^4B_8^4B_7^4,$$

каждая из которых T' -инвариантна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение про разбиение очевидно из рис. 4. Чтобы доказать инвариантность, достаточно заметить, что:

- Z'_1 и Z'_2 не имеют общих точек (даже на границе);
- T' делит Z'_1 на две связные фигуры $\overline{\alpha_1}$ и $\overline{\alpha_2}$, для каждой из которых T' есть поворот вокруг содержащейся в фигуре неподвижной точки (см. лемму 23);
- T' делит Z'_2 на две связные фигуры, являющиеся $\overline{\alpha'_4}$ и треугольником $B_1^3B_0^4B_2^3$, причем $T'(\alpha'_4)$ есть открытый четырехугольник $B_1^3B_0^4B_9^4B_8^4 \subset Z'_2$, а $T'(\text{int}(B_1^3B_0^4B_2^3))$ есть открытый треугольник $B_2^3B_7^4B_3^3 \subset Z'_2$ (по той же лемме 23)).

β_3 есть периодическая компонента с кодом периода $\rho'_{\text{per}}(\beta_3) = 3$; оставшиеся периодические и аperiodические точки, компоненты и орбиты можно искать независимо в Z'_1 и Z'_2 .

Рассмотрим преобразование T' на фигуре Z'_2 . Пусть X'_2 есть открытый четырехугольник $B_3^3B_9^4B_8^4B_7^4$. Пусть $T'_2 : X'_2 \rightarrow X'_2$ есть преобразование первого возвращения относительно T' .

Из рис. 6 очевидно следует доказательство следующей леммы.

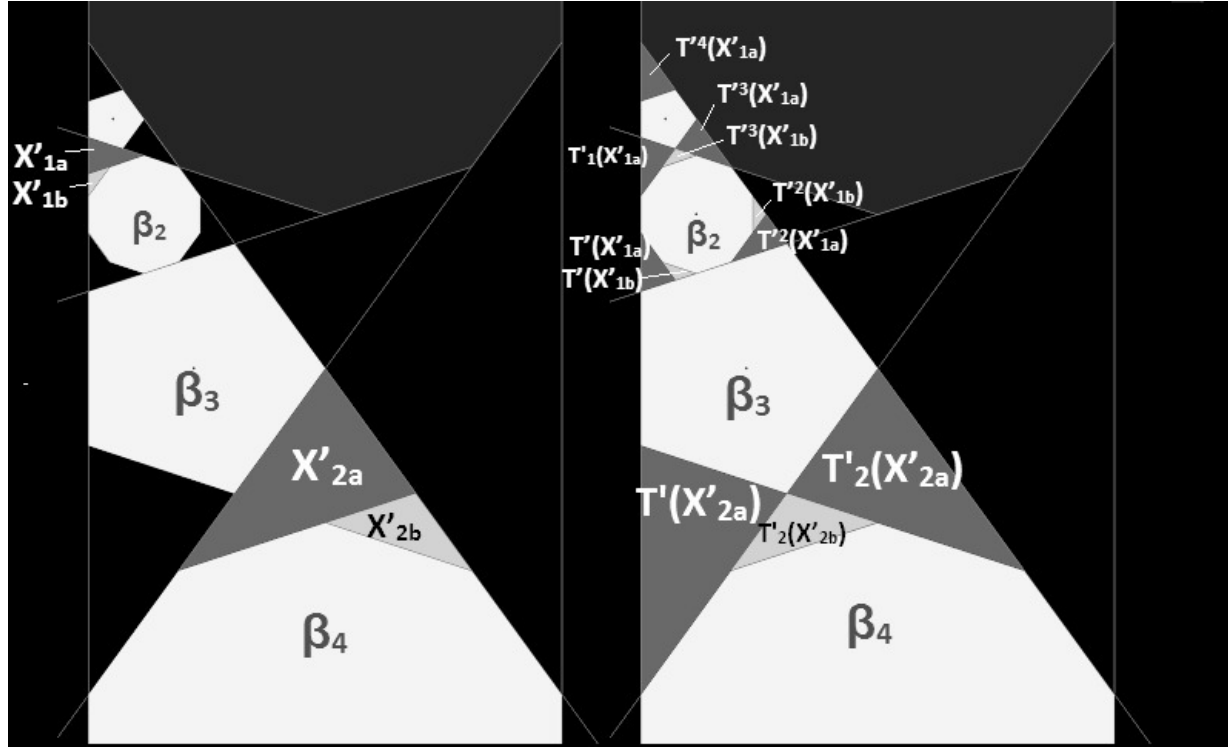
ЛЕММА 38. (i) T'_2 делит X'_2 на два открытых треугольника X'_{2a} и X'_{2b} (точный смысл обозначений будет ясен позже) лучом $B_9^4B_8^4$, причем X'_{2a} имеет большую площадь; для точек луча $B_9^4B_8^4$ внутри X'_2 T'_2 не определено;

(ii) $T'_2(X'_{2a})$ есть поворот на угол $\frac{3\pi}{5}$ против часовой стрелки вокруг точки O'_{2a} пересечения биссектрис углов четырехугольника X'_2 , причем $T'_2(X'_{2a}) = T'^2(X'_{2a})$;

(iii) $T'_2(X'_{2b})$ есть поворот на угол $\frac{\pi}{5}$ против часовой стрелки вокруг точки O_4 , причем $T'_2(X'_{2b}) = T'(X'_{2b})$;

(iv) $\overline{Z'_2} = \overline{X'_{2a}} \cup \overline{T'(X'_{2a})} \cup \overline{X'_{2b}}$, причем границы всех упомянутых многоугольников состоят из граничных точек.

Рассмотрим теперь Z'_1 , а внутри него — открытый четырехугольник X'_1 , равный $B_1^1B_0^2B_9^2B_8^2$. Пусть $T'_1 : X'_1 \rightarrow X'_1$ — преобразование первого возвращения относительно T' . Из все того же рис. 6 очевидно следует доказательство следующей, аналогичной предыдущей, леммы.

Рис. 6: Преобразования T'_1, T'_2 : траектории первого возвращения

- ЛЕММА 39. (i) T'_1 делит X'_1 на два открытых треугольника X'_{1a} и X'_{1b} лучом $B_8^2 B_9^2$, причем X'_{1a} имеет большую площадь; для точек луча $B_8^2 B_9^2$ внутри X'_1 T'_1 не определено;
- (ii) $T'_1(X'_{1a})$ есть поворот на угол $\frac{3\pi}{5}$ по часовой стрелке вокруг точки O'_{1u} пересечения биссектрис углов четырехугольника X'_1 , причем $T'_1(X'_{1a}) = T'^5(X'_{1a})$;
- (iii) $T'_1(X'_{1b})$ есть поворот на угол $\frac{\pi}{5}$ по часовой стрелке вокруг точки O_2 , причем $T'_1(X'_{1b}) = T'^3(X'_{2b})$;
- (iv) $\overline{Z'_1} = \bigcup_{j=0}^4 \overline{T'^j(X'_{1a})} \cup \bigcup_{j=0}^2 \overline{T'^j(X'_{2b})} \cup \beta_1 \cup \beta_2$, причем границы всех упомянутых многоугольников состоят из граничных точек.

Таким образом, любая периодическая или аperiodическая траектория внутри $Z'_1 \setminus (\beta_1 \cup \beta_2)$ или Z'_2 обязательно проходит через X'_1 или X'_2 , причем на этой траектории не может существовать больше четырех идущих подряд точек, не лежащих внутри X'_1 или X'_2 . Отсюда и из того факта, что β_1, β_2 суть периодические компоненты, очевидно следует

- ЛЕММА 40. (i) Пусть $p \in X'_j$, $j = 1, 2$. Тогда p граничная (периодическая, аperiodическая) относительно T' , если и только если p граничная (периодическая, аperiodическая) относительно T'_j ;
- (ii) Аperiodическая точка внутри Z' существует, если и только если такая точка существует внутри X'_1 или X'_2 ;
- (iii) Периодические точки образуют в Z' множество полной меры, если и только если эти точки образуют множество полной меры в X'_1 и X'_2 .

3.7. Преобразования первого возвращения и динамическая система (X, f)

Согласно лемме 40, изучение проблем периодичности сведено к преобразованиям T'_1 и T'_2 на фигурах X'_1 и X'_2 . Заметим, что преобразования T'_1 и T'_2 «одинаковы» с точностью до симметрии, что дает возможность изучать их одновременно. Для этого рассмотрим произвольный открытый четырехугольник $X = ABCD \subset \mathbb{R}^2$, вершины которого перенумерованы против часовой стрелки, подобный $X'_2 = B_3^3 B_9^4 B_8^4 B_7^4$ и X'_1 . Введем также такие аффинные преобразования плоскости Δ_1, Δ_2 , что $\Delta_1(X) = X'_1$, $\Delta_2(X) = X'_2$, причем:

- $\Delta_1(A) = B_1^1$, $\Delta_1(B) = B_8^2$, $\Delta_1(C) = B_9^2$, $\Delta_1(D) = B_0^2$;
- $\Delta_2(A) = B_3^3$, $\Delta_2(B) = B_9^4$, $\Delta_2(C) = B_8^4$, $\Delta_2(D) = B_7^4$.

Отметим, что Δ_1 меняет ориентацию, а Δ_2 - нет.

Пусть теперь E есть пересечение прямых BC и AD , а F — пересечение прямых AB и CD . Введем кусочно-аффинное (а точнее, «кусочно-вращающее») преобразование $f : X \rightarrow X$, т.ч.:

- если $p \in \text{int}(ABE)$, то $f(p)$ есть поворот плоскости, переводящий треугольник ABE в треугольник FDA ;
- если $p \in \text{int}(CED)$, то $f(p)$ есть поворот плоскости, переводящий треугольник CED в треугольник BFC ;
- если $p \in \partial(ABE) \cup \partial(CED)$, то $f(p)$ не определено.

Фигура X и преобразование f изображены на рис. 7.

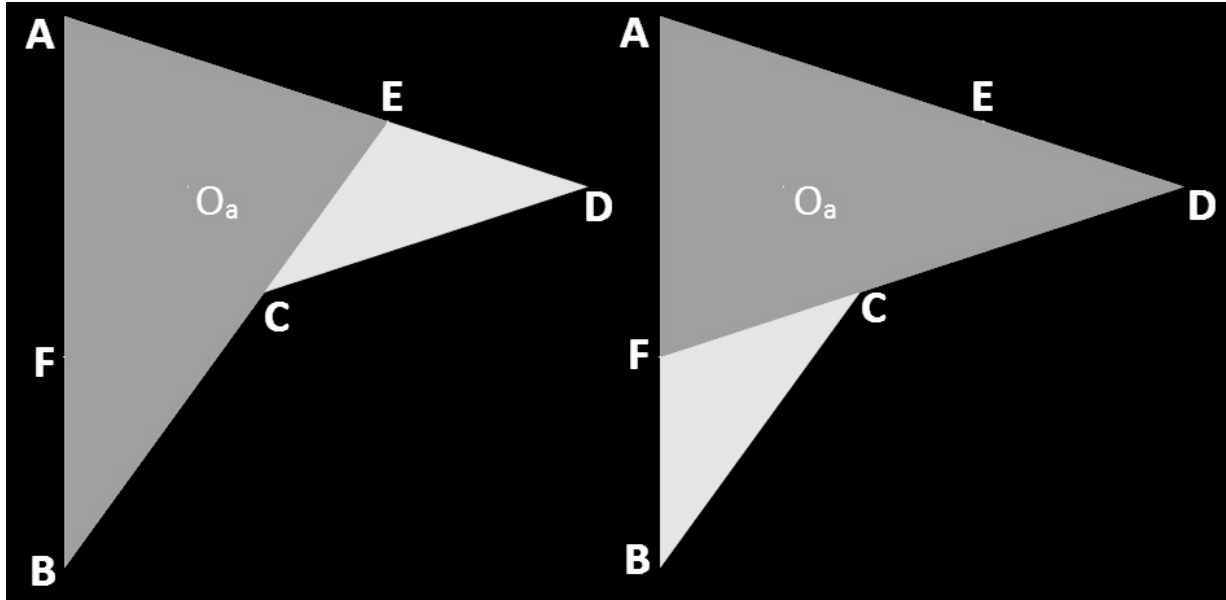


Рис. 7: Фигура X и преобразование f : траектории первого возвращения

Очевидным образом вводятся также понятия граничности, периодичности и аперидичности и периодической компоненты внутри X относительно f . Более того, для неграничной точки $p \in X$ введем также код $\rho_X(p) = \dots w_{-2}w_{-1}w_0w_1w_2\dots$, т.ч. $\forall j \in \mathbb{Z}$, $w_j \in \{a, b\}$, причем

- a , если $f^j \in \text{int}(ABE)$;

- b , если $f^j \in \text{int}(CED)$.

Здесь $\{a, b\}$ есть двухбуквенный алфавит.

Из структуры $X, f, X'_1, T'_1, X'_2, T'_2$ и лемм 39, 38 следует лемма, иллюстрирующая окончательное сведение задачи к фигуре X .

ЛЕММА 41. Пусть $p \in X$, $q_1 = \Delta_1(p)$, $q_2 = \Delta_2(p)$. Тогда:

- p граничная (периодическая, аperiodическая) относительно f , если и только если q_j , $j = 1, 2$, граничные (периодические, аperiodические) относительно T' ;
- Для каждой из проблем периодичности, ответ для X'_1 и X'_2 относительно T' положительный, если и только если ответ для X относительно f положительный;
- если p периодическая или аperiodическая, то:
 - $\rho'(q_1) = \phi_1(\rho_X(p))$, где $\phi_1 : \{a, b\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}^*$ - подстановка, т.ч. $\phi_1(a) = 22211$, $\phi_1(b) = 222$;
 - $\rho'(q_2) = \phi_2(\rho_X(p))$, где $\phi_2 : \{a, b\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}^*$ - подстановка, т.ч. $\phi_2(a) = 43$, $\phi_2(b) = 4$.
- если p периодическая, то $\rho'_{\text{per}}(q_j) = \phi_j(\rho_{X_{\text{per}}}(p))$, $j = 1, 2$;
- пусть $C_X = \{c(\rho_{X_{\text{per}}}(p)) | p \in X, p - \text{периодическая компонента}\}$. Тогда

$$C_{Z' \cup \beta_4} = \{M_{\phi_j}(w) | w \in C_X, j = 1, 2\} \cup$$

$$\cup \{(1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T, (0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0)^T, (0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0)^T, (0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0)^T\}.$$

3.8. Фигура X : базовые периодические компоненты

В следующих нескольких разделах будут исследоваться введенные в предыдущем разделе фигура X и преобразование f на ней. Динамическая система (X, f) возникла в работе С.Табачникова [3], ибо в случае внешнего бильярда вне правильного пятиугольника динамическая система, аналогичная (Z', T') для случая десятиугольника, изоморфна (X, f) ; как следствие, (X, f) была тщательно изучена. Тем не менее, для полноты картины мы проведем исследование для системы (X, f) «с нуля».

Пусть O_a есть точка пересечения биссектрис углов ABE и FDA . В силу симметрии очевидно, что O лежит также и на отрезке AC , также являющемся частью биссектрис углов BAD и ECF . Отсюда следует, что существует открытый десятиугольник ω_a с центром в O_a , вписанный в четырехугольник $AFCE$. Более того, так как угол FCE по построению равен $\frac{3\pi}{5}$, углу правильного десятиугольника, то одна из вершин ω_a совпадает с вершиной этого угла, т.е. точкой C . Обозначим вершины ω_a $W_0, W_1, \dots, W_9$, нумеруя вершины против часовой стрелки таким образом, что $W_3 = C$. Тогда точки W_2, W_4 лежат соответственно на отрезках FC и CE , а отрезки W_6W_7 и W_9W_0 - на отрезках DA и AB .

Важность десятиугольника ω_a иллюстрирует следующая лемма.

ЛЕММА 42. (i) $f(O_a) = O_a$;

(ii) $f(\omega_a) = \omega_a$;

(iii) $\partial\omega_a$ состоит из граничных точек;

(iv) ω_a есть периодическая компонента относительно f с кодом периода $\rho_{X_{\text{per}}}(\omega_a) = a$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения f следует, что f переводит биссектрису угла ABE в биссектрису угла FDA , а точку O_a - в точку $f(O_a)$, лежащую на биссектрисе угла FDA , причем $|AO_a| = |Cf(O_a)|$; из симметрии X и определения O_a следует, что $O_a = f(O_a)$, что доказывает п.1.

Так как $O_a = f(O_a)$, то для треугольника ABE f есть поворот на угол $\frac{3\pi}{5}$. Тогда п.2 леммы верен уже потому, что ω_a есть правильный десятиугольник с центром в O_a , целиком лежащий в треугольнике ABE . Более того, при таком повороте стороны ω_a переходят друг в друга, перескакивая против часовой стрелки через две стороны на третью. Так как числа 3 и 10 взаимно просты, то при последовательном применении поворота каждая из сторон ω_a побывает каждой. Так как одна из сторон ω_a лежит на отрезке CF , для которой f не определено, то все стороны ω_a состоят из граничных точек, и п.3 доказан. П.4 следует напрямую из пп.2,3.

Так как $T(\text{int}(CED)) \subset \text{int}(ABE)$, то аperiодических компонент с кодом периода b для (X, f) нет. Однако рассмотрим точку O_{ab} , являющуюся точкой пересечения биссектрис треугольника CED . Пусть G есть точка пересечения отрезка CE и луча W_6W_5 , а H - точка пересечения лучей W_0W_1 и отрезка FC . В силу симметрии относительно биссектрисы DO_a угла CDE , получаем, что O_{ab} лежит также и на биссектрисе угла GB_6D .

По определению, $f(\text{int}(CED)) = \text{int}(BFC)$; очевидно, что O_{ba} перейдет в точку O_{ab} пересечения биссектрис треугольников BW_0H и BFC . С другой стороны, $f(\text{int}(BFC)) = \text{int}(DGW_6)$, причем точкой пересечения биссектрис треугольника DGW_6 является O_{ba} . Следовательно, $f^2(O_{ba}) = O_{ba}$.

Более того, так как CED есть равнобедренный треугольник с углом $\frac{3\pi}{5}$ при вершине E , то существует открытый правильный пятиугольник ω_{ba} с центром в O_{ba} , вписанный в треугольник CED . Так как $f^2(CED)$ есть поворот на угол $\frac{4\pi}{5}$ вокруг точки O_{ba} , то $f^2(\omega_{ba}) = \omega_{ba}$, а стороны ω_{ba} при последовательном применении f^2 «перескакивают» через одну и рано или поздно попадут на отрезок CD либо DE . Аналогичными свойствами обладает и пятиугольник $\omega_{ab} = f(\omega_{ba})$.

Подведем итог предыдущих абзацев следующей, вытекающей из вышесказанного, леммой.

ЛЕММА 43. (i) $f(O_{ba}) = O_{ab}$, $f(O_{ab}) = O_{ba}$;

(ii) $f(\omega_{ba}) = \omega_{ab}$, $f(\omega_{ab}) = \omega_{ba}$;

(iii) $\omega_{ba}(\omega_{ab})$ есть периодическая компонента относительно f с кодом периода ba (ab).

3.9. Фигура X: самоподобие 2

Пусть $\Gamma : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ - такое аффинное преобразование, что $\Gamma(A) = A$, $\Gamma(B) = W_7$, $\Gamma(C) = W_8$, $\Gamma(D) = W_9$; другими словами, Γ есть композиция сжатия в $\frac{|AB|}{|AW_9|}$ раз с центром в точке A и осевой симметрии относительно биссектрисы AC угла BAD . Пусть $X_\Gamma = \Gamma(X)$. Пусть $f_\Gamma : X_\Gamma \rightarrow X_\Gamma$ есть преобразование первого возвращения на X_Γ относительно f (см. определение 14 аналогичного преобразование первого возвращения на α_5 относительно T').

Самоподобие системы (X, f) устанавливает следующая лемма.

ЛЕММА 44. Пусть $p \in X$, и $q = \Gamma(p)$. Тогда:

- $f_\Gamma(q)$ определено, если и только если $f(p)$ определено;
- в случае, если $f(p)$ определено, $f_\Gamma(q) = \Gamma(f(p))$;
- если $p \in \text{int}(ABE)$, то $f_\Gamma(q) = f^7(q)$, а если $p \in \text{int}(CED)$, то $f_\Gamma(q) = f^3(q)$.

Доказательство ясно из рисунка 8, на котором изображены открытые треугольники $f^i(\Gamma(\text{int}(ABE)))$, $i = 0, 1, \dots, 6$, а также открытые треугольники $f^j(\Gamma(\text{int}(CED)))$, $j = 0, 1, 2$.

Аналогично лемме 27 можно доказать и следующую лемму.

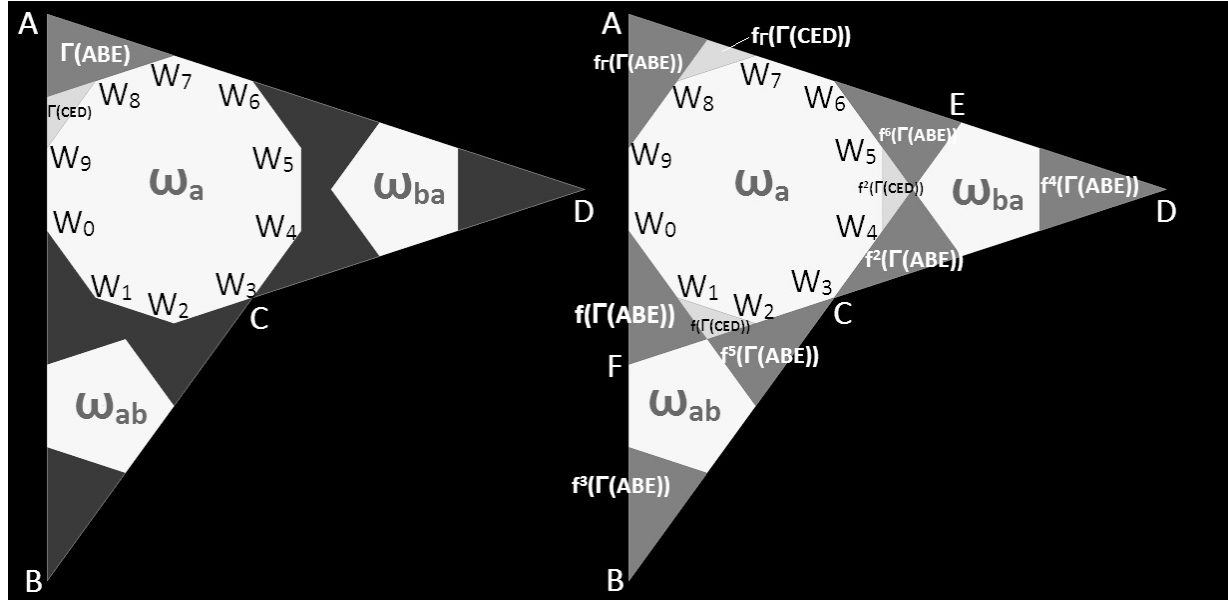


Рис. 8: Фигура X и преобразование f_Γ : траектории первого возвращения

ЛЕММА 45. Пусть $p \in X$, $q = \Gamma(p)$. Тогда p граничная (периодическая, аperiodическая), если и только если q граничная (периодическая, аperiodическая).

Введем теперь еще несколько определений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 23. Пусть $q \in X$. Тогда рангом $rk(q)$ точки q назовем максимальное целое неотрицательное число k , т.ч. $\Gamma^{-k}(q) \in X$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 24. Пусть $q \in X$ — периодическая точка. Тогда рангом орбиты $rko(q)$ назовем число $\max_{j=0}^{\rho_{X_{per}}-1} rk(f^j(q))$.

ЛЕММА 46. Пусть $q \in X$ — периодическая точка, и $rk(q) = rko(q) = k > 0$. Тогда $rk(p) = rko(p) = k - 1$, где $p = \Gamma^{-1}(q)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 45 p также периодическая; пусть ее период относительно f равен l . Тогда по лемме 44: $\forall j, 0 \leq j < l : f'^j(q) = \Gamma(f^j(p))$, причем $f'^l(q) = q$. Согласно определениям f' и ранга, среди точек орбиты точки q относительно f только точки $\{f'^j(q), 0 \leq j < l\}$ обладают отличным от нуля рангом, причем $\forall j \in [0, l) : rk(f'^j(q)) = 1 + rk(f^j(p))$. Следовательно, $rko(p) = rk(p) = k - 1$, QED.

Из леммы 46 следует следующая, аналогичная лемме 31, лемма.

ЛЕММА 47. Любая периодическая точка (компонента) $q \in (\subset)X$ может быть представлена в виде $q = f^l(\Gamma^k(p))$, где $p \in (\subset)X \setminus \Gamma(X)$, p — периодическая точка ранга 0 ($p \in \{\omega_a, \omega_{ba}\}$), $k, l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. «Точечная» часть очевидно следует из леммы 46. «Компонентная» же часть леммы 47 следует из того, что граница $(\partial\Gamma(X)) \cap X$ состоит лишь из граничных точек. Из этого же утверждения следует, что понятия ранга и ранга орбиты могут быть естественным образом обобщены и на периодические компоненты внутри X . Из рис. 8 следует, что периодическими компонентами ранга 0 являются правильные многоугольники ω_a, ω_{ba} и $\omega_{ab} = f(\omega_{ba})$, ибо все периодические точки X , не принадлежащие $\omega_a, \omega_{ba}, \omega_{ab}$ лежат на траекториях возвращения f в $\Gamma(X)$.

3.10. Доказательство теоремы 1

В данном разделе мы установим существование апериодической точки для системы (X, f) ; как следует из лемм 41, 32, 16, этого будет достаточно для доказательства теоремы 1.

Пусть $\Gamma_1 = \Gamma \circ f^{-1} \circ \Gamma \circ f$; заметим, что последовательность $X, \Gamma_1(X), \Gamma_1^2(X), \Gamma_1^3(X), \dots$ есть последовательность вложенных друг в друга четырехугольников, которая сходится к некоторой точке $p_{\inf}$, лежащей строго внутри каждого из $\Gamma_1^j(X), j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

ЛЕММА 48. *Точка $p_{\inf}$ не является периодической точкой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $p_{\inf}$ — периодическая точка. Из леммы 9, а также, строго говоря, лемм 16, 41 следует, что существует открытый многоугольник $\text{comp}(p)$, содержащий p и состоящий из периодических точек. Однако заметим, что если включить в X его границу и объявить точки ∂X граничными (например, зафиксировав f неопределенным для этих точек), то тогда лемма 45 будет выполнена как для Γ , так и для, очевидно, Γ_1 . Следовательно, границы всех многоугольников $\Gamma_1^j(X), j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, состоят лишь из граничных точек, а в силу того, что периметр многоугольников $\Gamma_1^j(X)$ стремится к нулю, эти границы подходят к $p_{\inf}$ бесконечно близко, что противоречит существованию $\text{comp}(p)$. Следовательно, $p_{\inf}$ не есть периодическая, QED.

ЛЕММА 49. *Точка $p_{\inf}$ не является граничной.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $p_{\inf}$ граничная. Тогда из леммы 2 (и, конечно, лемм 16, 32, 41) следует, существует открытый отрезок seg , содержащий $p_{\inf}$ и состоящий лишь из граничных точек. Без ограничения общности можно считать, что длина этого отрезка равна $2l$, $l > 0$, а $p_{\inf}$ — его середина.

Рассмотрим последовательность периодических компонент $C_0, C_1, C_2, \dots$, т.ч. $C_0 = \omega_a$, $C_1 = f(\Gamma(\omega_a))$, и $\forall k \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$: $C_k = \Gamma_1 C_{k-2}$. Из рис. 9 и того факта, что $p_{\inf}$ лежит строго внутри $\Gamma_1(X)$ следует, что независимо от направления, как минимум один из лучей — продолжений отрезка seg пересекает как минимум одну из *открытых* компонент C_0, C_1 , причем расстояние от $p_{\inf}$ до точки пересечения не превосходит d , где $d = \sup_{q \in C_0 \cup C_1} |p_{\inf} q|$ (здесь $|pq|$ есть длина отрезка, соединяющего точки $p, q \in \mathbb{R}^2$); следовательно, $l \leq d$. С другой стороны, Γ_1 есть композиция поворота вокруг точки $p_{\inf}$ и сжатия плоскости в $\lambda = |AW_9|/|AB| < 1$ с центром в $p_{\inf}$; следовательно, один из вышеописанных лучей пересекает и одну из компонент C_2, C_3 , причем расстояние от $p_{\inf}$ до точки пересечения не превосходит $\lambda^2 d$; отсюда получаем, что $l \leq \lambda d$. Повторяя данное рассуждение, можно показать по индукции, что $\forall k \in \mathbb{N}$: $l \leq \lambda^{2k} d$; следовательно, $l \leq 0$, что приводит нас к противоречию.

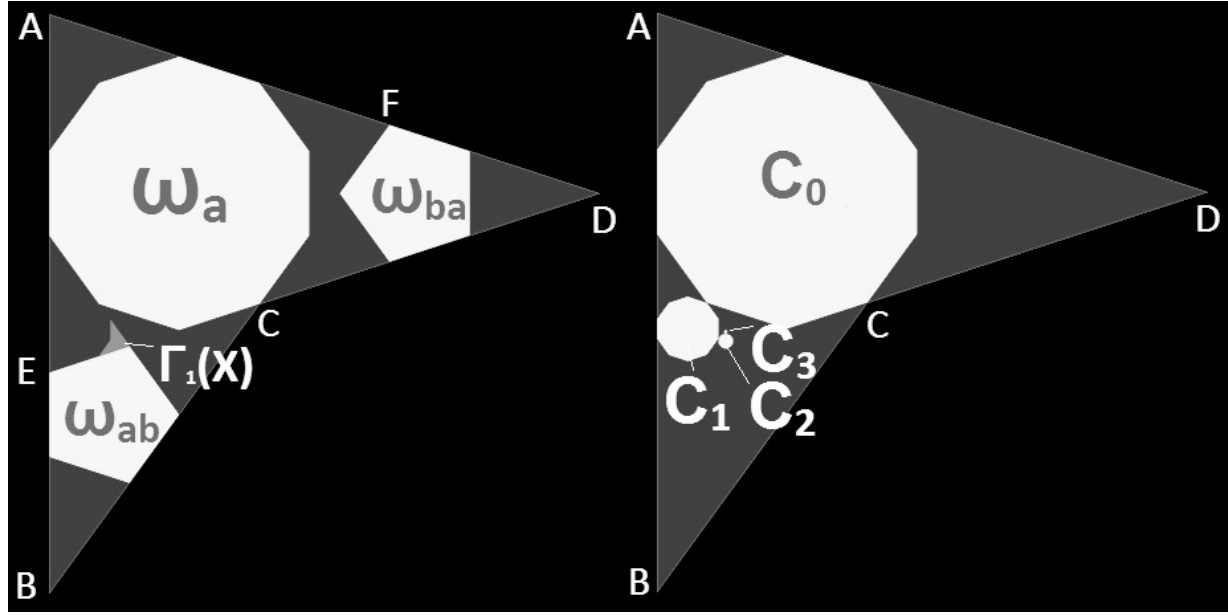
Согласно леммам 48, 49, $p_{\inf}$ не может быть ни периодической, ни граничной; следовательно, $p_{\inf}$ есть апериодическая точка системы (X, f) , что завершает доказательство теоремы 1.

3.11. Доказательство теоремы 2

Для доказательства теоремы 2 введем пару определений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 25. Пусть $W \subset \mathbb{R}^2$ — многоугольник. Тогда разбиением W назовем конечное множество многоугольников $W = \{W_1, W_2, \dots, W_k\}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, т.ч.:

- $W = \bigcup_{j=1}^k W_j$;
- $\forall i, j, 1 \leq i < j \leq k$: $\text{int}(W_i) \cap \text{int}(W_j) = \emptyset$.

Рис. 9: Преобразование Γ и начало последовательности (C_i)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 26. Пусть $W \subset \mathbb{R}^2$ — многоугольник, а $\mathcal{W}^1, \mathcal{W}^2$ — его разбиения. Тогда $\mathcal{W}^2$ является подразбиением $\mathcal{W}^1$, если $\forall Q \in \mathcal{W}^2 \exists P \in \mathcal{W}^1: Q \subset P$.

Другими словами, подразбиение разбиения $\mathcal{W}^1$ есть объединение разбиений многоугольников, входящих в состав $\mathcal{W}^1$.

С разбиениями связана следующая простая лемма.

ЛЕММА 50. Пусть W есть произвольный многоугольник. Рассмотрим последовательность $(\mathcal{W}^l)_{l \in \mathbb{Z}_+}$ разбиений W на конечное число многоугольников, устроенную следующим образом:

- (i) $\forall l \in \mathbb{Z}_+: \mathcal{W}^{l+1}$ есть подразбиение $\mathcal{W}^l$;
- (ii) каждый встречающийся в хотя бы одном из разбиений последовательности $(\mathcal{W}^l)_{l \in \mathbb{Z}_+}$ многоугольник в каждом разбиении покрашен в зеленый или красный цвет, причем этот цвет может зависеть от конкретного разбиения;
- (iii) $\forall l \in \mathbb{Z}_+$: если $A \in \mathcal{W}^l$ и A — красный в разбиении $\mathcal{W}^l$, то $A \in \mathcal{W}^{l+1}$ и A — красный в разбиении $\mathcal{W}^{l+1}$;
- (iv) существуют числа $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ и $k \in \mathbb{Z}_+$ такие, что для любого $l \in \mathbb{Z}_+$ и любого зеленого многоугольника $U \in (\mathcal{W}^l)$, гарантируется, что в $l+k$ -ом разбиении красные фигуры, лежащие внутри U , обладают суммарной площадью не меньшей, чем ϵA , где A есть площадь фигуры U .

Тогда объединение участвующих в разбиениях красных фигур образует в W множество полной меры.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим за $Area(U)$ площадь произвольного многоугольника U . Пусть $RedArea(l)$, $l \in \mathbb{Z}_+$, есть суммарная площадь красных фигур, участвующих в разбиении $\mathcal{W}^l$; аналогично определим $GreenArea(l)$ (очевидно, что

$$\forall l \in \mathbb{Z}_+ : RedArea(l) + GreenArea(l) = Area(W)).$$

Из условия 3 следует, что последовательность $(RedArea(l))$ неубывает с ростом l , а $(GreenArea(l))$ невозрастает. С другой стороны, из условия 4 следует, что $\forall l \in \mathbb{Z}_+$: $GreenArea(l+k) \leq (1-\epsilon) * GreenArea(l)$. Так как $\epsilon > 0$, то $GreenArea(l) \xrightarrow{l \rightarrow +\infty} 0$. Это означает, что $\forall \delta \in \mathbb{R}_+$: все точки многоугольника W , которые не лежат ни в одном из красных многоугольников, могут быть покрыты зелеными многоугольниками разбиения $\mathcal{W}^{l_\delta}$, где l_δ таково, что суммарная площадь этих многоугольников не превосходит δ . Таким образом, дополнение в W к объединению всех красных фигур образует множество меры нуль, QED.

С помощью леммы 50 докажем полноту меры периодических точек в системе (X, f) ; этого, как следует из лемм 41, 32, 16 будет достаточно для доказательства теоремы 2.

ЛЕММА 51. *Периодические относительно преобразования f точки образуют в X множество полной меры.*

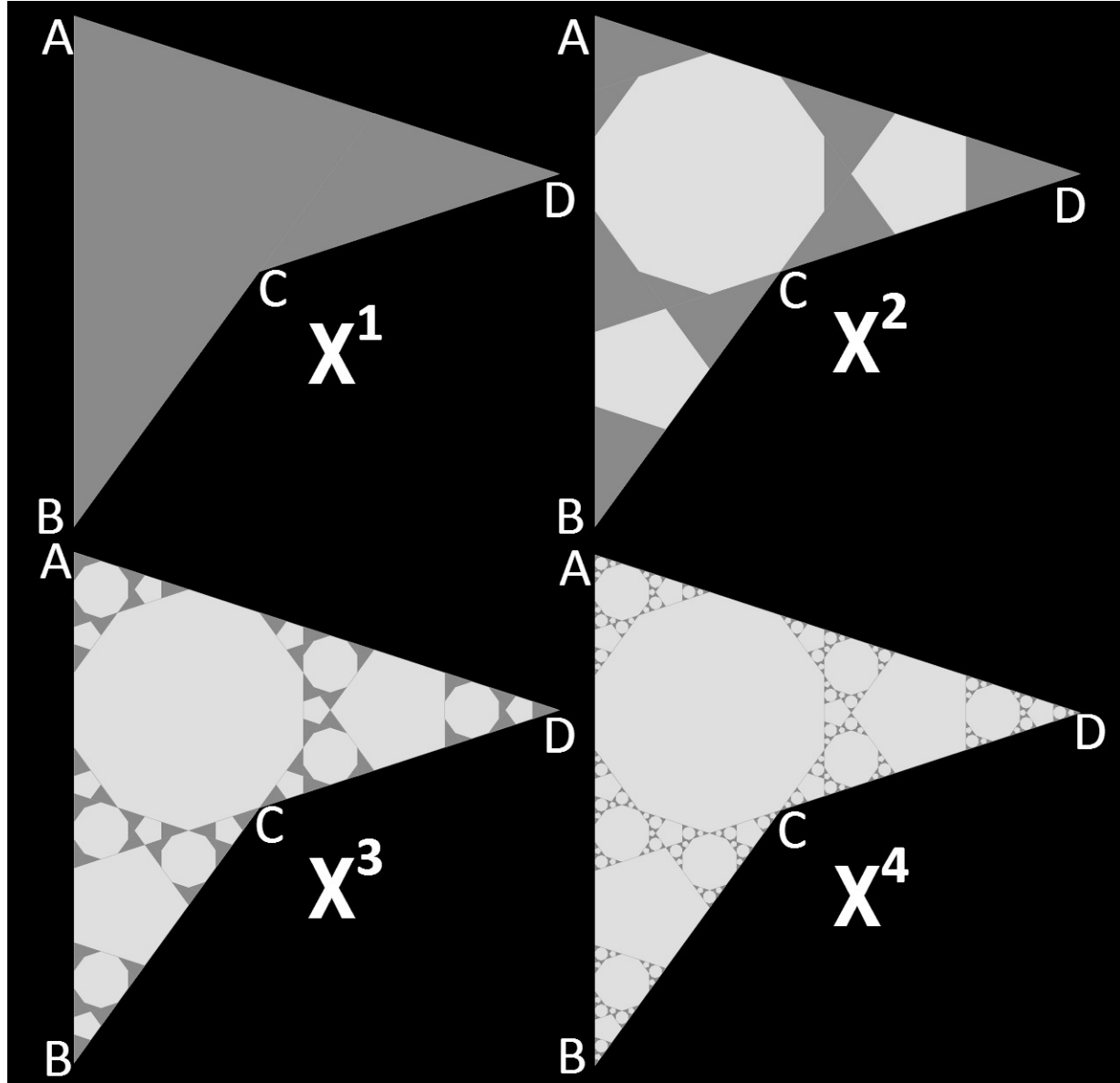
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем лемму 50. Рассмотрим последовательность раскрашенных в красный и зеленый цвета разбиений $(\mathcal{X}^l)_{l \in \mathbb{Z}_+}$ многоугольника X , устроенную следующим образом:

- $(\mathcal{X}^1)$ состоит из двух красных треугольников ABE и CED ;
- $\forall l \in \mathbb{Z}_+$: $\mathcal{X}^{l+1} = \{\bigcup \{f^j(\Gamma(\text{int}(P)))\} | P \in \mathcal{X}^l, 0 \leq j < t(P)\} \cup \{\overline{\omega_a}, \overline{\omega_{ba}}, \overline{\omega_{ab}}\}$; здесь $t(P)$ есть минимальное такое $t \in \mathbb{Z}_+$, что $f_t(\text{int}(P)) \subset \Gamma(X)$;
- в терминах предыдущего пункта, многоугольник $\overline{f^j(\Gamma(\text{int}(P)))}$ зеленый в разбиении $(\mathcal{X})^{l+1}$, если и только если P зеленое в разбиении $(\mathcal{X})^l$;
- фигуры $\overline{\omega_a}, \overline{\omega_{ba}}, \overline{\omega_{ab}}$ являются красными во всех разбиениях, в которых участвуют.

Из рис. 10 очевидно следует, что $\mathcal{X}^2$ есть разбиение X ; тот же факт, что $\mathcal{X}^l$ является разбиением для любого $l \in \mathbb{Z}$, легко доказать по индукции. Более того, на основе леммы 44 также можно вывести по индукции, что в разбиении $\mathcal{X}^l$, $l \in \mathbb{Z}_+$, все красные многоугольники являются периодическими компонентами (точнее, их замыканиями), а зеленые являются траекториями первого возвращения в $\Gamma^{l-1}(X)$ относительно f открытых треугольников $\Gamma_{l-1}(\text{int}(ABE))$ и $\Gamma_{l-1}(\text{int}(CED))$.

Из вышесказанного очевидно, что выполнены условия 1-3 леммы 50. Условие 4 той же леммы также выполнено; это следует из того, что при переходе от $\mathcal{X}^l$ к $\mathcal{X}^{l+1}$, $l \in \mathbb{Z}_+$, верно:

- $\forall P \in \mathcal{X}^l$ т.ч. P - зеленый в $\mathcal{X}^l$, и $P = \overline{f^j(\Gamma^{l-1}(\text{int}(ABE)))}$, $j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$: многоугольники $P_a = \overline{f^j(\Gamma^l(\omega_a))}$ и $P_{ab} = \overline{f^j(\Gamma^l(\omega_{ab}))}$ таковы, что:
 - $P_a, P_{ab} \subset P$;
 - P_a, P_{ab} - красные многоугольники в $\mathcal{X}^{l+1}$;
 - $\frac{Area(P_a \cup P_{ab})}{Area(P)} = \frac{Area(\omega_a \cup \omega_{ab})}{Area(ABE)}$;
- $\forall P \in \mathcal{X}^l$ т.ч. P - зеленый в $\mathcal{X}^l$, и $P = \overline{f^j(\Gamma^{l-1}(\text{int}(CED)))}$, $j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$: многоугольник $P_{ba} = \overline{f^j(\Gamma^l(\omega_{ba}))}$ таков, что:
 - $P_{ba} \subset P$;
 - P_{ba} - красные многоугольники в $\mathcal{X}^{l+1}$;
 - $\frac{Area(P_{ba})}{Area(P)} = \frac{Area(\omega_{ba})}{Area(CED)}$.

Рис. 10: Разбиения $\mathcal{X}^1, \mathcal{X}^2, \mathcal{X}^3, \mathcal{X}^4$

Таким образом, условие 4 леммы 50 выполнено, если взять $k = 1$ и

$$\epsilon = \min\left(\frac{\text{Area}(\omega_a \cup \omega_{ab})}{\text{Area}(ABE)}, \frac{\text{Area}(\omega_{ba})}{\text{Area}(CED)}\right).$$

Следовательно, все условия леммы 50, а согласно этой лемме, красные многоугольники, являющиеся замыканиями периодических компонент, образуют в X множество полной меры. Строго говоря, периодические компоненты - это открытые многоугольники, отличающиеся от своих замыканий; однако тот факт, что объединение замыканий счетного числа открытых многоугольников отличается от объединения счетного числа тех же открытых многоугольников лишь множеством точек меры нуль (ибо это счетное число отрезков), завершает доказательство леммы.

3.12. Нахождение абелизаций кодов периодов периодических компонент для (X, f)

В следующих нескольких разделах мы найдем множество периодов точек для внешнего билиарда T вне правильного десятиугольника γ . Мы будем действовать по следующему плану. В этом разделе, мы найдем множество

$$C_X = \{c(\rho_{Xper}(p)) | p \subset X, p \text{ — периодическая компонента}\},$$

где $c(w) : \{a, b\}^* \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}^2$ есть гомоморфизм абелизации, определенный аналогично определению 21. После этого, с помощью леммы 41 мы вычислим аналогичным образом определенное множество $C_{Z' \cup \beta_4}$. На следующем шаге, по лемме 36 мы найдем $C_{V'}$; затем, по лемме 35 вычислим и множество всевозможных периодов компонент B для T вне Γ . Наконец, согласно лемме 12, преобразуем множество B в B_2 , просто добавив в B удвоения всех нечетных чисел в B .

Пусть $\sigma : \{a, b\} \rightarrow \{a, b\}^*$ — подстановка, т.ч. $\sigma(a) = aababaa$, $\sigma(b) = aaa$. Из рис. 8 очевидно доказательство следующей леммы, являющейся уточнением третьего пункта леммы 44.

ЛЕММА 52. Пусть $p \subset X$ — периодическая компонента, и пусть $q = \Gamma(p)$. Тогда $\rho_{Xper}(q) = \sigma(\rho_{Xper}(p))$.

Очевидно, лемма 52 могла бы быть сформулирована и для периодической или аperiodической точки $p \in X$ и ее кода $\rho_X(p)$; однако для наших целей достаточно ограничиться лишь периодическими компонентами.

Из леммы 47 и того факта, что если $p \subset X$ — периодическая компонента, то и $f(p)$ — периодическая компонента, причем $c(\rho_{Xper}(p)) = c(\rho_{Xper}(f(p)))$ следует, что

$$C_X = \{c(\rho_{Xper}(\Gamma^l(\omega))) | l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \omega \in \{\omega_a, \omega_{ba}\}\}.$$

Пусть M_σ — матрица подстановки σ . Согласно определению σ , $M_\sigma = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, и если $p \subset X$ — периодическая компонента, то $c(\rho_{Xper}(\Gamma(p))) = M_\sigma c(\rho_{Xper}(p))$. Следовательно, $C_X = \{M_\sigma^l c(\rho_{Xper}(\omega)) | \omega \in \{\omega_a, \omega_{ba}\}\} = \{M_\sigma^l g | g \in \{(\frac{1}{0}), (\frac{1}{1})\}\}$ (ибо $c(\omega_a) = (\frac{1}{0})$, $c(\omega_{ba}) = (\frac{1}{1})$).

С другой стороны, легко получить с помощью линейной алгебры и доказать по индукции, что $\forall x, y \in \mathbb{R}, l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$: $M_\sigma^l \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{x-3y}{7}(-1)^l \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{y+2x}{7}6^l \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Подставляя в качестве $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ векторы $(\frac{1}{0}), (\frac{1}{1})$, получаем следующую лемму.

$$\text{ЛЕММА 53. } C_X = \left\{ \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 \cdot 6^l + (-1)^l \\ 2 \cdot 6^l - 2 \cdot (-1)^l \end{pmatrix}, \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 9 \cdot 6^l - 2 \cdot (-1)^l \\ 3 \cdot 6^l + 4 \cdot (-1)^l \end{pmatrix} \mid l \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \right\}.$$

3.13. Нахождение абелизаций кодов периодических компонент для (V', T')

. Вычислим $C_{Z' \cup \beta_4}$ и $C_{V'}$. С помощью леммы 41, напрямую получаем следующую лемму.

$$\text{ЛЕММА 54. } C_{Z' \cup \beta_4} = \left\{ \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 12 \cdot 6^l + 2 \cdot (-1)^l \\ 24 \cdot 6^l - 3 \cdot (-1)^l \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 18 \cdot 6^l - 4 \cdot (-1)^l \\ 36 \cdot 6^l + 6 \cdot (-1)^l \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \right. \\ \left. \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \cdot 6^l + (-1)^l \\ 8 \cdot 6^l - (-1)^l \end{pmatrix}, \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \cdot 6^l - 2 \cdot (-1)^l \\ 12 \cdot 6^l + 2 \cdot (-1)^l \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid l \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \right\}.$$

Чтобы вычислить $C_{V'}$, воспользуемся леммой 36, согласно которой, каждый вектор из $C_{Z' \cup \beta_4}$ нужно домножить слева на матрицу M_ψ произвольное число раз.

Пусть $C_{V'}^1 = \{M_\psi w \mid w \in C_{Z' \cup \beta_4}\}$. Из устройства M_ψ следует, что первые три компоненты векторов $C_{V'}^1$ нулевые. В силу этого, введем преобразования $pr_{25} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^5$, т.ч. $\forall u, v \in \mathbb{R}$: $pr_{25} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ u \\ v \end{pmatrix}$, и $pr_{52} = pr_{25}^{-1}$; пусть $C_{V'2}^1 = pr_{52}(C_{V'}^1)$.

Также введем вспомогательную матрицу $M_{\psi 1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Очевидно, коэффициенты подобраны таким образом, что $\forall w \in \mathbb{R}^2$: $M_\psi pr_{25}(w) = pr_{25}(M_{\psi 1} w)$.

Используя вышесказанное, лемму 36 можно записать в виде:

$$C_{V'} = C_{Z' \cup \beta_4} \cup \{pr_{25}(M_{\psi 1}^k w) \mid w \in C_{V'2}^1, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}.$$

Из определения легко получить, что

$$C_{V'2}^1 = \left\{ \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 120*6^l - (-1)^l \\ 36*6^l - (-1)^l \end{pmatrix}, \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 180*6^l + 2*(-1)^l \\ 54*6^l + 2*(-1)^l \end{pmatrix}, \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 20*6^l + (-1)^l \\ 14*6^l \end{pmatrix}, \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 30*6^l - 2*(-1)^l \\ 21*6^l \end{pmatrix}, \right. \\ \left. \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

С другой стороны, легко доказать по индукции по k , что $\forall x, y \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$:

$$M_{\psi 1}^k \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y+kx \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует

$$\text{ЛЕММА 55. } C_{V'} = C_{V'f} + pr_{25}(C_{V'o}), \text{ где } C_{V'f} = C_{Z' \cup \beta_4}, \\ C_{V'o} = \left\{ \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 120*6^l - (-1)^l \\ (36+120k)*6^l - (k+1)*(-1)^l \end{pmatrix}, \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 180*6^l + 2*(-1)^l \\ (54+180k)*6^l + 2*(k+1)*(-1)^l \end{pmatrix}, \right. \\ \left. \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 20*6^l + (-1)^l \\ (14+20k)*6^l + k*(-1)^l \end{pmatrix}, \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 30*6^l - 2*(-1)^l \\ (21+30k)*6^l - 2k*(-1)^l \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1+4k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1+3k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1+2k \end{pmatrix}, \right. \\ \left. \begin{pmatrix} 1 \\ 1+k \end{pmatrix} \mid k, l \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \right\}.$$

3.14. Нахождение периодов и доказательство теоремы 3

Чтобы найти множество B_c периодов периодических компонент внешнего бильярда вне правильного десятиугольника, достаточно применить лемму 35 к каждому из столбцов $w \in C_{V'}$ и добавить в B_c , изначально пустое, число $r(w) = \frac{10s(w)}{\text{НОД}(10, t(w))}$, где $s(w) = (1, 1, 1, 1, 1) * w$, $t(w) = (1, 2, 3, 4, 5) * w$. Найдем $s(w)$ и $t(w)$ для всех серий столбцов, встречающихся в $C_{V'}$, согласно леммам 54, 55. При подсчете мы используем следующие простые факты теории чисел:

- $\forall a, b \in \mathbb{Z}_+$: $\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(7a, b)$; следовательно,

$$\forall w \in \mathbb{R}^5 : \text{НОД}(10, t(w)) = \text{НОД}(10, t(7w)).$$

Этот факт позволит нам игнорировать множитель $\frac{1}{7}$ при подсчете НОД-а;

- $6^0 \equiv_{10} 1$, и $\forall l \in \mathbb{Z}_+$: $6^l \equiv_7 6$.

Итак,

- пусть $w = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 12*6^l + 2*(-1)^l \\ 24*6^l - 3*(-1)^l \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

$$\text{Тогда } 7s(w) = 6^{l+2} - (-1)^l, \quad 7t(w) = (10 * 6^{l+1} - 4 * (-1)^l),$$

$$\text{НОД}(10, t(w)) = \text{НОД}(10, -4(-1)^l) = \text{НОД}(10, 4) = 2.$$

$$\text{Следовательно, } r(w) = \frac{5}{7}(6^{l+2} - (-1)^l).$$

- Пусть $w = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 18*6^l - 4*(-1)^l \\ 36*6^l + 6*(-1)^l \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Тогда $7s(w) = 9 * 6^{l+1} + 2 * (-1)^l$, $7t(w) = (15 * 6^{l+1} + 8 * (-1)^l)$,

$$\text{НОД}(10, t(w)) = \text{НОД}(10, 90 + 8(-1)^l) = \text{НОД}(10, 8(-1)^l) = \text{НОД}(10, 8) = 2;$$

следовательно, $r(w) = \frac{5}{7}(9 * 6^{l+1} + 2 * (-1)^l)$.

- Пусть $w = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 0 \\ 6*6^l + (-1)^l \\ 8*6^l - (-1)^l \\ 0 \end{pmatrix}$, $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Тогда $7s(w) = 14 * 6^l$, $7t(w) = 50 * 6^l - (-1)^l$,
НОД(10, $t(w)$) = НОД(10, $-(-1)^l$) = 1; следовательно, $r(w) = 20 * 6^l$.

- Пусть $w = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 0 \\ 9*6^l - 2*(-1)^l \\ 12*6^l + 2*(-1)^l \\ 0 \end{pmatrix}$, $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Тогда $7s(w) = 21 * 6^l$, $7t(w) = 75 * 6^l + 2 * (-1)^l$.

Рассмотрим два случая:

- $l = 0$; тогда $7t(w) = 77$, НОД(10, $t(w)$) = 1, и $r(w) = 30$;
- $l > 0$; тогда НОД(10, $t(w)$) = НОД(10, $30 * 6^{l-1} + 2 * (-1)^l$) = НОД(10, $2 * (-1)^l$) = 2,
и $r(w) = 15 * 6^l$.

- Пусть $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; тогда $s(w) = 1$, $t(w) = 1$, и $r(w) = 10$.

- Пусть $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; тогда $s(w) = 1$, $t(w) = 2$, и $r(w) = 5$.

- Пусть $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; тогда $s(w) = 1$, $t(w) = 3$, и $r(w) = 10$.

- Пусть $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; тогда $s(w) = 1$, $t(w) = 4$, и $r(w) = 5$.

- Пусть $w = pr_{25}(\frac{1}{7} \begin{pmatrix} 120*6^l - (-1)^l \\ (36+120k)*6^l - (k+1)*(-1)^l \end{pmatrix})$, $k, l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Тогда $7s(w) = (156 + 120k) * 6^l - (k + 2) * (-1)^l$, $7t(w) = (660 + 600k) * 6^l - (5k + 9) * (-1)^l$,
НОД(10, $t(w)$) = НОД(10, $5k + 9$). Рассмотрим два случая:

- $k = 2m$, $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$; тогда НОД(10, $t(w)$) = 1, и

$$r(w) = \frac{10}{7}((156 + 120 * 2m) * 6^l - (2m + 2) * (-1)^l) = \frac{20}{7}((78 + 120m) * 6^l - (m + 1) * (-1)^l);$$

- $k = 2m + 1$, $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$; тогда НОД(10, $t(w)$) = 2, и

$$r(w) = \frac{5}{7}((276 + 240m) * 6^l - (2m + 3) * (-1)^l).$$

- Пусть $w = pr_{25}(\frac{1}{7} \begin{pmatrix} 180*6^l + 2*(-1)^l \\ (54+180k)*6^l + 2*(k+1)*(-1)^l \end{pmatrix})$, $k, l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Тогда $7s(w) = (234 + 180k) * 6^l + (2k + 4) * (-1)^l$, $7t(w) = (990 + 900k) * 6^l + (10k + 18) * (-1)^l$,
НОД(10, $t(w)$) = НОД(10, 18) = 2;

следовательно, $r(w) = \frac{5}{7}((234 + 180k) * 6^l + (2k + 4) * (-1)^l)$.

- Пусть $w = pr_{25}(\frac{1}{7} \binom{20*6^l + (-1)^l}{(14+20k)*6^l + k*(-1)^l})$, $k, l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Тогда $7s(w) = (34 + 20k) * 6^l + (k + 1) * (-1)^l$, $7t(w) = (150 + 100k) * 6^l + (5k + 4) * (-1)^l$,
НОД(10, $t(w)$) = НОД(10, $5k + 4$).

Рассмотрим два случая:

– $k = 2m, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$;

тогда НОД(10, $t(w)$) = 2, и $r(w) = \frac{5}{7}((34 + 40m) * 6^l + (2m + 1) * (-1)^l)$;

– $k = 2m + 1, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$;

тогда НОД(10, $t(w)$) = 1, и $r(w) = \frac{10}{7}((20 + 40m) * 6^l + (2m + 2) * (-1)^l)$.

- Пусть $w = pr_{25}(\frac{1}{7} \binom{30*6^l - 2*(-1)^l}{(21+30k)*6^l - 2k*(-1)^l})$, $k, l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Тогда $7s(w) = (51 + 30k) * 6^l - (2k + 2) * (-1)^l$, $7t(w) = (225 + 150k) * 6^l - (10k + 8) * (-1)^l$,
НОД(10, $t(w)$) = НОД(10, $5 * 6^l + 8 * (-1)^l$).

Рассмотрим два случая:

– $l = 0$; тогда НОД(10, $t(w)$) = 1, и $r(w) = \frac{10}{7}(28k + 49) = 40k + 70$;

– $l > 0$; тогда НОД(10, $t(w)$) = 2, и $r(w) = \frac{5}{7}((51 + 30k) * 6^l - (2k + 2) * (-1)^l)$.

- Пусть $w = pr_{25}(\binom{4}{1+4k})$, $k \geq 0$; тогда $s(w) = 5 + 4k$, $t(w) = 20k + 21$, НОД(10, $t(w)$) = 1;
следовательно, $r(w) = 40k + 50$.

- Пусть $w = pr_{25}(\binom{3}{1+3k})$, $k \geq 0$;

тогда $s(w) = 4 + 3k$, $t(w) = 15k + 17$, НОД(10, $t(w)$) = НОД(10, $5k + 7$).

Рассмотрим два случая:

– $k = 2m, m \geq 0$; тогда НОД(10, $t(w)$) = 1, и $r(w) = 30k + 40 = 60m + 40$;

– $k = 2m + 1, m \geq 0$; тогда НОД(10, $t(w)$) = 2, и $r(w) = 15k + 20 = 30m + 35$.

- Пусть $w = pr_{25}(\binom{2}{1+2k})$, $k \geq 0$;

тогда $s(w) = 3 + 2k$, $t(w) = 10k + 13$, НОД(10, $t(w)$) = 1; следовательно, $r(w) = 20k + 30$.

- Пусть $w = pr_{25}(\binom{1}{1+k})$, $k \geq 0$;

тогда $s(w) = 2 + k$, $t(w) = 5k + 9$, НОД(10, $t(w)$) = НОД(10, $5k + 9$).

Рассмотрим два случая:

– $k = 2m, m \geq 0$; тогда НОД(10, $t(w)$) = 1, и $r(w) = 10k + 20 = 20m + 20$;

– $k = 2m + 1, m \geq 0$; тогда НОД(10, $t(w)$) = 2, и $r(w) = 5k + 10 = 10m + 15$.

Объединив полученные числа и серии $r(w)$ и заметив, что числа каждой из серий либо все четные, либо все нечетные, получаем следующую лемму, являющуюся уточненной версией теоремы 3.

ЛЕММА 56. Пусть

$$\begin{aligned}
 B = & \left\{ \frac{5}{7}(6^{l+2} - (-1)^l), \frac{5}{7}(9 * 6^{l+1} + 2 * (-1)^l), 20 * 6^l, 30, 90 * 6^l, 10, 5, \right. \\
 & \frac{20}{7}((78 + 120k) * 6^l - (k + 1) * (-1)^l), \frac{5}{7}((276 + 240k) * 6^l - (2m + 3) * (-1)^l), \\
 & \frac{5}{7}((234 + 180k) * 6^l + (2k + 4) * (-1)^l), \frac{5}{7}((34 + 40k) * 6^l + (2k + 1) * (-1)^l), \\
 & \left. \frac{10}{7}((20 + 40k) * 6^l + (2k + 2) * (-1)^l), 40k + 70, \frac{5}{7}((306 + 180k) * 6^l + (2k + 2) * (-1)^l), \right. \\
 & 40k + 50, 60k + 40, 30k + 35, 20k + 30, 20k + 20, 10k + 15 | k, l \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \}, \\
 B_2 = & B \cup \left\{ \frac{10}{7}(6^{l+2} - (-1)^l), \frac{10}{7}((276 + 240k) * 6^l - (2k + 3) * (-1)^l), \right. \\
 & \left. \frac{10}{7}((34 + 40k) * 6^l + (2k + 1) * (-1)^l), 60k + 70, 20k + 30 | k, l \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \}.
 \end{aligned}$$

Тогда B и B_2 суть множества периодов периодических компонент и периодических точек для внешнего бильярда вне правильного десятиугольника.

Утверждение леммы про B_2 получено с помощью леммы 12.

4. Заключение

В данной работе было проведено полное исследование внешнего бильярда вне правильного десятиугольника, завершающее «программу Шварца». Основными наблюдениями, на которых базируются доказательства теорем, являются леммы 25 и 44, устанавливающие наличие самоподобных структур в множествах периодических/аперiodических точек вне стола γ . Самоподобие, возникающее в первой из этих лемм, не случайно; аналогичное свойство можно доказать для внешнего бильярда вне правильного n -угольника для произвольного четного n ; в случае же нечетного n , можно установить соответствие между периодическими/аперiodическими структурами вне правильных n - и $2n$ -угольника (для случая $n = 5$, такое соответствие описано в [7]). Однако самоподобие, задаваемое леммой 44, таким общим свойством не является; похожие самоподобия обнаружены лишь для случаев $n = 5, 10, 8, 12$, причем в последнем случае были задействованы доказательные компьютерные вычисления. Более того, проведенные Р. Шварцем компьютерные эксперименты [17] показали, что периодические структуры для внешнего бильярда вне правильного семиугольника обладают существенно более сложной структурой, нежели случаи $n = 5, 10, 8, 12$; в частности, в этих случаях периодическая компонента может быть неравносторонним многоугольником. Так или иначе, проблемы периодичности для правильных n -угольников, где $n \notin \{3, 4, 6, 5, 10, 8, 12\}$, остаются открытыми.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rukhovich F. Outer billiards outside a regular octagon: periodicity of almost all orbits and existence of an aperiodic orbit. // Doklady Mathematics, 2018, Vol. 98, Issue 1, pp. 334–337.
2. Rukhovich F. Outer billiards outside regular dodecagon: computer proof of periodicity of almost all orbits and existence of an aperiodic point. // arXiv:1809.03791, 2018
3. Табачников С. Внешние бильярдные // Успехи математических наук, 1993. Т. 48. Вып. 6(294). С. 75–102.

4. Moser J. Is the solar system stable? // *Math. Intell.*, 1978, Vol. 1. P. 65–71.
5. Schwartz, R. E. Outer billiards on kites // *Annals of Mathematics Studies* — Princeton University Press, Princeton, NJ, 2009. Vol. 171.
6. Dolgopyat, D., Fayad, B. Unbounded orbits for semicircular outer billiard // *Ann. Henri Poincare*, 2009. Vol. 10, issue 2. P. 357–375.
7. Bedaride, N., Cassaigne, J. Outer billiards outside regular regular polygons // *Journal of the London Mathematical Society*, 2011.
8. Tabachnikov, S. *Geometry and Billiards* // Student Mathematical Library — American Mathematical Society, Providence, RI, 2005. Vol. 30.
9. Tabachnikov, S. On the dual billiard problem // *Adv. Math*, 1995. Vol. 115, № 2. P. 221–249.
10. Bedaride, N., Cassaigne, J. Outer billiards outside regular regular polygons // eprint arXiv:0912.0563, 2011.
11. Schwartz, R. E. Outer Billiards, Arithmetic Graph and the Octagon // eprint arXiv:1006.2782, 2010.
12. Schwartz, R. E. The octagonal PETs // *Mathematical Surveys and Monographs* — American Mathematical Society, Providence, RI, 2014. Vol. 197.
13. N. Pytheas Fogg. Substitutions in dynamics, arithmetics and combinatorics // *Lecture Notes in Mathematics*. Edited by V. Berthé, S. Ferenczi, C. Mauduit and A. Siegel. — Springer-Verlag, Berlin, 2002. Vol. 1794.
14. Shaidenko. A, Vivaldi F. Global stability of a class of discontinuous dual billiards // *Comm. Math. Phys.*, 1987. Vol. 110. P. 625–640.
15. Kolodziej, R. The antibilliard outside a polygon // *Bull. Pol. Acad. Sci.*, 1989. Vol. 37. P. 163–168.
16. Gutkin, E., Simanyi, N. Dual polygonal billiards and necklace dynamics // *Comm. Math. Phys.*, 1991. Vol. 143. P. 431–450.
17. Jeong, I.J. Outer billiards with contraction: regular polygons. // *Dynamical Systems*, 2015. Vol. 33, № 4. P. 565–580; DOI: 10.1080/14689367.2017.1402295

REFERENCES

1. Rukhovich F. 2018, Outer billiards outside a regular octagon: periodicity of almost all orbits and existence of an aperiodic orbit. — *Doklady Mathematics*, 2018, vol. 98, issue 1, pp. 334–337.
2. Rukhovich F. Outer billiards outside regular dodecagon: computer proof of periodicity of almost all orbits and existence of an aperiodic point. — *arXiv:1809.03791*
3. Tabachnikov S. 1993, "Outer billiards". — *Russian Math. Surveys*, vol. 48, issue 6(294), pp. 75–102.
4. Moser J. 1978, "Is the solar system stable?— *Math. Intell.*, 1(1978), pp. 65–71; DOI: 10.1007/BF03023062.

5. Schwartz, R. E. 2009, *Outer billiards on kites*. — Annals of Mathematics Studies, 171. — Princeton University Press, Princeton, NJ, 2009.
6. Dolgopyat, D., Fayad, B. 2009, "Unbounded orbits for semicircular outer billiard". — *Ann. Henri Poincaré*, vol.10, pp. 357–375, 2009.
7. Bedaride, N., Cassaigne, J. 2011, "Outer billiards outside regular polygons". — *Journal of the London Mathematical Society*.
8. Tabachnikov, S. 2005, "Geometry and Billiards". — Student Mathematical Library, 30. *American Mathematical Society*, Providence, RI.
9. Tabachnikov, S. 1995, "On the dual billiard problem". — *Adv. Math*, vol. 115, no. 2, pp. 221–249.
10. Bedaride, N., Cassaigne, J. 2011, "Outer billiards outside regular polygons". — eprint *arXiv:0912.0563*.
11. Schwartz, R.E. 2010, "Outer Billiards, Arithmetic Graph and the Octagon". — eprint *arXiv:1006.2782*.
12. Schwartz, R. E. 2014, "The octagonal PETs". — *Mathematical Surveys and Monographs*, vol. 197, American Mathematical Society, Providence, RI.
13. N. Pytheas Fogg. 2002, "Substitutions in dynamics, arithmetics and combinatorics". Vol. 1794 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin. Edited by V. Berthé, S. Ferenczi, C. Mauduit and A. Siegel.
14. Shaidenko A., Vivaldi F. 1987, "Global stability of a class of discontinuous dual billiards". *Comm. Math. Phys*, vol. 110, pp. 625–640.
15. Kolodziej, R. 1989, "The antibilliard outside a polygon". *Bull. Pol. Acad. Sci.*, vol. 37, pp. 163–168.
16. Gutkin, E., Simanyi, N. 1991, "Dual polygonal billiards and necklace dynamics". *Comm. Math. Phys.*, vol. 143, pp. 431–450.
17. Jeong, I. J. 2015, "Outer billiards with contraction: regular polygons". *Dynamical Systems*, vol. 33, issue 4, pp. 565–580; DOI: 10.1080/14689367.2017.1402295

Получено 29.11.2018 г.

Принято в печать 12.07.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 2.

УДК 372.851

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-442-461

**Основы формирования у учащихся исследовательских умений
и ИКТ-компетенций при обучении решению задач
с использованием компьютера**

М. М. Абдуразаков, Д. Д. Гаджиев, Н. В. Гусева, Г. В. Токмазов

Абдуразаков Магомед Мусаевич — доктор педагогических наук, доцент, ведущий научный сотрудник Центра теории и методики обучения математике и информатике Института стратегии развития образования Российской академии образования (г. Москва).

e-mail: abdurazakov@inbox.ru

Гаджиев Джаваншир Джебраил — доктор физико-математических наук, профессор математики и естественных наук, Индиан Ривер Колледж, Государственный университет штата Флорида (3209 Virginia Avenue, Fort Pierce, FL 34981, United States).

e-mail: djavashir53@inbox.ru

Гусева Наталья Валерьевна — кандидат педагогических наук, доцент кафедры физико-математического образования физико-математического факультета, Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского (г. Нижний Новгород).

e-mail: soleilfun@mail.ru

Токмазов Георгий Васильевич — кандидат педагогических наук, доцент, профессор кафедры высшей математики, Государственный Морской университет имени адмирала Ф. Ф. Ушакова (г. Новороссийск).

*e-mail: tokmazov@mail.ru***Аннотация**

В исследовании рассматривается модель создания серии обучающих заданий, построенной с опорой на представления о трехкомпонентной структуре умственных действий (О-ориентировка, И-исполнение, К-контроль). С помощью задач динамического характера, ориентированных на управление учебно-познавательной деятельностью обучающихся, в работе раскрывается один из возможных подходов к совместному изучению формул полной вероятности и Байеса. Отмечается, что для эффективности управления учебно-познавательной деятельностью обучающихся, осуществляется пооперационная обратная связь, переходящая в промежуточную обратную связь и связь по конечному результату.

В статье подчеркивается, что оптимальность процесса формирования элементов исследовательской деятельности осуществляется за счет повышения эффективности усвоения его по времени. Последнее достигается за счет приемов совместного усвоения обучающимися учебного материала, связанного с усвоением, например, формул полной вероятности и Байеса.

В этом же ракурсе отмечается, что целесообразно использовать этапы информационной технологии решения задач, а использование ИКТ как процесс формирования инструментария в жизни и ИКТ-компетенций для профессиональной ориентации выпускника школы.

В статье особо подчеркивается необходимость формирования ИКТ-компетенций учителя как требование федерального государственного образовательного стандарта в условиях в информационной образовательной среды, определены принципы построения методической системы формирования ИКТ-компетенций в рамках педагогических вузов через решения задач с использованием компьютерных технологий.

Ключевые слова: информатика, математика, компетенция, ИКТ-компетенции, ориентировочные основы действия, исследовательская деятельность, задачи динамического характера, решение задачи.

Библиография: 36 названий.

Для цитирования:

М. М. Абдуразаков, Д. Д. Гаджиев, Н. В. Гусева, Г. В. Токмазов. Основы формирования у учащихся исследовательских умений и икт-компетенций при обучении решению задач с использованием компьютера // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 2, с. 442–461.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 2.

UDC 372.851

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-442-461

Fundamentals of formation in learning of research skills and ict competence in teaching solving tasks using a computer

M. M. Abdurazakov, D. D. Gadjiev, N. V. Guseva, G. V. Tokmazov

Abdurazakov Magomed Musaevich — doctor of pedagogical Sciences, associate Professor, leading researcher Of the center of theory and methods of teaching mathematics and Informatics of the Institute of education development strategy of the Russian Academy of education (Moscow).

e-mail: abdurazakov@inbox.ru

Gadjiev Djavanshir Djebail — Ph.D. of Physical and Mathematical Sciences, Professor of Mathematics and Natural Sciences, Indian River State College of Florida State University (3209 Virginia Avenue, Fort Pierce, FL 34981, United States USA).

e-mail: djavashir53@inbox.ru

Guseva Natalya Valerievna — candidate of pedagogical Sciences, associate Professor of the Department of physical and mathematical education of the faculty of physics and mathematics, National research Lobachevsky state University of Nizhny Novgorod (Nizhni Novgorod).

e-mail: soleilfun@mail.ru

Tokmazov Georgy Vasil'evich — candidate of pedagogical Sciences, associate Professor, Admiral Ushakov State Maritime University (Novorossiysk).

e-mail: tokmazov@mail.ru

Abstract

The study examines a model for creating a series of learning tasks, built on the basis of ideas about the three-component structure of mental actions (orientation, execution, control). With the help of problems of a dynamic nature, focused on the management of learning and cognitive activity of students, the work reveals one of the possible approaches to the joint study of the formulas for full probability and Bayes It is noted that for the effective management of the educational and cognitive activity of students, the postoperative feedback is carried out, turning into intermediate feedback and communication on the final result.

The article emphasizes that the optimality of the process of formation of elements of research activity is carried out by increasing the efficiency of its mastering over time. The latter is achieved through the methods of joint mastering by students of educational material related to mastering, for example, the formulas of full probability and Bayesian.

In this perspective, it is noted that it is advisable to use the stages of information technology problem solving, and the use of ICT as a process of forming tools in life and ICT-competencies for the vocational guidance of a graduate school.

The article emphasizes the need to form ICT-competencies of the teacher as a requirement of the federal state educational standard in the conditions of the information educational environment, defines the principles for constructing a methodological system for the formation of ICT-competencies within pedagogical universities through problem solving using computer technologies.

Keywords: computer science, mathematics, competence, ICT-competence, tentative bases of action, research activity, problems of a dynamic nature, problem solving.

Bibliography: 36 titles.

For citation:

М. М. Abdurazakov, D. D. Gadjiyev, N. V. Guseva, G. V. Tokmazov, 2019, "Fundamentals of formation in learning of research skills and ict competence in teaching solving tasks using a computer", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 2, pp. 442–461.

Введение

Необходимость обеспечения конкурентоспособности России в мире определяет и приоритеты в структуре и содержании образования. В основополагающих документах (Закон РФ «Об образовании», «Национальная доктрина образования РФ», национальный проект «Образование», модель «Российское образование – 2020» и т. д.) подчеркивается о необходимости обеспечения современного качества образования на основе сохранения его фундаментальности, соответствия актуальным и перспективным потребностям общества, государства и личности с учетом ее индивидуальных особенностей, интересов склонностей и т. д.

Приоритетной государственной задачей является обеспечение качественного базового уровня математических и естественнонаучных знаний у всех выпускников школы, не только будущих ученых, но и будущих квалифицированных рабочих, специалистов для различных отраслей народного хозяйства и т. д. Сильное математическое и естественнонаучное образование, его фундаментальность являются конкурентным преимуществом России. В обучении математике и естественным наукам мы должны максимально использовать существующий потенциал и российские традиции, дополняя их последними научными достижениями, современными образовательными технологиями. А в обучении информатике как общеобразовательному предмету, в содержании которого присутствует значительная фундаментальная научная составляющая, должно быть ориентировано не только на изучение основ науки информатики, но и на образование обучающегося с помощью методов и средств информатики.

Информатизация образования ведет к изменению роли преподавателя, к появлению новых методов и организационных форм его подготовки и повышения квалификации. Успешное использование ИКТ в учебном процессе зависит от способности преподавателя по-новому организовать информационно-образовательную среду, интегрировать новые информационные и педагогические технологии для того, реализовать учебные проекты, проводить факультативные занятия по интересам в форме сотрудничества и коммуникации и другие новаторские методы, позволяющие «объединить теорию и практику в единый комплекс, сформировать творческое отношение к решению нестандартных задач, придать диалогичность процессу обучения» [1, с. 73].

Но «... интеграция не может осуществляться искусственно, она должна «созреть»; должна быть понята и доказана предметная и образовательная общность соответствующих компонентов» [2, с. 83].

С одной стороны, особенности формирования профессиональных компетенций в вузе определяются спецификой будущей профессиональной деятельности преподавателя и с учетом условий информатизации образовательных организаций.

С другой, необходимостью рефлексии и профессионального развития и саморазвития преподавателя, осваивающий работу в ИКТ-насыщенной информационно-образовательной среде.

В конечном счете информатизация образования требует переосмысления содержания навыков и компетенций, которые необходимы в процессе формирования социализации обучающихся для того, чтобы им стать активными гражданами, и полноценными работниками в становящемся сегодня обществе знаний.

Как отмечает один из идеологов науки Нового времени Т. Гоббс "знание есть только путь к силе. Теоремы служат только решению проблем. И всякое умозрение, в конечном счете, имеет целью какое-нибудь действие или практический успех". Он настаивает, что признание ограниченности чувственного познания, которое дает лишь «знание факта», тогда как «наука есть знание связей и зависимостей фактов» [3, т. 2, с. 80].

Однако ограничиться только этим утверждением, разумеется, нельзя, поскольку источником научно-философского знания Т. Гоббс объявляет "человеческий ум, а средством достижения этого знания — логически правильное мышление". Теория Т. Гоббса не потеряла своей актуальности и сегодня.

1. Характеристика проблемного поля

В полноте раскрыть различные тенденции развития школьного математического образования за последние десятилетия не представляется возможным из-за ограничений требований к формату статьи. Однако анализ исследований многих ученых, специалистов и др. [4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13] позволил выделить три основных направления: развитие математического мышления, организация учебно-познавательной и исследовательской деятельности школьников [14; 15; 16; 17; 18]; изучение путей реализации межпредметных связей математики с другими учебными дисциплинами (физикой, биологией, химией, экономикой и т.д.); включение практико-ориентированных задач в отдельные разделы школьного курса математики. Последнее для нас имеет важное значение, поскольку речь идет о решении задач при обучении математике.

Обучение информатике и математике в современной информационно-образовательной среде столкнулось с множеством проблем, в настоящее время не только не решенных, но и неразрешимых в силу объективных, на наш взгляд, причин.

Критический анализ традиционных методов школьного обучения математике и информатике, содержащийся в публикациях многих отечественных ученых, методистов, специалистов в области информатики и математики (например, [19; 20; 21; 22 и др.], выявляет ряд существенных недостатков этих методов, в частности:

а) недостаточное изучение и использование математического языка и математических структур, к тому же устаревшего;

б) игнорирование логического языка математики и вследствие этого недостаточное влияние на развитие логики мышления учащихся;

в) отсутствие общих, объединяющих концепций, обуславливающее изолированность отдельных тем, математических дисциплин, математики, информатики и других дисциплин (например, в первую очередь, физики), использующих математику, методы и средств информатики;

г) обучение математике как уже готовой, логически организованной теории (хотя и на низком логическом уровне) вместо обучения различным аспектам математической деятельности, в том числе логической организации математического материала и функционирования информационных технологий, ресурсов информационных продуктов учебного назначения;

д) устаревшую трактовку многих понятий в условиях реализации распределенного контента.

2. Проблема исследования

1. Процесс интеграции информационных и педагогических технологий должны способствовать реализации принципов системно-деятельностного подхода в образовании. На самом деле, данная проблема еще? шире и глубже, упирается в проблему соответствия, вернее, существующего несоответствия информатики и математики как дифференцированных научных систем. В научном и педагогическом сообществе сложилось несколько искажённое представление об этих науках как, с одной стороны, своеобразная *информатизация математики*, а с другой стороны, *математизация информатики*.

Принцип системности, реализующий системно-деятельностный подход, обуславливает протекание интеграционных процессов в сферах классических методик, поэтому информационные технологии должны использовать, а не игнорировать дидактический потенциал ИКТ в направлении формирования знаний, умений и ИКТ-компетенций в предметной области. Из принципа системности вытекает, в частности, принцип саморазвития как следствие, поскольку проектируемые системы информационных и педагогических технологий открыты для последующего совершенствования, развития, модернизации и универсализации.

2. Изучение школьного курса математики в 10–11 классах играет решающую роль в системе профильного обучения, так как универсальность математических методов позволяет в формальных понятиях алгебры, геометрии и математического анализа на уровне общенаучной методологии отразить связь теоретического материала различных областей знаний с практикой.

3. Не секрет, что крайне мало необходимых современных учебно-методических пособий для школьников, содержание которых ориентировано на формирование исследовательских умений при обучении математике на основной и старшей школах общего образования. Недостаточно разработаны методические аспекты обучения школьников решению задач динамического характера с различной вариативностью заданий и нет смысловой и методической ясности в вопросе о том, в какой форме и объеме практико-ориентированные задачи целесообразно включить в обязательную программу школьного курса математики.

Цель исследования: процесс обучения решению задач динамического характера с различной вариативностью заданий.

Гипотеза исследования заключается в следующем: если методику обучения математике школьников построить на основе решения математических задач динамического характера с различной вариативностью заданий, то это позволит формировать элементы исследовательских умений и повысить уровень готовности обучающихся к применению знаний в процессе своей жизнедеятельности, т. е. знания, умения и компетенции будут востребованы в реальных условиях.

Для достижения поставленной цели и проверки гипотезы необходимо решить следующие **задачи**: охарактеризовать требования к задачам динамического характера с различной вариативностью заданий; рассмотреть методические условия применения таких задач в курсе математики и уровни их сложности, подбор и систематизация различных задач по способам их решения.

3. Содержание

Решение математических задач является одной из главных составляющих содержания учебного предмета математики, который включает также и теоретический материал. Но и теоретический материал обучающиеся усваивают в процессе решения задач. Таким образом, решение задач является основной деятельностью при обучении математике и необходимость, в этой связи, обеспечения перехода от предметно-ориентированного обучения к практико-

ориентированному, реализующему системно-деятельностный подход как требование ФГОС [23; 24], предполагающий подготовку школьника к профессиональной и общественной жизни, мы считаем актуальной. Более того современные требования к результатам обучения математике включают не только овладение предметными знаниями, но и умениями применять данные знания в ситуациях повседневной жизни, при решении практических задач.

Понятие «задача» в педагогической литературе в широком смысле рассматривается как проблемная ситуация с явно заданной целью, которую необходимо достичь Т. Ф. Ефремова [25], а в более узком смысле задачей также называют саму эту цель, данную в рамках проблемной ситуации, то есть то, что требуется сделать. Под математической задачей она понимает вопрос математического характера, требующий нахождения решения по известным данным с соблюдением определенных условий. В словаре Ожегова определение задачи звучит следующим образом: «Задача – упражнение, которое выполняется посредством умозаключения, вычисления» [26].

В нашем исследовании мы будем их называть *«практико-ориентированные задачи, направленные на формирование элементов исследовательских умений с различной вариативностью заданий»* (курсив. – Авт.), учитывая их целевое назначение в процессе обучения.

Математические знания должны использоваться в различных ситуациях, чтобы у учащихся не сложилось впечатление, что математика далека от их повседневных потребностей. Результаты государственной итоговой аттестации учащихся 9-х и 11-х классов свидетельствуют о низком уровне сформированности умений использовать математические знания и методы для решения практико-ориентированных задач. Около половины учеников до конца не усваивают школьную программу по математике. К такому выводу пришли исследователи электронной базы олимпиад «Знаника». Они проанализировали почти 300 тыс. заданий по математике, выполненных 13 тыс. учеников 5-9 классов из 62 регионов России, то есть обнаруживается явный пробел в области базовых математических знаний для профильных классов. Эксперты считают, что подобная диагностика более полно, чем государственные экзамены, отражает реальную ситуацию с усвоением детьми школьной программы. Среди основных причин проблем с школьной программой эксперты называют недостаточное внимание обучению школьников к решению практико-ориентированных задач.

В государственные стандарты, как основного, так и общего образования включены требования формирования методологических знаний, исследовательских умений. В национальной образовательной инициативе «Наша новая школа» подчеркнута необходимость исследовательского обучения, «чтобы научиться изобретать, понимать и осваивать новое, выражать собственные мысли, принимать решения» [27]. Однако анализ сложившейся в современном среднем образовании ситуации показывает, что многие учителя испытывают затруднения при организации исследовательской деятельности учащихся (ИДУ).

Хотя многими исследователями отмечалось, к примеру, формирование исследовательских умений при решении математических задач динамического характера «может послужить основой деятельности по уточнению и упрочению знаний одними учащимися класса, по упрочению знаний и расширению области их применения – другими, по углублению знаний – третьими» [28, с. 40].

При разработке методики формирования элементов исследовательской деятельности обучающихся в процессе решения задач по математике в старших классах средней школы, следует, прежде всего, указать, что одной из основных проблем при этом является отбор по каждой теме соответствующих типов задач, наиболее целесообразных с точки зрения формирования элементов исследовательских умений и, вместе с тем, доступных обучающимся.

При решении задач с целью эффективности управления учебно-познавательной деятельностью обучающихся осуществляется пооперационная обратная связь, переходящая в промежуточную обратную связь и связь по конечному результату. Не менее важны и указания на

то, что в обучении математике ученик последовательно изучает одну дидактическую единицу материала за другой.

Оптимальность процесса формирования элементов исследовательской деятельности осуществляется за счет повышения эффективности усвоения его по времени, что достигается за счет приемов совместного усвоения обучающимися учебного материала, связанного с усвоением содержания, например, формул полной вероятности и Байеса.

4. Основы и этапы формирования элементов исследовательских умений при решении задач динамического характера

Основу задач динамического характера составляют серии взаимосвязанных проблем, основанных на обобщенных связях, которые раскрывают в диалектическом единстве теоретические и практические знания, с которой связана эта задача, с внутрипредметными и межпредметными связями, способствующие формированию элементов исследовательской деятельности обучающихся.

Вариативные вопросы потенциально способствуют обучающимся делать посильное "открытие" для себя, максимально повышая вклад обучаемого в это "открытие". Они связаны с определенной спецификой каждого из четырех этапов решения задачи: анализ, поиск способа решения, решение задачи и анализ задачи после его решения.

Полученная классификация ориентирует в составлении задач, а принятое определение сложности задачи позволяет определить оптимальную последовательность их предъявления обучающимся (в порядке повышения уровня сложности) в форме [29; 30] серии взаимосвязанных задач, которые раскрывают условия практического применения приобретенного знания. Обучающимся предлагается задача динамического характера в трех различных формах с различной вариативностью заданий, обеспечивающих реализацию принципа убывания помощи обучающимся. Вариативные вопросы служат направлением к действию, к посильному поиску, которые адекватны возможностям, помогают им понять суть своей учебной деятельности.

Идея убывания помощи обучаемому при работе с учебным материалом вытекает из структуры психической регуляции действия, состоящего из трех основных частей:

- 1) регуляционный (ориентировочной основы);
- 2) исполнительной (преобразование предмета действия);
- 3) контрольно-корректировочной.

В разных действиях и в разных условиях работы эти части (компоненты) представлены не в одинаковой степени и с неодинаковым порядком их выполнения. В процессе учебной деятельности каждая часть действия может стать самостоятельным действием. В этом случае цель действия состоит:

- 1) только в ориентировке (ООД), результатом которой должна стать, например, составление плана решения задачи или выделение условий, которые необходимо учитывать при решении задачи;
- 2) только в контроле для проверки правильности выполнения работы (решения задачи). Обучающимся можно предложить специальное задание на коррекцию, когда контроль уже произведен и необходимо устранить выделенные ошибки;
- 3) только в исполнительной части, как самостоятельное действие на основе ориентировки в готовом виде.

В принципе, каждый учитель, составляя задачу динамического характера, может прийти к своей исследовательской задаче, породившей серию заданий динамического характера. Он будет все отчетливее обнаруживать содержательные связи этой серии с исходной задачей (определять "креативное поле" задачи), постоянно находить ее новые возможности и этим самым способствовать развитию учащихся.

Любая задача (стандартная, нестандартная или задача повышенной трудности может быть преобразована в задачу динамического характера, при этом можно реализовать уровень сложности и трудности ее в зависимости от той группы учащихся, которой она предназначена. Задачи получали различную интерпретацию как по форме, так и по эвристической задачной информации. Она обретает иную форму и содержание, которое соответствует уровню сформированности способностей каждого ученика определенной группы.

Необходимо отметить, что в зависимости от контингента учащихся при дифференцируемом подходе к обучению можно предлагаемые задачи разбить на три группы, установить естественную сложность и трудность задач для каждой из них.

Таким образом, методическую обработку задач можно вести в несколько этапов с учетом следующих принципиальных условий такого отбора:

Первый этап. Выбранная задача анализируется с точки зрения ее доступности для самостоятельного решения обучающимися с учетом условия:

- наблюдаемый математический объект при решении задач должен быть посильным и принятым обучающимися;
- возможные гипотезы для обучающихся должны быть сравнительно простым, достаточно очевидными и опираться на имеющийся у них запас знаний и умений;
- каждая задача должна носить свой целенаправленный точно определенный характер, исходя из особенностей подросткового возраста.

Второй этап. На основе проведенного анализа первоначальное задание детализируется. Обучающиеся не сразу приступают к нему, а сначала они должны рассмотреть серию подготовительных заданий, которые представляют собой различные формы представления одной и той же выбранной задачи первого этапа. На этом этапе важно, чтобы методы проверки гипотез, возникших при решении задач, были достаточно простыми, доступными и состояли частично из знакомых учащимся приемов, с которыми они встречались ранее, чтобы доказательство проблемы можно было бы вести различными способами;

Третий этап. Обучающиеся приступают к решению, выбрав любую из предложенных форм предъявления по своему усмотрению, в процессе решения которого они должны увидеть к из форм предъявления можно свести все остальные.

– деланные выводы при решении задач должны находиться в ряду известных школьникам теоретических положений;

– по полученным выводам, сделанным общими усилиями учеников или с помощью учителя, целесообразно сделать заключение по выяснению их сферы практического применения. Если с этим обучающиеся не справляются, то целесообразно еще более легализировать задание путем наводящих вопросов, как это сделано ниже в четвертом этапе.

Четвертый этап. Наводящие вопросы должны учитывать разную степень подготовленности обучающихся, что предполагает предусмотреть несколько вариантов вопросов:

- вариант А – для менее подготовленных обучающихся, которые нуждаются в подробных подсказках;
- вариант В – для обучающихся, предпочитающих получить помощь, оставляющую простор для собственного творчества;
- вариант С – для обучающихся, нуждающихся не в помощи, а в раскрытии перспектив применения тех методов, которые использовались в рассмотренном задании.

5. Практическая часть исследования

Обучающимся предлагается задача в трех различных формах предъявления, с различной вариативностью заданий, обеспечивающих реализацию принципа убывания помощи обучающемуся в процессе его учебной деятельности. Вариативные вопросы служат направлением к

действию, к усиленному поиску, которые адекватны их возможностям, помогает им понять суть учебной деятельности.

Вариативные задачи охватывают все 4 этапа решения задачи. Динамическая задача может формироваться в двух направлениях: от основного задания - к серии взаимосвязанных проблем и от цепочки взаимосвязанных проблем - к формулировке основного задания.

Ниже раскрываются методические основы подбора задач по математике для старших классов по формированию элементов исследовательской деятельности, сущность которых состоит в целенаправленной методической обработке задач с учетом вышеуказанных требований.

Для проведения более целенаправленной, практической работы с обучающимися потребовался определенный подход к форме предъявления отобранных задач и приводятся примеры такой работы.

Сказанное выше позволяет составить систему задач, которая ориентирована на формирование универсальных умственных действий при освоении практически любого учебного содержания.

(1) Серия задач с одной формой предъявления

Задача №1.

Условие: Имеется две урны. В первой урне 6 белых и 4 черных шара, во второй – 8 белых и 2 черных шара. Из первой урны наугад выбирается шар и перекладывается во вторую урну. После из второй урны наудачу выбирается шар.

Задание: Определить вероятность извлечения белого шара из второй урны.

Решение

Пусть A – событие, означающее, что извлекли белый шар из урны в выборе белого шара.

Событие A наступает совместно с одной из *гипотез*:

H_1 – событие, означающее, что переложили белый шар из первой урны во вторую;

H_2 – событие, означающее, что переложили белый шар из первой урны во вторую.

Исходя из условий задачи, необходимо определить вероятность гипотез $P(H_1)$, $P(H_2)$, $P(A/H_1)$, $P(A/H_2)$ по формулам непосредственного подсчета вероятностей, а затем подсчитаем $P(A)$.

Результаты оформим следующим образом:

$$P(H_1) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}; P\left(\frac{A}{H_1}\right) = \frac{9}{11}$$

$$P(H_2) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}; P\left(\frac{A}{H_2}\right) = \frac{8}{11}$$

По формуле полной вероятности находим вероятность события A :

$$P(A) = P(H_1) P\left(\frac{A}{H_1}\right) + P(H_2) P\left(\frac{A}{H_2}\right) = \frac{3}{5} \cdot \frac{9}{11} + \frac{2}{5} \cdot \frac{8}{11} = \frac{43}{55}$$

Ответ: $\frac{43}{55}$

Задача №2.

Условие: Имеется две урны. В первой урне 3 белых и 2 черных шара, во второй – 4 белых и 1 черных шара. Из первой урны наугад выбираются два шара и перекладываются во вторую урну. После из второй урны наудачу выбирается шар.

Задание: Найти вероятность того, что шар, вынутый из второй урны после перекладывания, окажется белым.

Решение

Пусть A – событие, означающее, что извлекли белый шар из второй урны.

Рассмотрим *гипотезы*:

H_1 – событие, означающее, что из первой урны сначала вынут белый шар, а затем черный ($H_1 = B \cdot Ч$);

H_2 – событие, означающее, что из первой урны сначала вынут черный шар, а затем белый ($H_2 = Ч \cdot B$);

H_3 – событие, означающее, что из первой урны сначала вынут белый шар, а затем белый ($H_3 = B \cdot B$);

H_4 – событие, означающее, что из первой урны сначала вынут черный шар, а затем черный ($H_4 = Ч \cdot Ч$);

Используя формулу непосредственного подсчета вероятностей и теорему умножения вероятностей, имеем:

$$P(H_1) = P(B \cdot Ч) = P(B) \cdot P\left(\frac{Ч}{B}\right) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = 0,3; P\left(\frac{A}{H_1}\right) = \frac{5}{7};$$

$$P(H_2) = P(Ч \cdot B) = P(Ч) \cdot P\left(\frac{B}{Ч}\right) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = 0,3; P\left(\frac{A}{H_2}\right) = \frac{5}{7};$$

$$P(H_3) = P(B \cdot B) = P(B) \cdot P\left(\frac{B}{B}\right) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = 0,3; P\left(\frac{A}{H_3}\right) = \frac{6}{7};$$

$$P(H_4) = P(Ч \cdot Ч) = P(Ч) \cdot P\left(\frac{Ч}{Ч}\right) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = 0,1; P\left(\frac{A}{H_4}\right) = \frac{4}{7};$$

По формуле полной вероятности получаем:

$$P(A) = P(H_1) P\left(\frac{A}{H_1}\right) + P(H_2) P\left(\frac{A}{H_2}\right) + P(H_3) P\left(\frac{A}{H_3}\right) + P(H_4) P\left(\frac{A}{H_4}\right) = 0,3 \cdot \frac{5}{7} + 0,3 \cdot \frac{5}{7} + 0,3 \cdot \frac{6}{7} + 0,1 \cdot \frac{4}{7} = \frac{13}{35}$$

Ответ: $\frac{13}{35}$

(2) Серия задач с двумя формами предъявления

Задача № 2.1.

ФП_1. В пирамиде 10 винтовок, три из которых снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом равна 0,95; без оптического прицела – 0,8. Определить: а) вероятность того, что мишень будет поражена, если стрелок произведет один выстрел из наудачу взятой винтовки; б) вероятность того, что поражение осуществлено из винтовки с оптическим прицелом, без оптического прицела.

ФП_2. В пирамиде находятся винтовки с оптическим прицелом и без него, выбор которых осуществляется соответственно, как 3:7. Стрелок поражает в среднем из 10G мишеней 95 с оптическим прицелом и 80 без оптического прицела. Определить: а) вероятность того, что мишень будет поражена, если стрелок произведет выстрел из наудачу взятой винтовки; б) вероятность того, что поражение мишени осуществлено из винтовки с оптическим прицелом, без оптического прицела.

Решение задачи М 2.1.

Решение ФП_1.

Введем обозначения:

A – мишень поражена;

H_1 – выбор винтовки с оптическим прицелом,

H_2 – выбор винтовки без оптического прицела.

Используя формулу непосредственного подсчета вероятностей, определим начала $P(H_i)$, $P(A/H_i)$, где $i=1,2$, а затем $P(A)$, $P(H_i/A)$, где $i = 1,2$.

Результаты оформим следующим образом:

$$P(H_1) = \frac{3}{10}; P(A/H_1) = 0,95;$$

$$P(H_2) = \frac{7}{10}; P(A/H_2) = 0,8.$$

По формуле полной вероятности рассчитаем:

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) = 0,3*0,95 + 0,7*0,8 = 0,845.$$

Применяя формулу Байеса, получаем:

$$P\left(\frac{H_1}{A}\right) = \frac{P(H_1)P\left(\frac{A}{H_1}\right)}{P(A)} = \frac{0,3*0,95}{0,845} = \frac{57}{169};$$

$$P\left(\frac{H_2}{A}\right) = \frac{P(H_2)P\left(\frac{A}{H_2}\right)}{P(A)} = \frac{0,7*0,8}{0,845} = \frac{112}{169}.$$

$$\text{Ответ: а) } 0,845; \text{ б) } \frac{57}{169}; \frac{112}{169}.$$

Решение ФП_2.

Пусть событие A – мишень поражена из наудачу взятой винтовки. A происходит совместно с одной из гипотез:

H_1 – выбор винтовки с оптическим прицелом;

H_2 – выбор винтовки без оптического прицела.

Исходя из условия задачи, определим вероятности $P(H_1)$ и $P(H_2)$, условные вероятности $P(A/H_i)$, где $i = 1, 2$ по формулам непосредственного вычисления вероятностей, а затем подсчитаем $P(A)$.

Результаты оформим следующим образом:

$$P(H_1) = \frac{3}{10}; P(A/H_1) = \frac{95}{100} = 0,95;$$

$$P(H_2) = \frac{7}{10}; P(A/H_2) = \frac{80}{100} = 0,8.$$

Используя формулу полной вероятности, получим:

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) = 0,3*0,95 + 0,7*0,8 = 0,845.$$

Применяя формулу Байеса, получаем:

$$P\left(\frac{H_1}{A}\right) = \frac{P(H_1)P\left(\frac{A}{H_1}\right)}{P(A)} = \frac{0,3*0,95}{0,845} = \frac{57}{169};$$

$$P\left(\frac{H_2}{A}\right) = \frac{P(H_2)P\left(\frac{A}{H_2}\right)}{P(A)} = \frac{0,7*0,8}{0,845} = \frac{112}{169}.$$

$$\text{Ответ: а) } 0,845; \text{ б) } \frac{57}{169}; \frac{112}{169}.$$

Аналогично можно составить серия задач с тремя и/или четырьмя формами предъявления.

6. Выводы

Составленные задачи позволяют реализовать дифференцированный подход обучения; в различных задачах дается разное количество взаимосвязанных проблем, которые отличаются сложностью, при этом учащиеся мысленно могут быть разделены на несколько групп (в

данном случае на три группы) с помощью соответствующих тестов. В процессе обучения учащиеся получают полную возможность перехода из одной группы в другую более "сильную".

Проблемы внутри каждой задачи расположены в порядке возрастания сложности и трудности. В ряде задач использовался принцип "наведения открытия" того или иного математического факта.

Изложенное выше требования к построению системы задач могут воплощаться в любом учебном материале, который представляет естественное поле деятельности обучающегося, вызывает у них определенный интерес.

Практическое использование предложенной авторами методики конструирования серий задач обеспечивает создание в учебном процессе комплексных условий достижения предметных результатов и интеллектуального развития обучающихся.

7. Потенциал методов и средств информатики при реализации межпредметных связей информатики и математики

1. Современное математическое образование постоянно находится в зоне повышенного внимания исследователей, занимающихся проблемами математического образования в России и других странах СНГ. Это связано прежде всего с тем, что концепция школьного курса математики уже не отвечает социальному заказу современного общества, и, как следствие, активные поиски новых подходов к подготовке учителя математики в педвузах. Дело даже не в том, что элементы математического анализа в той или иной степени входят в программу школьного курса математики или факультативных курсов. Дело в том, что идеи и методы анализа в явной или неявной форме пронизывают, например, весь школьный курс алгебры 7–11, одной из приоритетных содержательно-методических линий которого является функционально-графическая линия. Но традиционно сложилось так, что исследователи, занимающиеся проблемами профессионально-ориентированной постановки курса математического анализа в педвузах, уделяют внимание лишь начальным разделам анализа (функция, предел, производная, интеграл).

2. Сегодня отчетливей стала видна роль методов и средств информатики в формировании современной научной картины мира, фундаментальный характер основных понятий, законов и универсальность методологии информатики, а информационные процессы – фундаментальная реальность окружающего мира, определяющий компонент современной информационной цивилизации. Информатика имеет очень большое число междисциплинарных связей как на понятийном уровне, так и на уровне инструментария. Многие положения, развиваемые информатикой, рассматриваются как основа создания и использования информационных и коммуникационных технологий (ИКТ), благодаря которым формируются многие виды деятельности (моделирование объектов и процессов, сбор, хранение, обработка и передача информации, управление объектами и процессами и т. д.).

3. Информатика и математика имеют общее научное основание и являются родственными науками, т. е. математика – это язык информатики (в большей степени дискретная математика), а информатика – метаязык науки. У информатики и математики много общих тем (алгоритм, кодирование, математическая модель, числовое преобразование и т. д.). Однако, математика изучает форму, а информатика – форму и содержание, то есть "в отличии от математики, информатика изучает свой предмет и по форме, и по содержанию. Объектом ее? исследования является информация, определяемая в неразделимом единстве *формы и содержания*" [31, с. 44]. Изучение объектов только по форме ведет к *формализму* в информационной среде (что недопустимо), поэтому здесь возможная интеграция должна сочетаться с необходимой *дифференциацией* [см.: там же].

4. Информатика является метапредметной наукой, имеющей множество межпредметных

связей с множеством наук и научно-прикладных систем. Поэтому и предмет информатики образует множество *межпредметных связей* с другими системами обучения, как естественно-научного цикла, так и гуманитарного.

Особое значение для него имеют межпредметные связи с предметом математики, вместе с которым он в соответствии с ФГОС образует в настоящее время единую образовательную область. Следовательно, *принципиально* следующее: *Методическая система обучения информатике должна иметь направленность на определение и реализацию межпредметных связей с обучением математики и другими образовательными предметами.*

5. Предметные результаты в сфере познавательной деятельности отражают внутреннюю логику развития учебного предмета: от информационных процессов через инструмент их познания – моделирование к алгоритмам и информационным технологиям. В этой последовательности формируется, в частности, сложное логическое действие – общий прием решения задач.

8. Влияние моделирования на методическую систему обучения

Системный характер содержания определяется тремя сквозными направлениями:

- информация и информационные процессы;
- моделирование, информационные модели;
- области применения методов и средств информатики.

Данные направления отражают в применении к информатике общую схему познания, характерную для естественно-научных дисциплин:

”объект познания-инструмент познания-область применения”.

Влияние информатизации образования на обучение и методическую систему обучения информатике и математике, на содержание, формы, средства (ресурсы, технологии) обучения рассматривается в парадигме следующих межсистемных отношений:

Образование – информатизация образования – информатика – обучение информатике

Образование – информатизация образования – математика – обучение математике

На наш взгляд, это следует считать одним из важных *принципом* построения методической системы обучения информатике и математике.

Моделирование в методической системе обучения информатике рассматривается как *методологический принцип информационного познания*, специфически выражающий общенаучный принцип системности и реализующий системный подход в социально-информационной среде, в познавательной сфере.

Умение составлять математические модели реальных процессов и работать с ними, используя адекватные средства, – составная часть общей культуры человека, особенно в наше время, в период активной информатизации и математизации различных отраслей знаний.

Мы в то же время вынуждены констатировать: к ее реализации современный учитель математики и/или информатики не совсем подготовлен, поскольку в период обучения студентов в стенах педвуза гуманитарная составляющая математических курсов далеко не всегда выводится на первый план. В этой связи особенно велика ИКТ-компетентности учителя информатики и математики, где, по сути дела, методы и средства информатики, математическая модель и математический язык – ключевые составляющие информационной и математической культуры учителя. Это нашло отражение и реализовано в современных основных образовательных программах (ООП) и фактически определяют новый формат модели подготовки будущего учителя к профессионально-педагогической деятельности [22; 32; 33; 34].

В Федеральных государственных образовательных стандартах (ФГОС ВО), определяют необходимость ориентации образовательных систем на обеспечение современного качества образования, определяя результат подготовки выпускников вузов в виде сформированности их

общекультурных (ОК) и профессиональных компетенций (ПК).

В основу модели подготовки выпускника вуза положен компетентностный подход, который объединяет его профессиональную квалификацию с общедисциплинарными требованиями к результату образования и, как следствие, «подготовка будущего учителя должна осуществляться в логике компетентностного подхода и сводиться к формированию профессиональной компетентности, а средств ИКТ как процесс формирования инструментария в жизни и ИКТ-компетенций для профессиональной деятельности выпускника школы» [34, с. 284–285].

В теории и практики образования (и не только в образовании) нередко встречается большое количество интерпретаций, трактовок и дефиниций одних тех же научных понятий и терминов.

В нашей работе (в тексте) используются термины компетентность и компетенция. Мы считаем, что термины *компетенция* всегда относится к описанию функционала преподавателя, а *компетентность* – к способности преподавателя выполнять соответствующие функции, а ключевые компетенции, проявляющиеся как требования к их качеству «должны характеризовать уровень готовности учителя к профессиональной деятельности, а его профессиональная подготовка должна обеспечивать формирование компетенций, позволяющей проектировать и реализовывать ИКОС» [22].

Необходимость формирования ИКТ-компетентности продиктовано тем, что ФГОС [35; 36] для общего образования содержит в качестве требования к условиям образовательного процесса профессиональные ИКТ-компетенции преподавателя, в частности работу в информационной образовательной среде.

В нашей работе речь идет о необходимости формирования ИКТ-компетенции, позволяющие субъектам образования использовать методы и средства информатики в процессе решения математических задач. В этом процессе очень важно выделить инвариантное ядро ИКТ-компетенций, а также вариативную составляющую, характеризующую данную область деятельности. Преподаватель, прежде всего, должен быть способен на профессиональном уровне помочь обучающимся освоить и использовать ИКТ при решении задачи.

Сложившаяся в настоящее время практика формирования ИКТ-компетенции, ограничивается, как правило, их технологической составляющей. Это связано с тем, что ИКТ – компетенции рассматриваются, в основном, как необходимое условие учебно-познавательной деятельности субъектов образования в информационной образовательной среде. Такое понимание ИКТ-компетенций резко сужает их значимость в достижении предметных, личностных и метапредметных и образовательных результатов, сформулированных в ФГОС.

С другой стороны, ИКТ-компетенции, в целом, отражают точку зрения многих авторов (М. М. Абдуразаков, А. А. Кузнецов, В. В. Лаптев, М. П. Лапчик, В. М. Монахов, Е. К. Хеннер, и др.), исходя из специфики их профессионально-педагогической деятельности, и не обладают мотивированной внутренней логикой. Это приводит к тому, что само понятие ИКТ-компетентности становится расплывчатым и неопределенным, что крайне затрудняет процесс его формирования. Более того, структура ИКТ-компетентности во-многом зависит от характера профессиональной деятельности учителя.

Необходимо отметить, что понятие ИКТ-компетенция является далеко идущим развитием понятия компьютерной грамотности и современному преподавателю ИКТ-компетентность необходима для осуществления успешной деятельности в самых различных областях, для решения задач, базирующих на видах деятельности, в основе которых лежит информационная деятельность. Например, преподавателю жизненно необходимо понимать и уметь использовать их дидактический потенциал, в частности:

- (i) для решения задач, возникающих в профессиональной и педагогической деятельности;
- (ii) для развития ИОС, обеспечивающая гарантированного достижения планируемых ре-

зультатов.

- (iii) для создания нового и модернизировать уже существующего УМО по предметам;
- (iv) для внедрения и использования новых методов и форм обучения и т. д.

Процессы творческого мышления и воображения при решении задач позволяют выявить знание обучающимися связей между явлениями и умением это знание применить, сравнивают и различают отдельные факты, проводят анализ и синтез, делают обобщения, обнаруживают связь понятий между собой. Применение знаний требует проведения ряда операций, объяснения возникающих явлений.

При решении задач обучающиеся оперируют определенной системой понятий, а умение применить эти понятия, провести соответствующее обоснование при помощи логических операций говорит об уровне математического развития обучающихся. Содержание этих задач, разумеется, самое разное, однако, как показано исследователями, последовательность этапов решения, для широкого класса задач одна и та же. Принципиальный момент заключается в том, что фундаментальный характер ИКТ-компетенций является умение осуществлять полный цикл решения задачи с использованием ИКТ на каждом этапе. И как вследствие этого, "каждый этап решения определяет вполне определенные знания, умения и опыт, которые в совокупности и определяют инвариантное ядро ИКТ-компетенций, которое в настоящее время приобретает особое значение для подготовки учителей" [29].

Последовательность полного цикла решения задачи содержит следующие шаги:

- (i) (1) постановки задачи;
- (2) построение и анализ моделей рассматриваемых в задаче объектов и процессов;
- (3) выбора метода решения задачи;
- (4) формализации;
- (5) реализации выбранного метода, в том числе программной;
- (6) анализа полученных результатов, коррекция моделей и метода решения;
- (7) использовании полученных результатов.

Каждый этап решения определяет вполне определенные знания, умения и опыт, которые в совокупности и определяют инвариантное ядро ИКТ-компетенций [7, 21].

- (i) (1) А. а. Деятельность учащегося связана, прежде всего, с обучением. Сегодня все большую популярность приобретают образовательные Веб-квесты, технология которая сочетает в себе активные методы обучения с использованием Internet и Web-технологии при выполнении проблемных, проектных и исследовательских заданий.
- б. Образовательный Веб-квест, как педагогическая технология, включает в себя набор проблемных заданий и/или задач, для выполнения которых определенно требуются Интернет- и Веб-ресурсы образовательного назначения. Веб-квесты могут быть *объектно-ориентированными*, *проблемно-ориентированными* и *предметно-ориентированными* и, соответственно, охватывать отдельную проблему, учебный предмет или тему, также могут быть межпредметными. Эти технологии на прямую связаны с процессом решения задач и направлены на развитие учебно-познавательной деятельности, формирование элементов исследовательской деятельности, самостоятельности обучающихся в процессе изучения информатики, математики и по другим учебным предметам, но эта отдельная тема для исследований, дискуссий и далеко выходит заявленной нами темы.

Заключение

Основной *целью* обучения является освоения этапов решения задачи, что позволит обеспечить единство в достижения предметных и метапредметных результатов обучения; цель формирования ИКТ-компетенций должно одновременно способствовать формированию универсальных учебных действий и достижению предметных результатов в рамках выбранной предметной области, в данном случае области «Математика и информатика».

Современное решение проблемы реализации теоретической модели задачной ситуации умственного действия как основа построения серий взаимосвязанных задач связывается практической ее реализацией, в ходе которой формируются исследовательские умения и развитие формы исследовательской активности у обучающихся в процессе изучения математики, через решения взаимосвязанных динамических задач.

Содержание задач, реализующих этапы решения задач, извлекается из предметной области «Математика и информатика». При этом математика и информатика – это два разных учебных предмета, однако имеют очень схожую метапредметную составляющую. На этапах решения задачи математические знания, необходимые для изучения тем информатики, и наоборот, методы и средства информатики при изучении тем математики, могут быть перенесены в готовом виде.

Достаточно адекватное отражение содержательной модели в обучении обеспечит формирование и развитие ИКТ-компетенции обучающихся, результата их обучения и умения учиться.

Методы обучения, основаны на принципе единства рационального и визуального. Поскольку в учебном процессе обучающимся предъявляются большой объем информации и знании различного формата представления, то задача обучаемого распознать представленную информацию (знания, условие задачи и т. д.) и усвоить ее, а ИКТ представляют все возможности обучаемому для получения и обработки такой информации, что играет важную роль при формировании ИКТ-компетенций учителя в процессе преподавания школе в целом играют важную роль.

Формы обучения, преимущественно исследовательские и проектные, с решением задач различных типов, что характерно как для методической системы обучение информатике и математике в общеобразовательной школе, так и для методической системы подготовки будущего учителя в вузе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абдуразаков М. М., Мухидинов М. Г. Модель подготовки к профессиональной деятельности учителя информатики // Педагогика. № 5. 2016. С. 71–79.
2. Лазебникова А. Ю., Коротенков Ю. Г. Информатизация образования как социальный процесс. М.: ИСМО РАО, 2010. 60 с.
3. Гоббс Т. Избранные произведения: В 2 т. М., 1964.
4. Крупич В. И. Теоретические основы обучения решению школьных математических задач: Дис. ... д-ра пед. наук. М., 1992. 395 с.
5. Практико-ориентированные задачи: структура, уровни сложности и алгоритм их составления [Электронный ресурс]. URL: <http://festival.1september.ru/articles/642510/>
6. Терешин Н. А. Прикладная направленность школьного курса математики: Кн. для учителя. М.: Просвещение, 2014. 96 с.
7. Вечтомов Е. М. Основные математические структуры. Киров: Радуга-ПРЕСС, 2013. 292 с.

8. Ершов А. П. Избранные труды. Новосибирск: Наука, Сибирская издательская фирма, 1994. 413 с.
9. Клековкин Г. А. Проблемы обучения в условиях открытого информационного пространства // Образование и наука. 2014. № 7 (116). С. 4–23.
10. Перминов Е. А. Методическая система обучения дискретной математике студентов педагогических направлений в аспекте интеграции образования: Моногр. Екатеринбург: РГППУ, 2013. 286 с.
11. Тестов В. А. Обновление содержания обучения математике: исторические и методологические аспекты: Моногр. Вологда: ВГПУ, 2012. 176 с.
12. Хеннер Е. К. Формирование ИКТ-компетентности учащихся и преподавателей в системе непрерывного образования. М.: Бином, 2008. 188 с.
13. Токмазов Г. В. Базисные условия формирования исследовательских умений в процессе изучения математики. Компетентность специалиста. Высшее образование сегодня. № 7. 2015. С. 11–15.
14. Гальперин П. Я. Развитие исследований по формированию умственных действий // Психологическая наука в СССР. М., 1959. Т. 1. С. 441–469.
15. Гурова Л. Л. Психологический анализ решения задач. Воронеж: Изд-во Воронежского ун-та, 1976. 314 с.
16. Матюшкин А. М. Проблемные ситуации в мышлении и обучении. М.: Просвещение, 1972. 196 с.
17. Талызина Н. Ф. Управление процессом усвоения знаний: Психологические основы. 2-е изд., доп. и испр. М.: МГУ, 1984. 344 с.
18. Шамова Т. И. Активизация учения школьников. М.: Педагогика, 1982. 203 с.
19. Журавлев Ю. И. Фундаментально-математический и общекультурный аспекты школьной информатики // Вопросы образования. 2005. № 3. С. 192–200.
20. Дзамыхов А. Х. Структура и содержание методической системы совместного изучения информатики и математики в вузе // Азимут научных исследований: педагогика и психология. 2014. № 4. С. 49–53.
21. Асмолов А. Г., Семенов А. Л., Уваров А. Ю. Российская школа и новые информационные технологии: взгляд в следующее десятилетие. М.: Изд-во «НексПринт», 2010. 84 с.
22. Абдуразаков М. М. Развитие компонентов профессиональной деятельности учителя информатики в контексте реализации компетентностного подхода в образовании // Информатика и образование. № 6. 2014. С. 75–78.
23. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования [Электронный ресурс]. URL: https://fgos.ru/fgos_ru_osnov.pdf.pdf (дата обращения: 08.04.2019).
24. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего общего образования [Электронный ресурс]. URL: [fgos_ru_sred.pdf.pdf](https://fgos.ru/fgos_ru_sred.pdf.pdf) (дата обращения: 08.04.2019).

25. Ефремова Т. Ф. Новый словарь русского языка. Толково-образовательный: В 2 т. М.: Рус. яз., 2000. 1209 с.
26. Ожегов С. И. Словарь русского языка: 53000 слов / Под общ. ред. проф. Л. И. Скворцова. 24-е изд., испр. М: Оникс, Мир и образование, 2013. 1200 с.
27. Национальная образовательная инициатива «Наша новая школа»
<http://news.kremlin.ru/news/6683> (дата обращения 14.04.2011)
28. Технология обучения в классах с малой наполняемостью сельских школ: из опыта работы учителей Нижегородской области: сб. методических статей / Науч. ред. М. И. Зайкин. Арзамас: Н.-Новгород, 1995. 85 с.
29. Токмазов Г. В. Задачи динамического характера // Математика в школе. 1994, № 5. С. 9–12.
30. Токмазов Г. В. Дифференцированный подход при обучении решению дифференцированных уравнений: Учеб. пособие. МПГУ им. В. И. Ленина. М.: Изд-во «Прометей», 1995. 100 с.
31. Коротенков Ю. Г. Обучение информатике и ИКТ в современном образовании. Современные информационные технологии и ИТ-образование. (25–26 ноября 2016 г.). М.: МГУ им. М. В. Ломоносова, 2016. С. 43–49. <http://it-edu.oit.cmc.msu.ru/index.php/SITITO/sitito-2016/paper/download/202/183>
32. Кузнецов А. А., Монахов В. М., Абдуразаков М. М. Методические рекомендации учителю по проектированию основной образовательной программы по информатике в соответствии с требованиями ФГОС второго поколения // Информатика и образование. № 10 (279). 2016. С. 9–17.
33. Dzamyhov A. Kh., Aslanova M. T. (2018). Formation of teachers' ICT-competencies in the field "Computer Science and Mathematics". The European Proceedings of Social & Behavioural Sciences EpSBS. Pp. 1-10. DOI: <https://dx.doi.org/10.15405/epsbs.2018.09.02.22>
34. Абдуразаков М. М. Пути оптимизации содержания общеобразовательного курса информатики в основной школе / М. М. Абдуразаков // Современные информационные технологии и ИТ-образование. М.: МГУ им. М. В. Ломоносова, 2015. С. 284–291. Режим доступа: https://elibrary.ru/download/elibrary_25024595_29365823.pdf
35. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования. 2012. Режим доступа: <http://минобрнауки.рф/>
36. Федеральный государственный образовательный стандарт начального общего образов <http://минобрнауки.рф>.

REFERENCES

1. Abdurazakov M. M., Mukhidinov M. G. Model of preparation for the professional activity of a computer science teacher Pedagogy. № 5. 2016. P. 71–79.
2. Lazebnikova A. Yu., Korotnikov Yu. G. Informatization of education as a social process. М.: ISMO RAO, 2010. P. 60.
3. Hobbes T. Selected works in 2 tons. М., 1964.

4. Krupich V. I. Theoretical foundations of learning to solve school math problems: Dis. ... doctor ped. sciences. M., 1992. p. 395.
5. Practice-oriented tasks: structure, levels of complexity and an algorithm for their compilation [Electronic resource]. URL: <http://festival.1september.ru/articles/642510/>
6. Tereshin N. A. Applied orientation of the school course of mathematics: Book. for the teacher. M.: Enlightenment, 2014. p. 96.
7. Vechtomov E. M. Basic mathematical structures. Kirov: Rainbow Press, 2013. p. 292.
8. Ershov A. P. Selected Works. Novosibirsk: Science, Siberian Publishing Company, 1994. p. 413.
9. Klekovkin G. A. Problems of education in the conditions of open information space // Education and Science. 2014. No. 7 (116). pp. 4–23.
10. Perminov E. A. Methodical system of teaching discrete mathematics to students of pedagogical directions in the aspect of integrating education: monograph. Ekaterinburg: RGPPU, 2013. p. 286.
11. Testov V. A. Updating the content of teaching mathematics: historical and methodological aspects: monograph. Vologda: VSPU, 2012. p. 176.
12. Henner E. K. Formation of ICT-competence of students and teachers in the system of continuous education. M.: Binom, 2008. p. 188.
13. Tokmazov G. V. Basic conditions for the formation of research skills in the process of studying mathematics. Competence of a specialist // Higher education today. № 7. 2015. pp. 11–15.
14. Halperin P. Ya. The development of research on the formation of mental actions // Psychological Science in the USSR. M., 1959. V. 1. pp. 441–469.
15. Gurova L. L. Psychological analysis of problem solving. Voronezh: Voronezh University Press, 1976. p. 314.
16. Matyushkin A. M. Problem situations in thinking and learning. M.: Enlightenment, 1972. p. 196.
17. Talyzina N. F. Management of the process of learning knowledge: Psychological foundations. 2nd ed., Ext. and rev. M.: Moscow State University, 1984. p. 344.
18. Shamova T. I. The revitalization of the teachings of students. M.: Pedagogy, 1982. p. 203.
19. Zhuravlev Yu. I. Fundamental-mathematical and general cultural aspects of school informatics // Education Issues. 2005. № 3. pp. 192–200.
20. Dzamyhov A. Kh. The structure and content of the methodical system for the joint study of computer science and mathematics in high school / Azimuth of scientific research: pedagogy and psychology. 2014. 4. pp. 49–53.
21. Asmolov A. G., Semenov A. L., Uvarov A. Yu. Russian School and New Information Technologies: A Look into the Next Decade. M.: Publishing house "NexPrint 2010. p. 84.
22. Abdurazakov M. M. Development of the components of the professional activity of a computer science teacher in the context of the implementation of a competence-based approach in education // Computer science and education. № 6. 2014. pp. 75–78.

23. Federal State Educational Standard of Basic General Education [Electronic resource]. URL: https://fgos.ru/fgos_ru_osnov.pdf.pdf (access date: 04/08/2019).
24. Federal State Educational Standard of Secondary General Education [Electronic resource]. URL: https://fgos_ru_sred.pdf.pdf (access date: 04/08/2019).
25. Efremova T. F. New dictionary of the Russian language. Explanatory and educational. M.: Rus. Lang. 2000. In 2 tons. p. 1209.
26. Ozhegov S. I. Dictionary of the Russian language: 53,000 words / ed. prof. L. I. Skvortsova. 24th ed., Rev. M: Onyx, Peace and Education, 2013. p. 1200.
27. National educational initiative "Our New School" <http://news.kremlin.ru/news/6683> (appeal date 04/14/2011)
28. Technology of education in classes with low occupancy in rural schools: from the experience of teachers in the Nizhny Novgorod region: Sat. methodical articles / Scientific ed. M. I. Zaikin. Arzamas: N.-Novgorod, 1995. p. 85.
29. Tokmazov G. V. Problems of a dynamic nature // Mathematics in school. 1994. № 5. pp. 9-12.
30. Tokmazov G. V. A differentiated approach in teaching the solution of differentiated equations. Tutorial. M.: MPGU, Publishing House "Prometheus", 1995. p. 100.
31. Korotkov Yu. G. Teaching Computer Science and ICT in Modern Education. Modern information technology and IT education. (November 25–26, 2016). Moscow: Moscow State University by M. V. Lomonosov, 2016. pp. 43–49
<http://it-edu.oit.cmc.msu.ru/index.php/SITITO/sitito-2016/paper/download/202/183>
32. Kuznetsov A. A., Monakhov V. M., Abdurazakov M. M. Methodical recommendations to the teacher on the design of the basic educational program in computer science in accordance with the requirements of the Second Federal State Educational Standard // Informatics and education. No. 10 (279). 2016. pp. 9–17.
33. Dzamyhov A. Kh., Aslanova M. T. (2018). Formation of teachers 'ICT competencies in the field "Computer Science and Mathematics ". The European Proceedings of Social & Behavioural Sciences EpSBS. Pp. 1–10. DOI: <https://dx.doi.org/10.15405/epsbs.2018.09.02.22>
34. Abdurazakov M. M. Ways to optimize the content of general education informatics course in basic school // Modern information technologies and IT education. M.: MSU. by M. V. Lomonosov, 2015. pp. 284–291. Access mode:
https://elibrary.ru/download/elibrary_25024595_29365823.pdf
35. Federal state educational standard of basic general education. 2012. Access mode:
<http://минобрнауки.рф/>
36. Federal state educational standard of the initial general images <http://минобрнауки.рф.>

Получено 18.03.2017 г.

Принято в печать 12.07.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 2.

УДК 539.21:621.785

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-462-477

Развитие математических моделей пластических сред для ресурсосберегающих технологий металлических систем¹

Г. М. Журавлев, А. Е. Гвоздев, А. П. Навоев, А. А. Жуков, Н. Н. Добровольский,
А. А. Шатульский, Д. В. Малий

Журавлев Геннадий Модестович — доктор технических наук, профессор, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: genadiyzhuravleff@yandex.ru

Гвоздев Александр Евгеньевич — доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник кафедры технологии и сервиса, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru

Навоев Андрей Павлович — инженер, Рыбинский государственный авиационный технический университет имени П. А. Соловьева (г. Рыбинск).

e-mail: Navoev@yandex.ru

Жуков Анатолий Алексеевич — кандидат технических наук, профессор Рыбинский государственный авиационный технический университет имени П. А. Соловьева (г. Рыбинск).

e-mail: anat.juckov2013@yandex.ru

Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет; доцент кафедры алгебры, математического анализа и геометрии, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Шатульский Александр Анатольевич — доктор технических наук, профессор, Рыбинский государственный авиационный технический университет имени П. А. Соловьева (г. Рыбинск).

e-mail: shatulsky@rsatu.ru

Малий Дмитрий Владимирович — старший преподаватель кафедры технологии и сервиса, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: maliydmitriy@yandex.ru

Аннотация

Развитие техники выдвигает более сложные задачи, эффективное решение которых связано с уточнением математических моделей изучаемых процессов пластического формоизменения металлических систем (металлов, сталей, цветных сплавов) различных химических составов и технологий получения (традиционный слитковый передел, порошковое производство, наноструктурные материалы). Для построения решения используется интегрирование дифференциальных уравнений, описывающих физические процессы, происходящие при пластическом течении или вариационный подход, основанный на построении исходного функционала, но в том и другом случае точность математического моделирования процесса будет зависеть от принятой математической модели среды. В работе

¹Работа выполнена в рамках реализации федеральной целевой программы «Исследование и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2014-2020 годы» (уникальный идентификатор проекта RFMEF 157717X0271)

рассмотрены этапы развития различных моделей пластических сред, от простейшей жесткопластической модели, не учитывающей изменение свойств материала, к более сложным – вязкопластической модели, учитывающей появление вязкости при повышении температуры обработки и дилатирующей модели, которая позволяет учитывать изменение плотности материала и тем самым прогнозировать деформационное разрушение. Правильное использование математических моделей пластических сред дает возможность повысить точность расчета технологических режимов, сокращая тем самым время на освоение выпуска новой продукции и может быть применено для разработки технологических процессов получения изделий методами аддитивных технологий на основе лазерного спекания и сплавления порошковых сплавов, технологий термопластической обработки и процессов упрочняющей химико-термической и термической обработок металлических систем различных химических составов.

Ключевые слова: пластическое формоизменение, математическая модель среды, жесткопластическая, вязкопластическая, дилатирующая, математические соотношения, пластическое течение, металлические системы, порошковые сплавы.

Библиография: 32 названия.

Для цитирования:

Г. М. Журавлев, А. Е. Гвоздев, А. П. Навоев, А. А. Жуков, Н. Н. Добровольский, А. А. Шатунский, Д. В. Малий. Развитие математических моделей пластических сред для ресурсосберегающих технологий металлических систем // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 2, С. 462–477.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 2.

UDC 539.21:621.785

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-462-477

Development of mathematical models of plastic media for resource-saving metal systems technologies²

G. M. Zhuravlev, A. E. Gvozdev, A. P. Navoev, A. A. Zhukov, N. N. Dobrovol'skiy, A. A. Shatul'skiy, D. V. Maliy

Zhuravlev Gennadiy Modestovich — Doctor of Technical Sciences, Professor, Tula State University (Tula).

e-mail: genadiyzhuravleff@yandex.ru

Gvozdev Aleksander Evgenievich — Doctor of Technical Sciences, Professor, Chief researcher of the Chair of Technology and Service, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru

Navoev Andrey Pavlovich — Engineer, Rybinsk State Aviation Technical University (Rybinsk).

e-mail: Navoev@yandex.ru

Zhukov Anatoly Alekseevich — Candidate of Technical Sciences, Professor, Rybinsk State Aviation Technical University (Rybinsk).

e-mail: anat.juckov2013@yandex.ru

Dobrovol'skiy Nikolai Nikolaevich — Candidate of physical and mathematical sciences, assistant of the department of applied mathematics and computer science, Tula State University; associate

²The work was carried out within the framework of the Federal target program "Research and development in priority areas of development of the scientific and technological complex of Russia for 2014–2020" (unique project ID RFMEF 157717X0271)

Professor of algebra, mathematical analysis and geometry, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Shatulskiy Aleksandr Anatolyevich — Doctor of Technical Sciences, Professor, Rybinsk State Aviation Technical University (Rybinsk).

e-mail: shatulsky@rsatu.ru

Maliy Dmitry Vladimirovich — Senior Lecturer of the Chair of Technology and Service, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: maliydmityy@yandex.ru

Abstract

The development of technology puts forward more complex problems, the effective solution of which is associated with the refinement of mathematical models of the studied plastic forming processes of metal systems (metals, steels, non-ferrous alloys) of various chemical compositions and production technologies (traditional ingot processing, powder production, nanostructured materials). To build a solution, the integration of differential equations to describe the physical processes occurring during plastic flow or a variation approach based on the construction of the original functional is used, but in either case the accuracy of the mathematical modelling of the process will depend on the accepted mathematical model of the medium. The paper discusses the development stages of different models of plastic media, from a simple rigid-plastic model, without taking into account the change in the material properties, to more complex ones - a viscoplastic model that regards the appearance of viscosity with increasing processing temperature and a dilating model that allows to take into consideration changes in material density and thereby predict strain destruction. The correct use of mathematical models of plastic media makes it possible to improve the accuracy of technological regimes calculation, thereby reducing the time to develop the new product, and can be used for the development of technological processes for obtaining products by means of the additive technology based on laser sintering and fusing the powder alloys, thermoplastic processing technologies and processes of thermochemical hardening and heat treatment of metallic systems of different chemical compositions.

Keywords: plastic forming, mathematical medium model, rigid-plastic, viscoplastic, dilating, mathematical correlations, plastic flow, metal systems, powder alloys.

Bibliography: 32 titles.

For citation:

G. M. Zhuravlev, A. E. Gvozdev, A. P. Navoev, A. A. Zhukov, N. N. Dobrovolsky, A. A. Shatulskiy, D. V. Maliy, 2019, "Development of mathematical models of plastic media for resource-saving metal systems technologies", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 2, pp. 462–477.

1. Введение

Пластическая деформация металлов является одним из древнейших видов обработки металлов давлением. Технологии производства деталей давлением постоянно совершенствуются. В месте с ними совершенствуются и методы исследований и расчета технологических процессов. Однако развитие техники выдвигает более сложные задачи, эффективное решение которых связано как с уточнением математических моделей изучаемых процессов, так и с совершенствованием расчетных методов. Особое значение приобретает точность расчета напряжений, деформаций, температуры, повреждаемости с учетом неравномерности их распределения.

2. Материалы и методика исследования

Теоретические исследования силовых режимов, деформированного и напряженного состояния для процессов пластического течения различных сред, выполняются на основе основных математических соотношений. Для построения решения используется интегрирование дифференциальных уравнений, что связано с большими трудностями математического характера, особенно в случае исследования нестационарных процессов, так как методы точного интегрирования систем уравнений, описывающих пластическое течение, разработаны лишь для простейших случаев. В связи с этим часто применяется вариационный подход, обладающий большей общностью при решении задач пластического течения металла, характеризующейся разнообразными схемами развития жестких и пластических областей. Однако в любом случае для построения согласованных полей для пластических сред необходимо составление системы дифференциальных уравнений, которая будет зависеть от принятой математической модели среды. Рассмотрим этапы совершенствования математических моделей, описывающих поведение материала при пластическом формоизменении различных металлических систем.

3. Жесткопластическая модель среды

Жесткопластическая модель среды применяют к телам, которые при напряжениях ниже предела текучести не деформируются; течение развивается лишь при напряжениях, удовлетворяющих условию текучести ($\sigma = \sigma_s$) [1]. При достаточно малых нагрузках тело находится в упругом состоянии. С возрастанием нагрузок в теле возникают области пластической деформации, для неупрочняющегося материала это будут области текучести. Границы последних заранее неизвестны и определяются из условий непрерывности. Математические трудности, возникающие при решении подобных смешанных задач, весьма велики; известны решения лишь для простейших случаев. В связи с этим приобретают важное значение дальнейшие возможные упрощения в постановке задачи.

Прежде всего следует упомянуть о часто используемом допущении о не сжимаемости материала. Это приводит к заметному упрощению уравнений и во многих вопросах является вполне приемлемым приближением. Однако основная трудность, заключающаяся в необходимости решения смешанной упругопластической задачи, не устраняется (рис. 1).

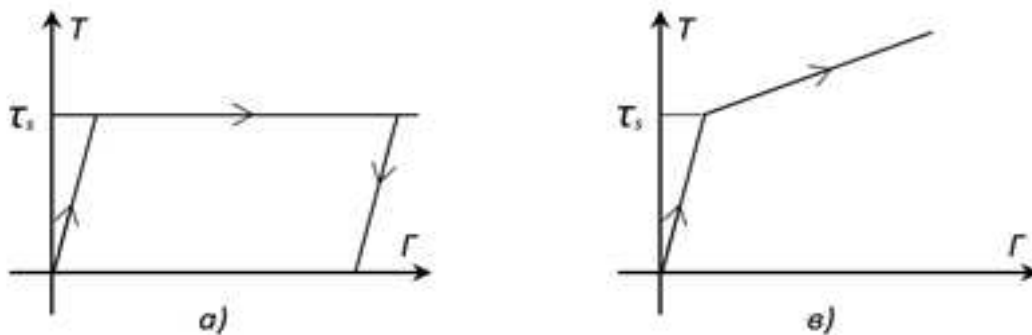


Рис.1: а) схема упругопластического тела; в) схема упругопластического упрочняющегося тела

В последнее время получила значительное развитие схема жесткопластического тела; в этой схеме полностью пренебрегают упругими деформациями. Тогда уравнения пластического состояния упрощаются; это будет, например, уравнение Сен-Венана-Мизеса (рис. 2).

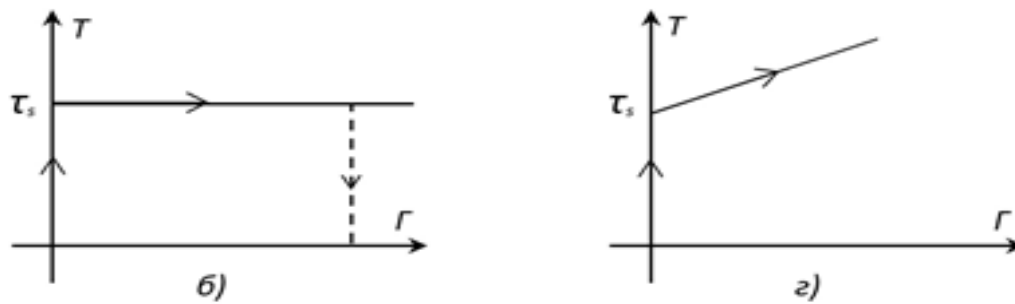


Рис.2: б) схема жесткопластического тела; г) схема жесткопластического упрочняющегося тела

Иными словами, для модуля упругости принимается бесконечное значение, что соответствует переходу от графика деформации с упругим участком к графику деформации с одной лишь площадкой текучести. Пунктирные линии со стрелками показывают, как протекает в обоих случаях разгрузка.

В такой постановке тело остается совершенно недеформируемым (жестким), пока напряженное состояние в нем не станет где-либо удовлетворять условию текучести и не возникает возможность пластического течения. При этом некоторые части тела останутся жесткими, и нужно найти такие решения в пластических зонах, чтобы скорости на их границах соответствовали скоростям движения жестких частей.

Естественно, что эта схема не всегда пригодна. Она приведет к подходящему приближенному решению, если пластическая область такова, что ничто не сдерживает развития пластических деформаций. Примером такого рода может служить задача о растяжении полосы с достаточно большим отверстием; здесь пластическая деформация локализуется в ослабленном сечении. Благодаря этому пластические деформации могут значительно превзойти упругие, что оправдывает использование схемы жесткопластического тела.

Если же пластическая область заключена внутри упругой или же пластическое течение затруднено вследствие особенностей геометрической формы тела или специального характера граничных условий, то схема жесткопластического тела может привести к значительным погрешностям. В ряде случаев (например, при чистом изгибе стержня) упругие области исчезают лишь при бесконечно большой кривизне, т. е. указанный предельный переход требует анализа больших деформаций. Отсутствуют теоремы, которые позволили бы судить о близости решений упругопластических задач к решениям жесткопластических. Тем не менее концепция жесткопластического тела уже позволила построить ряд новых решений, хорошо подтвержденных опытами, и более правильно сформулировать многие задачи теории пластичности.

В заключение заметим, что, подобно схеме жесткопластического тела (характеризуемого площадкой текучести), иногда вводится схема жестко-упрочняющегося тела, показанная на рис. 2г, для случая линейного упрочнения. Здесь также полностью пренебрегают упругими деформациями.

Математическое моделирование в предположении, что материал жесткопластический, несжимаемый, изотропный, будем выполнять с использованием следующих основных уравнений (2-4):

Условие текучести запишем в виде

$$f(\sigma_{ij}) = \sigma_u + f(\xi_u) = 0 \quad (1)$$

В приведенных выражениях ξ_u и σ_u – соответственно интенсивности скоростей деформаций

и напряжений, определяемые выражениями

$$\xi_u = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\xi_x - \xi_y)^2 + (\xi_y - \xi_z)^2 + (\xi_z - \xi_x)^2 + \frac{3}{2}(\eta_{xy}^2 + \eta_{yz}^2 + \eta_{zx}^2)}; \quad (2)$$

$$\sigma_u = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + \frac{3}{2}(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}; \quad (3)$$

При построении численных решений технологических задач теории пластичности принимаем:

– в случае медленного пластического течения уравнение равновесия

$$1_{ij,j} = 0; \quad (4)$$

– определяющие уравнения в формулировке Леви-Мизеса

$$\xi_{ij} = \frac{3}{2} \frac{\xi_u}{1_u} s_{ij}; \quad (5)$$

– соотношения связи компонентов скоростей деформаций с компонентами вектора скорости перемещения

$$\xi_{ij} = (\nu_{i,j} + \nu_{j,i})/2; \quad (6)$$

– условие несжимаемости

$$\xi_{ij} = 0; \quad (7)$$

– начальные условия для компонентов скорости

$$\nu_i|_{t=0} = \nu_i(t_0); \quad (8)$$

В приведенных выражениях σ_{ij} – компоненты тензора напряжений; $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{ij}$ – компоненты девиатора напряжений; δ_{ij} – символ Кронекера; ξ_{ij} – компоненты скоростей деформаций; ν_i – компоненты вектора скоростей; t – время; индексы $i, j = 1, 2, 3$.

Связь между инвариантами σ_u , ε_u и ξ_u может определяться уравнением состояния в общем виде

$$\sigma_u = \sigma_u(\varepsilon_u, \xi_u, T, \chi_k); \quad (9)$$

где ε_u – интенсивность деформаций; T – температура; χ_k – физико-структурные параметры, характеризующие состояние материала в рассматриваемый момент времени и определяемые соответствующими кинетическими уравнениями. В качестве физико-структурных параметров обрабатываемых материалов могут, например, рассматриваться скалярные характеристики поврежденности структуры микродефектами, зернистости поликристаллических агрегатов, энергетические характеристики необратимых изменений кристаллической решетки и другие.

Рассмотренная система уравнений является замкнутой относительно функций σ_{ij} , ξ_{ij} и ν_i . Они должны быть проинтегрированы по объему V .

Для построения единственного решения сформулируем граничные условия в любой текущий момент деформирования t на поверхности тела S объемом V в предположении, что поверхность S состоит из трех частей $S = S_v \cup S_s \cup S_f$.

На поверхности S_v

$$\nu_i = \nu_i^*, \quad (10)$$

где ν_i^* – заданная скорость перемещения – в технологических задачах, как правило, скорость инструмента.

На поверхности S_s

$$\nu_{n_i} = \nu_{n_i}^*, \quad (10)$$

где v_{ni}^* – нормальные составляющие скорости. Условие (10) называют иногда условием обтекания или непроницаемости, согласно которому приконтактные частицы деформируемой среды перемещаются по поверхности инструмента.

Если, в касательной к поверхности S_s , к плоскости инструмента имеет место скольжение деформируемого металла со скоростью v_n , направление и величина которой известна, то граничные условия включают учет трения. Напряжение от сил трения определяется с помощью какого-либо известного закона трения, который в общем виде определяется выражением

$$\tau_k = \tau_k(f_n, v_s, \dots), \quad (11)$$

где f_n – нормальное давление.

На поверхности S_f – задается вектор поверхностного напряжения

$$f_i = f_i^*. \quad (12)$$

В частном случае, если плоскость свободна от нагрузок, то $f^* = 0$.

Начальное условие задачи определим в виде задания исходных координат точек тела в начальный момент времени $t = t_0$

$$x_i = x_i(x_0, y_0, z_0, t) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (13)$$

Кроме того, в качестве начальных условий можно задавать значения механических и физико-структурных характеристик в каждой точке тела.

Решение сформулированной задачи ищется в виде совокупности функций:

$$v_i = v_i(x, y, z, t); \sigma_{ij} = \sigma_{ij}(x, y, z, t); (i, j = 1, 2, 3) \quad (14)$$

в пределах пластически деформируемого объема V , которые связаны системой уравнений (1-8) и граничными условиями (9-13).

Известно, что сформулированная выше система уравнений, для решения статических задач может трактоваться как система уравнений типа Эйлера для некоторого функционала и решение их эквивалентно исследованию на экстремум соответствующего функционала. Для решения технологических задач ОМД будем использовать принцип возможных перемещений с представлением соответствующего функционала для множественных состояний деформируемого тела. В качестве возможных перемещений принимаются величины, пропорциональные скоростям перемещений точек деформируемой среды. Для нестационарной стадии деформирования задача решается шаговым методом, т. е. функционал рассматривается справедливым на некотором достаточно малом временном отрезке Δt .

Вводятся следующие допущения:

- весь материал в рассматриваемом объеме V находится в пластическом состоянии;
- значение интенсивности напряжений $\sigma_u = \sigma_s$ (σ_s – сопротивление материала пластической деформации), в рассматриваемый момент времени, задано (или вычислено) по известному с предыдущего шага решению в соответствии с уравнением состояния (6);
- ускорение материала на текущем шаге решения задачи не варьируется, а плотность материала в процессе всего периода деформирования остается неизменной и принимается равной ее начальному значению.

Касательное напряжение трения на контактной поверхности определяется по закону Прандтля

$$\tau_k = \mu \tau_s \quad (15)$$

где μ – коэффициент трения по напряжению текучести ($0 \leq \mu \leq 1$) иногда коэффициент μ называют фактором трения. Величина τ_s принимается осредненной, а коэффициент μ – постоянным, по всей поверхности контакта.

Функционал полной мощности для вычисления силовых режимов, эквивалентный системе уравнений с учетом принятых допущений для статической задачи принимает следующий вид

$$J = \int_V 1_u \xi_u dV + \int_{S_s} \mu \tau_s |\nu_{si}| dS - \int_{S_f} f_i^* \nu_i dS, \quad (16)$$

где f_i^* – известное напряжение на поверхности тела.

Согласно принципу Журдена действительное поле скоростей, в отличие от всех кинематически возможных, сообщает функционалу полной мощности минимальное значение.

Минимум функционала (16) должен быть найден для класса функций, соответствующих условию несжимаемости. При численном решении задачи поле скоростей приближается к действительному всегда с ограниченной точностью и для жесткопластического течения условие несжимаемости должно быть выполнено в пределах этой точности. Отклонение от него в пределах заданной точности не оказывает существенного влияния на полученное решение.

4. Вязкопластическая модель среды

Соединение вязких и пластических элементов приводит к так называемым вязкопластическим средам. Подобная модель впервые была предложена Ф. Н. Шведовым и, независимо от него Бингамом для описания движения структурообразующих суспензий в условиях чистого сдвига. Позже А. А. Ильющин предложил [5] пространственное обобщение уравнения состояния Шведова-Бингама и решил ряд задач для случая плоских течений вязкопластической среды, имея ввиду приложение полученных результатов к задачам о течении металлов. При этом закон деформации имеет вид [1]

$$\sigma = \sigma_s + \mu \frac{d\varepsilon}{dt}$$

где σ_s – предел текучести, μ – коэффициент вязкости.

Эта схема отражает тот факт, что для многих веществ заметное течение появляется лишь при определенной нагрузке; скорость течения при этом зависит от вязкости среды. Вязкопластическими свойствами характеризуются многие реальные вещества – металлы при достаточно высоких температурах, густые смазочные вещества. Совершенствование многих технологических процессов (горячей и полугорячей обработки металлов) требует изучения движения вязкопластических материалов, основывающихся на уравнениях вязкопластического течения. Рассмотрим более подробно вязкопластическую среду, которая находит широкое практическое применение.

Математическое моделирование в предположении, что материал вязкопластический, будем выполнять с использованием следующих основных уравнений [1]:

Условие несжимаемости запишем в виде

$$\varepsilon_{ij} \delta_{ij} = 0 \quad (17)$$

Далее, компоненты напряжения σ_{ij} складываются из компонент напряжения σ'_{ij} связанных с пластическими свойствами, и компонент напряжения σ''_{ij} , вызываемых вязким сопротивлением

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} + \sigma''_{ij} \quad (18)$$

Компоненты напряжения σ'_{ij} определяются уравнениями теории пластичности Мизеса,

$$s'_{ij} = \frac{2\tau_s}{H} \varepsilon_{ij} \quad (19)$$

причем удовлетворяется условие текучести Мизеса

$$s_{ij}^{\prime\prime} s_{ij}^{\prime} = 2\tau_s^2 \quad (20)$$

Пусть вязкое сопротивление следует закону линейной вязкости Ньютона,

$$s_{ij}^{\prime\prime} = 2\mu' \varepsilon_{ij} (3\mu' = \mu) \quad (21)$$

Складывая напряжения, приходим к соотношения вязкопластической среды

$$s_{ij} = 2 \left(\frac{\tau_s}{H} + \mu' \right) \varepsilon_{ij} \quad (22)$$

Отсюда вытекает зависимость

$$T = \tau_s + \mu' H \quad (23)$$

являющаяся обобщением уравнения (22).

Зависимости (23) вместе с условием несжимаемости (17) и тремя уравнениями движения образуют систему десяти уравнений для десяти неизвестных функций s_{ij} , σ , v_i .

Подставляя компоненты напряжения согласно (23) в дифференциальные уравнения равновесия, получим (вместе с уравнением несжимаемости (18)) систему четырех уравнений для среднего давления σ и составляющих скорости v_i эта система имеет сложный вид и здесь нет смысла ее выписывать.

Для вычисления силовых режимов процесса пластического деформирования вязкопластических сред используем функционал полной мощности, эквивалентный системе уравнений. Исходя из метода баланса мощностей [6, 7] записывается некоторый функционал, составляющие которого полностью характеризуют состояние деформируемой среды в данных условиях обработки, представляющий собой разность мощностей внутренних и внешних сил, действующих на систему:

$$W_{\text{внутр.}} - W_{\text{внеш.}} = 0. \quad (24)$$

Под мощностью внутренних сил понимаются затраты мощности, определяемые выражением:

$$W_{\text{внутр.}} = W_{\text{пл.}} + W_{\text{вяз.}} \quad (25)$$

где $W_{\text{пл.}}$ — пластическая компонента мощности; $W_{\text{вяз.}}$ — вязкая компонента мощности.

Под мощностью внешних сил понимается мощность, получаемая от воздействия осевой деформирующей нагрузки.

Запишем функционал в форме, непосредственно используемой для расчета вязкопластических сред.

$$I = \int_{\nu} \tau_s H dv + \int_{\nu} 1/2 \mu H^2 dv - \int_{F^*} \vec{x} \vec{v}_0 dF^* = 0, \quad (26)$$

где τ_s — предел текучести сдвига; μ — коэффициент вязкости; H — интенсивность скорости деформации сдвига; F — площадь поверхности разрыва; $\vec{x}$ — вектор поверхностных сил; $\vec{v}_0$ — вектор скорости движения инструмента (скорости деформирования); F^* — площадь поверхности воздействия внешних сил.

5. Дилатирующая среда

Необходимость учета необратимого изменения объема материала возникает при расчетах многих технологических процессов, например, формования порошковых материалов, обработки давлением и резанием пористых металлов, уплотнения и резания грунтов, истечения сыпучих материалов при выпуске их из емкостей, проникания тел различной формы в пористые среды, закрытой прокладке трубопроводов способом прокола и т.д. Проводимые исследования пластического формоизменения дилатирующих материалов показывают, что эксплуатационные свойства изделий зависят не только от механических характеристик, но и от физико-структурных свойств обрабатываемых материалов, к которым относится и повреждаемость материала дефектами деформационного характера, связанная с пластическим разрыхлением (или уплотнением) мезоструктуры деформируемого материала. Известно, что основным физическим механизмом повреждаемости металлов при их больших пластических деформациях, является порообразование. Порообразование (наличие объемной фракции пор) в условиях пластической деформации, имеющей сдвиговую физическую природу, приводит к необратимому изменению объема деформируемого материала – его пластической дилатансии.

В результате экспериментальных и теоретических исследований, выполненных в нашей стране и за рубежом, разработаны некоторые методы расчета основных параметров процессов пластического деформирования дилатирующих материалов.

Качественное проектирование технологических процессов основывается как на передовом производственном опыте, так и на теоретическом и экспериментальном анализе этих процессов. Определяющие соотношения деформационной повреждаемости современной механики повреждаемости (Damage Mechanics) строятся на эффекте дилатансии. Следует также отметить, что решение этой задачи требует детального учета локальных свойств обрабатываемого материала, связанных с неоднородным распределением напряжений, скоростей, деформаций и пластической дилатансии. Предполагается использование и основных положений теории движения сплошной среды т. е. исследование кинетики пластической деформации, что возможно только с в сочетании современных методов теории пластичности и механики повреждаемости металлических материалов, а также и достижений вычислительной техники.

Явление пластической дилатансии впервые было обнаружено в 1885 г. О. Рейнольдсом [8] в 1885 г. в опытах с песком и объяснено с помощью простейшей математической модели механического поведения песка в виде системы одинаковых жестких регулярно упакованных шаров. При наиболее плотной укладке шаров на плоскости каждый из них соприкасается с шестью соседними шарами, а при наименее плотной – с четырьмя; поэтому в первом случае сдвиг вызывает разрыхление – переход к менее плотной упаковке шаров, а во втором случае – уплотнение – переход к более плотной упаковке. Первый случай соответствует положительной дилатансии – увеличению объема, а второй – отрицательной – уменьшению объема. В классической теории пластичности [9, 10] рассматриваются несжимаемые материалы (как правило, компактные металлы), не проявляющие дилатансии.

В развитие идей О. Рейнольдса рядом авторов были предложены более сложные математические модели, связанные с различными способами укладки жестких шаров в пространстве, использовавшиеся не только для качественного объяснения, но и для количественного описания эффекта дилатансии [11, 12]. Возможности такого подхода обусловлены тем, что геометрические характеристики различных правильных шаровых упаковок существенно отличаются друг от друга. Например, координационное число (количество соседних контактов) простой кубической упаковки равно 6, а коэффициент компактности (отношение объема шаров ко всему объему, включая пустоты между шарами) – 52,36 %; те же величины для ромбоэдрической упаковки равны соответственно 12 и 74,05 %.

Кроме того, во многих случаях дилатирующие материалы подвергаются преимущественно уплотнению. Таковы, например, процессы прокатки, экструзии и прессования порошковых

и пористых металлов и сплавов [13-19].

Поэтому в связи с необходимостью учета уплотнения материала гипотеза о связно-сыпучей среде, соответствующей идеальной пластичности, встретила ряд возражений, опиравшихся на экспериментальные результаты.

Необходимые обобщения условия, обеспечивавшие в той или иной степени согласование теории дилатансии с экспериментами, выполнили в 1957 г. Д. Друккер, Р. Гибсон и Д. Хенкель, в 1959 г. – Э. Дженике и Р. Шилд, в 1969 г. – Н. Су, Дж. Вейдлер и П. Пэсли, в 1970 г. – Ф. Димаджо и И. Сандлер, – полученные ими результаты [20] сводились в основном к построению замкнутых поверхностей текучести в пространстве напряжений.

Наибольшее распространение в расчетах технологических процессов порошковой металлургии получили квадратичное условие текучести Р. Грина [21].

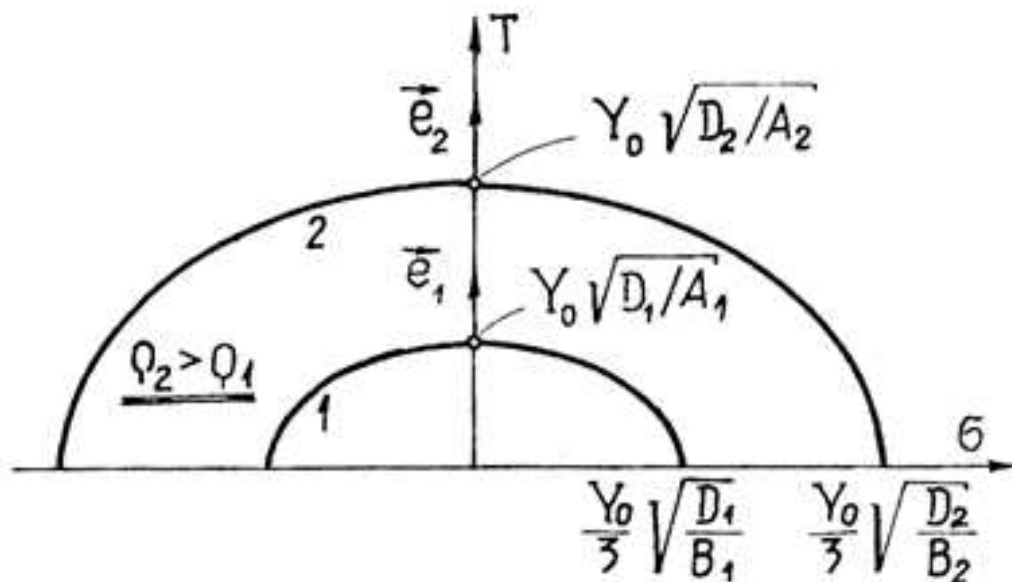


Рис.3: Обобщенное условие текучести Грина.

Основные соотношения пластического течения дилатирующих сред содержат уравнение неразрывности

$$\rho \left(\frac{v}{\partial r} + \frac{v}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + v \frac{\rho}{\partial r} + w \frac{\rho}{\partial z} = 0 \quad (27)$$

где ρ – плотность среды, $\rho = \rho_0 (exp - \varepsilon)$; ρ_0 – начальная плотность; ε – объемная деформация (дилатансия), $\varepsilon = \int \dot{\varepsilon} dt$; $\dot{\varepsilon}$ – скорость дилатансии; t – время.

Выписанные соотношения для пластического формоизменения позволяют составить основное энергетическое уравнение, которое характеризует состояние материала при данных условиях обработки.

Для анализа указанных процессов деформации, исходя из баланса мощности внутренних и внешних сил можно составить энергетический функционал, который полностью характеризуют состояние деформируемой среды в данных условиях обработки.

Под мощностью внешних сил понимается мощность, получаемая от воздействия осевой деформирующей нагрузки. Запишем составляющие мощности внешних и внутренних сил в форме, непосредственно используемой для расчета:

$$\begin{cases} W_{\text{пл.}} = \int_V \sigma_{ij} \cdot \dot{\varepsilon}_{ij} dV \\ W_{\text{мп.}} = \int_{F_k} f \cdot \tau_s \cdot [\nu_k] dF_k \\ W_{\text{внешн.}} = \int_{S^*} \vec{X} \cdot \vec{V} dS \end{cases}$$

где σ_{ij} – компоненты тензора напряжений; $\dot{\varepsilon}_{ij}$ – компоненты тензора скоростей деформации; V – объём; f – коэффициент трения; $[\nu_k]$ – скорость скольжения металла по инструменту; F_k – площадь контакта границы с инструментом; $\vec{X}$ – вектор поверхностных сил; $\vec{V}$ – вектор скорости движения инструмента (скорости деформирования); S – площадь торца рабочей части инструмента.

Таким образом, с учетом всего вышеизложенного, общее выражение функционала, описывающего состояние деформируемой среды в произвольный момент времени, имеет вид:

$$\int_V (\dot{\rho} + T\dot{H}) + \int_F f \dot{\tau}_s [\dot{\nu}_k] dF_k + \int_S \vec{X} \cdot \vec{V} dS = 0 \quad (28)$$

Функционал (28) используется для анализа процессов пластического формоизменения дилатирующих сред при статических скоростях деформации.

6. Заключение

В работе показано, что использование различных моделей пластических сред: жесткопластическая, вязкопластическая, дилатирующая, позволяет повышать точность расчета напряжений, деформаций, температуры, повреждаемости с учетом неравномерности их распределения при решении прикладных задач.

Сформулированы их основные определяющие соотношения пластического формоизменения и составлены энергетические функционалы, позволяющие определять кинематику течения материала, силовые, температурные режимы, напряженное и деформированное состояния, деформационную повреждаемость. Таким образом, можно построить связанные поля основных физических процессов, происходящих в материале при пластических деформациях. Это позволяет теоретически прогнозировать и определять параметры технологических процессов с визуализацией схем процессов и исследованием кинетики, полученных значений в виде графиков.

Полученные результаты исследований могут быть применены для разработки технологических процессов получения изделий методами аддитивных технологий с использованием лазерного воздействия на поликристаллические металлические системы (спекание и сплавление порошковых сплавов), технологий термопластической обработки и технологий упрочняющей химико-термической и термической обработок металлических систем различных химических составов, разработки оптимальных режимов ресурсосберегающих процессов термопластической обработки сталей и сплавов с использованием различных методов оптимизации, математического анализа и теории приближений [22-32].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. 420 с.
2. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М.: Мир, 1987. 542 с.
3. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. М.: Мир, 1986. 318 с.

4. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. М.: Мир, 1976. 464 с.
5. Ильюшин А.А. Деформация вязкопластического тела. Уч. зап. МГУ, Механика. Вып. 39. 1940. С. 3–81.
6. Баничук Н.В., Петров В. М., Черноусько Ф. Л. Численное решение вариационных и краевых задач методом локальных вариаций / Журнал вычислительной математики и вычислительной физики. 1966. Т. 6. № 6. С. 947–961.
7. Черноусько Ф. Л., Баничук Н. В. Вариационные задачи механики и управления. М.: Наука, 1973. 238 с.
8. Рейнер М. Реология. М.: Наука, 1965. 224 с.
9. Екобори Т. Физика и механика разрушения и прочности твердых тел. М.: Металлургия, 1971. 264 с.
10. Прагер В., Ходж Ф. Г. Теория идеально пластических тел. М.: ИЛ, 1956. 398 с.
11. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия / К. Джонсон. М.: Мир, 1989. 510 с.
12. Вязлов С. С. Реологические основы механики грунтов. М.: Высшая школа, 1978. 448 с.
13. Виноградов Г. А., Каташинский В. П. Теория листовой прокатки металлических порошков и гранул. М.: Металлургия, 1979. 224 с.
14. Перельман В. Е. Формование порошковых материалов. М.: Металлургия, 1979. 232 с.
15. Макаров Э. С. К теории формования металлических порошков в условиях плоской деформации // Известия вузов, Машиностроение. 1973. № 10. С. 158–162.
16. Павлов В. А., Кипарисов С. С., Щербина В. В. Обработка давлением порошков цветных металлов. М.: Металлургия, 1977. 176 с.
17. Новые процессы деформации металлов и сплавов / А. П. Коликов, П. И. Полухин, А. В. Крупин и др. М.: Высшая школа, 1986. 352 с.
18. Порошковая металлургия и напыленные покрытия / Под ред. Б. С. Митина. М.: Металлургия, 1987. 792 с.
19. Экономичные методы формообразования деталей / Под ред. К. Н. Богоявленского и В. В. Риса. Л.: Лениздат, 1984. 144 с.
20. Херрманн В. Определяющие уравнения уплотняющихся пористых материалов // Проблемы теории пластичности. М.: Мир, 1976. С. 178–216.
21. Green R. J. A plasticity theory for porous solids. // Int. J. Mech. Sci., vol. 14, 1972, pp. 215–224.
22. Навоев А. П., Жуков А. А., Кутепов С. Н., Гвоздев А. Е. Особенности работы, процессы упрочнения, структура, свойства и качество стальных зубчатых колес привода агрегатов двигателей внутреннего сгорания: монография / Под ред. д-ра техн. наук, проф. А. Е. Гвоздева. Тула: Изд-во ТулГУ, 2019. 212 с.

23. Zhuravlev G. M., Gvozdev A. E., Kolmakov A. G., Sergeev A. N., Maliy D. V. Application of mathematical method of local variations to solve problems of plastic formification of metal, powder and nanocomposition materials. *Chebyshevskii Sbornik*. 2018;19(4):43-54. (In Russ.) <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-19-4-43-54>
24. Makarov E. S., Gvozdev A. E., Zhuravlev G. M., Sapozhnikov S. V., Sergeev A. N., Kolmakov A. G., Breki A. J., Maliy D. V., Dobrovolsky N. N. Analysis of plasticity theory equations of powder metal systems. *Chebyshevskii Sbornik*. 2018;19(1):152-166. (In Russ.) <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-19-1-152-166>
25. Журавлев Г. М., Гвоздев А. Е. Обработка сталей и сплавов в интервале температур фазовых превращений: монография. Тула: Изд-во ТулГУ, 2016. 320 с.
26. Гвоздев А. Е., Журавлев Г. М., Кузовлева О. В. Основы формирования состояния высокой деформационной способности металлических систем: монография. Тула: Изд-во ТулГУ, 2018. 382 с.
27. Гвоздев А. Е., Стариков Н. Е., Сергеев Н. Н., Кутепов С. Н., Сапожников С. В., Калинин А. А., Клементьев Д. С. Основы ресурсосберегающих процессов получения быстрорежущего инструмента: монография / Под ред. проф. А. Е. Гвоздева. Тула: Изд-во ТулГУ, 2018. 209 с.
28. Gvozdev A. E., Juravlev G. M., Sapognikov S. V. Theoretical analysis of the compacting powder materials process by pressing // *Proceedings of the Tula States University-Sciences of Earth*, volume 4, pp. 273–283.
29. Макаров Э. С., Гвоздев А. Е., Журавлев Г. М. Теория пластичности дилатирующих сред: монография / Под ред. проф. А. Е. Гвоздева. 2-е изд., перераб. и доп. Тула: Изд-во ТулГУ, 2015. 337 с.
30. Makarov E. S., Gvozdev A. E., Zhuravlev G. M., Sergeev A. N., Minaev I. V., Breki A. D., Maliy D. V. Application of plasticity theory of dilating media to sealing processes of powders of metallic systems. *Chebyshevskii Sbornik*. 2017;18(4):268-284. (In Russ.) <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2017-18-4-268-284>
31. Гвоздев А. Е. Ресурсосберегающая технология термомеханической обработки быстрорежущей вольфрамомолибденовой стали Р6М5 // *Металловедение и термическая обработка металлов*. 2005. № 12 (606). С. 27–30.
32. Гвоздев А. Е., Маркин А. А. Термомеханика упруговязкопластического конечного деформирования // *Механика твердого тела*. 1998. № 6. С. 115–120.

REFERENCES

1. Kachanov, L. M., 1969, “Osnovy teorii plastichnosti” [Basics of plasticity theory], *Nauka, Moskva, Rossiya*, 420 p.
2. Vasidzu, K., 1987, “Variacionnye metody v teorii uprugosti i plastichnosti” [Variational methods in the theory of elasticity and plasticity], *Mir, Moskva, Rossiya*, 542 p.
3. Zenkevich, O., Morgan, K. 1986, “Konechnye elementy i approksimaciya” [Finite elements and approximation], *Mir, Moskva, Rossiya*, 318 p.

4. Oden, Dzh., 1976, “Konechnye elementy v nelinejnoj mekhanike sploshnyh sred” [Finite elements in nonlinear continuum mechanics], *Mir, Moskva, Rossiya*, 464 p.
5. Ilyushin, A. A., 1940, “The deformation of a viscoplastic body”, *Uch. zap. MGU, Mekhanika*, vol. 39, pp. 3–81.
6. Banichuk, N. V., Petrov, V. M., Chernousko, F. L., 1966, “Numerical solution of variational and boundary value problems by the method of local variations”, *Zhurnal vychislitelnoj matematiki i vychislitelnoj fiziki*, vol. 6, no. 6, pp. 947–961.
7. Chernousko, F. L., Banichuk, N. V., 1973, “Variacionnye zadachi mekhaniki i upravleniya” [Variational problems of mechanics and control], *Nauka, Moskva, Rossiya*, 238 p.
8. Rejner, M., 1965, “Reologiya” [Rheology], *Nauka, Moskva, Rossiya*, 224 p.
9. Ekobori, T., 1971, “Fizika i mekhanika razrusheniya i prochnosti tverdyh tel” [Physics and mechanics of fracture and strength of solids], *Metallurgiya, Moskva, Rossiya*, 264 p.
10. Prager, V., Hodzh, F. G., 1956, “Teoriya idealno plasticheskikh tel” [Theory of perfectly plastic bodies], *Moskva, Rossiya*, 398 p.
11. Dzhonson, K., 1989, “Mekhanika kontaktnogo vzaimodejstviya” [Mechanics of contact interaction], *Mir, Moskva, Rossiya*, 510 p.
12. Vyalov, S. S., 1978, “Reologicheskie osnovy mekhaniki gruntov” [Rheological fundamentals of soil mechanics], *Vysshaya Shkola, Moskva, Rossiya*, 448 p.
13. Vinogradov, G. A., Katashinskij, V. P., 1979, “Teoriya listovoj prokatki metallicheskih poroshkov i granul” [Theory of sheet rolling of metal powders and granules], *Metallurgiya, Moskva, Rossiya*, 224 p.
14. Perelman, V. E., 1979, “Formovanie poroshkovykh materialov” [Powder material forming], *Metallurgiya, Moskva, Rossiya*, 232 p.
15. Makarov, E. S., 1973, “On the theory of metal powder forming under plane deformation”, *Izvestiya Vuzov, Mashinostroenie*, no. 10, pp. 158–162.
16. Pavlov, V. A., Kiparisov, S. S., Shcherbina, V. V., 1977, “Obrabotka davleniem poroshkov cvetnykh metallov” [Pressure treatment of non-ferrous metal powders], *Metallurgiya, Moskva, Rossiya*, 176 p.
17. Kolikov, A. P., Poluhin, P. I., Krupin, A. V., et al., 1986, “Novye processy deformacii metallov i splavov” [New processes of deformation of metals and alloys], *Vysshaya Shkola, Moskva, Rossiya*, 352 p.
18. Mitin, B. S., 1987, “Poroshkovaya metallurgiya i napylennye pokrytiya” [Powder metallurgy and sprayed coatings], *Metallurgiya, Moskva, Rossiya*, 792 p.
19. Bogoyavlenskogo, K. N., Risa, V. V., 1984, “Ekonomichnye metody formoobrazovaniya detalej” [Economical methods of forming parts], *Leningrad, Lenizdat, Rossiya*, 144 p.
20. Herrmann, V., 1976, “The governing equations of the overall porous materials”, *Problemy teorii plastichnosti, Mir, Moskva, Rossiya*, pp. 178–216.
21. Green, R. J., 1972, “A plasticity theory for porous solids”, *Int. J. Mech. Sci.*, vol. 14, pp. 215–224.

22. Navoev, A. P., Zhukov, A. A., Kutepov, S. N., et al., 2019, “Osobennosti raboty, processy uprochneniya, struktura, svojstva i kachestvo stalnyh zubchatyh koles privoda agregatov dvigatelej vnutrennego sgoraniya” [Features of operation, hardening processes, structure, properties and quality of steel gears drive units of internal combustion engines], *Izd-vo TulGU, Tula, Rossiya*, 212 p.
23. Zhuravlev, G. M., Gvozdev, A. E., Kolmakov, A. G., et al., 2018 “Application of mathematical method of local variations to solve problems of plastic formification of metal, powder and nanocomposition materials”, *Chebyshevskii Sbornik*. vol. 19(4), pp. 43–54. (In Russ.) <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-19-4-43-54>
24. Makarov, E. S., Gvozdev, A. E., Zhuravlev, G. M., et al., 2018, “Analysis of plasticity theory equations of powder metal systems”, *Chebyshevskii Sbornik*. vol. 19(1), pp. 152–166. (In Russ.) <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-19-1-152-166>
25. Zhuravlev, G. M., Gvozdev, A. E., 2016, “Obrabotka stalej i splavov v intervale temperatur fazovyh prevrashchenij” [Processing of steels and alloys in the temperature range of phase transformations], *Izd-vo TulGU, Tula, Rossiya*, 320 p.
26. Gvozdev, A. E., Zhuravlev, G. M., Kuzovleva, O. V., 2018, “Osnovy formirovaniya sostoyaniya vysokoj deformacionnoj sposobnosti metallicheskih sistem” [Bases of formation of the state of high deformation ability of metal systems], *Izd-vo TulGU, Tula, Rossiya*, 382 p.
27. Gvozdev, A. E., Starikov, N. E., Sergeev, N. N., et al., 2018, “Osnovy resursosberegayushchih processov polucheniya bystrorezhushchego instrumenta” [Basics of resource-saving processes for obtaining high-speed tools], *Izd-vo TulGU, Tula, Rossiya*, 209 p.
28. Gvozdev, A. E., Juravlev, G. M., Sapogov, S. V., 2017, “Theoretical analysis of the compacting powder materials process by pressing”, *Proceedings of the Tula States University-Sciences of Earth*, vol. 4, pp. 273–283.
29. Makarov, E. S., Gvozdev, A. E., Zhuravlev, G. M., 2015, “Teoriya plastichnosti dilatiruyushchih sred” [Theory of plasticity gelatinous environments], *Izd-vo TulGU, Tula, Rossiya*, 337 p.
30. Makarov, E. S., Gvozdev, A. E., Zhuravlev, G. M., et al., 2017, “Application of plasticity theory of dilating media to sealing processes of powders of metallic systems”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 18(4), pp. 268–284. (In Russ.) <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2017-18-4-268-284>
31. Gvozdev, A. E., 2005, “Resource-saving technology of thermomechanical processing of high-speed tungsten molybdenum steel R6M5”, *Metallovedenie i termicheskaya obrabotka metallov*, no. 12 (606), pp. 27–30.
32. Gvozdev, A. E., Markin, A. A., 1998, “Thermomechanics of elastic-viscoplastic final deformation”, *Mekhanika tverdogo tela*, no. 6, pp. 115–120.

Получено 18.03.2019 г.

Принято в печать 12.07.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 2.

УДК 51.091

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-478-487

От доклассической физики к классической механике

Е. А. Зайцев

Зайцев Евгений Алексеевич — кандидат физико-математических наук, доцент, зав. сектором «Истории математики», Институт истории естествознания и техники им. С. И. Вавилова РАН (г. Москва).

e-mail: e_zaitsev@mail.ru

Аннотация

В рамках проблемы становления науки Нового времени рассмотрен вопрос о мотивах перехода от аристотелевской физики к классической механике в XVII веке. В основу различения этих двух форм естественнонаучного знания нами положено противопоставление идей: холизма, которым руководствовалось доклассическое естествознание, и редукционизма, ставшего базисом классической механики Нового времени. Отмечен редукционистский характер постулатов, лежащих в основе закона о параболической траектории брошенного тела, с открытия которого начинается научная революция XVII века. В их числе — принцип равномерного инерциального движения в горизонтальном направлении (в отсутствии влияния силы тяжести), закон свободного падения в вертикальном направлении под действием силы тяжести и закон параллелограмма сил и движений. Показано, что в доклассической физике, в силу ее ориентации на холизм, ни один из этих постулатов не мог быть выполнен. Исходя из положения, что теоретические построения в области механики движения вторичны по отношению к формам движения, реализуемым в практической механике, приведены аргументы в пользу тезиса о том, что холизм доклассической механики связан с применением в качестве «двигателей» мускульной силы человека и животных. Показано, что именно использование одушевленных двигателей, характерное для античности и средних веков, ведет к нарушению редукционистского принципа аддитивности сил, лежащего в основе классической механики. В заключение сделан вывод о том, что предпосылками идеи редукции явились новые виды движения, реализованные в практической механике XV-XVI вв. Это — подъемные устройства, использующие в качестве движущей силы силу тяжести, и кривошипно-шатунные механизмы, снабженные маховыми колесами. Устройства первого типа подводили к идее аддитивности сил, а второго — к возможности реализации равномерного движения.

Ключевые слова: физика Аристотеля, классическая механика, холизм, редукционизм, техническое движение, подъемные устройства, кривошипно-шатунный механизм.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:

Е. А. Зайцев. От доклассической физики к классической механике // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 2, с. 478–487.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 2.

UDC 51.091

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-478-487

From pre-classical physics to classical mechanics

E. A. Zaytsev

Zaytsev Evgeny Alekseevich — Ph. D., Head of the Department of History of Mathematics, S. I. Vavilov Institute for the History of Science and Technology (Moscow).

e-mail: e_zaitsev@mail.ru

Abstract

In this article, within the framework of the general problem of the formation of modern science, the question of the transition from Aristotelian physics to classical mechanics in the 17th century is being considered. The distinction between these two forms of scientific approach to the study of nature is based on the opposition of ideas of holism, which guided the pre-classical natural science, and reductionism, which became the foundation of classical mechanics. The reductionist nature of the postulates underlying the law of the parabolic trajectory of the projectile, the discovery of which inaugurated the scientific revolution of the 17th century, is disclosed and emphasized. Among them - the principle of inertial motion in the horizontal direction (in the absence of gravity), the law of free fall in the vertical direction under the influence of gravity, and the law of the parallelogram of forces and motions. It is shown that none of these postulates could be fulfilled in pre-classical mechanics due to its holistic orientation. Proceeding from the hypothesis that the theoretical constructions in the field of mechanics are secondary in relation to the forms of motion realized in practical mechanics, it is established that holism is associated with the use of muscular strength of man and animals as working engines. It is shown that it is the use of animate engines (characteristic of antiquity and the Middle Ages) that underlies the violation of the principle of the additivity of forces, upon which classical mechanics is based. In conclusion, proceeding from the aforementioned hypothesis about the secondary nature of theoretical constructions, the thesis is argued that the technological prerequisites for the formation of the idea of reduction are new types of technical movement realized in practical mechanics in the 15th-16th centuries. These are lifting devices using gravity as driving force and crank-and-rod mechanisms equipped with flywheels. Devices of the first type led to the idea of additivity of forces, while of the second to the possibility of a uniform motion.

Keywords: Aristotle's physics, classical mechanics, holism, reductionism, technical movement, lifting devices, crank mechanism.

Bibliography: 15 titles.

For citation:

E. A. Zaytsev, 2019, "From pre-classical physics to classical mechanics", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 2, pp. 478–487.

1. Введение

В работах, посвященных становлению естествознания Нового времени, можно встретить тезис, согласно которому основное отличие доклассической физики Аристотеля (включая ее средневековые модификации) от классической механики XVII в. состоит в том, что первая

носит чисто качественный характер, тогда как вторая, напротив, использует количественные, в первую очередь, геометрические методы.

Такая точка зрения, вообще говоря, неточна, ибо в физике Аристотеля есть специальный раздел – так называемая «аристотелевская динамика», в которой движение под действием сил описывается в терминах непрерывных (геометрических) количеств, а именно, в виде закона прямой пропорциональной зависимости скорости от движущей силы и обратно-пропорциональной – от силы сопротивления. И хотя этот закон не носит, подобно законам классической механики, общезначимого характера (сам Аристотель накладывает на него существенные ограничения), сфера его применения, все же, весьма широка [1; 2]. Он описывает естественное движение тел под действием силы тяжести, т. е. их свободное падение («О небе» III 2, 300a25–301b1), и насильственное перемещение тяжелых тел под действием внешних сил («Физика» VII 5, 249b28–250a7).

Что касается средневековой натурфилософии, то в ней количественное описание движения применяется еще шире. Помимо пространственного перемещения (движения в категории «места») оно охватывает все прочие виды «движения» по Аристотелю, включая изменение свойств вещей (движение в категории «качества»), а также увеличение или уменьшение их размеров (движение в категории «количества»). Отличие от «динамики» самого Аристотеля состоит при этом в том, что движение описывается не простой (прямой или обратной пропорциональной) зависимостью скорости от движущих сил и сил сопротивления, а более сложным соотношением – так называемой «функцией Бравдвардина». В основе этой функции лежит представление о том, что скорость движения пропорциональна – говоря современным языком – логарифму отношения силы движения к силе сопротивления [3; 4].

Таким образом, отличие физики Аристотеля от классической механики не может быть сведено к указанию на качественный характер первой и количественный характер второй. Критерием различия доклассической и классической теории является их отношение к идее холизма: доклассическая механика исходит из представления о примате целого над своими частями, тогда как классическое естествознание XVII в., напротив, опирается на положение о сводимости целого к частям (о чертах холизма в средневековой натурфилософии см. [5]).

Холизм, как метафизический принцип, утверждает, что целое есть нечто принципиально отличное от своих частей и, следовательно, несводимое к ним («Метафизика» VIII 6, 1045a10). Кроме того, целое больше простой (механической) суммы своих частей, качества которых являются производными от формы этого целого. При их вхождении в состав целого части утрачивают свои собственные индивидуальные качества.

Следствием метафизического холизма является эпистемологический холизм, утверждающий, что познание целой «вещи» не сводится к познанию ее частей. Помимо знания о частях необходимо еще понимание «механизма», соединяющего их воедино [6]. В современном естествознании примером теории, обладающей характерными чертами холизма, служит химия. Так, соединение двух атомов водорода с одним атомом кислорода дает молекулу воды – вещества, обладающего свойствами, принципиально отличными от свойств составляющих его элементов, которые сами (в нормальных условиях) являются газами. Другим, еще более очевидным примером является биология, в которой механическое расчленение целого организма является недопустимым в силу того, что живой объект может при этом превратиться в мертвое тело.

В противоположность физике Аристотеля, стремящейся охватить изучаемый объект целиком, чтобы затем приступить к анализу его частей, классическая механика XVII в. начинает с вычленения самостоятельных, независимых друг от друга элементов, из которых затем будет конструироваться целое. В основе такого подхода лежит представление о том, что всякая «вещь» определяется совокупностью своих элементов и поэтому знание о ней может быть получено из знания об этих элементах. Элементы, согласно редукционизму, существуют до

целого в том же самом виде и с теми же самыми свойствами, что и в составе целого. Именно этот метафизический постулат и позволяет классической механике выделять части без соотношения с целым. Он санкционирует подход, в соответствии с которым вначале определяются свойства частей, а затем полученные результаты переносятся (по определенным правилам) на составляемый из них объект.

Таким образом, вопрос об истоках научной революции XVII в. может быть сформулирован как вопрос о мотивах отказа от холизма в пользу редукционизма в трактовке природного движения или, имея в виду механику, пространственного перемещения под действием сил.

2. Холизм доклассической механики и редукционизм классической механики

Противоположность холизма и редукционизма проявляется не только в различном отношении к неподвижной вещи, но и в различной оценке феномена движения. Все, что сказано выше о вещи, можно повторить и по отношению к движению.

В доклассической механике движение, обусловленное действием нескольких сил, рассматривается как явление *sui generis*, то есть, как целостный феномен, не допускающий сведения к элементарным перемещениям, вызываемым действием этих сил. Выделение в составе сложного движения элементарных перемещений, зная свойства которых, можно было бы составить представление о свойствах этого движения, считалось ненаучным, ибо – в соответствии с общей идеей холизма – перемещения, вызываемые частичными силами, при вхождении в состав сложного движения приобретали новые свойства, отличные от характеристик, которыми они обладали сами по себе.

В классической механике, напротив, основополагающим является представление о том, что познание составного движения осуществляется посредством его представления в виде совокупности (более точно – векторной суммы) перемещений, вызванных действием элементарных сил. Идея сведения составного движения к векторной сумме независимых перемещений, допускающих, в силу своей регулярности, описание в терминах математики, составляет методологическую основу количественного подхода к феномену движения.

Современный человек, прошедший школу классической механики, хорошо знаком с идеей редукции. Холизм, напротив, представляется ему чем-то совершенно чуждым, особенно для дисциплины, которая изучает пространственное движение. Поэтому наше изложение мы начнем с рассмотрения конкретных примеров, раскрывающих специфику аристотелевского холизма в отношении движения. После чего обсудим вопрос об исторических предпосылках идеи холизма в доклассической механике. В заключение будет проанализирован аналогичный вопрос по отношению к идее редукции в классической механике XVII века.

Методологически оправданным будет начать наше исследование с рассмотрения центрального события научной революции XVII века – с закона параболичности траектории брошенного тела, открытого Галилеем [7]. В его основе (или точнее, в основе его доказательства) лежат три постулата, каждый из которых имеет ярко выраженный редукционистский характер.

Первый постулат – это закон инерции в применении к горизонтальной компоненте движения; он говорит о том, что брошенное тело перемещается в горизонтальном направлении с постоянной скоростью (окончательно этот факт будет зафиксирован через полстолетия после работ Галилея в форме первого закона Ньютона). Второй постулат – это закон пропорциональной зависимости скорости от времени по отношению к вертикальной составляющей движения. Он говорит о том, что это движение сначала равномерно замедляется, а затем – после достижения высшей точки траектории, – равномерно ускоряется. Третий, и наиболее важный для идеи редукции постулат – это закон параллелограмма движений, в соответствии с которым всякое сложное перемещение в пространстве допускает разложение на независимые компо-

ненты. В применении к брошенному телу этот постулат означает, что его движение является векторной суммой двух движений, осуществляющихся, соответственно, в горизонтальном и вертикальном направлении. Первое из них происходит с постоянной скоростью, второе – с постоянным ускорением, сначала отрицательным, а затем положительным.

Редукционистский характер первых двух постулатов проявляется в принятии тезиса о принципиальной возможности выделения в составе сложного движения двух элементарных движений, осуществляющихся независимо, с одной стороны, одно от другого, а с другой – от общего результирующего движения. Основанием для этого служит представление о том, что горизонтальная компонента движения обладает абсолютно теми же свойствами, что и элементарное (прямолинейное) движение тела по горизонтали под действием начального толчка, а вертикальная – теми же свойствами, что и его свободное падение. (Что касается движения по окружности большого радиуса, центр которой находится в центре Земли; однако, этим обстоятельством можно пренебречь). Редукционистский характер третьего постулата, утверждающего, что сложное движение сводится к векторной сумме его элементарных компонент, следует из его формулировки и не требует пояснения.

В то время, как для нас эти постулаты представляются совершенно естественными, в доклассической механике дело обстоит с точностью до наоборот: ни один из них не мог претендовать на статус истинного суждения. Начнем с третьего постулата, в котором идея редукции выражена наиболее явно. Причина, по которой этот постулат не мог быть принят, состояла в том, что с точки зрения доклассического холизма элементарные движения должны были менять свои свойства при вхождении в состав сложного движения. Проиллюстрируем этот тезис конкретными примерами.

Движения, входящие в состав сложного движения, обусловленного действием нескольких сил, могут быть либо однонаправленными, либо разнонаправленными в зависимости от направления сил.

Начнем с рассмотрения случая, когда силы действуют в одном направлении. С точки зрения классической механики этот случай представляется тривиальным: в соответствии с законом сложения сил и движений результирующее движение есть сумма движений, вызываемых частичными силами (по сути, здесь идет речь об арифметической сумме обычных скалярных величин). Этот, совершенно естественный для классической механики, вывод должен был представляться для доклассической механики, по крайней мере, проблематичным. Дело в том, что в доклассической натурфилософии господствовало представление, согласно которому действие объединенных сил, направленных в одну и ту же сторону, могло возрастать непропорционально, то есть, приводить к результату, превосходящему сумму результатов, производимых каждой из этих сил в отдельности. Считалось, например, что совместное действие двух равных и одинаково направленных сил способно давать результат, больший удвоенного результата, достигаемого действием каждой из сил.

Можно выразить эту мысль еще и так: при совместном однонаправленном действии одна из движущих сил способна увеличивать действие другой.

Абсурдность такого представления, находившего свое оправдание в популярной латинской поговорке «объединенные силы растут, даже если они малы, а разрозненные убывают, даже если велики», не вызывает сомнения (с точки зрения классической механики). Ибо оно, по сути, отрицает важнейший принцип механики – положение об аддитивности физических сил и результатов их действий (примеры и подробное обсуждение этого необычного исторического феномена см. в [8; 9]).

В случае движения под действием сил, направленных в противоположные стороны, в доклассической механике действовал закон «аристотелевской динамики», в соответствии с которым скорость движения зависела от отношения силы движения к силе сопротивления. Для

рассматриваемого нами вопроса важно то, что силы при этом не считались независимыми.

Напротив, средневековые перипатетики, например, полагали, что, чем больше движущая сила и, соответственно, скорость вызываемого ею движения, тем меньше сила, которая сопротивляется движению. Они, в частности, считали, что сила, поддерживающая уже начатое телом движение, меньше силы, которая приводит это тело в движение из состояния покоя. Иными словами, в случае противоположно направленных сил одна из них могла ослабить действие другой.

Сходное представление распространялось и на случай движения под действием сил, направленных под углом; под него подпадает движение брошенного тела, на которое действует сила броска, с одной стороны (считалось, что действие этой силы продолжается в процессе движения), и сила тяжести, с другой. Доклассические теоретики полагали, что в случае сил, направленных под углом, одна из них способна ослабить действие другой.

Подобная точка зрения была распространена вплоть до конца XVI века. Так, непосредственный предшественник Галилея, итальянский физик Дж. Бенедетти (1530-1590) полагал, что импульс или «вложенная сила», которой обладает горизонтально брошенное тело, уменьшает действие силы тяжести, приводя к замедлению вертикального падения. Вот что он писал о движении брошенного мяча: «Чем быстрее движется мяч насильственным движением, тем большей склонностью к движению по прямой линии он обладает и поэтому тем меньше он стремится к центру мира и от этого становится легче» [10, р. 285].

Абсурдность такого представления с точки зрения классической механики совершенно очевидна: из него, например, следует, что из двух тел, имеющих одинаковый вес и находящихся на одной и той же высоте, брошенное в горизонтальном направлении упадет на землю позднее, нежели падающее свободно.

Обратимся теперь к идее инерциального движения и отношению к ней доклассической механики. В основе этой идеи лежит представление о существовании равномерного прямолинейного движения, осуществляющегося в отсутствии движущей силы. С точки зрения аристотелевского холизма такого движения в природе просто не могло существовать. Прежде всего, всякое движение в подлунном мире предполагает наличие движущего, находящегося в постоянном и непосредственном контакте с движимым. Иными словами, движимое и движущее составляют в движении единое целое. Во-вторых, в земных условиях в принципе невозможно движение тел по прямой линии, что связано с неустранимостью возникающих при этом акцидентальных воздействий. Так, Аристотель полагал, что в реальном физическом пространстве даже свободное падение под действием силы тяжести, направленной к центру Земли, не является строго прямолинейным (вертикальным) – в противном случае тяжелые тела распределялись бы равномерно по поверхности Земли, которая – случись такое – стала бы идеальной сферой, без впадин и возвышенностей. Что касается движения с постоянной скоростью, то оно считалось невозможным из-за того, что силы в физике Аристотеля (и, особенно, в ее средневековых модификациях) носили «одушевленный» характер, то есть трактовались по аналогии с животными силами [8; 9; 11, S. 57]. Движение под действием таких сил, подверженных естественной усталости, стремлению к покою, а также к объединению с себе подобными, должно было неизбежно протекать с нарушением регулярности и, значит, неравномерно. Сам Аристотель, в частности, утверждал, что в зависимости от вида движения максимум его скорости наступает либо в начале, либо в конце, либо в середине движения. В начале – когда тело бросают вертикально вверх, в конце – когда оно свободно падает вниз, и в середине – когда брошено под углом («О небе» II, 6; 288a17-24).

Второй постулат (закон свободного падения) также носит редукционистский характер: он предполагает возможность выделения в чистом виде движения с постоянным ускорением. С точки зрения доклассической физики такое движение представлялось проблематичным, ибо оно предполагало наличие постоянно и равномерно увеличивавшейся движущей силы. Обыч-

ная практика средневековых перипатетиков состояла в том, что они относили простейшие регулярные движения – равномерные, равноускоренные и равнозамедленные – не к природной, а виртуальной реальности, определяемой «абсолютным могуществом Бога» (*potentia Dei absoluta*) или, говоря философским языком, к разряду «логически возможного» (*possibile logicum*) [12]. Характерно, что когда гипотеза о равноускоренном характере падения была впервые сформулирована (это произошло в середине XVI в. в работе испанского схоласта Доминго де Сото), на нее просто не обратили внимания. Галилей, не знакомый с трудами де Сото, по сути, заново высказал эту гипотезу и, что еще более важно, обосновал ее.

3. Технологические предпосылки отказа от холизма и перехода к редукционизму

В заключение сформулируем ответ на вопрос о том, каковы причины того, что доклассическая механика следовала идее холизма, а классическая – редукционизма.

На протяжении веков теоретические представления о природном движении формировались, исходя из образов и понятий, которые возникали у человека в процессе целенаправленного преобразования природы или, конкретнее, при реализации им самим созданных, не встречающихся в природе технических движений. Именно в ходе практического преобразования естественных движений природы в искусственные движения машин и механизмов сначала подспудно, а затем все более осознанно шло формирование теоретических представлений о природном движении. Сказанное означает, что идеализации, которыми пользовалась теоретическая механика доклассического периода, так или иначе были связаны с теми формами технического движения, которые удалось практически реализовать в эту эпоху.

Какие из этих форм или характеристик технического движения были определяющими для идеи холизма? Важнейшей характеристикой технических движений, реализованных в античности, являлся тот факт, что источником этих движений была почти исключительно одушевленная сила, то есть, мускульное усилие людей или тягловых животных. Именно это обстоятельство стало ключевым фактором формирования идеализаций античной механики.

Средневековые не внесли существенных изменений в структуру этих идеализаций. Хотя в этот период и началось активное применение неодушевленных природных сил (воды и ветра), радикального перелома во взглядах на движение все же не произошло. Дело в том, что средневековые перипатетики распространяли на эти силы привычные анималистические представления, иными словами, неорганические силы природы они трактовали по аналогии с ее животными силами. Анимализм в этот период распространялся даже на такую чисто механическую силу, как сила тяжести, в действии которой позднеантичные и средневековые натурфилософы «находили» те же нерегулярности и нарушения аддитивности, что и при действии одушевленных сил. В основе представления о неаддитивности сил лежал вполне реальный факт из механической практики того времени: совместное человеческое усилие, прилагаемое к «машине-двигателю» (термин Маркса), действительно, могло давать результат, который превосходил механическую сумму результатов индивидуальных усилий [8; 9; 13; 14].

Изменить такое положение вещей могло, во-первых, использование в качестве двигателей не одушевленных, а чисто механических сил, и, во-вторых, применение регулирующих устройств, способных устранить нерегулярности движения, вызванные одушевленными силами (в тех случаях, когда не представлялось возможным заменить одушевленные силы на механические).

Именно это и произошло в XV-XVI вв. В этот период были впервые реализованы новые виды технического движения, ставшие практической основой идеи редукции.

Прежде всего, это – движения, осуществляемые механизмами, в которых в качестве машины-двигателя использовалась сила тяжести. Среди этих механизмов – подъемные устрой-

ства с противовесом, роль которого состояла в уравнивании груза перед его перемещением.

Во-вторых, это – сложные движения, реализуемые в кривошипно-шатунных механизмах с целью преобразования возвратно-поступательного движения во вращательное и наоборот. Важнейшим техническим элементом этих механизмов служило маховое колесо, демпфирующее неравномерности вращения (в средние века использовались почти исключительно маховые грузы, которые были не так эффективны).

Значение подъемных устройств, снабженных противовесом, широкое использование которых начинается с XV в. (оно связано со строительством городов и портов морской торговли), определяется тем, что в них в качестве двигателя применялась не мускульная, а механическая сила – сила тяжести или вес. В отличие от одушевленных сил, совокупное действие которых не поддается количественной оценке, вес обладает свойством аддитивности, что и позволяет применять количественный анализ для описания вызываемых им движений.

Есть еще одно важное обстоятельство, связанное с заменой мускульной силы на силу тяжести. В подъемных устройствах античности и средневековья сила движения (человеческое усилие) и сила сопротивления (вес поднимаемого груза) были неоднородными, что служило принципиальным препятствием для определения количественных соотношений между самими силами и параметрами вызываемых этими силами движений. С появлением подъемных устройств, снабжаемых противовесом, это препятствие, веками тормозившее использование количественных методов, было, наконец, устранено. Приведение силы движения и силы сопротивления к «общему знаменателю», в роли которого выступила сила тяжести, сделало возможным количественное сравнение двух – теперь ставших однородными – факторов движения. Выйдя на авансцену технического движения, сила тяжести стала впоследствии считаться силой *par excellence* и в теоретической механике. Со временем на свойства этой силы стали ориентироваться при описании всех прочих механических сил (эта традиция сохраняется и в современных учебниках классической механики).

Еще одним важным фактором становления идей классической механики явилось то обстоятельство, что в устройствах, снабжаемых противовесом, перемещение груза (после его предварительного уравнивания) осуществлялось посредством минимальной силы, значительно меньшей самого груза. Теоретически эта сила вообще могла быть «бесконечно малой». Практическая реализация движения, вызываемого «бесконечно малой» силой, ставила под сомнение традиционный тезис Аристотеля «все, что движется, движется чем-то другим» и, одновременно, подводила к идее инерциального движения [8; 9].

Что касается кривошипно-шатунных механизмов с маховым колесом, широкое использование которых также началось в XVI–XVII вв., то их теоретическое значение состояло в том, что маховое колесо демпфировало естественные неравномерности вращения и тем самым подводило к мысли о принципиальной возможности движения с постоянной скоростью [13; 14]. Кроме того, преобразование нерегулярного возвратно-поступательного движения в равномерное и непрерывное вращение, реализуемое в этих механизмах, дало наглядный пример нарушения еще одного постулата аристотелевской физики – тезиса о том, что между двумя фазами возвратно-поступательного движения обязательно наступает так называемый «промежуточный покой» (*quies media*) [15].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hussey E. Aristotle's Mathematical Physics. In: Aristotle's Physics: a Collection of Essays (ed. L. Judson). – Oxford: Clarendon Press, 1991, 213–242.
2. Gregory A. Aristotle, Dynamics and Proportionality // Early Science and Medicine. 2001. Vol. 6, 1–21.

3. Bradwardine Th. *Tractatus de Proportionibus*, Its Significance for the Development of Mathematical Physics (ed. H. L. Crosby). – Madison: University of Wisconsin Press, 1955.
4. Murdoch G. E., Sylla E. D. The Science of Motion. In: *Science in the Middle Ages* (ed. D. Lindberg). – Chicago: University of Chicago Press, 1978, 206–264.
5. Molland G. The Oresmian Style: Semi-Mathematical, Semi-Holistic. In: Molland G. *Mathematics and Medieval Ancestry of Physics*. – Aldershot: Variorum reprints, 1995, 13–30.
6. Зайцев Е. А. Категория количества в физике Аристотеля, средневековой натурфилософии и немецкой классической философии. В кн.: *Математика и реальность. Труды Московского семинара по философии математики* (Под ред. В. А. Бажанова и др.). – М.: Изд-во МГУ, 2014, 348–375.
7. Koyre A. *Etudes galileennes*. – Paris: Hermann, 1966.
8. Зайцев Е. А. Технологические предпосылки научной революции XVII в. В кн.: Э. В. Ильенков и проблема человека в революционную эпоху. Материалы XIX Межд. конф. «Ильенковские чтения». М., 2017, 266–274.
9. Зайцев Е. А. Всеобщее содержание природы в зеркале развития практической механики // *Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия «Философия. Социология. Право»*. 2017. Вып. 41, 12–19.
10. Benedetti G. B. *Diversarum speculationum mathematicarum et physicarum liber*. – Taurini, 1585.
11. Maier A. *Die Vorläufer Galileis im 14. Jahrhundert*. – Roma: Edizioni di storia e letteratura, 1949.
12. Зайцев Е. А. У истоков теоретической механики: история превращения технического искусства в научную дисциплину // *Институт истории естествознания и техники им. С. И. Вавилова РАН. Годичная научная конференция 2015. Т. 1*. М., 2015, 132–141.
13. Зайцев Е. А. Искусственное и природное: концепция идеального Ильенкова и история механики. В кн.: *Философия Э. В. Ильенкова и современность. Материалы XVIII Межд. конф. «Ильенковские чтения»*. Белгород, 2016, 42–46.
14. Зайцев Е. А. Идеальное движение // *Научный результат. Социальные и гуманитарные исследования*. 2016. Т. 2, № 2(8), 34–42.
15. Зайцев Е. А. Предпосылки открытия параболической траектории движения брошенного тела (вопрос о «промежуточном покое») // *Историко-математические исследования. Вторая серия*. 2018. Вып. 16 (51), 282–299.

REFERENCES

1. Hussey E. 1991, “Aristotle’s Mathematical Physics”, *Aristotle’s Physics: A Collection of Essays* (ed. L. Judson). Clarendon Press, Oxford, 213–242.
2. Gregory A. 2001, “Aristotle, Dynamics and Proportionality”, *Early Science and Medicine*. Vol. 6, 1–21.
3. Bradwardine Th. 1955, *Tractatus de Proportionibus*, Its Significance for the Development of Mathematical Physics (ed. H. L. Crosby). Univ. of Wisconsin Press, Madison.

4. Murdoch G. E., Sylla E. D. 1978, "The Science of Motion", Science in the Middle Ages (ed. D. Lindberg). University of Chicago Press, Chicago, 206–264.
5. Molland G. 1995, "The Oresmian Style: Semi-Mathematical, Semi-Holistic", Molland G., Mathematics and Medieval Ancestry of Physics. Variorum reprints, Aldershot, 13–30.
6. Zaytsev E. A. 2014, "The Category of Quantity in the Physics of Aristotle, Medieval Natural Philosophy and Classical German Philosophy", Matematika i realnost. Trudy Moskovskogo seminarov po filosofii matematiki (Mathematics and Reality. Proc. of the Moscow Seminar on the Philosophy of Mathematics). Moscow State University, Moscow, 348–375.
7. Koyre A. 1966, Etudes galileennes. Hermann, Paris.
8. Zaytsev E. A. 2017a, "Technological Prerequisites for the Scientific Revolution of the 17th C.", E. V. Ilyenkov I problema cheloveka v revoliutsionnuu epokhu. Materialy XIX Mezhdunarodnoy konferentsii "Ilyenkovskie chteniya" (E. V. Ilyenkov and the Problem of Man in the Epoch of Revolution. Proc. 19th Int. Conf. "Ilyenkov's Readings"). Moscow, 2017, 266–274.
9. Zaytsev E. A. 2017b, "The Universal Content of Nature in the Mirror of Practical Mechanics", Nauchnye Vedomosti Belgorodskogo Gos. Univ., Ser. "Filosofiya, Sotsiologiya, Pravo", Issue 41, 12–19.
10. Benedetti G. B. 1585, "Diversarum speculationum mathematicarum et physicarum liber", Taurini.
11. Maier A. 1949, "Die Vorläufer Galileis im 14. Jahrhundert", Edizioni di storia e letteratura, Roma.
12. Zaytsev E. A. 2015, "The Origins of Theoretical Mechanics: a History of the Transformation of the Technical Art in a Scientific Discipline", Institut istorii estestvoznaniya i tekhniki im. Vavilova RAN. Godichnaya nauchnaya konferentsiya 2015. Vol. 1. Moscow, 132–141.
13. Zaytsev E. A. 2016a, "Artificial and Natural: the Concept of the Ideality by Ilyenkov and History of Mechanics", Filosofiya E. V. Ilyenkova i sovremennost. Materialy XVIII Mezhdunarodnoy konferentsiy «Ilyenkovskie chteniya» (The Philosophy of E. V. Ilyenkov and Modernity. Proc. 18th Int. Conf. "Ilyenkov's Readings"). Belgorod, 2016, 42–46.
14. Zaytsev E. A. 2016b, "The Ideal Movement", Nauchnyy rezultat. Sotsialnye i gumanitarnye issledovaniya. Vol. 2. № 2(8), 34–42.
15. Zaytsev E. A. 2018, "The Prerequisites for the Discovery of the Parabolic Shape of Projectile Motion (the Problem of "Intermediate Rest")", Istoriko-matematicheskie issledovaniya. 2nd Series. Issue 16 (51), 282–299.

Получено 18.03.2017 г.

Принято в печать 12.07.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 2.

УДК 51(091)+519.6+539.4

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-488-498

**Математические модели нагрева и расплавления частиц
мелкодисперсного порошка**

Е. В. Ларкин, А. Н. Привалов

Ларкин Евгений Васильевич — доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой, Тульский государственный университет. (г. Тула).

e-mail: elarkin@mail.ru

Привалов Александр Николаевич — доктор технических наук, профессор, профессор кафедры информатики и информационных технологий, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого. (г. Тула).

e-mail: privalov.61@mail.ru

Аннотация

По мере своего развития математическое моделирование находит всё новые и новые области применения, оставаясь эффективным инструментом, в том числе, инженерной деятельности. Математические модели проходят путь эволюционного развития, повышая адекватность по соответствию реальным физическим процессам. Одно из актуальных направлений математического моделирования связано с развивающимися технологиями аддитивного прототипирования. Например, при изготовлении изделий из металлических порошков методами аддитивных технологий, в частности, селективного лазерного плавления, одним из практических вопросов является подбор оптимальных параметров работы 3D-принтера. Решение задачи оптимизации x параметров работы 3D-принтера должно базироваться на математической модели процесса нагрева и расплавления частиц металла. В качестве базовой концепции моделирования использован подход, основанный на формировании и решении уравнения теплопроводности с краевыми условиями, учитывающими сферическую форму частицы, распределение энергии в поперечном сечении лазерного пучка и взаимное пространственное положение частицы и лазерного пучка. Отмечается, что для оценки структуры формируемых деталей подобный подход является избыточным, а алгоритм интегрирования уравнения в частных производных обладает высокой вычислительной сложностью. Для упрощения задачи анализа исходная микромодель трансформирована в макромоделю нагрева и расплавления, в которых распределение температуры по объёму частицы считается постоянным, а внешнее воздействие на частицу сводится к передаче тепла через поверхность шара, с верхней стороны - от лазерного луча к частице, а с нижней стороны - от частицы к окружающей среде. Для макромоделю получены временные диаграммы нарастания температуры и накопленной внутренней энергии частицы во времени. Сделан вывод о возможности разбиения пространства вокруг частицы на зоны: полного и неполного расплавления, а также зону нагрева, недостаточного для расплавления. Показано, что наличие подобных зон приводит к рыхлости структуры формируемых на 3D-принтере деталей.

Ключевые слова: аддитивные технологии, лазерный нагрев, уравнение теплопроводности, микромодель, макромодель, временные диаграммы нагрева-расплавления.

Библиография: 19 названий.

Для цитирования:

Е. В. Ларкин, А. Н. Привалов. Математические модели нагрева и расплавления частиц мелкодисперсного порошка // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 2, С. 488–498.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 2.

UDC 51(091)+519.6+539.4

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-488-498

Mathematical models of heating and melting of particles of fine-dispersed powder

E. V. Larkin, A. N. Privalov

Larkin Eugene Vasilyevich — doctor of technical science, professor, head of chair, Tula State University. (Tula).*e-mail: elarkin@mail.ru***Privalov Alexander Nikolaevich** — Doctor of Technical Sciences, Professor, Professor of the Department of Informatics and Information Technologies, Tula State Pedagogical University. L.N. Tolstoy. (Tula).*e-mail: privalov.61@mail.ru***Abstract**

As it develops, mathematical modeling finds more and more new areas of application, remaining an effective tool, including engineering. Mathematical models go the way of evolutionary development, increasing the adequacy in accordance with real physical processes. One of the relevant areas of mathematical modeling is associated with the developing technologies of additive prototyping. For example, in the manufacture of products from metal powders by the methods of additive technologies, in particular, selective laser melting, one of the practical issues is the selection of optimal parameters for the 3D printer. The solution to the optimization problem of the 3D printer operation parameters should be based on a mathematical model of the process of heating and melting of metal particles. An approach based on the formation and solution of the heat equation with boundary conditions that take into account the spherical shape of the particle, the energy distribution in the cross section of the laser beam, and the relative spatial position of the particle and the laser beam is used as the basic concept of modeling. It is noted that to assess the structure of the formed parts, this approach is redundant, and the algorithm for integrating the partial differential equation has high computational complexity. To simplify the analysis task, the initial micromodel is transformed into heating and melting macromodels in which the temperature distribution over the volume of the particle is considered constant, and the external effect on the particle is reduced to heat transfer through the surface of the ball, from the upper side from the laser beam to the particle, and from the lower side - from particle to environment. For the macromodel, we obtained time diagrams of the temperature increase and the accumulated internal particle energy in time. It is concluded that it is possible to divide the space around the particle into zones: complete and incomplete melting, as well as a heating zone insufficient for melting. It is shown that the presence of such zones leads to the friability of the structure of the parts formed on the 3D printer. **Keywords:** additive technology, laser heating, heat conduction equation, micro-model, macro-model, heating-melting timing charts.

Keywords: additive technologies, laser heating, thermal conductivity equation, micromodel, macromodel, time diagrams of heating-melting.

Bibliography: 19 titles.

For citation:

E. V. Larkin, A. N. Privalov, 2019, "Mathematical models of heating and melting of particles of fine-dispersed powder", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 2, pp. 488–498.

1. Введение

Аддитивные технологии изготовления деталей, основанные на послойном лазерном наплавлении частиц мелкодисперсных порошков металлов, в настоящее время распространены достаточно широко [1, 2, 3, 4, 7, 8]. Практическая реализация подобных технологий, например, для стали 07X18H12M2, связана с установлением оптимальных режимов функционирования лазера 3D-принтера, осуществляющего нагрев частиц до температуры плавления и последующее их плавление [1, 2], что обеспечивает, в конечном итоге, требуемые прочностные характеристики изготавливаемых деталей, и позволяет экономить дорогостоящее сырье.

Для решения задачи оптимизации необходима математическая модель, позволяющая за приемлемое время оценить эффективность предлагаемых технических решений. Общепринятый подход к математическому моделированию процесса нагрева и расплавления металлического порошка основан на исследовании распространения тепла внутри частицы при ее нагреве и фазовом превращении [5, 6]. Реализация подобного подхода связана с интегрированием уравнений в частных производных, что в свою очередь, требует значительных вычислительных ресурсов, и поэтому малоприменимы для практической инженерии. В том случае, если результатом оптимизации является настройка 3D-принтера под конкретный материал с известными свойствами, требуется упрощенная модель, позволяющая оперативно варьировать параметры установки. Инженерные подходы к моделированию, позволяющие оптимизировать аддитивный технологический процесс, в настоящее время развиты недостаточно, что обуславливает важность и актуальность настоящей работы.

2. Микромодель нагрева частицы

Расчетная схема для определения температуры частицы порошка приведена на рис. 1 а, где показана частица в виде шара радиусом R , в ортогональном пространстве $xOyz$, центр O которого связан с центром шара, ось z совпадает с направлением падения на шар лазерного луча, а оси x и y образуют с осью z правую систему координат. Вследствие того, что шар представляет собой точечно-симметричное симметричное тело, без нарушения общности можно считать, что центр пучка электромагнитного излучения, формируемого лазерной системой, смещен вдоль оси x относительно оси z на величину d [9].

Распространение тепла при нагревании шарообразной частицы лазерным лучом в пределах одного фазового состояния (твердого, или жидкого) описывается с помощью дифференциального уравнения теплопроводности [10]

$$\frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial t} = \frac{\alpha}{c\rho} \nabla^2 T(x, y, z, t), \forall x, y, z \in (x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2), \quad (1)$$

где $T(x, y, z, t)$ - распределение температуры по объему частицы в момент времени t в градусах Кельвина; x, y, z - пространственные координаты; $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ - дифференциальный оператор Лапласа; α - коэффициент теплопроводности, характеризующий скорость выравнивания температуры в неравномерно нагретой частице; c - удельная теплоемкость материала частицы; ρ - плотность материала частицы; t - время; R - радиус шара.

Распределение энергии $w(x', y)$ по площади сечения лазерного пучка с эффективным радиусом r определяется конструкцией и режимом функционирования лазера (рис. 1 б). Лазерный пучок, направленный сверху вниз вдоль координаты z , нагревает верхнюю полусферу частицы, откуда тепло распространяется по всему ее объему. При этом лучи пучка частично отражаются, от поверхности частицы, а частично поглощаются частицей.

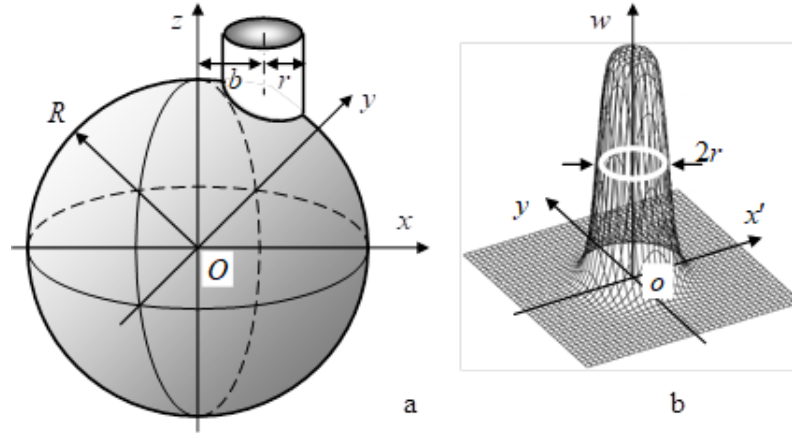


Рис. 1. Расчетная схема для определения температуры частицы (а) и распределение энергии в лазерном луче (b)

Количество поглощенной энергии зависит от свойств поверхности частицы и от углов падения лучей лазерного пучка на поверхность,

$$\tilde{w}(x, y) = \{1 - k_r[\varphi(x, y)]\} \cdot w(x - b, y, t), \quad (2)$$

где b - расстояние от оси z до центра лазерного пучка; $\varphi(x, y)$ - угол падения луча на поверхность шара в точке с координатами x, y ; $k_r[\varphi(x, y)]$ - коэффициент отражения;

$$\varphi(x, y) = \arccos \frac{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}{R}. \quad (3)$$

При импульсном нагреве частиц, с прямым фронтом и прямым срезом импульса [10]

$$w(x', y, t) = w(x', y) [\eta(t) - \eta(t - \theta)]. \quad (4)$$

где $w(x', y)$ - распределение энергии в лазерном пучке; $\eta(t)$ - единичная функция Хевисайда; θ - длительность импульса;

Распределение температуры внутри шара после начала воздействия лазерного излучения определяется за счет интегрирования уравнения в частных производных (1) при начальных условиях

$$T_0(x, y, z) = T_0 = \text{const}_{x,y,z}, \quad \forall x, y, z \in [(x^2, y^2, z^2) \leq R^2], \quad (5)$$

и граничных условиях теплообмена с окружающей средой на верхней и нижней полусферах [11]

$$q_L(x, y, z, t) = \frac{1}{\beta} \cdot [T_L^+(x, y, z, t) - T_L^-(x, y, z, t)], \quad x, y, \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \geq 0 \quad (6)$$

$$q_e(x, y, z, t) = \frac{1}{\beta} \cdot [T_e^+(x, y, z, t) - T_e^-(x, y, z, t)], \quad x, y, \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \leq 0; \quad (7)$$

где $q_L(x, y, z, t)$ - удельный тепловой поток, поступающий от лазерного источника, через единицу площади поверхности в единицу времени; $q_e(x, y, z, t)$ - удельный тепловой поток, рассеиваемый в окружающем пространстве через единицу площади поверхности в момент времени t ; β - термическое сопротивление материала частицы; $T_L^+(x, y, z, t)$ - температура в точке падения лазерного луча, определяемая по методике, приведенной в [12], с. 80., $T_L^-(x, y, z, t)$ - температура в той же точке внутри шара; $T_e^+(x, y, z, t)$, $T_e^-(x, y, z, t)$ - температура в точке с координатами x, y, z вне и внутри шара, соответственно.

Микроанализ процесса нагрева частицы лазерным лучом, проведенный с помощью интегрирования уравнения (1) в частных производных [13] с начальными условиями (5) и граничными условиями (6), (7), дает подробную информацию о состоянии частицы с момента нагревания до текущего момента, включая распределение температуры по объему. Зачастую подобная информация является избыточной, поскольку для формирования детали на 3D-принтере существенно важным является ответ на вопрос, какой процент массы частицы изменил фазовое состояние. Для ответа на этот вопрос достаточно свести микроанализ процесса к макроанализу, рассматривая состояние частицы в целом.

3. Макромодель нагрева и расплавления частицы

Если определять распределение температуры по объему частицы не требуется, то

$$\nabla^2 T(x, y, z, t) = 0.$$

В этом случае $T_L^-(x, y, z, t) = T_e^-(x, y, z, t) = T(t)$ и (1) преобразуется в

$$C \frac{dT(t)}{dt} = Q_L(t) + Q_e(t), \quad (8)$$

где $Q_L(t)$, $Q_e(t)$ - общее количество тепла, поступающего через верхнюю и нижнюю полусферы, соответственно; $Q_e(t)$ - общее количество тепла, поступающего через верхнюю полусферу; $C = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho c_p$ - теплоемкость шарообразной частицы; $T(t)$ - температура частицы.

Теплопередача осуществляется по нормали к поверхности, поэтому как $Q_L(t)$, так и $Q_e(t)$, должно определяться интегрированием (6), (7) по площади поверхности шара:

$$Q_L(t) = \frac{1}{\beta} \cdot \iint_{S_1} T_L^+(x, y, z, t) dS_1 - \frac{2\pi R^2}{\beta} T(t), \forall x, y, z \in (x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z > 0); \quad (9)$$

$$Q_e(t) = \frac{1}{\beta} \cdot \iint_{S_2} T_e^+(x, y, z, t) dS_2 - \frac{2\pi R^2}{\beta} T(t), \forall x, y, z \in (x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z < 0). \quad (10)$$

Подставляя (10) и (11) в (8), будем иметь:

$$\xi \frac{dT(t)}{dt} + T(t) = k_1 \cdot \iint_{S_1} T_L^+(x, y, z, t) dS_1 + k_2 \cdot \iint_{S_2} T_e^+(x, y, z, t) dS_2, \quad (11)$$

где $\xi = \frac{c\rho\beta R}{3}$ - постоянная времени нагрева/охлаждения частицы в целом; $k_1 = k_2 = \frac{1}{4\pi\beta R^2}$ - коэффициенты передачи тепла от верхней и нижней полусфер, соответственно; $T(t)$, $T_L^+(x, y, z, t)$, $T_e^+(x, y, z, t)$ - изменяющиеся по времени температуры частицы и ее поверхностей в точках теплообмена в градусах Кельвина.

Решение (11) для случая, если $T_L^+(x, y, z, t)$ и $T_e^+(x, y, z, t)$ за время импульсного воздействия θ меняется мало, имеет вид экспоненты.

Следует подчеркнуть, что выражение (11) получено для нагрева без фазового преобразования частицы, которое сопровождается поглощением скрытой теплоты плавления, вследствие чего температура в квазистационарной системе в течение некоторого периода должна оставаться постоянной. При лазерном плавлении, когда продолжительность нагрева составляет микросекунды, величина перегрева относительно точки термодинамического равновесия существенно возрастает и реальная температура плавления металла может быть много выше равновесной. Так, в [14] показано, что при лазерном плавлении ниобия величина перегрева достигает 300-500 градусов Кельвина и зависит от длительности и плотности энергии в импульсе. На кривой нагрева при плавлении фиксируется максимальное значение температуры,

после чего наблюдается ее снижение, и затем вновь повышение [15, 16, 17]. Для описания изменения фазового состояния частицы в контексте решаемой задачи достаточно построить самую грубую модель, при которой изменение фазы вещества частицы протекает при неизменной температуре:

$$\frac{dQ_m(t)}{dt} = k_m \cdot \left[\iint_{S_1} T_L^+(x, y, z, t) dS_1 + \iint_{S_2} T_e^+(x, y, z, t) dS_2 \right], \quad (12)$$

где $Q_m(t)$ - приращение внутренней энергии частицы, обусловленное фазовым переходом; k_m - коэффициент пропорциональности.

Изменение внутренней энергии для случая, если $T_L^+(x, y, z, t)$ и $T_e^+(x, y, z, t)$ в течение времени импульсного воздействия θ меняется мало, имеет вид наклонной прямой, угол наклона которой определяется разностью величин удельных тепловых потоков: поступающего от лазерного источника и рассеиваемого в пространстве. Количество тепла, необходимого для полного расплавления частицы, определяется зависимостью

$$\Delta Q_m = Q_{m2} - Q_{m1} = \frac{4\pi R^3 \rho c_m}{3} \Big|_{T=T_m}, \quad (13)$$

где Q_{m1} - внутренняя энергия, накопленная в частице при ее нагреве до температуры плавления; Q_{m2} - внутренняя энергия, накопленная в частице при ее нагреве до температуры плавления и выдержке при этой температуре до полного расплавления частицы; ρ - плотность материала частицы; A_m - удельная теплота плавления; T_m - температура плавления.

По зависимости (13) может быть определен процент M массы частицы, перешедшей в жидкую фазу, при неполном ее расплавлении:

$$M = \frac{Q_{m3} - Q_{m1}}{Q_{m2} - Q_{m1}} \cdot 100\%, \quad Q_{m1} \leq Q_{m3} \leq Q_{m2}, \quad (14)$$

где Q_{m3} - внутренняя энергия, накопленная в частице при неполном ее расплавлении.

Графики изменения температуры и энтальпии показаны на диаграммах (рис. 2).

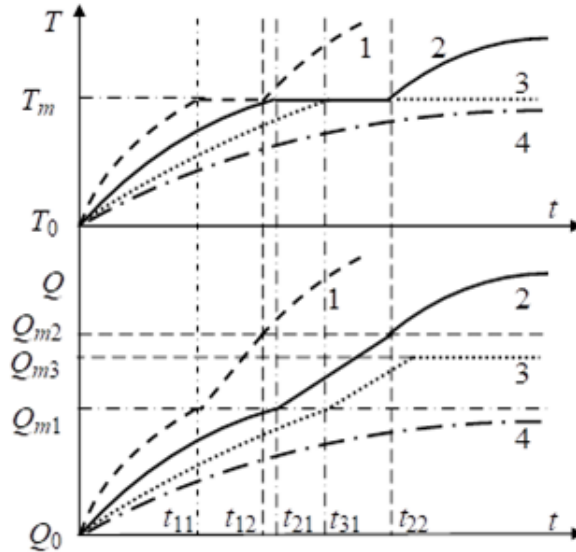


Рис. 2. Диаграммы нарастания температуры и энтальпии частицы

На рис. 2 использованы следующие обозначения: T - температура частицы в целом; T_m - температура плавления; Q - накопленная внутренняя энергия частицы; t_{i1} - время нагрева до температуры плавления; t_{i2} - время до полного расплавления частицы; $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. На первом и втором графиках показаны диаграммы нарастания температуры и теплоты, накопленной в частице. Диаграмма 1 (пунктирная линия), определяет случай, когда ось лазерного

луча совпадает с центром шара. В этом случае скорость нарастания температуры частицы T до точки плавления T_f максимальна, и частица нагревается до указанной температуры за время t_{11} . Далее температура не меняется, и в частице постепенно осуществляется фазовый переход, при котором твердая субстанция преобразуется в жидкость. В момент t_{12} весь объем шара превращается в каплю, после чего температура жидкости начинает снова возрастать по экспоненте.

Диаграмма 2 (сплошная линия), определяет случай, когда ось лазерного луча смещена относительно центра шара, но еще находится в зоне гарантированного расплавления частицы. Частица нагревается до температуры плавления за время t_{21} , а до полного расплавления - за время t_{22} . Диаграмма 3, показанная точечной линией, определяет нарастание температуры и накопленной теплоты в частице, попавшей в зону неполного расплавления. Температура частицы возрастает до величины T_f за время t_{31} . Далее частица за счет накопления теплоты расплавляется, но не полностью, поэтому момент времени t_{31} на этой диаграмме не показан. И наконец, на диаграмме 4 штрихпунктирной линией показан нагрев частицы, если она лежит вне зоны расплавления.

При функционировании 3D принтера частица и лазерный пучок занимают случайное положение друг относительно друга (рис. 3).

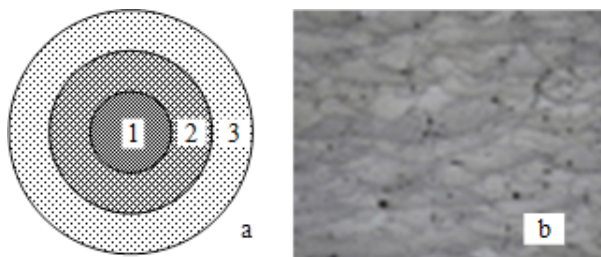


Рис. 3. Зоны фазовых состояний частиц (а) и вид материала детали (б)

В зависимости от взаиморасположения, частица может расплавиться полностью (зона 1), частично (зона 2), или не расплавиться совсем (зона 3), что показано на рис. 3 а. В результате спекания частиц формируется субстанция [18], структура которой показана на рис. 3 б. Как следует из рисунка, наличие трех типов взаиморасположения частиц, расположенных хаотично в объеме, и лазерного пучка, при спекании приводит к появлению в структуре пустот, не заполненных материалом частицы.

На рис. 4 показан вертикально выращенный с помощью аддитивной технологии образец для проведения механических испытаний из стали 07X18H12M2 (а) и структура его верхнего (б) и нижнего (с) торцов [19].

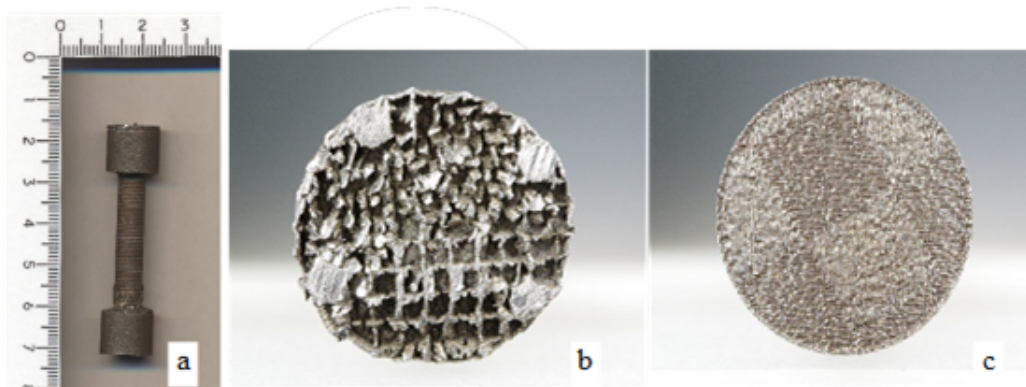


Рис. 4. Структура образца из стали 07X18H12M2

Как следует из рис. 4, пористость нижнего торца (куда стекает расплавленная сталь) ниже, чем пористость верхнего торца (откуда сталь стекает). Кроме того, на верхнем торце отчетливо видна структура следа от перемещения лазерного луча.

4. Заключение

Предложенная математическая макромодель нагрева и расплавления частицы мелкодисперсного порошка, полученная из микромодеи лазерного нагрева частицы, на примере стали 07X18H12M2, является ключевой в разработке инженерного подхода к оптимизации параметров функционирования 3D-принтера при практической реализации аддитивных технологий изготовления деталей. Дальнейшее развитие этой тематики должно проводиться в направлении эмпирического уточнения температуры поверхности частицы в точке падения лазерного луча на поверхность частицы и определения параметров зон в зависимости от настроек 3D-принтера.

Исследования были проведены при поддержке ФЦП «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2014-2020 годы» по теме: «Разработка прототипа инженерного программного обеспечения на основе высокопроизводительных вычислений для оценки механических характеристик изделия, изготовленного с использованием аддитивных технологий (методом селективного лазерного спекания) с учетом стратегии изготовления изделия» (уникальный идентификатор проекта RFMEFI57717X0271.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зеленко М.А., Нагайцев М.В., Довбыш В.М. Аддитивные технологии в машиностроении. Пособие для инженеров. – М.: ГНЦ РФ ФГУП «НАМИ». 2015. - 220 с.
2. Волежжанин И.А., Макаров В.Н., Холодников Ю.В. Аддитивные технологии использования композитов при производстве горных машин // Горный информационно-аналитический бюллетень. - 2017. - № 6. С. 32 - 38.
3. Olakanmi E.O., Cochrane R.F., Dalgarno K.W. A review on selective laser sintering/melting (SLS/SLM) of aluminium alloy powders: Processing, microstructure, and properties // Progress in Materials Science. - Vol. 74. - October 2015. - P. 401 - 477.
4. Travyanov A. Ya. et. al. Study of mechanical properties of cellular structures from 03Kh16N15M3 stainless steel depending on parameters of an elementary cell. Chernye Metally. 2018. No. 10. pp. 59–64.
5. Petrovsky P. V. et. al. Dependence of structure and properties of 03Kh16N15M3 on the geometry of cellular structures obtained by the selective laser melting method. Chernye Metally. 2019. No. 3. pp. 49-53.
6. Travyanov A. Ya., Dub A. V., Petrovsky P. V. et. al. Study of mechanical properties of cellular structures from 03Kh16N15MZ stainless steel depending on parameters of an elementary cell. Chernye Metally. 2018. No. 10. pp. 59–63.
7. Петровский П.В., Чеверикин В.В., Соколов П.Ю. и др. Зависимость структуры и свойств стали 03X16H15M3 от геометрии ячеистых структур, полученных методом селективного лазерного плавления // Черные металлы. 2019. № 3. С. 49-53.
8. Масайло Д.В., Попович А.А., Орлов А.В. и др. Исследование структуры и механических характеристик образцов, полученных газопорошковой лазерной наплавкой и селективным лазерным плавлением из сфероидизирующего порошка на основе железа // Черные металлы. 2019. № 4. С. 73-77.

9. Шишковский И.В. Лазерный синтез функционально-градиентных мезоструктур и объемных изделий. – М.: Физматлит, 2009. – 424 с.
10. Orfanidis S.J. Introduction to signal processing. - Prentice Hall Inc. NY, USA, 1996. 790 p.
11. Handbook of Physics / Editors: W. Benenson, J.W. Harns, H. Stocker, H. Lotz. N.Y., USA. Springer Verlag, 2002. Pp. LVIII, 1190.
12. Григорьянц А.Г. Основы лазерной обработки материалов. - М.: Машиностроение, 1989. - 301 с.
13. Akimenko T.A., Dunaev V.A., Larkin E.V. Computer Simulation of the Surface heating process by the movable laser // V International Workshop on Mathematical Models and their Applications 2016. Krasnoyarsk, Russia. IOF Conf. Series. Matherial science and Engeneering 2017.Vol. 173. N. UNSP 012002.
14. Smurov I. Pyrometry applications in laser machining // Proc. of SPIE. - 2001. - Vol. 4147. - P. 55 - 66.
15. Яковлев Е. Б. Перегрев твердых тел при плавлении // Изв. АН СССР. Сер. физ. - 1989. - Т. 53. - № 3. - С. 591—594.
16. Яковлев Е.Б., Вейко В.П. Особенности плавления металлов при лазерном нагревании // ИТ вестник информационных технологий, механики и оптики. - 2005. - Т. 21. - С. 52 - 56.
17. Яковлев Е.Б., Свирина В.В., Сергаева О.Н.. Особенности плавления металлов при действии ультракоротких лазерных импульсов // Изв. вузов. Приборостроение. - 2010. - Т. 53. - № 4. - С. 57 - 62.
18. Selective laser melting of a novel Sc and Zr modified Al-6.2 Mg alloy: Processing, microstructure, and properties // R. Li, M. Wang, T. Yuan, Bo Song, C. Chen, K. Zhou, P. Cao. Powder Technology. - Vol. 319. - 2017. - P. 117–128.
19. Разработка прототипа инженерного программного обеспечения (ИПО) на основе высокопроизводительных вычислений для оценки механических характеристик изделия, изготовленного с использованием аддитивных технологий (методом селективного лазерного спекания) с учетом стратегии изготовления изделия. Отчет о прикладных научных исследованиях и экспериментальных разработках // Под ред. В.И.Горбачева. № гос. рег. АААА-А18-118010990073-5. Тула: Тул. гос. пед ун-т им. Л.Н.Толстого, 2017. - 790 с.

REFERENCES

1. Zelenko M.A., Nagaytsev M.V., Dovbysh V.M., 2015, Additive technology in mechanical engineering. A manual for engineer, SSC RF FSUE “NAMI”, Russia.
2. Volegzhanin I.A., Makarov V.N., Kholodnikov Y.V., 2017, “Additive technologies for the use of composites in the production of mining machines”, Mining Information and Analytical Bulletin, no. 6, pp. 32–38.
3. Olakanmi E.O., Cochrane R.F., Dalgarno K.W., 2015, “A review on selective laser sinter-ing / melting (SLS / SLM) of aluminum alloy powders: Processing, microstructure, and properties”, Progress in Materials Science, vol.74, pp. 401–477.

4. Travyanov A. Ya., 2018, "Study of mechanical properties of cellular structures from 03Kh16N15M3 stainless steel depending on parameters of an elementary cell", *Chernye Metally*, no. 10, pp. 59–64.
5. Petrovsky P. V., 2019, "Dependence of structure and properties of 03Kh16N15M3 on the geometry of cellular structures obtained by the selective laser melting method", *Chernye Metally*, no. 3, pp. 49–53.
6. Travyanov A. Ya., Dub A. V., Petrovsky P. V., 2018, "Study of mechanical properties of cellular structures from 03Kh16N15MZ stainless steel depending on parameters of an elementary cell", *Chernye Metally*, no. 10, pp. 59–63.
7. Petrovsky P.V., Cheverikin V.V., Sokolov P.Yu., 2019, "Dependence of the structure and properties of 03Kh16N15M3 steel on the geometry of cellular structures obtained by the method of selective laser melting", *Ferrous metals*, no. 3, pp. 49–53.
8. Masailo D.V., Popovich A.A., Orlov A.V., 2019, "Study of the structure and mechanical characteristics of samples obtained by gas-powder laser surfacing and selective laser melting from a spheroidizing powder based on iron", *Ferrous metals*, no 4, pp. 73–77.
9. Shishkovsky I.V., 2009, *Laser synthesis of functional gradient mesostructures and bulk products*, Fizmatlit, Russia.
10. Orfanidis S.J., 1996, *Introduction to signal processing*, Prentice Hall Inc., NY, USA.
11. Benenson W., Harns J.W., Stocker H., Lotz H., 2002, *Handbook of Physics*, Springer Verlag, N.Y., USA.
12. Grigoryants A.G., 1989, *Fundamentals of laser processing of materials*, Mechanical Engineering, Russia.
13. Akimenko T.A., Dunaev V.A., Larkin E.V., "Computer Simulation of the Surface heat-ing process by the movable laser", *Trudy V International Workshop "on Mathematical Models and their Applications"* (IOF Conf. Series. "Matherial science and Engineering"). Krasnoyarsk, 2016, vol. 173.
14. Smurov I., 2001, "Pyrometry applications in laser machining", *Proc. of SPIE*, vol. 4147, pp. 55–66.
15. Yakovlev, E. B., 1989, "Overheating of solids during melting", *Izv. USSR Academy of Sciences. Ser. physical*, vol. 53, no. 3, pp. 591 – 59
16. Yakovlev E.B., Veiko V.P., 2005, "Features of metal melting during laser heating", *NT Bulletin of Information Technologies, Mechanics and Optics*, val. 21, pp. 52–56.
17. Yakovlev E.B., Svirina V.V., Sergaeva O.N., 2010, "Features of melting of metals under the action of ultrashort laser pulses", *Izv. universities. Instrument making*, vol. 53, no. 4, pp. 57–62.
18. Li R., Wang M., Yuan T., Song Bo, Chen C., Zhou K., Cao P., 2017, "Selective laser melting of a novel Sc and Zr modified Al-6.2 Mg alloy: Processing, microstructure, and properties", *Powder Technology*, vol. 319, pp. 117–128.
19. Gorbachev V.I., 2017, *Development of a prototype of engineering software (IPO) based on high-performance computing to assess the mechanical characteristics of products manufactured using additive technologies (selective laser sintering)*, taking into account the manufacturing

strategy of the product. Report on applied scientific research and experimental development, Tula state ped. un-t them. L.N. Tolstoy, Tula.

Получено 18.03.2019 г.

Принято в печать 12.07.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 2.

УДК 004.942

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-499-511

Моделирование компьютерных систем с FIFO-дисциплиной обработки прерываний

Е. В. Ларкин, А. Н. Привалов

Ларкин Евгений Васильевич — доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой, Тульский государственный университет. (г. Тула).

e-mail: elarkin@mail.ru

Привалов Александр Николаевич — доктор технических наук, профессор, профессор кафедры информатики и информационных технологий, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого. (г. Тула).

e-mail: privalov.61@mail.ru

Аннотация

Дисциплина FIFO (First In First Out) обработки прерываний достаточно широко используется в ЭВМ Фон Неймановского типа, применяемых в информационных и цифровых управляющих системах. Цель реализации подобного режима работы — оптимизация времени доступа к данным — достижима только при наличии адекватной модели, описывающей систему. Аналитическая модель построена с использованием фундаментального математического аппарата сетей Петри-Маркова. Первичная Петри-Марковская модель разделена на иерархические уровни, соответствующие количеству заявок на обработку прерываний в очереди. Показано, что с текущего уровня возможно переключение, как на предыдущий, так и на последующий уровни прерываний. Получены зависимости для определения времени пребывания на текущем уровне и вероятностей переключения на сопряженные уровни. Предложен метод преобразования Петри-Марковской модели в полумарковский процесс. Показано, что структура подобного полумарковского процесса представляет собой бинарное дерево. Получены зависимости для определения временных и вероятностных характеристик блужданий по бинарному дереву.

Ключевые слова: FIFO-дисциплина, прерывание, временные характеристики, сеть Петри-Маркова, полумарковский процесс, «соревнование», бинарное дерево

Библиография: 18 названий.

Для цитирования:

Е. В. Ларкин, А. Н. Привалов. Моделирование компьютерных систем с FIFO-дисциплиной обработки прерываний // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 2, С. 499–511.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 2.

UDC 004.942

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-499-511

Simulation of computer systems with FIFO-discipline interrupt handling

E. V. Larkin, A. N. Privalov

Larkin Eugene Vasilyevich — doctor of technical science, professor, head of chair, Tula State University. (Tula).

e-mail: elarkin@mail.ru

Privalov Alexander Nikolaevich — Doctor of Technical Sciences, Professor, Professor of the Department of Informatics and Information Technologies, Tula State Pedagogical University. L.N. Tolstoy. (Tula).

e-mail: privalov.61@mail.ru

Abstract

The FIFO (First In First Out) discipline of interrupt processing is widely used in Von Neumann type computers of informational and digital control systems. The goal of implementing such modes of operation - optimization time to data access - is achievable only when there is an adequate model, which describes data processing in the system. The analytical model is worked out with use the fundamental mathematical apparatus of Petri-Markov nets. The initial Petri-Markov model is divided into hierarchical levels in accordance with the number of interrupts in queue for processing. It is shown, that from the current level it is possible to switch both to the previous and to the next interrupt. Dependencies for determine the time of residence on the current level, and the probabilities of switching to conjugate levels are obtained. The method of Petri-Markov model transformation into the semi-Markov process is proposed. It is shown, that semi-Markov process obtained has the binary tree structure. Dependences for determining the time and probabilistic characteristics of wandering through a binary tree, are obtained.

Keywords: FIFO discipline, interruption, time characteristics, Petri-Markov net, semi-Markov process, "competition", binary tree

Bibliography: 18 titles.

For citation:

E. V. Larkin, A. N. Privalov, 2019, "Simulation of computer systems with FIFO-discipline interrupt handling", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 2, pp. 499–511.

1. Введение

ЭВМ Фон Неймановского типа, в которых реализован режим прерываний, широко используются при обмене данными в цифровых управляющих и информационных системах [1, 2, 3]. Прерывания, как правило, поступают от внешних источников сигналов, функционирующих независимо от самой ЭВМ. При поступлении соответствующего запроса процессор прекращает интерпретацию текущего (фонового) алгоритма и переходит к интерпретации алгоритма обработки прерываний, по завершении которой возвращается к интерпретации отложенного алгоритма [4, 5]. При этом возможен возврат как к алгоритму обработки самого раннего запроса при FIFO-дисциплине (First In First Out) обработки, так и предыдущего поступившего запроса при LIFO-дисциплине (Last In First Out).

Несмотря на широкое распространение систем с прерываниями, предварительное моделирование процесса обработки данных в них развито мало, что объясняется отсутствием подходов, которые позволяли бы, с одной стороны, адекватно описывать функционирование системы на физическом уровне, а с другой стороны приводили бы к достаточно простым расчетам временных характеристик системы. Вместе с тем, существует практически универсальный подход, основанный на теории полумарковских/Марковских процессов [6, 7, 8, 9, 10], позволяющий провести оценку временных интервалов с точностью до плотностей распределения и развитие теории полумарковских процессов - математический аппарат сетей Петри-Маркова (СПМ) [11], позволяющий проводить анализ «соревнований» в системе [12, 13, 14, 15], а следовательно оценивать величину временных интервалов при взаимодействии систем. Для формирования адекватной Петри-Марковской модели системы с FIFO-дисциплиной обработки прерываний ниже сделаны следующие допущения:

процессы в системе развиваются в реальном физическом времени;

как интервалы времени между прерываниями, так и интервалы времени, затрачиваемого на обработку прерываний, являются случайными, задаются с точностью до плотностей распределения и не зависят от предыстории процесса.

Это позволило построить первичную модель, учитывающую эффект «соревнования» в системе, и упростит модель до ординарного полумарковского процесса, позволяющего проводить оценку временных интервалов.

2. Модели компонентов системы

Сложность любого математического описания системы, включающей ряд взаимодействующих элементов, определяется сложностью описания ее компонентов, поэтому модели компонентов системы с прерываниями должны быть предельно простыми. В [16] показано, что интерпретация алгоритма любой сложности в физическом времени может быть представлена в виде ординарного полумарковского процесса μ_m следующего вида:

$$\mu = \{A, h(t)\}, \quad (1)$$

где t - время; $A = \{a_0, \dots, a_j, \dots, a_J\}$ - множество состояний; a_0 - стартовое состояние, моделирующее начало интерпретации алгоритма; a_J - поглощающее состояние, моделирующее окончание интерпретации алгоритма; $h(t)$ - полумарковская матрица;

$$h(t) = [h_{j,k}(t)] = p \otimes f(t); \quad (2)$$

$p = [p_{j,k}]$ и $f(t) = [f_{j,k}(t)] - (J+1) \times (J+1)$ стохастическая матрица и матрица плотностей распределения времени пребывания полумарковского процесса в состояниях, соответственно.

В полумарковской матрице (2), описывающей алгоритм, имеющий начало и конец элементы нулевого столбца, и J -й строки являются нулевыми, что вытекает из особенностей интерпретируемого процессором алгоритма (рис. 1 а). Для элементов, с нулевого по $(J-1)$ -й, справедливо следующее выражение:

$$\sum_{k=1}^J \int_0^\infty h_{j,k}(t) dt = 1, 0 \leq j < J. \quad (3)$$

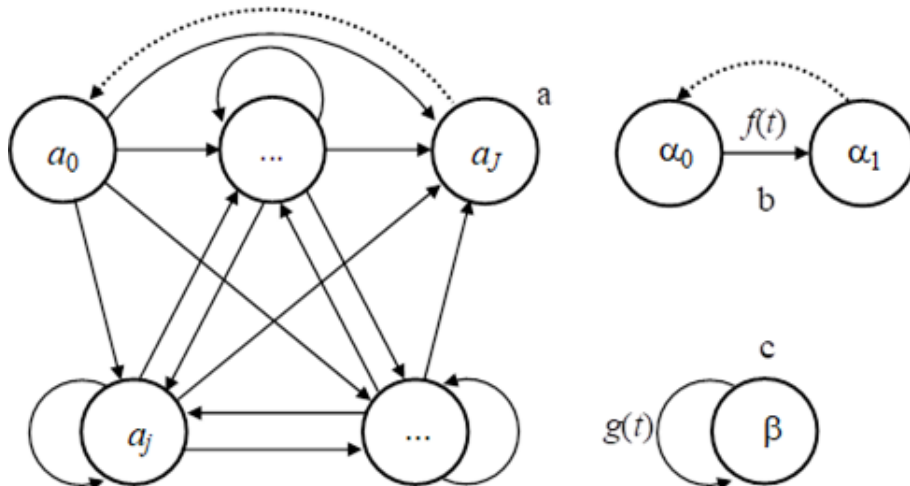


Рис. 1. Структуры элементов модели

На практике возможен случай, когда, например, фоновая программа является циклической, т.е. после окончания выполнения снова перезапускается сначала. В этом случае нулевой

элемент последней строки матрицы $h(t)$, $h_{J,0}(t) = \delta(t)$, где $\delta(t)$ - δ -функция Дирака. Эта связь показана пунктирной стрелкой на рис. 1 а.

При упрощении модель общего вида (2) преобразуется в модель, структура которой показана на рис. 2 б:

$$\mu \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \alpha_0, \alpha_1 \right\}, \left[\begin{array}{cc} 0 & f(t) \\ 0 & 0 \end{array} \right] \right\} - 4; \text{O A; CG0O} := 5\text{G} \Rightarrow 3 > 0; 3 > @8\text{B} < 0; \\ \left\{ \alpha_0, \alpha_1 \right\}, \left[\begin{array}{cc} 0 & f(t) \\ \delta(t) & 0 \end{array} \right] \right\} - 4; \text{O A; CG0O F8} :: 8\text{G5A} :> 3 > 0; 3 > @8\text{B} < 0; \end{array} \right. \quad (4)$$

где $f(t)$ - плотность распределения времени интерпретации алгоритма;

В общем случае плотность распределения $f(t)$ для конечного алгоритма определяется по следующей зависимости [16]:

$$f(t) = L^{-1} \left[I_0^R \cdot \sum_{w=1}^{\infty} \{L[h(t)]\}^w \cdot I_J^C \right], \quad (5)$$

где I_0^R - $(J+1)$ -мерный вектор строка, в котором нулевой элемент равен единице, а все остальные элементы равны нулю; I_J^C - $(J+1)$ -мерный вектор-столбец, J -й элемент которого равен единице, а все остальные элементы равны нулю; $L[\dots]$ и $L^{-1}[\dots]$ - прямое и обратное преобразования Лапласа.

Для определения плотности распределения $f(t)$ в случае циклического алгоритма, в $h(t)$ необходимо выполнить подстановку $h_{J,0}(t) \Leftarrow 0$, после чего к сформированной таким образом матрицы применить зависимость (5)..

Внешний генератор прерываний, представленный на рис. 2 с, имеет вид

$$\nu \rightarrow \{\{\beta\}, [g(t)]\}, \quad (6)$$

где β - единственное возвратное состояние; $g(t)$ - плотность распределения времени возврата в состояние.

Для описания рекурсивного «соревнования» процессов, описываемых плотностями $f(t)$ и $g(t)$, вводятся функции ${}^k\varphi_f(t)$ и ${}^k\varphi_g(t)$, которые соответственно обозначают плотности распределения времени, оставшегося до окончания обработки прерывания и до поступления очередного прерывания на k -м этапе рекурсии.

Взвешенные плотности распределения времени завершения этапа «победителем» определяются по зависимостям:

$$\begin{cases} {}^k\varphi_f(t) / {}^k\varphi_g(t) = {}^k\eta_{f/g}(t) = {}^k\varphi_f(t) \cdot [1 - {}^k\Phi_g(t)]; \\ {}^k\varphi_g(t) / {}^k\varphi_f(t) = {}^k\eta_{g/f}(t) = {}^k\varphi_g(t) \cdot [1 - {}^k\Phi_f(t)], \end{cases} \quad (7)$$

где $\dots\Phi_{\dots}(t) = \int_0^t \dots\varphi_{\dots}(\tau) d\tau$.

Вероятности и плотности распределения времени завершения этапа «победителем» равны, соответственно

$$\begin{cases} {}^k\pi_{f/g} = \int_0^{\infty} {}^k\eta_{f/g}(t) dt; \\ {}^k\pi_{g/f} = \int_0^{\infty} {}^k\eta_{g/f}(t) dt; \end{cases} \quad \begin{cases} {}^k\varphi_{f/g}(t) = \frac{{}^k\eta_{f/g}(t)}{{}^k\pi_{f/g}}; \\ {}^k\varphi_{g/f}(t) = \frac{{}^k\eta_{g/f}(t)}{{}^k\pi_{g/f}}. \end{cases} \quad (8)$$

Плотности распределения времени ожидания «победителями» завершения этапа «побежденными» определяется по зависимостям

$$\begin{cases} {}^k\varphi_f(t) \rightarrow {}^k\varphi_g(t) = {}^k\varphi_{f \rightarrow g}(t) = \frac{1(t) \int_0^{\infty} {}^k\varphi_f(\tau) {}^k\varphi_g(t+\tau) d\tau}{\int_0^{\infty} {}^k\Phi_f(t) d{}^k\Phi_g(t)}; \\ {}^k\varphi_g(t) \rightarrow {}^k\varphi_f(t) = {}^k\varphi_{g \rightarrow f}(t) = \frac{1(t) \int_0^{\infty} {}^k\varphi_g(\tau) {}^k\varphi_f(t+\tau) d\tau}{\int_0^{\infty} {}^k\Phi_g(t) d{}^k\Phi_f(t)}, \end{cases} \quad (9)$$

где $1(t)$ - единичная функция Хевисайда.

С использованием зависимостей (7), (8), (9) может быть построена аналитическая модель прерываний.

3. Петри-Марковская модель прерываний

Каждый по отдельности полумарковский процесс (4) и (5) не зависит от другого, но в системе исследуемого типа они вступают в «соревнование», а после «победы» одного из процессов происходит переключение обоих компонентов системы в новое состояние, определяемое «победителем». Для моделирования подобного явления использован математический аппарат сетей Петри-Маркова (СПМ) [11].

Структура СПМ, описывающей «соревнование» в системе с прерываниями, приведена на рис. 2. За ее основу была принята СПМ, описанная в [17]. Точечной стрелкой на структуре показана связь, возникающая при моделировании циклического алгоритма. В алгоритме, имеющем начало и конец, указанная связь отсутствует. Система с прерываниями описывается следующей шестеркой:

$$\Pi = \{A, Z, X(Z), Y(Z), U(t), \Lambda\}, \quad (10)$$

где $A = a_0 \cup \bigcup_k A_k$ - множество мест; включающее a_0 - место, моделирующее начало функционирования FIFO-системы; и $A_k = \{^k a_1, ^k a_2, ^k a_3\}$ $k = 1, 2, \dots$ - подмножества мест, моделирующих процессы, участвующие в «соревновании» k -го уровня рекурсии; $^k a_1$ - место, моделирующее процесс интерпретации фоновой программы, или процесс обработки прерываний (для простоты, не нарушая общности, программы обработки прерываний и фоновая считаются одинаковыми); $^k a_2$ - место, моделирующее функционирование генератора прерываний, $^k a_3$ - место, моделирующее возврат на предыдущий уровень рекурсии; $Z = \{z_1, \dots, z_k, \dots\}$ - множество переходов, определяющих уровень рекурсии; $X(Z) = \{X(z_1), \dots, X(z_k), \dots\}$ - входная функция переходов, описывающая множество мест, из которых можно попасть в соответствующий переход за один полушаг; $Y(Z) = \{Y(z_1), \dots, Y(z_k), \dots\}$ - выходная функция переходов, описывающая множество мест, в которые можно попасть из соответствующего перехода за один полушаг; $U(t) = \{U_1(t), \dots, U_k(t), \dots\}$ - множество плотностей распределения времени выполнения полушагов из мест; $\Lambda = \{\Lambda_1, \dots, \Lambda_k, \dots\}$ - множество логических условий выполнения полушагов из переходов;

$$X(z_1) = \{a_0, {}^3 a_3, {}^1 a_3\}; X(z_k) = \{^{k-1} a_1, ^{k-1} a_2, ^{k+2} a_3\}, k = 2, 3, \dots; \quad (11)$$

$$Y(z_k) = \{^{k+1} a_1, ^{k+1} a_2, ^{k+1} a_3\}, k = 2, 3, \dots; \quad (12)$$

$$U_k(t) = \{^k \varphi_f(t), ^k \varphi_g(t), \delta(t)\}; \quad (13)$$

$$\Lambda_1 = \{\Lambda_1(z_1, {}^1 a_1), \Lambda_1(z_1, {}^1 a_2)\};$$

$$\Lambda_1(z_1, {}^1 a_1) = \Lambda_1(z_1, {}^1 a_2) = \lambda(a_0, z_1) \vee \lambda({}^2 a_3, z_1) \vee \lambda({}^1 a_3, z_1);$$

$$\Lambda_k = \{\Lambda_k(z_k, ^k a_1), \Lambda_k(z_k, ^k a_2), \Lambda_k(z_k, ^k a_3)\};$$

$$\Lambda_k(z_k, ^k a_1) = \Lambda_k(z_k, ^k a_2) = \lambda(^{k-1} a_2, z_k) \vee \lambda(^{k+1} a_3, z_k);$$

$$\Lambda_k(z_k, ^k a_3) = \lambda(^{k-1} a_1, z_k), k = 2, 3, \dots \quad (14)$$

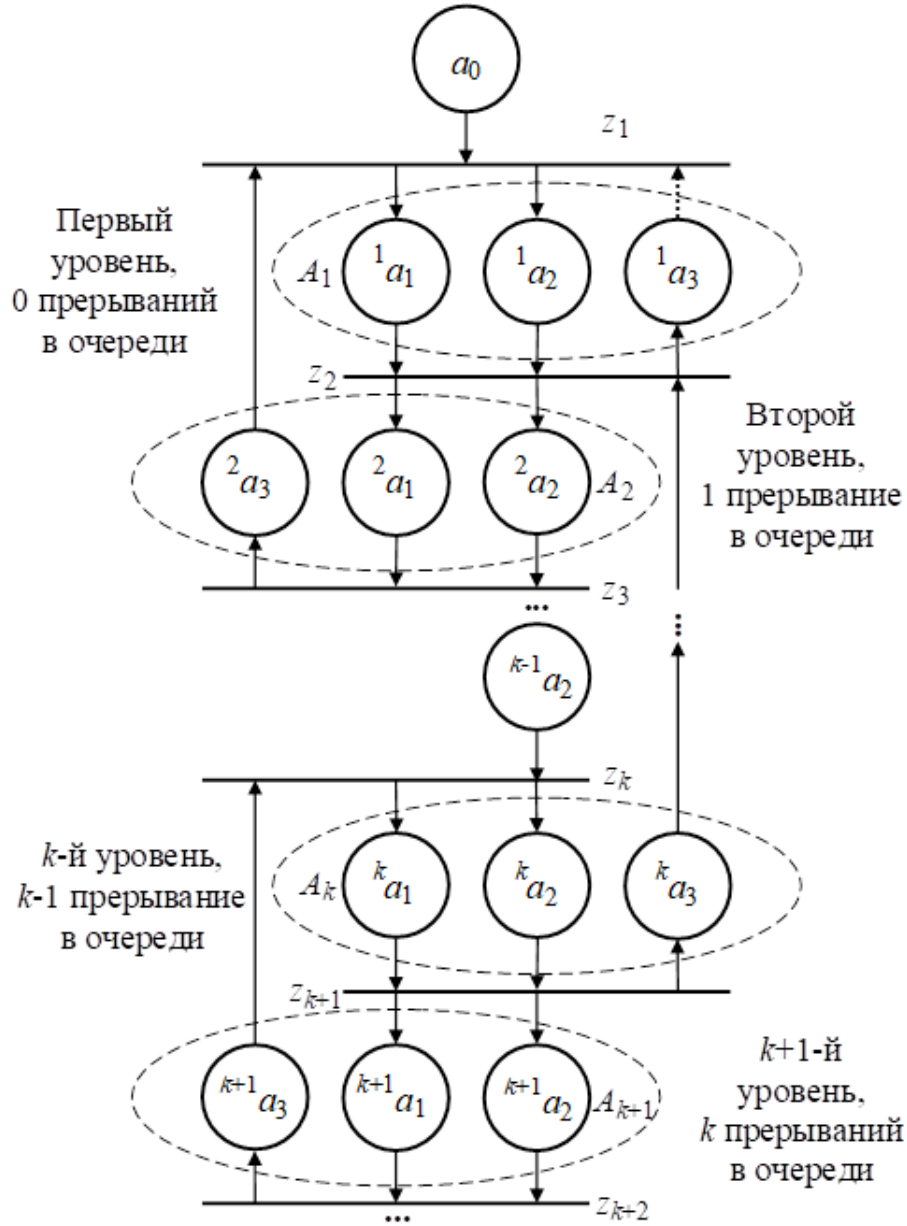


Рис. 2. Сеть Петри-Маркова, моделирующая алгоритм с прерываниями

Множество $X(z_1)$ имеет мощность 2 и имеет вид $X(z_1) = \{a_0, {}^3a_3\}$, если моделируется FIFO-система с прерываниями, основной (фоновый) алгоритм которой имеет начало и конец. Мощность множества $X(z_1)$ имеет мощность 3 и имеет вид, как показано в (11), если моделируется FIFO-система с прерываниями, основной (фоновый) алгоритм которой является циклическим.

В (13), (14) ${}^k\varphi_f(t)$, ${}^k\varphi_g(t)$ - плотности распределения, которые получаются в соответствии с зависимостями (7), (8), (9) в результате анализа «соревнования» на соответствующем уровне рекурсии; $\delta(t)$ - δ -функция Дирака; $\Lambda_k(z_k, {}^ka_i)$ - логические условия выполнения полшага $(z_k, {}^ka_i)$, $k = 1, 2, \dots, i = 1, 2, 3$; (a_0, z_1) , $\lambda({}^{k-1}a_1, z_k)$, $\lambda({}^{k-1}a_2, z_k)$, $\lambda({}^{k+1}a_3, z_k)$, $k = 1, 2, \dots, \lambda(z_k, {}^ka_i)$, $k = 1, 2, \dots, i = 1, 2, 3$ - логические переменные, принимающие значение

$$\lambda(\dots) = \begin{cases} 0, & \text{when corresponding semi-step is not executed;} \\ 1, & \text{when corresponding semi-step is executed.} \end{cases} \quad (15)$$

Кроме того, дизъюнкция в логическом выражении для $\Lambda_1(z_1, {}^1a_1) = \Lambda_1(z_1, {}^1a_2)$ содер-

жит две логические переменные, если моделируется FIFO-система с прерываниями, основной (фонový) алгоритм которой имеет начало и конец, и три логические переменные, если алгоритм является циклическим.

Структура СПМ описывает многоуровневую. процедуру парных «соревнований» генератора и обработчика прерываний.

Первый уровень «соревнований» реализуется следующим образом.

1.1. Производится подстановка

$${}^1\varphi_f(t) \Leftarrow f(t); {}^1\varphi_g(t) \Leftarrow g(t). \quad (16)$$

1.2. Проверяется выполнение полушага (a_0, z_1) . Если $(a_0, z_1) = 0$, то система находится в режиме ожидания запуска, в противном случае запускается «соревнование» плотностей распределения ${}^1\varphi_f(t)$ и ${}^1\varphi_g(t)$.

1.3. Определяется «победитель» «соревнования». Если «победителем» является плотность ${}^1\varphi_f(t)$, то взвешенная плотность распределения времени выполнения полушага $({}^1a_1, z_2)$ определяется по зависимости (7) для случая ${}^1\varphi_f(t) / {}^1\varphi_g(t)$, вероятность ${}^1\pi_{f/g}$ и чистое распределение времени выполнения полушага $({}^1a_1, z_2)$, ${}^1\varphi_{f/g}(t)$, определяются по зависимостям (8).

1.4. Выполняется полушаг $({}^1a_1, z_2)$ в соответствии с логическими условиями (14), который инициирует выполнение полушага $(z_2, {}^1a_3)$. Место 1a_3 моделирует поглощающее состояние полумарковского процесса в случае, если фонový алгоритм имеет начало и конец, и перезапускает процесс в случае, если фонový алгоритм является циклическим.

1.5. При перезапуске процесса определяется плотность распределения времени, оставшегося до поступления очередного запроса на прерывание, ${}^1\varphi_f(t) \rightarrow {}^1\varphi_g(t)$, по зависимости (9),

1.6. Производится подстановка

$${}^1\varphi_f(t) \Leftarrow {}^1f(t); {}^1\varphi_g(t) \Leftarrow {}^1\varphi_{f \rightarrow g}(t), \quad (17)$$

и производится перезапуск процесса.

1.7. Если после определения «победителя» в «соревновании», которое анализируется в соответствии с п. 1.3. является плотность ${}^1\varphi_g(t)$, то взвешенное распределение времени выполнения полушага $({}^1a_2, z_2)$ определяется по зависимости (7) для случая ${}^1\varphi_g(t) / {}^1\varphi_f(t)$, вероятность ${}^1\pi_{f/g}$ и чистая плотность распределения времени выполнения полушага $({}^1a_2, z_2)$, ${}^1\varphi_{g/f}(t)$, определяются по зависимостям (8). Кроме того, в этом случае определяется ${}^1\varphi_g(t) \rightarrow {}^1\varphi_f(t)$.

1.8. Производится подстановка

$${}^2\varphi_f(t) \Leftarrow {}^1\varphi_{g \rightarrow f}(t) \rightarrow {}^1\varphi_f(t); {}^2\varphi_g(t) \Leftarrow g(t), \quad (18)$$

которая подготавливает следующий шаг рекурсии.

«Соревнование» на k -м уровне, если для попадания на указанный уровень был выполнен полушаг $({}^{k-1}a_2, z_k)$, реализуется следующим образом.

$k.1.1.$ Определяется плотность распределения времени, оставшегося до выполнения полушага $({}^ka_1, z_{k+1})$, ${}^{k-1}\varphi_{g \rightarrow f}(t)$, по зависимости (9) и выполняется подстановка

$${}^k\varphi_f(t) \Leftarrow {}^{k-1}\varphi_{g \rightarrow f}(t); {}^k\varphi_g(t) \Leftarrow g(t). \quad (19)$$

$k.1.2.$ Запускается «соревнование» плотностей распределения ${}^k\varphi_f(t)$ и ${}^k\varphi_g(t)$.

$k.1.3.$ Определяется «победитель» «соревнования». Если «победителем» является плотность ${}^k\varphi_f(t)$, то взвешенное распределение времени выполнения полушага $({}^ka_1, z_{k+1})$ определяется по зависимости (7) для случая ${}^k\varphi_f(t) / {}^k\varphi_g(t)$, вероятность ${}^k\pi_{f/g}$ и чистое распределение времени выполнения полушага $({}^ka_1, z_{k+1})$, ${}^k\varphi_{f/g}(t)$, определяются по зависимостям (8).

k.1.4. Выполнение полушага $(^k a_1, z_{k+1})$ в соответствии с логическими условиями (14) инициирует выполнение полушагов $(z_{k+1}, ^k a_3)$, $(^k a_3, z_{k-1})$, и система возвращается на $(k-1)$ -й уровень прерываний.

k.1.5. В случае, если в п. *k.1.3* «победителем» является плотность $^k \varphi_g(t)$, то взвешенное распределение времени выполнения полушага $(^k a_2, z_{k+1})$ определяется по зависимости (7) для случая $^k \varphi_g(t) / ^k \varphi_f(t)$, вероятность $^k \pi_{g/f}$ и чистое распределение времени выполнения полушага $(^k a_2, z_{k+1})$, $^k \varphi_{g/f}(t)$, определяются по зависимостям (8). Кроме того, в этом случае определяется $^k \varphi_g(t) \rightarrow ^k \varphi_f(t)$.

k.1.6. Производится подстановка

$$^{k+1} \varphi_f(t) \Leftarrow ^k \varphi_{g \rightarrow}(t) \rightarrow ^k \varphi_f(t); ^{k+1} \varphi_g(t) \Leftarrow g(t), \quad (20)$$

которая подготавливает следующий шаг рекурсии.

«Соревнование» на k -м уровне, если для попадания на указанный уровень был выполнен полушаг $(^{k+1} a_3, z_k)$ (в «соревновании» на $(k+1)$ -м, уровне «победила» плотность распределения $^{k+1} \varphi_f(t)$) реализуется следующим образом.

k.2.1. Определяется плотность распределения времени, оставшегося до выполнения полушага $(^k a_2, z_{k+1})$, $^{k+1} \varphi_{f \rightarrow g}(t)$, по зависимости (9) и выполняется подстановка

$$^k \varphi_1(t) \Leftarrow f(t), ^k \varphi_g(t) \Leftarrow ^{k+1} \varphi_{f \rightarrow g}(t); . \quad (21)$$

k.2.2. Запускается «соревнование» плотностей распределения $^k \varphi_f(t)$ и $^k \varphi_g(t)$.

k.2.3. Определяется «победитель» «соревнования». Если «победителем» является плотность $^k \varphi_f(t)$, то взвешенное распределение времени выполнения полушага $(^k a_1, z_{k+1})$ определяется по зависимости (7) для случая $^k \varphi_f(t) / ^k \varphi_g(t)$, вероятность $^k \pi_{f/g}$ и чистое распределение времени выполнения полушага $(^k a_1, z_{k+1})$, $^k \varphi_{f/g}(t)$, определяются по зависимостям (8).

k.2.4. Выполнение полушага $(^k a_1, z_{k+1})$ в соответствии с логическими условиями (14) инициирует выполнение полушагов $(z_{k+1}, ^k a_3)$, $(^k a_3, z_{k-1})$, и система возвращается на $(k-1)$ -й уровень прерываний.

k.2.5. В случае, если в п. *k.1.3* «победителем» является плотность $^k \varphi_g(t)$, то взвешенное распределение времени выполнения полушага $(^k a_2, z_{k+1})$ определяется по зависимости (7) для случая $^k \varphi_g(t) / ^k \varphi_f(t)$, вероятность $^k \pi_{g/f}$ и чистое распределение времени выполнения полушага $(^k a_2, z_{k+1})$, $^k \varphi_{g/f}(t)$, определяются по зависимостям (8). Кроме того, в этом случае определяется $^k \varphi_g(t) \rightarrow ^k \varphi_f(t)$.

k.2.6. Производится подстановка

$$^{k+1} \varphi_f(t) \Leftarrow ^k \varphi_{g \rightarrow}(t) \rightarrow ^k \varphi_f(t); ^{k+1} \varphi_g(t) \Leftarrow g(t), \quad (22)$$

которая подготавливает следующий шаг рекурсии.

Приведенная рекурсивная модель системы FIFO с прерываниями отличается от модели LIFO (Last In First Out) с прерываниями [17] тем, что при переключении с текущего на другой уровень в системе производятся разные подстановки.

4. Модель прерываний как полумарковский процесс

Процесс переключений в системе с прерываниями, в общем случае является бесконечным, но не является ни Марковским, ни полумарковским. Это происходит из-за необходимости при моделировании выполнения подстановок (16) - (22), которые определяются предысторией переключений. Однако, если на каждом уровне рекурсии оценивать плотности распределения

времени пребывания на нем и вероятности «победы» и «поражения» в «соревновании» генератора и обработчика прерываний, то может быть сформирован полумарковский процесс переключений в системе. Вследствие того, что при переключениях с различными предысториями оценки плотностей распределения и вероятностей является различными, полумарковский процесс имеет древовидную структуру (рис. 3). Вследствие того, что «соревнования» на каждом уровне являются парными (см. (7)), дерево является бинарным.

В структуре, приведенной на рис. 3, вершина, отмеченное двойной линией, является стартовым состоянием полумарковского процесса и моделирует начало функционирования FIFO-системы (место a_0 на рис. 2). Вершины, отмеченные штриховкой, являются поглощающими состояниями полумарковского процесса и моделируют окончание интерпретации фонового алгоритма FIFO-системой (место 1a_3 на рис. 2). В остальные вершины вписаны целые числа, обозначающие номер уровня рекурсии, из структуры, приведенной на рис. 2.

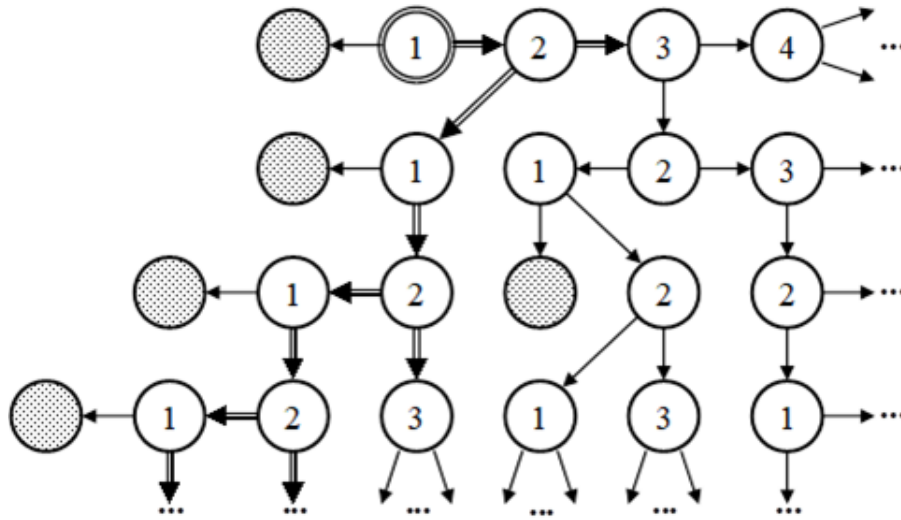


Рис. 3. Структура полумарковского процесса

Основными задачами, решаемыми с использованием модели FIFO-системы, являются:
задача оценки времени достижения системой состояния с R заявками на обработку прерываний из стартового состояния системы;

задача оценки времени переключения из состояния с R заявками на обработку прерываний в состояние с S заявками на обработку прерываний.

Для решения первой задачи необходимо:

- 1) проложить все возможные маршруты из стартового состояния в состояния с R заявками на обработку прерываний, встречающимися первый раз;
- 2) определить взвешенные плотности распределения времени достижения каждого из этих состояний из стартового состояния;
- 3) оценить вероятность и время достижения системой состояния с K заявками на обработку прерываний из стартового состояния системы.

Общепринятым методом поиска маршрутов с заданными свойствами является метод ветвей и границ [18] (на рис. 3 маршруты от стартового состояния до состояния с двумя заявками в очереди показаны стрелками с двойными линиями). Взвешенные плотности распределения, вероятности и чистые плотности распределения времени достижения каждого из состояний определяются в соответствии с зависимостями

$$\eta_m^{0-R}(t) = L^{-1} \left[\prod_n L \left[\eta_{g/f,m,n}^{0-R}(t) \right] \right]; \quad (23)$$

$$\pi_m^{0-R} = \int_0^\infty \eta_m^{0-R}(t) dt, \quad (24)$$

$$\varphi_m^{0-R}(t) = \frac{\eta_m^{0-R}(t)}{\pi_m^{0-R}}; \quad (25)$$

где $\eta_m^{0-R}(t)$ и π_m^{0-R} - соответственно взвешенная плотность распределения и вероятность достижения состояния с R прерываниями в очереди из стартового состояния по m -му маршруту; $\eta_{g/f,m,n}^{0-R}(t)$ - n -я взвешенная плотность распределения, лежащая на m -м маршруте, определяемая по зависимости (7); $\varphi_m^{0-R}(t)$ - чистая плотность распределения достижения состояния с R прерываниями в очереди из стартового состояния по m -му маршруту.

Оценка вероятности и времени достижения системой состояния с K заявками производится с помощью стохастического суммирования плотностей, полученных по зависимости (25):

$$\eta^{0-R}(t) = \sum_m \eta_m^{0-R}(t); \quad (26)$$

$$\pi^{0-R} = \sum_m \pi_m^{0-R}; \quad (27)$$

$$\varphi^{0-R}(t) = \frac{\eta^{0-R}(t)}{\pi^{0-R}}, \quad (28)$$

где $\eta^{0-R}(t)$, π^{0-R} - соответственно, взвешенная плотность распределения и вероятность достижения любого состояния с R прерываниями в очереди из стартового состояния; $\varphi^{0-R}(t)$ - чистая плотность распределения достижения состояния с R прерываниями в очереди из стартового состояния.

Для решения второй задачи необходимо:

- 1) проложить все возможные маршруты из стартового состояния в состояния с R заявками на обработку прерываний, встречающимися первый раз;
- 2) определить вероятности достижения каждого состояния с R заявками из стартового состояния;
- 3) для каждого найденного в соответствии с п. 1) состояния с R прерываниями положить все возможные маршруты, ведущие в состояния с S прерываниями и оценить вероятность и время их достижения;
- 4) оценить общее время достижения состояния с S прерываниями из состояния с R прерываниями.

В результате может быть получена зависимость, имеющая вид:

$$\varphi^{R-S}(t) = \frac{\sum_m \pi_m^{0-R} \sum_l L^{-1} \left[\prod_n L \left[\eta_{g/f,m,l,n}^{R-S}(t) \right] \right]}{\sum_m \pi_m^{0-R} \sum_l \prod_n \int_0^\infty \eta_{g/f,m,l,n}^{R-S}(t) dt}; \quad (29)$$

где $\eta_{g/f,m,l,n}^{R-S}(t)$ - взвешенная плотность распределения времени переключения на следующий уровень при движении из состояния с R прерываниями в состояние с S прерываниями на n -м этапе при движении по l -му маршруту из m -го состояния; π_m^{0-R} - вероятность попадания в m -е состояние из стартового, рассчитанная по зависимости (24).

Кроме предложенного, для определения временных интервалов может быть предложен любой другой метод анализа полумарковских процессов.

5. Заключение

В результате сформирована модель системы с прерываниями, построенная с использованием математического аппарата сетей Петри-Маркова и предложен метод упрощения первичной модели до строго полумарковского процесса, что позволило получить достаточно простые зависимости для расчета временных интервалов в системе. Общий подход является основой для

построения моделей более сложных систем, в том числе многозадачных, многопроцессорных и т.п. Дальнейшим развитием систем обработки данных с прерываниями является решение оптимизационной задачи, которая позволяет, например, минимизировать время ответа на прерывания

Исследования были проведены при поддержке Госпрограммы Минобрнауки РФ (№ 2.3121.2017/ПЧ).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Tzafestas S.G. Introduction to Mobile Robot Control. Elsevier, 2014. 750 p.
2. Landau I.D., Zito G. Digital Control Systems, Design, Identification and Implementation. Springer, 2006. 484 p.
3. Астроцм J., Wittenmark B., Computer Controlled Systems: Theory and Design. Tsinghua University Press. Prentice Hall, 2002. 557 p.
4. Regehr J. Duongsaa U. 2005. Preventing interrupt overload // Proceedings of the Conference on Languages, Compilers, and Tools for Embedded Systems. 2005. - Pp. 50 – 58.
5. Czerwinski, M., Cutrell, E., Horvitz, E. Instant messaging and interruption: Influence of task type on performance // Proceedings of OZCHI. Sydney, Australia - 2000, - <https://interruptions.net/literature/Czerwinski-OZCHI00.pdf>.
6. Bielecki T.R., Jakubowski J., Niewkgiowski M. Conditional Markov chains: Properties, construction and structured dependence // Stochastic Processes and their Applications. V. 127, N. 4. 2017. Pp. 1125–1170.
7. Ching W.K., Huang X., Ng M.K., Siu T.K. Markov Chains: Models, Algorithms and Applications / International Series in Operations Research & Management Science. V. 189. Springer Science + Business Media NY, 2013. 241 p.
8. Markov A.A. Extension of the law of large numbers to dependent quantities // Izvestiia Fiz.-Matem. Obsch. Kazan Univ., (2-nd Ser.), - 1906, - Pp. 135–156
9. Howard R. A. Dynamic Probabilistic Systems. Vol. 1: Markov Models. Vol. II: Semi-Markov and Decision Processes. Courier Corporation, 2012.
10. Janssen J., Manca R. Applied Semi-Markov processes. Springer US, 2006. 310 p.
11. Larkin E.V., Malikov A.A., Ivutin A.N. Petri-Markov model of fault-tolerant computer systems // 4th International Conference on Control, Decision and Information Technologies (CoDIT). – 5-7 April 2017, Barcelona, Spain – IEEE, 2017. – P. 416-420.
12. Heymann M. Concurrency and Discrete Event Control // IEEE Control Syst. Mag. 1990. Vol. 10. Pp. 103 – 112.
13. Valk R. Concurrency in Communicating Object Petri Nets // Concurr. object-oriented Program. Petri nets. 2001. Pp. 164 – 195.
14. Ivutin A.N, Larkin E.V. Simulation of Concurrent Games // Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modeling, Programming and Computer Software. – Chelyabinsk, 2015. – Vol. 8, № 2. – Pp. 43 - 54.

15. Larkin E.V., Ivutin A.N., Kotov V.V., Privalov A.N. Simulation of Relay-races // Bulletin of the South Ural State University. Mathematical Modelling, Programming & Computer Software. - 2016. - Vol. 9. - No 4. - Pp. 117 - 128.
16. Larkin E.V., Ivutin A.N. Estimation of Latency in Embedded Real-Time Systems // 3-rd Mediterranean Conference on Embedded Computing (MECO-2014). - 2014. - Budva, Montenegro, 2014. - Pp. 236 - 239.
17. Larkin E.V., Ivutin A.N., Troshina A. Model of interruptions in Swarm unit // Advances in swarm intelligence. Proceedings of 8-th International conference ICSI 2017. Fukuoka, Japan.. 2017. Part 1. Pp. 50 - 59.
18. Bienstock D., Graph searching, path-width, tree-width and related problems (a survey) // Reliability of Computer and Communication Networks, New Brunswick, NJ, 1989, in: DIMACS Ser. Discrete Math. Theoret. Comput. Sci. Vol. 5, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991. Pp. 33–49.

REFERENCES

1. Tzafestas S.G. Introduction to Mobile Robot Control. Elsevier, 2014. 750 p.
2. Landau I.D., Zito G. Digital Control Systems, Design, Identification and Implementation. Springer, 2006. 484 p.
3. Astrum J., Wittenmark B., Computer Controlled Systems: Theory and Design. Tsinghua University Press. Prentice Hall, 2002. 557 p.
4. Regehr J. Duongsaa U. 2005. Preventing interrupt overload // Proceedings of the Conference on Languages, Compilers, and Tools for Embedded Systems. 2005. - Pp. 50 – 58.
5. Czerwinski, M., Cutrell, E., Horvitz, E. Instant messaging and interruption: Influence of task type on performance // Proceedings of OZCHI. Sydney, Australia - 2000, - <https://interruptions.net/literature/Czerwinski-OZCHI00.pdf>.
6. Bielecki T.R., Jakubowski J., Niewkigowski M. Conditional Markov chains: Properties, construction and structured dependence // Stochastic Processes and their Applications. V. 127, N. 4. 2017. Pp. 1125–1170.
7. Ching W.K., Huang X., Ng M.K., Siu T.K. Markov Chains: Models, Algorithms and Applications / International Series in Operations Research & Management Science. V. 189. Springer Science + Business Media NY, 2013. 241 p.
8. Markov A.A. Extension of the law of large numbers to dependent quantities // Izvestiia Fiz.-Matem. Obsch. Kazan Univ., (2-nd Ser.), - 1906, - Pp. 135–156
9. Howard R. A. Dynamic Probabilistic Systems. Vol. 1: Markov Models. Vol. II: Semi-Markov and Decision Processes. Courier Corporation, 2012.
10. Janssen J., Manca R. Applied Semi-Markov processes. Springer US, 2006. 310 p.
11. Larkin E.V., Malikov A.A., Ivutin A.N. Petri-Markov model of fault-tolerant computer systems // 4th International Conference on Control, Decision and Information Technologies (CoDIT). - 5-7 April 2017, Barcelona, Spain – IEEE, 2017. – P. 416-420.

12. Heymann M. Concurrency and Discrete Event Control // IEEE Control Syst. Mag. 1990. Vol. 10. Pp. 103 – 112.
13. Valk R. Concurrency in Communicating Object Petri Nets // Concurr. object-oriented Program. Petri nets. 2001. Pp. 164 – 195.
14. Ivutin A.N., Larkin E.V. Simulation of Concurrent Games // Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modeling, Programming and Computer Software. – Chelyabinsk, 2015. – Vol. 8, № 2. – Pp. 43 - 54.
15. Larkin E.V., Ivutin A.N., Kotov V.V., Privalov A.N. Simulation of Relay-races // Bulletin of the South Ural State University. Mathematical Modelling, Programming & Computer Software. - 2016. - Vol. 9. - No 4. - Pp. 117 - 128.
16. Larkin E.V., Ivutin A.N. Estimation of Latency in Embedded Real-Time Systems // 3-rd Mediterranean Conference on Embedded Computing (MECO-2014). - 2014. - Budva, Montenegro, 2014. - Pp. 236 - 239.
17. Larkin E.V., Ivutin A.N., Troshina A. Model of interruptions in Swarm unit // Advances in swarm intelligence. Proceedings of 8-th International conference ICSI 2017. Fukuoka, Japan.. 2017. Part 1. Pp. 50 - 59.
18. Bienstock D., Graph searching, path-width, tree-width and related problems (a survey) // Reliability of Computer and Communication Networks, New Brunswick, NJ, 1989, in: DIMACS Ser. Discrete Math. Theoret. Comput. Sci. Vol. 5, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991. Pp. 33–49.

Получено 18.03.2019 г.

Принято в печать 12.07.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 2.

УДК 519.6, 539.3

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-512-522

**Динамические эффекты в решетчатых структурах,
изготовленных с помощью аддитивных технологий¹**

В. А. Левин, К. М. Зингерман, А. В. Вершинин, И. А. Подпругников

Левин Владимир Анатольевич — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры вычислительная механика механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: v.a.levin@mail.ru

Зингерман Константин Моисеевич — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического моделирования и вычислительной математики Тверского государственного университета (г. Тверь).

e-mail: zingerman@rambler.ru

Вершинин Анатолий Викторович — доктор физико-математических наук, доцент кафедры вычислительной механики, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: versh1984@mail.ru

Подпругников Иван Андреевич — студент механико-математического факультета Московского Государственного Университета имени М. В. Ломоносова (г. Москва).

*e-mail: ivanpodpr08@yandex.ru***Аннотация**

В статье исследовано влияние структуры решетчатых конструкций на распространение упругих волн в них. Постановка задачи сформулирована в рамках линейной теории упругости при малых деформациях. Для решения задачи использован метод конечных элементов, реализованный в пакете прочностного анализа Fidesys. Смоделированы различные варианты плоских решетчатых структур: классическая решетка с прямолинейными прутьями и решетки с равномерно изогнутыми прутьями: лифтовая и звёздчато-круговая решетки. Исследована зависимость между структурой решетчатых конструкций и распространением возмущений в них. Выполнен анализ зависимости скорости распространения волн в изогнутых решетчатых конструкциях от частоты. Предложена прикладная концептуальная модель прибора, измеряющего частоты волн.

Ключевые слова: решетчатая конструкция, CAE Fidesys, частотная фильтрация волн.

Библиография: 21 название.

Для цитирования:

В. А. Левин, К. М. Зингерман, А. В. Вершинин, И. А. Подпругников. Динамические эффекты в решетчатых структурах, изготовленных с помощью аддитивных технологий // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 2, С. 512–522.

¹Исследования для данной работы были проведены в рамках Федеральной программы «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2014–2020 годы» при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в ООО «Фидесис» – соисполнителе работ в рамках Соглашения о предоставлении субсидии № 14.577.21.0271 (идентификатор проекта RFMEFI57717X0271).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 2.

UDC 519.6, 539.3

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-512-522

Dynamic effects in lattice structures produced by additive technologies²

V. A. Levin, K. M. Zingerman, A. V. Vershinin, I. A. Podpruzhnikov

Levin Vladimir Anatolyevich — Doctor of physical and mathematical sciences, professor, Professor of the department of computational mechanics of the faculty of mechanics and mathematics of Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: v.a.levin@mail.ru

Zingerman Konstantin Moiseevich — Doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of chair of mathematical modeling and computational mathematics, Tver State University (Tver).

e-mail: zingerman@rambler.ru

Vershinin Anatolij Victorovich — Doctor of physical and mathematical sciences, associate Professor of the department of computational mechanics of the faculty of mechanics and mathematics of Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: versh1984@mail.ru

Podpruzhnikov Ivan Andreevich — student of the faculty of mechanics and mathematics of Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: ivanpodpr08@yandex.ru

Abstract

The influence of lattice structures on the propagation of elastic waves in these structures is analyzed. The statement of problem is formulated within the framework of linear elasticity under small strains. To solve this problem, the finite element method and the Fidesys CAE-system were used. Different variants of plane lattice structures are modeled: the classical lattice and the lattice with uniformly curved strips across the plane: elevator and star-shaped lattices. The relation between the structure of lattice structures and the propagation of perturbations in these structures is analyzed. The dependence of wave velocity in curved lattice structures on the frequency of the emitted waves is analyzed. The applied conceptual model of the device for measuring the frequency of waves is developed.

Keywords: lattice structure, CAE Fidesys, frequency filtering of waves.

Bibliography: 21 titles.

For citation:

V. A. Levin, K. M. Zingerman, A. V. Vershinin, I. A. Podpruzhnikov, 2019, "Dynamic effects in lattice structures produced by additive technologies", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 2, pp. 512–522.

²Research for this work was carried out within the framework of the Federal program "Research and development in priority areas of development of the scientific and technological complex of Russia for 2014-2020" with the financial support of the Ministry of education and science of the Russian Federation in LLC "Fidesis" - co-executor of the works under the agreement on the grant number 14.577.21.0271 (project ID RFMEFI57717X0271).

1. Введение

Аддитивные технологии позволяют создавать решетчатые структуры произвольной формы, варьируя геометрические параметры структуры. Такие конструкции широко используются для создания метаматериалов. Свойства метаматериала обусловлены не столько свойствами составляющих его элементов, сколько искусственно созданной периодической структурой из макроскопических элементов, обладающих произвольными размерами и формой [1]. С учетом развития технологии 3D печати, позволяющей создавать новые структуры буквально на глазах, становится очевидно, что новый виток технологического развития неразрывно связан с отраслью метаматериалов. Поэтому имеют смысл численные эксперименты, направленные на создание решетчатых структур со специальными свойствами, например, для фильтрации определенного частотного спектра.

Анализу физико-механических свойств решетчатых структур посвящено большое количество публикаций. Например, в [2] предложен способ оценки остаточных напряжений при производстве имплантатов с использованием решетчатых структур. В [1] рассматривается распространение электромагнитных волн в метаматериалах. Динамические свойства решетчатых структур при распространении акустических волн исследованы в [3,4].

Целью данной работы является изучение влияния решетчатых структур на распространение акустических волн в решетчатых конструкциях разной конфигурации.

1.1. Постановка задачи

Постановка механической задачи:

Под решеткой понимается структура, состоящая из множества узлов равномерной квадратной сетки на плоскости и криволинейных упругих стержней постоянного сечения, соединяющих соседние узлы.

Предполагается, что оси всех стержней расположены в плоскости сетки и представляют собой дуги окружностей.

В одном из узлов на границе решетки задается точечная сила (рис. 1), величина которой меняется со временем по закону

$$U(t) = (\pi \alpha t e^{1-\pi \alpha t})^2 \sin(2\pi f t),$$

где f – частота, α – параметр, характеризующий амплитуду колебаний, t – время.

Сила – импульс Берлаге – действует в плоскости решетки и направлена по внутренней нормали $\vec{n} = (0, 1, 0)$ к границе решетки.

На рисунке выделена точка приложения силы и показано направление ее действия.

При расчетах система координат выбрана таким образом, что начало координат совпадает с одним из угловых узлов решетки до начала приложения силы, оси x и y параллельны линиям, соединяющим соседние узлы, а ось z перпендикулярна плоскости решетки.

Предполагается, что все стержни имеют одинаковую форму и постоянное круговое сечение толщины h .

Также предполагается, что решетка не закреплена, а также имеет одинаковые размеры по осям x и y .

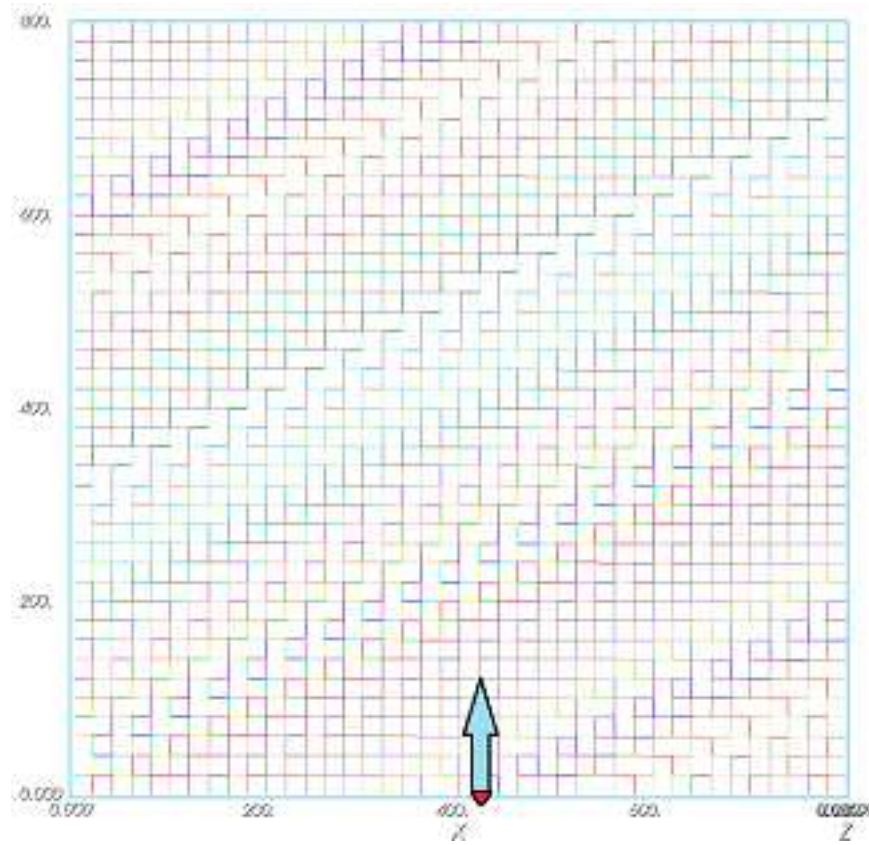


Рис. 1. Условия нагружения решетчатой структуры (стрелкой показано направление импульса и точка его приложения, отдельные стержни показаны различными оттенками).

Математическая постановка задачи осуществляется в рамках линейной теории упругости при малых деформациях [5-7] и включает следующие уравнения:

- Уравнения движения сплошной среды при отсутствии массовых сил:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x^j} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2},$$

где $u_i = u_i(\mathbf{x}, t)$ – перемещения, $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\mathbf{x}, t)$ – компоненты тензора напряжений, ρ – плотность.

- Закон Гука для изотропного линейно-упругого материала:

$$\sigma_{ij} = \lambda_{kk} \varepsilon_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij},$$

где ε_{ij} – компоненты тензора деформаций, δ_{ij} – символ Кронекера, λ и μ – постоянные Ламе, связанные с модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона ν соотношениями

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}.$$

- Соотношения Коши (геометрические соотношения):

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x^j} + \frac{\partial u_j}{\partial x^i} \right)$$

Граничные условия соответствуют случаю отсутствия нормальных напряжений на поверхности стержней, за исключением точки приложения силы. Начальные условия соответствуют равенству нулю начальных перемещений и скоростей.

2. Описание решетчатых структур.

Расчеты были выполнены для решетчатых структур размерности 40x40. На рис. 2 показана форма кривой, соединяющей два соседних узла решетчатой структуры (это дуга OAB). Волнистость структуры характеризуется расстоянием c между серединой каждой дуги (точкой A на рис. 2) и серединой хорды, соединяющей концы этой дуги (точкой C на этом рисунке).

Как видно из рисунка, справедлива формула

$$c = R - \sqrt{R^2 - (a/2)^2}.$$

Здесь R – радиус дуги, a – расстояние между соседними узлами решетки.

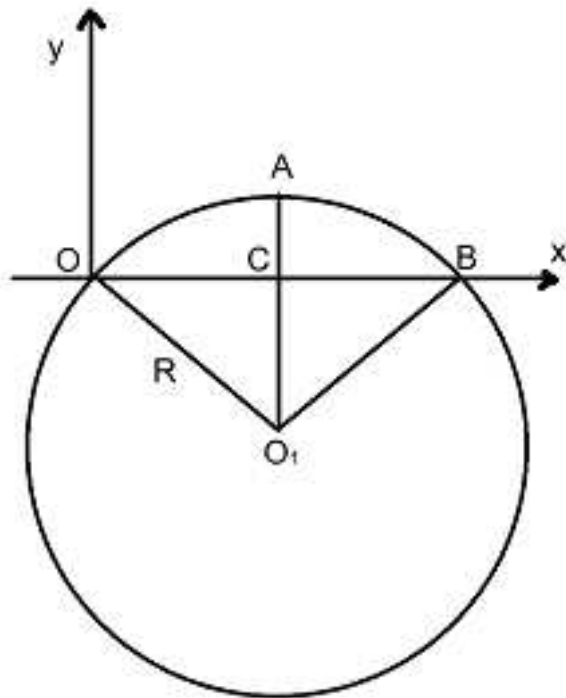


Рис. 2. Форма кривой, соединяющей соседние узлы решетчатой структуры.

Решение было получено для решеток двух типов – лифтовой и звездчато-круговой. Фрагменты этих решеток приведены на рис. 3.

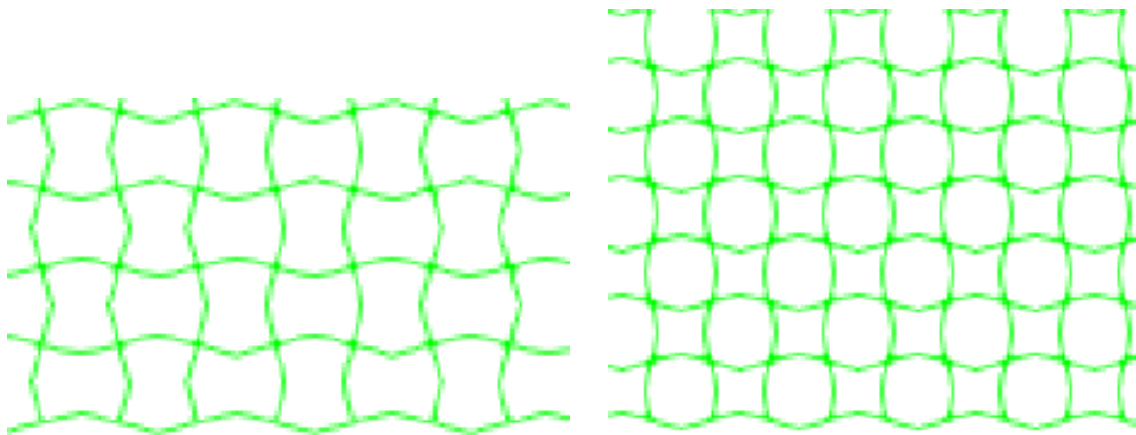


Рис. 3. Фрагменты лифтовой (слева) и звездчато-круговой (справа) решеток.

3. Результаты численных расчетов

Расчеты выполнены методом конечных элементов [6] с использованием системы инженерного анализа Fidesys. Использовались линейные балочные конечные элементы.

При задании исходных данных для решения задачи целесообразно использовать безразмерные величины: параметр волнистости $\zeta = c/a$, безразмерную толщину стержней $\gamma = h/a$, безразмерное время $\tau = tc_L/a$, нормализованную частоту $\Omega = fa/c_L$, где $c_L = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ – скорость продольных волн в сплошной среде. Расчеты выполнялись при следующих значениях параметров: $\gamma = 0.0005$, $\zeta = 0.135$. В качестве материала был выбран алюминий: $E = 73$ ГПа, $\nu = 0.33$, $\rho = 2700$ кг/м³.

Расчеты проводились для трех типов решеток: решетки с прямолинейными стержнями, лифтовой и звездчато-круговой решеток. На рис. 4 показано распределение деформаций в один и тот же момент времени для этих трех решеток при $\Omega = 0.038$.

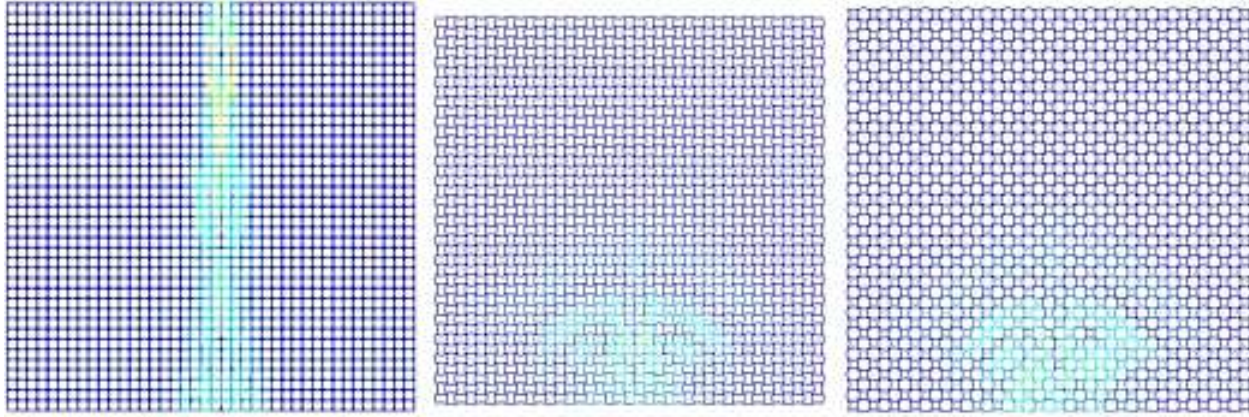


Рис. 4. Распределение деформаций в решетке с прямолинейными стержнями (слева), лифтовой решетке (в центре) и звездчато-круговой решетке (справа).

Из рисунка видно, что наиболее медленно волна распространяется в звездчато-круговой решетке. Для решетки этого типа были построены зависимости расстояния, на которое распространяется волна за заданное время $\tau = 340$, от нормализованной частоты. Эти зависимости приведены на рис. 5 для двух значений параметра волнистости: $\zeta = 0.135$ и $\zeta = 0.206$ (второе значение соответствует максимальной волнистости). Прямые на рисунке соответствуют линейной аппроксимации. Расстояние отнесено к параметру решетки a .

Как видно из графика, при увеличении нормализованной частоты волны в диапазоне от 0.0018 до 0.0061 расстояние увеличивается по закону, близкому к линейному. Также из рисунка видно, что большей волнистости соответствует меньшее расстояние, на которое распространяется волна за заданное время. Расчеты, выполненные при $\Omega = 0.004$ (при этой частоте деформация решетки максимальна), показали, что зависимость этого расстояния от параметра волнистости ζ также близка к линейной.

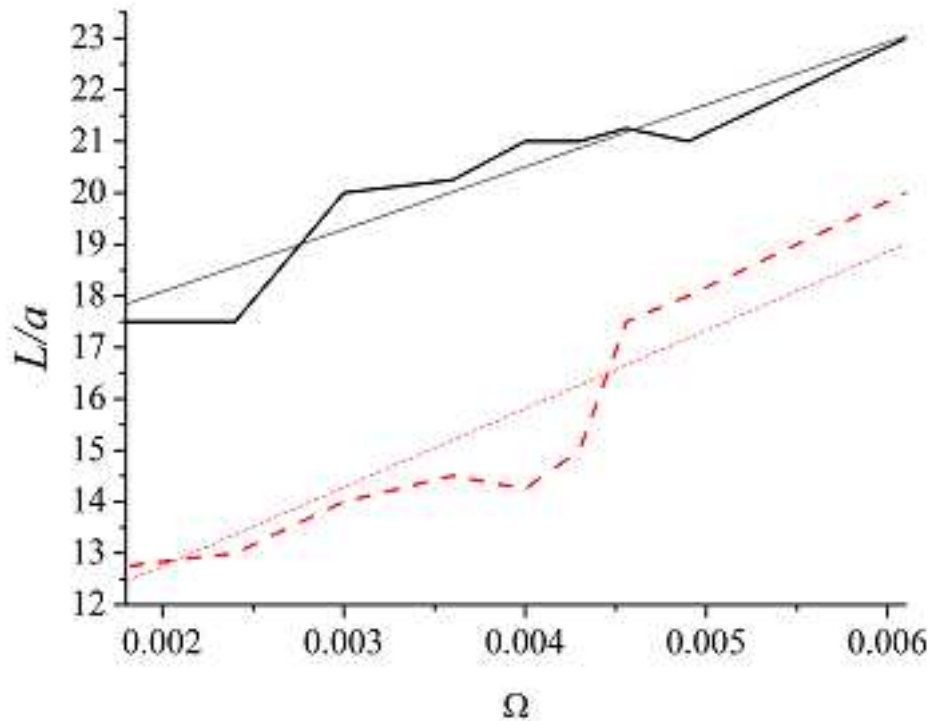


Рис. 5. Зависимости расстояния, на которое распространится волна, от нормализованной частоты. Сплошная линия – $\zeta = 0.135$, пунктирная – $\zeta = 0.206$. Прямые соответствуют линейной аппроксимации.

4. Подход к измерению частоты акустических колебаний

Из проведенных вычислительных экспериментов можно видеть, что зависимость расстояния, которое проходит волна в направлении действия точечной силы, от частоты колебаний является монотонной для криволинейных решеток, и это расстояние достаточно существенно зависит от частоты. Поэтому становится возможным приближенное определение частоты колебаний по времени, за которое волна проходит определенное расстояние. Например, можно воспользоваться устройством из двух решеток и двух датчиков на них, которое изображено на рис. 6. Решетки расположены параллельно друг другу. Силы, приложенные к каждой из решеток, должны быть одинаковыми. Видимо, примерное равенство этих сил можно обеспечить, если расстояние между решетками является малым. Решетки имеют различную волнистость или изготавливаются из разных материалов. В таком случае, если в фиксированный момент времени в датчике (красная точка) одной решетки есть возмущения, а в датчике другой решетки их нет, это означает, что частота находится в некотором диапазоне возможных значений, границы которого могут быть определены по данным вычислительных экспериментов. Чем ближе параметры решеток, тем меньше диапазон возможных значений частоты, а значит, тем выше точность измерения. Высокую точность изготовления решеток нужной кривизны можно обеспечить, используя аддитивные технологии.

В качестве датчика наличия возмущений можно использовать маленькую и легкую пластинку, которая является выключателем некоторой электрической цепи. Когда волна доходит до пластинки, последняя отклоняется, замыкая электрическую цепь. В эту цепь можно, например, включить лампу, которая будет загораться при наличии возмущений в узле, или

таймер.

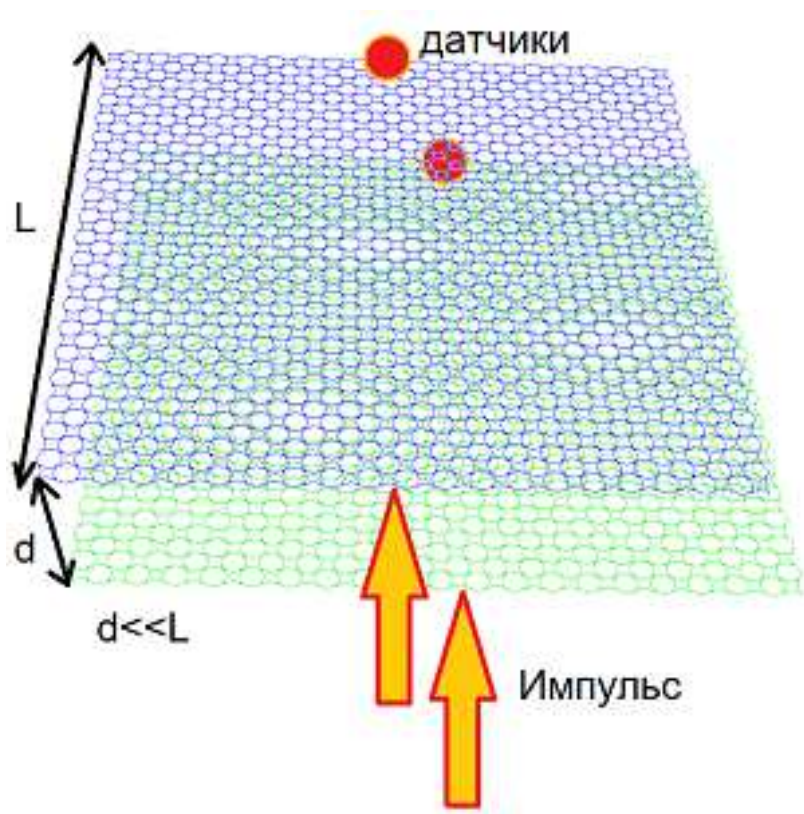


Рис. 6. Схема устройства измерительного прибора малых частот.

5. Заключение

В работе проведено моделирование динамических процессов в решетчатых структурах различных типов: в классической решетке с прямыми прутьями, лифтовой и звёздчато-круговой решетках с изогнутыми прутьями. Исследовано влияние структуры решетки на механизм распространения волны. Результаты вычислительных экспериментов показали, что наиболее существенное торможение волны обеспечивает звёздчато-круговая решетка. Передающиеся как по цепочке от одного узла решетки к другому колебания благодаря волнистости отклоняются от направления возмущающего воздействия.

Исследовано влияние частоты колебаний и параметра волнистости на скорость распространения волны в направлении действия возмущающей силы. Вычислительные эксперименты показали, что в тех диапазонах значений параметров, для которых проводились расчеты, зависимость этой скорости от частоты колебаний и параметра волнистости близка к линейной. На основании результатов исследований предложена концептуальная схема прибора для измерения частоты акустических колебаний, который может быть изготовлен с использованием аддитивных технологий.

Разработанный подход к численному моделированию можно использовать и для решения других задач. Например, можно определить геометрию наиболее прочной структуры (наиболее высокий предел текучести) всей решетки как единого целого при воздействии точечной силы. Представляет интерес расчет эффективных механических характеристик решетчатых структур с изогнутыми прутьями, в том числе при конечных деформациях, например, с использованием подходов, предложенных в [11-14]. Также существенным при исследовании волновых процессов в решетчатых структурах может быть учет остаточных напряжений, возникающих при их изготовлении с помощью аддитивных технологий [15-17]. Для этого могут

быть использованы математические модели, построенные на основе теории наложения конечных деформаций [18-21].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вендик И.Б., Вендик О.Г. Метаматериалы и их применение в технике сверхвысоких частот // Журнал технической физики. 2013. Т. 83, вып. 1. С. 3-28.
2. Ashby M.F., Gibson L.J. Cellular Solids: Structure and Properties. 2nd ed. Cambridge University Press. Cambridge, New York, 1997.
3. Phani A.S., Woodhouse J., Fleck N. Wave propagation in two-dimensional periodic lattices. J. Acoust. Soc. Am. 2006. V. 119 (4). P. 1995-2005.
4. Cheng L., Liang X., Bai J., Chen Q., Lemon J., To A. On utilizing topology optimization to design support structure to prevent residual stress induced build failure in laser powder bed metal additive manufacturing // Additive Manufacturing. 2019. V. 27. P. 290-304.
5. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Том 2. М.: Наука, 1970. 568 с.
6. Победря Б. Е., Георгиевский Д. В. Основы механики сплошной среды. Курс лекций. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. 272 с.
7. Эглит М.Э. Лекции по механике сплошных сред. - М.: Издательство Московского университета, 2008. - 318 с.
8. Андреев В. Б. Лекции по методу конечных элементов (учебное пособие). – М.: МАКС Пресс, 2010. - 262 с.
9. Морозов Е.М., Левин В.А., Вершинин А.В. Прочностной анализ. Фидесис в руках инженера. М.: URSS, 2015. — 408 с.
10. Левин В. А., Вершинин А. В. Промышленный пакет для прочностного инженерного анализа // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Казань 20-24 августа 2015 г. Сборник докладов. – С. 2281–2283.
11. Бровко Г.Л., Ильюшин А.А. Об одной плоской модели перфорированных плит // Вестник МГУ. Сер. Математика, механика. 1993. № 2. С. 83-91.
12. Levin V.A., Zingermann K.M. Effective Constitutive Equations for Porous Elastic Materials at Finite Strains and Superimposed Finite Strains // Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME. 2003. V. 70, No. 6. P. 809-816.
13. Levin V.A., Zingerman K.M., Vershinin A.V., Yakovlev M. Numerical analysis of effective mechanical properties of rubber-cord composites under finite strains // Composite Structures. 2015. V. 131. P. 25-36.
14. Vershinin A.V., Levin V.A., Zingerman, K.M., Sboyachkov A.M., Yakovlev M.Y. Software for estimation of second order effective material properties of porous samples with geometrical and physical nonlinearity accounted for // Advances in Engineering Software. 2015. V.86. P. 80-84.
15. Roehling J.D., Smith W.L., Roehling T.T., Vrancken B., Guss G.M., McKeown J.T., Hill M.R., Matthews M.J. Reducing residual stress by selective large-area diode surface heating during laser powder bed fusion additive manufacturing // Additive Manufacturing. 2019. V. 28. P. 228–235.

16. Protasov C.E., Safronov V.A., Kotoban D.V., Gusarov A.V. Experimental study of residual stresses in metal parts obtained by selective laser melting // *Physics Procedia*. 2016. V. 83. P. 825-832.
17. Robinson J., Ashton I., Fox P., Jones E., Sutcliffe C. Determination of the effect of scan strategy on residual stress in laser powder bed fusion additive manufacturing // *Additive Manufacturing*. 2018. V. 23. P. 13-24.
18. Levin V.A. Theory of repeated superposition of large deformations: Elastic and viscoelastic bodies // *International Journal of Solids and Structures*, 1998. V. 35(20). P. 2585-2600.
19. Levin V.A., Zubov L.M., Zingerman K.M. The torsion of a composite, nonlinear-elastic cylinder with an inclusion having initial large strains // *International Journal of Solids and Structures*. 2014. V. 51. No. 6. P. 1403-1409.
20. Levin V.A., Zubov L.M., Zingerman K.M. An exact solution for the problem of flexure of a composite beam with preliminarily strained layers under large strains // *International Journal of Solids and Structures*. 2015. V. 67-68. P. 244-249.
21. Levin V.A., Zubov L.M., Zingerman K.M. Multiple joined prestressed orthotropic layers under large strains // *International Journal of Engineering Science*. 2018. V. 133. P. 47-59.

REFERENCES

1. Vendik I. B., Vendik O. G. Metamaterials and their application in ultrahigh-frequency engineering // *Journal of technical physics*. V. 83, No. 1. P. 3-28.
2. Cheng L., Liang X., Bai J., Chen Q., Lemon J., To A. On utilizing topology optimization to design support structure to prevent residual stress induced build failure in laser powder bed metal additive manufacturing // *Additive Manufacturing*. 2019. V. 27. P. 290-304.
3. Phani A.S., Woodhouse J., Fleck N. Wave propagation in two-dimensional periodic lattices. *J. Acoust. Soc. Am.* 2006. V. 119 (4). P. 1995-2005.
4. Cheng L., Liang X., Bai J., Chen Q., Lemon J., To A. On utilizing topology optimization to design support structure to prevent residual stress induced build failure in laser powder bed metal additive manufacturing // *Additive Manufacturing*. 2019. V. 27. P. 290-304.
5. Sedov L.I. *Continuum Mechanics*. V. 2. Moscow: Nauka, 1970. 568 p.
6. Pobedrya B. E., Georgievskii D. V. *Fundamentals of continuum mechanics. Course of lectures*. - Moscow: FIZMATLIT, 2006. 272 p.
7. Eglit M. E. *Lectures on continuum mechanics*. - Moscow: Publishing House of Moscow University, 2008. - 318 p.
8. Andreev V. B. *Lectures on the finite element method (textbook)*. Moscow: MAX Press, 2010. - 262 p.
9. Morozov E. M., Levin V. A., Vershinin A.V. *Strength analysis. Fidesys in the hands of an engineer*. - Moscow: URSS, 2015. — 408 p.
10. Levin V. A., Vershinin A. V. Industrial package for engineering strength analysis // *Proceedings of XI all-Russian Congress on fundamental problems of theoretical and applied mechanics*. Kazan, August 20-24, 2015. P. 2281–2283.

11. Brovko G.L., Ilyushin A.A. On a plane model of perforated plates. Moscow University Mechanics Bulletin. 1993. No. 2. P. 83-91.
12. Levin V.A., Zingermann K.M. Effective Constitutive Equations for Porous Elastic Materials at Finite Strains and Superimposed Finite Strains // Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME. 2003. V. 70, No. 6. P. 809-816.
13. Levin V.A., Zingerman K.M., Vershinin A.V., Yakovlev M. Numerical analysis of effective mechanical properties of rubber-cord composites under finite strains // Composite Structures. 2015. V. 131. P. 25-36.
14. Vershinin A.V., Levin V.A., Zingerman, K.M., Sboyshakov A.M., Yakovlev M.Y. Software for estimation of second order effective material properties of porous samples with geometrical and physical nonlinearity accounted for // Advances in Engineering Software. 2015. V.86. P. 80-84.
15. Roehling J.D., Smith W.L., Roehling T.T., Vrancken B., Guss G.M., McKeown J.T., Hill M.R., Matthews M.J. Reducing residual stress by selective large-area diode surface heating during laser powder bed fusion additive manufacturing // Additive Manufacturing. 2019. V. 28. P. 228-235.
16. Protasov C.E., Safronov V.A., Kotoban D.V., Gusarov A.V. Experimental study of residual stresses in metal parts obtained by selective laser melting // Physics Procedia. 2016. V. 83. P. 825-832.
17. Robinson J., Ashton I., Fox P., Jones E., Sutcliffe C. Determination of the effect of scan strategy on residual stress in laser powder bed fusion additive manufacturing // Additive Manufacturing. 2018. V. 23. P. 13-24.
18. Levin V.A. Theory of repeated superposition of large deformations: Elastic and viscoelastic bodies // International Journal of Solids and Structures, 1998. V. 35(20) P. 2585-2600.
19. Levin V.A., Zubov L.M., Zingerman K.M. The torsion of a composite, nonlinear-elastic cylinder with an inclusion having initial large strains // International Journal of Solids and Structures. 2014. V. 51. No. 6. P. 1403-1409.
20. Levin V.A., Zubov L.M., Zingerman K.M. An exact solution for the problem of flexure of a composite beam with preliminarily strained layers under large strains // International Journal of Solids and Structures. 2015. V. 67-68. P. 244-249.
21. Levin V.A., Zubov L.M., Zingerman K.M. Multiple joined prestressed orthotropic layers under large strains// International Journal of Engineering Science. 2018. V. 133. P. 47-59.

Получено 18.03.2019 г.

Принято в печать 12.07.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 2.

УДК 539.4, 519.6

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-523-537

О численной оценке эффективных характеристик периодических ячеистых структур с использованием балочных и оболочечных конечных элементов с помощью CAE Fidesys¹

В. А. Левин, К. М. Зингерман, М. Я. Яковлев, Е. О. Курденкова, Д. В. Немтинова

Левин Владимир Анатольевич — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры вычислительной механики механико-математического факультета, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: v.a.levin@mail.ru

Зингерман Константин Моисеевич — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического моделирования и вычислительной математики, Тверской государственный университет (г. Тверь).

e-mail: Zingerman.KM@tversu.ru

Яковлев Максим Яковлевич — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры вычислительной математики механико-математического факультета, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: m.ya.yakovlev@yandex.ru

Курденкова Екатерина Олеговна — студентка механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносов (г. Москва).

e-mail: kkurdenkova@yandex.ru

Немтинова Диана Владимировна — студентка механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносов (г. Москва).

e-mail: dnemtinova@gmail.com

Аннотация

Развитие аддитивных технологий (3D-печати) сделало возможным изготовление деталей и изделий регулярной пористой и ячеистой структуры (с целью облегчения конструкции). При этом характерный размер ячейки намного меньше масштаба целого изделия. Численные прочностные и смежные с ними расчёты подобных конструкций требуют предварительной оценки эффективных характеристик такой ячеистой структуры. В данной статье представлена методика численной оценки эффективных упругих характеристик регулярных ячеистых структур, основанная на численном решении краевых задач теории упругости на ячейке периодичности. К ячейке последовательно прикладываются различные периодические граничные условия в виде связей, наложенных на перемещения противоположных граней ячейки. Для каждого вида граничных условий решается краевая задача теории упругости, полученное в результате решения которой поле напряжений осредняется по объёму. Эффективные свойства ячеистого материала оцениваются в виде обобщённого закона Гука.

¹Исследования для данной работы были проведены в рамках Федеральной программы «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2014-2020 годы» при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в ООО "Фидесис" – соисполнителе работ в рамках Соглашения о предоставлении субсидии № 14.577.21.0271 (идентификатор проекта RFMEFI57717X0271).

В работе рассматриваются композиционные материалы на основе жёсткого решётчатого каркаса, заполненного более мягким материалом. Расчёты проводятся методом конечных элементов с помощью отечественной САЕ-системы «Фидесис». При этом в ряде расчётов для моделирования решётчатого каркаса используются конечные элементы балочного типа. В некоторых расчётах, помимо каркаса и матрицы, учитывается наличие тонкого слоя связующего между ними. Этот слой моделируется при помощи конечных элементов оболочечного типа.

Приводятся графики сравнения результатов расчётов композиционных материалов с решётчатым каркасом с моделированием каркаса балочными элементами и результатов аналогичных расчётов, в которых каркас моделируется трёхмерными конечными элементами. Также приводятся графики сравнения результатов расчётов, в которых слой связующего моделируется оболочечными элементами, с результатами аналогичных расчётов, в которых связующее моделируется трёхмерными элементами. Графики показывают, что при достаточно тонких элементах каркаса (либо при достаточно тонком слое связующего) результаты получаются довольно близкими, что подтверждает применимость балочных и оболочечных элементов для численного решения таких задач.

Ключевые слова: аддитивные технологии, эффективные характеристики, механика деформируемого твёрдого тела, пористые и ячеистые структуры, CAE Fidesys.

Библиография: 19 названий.

Для цитирования:

В. А. Левин, К. М. Зингерман, М. Я. Яковлев, Е. О. Курденкова, Д. В. Немтинова. О численной оценке эффективных характеристик периодических ячеистых структур с использованием балочных и оболочечных конечных элементов с помощью CAE Fidesys // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 2, С. 523–537.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 2.

UDC 539.4, 519.6

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-523-537

Numerical Estimation of Effective Properties of Periodic Cellular Structures using Beam and Shell Finite Elements with CAE Fidesys²

V. A. Levin, K. M. Zingerman, M. Ya. Yakovlev, E. O. Kurdenkova, D. V. Nemtinova

Levin Vladimir Anatolyevich — Doctor of physical and mathematical sciences, professor, Professor of the department of computational mechanics of the faculty of mechanics and mathematics of Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: v.a.levin@mail.ru

Zingerman Konstantin Moiseevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of chair of mathematical modeling and computational mathematics, Tver State University (Tver).

e-mail: Zingerman.KM@tversu.ru

²Research for this work was carried out within the framework of the Federal program "Research and development in priority areas of development of the scientific and technological complex of Russia for 2014-2020" with the financial support of the Ministry of education and science of the Russian Federation in Fidesys LLC - co-executor of the works under the agreement on the grant number 14.577.21.0271 (project ID RFMEFI57717X0271).

Yakovlev Maksim Yakovlevich — candidate of physical and mathematical sciences, Associate Professor of the Department of Computational Mathematics of the Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: m.ya.yakovlev@yandex.ru

Kurdenkova Ekaterina Olegovna — student of the Faculty of Mechanics and Mathematics of Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: kkurdenkova@yandex.ru

Nemtinova Diana Vladimirovna — student of the Faculty of Mechanics and Mathematics of Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: dnemtinova@gmail.com

Abstract

The development of additive technologies (3D printing) made it possible to manufacture parts and products of a regular porous and cellular structure (in order to reduce the weight of the structure). In this case, the characteristic cell size is much smaller than the scale of the whole product. Numerical strength and related calculations of such structures require a preliminary estimation of the effective properties of such a cellular structure. In this article, a method for the numerical estimation of the effective elastic properties of regular cellular structures is presented, which is based on the numerical solution of boundary value problems of the theory of elasticity on a periodicity cell. Periodic boundary conditions in the form of restraints on the displacements of opposite edges of the cell are successively applied to the cell. The boundary value problem of the theory of elasticity is solved for each type of boundary conditions, and the resulting stress field is averaged over the volume. The effective properties of the cellular material are estimated as a generalized Hooke's law.

Composite materials based on a rigid lattice skeleton filled with softer material are considered in the paper. The calculations are carried out using the finite element method with the domestic Fidesys CAE system. Beam finite elements are used in some calculations for the modeling of a lattice skeleton. In some other calculations, a thin layer of a binder between the skeleton and the matrix is taken into account. This layer is modeled using shell finite elements.

Graphs of comparing the results of calculations of composite materials with a lattice skeleton modeled by beam elements and the results of similar calculations in which the skeleton is modeled by three-dimensional finite elements are given in the article. In addition, graphs of comparing the results of calculations in which the binder layer is modeled by shell elements and the results of similar calculations in which the binder is modeled by three-dimensional elements are given. The graphs show that with sufficiently thin framework elements (or with a sufficiently thin layer of the binder), the results are quite close. It confirms the applicability of beam and shell elements for the numerical solution of such problems.

Keywords: additive manufacturing, effective properties, solid mechanics, porous and cellular structures, CAE Fidesys.

Bibliography: 19 titles.

For citation:

V. A. Levin, K. M. Zingerman, M. Ya. Yakovlev, E. O. Kurdenkova, D. V. Nemtinova, 2019, "Numerical Estimation of Effective Properties of Periodic Cellular Structures using Beam and Shell Finite Elements with CAE Fidesys", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 2, pp. 523–537.

1. Введение

Изготовление изделий, материал которых имеет периодическую ячеистую (пористую) структуру, стало возможным с возникновением и развитием аддитивных технологий (3D-печати). Пример такой структуры показан на рисунке 1. Учитывая, что размер ячейки может

быть порядка миллиметра, а масштаб изделия – десятки сантиметров, очевидно, что изготовить подобную структуру при помощи традиционных методов производства очень сложно и нерентабельно.

В то же время не представляет особой сложности печать изделия периодической ячеистой структуры на 3D-принтере. Такой решётчатый каркас может быть напечатан, к примеру, из металлопорошка при помощи технологии селективного лазерного спекания (SLS). Далее металлический каркас может сам по себе стать частью какого-либо изделия. Также объём, занимаемый каркасом, может быть заполнен другим, более мягким материалом – то есть получится композиционный материал, состоящий из жёсткого металлического каркаса и более мягкой матрицы. Для лучшего соединения матрицы с каркасом может быть использовано связующее (клей). В этом случае необходимо рассматривать композит, состоящий уже из трёх компонент: каркас, матрица и связующее.

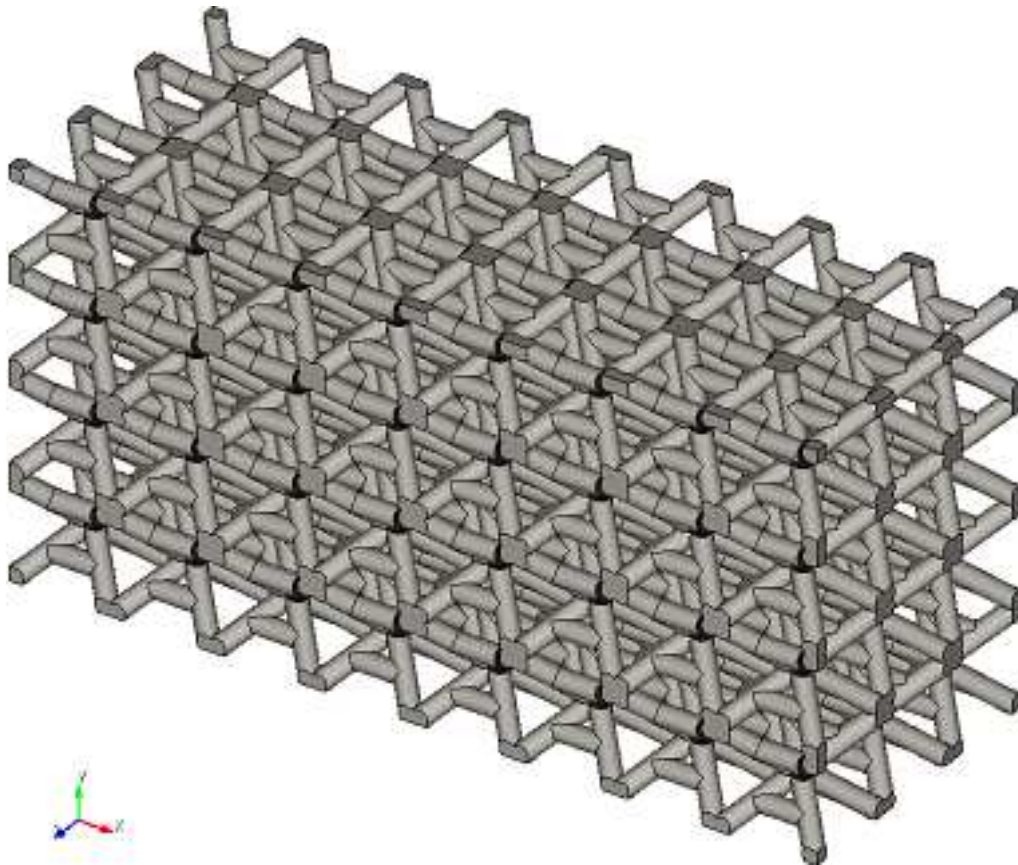


Рисунок 1. Пример периодической ячеистой структуры

Независимо от сценария использования периодической решётчатой ячеистой структуры, во всех случаях (один каркас; каркас и матрица; каркас, матрица и связующее) является актуальной задача оценки эффективных механических характеристик такого материала. В процессе разработки и проектирования деталей и изделий решётчатой структуры, как правило, возникает необходимость расчёта их на прочность. При этом прямое численное моделирование геометрии каждой ячейки (размера порядка миллиметра) на масштабе изделия (сантиметры, десятки сантиметров или даже метры) нецелесообразно и потребует большого количества вычислительных ресурсов. Вместо этого возможно моделировать ячеистую структуру сплошным однородным материалом с некоторыми усреднёнными механическими свойствами, который «в среднем» при нагружении ведёт себя примерно так же, как исходная решётчатая модель.

Сразу возникает вопрос: какими должны быть эти свойства (при известной геометрии ячейки и свойствах её материала).

Подобный подход (замена неоднородной структуры сплошным однородным материалом, обладающим средними свойствами) применим ко многим гетерогенным материалам. В данной работе используется метод численной оценки средних (эффективных) свойств модельного сплошного однородного материала, подробно описанный в статьях [1, 3, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16] и основанный на численном решении краевых задач теории упругости на представительном объеме исходного гетерогенного материала.

2. Методика численной оценки эффективных упругих характеристик периодических ячеистых структур

Строго говоря, численное моделирование на представительном объеме актуально, когда гетерогенный материал имеет нерегулярную структуру. В этом случае выбирается именно представительный объем – т.е. достаточно большой объем, чтобы по результатам решения на нём серии задач теории упругости можно было судить о свойствах материала в целом. Для периодических ячеистых структур численные расчёты проводятся на ячейке периодичности материала.

Рассмотрим ячейку периодичности решётчатого материала и аналогичный объем, заполненный сплошным однородным материалом. Этот сплошной однородный материал по определению назовём **эффективным материалом**, если средние напряжения в нём и в исходном неоднородном материале будут равны при одинаковых перемещениях граней. Свойства такого материала по определению назовём **эффективными (осреднёнными) свойствами**.

Пользуясь данным определением, опишем методику численной оценки эффективных упругих характеристик материала периодической ячеистой структуры.

Для ячейки периодичности V_0 в форме прямоугольного параллелепипеда, грани которого параллельны координатным плоскостям, будем решать определённое число краевых задач теории упругости [5]:

$$\nabla \cdot \sigma = 0 \quad (1)$$

с *периодическими* граничными условиями [1, 11, 14, 16] в виде связей, наложенных на перемещения противоположных точек границы

$$\begin{aligned} u_i^1 - u_i^{-1} &= -2A(\psi_{1i} - \delta_{1i}) \\ u_i^2 - u_i^{-2} &= -2B(\psi_{2i} - \delta_{2i}) \\ u_i^3 - u_i^{-3} &= -2C(\psi_{3i} - \delta_{3i}) \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь σ – тензор напряжений, ∇ – оператор градиента, Ψ^e – эффективный аффино́р деформаций, ψ_{ji} – его компоненты, u – вектор перемещения точки.

В периодических условиях [1, 11, 14, 16]:

- 1) пара (1; -1) – противоположные друг другу узлы на гранях ячейки периодичности, перпендикулярных оси X ;
- 2) пара (2; -2) – противоположные друг другу узлы на гранях ячейки периодичности, перпендикулярных оси Y ;
- 3) пара (3; -3) – противоположные друг другу узлы на гранях ячейки периодичности, перпендикулярных оси Z .

Для ячейки периодичности мы решаем шесть краевых задач теории упругости. Разные задачи отличаются видом приложенных граничных условий (т.е. типом эффективного аффино́ра деформаций и эффективного тензора деформаций на представительном объеме). В

результате решения каждой краевой задачи упругости мы вычисляем распределение тензора напряжений σ на ячейке периодичности. Тензор σ осредняем по объёму с помощью формулы [13, 15]

$$\sigma^e = \frac{1}{V} \int_V \sigma dV \quad (3)$$

И получаем эффективный (средний) тензор напряжений σ^e на ячейке периодичности для каждой решённой задачи [11].

Из известного эффективного аффинора деформаций, заданного в (2), вычисляем эффективный тензор деформаций E^e по формуле [13, 15]

$$E^e = \frac{1}{2}(\Psi^e \cdot \Psi^{e*} - I) \quad (4)$$

где $*$ – знак транспонирования.

На практике удобнее задавать не аффинор деформаций, а тензор деформаций. Поскольку симметричный тензор деформаций содержит шесть независимых компонент, а несимметричный аффинор девять компонент, для определённости аффинор полагаем верхнетреугольным. В этом случае формула (4) расписывается покомпонентно в виде:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & \psi_{13} \\ 0 & \psi_{22} & \psi_{23} \\ 0 & 0 & \psi_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{11} & 0 & 0 \\ \psi_{12} & \psi_{22} & 0 \\ \psi_{13} & \psi_{23} & \psi_{33} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \quad (5)$$

Формулы для компонент аффинора в явном виде (с учётом малости деформаций) получаются следующие:

$$\begin{aligned} \psi_{11} &= 1 + \varepsilon_{11} \\ \psi_{22} &= 1 + \varepsilon_{22} \\ \psi_{33} &= 1 + \varepsilon_{33} \\ \psi_{12} &= 2\varepsilon_{12} \\ \psi_{13} &= 2\varepsilon_{13} \\ \psi_{23} &= 2\varepsilon_{23} \end{aligned} \quad (6)$$

К ячейке периодичности прикладываются деформации следующих типов [7, 8]:

- 1) $\varepsilon_{11} = q$ – растяжение или сжатие вдоль оси X ;
- 2) $\varepsilon_{22} = q$ – растяжение или сжатие вдоль оси Y ;
- 3) $\varepsilon_{33} = q$ – растяжение или сжатие вдоль оси Z ;
- 4) $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = q$ – сдвиг в плоскости XY ;
- 5) $\varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} = q$ – сдвиг в плоскости XZ ;
- 6) $\varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} = q$ – сдвиг в плоскости YZ ;

где ε_{ij} – компоненты эффективного тензора деформаций, q – величина деформации.

Таким образом, для каждой задачи мы фактически задали эффективный тензор деформаций E^e , а вычислили эффективный тензор напряжений σ^e . Эффективные свойства периодической ячеистой структуры оцениваем в виде обобщённого закона Гука, представляющего собой линейную связь этих двух тензоров:

$$\sigma_{ij}^e = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^e \quad (7)$$

То есть оценка эффективных упругих свойств в линейном виде представляет собой вычисление компонент тензора упругости C_{ijkl} из (7). Тензор четвёртого ранга C_{ijkl} содержит 21 независимую компоненту, и этих констант достаточно для описания линейно-упругого материала наиболее общего случая анизотропии. Формулы для вычисления коэффициентов C_{ijkl} в явном виде следующие:

$$1) \ E^e = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_{ij}^e = C_{ij11} q \Rightarrow C_{ij11} = \frac{\sigma_{ij}^e}{q}$$

$$2) \ E^e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_{ij}^e = C_{ij22} q \Rightarrow C_{ij22} = \frac{\sigma_{ij}^e}{q}$$

$$3) \ E^e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_{ij}^e = C_{ij33} q \Rightarrow C_{ij33} = \frac{\sigma_{ij}^e}{q}$$

$$4) \ E^e = \begin{pmatrix} 0 & q & 0 \\ q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_{ij}^e = (C_{ij12} + C_{ij21}) q \Rightarrow C_{ij12} = C_{ij21} = \frac{\sigma_{ij}^e}{2q}$$

$$5) \ E^e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & q \\ 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_{ij}^e = (C_{ij13} + C_{ij31}) q \Rightarrow C_{ij13} = C_{ij31} = \frac{\sigma_{ij}^e}{2q}$$

$$6) \ E^e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q \\ q & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_{ij}^e = (C_{ij23} + C_{ij32}) q \Rightarrow C_{ij23} = C_{ij32} = \frac{\sigma_{ij}^e}{2q}$$

Чаще всего настолько общий случай анизотропии для эффективного материала не требуется, и от обобщённого закона Гука (7) можно перейти к ортотропному материалу (девять независимых упругих констант: три модуля Юнга, три коэффициента Пуассона и три модуля сдвига). Иногда эффективный материал получается трансверсально-изотропным (пять упругих констант) или даже изотропным (две константы: модуль Юнга и коэффициент Пуассона).

Данная методика была ранее реализована в программном модуле Fidesys Composite отечественной САЕ-системы Fidesys [6, 19], предназначенном для оценки эффективных механических и теплофизических характеристик гетерогенных материалов (композиционных, пористых и т.п.). В статьях [3, 11, 13, 14, 15, 16] описано использование Fidesys Composite для оценки эффективных свойств неоднородных материалов с помощью метода конечных элементов [17, 18], а в статье [1] – с помощью более современного метода спектральных элементов [9]. Однако во всех этих статьях для оценки эффективных характеристик использовались только объёмные конечные/спектральные элементы.

В данной работе впервые проведён расчёт композиционного материала на основе периодического ячеистого каркаса с помощью САЕ Fidesys с использованием балочных и оболочечных элементов. Рассматривались два случая:

- 1) композит, состоящий из жёсткого металлического решётчатого каркаса и более мягкой матрицы, без связующего (в этом случае каркас моделировался балочными конечными элементами);

- 2) композит, состоящий из металлического решётчатого каркаса, матрицы и тонкого слоя связующего (в этом случае каркас моделировался объёмными элементами, а слой связующего – оболочечными).

3. Результаты численных расчётов

С помощью программного модуля Fidesys Composite для каждого из двух описанных случаев была проведена серия численных расчётов эффективных характеристик композитов с периодическим решётчатым каркасом, схема ячейки которого показана на рис. 2.

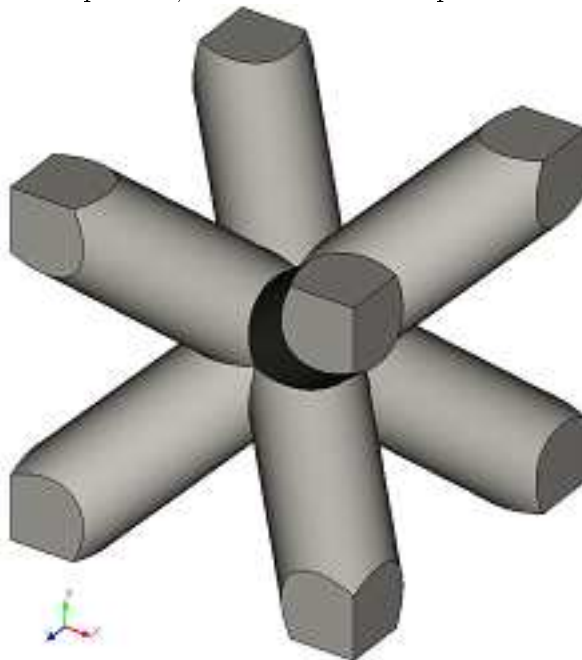


Рисунок 2. Схема ячейки структуры, для которой проводились расчёты

В пределах серии расчётов варьировалась:

- 1) для композита без связующего – диаметр стержня каркаса при неизменном размере ячейки;
- 2) для композита с учётом связующего – толщина слоя связующего при неизменном размере ячейки и неизменном диаметре стержня.

Для каждой величины диаметра стержня либо толщины связующего проводились три расчёта:

- 1) расчёт эффективных упругих свойств;
- 2) упругий статический расчёт [2, 4] для модели ячейки периодичности из однородного эффективного материала;
- 3) упругий статический расчёт для модели ячейки периодичности, в которой каркас/связующее моделируются при помощи балочных/оболочечных конечных элементов.

Сравнивались результаты второго и третьего расчётов.

4. Расчёты для композита без связующего (балочная модель каркаса)

Рассматривались ячейки размера $1 \times 1 \times 5$ мм (рис. 3). Механические свойства каркаса моделировались законом Гука с модулем Юнга 200 ГПа и коэффициентом Пуассона 0,25 (приблизительно соответствуют стали). Свойства матрицы моделировались также законом Гука с модулем Юнга 3 ГПа и коэффициентом Пуассона 0,36 (приблизительно соответствуют эпоксидной смоле).

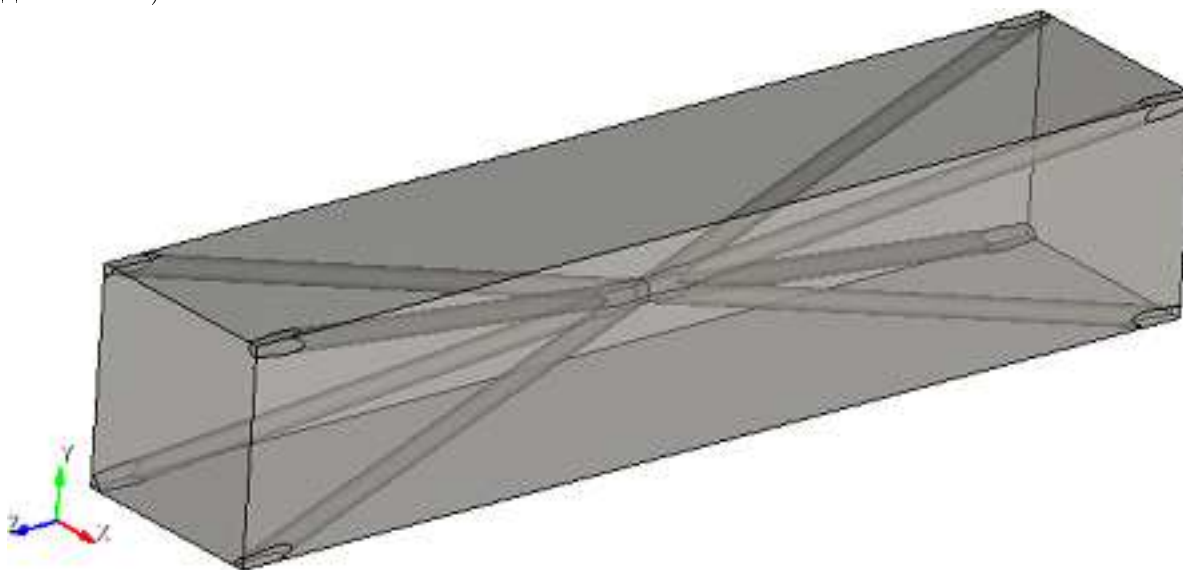


Рисунок 3. Ячейка периодичности композита без связующего

В статическом расчёте для однородной эффективной модели (расчёт 2) и для балочной модели (расчёт 3) ячейка подвергалась одноосному сжатию вдоль оси Z давлением 10 МПа. Сравнимым результатом двух расчётов было максимальное перемещение вдоль оси Z. Был построен график погрешности такого сравнения, показанный на рис. 4.

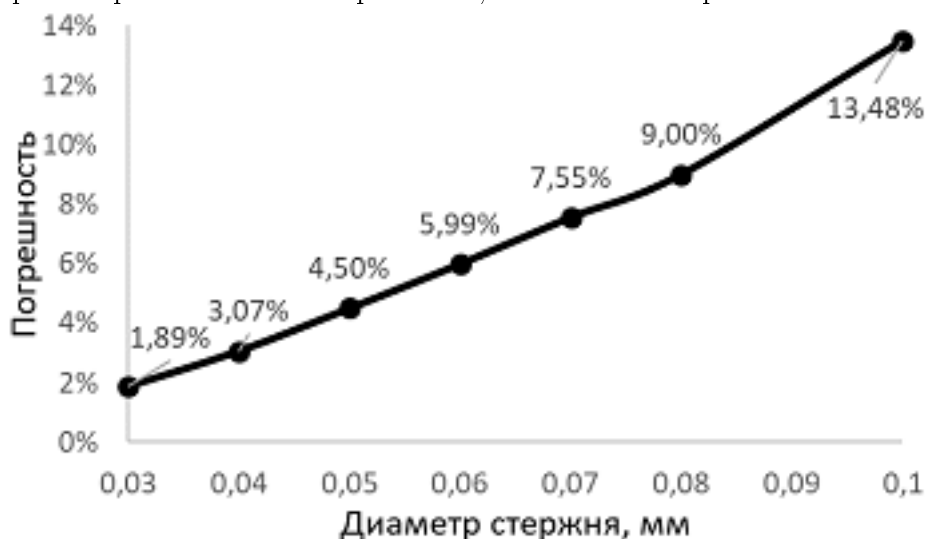


Рисунок 4. График погрешности сравнения результатов статического одноосного сжатия для однородного эффективного материала и для балочной модели каркаса

График показывает, что при уменьшении диаметра стержней каркаса моделирование их с помощью балочных элементов становится точнее. При отношении диаметра стержня к ми-

нимальному габаритному размеру ячейки менее 5% погрешность не превышает 4,5%. Зависимость погрешности от толщины каркаса – монотонная, практически линейная, график слегка выпуклый вниз. Минимальный диаметр стержня каркаса, для которого проводились расчёты, составил 0,03 мм. Погрешность для него менее 2%. Эффективные свойства такого композита для минимального диаметра были получены следующие: $E_1 = E_2 = 3,06$ ГПа, $E_3 = 3,4$ ГПа, $\nu_{12} = 0,378$, $\nu_{13} = \nu_{23} = 0,325$, $G_{12} = 1,11$ ГПа, $G_{13} = G_{23} = 1,13$ ГПа.

5. Расчёты для композита с учётом связующего (оболочечная модель слоя связующего)

Рассматривались ячейки размера также 1x2x3 мм (рис. 5) с толщиной стержня каркаса 0,1 мм. У каркаса модуль Юнга составлял 200 ГПа, коэффициент Пуассона 0,25 (приблизительно соответствуют стали). У матрицы модуль Юнга – 3 ГПа, коэффициент Пуассона – 0,36 (приблизительно соответствуют эпоксидной смоле). Для связующего был рассмотрен модуль Юнга 2000 ГПа и коэффициент Пуассона 0,3. Такой жёсткий материал рассматривался в качестве модельного (т.е. не предполагалось соответствие констант какому-либо из существующих материалов) – специально, чтобы можно было наблюдать влияние наличия слоя связующего на свойства композита.

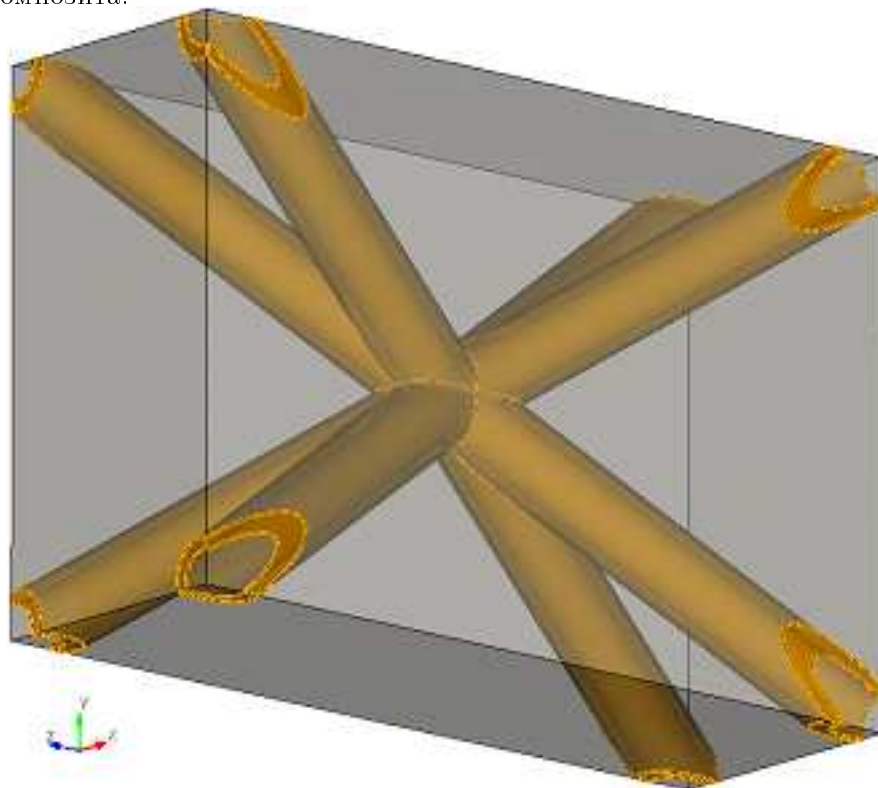


Рисунок 5. Ячейка периодичности композита с учётом связующего

В статическом расчёте для однородной эффективной модели (расчёт 2) и для оболочечной модели (расчёт 3) ячейка подвергалась одноосному сжатию вдоль оси Z давлением 100 МПа. Сравнимым результатом двух расчётов было также максимальное перемещение вдоль оси Z. Был построен график погрешности такого сравнения, показанный на рис. 6.

График показывает, что при уменьшении толщины слоя связующего моделирование их с помощью оболочечных элементов становится точнее. При отношении толщины слоя к диаметру стержня каркаса 1% погрешность не превышает 5%. Эффективные свойства такого

композита для минимальной толщины слоя были получены следующие: $E_1 = 3,38$ ГПа, $E_2 = 3,28$ ГПа, $E_3 = 4,68$ ГПа, $\nu_{12} = 0,385$, $\nu_{13} = 0,225$, $\nu_{23} = 0,340$, $G_{12} = 1,28$ ГПа, $G_{13} = 1,43$ ГПа, $G_{23} = 2,05$ ГПа. Зависимость погрешности от толщины каркаса – монотонная, график ощутимо выпуклый вверх – то есть при незначительном увеличении толщины погрешность сильно возрастает. К примеру, для отношения толщины связующего к диаметру стержня каркаса 2% погрешность составляет уже порядка 10%.



Рисунок 6. График погрешности сравнения результатов статического одноосного сжатия для однородного эффективного материала и для оболочечной модели связующего

Полученные результаты позволяют сделать один общий вывод: балочные и оболочечные элементы применимы для моделирования композитов на основе периодических ячеистых структур, которые могут быть изготовлены с использованием аддитивных технологий. Можно моделировать решётчатый каркас такого композита с помощью балочных элементов, и слой связующего между каркасом и матрицей с помощью оболочечных элементов – как в статических упругих расчётах, так и при расчёте эффективных механических характеристик. Однако балочная модель каркаса даёт хорошую точность только в том случае, когда диаметр стержней каркаса достаточно мал по сравнению с размером ячейки. Аналогично оболочечная модель связующего обеспечивает хорошую точность, когда толщина слоя связующего достаточно мала по сравнению с диаметром стержня.

6. Заключение

В статье представлена методика численной оценки эффективных механических характеристик периодических ячеистых структур, которые могут быть изготовлены с применением аддитивных технологий (3D-печати). Научная новизна работы определяется использованием в численных расчётах балочных конечных элементов для моделирования решётчатого каркаса и оболочечных элементов для моделирования связующего между каркасом и матрицей. Эффективные определяющие соотношения представлены в виде обобщённого закона Гука. Для вычисления эффективных модулей упругости решаются краевые задачи упругости для деформаций разного типа. Расчёты реализуются с помощью отечественной CAE-системы Fidesys (в том числе, с помощью её программного модуля Fidesys Composite). Сравнение результатов статических упругих расчётов для эффективного материала и для модели с балочны-

ми/оболочечными элементами показывает работоспособность подхода, связанного с применением балочных/оболочечных элементов, когда диаметр стержней каркаса структуры либо толщина слоя связующего достаточно малы.

Исследования для данной работы были проведены в рамках Федеральной программы «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2014-2020 годы» при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в ООО "Фидесис" – соисполнителе работ в рамках Соглашения о предоставлении субсидии № 14.577.21.0271 (идентификатор проекта RFMEFI57717X0271).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коновалов Д. А., Яковлев М. Я. О численной оценке эффективных упругих характеристик эластомерных композитов при конечных деформациях с использованием метода спектральных элементов с помощью CAE Fidesys // Чебышёвский сборник, Т. 18, № 13, 2017. – С. 316–329.
2. Левин В. А. Модели и методы. Образование и развитие дефектов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2015. – 456 с. (Нелинейная вычислительная механика прочности / Под общ. ред. В. А. Левина: В 5 т. Т. I).
3. Левин В. А., Вдовиченко И. И., Вершинин А. В., Яковлев М. Я., Зингерман К. М. Подход к расчёту эффективных прочностных характеристик пористых материалов // Письма о материалах, Т. 7, № 4, 2017. – С. 452–454.
4. Левин В. А., Зингерман К. М. Точные и приближённые аналитические решения при конечных деформациях и их наложении. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2016. – 400 с. (Нелинейная вычислительная механика прочности / Под общ. ред. В. А. Левина: В 5 т. Т. III).
5. Лурье А. И. Теория упругости. – М.: Наука, 1970. – 940 с.
6. Морозов Е. М., Левин В. А., Вершинин А. В. Прочностной анализ: Фидесис в руках инженера / Предисл. А. И. Боровкова. – М.: ЛЕНАНД, 2015. – 408 с.
7. Яковлев М. Я. О численной оценке эффективных механических характеристик резинокордных композитов // Вестник Тверского государственного университета. Серия: Прикладная математика. № 17, 2012. – С. 29–40.
8. Яковлев М. Я., Янгирова А. В. Метод и результаты численной оценки эффективных механических свойств резинокордных композитов для случая двухслойного материала [Электронный ресурс] // Инженерный вестник Дона, № 2, 2013. – Режим доступа: <http://ivdon.ru/magazine/archive/n2y2013/1639>
9. Komatitsch D., Violette J.-P., The spectral element method: an efficient tool to simulate the seismic response of 2D and 3D geological structures. Bulletin of Seismological Society of America, 88(2), 1998.
10. Levin V. A., Lokhin V. V., Zingerman K. M. Effective elastic properties of porous materials with randomly dispersed pores. Finite deformation // Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics. 2000. V. 67, No. 4. – P. 667-670.
11. Levin V. A., Vdovichenko I. I., Vershinin A. V., Yakovlev M. Ya., Zingerman K. M. Numerical estimation of effective mechanical properties for reinforced Plexiglas in the two-dimensional case [Электронный ресурс] // Model. Simulat. Eng., 2016. – Режим доступа: <http://www.hindawi.com/journals/mse/aip/9010576/>

12. Levin V. A., Zingermann K. M. Effective Constitutive Equations for Porous Elastic Materials at Finite Strains and Superimposed Finite Strains // Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics. 2003. Vol. 70, No. 6. – P. 809–816.
13. Levin V. A., Zingerman K. M., Vershinin A. V., Yakovlev M. Ya. Numerical analysis of effective mechanical properties of rubber-cord composites under finite strains // Compos. Struct., V. 131, 2015. – P. 25–36.
14. Vdovichenko I. I., Yakovlev M. Ya., Vershinin A. V., Levin V. A. Calculation of the effective thermal properties of the composites based on the finite element solutions of the boundary value problems [Электронный ресурс] // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, V. 158, I. 1, 2016. – Article 012094. – Режим доступа: <http://iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/158/1/012094/pdf>
15. Vershinin A. V., Levin V. A., Zingerman K. M., Sboychakov A. M., Yakovlev M. Ya. Software for estimation of second order effective material properties of porous samples with geometrical and physical nonlinearity accounted for // Adv. Eng. Softw., V. 86, 2015. – P. 80–84.
16. Yakovlev M. Ya., Lukyanchikov I. S., Levin V. A., Vershinin A. V., Zingerman K. M. Calculation of the effective properties of the prestressed nonlinear elastic heterogeneous materials under finite strains based on the solutions of the boundary value problems using finite element method // Journal of Physics: Conference Series, Vol. 1158, Iss. 4, 2019. – Article 042037. – Режим доступа: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1158/4/042037/pdf>
17. Zienkiewicz, O. C.; Taylor, R. L. The finite element method. Vol. 1. The basis. Butterworth-Heinemann: Oxford, United Kingdom, 2000, 707 pp.
18. Zienkiewicz, O. C.; Taylor, R. L. The finite element method. Vol. 2. Solid mechanics. Butterworth-Heinemann: Oxford, United Kingdom, 2000, 479 pp.
19. Официальный сайт ООО «Фидесис» [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://cae-fidesys.ru/>

REFERENCES

1. Konovalov D. A., Yakovlev M. Ya. Numerical estimation of effective elastic properties of elastomer composites under finite strains using spectral element method with CAE Fidesys. Chebyshevskii sbornik, vol. 18, no. 3, 2017. P. 316–329.
2. Levin V.A. Models and methods. Origination and growth of defects. Moscow: FIZMATLIT, 2015. – 456 p. (Nonlinear computational strength mechanics / Ed. by V.A. Levin: 5 volumes. V. 1. In Russian).
3. Levin V.A., Vdodichenko I.I., Vershinin A.V., Yakovlev M.Y., Zingerman K.M. An approach to the computation of effective strength characteristics of porous materials. Lett. Mater., 2017, vol. 7, no. 4. P. 452–454.
4. Levin V.A., Zingerman K.M. Exact and approximate analytical solutions under finite strains and their superposition. Moscow: FIZMATLIT, 2016. – 400 p. (Nonlinear computational strength mechanics / Ed. by V.A. Levin: 5 volumes. V. III. In Russian).
5. Lurie A.I. Theory of Elasticity. Moscow: Nauka, 1970. – 940 p.

6. Morozov E.M., Levin V.A., Vershinin A.V. Strength analysis: Fidesys in the hands of an engineer. Moscow: LENAND, 2015. – 408 p. (in Russian).
7. Yakovlev M.Y. About numerical estimation of the effective mechanical properties of rubber-cord composites // Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics. No. 17, 2012. – P. 29–40. (in Russian).
8. Yakovlev M.Y., Yangirova A.V. Algorithm and results of the numerical estimation of the effective mechanical properties of double-layer rubber-cord composite // Electronic scientific journal «Engineering Journal of Don». No. 2, 2013.
<http://ivdon.ru/magazine/archive/n2y2013/1639>.
9. Komatitsch D., Violette J.-P., The spectral element method: an efficient tool to simulate the seismic response of 2D and 3D geological structures. Bulletin of Seismological Society of America, 88(2), 1998
10. Levin V. A., Lokhin V. V., Zingerman K. M. Effective elastic properties of porous materials with randomly dispersed pores. Finite deformation // Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics. 2000. V. 67, No. 4. – P. 667–670.
11. Levin V. A., Vdovichenko I. I., Vershinin A. V., Yakovlev M. Ya., Zingerman K. M. Numerical estimation of effective mechanical properties for reinforced Plexiglas in the two-dimensional case [Электронный ресурс] // Model. Simulat. Eng., 2016. – Режим доступа: <http://www.hindawi.com/journals/mse/aip/9010576/>
12. Levin V. A., Zingermann K. M. Effective Constitutive Equations for Porous Elastic Materials at Finite Strains and Superimposed Finite Strains// Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics. 2003. Vol. 70, No. 6. – P. 809–816.
13. Levin V. A., Zingerman K. M., Vershinin A. V., Yakovlev M. Ya. Numerical analysis of effective mechanical properties of rubber-cord composites under finite strains // Compos. Struct., V. 131, 2015. – P. 25–36.
14. Vdovichenko I. I., Yakovlev M. Ya., Vershinin A. V., Levin V. A. Calculation of the effective thermal properties of the composites based on the finite element solutions of the boundary value problems [Электронный ресурс] // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, V. 158, I. 1, 2016. – Article 012094. – Режим доступа: <http://iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/158/1/012094/pdf>
15. Vershinin A. V., Levin V. A., Zingerman K. M., Sboyshakov A. M., Yakovlev M. Ya. Software for estimation of second order effective material properties of porous samples with geometrical and physical nonlinearity accounted for // Adv. Eng. Softw., V. 86, 2015. – P. 80–84.
16. Yakovlev M. Ya., Lukyanchikov I. S., Levin V. A., Vershinin A. V., Zingerman K. M. Calculation of the effective properties of the prestressed nonlinear elastic heterogeneous materials under finite strains based on the solutions of the boundary value problems using finite element method // Journal of Physics: Conference Series, Vol. 1158, Iss. 4, 2019. – Article 042037. – Режим доступа: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1158/4/042037/pdf>
17. Zienkiewicz, O. C.; Taylor, R. L. The finite element method. Vol. 1. The basis. Butterworth-Heinemann: Oxford, United Kingdom, 2000, 707 pp.
18. Zienkiewicz, O. C.; Taylor, R. L. The finite element method. Vol. 2. Solid mechanics. Butterworth-Heinemann: Oxford, United Kingdom, 2000, 479 pp.

19. Official site of Fidesys [Electronic resource]. – Access mode: <http://cae-fidesys.ru/>

Получено 18.03.2019 г.

Принято в печать 12.07.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 2.

УДК 539.21:621.785

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-538-561

**Определение материальных математических функций
в условиях текучести дилатирующих сред из порошковых
и слитковых металлических систем¹**

Э. С. Макаров, А. Е. Гвоздев, Г. М. Журавлев, И. В. Минаев, Н. Н. Добровольский,
С. В. Сапожников, А. А. Калинин

Макаров Эдуард Сергеевич — доктор технических наук, профессор, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: genadiyzhuravleff@yandex.ru

Гвоздев Александр Евгеньевич — доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник кафедры технологии и сервиса, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru

Журавлев Геннадий Модестович — доктор технических наук, профессор, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: genadiyzhuravleff@yandex.ru

Минаев Игорь Васильевич — генеральный директор научно-производственного предприятия НПП «Телар» (г. Тула).

e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru

Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет; доцент кафедры алгебры, математического анализа и геометрии, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Сапожников Сергей Владимирович — руководитель направления, банк «Финансовая корпорация Открытие» (г. Тула).

e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru

Калинин А. А. — инженер, Тульский государственный университет, г. Тула.

e-mail: antony-ak@mail.ru

Аннотация

Необратимые изменения объема материала, называемые дилатансией, возникают во многих технологических процессах. Она проявляется в порошковых и пористых металлах, грунтах и горных породах, бетонах, металлических сплавах различного химического состава и других материалах. Кроме того, в условиях пластической деформации происходит необратимое изменение объема деформируемого материала — его пластическая дилатансия, которая является основным физическим механизмом повреждаемости различных металлических систем (металлов, сталей, цветных сплавов) при их больших пластических деформациях. В связи с этим возникает необходимость учета необратимого изменения объема материала при расчетах многих технологических процессов, например, прессования

¹Работа выполнена в рамках реализации федеральной целевой программы «Исследование и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2014–2020 годы» (уникальный идентификатор проекта RFMEF157717X0271).

порошковых металлических материалов, обработки давлением и резанием пористых металлов и металлических сплавов. При составлении основных математических соотношений для теоретического описания изменения объема используются различные математические модели пластической дилатансии: дискретные модели, континуальные модели, в том числе и стохастические, которые описывают поведение дилатирующих материалов, как подвергающихся преимущественному уплотнению, так и разрыхлению. Для построения условий текучести, используемых в расчете дилатирующих сред, необходимо определение материальных математических функций для конкретных процессов и материалов. В работе рассмотрены основные условия текучести и методы их построения, которые используются в расчетах процессов пластической обработки порошковых и слитковых металлических материалов в различных условиях и состояниях.

Ключевые слова: Необратимое изменение объема, материала, пластическая дилатансия, основные соотношения, математические модели, уплотнение, разрыхление, условия текучести, материальные функции, методы их построения, металл, порошковый материал, металлический сплав.

Библиография: 47 названия.

Для цитирования:

Э. С. Макаров, А. Е. Гвоздев, Г. М. Журавлев, И. В. Минаев, Н. Н. Добровольский, С. В. Сапожников, А. А. Калинин. Определение материальных математических функций в условиях текучести дилатирующих сред из порошковых и слитковых металлических систем // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 2, С. 538–561.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 2.

UDC 539.21:621.785

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-538-561

Determination of material mathematical functions in the conditions of the duration of dilatating media from powder and ingot metal systems²

E. S. Makarov, A. E. Gvozdev, G. M. Zhuravlev, I. V. Minaev, N. N. Dobrovolsky,
S. V. Sapozhnikov, A. A. Kalinin

Makarov Eduard Sergeevich — Doctor of Technical Sciences, Professor, Tula State University (Tula).

e-mail: genadiyzhuravleff@yandex.ru

Gvozdev Aleksander Evgenievich — Doctor of Technical Sciences, Professor, Chief researcher of the Chair of Technology and Service, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru

Zhuravlev Gennadiy Modestovich — Doctor of Technical Sciences, Professor, Tula State University (Tula).

e-mail: genadiyzhuravleff@yandex.ru

Minaev Igor Vasilyevich — General Director of scientific and production enterprise NCE "Telar" (Tula).

e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru

²The work was carried out within the framework of the Federal target program «Research and development in priority areas of development of the scientific and technological complex of Russia for 2014–2020» (unique identifier of the project RFMEF 157717X0271).

Dobrovolsky Nikolai Nikolaevich — Candidate of physical and mathematical sciences, assistant of the department of applied mathematics and computer science, Tula State University; associate Professor of algebra, mathematical analysis and geometry, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Sapozhnikov Sergey Vladimirovich — head of direction, OTKRITIE Financial Corporation Bank (Tula).

e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru

Kalinin A. A. — Engineer, Tula State University, Tula.

e-mail: antony-ak@mail.ru

Abstract

Irreversible changes in the volume of material, called dilatancy, occur in many technological processes. It manifests itself in powder and porous metals, soils and rocks, concretes, metal alloys of different chemical composition and other materials. In addition, under the conditions of plastic deformation, an irreversible change in the volume of the deformable material occurs - its plastic dilatancy, which is the main physical mechanism of damage to various metal systems (metals, steels, non-ferrous alloys) with their large plastic deformations. In this regard, it is necessary to take into account the irreversible changes in the volume of the material in the calculations of many technological processes, for example, pressing powder metal materials, pressure treatment and cutting of porous metals and metal alloys. In compiling the basic mathematical relationships, a theoretical description of the change in volume uses various mathematical models of plastic dilatancy: discrete models, continual models, including stochastic models, which describe the behavior of dilating materials, both subject to preferential compaction and loosening. For the construction of the conditions of fluidity used in the calculation of dilating media, it is necessary to define material mathematical functions for specific processes and materials. The paper discusses the main conditions of fluidity and methods of their construction, which are used in the calculations of the processes of plastic processing of powder and ingot metallic materials in various conditions and states.

Keywords: irreversible change in the volume of a material, plastic dilatancy, basic relations, mathematical models, compaction, loosening, yield conditions, material functions, methods of their construction, metal, powder material, metal alloy

Bibliography: 47 titles.

For citation:

E. S. Makarov, A. E. Gvozdev, G. M. Zhuravlev, I. V. Minaev, N. N. Dobrovolsky, S. V. Sapozhnikov, A. A. Kalinin, 2019, "Determination of material mathematical functions in the conditions of the duration of dilatating media from powder and ingot metal systems", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 2, pp. 538–561.

1. Введение

Дилатансией называется изменение объема материала, деформируемого в условиях простого сдвига. Явление пластической дилатансии впервые было обнаружено в 1885 г. О. Рейнольдсом и объяснено с помощью простейшей математической модели механического поведения песка в виде системы одинаковых жестких регулярно упакованных шаров. Необратимое изменение объема материала возникает во многих технологических процессах. Она проявляется в порошковых и пористых металлах, грунтах и горных породах, бетонах, металлических сплавах и других материалах и может быть упругой, вязкой и пластической. В связи с этим возникает необходимость учета необратимого изменения объема материала при расчетах многих технологических процессов, например, прессования порошковых материалов,

обработки давлением и резанием пористых металлических систем. Кроме того, в условиях пластической деформации происходит необратимое изменение объема деформируемого материала – его пластическая дилатансия, которая является основным физическим механизмом повреждаемости металлов при их больших пластических деформациях. Проведенные исследования пластического формоизменения материалов показали, что эксплуатационные свойства изделий зависят не только от механических характеристик, но и от характеристик физико-структурных свойств обрабатываемых материалов, к которым относится и повреждаемость материала дефектами деформационного характера, связанная с пластическим разрыхлением (или уплотнением) мезоструктуры деформируемого материала наличием объемных фракций пор и дефектов кристаллической решетки.

На основании экспериментальных и теоретических исследований, выполненных в нашей стране и за рубежом, разработаны методы расчета основных параметров процессов пластического деформирования материалов с учетом пластической дилатансии. Следует отметить, что решение этой задачи требует детального учета локальных свойств обрабатываемого материала, связанных с неоднородным распределением напряжений, скоростей, деформаций и пластической дилатансии.

Однако дальнейшее развитие техники выдвигает все более сложные задачи, эффективное решение которых связано с изучением основных параметров процессов пластического деформирования и формаизменения различных порошковых и слитковых металлических систем (металлов, сталей, цветных сплавов).

2. Основные математические модели пластической дилатансии

В развитие идей О. Рейнольдса рядом авторов были предложены математические модели, связанные с различными способами укладки жестких шаров в пространстве, использовавшиеся не только для качественного объяснения, но и для количественного описания эффекта дилатансии [1, 2]. Возможности такого подхода обусловлены тем, что геометрические характеристики различных правильных шаровых упаковок существенно отличаются друг от друга. Например, координационное число (количество соседних контактов) простой кубической упаковки равно 6, а коэффициент компактности (отношение объема шаров ко всему объему, включая пустоты между шарами) – 52,36 %; те же величины для ромбоэдрической упаковки равны соответственно 12 и 74,05 %.

П. Роу [1, 2] рассмотрел схемы деформирования кубической и ромбоэдрической упаковок шаров и получил выражения для отношений главных напряжений и скоростей деформаций типа

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_3} = \psi(\alpha, \beta, \varphi), \quad \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3} = \omega(\alpha, \beta), \quad (1)$$

где α - угол, характеризующий геометрию укладки шаров; β - угол между плоскостью скольжения и одной из главных осей тензора напряжений; φ - угол кулонова трения; ψ и ω - некоторые функции соответствующих аргументов.

Экспериментально проверку дилатансионной теории деформирования П. Роу осуществили сам автор этой теории, а также Л. Барден, А. Хайят, А. Витман, И. Ли и другие исследователи [1]. В то же время ее адекватность изучаемым явлениям была поставлена под сомнение К. Роско, что стимулировало дальнейшие исследования в этой области.

В 1965 г. М. Хорн распространил указанную модель на сыпучие среды с нерегулярной упаковкой сферических частиц, а П. Роу в 1972 г. развил модельные представления для ансамбля контактирующих твердых частиц неправильной формы.

А. Дрешер и Ж. Де Йоселен де Йонг [1] предприняли экспериментальное исследование методами фотомеханики поведения гранулированного материала, моделируемого набором дис-

ков различного диаметра. Результаты достаточно трудоемкой обработки эксперимента были истолкованы в рамках гипотезы некоаксиальности тензоров напряжений и скоростей деформаций, хотя, как отметил В.Н. Николаевский [1], они могут получить иную трактовку в других теориях. Кроме того, указанное исследование ограничено двухмерной постановкой.

Представляется очевидным, что дальнейшее совершенствование дискретных математических моделей пластической дилатансии связана с использованием многомерных функций распределения и их числовых характеристик. Однако не менее очевиден и тот факт, что трудоемкость сопутствующих расчетов не будет адекватной построенным моделям.

Более плодотворным, является использование континуальных моделей пластической дилатансии, в том числе и стохастических. Первый шаг на этом пути сделали в 1952 г. Д. Друккер и В. Прагер [1], которые с позиции теории пластического потенциала на основе линейного условия текучести

$$\alpha J_1 + \sqrt{J'_2} = \Upsilon, \quad (2)$$

где J_1 - сумма главных напряжений, J'_2 - второй инвариант девиатора напряжений, α и Υ - положительные константы, получили для скорости объемной пластической деформации ε выражение

$$\varepsilon = 3\alpha\lambda, \quad (3)$$

причем из определяющих соотношений, ассоциированных с условием (2), следует, что коэффициент пропорциональности λ между компонентой ε_{ij} тензора скоростей деформаций и частной производной пластического потенциала f по соответствующей компоненте тензора напряжений σ_{ij} равен интенсивности скоростей деформаций сдвига H .

Величина

$$\Lambda = \varepsilon/H, \quad (4)$$

определяемая отношением скорости объемной деформации к интенсивности скоростей деформаций сдвига, называется скоростью дилатансии [2].

В терминах среднего напряжения σ и интенсивности касательных напряжений T , связанных с инвариантами J_1 и J'_2 соотношениями

$$J_1 = 3\sigma, \quad J'_2 = T^2, \quad (5)$$

условие Друккера - Прагера переписывается в виде

$$3\alpha\sigma + T = \Upsilon. \quad (6)$$

Полагая

$$f = 3\alpha\sigma + T - \Upsilon, \quad (7)$$

согласно концепции пластического потенциала получаем

$$\varepsilon = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma} = 3\alpha\lambda, \quad H = \lambda \frac{\partial f}{\partial T} = \lambda, \quad (8)$$

откуда по формуле (4) находим

$$\Lambda = 3\alpha > 0, \quad (9)$$

т.е. дилатирующая среда, поведение которой подчиняется условию текучести Друккера - Прагера и ассоциированному закону течения, в процессе деформирования разрыхляется.

Однако, во многих случаях дилатирующие материалы подвергаются преимущественному уплотнению. Таковы, например, процессы прокатки, экструзии и прессования порошковых и пористых металлов [3-10], уплотнения грунтовых оснований сооружений и дорожных одежд [11, 12].

Поэтому в связи с необходимостью учета уплотнения материала гипотеза о связно-сыпучей среде, соответствующей идеальной пластичности, встретила ряд возражений, опиравшихся на экспериментальные результаты.

Необходимые обобщения условия (2), обеспечивавшие в той или иной степени согласование теории дилатансии с экспериментами, выполнили в 1957 г. Д. Друккер, Р. Гибсон и Д. Хенкель, в 1959 г. – Э. Дженике и Р. Шилд, в 1969 г. – Н. Су, Дж. Вейдлер и П. Пэсли, в 1970 г. – Ф. Димаджио и И. Сандлер, - полученные ими результаты [31] сводились в основном к построению замкнутых поверхностей текучести в пространстве напряжений.

Наибольшее распространение в расчетах технологических процессов порошковой металлургии получили квадратичное условие текучести Р. Грина [18] и его различные модификации, охватываемые выражением [19]

$$AJ_2' + BJ_1^2 = D\Upsilon_0^2, \quad (10)$$

где A, B, D - функции относительной плотности R (отношения плотностей пористого и компактного металлов) или, что то же, пористости $\Pi = 1 - R$, Υ_0 - предел текучести компактного металла.

В условии текучести Грина [18]

$$A = 3, B = \frac{1}{4} \left[\frac{3(1 - \Pi^{1/3})}{(3 - 2\Pi^{1/4}) \ln \Pi} \right]^2, D = \left[\frac{3(1 - \Pi^{1/3})}{3 - 2\Pi^{1/4}} \right]^2.$$

Приведем по данным обзора [19] некоторые выражения материальных функций A, B, D с указанием авторов соответствующих работ:

а) А. Гарсон

$$A = 3, B = \Pi^2/8, D = R^2 - \Pi;$$

б) Х. Кун и С. Доуней

$$A = 2 + R^2, B = \Pi(1 + R)/3, D = 1;$$

в) М. Ойен, М. Шима и И. Коно

$$A = 3/R^2, B = \Pi / \left[R^2(1 + 2\sqrt{\Pi R}) \right], D = R^2;$$

г) И. Кораччиоглу и Т. Уз

$$A = 3, B = [0, 36(1 + R) + 0, 39] \Pi / R^2, D = 1;$$

д) С. Дорайвелу, Х. Гегель, Дж. Гунасекера, Дж. Малас, Дж. Морган и Дж. Томас

$$A = 2(1 + \nu), B = (1 - 2\nu)/3, D = 2R^2 - 1,$$

где ν – коэффициент Пуассона, $\nu = R^2/2$.

В рамках закона пластического течения, ассоциированного с условием текучести (10), для скорости дилатансии находим

$$\Lambda = 9B\sigma/(AT), \quad (11)$$

откуда следует, что знаки скорости дилатансии и среднего напряжения совпадают и что $\Lambda = 0$ при $\sigma = 0$.

Достоинством всех условий типа (10) является то, что, во-первых, при $\Pi = 0$ ($R = 1$) они обращаются в классическое условие Мизеса, во-вторых, учитывают упрочнение и разупрочнение дилатирующего материала и, в-третьих, предусматривают изменение знака дилатансии с изменением знака нормального октаэдрического напряжения. Недостаток этих условий заключается в том, что они предсказывают одинаковую сопротивляемость материала растяжению и сжатию, а также нулевую скорость дилатансии в отсутствии гидростатического давления. Последние замечания снимаются, если ввести еще одну материальную функцию $c \geq 0$ и записать условие текучести в виде

$$AJ'_2 + B(J_1 + 3c)^2 = D\Upsilon_0^2. \quad (12)$$

При этом прочностные характеристики при сжатии будут выше, чем при растяжении, а скорость дилатансии составит

$$\Lambda = 9B(\sigma + c)/(AT) \quad (13)$$

и будет положительной при $\sigma = 0$, т.е. в отсутствии гидростатического давления дилатирующий материал разрыхляется.

Геометрическая интерпретация условий текучести (6), (10) и (12) дана на рис. 1–3. Очевидно, что в состоянии чистого сдвига ($\sigma = 0$) ввиду градиентальности вектора скорости пластической деформации $\vec{\epsilon}$ условия текучести (2) и (12) всегда (при любой плотности) будут предсказывать разрыхление материала (положительную дилатансию), а условие (10) – нулевую скорость дилатансии (неизменность объема).

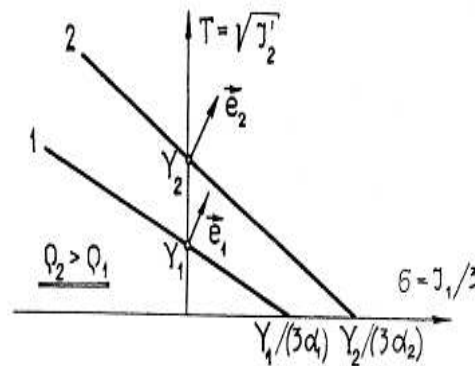


Рис. 1: Условие текучести Друккера-Прагера

Следует также отметить, что некоторые материалы при $\sigma = 0$ проявляют отрицательную дилатансию. Однако этот факт принципиально невозможно обнаружить на основе рассмотренных условий текучести. Известно также, что для материалов геологического происхождения характерно изменение знака дилатансии [20]. В связи с этим А. Казагранде ввел понятие критической плотности грунта ρ_* : если начальная плотность грунта ρ_0 равна критической, то его объем при сдвиге не изменяется, если $\rho_0 > \rho_*$, то грунт является переуплотненным и при сдвиге будет разрыхляться, а если $\rho_0 < \rho_*$, то грунт считается рыхлым и при сдвиге будет уплотняться. Очевидно, эффект Казагранде также не может быть учтен в рамках рассмотренных условий текучести.

Надлежащая гибкость в описании дилатансионных свойств материалов обеспечивается условием текучести

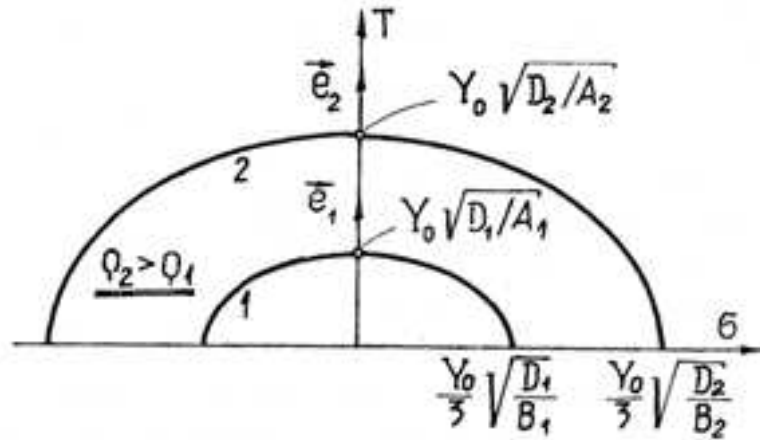


Рис. 2: Обобщенное условие текучести Грина

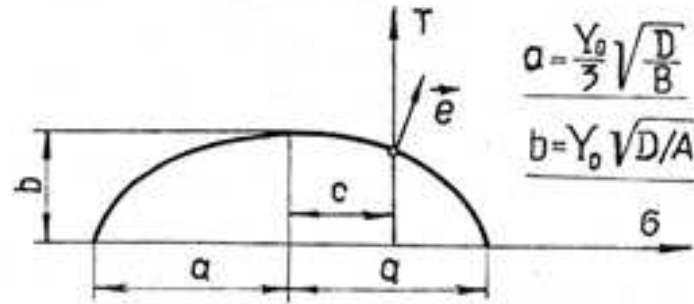


Рис. 3: Условие текучести

$$T = A + B\sigma + C\sqrt{a - \sigma} + D\sqrt{b + \sigma}, \quad (14)$$

предложенным в работе [21].

Геометрическая интерпретация условия (14) дана на рис. 4, откуда видно, что величины a, b, h, m имеют очевидный геометрический смысл. Коэффициенты A, B, C, D находятся по формулам

$$\begin{aligned} A &= h - C\sqrt{a} - D\sqrt{b}, \\ B &= m + \frac{1}{2} \left(\frac{C}{\sqrt{a}} - \frac{D}{\sqrt{b}} \right), \\ C &= \frac{\sqrt{a}}{\Delta} \left[h(2\sqrt{b} - \sqrt{a+b}) + 2mb(\sqrt{a+b} - \sqrt{b}) \right], \\ D &= \frac{\sqrt{b}}{\Delta} \left[h(2\sqrt{a} - \sqrt{a+b}) - 2ma(\sqrt{a+b} - \sqrt{a}) \right], \\ \Delta &= (\sqrt{a} + \sqrt{b}) \left[a + \sqrt{ab} + b - (\sqrt{a} + \sqrt{b})\sqrt{a+b} \right]. \end{aligned}$$

Таким образом, из восьми материальных функций A, B, C, D, a, b, h, m лишь четыре являются независимыми. Дилатансионные свойства материала характеризуются функцией $m(\rho)$: дилатансия положительна при $m < 0$, равна нулю при $m = 0$ и отрицательна при $m > 0$. На рис. 5 показана эволюция поверхности текучести (14) при переходе от рыхлого материала

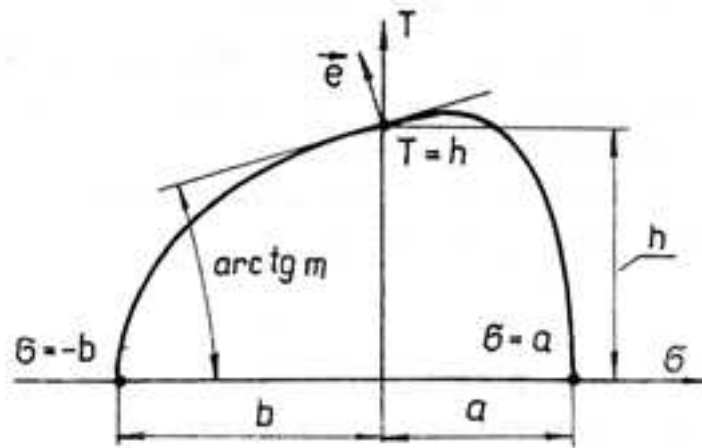


Рис. 4: Условие текучести

(кривая 1) через критическое (в смысле Казагранде) состояние (кривая 2) к переуплотненному материалу (кривая 3).

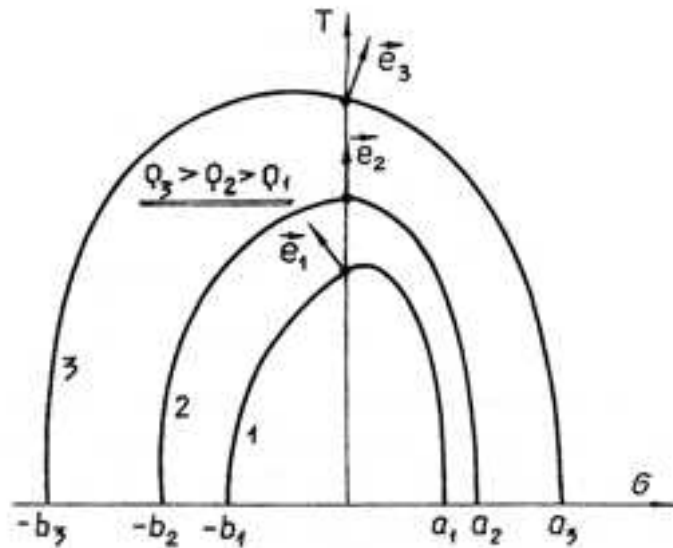


Рис. 5: Эволюция поверхности текучести в смысле Казагранде

Согласно квазитермодинамическому постулату Друккера [22] поверхность текучести (14) должна быть невогнутой, что выполняется при $C \geq 0$ и ≥ 0 . Это накладывает следующие ограничения на величины a, b, h, m :

$$\left. \begin{aligned} h(2\sqrt{b} - \sqrt{a+b}) + 2mb(\sqrt{a+b} - \sqrt{b}) &\geq 0, \\ h(2\sqrt{a} - \sqrt{a+b}) - 2ma(\sqrt{a+b} - \sqrt{a}) &\geq 0 \end{aligned} \right\}.$$

В частных случаях условие текучести (14) обращается в известные критерии:

- а) при $A \neq 0, B = 0, C = D = 0$ приходим к условию Губера – Мизеса,
- б) при $A \neq 0, B \neq 0, C = D = 0$ получаем условие Друккера – Прагера,
- в) при $A \neq 0, B = 0, C \neq 0, D = 0$ приходим к условию Надаи.

В математической модели пластически сжимаемого или разрыхляемого материала, построенной Д.Д. Ивлевым, используются две функции нагружения типа

$$f_1(\sigma, J'_2, J'_3) = 0, \quad \Theta = f_2(\sigma), \quad (15)$$

где в дополнение к уже встречавшимся обозначениям J'_3 – третий инвариант девиатора напряжений, $\Theta = e_{ii}/3$, e_{ij} – тензор пластических деформаций.

Выражение для скорости объемной деформации постулируется в виде

$$\varepsilon = \lambda \frac{\partial f_1}{\partial \sigma} + \frac{df_2}{d\sigma} \dot{\sigma}, \quad (16)$$

где одна часть ε , определяемая первым слагаемым, ассоциирована с функцией нагружения f_1 , а другая часть – с функцией f_2 .

Для компонент девиатора скоростей деформаций принимается зависимость

$$\varepsilon'_{ij} = \lambda \left(\frac{\partial f_1}{\partial J'_2} \frac{\partial J'_2}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial f_1}{\partial J'_3} \frac{\partial J'_3}{\partial \sigma_{ij}} \right), \quad (17)$$

где σ_{ij} – соответствующие компоненты тензора напряжений.

Обозначим f_{12} и f_{13} частные производные функции f_1 по второму и третьему инвариантам девиатора напряжений s_{ij} , – тогда для ε'_{ij} будем иметь

$$\varepsilon'_{ij} = \lambda(f_{12}s_{ij} + f_{13}t_{ij}), \quad (18)$$

где использованы формулы

$$J'_2 = \frac{1}{2}s_{ij}s_{ij} \Rightarrow \frac{\partial J'_2}{\partial \sigma_{ij}} = s_{ij},$$

$$J'_3 = \frac{1}{3}s_{ij}s_{jk}s_{ki} \Rightarrow \frac{\partial J'_3}{\partial \sigma_{ij}} = s_{ik}s_{kj} - \frac{2}{3}J'_2\delta_{ij} = t_{ij},$$

а δ_{ij} – символ Кронекера.

Для интенсивности скоростей деформаций сдвига H имеем [22]

$$H^2 = 2\varepsilon'_{ij}\varepsilon'_{ij}. \quad (19)$$

Внося в формулу (19) зависимость (18) и выполняя преобразования, находим

$$H = 2\lambda \sqrt{f_{12}^2 J'_2 + 3f_{12}f_{13}J'_3 + \frac{1}{3}f_{13}^2 J_2'^2}, \quad (20)$$

причем в процессе вывода этого выражения было использовано соотношение [23]

$$s_{ij}s_{jk}s_{km}s_{mi} = \frac{1}{2}(s_{ij}s_{ij})^2 = 2J_2'^2.$$

С учетом формул (16) и (20) вычисляем скорость дилатансии

$$\Lambda = \frac{\lambda \frac{\partial f_1}{\partial \sigma} + \frac{df_2}{d\sigma} \dot{\sigma}}{2\lambda \sqrt{f_{12}^2 J'_2 + 3f_{12}f_{13}J'_3 + \frac{1}{3}f_{13}^2 J_2'^2}}. \quad (21)$$

При построении математической модели дилатирующей среды по В.Н. Николаевскому [1] вводятся два условия пластического деформирования – условие текучести Друккера – Прагера и условие дилатансии

$$\alpha J_1 + \sqrt{J'_2} - \Upsilon = 0, \quad \varepsilon - \Lambda H = 0, \quad (22)$$

где $\alpha, \Upsilon, \Lambda$ – материальные функции, зависящие от плотности.

Далее с учетом кинематического ограничения разыскиваются соотношения между скоростями деформаций и напряжениями, например, в виде

$$\varepsilon_{ij} = \xi s_{ij} + \eta \delta_{ij}, \quad (23)$$

где ξ, η – искомые функции.

Из формулы (23) следуют равенства

$$\varepsilon = 3\eta, H = 2\xi\sqrt{J'_2},$$

откуда с помощью второй из формул (22) находим

$$\eta = \frac{2}{3}\xi\Lambda\sqrt{J'_2}. \quad (24)$$

Подставляя выражение (24) в формулу (23), получаем определяющее соотношение в виде

$$\varepsilon_{ij} = \xi(s_{ij} + \frac{2}{3}\Lambda\sqrt{J'_2}\delta_{ij}). \quad (25)$$

Для практических приложений более удобна следующая форма записи соотношения (25):

$$\varepsilon_{ij} = H \left(\frac{s_{ij}}{2T} + \frac{1}{3}\Lambda\delta_{ij} \right). \quad (26)$$

В математической модели гранулированных сред, предложенной З. Мрузом и Ч. Шиманским [24], принимается, что пластический потенциал есть сингулярная вершина, полученная в пространстве напряжений пересечением трех поверхностей g_1, g_2, g_3 , так что закон пластического течения имеет вид

$$\varepsilon_{ij} = \lambda \partial g_1 / \partial \sigma_{ij} + \lambda_2 \partial g_2 / \partial \sigma_{ij} + \lambda_3 \partial g_3 / \partial \sigma_{ij}, \quad (27)$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – положительные функции, определяемые из дополнительных физических соображений.

При этом учитывается также возможность, указанная еще в 1938 г. Е. Меланом, состоящая в том, что функции g_i необязательно должны выражать какое-либо условие пластичности. З. Мруз и Ч. Шиманский показали, что предложенная ими модель дилатирующей среды включает в качестве частных случаев многие другие модели.

Рассмотренные возможности математического описания явления дилатансии относились к изотропным средам. Те же подходы можно использовать и для построения соответствующих моделей, например, ортотропных дилатирующих сред [25], а также сред, деформируемых в условиях дополнительных физико-химических воздействий: в электро- и магнитостатических полях [26-30], при коррозии [31, 32], при повышенных температурах [33] и в других случаях.

На основе проведенного краткого обзора различных подходов к математическому моделированию явления дилатансии можно заключить, что возможности совершенствования известных и создания новых моделей этого явления еще далеко не исчерпаны. Кроме того, повысить точность получаемых результатов можно за счет более правильного определения материальных функций, входящих в условия текучести дилатирующих сред.

3. Определение материальных математических функций в условиях текучести дилатирующих сред.

Общее условие текучести изотропной дилатирующей среды формулируем в виде

$$f \equiv T - k(\sigma, \rho) = 0, \quad (28)$$

где σ – среднее напряжение, T – интенсивность касательных напряжений, ρ – плотность, k – некоторая функция σ и ρ .

В рамках теории пластического потенциала поверхность нагружения (28) в координатах σ, T должна быть невогнутой, – тогда будут справедливы постулат Друккера и соответствующие экстремальные теоремы.

В качестве конкретных форм представления (28) могут быть приняты (рис. 6):

а) прямая

$$T + a\sigma - b = 0, \quad k = b - a\sigma; \quad (29)$$

б) парабола

$$T^2 + a\sigma - b^2 = 0, \quad k = \sqrt{b^2 - a\sigma}; \quad (30)$$

в) кривая Ламе

$$\left(\frac{\sigma + c}{a}\right)^r + \left(\frac{T}{b}\right)^r = 1, \quad k = b\sqrt[r]{1 - \left(\frac{\sigma + c}{a}\right)^r}, \quad (31)$$

где $r = p/q > 1$, p и q соответственно четное и нечетное числа (при $p = 2, q = 1 \Rightarrow r = 2$ кривая Ламе обращается в эллипс);

г) овал Кассини

$$\begin{aligned} [(\sigma + c)^2 + T^2]^2 - 2a^2 [(\sigma + c)^2 - T^2] &= b^4, \\ k &= \sqrt{\sqrt{a^4 + b^4 + 4a^2(\sigma + c)^2} - a^2 - (\sigma + c)^2}, \end{aligned} \quad (32)$$

где $b/a \geq \sqrt[4]{2}$;

д) гипотрохоида

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= c - a \cos \varphi - b \cos 2\varphi, \\ Y &= a \sin \varphi - b \sin 2\varphi \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

где $a \geq 4b, 0 \leq \varphi \leq \pi$,

$$\begin{aligned} k &= (a - 2b\kappa)\sqrt{1 - \kappa^2}, \\ \kappa &= \frac{1}{4b} \left[\sqrt{a^2 + 8b(b + c - \sigma)} - a \right], \end{aligned}$$

а также другие кривые, в том числе кривая, описываемая уравнением (14) и изображенная на рис. 4.

Очевидно, при условии текучести (14)

$$k = A + B\sigma + C\sqrt{a - \sigma} + D\sqrt{b + \sigma}. \quad (34)$$

В выражениях (29)-(34) $a, b, c, \kappa, A, B, C, D$ – материальные функции ρ , определяемые с помощью некоторой системы экспериментов.

Пусть напряжения текучести в экспериментах по одноосному растяжению, одноосному сжатию и кручению круглых образцов соответственно будут R_p, R_c, R_k . Тогда по известным формулам [22]

$$3\sigma = \sigma_{kk}, \quad 2T^2 = s_{ij}s_{ij}$$

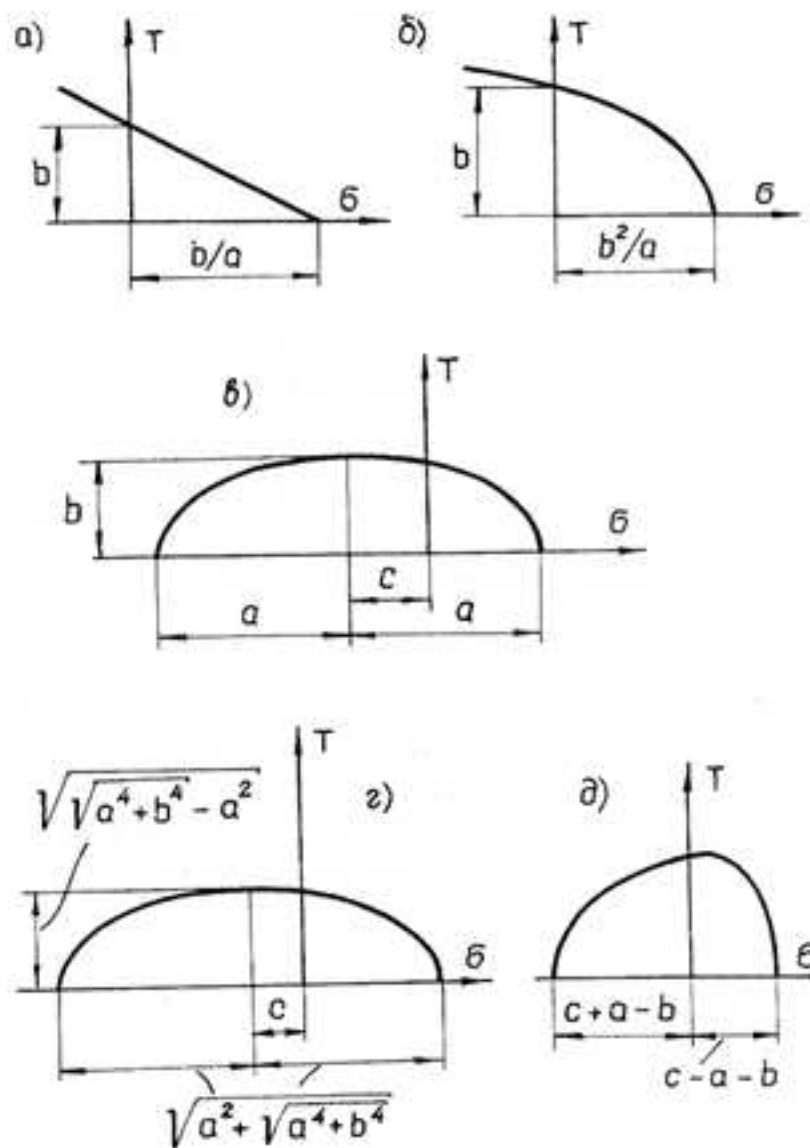


Рис. 6: Условие текучести дилатирующих сред

получим для состояния текучести

а) при одноосном растяжении

$$\sigma = \frac{1}{3}R_p, \quad T = \frac{1}{\sqrt{3}}R_p; \quad (35)$$

б) при одноосном сжатии

$$\sigma = -\frac{1}{3}R_c, \quad T = \frac{1}{\sqrt{3}}R_c; \quad (36)$$

в) при кручении

$$\sigma = 0, \quad T = R_k. \quad (37)$$

Для определения материальных функций a и b , содержащихся в условиях текучести (31) и (32), достаточно воспользоваться результатами простейших экспериментов двоякого вида с

образцами различной плотности. В итоге будем иметь

а) для условия текучести (29)

$$a = \frac{\sqrt{3}(R_c - R_p)}{R_c + R_p}, \quad b = \frac{2R_p R_c}{\sqrt{3}(R_c + R_p)}, \quad (38)$$

если комбинируются формулы (35) и (36),

$$a = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}R_k - R_p)}{R_p}, \quad b = R_k, \quad (39)$$

если привлекаются формулы (35) и (37), и

$$a = \frac{\sqrt{3}(R_c - \sqrt{3}R_k)}{R_c}, \quad b = R_k, \quad (40)$$

если расчеты выполняются с учетом формул (36) и (37);

б) для условия текучести (30)

$$a = R_c - R_p, \quad b = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{R_c R_p}, \quad (41)$$

$$a = \frac{3R_k^2 - R_p^2}{R_p}, \quad b = R_k, \quad (42)$$

$$a = \frac{R_c^2 - R_k^2}{R_c}, \quad b = R_k, \quad (43)$$

если комбинируются, соответственно, выражения (35) и (36), (35) и (37), (36) и (37).

При условии текучести (31) для определения величин a, b, c составляем, используя формулы (35)-(37), три уравнения:

$$\left(\frac{3c + R_p}{3a}\right)^r + \left(\frac{R_p}{\sqrt{3}b}\right)^r = 1,$$

$$\left(\frac{3c + R_c}{3a}\right)^r + \left(\frac{R_c}{\sqrt{3}b}\right)^r = 1,$$

$$\left(\frac{c}{a}\right)^r + \left(\frac{R_k}{b}\right)^r = 1.$$

Исключая из этой системы a и b , приходим к уравнению относительно c :

$$(3c + R_p)^r [R_c^r - (\sqrt{3}R_k)^r] + (3c - R_c)^r [(\sqrt{3}R_k)^r - R_p^r] = (3c)^r (R_c^r - R_p^r). \quad (44)$$

После нахождения c из уравнения (44) вычисляем a и b по формулам

$$a^r = \frac{(3c + R_p)^r R_c^r - (3c - R_c)^r R_p^r}{3^r (R_c^r - R_p^r)}, \quad (45)$$

$$b^r = \frac{(3c + R_p)^r R_c^r - (3c - R_c)^r R_p^r}{\sqrt{3}^r [(3c + R_p)^r - (3c - R_c)^r]}. \quad (46)$$

В частности, при $r = 2$ имеем:

$$\begin{aligned}
c &= \frac{R_k^2(R_c - R_p)}{2(3R_k^2 - R_p R_c)}, \\
a &= \sqrt{c^2 + \frac{2cR_p R_c}{3(R_c - R_p)}}, \\
b &= \frac{aR_k}{\sqrt{a^2 - c^2}}.
\end{aligned} \tag{47}$$

На основе этих результатов можно предсказать для дилатирующего материала той же плотности напряжения текучести при трехосном растяжении R_{3p} , трехосном сжатии R_{3c} , двухосном растяжении одинаковыми напряжениями R_{2p} и в других случаях.

Из условия (31) при $r = 2$, $T = 0$ получаем

$$R_{3p} = a - c, R_{3c} = a + c. \tag{48}$$

Из того же условия при

$$r = 2, \quad \sigma = \frac{2}{3}R_{2p}, \quad T = \frac{1}{\sqrt{3}}R_{2p}$$

,
следует

$$R_{2c} = \frac{3ab\sqrt{3a^2 + 4b^2 - 3c^2} + 6b^2c}{3a^2 + 4b^2}.$$

При радиальном сжатии круглого диска напряжениями R_{2c} имеем

$$\sigma = \frac{2}{3}R_{2c}, \quad T = \frac{1}{\sqrt{3}}R_{2c}$$

,
что позволяет из условия (31) при $r = 2$ найти

$$R_{2c} = \frac{3ab\sqrt{3a^2 + 4b^2 - 3c^2} + 6b^2c}{3a^2 + 4b^2}. \tag{49}$$

При гидравлическом испытании трубчатого образца на радиальный разрыв имеем

$$\sigma_r \approx 0, \quad \sigma_z = \frac{1}{2}\sigma_\varphi = \sigma = T = \frac{1}{4}\alpha q$$

,
где q – давление, вызывающее состояние пластичности; α – отношение диаметра трубы к ее толщине.

Из условия (31) при $r = 2$ далее находим

$$q = \frac{4b(a\sqrt{a^2 + b^2 - c^2} - bc)}{\alpha(a^2 + b^2)}. \tag{50}$$

По этой формуле предсказывается величина давления, вызывающего пластическое состояние в трубе при ее гидравлическом испытании.

Отметим, что для определения материальных функций a, b, c , входящих в условие пластичности (31), можно воспользоваться результатами экспериментов любых трех видов. Система экспериментов, включающая одноосное растяжение, одноосное сжатие и кручение, была рассмотрена выше. Возможны и другие системы, например,

а) одноосное растяжение, кручение, радиальное сжатие круглого диска;
 б) трехосное сжатие, кручение, гидравлическое испытание трубчатого образца;
 в) кручение, гидравлическое испытание трубчатого образца, радиальное сжатие круглого диска.

В случае использования системы б) экспериментально находим R_{3c} , R_k , и q . Далее при $r = 2$ получаем

$$c = R_{3c} - a, \quad b = \frac{aR_k}{\sqrt{R_{3c}(2a - R_{3c})}},$$

что после подстановки в формулу для q приводит к уравнению относительно a :

$$\alpha q [R_k^2 + 3R_{3c}(2a - R_k)] + 4R_k^2(R_{3c} - a) = 4R_k \sqrt{R_{3c}^2(2a - R_{3c})^2 + a^2 R_k^2}.$$

Линеаризуем правую часть полученного уравнения с помощью формулы Понселе [34]

$$\sqrt{x^2 + y^2} \approx K_1|x| + K_2|y|,$$

где K_1 и K_2 — коэффициенты аппроксимации.

При любых x и y — $K_1 = K_2 = 0,82840$ с погрешностью аппроксимации 17,16%. Если известно, что $|x| > |y|$, то $K_1 = 0,96046$, $K_2 = 0,39783$ с погрешностью аппроксимации 3,95%. При $|x| > 2|y|$ — $K_1 = 0,98592$, $K_2 = 0,23270$ с погрешностью 1,41 % и т.д.

Итак, применение формулы Понселе дает

$$\sqrt{R_{3c}^2(2a - r_{3c})^2 + a^2 R_k^2} \approx K_1 R_{3c}(2a - R_{3c}) + K_2 a R_k.$$

Далее получаем

$$\alpha q [R_k^2 + R_{3c}(2a - R_{3c})] + 4R_k^2(R_{3c} - a) = 4R_r [K_1 R_{3c}(2a - R_{3c}) + K_2 a R_k],$$

откуда находим

$$a = \frac{4R_k R_{3c}(K_1 R_{3c} + R_k) - \alpha q (R_{3c}^2 - R_k^2)}{2 [4K_1 R_k R_{3c} + 2(1 + K_2) R_k^2 - \alpha q R_{3c}]} \quad (51)$$

после чего по вышеприведенным формулам рассчитываем b и c .

На рис. 7 дана геометрическая интерпретация всех рассмотренных понятий. При построении эллипса (рис. 7а) приняты следующие числовые данные

$$R_p = 200 \text{ МПа}, \quad R_k = 250 \text{ МПа}, \quad R_c = 600 \text{ МПа},$$

согласующиеся с экспериментальными результатами для некоторых пористых материалов [35-36].

По формулам (49) получаем

$$a = 267 \text{ МПа}, \quad b = 346 \text{ МПа}, \quad c = 185 \text{ МПа}.$$

Формулы (50) дают

$$R_{3p} = 82 \text{ МПа}, \quad R_{3c} = 452 \text{ МПа}.$$

Из формулы (51) следует

$$R_{2c} = 499 \text{ МПа}.$$

Находим

$$\alpha q = 302 \text{ МПа.}$$

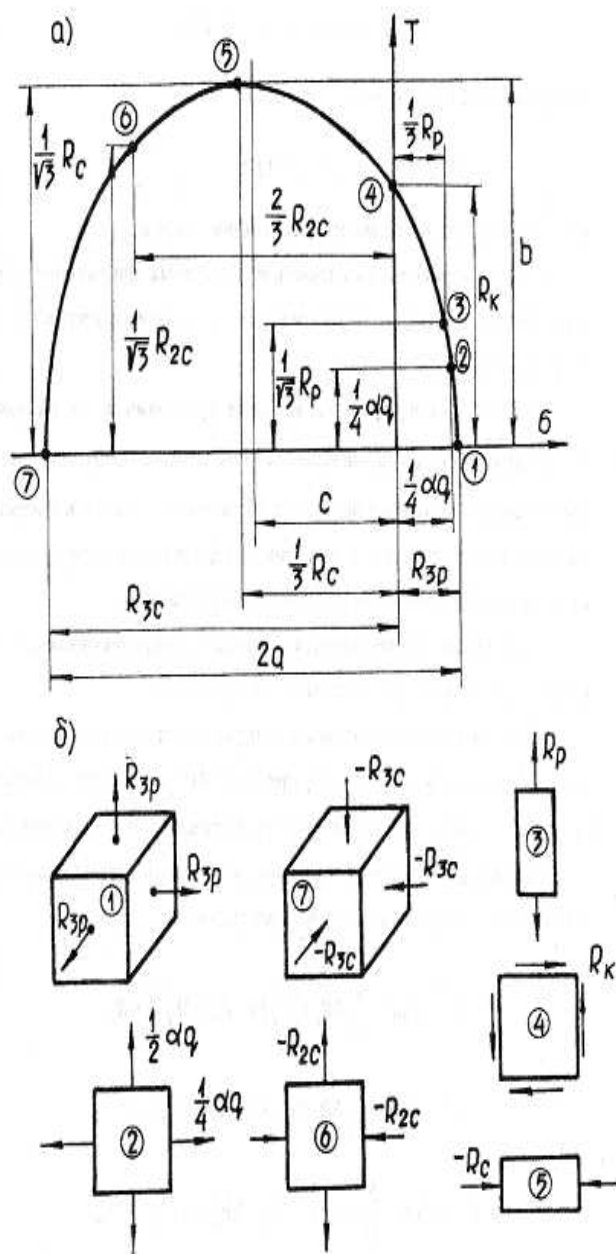


Рис. 7: Геометрическая интерпретация схем напряженных состояний на эллипсе текучести

Выполним проверочные расчеты по формуле (47).

Предварительно находим

$$R_{3c}(2a - R_{3c}) = 37064, \quad aR_k = 66750 > 37064.$$

Поэтому принимаем

$$K_1 = 0,39783, \quad K_2 = 0,96046$$

и по формуле (47) получаем

$$a = 263 \text{ МПа},$$

что хорошо согласуется с вышеуказанным значением a .

Схемы напряженных состояний, используемых при постановке экспериментов и соответствующих точкам 1...7 на эллипсе текучести, изображены на рис. 76.

Поскольку величины a, b, c являются функциями ρ , то их можно представить, например, полиномами $(n-1)$ -ой степени по ρ . Для определения коэффициентов этих полиномов достаточно осуществить с образцами различной плотности n серий испытаний, каждая из которых состоит из трех рассмотренных выше простейших экспериментов.

Аналогично рассматриваются и другие условия текучести дилатирующих сред, а также другие системы экспериментов.

В частности, для определения четырех независимых материальных функций, входящих в условие текучести (14), можно использовать результаты экспериментов по одноосному растяжению и одноосному сжатию образцов, радиальному сжатию круглого диска и кручению круглого стержня. Тогда получим систему четырех уравнений

$$\begin{aligned} R_p &= \sqrt{3}A + \frac{1}{\sqrt{3}}BR_p + C\sqrt{3a - R_p} + D\sqrt{3b + R_p}, \\ R_c &= \sqrt{3}A + \frac{1}{\sqrt{3}}BR_c + C\sqrt{3a + R_c} + D\sqrt{3b - R_c}, \\ R_{2c} &= \sqrt{3}A + \frac{2}{\sqrt{3}}BR_{2c} + C\sqrt{3a + 2R_c} + D\sqrt{3b - 2R_{2c}}, \\ R_k &= h, \end{aligned}$$

где R_p, R_c, R_{2c}, R_k – напряжения текучести в вышеперечисленных опытах.

4. Заключение

При разработке технологических процессов различных материалов современное развитие техники выдвигает все более сложные задачи, эффективное решение которых связано с изучением необратимого изменения объема материала. При составлении основных математических соотношений для теоретического описания изменения объема используются различные математические модели, которые используются в дальнейшем для анализа целого ряда процессов, связанных как с разрыхлением, так и с уплотнением материала. Правильный выбор моделей пластической дилатансии, и определение материальных функций, входящих в условие пластичности с использованием результатов экспериментов различных видов, позволяет повысить точность прогнозирования получаемых результатов для создания ресурсосберегающих процессов обработки порошковых и слитковых металлических систем (чистых металлов, сталей, цветных сплавов и других композиционных металлических и наноструктурных материалов) [37-52].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Определяющие законы механики грунтов: Сб. статей / Под ред. В. Н. Николаевского. – М.: Мир, 1975. – 230 с.
2. Вязов С. С. Реологические основы механики грунтов. – М.: Высшая школа, 1978. – 448 с.

3. Виноградов Г. А., Каташинский В. П. Теория листовой прокатки металлических порошков и гранул. – М.: Металлургия, 1979. – 224 с.
4. Перельман В. Е. Формование порошковых материалов. – М.: Металлургия, 1979. – 232 с.
5. Макаров Э. С. К теории формования металлических порошков в условиях плоской деформации // Известия вузов, Машиностроение. – 1973. – № 10. – С. 158–162.
6. Павлов В. А., Кипарисов С. С., Щербина В. В. Обработка давлением порошков цветных металлов. – М.: Металлургия, 1977. – 176 с.
7. Новые процессы деформации металлов и сплавов / А. П. Коликов, П. И. Полухин, А. В. Крупин и др. – М.: Высшая школа, 1986. – 352 с.
8. Порошковая металлургия и напыленные покрытия / Под ред. Б. С. Митина. – М.: Металлургия, 1987. – 792 с.
9. Экономичные методы формообразования деталей / Под ред. К. Н. Богоявленского и В. В. Риса. – Л.: Лениздат, 1984. – 144 с.
10. Теория пластичности дилатирующих сред: монография / Э. С. Макаров, А. Е. Гвоздев, Г. М. Журавлев; Под ред. проф. А. Е. Гвоздева. 2-е изд. перераб. и доп. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2015. – 337 с.
11. Калужский Я. А., Батраков О. Т. Уплотнение земляного полотна и дорожных одежд. – М.: Транспорт, 1971. – 158 с.
12. Хархута Н. Я. Машины для уплотнения грунтов. – Л.: Машиностроение, 1973. – 176 с.
13. Green R. J. A plasticity theory for porous solids // Int. J. Mech. Sci., vol. 14, 1972, pp. 215–224.
14. Doraivelu S. M., Gegel H. L., Gunasekera J. S., Malas J. C., Morgan J. T., Tomas J. F. A new yield function for compressible P/M materials // Int. J. Mech. Sci., vol. 26, 1984, pp. 527–535.
15. Харр М. Е. Основы теоретической механики грунтов. – М.: Стройиздат, 1971. – 320 с.
16. Макаров Э. С., Толоконников Л. А. Вариант построения теории пластичности дилатирующей среды // Изв. АН СССР, Механика твердого тела. – 1979. – № 1. – С. 88–93.
17. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. – М.: Наука, 1969. – 420 с.
18. Томас Т. Пластическое течение и разрушение в твердых телах. – М.: Мир, 1964. – 308 с.
19. Механика гранулированных сред: Сб. статей / Под ред. И. В. Ширко. – М.: Мир, 1985. – 280 с.
20. Макаров Э. С., Толоконников Л. А. Плоские задачи теории пластичности ортотропных дилатирующих сред // Изв. АН СССР, Механика твердого тела. – 1979. – № 5. – С. 139–143.
21. Макаров Э. С., Толоконников Л. А. Теория магнитопластичности дилатирующих сред // V Всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике (аннот. докл.). – Алма-Ата: Наука, 1981. – С. 245.
22. Макаров Э. С., Киселев В. И. Теория электропластичности изотропных дилатирующих сред // Иссл. в обл. пластичности и обработки металлов давлением. – Тула: изд. ТулПИ, 1982. – С. 104–109.

23. Макаров Э. С., Толоконников Л. А. Уравнения теории магнитопластичности изотропной дилатирующей среды // Изв. АН СССР, Механика твердого тела. – 1983. – № 5. – С. 188–190.
24. Макаров Э. С., Киселев В. И. Задачи теории пластического течения дилатирующих сред в электрических и магнитных полях // Общие задачи и методы исследования пластических и вязкоупругих материалов и конструкций. – Свердловск: изд. УНЦ АН СССР, 1986. – С. 66–71.
25. Макаров Э. С. Пластическое деформирование дилатирующих сред в электростатических и магнитостатических полях // Иссл. в обл. теории, технологии и оборудования штамповочного производства. – Тула: изд. ТулГУ, 1998. – С. 64–69.
26. Макаров Э. С. Вариант построения и некоторые плоские задачи теории хемопластичности // Изв. АН СССР, Механика твердого тела. – 1989. – № 5. – С. 70–72.
27. Макаров Э. С. Применение теории хемопластичности к расчету предельных состояний корродирующих труб // Физико-химическая механика материалов. – 1989. – № 2. – С. 115–117.
28. Друянов Б. А. Прикладная теория пластичности пористых тел. – М.: Машиностроение, 1989. – 166 с.
29. Люстерник Л. А., Червоненкис О. А., Янпольский А. Р. Математический анализ (вычисление элементарных функций). – М.: Физматгиз, 1963. – 248 с.
30. Павлов В. А., Кипарисов С. С., Щербина В. В. Обработка давлением порошков цветных металлов. – М.: Металлургия, 1977. – 176 с.
31. Технология металлов и сплавов: учебник / Н. Н. Сергеев, А. Е. Гвоздев, Н. Е. Стариков, В. И. Золотухин, А. Н. Сергеев, А. Д. Бреки, О. В. Кузовлева, Г. М. Журавлёв, Д. А. Провоторов; Под ред. проф. Н. Н. Сергеева. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2017. – 490 с.: ISBN 978-5-7679-3777-6.
32. Гвоздев А. Е., Сергеев Н. Н., Минаев И. В., Тихонова И. В., Колмаков А. Г. Роль процесса зародышеобразования в развитии некоторых фазовых переходов первого рода // Материаловедение. – 2015. – № 1. – С. 15–21.
33. Gvozdev A. E., Golyshev I. V., Minayev I. V., Sergeyev A. N., Sergeyev N. N., Tikhonova I. V., Khonelidze D. M., Kolmakov A. G. Multiparametric optimization of laser cutting of steel sheets // Inorganic Materials: Applied Research. – 2015. – Т. 6. – № 4. – С. 305–310.
34. Gvozdev A. E., Bogolyubova D. N., Sergeev N. N., Kolmakov A. G., Provotorov D. A., Tikhonova I. V. Features of softening processes of aluminum, copper, and their alloys under hot deformation // Inorganic Materials: Applied Research. – 2015. – Т. 6. – № 1. – С. 32–40.
35. Бреки А. Д., Гвоздев А. Е., Колмаков А. Г. Использование обобщенного треугольника паскаля для описания колебаний силы трения материалов // Материаловедение. – 2016. – № 11. – С. 3–8.
36. Макаров Э. С., Гвоздев А. Е., Журавлев Г. М., Сапожников С. В., Сергеев А. Н., Колмаков А. Г., Бреки А. Д., Малий Д. В., Добровольский Н. Н. Анализ уравнений теории пластичности порошковых металлических систем // Чебышевский сборник. – 2018, 19 (1). – С. 152–166. URL: <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-19-1-152-166>

37. Макаров Э. С., Журавлев Г. М., Гвоздев А. Е., Сапожников С. В., Сергеев А. Н. Свойства уравнений теории пластичности дилатирующих материалов в концепции пластического газа // Чебышевский сборник. – 2018, 19 (2). – С. 163–171.
URL: <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-19-2-163-171>
38. Журавлев Г. М., Гвоздев А. Е., Колмаков А. Г., Сергеев А. Н., Малий Д. В. Применение математического метода локальных вариаций для решения задач пластического формоизменения металлических, порошковых и нанопозиционных материалов // Чебышевский сборник. – 2018, 19 (4). – С. 43–54. URL: <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-19-4-43-54>
39. Макаров Э. С., Гвоздев А. Е., Журавлев Г. М., Сергеев А. Н., Минаев И. В., Бреки А. Д., Малий Д. В. Применение теории пластичности дилатирующих сред к процессам уплотнения порошков металлических систем // Чебышевский сборник. – 2017, 18(4). – С. 268–284. URL: <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2017-18-4-268-284>
40. Гвоздев А. Е., Журавлев Г. М., Сапожников С. В. К теоретическому анализу процесса компактирования порошковых материалов прессованием // Известия Тульского государственного университета. Науки о Земле. – 2017. – № 4. – С. 273–283.
41. Breki A. D., Aleksandrov S. E., Tyurikov K. S., Kolmakov A. G., Gvozdev A. E., Kalinin A. A. Antifriction properties of plasma-chemical coatings based on SiO₂ with MoS₂ nanoparticles under conditions of spinning friction on SHKH15 steel // Inorganic Materials: Applied Research. – 2018. – Т. 9. № 4. – С. 714–718.
42. Breki A. D., Gvozdev A. E., Kolmakov A. G., Starikov N. E., Provotorov D. A., Sergeyev N. N., Khonelidze D. M. On friction of metallic materials with consideration for superplasticity phenomenon // Inorganic Materials: Applied Research. – 2017. – Т. 8. № 1. – С. 126–129.
43. Gvozdev A. E., Sergeyev N. N., Minayev I. V., Tikhonova I. V., Sergeyev A. N., Khonelidze D. M., Maliy D. V., Golyshev I. V., Kolmakov A. G., Provotorov D. A. Temperature distribution and structure in the heat-affected zone for steel sheets after laser cutting // Inorganic Materials: Applied Research. – 2017. – Т. 8. № 1. – С. 148–152.
44. Breki A. D., Gvozdev A. E., Kolmakov A. G. Application of generalized pascal triangle for description of oscillations of friction forces // Inorganic Materials: Applied Research. – 2017. – Т. 8. № 4. – С. 509–514.
45. Gvozdev A. E., Sergeyev N. N., Minayev I. V., Kolmakov A. G., Tikhonova I. V. Role of nucleation in the development of first-order phase transformations // Inorganic Materials: Applied Research. – 2015. – Т. 6. № 4. – С. 283–288.
46. Gvozdev A. E., Bogolyubova D. N., Sergeev N. N., Kolmakov A. G., Provotorov D. A., Tikhonova I. V. Features of softening processes of aluminum, copper, and their alloys under hot deformation // Inorganic Materials: Applied Research. – 2015. – Т. 6. № 1. – С. 32–40.
47. Gvozdev A. E., Minaev I. V., Sergeev N. N., Kolmakov A. G., Provotorov D. A., Tikhonova I. V. Grain size effect of austenite on the kinetics of pearlite transformation in low- and medium-carbon low-alloy steels // Inorganic Materials: Applied Research. – 2015. – Т. 6. № 1. – С. 41–44.

REFERENCES

1. Defining the laws of soil mechanics: Sat. articles / ed. V. N. Nicholas. – М.: Mir, 1975. – 230 p.
2. Vyalov S. S. Rheological basis of soil mechanics. – М.: Higher School, 1978. – 448 p.

3. Vinogradov G. A., Katashinsky V. P. The theory of sheet rolling of metal powders and granules. – M.: Metallurgy, 1979. – 224 p.
4. Perelman V. E. Forming powder materials. – M.: Metallurgy, 1979. – 232 p.
5. Makarov E. S. To the theory of the formation of metal powders under conditions of plane deformation // News of universities, Mashinostroenie. – 1973. – № 10. – P. 158–162.
6. Pavlov V. A., Kiparisov S. S., Shcherbina V. V. Pressure treatment of non-ferrous metal powders. – M.: Metallurgy, 1977. – 176 p.
7. New deformation processes of metals and alloys / A. P. Kolikov, P. I. Polukhin, A. V. Krupin et al. – M.: Higher School, 1986. – 352 p.
8. Powder metallurgy and sprayed coatings. Ed. B. S. Mitin. – M.: Metallurgy, 1987. – 792 p.
9. Economical methods of forming parts / Ed. K. N. Bogoyavlenskogo and V. V. Rice. – L.: Lenizdat, 1984. – 144 p.
10. The theory of plasticity of dilating media: monograph / E. S. Makarov, A. E. Gvozdev, G. M. Zhuravlev; under ed. prof. A. E. Gvozdev. 2nd ed. reclaiming and add. – Tula: Publishing House of TSU, 2015. – 337 p.
11. Kaluzhsky Ya. A., Batrakov O. T. Seal roadbed and pavement. – M.: Transport, 1971. – 158 p.
12. Kharkhut N. Ya. Soil compaction machines. – L.: Mechanical Engineering, 1973. – 176 p.
13. Green R. J. A plasticity theory for porous solids // Int. J. Mech. Sci., vol. 14, 1972, pp. 215–224.
14. Doraivelu S. M., Gegel H. L., Gunasekera J. S., Malas J. C., Morgan J. T., Tomas J. F. A new yield function for compressible P/M materials // Int. J. Mech. Sci., vol. 26, 1984, pp. 527–535.
15. Harr M. E. Fundamentals of theoretical soil mechanics. – M.: stroiizdat, 1971. – 320 p.
16. Makarov E. S., Tolokonnikov L. A. Version of the theory of plasticity dilating medium / / Izv. USSR Academy of Sciences, Solid Mechanics. – 1979. – № 1. – p. 88–93.
17. Kachanov L. M. Fundamentals of the theory of plasticity. – M.: Science, 1969. – 420 p.
18. Thomas T. Plastic flow and destruction in solids. – M.: Mir, 1964. – 308 p.
19. Mechanics of granular media: Sat. articles / ed. I. V. Wide. – M.: Mir, 1985. – 280 p.
20. Makarov E. S., Tolokonnikov L. A. Flat problems of the theory of plasticity of orthotropic dilating media // Izv. USSR Academy of Sciences, Solid Mechanics. – 1979. – № 5. – p. 139–143.
21. Makarov E. S., Tolokonnikov L. A. The theory of magnetoplasticity of dilating media // V All-Union Congress on Theoretical and Applied Mechanics (annotated report). – Alma-Ata: Science, 1981. – p. 245.
22. Makarov E. S., Kiselev V. I. Theory of electroplasticity of isotropic dilating media // Issl. in the region plasticity and metal forming. – Tula: ed. TulPI, 1982. – p. 104–109.
23. Makarov E. S., Tolokonnikov L. A. The equations of the theory of magnetoplasticity of an isotropic dilating medium // Izv. USSR Academy of Sciences, Solid Mechanics. – 1983. – № 5. – p. 188–190.

24. Makarov E. S., Kiselev V. I. Problems of the theory of plastic flow of dilating media in electric and magnetic fields // General problems and methods for the study of plastic and viscoelastic materials and structures. – Sverdlovsk: ed. UC AN SSSR, 1986. – p. 66–71.
25. Makarov E. S. Plastic deformation of dilating media in electrostatic and magnetostatic fields // Essl. in the region theories, technologies and equipment of stamping production. – Tula: ed. TSU, 1998. – p. 64–69.
26. Makarov E. S. A variant of construction and some flat problems of the theory of chemoplasticity // Izv. USSR Academy of Sciences, Solid Mechanics. – 1989. – № 5. – p. 70–72.
27. Makarov E. S. The application of the theory of chemoplasticity to the calculation of the limiting states of corroding pipes // Physico-chemical mechanics of materials. – 1989. – № 2. – p. 115–117.
28. Druyanov B. A. Applied theory of plasticity of porous bodies. – M.: Mashinostroenie, 1989. – 166 p.
29. Lyusternik L. A., Chervonenkis O. A., Yanpolsky A. R. Mathematical analysis (calculation of elementary functions). – M.: Fizmatgiz, 1963. – 248 p.
30. Pavlov, V. A., Kiparisov, S. S., Shcherbina, V. V. Pressure treatment of non-ferrous metal powders. – M.: Metallurgy, 1977. – 176 p.
31. Technology of metals and alloys: textbook / N. N. Sergeev, A. E. Gvozdev, N. E. Starikov, V. I. Zolotukhin, A. N. Sergeev, A. D. Brecky, O. V. Kuzovlev, G. M. Zhuravlev, D. A. Provotorov; Ed. prof. N. N. Sergeyeva. – Tula: TSU, 2017. – 490 p.: ISBN 978-5-7679-3777-6.
32. Gvozdev A. E., Sergeev N. N., Minaev I. V., Tikhonova I. V., Kolmakov A. G. The role of the nucleation process in the development of some phase transitions of the first kind // Material Science. – 2015. – No. 1. – P. 15–21.
33. Gvozdev A. E., Golyshev I. V., Minayev I. V., Sergeyev A. N., Sergeyev N. N., Tikhonova I. V., Khonelidze D. M., Kolmakov A. G. Multiparametric optimization of laser cutting of steel sheets // Inorganic Materials: Applied Research. – 2015. – T. 6. № 4. – C. 305–310.
34. Gvozdev A. E., Bogolyubova D. N., Sergeev N. N., Kolmakov A. G., Provotorov D. A., Tikhonova I. V. Features of softening processes of aluminum, copper, and their alloys under hot deformation // Inorganic Materials: Applied Research. – 2015. – T. 6. № 1. – C. 32–40.
35. Breki A. D., Gvozdev A. E., Kolmakov A. G. Using the generalized Pascal triangle to describe the fluctuations of the friction force of materials // Math-rial Studies. – 2016. – No. 11. – P. 3–8.
36. Makarov E. S., Gvozdev A. E., Zhuravlev G. M., Sapozhnikov S. V., Sergeev A. N., Kolmakov A. G., Breki A. D., Maliy D. V., Dobrovolsky N. N. Analysis of the equations of the theory of plasticity of powder metal systems // Chebyshevsky collection. – 2018, 19 (1), c. 152–166. URL: <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-19-1-152-166>
37. Makarov, E. S., Zhuravlev, G. M., Gvozdev, A. E., Sapozhnikov, S. V., Sergeev, A. N. Properties of equations of the theory of plasticity of dilating materials in the concept of plastic gas // Chebyshevsky collection. – 2018, 19 (2), p. 163–171. URL: <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-19-2-163-171>

38. Zhuravlev G. M., Gvozdev A. E., Kolmakov A. G., Sergeev A. N., Maliy D. V. The use of the mathematical method of local variations for solving the problems of plastic forming metal, powder and nanocomposite materials // Chebyshevsky collection. – 2018, 19 (4), p. 43–54. URL: <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-19-4-43-54>
39. Makarov E. S., Gvozdev A. E., Zhuravlev G. M., Sergeev A. N., Minaev I. V., Breki A. D., Maliy D. V. Application of the theory of plasticity of dilating media to the processes of compaction of powders of metal systems // Chebyshevsky collection. – 2017, 18 (4), p. 268–284. URL: <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2017-18-4-268-284>
40. Gvozdev A. E., Zhuravlev G. M., Sapozhnikov S. V. To the theoretical analysis of the process of compacting powder materials by pressing // Izvestiya Tula State University. Earth Sciences. – 2017. – No. 4. – P. 273–283.
41. Breki A. D., Aleksandrov S. E., Tyurikov K. S., Kolmakov A. G., Gvozdev A. E., Kalinin A. A. Antifriction properties of plasma-chemical coatings based on SiO_2 with MoS_2 nanoparticles under conditions of spinning friction on SHKH15 steel // Inorganic Materials: Applied Research. – 2018. – T. 9. № 4. – С. 714–718.
42. Breki A. D., Gvozdev A. E., Kolmakov A. G., Starikov N. E., Provotorov D. A., Sergeyev N. N., Khonelidze D. M. On friction of metallic materials with consideration for superplasticity phenomenon // Inorganic Materials: Applied Research. – 2017. – T. 8. № 1. – С. 126–129.
43. Gvozdev A. E., Sergeyev N. N., Minayev I. V., Tikhonova I. V., Sergeyev A. N., Khonelidze D. M., Maliy D. V., Golyshev I. V., Kolmakov A. G., Provotorov D. A. Temperature distribution and structure in the heat-affected zone for steel sheets after laser cutting // Inorganic Materials: Applied Research. – 2017. – T. 8. № 1. – С. 148–152.
44. Breki A. D., Gvozdev A. E., Kolmakov A. G. Application of generalized pascal triangle for description of oscillations of friction forces // Inorganic Materials: Applied Research. – 2017. – T. 8. № 4. – С. 509–514.
45. Gvozdev A. E., Sergeyev N. N., Minayev I. V., Kolmakov A. G., Tikhonova I. V. Role of nucleation in the development of first-order phase transformations // Inorganic Materials: Applied Research. – 2015. – T. 6. № 4. – С. 283–288.
46. Gvozdev A. E., Bogolyubova D. N., Sergeev N. N., Kolmakov A. G., Provotorov D. A., Tikhonova I. V. Features of softening processes of aluminum, copper, and their alloys under hot deformation // Inorganic Materials: Applied Research. – 2015. – T. 6. № 1. – С. 32–40.
47. Gvozdev A. E., Minaev I. V., Sergeev N. N., Kolmakov A. G., Provotorov D. A., Tikhonova I. V. Grain size effect of austenite on the kinetics of pearlite transformation in low- and medium-carbon low-alloy steels // Inorganic Materials: Applied Research. – 2015. – T. 6. № 1. – С. 41–44.

Получено 18.03.2019 г.

Принято в печать 12.07.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 2.

УДК 52(091)

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-562-579

Историографическая дискуссия о происхождении китайской астрономии

Г. И. Синкевич

Синкевич Галина Ивановна — кандидат физико-математических наук, доцент, Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет (г. Санкт-Петербург).
e-mail: galina.sinkevich@gmail.com

Аннотация

Самая большая, но не единственная, европейская мистификация, связанная с историей китайской астрономии, произошла в XVII веке. Согласно китайским источникам, астрономия ведёт своё начало от середины третьего тысячелетия до н.э. Достоверность источников дискуссионна. В 213–212 гг. до н.э. император Цинь Шихуанди приказал уничтожить все рукописи, кроме дворцовых хроник и книг практического назначения. На рубеже II и I вв. до н.э. историограф Сыма Цянь написал грандиозное сочинение «Исторические записки» — основной исторический документ, подлинность которого признана большинством историков. В этом сочинении изложены древние предания и хроника событий с VIII в. до н.э. Долгое время Китай был закрыт для европейцев, первая популярная книга о Китае принадлежит Марко Поло. В XVII–XVIII вв. н.э. в Китае пребывала миссия иезуитов. Иезуиты пробыли в Китае 190 лет, в составе миссии было 36 астрономов, которые своими отчётами создали у европейцев представление о древности китайской астрономии. Последующее обсуждение европейских учёных поставило это под сомнение. С XVII в. Китае присутствовала православная миссия, с XIX в. была представлена Петербургская Академия наук, создана русская обсерватория. Китаеведение (синология) возникло благодаря деятельности различных миссий, из среды миссионеров вышло немало глубоких исследователей. Среди них были и замечательные русские синологи. Работы исследователей XIX и XX века продолжают споры об аутентичности древних источников. Сейчас в историографии обозначились две тенденции, расходящиеся во мнениях по поводу подлинности древнекитайской астрономии. Мы рассмотрим историю этой дискуссии и основные аргументы сторон, включая работы П. С. Лапласа, К. А. Скачкова, Г. Н. Попова, А. В. Маракуева, Дж. Нидэма, Н. Сивина, Э. И. Берёзкиной, Чен-Йи Чена, В. Е. Еремеева.

Ключевые слова: древняя китайская астрономия, история.

Библиография: 18 названий.

Для цитирования:

Г. И. Синкевич. Историографическая дискуссия о происхождении китайской астрономии // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 2, с. 562–579.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 2.

UDC 52(091)

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-2-562-579

Historiographic discussion on the origin of chinese astronomy

G. I. Sinkevich

Sinkevich Galina Ivanovna — candidate of physical and mathematical Sciences, associate Professor, Saint Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering (St. Petersburg).
e-mail: galina.sinkevich@gmail.com

Abstract

The biggest, but not the only, European mystification about the ancient origin of Chinese astronomy, occurred in the 17th century. According to Chinese sources, astronomy dates back to the middle of the third millennium B.C. The reliability of the sources is debatable. In 213–212 B.C., the emperor Qin Shi Huang ordered the destruction of all manuscripts except palace chronicles and practical books. At the turn of the 2 and 1 c. B.C. the historian Sima Qian wrote the "Records of the Grand Historian". This monumental work outlines the ancient legends and chronicles from the 8 century B.C. For a long time, China was closed to Europeans, the first popular European book about China was written by Marco Polo (13 c.). In the 17-18 centuries, in China the Jesuit mission resided. The mission included 36 astronomers who, with their reports, created among the Europeans an idea of the antiquity of Chinese astronomy. The subsequent discussion questioned this idea. From the 19th century, the Petersburg Academy of Sciences was represented in Pekin. Chinese studies (Sinology) arose due to the work of various missions, and many profound researchers emerged from the missionaries, the remarkable Russian Sinologists were among them. The works of the 19 and 20 centuries continue the debate about the authenticity of ancient sources. We consider the history of this discussion and the main arguments of the parties, including the works of P.-S. Laplace, K. A. Skachkov, G. N. Popov, A. V. Marakuev, N. J. Needham, N. Sivin, E. I. Beryozkina, Cheng-Yih Chen, V. Ye. Eremeyev.

Keywords: Ancient Chinese Astronomy, History.

Bibliography: 18 titles.

For citation:

G. I. Sinkevich, 2019, "Historiographic discussion on the origin of chinese astronomy *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 2, pp. 562–579.

1. Введение

С древних времён китайская астрономия была политическим инструментом, направленным на нужды астрологии, необходимой для подтверждения правомерности власти. Господствовала теория «небесного мандата» – одобрения небом деятельности императора, которое подтверждалось благополучными природными явлениями. Напротив, стихийные бедствия, неурожаи, неожиданные астрономические явления служили признаками небесного недовольства. Императоры получали «небесный мандат» как право осуществлять волю неба и обязанность сохранять мировую гармонию.

Астрологический смысл небесных явлений влиял на социальную и политическую жизнь, астрологией имели право заниматься лишь государственные чиновники, любительство не только не поощрялось, но могло вызвать обвинения в попытке свержения власти. Астрономы/астрологи жили во дворце и составляли Астрономический трибунал (Кин-тьен-Кьен.

В различных переводах называется также астрономическое бюро, математическая коллегия, трибунал математиков, двор астрономических наблюдений). Астрономические знания сохранялись в узком кругу, методы имели алгоритмический характер.

Отсутствие геометрических представлений и дедуктивных рассуждений, примат философских авторитетов не позволил китайской астрономии подняться на теоретический уровень, необходимый для самостоятельного развития. Главными задачами астрономов были запись наблюдений, составление календаря и предсказание солнечных затмений. Непредсказанное астрономическое явление, особенно солнечное затмение, было зловещим предзнаменованием, означавшим небесное недовольство властителем, и могло повлечь народные волнения и смену власти.

2. Исторические особенности китайской науки

Как известно из европейских исследований, у китайцев не было теоретической математики. Для решения практических задач на измерения, объём работ, расчёт смесей, исчисление налогов, – всего того, что было необходимо знать чиновнику, – разрабатывались правила в виде алгоритмов, позволяющих получать решение за несколько шагов с помощью счётной доски. Все правила формулировались для частных случаев, их корректность не доказывалась. Традиционная китайская геометрия была алгебраичной, а математика в целом – алгоритмичной.

В отличие от греческих представлений, числа были мерой изменчивости, китайцы не выделяли иррациональных чисел, не стремились выразить астрономические представления в геометрической форме. Тригонометрии китайцы не знали (в XI веке Шэнь Ко разработал самобытную сферическую тригонометрию, но фактически традиционная европейская тригонометрия, применяемая в астрономии, стала известна в Китае только с приходом иезуитов, которые перевели на китайский европейские книги по математике и астрономии).

Геометрические модели планетарных движений не строились. В их космологии небесные тела плавали в бездонном небе, каждое тело согласно своей природе следовало непознаваемому пути «дао». Наблюдаемость пяти планет способствовала созданию теории пяти стихий и пяти небесных царей.

Все астрономические явления подчинялись циклическим процессам, иногда с грандиозными периодами. Усилия астрологов были посвящены вычислению совпадений циклов.

Во вторую половину периода Чунь цю (722–481 гг. до н. э.) значительно продвинулось вперед определение времен года. Интеркаляция семи вставочных месяцев в 19-летнем цикле позволяла прогнозировать затмения.

Поскольку считалось, что несовершенство календаря влечёт социальные катаклизмы, для исправления ситуации придворные астрологи должны были менять календарь. В период с 85 по 1653 г. было изменено шестьдесят девять календарей. Сама астрономия была эмпирически-наблюдательной.

3. Библиотечные катастрофы (шу э)

Древние китайские рукописи преимущественно были написаны на бамбуковых палочках (очень редко на шёлке), занимали большой объём, легко горели. Китайская историография имеет специальный термин для обозначения событий, повлекших крупные потери в литературной традиции: шу э.

Самым драматическим из этих событий было сожжение книг по указу императора Цинь Шихуана в 213–212 гг. до н.э. Согласно «Историческим запискам» (Ши цзи) историографа II–I в. до н.э. Сыма Цяня [1], Цинь Шихуанди, создатель первого централизованного китайского государства, жестоко пресекал все центробежные тенденции. Озабоченный усилением

конфуцианства, он повелел сжечь все книги в государстве, кроме дворцовых хроник, книг по медицине, гаданию и сельскому хозяйству, а также уничтожить 460 «специалистов». Остальные учёные были сосланы на строительство Великой Китайской стены.

Со всей страны в столицу на повозках свозились книги, огромная гора связок бамбуковых планок высилась возле дворца. За хранение книг полагалась смертная казнь. Закон, запрещающий частное использование книг, был аннулирован только в 191 до н. э.

Сейчас историки подвергают сомнению масштаб катастрофы, но сведения по истории астрономии до II в до н.э. мы можем черпать лишь из цитированных фрагментов более поздних трактатов, упоминания астрономических явлений в дворцовых хрониках, надписей и изображений солярных знаков на бронзовых ритуальных сосудах, гадательных костях (черепаховых панцирях) и немногих артефактов.

Нередко в литературе встречается презентистское толкование древних мифологических и астрономических символов с целью доказать наличие развитых научных представлений в древнем Китае. Историография китайской астрономии требует критического отношения.

4. Китайские источники. Канон Яо

Предполагается, что древние китайские знания по астрономии (астрологии) и другим наукам восходят к Канону Яо (Яо Дянь, трад. 2353 – 2234 до н. э., XXIV в. до н.э.). Этот канон изложен в первой главе Пятикнижия – конфуцианского сборника Шу-цзин (V в. до н. э.). В 213 г. до н.э. книга была утрачена, подлинность восстановленных списков вызывает споры историков.

В каноне описаны великие деяния императора Яо, в том числе его приказание братьям Си и Хэ (иногда транскрибируется как Хе и Хо. Это не личные имена, они означают социальные роли - «План» и «Чертеж». Имена астрономов периода Яо и периода Чжун-кана повторяются): «Затем [он] повелел Си и Хэ почтительно следовать [законам] Великого Неба, исчислять [движение] солнца, луны, звезд и созвездий и со старанием сообщать народу о сроках [работ]. [Он] повелел Си-чжуну поселиться в Юйи, [в месте], называемом Янгу, [чтобы] оттуда с почтением сообщать о появлении солнца и регулировать ход весенних работ, а в день весеннего равноденствия по звезде Няо определить второй месяц весны [1. Т. 1, с. 31].

В Каноне Яо обосновывается необходимость знания государем законов природы, смены сезонов для верного управления сельскохозяйственными работами, что обеспечивало благоденствие подданных. Напротив, отсутствие гармонии земли и неба, выраженное в непредвиденных природных событиях, означало потерю государем «добродетели», «небесного доверия», и оправдывало смену династии. Китайские историки ведут начало астрономии как науки от времени правления Яо.

В хрониках сохранились записи о датах солнечных затмений с 22.X.2137 г. до н. э.

5. Сыма Цянь. Исторические записки (Ши цзи)

Сыма Цянь (145 или ок. 135 г. до н. э., умер ок. 86 г. до н. э.) был потомственным историографом династии Хань, писателем и астрономом. Судьба его была драматична. Его грандиозный труд «Ши цзи» описывает историю Китая от мифических родоначальников и до современных Сыма Цяню времён. Благодаря положению придворного историографа, Сыма Цянь мог пользоваться императорскими архивами и придворными хрониками.

Его сочинение содержало более полумиллиона иероглифов, оно переведено на русский язык при участии и под редакцией Р.В. Вяткина (1910-1995), и вышло в издательстве «Наука» в девяти томах в 1972–2010. Упомянутые сведения о первых астрономических наблюдениях из Канона Яо цитировались по этому изданию.

В «Исторических записках» Сыма Цяня упоминается также событие, произошедшее, по разным источникам, около 1945 г. до н.э. (В других источниках 2137 г. до н.э.). Там приведены сведения о погрязших в пороке и пьянстве астрономах Си и Хэ, которые не сумели правильно предсказать затмение и были казнены.

Чжункан (около 1952 – 1946 гг. до н.э.) – правитель Древнего Китая, четвёртый император династии Ся. Правил 1952-1946 до н.э. В 5-й год правления Чжункана, в день Гэнъу (6 декабря) произошло солнечное затмение, наблюдаемое в столице. Наступила паника. Придворный астролог из рода Си и заведующий календарём из рода Хэ предавались пьянству. «Во времена императора Чжун-кана [потомки астрологов] Си и Хэ (Другая транскрипция их имён Хо и Хи), погрязнув в пьянстве и разврате, забросили [определение] сезонов и перепутали [счет] дням. Инь [военачальник] отправился покарать их, и тогда был написан “Поход Иня”» [1. Т.I., гл. 2, II].

6. Трактат о гномоне

«Гномон Чжоу», «Чжоу би суань цзин» [2, 3], сохранившийся в поздних комментариях, – древний астрономический текст. Из-за трудностей древнего языка трактат до сих пор не переведён полностью. Время его написания и имя составителя точно неизвестно. Историки полагают, что он был написан в III в. до н.э. – I в. н.э., хотя содержит и более древние сведения.

Трактат содержит диалоги о математике правителя Чжоу Гуна (XI в. до н.э.) с учёным Шао Гао, и диалоги об астрономии между учёным Чэнь цзы (предположительно VII–VI вв. до н.э.) и его учеником Жун Фаном. Чэнь цзы говорит о главных античных космологических идеях трёх астрономических школ: «Те, кто обсуждает небесную систему, образуют три школы.

Первая известна как школа Чжоу би, вторая – школа Бесконечной Вселенной (Небо пустое и лишено субстанции, оно безмерно высоко и далеко, без границ. Солнце, луна и все звёзды естественно (от рождения) плавают в пустом пространстве. Их скорость зависит от их индивидуальной природы, что показывает, что они не (взаимно) связаны, ибо, если бы они были прикреплены к телу неба, такое поведение не могло быть проявлено [4, с. 162]); а третья – это школа Небесной сферы» [4, с. 158].

Чэнь Цзы рассказывает о своей модели мира (небесная сфера или небо-покрывало), круговороте солнца, определении времени солнцестояния по тени гномона, определению солнечного диаметра и расстояния до солнца. В диалоге правителя Чжоу Гуна с астрономом и математиком Шао Гао описано решение задачи на нахождение гипотенузы для катетов, равных 3 и 4. Эта задача (теорема) в Китае носит название «гоу-гу» (ширина–длина) и позволяет найти «стяжку» (гипотенузу). Там же рассказано о способах определения расстояния до недоступных предметов. Впоследствии «Чжоу би» вошёл в «Десятикнижие» – классический математический сборник.

В эпоху Чунь-цю (Период Весен и Осеней, с 722 по 481 г. до н.э.) была написана рукопись «Вёсны и осени», составителем которой считают Конфуция. Это древнейший китайский текст летописного плана.

Согласно современным подсчётам, из 37 отмеченных в «Чуньцю» солнечных затмений 33 действительно произошли и могли наблюдаться в Китае. Это затмения с 720 по 481 г. до н.э. Рукопись была утрачена при императоре Цинь Шихуанди, но спустя столетие было найдено два её списка, подлинность которых оспаривается.

Самый древний из сохранившихся в рукописи астрономический (астрологический) трактат «У син чжань» («Предсказания по пяти светилам»), датируемый 180–170 гг. до н.э., был обнаружен в 1973 г. в Мавандуйском могильнике (ок. г.Чанша пров. Хунань).

Солярные знаки на керамических сосудах эпохи неолита и на сосудах бронзового века, на наш взгляд, следует принимать во внимание, но они не могут служить доказательством существования развитых астрономических представлений.

Датировка указанных событий и использование их как оснований для утверждения древности происхождения китайской астрономии проблематичны и вызывают споры специалистов. Достоверность источников требуется оценивать с осторожностью.

7. Европейские описания Китая

Первая книга, посвящённая описанию Китая, написана в XIII в. венецианским путешественником Марко Поло (1254–1324), который совершил два путешествия в Китай (1266 и 1275–1291 гг.) и описал их в «Книге о разнообразии мира» («Книга чудес света» (также известна под названиями «Путешествия Марко Поло», «Книга о разнообразии мира», «Книга Марко Поло» (старофр. *Livres des merveilles du monde*) – описание путешествий Марко Поло по Азии и Африке, совершённых в период между 1276 и 1291 годами, которые с его слов на старофранцузском языке записал Рустикелло из Пизы, находившийся вместе с ним в генуэзской тюрьме).

Имеется ещё несколько ранних описаний Китая, сделанных европейскими путешественниками (это описания путешествий монахов-францисканцев Плано Карпини и Вильгельма Рубрука XIII в., но они были опубликованы значительно позже книги Марко Поло).

8. XVII–XVIII вв., иезуитская миссия в Пекине

Источником важного потока информации о китайской культуре и науке были письма иезуитской миссии, пребывавшей в Китае 190 лет, с 1583 г. и до запрещения ордена в 1773 г. Иезуитам принадлежала подавляющая часть публикаций о Поднебесной империи.

Основателем иезуитской миссии в Китае считают Маттео Риччи (1552–1610), миссионера, астронома, картографа и переводчика. Он завоевал доверие китайских властей быстрым овладением китайским литературным языком (благодаря иезуитской мнемотехнике), перевёл на китайский язык «Начала» Евклида (1608), и другие европейские книги, познакомил китайцев с западной географией, математикой и астрономией, приборами и часами, составил руководство по арифметике. Он же был первым автором словарей.

С 1583 миссия находилась в Макао. Через несколько лет миссионерам, главным образом благодаря заслугам Маттео Риччи, удалось обосноваться в Пекине. Приехавшие впоследствии миссионеры, отвечая интересам китайских властей, были математиками, астрономами, географами. За 190 лет существования миссии в Пекине в ней работали 36 известных астрономов.

Немецкий иезуит о. Иоанн Адам Шалль (1592–1666) в 1634 г. произвёл пересмотр календаря. Он изложил на китайском языке европейские знания по математике и астрономии, за что в 1644 году, после смерти Джакомо Ро (Giacomo Rho, 1593–1638), был назначен членом астрономического трибунала в Пекине (в некоторых источниках указано, что Шалль стал председателем трибунала, что опровергает Скачков [9, с. 3]).

О. Вербист (1623–1688) исправил искажения в календаре, вызванные невежеством придворных астрономов, за что император велел передать трибунал в ведение иезуитов. Сам Вербист прожил в Китае 29 лет, был назначен членом астрономического трибунала (в некоторых источниках указано, что Вербист был председателем трибунала, что опровергает Скачков [9, с. 3]), и в этой должности предоставил обсерватории астрономические инструменты. Самым важным для китайцев был его свод астрономических таблиц «Европейская астрономия», 1668.

В XIX столетии лазарист о. Серра был членом трибунала до 1837 года. Ж. Алени (1582–1649) написал по-китайски «Принципы геометрии и Мир за пределами Китая», 1600, Себастьян де Урсис (1575–1620) – «Планисфера» (изображение небесной сферы на плоскости), «Гидравлика», Эммануэль Диаз (1574–1659) – «Краткое изложение астрономии» (Трактат о сфере), Иоанн Теренций (1576–1630) – «Построение сферы и затмений» (1620–1630), «Иллюстрации и пояснения к удивительным машинам», Джакомо Ро – «Таблица пяти планет, теория Луны и Солнца, введение в астрономию» (1625–1638).

О. Антуан Гобиль (1689–1759) прожил в Китае 36 лет. Он приехал в Китай в 1722 г., преподавал латынь в китайском министерстве иностранных дел, был дипломатом и начальником французской коллегии ордена иезуитов в Пекине. Руководил работой обсерватории, построенной на территории французской миссии в 1754 г. Состоял в переписке учёными Европы и России, в частности, с Ж. Н. Делилем, П.-С. Лапласом. За достижения в изучении астрономии и ботаники, а также за продвижение знаний о китайской науке и культуре в Европе был избран членом Парижской АН, Лондонского королевского общества, иностранным почётным членом С.-Петербургской АН (1739). Он перевёл с китайского и маньчжурского языков знаменитые трактаты «И цзин», «Ли цзи» и «Шу цзин», а также математический трактат «Чжоу би» (Трактат о гномоне), разработал проект картографирования территории Китая.

В Европе (в т.ч. в Санкт-Петербурге, в «*Novi commentarii academiae petropolitanae*», 1754) регулярно публиковались отчёты Пекинской миссии, отчёты Гобиля (342 письма) о высоком состоянии китайской астрономии, карты Китая. Его читателями были Лаплас, Эйлер, Кассини. Его очерки китайской астрономии были изданы в Париже [5].

9. 1796 г., П.-С. Лаплас

В 1796 г. Лаплас в своей книге «Изложение системы мира» даёт очерк истории астрономии (том V, 1823–1825 гг.). Ссылаясь на Гобиля, он излагает историю китайской астрономии как древнейшей, обладавшей высокими техниками измерений и вычислений:

«Из всех народов китайцы в своих летописях приводят наиболее древние наблюдения, пригодные для использования в астрономии. Первые затмения, о которых они упоминают, не могут служить для хронологии из-за неясности изложения. Но эти затмения показывают, что во времена императора Яо, более 2000 лет до нашей эры, астрономия развивалась в Китае как основа для церемоний.

Календарь и оповещение о затмениях были важными предметами, ради которых была организована математическая коллегия. Со времени её организации наблюдали полуденные тени гномона во время солнцестояний и прохождение звёзд через меридиан. Время измеряли с помощью клепсидр – водяных часов, и во время затмений определяли положение Луны относительно звёзд, что давало звёздные положения Солнца и солнцестояний. Были построены даже инструменты для измерения угловых расстояний между светилами.

Объединив все эти методы, китайцы узнали, что солнечный год приблизительно на четверть суток превышает 365 суток. Они установили начало года в день зимнего солнцестояния. Их гражданский год был лунным, и чтобы привести его к солнечному, они использовали период в 19 солнечных лет, соответствующий 235 лунным месяцам, период, в точности равный тому, который через шестнадцать веков Калипп ввёл в греческий календарь.

Экватор они разделили на 12 неподвижных знаков и 28 созвездий, в которых они с большой тщательностью определяли положения солнцестояний. Деление окружности в Китае всегда было подчинено длине года, так что Солнце проходило один градус в сутки.

Но подразделения градуса, суток, веса и всех линейных мер всегда были десятичными. И этот пример, данный нам, по меньшей мере, за четыре тысячи лет народом, наиболее многочисленным на Земле, доказывает, что это деление, которое к тому же даёт столько преимуществ,

может стать исключительно популярным» [6, с. 259–260].

«Иезуит Гобиль, лучше всех миссионеров знакомый с китайской астрономией, опубликовал отдельно её историю. Он снова изложил древнюю часть этой истории в XXVI томе “Назидательных писем”, а я опубликовал в “*Connaissance des Temps*” за 1809 г. драгоценную рукопись этого иезуита о солнцестояниях и меридианных тенях гномона, наблюденных в Китае» [6, с. 319].

Лаплас замечает, однако, что «Китайские методы вычисления затмений хуже арабских и персидских. Несмотря на частые встречи с ними, китайцы не использовали знаний, приобретенных этими народами. Они распространяли даже на астрономию свою постоянную приверженность древним обычаям».

Лаплас пишет: «Чжоу Гун и его астрономы сделали большое число наблюдений, из которых три, к счастью, дошли до нас и ценны своей глубокой древностью. Два из них – это полуденные длины тени гномона, наблюденные с большой тщательностью во время зимнего и летнего солнцестояния в городе Лояне. Они дают для наклонности эклиптики в ту древнюю эпоху величину, согласную с теорией всемирного тяготения. Третье наблюдение относится к положению точки зимнего солнцестояния на небе в ту же эпоху. Оно также согласуется с теорией в пределах возможностей, даваемых способами, применявшимися тогда для нахождения столь трудно определяемого элемента. Это замечательное согласие не позволяет сомневаться в достоверности этих наблюдений. Гобиль, один из наиболее знающих и рассудительных иезуитских миссионеров, посланных в эту империю, познакомил нас с рядом наблюдений такого рода, продолжавшихся с 1100 г. до н.э. по 1280 г. н.э.» [6, с. 279].

10. XVIII–XIX вв., критика иезуитов

После изгнания иезуитов в 1773 г. астрономия в Китае пришла в упадок, знания небесной механики не сохранились в активе китайских астрономов. Правда, иезуиты вычислили на 200 лет вперёд таблицы солнечных и лунных затмений, а также таблицы лунных годов.

Всё написанное миссионерами о состоянии точных наук в Китае, в 1776–1814 издано в Париже в 16 томах [7]. Благодаря этим мемуарам в Европе поднялась волна интереса к китайской культуре и науке, начались регулярные исследования.

Наряду с этим росло критическое отношение к оценкам иезуитов. Уже Ж. Э. Монтюкла в 1758 г. отмечал ряд неточностей в европейском изложении китайской истории математики и астрономии. Но труды Гобилья ценятся и переиздаются. В них описана история китайской астрономии с 2677 г. до н.э. по 206 г. н.э.

Ж. Седийо критиковал Гобилья за отсутствие критической обработки исторического материала, например в том, что Гобиль легко верил, что знания XI в. до н.э. могли совпадать с результатами китайских учёных II в. н.э.. Помимо этого Седийо указал на следы греческого влияния в период с 206 г. до н.э. по 718 г. н.э., и арабского влияния в период с 775 по 1460 гг.

Астрономы Ж. Дегинь (De Guignes, 1721–1800) и Ж.-Б. Деламбр (Delambre, 1749–1822), анализируя документальные данные, пришли к выводу, что у китайцев не было астрономии даже в XVIII в.

Жан-Батист Био (Biot; 1774–1862) в своём исследовании по истории китайской астрономии писал о ней: «Она неизменно прикреплена к той самой практике наблюдения и к тем самым простым формам, которые она приняла при своём рождении, и рассматривает всегда движения небесных тел с точки зрения их полезности для регулирования гражданских дел и для доставления астрологических предсказаний, не проявляя никогда ни потребности, ни даже мысли сделать из неё объект умозрительного изучения» (Biot, «*Recherches sur l'ancienne astronomie chinoise*», Париж, 1840).

11. XIX в. Протестантская миссия в Китае

В XIX веке в Китае действовали протестантская и православные миссии, уделявшие немало внимания изучению китайской культуры. Среди протестантских исследователей назовём имена таких синологов, как Дж. Легг (Legge, 1815–1897) и А. Уайли (Wylie, 1815–1887). Они внесли значительный вклад в синологию.

12. Русская духовная миссия в Китае. Обсерватория

Русские жили в Пекине с XVII века. Первым православным священником в Китае с 1685 г. был о. Максим Толстоухов.

По указу Петра I была создана духовная миссия, действовавшая с 1716 г. Помимо основного назначения – поддержания веры среди православных, миссия заменяла светское дипломатическое представительство России. Члены миссии изучали китайский и маньчжурский языки, историю, культуру и религию Китая.

В число светских членов миссии назначались молодые люди из числа студентов высших учебных заведений и Духовной академии. Императорская Санкт-Петербургская Академия наук также активно использовала миссию для проведения собственных научных программ. Китайские власти относились к ней лояльно. Студенты изучали медицину, математику, литературу и философию, систему Конфуция, историю, географию, статистику и юриспруденцию китайского государства.

Пекинская миссия дала России первых видных учёных-китаистов: И. К. Рассохин, А. Л. Леонтьев, И. Я. Бичурин, О. М. Ковалевский, И. П. Войцеховский, И. И. Захаров, П. И. Кафаров, В. П. Васильев. Их научное наследие составило золотой фонд русского китаеведения. К сожалению, они не интересовались китайской астрономией.

С 1861 г. в Пекине была учреждена Российская дипломатическая миссия. В 1819 г. Пулковская обсерватория передала Китаю книги и астрономические инструменты: рефрактор-телескоп от 3,5 до 5 саженей; телескоп для изучения комет; два английских глобуса: земной и небесный; хронометр карманный английский; 2 или 3 дорожных барометра и термометр; книги по астрономии на английском и французском языках; полное собрание Петербургского месяцеслова за 1809–1819 гг. [8].

13. 1874 г. К. А. Скачков

Во второй половине XIX в. Императорская Академия наук добилась строительства в Пекине обсерватории, первым директором которой был астроном Константин Андрианович Скачков (1821–1883), ученик астрономов А. Н. Савича и В. Я. Струве. После 25-летнего пребывания в Китае вышел в отставку и вернулся в Петербург.

В Китае он собрал библиотеку китайских книг, в том числе по астрономии, состоящую из одиннадцати тысяч томов (вошли в собрание Румянцевского музея), и написал несколько сочинений по истории китайской астрономии. Несколько редких и ценных сочинений по китайской астрономии он получил от дяди китайского императора, интересовавшегося занятиями Скачкова в обсерватории при духовной миссии. Этот дядя китайского императора был председателем астрономического трибунала, но, как выяснил Скачков, не знал даже арифметики. В фонде Скачкова в Рукописном отделе РГБ (ф. 273) хранятся два рукописных тома «Материалов для изучения китайской астрономии» (615 листов).

Обратимся к его работе «Судьба астрономии в Китае» [9]. Хорошо знакомый с древними китайскими трактатами, с историей астрономии, изучив рукописи, оставленные иезуитами, знакомый с уровнем китайских астрономов, Скачков резко критикует образ древней китайской

астрономии, созданный иезуитами, обвиняя их в фальсификации сведений о Китае, начиная с ошибочных карт и заканчивая похвальными словами китайской астрономии.

Скачков пишет, что построенная иезуитами обсерватория стоит невостребованная, китайцы не умеют пользоваться её инструментами; математические и астрономические книги и таблицы, оставленные иезуитами, лежат балластом на складе, в книжных лавках они предлагаются за бесценок, но не находят покупателей. «Чем более я читал, чем более вдавался в глубину китайского языка, в наследования китайской астрономии, тем более и более укреплялся в убеждении, что у китайцев нельзя найти ничего поучительного и нового в области известного вам в астрономии, как науки, и также убеждался, что, несмотря на рекламы иезуитов, весь путь, пройденный в Китае астрономией с её древнейших времён, нисколько не подтверждает репутации китайских астрономов, а напротив, скорее свидетельствует о бездарности их; но с другой стороны, этот же обзор китайской астрономии, с её древнейших времён, представляет интересный вклад в историю науки. В продолжение всего XIX столетия не было между синологами ни одного серьёзного голоса в литературе о китайской астрономии». [9, с. 11].

Скачков обращает внимание на то, что в древних рукописях упоминаются пришедшие издалека учителя и наставники, сразу давшие готовое знание. Например, в отношении календаря Скачков пишет: «послали отыскивать знатоков небесной науки. Такие знатоки были найдены, и благодаря им у китайцев был введён календарь по системе музыки сфер. В подражание звукам, слышимым в природе, сперва были введены колокола, а потом их заменили бамбуковыми дудками. Смотря по большей или меньшей длине дудок, издаваемые ими звуки определяли характер четырёх времён года; а переумножением взаимных отношений в длине этих дудок определялись величины, выраженные в единицах дня, для периодов месячного движения луны, года и проч.» [9, с. 14–15]. Скачков полагает, что эти извне пришедший учителя были иностранцами, прежде всего, вавилонянами, затем греками, индийцами и арабами.

Скачков обращает внимание на сходство древних китайских сказаний о небе с мифами других народов, а также на утилитарные потребности астрономии в Китае на всём протяжении его истории – это гадательные практики, в т. ч. умение предсказывать затмения, и нужда в календаре. Он установил, что за полторы тысячи лет в Китае зафиксировано 220 имён астрономов (астрологов), а сочинений, посвящённых науке о небе, за это время написано около девяти сот.

Скачков имеет в виду упоминание их названий, сохранившиеся фрагменты, цитированные в других трактатах. В библиотеке императорского дворца Скачков познакомился с 74 сочинениями о небе, а в собрание Румянцевского музея в числе других он передал 76 китайских книг по астрономии. Анализируя эти сочинения, Скачков заключает, что достижения китайской астрономии выражаются «в более или менее точных определениях годового движения солнца и луны и её аномалий, а из числа планет определённых Юпитера и Сатурна, в определении угла наклона эклиптики, в определении периодов возвращения затмений, в наблюдениях и в определении предвещения весеннего равноденствия, и т.п. А астрологические требования, издавна получившие почётное место в их календарях, привели китайцев к изучению звёздного неба, с определениями положения звёзд; это же привело к географическому определению широты и долготы многих пунктов в Китае».

Причиной отсутствия теоретической астрономии Скачков называет то, что «в китайскую астрономическую литературу вмешиваются теоретики-философы, которые, без всякого предварительного знания даже первых оснований науки о небе, и только опираясь на тёмные строки из древних мудрецов, благодаря подобранным софизмам, предписывают законы небесному движению и явлениям, сбивая тем с толку действительных исследователей».

В то же время Скачков отдаёт дань уважения китайским астрономам, сохранившим записи об астрономических явлениях со второго столетия до н.э. «Можно видеть, что китайская

астрономия со II века до Р.Х. и последующая за ней напоминает собою греческую астрономию; а потом с IX–XVII столетия китайская астрономия сходна, и иногда даже тождественна с астрономией индийцев и арабов» [9, с. 25].

Выводы, которые делает Скачков, таковы:

«1) Китайцы не сами создали свою астрономию, а заимствовали её у иноземцев.

2) В дальнейшей обработке своей астрономии китайцы пользовались руководствами греков, индийцев, арабов и европейцев.

3) По настоящее время знания китайцев в астрономии стоят ниже, чем они стояли в Европе до времён Тихо де Браге.

4) При слепой, младенческой привязанности китайцев к своим классическим творениям, тормозящей в них всякий шаг к прогрессу, при замечательном равнодушии ко всему, что делается вне их страны, и при неспособности их к изучению высшей математики, они весьма не скоро вникнут в наши астрономические знания.

И, наконец, 5) изучение в изобилии сохранившихся в китайской литературе, со времён глубокой древности, памятников астрономической литературы может представить весьма солидный вклад в науку» [9, с. 31].

14. 1920 г., Г. Н. Попов

В 1920 г. вышла книга Георгия Николаевича Попова (1878–1930) «История математики» [10], в которой он критически анализирует европейскую историко-математическую литературу, в том числе посвящённую истории китайской астрономии.

Он выделяет труд А. Уайли 1852 г. (Wylie) «A. Wylie “Jottings on the Science of the Chinese” (Размышления о китайской науке), единственный по полноте и надёжности сведений об успехах китайцев в математике. Выяснилось, что они задолго до нашей эры владели арифметикой и геометрией, умели решать уравнения, и, судя по дошедшим до нас трактатам, создали своеобразные приёмы и проявили уже в III в. по Р.Х. необычайное искусство в решении сложных вопросов неопределённого анализа. На простейшие задачи они могли неизбежно натолкнуться при затруднениях, сопряжённых с составлением календаря, например, на определение числа, которое при делении на данные числа, давало бы данные остатки. <...>. Вопрос о методах китайских математиков, применявшихся ими в неопределённом анализе, вызвал ряд исследований. Аналогичные задачи решались, как известно, индусами, но их приёмы отличаются от китайских. Китайцы в VIII веке нашей эры решали вопросы, которыми в XIX веке занимались Гаусс и Дирихле». [10, с. 233–234].

Попов указывает на внешние влияния других культур: с III в. до н.э. по I в. н.э. – буддизма, с VII в. – мусульманства, несторианства, манихейства, с XIII в. – католицизма. «Последствия такого синтеза, как нам представляется вероятным, имели роковое значение для китайской науки. В общем, мало склонные к методической и систематической разработке идей в области точного знания, китайцы просто были подавлены массой нахлынувших новых идей. Полагаем, что и более сильная умственно нация оказалась бы в затруднительном положении.» [10, с. 236]. Его весьма полный историографический обзор заканчивается словами: «Мы видели, что значение китайской астрономии, как науки, новейшие исследования свели к нулю» [10, с. 233].

15. 1934 г. А. В. Маракуев, «У истоков древней астрономии»

Советский востоковед А. В. Маракуев первым отметил появление двух противоположных тенденций во взглядах на историю китайской астрономии: «Для иллюстрации диаметрально противоположных точек зрения на древнюю астрономию Китая, я могу сослаться, с одной

стороны, на автора статьи Астрономия в 14-м издании энциклопедии Британника (1925 г.), поддерживающего гипотезу о седой древности китайской астрономии. В своих высказываниях он опирается, правда с оговорками, на много раз уже разбиравшиеся и до сих пор стоящие под подозрением примеры: солнечное затмение, которое, якобы, китайские придворные астрономы должны были предсказать (но не предсказали), вычислениями XXII до н. э. и точное определение наклона эклиптики, для которого китайцами в XII в. до н. э. была получена величина в 23 градуса 54 минуты 3 секунды. Величина эта была приведена в Шу-цзине, почти точно совпадая с вычислениями Лапласа.

С другой стороны, известный японский синолог Идзима Тадао (Iijima, Tadao, 1875–1954) неоднократно утверждал в своих работах, что начало китайской астрономии восходит, самое большое, к IV в. до н. э. И что возникла она, по-видимому, под влиянием греческой культуры, занесенной в Китай в эпоху, непосредственно следовавшую за походом Александра Македонского на Индию (330 г. до н. э.)» [11]. Маракуев в своём докладе указывает на значительное влияние межкультурных связей в развитии астрономических знаний в Китае, даёт периодизацию истории китайской астрономии, проводит параллели между китайскими астрономическими знаниями и таковыми же в других культурах. Маракуев отмечает, что до 104 г. до н.э., когда был принят календарь Тай-чу-ли, для цикла затмений был принят период в 135 месяцев, в то время как на западе был известен цикл в 223 месяца (Халдейский сарос). Это говорит в пользу независимости китайской астрономии от западного влияния. Маракуев рассматривает также спор историков о происхождении широко распространённой в древности системы 28 лунных домов (звёздных групп). Существует два мнения по поводу места её возникновения: Вавилон и Китай. Как заключает Маракуев, «Пока я лично присоединяюсь к мнению Идзимы о более вероятном западном происхождении дальневосточной астрономии; правда, до II в. до н. э. мы не видим непосредственных следов западного влияния, но не исключена возможность привнесений, не оставивших письменных следов. Но это не значит, что вопрос решен, и мы не вернемся к его пересмотру, накопив больше материала» [11].

16. 1959 г., Дж. Нидэм

Британский учёный Ноэль Джозеф Нидэм (Нидхэм, Needham, 1900-1995), биохимик и эмбриолог, синолог, известен исследованиями традиционной китайской цивилизации и её науки. С 1942 г. он работал в Китае, где возглавил Sino-British Science Co-operation Office. В 1945 г. вышел первый труд Нидэма на тему о древней китайской науке, которую характеризовал как «протонауку». В 1954 г. было начато издание серии монографий “Science and Civilisation in China” (закончена в 1990). В разные годы он оценивал уровень китайской науки до XVII в. то выше, то ниже уровня европейской науки. «Проблемой Нидэма» называется поиск причин отставания китайской науки от европейской в Новое время. Историки часто критиковали его за чрезмерное преувеличение древнекитайских научных достижений. Например, Нидэм полагал, что торкветум (ставший известным китайцам от арабов), а именно, его усовершенствованная китайским астрономом Го Шоу-цзином (XIII в. н.э.) экваториальная модель, была предвестником всех экваториальных установок современных телескопов. Эта китайская модель, по мнению Нидэма, вновь через арабов стала известна фламандскому математику и астроному Гемме Фризиусу в 1534 г., от него –Тихо Браге, а затем Иоганну Кеплеру. Благодаря этому европейская система координат, бывшая эклиптической, стала экваториальной.

По мнению Нидэма, «вклад Китая в развитие астрономических наук был весьма примечателен, а именно: (а) разработка полярной и экваториальной системы, поразительно отличающейся от эллинистических народов, хотя и столь же логичной; (b) ранняя концепция бесконечной Вселенной, со звездами как телами, плавающими в пустом пространстве; (c) развитие количественной позиционной астрономии и звездных каталогов за два столетия до

любой другой цивилизации, с которой сравнимы схожие работы; (d) использование в этих каталогах экваториальных (то есть, по существу, современных) координат и приверженность им на протяжении более двух тысячелетий; (e) разработка астрономических инструментов в неуклонно возрастающей сложности, достигающих высшей точки в изобретении экваториальной подставки (equatorial mounting) в XIII-м веке, в качестве «адаптированного торкетума» ('adapted torquetum', поворотника) или «разрезной» армиллярной сферы; (f) изобретение тактового привода для наблюдательной трубки, предшественника телескопа; и ряда остроумных вспомогательных механических устройств для астрономических приборов; и (g) сохранение в течение более продолжительных периодов, чем любая другая цивилизация, точных записей небесных явлений, таких как затмения, новые кометы, солнечные пятна и т. д. Недостатки китайской астрономии: только те элементы, в которых сильна западная астрономия, а именно греческие геометрические модели движений небесных тел, арабское использование геометрии в стереографических проекциях и физическая астрономия эпохи Возрождения. Не обязательно представлять причины геометрически или механически. В отличие от европейских астрономов китайцы были свободны от навязчивой идеи круга как самой совершенной фигуры, свободны от той одержимости, с которой европейцы избавлялись от Кеплера. Они также не были стеснены средневековыми рамками концепции кристаллических сфер, этой неожиданно жёсткой материализации духа греческой геометрии. Так как в своей основе китайская астрономия, как и вся китайская наука, была эмпирической и наблюдательной, она избежала как излишеств и заблуждений, так и триумфов западного теоретизирования» [12, с. 458]. Нидэм отстаивает древность и самобытность китайской астрономии.

17. Две работы Н. Сивина, 1969 г. и 1995 г.

Известный американский синолог, автор работ по истории науки, философии, религии, медицины и техники в Китае, Натан Сивин (р. 1931) немало сотрудничал с Нидэмом. Здесь мы рассмотрим две его работы.

1969 г. *«Космос и вычисления в ранней китайской математической астрономии»* [13]. Статья посвящена древнекитайским методам вычисления затмений. Как утверждает автор, китайская астрономия представляла собой набор эмпирических методов, обусловленных философским предположением о простом циклическом характере небесного движения. Астрономы пользовались опосредованными методами предсказаний лунных затмений и планетарных движений, согласованную картину которых не могли дать их незрелые постулаты. Даже когда достижения математики давали возможности повышения точности, методы не могли быть ассимилированы в формальный характер китайской астрономии. После первых веков н.э. астрономы стали использовать новые допущения, но предпочитали те, которые безразличны к космологии, а не те, которые согласуются со сложностью явлений. Сивин рассматривает три системы предсказания затмений, доступных из ранних трактатов: Календарный комплекс системы тройной гармонии; Система четверти дня; Система небесного проявления. Он приводит реконструкцию алгоритмов всех трёх систем, сравнивая результаты вычислений. Например, алгоритм прогнозирования затмений системы Тройного согласия таков: «Возьми месяцы затмения, прошедшие в текущем Месяце Совпадения (Coincidence Month), умножь на 23 и раздели на 135. Добавляйте к остатку по 23, каждый раз считая один месяц, до достижения 135. Когда достигнутое количество полученных месяцев подсчитывается исключительно из Астрономического первого месяца (Astronomical First Month), то результатом будет месяц, в котором происходит затмение. Время затмения определяется часом оппозиции в полнолуние [вычисленным обычно]» [13, с. 69].

1995 г. Н. Сивин. *Коперник в Китае или, о тщете благих намерений*. Это IV глава из книги Натана Сивина «Наука в Древнем Китае: Исследования и размышления» [14]. Автор

подробно рассмотрел работы иезуитских астрономов за весь период существования иезуитской миссии. Специфика деятельности католических астрономов в Китае XVII–XVIII вв. заключалась в том, что гелиоцентрическая система, изложенная в книге Коперника «*De Revolutionibus Orbium Coelestium*» (О вращении небесных сфер), находилась в римском индексе запрещённых книг с 1616 по 1835 г. Иезуитские миссионеры, представлявшие в Китае европейские научные идеи, не могли обсуждать гелиоцентрическую концепцию. Они пропагандировали систему Птолемея с поправками на гелиоцентризм Коперника, что представляло эклектическую концепцию, полную противоречий. Когда в 1760 г. иезуитам было позволено без ограничений и правильно изложить систему Коперника, китайские учёные отвергли гелиоцентрическую систему, поскольку она противоречила более ранним утверждениям о Копернике. Иезуитам было также запрещено обсуждать последствия научной революции, в частности, центральную идею Галилея о том, что единственной прочной основой для познания природы была собственно работа учёных. Поэтому китайцы не могли осмыслить ключевые моменты европейской астрономии.

18. 1980 г. Э. И. Берёзкина «Математика Древнего Китая» и другие работы

Эльвира Ивановна Берёзкина (р. 1931 г.) перевела на русский язык «Математику в девяти книгах» [15] – древнекитайский трактат по математике. Это был первый полный перевод на европейский язык. Ей принадлежат исследования по древнекитайской математике, вошедшие в её книгу [16]. Как она пишет во введении, «математика в Китае развивалась с глубокой древности более или менее самостоятельно и достигла своего наибольшего развития к XIV в. н. э. Далее в Китай проникает западная математика, принесенная в основном европейскими миссионерами, это уже другая эпоха в истории науки Китая. Древняя традиция в математике была таким образом прервана и утеряна. Многие открытия, сделанные раньше, чем в Европе, были забыты, и их вновь повторили западные ученые. Китайские математики, обрабатывая древние и средневековые тексты, сами обнаруживали неожиданно для себя удивительные результаты, полученные их предками. В этой книге основное внимание уделено математике древнего Китая в период со II в. до н. э. по VII в. н. э. Менее подробно рассмотрены труды китайских математиков XIII–XIV вв.». [16, с. 3].

19. 1996 г. Чен-Йи Чен, профессор Калифорнийского университета. «Пересмотр ранних китайских работ по естественным наукам: физика движения, акустика, астрономия и научная мысль»

Его исследование [4] содержит оригинальные китайские тексты с английским переводом и реконструкцию древних канонов, а также обзор последних археологических находок. Автор рассматривает трактат «Чжоу би» и другие древние трактаты и артефакты. Автор реконструирует древние каноны с учётом недавних археологических находок. Он рассматривает надписи на ракушках, панцире черепахи, на гадательных костях, солярные изображения энеолита как доказательство астрономических знаний в Китае третьего-второго тысячелетий до н.э. Канон Яо, по мнению автора, содержит древний китайский календарь и планетарную основу календарной науки. К десятому веку до н.э. в Китае была разработана систематическая процедура интеркаляции, берущая начало, по мнению Чен-Йи Чена, из канона Яо. Система 28 лунных стоянок (домов), по мнению Чен-Йи Чена, подтверждается надписями на гадательных костях

энеолитической эпохи, служит основой позиционной астрономии и предвосхищает древнеави-
лонское деление эклиптики на 28 частей, а также показывает отсутствие влияния вавилонской
планисферы на китайскую астрономию. Чен-Йи Чен находит подтверждение этому и в «Чжоу
Би»: «установи 28 лунных стоянок для детального изложения ступеней небесного цикла». [4,
с. 120]. Чен-Йи Чен рассматривает диалог правителя Чжоу Гуна с астрономом и математиком
Шао Гао, в котором описано решение задачи на нахождение гипотенузы при длинах катетов 3
и 4. На этом основании Чен-Йи Чен утверждает, что Шао Гао получено общее доказательство
теоремы Пифагора («гоу-гу»). По мнению автора, формула «гоу-гу» (ширина-длина), позво-
ляющая вычислить длину стяжки (гипотенузы) - это «открытый математический оператор
(утверждение), в котором переменные представлены техническими терминами, применимыми
в общих случаях, и это является общим доказательством теоремы Пифагора» [4, с. 139]. Этот
вывод подвергают сомнению многие синологи. Центральным вопросом дискуссии был аргу-
мент, что числа, полученные в «Чжоу Би», были фиктивными, основанными не на измерениях,
а на нумерологии.

Чен Йи-Чен рассматривает также археологические находки неолитического периода (куль-
туры Давэнькоу, Луншань, Лянчжу и Цицзя), – надписи и изображения на керамических
сосудах – солярные знаки, пиктограммы топора (секиры) и мотыги. Они, по его мнению, яв-
ляются церемониальными и служат подтверждением приказа императора Яо «Яо повелел Си
и Хэ почтить великие божественные небеса, очертить закономерности солнца, луны, звёзд и
созвездий и почтительно объяснить людям сезоны для соблюдения ритуалов» [4, 174]. Чен
приводит также много других аргументов в пользу того, что китайская астрономия старше
ави-
лонской.

Известный английский синолог Кристофер Куллен, автор исследования по трактата «Чжоу
Би» [3], совершенно справедливо критикует Чен-Йи Чена за презентистский подход, привне-
сение понятий современной науки в древнекитайские тексты (например, в толкование текстов
V-I веков до н.э., в которых Чен-Йи Чен находит не только релятивистскую механику, но и
Первый закон Ньютона, преобразование Галилея и проч.) Куллен сравнивает работу Чена с
ранними работами Нидэма, использовавшего современную науку как меру древнекитайских
понятий. Никто из древнекитайских учёных, говорит Куллен, не мог понимать текст «Чжоу
Би» в том смысле, в котором его понимает Чен-Йи Чен» [17].

20. 2009 г. Духовная культура Китая: энциклопедия в 5 томах

Недавно вышла прекрасная энциклопедия духовной культуры Китая, пятый том которой
[18] содержит статьи Владимира Евстегнеевича Еремеева (1953–2011) «Математика», «Астро-
номия», «Календарь» и мн. др. с широким обзором истории достижений китайской науки и
анализом её взаимодействия с другими цивилизациями. На наш взгляд, автору удалось избе-
жать склонения к обоим полярным точкам зрения на происхождение китайской астрономии,
в его статьях исторические сведения изложены объективно.

21. Заключение

Подводя итоги нашему обзору, выделим основные трудности историографии древнекитай-
ской астрономии: часто сомнительная датировка первоисточников, нередкая интерпретация
древних моделей в терминах современной науки, недостаточная изученность древних меж-
культурных связей и влияний (при поступлении на службу иностранец получал китайское
имя). Сложность имеет также транскрибирование китайских имён и названий в различных
европейских системах. Значительную трудность представляет отделение истории самой древ-
некитайской астрономии от истории астрологии, и её подчинённая роль в государственной

идеологии. Перечисленные проблемы требуют взвешенного и осторожного отношения к оценкам.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сыма Цянь. Исторические записки. Ши цзи. В 9 томах / Пер. с кит., вступ. ст., коммент. и прил. Р.В. Вяткина. М.: Наука, 1972–2010.
2. Яо Фан. “Чжоу би суань цзин” с комментарием Чжао Цзюньцина // Вопросы истории естествознания и техники. 1995. № 2. С. 129–131.
3. Cullen Ch. Astronomy and Mathematics in Ancient China: The 'Zhou Bi Suan Jing'. Cambridge University Press, 2007.
4. Cheng-Yih Chen. Early Chinese Work In Natural Science: A Re-Examination of the Physics of Motion, Acoustics, Astronomy and Scientific Thoughts. Hong Kong: Honk Kong University Press. 1996.
5. Gaubil A. Observations Mathématiques, Astronomiques, Géographiques, Chronologiques, Et Physiques, Tirées Des Anciens Livres Chinois, Ou Faites Nouvellement Aux. Compagnie De Jesus. Vol. 1. Souciet. Paris, 1729–1732.
6. Лаплас П.-С. Изложение системы мира. Перевод В. М. Васильева. Л.: Наука. Ленинградское отделение. 1982. Серия «Классики науки».
7. Mémoires, concernant l'histoire, les sciences, les arts, les mœurs, les usages etc de Chinois, par les Missionnaires de Pekin. In 16 vol. Gey: Gide. Paris, 1776–1814. DOI: 10.3931/e-rara-28735.
8. Феклова Т. Ю., Цзючэнь Чжан. К истории изучения Китая в XIX веке: естественно-научный аспект сотрудничества Императорской Санкт-Петербургской Академии наук и Российской православной миссии в Пекине // Учёные записки Петрозаводского государственного университета. 2017. №1 (162). С. 27–36. Электронный ресурс: <https://cyberleninka.ru/article/v/k-istorii-izucheniya-kitaya-v-xix-veke-estestvenno-nauchnyy-aspekt-sotrudnichestva-imperatorskoy-sankt-peterburgskoy-akademii-nauk-i> Дата обращения 08.01.2019.
9. Скачков К. А. Судьба астрономии в Китае // Журнал министерства народного просвещения. СПб, 1874. Май, с. 1–31 (раздельная пагинация). Электронный ресурс: <https://www.runivers.ru/philosophy/lib/book7643/420634/> Дата обращения 08.01.2019.
10. Попов Г. Н. История математики. Вып. I. М.: Типо-лит. Московского картоиздательского отдела Корп. Воен. Топогр., 1920.
11. Маракуев А. В. У истоков древней астрономии Дальнего Востока. Доклад, прочитанный на математической конференции в ДВГУ, 2 апреля 1934 года. Электронный ресурс: <http://astrogalaxy.ru/456.html> Дата обращения 08.01.2019.
12. Needham J. Science and Civilisation in China. Cambridge University Press, 1959. Vol. III.
13. Sivin N. Cosmos and Computation in Early Chinese Mathematical Astronomy // *T'oung Pao*. Vol. 55, Livr. 1/3 (1969), P. 1–73. Published by: Brill. Электронный ресурс: <https://www.jstor.org/stable/4527744> Дата обращения 08.01.2019. Stable URL: <https://www.jstor.org/stable/4527744> DOI: <https://doi.org/10.1163/156853269X00069>

14. Sivin N. Copernicus in China or, Good Intentions Gone Astray // Sivin N. *Science in Ancient China: Researches and Reflections* (Collected Studies Series, Cs506). Variorum Reprints. 1995. First published in *Studia Copernicana* (Colloquia Copernicana, 2; Warsaw. 1973). Part IV. P. 63–122. Электронный ресурс https://www.sas.upenn.edu/~nsivin/from_ccat//cop.pdf Дата обращения 08.01.2019. DOI: https://www.sas.upenn.edu/~nsivin/from_ccat//cop.pdf
15. Математика в девяти книгах / Перевод и примечания Э.И. Березкиной // Историко-математические исследования. 1957. Вып.10. М.: Наука, С. 439–584.
16. Берёзкина Э.И. Математика древнего Китая. М.: Наука, 1980.
17. Cullen Ch. A review on Chen Cheng-Yih “Early Chinese Work In Natural Science” // *Isis*. 1998. Vol. 89. No. 3, Sep. P. 535–536.
DOI: <https://www.journals.uchicago.edu/doi/abs/10.1086/384097>
18. Духовная культура Китая: энциклопедия в 5 томах. Т. V. Наука, техническая и военная мысль, здравоохранение и образование / Ред. М. Л. Титаренко, А. И. Кобзев, В. Е. Еремеев, А. Е. Лукьянов. М.: Восточная литература РАН, 2009.

REFERENCES

1. Sima Qian. 1972–2010. *Records of the Grand Historian (Shiji)*. In 9 vol. Transl. and comments by R.V. Vyatkin. Moscow: Nauka.
2. Yao Fan. 1995. “The ‘Zhou Bi Suan Jing’ with comments of Zhao Junqing” // *Voprosy istorii estestvoznaniya i tekhniki*. 1995, №2. P. 129–131.
3. Cullen Ch. 2007. *Astronomy and Mathematics in Ancient China: The ‘Zhou Bi Suan Jing’*. Cambridge University Press, 2007.
4. Cheng-Yih Chen. 1996. *Early Chinese Work In Natural Science: A Re-Examination of the Physics of Motion, Acoustics, Astronomy and Scientific Thoughts*. Hong Kong: Honk Kong University Press.
5. Gaubil A. 1729–1732. *Observations Mathématiques, Astronomiques, Géographiques, Chronologiques, Et Physiques, Tirées Des Anciens Livres Chinois, Ou Faites Nouvellement Aux Compagnie De Jesus*. Vol. 1. Souciet : Paris.
6. Laplas P.-S. 1982. *Exposition du Système du monde* / Transl. by V.M. Vasiliev / Leningrad : Nauka.
7. *Mémoires, concernant l’histoire, les sciences, les arts, les mœurs, les usages etc de Chinois, par les Missionnaires de Pekin*. 1776–1814. In 16 vol. Gey: Gide. Paris. DOI: 10.3931/e-rara-28735.
8. Feklova T. Yu., Junchen Zhan. 2017. “On the history of the study of China in the XIX century: the natural science aspect of cooperation between the Imperial St. Petersburg Academy of Sciences and the Russian Orthodox mission in Beijing” // *Uchenye zapiski Petrozavodskogo gosudarstvennogo universiteta*. №1 (162) P. 27–36. Available at: <https://cyberleninka.ru/article/v/k-istorii-izucheniya-kitaya-v-xix-veke-estestvenno-nauchnyy-aspekt-sotrudnichestva-imperatorskoy-sankt-peterburgskoy-akademii-nauk-i> (accessed 08.01.2019).
9. Skachkov K. A. 1874. “The fate of astronomy in China” // *Zhurnal ministerstva narodnogo prosveshcheniya*. St.-Petersburg, Maj. P. 1–31 (separate pagination). Available at: <https://www.runivers.ru/philosophy/lib/book7643/420634/> (accessed 08.01.2019).

10. Popov G.N. 1920. *History of Mathematics*. Vyp. I. Moscow: Tipo-lit. Moskovskogo kartoizdatel'skogo otдела Korp. Voen. Topogr., 1920.
11. Marakuev A.V. 1934. "At the root of ancient astronomy of the Far East" // Doklad, pročitannyj na matematicheskoj konferencii v DVGU, 02.04.1934. Available at: <http://astrogalaxy.ru/456.html> (accessed 08.01.2019).
12. Needham J. 1959. *Science and Civilisation in China*. Cambridge University Press, 1959. Vol. III.
13. Sivin N. 1969. "Cosmos and Computation in Early Chinese Mathematical Astronomy" // *T'oung Pao*. Vol. 55, Livr. 1/3 (1969), pp. 1–73. Published by: Brill. Available at: <https://www.jstor.org/stable/4527744> (accessed 08.01.2019). Stable URL: <https://www.jstor.org/stable/4527744>. DOI :<https://doi.org/10.1163/156853269X00069>
14. Sivin N. 1973. "Copernicus in China or, Good Intentions Gone Astray" // Sivin N. *Science in Ancient China: Researches and Reflections* (Collected Studies Series, Cs506). Variorum Reprints. 1995. First published in Studia Copernicana (Colloquia Copernicana, 2; Warsaw. 1973). Part IV. – P. 63–122. Available at: https://www.sas.upenn.edu/~nsivin/from_ccat//cop.pdf (accessed 08.01.2019). DOI: https://www.sas.upenn.edu/~nsivin/from_ccat//cop.pdf
15. "Mathematics in nine books". 1957. / Translation and notes Eh.I. Beryozkina // *Istoriko-matematicheskie issledovaniya*. 1957. 10. Moscow: Nauka. P. 439–584.
16. Beryozkina E. I. 1980. *Matematika drevnego Kitaya (Mathematics of ancient China)*. Moscow: Nauka.
17. Cullen Ch. "A review on Chen Cheng-Yih 'Early Chinese Work In Natural Science'" // *Isis*. 1998. Vol. 89. No. 3, Sep. P. 535–536. DOI: <https://www.journals.uchicago.edu/doi/abs/10.1086/384097>
18. *China's Spiritual Culture: Encyclopedia in 5 Volumes*. – Vol.5. *Science, technical and military thought*. 2009. Red. M. L. Titarenko, A. I. Kobzev, V. E. Eremeev, A. E. Luk'yanov. Moscow: Vostochnaya literatura RAN.

Получено 28.01.2019 г.

Принято в печать 12.07.2019 г.

УДК 511.3

Александр Александрович Фомин
(к 70-летию со дня рождения)

В. Н. Чубариков, Н. М. Добровольский, В. А. Артамонов, А. В. Михалев, В. Н. Латышев,
Ю. В. Нестеренко, А. Я. Белов, А. В. Гришин, Е. И. Компанцева, А. В. Царев, Е. И. Деза,
П. А. Крылов, А. А. Туганбаев



Александр Александрович Фомин родился 4 мая 1949 года в деревне Александровка Красногогорского района Московской области в семье участников войны, которые познакомились на фронте. Отец, Александр Андреевич Фомин (1917–1989), работал в Военно-воздушной инженерной академии им. Н. Е. Жуковского. Мать, Евгения Ивановна Фомина (1922–2007), работала главным бухгалтером Росбытнот. Она была внучкой известного Павлопосадского художника Константина Егоровича Аболихина (1868–1942).

Александр увлекся математикой благодаря учителю московской средней школы № 150 Юрию Васильевичу Черемисину и руководителю кружка при МГУ Леониду Насоновичу Васерштейну. В результате он поступает в 9-й класс математической школы № 2, которую оканчивает в 1966 году с серебряной медалью. В этой школе лекции по математике читал профессор МГУ Евгений Борисович Дынкин, а практические занятия вел доцент МГУ Александр Дмитриевич Вентцель.

После окончания школы А. А. Фомин продолжает обучение на математическом факультете Московского государственного педагогического института им. В. И. Ленина (ныне — Московский педагогический государственный университет). В 1971 году он с отличием закончил институт и был оставлен в аспирантуре под руководством заведующего кафедрой алгебры профессора Леонида Яковлевича Куликова. С 1974 года и по настоящее время Александр Александрович работает на кафедре алгебры МПГУ, являясь заведующим этой кафедрой с 1989 года. Помимо работы в МПГУ, А. А. Фомин много работал по приглашению университетов различных стран: в США, в Германии, в Турции и в Колумбии.

В 1976 году А. А. Фомин защитил кандидатскую диссертацию на тему «Тензорное произведение абелевых групп без кручения». В этой диссертации были вычислены матрицы Куроша-Дэрри тензорного произведения двух абелевых групп без кручения конечного ранга по матрицам сомножителей и исследованы тензорные степени абелевой группы без кручения конечного ранга [1].

Продолжая математические исследования, А. А. Фомин вводит и изучает такие классы абелевых групп без кручения конечного ранга, как группы, у которых любая подгруппа бесконечного индекса свободна [2], группы, у которых любая собственная сервантная подгруппа свободна [3], группы с одним τ -адическим соотношением [4] и группы ранга 3 [5].

В 1992 году А. А. Фомин защитил докторскую диссертацию на тему «Абелевы группы без кручения конечного ранга с точностью до квазиизоморфизма». В этой диссертации были введены τ -адические числа и показано, что для изучения коредуцированных абелевых групп без кручения конечного ранга можно использовать аппарат конечно порожденных модулей над кольцами τ -адических чисел [6].

Вся научная работа А. А. Фомина посвящена теории абелевых групп — области математики, в которой он является одним из ведущих специалистов в мире. Ему принадлежит заслуга в привлечении внимания к смешанным факторно делимым группам. Напомним, что абелева группа A называется факторно делимой, если она не содержит ненулевых делимых периодических подгрупп, но содержит такую свободную подгруппу F конечного ранга, что A/F — делимая периодическая группа. Вместе с американским алгебраистом У. Уиклессом они доказали, что категория факторно делимых групп с квазигомоморфизмами в качестве морфизмов двойственна категории квазигомоморфизмов абелевых групп без кручения конечного ранга [7]. Факторно делимые группы без кручения были впервые рассмотрены Р. Бьюмонтом и Р. Пирсом [8] при изучении аддитивных групп колец без элементов конечного порядка.

В настоящее время класс факторно делимых групп — один из самых исследуемых в теории абелевых групп. Александр Александрович разработал аппарат для изучения этого класса [9, 10]. Им, в частности, доказана следующая красивая теорема.

Теорема о вложении [10]. Пусть A — группа с конечной максимальной линейно независимой над $\mathbb{Z}$ системой элементов $a_1, \dots, a_n$, не содержащая ненулевых периодических делимых подгрупп, и пусть $\mu: A \rightarrow \hat{A}$ — $\mathbb{Z}$ -адическое пополнение группы A . Тогда группа A является факторно делимой с базисом $a_1, \dots, a_n$ в том и только том случае, когда элементы $\mu(a_1), \dots, \mu(a_n)$ порождают $\hat{A}$ как модуль над кольцом полиадических чисел $\hat{\mathbb{Z}}$.

Данная теорема позволяет использовать для изучения факторно делимых групп аппарат конечно порожденных модулей над кольцом полиадических чисел. Вообще, А. А. Фомин очень плодотворно использует для исследования абелевых групп их различные модульные оболочки. Так, при работе с группами без кручения конечного ранга, он использует конечно порожденные модули над кольцами τ -адических чисел. А при исследовании факторно делимых групп, наряду с модулями над кольцом полиадических чисел, А. А. Фомин также применяет конечно порожденные модули над кольцом псевдорациональных чисел [11]. В связи с этим им были разработаны основные положения теории модулей над кольцами полиадических и псевдорациональных чисел и над некоторыми другими близкими к ним кольцами [12, 13]. Надо сказать, что подход к изучению абелевых групп, основанный на применении определенных модулей ассоциированных с данной группой, является весьма актуальным и перспективным в теории абелевых групп. В этом плане очень важны p -адические модули, т. е. модули над кольцами целых p -адических чисел. Собственно, Александр Александрович обобщил и развил эту классическую ситуацию. Ведь кольцо полиадических чисел и кольцо псевдорациональных чисел определенным образом конструируются из колец целых p -адических чисел.

Эти и другие результаты Александра Александровича изложены в монографии известного американского математика Ласло Фукса [14]. Обзоры научных работ А. А. Фомина можно также найти в статьях [15, 16].

Отметим, что помимо научной работы, А. А. Фомин много лет занимался математическими олимпиадами школьников и студентов. В частности, он руководил командой СССР (а затем России) на Международной математической олимпиаде школьников с 1984 по 1994 год. Под его руководством команда школьников СССР четыре раза становилась чемпионом мира

на олимпиадах в Чехословакии в 1984 году, в Польше в 1986 году (поделила первое место с командой США), в Австралии в 1988 году и в Швеции в 1991 году. Александр Александрович неоднократно участвовал в Международном математическом соревновании студентов университетов в качестве руководителя команды Колумбии и команды МПГУ. В 2013 году он входил в оргкомитет 54-й Международной математической олимпиады в городе Санта-Марта (Колумбия) в качестве координатора.

В течение ряда лет А. А. Фомин участвовал в подготовке заданий по математике для ЕГЭ. Начиная с 2014 года, А. А. Фомин входит в состав Экспертного совета ВАК по математике и механике.

Редакционная коллегия журнала «Чебышевский сборник», кафедра алгебры, математического анализа и геометрии Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого, кафедра алгебры МПГУ, кафедра высшей алгебры МГУ, кафедра алгебры Томского государственного университета поздравляют заведующего кафедрой алгебры Московского государственного педагогического университета, доктора физико-математических наук, профессора Александра Александровича Фомина с семидесятилетием. Мы желаем нашему коллеге крепкого здоровья и дальнейших успехов в научной и педагогической деятельности.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. А. А. Фомин, Тензорное произведение абелевых групп без кручения // Сиб. матем. журн. – 1975. – Т. 16, № 4. – С. 869-878.
2. А. А. Фомин, Абелевы группы со свободными подгруппами бесконечного индекса и их кольца эндоморфизмов // Матем. заметки. – 1984. – Т. 36, № 2. – С. 179-187.
3. А. А. Фомин, Сервантно свободные группы // Абелевы группы и модули. – Томск, 1986. – С. 145-164.
4. А. А. Фомин, Абелевы группы с одним τ -адическим соотношением // Алгебра и логика. – 1989. – Т. 28, № 1. – С. 83-104.
5. А. А. Фомин, Абелевы группы без кручения ранга 3 // Матем. сб. – 1989. – Т. 180, № 9. – С. 1155-1170.
6. A. A. Fomin, The category of quasi-homomorphisms of Abelian torsion-free groups of finite rank // Proc. of the Internat. Conf. on Algebra Dedicated to the Memory of A.I. Mal'cev. Pt. 1. – Providence: Amer. Math. Soc., 1992. – (Contemp. Math.; Vol. 131). – P. 91-111.
7. A. A. Fomin, W. J. Wickless, Quotient divisible Abelian groups // Proc. Amer. Math. Soc. – 1998. – Vol. 126, no. 1. – P. 45-52.
8. R. Beaumont, R. Pierce. Torsion free rings // Illinois J. Math. – 1961. – Vol. 5. – P. 61-98.
9. А. А. Фомин, К теории факторно делимых групп. I // Фундамент. и прикл. матем. – 2011/2012. – Т. 17, вып. 8. – С. 153-167.
10. А. А. Фомин, К теории факторно делимых групп. II // Фундамент. и прикл. матем. – 2015. – Т. 20, вып. 5. – С. 157-196
11. A. A. Fomin, Some mixed Abelian groups as modules over the ring of pseudo-rational numbers // Abelian Groups and Modules. Int. Conf. in Dublin, August 10-14, 1998. – Basel: Birkhauser, 1999. – (Trends Math.). – P. 87-100.

12. A. A. Fomin, Finitely presented modules over the ring of universal numbers // Abelian Group Theory and Related Topics. Conf. on Abelian Groups. August 1–7, 1993. Oberwolfach, Germany. – Providence: Amer. Math. Soc., 1994. – (Contemp. Math.; Vol. 171). – P. 109-120.
13. А. А. Фомин, Числовые кольца и модули над ними. – М.: МПГУ, Прометей, 2013.
14. L. Fuchs, Abelian groups. – Springer, Switzerland, 2015.
15. Александр Александрович Фомин. К 65-летию со дня рождения // Фундамент. и прикл. матем. – 2015. – Т. 20, вып. 5. – С. 3-9.
16. A. A. Fomin, Abelian groups in Russia // Rocky Mountain J. Math. – 2002. – Vol. 32, no. 4. – P. 1161-1180.

Получено 18.03.2019 г.

Принято в печать 12.07.2019 г.

УДК 511.3

Владимир Григорьевич Чирский
(к 70-летию со дня рождения)

Н. М. Добровольский, Т. К. Иконникова, Е. С. Крупицын, В. Ю. Матвеев,
Ю. В. Нестеренко, В. Н. Чубариков, М. В. Шамолин



Владимир Григорьевич Чирский родился в Москве 30 июня 1949 года. Его родителями были Григорий Михайлович Чирский, начальник одного из управлений МПС и Елена Ивановна Фирстова, преподаватель английского языка на Госкурсах «Иняз». Его брат, Алексей Григорьевич Чирский, 1932 года рождения, был горным инженером. У него прекрасная семья, жена – Галина Владимировна, две дочери, Наталья и Ольга, четыре внука и внучка.

Владимир Григорьевич окончил среднюю школу №710 с серебряной медалью. Он учился на механико – математическом факультете МГУ имени М. В. Ломоносова и на третьем курсе начал изучать теорию чисел под руководством профессора А. Б. Шидловского, заведующего кафедрой теории чисел МГУ. По окончании факультета был рекомендован в аспирантуру отделения математики. К этому моменту им были опубликованы 4 статьи. С 1973 года начал работать на кафедре математического анализа сначала почасовиком, с 1975 года ассистентом кафедры. Защитил кандидатскую диссертацию в 1978 году и с 1983 года работал доцентом кафедры математического анализа. После защиты в 2000 году докторской диссертации работает профессором этой кафедры с 2001 года по настоящее время. С 1998 г. по 2006 г. работал заместителем декана механико–математического факультета по учебной работе. С 2007 года исполняет обязанности заведующего кафедрой теории чисел МПГУ, с 2006 года работает профессором в РАНХиГС. Кроме того, он является редактором раздела «Теория чисел» РЖ «Математика» ВИНТИ РАН.

В. Г. Чирский преподавал и читал лекции на различных факультетах МГУ: механико-математическом, химическом, геологическом, факультете психологии. Он является ответственным на кафедре за преподавание на химическом факультете. Он участвовал в издании 5 учебных пособий по математическому анализу и приложениям математики к задачам естествознания. Кроме того, он многие годы был старшим экзаменатором на вступительных

экзаменах по математике на различных факультетах МГУ. Опыт этих экзаменов нашел отражение в 6 пособиях по элементарной математике. Под его руководством защищены две кандидатские диссертации, подготовлены к защите диссертации еще двух его учеников.

Научные интересы В. Г. Чирского относятся к теории трансцендентных чисел в p -адических полях и прямых произведений этих полей. Используемый им метод представляет собой некоторую модификацию метода Зигеля-Шидловского в теории трансцендентных чисел. Изначально этот метод использовался для исследования арифметической природы E -функций. Целая функция

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} z^n \quad (1)$$

называется E -функцией, если выполнены следующие условия:

- (i) Все коэффициенты c_n принадлежат некоторому алгебраическому числовому полю $\mathbb{K}$ конечной степени $\varkappa$ над полем $\mathbb{Q}$ рациональных чисел.
- (ii) Максимумы абсолютных величин алгебраически сопряжённых с числом c_n чисел для любого $\varepsilon > 0$ представляют собой $O(n^{\varepsilon n})$, $n \rightarrow \infty$. Для так называемой E -функции в узком смысле это соотношение заменяется на $O(C^n)$, $n \rightarrow \infty$ с некоторой постоянной $C > 1$.
- (iii) Существует последовательность натуральных чисел d_n такая, что при $k = 0, 1, \dots, n$ числа $d_n c_k$ принадлежат кольцу целых чисел $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$ поля $\mathbb{K}$ и $d_n = O(n^{\varepsilon n})$, $n \rightarrow \infty$. (Для E -функции в узком смысле это соотношение заменяется на $O(C^n)$, $n \rightarrow \infty$ с некоторой постоянной $C > 1$.)

В работах А. Б. Шидловского были получены основные теоремы о значениях E -функций, получившие широкую известность. Сформулируем одну из них.

ТЕОРЕМА. (А. Б. Шидловский) Пусть E – функции $f_1(z), \dots, f_m(z)$ составляют решение системы линейных дифференциальных уравнений

$$y'_i = Q_{i,0}(z) + \sum_{j=1}^m Q_{i,j}(z) y_j, \quad i = 1, \dots, m \quad (2)$$

с коэффициентами из поля $\mathbb{C}(z)$ рациональных функций от z и алгебраически независимы над этим полем. Пусть α – алгебраическое число, отличное от нуля и особых точек системы (2). Тогда числа $f_1(\alpha), \dots, f_m(\alpha)$ алгебраически независимы, т.е. для любого отличного от нулевого многочлена $P(y_1, \dots, y_m)$ выполняется неравенство

$$P(f_1(\alpha), \dots, f_m(\alpha)) \neq 0.$$

Эта теорема имеет многочисленные приложения к обобщённым гипергеометрическим E -функциям вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \dots (a_l)_n}{(b_1)_n \dots (b_m)_n} \left(\frac{z}{m-l} \right)^{(m-l)n}, \quad (3)$$

где все числа $a_1, \dots, a_l, b_1, \dots, b_m$ – рациональные, причём каждое из чисел $b_1, \dots, b_m$ отлично от нуля и целых отрицательных чисел, число $m-l$ положительное, а символ $(c)_n$ определён равенствами: $(c)_0 = 1$, $(c)_n = c(c+1) \dots (c+n-1)$, $n = 1, 2, \dots$. Практически полное решение

задачи об условиях, при которых обобщённые гипергеометрические E – функции алгебраически независимы над полем $\mathbb{C}(z)$, получено в работах ученика А. Б. Шидловского, профессора В. Х. Салихова.

В основополагающей работе К. Зигеля отмечена возможность применения этого метода к другому классу G – функций. Ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \quad (4)$$

называется G – функцией, если все коэффициенты c_n принадлежат некоторому алгебраическому числовому полю $\mathbb{K}$ конечной степени $\varkappa$ над полем $\mathbb{Q}$ рациональных чисел и удовлетворяют тем же условиям, что и коэффициенты E – функции в узком смысле. Исследуя арифметические свойства значений функций этого класса, Э. Бомбиери в 1981 году ввёл понятие глобального (алгебраического) соотношения. Пусть $P(y_1, \dots, y_m)$ – отличный от нулевого многочлен с коэффициентами из поля $\mathbb{K}$ и пусть степенные ряды $f_1(z), \dots, f_m(z)$ имеют коэффициенты из поля $\mathbb{K}$ и точка $\alpha \in \mathbb{K}$. Соотношение

$$P(f_1(\alpha), \dots, f_m(\alpha)) = 0$$

называется *глобальным*, если оно выполняется во всех полях $\mathbb{K}_v$, в которых сходятся все ряды $f_1(\alpha), \dots, f_m(\alpha)$.

В работах В. Г. Чирского введён в рассмотрение новый класс степенных рядов, к которому удалось применить метод Зигеля–Шидловского для исследования глобальных соотношений, класс F –рядов. Естественным шагом стало исследование рядов вида

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot n! \cdot z^n. \quad (5)$$

Будем говорить, что этот ряд принадлежит классу $F(\mathbb{K}, C_1, C_2, C_3, q)$, если

- (i) Все коэффициенты c_n принадлежат некоторому алгебраическому числовому полю $\mathbb{K}$ конечной степени $\varkappa$ над полем $\mathbb{Q}$ рациональных чисел.
- (ii) Максимумы абсолютных величин алгебраически сопряжённых с числом c_n чисел представляют собой $O(e^{C_1 n})$, $n \rightarrow \infty$ с некоторой постоянной C_1 .
- (iii) Существует последовательность натуральных чисел d_n такая, что при $k = 0, 1, \dots, n$ числа $d_n c_k$ принадлежат кольцу целых чисел $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$ поля $\mathbb{K}$ и $d_n = q^n d_{0,n}$, $q \in \mathbb{N}$ а числа $d_{0,n}$ делятся только на простые числа p , не превосходящие $C_2 n$ и для всех таких простых p выполняется неравенство $v_p(d_{0,n}) \leq C_3 \left(\log_p n + \frac{n}{p^2} \right)$.

Из свойства 3 следует, что если простое число p не делит число q , то ряд (5), например, с рациональными коэффициентами c_n , имеет в поле $\mathbb{Q}_p$ радиус сходимости, равный $p^{\frac{1}{p-1}} > 1$. Именно это обстоятельство позволяет применить к исследованию арифметических свойств значений таких рядов формулу произведения.

Известным примером F –ряда является ряд Эйлера $\sum_{n=0}^{\infty} n! \cdot (-z)^n$. Разумеется, если ряд (5) отличен от многочлена, он имеет в поле $\mathbb{C}$ нулевой радиус сходимости.

Легко заметить также, что если коэффициенты c_n ряда (5) удовлетворяют перечисленным условиям, то ряд (4) с теми же коэффициентами c_n является G – функцией, а ряд (1) с теми же коэффициентами c_n является E – функцией в узком смысле.

Сформулированные ниже теоремы представляют собой некоторые аналоги основных теорем А. Б. Шидловского, справедливые для F – рядов.

ТЕОРЕМА 1 (Теорема 1.1 из (7)). Пусть F – ряды $f_1(z) \equiv 1, f_2(z), \dots, f_m(z)$ линейно независимы над полем $\mathbb{K}(z)$ и составляют решение системы линейных дифференциальных уравнений

$$y'_i = Q_{i,0}(z) + \sum_{j=1}^m Q_{i,j}(z) y_j, i = 1, \dots, m \quad (6)$$

с коэффициентами из поля $\mathbb{C}(z)$ рациональных функций от z .

Пусть $\xi \neq 0, \xi \in \mathbb{K}$ – регулярная точка системы (6). Пусть

$$L(y_1, \dots, y_m) = h_1 y_1 + \dots + h_m y_m -$$

ненулевая линейная форма, $h_i \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}, i = 1, \dots, m$. Пусть $H(L) = \max H(h_i)$.

Существует эффективно вычисляемая постоянная H_0 такая, что для любого

$$H \geq \max(H_0, H(L))$$

существуют эффективно вычисляемая постоянная C_0 , простое число p , удовлетворяющие неравенствам

$$P_l(H) = l \left(\frac{\ln H}{\ln \ln H} \right) \leq p \leq u \left(\frac{\ln H}{\ln \ln H} \left(1 + \frac{C_0}{\sqrt{\ln \ln H}} \right) \right) = P_u(H)$$

и нормирование v поля $\mathbb{K}$, продолжающее p – адическое нормирование поля $\mathbb{Q}$ такие, что имеет место неравенство

$$L(\xi) = L(f_1(\xi), \dots, f_m(\xi)) \neq 0.$$

Замечание. Можно также для хотя бы одного v , продолжающее p – адическое нормирование поля $\mathbb{Q}$ установить оценку

$$|L(\xi)|_v \geq H^{-m - \frac{m+3+2mC_0}{\sqrt{\ln \ln H}}}.$$

Эта теорема допускает формулировку в несколько иных терминах. Рассмотрим множество точек вида:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots),$$

образующих бесконечномерное пространство. Это пространство представляет собой прямое произведение полей p – адических чисел. Именно, координата с номером n этого вектора представляет собой p_n – адическое число, где p_n – простое число с номером n . Напомним, что p – адические числа являются пополнением поля рациональных чисел по p – адическому нормированию. Для рационального числа a символ $|a|_p$ обозначает величину p – адического нормирования, т.е. $|a|_p = p^{-\vartheta_p(a)}$, где, в свою очередь, символ $\vartheta_p(a)$ обозначает степень, в которой простое число p входит в разложение числа a на простые множители. Это прямое произведение имеет естественную структуру коммутативного кольца с единицей (и с делителями нуля). Его принято называть кольцом полиадических чисел. Элементы $\mathbf{a}$ кольца целых полиадических чисел имеют каноническое представление в виде

$$\mathbf{a} = \sum_{m=1}^{\infty} a_m m!, \quad a_m \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq a_m \leq m. \quad (7)$$

Степень, в которой простое число p входит в разложение числа $n!$ на простые множители равна $\frac{n-S_n}{p-1}$, где S_n обозначает сумму цифр в p – ичном разложении числа n . Следовательно, для любого p при $n \rightarrow \infty$ выполняется соотношение $|a_n n!|_p \rightarrow 0$. Это – достаточное условие для

того, чтобы ряд (7) сходилась в поле $\mathbb{Q}_p$. Сумму этого ряда (7) в поле $\mathbb{Q}_p$ обозначаем $\mathbf{a}^{(p)}$. Как отмечено выше, полиадическое число $\mathbf{a}$ можно рассматривать, как точку бесконечномерного пространства с координатами $\mathbf{a}^{(p)^n}$, где p_n – простое число с номером n . Следует отметить, что ряды вида $\sum_{n=0}^{\infty} a_n n!$, $a_n \in \mathbb{Q}$ могут сходиться не во всех полях $\mathbb{Q}_p$. В случае, когда такой ряд расходится лишь в конечном множестве полей $\mathbb{Q}_p$, мы говорим о *почти полиадических* числах и отождествляем их с элементами прямого произведения всех полей $\mathbb{Q}_p$, кроме упомянутого выше конечного множества.

Можно рассмотреть и прямое произведение полей $\mathbb{K}_v$, где v продолжает p – адическое нормирование поля $\mathbb{Q}$ на поле $\mathbb{K}$ алгебраических чисел конечной степени $\varkappa$. Если v продолжает p – адическое нормирование, то поле $\mathbb{K}_v$ представляет собой алгебраическое расширение поля p – адических чисел $\mathbb{Q}_p$ степени $\varkappa_v$ и справедливо равенство $\sum_v \varkappa_v = \varkappa$, где суммирование производится по всем нормированиям v , продолжающим p – адическое нормирование. Мы рассматриваем нормализованные нормирования, для которых $|p|_v = p^{-\frac{\varkappa_v}{\varkappa}}$. Если нормирование v продолжает обычную абсолютную величину, то ему соответствует алгебраически сопряжённое поле $\mathbb{K}^{(i)}$ и $\varkappa_v = 1$, если $\mathbb{K}^{(i)}$ – подполе поля действительных чисел и $\varkappa_v = 2$, если нет. Равенство $\sum_v \varkappa_v = \varkappa$ выполняется и в этом случае.

При этом мы будем говорить о $\mathbb{K}$ – *полиадических* и, соответственно, о $\mathbb{K}$ – *почти полиадических* числах. Для элемента $\mathbf{a}$ этого прямого произведения обозначаем $\mathbf{a}^{(v)}$ его координату в поле $\mathbb{K}_v$.

Если существует $P(x)$ – многочлен с рациональными коэффициентами, отличный от тождественного нуля такой, что $P(\mathbf{a}) = 0$ (иными словами, $P(\mathbf{a}^{(v)}) = 0$ в каждом поле $\mathbb{K}_v$ этого прямого произведения), то говорим, что $\mathbf{a}$ – *алгебраический элемент*. Если элемент $\mathbf{a}$ не является алгебраическим, то его называют *трансцендентным*. Трансцендентность элемента означает, что для любого $P(x)$ – многочлена с рациональными коэффициентами, отличного от тождественного нуля, существует простое число p и нормирование v поля $\mathbb{K}$, продолжающее p – адическое нормирование поля $\mathbb{Q}$ такие, что $P(\mathbf{a}^{(v)}) \neq 0$ в поле $\mathbb{K}_v$. Назовём элемент $\mathbf{a}$ *бесконечно трансцендентным*, если для любого $P(x)$ – многочлена с рациональными коэффициентами, отличного от тождественного нуля, существует бесконечное множество простых чисел p , для каждого из которых есть нормирование v поля $\mathbb{K}$, продолжающее p – адическое нормирование такое, что $P(\mathbf{a}^{(v)}) \neq 0$ в поле $\mathbb{K}_v$. Элемент $\mathbf{a}$ называется *глобально трансцендентным*, если для любого $P(x)$ – многочлена с рациональными коэффициентами, отличного от тождественного нуля, неравенство $P(\mathbf{a}^{(v)}) \neq 0$ выполняется во всех полях $\mathbb{K}_v$ рассматриваемого прямого произведения.

ТЕОРЕМА 2. Пусть F – ряды $f_1(z) \equiv 1, f_2(z), \dots, f_m(z)$ составляют решение системы (6) и линейно независимы над полем $\mathbb{K}(z)$. Пусть $\xi \in \mathbb{K}$ – регулярная точка системы (6). Пусть

$$L(y_1, \dots, y_m) = h_1 y_1 + \dots + h_m y_m -$$

ненулевая линейная форма, $h_i \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$, $i = 1, \dots, m$. Тогда существует бесконечное множество простых чисел p и нормирований v поля $\mathbb{K}$, продолжающих p – адическое нормирование поля $\mathbb{Q}$, таких, что в поле $\mathbb{K}_v$

$$L(f_1(\xi), \dots, f_m(\xi)) \neq 0.$$

Иными словами, ряды $f_1(\xi), \dots, f_m(\xi)$ бесконечно линейно независимы.

ТЕОРЕМА 3. Пусть F – ряды $f_1(z), f_2(z), \dots, f_m(z)$ составляют решение системы (6) и алгебраически независимы над полем $\mathbb{K}(z)$. Пусть $\xi \in \mathbb{K}$ – регулярная точка системы (6). Пусть $P(y_1, \dots, y_m)$ – ненулевой многочлен с коэффициентами из $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$. Тогда существует бесконечное множество простых чисел p и нормирований v поля $\mathbb{K}$, продолжающих p – адическое нормирование поля $\mathbb{Q}$, таких, что в поле $\mathbb{K}_v$

$$P(f_1(\xi), \dots, f_m(\xi)) \neq 0.$$

Иными словами, ряды $f_1(\xi), \dots, f_m(\xi)$ бесконечно алгебраически независимы

Сформулированные теоремы имеют приложения к обобщенным гипергеометрическим рядам. Символ Похгаммера определён равенствами

$$(a)_0 = 1, (a)_n = a(a+1)\dots(a+n-1), n \geq 1.$$

Для множества действительных чисел $S = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r; \beta_1, \dots, \beta_s\}$, относительно которых предполагаем, что числа $\beta_1, \dots, \beta_s$ – не целые неположительные, принято обозначать

$${}_rF_s \left(\begin{matrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_r \\ \beta_1 & \dots & \beta_s \end{matrix}; z \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n \dots (\alpha_r)_n}{(\beta_1)_n \dots (\beta_s)_n n!} z^n - \quad (8)$$

так называемый обобщённый гипергеометрический ряд. Можно рассматривать несколько более общие ряды вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n \dots (\alpha_r)_n}{(\beta_1)_n \dots (\beta_s)_n} z^n. \quad (9)$$

Ряды (8) и (9) относятся к так называемым рядам Жевре порядков $s+1-r$ и $s-r$, соответственно.

Если $r-s < 0$, то рассматриваемый ряд (9) представляет собой целую функцию (ряд (8) представляет целую функцию при $r-s \leq 0$). К этим случаям относятся показательная функция, функции Бесселя, функции Куммера и большое количество других, важных в математике функций. При условии рациональности чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_r; \beta_1, \dots, \beta_s$ они входят в класс E – функций Зигеля и к исследованию их значений применим известный метод Зигеля-Шидловского в теории трансцендентных чисел [1]. Применению этого метода к гипергеометрическим E – функциям посвящены работы В. Х. Салихова [8]–[10], в которых получено близкое к полному решение проблемы. При $r-s = 0$ ряд (9) имеет конечный радиус сходимости (ряд (8) имеет конечный радиус сходимости при $r-s = -1$). К таким функциям относятся логарифмическая функция, гипергеометрическая функция Гаусса, многие алгебраические функции, неполные эллиптические интегралы и др. При условии рациональности чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_r; \beta_1, \dots, \beta_s$ они входят в класс G – функций Зигеля и исследованию их посвящены работы А. И. Галочкина [11], Г. В. Чудновского [10], Э. Бомбьери [5], И. Андре [13] и др.

Если же $r-s > 0$, то ряд (9), отличный от многочлена, имеет нулевой радиус сходимости в поле $\mathbb{C}$. (Ряд (8) имеет нулевой радиус сходимости при $r-s \geq 0$). В этом случае получаются F – ряды. Исследованию свойств таких рядов посвящены, например, работы [17]–[20]. В случае, когда среди параметров рассматриваемых гипергеометрических рядов содержатся иррациональные алгебраические числа, используя аппроксимации Эрмита–Паде, приведенные в [21], удастся доказать бесконечную линейную независимость значений таких рядов в алгебраических точках [22].

Ещё одно направление исследований – вопросы алгебраической независимости элементов $\mathbb{C}_p$ над полем $\mathbb{Q}_p$. В работах В. Г. Чирского и П. Бундшу [34], [35], [46], [59] установлены теоремы, дающие достаточные условия алгебраической независимости над полем $\mathbb{Q}_p$ совокупностей рядов вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n p^{r_n},$$

где a_n – единицы кольца $\mathbb{Z}_p$, а r_n – возрастающая последовательность рациональных чисел. Рассмотрены также задачи об алгебраической независимости над полем $\mathbb{Q}_p$ значений аналитических функций в точках такого вида.

СПИСОК НАУЧНЫХ РАБОТ ЧИРСКОГО В. Г.

1. Об арифметических свойствах значений некоторых функций.
Совместно с М. С. Нурмагомедовым // Вестн. Моск. Ун-та.- Сер.1, матем., механ.-1973.- №1. -с.19 – 26.
2. Об арифметических свойствах значений некоторых функций.
Совместно с М. С. Нурмагомедовым // Вестн. Моск. Ун-та.- Сер.1, матем., механ.-1973.- №2. -с.38 – 45.
3. Об арифметических свойствах значений аналитических функций, связанных алгебраическими уравнениями над полем рациональных функций.// Матем. заметки.-1973.-т.14.- вып.1. -с.83 – 94.
4. Об арифметических свойствах значений эллиптических интегралов. // Вестн. Моск. Ун-та.- Сер.1, матем., механ.-1973.-№5. -с.57 – 64.
5. Об арифметических свойствах значений эллиптических интегралов. // Успехи матем. наук.-1977.-т.32.-№1(193). -с.211 – 212.
6. Об арифметических свойствах значений аналитических функций с алгебраическими коэффициентами рядов Тейлора. // Вестн. Моск. ун-та.- Сер.1, матем., механ.-1978.-№2. -с.41 – 47.
7. Об арифметических свойствах значений аналитических функций с алгебраическими иррациональными коэффициентами рядов Тейлора. // Вестн. Моск. ун-та.- Сер.1, матем., механ.-1978.-№3. -с.29 – 34.
8. Об арифметических свойствах значений гипергеометрических функций с иррациональными параметрами // Вестн. Моск. ун-та.- Сер.1, матем.,механ.-1978.-№3. -с.29 – 34.
9. Об арифметических свойствах значений эллиптических интегралов. // Вестн. Моск. ун-та.- Сер.1, матем.,механ.-1979.-№1. -с.3 – 11.
10. Оценки линейных форм с алгебраическими коэффициентами. // Вестн. Моск. ун-та.- Сер.1, матем.,механ.-1984.-№3. -с.32 – 35.
11. Оценки многочленов от значений эллиптических интегралов.// Диофантовы приближения, ч.1, МГУ.-1985. -с.106 – 109.
12. О нетривиальных глобальных соотношениях. // Вестн. Моск. ун-та.- Сер.1, матем., механ. — 1989. — №5. -с.33 – 36
13. О глобальных соотношениях.// Матем. заметки.-1990.-т.48.-вып.2 -с.123 – 127.
14. Об алгебраических соотношениях в локальных полях. // Вестн. Моск. ун-та.- Сер.1, матем.,механ.-1990.-№3. -с.92 – 95.
15. Глобальные соотношения и гипергеометрические ряды.// Успехи матем. наук.-1991.-т.46.- вып.6(282). -с.221 – 222.
16. Об арифметических свойствах значений G-функций.// Вестн. Моск. ун-та. — Сер.1, матем., механ. — 1991. -№4. - с.84 – 86.

17. Об арифметических свойствах значений некоторых функций. // Вестн. Моск. Ун-та.- Сер.1, матем.,механ.-1992.-№4. -с.93 – 95.
18. Об алгебраических соотношениях в неархимедовски нормированных полях.// Функциональный анализ и прилож.-1992.-т.26.-вып.2. -с.41 – 50.
19. Об арифметических свойствах значений гипергеометрических функций. // Матем. заметки. -1992. -т.52. -вып.2. -с.125 – 131.
20. О рядах, алгебраически независимых во всех локальных полях.// Вестн. Моск. ун-та.- Сер.1, матем.,механ.-1978.-№3. -с.29 – 34.
21. Оценки многочленов и линейных форм в прямых произведениях полей// Вестн.Моск.ун-та.-сер.1.матем. механ.-1994.-№4. -с.35 – 39.
22. Арифметические свойства значений гипергеометрических рядов.// Труды Матем. ин-та РАН.-1994.-т.207. -с.347 – 352.
23. О глобальных соотношениях для гипергеометрических рядов.// Труды Семина. Им. И.Г. Петровского.-1995.-№18. -с.204 – 212.
24. Об арифметических свойствах значений некоторых рядов.// Матем.записки.-1996.-т.2. -с.110 – 113.
25. Об арифметических свойствах значений некоторых рядов.// Вестн. Моск. ун-та.- Сер.1, матем.,механ.-1997.-№2. -с.53 – 55.
26. Об алгебраической независимости значений функций, удовлетворяющих системам функциональных уравнений.// Труды Матем. ин-та РАН.-1997.-т.218. -с.433 – 438.
27. Об арифметических свойствах значений некоторых функций.// Фундам. и прикл. матем.-1998.-т.4.-№2. -с.725 – 732.
28. О линейных глобальных соотношениях.// Вестн. Моск. ун-та.- Сер.1, матем.,механ.-1998.-№4. -с.70 – 72.
29. Линейная независимость p -адических значений некоторых q -базисных гипергеометрических рядов.// Фундам. и прикл.матем.-1999.-т.5,№2. -с.619 – 625.
30. Арифметические свойства некоторых p -адических чисел.// Вестн. Моск. ун-та.- Сер.1, матем.,механ.-1999.-№6. -с.16 – 19.
31. Приближения Эрмита–Паде для некоторых q -базисных гипергеометрических рядов.// Вестн. Моск. ун-та.- Сер.1, матем.,механ.-2000.-№2. -с.7 – 11.
32. Арифметические свойства рядов в полях с неархимедовскими нормированиями. Москва.: Изд-во ЦПИ при мех.-мат. ф-те МГУ.-2000.-120стр.
33. Algebraic independence of elements from C_p over Q_p . Совместно с P.Bundschuh //Arch.der Math.,79(2002), 345 – 352.
34. Algebraic independence of elements from C_p over Q_p , II, Acta Arithmetica,113.4(2004), 309 – 326, совместно с P.Bundschuh.
35. Effective estimates for global relations on Euler-type series, Ann. Fac.Sci. Toulouse, Vol XIII, №2, 2004, 241 – 260. Совместно с D.Bertrand, J.Yebbou.

36. Метод Зигеля в p -адической области. Фундам. и прикл. Матем, 2005, том 11, №6, 221 – 230.
37. Обобщение понятия глобального соотношения. Записки научных семинаров ПОМИ, Том 322, 2005. Стр. 220 – 238.
38. Рекуррентные соотношения для некоторых определителей. Фундаментальная и прикладная математика, 2010, т.16, №6, 173 – 175.
39. Алгебраическая независимость над Q_p значений аналитических функций в точках из C_p . Вестник МГУ, сер 1.,матем.мех.,2010, №6, 25 – 27. Совм. с О.Ю.Баженовой.
40. Оценки линейных форм и многочленов от совокупностей полиадических чисел. Чебышевский сборник, 2011, №4.
41. Оценки многочленов от некоторых g -адических чисел. Вестник МГУ, сер.1, матем.,механ, 2012, №2, 58 – 59. Совм. С Е.С.Крупицыным.
42. Арифметические свойства некоторых полиадических рядов. Вестник МГУ, сер.1, матем.,механ, 2012, №5
43. Recurrent relations for certain determinants.в журнале Journal of Mathematical Sciences, издательство Plenum Publishers (United States), 2012, том 182, №4, с. 565 – 566 DOI
44. О некоторых свойствах полиадических разложений (совм. с В. Ю. Матвеевым). // Чебышевский сборник. 2013. Т. 14, №2, с. 163 – 171.
45. Values of Analytic Functions at points of C_p . Russian Journal of Mathematical Physics, издательство Maik Nauka/Interperiodica Publishing (Russian Federation), 2013.-том 20, №2, с. 149 – 154
46. On the Arithmetic Properties of Polyadic Integers. International Mathematical Forum, том 8, №37, с. 1793 – 1796
47. Об арифметических свойствах обобщённых гипергеометрических рядов с иррациональными параметрами. Известия РАН. Серия математическая, 2014.том 78, № 6, с. 193 – 210
48. Арифметические свойства полиадических рядов с периодическими коэффициентами. Доклады Академии наук, издательство Наука (М.), 2014. том 459, №6, с. 677 – 679
49. On the arithmetic properties of generalized hypergeometric series with irrational parameters. *Izvestiya. Mathematics*, издательство *American Mathematical Society(United States)*, 2014. том 78, №6, с. 1244– 1260
50. Arithmetic properties of polyadic series with periodic coefficients. *Doklady Mathematics*, издательство Maik Nauka/Interperiodica Publishing (*Russian Federation*), 2014.-том 90, № 3, с. 766 – 768
51. Об одном подходе к преобразованию периодических последовательностей. совм. с Нестеренко А.Ю.Дискретная математика, издательство *Наука(М.)*, 2015.-том 27, №4, с. 150 – 157
52. Арифметические свойства целых полиадических чисел. *Чебышевский сборник*, издательство *Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого"(Тула)*, 2015.- том 16, №1, с. 254 – 264

53. Estimating polynomials over Z_p at points from C_p . (совм. с Bundschuh P.). *Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory*, 2015. том 5, №1-2, с. 14–20
54. Arithmetic properties of Euler series. *Moscow University Mathematics Bulletin*, 2015. том 70, №1, с. 41 – 43
55. О преобразованиях периодических последовательностей. *Чебышевский сборник, издательство Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого"*(Тула), 2016. том 17, №3, с. 180 – 185
56. Представление натуральных чисел слагаемыми определённого вида. *Современные проблемы математики*, 2016. -№24, с. 81 – 84
57. Периодические и непериодические конечные последовательности. *Чебышевский сборник, издательство Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого"*(Тула), 2017. -том 18, №2, с. 275 – 278
58. Арифметические свойства полиадических рядов с периодическими коэффициентами. *Известия РАН. Серия математическая*, 2017.-том 81, № выпуск 2, с. 215 – 232
59. Topical problems of the theory of Transcendental numbers: Developments of approaches to their solutions in the works of Yu.V. Nesterenko. *Russian Journal of Mathematical Physics, издательство Maik Nauka/Interperiodica Publishing (Russian Federation)*, 2017. том 24, №2, с. 153 – 171
60. Representation of positive integers by summands of a certain form. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, издательство Springer Verlag (Germany)*, 2017.- том 298, №1, с. 70 – 73
61. Arithmetic properties of polyadic series with periodic coefficients. *Izvestiya. Mathematics, издательство American Mathematical Society (United States)*, 2017. -том 81, №2, с. 444 – 461
62. An approach to the transformation of periodic sequences. (совм.с Nesterenko A.Yu). *Discrete Mathematics and Applications, издательство V S P (Netherlands)*, 2017. том 27, №1, с. 1 – 6.
63. Арифметические свойства обобщенных гипергеометрических F -рядов. *Доклады академии наук*, 2018, том 483, №3. с. 252 – 254.
64. Arithmetic Properties of Generalized Hypergeometric F -series. *Doklady Mathematics*. 2018. Vol.98.-No 3. -589 – 591.

Книги по элементарной математике

65. Уравнения элементарной математики. Совместно с Е.Т. Шавгулидзе. Москва, «Наука», 1992.
66. Методы решения задач по алгебре. Совместно с С.В.Кравцевым, Ю.Н.Макаровым, В.Ф.Максимовым, М.И.Нараленковым. Москва, «Экзамен», 2001.
67. Математика. Письменный экзамен. М. «Экзамен», 2006.511 стр. Совместно с А.И.Козко и Ю.Н. Макаровым.

- 68. Задачи с параметрами и другие сложные задачи. М.МЦНМО, 2007, 2008, 296 стр. Совместно с А.И.Козко.
- 69. Математика. Задача С5. М.МЦНМО, 2010–2013. Совместно с А.И.Козко, В.С. Панфёровым, И.Н. Сергеевым.
- 70. Задачи с параметрами, сложные и нестандартные задачи. М.МЦНМО, 2016, 229 стр. Совместно с А.И.Козко, В.С. Панфёровым, И.Н. Сергеевым.

Учебники и учебные пособия

- 71. Математический анализ. М.: «Академия», 2013, 336 стр. Совместно с В.И. Гавриловым и Ю.Н. Макаровым.
- 72. Математические методы решения химических задач. М.: «Академия», 2013, 367 стр. Совместно с А.И.Козко, С.В. Кравцевым, Н.Б. Малышевой, Е.С. Соболевой, А.В. Субботиным, Г.М. Фатеевой.
- 73. Дифференциальные уравнения и математические модели химических задач. М: МЦНМО, 2019, 168 стр. Совместно с А.И.Козко.
- 74. Математический анализ и инструментальные методы решения задач. Книга 1: учебник / В. Г. Чирский, К. Ю. Шилин. — М.: Издательский дом «Дело» РАНХиГС, 2019. 463 с. — (Учебники Президентской академии).
- 75. Математический анализ и инструментальные методы решения задач. Книга 2: учебник / В. Г. Чирский, К. Ю. Шилин. — М.: Издательский дом «Дело» РАНХиГС, 2019. 258 с. — (Учебники Президентской академии).

Получено 18.03.2019 г.

Принято в печать 12.07.2019 г.

РЕДКОЛЛЕГИЯ

Том 20 Выпуск 2

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Чубариков Владимир Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математических и компьютерных методов анализа, декан механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

e-mail: chubarik2009@live.ru

ЗАМЕСТИТЕЛИ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА:

Добровольский Николай Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой алгебры, математического анализа и геометрии Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого.

e-mail: dobrovol@tspu.ru

Михалев Александр Васильевич — доктор физико-математических наук, профессор механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

e-mail: mikhalev@shade.msu.ru

Нижников Александр Иванович — доктор педагогических наук, профессор, заведующий кафедрой математической физики Московского педагогического государственного университета, заслуженный работник высшей школы РФ.

e-mail: ainizhnikov@mail.ru, nizhnikov.ai@mail.ru

ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ

Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет; доцент кафедры алгебры, математического анализа и геометрии, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого.

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

ЧЛЕНЫ РЕДКОЛЛЕГИИ:

Артамонов Вячеслав Александрович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей алгебры механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

e-mail: viacheslav.artamonov@gmail.com

Безверхний Владимир Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор, профессор Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого.

e-mail: Vnbezv@rambler.ru

Быковский Виктор Алексеевич — доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, заместитель директора Института прикладной математики Дальневосточного отделения Российской академии наук (ИПМ ДВО РАН) по научной работе, директор Хабаровского отделения ИПМ ДВО РАН.

e-mail: vab@iam.khv.ru

Востоков Сергей Владимирович — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры алгебры и теории чисел Санкт-Петербургского университета, президент фонда им. Л. Эйлера.

e-mail: sergei.vostokov@gmail.com

Гвоздев Александр Евгеньевич — доктор технических наук, профессор, профессор кафедры технологии и сервиса Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого.

e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru

Георгиевский Дмитрий Владимирович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теории упругости механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

e-mail: georgiev@mech.math.msu.su

Гриценко Сергей Александрович — доктор физико-математических наук, профессор кафедры "Математика 1" Финансового университета при Правительстве РФ, профессор механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова.

e-mail: s.gritsenko@gmail.com

Демидов Сергей Сергеевич — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры теории вероятностей механико-математического факультета МГУ, заведующий кабинетом истории и методологии математики и механики, заведующий отделом истории физико-математических наук Института истории естествознания и техники РАН, главный редактор «Историко-математических исследований», президент Международной академии истории науки.

e-mail: serd42@mail.ru

Дурнев Валерий Георгиевич — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой Ярославского государственного университета.

e-mail: durnev@univ.uniyar.ac.ru

Зубков Андрей Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, заведующий отделом дискретной математики Математического института им. В. А. Стеклова РАН.

e-mail: zubkov@mi.ras.ru

Иванов Валерий Иванович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики и информатики Института прикладной математики и компьютерных наук Тульского государственного университета.

e-mail: ivaleryi@mail.ru

Карташов Владимир Константинович — кандидат физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой Волгоградского государственного социально-педагогического университета.

e-mail: kartashovvk@yandex.ru

Королёв Максим Александрович — доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник Математического института им. В. А. Стеклова РАН.

e-mail: korolevma@mi.ras.ru

Кузнецов Валентин Николаевич — доктор технических наук, профессор, профессор кафедры прикладной математики и системного анализа Саратовского государственного технического университета им. Ю. А. Гагарина.

e-mail: kuznetsovn@info.sgu.ru

Латышев Виктор Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры высшей алгебры механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

e-mail: latyshev@basis.math.msu.su

Матиясевич Юрий Владимирович — доктор физико-математических наук, профессор, академик Российской академии наук, советник РАН Санкт-Петербургского отделения

Математического института им. В. А. Стеклова РАН, президент Санкт-Петербургского математического общества.

e-mail: yumat@pdmi.ras.ru

Мищенко Сергей Петрович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой алгебро-геометрических вычислений Ульяновского государственного университета.

e-mail: mishchenkosp@mail.ru

Нестеренко Юрий Валентинович — доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН, заведующий кафедрой теории чисел механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

e-mail: nester@mi.ras.ru

Панин Владимир Алексеевич — доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН, действительный член Академии информатизации образования, ректор Тульского государственного педагогического университета имени Л. Н. Толстого.

e-mail: tgpu@tula.net

Пачев Урусби Мухамедович — доктор физико-математических наук, профессор кафедры алгебры и дифференциальных уравнений Кабардино-Балкарского государственного университета им. Х. М. Бербекова.

e-mail: urusbi@rambler.ru

Фомин Александр Александрович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой алгебры Московского педагогического государственного университета.

e-mail: alexander.fomin@mail.ru

Чирский Владимир Григорьевич — доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой теории чисел Московского педагогического государственного университета, профессор механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Белов Алексей Яковлевич — доктор физико-математических наук, федеральный профессор математики, профессор университета Бар-Илана, Рамат-Ган, Израиль.

e-mail: Kanelster@gmail.com

Берник Василий Иванович (Белоруссия) — доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Института математики НАН Беларуси.

e-mail: bernik@im.bas-net.by

Касьянов Павел Олегович (Украина) — доктор физико-математических наук, профессор, Учебно-научный комплекс «Институт прикладного системного анализа» НТУУ «КПИ» МОН и НАН Украины.

e-mail: kasyanov@i.ua

Лауринчикас Антанас (Литва) — доктор физико-математических наук, профессор, Действительный член АН Литвы, заведующий кафедрой теории вероятностей и теории чисел Вильнюсского университета.

e-mail: antanas.laurincikas@mif.vu.lt

Лю Юнпин (Китай) — доктор наук, профессор, руководитель Исследовательского центра современного математического анализа Пекинского педагогического университета.

e-mail: ypliu@bnu.edu.cn

Мисир Джумаил оглы Марданов (Азербайджан) — доктор физико-математических наук, профессор, директор Института математики и механики Национальной академии наук Азербайджана.

e-mail: rmi@lan.ab.az

Рахмонов Зарулло Хусейнович (Таджикистан) — доктор физико-математических наук, профессор, академик Академии наук Таджикистана, директор Института математики Таджикской АН.

e-mail: zarullo_r@tajik.net, zarullo-r@rambler.ru

Салиба Холем Мансур (Ливан) — кандидат физико-математических наук, доцент факультета естественных и прикладных наук университета Нотр-Дам-Луэз.

e-mail: qwe123@rocketmail.com

Табари Абдулло Хабибулло (Таджикистан) — доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент Академии наук Таджикистана, ректор Кулябского государственного университета имени Абуабдуллаха Рудаки.

e-mail: rektor@kgu.tj

THE EDITORIAL BOARD

Volume 20, Issue 1

THE MAIN EDITOR

Chubarikov Vladimir Nikolaevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the Department of mathematical and computer methods of analysis, dean of the mechanics and mathematics faculty of the M. V. Lomonosov Moscow State University.
e-mail: chubarik2009@live.ru

THE ASSISTANTS OF THE MAIN EDITOR:

Dobrovolsky Nikolai Mihailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the Department algebra, calculus and geometry of the Tula State L. N. Tolstoy Pedagogical University.
e-mail: dobrovol@tsput.ru

Mihalev Alexander Vasilyevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the chair of theoretical Informatics of the mechanics and mathematics faculty of the M. V. Lomonosov Moscow State University.
e-mail: mikhalev@shade.msu.ru

Nijnikov Alexander Ivanovich — doctor of pedagogical sciences, professor, head of chair of the mathematical physics of the Moscow Pedagogical State University, honored worker of the higher school of the Russian Federation.
e-mail: ainizhnikov@mail.ru, nizhnikov.ai@mail.ru

THE EXECUTIVE SECRETARY

Dobrovolsky Nikolai Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, assistant of the department of applied mathematics and computer science of the Tula State University; associate Professor of algebra, mathematical analysis and geometry of the Tula State L. N. Tolstoy Pedagogical University.
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

THE MEMBERS OF THE EDITORIAL BOARD:

Artamonov Vyacheslav Alexandrovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of Higher algebra's chair of the mechanics and mathematics faculty of the M. V. Lomonosov Moscow State University.
e-mail: viacheslav.artamonov@gmail.com

Bykovsky Victor Alekseevich — doctor of physico-mathematical Sciences, correspondent member of RAS, Deputy Director of the Federal state institution of science, Institute of applied mathematics of the far Eastern branch of the Russian Academy of Sciences (IPM RAS) on scientific work, Director of the Khabarovsk branch of the IPM DVO RAS.
e-mail: vab@iam.khv.ru

Vostokov Sergey Vladimirovich — doctor of physical and mathematical Sciences, Professor, Professor of algebra and number theory Department of St. Petersburg University, President of the Foundation. L. Euler.
e-mail: sergei.vostokov@gmail.com

Gvozdev Alexander Evgenievich — doctor of technical sciences, professor, professor of Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University.
e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru

Georgievsky Dmitry Vladimirovich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of Chair of Elasticity at Mechanical and Mathematical Department of the M. V. Lomonosov Moscow State University.

e-mail: georgiev@mech.math.msu.su

Gritsenko Sergey Alexandrovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor of the chair Mathematics of the 1 Financial University under the Government of the Russian Federation, professor of the mechanics and mathematics faculty of the M. V. Lomonosov Moscow State University.

e-mail: s.gritsenko@gmail.com

Demidov Sergey Sergeyivich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, professor of the department of probability theory of mechanics and mathematics of Moscow state University, head of the cabinet of history and methodology of mathematics and mechanics, head. department of history of physical and mathematical sciences of the Institute of history of science and technology RAS, editor-in-chief of "Historical and mathematical research president of the International Academy of history of science.

e-mail: serd42@mail.ru

Durnev Valery Georgievich — doctor of physical and mathematical Sciences, Professor, head of the Department of computer security and mathematical methods of data processing of the Yaroslavl state a public University. P. G. Demidov.

e-mail: durnev@univ.uniyar.ac.ru

Zubkov Andrey Mihailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, full member of the Academy of cryptography of the Russian Federation, head of the chair of mathematical statistics and random processes mechanics and mathematics faculty Moscow state University of a name of M. of Century University, head of the Department of discrete mathematics Mathematical Institute. Century A. Steklov mathematical Institute RAS.

e-mail: zubkov@mi.ras.ru

Ivanov Valery Ivanovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the chair of applied mathematics and Informatics of Institute of Applied Mathematics and Computer Science of the Tula State University.

e-mail: ivaleryi@mail.ru

Kartashov Vladimir Konstantinovich — candidate of physical and mathematical sciences, professor, head of the Department of algebra, geometry and Informatics of the Volgograd State Social and Pedagogical University.

e-mail: kartashovvk@yandex.ru

Korolev Maxim Aleksandrovich — doctor of physical and mathematical sciences, the leading researcher of the Department of Algebra and Number Theory of Steklov Mathematical Institute of RAS.

e-mail: korolevma@mi.ras.ru

Kuznetsov Valentin Nikolaevich — doctor of technical sciences, professor, professor of the department of applied mathematics and systems analysis, Saratov State Technical University.

e-mail: kuznetsovvn@info.sgu.ru

Latyshev Viktor Nikolaevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, professor of the mechanics and mathematics faculty of the M. V. Lomonosov Moscow State University.

e-mail: latyshev@basis.math.msu.su

Matiyasevich Yuri Vladimirovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, full member of Russian Academy of Sciences, RAS Counselor of St. Petersburg department of Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, president of the St. Petersburg Mathematical society.

e-mail: yumat@pdmi.ras.ru

Mishchenko Sergey Petrovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Professor, Department of applied mathematics of the Ulyanovsk State University.

e-mail: mishchenkosp@mail.ru

Nesterenko Yuriy Valentinovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, corresponding member of RAS, head of number theory's chair of the mechanics and mathematics faculty of the M. V. Lomonosov Moscow State University.

e-mail: nester@mi.ras.ru

Panin Vladimir Alexeyevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, corresponding member Russian Academy of Natural Sciences, Rector of Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University.

e-mail: tgpu@tula.net

Pachev Urusbi Mukhamedovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor of algebra and differential equations Kabardino-Balkar State University. After H. M. Berbekov

e-mail: urusbi@rambler.ru

Fomin Aleksandr Aleksandrovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the Department of algebra of the Moscow Pedagogical State University.

Chirsky Vladimir Grigoryevich — doctor of physical and mathematical sciences, associate professor, head of number theory's chair of the Moscow Pedagogical State University, professor of the mechanics and mathematics faculty of the M. V. Lomonosov Moscow State University.

e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Belov Alexey Yakovlevich — doctor of physical and mathematical sciences, federal professor, professor Bar Ilan University, Ramat Gan, Israel.

e-mail: Kanelster@gmail.com

Bernik Vasily Ivanovich (Belorussia) — doctor of physical and mathematical sciences, professor, the main researcher of the Belorussia Institute of Mathematics of NAS.

e-mail: bernik@im.bas-net.by

e-mail: Michel.Deza@ens.fr

Kasyanov Pavel Olegovich (Ukraine) — doctor of physical and mathematical Sciences, head of the research department at Educational and Scientific Complex "Institute for Applied System Analysis" of the National Technical University of Ukraine "Kyiv Polytechnic Institute" of the MES of Ukraine and NAS of Ukraine.

e-mail: kasyanov@i.ua

Laurinchikas Antanas (Lithuania) — Full member of the AS in Lithuania, doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of probability theory's and number theory's chair of the Vilnius University.

e-mail: antanas.laurincikas@mif.vu.lt

Liu Yongping (China) — Ph.D, professor, head of the Research Center for Modern Analysis of Mathematics of the Beijing Normal University.

e-mail: ypliu@bnu.edu.cn

Misir Jumayil oglu Mardanov (Azerbaijan) — doctor of physical and mathematical sciences, professor, director of the institute of Mathematics and Mechanics of the National Academy of Sciences of Azerbaijan.

e-mail: rmi@lan.ab.az

Rahmonov Zarullo Huseinovich (Tajikistan) — doctor of physical and mathematical sciences, professor, full member of the Republic of Tajikistan AS, director of the Institute of Mathematics of the Tajik AS.

e-mail: zarullo_r@tajik.net, zarullo-r@rambler.ru

Saliba Holem Mansour (Lebanon) — Ph.D. Assistant Professors of faculty of natural & applied sciences of Notre Dame University Louaize

e-mail: qwe123@rocketmail.com

Tabari Abdullo Habibullo (Tajikistan) — doctor of physical and mathematical sciences, professor, corresponding member of the Republic of Tajikistan AS, rector of the Kulob State University named after Abuabdullo Rudaki.

e-mail: rektor@kgu.tj

TABLE OF CONTENTS

Volume 20 Issue 2

From the editor	3
Abu-Saleem Ahmad, A. R. Rustanov, T. L. Melekhina. Generalized Kenmotsu manifold constancy of type	7
Yu. A. Basalov. About the method of estimating critical determinants within the question of the estimation of the constant of simultaneous Diophantine approximations	22
N. V. Budarina. Exact bounds for the special class of integer polynomials with given discriminant	39
D. V. Vasilyev, A. S. Kudin. On upper bounds for the number of minimal polynomials with bounded derivative at a root	47
L. V. Varukhina. Selected questions of the theory of adding functions of Dirichlet series	55
D. V. Gorbachev, V. I. Ivanov. Muckenhoupt conditions for piecewise-power weights in Euclidean space with Dunkl measure	82
D. V. Gorbachev, E. P. Ofitserov. New approach to searching for string median and visualization of string clusters	93
D. S. Grigor'ev, A. O. Ivanov, A. A. Tuzhilin. The Gromov – Hausdorff distances to simplexes	108
L. A. Gromakovskaya, B. M. Shirokov. Distribution of values of Jordan function in residue classes	123
E. I. Deza. Cones and polytopes of geleralized metrics	140
N. N. Dobrovol'skii, M. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii. On a generalized Eulerian product defining a meromorphic function on the whole complex plane	156
M. Dutour. The hypermetric cone and polytope on graphs	169
P. L. Ivankov. On the values of hypergeometric function with parameter from quadratic field	178
O. Ivanova, S. Vostokov, I. Zhukov. On two approaches to classification of higher local fields	186
A. Jurišić, J. Vidali. No strongly regular graph is locally Heawood	198
E. I. Kavaleuskaya. Trigonometric sums in the metric theory of Diophantine approximation ..	207
E. I. Kompantseva, A. A. Fomin. Quotient divisible groups and torsion-free groups corresponding to finite Abelian groups	221
D. Malinin. On some characters of group representations	234
S. S. Mamonov, I. V. Ionova, A. O. Kharlamova. Matrix equations of the system of phase synchronization	244

V. A. Molchanov, E. V. Khvorostukhina. On problem of abstract definability of universal hypergraphic automata by input symbol semigroup	259
A. Mucherino. Introducing the Interaction Distance in the context of Distance Geometry for Human Motions	273
O. A. Pikhtilkova, E. V. Mescherina, A. A. Gorelik. On almost locally solvable Lie algebras with null Jacobson radical of a locally nilpotent radical for Lie algebras	284
N. S. Polyakova. Differentiation of functions of quaternionic variable	298
L. A. Tolokonnikov, T. S. Nguyen. The transmission of sound through an elastic plate with an inhomogeneous coating adjoining viscous liquids	311
N. D. Tutyshkin, V. Yu. Travin. Analysis of spatial stress and velocity fields in plastic flow processes	325
V. N. Chubarikov. The mean value of products of Legendre symbol over primes	336
M. Sh. Shabozov, M. O. Akobirshoev. About Kolmogorov type of inequalities for periodic functions of two variables in L_2	348
BRIEF MESSAGE	
A. N. Kormacheva. Approximation of quadratic algebraic lattices by integer lattices	366
E. S. Krupitsyn. Arithmetic properties of series of some classes	374
V. Yu. Matveev. Properties of elements of direct products of fields	383
V. I. Murashka. On the $\mathfrak{F}$ -hypercentral subgroups with the sylow tower property of finite groups	391
E. M. Rarova. Trigonometric sums of nets of algebraic lattices	399
REPORTS BY YOUNG SCIENTISTS	
F. D. Rukhovich. Outer billiards outside regular decagon: periodicity of almost all orbits and existence of aperiodic orbit	406
HISTORY OF MATHEMATICS AND APPLICATIONS	
M. M. Abdurazakov, D. D. Gadjiev, N. V. Guseva, G. V. Tokmazov. Fundamentals of formation in learning of research skills and ict competence in teaching solving tasks using a computer	442
G. M. Zhuravlev, A. E. Gvozdev, A. P. Navoev, A. A. Zhukov, N. N. Dobrovol'sky, A. A. Shatul'skiy, D. V. Maliy. Development of mathematical models of plastic media for resource-saving metal systems technologies	462
E. A. Zaytsev. From pre-classical physics to classical mechanics	478
E. V. Larkin, A. N. Privalov. Mathematical models of heating and melting of particles of fine-dispersed powder	488
E. V. Larkin, A. N. Privalov. Simulation of computer systems with FIFO-discipline interrupt handling	499

V. A. Levin, K. M. Zingerman, A. V. Vershinin, I. A. Podpruzhnikov. Dynamic effects in lattice structures produced by additive technologies	512
V. A. Levin, K. M. Zingerman, M. Ya. Yakovlev, E. O. Kurdenkova, D. V. Nemtinova. Numerical Estimation of Effective Properties of Periodic Cellular Structures using Beam and Shell Finite Elements with CAE Fidesys	523
E. S. Makarov, A. E. Gvozdev, G. M. Zhuravlev, I. V. Minaev, N. N. Dobrovol'sky, S. V. Sapozhnikov, A. A. Kalinin. Determination of material mathematical functions in the conditions of the duration of dilatating media from powder and ingot metal systems ..	538
G. I. Sinkevich. Historiographic discussion on the origin of chinese astronomy	562
MEMORABLE DATE	
V. N. Chubarikov, N. M. Dobrovolsky, V. A. Artamonov, A. V. Mikhalev, V. N. Latyshev, Yu. V. Nesterenko, A. Y. Belov, A. V. Grishin, E. I. Kompantseva, A. V. Tsarev, E. I. Deza, P. A. Krylov, A. A. Tuganbaev. Alexander Alexandrovich Fomin (to the 70th anniversary)	580
N. M. Dobrovolsky, T. K. Ikonnikova, E. S. Krupitsyn, V. Yu. Matveev, Yu. V. Nesterenko, V. N. Chubarikov, M. V. Shamolin. Vladimir Grigorievich Chirskij (to the 70th anniversary)	584
РЕДКОЛЛЕГИЯ	595
THE EDITORIAL BOARD	599