

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Научно-теоретический журнал

Издается с 2001 года

Выходит 4 раза в год

Свидетельство о регистрации

СМИ: ПИ № ФС77-47855

ISSN 2226-8383

Том XIX

Выпуск 4 (68)

Тула

2018

Учредитель: ФГБОУ ВО
«ТГПУ им. Л. Н. Толстого»

Каталог «Пресса России»
Подписной индекс 10642

Адрес редакции: 300026,

г. Тула, пр. Ленина, 125,
каб. 310

Тел: +79156812638,
8(4872)374051

E-mail: cheb@tsput.ru

URL:
<http://www.chebsbornik.ru>

Выпуск осуществлен при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках государственного контракта № 14.597.11.0035

В журнале публикуются оригинальные статьи по направлениям современной математики: теория чисел, алгебра и математическая логика, теория функций вещественного и комплексного переменного, функциональный анализ, дифференциальные уравнения, математическая физика, геометрия и топология, теория вероятностей и математическая статистика, численные методы, теория оптимизации и др.

Также публикуются статьи о памятных датах и юбилеях.

Журнал включен в перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание ученых степеней кандидата наук и доктора наук (перечень ВАК), индексируются и/или реферируются: Scopus, MathSciNet, Zentralblatt MATH, Russian Science Citation Index (RSCI), РЖ «Математика», «Mathematical Reviews», РИНЦ, Google Scholar Metrics.

Журнал выходит под эгидой Министерство науки и высшего образования Российской Федерации, Российской академии наук, Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Московского педагогического университета, Тульского государственного университета.

Главный редактор

В. Н. Чубариков (Россия, г. Москва)

Заместители главного редактора: Н. М. Добровольский (Россия, г. Тула),

А. В. Михалёв (Россия, г. Москва), А. И. Нижников (Россия, г. Москва)

Приглашенный редактор: А. А. Соловьёв (Россия, г. Москва)

Редакционная коллегия:

В. А. Артамонов (Россия, г. Москва)

В. А. Быковский (Россия, г. Хабаровск)

С. В. Востоков (Россия, г. Санкт-Петербург)

А. Е. Гвоздев (Россия, г. Тула)

Д. В. Георгиевский (Россия, г. Москва)

М. М. Глухов (Россия, г. Москва)

С. А. Гриценко (Россия, г. Москва)

С. С. Демидов (Россия, г. Москва)

В. Г. Дурнев (Россия, г. Ярославль)

А. Р. Есаян (Россия, г. Москва)

А. М. Зубков (Россия, г. Москва)

В. И. Иванов (Россия, г. Тула)

В. К. Карташов (Россия, г. Волгоград)

М. А. Королёв (Россия, г. Москва)

В. Н. Кузнецов (Россия, г. Саратов)

В. Н. Латышев (Россия, г. Москва)

Ответственный секретарь

Н. Н. Добровольский (Россия, г. Тула)

Ю. В. Матиясевич (Россия, г. Санкт-Петербург)

С. П. Мищенко (Россия, г. Ульяновск)

Ю. В. Нестеренко (Россия, г. Москва)

В. А. Панин (Россия, г. Тула)

А. А. Фомин (Россия, г. Москва)

В. Г. Чирский (Россия, г. Москва)

А. Я. Белов (Израиль, г. Рамат Ган)

В. И. Берник (Беларусь, г. Минск)

П. О. Касьянов (Украина, г. Киев)

А. Лауринчикас (Литва, г. Вильнюс)

Лю Юнпин (Китай, г. Пекин)

М. Дж. Марданов (Азербайджан, г. Баку)

З. Рахмонов (Таджикистан, г. Душанбе)

Х. М. Салиба (Ливан)

А. Х. Табари (Таджикистан, г. Куляб)

От редакции

Данный выпуск Чебышевского сборника посвящен
семидесятилетию выдающегося советского и
российского математика-геофизика, академика РАН,
доктора физико-математических наук, профессора
Алексея Джерменовича Гвишиани.

Сборник открывается статьёй о жизни и научной
деятельности
Алексея Джерменовича Гвишиани

СОДЕРЖАНИЕ

Том 19 Выпуск 4

От редакции	3
А. А. Соловьёв, Р. И. Краснощёров. К 70-летию академика РАН Алексея Джерменовича Гвишиани	5
С. М. Агаян, Д. А. Камаев, Ш. Р. Богоутдинов, А. С. Павельев. Гравитационное сглаживание временных рядов (спектральные свойства)	11
В. Г. Гетманов. Локальные и сплайновые аппроксимации в цифровой обработке геомагнитных наблюдений	26
Г. М. Журавлев, А. Е. Гвоздев, А. Г. Колмаков, А. Н. Сергеев, Д. В. Малий. Применение математического метода локальных вариаций для решения задач пластического формоизменения металлических, порошковых и наноконпозиционных материалов	43
В. Г. Кособоков, А. А. Соловьёв. Распознавание образов в задачах оценки сейсмической опасности	55
Р. Ю. Лукьянова. Численное моделирование параметров полярной ионосферы	91
А. А. Лушников. Эволюционные уравнения и случайные графы	103
И. Ю. Реброва, В. Н. Чубариков, Н. Н. Добровольский, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский. О классических теоретико-числовых сетках	118
С. А. Скобельцын, И. С. Федотов, А. С. Титова. Дифракция звука на упругом шаре с неоднородным покрытием и полостью в полупространстве	177
А. А. Соловьёв. Методы геоинформатики и нечеткой математики в анализе геофизических данных	194
Л. А. Толоконников. Дифракция сферической звуковой волны на упругом цилиндре с неоднородным покрытием	215
П. Н. Шебалин. Математические методы анализа и прогноза афтершоков землетрясений: необходимость смены парадигмы	227
КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ	
В. Н. Кузнецов, О. А. Матвеева. Аналог теоремы Даффина-Шеффера для одного класса рядов Дирихле с конечнозначными коэффициентами	243
В. Н. Чубариков, Н. М. Салиба. Теорема о среднем для неполных рациональных тригонометрических сумм	252
РЕДКОЛЛЕГИЯ	259
THE EDITORIAL BOARD	263
ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ РУКОПИСЕЙ	267
TABLE OF CONTENTS	267



Алексей Джерменович Гвишиани

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 19. Выпуск 4

УДК 51(09)

DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-4-5-10

К 70-летию академика РАН Алексея Джерменовича Гвишиани

Соловьёв Анатолий Александрович — доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, заместитель директора по науке, заведующий лабораторией, главный научный сотрудник, Геофизический центр РАН; ведущий научный сотрудник, Институт физики Земли им. О. Ю. Шмидта РАН.

e-mail: a.soloviev@gcras.ru

Краснопёров Роман Игоревич — кандидат физико-математических наук, ученый секретарь, ведущий научный сотрудник, Геофизический центр РАН.

*e-mail: r.krasnoperov@gcras.ru***Для цитирования:**

А. А. Соловьёв, Р. И. Краснопёров. К 70-летию академика РАН Алексея Джерменовича Гвишиани // Чебышевский сборник, 2018, т. 19, вып. 4, с. 5–10.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 19. No. 4

UDC 51(09)

DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-4-5-10

**The 70th anniversary of academician RAS
Alexey Dzhermenovich Gvishiani**

Soloviev Anatoly Aleksandrovich — D.Sc., Corresponding member of the Russian Academy of Sciences, Deputy Director for Research, Chief of laboratory, Principal research scientist, Geophysical Center RAS; Leading research scientist, Schmidt Institute of Physics of the Earth RAS.

e-mail: a.soloviev@gcras.ru

Krasnoperov Roman Igorevich — PhD, scientific secretary, leading research scientist, Geophysical Center RAS.

*e-mail: r.krasnoperov@gcras.ru***For citation:**

A. A. Soloviev, R. I. Krasnoperov, 2018, "The 70th anniversary of academician RAS Alexey Dzhermenovich Gvishiani", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 4, pp. 5–10.

Алексей Джерменович Гвишиани родился 29 октября 1948 года в Москве. В 1966 году он поступает на отделение математики механико-математического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова (МГУ) и успешно его заканчивает в 1971 году. В этом же году А. Д. Гвишиани начинает преподавать на механико-математическом факультете МГУ, пройдя путь от ассистента до профессора кафедры теории функций и функционального анализа.

Карьеру ученого Алексей Джерменович начал в 1975 году как научный сотрудник Института физики Земли АН СССР им. О. Ю. Шмидта, а затем возглавил рабочую группу и лабораторию. С 1991 по 2005 год он руководит Центром изучения геофизических данных и сетевых технологий (ЦИГЕД) Объединенного института физики Земли им. О. Ю. Шмидта РАН (ОИФЗ РАН). С 1999 по 2012 год Алексей Джерменович является заместителем генерального директора ОИФЗ РАН, затем заместителем директора Института физики Земли им. О. Ю. Шмидта РАН (ИФЗ РАН). С 1997 года он руководит Отделением математической геофизики и геоинформатики ИФЗ РАН. С 2005 года Алексей Джерменович является директором Геофизического центра РАН и занимает пост председателя Национального геофизического комитета РАН, представляющего Россию в Международном геодезическом и геофизическом союзе (IUGG).

В 2006 году Алексей Джерменович был избран членом-корреспондентом Российской академии наук по специальности «геоинформатика» Отделения наук о Земле (ОНЗ), в 2011 году – академиком РАН. Кроме того, он является членом Европейской академии («Academia Europaea») по секции «Earth and Cosmic Sciences» (2017 г.), действительным иностранным членом Национальной академии наук Украины (2003 г.) и почетным членом Румынской академии инженерных и технических наук (2015 г.).

Академик Гвишиани не только всемирно признанный специалист в области математической геофизики, оценки сейсмической опасности, геоинформатики и системного анализа геофизических данных. Он автор почти 400 научных работ, включая 14 монографий, и пяти книг, изданных на русском, английском, французском, венгерском и итальянском языках. Работы Алексея Джерменовича опубликованы в соавторстве с выдающимися учеными и академиками АН СССР – И. М. Гельфандом, М. А. Садовским, В. Н. Страховым, Н. П. Лаверовым, В. Г. Бондуrom, В. И. Кейлис-Бороком, И. Ф. Образцовым, В. И. Осиповым и др.

Многие годы созидательного научного и творческого труда в области математики позволили А. Д. Гвишиани получить выдающиеся результаты в теории представления групп. Он сумел доказать формулу Гельфанда–Граева–Гвишиани для характеров представлений дискретных серий группы G матриц второго порядка с элементами из локального неархимедова поля и описать представления производной группы G^X (1973–1974 гг.). Им также описаны новые свойства преобразования Радона над локальным неархимедовым полем и изучены представления группы $G=SL(2)$ в пространстве функций на плоскости Лобачевского (1974–1978 гг.).

В области математической геофизики и геоинформатики академик Гвишиани ввел классы динамических задач распознавания и построил математическую теорию оценки стабильности предельных решений в динамических задачах распознавания. В 1979–1984 годы им было построено новое семейство алгоритмов «Голосование» по набору признаков для решения динамических задач распознавания. С 1978 по 1990 годы, в рамках модели таких задач и объективной классификации, Алексей Джерменович занимался проблемой распознавания мест сильных землетрясений с оценкой его достоверности в различных сейсмичных регионах земного шара.

С конца 1990-х годов он работает над созданием новых методов иерархической кластеризации пространственных объектов на базе дискретного математического анализа и их приложениями в геофизике и геодинاميке. В то же время он занимается проблемой алгоритмизации распознавания аномальной активности на временных рядах на базе теории нечетких

множеств. Полученные им результаты нашли применение в анализе длинных рядов геофизических наблюдений при мониторинге вулканической активности и геомагнитного поля. Одним из его последних значимых результатов является создание, совместно с сотрудниками и учениками, алгоритма распознавания образов FCAZ (Fuzzy Clustering And Zoning) для определения регионов повышенной сейсмической опасности. В 2016 году он опубликовал ряд новых алгоритмов дихотомии с обучением по одному классу.

Благодаря ярким способностям научного руководителя, академик Гвишиани создал одну из ведущих в нашей стране научных школ по геоинформатике. За годы ее существования были подготовлены 2 докторские и 14 кандидатских диссертаций.

Под руководством Алексея Джерменовича с 2009 года реализуется проект развития российского сегмента международной системы наблюдений магнитного поля Земли INTERMAGNET, предоставляющей данные высшего стандарта качества. В 2014–2016 годы в Геофизическом центре РАН был создан инновационный аппаратно-программный комплекс МАГНУС (Мониторинг и Анализ Геомагнитных аномалий в Унифицированной Среде), предназначенный для эффективного сбора, хранения, обработки и интеллектуального анализа геомагнитных данных. Помимо того, что система успешно развивается в наши дни, она является ядром российской сети магнитных обсерваторий и обеспечивает скоординированную обработку наземных и спутниковых наблюдений магнитного поля Земли.

На протяжении своей научной карьеры Алексей Джерменович активно занимается научно-организационной деятельностью. Он занимает посты в рабочих и руководящих органах ряда российских и международных научных организаций. Среди них – заместитель академика-секретаря и член Бюро ОНЗ РАН, член экспертного совета Российского научного фонда (РНФ), заместитель председателя Комитета по системному анализу РАН и член экспертной комиссии по присуждению золотой медали имени В. И. Вернадского за выдающиеся научные работы в области наук о Земле. А. Д. Гвишиани – член Национального комитета геологов России, член Русского географического общества, действующий член Коллегии экспертов Европейского научного фонда.

Вместе с тем в 1991 году Алексей Джерменович был полным приглашенным профессором в Институте физики Земли в г. Страсбурге (Франция), а с 1992 по 2012 годы – в Парижском институте физики Земли (Франция). Академик Гвишиани входит в руководящие органы Международного института прикладного системного анализа (г. Лаксенбург, Австрия), являясь вице-председателем Совета института (2016–2018 гг.). Он занимал высокие руководящие посты вице-президента международной научной организации CODATA (2002–2006 гг.), вице-президента Европейского средиземноморского сейсмологического центра (1996–2003 гг.) и вице-председателя Панели Мировых центров данных Международного совета по науке (ICSU) (1996–2006 гг.). В 2013–2018 гг. он входил в научно-координационный совет Федерального агентства научных организаций (ФАНО России).

Алексей Джерменович является главным редактором электронного научного журнала «Russian Journal of Earth Sciences», членом редакционных коллегий журналов «Физика Земли», «Исследование Земли из космоса», «Вестник Института геологии Коми научного центра УрО РАН», «Известия ВУЗов. Геодезия и аэрофотосъемка», «Геология и геофизика Юга России», «Кибернетика и системный анализ», «Системные исследования и информационные технологии», а также заместителем главного редактора электронного журнала «Вестник Отделения наук о Земле РАН».

В настоящем выпуске «Чебышевского сборника», который посвящен 70-летию юбилею академика Гвишиани, опубликованы работы его учеников и коллег.

Желаем Алексею Джерменовичу крепкого здоровья, новых творческих успехов и научных побед.

Член-корреспондент РАН

Анатолий Александрович Соловьёв

Кандидат физико-математических наук

Роман Игоревич Краснощёров

Получено 08.08.2018

Принято в печать 22.10.2018

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 19. Выпуск 4

УДК 517

DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-4-11-25

**Гравитационное сглаживание временных рядов
(спектральные свойства)¹**

Агаян Сергей Мартикович — доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, Геофизический центр РАН.

e-mail: s.agayan@gcras.ru

Камаев Дмитрий Альфредович — доктор технических наук, заведующий лабораторией, Научно-производственное объединение «Тайфун».

e-mail: kda@feerc.ru

Богоутдинов Шамиль Рафекович — кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Геофизический центр РАН; старший научный сотрудник, Институт физики Земли им. О. Ю. Шмидта РАН.

e-mail: shm@gcras.ru

Павельев Артем Сергеевич — программист, ООО «ШТОРМ Технологии».

e-mail: artem.pavelyev@yandex.ru

Аннотация

Настоящая статья продолжает цикл работ авторов по разработке математических аспектов методов искусственного интеллекта для обработки наблюдений, проведенных под руководством академика А.Д.Гвишиани, начиная с 2000-го года. Она посвящена новому универсальному методу сглаживания, первоначально предназначенному для анализа геофизических временных рядов. Гравитационные сглаживания легли в основу изучения ускорения векового хода главного магнитного поля Земли на основе данных обсерваторий сети ИНТЕРМАГНЕТ. Но свойства оператора сглаживания до сих пор не были изучены. Данная статья — первый шаг в этом направлении.

Ключевые слова: Гравитационное сглаживание, невязка гравитационной гладкости, меры близости, оператор сглаживания, собственные значения, спектральные свойства.

Библиография: 17 названий.

Для цитирования:

С. М. Агаян, Д. А. Камаев, Ш. Р. Богоутдинов, А. С. Павельев. Гравитационное сглаживание временных рядов (спектральные свойства) // Чебышевский сборник, 2018, т. 19, вып. 4, с. 11–25.

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 16-17-00121).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 19. No. 4

UDC 517

DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-4-11-25

Gravitation smoothing of time series (spectral properties)**Agayan Sergey Martikovich** — D.Sc., Principal research scientist, Geophysical Center RAS.*e-mail: s.agayan@gcras.ru***Kamaev Dmitry Alfredovich** — D.Sc., Chief of laboratory, NPO Taifun, Russian Federal Survey for Hydrometeorology and Environmental Monitoring.*e-mail: kda@feerc.ru***Bogoutdinov Shamil Rafekovich** — PhD, Leading research scientist, Geophysical Center RAS, Moscow; Senior research scientist, Schmidt Institute of Physics of the Earth RAS.*e-mail: shm@gcras.ru***Pavelev Artem Sergeevich** — programmer, SHTORM Technology Ltd.*e-mail: artem.pavelev@yandex.ru***Abstract**

This article continues the cycle of works by authors on the development of mathematical aspects methods of artificial intelligence for the processing of observations conducted under the guidance of academician A.D. Gvishiani, which was began in 2000. It is devoted to a new universal method of smoothing, originally intended for the analysis of geophysical time series. Gravitational smoothing formed the basis for studying the acceleration of the secular course of the Earth's main magnetic field with using of the observational data of the INTERMAGNET network. But the properties of the smoothing operator have not been studied so far. This article is first step to this goal.

Keywords: gravitation smoothing, discrepancy of gravitational smoothing, proximity measures, smoothing operator, eigenvalues, spectral properties.

Bibliography: 17 titles.

For citation:

S. M. Agayan, D. A. Kamaev, Sh. R. Bogoutdinov, A. S. Pavelev, 2018, "Gravitation smoothing of time series (spectral properties)", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 4, pp. 11–25.

1. Введение

Временные ряды – это одна из наиболее распространенных форм представления исходных данных систем мониторинга в задачах физики, геофизики, метеорологии, экологии, экономики, социологии и многих других наук. Последовательные значения исследуемых характеристик отражают как внутреннюю динамику объектов, так и их взаимные связи и изменчивость этих связей во времени.

Сглаживание временных рядов является одним из наиболее мощных инструментов их изучения. В общей стохастической обстановке сглаживание временного ряда можно рассматривать как возможный вариант его идеального течения. Двойственным образом это обстоятельство дает подход к аномалиям на временных рядах: ими можно считать фрагменты значительных отклонений временных рядов от своих сглаживаний.

Кроме того, сглаживания зачастую устроены проще, поддаются более простому анализу и потому служат эффективной аппроксимацией временных рядов.

На сегодняшний день наиболее известными методами сглаживания являются регрессионный анализ, метод конечных элементов и сплайнов, Фурье- и вейвлет-сглаживания и их обобщения на основе разложений по ортогональным системам функций и частотно-временного анализа [1, 2, 3, 4, 5, 6].

Настоящая статья продолжает цикл работ авторов по разработке математических аспектов методов искусственного интеллекта для обработки наблюдений [7, 8, 9, 10, 11, 12], проведенных под руководством академика А.Д.Гвишиани, начиная с 2000-го года. Она посвящена новому универсальному методу сглаживания, первоначально предназначенному для анализа геофизических временных рядов [13, 14].

Гравитационные сглаживания легли в основу изучения ускорения векового хода главного магнитного поля Земли на основе данных обсерваторий сети ИНТЕРМАГНЕТ [15].

Но свойства оператора сглаживания до сих пор не были изучены. Данная статья – первый шаг в этом направлении.

2. Гравитационное сглаживание

2.1. Общая схема ДМА-сглаживания

Пусть $BP[a, b]$ – пространство конечных временных рядов на дискретном отрезке $[a, b]$ с узлами t_i , $i = 0, 1, \dots, N$, $t_0 = a$, $t_N = b$. Соответствие $y_i = y(t_i)$ превращает $BP[a, b]$ в $(N + 1)$ -мерное пространство.

Для заданного временного ряда $(y_0, \dots, y_N)$ рассматривается задача его сглаживания $\text{Sm}(y) = x \in BP[a, b]$, которая формализуется следующей схемой

$$[x = \text{сглаживание } y] = [x = \text{приближение } y] \wedge [x = \text{гладкий временной ряд}]$$

Приближение формализуется функционалом квадратичной невязки:

$$\text{Sc}(x | y) = \|x - y\|^2 = \sum_i (x_i - y_i)^2$$

Гладкость формализуется невязкой гладкости $\text{CG}(x)$.

Содержательная одновременная минимизация невязок осуществляется за счет использования взвешенной суммы:

$$\text{Sm}_\lambda(x | y) = \lambda \text{CG}(x) + (1 - \lambda) \text{Sc}(x | y)$$

Поиск сглаживания $x = \text{Sm}_\lambda(y)$ сводится к минимизации функционала $\text{Sm}_\lambda(x | y)$:

$$x = \text{Sm}_\lambda(y) \iff \text{grad}_x(\text{Sm}_\lambda(x | y)) = 0$$

2.2. Общий вид оператора сглаживания

Пусть невязка гладкости задается неотрицательной квадратичной формой:

$$CG(x) = (Gr\,x, x)$$

Тогда

$$\begin{aligned} Sm_\lambda(x|y) &= \lambda(Gr\,x, x) + (1 - \lambda)\|x - y\|^2 = \lambda(Gr\,x, x) + (1 - \lambda)(x - y, x - y) = \\ &= ((\lambda Gr + (1 - \lambda)E)x, x) - 2(1 - \lambda)(x, y) + (1 - \lambda)\|y\|^2 \end{aligned}$$

Минимизация $Sm_\lambda(x|y)$ равносильна минимизации функционала

$$\widetilde{Sm}_\lambda(x|y) = ((\lambda Gr + (1 - \lambda)E)x, x) - 2(1 - \lambda)(x, y).$$

Очевидно,

$$\text{grad}_x(\widetilde{Sm}_\lambda(x|y)) = (\lambda Gr + (1 - \lambda)E)x - (1 - \lambda)y.$$

Следовательно,

$$x = Sm_\lambda(y) \iff (\lambda Gr + (1 - \lambda)E)x = (1 - \lambda)y.$$

Оператор $\lambda Gr + (1 - \lambda)E$ строго положителен, поэтому оператор сглаживания может быть представлен в форме:

$$Sm_\lambda = (1 - \lambda)(\lambda Gr + (1 - \lambda)E)^{-1}.$$

2.3. Общий вид оператора сглаживания с весами

Предположим, что по характеру данных каждому узлу t_i на отрезке $[a, b]$ можно сопоставить свой вес $v_i \geq 0$. Обозначим через V их множество $v_i \in V$.

Рассмотрим способы учета весов при построении гравитационного сглаживания. Построение оператора сглаживания осуществляется на основе минимизации функционала

$$Sm_\lambda(x|y) = \lambda CG(x) + (1 - \lambda) Sc(x|y),$$

поэтому учет весов может происходить через невязку $CG(x)$, функционал сканирования $Sc(x|y)$, и множитель λ . Слагаемые функционала сглаживания, в которые входят (не входят) веса, будем обозначать введением индекса V .

Возможны следующие варианты учета весов

1. $Sm_\lambda(x|y) = \lambda CG(x) + (1 - \lambda) Sc(x|y),$
2. $VSm_\lambda(x|y) = \lambda CG(x) + (1 - \lambda) Sc_V(x|y),$
3. $SmV_\lambda(x|y) = \lambda CG_V(x) + (1 - \lambda) Sc(x|y),$
4. $VSmV_\lambda(x|y) = \lambda CG_V(x) + (1 - \lambda) Sc_V(x|y),$
5. $Sm_{\lambda_V}(x|y) = \lambda_V CG(x) + (1 - \lambda_V) Sc(x|y),$
6. $VSm_{\lambda_V}(x|y) = \lambda_V CG(x) + (1 - \lambda_V) Sc_V(x|y),$
7. $SmV_{\lambda_V}(x|y) = \lambda_V CG_V(x) + (1 - \lambda_V) Sc(x|y),$
8. $VSmV_{\lambda_V}(x|y) = \lambda_V CG_V(x) + (1 - \lambda_V) Sc_V(x|y).$

Кроме перечисленных возможны варианты за счет использования разных наборов весов для различных слагаемых функционала сглаживания.

2.4. Гравитационная невязка гладкости: нулевой уровень

Роль окрестности узла t_i выполняет нечеткая структура $\delta_{t_i}(t_j)$, выражающая свойство близости к t_i остальных узлов: $\delta_{t_i}(t_j)$ – степень близости узла t_j к узлу t_i . Всегда должно быть:

$$\delta_{t_i}(t_j) \in [0, 1], \quad \delta_{t_i}(t_i) = 1,$$

при этом возможны случаи $\delta_{t_i}(t_j) \neq \delta_{t_j}(t_i)$.

С мерой близости $\delta_{t_i}(t_j)$ связывается матрица

$$A = (a_{ij}), \quad a_{ij} = \frac{\delta_{t_i}(t_j)}{\sum_{k=0}^N \delta_{t_i}(t_k)},$$

$$i = 0, 1, \dots, N, \quad j = 0, 1, \dots, N, \quad \sum_j a_{ij} = 1$$

Заметим, что матрицу A можно представить в форме:

$$A = K A_0,$$

где $A_0 = (\delta_{t_i}(t_j))$, $K \equiv \text{diag}(k_i) = \text{diag}\left(\frac{1}{\sum_{k=0}^N \delta_{t_i}(t_k)}\right)$.

Дискретное выражение гравитационной непрерывности для ряда $x_i = x(t_i)$ в узле $t_i \in [a, b]$ означает равенство:

$$x_i = \sum_{j=0}^N x_j a_{ij},$$

Соответственно, отклонение от равенства есть невязка гравитационной непрерывности в узле $t_i \in [a, b]$:

$$\text{CGr}^0(x)(t_i) = \left(x_i - \sum_{j=0}^N x_j a_{ij} \right)^2$$

Общая невязка гравитационной непрерывности на $[a, b]$, выражающая отклонение по всем узлам, получается суммированием с весами:

$$\begin{aligned} \text{CGV}^0(x)(t_i) &= \sum_{i=0}^N v_i \left(x_i - \sum_{j=0}^N a_{ij} x_j \right)^2 = \\ &= (V(A - E)x, (A - E)x) = \\ &= ((A - E)^* V (A - E)x, x) \equiv (G_V x, x), \end{aligned}$$

где матрица $V = \text{diag}(v_i)$

В соответствии с вариантами 1)-4) оператор сглаживания с весами имеет вид:

1. $\text{Sm}_\lambda(y) = (1 - \lambda)(\lambda G + (1 - \lambda)E)^{-1}y,$
2. $\text{VSm}_\lambda(y) = (1 - \lambda)(\lambda G + (1 - \lambda)E)^{-1}Vy,$
3. $\text{SmV}_\lambda(y) = (1 - \lambda)(\lambda G_V + (1 - \lambda)E)^{-1}y,$
4. $\text{VSmV}_\lambda(y) = (1 - \lambda)(\lambda G_V + (1 - \lambda)E)^{-1}Vy$

В случае, когда учет весов происходит через множитель λ , функционал $\text{Sm}_{\lambda_V}(x|y)$ имеет вид:

$$\begin{aligned}\text{Sm}_{\lambda_V}(x|y) &= \lambda_V \text{CG}(x) + (1 - \lambda_V) \text{Sc}(x|y) = \\ &= \sum_{i=0}^N \left[\lambda_i \left(x_i - \sum_{j=0}^N a_{ij} \right)^2 + (1 - \lambda_i)(x_i - y_i)^2 \right] = \\ &= (A(A - E)x, (A - E)x) + ((E - A)(x - y), (x - y)),\end{aligned}$$

где матрица $A = \text{diag}(\lambda_i)$. Следовательно, в соответствии с вариантами 5)-8) оператор сглаживания с весами имеет вид:

5. $\text{Sm}_{\lambda_V}(y) = (E - A)(A G + (E - A))^{-1}y,$
6. $\text{VSm}_{\lambda_V}(y) = (E - A)(A G + (E - A))^{-1}V y,$
7. $\text{SmV}_{\lambda_V}(y) = (E - A)(A G_V + (E - A))^{-1}y,$
8. $\text{VSmV}_{\lambda_V}(y) = (E - A)(A G_V + (E - A))^{-1}V y.$

3. Свойства гравитационного сглаживания

3.1. Спектральные свойства оператора сглаживания

С учетом выражений для оператора сглаживания, задачи на собственные значения в каждом из случаев 1).-8) приводят к необходимости рассматривать спектральную задачу для пучка, порожденного оператором гравитационной невязки – таблица 1.

Спектральные свойства оператора сглаживания существенным образом зависят от матриц G , V , A , т.е. от свойств нечеткой структуры $\delta_{t_i}(t_j)$ и весов. Будем говорить, что нечеткая структура $\delta_{t_i}(t_j)$ симметрична, если справедливо равенство:

$$\delta_{t_i}(t_j) = \delta(i - j),$$

где функция $\delta(\xi)$ является четной, неотрицательной, $\delta(0) = 1$.

Например, в случае равномерной сетки: $t_i = a + ih$, $i = 0, 1, \dots, N$, $t_N = b = a + Nh$, $h = (b - a)/N$ нечеткая структура будет симметричной, если

$$\delta_{t_i}(t_j) = a(|t_i - t_j|) = a(h(i - j)),$$

где функция $a(\xi)$ является четной, неотрицательной, $a(0) = 1$.

Примером может служить нечеткая структура вида:

$$\delta(|t_i - t_j|) \equiv \delta(i - j) = \begin{cases} \left(1 - \frac{|i-j|}{r}\right)^p, & |i - j| < r < N \\ 0, & |i - j| \geq r \end{cases}$$

№	Спектральная задача	Спектральная задача для пучка
1	$\text{Sm}_\lambda(y) = \mu y$	$G(y) \equiv (A - E)^* (A - E), y = \frac{(1-\lambda)(1-\mu)}{\lambda\mu} y$, таким образом, если $\nu_0, \dots, \nu_N$ – собственные числа оператора G , то $\mu(\nu_0), \dots, \mu(\nu_N)$ – собственные числа оператора сглаживания, где $\mu(\nu) = \left(1 + \frac{\lambda}{1-\lambda}\nu\right)^{-1}$
2	$\text{VSm}_\lambda(y) = \mu y$	$G(y) \equiv (A - E)^* (A - E), y = \frac{1-\lambda}{\lambda\mu} (V - \mu E) y$
3	$\text{SmV}_\lambda(y) = \mu y$	$G_V(y) \equiv (A - E)^* V (A - E), y = \frac{(1-\lambda)(1-\mu)}{\lambda\mu} y$, таким образом, если $\nu_0, \dots, \nu_N$ – собственные числа оператора G_V , то $\mu(\nu_0), \dots, \mu(\nu_N)$ – собственные числа оператора сглаживания, где $\mu(\nu) = \left(1 + \frac{\lambda}{1-\lambda}\nu\right)^{-1}$
4	$\text{VSmV}_\lambda(y) = \mu y$	$G_V(y) \equiv (A - E)^* V (A - E), y = \frac{1-\lambda}{\lambda\mu} (V - \mu E) y$
5	$\text{Sm}_{\lambda_V}(y) = \mu y$	$G(z) \equiv (A - E)^* (A - E), z = \frac{1-\mu}{\mu} (\Lambda^{-1} - E) z, y = (E - \Lambda)z$, таким образом, если $\nu_0, \dots, \nu_N$ – собственные числа задачи $G(z) = \nu (\Lambda^{-1} - E) z$ то $\mu(\nu_0), \dots, \mu(\nu_N)$ – собственные числа оператора сглаживания, где $\mu(\nu) = (1 + \nu)^{-1}$
6	$\text{VSm}_{\lambda_V}(y) = \mu y$	$G(z) \equiv (A - E)^* (A - E), z = \Lambda^{-1} \left(\frac{1}{\mu} V - E\right) (E - \Lambda)z$, $y = (E - \Lambda)z$
7	$\text{SmV}_{\lambda_V}(y) = \mu y$	$G_V(z) \equiv (A - E)^* V (A - E), z = \frac{1-\mu}{\mu} (\Lambda^{-1} - E) z$, $y = (E - \Lambda)z$, таким образом, если $\nu_0, \dots, \nu_N$ – собственные числа задачи $G_V(z) = \nu (\Lambda^{-1} - E) z$, то $\mu(\nu_0), \dots, \mu(\nu_N)$ – собственные числа оператора сглаживания, где $\mu(\nu) = (1 + \nu)^{-1}$
8	$\text{VSmV}_{\lambda_V}(y) = \mu y$	$G_V(z) \equiv (A - E)^* V (A - E), z = \Lambda^{-1} \left(\frac{1}{\mu} V - E\right) (E - \Lambda)z$, $y = (E - \Lambda)z$

Далее рассматриваются свойства оператора гравитационного сглаживания в случае симметричной нечеткой структуры.

Напомним, что матрицу A можно представить в форме:

$$A = K A_0,$$

где $A_0 = (\delta_{t_i}(t_j))$, $K \equiv \text{diag}(k_i) = \text{diag}\left(\frac{1}{\sum_{k=0}^N \delta_{t_i}(t_k)}\right)$.

ЛЕММА 1. Пусть нечеткая структура $\delta_{t_i}(t_j)$ симметрична, тогда A_0 – симметричная матрица и $k_i = k_{N-i}$, $i = 0, 1, \dots, N$

Доказательство

В силу симметрии нечеткой структуры получаем:

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & \delta(1) & \dots & \delta(N-1) & \delta(N) \\ \delta(1) & 1 & \dots & \delta(N-2) & \delta(N-1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta(i) & \dots & 1 & \dots & \delta(N-i) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta(N) & \dots & \dots & \delta(1) & 1 \end{pmatrix}$$

По определению

$$k_i = \frac{1}{\sum_{k=0}^N \delta_{t_i}(t_k)}.$$

Рассмотрим сумму

$$k_i^{-1} = \sum_{k=0}^N \delta_{t_i}(t_k) = \delta(i) + \delta(i-1) + \dots + \delta(1) + \delta(0) + \delta(1) + \dots + \delta(N-i).$$

Очевидно, $k_{N-i}^{-1} = \delta(N-i) + \delta(N-i-1) + \dots + \delta(1) + \delta(0) + \delta(1) + \dots + \delta(i)$. Таким образом, $k_i = k_{N-i}$.

Доказательство завершено

Пусть $x = (x_0, x_1, \dots, x_{N-1}, x_N)$. Введем преобразование S - отражение (перестановка) компонент вектора «относительно центра»:

$$Sx = \bar{x} = (x_N, x_{N-1}, \dots, x_1, x_0).$$

Нетрудно заметить, что

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S^2 = E$$

ЛЕММА 2. Пусть нечеткая структура $\delta_{t_i}(t_j)$ симметрична, а вектор x удовлетворяет условию симметрии: $Sx = x$ (антисимметрии: $Sx = -x$), тогда вектор

$$y = (A - E)^*(A - E)x$$

удовлетворяет условию симметрии.

Доказательство

Из леммы 1 и вида матрицы S вытекают соотношения $SKS = K$, $SA_0S = A_0$.

Пусть $Sx = x$. Рассмотрим $Sy = S(A - E)^*(A - E)x =$

$$\begin{aligned} & S(KA_0 - E)^*(KA_0 - E)x = \\ & = S(KA_0 - E)^*(KA_0 - E)Sx = S(KA_0 - E)^*SS(KA_0 - E)Sx = \\ & = (S(KA_0 - E)S)^*S(KA_0 - E)Sx. \end{aligned}$$

Вычислим: $S(KA_0 - E)S = SKSSA_0S - SES = (SKS)(SA_0S) - SS = KA_0 - E$. Следовательно, $Sy = y$.

Для случая антисимметричного вектора доказательство аналогичное.

Доказательство завершено

ТЕОРЕМА 1. Пусть нечеткая структура $\delta_{t_i}(t_j)$ симметрична, а весовые коэффициенты $V = \text{diag}(v_i)$, $\Lambda = \text{diag}(\lambda_i)$ удовлетворяют условиям $v_i = v_{N-i}$, $\lambda_i = \lambda_{N-i}$, $i = 0, 1, \dots, N$.

Тогда, если x - собственный вектор, соответствующий собственному числу μ , какой-либо спектральной задачи 1-8 из таблицы 1, то вектор $\bar{x} = Sx$ также является собственным вектором, соответствующим собственному числу μ .

Доказательство

Рассмотрим спектральную задачу для оператора Sm_λ , остальные рассматриваются аналогично. Если x - собственный вектор, то

$$(A - E)^*(A - E)x = \frac{(1 - \lambda)(1 - \mu)}{\lambda\mu}x$$

Следовательно, в силу соотношения $S^2 = E$ имеем:

$$S(A - E)^*(A - E)S\bar{x} = \frac{(1 - \lambda)(1 - \mu)}{\lambda\mu}\bar{x}$$

Далее, как и при доказательстве Леммы 2, обнаруживаем равенство

$$S(A - E)^*(A - E)S = (A - E)^*(A - E),$$

которое завершает доказательство.

Доказательство завершено

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть выполнены условия теоремы 1. Если собственное число имеет нечетную кратность, то среди соответствующих ему собственных векторов существует симметричный.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены условия теоремы 1, тогда любой собственный вектор x , соответствующий собственному числу μ , какой-либо спектральной задачи 1-8 из таблицы 1 представим в виде $x = x_+ + x_-$, где x_+ , x_- – ортогональные собственные векторы, соответствующие собственному числу μ , причем x_+ симметричен, x_- антисимметричен.

Доказательство

Как и в предыдущей теореме, рассмотрим спектральную задачу для оператора Sm_λ , остальные рассматриваются аналогично. Если x – собственный вектор, то

$$(A - E)^*(A - E)x = \frac{(1 - \lambda)(1 - \mu)}{\lambda\mu}x \quad (1)$$

Для x справедливо представление

$$x = x_+ + x_-,$$

где $x_+ = \frac{1}{2}(x + Sx)$, $x_- = \frac{1}{2}(x - Sx)$. Непосредственная проверка показывает, что $Sx_+ = x_+$, $Sx_- = -x_-$. А также

$$(x_+, x_-) = \left(\frac{1}{2}(x + Sx), \frac{1}{2}(x - Sx)\right) = \frac{1}{4}[(x, x) - (Sx, Sx)] = \frac{1}{4}[(x, x) - (x, SSx)] = 0.$$

По теореме 1

$$(A - E)^*(A - E)Sx = \frac{(1 - \lambda)(1 - \mu)}{\lambda\mu}Sx, \quad (2)$$

следовательно,

$$(A - E)^*(A - E)(x_+ - x_-) = \frac{(1 - \lambda)(1 - \mu)}{\lambda\mu}(x_+ - x_-)$$

Далее, складывая и вычитая спектральные равенства (1)-(2) для x и Sx , убеждаемся, что x_+ , x_- – ортогональные собственные векторы, соответствующие собственному числу μ .

Доказательство завершено

3.2. Спектральные свойства оператора сглаживания $\text{SmK}_\lambda^{-2}(y)$

$$\text{SmK}_\lambda^{-2}(y) = (1 - \lambda)(\lambda G_{K^{-2}} + (1 - \lambda)E)^{-1}y$$

Спектральная задача для оператора сглаживания $\text{SmV}_\lambda(y)$ существенно упрощается, если весовые коэффициенты выбраны в виде $V = K^{-2}$. В этом случае

$$\begin{aligned} (A - E)^*V(A - E) &= (A_0 - K^{-1})K^2V(A_0 - K^{-1}) = \\ &= (A_0 - K^{-1})K^2K^{-2}(A_0 - K^{-1}) = (A_0 - K^{-1})^2 \end{aligned}$$

Поэтому спектральная задача имеет вид:

$$G_{K^{-2}}(y) \equiv (A_0 - K^{-1})^2 y = \frac{(1 - \lambda)(1 - \mu)}{\lambda\mu} y, \quad (3)$$

таким образом, если $\nu_0, \dots, \nu_N$ – собственные числа оператора $G_{K^{-2}}$, то $\mu(\nu_0), \dots, \mu(\nu_N)$ – собственные числа оператора сглаживания, где $\mu(\nu) = \left(1 + \frac{\lambda}{1 - \lambda}\nu\right)^{-1}$.

При анализе задачи (3) рассмотрим случай локальной нечеткой структуры, которая порождает ленточную матрицу A_0 . В этом случае, если $(A_0)_j$ обозначает строку матрицы A_0 с номером j , то

$$(A_0)_j = (\delta_j \quad \dots \quad \delta_1 \quad 1 \quad \delta_1 \quad \dots \quad \delta_{k-1} \quad 0 \quad \dots \quad 0), \quad j = 0, \dots, k - 1;$$

$$(A_0)_j = (0 \quad \dots \quad 0 \quad \delta_{k-1} \quad \dots \quad \delta_1 \quad 1 \quad \delta_1 \quad \dots \quad \delta_{k-1} \quad 0 \quad \dots \quad 0), \quad j = k, \dots, N - k - 1;$$

$$(A_0)_j = (0 \quad \dots \quad 0 \quad \delta_{k-1} \quad \dots \quad \delta_1 \quad 1 \quad \delta_1 \quad \dots \quad \delta_{N-1-j}), \quad j = N - k, \dots, N - k$$

$$\begin{aligned} (A_0)_j &= (\delta_j \quad \dots \quad \delta_1 \quad 1 \quad \delta_1 \quad \dots \quad \delta_{k-1} \quad 0 \quad \dots \quad 0), \quad j = 0, \dots, k - 1; \\ (A_0)_j &= (0 \quad \dots \quad 0 \quad \delta_{k-1} \quad \dots \quad \delta_1 \quad 1 \quad \delta_1 \quad \dots \quad \delta_{k-1} \quad 0 \quad \dots \quad 0), \quad j = k, \dots, N - k - 1; \\ (A_0)_j &= (0 \quad \dots \quad 0 \quad \delta_{k-1} \quad \dots \quad \delta_1 \quad 1 \quad \delta_1 \quad \dots \quad \delta_{N-1-j}), \quad j = N - k, \dots, N - k \end{aligned}$$

$$K^{-1} = \begin{pmatrix} m_0 & 0 & & & & & & 0 \\ 0 & \ddots & & & & & & \\ & & m_{k-2} & & & & & \\ & & & m & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & m & & 0 \\ & & & & & & m_{k-2} & \\ & & & & & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & & & & 0 & m_0 \end{pmatrix}$$

где

$$m_0 = 1 + \delta_1 + \dots + \delta_{k-1};$$

$$m_1 = 1 + 2\delta_1 + \dots + \delta_{k-1};$$

...

$$m_{k-2} = 1 + 2\delta_1 + \dots + 2\delta_{k-2} + \delta_{k-1};$$

$$m = 1 + 2\delta_1 + \dots + \delta_{k-1};$$

Очевидно, спектральная задача (3) сводится к задаче

$$(A_0 - K^{-1}) u = \gamma u. \quad (4)$$

Из вида матрицы $A_0 - K^{-1}$ следует, что для $i = 0, \dots, N - 2k$ имеет место разностное соотношение с постоянными коэффициентами:

$$\delta_{k-1}u_i + \delta_{k-2}u_{i+1} + \dots + \delta_1u_{k+i-2} + (1 - m - \gamma)u_{i+k-1} + \delta_1u_{i+k} + \dots + \delta_{k-1}u_{2k+i-1} = 0 \quad (5)$$

Согласно общей теории [16], полагая $u_i = \omega^i$, находим характеристический многочлен $p(\omega, \gamma)$ для разностного соотношения (5):

$$\begin{aligned} p(\omega, \gamma) \equiv & \delta_{k-1}\omega^{2k-2} + \delta_{k-2}\omega^{2k-3} + \dots + \delta_1\omega^k + (1 - m - \gamma)\omega^{k-1} + \delta_1\omega^{k-2} \\ & + \dots + \delta_{k-2}\omega + \delta_{k-1} \end{aligned}$$

Или в симметричной записи:

$$p(\omega, \gamma) \equiv \delta_{k-1} \left(\left(\frac{1}{\omega} \right)^{k-1} + (\omega)^{k-1} \right) + \delta_{k-2} \left(\left(\frac{1}{\omega} \right)^{k-2} + (\omega)^{k-2} \right) + \dots + \delta_1 \left(\frac{1}{\omega} + \omega \right) + (1 - m - \gamma)$$

Очевидны следующие утверждения.

ЛЕММА 3. Если $\omega(\gamma)$ – корень многочлена $p(\omega, \gamma)$, то $\omega(\gamma) \neq 0$, и $(\omega(\gamma))^{-1}$ – корень $p(\omega, \gamma)$.

Многочлен $p(\omega, 0)$ имеет корень $\omega = 1$.

Если $\gamma \neq 0$, то многочлен $p(\omega, \gamma)$ не имеет корня равного 1.

Пусть γ , собственное число задачи (4), фиксировано и $\omega_1(\gamma), \dots, \omega_{q(\gamma)}(\gamma)$ – набор всех корней многочлена $p(\omega, \gamma)$. Обозначим через $s_\alpha(\gamma)$ кратность корня $\omega_\alpha(\gamma)$.

Тогда $s_1(\gamma) + \dots + s_{q(\gamma)}(\gamma) = 2k + 2$. Так как коэффициенты $p(\omega, \gamma)$ вещественные, то $q(\gamma) = q_0(\gamma) + 2q_1(\gamma)$, где $q_0(\gamma)$ – число различных вещественных корней, а $q_1(\gamma)$ – число различных корней с ненулевой мнимой частью и не являющихся комплексно сопряженными.

Общее решение разностного уравнения (5) можно представить в виде

$$u_j(\gamma) = \sum_{\alpha=1}^{q_0(\gamma)+q_1(\gamma)} g_\alpha(j, \gamma),$$

в котором паре корней $\sigma_\alpha(\gamma) \pm i\tau_\alpha(\gamma)$ соответствует слагаемое

$$g_\alpha(j, \gamma) = [a_\alpha(j)\cos(\tau_\alpha(\gamma)j) + b_\alpha(j)\sin(\tau_\alpha(\gamma)j)] \exp(\sigma_\alpha(\gamma)j),$$

где $a_\alpha(j)$, $b_\alpha(j)$ – многочлены степени $s_\alpha(\gamma) - 1$. (В приведенных формулах считается, что при $\tau_\alpha(\gamma) = 0$ пара корней вырождается в один корень).

Таким образом, общее решение разностного уравнения (5) имеет вид:

$$u_j(\gamma) = \sum_{\alpha=1}^{q_0(\gamma)+q_1(\gamma)} \exp(\sigma_\alpha(\gamma)j) \times$$

$$\times \left[\left(\sum_{\beta=0}^{s_\alpha(\gamma)-1} a_{\alpha\beta} j^\beta \right) \cos(\tau_\alpha(\gamma)j) + \left(\sum_{\beta=0}^{s_\alpha(\gamma)-1} b_{\alpha\beta} j^\beta \right) \sin(\tau_\alpha(\gamma)j) \right] \quad (6)$$

где $a_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$ – набор из $2k+2$ свободных параметров. Следовательно, формула (6) описывает структуру собственных векторов задачи (4), тем самым и задачи (3).

Для определения значений свободных параметров $a_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$ необходимо воспользоваться соотношениями: первыми и последними $k-1$ строками спектральной задачи (4).

Первые $k-1$ строки:

$$u_0 + \delta_1 u_1 + \dots + \delta_{k-1} u_{k-2} = (\gamma + m_0) u_0$$

$$\delta_1 u_0 + u_1 + \dots + \delta_{k-1} u_{k-1} = (\gamma + m_1) u_1$$

...

$$\delta_{k-2} u_0 + \delta_{k-3} u_1 + \dots + u_{k-2} + \delta_1 u_{k-1} + \dots + \delta_{k-1} u_{2k-2} = (\gamma + m_{k-2}) u_{k-2}$$

Или в матричной записи

$$B_1 v_1 = 0 \quad (7)$$

где $v_1 = (u_0, u_1, \dots, u_{2k-2})$

$$B_1(\gamma) = \begin{pmatrix} 1 - \gamma - m_0 & \delta_1 & \dots & \delta_{k-1} & 0 & \dots & 0 \\ \delta_1 & 1 - \gamma - m_1 & \dots & \delta_{k-2} & \delta_{k-1} & 0 & \dots & 0 \\ & & & & & & & \\ \delta_{k-2} & \dots & \delta_1 & 1 - \gamma - m_{k-2} & \delta_1 & \dots & \delta_{k-1} \end{pmatrix}$$

Аналогично, для последних $k-1$ строк получаем соотношение аналогичное (7)

$$B_2(\gamma) v_2 = 0, \quad v_2 = (u_{N-2k+1}, \dots, u_{N-1}) \quad (8)$$

Подставляя выражения (6) для u_j в (7-8), получаем выражения для векторов v_1, v_2 через неопределенные коэффициенты $a_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$:

$$v_i = C_1^i(\gamma) \overrightarrow{a_{\alpha\beta}} + C_2^i(\gamma) \overrightarrow{b_{\alpha\beta}}, \quad i = 1, 2,$$

где $\overrightarrow{a_{\alpha\beta}}$, $\overrightarrow{b_{\alpha\beta}}$ – векторы, порожденные наборами коэффициентов $a_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$. Следовательно,

$$\begin{cases} B_1(\gamma)(C_1^1(\gamma) \overrightarrow{a_{\alpha\beta}} + C_2^1(\gamma) \overrightarrow{b_{\alpha\beta}}) = 0 \\ B_2(\gamma)(C_1^2(\gamma) \overrightarrow{a_{\alpha\beta}} + C_2^2(\gamma) \overrightarrow{b_{\alpha\beta}}) = 0 \end{cases}$$

Или в матричной записи:

$$\begin{pmatrix} B_1(\gamma) & 0 \\ 0 & B_2(\gamma) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1^1(\gamma) & C_2^1(\gamma) \\ C_1^2(\gamma) & C_2^2(\gamma) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overrightarrow{a_{\alpha\beta}} \\ \overrightarrow{b_{\alpha\beta}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Таким образом, собственные числа γ должны удовлетворять системе уравнений:

$$\det \left(\begin{pmatrix} B_1(\gamma) & 0 \\ 0 & B_2(\gamma) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1^1(\gamma) & C_2^1(\gamma) \\ C_1^2(\gamma) & C_2^2(\gamma) \end{pmatrix} \right) = 0$$

Изложенным в настоящем пункте способом можно получить аналитические выражения для собственных векторов и собственных чисел оператора сглаживания $SmK^{-2}_\lambda(y)$ при $k=2$. В этом случае собственные числа имеют вид:

$$\mu(l) = (1 - \lambda) \left\{ 1 - \lambda + 4\lambda\delta_1^2 \left(1 - \cos \frac{\pi l}{N+1} \right)^2 \right\}^{-1}$$

Соответствующие им собственные векторы:

$$y_j^{(l)} = \cos \left(\frac{\pi l(2j+1)}{2(N+1)} \right), \quad j = 0, \dots, N$$

4. Заключение

Исследование спектральных свойств и собственных функций оператора гравитационного сглаживания позволяет оценивать его сглаживающие качества.

Спектральные свойства оператора гравитационного сглаживания существенным образом зависят от нечеткой структуры $\delta_{t_i}(t_j)$. В частности, численные расчеты показывают, что в случае, когда $\delta_{t_i}(t_j)$ отлично от нуля в малой окрестности точки t_i , т.е. имеет локальный характер, система собственных функций оператора сглаживания близка к системе тригонометрических функций. В случае нелокальной нечеткой структуры в системе собственных функций имеются аналоги всплесков (вейвлетов).

Обнаруженные свойства симметрии собственных функций оператора сглаживания есть следствие равномерности сетки на дискретном отрезке и симметрии используемой нечеткой структуры. Возможный шаг в исследовании несимметричного случая заключается в анализе методами теории возмущений [17] свойств собственных функций оператора сглаживания, порожденного симметричной нечеткой структурой, возмущенной несимметричным слагаемым.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самарский А. А. Введение в численные методы. // М.: Наука, 1982. 269 с.
2. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. // М.: Наука, 1989. 432 с.
3. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. // М.: Изд-во "Лаборатория базовых знаний", 2003. 632 с.
4. Пшеничный Б. Н., Данилин Ю. М. Численные методы в экстремальных задачах. // М.: Наука, 1975. 319 с.
5. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. // М.: РХД, 2001. 461 с.
6. Малла С. Вэйвлеты в обработке сигналов. // М.: Мир, 2005. 671 с.
7. Гвишиани А. Д., Диаман М., Михайлов В. О., Гальдеано А., Агаян С. М., Богоутдинов Ш. Р., Граева Е. М. Алгоритмы искусственного интеллекта для кластеризации магнитных аномалий // Физика Земли. 2002. № 7. С. 13–28.
8. Mikhailov V., Galdeano A., Diamant M., Gvishiani A., Agayan S., Bogoutdinov Sh., Graeva E., Sailhac P. A Application of artificial intelligence for Euler solutions clustering // Geophysics. 2003. Vol. 68, No. 1. P. 168–180.
9. Богоутдинов Ш. Р., Агаян С. М., Гвишиани А. Д., Граева Е. М., Родкин М. В., Злотники Ж., Ле Муэль Ж. Л. Алгоритмы нечеткой логики в анализе электротеллурических данных в связи с мониторингом вулканической активности. // Физика Земли. 2007. № 7. С. 72–85.
10. Гвишиани А. Д., Агаян С. М., Богоутдинов Ш. Р. Определение аномалий на временных рядах методами нечеткого распознавания // Докл. АН. 2008. Т. 421, № 1. С. 101–105.
11. Богоутдинов Ш. Р., Гвишиани А. Д., Агаян С. М., Соловьев А. А., Кин Э. Распознавание возмущений с заданной морфологией на временных рядах. I. Выбросы на магнитограммах всемирной сети ИНТЕРМАГНЕТ. // Физика Земли. 2010. № 11. С. 99–112.

12. Соловьев А. А., Агаян С. М., Гвишиани А. Д., Богоутдинов Ш. Р., Шулья А. Распознавание возмущений с заданной морфологией на временных рядах. II. Выбросы на секундных магнитограммах // *Физика Земли*. 2012. № 5. С. 37-52.
13. Гвишиани А. Д., Агаян С. М., Богоутдинов Ш. Р., Каган А. И. Гравитационное сглаживание временных рядов // *Труды Института математики и механики УрО РАН*. 2011. Т.17. № 2. С.62-70.
14. Agayan S. M., Bogoutdinov Sh. R., Dobrovolsky M. N., Kagan A. I. Weighted gravitational time series smoothing // 2014. *Russ. J. Earth Sci.* T.14. doi: 10.2205/2014ES000543
15. Soloviev A., Chulliat A., Bogoutdinov Sh. Detection of secular acceleration pulses from magnetic observatory data // 2017. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*. pp. 128-142. doi: 10.1016/j.pepi.2017.07.005
16. Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей // М.: ГИФМЛ, 1959, 400 с.
17. Уилкинсон Дж. Х. Алгебраическая проблема собственных значений // М.: Наука, 1970, 564 с.

REFERENCES

1. Samarskii A. A. 1982, "Introduction to numerical methods", *Moscow, Nauka*, 269 p.
2. Samarskii A. A., Gulin A. V. 1989, "Numerical methods", *Moscow, Nauka*, 432 p.
3. Bahvalov N. S., Zhidkov N. P., Kobelkov G. M. 2003, "Numerical methods", *Moscow, Publishing house "Laboratory of Basic Knowledge"*, 632 p.
4. Pshenichny, B. N., Danilin Yu. M. 1975, "Numerical Methods in Extremal Tasks", *Moscow, Nauka* 319 p.
5. Daubechies I. 1992, "Ten Lectures of Wavelets", *Springer-Verlag*, 369 p.
6. Mallat S. 1999, "Вэйвлеты в обработке сигналов", *Academic Press*, 620 p.
7. Gvishiani, A. D., Diamant M., Mikhailov V. O., Galdeano A., Agayan S. M., Bogoutdinov Sh. R., Graeva E. M. 2002, "Artificial Intelligence Algorithms for Magnetic Anomaly Clustering", *Izvestiya, Physics of the Solid Earth. English Translation Copyright by MAIK "Nauka/Interperiodica"*, *Russia*, vol. 38. pp. 545-559.
8. Mikhailov V., Galdeano A., Diamant M., Gvishiani A., Agayan S., Bogoutdinov Sh., Graeva E., Sailhac P. 2003, "A Application of artificial intelligence for Euler solutions clustering", *Geophysics*, vol. 68, no. 1, pp. 168-180.
9. Bogoutdinov Sh. R., Agayan S. M., Gvishiani A. D., Graeva E. M., Rodkin M. V., Zlotnicki J., Le Mou?l J. L. 2007, "Fuzzy logic algorithms in the analysis of electrotelluric data with reference to monitoring of volcanic activity", *Izvestiya, Physics of the Solid Earth. MAIK Nauka/Interperiodica distributed exclusively by Springer Science+Business Media LLC*, vol. 43, pp. 597-609
10. Gvishiani A. D., Agayan S. M., Bogoutdinov Sh. R. 2008, "Fuzzy recognition of anomalies in time series", *Doklady earth sciences*, vol. 421, no. 1, pp. 838-842. DOI: 10.1134/S1028334X08050292

11. Bogoutdinov Sh. R., Gvishiani A. D., Agayan S. M., Solovyev A. A., Kihn E. 2010, "Recognition of disturbances with specified morphology in time series. Part 1: Spikes on magnetograms of the worldwide INTERMAGNET network", *Izvestiya, Physics of the Solid Earth*, vol. 46, no. 11, pp. 1004-1016.
12. Soloviev A. A., Agayan S. M., Gvishiani A. D., Bogoutdinov Sh. R., Chulliat A. 2012, "Recognition of disturbances with specified morphology in time series: Part 2. Spikes on 1-s magnetograms", *Izvestiya, Physics of the Solid Earth*, vol. 48, no. 5, pp. 395-409.
DOI: 10.1134/S106935131204009X
13. Gvishiani A. D., Agayan S. M., Bogoutdinov Sh. R., Kagan A. I. 2011, "Gravitational smoothing of time series", *Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences*, vol. 17, no. 2, pp. 62-70.
14. Agayan S. M., Bogoutdinov Sh. R., Dobrovolsky M. N., Kagan A. I. 2014, "Weighted gravitational time series smoothing", *Russ. J. Earth Sci.*, vol. 14. doi: 10.2205/2014ES000543
15. Soloviev A., Chulliat A., Bogoutdinov, Sh. 2017, "Detection of secular acceleration pulses from magnetic observatory data", *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, pp. 128-142. doi: 10.1016/j.pepi.2017.07.005
16. Gelfond A. O. 1959, "Finite difference calculus", *M: GIFML*, 400 p.
17. Wilkinson J. H. 1970, "The Algebraic eigenvalue problem", *M.: Nauka*, 564 p.

Получено 27.07.2018

Принято в печать 22.10.2018

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 19. Выпуск 4

УДК 550.380

DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-4-26-42

Локальные и сплайновые аппроксимации в цифровой обработке геомагнитных наблюдений¹

Гетманов Виктор Григорьевич — доктор технических наук, главный научный сотрудник, Геофизический центр РАН; главный научный сотрудник, Институт физики Земли им. О. Ю. Шмидта РАН.

e-mail: v.getmanov@gcras.ru

Аннотация

Предлагаются к рассмотрению методы локальных и сплайновых аппроксимаций для цифровой обработки геомагнитных наблюдений. Разработаны алгоритмы вычислений кусочно-линейных, синусоидальных и полиномиальных локальных аппроксимационных моделей. Разработан алгоритм вычисления сплайновой аппроксимационной модели. Сформированный математический аппарат ориентирован на решения задач оценивания параметров, фильтрации и спектрального анализа для геомагнитных наблюдений.

Ключевые слова: локальные и сплайновые аппроксимации, модели, геомагнитные наблюдения, цифровая обработка.

Библиография: 22 названий.

Для цитирования:

В. Г. Гетманов. Локальные и сплайновые аппроксимации в цифровой обработке геомагнитных наблюдений // Чебышевский сборник, 2018, т. 19, вып. 4, с. 26–42.

¹Статья написана в рамках Государственного задания ГЦ РАН на 2018 г.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 19. No. 4

UDC 550.380

DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-4-26-42

**Local and spline approximations in digital processing of
geomagnet-ic observations**

Getmanov Viktor Grigorievich — D.Sc., Principal research scientist, Geophysical Center RAS;
Principal research scientist, Schmidt Institute of Physics of the Earth RAS.

e-mail: v.getmanov@gcras.ru

Abstract

Methods of local and spline approximations for digital processing of geomagnetic observations are proposed for consideration. Algorithms for calculating piecewise-linear, sinusoidal and polynomial local approximation models have been developed. An algorithm for calculating the spline approximation model is developed. The generated mathematical apparatus is focused on solving problems of parameter estimation, filtering and spectral analysis for geomagnetic observations.

Keywords: local and spline approximations, models, geomagnetic observations, digital processing.

Bibliography: 22 titles.

For citation:

V. G. Getmanov, 2018, "Local and spline approximations in digital processing of geomagnet-ic observations", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 4, pp. 26–42.

1. Введение

В настоящее время обсерваторские геомагнитные наблюдения (ГМН) подвергаются, в основном, первичной обработке для решений задач рутинных статистических вычислений или редактирования данных; одновременно, действующая научно-техническая практика выдвигает вполне очевидные требования к повышению качества ГМН, расширению математического арсенала средств вторичной цифровой обработки и построению глобальных геомагнитных моделей. Создание новых методов цифровой обработки является актуальным направлением геофизики и геоинформатики [1-4]. Существенный вклад в развитие указанного направления внёс академик РАН Гвишиани А.Д. [5-8].

Особенности ГМН с точки зрения извлечения из них полезной информации состоят в необходимости учёта их сложной функциональной природы, возможных значительных нестационарностей и различных временных масштабов для составляющих, ограниченных временных интервалов наблюдений, многочастотности и неопределённости характеристик погрешностей.

Предлагаемые в статье методы и алгоритмы локальных и сплайновых аппроксимаций для цифровой обработки в предметной области ГМН, предназначаются для задач оценивания многопараметрических моделей, фильтрации и сглаживания сложных зависимостей и реализации обобщённого спектрального анализа. Математический аппарат, рассмотренный здесь в обзорном плане, базируется на результатах работы [9].

Представленные здесь методы и алгоритмы нацелены на задачи цифровой обработки ГМН, которые традиционными подходами решаются не в полной мере эффективно. Так, содержащиеся в распространённых программных пакетах стандартные цифровые фильтры плохо работают на ограниченных временных интервалах; спектральный анализ на основе дискретного преобразования Фурье реализуется для нестационарных ГМН с большими погрешностями и т.д.

2. Модельные представления для геомагнитных наблюдений

2.1. Обычно, компоненты вектора напряжённости геомагнитного поля измеряются в земной системе координат, для которой ось координат OX направлена на северный полюс, ось OY - по параллели, ось OZ - по радиусу к центру Земли. В практике анализа характеристик геомагнитного поля достаточно часто координаты и модуль вектора напряжённости $H_x(t) = H_1(t)$, $H_y(t) = H_2(t)$, $H_z(t) = H_3(t)$ и $H(t) = H_0(t)$ представляются исходными функциями времени заданного вида.

Как правило, характеристики геомагнитного поля определяются на заданном временном интервале (t_0, t_f) . В ряде случаев, зависимости от времени для координат и модуля вектора напряжённости геомагнитного поля представляются низкочастотными функциями времени. Для некоторых задач цифровой обработки определяется множество-класс функций, к которым должны принадлежать исходные функции времени. Наиболее подходящим, для этой цели является множество $C^{L_0}(t_0, t_f)$; функциональные характеристики геомагнитного поля, которые принадлежат к $C^{L_0}(t_0, t_f)$, определены на (t_0, t_f) , вместе с производными вплоть до L_0 -ого порядка. Возможны наложения ограничений на производные для исходных функций времени.

2.2. ГМН координат $Y_n(Ti)$, $n = 1, 2, 3$ производятся векторными магнитометрами, наблюдения модуля $Y_0(Ti)$ производятся скалярными магнитометрами, T - интервал дискретизации. Большая часть обсерваторий системы INTERMAGNET, производящих ГМН с минутной дискретизацией- ($T = 60A$), оснащены векторными индукционными магнитометрами VM300 и скалярными магнитометрами SM900R фирмы GEOMAG (Франция). Обсерватории, производящие ГМН с секундной дискретизацией ($T = 1A$), большей частью оснащаются векторными

магнитометрами VM391 и скалярными магнитометрами фирмы GEOMETRICS G856. ГМН с минутной дискретизацией в стандарте INTERMAGNET доступны на сайте [10]; наблюдения с секундной дискретизацией - на сайте [11]. Бывают ГМН с неравномерной дискретизацией, дискретизацией по часам, суткам и т.д.

2.3. Пусть ГМН $Y_n(t_i)$ в общем случае для неравномерной дискретизации $t_0, t_1, t_2, \dots$ описываются следующими модельными соотношениями

$$Y_n(t_i) = H_n(t_i) + w_{ns}(t_i) + w_{nr}(t_i),$$

где $w_{ns}(t_i)$ -систематические низкочастотные приборные погрешности, $w_{nr}(t_i)$ -случайные погрешности; имеет место соотношение $w_{nr}(t_i) = w_{nr1}(t_i) + w_{nr2}(t_i)$, где $w_{nr1}(t_i)$ -случайные приборные погрешности, $w_{nr2}(t_i)$ -случайные погрешности, имеющие техногенное или природное происхождение. Модель наблюдений для функции модуля имеет вид

$$Y_0(t_i) = H_0(t_i) + w_0(t_i), H_0(t_i) = \sqrt{H_1^2(t_i) + H_2^2(t_i) + H_3^2(t_i)}.$$

Погрешности наблюдений $w_{nr1}(t_i), w_{nr2}(t_i), w_0(t_i)$, обычно, моделируются в виде некоррелированных случайных чисел с нулевыми математическими ожиданиями и заданными дисперсиями.

Приведём величины погрешностей векторных и скалярных магнитометров. Для минутных наблюдений предельная погрешность магнетометра VM300 составляет $\approx 5nT$, погрешность SM900R- $\approx 1nT$. Для секундных наблюдений для векторного магнитометра VM391 предельная погрешность составляет $\approx (1 \div 2)nT$, для магнитометра GEOMETRICS G856 - составляет величину $\approx (0.5 \div 0.7)nT$.

Отметим, что обсерваторские ГМН бывают двух видов: 1. первичные preliminary data, которые не были подвергнуты предварительной цифровой обработке; 2. definitive data - данные, подвергнутые цифровой обработке, с устранёнными систематическими погрешностями и уменьшенными случайными погрешностями.

3. Методы локальных и сплайновых аппроксимаций

3.1. Рассмотрим t_i – неравномерные моменты дискретизации, $i = 0, 1, \dots, N - 1$ на локальном интервале (t_0, t_{N-1}) и $Y(t_i)$ - произведённые ГМН. Поставим этим наблюдениям в соответствие локальную модель $H_M(c, t_i)$ в виде известной нелинейной функции, зависящей от вектора параметров $c^T = (c_1, \dots, c_m)$, в общем случае $A \in \bar{C}_1$. Пусть $w(t_i)$ - погрешности наблюдений, являющиеся случайными нормальными числами с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ^2 . Связь наблюдений, модели и погрешностей представим соотношением

$$Y(t_i) = H_M(c, t_i) + w(t_i).$$

Сформируем локальный функционал $S_1(Y, c)$, реализуем его условную минимизацию, найдём c°

$$S_1(Y, c) = \sum_{i=0}^{N-1} (Y(t_i) - H_M(c, t_i))^2, A^\circ = \arg\{\min_{c \in \bar{C}_1} S_1(Y, c)\}. \quad (1)$$

Последовательность $H_{ML}^\circ(t_i) = H_M(c^\circ, t_i)$, $i = 0, 1, \dots, N - 1$ для c° из примем в качестве результата реализации метода локальной аппроксимации.

3.2. Рассмотрим исходный временной интервал (t_0, t_{N_f-1}) - моменты времени наблюдений, $Y(t_i), i = 0, 1, \dots, N_f - 1$ - ГМН на данном интервале. На исходном интервале зададим сплайновые узлы $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1}$ и сформируем n сплайновых интервалов -

$(t_0 < t \leq \tau_1), (\tau_1 < t \leq \tau_2), \dots, (\tau_{n-1} < t \leq N_f - 1)$. Введём интервальные дифференцируемые функции $f(\alpha_k, t)$, которые равны нулю вне сплайновых интервалов, $\alpha_k, k = 1, \dots, n$ - векторы параметров, $\alpha^T = (\alpha_1^T, \dots, \alpha_n^T)$. Зададим ограничивающее множество

$$\overline{A_2} = \{\alpha : (f^{(s)}(\alpha_k, \tau_k) - f^{(s)}(\alpha_{k+1}, \tau_k) = 0, k = 1, \dots, n-1, s = 0, 1)\}.$$

Определим сумму интервальных функций

$$f(\alpha, t) = \sum_{k=1}^n f(\alpha_k, t).$$

Для всех $\alpha \in \overline{A_2}$ функция $f(\alpha, t)$ становится гладкой по нулевым и первым производным и может быть принятой в качестве сплайновой.

Сформируем сплайновый функционал $S_2(Y, \alpha)$, решим задачу его условной минимизации для отыскания вектора оптимальных параметров α° , обеспечим нахождение оптимальной сплайновой аппроксимационной модели

$$S_2(Y, \alpha) = \sum_{i=0}^{N_f-1} (Y(t_i) - f(\alpha, t_i))^2, \alpha^\circ = \arg\{\min_{\alpha \in \overline{A_2}} S_2(Y, \alpha)\}. \quad (2)$$

Последовательность $H_{MS}^\circ(t_i) = f(\alpha^\circ, t_i), i = 0, 1, \dots, N_f - 1$ для α° из (2) примем в качестве результата реализации метода сплайновой аппроксимации.

В [12] помещены более подробные материалы по постановкам сформулированных здесь локальным и сплайновым аппроксимациям; работа [13] содержат обобщения, касающиеся технологии локальной аппроксимации. Методы п.п. 2.1, 2.2 базируются, в общем случае, на применении нелинейного программирования и представляют собой обобщения подходов традиционных регрессионных моделей. Их особенности состоят в построении аппроксимационных моделей на малых локальных интервалах, учёте связей моделей на соседних локальных интервалах, использовании локальных моделей упрощенного вида с малым числом параметров и возможности аппроксимации структурно сложных и существенно нестационарных ГМН.

4. Построения локальных аппроксимационных моделей

Здесь представим варианты построений локальных аппроксимационных моделей, используемых при реализации цифровой обработки ГМН.

4.1. Рассмотрим построение локальных аппроксимационных моделей, линейных по части параметров. Положим, что задан локальный интервал с точками $i = 0, 1, \dots, N - 1$ и $Y(Ti)$ - ГМН. Для указанных локальных моделей, вектор параметров $c^T = (\beta^T, \omega^T)$ является блочным и состоит из векторов β и ω размерности m_{10}, m_{20} , которые в модель входят линейно и нелинейно. Запишем соотношения для модели

$$H_M(c, Ti) = \sum_{r_1=1}^{m_{10}} \beta_{r_1} \varphi_{r_1}(\omega, Ti) = \beta^T \varphi(\omega, Ti),$$

где $\varphi(\omega, Ti)$ - векторная базисная функция, зависящая от вектора параметров ω

$$\varphi(\omega, Ti)^T = (\varphi_1(\omega, Ti), \varphi_2(\omega, Ti), \dots, \varphi_{m_{20}}(\omega, Ti)).$$

Как правило, на вектор β не накладываются ограничения; координаты вектора ω являются ограниченными - $\omega \in \Omega_0$.

Введём функционал $S_{31}(Y, \beta, \omega)$ и запишем основную задачу минимизации по β, ω , которую будем решать в два этапа

$$S_{31}(Y, \beta, \omega) = \sum_{i=0}^{N-1} (Y(Ti) - H_M(\beta, \omega, Ti))^2 = \sum_{i=0}^{N-1} (Y(Ti) - \beta \varphi(\omega, Ti))^2.$$

$$(\beta^\circ, \omega^\circ) = \arg\{\min_{\beta, \omega \in \Omega_0} S_{31}(Y, \beta, \omega)\}.$$

На первом этапе фиксируем допустимое $\omega = \text{const}$ и будем находить частично оптимальные линейные параметры, зависящие от ω

$$\beta^\circ(\omega) = \arg\{\min_{\beta, \omega = \text{const}} S_{31}(Y, \beta, \omega)\}.$$

Сформируем вектор наблюдений Y , матрицу плана $X(\omega)$ и вектор параметров β

$$Y = \begin{bmatrix} Y(T \cdot 0) \\ Y(T \cdot 1) \\ \vdots \\ Y(T(N-1)) \end{bmatrix}, X(\omega) = \begin{bmatrix} \varphi_1(\omega, T \cdot 0) & \varphi_2(\omega, T \cdot 0) & \dots & \varphi_{m_{10}}(\omega, T \cdot 0) \\ \varphi_1(\omega, T \cdot 1) & \varphi_2(\omega, T \cdot 1) & \dots & \varphi_{m_{10}}(\omega, T \cdot 1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1(\omega, T(N-1)) & \varphi_2(\omega, T(N-1)) & \dots & \varphi_{m_{10}}(\omega, T(N-1)) \end{bmatrix},$$

$$\beta(\omega) = \begin{bmatrix} \beta_1(\omega) \\ \beta_2(\omega) \\ \vdots \\ \beta_{m_{10}}(\omega) \end{bmatrix}.$$

Воспользуемся [14], запишем систему линейных уравнений с использованием введённых обозначений $A(\omega)\beta^\circ(\omega) = b(\omega)$, где $b(\omega) = X^T(\omega)Y$, $A(\omega) = X^T(\omega)X(\omega)$. Решение данной системы позволит найти частично оптимальный вектор $\beta^\circ(\omega)$.

На втором этапе подставим $\beta^\circ(\omega)$ в выражение для функционала, получим выражение для частичной остаточной суммы, зависящей от ω

$$S_{0,31}(Y, \beta^\circ(\omega), \omega) = Y^T Y - b^T(\omega) \beta^\circ(\omega). \quad (3)$$

Найдём оптимальное значение вектора ω° на основе минимизации частичной остаточной суммы $S_{0,31}(Y, \beta^\circ(\omega), \omega)$ (3), численное значение которой можно вычислить для любого допустимого ω

$$\omega^\circ = \arg\{\min_{\omega \in \Omega_0} S_{0,31}(Y, \beta^\circ(\omega), \omega)\}.$$

Минимизацию реализуем на основе поисковой процедуры для $\omega \in \Omega_0$. Оптимальный вектор β° найдём из решения системы $A(\omega^\circ)\beta^\circ = b(\omega^\circ)$, получим $c^{\circ T} = (\beta^{\circ T}, \omega^{\circ T})$ и выражение для оптимальной модели $H_M(c^\circ, Ti)$

4.2. Рассмотрим построение аппроксимационных моделей на системе локальных интервалов. Произведённые ГМН представим в виде $Y(Ti)$, $i = 0, 1, \dots, N_f - 1$. Исходный интервал разобьём на m локальных интервалов по N точек, $N(j-1) + 1 \leq i \leq Nj$, $mN = N_f$. Введём локальные модели $H_M(c_j, Ti)$, зависящие от параметров c_j , $j = 1, \dots, m$, $H_M(c_j, Ti) = 0$ для $i < N(j-1)$, $i > Nj$. Зададим локальные функционалы и основной функционал

$$S_{32}(c_j, H) = \sum_{i=N(j-1)}^{Nj-1} (H_j(Ti) - H_M(c_j, Ti))^2, S_{32}(c, H) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=N(j-1)+1}^{Nj} (H(Ti) - H_M(c_j, Ti))^2$$

Ввиду несвязанности локальных моделей, задача минимизации основного функционала распадается на m задач локальной минимизации

$$c_j^\circ = \arg\{\min_{c_j \in C_0} S_2(c_j, H)\}, j = 1, \dots, m.$$

Оптимальная аппроксимационная модель на системе локальных интервалов представляется последовательностью кусочно- непрерывных функций и имеет вид

$$H_M^\circ(Ti) = \sum_{j=1}^m H_M(c_j^\circ, Ti), i = 0, 1, \dots, N_f - 1.$$

4.3. Рассмотрим вычисление скользящих локальных моделей и процедуру их взвешенного усреднения, которые реализуем в два этапа [15].

На первом этапе для исходного интервала с точками $i = 0, 1, \dots, N_f - 1$ введём N -точечные скользящие локальные интервалы с граничными точками N_{1j}, N_{2j} , N_d -шаг скольжения, m_0 -число скользящих интервалов

$$N_{1j} = N_d(j - 1), N_{2j} = N_{1j} + N - 1, j = 1, \dots, m_0.$$

Для упрощения потребуем выполнения соотношений кратности $mN = N_f$ и $N_d m_d = N$, m, m_d -целые числа, тогда $m_0 = m_d(m - 1) + 1$. Для скользящего локального интервала с номером j найдём модели $H(c_j^\circ, Ti)$, $j = 1, \dots, m_0$, где c_j° - оптимальные параметры скользящих локальных моделей.

На втором этапе введём единичные функции $E_j(Ti)$, равные нулю вне локальных скользящих интервалов, вычислим их сумму $E(Ti)$ и функцию последовательности весовых коэффициентов $R(i)$

$$E_j(Ti) = 1, N_{1j} \leq i \leq N_{2j}, E_j(Ti) = 0, 0 \leq i < N_{1j}, N_{2j} < i \leq N_f - 1,$$

$$E(Ti) = \sum_{j=1}^{m_0} E_j(Ti), R(Ti) = 1/E(Ti), i = 0, 1, \dots, N_f - 1. \quad (4)$$

Произведём взвешенное усреднение с использованием (4) для суммы последовательности скользящих локальных моделей.

$$H_M^\circ(Ti) = R(i) \sum_{j=1}^{m_0} H_M(c_j^\circ, Ti).$$

5. Алгоритм вычисления локальных кусочно - линейных аппроксимационных моделей

Локальные кусочно- линейные аппроксимационные модели будем считать базисными для задач цифровой обработки ГМН. Рассмотрим алгоритм построения указанных моделей.

По- прежнему, $Y(Ti)$ - произведённые ГМН на локальном интервале, $i = 0, 1, \dots, N - 1$. Локальную модель запишем следующим образом: $H_M(c, Ti) = c_1 + c_2 Ti$, где $c^T = (c_1, c_2)$ - вектор параметров. Базисные функции представим векторами размерности $(N, 1)$: $\varphi_1(Ti)^T = (1, \dots, 1)$, $\varphi_2(Ti)^T = (T \cdot 0, T \cdot 1, \dots, T(N - 1))$; модель примет вид $H_M(c, Ti) = c^T \varphi(Ti)$. Погрешности $w(Ti)$

примем случайными нормальными числами с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ^2 . ГМН, модель и погрешности связаны соотношением

$$Y(Ti) = c^T \varphi(Ti) + w(Ti).$$

Ставится задача по наблюдениям $Y(i)$, $i = 0, 1, \dots, N-1$ найти оптимальные оценки параметров c_1°, c_2° и оптимальную локальную кусочно-линейную модель. Сформируем локальный функционал и выражение для задачи минимизации

$$S_{41}(Y, c) = \sum_{i=0}^{N-1} (Y(Ti) - c^T \varphi(Ti))^2, c^\circ = \arg\{\min_{c \in C_0} S_{41}(Y, c)\}.$$

Введём матрично-векторные обозначения для записи необходимых выкладок для задачи минимизации $Y^T = (Y(T \cdot 0), Y(T \cdot 1), \dots, Y(T(N-1)))$, $X = (\varphi_1(Ti), \varphi_2(Ti))$, $A = X^T X$, $b = X^T H$. Сформируем линейную систему $AA^\circ = b$, запишем выражения для коэффициентов A, b

$$\begin{aligned} \alpha_{rs} &= \sum_{i=0}^{N-1} \varphi_r(Ti) \varphi_s(Ti), r, s = 1, 2, b_r = \sum_{i=0}^{N-1} \varphi_r(Ti) H(Ti), \\ \alpha_{11} &= N \alpha_{12} = T \sum_{i=0}^{N-1} i \alpha_{21} = \alpha_{12} \alpha_{22} = T^2 \sum_{i=0}^{N-1} i^2 b_1 = \sum_{i=0}^{N-1} H(Ti), b_2 = \sum_{i=0}^{N-1} H(Ti) Ti. \end{aligned}$$

Вычислим решение линейной системы (c_1°, c_2°) ; запишем выражение для оптимальной локальной аппроксимационных кусочно-линейной модели

$$\alpha_{11} c_1^\circ + \alpha_{12} c_2^\circ = b_1, \alpha_{21} c_1^\circ + \alpha_{22} c_2^\circ = b_2, H_M^\circ(c^\circ, Ti) = c_1^\circ + c_2^\circ Ti.$$

6. Алгоритмы вычисления локальных синусоидальных и полигармонических аппроксимационных моделей

6.1. Рассмотрим алгоритм вычисления локальных кусочно синусоидальных аппроксимационных моделей [16]. Пусть $Y(Ti)$ $i = 0, 1, \dots, N-1$ - ГМН. Примем в качестве локальной модели функцию $H_M(c, i) = a \cos \omega Ti + b \sin \omega Ti$ в предположении, что функция геомагнитного поля на локальном интервале является одночастотной. Амплитуды a, b входят в модель линейно, частота ω - нелинейно; положим, что амплитуды не подвержены ограничениям, частота ω ограничена диапазоном $\Omega_0 = (\omega : \omega_{\min} \leq \omega \leq \omega_{\max})$, со значениями $\omega_{\min}$ и $\omega_{\max}$. Допустим, что погрешности наблюдений $w(Ti)$ -случайные некоррелированные нормальные числа с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ^2 . Модель ГМН представим в виде

$$Y(Ti) = H_M(c, i) + w(Ti).$$

Ставится задача по произведённым ГМН найти оптимальные оценки амплитуд a°, b° и частоты ω° для локальной кусочно-синусоидальной аппроксимационной модели.

Функционал $S_{51}(Y, a, b, \omega)$ сформируем следующим образом

$$S_{51}(Y, a, b, \omega) = \sum_{i=0}^{N-1} (Y(Ti) - a \cos \omega Ti - b \sin \omega Ti)^2.$$

Оценки параметров модели найдём путём минимизации по $a, b, \omega \in \Omega_0$

$$(a^\circ, b^\circ, \omega^\circ) = \arg\left\{ \min_{a, b, \omega \in \Omega_0} S(Y, a, b, \omega) \right\}.$$

Запишем модель в виде $H_M(c, i) = \beta^T \varphi(\omega, Ti)$, $\beta^T = (a, b)$. Базисные функции $\varphi_1(Ti)$, $\varphi_2(Ti)$ представим векторами размерности $(N, 1)$: $\varphi_1(Ti)^T = (\cos(\omega T \cdot 0), \cos(\omega T \cdot 1), \dots, \cos(\omega T(N-1)))$, $\varphi_2(Ti)^T = (\sin(\omega T \cdot 0), \sin(\omega T \cdot 1), \dots, \sin(\omega T(N-1)))$. Воспользуемся векторно-матричными обозначениями $Y^T = (Y(T \cdot 0), Y(T \cdot 1), \dots, Y(T(N-1)))$, $X = (\varphi_1(Ti), \varphi_2(Ti))$, $A = X^T X$, $b = X^T H$. Решение задачи минимизации осуществим в два этапа.

На первом этапе для фиксированной частоты $\omega \in \Omega_0$ найдём решение линейной системы $A(\omega)A^\circ(\omega) = b(\omega)$. Выпишем коэффициенты для $A(\omega), b(\omega)$

$$\begin{aligned} \alpha_{rs}(\omega) &= \sum_{i=0}^{N-1} \varphi_r(\omega, Ti) \varphi_s(\omega, Ti) r, s = 1, 2, b_r(\omega) = \sum_{i=0}^{N-1} \varphi_r(\omega, Ti) H(Ti), \\ a_{11}(\omega) &= \sum_{i=0}^{N-1} \cos^2 \omega Ti, a_{12}(\omega) = \sum_{i=0}^{N-1} \cos \omega Ti \sin \omega Ti, a_{21}(\omega) = a_{12}(\omega), a_{22}(\omega) = \sum_{i=0}^{N-1} \sin^2 \omega Ti, \\ b_1(\omega) &= \sum_{i=0}^{N-1} Y(Ti) \cos \omega Ti, b_2(\omega) = \sum_{i=0}^{N-1} Y(Ti) \sin \omega Ti. \end{aligned}$$

Оптимальные амплитуды найдём из решения линейной системы уравнений

$$a^\circ(\omega)a_{11}(\omega) + b^\circ(\omega)a_{12}(\omega) = b_1(\omega), a^\circ(\omega)a_{21}(\omega) + b^\circ(\omega)a_{22}(\omega) = b_2(\omega),$$

$$a^\circ(\omega) = (b_1(\omega)a_{22}(\omega) - b_2(\omega)a_{12}(\omega))/\Delta(\omega), b^\circ(\omega) = (b_2(\omega)a_{11}(\omega) - b_1(\omega)a_{12}(\omega))/\Delta(\omega)$$

где $\Delta(\omega) = a_{11}(\omega)a_{22}(\omega) - a_{12}^2(\omega)$ - определитель.

На втором этапе сформируем частичную остаточную сумму

$$S_{0,51}(Y, \omega) = \sum_{i=0}^{N-1} Y^2(Ti) - a^\circ(\omega)b_1(\omega) - b^\circ(\omega)b_2(\omega).$$

Нахождение оптимальной оценки частоты ω° реализуем путём минимизации $S_{0,51}(Y, \omega)$ на основе подпоиска по частоте ω в диапазоне Ω_0

$$\omega^\circ = \arg\left\{ \min_{\omega \in \Omega_0} S_{0,51}(Y, \omega) \right\}.$$

Подставим в формулы $a^\circ(\omega), b^\circ(\omega)$ значение $\omega = \omega^\circ$, найдём искомые оптимальные оценки амплитуд $a^\circ = a^\circ(\omega^\circ), b^\circ = b^\circ(\omega^\circ)$ и запишем выражение для оптимальной модели $H_M(c^\circ, Ti) = a^\circ \cos \omega^\circ Ti + b^\circ \sin \omega^\circ Ti$.

В [17] рассматривается приложение алгоритма оценивания параметров одночастотных пульсаций геомагнитного поля с использованием вычислений локальных кусочно- синусоидальных аппроксимационных моделей.

6.2. Рассмотрим алгоритм вычисления локальных полигармонических аппроксимационных моделей для локального интервала с точками $i = 0, 1, \dots, N-1$ с ГМН $Y(Ti)$ для исходной многочастотной функции геомагнитного поля. Аппроксимационную модель в предположении, что исходная функция геомагнитного поля на локальном интервале является многочастотной, представим в виде соотношения

$$H_M(c, Ti) = \sum_{l=1}^L (a_l \cos \omega_l Ti + b_l \sin \omega_l Ti),$$

где вектор $c^T = (a^T, b^T, \omega^T) = (a_1, a_2, \dots, a_L, b_1, b_2, \dots, b_L, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_L)$ имеет размерность $(3L, 1)$ и состоит из векторов амплитудных и частотных параметров. На линейные амплитудные параметры ограничения не накладываются: $-\infty \leq a_l \leq \infty$, $-\infty \leq b_l \leq \infty$, $l = 1, 2, \dots, L$. Примем, что исходная многочастотная функция геомагнитного поля реализована в ограниченной полосе частот с границами $\omega_{\min}, \omega_{\max}$; для векторов нелинейных частотных параметров с учётом их упорядочивания, допустимое множество представим следующим образом

$$\bar{\Omega}_0^L = \{(\omega_1, \dots, \omega_L) : \omega_{\min} \leq \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_L \leq \omega_{\max}\}, \omega \in \bar{\Omega}_0^L$$

Запишем функционал

$$S_{52}(Y, a, b, \omega) = \sum_{i=0}^{N-1} (Y(Ti) - H_M(c, Ti))^2 = \sum_{i=0}^{N-1} (Y(Ti) - \sum_{l=1}^L (a_l \cos \omega_l Ti + b_l \sin \omega_l Ti))^2.$$

Вычислим оптимальные параметры аппроксимационной модели с помощью решения задачи минимизации введённого функционала

$$(a^\circ, b^\circ, \omega^\circ) = \arg\left\{ \min_{a, b, \omega \in \bar{\Omega}_0^L} S_{52}(Y, a, b, \omega) \right\}.$$

Параметры модели на локальном интервале оцениваются на основе двухэтапной аппроксимации. Модель является линейной функцией по части параметров, представим её в виде скалярного произведения

$$\sum_{l=1}^L (a_l \cos \omega_l Ti + b_l \sin \omega_l Ti) = \beta^T \varphi(\omega, Ti), i = 0, 1, \dots, N-1,$$

где вектор линейных параметров $\beta^T = (a_1, \dots, a_L, b_1, \dots, b_L)$ имеет размерность $(2L, 1)$, $\varphi(\omega, Ti)$ - векторная базисная полигармоническая функция

$$\varphi(\omega, Ti)^T = (\cos(\omega_1 Ti), \dots, \cos(\omega_L Ti), \sin(\omega_1 Ti), \dots, \sin(\omega_L Ti)).$$

Пусть вектор ГМН Y имеет размерность $(N, 1)$. С использованием $\varphi(\omega, Ti)$ сформируем матрицу плана $\%(\omega)$ размерности $(N, 2L)$

$$Y^T = (Y(T \cdot 0), Y(T \cdot 1), \dots, Y(T(N-1))), \%(\omega) = |\varphi(\omega, T \cdot 0), \dots, \varphi(\omega, T(N-1))|^T.$$

Тогда функционал запишем в векторно - матричном виде:

$$S_{52}(Y, \beta, \omega) = (Y - X(\omega)\beta)^T (Y - X(\omega)\beta),$$

На первом этапе минимизации для $S(Y, \beta, \omega)$ фиксируем нелинейные параметры $\omega = \text{const}$, $\omega \in \bar{\Omega}_0^L$, находим частично оптимальные линейные параметры $\beta^\circ(\omega)$

$$\beta^\circ(\omega) = \arg\left\{ \min_{\beta, \omega = \text{const}} S_{52}(Y, \beta, \omega) \right\},$$

которые вычислим на основе решения системы линейных уравнений

$$A(\omega) = X^T(\omega)X(\omega), b(\omega) = X^T(\omega)Y, \beta^\circ(\omega) = A(\omega)^{-1}b(\omega), \quad (5)$$

На основе $\beta^\circ(\omega)$ сформируем функционал частичной остаточной суммы, зависящий только от ω

$$S_{0,52}(Y, \omega) = S(Y, \beta^\circ(\omega), \omega) = Y^T Y - \beta^{\circ T}(\omega) b(\omega),$$

На втором этапе аппроксимации для $S_0(H, \omega)$ осуществим минимизацию по $\omega \in \bar{\Omega}_0^L$, описание поискового алгоритма содержится в [18]. Находим оценки частотных параметров ω° и, после подстановки ω° в (5), вычислим оценки амплитудных параметров β° для локального интервала с точками $i = 0, 1, \dots, N-1$ и запишем выражение для оптимальной модели

$$\omega^\circ = \arg\left\{ \min_{\omega \in \bar{\Omega}_0^L} S_0(Y, \omega) \right\}, \beta^\circ = \beta^\circ(\omega^\circ) = A(\omega^\circ)^{-1} b(\omega^\circ), H(c^\circ, Ti) = \sum_{l=1}^L (a_l^\circ \cos \omega_l^\circ Ti + b_l^\circ \sin \omega_l^\circ Ti).$$

Публикация [19] содержит материалы, касающиеся приложений вычислений локальных аппроксимационных полигармонических моделей для реализации обобщённого спектрального анализа ГМН.

7. Алгоритм вычисления локальных аппроксимационных моделей для цифровой обработки ГМН от векторных и скалярных магнитометров

7.1. Положим, что $Y_1(Ti)$, $Y_2(Ti)$, $Y_3(Ti)$ и $Y_0(Ti)$ - ГМН координат и модуля вектора напряжённости геомагнитного поля, произведённые векторными и скалярными магнитометрами на локальном интервале, $i = 0, 1, \dots, N-1$. Определим для координат вектора напряжённости локальные модели на основе нелинейных известного вида функций $H_1(c_1, Ti)$, $H_2(c_2, Ti)$, $H_3(c_3, Ti)$, где A_n - векторы параметров моделей, $n = 1, 2, 3$. Эти модели могут быть, в частности, кусочно-постоянными, кусочно-линейными и т.д. Будем считать, что погрешности наблюдений относятся к definitive data - в них отсутствуют систематические погрешности (уменьшены в максимально возможной степени). Представим $w_n(Ti)$, $n = 0, \dots, 3$ в виде случайных некоррелированных нормальных чисел с нулевыми математическими ожиданиями и дисперсиями σ_n^2 . Свяжем наблюдения, модели и погрешности линейными зависимостями

$$Y_n(Ti) = H_{Mn}(c_n, Ti) + w_n(Ti), n = 0, \dots, 3.$$

Ставится задача по definitive data $Y_n(Ti)$, $n = 0, 1, 2, 3$ нахождения оценок локальных моделей $H_{Mn}^\circ(Ti) = H_{Mn}(c_n^\circ, Ti)$.

Основываясь на определенных выше наблюдениях и моделях, локальный функционал $S_{61}(Y, c)$, определяющий меру близости локальных наблюдений и моделей, запишем в виде суммы четырёх функционалов

$$\begin{aligned} S_{0,61}(Y_0, c) &= \sum_{i=0}^{N-1} (Y_0(Ti) - \sqrt{\sum_{n=1}^3 H_{Mn}(c_n, Ti)})^2, \\ S_{n,61}(Y_n, c) &= \sum_{i=0}^{N-1} (Y_n(Ti) - Y_{Mn}(c_n, Ti))^2, n = 1, 2, 3, \\ S_{61}(Y, c) &= S_{0,61}(Y_0, c_1, c_2, c_3) + \sum_{n=1}^3 S_{n,61}(Y_n, c_n), \end{aligned}$$

где $c^T = (c_1^T, c_2^T, c_3^T)$, $Y^T = (Y_1^T, Y_2^T, Y_3^T)$. Нахождение оптимальных оценок параметров моделей c_n° с учётом предположения о погрешностях в измерениях реализуем с помощью решения

задачи оптимизации локального функционала

$$c^\circ = \arg(\{\min_c S_{61}(Y, c)\}, c^{\circ T} = (c_1^{\circ T}, c_2^{\circ T}, c_3^{\circ T}).$$

Очевидно, что на локальном интервале исходные функции координат должны быть почти постоянными. Определим, в этом случае, локальные модели в виде кусочно- постоянных функций $H_{Mn}(c_n, Ti) = A_n$, $n = 1, 2, 3$ и выражение для локальных функционалов

$$S_{61}(Y, c) = \sum_{B=1}^3 \left(\sum_{i=0}^{N-1} (Y_n(Ti) - c_n)^2 + \sum_{i=0}^{N-1} (Y_0(Ti) - \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2})^2 \right). \quad (6)$$

Продифференцируем (6) по A_n , приравняем производные нулю, получим необходимые условия экстремума в виде системы из трёх нелинейных алгебраических уравнений

$$\frac{\partial S_{61}(c, Y)}{\partial c_n} = \sum_{i=0}^{N-1} (Y_n(Ti) - 2Nc_n + \frac{A_n \sum_{i=0}^{N-1} Y_0(Ti)}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}}) = 0, n = 1, 2, 3. \quad (7)$$

В данном случае возможно точное аналитическое решение данной системы. Опустим выкладки, запишем выражения для локальных оценок

$$c_n^\circ = \frac{1}{2N} \left(1 + \frac{\sum_{r=0}^{N-1} Y_0(Tr)}{\sqrt{(\sum_{r=0}^{N-1} Y_1(Tr))^2 + (\sum_{r=0}^{N-1} Y_2(Tr))^2 + (\sum_{r=0}^{N-1} Y_3(Tr))^2}} \right) \sum_{i=0}^{N-1} Y_n(Ti), n = 1, 2, 3.$$

Оценки локальных аппроксимационных моделей представим в виде $H_{MLn}^\circ(Ti) = c_n^\circ$, $n = 1, 2, 3$.

Описание результатов и приложений п.п. 6.1. помещено в публикации [20].

7.2. Положим, как и в п.п. 6.1, что $Y_n(Ti)$, $n = 0, \dots, 3$ - ГМН, произведённые векторными и скалярными магнитометрами на локальном интервале, $i = 0, 1, \dots, N - 1$. В данном случае погрешности наблюдений $w_n(Ti)$, $n = 0, \dots, 3$ отнесём к preliminary data -первичным данным, которые не были подвергнуты предварительной компьютерной обработке и в которых присутствуют, как систематические, так и случайные погрешности. Обычно, для векторных магнитометров на локальных интервалах медленно меняющимся систематическим погрешностям поставим в соответствие модельные кусочно- постоянные функции - c_n , $n = 1, 2, 3$; в общем случае, считаем, что $c \in \bar{C}$. Для скалярных магнитометров допустим, что $c_0 = 0$. Погрешности $w_n(Ti)$ представим в виде некоррелированных нормально распределённых случайных чисел с нулевыми математическими ожиданиями и дисперсиями σ_n^2 , $n = 0, 1, 2, 3$, причём $\sigma_0^2 \ll \sigma_n^2$ для $n = 1, 2, 3$. Наблюдения, исходные функции и погрешности свяжем следующими зависимостями

$$Y_n(Ti) = H_n(Ti) + c_n + w_n(Ti), n = 0, \dots, 3.$$

Ставится задача по preliminary data $Y_n(Ti)$, $n = 0, 1, 2, 3$ нахождения оценок модельных систематических погрешностей $c_1^\circ, c_2^\circ, c_3^\circ$.

Для нахождения оценок модельных систематических погрешностей на локальном интервале воспользуемся тем обстоятельством, что у скалярного магнитометра отсутствуют систематические погрешности и имеют малые дисперсии случайных погрешностей. Для целей совместной цифровой обработки ГМН сформируем соответствующий функционал

$$S_{62}(Y, c) = \sum_{i=0}^{N-1} (Y_0^2(Ti) - (Y_1(Ti) - c_1)^2 - (Y_2(Ti) - c_2)^2 - (Y_3(Ti) - c_3)^2)^2.$$

Оценивание систематических погрешностей на локальном интервале реализуем на основе следующей задачи условной минимизации

$$c^\circ = \arg\{\min_{c \in C} S_{62}(Y, c)\}, c^{\circ T} = (c_1^\circ, c_2^\circ, c_3^\circ).$$

8. Алгоритм вычисления сплайновых аппроксимационных моделей для ГМН

Здесь ставится задача по произведённым ГМН $Y(Ti)$ вычислить, в соответствие с 1.2., оптимальную сплайновую аппроксимационную модель $H_{MS}^\circ(Ti)$, $i = 0, 1, \dots, N_f - 1$. Для рассматриваемой предметной области $Y(Ti)$ могут представлять собой последовательности локальных моделей из п.п.3.2. Решение осуществим на основе задачи минимизации квадратичного функционала с линейными равенствами-ограничениями. Подходы к её решению в деталях описаны в [21, 22].

Введём на исходном интервале n сплайновых интервалов по N точек, $Nn = N_f$: i -ые точки k -го сплайнового интервала подчиняются неравенствам $N(k-1) \leq i \leq (Nk-1)$, $k = 1, \dots, n$. Точки Nk , $k = 1, \dots, n-1$ примем в качестве стыковочных.

Определим для k -го сплайнового интервала векторы базисных дифференцируемых функций $f_k(t) = (f_{0,k}(t), f_{1,k}(t), \dots, f_{L,k}(t))^T$ размерности L , которые могут быть, в частном случае, полиномиальными; вне k -го интервала базисные функции должны равняться нулю. Введем векторы весовых коэффициентов $\alpha_k^T = (\alpha_{0,k}, \alpha_{1,k}, \dots, \alpha_{L,k})$, интервальную функцию для k -го интервала представим в виде $f_k^T(t)\alpha_k$. Дискретизируем интервальные функции, просуммируем их и обозначим сумму как $f_{sp}(\alpha, Ti)$, $\alpha^T = (\alpha_1^T, \alpha_2^T, \dots, \alpha_n^T)$

$$f_{sp}(\alpha, Ti) = \sum_{k=1}^n f_k^T(Ti)\alpha_k, 0 \leq i \leq N_f - 1.$$

Введём функционал $S_7(Y, \alpha)$, который является квадратичным

$$S_7(Y, \alpha) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=N(k-1)}^{Nk-1} (Y(Ti) - f^T(Ti)\alpha_k)^2,$$

$S_7(Y, \alpha) = \sum_{k=1}^n [\sum_{i=N(k-1)}^{Nk-1} (Y^2(Ti) - 2 \sum_{i=N(k-1)}^{Nk-1} Y(Ti)f^T(Ti)\alpha_k + \sum_{i=N(k-1)}^{Nk-1} \alpha_k^T f(Ti)f^T(Ti)\alpha_k)$
Введём матрицы Q_k , $k = 1, \dots, n$, которые, исходя из , имеют размерность $((L+1), (L+1))$

$$Q_k = \sum_{i=N(k-1)}^{Nk-1} f(Ti)f^T(Ti).$$

Для вектор-столбцов P_k , $k = 1, \dots, n$ размерности $(L+1)$ вычислим элементы $P_{k,l}$

$$P_k = \sum_{i=N(k-1)}^{Nk-1} y(Ti)f^o(Ti), P_{k,l} = \sum_{i=N(k-1)}^{Nk-1} Y(Ti)f_l(Ti), l = 1, \dots, L, P_k = (P_{k,1}, P_{k,2}, \dots, P_{k,L})^T.$$

Функционал перепишем на основе матриц и векторов P_k

$$S_7(Y, \alpha) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=N(k-1)}^{Nk-1} Y^2(Ti) + \sum_{k=1}^n \alpha_k^T Q_k \alpha_k - 2 \sum_{k=1}^n P_k^T \alpha_k.$$

Образует блочно-диагональную матрицу Q размерности $((L+1)n, (L+1)n)$ и блочный вектор $P^T = (P_1^T, P_2^T, \dots, P_n^T)$ размерности $n(L+1)$, представим $S_7(Y, \alpha)$ в векторно-матричной форме

$$S_7(Y, \alpha) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=N(k-1)}^{Nk-1} Y^2(Ti) + \alpha^T Q \alpha - 2P^T \alpha. \quad (8)$$

Гладкость для , по нулевой и первой производным в стыковочных точках обеспечим с помощью линейных по α равенств $h_{0k}(\alpha) = 0, h_{1k}(\alpha) = 0, k = 1, \dots, n-1$

$$h_{0k}(\alpha) = f_k^T(TNk)\alpha_k - f_{k+1}^T(TNk)\alpha_{k+1} = 0, h_{1k}(\alpha) = f_k^{(1)T}(TNk)\alpha_k - f_{k+1}^{(1)T}(TNk)\alpha_{k+1} = 0. \quad (9)$$

Регулирование нулевыми и первыми производными (положением и наклоном) на концах интервалов наблюдения реализуем с помощью задания значений нулевых и первых производных на концах в точках $T \cdot 0$ и TNn осуществим с помощью вектора $g = (g_1, g_2, g_3, g_4)^T$ и линейных по α равенств $h_{2s}(\alpha) - g = 0, s = 1, \dots, 4$

$$h_{21}(\alpha) = \alpha_1^T f_1(T \cdot 0) - g_1 = 0, h_{22}(\alpha) = \alpha_1^T f_1^{(1)}(T \cdot 0) - g_2 = 0,$$

$$h_{23}(\alpha) = \alpha_n^T f_n(TNn) - g_3 = 0, h_{24}(\alpha) = \alpha_n^T f_n^{(1)}(TNn) - g_4 = 0. \quad (10)$$

Для (9) введём матричные условия-равенства. Блочные матрицы D_0, D_1 с размерностями $((n-1), (L+1)n)$ сформируем из векторов $d_{00} = f_k^T(TNk), d_{01} = -f_{k+1}^T(TNk), d_{10} = f_k^{(1)T}(TNk), d_{11} = -f_{k+1}^{(1)T}(TNk)$. Для сформируем матрицу D_2 размерности $(4, (L+1)n)$, образуем векторы $d_{21} = f_1^T(T \cdot 0), d_{22} = f_1^{(1)T}(T \cdot 0), d_{23} = f_n^T(TNn), d_{24} = f_n^{(1)T}(TNn)$

$$D_0 = \begin{bmatrix} d_{00} & d_{01} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{00} & d_{01} & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \dots & 0 & d_{00} & d_{01} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_{00} & d_{01} \end{bmatrix}, D_1 = \begin{bmatrix} d_{10} & d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{10} & d_{11} & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \dots & 0 & d_{10} & d_{11} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_{10} & d_{11} \end{bmatrix},$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} d_{21} & 0 & \dots & 0 \\ d_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_{23} \\ 0 & \dots & 0 & d_{24} \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Линейные равенства (9), (10) с использованием (11) запишем в матричном виде

$$D_0 \alpha = 0, D_1 \alpha = 0, D_2 \alpha - g = 0. \quad (12)$$

Решение задачи оптимизации $S_7(Y, \alpha)$ (8) с учётом условий (12) для вектора α осуществим с помощью $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ и $L(Y, \alpha, \lambda)$ - множителей и функции Лагранжа

$$L(Y, \alpha, \lambda) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=N(k-1)}^{Nk-1} Y^2(Ti) + \alpha^T Q \alpha - 2P^T \alpha + \lambda_0^T D_0 \alpha + \lambda_1^T D_1 \alpha + \lambda_2^T (D_2 \alpha - g). \quad (13)$$

Необходимые условия экстремума (13) получим с помощью дифференцирования $L(Y, \alpha, \lambda)$ по векторным переменным $\alpha, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$; производные приравняем нулю

$$2Q\alpha - 2P + D_0^T \lambda_0 + D_1^T \lambda_1 + D_2^T \lambda_2 = 0, D_0 \alpha = 0, D_1 \alpha = 0, D_2 \alpha - g = 0. \quad (14)$$

Найдём решение линейной системы (14) α° и с применением вычислим оптимальную сплайновую аппроксимационную модель $H_{MS}^\circ(Ti) = f_{sp}^\circ(\alpha^\circ, Ti)$, $i = 0, 1, \dots, N_f - 1$.

Предложенные аппроксимационные сплайны: 1. обеспечивают заведомо меньшие погрешности, по сравнению с погрешностями обычной полиномиальной аппроксимации и цифровой фильтрации; 2. могут быть более эффективными, чем вейвлет-функции, аппроксимационные свойства которых зависят от вида материнских вейвлетов; 3. могут быть более эффективнее аппроксимационных нелинейных функций, приводящих к громоздким задачам оптимизации; 4. обеспечивают хорошую помехоустойчивость фильтрации.

9. Заключение

1. Предложенные методы локальных и сплайновых аппроксимаций для цифровой обработки геомагнитных наблюдений адекватны рассматриваемой предметной области.
2. Разработанные алгоритмы ориентированы на применение в задачах цифровой обработки геомагнитных наблюдений, которые не могут быть решены традиционными подходами.
3. Реализация предложенных метода и алгоритмов перспективна для современных задач цифровой обработки геомагнитных наблюдений.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гвишиани А.Д., Лукьянова Р.Ю. Геоинформатика и наблюдения магнитного поля Земли: российский сегмент // Физика Земли. 2015. №2. С.3-20. doi:10.7868/S0002333715020040.
2. Гетманов В.Г. Цифровая обработка нестационарных колебательных сигналов на основе локальных и сплайновых моделей. М.: Изд-во НИЯУ МИФИ. 2011. 298с.
3. Гетманов В.Г., Сидоров Р.В., Дабагян Р.А. Метод фильтрации сигналов с использованием локальных моделей и функций взвешенного усреднения. // Измерительная техника. 2015. №9. С.52-57.
4. Гетманов В.Г. О частотном подпоиске в задаче оценивания параметров кусочно- синусоидальных функций // Автометрия. 1992. № 2. С. 93-98.
5. Гетманов В.Г., Дабагян Р.А., Сидоров Р.В. Исследование характеристик геомагнитных пульсаций методом локальных аппроксимаций // Геомагнетизм и аэрономия. 2016. № 2. Т.56. С.209-216.
6. Гетманов В.Г. Об алгоритме поиска по частоте в задаче оценивания параметров моделей полигармонических сигналов // Автометрия. -2009. №3. С.83-89.
7. Гетманов В.Г., Борзунов Г.И. Алгоритм параллельных вычислений для задачи спектрально- временного анализа на базисных полигармонических функциях // Информационные технологии. 2015. Т.21. №6. С.456-463.
8. Гетманов В.Г. Нелинейная фильтрация наблюдений системы векторного и скалярного магнитометров // Измерительная техника. 2013. №6. С.51-55.
9. Гетманов В.Г. Методы вычисления аппроксимационных сплайновых функций для задач цифровой фильтрации // Теория и системы управления. 2016. №5. С.45-53.
10. Гетманов В.Г. Алгоритмы вычисления аппроксимационных сплайновых функций с учётом оптимизации расположения сплайновых узлов // Автометрия. 2013. Т.49. №1. С.26-41.

11. Mande M., Korte M. Geomagnetic Observations and Models. Springer IAGA Special Sopron Book Series, Vol.5. 1-st Edition. 2011. XV. 343p.
12. Love J. J. Magnetic monitoring of Earth and space// Phys. Today.2008. 61. 31–37.
13. Gvishiani A., Lukianova R., Soloviev An. et al. Survey of Geomagnetic Observations Made in the Northern Sector of Russia and New Methods for Analysing Them// Surveys in Geophysics. 2014. Vol.35. № 5. P.1123-1154. Doi: 10.1107/s10712-014-9297-8.
14. Gvishiani A., Bogoutdinov S., Soloviev A.A. et al. Automated recognition of spikes in 1 Hz data recorded at the Easter Island magnetic observatory// Earth, Planets and Space. 2012. T. 64. № 9. C. 743-752. DOI: 10.5047/eps.2012.03.004.
15. Gvishiani A.D., Agayan S.M., Bogoutdinov Sh. et al. Recognition of disturbances with specified morphology in time series. Spikes on 1-s magnetograms // Izvestiya. Physics of the Solid Earth. 2012. T. 48. № 5. C. 395-409. DOI: 10.1134/S106935131204009X.
16. Gvishiani A.D., Kihn E., Soloviev A.A. et al. Detection of hardware failures at INTERMASNET observatories: application of artificial intelligence techniques to geomagnetic records study// Russian Journal of Earth Sciences. 2009. T. 11. № 2. C. 1b-6. doi: 10.2205/2009ES000387.
17. Gvishiani A.D., Agayan S.M., Zlotnicki J. et al. Mathematical methods of geoinformatics/ Fuzzy comparison and recognition of anomalies in time series //Cybernetics and Systems Analysis. 2008. T. 44. № 3. C. 309-323. DOI: 10.1007/s10559-008-9009-9.
18. International Real-Time Magnetic Observatory Network, 2018. <http://www.intermagnet.org>.
19. Bureau Central de Magnetisme Terrestre,2018. <http://www.bcmt.fr>.
20. Getmanov V.G., Orlov S.E. A way to Use Local and Spline Models for Estimating the Parametrical Functions of a Nonstationary Waveform Signals//Pattern Recognition and Image Analysis, 2011. Vol.21, No.4, pp.677-680.
21. Katkovnik V., K.Egiazarian, J.Astola. Local Approximation in Signal and Image Processing. SPIE Publications. 2006. 576p.
22. Seber G.A.F., Lee A.J. Linear Regression Analysis. J.Wiley & Sons Publications, 2003, 581p.

REFERENCES

1. Gvishiani A.D., Luk'yanova R.YU. 2015. "Geoinformatika i nablyudeniya magnitnogo polya Zemli: rossijskij segment" , *Fizika Zemli*. №2. pp. 3-20. doi:10.7868/S0002333715020040.
2. Getmanov V.G. 2011, *Cifrovaya obrabotka nestacionarnyh kolebatel'nyh signalov na osnove lokal'nyh i splajnovykh modelej*. M.: Izd-vo NIYAU MIFI. p. 298.
3. Getmanov V.G., Sidorov R.V., Dabagyan R.A. 2015, "Metod fil'tracii signalov s ispol'zovaniem lokal'nyh modelej i funkcij vzveshennogo usredneniya" , *Izmeritel'naya tekhnika*. №9. pp. 52-57.
4. Getmanov V.G. 1992, "O chastotnom podpoiske v zadache ocenivaniya parametrov kusochno-sinusoidal'nyh funkcij" , *Avtometriya*. № 2. pp. 93-98.
5. Getmanov V.G., Dabagyan R.A., Sidorov R.V. 2016, "Issledovanie harakteristik geomagnitnyh pul'sacij metodom lokal'nyh approksimacij" , *Geomagnetizm i aehronomiya*. № 2. vol. 56. pp. 209-216.

6. Getmanov V.G. 2009, "Ob algoritme poiska po chastote v zadache ocenivaniya parametrov modelej poligarmonicheskikh signalov", *Avtometriya*. №3. pp. 83-89.
7. Getmanov V.G., Borzunov G.I. 2015, "Algoritmy parallel'nykh vychislenij dlya zadachi spektral'no- vremennogo analiza na bazisnykh poligarmonicheskikh funkciyah", *Informacionnye tekhnologii*. vol.21. №6. pp. 456-463.
8. Getmanov V.G. 2013, "Nelinejnaya fil'traciya nablyudenij sistemy vektornogo i skalyarnogo magnitometrov", *Izmeritel'naya tekhnika*. №6. pp. 51-55.
9. Getmanov V.G. 2016, "Metody vychisleniya approksimacionnykh splajnovykh funkcij dlya zadach cifrovoj fil'tracii", *Teoriya i sistemy upravleniya*. №5. pp. 45-53.
10. Getmanov V.G. 2013, "Algoritmy vychisleniya approksimacionnykh splajnovykh funkcij s uchyotom optimizacii raspolozheniya splajnovykh uzlov", *Avtometriya*. vol.49. №1. pp. 26-41.
11. Mandea M., Korte M. 2011, *Geomagnetic Observations and Models*. Springer IAGA Special Sopron Book Series, Vol.5. 1-st Edition. XV. 343 p.
12. Love J. J. 2008, "Magnetic monitoring of Earth and space", *Phys. Today*. 61. pp. 31-37.
13. Gvishiani A., Lukianova R., Soloviev An. et al. 2014, "Survey of Geomagnetic Observations Made in the Northern Sector of Russia and New Methods for Analysing Them", *Surveys in Geophysics*. Vol. 35. № 5. pp. 1123-1154. Doi: 10.1107/s10712-014-9297-8.
14. Gvishiani A., Bogoutdinov S., Soloviev A.A. et al. 2012, "Automated recognition of spikes in 1 HZ data recorded at the Easter Island magnetic observatory", *Earth, Planets and Space*. vol. 64. № 9. pp. 743-752. DOI: 10.5047/eps.2012.03.004.
15. Gvishiani A.D., Agayan S.M., Bogoutdinov Sh. et al. 2012, "Recognition of disturbances with specified morphology in time series. Spikes on 1-s magnetograms", *Izvestiya. Physics of the Solid Earth*. vol. 48. № 5. pp. 395-409. DOI: 10.1134/S106935131204009X.
16. Gvishiani A.D., Kihn E., Soloviev A.A. et al. 2009, "Detection of hardware failures at INTERMASNET observatories: application of artificial intelligence techniques to geomagnetic records study", *Russian Journal of Earth Sciences*. vol. 11. № 2. pp. 1b-6. doi: 10.2205/2009ES000387.
17. Gvishiani A.D., Agayan S.M., Zlotnicki J. et al. 2008 "Mathematical methods of geoinformatics/ Fuzzy comparison and recognition of anomalies in time series", *Cybernetics and Systems Analysis*. vol. 44. № 3. pp. 309-323. DOI: 10.1007/s10559-008-9009-9.
18. International Real-Time Magnetic Observatory Network, 2018. <http://www.intermagnet.org>.
19. Bureau Central de Magnetisme Terrestre, 2018. <http://www.bcmf.fr>.
20. Getmanov V.G., Orlov S.E. 2011 "A way to Use Local and Spline Models for Estimating the Parametrical Functions of a Nonstationary Waveform Signals", *Pattern Recognition and Image Analysis*, Vol.21, No.4, pp.677-680.
21. Katkovnik V., K.Egiazarian, J.Astola. 2006 *Local Approximation in Signal and Image Processing*. SPIE Publications. 576p.
22. Seber G.A.F., Lee A.J. 2003, *Linear Regression Analysis*. J.Wiley & Sons Publications, 581p.

Получено 27.07.2018

Принято в печать 22.10.2018

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 19. Выпуск 4

УДК 539.52:669.14.018

DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-4-43-54

Применение математического метода локальных вариаций для решения задач пластического формоизменения металлических, порошковых и нанокпозиционных материалов¹

Журавлев Геннадий Модестович — профессор, доктор технических наук, Тульский государственный университет.

e-mail: technology@tspu.ru

Гвоздев Александр Евгеньевич — главный научный сотрудник кафедры технологии и сервиса, профессор, доктор технических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого.

e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru

Колмаков Алексей Георгиевич — член-корреспондент РАН, профессор, доктор технических наук, заместитель директора, Институт металлургии и материаловедения им. А. А. Байкова РАН.

e-mail: kolmalov@imet.ac.ru

Сергеев Александр Николаевич — заведующий кафедрой технологии и сервиса, старший научный сотрудник кафедры технологии и сервиса, профессор, доктор педагогических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого.

e-mail: technology@tspu.ru

Малий Дмитрий Владимирович — ассистент кафедры технологии и сервиса, Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого.

e-mail: MaliyDmitriy@yandex.ru

Аннотация

В работе рассмотрен подход к решению задач пластического формоизменения с использованием вариационного подхода, который позволяет определить напряженно-деформированное состояние и связанные с ним технологические параметры с учетом совокупности реологических свойств обрабатываемых материалов. На основе первого энергетического принципа механики, строящегося на теоремах об экстремальных свойствах, когда действительному полю скоростей соответствует абсолютный минимум полной мощности процесса формоизменения, составлен энергетический функционал. Энергетический функционал представляет собой баланс мощности внутренних и внешних сил. Под мощностью внутренних сил понимаются затраты мощности пластической деформации; мощности, связанной с наличием поверхностей разрыва скоростей в объеме деформируемой среды; мощности сил трения, на контактной границе с инструментом; инерционная компонента мощности, затрачиваемая на изменение кинетической энергии. Такая постановка дает возможность исследовать так же и процессы высокоскоростного деформирования. Данный функционал характеризует состояние материала при данных условиях обработки. Для решения данного функционала применен метод локальных вариаций, который относится к прямым численным методам вариационного исчисления. Приведен, в качестве примера, алгоритм расчета мощности пластической деформации для процесса обратного выдавливания стакана из изотропного, жесткопластического материала.

¹Работа выполнена по федеральной целевой программе «Исследование и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2014-2020 годы» (уникальный идентификатор проекта RFMEF 157717X0271).

Ключевые слова: пластическое формоизменение, метод локальных вариаций, изотропная жесткопластическая среда, энергетический функционал, процесс обратного выдавливания.

Библиография: 27 названий.

Для цитирования:

Г. М. Журавлев, А. Е. Гвоздев, А. Г. Колмаков, А. Н. Сергеев, Д. В. Малий. Применение математического метода локальных вариаций для решения задач пластического формоизменения металлических, порошковых и нанокomпозиционных материалов // Чебышевский сборник, 2018, т. 19, вып. 4, с. 43–54.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 19. No. 4

UDC 539.52:669.14.018

DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-4-43-54

Application of mathematical method of local variations to solve problems of plastic formification of metal, powder and nanocomposition materials

Zhuravlev Gennady Modestovich — professor, doctor of technical sciences, Tula State University.

e-mail: technology@tspu.ru

Gvozdev Alexander Evgenievich — chief researcher of the department of technology and service, professor, doctor of technical sciences, Tula State L. N. Tolstoy Pedagogical University.

e-mail: gvozdev.alexandr2013@yandex.ru

Kolmakov Aleksey Georgievich — corresponding member of RAS, professor, doctor of technical sciences, deputy director, Institute of Metallurgy and Materials Science A.A. Baikova of the Russian Academy of Sciences.

e-mail: kolmalov@imet.ac.ru

Sergeev Alexander Nikolaevich — head of the department of technology and service, senior researcher of the department of technology and service, professor, doctor of pedagogical sciences, Tula L.N. Tolstoy State Pedagogical University.

e-mail: technology@tspu.ru

Maliy Dmitriy Vladimirovich — assistant of the department of technology and service, Tula State L.N. Tolstoy Pedagogical University.

e-mail: MaliyDmitriy@yandex.ru

Abstract

The paper considers an approach to solving plastic forming problems using a variational approach, which allows to determine the stress-strain state and the technological parameters associated with it, taking into account the combination of rheological properties of the materials being processed. On the basis of the first principle of energy in mechanics, which is built on the theorems on extremal properties, when the absolute minimum of the total power of the form-changing process corresponds to a real velocity field, energy functional has been composed. The energy functional is a power balance of internal and external forces. As the power of internal forces, we understand the cost of power of plastic deformation; power associated with the presence of velocities discontinuity surfaces in the volume of a deformable medium; power of friction forces, on the contact boundary with the tool; inertial component of power expended on the change in kinetic energy. Such a formulation makes it possible to investigate the processes of

high-speed strain in the same way. This functional characterizes the state of the material under these processing conditions. To solve this functional, the method of local variations is applied, which refers to the direct numerical methods of the calculus of variations. An algorithm for calculating the power of plastic strains for the process of reverse extrusion of a glass from an isotropic, rigid-plastic material is given as an example.

Keywords: plastic form changing, local variation method, isotropic rigid-plastic medium, energy functional, process of reverse extrusion.

Bibliography: 27 titles.

For citation:

G.M. Zhuravlev, A.E. Gvozdev, A.G. Kolmakov, A. N. Sergeev, D. V. Maliy, 2018, "Application of mathematical method of local variations to solve problems of plastic formification of metal, powder and nanocomposition materials", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 4, pp. 43–54.

1. Введение

Для анализа процессов пластического формоизменения в настоящее время в связи с развитием вычислительной техники целесообразно использование вариационного подхода, который позволяет определить напряженно-деформированное состояние и связанные с ним технологические параметры с учетом совокупности реологических свойств обрабатываемых материалов. Постановка задачи осуществляется на основе первого энергетического принципа механики, строящегося на теоремах об экстремальных свойствах, когда действительному полю скоростей соответствует абсолютный минимум полной мощности процесса формоизменения по сравнению с ее значением, определенным через произвольное кинематически возможное поле скоростей деформаций.

2. Результаты и анализ исследований

При исследовании процессов пластической деформации на основе метода баланса мощностей записывается некоторое энергетическое уравнение – функционал, составляющие которого полностью характеризуют состояние деформируемой среды в данных условиях обработки. Функционал, представляет собой разность мощностей внутренних и внешних сил, действующих на систему.

Под мощностью внутренних сил понимаются затраты мощности описываемые выражением:

$$W_{2=CB} = W_{?} + W_{@07} + W_{B@} + W_{8=} \quad (1)$$

где: $W_{?}$ – пластическая компонента мощности; $W_{@07}$ – компонента мощности, связанная с наличием поверхностей разрыва скоростей в объеме деформируемой среды; $W_{B@}$ – компонента мощности сил трения, на контактной границе с инструментом; $W_{8=}$ – инерционная компонента мощности, затрачиваемая на изменение кинетической энергии.

Построен энергетический функционал, который характеризует состояние деформируемой среды как изотропное, жесткопластическое, который будет иметь вид [1].

$$\int_V \tau_s H dV + \int_F \tau_s [\nu] dF + \int_{F_K} \mu [\nu_k] dF_k + \int_V \alpha dV - \int_{F^*} x V_0 dF^* = 0 \quad (2)$$

где τ_s – предел текучести сдвига; H – интенсивность скорости деформации сдвига; V – объем тела; $[\nu]$ – величина разрыва касательных составляющих скоростей на поверхностях дискретных элементов; F – площадь поверхности разрыва; μ – коэффициент трения; $[\nu_k]$ – скорость скольжения металла по инструменту; F_k – площадь контактной границы с инструментом; a –

скоростная функция, учитывающая влияние инерционного воздействия; X – вектор поверхностных сил; V_0 – вектор скорости движения инструмента (скорости деформирования; F^* – площадь поверхности воздействия внешних сил.

Скоростная функция a представляет собой сумму двух частей:

$$\alpha = \rho\alpha_1 + \rho\alpha_2 \quad (3)$$

где $\alpha_1 = \omega \frac{\partial \omega}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial t}$ $\alpha_2 = \omega^2 \frac{\partial \omega}{\partial z} + v^2 \frac{\partial v}{\partial r}$

При этом α_1 – предполагает дискретизацию по времени, а α_2 – только по координатным осям r и z .

Составленный таким образом функционал решается методом локальных вариаций [2]. Суть метода заключается в варьировании с достаточно малым шагом заданного произвольного, но кинематически возможного для рассматриваемых процессов формоизменения, поля скоростей перемещения, нахождения соответствующих каждому варьированному значению поля скоростей значений функционала и выборе среди них минимального. При этом составляющая, связанная с внешними силами, в варьировании не участвует [3]. Подобное поэтапное решение приводит в итоге к получению действительного поля скоростей перемещения, членам которого соответствуют минимальные значения мощностей, то есть к реализации первого экстремального принципа. Следует отметить, что данный метод относится к прямым численным методам решения вариационных задач, и применим к решению задач для функций любого числа переменных. Этот подход дает возможность строить решения при помощи не очень гладких локализованных функций [4-7].

Проведем, в качестве примера, расчет мощности пластической деформации для процесса обратного выдавливания стакана схема, которого представлена на (рис. 1) [8].

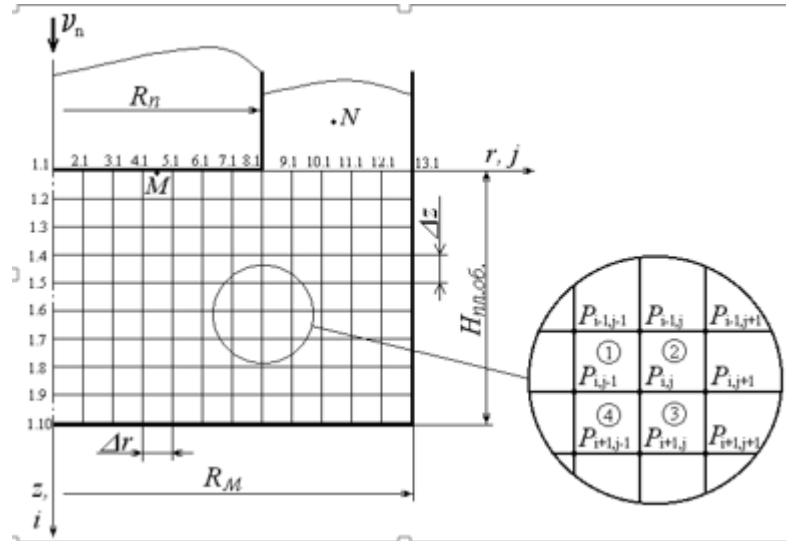


Рис. 1: Схема процесса обратного выдавливания стакана

На основе конечно-элементной дискретизации сплошной среды представим рассматриваемую среду в виде системы дискретных элементов, а состояние элемента опишем с помощью обобщенных клеточных переменных с использованием вариационных принципов механики [7, 9-12].

Разобьем область пластической деформации (деформируемой среды) на четырехугольные элементы; для чего проведем в плоскости, проходящей через оси z и r , два семейства прямых:

$$r = a + j \cdot \Delta r; \quad (4)$$

$$z = b + i \cdot \Delta z, \quad (5)$$

где a и b – произвольны; $\Delta r > 0$, $\Delta z > 0$.

Прямые этих семейств пересекаются в точках P_{ij} , и разбивают плоскость на равные прямоугольники со сторонами Δr и Δz .

На основании априорной информации зададим значения составляющей скорости перемещений по оси r в узловых точках P_{ij} из кинематически возможных значений

Представим функционал записанным для частного случая высокоскоростного деформирования при отсутствии его компонента связанного с наличием разрыва касательных составляющих скоростей, исключая при этом член, определяющий мощность поверхностных сил [3, 13]:

$$I = \sum I_{ij}, \quad (6)$$

где I_{ij} - функционал от функции по ячейке с вершинами $P_{i-1,j-1}$, $P_{i+1,j-1}$, $P_{i+1,j+1}$, $P_{i-1,j+1}$.

Запишем функционал в виде:

$$\begin{aligned} I_{ij} = \tau_s \left(\frac{2}{3} \right)^{0,5} & \left[\left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right)^2 + \left(2 \frac{v}{r} + \frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 + \left(-\frac{v}{r} - 2 \frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 + \frac{3}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial \omega}{\partial r} \right)^2 \right]^{0,5} R_i \cdot dr dz + \\ & + \rho \left[\left(\omega \frac{\partial \omega}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial t} \right) + \omega^2 \frac{\partial \omega}{\partial z} + v^2 \frac{\partial v}{\partial r} \right] R_i \cdot dr dz + 2\mu\tau_s \left(v_0 \frac{R_i^2}{R_{<}^2 - R_i^2} \right) \pi R_{<} (R_{<} - R_i) \end{aligned} \quad (7)$$

Применив конечно-разностную систему для аппроксимации частных производных, например, для ячейки 1 (рис. 1.) с вершинами ij , P_{i-1j} , P_{i-1j-1} , P_{ij-1} , имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial r} &= \frac{v_{i,j} - v_{i,j-1}}{\Delta r}; & \frac{\partial v}{\partial z} &= \frac{v_{i,j} - v_{i-1,j}}{\Delta z}; \\ \frac{\partial \omega}{\partial r} &= \frac{\omega_{i,j} - \omega_{i,j-1}}{\Delta r}; & \frac{\partial \omega}{\partial z} &= \frac{\omega_{i,j} - \omega_{i-1,j}}{\Delta z}. \end{aligned} \quad (8)$$

Используя полученные формулы, функционал для точки i,j можно представлять в виде сумму:

$$I_{ij} = (I_1 + I_2 + I_3 + I_4) R_i dr dz + 2\mu\tau_s \left(v_0 \frac{R_N^2}{R_m^2 - R_n^2} \right) \pi R_m (R_m - R)$$

где

$$\begin{aligned} I_1 = & \left\{ \frac{2}{3} \cdot \mu \cdot \left[\left(\frac{u_{i+1,j} - u_{ij}}{\Delta r} - \frac{u_{ij}}{r_i} \right)^2 + \left(2 \cdot \frac{u_{ij}}{r_i} + \frac{u_{i+1,j} - u_{ij}}{\Delta r} \right)^2 + \right. \right. \\ & + \left(-2 \cdot \frac{u_{i+1,j} - u_{ij}}{\Delta r} - \frac{u_{ij}}{r_i} \right)^2 + \\ & \left. + \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{u_{i,j+1} - u_{ij}}{\Delta z} + \frac{\omega_{i+1,j} - \omega_{ij}}{\Delta r} \right)^2 \right] + \\ & + \tau_s \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^{0,5} \cdot \left[\left(\frac{u_{i+1,j} - u_{ij}}{\Delta r} - \frac{u_{ij}}{r_i} \right)^2 + \left(2 \cdot \frac{u_{ij}}{r_i} + \frac{u_{i+1,j} - u_{ij}}{\Delta r} \right)^2 + \right. \\ & + \left(-2 \cdot \frac{u_{i+1,j} - u_{ij}}{\Delta r} - \frac{u_{ij}}{r_i} \right)^2 + \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{u_{i,j+1} - u_{ij}}{\Delta z} + \frac{\omega_{i+1,j} - \omega_{ij}}{\Delta r} \right)^2 \left. \right]^{0,5} + \\ & \left. + \rho \cdot \left(\frac{u_{i+1,j} - u_{ij}}{\Delta r} \cdot u_{ij}^2 + \frac{\omega_{i,j+1} - \omega_{ij}}{\Delta z} \cdot \omega_{ij}^2 \right) \right\} \cdot r_i \cdot \Delta r \cdot \Delta z; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2 = & \left\{ \frac{2}{3} \cdot \mu \cdot \left[\left(\frac{u_{i+1,j} - u_{ij}}{\Delta r} - \frac{u_{ij}}{r_i} \right)^2 + \left(2 \cdot \frac{u_{ij}}{r_i} + \frac{u_{i+1,j} - u_{ij}}{\Delta r} \right)^2 + \right. \right. \\
& + \left. \left(-2 \cdot \frac{u_{i+1,j} - u_{ij}}{\Delta r} - \frac{u_{ij}}{r_i} \right)^2 + \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{u_{ij} - u_{i,j-1}}{\Delta z} + \frac{\omega_{i+1,j} - \omega_{ij}}{\Delta r} \right)^2 \right] + \\
& + \tau_s \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^{0,5} \cdot \left[\left(\frac{u_{i+1,j} - u_{ij}}{\Delta r} - \frac{u_{ij}}{r_i} \right)^2 + \left(2 \cdot \frac{u_{ij}}{r_i} + \frac{u_{i+1,j} - u_{ij}}{\Delta r} \right)^2 + \right. \\
& + \left. \left(-2 \cdot \frac{u_{i+1,j} - u_{ij}}{\Delta r} - \frac{u_{ij}}{r_i} \right)^2 + \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{u_{ij} - u_{i,j-1}}{\Delta z} + \frac{\omega_{i+1,j} - \omega_{ij}}{\Delta r} \right)^2 \right]^{0,5} + \\
& \left. + \rho \cdot \left(\frac{u_{i+1,j} - u_{ij}}{\Delta r} \cdot u_{ij}^2 + \frac{\omega_{i,j} - \omega_{i,j-1}}{\Delta z} \cdot \omega_{ij}^2 \right) \right\} \cdot r_i \cdot \Delta r \cdot \Delta z;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_3 = & \left\{ \frac{2}{3} \cdot \mu \cdot \left[\left(\frac{u_{ij} - u_{i-1,j}}{\Delta r} - \frac{u_{ij}}{r_i} \right)^2 + \left(2 \cdot \frac{u_{ij}}{r_i} + \frac{u_{ij} - u_{i-1,j}}{\Delta r} \right)^2 + \right. \right. \\
& + \left. \left(-2 \cdot \frac{u_{ij} - u_{i-1,j}}{\Delta r} - \frac{u_{ij}}{r_i} \right)^2 + \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{u_{ij} - u_{i,j-1}}{\Delta z} + \frac{\omega_{ij} - \omega_{i-1,j}}{\Delta r} \right)^2 \right] + \\
& + \tau_s \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^{0,5} \cdot \left[\left(\frac{u_{ij} - u_{i-1,j}}{\Delta r} - \frac{u_{ij}}{r_i} \right)^2 + \left(2 \cdot \frac{u_{ij}}{r_i} + \frac{u_{ij} - u_{i-1,j}}{\Delta r} \right)^2 + \right. \\
& + \left. \left(-2 \cdot \frac{u_{ij} - u_{i-1,j}}{\Delta r} - \frac{u_{ij}}{r_i} \right)^2 + \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{u_{ij} - u_{i,j-1}}{\Delta z} + \frac{\omega_{ij} - \omega_{i-1,j}}{\Delta r} \right)^2 \right]^{0,5} + \\
& \left. + \rho \cdot \left(\frac{u_{ij} - u_{i-1,j}}{\Delta r} \cdot u_{ij}^2 + \frac{\omega_{ij} - \omega_{i,j-1}}{\Delta z} \cdot \omega_{ij}^2 \right) \right\} \cdot r_i \cdot \Delta r \cdot \Delta z;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_4 = & \left\{ \frac{2}{3} \cdot \mu \cdot \left[\left(\frac{u_{ij} - u_{i-1,j}}{\Delta r} - \frac{u_{ij}}{r_i} \right)^2 + \left(2 \cdot \frac{u_{ij}}{r_i} + \frac{u_{ij} - u_{i-1,j}}{\Delta r} \right)^2 + \right. \right. \\
& + \left. \left(-2 \cdot \frac{u_{ij} - u_{i-1,j}}{\Delta r} - \frac{u_{ij}}{r_i} \right)^2 + \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{u_{ij} - u_{i,j-1}}{\Delta z} + \frac{\omega_{ij} - \omega_{i-1,j}}{\Delta r} \right)^2 \right] + \\
& + \tau_s \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^{0,5} \cdot \left[\left(\frac{u_{ij} - u_{i-1,j}}{\Delta r} - \frac{u_{ij}}{r_i} \right)^2 + \left(2 \cdot \frac{u_{ij}}{r_i} + \frac{u_{ij} - u_{i-1,j}}{\Delta r} \right)^2 + \right. \\
& + \left. \left(-2 \cdot \frac{u_{ij} - u_{i-1,j}}{\Delta r} - \frac{u_{ij}}{r_i} \right)^2 + \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{u_{i,j+1} - u_{ij}}{\Delta z} + \frac{\omega_{ij} - \omega_{i-1,j}}{\Delta r} \right)^2 \right]^{0,5} + \\
& \left. + \rho \cdot \left(\frac{u_{ij} - u_{i-1,j}}{\Delta r} \cdot u_{ij}^2 + \frac{\omega_{i,j+1} - \omega_{i,j}}{\Delta z} \cdot \omega_{ij}^2 \right) \right\} \cdot r_i \cdot \Delta r \cdot \Delta z.
\end{aligned}$$

Через минимизацию суммы значений функционала, на основании значений заданного поля скоростей, вычислим действительные значения поля $v_{i,j}$. Для этого, выбрав достаточно малую величину шага, значительно меньшую $\Delta v \ll V_0$, но $\Delta v > 0$ (например, $\Delta v = 0,01$), будем изменять значения первоначально заданного поля скоростей на величину шага в большую и меньшую стороны $v_{i,j} \pm \Delta v$. Это повлечет за собой изменение значений мощности в ячейках, представляющих собой непосредственное окружение для данной точки.

В каждом приближении для внутренней точки P_{ij} вычисляется четыре значения мощности $I_1 + I_2 + I_3 + I_4$, сумма которых, соответствует определенной величине скорости в данной точке поля. Определяется минимальное значение этих четырех сумм и значение скорости v_{ij} , соответствующее минимуму функционала в данной точке, это значение скорости и приравнивается данной точке.

После выполнения вышеописанной процедуры, для всех внутренних точек пластической области, автоматически определяется: суммарное значение мощности пластической деформации, и строится соответствующее ему скорректированное поле скоростей для узловых точек. Процесс перебора повторяется снова. Он заканчивается тогда, когда разница в значениях функционала на n -й и $n-1$ -й итерациях становится не более априорно заданного малого числа, то есть функционал фактически перестает убывать. Таким образом, находится минимума функционала, то есть минимум мощности пластической деформации и соответствующему ему массив, действительного поля составляющей скорости перемещения вдоль оси r для узловых точек.

По полученной мощности деформации определяется:

– технологическая сила $P = W/V$,

где W – мощность пластической деформации; V – скорость деформирования.

– удельная сила деформирования $q = P/F$;

где F – площадь поперечного сечения пуансона.

Таким образом, осуществляется расчет силовых параметров процесса пластического формоизменения.

Действительное поле скоростей, в свою очередь, позволяет провести дальнейший анализ напряженно-деформированного состояния, рассчитать по известным основным соотношениям: компоненты тензора деформаций, скорости деформаций, интенсивности скоростей деформаций и соответствующие им напряжения для узловых точек исследуемого процесса, что определяет пластические возможности рассматриваемого процесса формоизменения.

Для численного решения задач методом локальных вариаций была разработано программное обеспечение расчета мощности деформации [14]. Программа предназначена для нахождения минимума функционала и соответствующему этому минимуму полю составляющей скорости перемещения вдоль оси r и может быть применено для создания малоотходных процессов получения и обработки металлических, порошковых и наноконпозиционных материалов с заданными свойствами [15-26].

3. Заключение

Рассмотренный математический метод локальных вариаций может найти широкое применение при создании ресурсосберегающих технологий процессов обработки металлов и сплавов давлением [27].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Теория обработки металлов давлением / И.Я. Тарновский, А.А. Поздеев, О.А. Ганаго и др. – М.: Металлургиздат, 1963. – 672 с.
2. Черноусько Ф.Л., Баничук Н.В. Вариационные задачи механики управления. – М.: Наука, 1973. – 238 с.
3. Обработка сталей и сплавов в интервале температур фазовых превращений: монография. Г.М. Журавлев, А.Е. Гвоздев. Тула: Изд-во ТулГУ, 2016. 320 с.

4. Журавлев Г.М., Гвоздев А.Е. Пластическая дилатансия и деформационная повреждаемость металлов и сплавов: монография. Тула: Изд-во ТулГУ, 2014. 114 с.
5. Гвоздев А.Е., Журавлев Г.М., Колмаков А.Г. Формирование механических свойств углеродистых сталей в процессах вытяжки с утонением // Технология металлов. 2015. № 11. С. 17-29.
6. Журавлев Г.М., Гвоздев А.Е., Сергеев Н.Н., Провоторов Д.А. Влияние деформационной повреждаемости на формирование механических свойств малоуглеродистых сталей // Производство проката. 2015. № 12. С. 9-13.
7. Комплексные задачи теории пластичности: монография / Н.Д. Тутышкин, А.Е. Гвоздев, В.И. Трегубов, Ю.В. Полтавец, Е.М. Селедкин, А.С. Пустовгар, В.И. Золотухин, Г.М. Журавлев; под ред. Н.Д. Тутышкина, А.Е. Гвоздева. 2-е изд., перераб. и доп. - Тула: Изд-во ТулГУ, 2015. – 408 с.
8. Гвоздев А.Е., Журавлёв Г.М., Колмаков А.Г., Провоторов Д.А., Сергеев Н.Н. Расчет деформационной повреждаемости в процессах обратного выдавливания металлических изделий // Технология металлов. 2016. № 1. С. 23-32.
9. Гвишиани А. Д. Характеры представлений дискретных серий группы $SL(2, K)$, где K не дискретное несвязное локально компактное поле. Функциональный анализ и его приложения. (1973), Т.7. Вып. 1. 16–32.
10. Гвишиани А.Д. Представления целочисленной группы $SL(2)$ над локальным неархимедовым полем в пространстве функций на плоскости Лобачевского // Вестник МГУ. Сер1. Математика и механика. 1977. № 5. С. 22-29.
11. Гетманов В. Г., Гвишиани А. Д., Сидоров Р. В. Применение метода локальных аппроксимаций в задаче снижения погрешностей системы векторный-скалярный магнитометр для наблюдений геомагнитного поля с магнитными бурями // Глобальная электрическая цепь: Материалы Второй Всероссийской конференции. Геофизическая обсерватория «Борок» – филиал Института физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН; Ответственный редактор С.В. Анисимов. 2015. С. 130.
12. Макаров Э.С., Гвоздев А.Е., Журавлев Г.М. Теория пластичности дилатирующих сред: монография / Под ред. проф. А.Е. Гвоздева. – 2-е изд., перераб. и доп. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2015. – 337 с.
13. Макаров Э.С., Ульченкова В.Э., Гвоздев А.Е., Сергеев Н.Н., Сергеев А.Н. Сопряженные поля в упругих, пластических, сыпучих средах и металлических труднодеформируемых системах: монография / под ред. проф. А.Е. Гвоздева. Тула: Изд-во ТулГУ, 2016. 526 с.
14. Гвоздев А.Е., Бреки А.Д., Дорохин Ю.С., Журавлев Г.М., Клементьев Д.С., Кутепов С.Н., Малий Д.В., Медведев П.Н., Минаев И.В., Сергеев А.Н., Хонелидзе Д.М. Программный комплекс расчета мощности сил, поверхностного и фрикционного взаимодействия слитковых, порошковых и наноконпозиционных металлических систем // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2018661010. - 2018.
15. Гвоздев А.Е., Колмаков А.Г., Маляров А.В., Сергеев Н.Н., Тихонова И.В., Пруцков М.Е. Условия проявления неустойчивости цементита при термоциклировании углеродистых сталей // Материаловедение. 2014. № 10. С. 31-36.

16. Gvozdev A.E., Bogolyubova D.N., Sergeev N.N., Kolmakov A.G., Provotorov D.A., Tikhonova I.V. Features of softening processes of aluminum, copper, and their alloys under hot deformation // *Inorganic Materials: Applied Research*. 2015. T. 6. № 1. С. 32-40.
17. Гвоздев А.Е., Колмаков А.Г., Провоторов Д.А., Сергеев Н.Н., Боголюбова Д.Н. Зависимость показателей сверхпластичности труднодеформируемых сталей р6м5 и 10р6м5-мп от схемы напряженного состояния // *Деформация и разрушение материалов*. 2015. № 11. С. 42-46.
18. Расчет процессов обработки материалов давлением методом конечных элементов: монография / под ред. проф. А.Е. Гвоздева / Е.М. Селедкин, А.Е. Гвоздев, А.Н. Сергеев, Н.Е. Стариков, А.А. Калинин. Тула: Изд-во ТулГУ, 2016. 113 с.
19. Breki A.D., Gvozdev A.E., Kolmakov A.G. Application of generalized pascal triangle for description of oscillations of friction forces // *Inorganic Materials: Applied Research*. 2017. T. 8. № 4. С. 509-514.
20. Gvozdev A.E., Sergeyev N.N., Minayev I.V., Tikhonova I.V., Sergeyev A.N., Khonelidze D.M., Maliy D.V., Golyshev I.V., Kolmakov A.G., Provotorov D.A. Temperature distribution and structure in the heat-affected zone for steel sheets after laser cutting // *Inorganic Materials: Applied Research*. 2017. T. 8. № 1. С. 148-152.
21. Breki A.D., Gvozdev A.E., Kolmakov A.G., Starikov N.E., Provotorov D.A., Sergeyev N.N., Khonelidze D.M. On friction of metallic materials with consideration for superplasticity phenomenon // *Inorganic Materials: Applied Research*. 2017. T. 8. № 1. С. 126-129.
22. Макаров Э.С., Гвоздев А.Е., Журавлев Г.М., Сергеев А.Н., Минаев И.В., Бреки А.Д., Малий Д.В. Применение теории пластичности дилатирующих сред к процессам уплотнения порошков металлических систем // *Чебышевский сборник*. 2017. Т. 18. № 4 (64). С. 268-284.
23. Гвоздев А.Е., Журавлев Г.М., Сапожников С.В. К теоретическому анализу процесса компактирования порошковых материалов прессованием // *Известия Тульского государственного университета. Науки о Земле*. 2017. № 4. С. 273-283.
24. Журавлев Г.М., Гвоздев А.Е., Чеглов А.Е., Сергеев Н.Н., Губанов О.М. Вариант определения максимального пластического упрочнения в инструментальных сталях // *Сталь*. 2017. № 6. С. 26-39.
25. Шоршоров М.Х., Гвоздев А.Е., Сергеев А.Н., Кутепов С.Н., Кузовлева О.В., Селедкин Е.М., Клементьев Д.С., Калинин А.А. Моделирование процессов ресурсосберегающей обработки слитковых, порошковых, наноструктурных и композиционных материалов: монография, 2-е издание, исправленное и дополненное. Тула: Изд-во ТулГУ, 2018. 359 с.
26. A. D. Breki, S. E. Aleksandrov, K. S. Tyurikov, A. G. Kolmakov, A. E. Gvozdev, A. A. Kalinin. Antifriction Properties of Plasma-Chemical Coatings Based on SiO₂ with MoS₂ Nanoparticles under Conditions of Spinning Friction on ShKh₁₅ Steel // *Inorganic Materials: Applied Research*, 2018, Volume 9, Issue 4, pp 714–718. Doi: 10.1134/S2075113318040081.
27. Шоршоров М.Х., Базык А.С., Казаков М.В., Гвоздев А.Е., Пустовгар А.С., Егоров Е.В., Герасин А.Н., Сидоров Б.П. Сверхпластичность сталей и сплавов и ресурсосберегающие технологии процессов обработки металлов давлением: монография. Тула: Изд-во ТулГУ, 2018. 158 с.

REFERENCES

1. Tarnovsky I.Ya., Pozdeev A.A., Ganago O.A., et al. 1963, *Teoriya obrabotki metallov davleniem* [Theory of metal forming]. Moscow: Metallurgizdat, 672 p.
2. Chernousko F.L., Banichuk N.V. 1973, *Variacionnye zadachi mekhaniki upravleniya* [Variational problems of control mechanics]. Moscow: Nauka, 238 p.
3. Zhuravlev G.M., Gvozdev A.E. 2016, *Obrabotka staley i splavov v intervale temperatur fazovyh prevrashchenij* [Processing of steels and alloys in the temperature range of phase transformations] monograph. Tula: Izd-vo TulGU, 320 p.
4. Zhuravlev G.M., Gvozdev A.E. 2014, *Plasticheskaya dilatatsiya i deformatsionnaya povrezhdaemost metallov i splavov* [Plastic dilatancy and deformation damage of metals and alloys] monograph. Tula: Izd-vo TulGU, 114 p.
5. Gvozdev A.E., Zhuravlev G.M., Kolmakov A.G. 2015, "Formirovanie mekhanicheskikh svoystv uglerodistykh staley v processah vytyazhki s utoneniem [Formation of mechanical properties of carbon steels in the processes of drawing with thinning]", *Tekhnologiya metallov*. No. 11. pp. 17-29.
6. Zhuravlev G. M., Gvozdev A. E., Sergeev N. N., Provotorov D. A. 2015, "Vliyanie deformatsionnoy povrezhdaemosti na formirovanie mekhanicheskikh svoystv malouglerodistykh staley [Influence of deformation damage on the formation of mechanical properties of low-carbon steels]", *Proizvodstvo prokata*. No. 12. pp. 9-13.
7. Tutyshkin N. D., Gvozdev A. E., Tregubov V. I., et al. 2015, *Kompleksnye zadachi teorii plastichnosti* [Complex problems of plasticity theory] monograph. Tula: Izd-vo TulGU, 408 p.
8. Gvozdev A.E., Zhuravlev G. M., Kolmakov A.G., et al. 2016, *Raschet deformatsionnoy povrezhdaemosti v processah obratnogo vydavlivaniya metallicheskih izdelij* [Calculation of deformation damage in the processes of reverse extrusion of metal products] *Tekhnologiya metallov*. No. 1. pp. 23-32.
9. Gvishiani A.D. 1973, "Characters of representations of discrete series of groups in $SL(2, K)$, where K is a nondiscrete unconnected locally compact field", *Functional Analysis and Its Applications*, Vol. 7. No. 1. pp. 16-32.
10. Gvishiani A.D. 1977, "Predstavleniya celochislennoj gruppy $SL(2)$ nad lokalnym nearhimedovym polem v prostranstve funktsij na ploskosti Lobachevskogo [Representations of an integer group $SL(2)$ over a local non-Archimedean field in the function space on the Lobachevsky plane]", *Vestnik MGU. Seriya 1. Matematikai mekhanika*. No 5. pp. 22-29.
11. Getmanov V.G., Gvishiani A.D., Sidorov R.V. 2015, "Primenenie metoda lokal'nykh approksimatsiy v zadache snizheniya pogreshnostey sistemy vektornyj-skalyarnyj magnetometr dlya nablyudenij geomagnitnogopolya s magnitnymi buryami [Application of the method of local approximations in the problem of reducing the errors of the vector-scalar magnetometer system for observations of the geomagnetic field with magnetic storms]", *Globalnaya ehlektricheskaya cep: Materialy Vtoroj Vserossijskoj konferencii. Geofizicheskaya observatoriya «Borok»*. Borok: Filigran, 130 p.
12. Makarov E.S., Gvozdev A.E., Zhuravlev G.M. 2015, *Teoriya plastichnosti dilatiruyushchih sred* [Theory of plasticity gelatinous environments] monograph. Tula: Izd-vo TulGU, 337 p.

13. Makarov E.S., Elenkova E.V., Gvozdev A.E., et al. 2016, *Sopryazhennye polya v uprugih, plasticheskikh, sypuchih sredah i metallicheskih trudnodeformiruemym sistemah [Conjugate fields in elastic, plastic, free-flowing media and metallic hard-to-deform systems]* monograph. Tula: Izd-vo TulGU, 2016. 526 p.
14. Gvozdev A.E., Breki A.D., Dorokhin Y.S., et al. 2018, "Programmnyj kompleks rascheta moshchnosti sil, poverhnostnogo i frikcionnogo vzaimodejstviya slitkovykh, poroshkovykh i nanokompozicionnykh metallicheskih sistem [Software package for calculating the power of forces, surface and friction interaction of ingot, powder and nanocomposite metal systems]", *Svidetel'stvo o gosudarstvennoj registracii programmy dlya EVM №2018661010*.
15. Gvozdev A. E., Kolmakov A.G., Malyarov A.V., et al. 2014, "Usloviya proyavleniya nestabil'nosti cementita pri termociklirovanii uglerodistykh stalej [Conditions for the manifestation of instability of cementite during thermal Cycling of carbon steels]", *Materialovedenie*. No 10. pp. 31-36.
16. Gvozdev A.E., Bogolyubova D.N., Sergeev N.N., et al. 2015, "Features of softening processes of aluminum, copper, and their alloys under hot deformation", *Inorganic Materials: Applied Research*. Vol. 6. No 1. pp. 32-40.
17. Gvozdev A.E., Kolmakov A.G., Provotorov D.A., et al. 2015, "Zavisimost' pokazatelej sverhplastichnosti trudnodeformiruemym stalej R6M5 i 10R6M5-MP ot skhemy napryazhennogo sostoyaniya [The dependence of the parameters of superplastic difficult-to-deform steels R6M5 and 10p6M5-MP from the scheme of the stress state]", *Deformaciya i razrushenie materialov*. No 11. pp. 42-46.
18. Seledkin E.M., Gvozdev A.E., Sergeev A.N., et al. 2016, *Raschet processov obrabotki materialov davleniem metodom konechnykh ehlementov [Calculation of materials processing by pressure by finite element method]* monograph. Tula: Izd-vo TulGU, 113 p.
19. Breki A.D., Gvozdev A.E., Kolmakov A.G. 2017, "Application of generalized pascal triangle for description of oscillations of friction forces", *Inorganic Materials: Applied Research*. Vol. 8. No 4. pp. 509-514. Doi: 10.1134/S2075113317040049.
20. Gvozdev A.E., Sergeyev N.N., Minayev I.V., et al. 2017, "Temperature distribution and structure in the heat-affected zone for steel sheets after laser cutting", *Inorganic Materials: Applied Research*. Vol. 8. No 1. pp. 148-152. Doi: 10.1134/S2075113317010178.
21. Breki A.D., Gvozdev A.E., Kolmakov A.G., et al. 2017, "On friction of metallic materials with consideration for superplasticity phenomenon", *Inorganic Materials: Applied Research*. Vol. 8. No 1. pp. 126-129. Doi: 10.1134/S2075113317010087.
22. Makarov E.S., Gvozdev A.E., Zhuravlev G.M., et al. "Primenenie teorii plastichnosti dilatiruyushchih sred k processam uplotneniya poroshkov metallicheskih sistem [Application of the theory of plasticity of dilating media to the processes of compaction of powders of metal systems]", *Chebyshevskij sbornik*. Vol. 18. No 4(64). pp. 268-284.
23. Gvozdev A.E., Zhuravlev G.M., Sapozhnikov S.V. 2017, "K teoreticheskomu analizu processa kompaktirovaniya poroshkovykh materialov pressovaniem [Theoretical analysis of the process of compacting powder materials by pressing]", *Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Nauki o Zemle*. No 4. pp. 273-283.

24. Zhuravlev G.M., Gvozdev A.E., Cheglov A.E. 2017, "Variant opredeleniya maksimal'nogo plasticheskogo uprochneniya v instrumental'nyh stalyah [The alternative definition of maximum plastic work hardening of the steels]" , *Stal'*. No 6. pp. 26-39.
25. Shorshorov M.H., Gvozdev A.E., Sergeyev A. N., et al. 2018, *Modelirovanie processov resursoberegayushchej obrabotki slitkovykh, poroshkovykh, nanostrukturnykh i kompozicionnykh materialov [Modeling of processes of resource-saving processing of ingot, powder, nanostructured and composite materials]* monograph. Tula: Izd-vo TulGU, 359 p.
26. Breki A. D., Aleksandrov S. E., Tyurikov K. S., et al. 2018, "Antifriction Properties of Plasma-Chemical Coatings Based on SiO₂ with MoS₂ Nanoparticles under Conditions of Spinning Friction on ShKh₁₅ Steel" , *Inorganic Materials: Applied Research* Volume 9, Issue 4, pp. 714-718. Doi: 10.1134/S2075113318040081.
27. Shorshorov M.H., Basic A.S., Kazakov M.V., et al. 2018, *Sverhplastichnost' stalej i splavov i resursoberegayushchie tekhnologii processov obrabotki metallov davleniem [Superplasticity of steels and alloys and resource-saving technologies of metal forming processes]* monograph. Tula: Izd-vo TulGU, 158 p.

Получено 27.07.2018

Принято в печать 22.10.2018

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 19. Выпуск 4

УДК 51-7+550.34.06

DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-4-55-90

Распознавание образов в задачах оценки сейсмической
опасности¹

Кособоков Владимир Григорьевич — доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, ФГБУН Институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики РАН.

e-mail: volodya@mitp.ru

Соловьев Александр Анатольевич — доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, главный научный сотрудник, ФГБУН Институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики РАН.

e-mail: soloviev@mitp.ru

Аннотация

Статья посвящена некоторым аспектам применения алгоритмов распознавания образов при решении задач определения мест возможного возникновения сильных землетрясений, что может быть использовано для оценки сейсмической опасности. Приведены основные принципы имеющего многолетнюю историю подхода к распознаванию мест сильных землетрясений (РМСЗ) рассматриваемого региона на базе схемы его морфоструктурного районирования с применением алгоритмов «Кора-3» и «Хемминг». Дан обзор полученных в этом направлении результатов и работ по разработке новых алгоритмов, основанных, в частности, на дискретном математическом анализе. Отмечено использование подходов распознавания образов для создания алгоритмов среднесрочного прогноза землетрясений, с помощью которых может быть получена оперативная оценка сейсмической опасности. Рассмотрено применение Общего закона подобия для землетрясений для оценки сейсмической опасности и рисков с учетом результатов РМСЗ. Приведен обзор результатов РМСЗ и оценки сейсмической опасности и рисков для региона Кавказа.

Ключевые слова: Распознавание образов, дискретный математический анализ, места сильных землетрясений, прогноз землетрясений, сейсмическая опасность, Общий закон подобия для землетрясений.

Библиография: 129 названий.

Для цитирования:

В. Г. Кособоков, А. А. Соловьев. Распознавание образов в задачах оценки сейсмической опасности // Чебышевский сборник, 2018, т. 19, вып. 4, с. 55–90.

¹Исследование выполнено при частичной поддержке гранта РФФИ № 16-55-12033.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 19. No. 4

UDC 51-7+550.34.06

DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-4-55-90

Pattern recognition in problems of seismic hazard assessment

Kossobokov Vladimir Grigorievich — D. Sci., Chief scientist, Institute of Earthquake Prediction Theory and Mathematical Geophysics, RAS.

e-mail: volodya@mitp.ru

Soloviev Alexander Anatolievich — D. Sci., Corresponding member of RAS, Chief scientist, Institute of Earthquake Prediction Theory and Mathematical Geophysics, RAS.

e-mail: soloviev@mitp.ru

Abstract

The paper is devoted to some aspects of application of pattern recognition algorithms in solving problems of strong earthquake-prone area determination that can be used for seismic hazard assessment. The main principles of the having a long-term history approach to recognition of strong earthquake-prone areas (EPA) in a region under consideration on the basis of its morphostructural zoning scheme applying the algorithms "CORA-3" and "HAMMING" are described. A review of the results obtained in this direction and work on the development of new algorithms based, in particular, on discrete mathematical analysis is given. The use of pattern recognition approaches to develop algorithms for medium-term earthquake prediction that can help to obtain an operative seismic hazard assessment is shown. The application of the Unified Scaling Law for Earthquakes for the earthquake hazard and risk assessment taking into account the EPA results is considered. A review of the EPA and earthquake hazard and risk assessment results for the Caucasus region is presented.

Keywords: pattern recognition, discrete mathematical analysis, strong earthquake-prone areas, earthquake prediction, seismic hazard, Unified Scaling Law for Earthquakes.

Bibliography: 129 titles.

For citation:

V. G. Kossobokov, A. A. Soloviev, 2018, "Pattern recognition in problems of seismic hazard assessment", 2018, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 4, pp. 55–90.

1. Введение

Создание научной базы для решения задачи уменьшения возможного ущерба от природных и природно-техногенных катастрофических событий является сложнейшей фундаментальной проблемой, имеющей большое научно-техническое, социальное и экономическое значение. Ее актуальность непрерывно возрастает в связи с быстрым ростом плотности населения, увеличением техногенной нагрузки на природный комплекс, развитием экологически опасных производств (ядерно-энергетический комплекс, химическая промышленность, военно-промышленный комплекс и т.д.), а также расширением горнорудного производства, добычи нефти и газа.

По данным ООН ущерб от катастроф, связанных с землетрясениями, составляет значительную часть от общего ущерба от природных бедствий. Землетрясения представляют собой экстремальные явления, происходящие в сложной системе разломов и блоков литосферы Земли. Они связаны с динамикой литосферных плит, накоплением тектонических напряжений и их концентрированным сбросом. Сильнейшие землетрясения происходят редко, но имеют серьезные экономические и финансовые последствия, сопровождающиеся человеческими жертвами. Традиционные методы оценки сейсмической опасности, хотя и достаточно развиты, не всегда способны достаточно адекватно охарактеризовать рассматриваемый регион на предмет реальной опасности от возможного сильного землетрясения. Получаемые методами сейсморайонирования результаты могут в конкретных местах давать заниженные оценки уровня сейсмического потенциала территории. Достаточно упомянуть [Кособоков и Некрасова, 2011; Wyss и др., 2012], что все 12 землетрясений, вызвавших гибель более 1000 человек, которые произошли в 2000-2011 гг. (общее число жертв, включая погибших от цунами, превосходит 700000), оказались неожиданными «сюрпризами» по отношению к картам Глобальной программы оценки сейсмической опасности [the Global Seismic Hazard Assessment Program GSHAP, Giardini et al., 1999], поддержанной в рамках Международной декады ООН по сокращению ущерба от стихийных бедствий. Систематическая проверка эффективности карт GSHAP (включая карты Общего сейсмического районирования РФ) показала научную несостоятельность вероятностных оценок и неоправданный риск от их использования для практических решений. Конкретнее, в период с 1990 по 2009 гг. утверждение о 10%-ной вероятности превышения пикового ускорения на скальном основании PGA в течение 50 лет было нарушено для более 40% сильных землетрясений с магнитудой $M \geq 6,0$, приблизительно для 90% значительных землетрясений с магнитудой $M \geq 7,0$ и для всех землетрясений с магнитудой $M \geq 7,5$.

Оценить опасность и риски от землетрясений для населения и объектов инфраструктуры отдельно взятых стран не просто, поскольку локально ощутимые землетрясения происходят крайне редко, способствуя возникновению мифов и научнонеобоснованных представлений об их возникновении. Сейсмическая реальность намного сложнее, чем классические модельные предположения о возникновении землетрясений [Кейлис-Борок и др. 1989; Utsu et al., 1995; Bak et al., 2002; Ромашкова и Кособоков 2001; Kossobokov and Romashkova 2005; Ben-Zion 2008; Kossobokov et al. 2008; Shearer 2012; Panza et al. 2014]. Оценка сейсмической опасности – непростая задача, которая подразумевает деликатное применение статистики к данным ограниченного размера и различной точности. Это обстоятельство, как правило, приводит к усложнению существующих гипотез, например, путем введения последовательностей основных толчков и ассоциированных с ними форшоков и афтершоков, подчиняющихся гипотетическим законам распределения их размера, времени и местоположения. Поэтому оценка ожидаемой максимальной магнитуды землетрясения в заданном месте остается основным источником ошибочной оценки сейсмической опасности [Panza et al. 2014; Nekrasova et al. 2014; Kossobokov et al. 2015], а также основной причиной неадекватных решений сейсмостойкого строительства [Davis et al., 2012]. Причем экономические потери, очевидно, включают не

только незапланированные расходы на восстановление инфраструктуры в пораженной землетрясением области, где сейсмическая опасность недооценена, но и расходы на избыточные меры безопасности в районах, где сейсмическая опасность переоценена. Поэтому актуальны совершенствование существующих и разработка новых подходов к оценке сейсмической опасности [Panza et al., 2011, 2014].

В ряде возможных подходов к оценке сейсмической опасности используются результаты решения задачи определения в рассматриваемом регионе мест возможного возникновения сильных (с магнитудой $M \geq M_0$, где M_0 – некоторый порог) землетрясений. Поскольку период инструментальных сейсмологических наблюдений составляет немногим более 100 лет, то естественно предположить, что за это время не все потенциально опасные места «проявили» себя сильными землетрясениями и, соответственно, возникает задача определения таких мест. Учитывая многофакторность процессов, приводящих к землетрясениям, для решения этой задачи применяется методология распознавания образов. Эта методология используется также при разработке алгоритмов среднесрочного прогноза землетрясений, результаты применения которых позволяют поучить оперативную оценку сейсмической опасности в конкретных местах, и при решении других геофизических задач.

Другой важной компонентой для оценки сейсмической опасности является описание сейсмического процесса с помощью Общего закона подобия для землетрясений (ОЗПЗ). Сейсмическая опасность может быть оценена на основе аппроксимации коэффициентов ОЗПЗ, но надежность этих оценок повышается при привлечении результатами распознавания мест возможного возникновения сильных землетрясений на рассматриваемой территории наряду с данными исторических и палео свидетельств о землетрясениях.

Применение подхода распознавания образов к определению мест возможного возникновения сильных землетрясений потребовало разработки новых алгоритмов распознавания, которые, в частности, предназначены для оценки достоверности получаемых результатов. Новые алгоритмы показали также свою эффективность при использовании для решения и других геофизических задач, например, прогноза времени землетрясений и анализа временных рядов геофизических данных.

2. Распознавание мест возможного возникновения сильных землетрясений

Задача распознавания мест возможного возникновения сильных землетрясений (РМСЗ) была сформулирована в начале 70-х годов прошлого века в результате сотрудничества двух групп ученых: математиков во главе с И.М.Гельфандом, а также геофизиков и геоморфологов во главе с В.И.Кейлисом-Бороком. В первой из работ, выполненных в этом направлении, был исследован сейсмоактивный регион Памира и Тянь-Шаня для пороговой магнитуды сильных землетрясений $M_0 = 6,5$ [Гельфанд и др., 1972, 1973; Gelfand et al., 1972].

Для формулировки задачи на языке распознавания образов необходимо определить объекты распознавания. Для этой цели была использована методика морфоструктурного районирования (МСР), помощью которой строится модель современной блоковой структуры земной коры в рассматриваемом регионе. Геоморфологическое описание этой методики приведено в работах [Ранцман, 1979; Gorshkov et al., 2003; Горшков, 2010]. Выполнение МСР осуществляется путем целенаправленного анализа рельефа поверхности Земли с использованием топографических карт и космических снимков и с учетом информации, содержащейся на геологических и тектонических картах. В результате в регионе выделяются три элемента блоковых структур: иерархически упорядоченные *блоки*; *морфоструктурные линеаменты*, которые являются границами блоков; и *морфоструктурные узлы* – области, окружающие пересечения линеаментов. Важное значение при построении схемы МСР имеет достижение наибольшей

степени объективности, т.е. формализации, освобождения от субъективного элемента и обеспечение на этой основе воспроизводимости результатов. Достижению этой цели посвящены работы [Алексеевская и др., 1977; Alekseevskaya et al., 1977, Гвишиани, 1983]. Разработанные методы формализации были опробованы при построении схемы МСР для Центрального и Северного Тянь-Шаня [Габриэлов и др., 1977] и в полном объеме применены, например, при построении схемы МСР горного пояса Анд [Габриэлов и др., 1982].

В работе [Ранцман, 1979] приведены геоморфологические аргументы в пользу того, что достаточно сильные землетрясения исследуемого региона, как правило, происходят в морфоструктурных узлах. Это подтверждается также анализом расположения известных эпицентров сильных землетрясений во всех рассмотренных регионах. Некоторые незначительные отклонения могут быть объяснены ошибками как в регистрации места и силы землетрясений, так и в определении границ узлов. Приуроченность сильных землетрясений к морфоструктурным узлам позволяет использовать их в качестве объектов распознавания и с помощью применения алгоритмов распознавания образов решать задачу разделения всего множества объектов W на два класса: класс D , состоящий из высокосейсмичных объектов (в дальнейшем – объекты D), в которых возможны эпицентры землетрясений с $M \geq M_0$, и класс N , состоящий из низкосейсмичных объектов (в дальнейшем – объекты N), в которых могут происходить только землетрясения с $M < M_0$.

Морфоструктурные узлы были использованы в качестве объектов распознавания в упомянутых выше первых работах по РМСЗ региона Памира и Тянь-Шаня [Гельфанд и др., 1972, 1973; Gelfand et al., 1972;], а также при исследовании регионов Малой Азии и Юго-Восточной Европы [Гельфанд и др., 1974а] и Большого Кавказа [Гвишиани и др., 1987в]. Но использование узлов во многих случаях затруднительно, поскольку определение их границ узлов является сложной задачей, для решения которой требуется крупномасштабное МСР окрестностей пересечений линеаментов [Ранцман, 1979; Гласко, Ранцман, 1992] и проведение полевых исследований. Эта трудность была преодолена путем использования в качестве объектов распознавания пересечений морфоструктурных линеаментов, что было впервые сделано в регионах Малой Азии и Юго-Восточной Европы [Гельфанд и др., 1974б]. Полученная классификация пересечений хорошо согласуется с классификацией узлов тех же регионов [Гельфанд и др., 1974а]. Для проверки статистической значимости гипотезы о приуроченности эпицентров сильных землетрясений к пересечениям был разработан специальный алгоритм [Гвишиани, Соловьев, 1981], применение которого во всех исследовавшихся регионах дало аргументы в пользу справедливости этой гипотезы.

Еще одной возможностью является использование сегментов линейных структур в качестве объектов распознавания. Такой подход представляется вполне естественным с точки зрения сейсмологов, поскольку землетрясения ассоциируются с сегментами разломов, на которых они происходят. В исследованиях [Гельфанд и др., 1976; Gelfand et al., 1976] наряду с пересечениями морфоструктурных линеаментов в качестве объектов распознавания были использованы сегменты разлома Сан-Андреас, которой является основной линейной структурой Калифорнии. В исследованиях [Гвишиани и др., 1978, 1980] объектами распознавания были сегменты Тихоокеанского сейсмического пояса, а в Западных Альпах в качестве одного из подходов распознавание было выполнено для отрезков разломов неотектонической схемы региона [Вебер и др., 1985; Cisternas et al., 1985].

Перед применением алгоритма распознавания объектам распознавания должны быть поставлены в соответствие векторы, компоненты которых являются значениями характеристик, описывающих свойства объектов, на основе которых может быть выполнена требуемая классификация. В задачах РМСЗ эти характеристики должны отражать те свойства объекта, которые прямо или косвенно связаны с различными факторами, обуславливающими возможность возникновения землетрясений. Среди этих факторов главную роль играет интенсив-

ность тектонических движений. В ходе многолетних работ по РМСЗ сформировался набор характеристик для описания объектов распознавания, который включает морфометрические показатели рельефа земной поверхности, особенности геометрии сети линейных элементов и гравиметрические показатели. Необходимым условием для включения в рассмотрение той или иной характеристики, отражающей особенности сейсмичных мест, является возможность определить ее значение с одинаковой точностью для всех объектов распознавания в пределах рассматриваемого региона. После измерения значений характеристик все объекты, входящие в множество W конвертируются в векторы $\mathbf{w}^i = (w_1^i, w_2^i, \dots, w_m^i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, где m – общее число характеристик; n – число объектов в W ; w_k^i – значение k -той характеристики, измеренное для i -го объекта.

Для решения рассматриваемой задачи использовались алгоритмы распознавания с обучением, что требует предварительного формирования обучающей выборки W_0 , состоящей из двух непересекающихся подмножеств: D_0 – объекты, априори принадлежащие классу D , и N_0 – объекты, априори принадлежащие классу N . Обучающая выборка $W_0 = D_0 \cup N_0$ формируется на основе информации об известных землетрясениях рассматриваемого региона. В случае использования узлов в качестве объектов распознавания в подмножество D_0 включаются узлы, которые содержат эпицентры сильных землетрясений. Подмножество N_0 формируется либо из оставшихся объектов W , $N_0 = W \setminus D_0$, либо из объектов, в которых отсутствуют эпицентры землетрясений с $M \geq M_0 - \delta$, где $\delta > 0$ и обычно имеет значение около 0.5. В случае пересечений линейных элементов в качестве объектов распознавания подмножество D_0 формируется из объектов, расположенных на расстоянии, которое не превышает определенного порога r , от эпицентров сильных землетрясений. Значение r должно удовлетворять условию, что расстояние от всех достаточно надежно определенных эпицентров сильных землетрясений до ближайших к ним пересечений не должно превышать r . Подмножество N_0 состоит из тех оставшихся пересечений, которые расположены на расстоянии не менее r_1 ($r_1 \geq r$) от эпицентров землетрясений с $M \geq M_0 - \delta$ ($\delta \geq 0$). В случае, когда объектами распознавания являются сегменты линейных структур, подмножество D_0 формируется из сегментов, на которые попадают проекции эпицентров сильных землетрясений. Подмножество N_0 состоит из тех оставшихся сегментов, на которые не попадают проекции эпицентров землетрясений с $M \geq M_0 - \delta$ ($\delta \geq 0$). Следует отметить, что во всех случаях невозможно получить подмножество N_0 , являющееся «чистым» материалом обучения класса N . Некоторые из этих объектов могут быть связаны с сильными землетрясениями, которые не известны в силу малой продолжительности периода наблюдений. Задача распознавания и состоит в нахождении таких объектов, как среди объектов, не вошедших в W_0 , так и среди объектов из N_0 .

В большинстве исследований по РМСЗ использовался алгоритм распознавания образов «Кора-3» [Бонгард, 1967]. Этот алгоритм применяется к объектам распознавания в виде векторов с бинарными компонентами. Соответственно, векторы значений характеристик, описывающие объекты распознавания, должны быть преобразованы в векторы с бинарными компонентами. Это выполняется с помощью процедур дискретизации и кодировки, описание которых содержится, например, в работах [Гельфанд и др., 1976; Gelfand et al., 1976; Гвишиани и др., 1988a; Gorshkov et al., 2003; Горшков, 2010]. После дискретизации и кодировки объектам распознавания из множества W ставятся в соответствие векторы с бинарными компонентами $\boldsymbol{\omega}^i = (\omega_1^i, \omega_2^i, \dots, \omega_L^i)$, где L – длина бинарных векторов, $i = 1, 2, \dots, n$, n – число объектов в W . Алгоритм «Кора-3», подробное описание которого приведено, например, в работах [Гельфанд и др., 1976; Gelfand et al., 1976; Гвишиани и др., 1988a; Gorshkov et al., 2003; Горшков, 2010], на основе обучающей выборки на основе обучающей выборки W_0 находит характерные признаки классов D и N . Признак A определяется с помощью 6-ти чисел: три целых числа j, k, l ($1 \leq j \leq k \leq l \leq L$), и три бинарных числа $\delta_1, \delta_2, \delta_3$, принимающих значения 0 или 1. По определению, объект номер i обладает признаком A , если значение булевой функции

$f(A, \omega^i) = (\delta_1 \equiv \omega_j^i) \& (\delta_2 \equiv \omega_k^i) \& (\delta_3 \equiv \omega_l^i)$ равно 1. Для определения характерных признаков задаются четыре порога S_1 , C_1 , S_2 и C_2 , которые являются параметрами алгоритма. Признак называется характерным признаком класса D , если число объектов из обучающей выборки D_0 , которыми он обладает, не меньше чем порог S_1 , а число объектов из обучающей выборки N_0 , которыми он обладает, не больше чем порог C_1 . Соответственно, признак называется характерным признаком класса N , если число объектов из обучающей выборки N_0 , которыми он обладает, не меньше чем порог S_2 , а число объектов из обучающей выборки D_0 , которыми он обладает, не больше чем порог C_2 . Для характерных признаков вводятся отношения подчиненности и эквивалентности. Характерный признак A является подчиненным по отношению к другому характерному признаку B того же класса, если все объекты из множества обучения этого класса, которые обладают признаком A , обладают также признаком B и есть хотя бы один объект из множества обучения, который обладает признаком B , но не обладает признаком A . Два характерных признака эквивалентны, если ими обладают одни и те же объекты соответствующего множества обучения. При формировании окончательных наборов характерных признаков классов D и N , (D -признаков и N -признаков) алгоритм исключает подчиненные признаки, а из группы эквивалентных оставляет только один признак. Классификация всех объектов из множества W выполняется на основе D - и N -признаков с помощью еще одного параметра алгоритма – порога голосования $\Delta \geq 0$. Объект распознавания относится к классу D , если разность между числами D -признаков и N -признаков, которыми он обладает, не меньше порога Δ . В результате множество W разделяется на два класса D и N . При выборе значения порога Δ следует выполнить условие $|D| \leq \beta |W|$, которое позволяет избежать тривиального решения, когда все объекты изучаемого региона попадают в класс D . Здесь $|D|$ и $|W|$ означают число объектов в множествах D и W , соответственно, а β ($0 < \beta < 1$) – действительное число, которое априорно задает верхнее ограничение на долю объектов D в множестве W . Значение параметра β определяется путем экспертной оценки сейсмического потенциала изучаемой территории на основе доступной сейсмологической, геологической и другой информации.

Наряду с алгоритмом «Кора-3» при решении геофизических задач успешно применяется алгоритм «Хемминг» [Гвишиани и Кособоков, 1981]. Этот алгоритм менее избирателен по сравнению с алгоритмом «Кора-3», но его преимуществом является простота и меньшее число параметров. В случае задачи РМСЗ этот алгоритм вначале строит «ядро класса D », представляющее собой бинарный вектор, значения компонент которого чаще встречаются у объектов множества D_0 , чем множества N_0 . Рассмотрим компоненту ω_k ($k = 1, 2, \dots, L$) бинарных векторов, описывающих объекты распознавания, и обозначим $q_D(k|\delta)$ число объектов множества D_0 , у которых $\omega_k = \delta$, и $q_N(k|\delta)$ число таких объектов множества N_0 . Для множеств D_0 и N_0 относительные числа объектов, у которых $\omega_k = 1$, вычисляются из формул:

$$\alpha_D(k|1) = \frac{q_D(k|1)}{q_D(k|0) + q_D(k|1)}, \alpha_N(k|1) = \frac{q_N(k|1)}{q_N(k|0) + q_N(k|1)}.$$

Компоненты ядра класса D $\mathbf{K} = (K_1, K_2, \dots, K_L)$ определяются следующим образом:

$$\kappa_k = \begin{cases} 1, & \text{if } \alpha_D(k|1) \geq \alpha_N(k|1), \\ 0, & \text{if } \alpha_D(k|1) < \alpha_N(k|1). \end{cases}$$

После определения ядра класса D классификация всех объектов из множества W выполняется на основе значения расстояния по Хеммингу ρ_i от бинарного вектора, соответствующего объекту номер i , до ядра класса D . Расстояние по Хеммингу между двумя бинарными векторами – это число их несовпадающих компонент. Объект номер i относится к классу D , если $\rho_i \leq R$, где R – параметр алгоритма.

После первых пионерских работ развитие исследований по РМСЗ шло в двух направлениях: решение задач РМСЗ в новых сейсмоактивных регионах и развитие алгоритмической базы

с упором на разработку алгоритмов оценки достоверности получаемых результатов. До начала 90-х годов прошлого века исследования, в основном, были сосредоточены в лаборатории Института физики Земли им. О.Ю.Шмидта АН СССР, которую возглавлял А.Д.Гвишиани (в настоящее время – академик РАН). В дальнейшем эти работы были продолжены его учениками. В таблице 1 перечислены регионы, в которых РМСЗ выполнено к настоящему времени. За прошедшее время в рассмотренных регионах произошло достаточно большое число сильных землетрясений, что позволило выполнить оценки достоверности полученных результатов распознавания. Последняя такая оценка приведена в статье [Соловьев и др., 2014]. В рассмотренных регионах анализировалось положение эпицентров сильных землетрясений, произошедших в регионе после опубликования соответствующего результата. Всего оказалось 91 такое землетрясение. Эпицентры 79 из них (87%) расположены в распознанных местах их возможного возникновения, включая 27 эпицентров, расположенных в местах, где на момент публикации результата распознавания не были известны сильные землетрясения. Выполненная проверка дает аргументы в пользу достоверности результатов РМСЗ и целесообразности их применения в задачах оценки сейсмического риска.

Исследуемый регион	Пороговая магнитуда M_0	Объекты распознавания	Примененный алгоритм	Ссылки на публикации
Тянь-Шань и Памир, 1972	6,5	узлы, пересечения	«Кора-3», «Хемминг»	Гельфанд и др., 1972, 1973; Gelfand et al., 1972; Жидков, Кособоков, 1978; Кособоков, 1982
Балканы, Малая Азия, Закавказье, 1974	6,5; 7,0	узлы, пересечения	«Кора-3», «Хемминг»	Гельфанд и др., 1974а, 1974б; Кособоков, Ротвайн, 1977; Кособоков, 1982
Калифорния и Невада, 1976	6,5; 7,0	пересечения, сегменты линейных структур	«Кора-3»	Гельфанд и др., 1976, Gelfand et al., 1976; Кособоков, Ротвайн, 1977
Аппенинский полуостров и Сицилия, 1979	6,0; 6,5	пересечения	«Кора-3»	Горшков и др., 1979; Caputo et al., 1980; Гвишиани и др., 1989; Gorshkov et al., 2002
Тихоокеанский сейсмический пояс	8,0; 8,2	сегменты линейных структур	«Кора-3», «Хемминг»	Гвишиани и др., 1978, 1980; Гвишиани, Кособоков, 1983; Гурвич, Кособоков, 1984

Анды Южной Америки, 1982	7,75; 7,0	пересечения	«Кора-3»	Гвишиани и др., 1982; Гвишиани, Соловьев, 1982; Gvishiani, 1982a; Gvishiani, Soloviev, 1984; Жидков и др., 1990
Камчатка, 1984	7,75	пересечения	«Кора-3»	Гвишиани и др., 1984
Западные Альпы, 1985	5,0	пересечения, сегменты линейных структур	«Кора-3»	Гвишиани и др., 1984, 1985б, 1989; Вебер и др., 1985, 1986; Cisternas et al., 1985
Пиренеи, 1987	5,0	пересечения	«Кора-3»	Gvishiani et al., 1987; Гвишиани и др., 1987а, 1987б, 1989
Кавказ, 1988	5,0; 5,5; 6,0	узлы, пересечения	«Кора-3», «Барьер»	Гвишиани и др., 1986, 1987в, 1988а, 1989, 2017в; Горшков и др., 1991; Соловьев и др., 2013, 2016
Гималаи, 1992	6,5	пересечения	«Кора-3»	Бхатия и др., 1992; Bhatia et al., 1992
Альпы и Динариды	6,0; 6,5	узлы, пересечения	«Кора-3»	Gorshkov et al., 2004, 2009
Иберия	5,0	пересечения	«Кора-3»	Gorshkov et al., 2010
Крым	6,0	пересечения	«Кора-3»	Горшков и др., 2017
Алтай-Саяны-Прибайкалье	6,0	пересечения	«Кора-3»	Горшков и др., 2018

Таблица 1: Регионы, для которых решалась задача распознавания мест возможного возникновения сильных землетрясений.

Оценка достоверности результатов РМСЗ – один из важнейших этапов решения задачи. С этой целью был разработан ряд методов и алгоритмов, которые приведены в статьях [Гвишиани, Кособоков, 1981; Гвишиани, 1982; Гвишиани, Гурвич, 1982; Gvishiani, 1982b; Гвишиани А.Д., Гурвич, 1984а, 1984б; Гвишиани и др., 1985].

Как было отмечено выше, множество объектов обучения N_0 не является достаточно «чистым», т.е. может содержать объекты из класса D . С учетом этого был разработан алгоритм «Барьер» [Гвишиани и др., 2017], который позволяет выполнить разделение объектов распознавания на классы D и N , используя только одно множество объектов обучения D_0 . Алгоритм был применен для РМСЗ на Кавказе [Гвишиани и др., 2017] при том же пороге $M_0 = 6,0$ и с теми же значениями характеристик объектов распознавания, что и в работах [Соловьев и др., 2016], где был использован алгоритм «Кора-3». Результаты применения двух алгоритмов хорошо согласуются, т.е. алгоритм «Барьер» не уступает алгоритму «Кора-3». Преимуществами алгоритма «Барьер» являются меньшее число свободных параметров и возможность приме-

нения его непосредственно к векторам со значениями характеристик, описывающих объекты распознавания, что устраняет необходимость выполнения процедур дискретизации и кодирования.

3. Применение распознавания образов при решении других геофизических задач и разработанные с этой целью алгоритмы

Наряду с решением задач РМСЗ алгоритмы «Кора-3» и «Хемминг» были использованы в разработке методов прогноза времени землетрясений. В этих задачах объектами распознавания являются дискретные моменты времени t_i , и необходимо выделить из них объекты класса D – моменты, после которых в течение периода τ в рассматриваемом регионе ожидается сильное землетрясение. Остальные объекты образуют класс N . Объектам распознавания ставятся в соответствие векторы, компонентами которых являются значения характеристик фоновой сейсмичности, измеренные в течение некоторого периода, предшествующего соответствующему моменту t_i . На основе характерных признаков классов D и N , отобранных с помощью алгоритма «Кора-3» с использованием данных о сейсмичности Южной Калифорнии за период 1938-1984 гг., было построено решающее правило для классификации моментов времени на D и N . При этом пороговое значение сильных землетрясений $M_0 = 6,4$, а $\tau = 1$ год. Полученный алгоритм прогноза был опробован на объединении регионов Калифорния и Невада и назван CN [Keilis-Borok, Rotwain, 1990]. Обзор применения алгоритма CN в ряде сейсмоактивных регионов приведен в статье [Rotwain, Novikova, 1999]. На основе алгоритма «Хемминг» разработан алгоритм прогноза сильнейших землетрясений мира ($M_0 = 8,0$), получивший название M8 [Keilis-Borok, Kossobokov, 1990]. С 1992 года выполняется Глобальный эксперимент по применению алгоритма M8 с целью прогноза сильнейших землетрясений мира в режиме реального времени. Этот эксперимент позволяет получить оценку достоверности результата прогноза $1 - p > 0,99$ [Kossobokov, 2013; Кособоков, Соловьев, 2015], где p – оценка вероятности получения такого же или лучшего результата случайным образом.

Алгоритмы распознавания образов были использованы также для решения других геофизических задач, в частности, распознавания интенсивности по динамическим параметрам акселерограмм [Гвишиани и др., 1988б; Gvishiani et al., 1988]. Эти задачи потребовали применения алгоритмов распознавания, отличных от рассмотренных выше («Кора-3», «Хемминг»). Например, для решения задач классификации записей сильных движений [Гвишиани и др., 1990; Gvishiani et al., 1991] были разработаны синтаксические алгоритмы, которые могут быть отнесены к структурным методам распознавания образов [Фу, 1977]. Эти же алгоритмы были использованы для решения задачи определения по сейсмограмме землетрясения региона, где оно произошло [Gvishiani et al., 1994, 1995], а также при определении аномалий магнитного поля на магнитограммах [Gvishiani et al., 1997].

Разработанные алгоритмы распознавания образов и полученные с их помощью результаты решения геофизических задач нашли отражение в ряде монографий [Гвишиани и др., 1988; Гвишиани, Гурвич, 1992; Dubois, Gvishiani, 1998; Gvishiani, Dubois, 2002].

Новый подход к созданию алгоритмов распознавания образов основан на разработанном в Геофизическом центре РАН дискретном математическом анализе (ДМА) [Гвишиани и др., 2002а, 2008, 2010; Агаян, Соловьев, 2004]. Созданные на основе ДМА алгоритмы искусственного интеллекта, в частности, кластеризационные системы (системы объективной классификации) нашли применения в области анализа временных рядов с целью выделения аномалий, что используется, например, при обработке геомагнитных данных [Гвишиани и др., 2002б; Gvishiani et al., 2004].

Эти алгоритмы не используют обучающие выборки, а выделяют сгущения (кластеры) в пространстве, которому принадлежат объекты распознавания. Задача определения высокосей-

смичных областей (областей, где возможны эпицентры землетрясений с $M \geq M_0$) решается с помощью такого алгоритма DPS (Discrete Perfect Sets) [Агаян и др., 2011], который анализирует множество эпицентров сравнительно слабых землетрясений региона с магнитудами $M \geq M_b$, где порог M_b значительно меньше, чем M_0 , и выделяет кластеры эпицентров, объединение которых и может быть рассмотрено в качестве высокосейсмичной области. Впервые такой подход был применен к анализу сейсмичности Калифорнии [Гвишиани и др., 2013a; Gvishiani et al., 2013]. Сравнение полученных кластеров эпицентров землетрясений с магнитудой $M \geq M_b = 3,0$, произошедших в Калифорнии в 1980-2011 гг. с результатом РМСЗ из работ [Гельфанд и др., 1976; Gelfand et al., 1976] показало их хорошую согласованность [Соловьев и др., 2014], что является дополнительным аргументом в пользу достоверности результатов, полученных двумя различными методами. Отметим, что использование алгоритма DPS не требует предварительного построения схемы МСР региона, определения на ее основе объектов распознавания и измерения значений описывающих их характеристик. На основе алгоритма DPS создана алгоритмическая система определения высокосейсмичных зон, получившая название FCAZ (Fuzzy Clustering And Zoning), описание которой приведено в работе [Гвишиани и др., 2013б]. Система была успешно применена для определения высокосейсмичных областей на Кавказе для пороговой магнитуды сильных землетрясений $M_0 = 5,0$.

В дальнейшем были сформулированы принципы единообразного подхода к определению высокосейсмичных областей, т.е. системного анализа этой проблемы, инвариантного относительно выбора пороговых магнитуд землетрясений, и созданы новые блоки во входящих во FCAZ алгоритмах, которые позволяют автоматизировать выбор оптимальных значений их свободных параметров. Это можно интерпретировать как включение во FCAZ элементов искусственного интеллекта. Апробация новой версии системы [Гвишиани и др., 2016] выполнена путем анализа сейсмичности горного пояса Анд Южной Америки для $M_0 = 7,75$ и ее нового, независимого от работы [Гвишиани и др., 2013б], применения на Кавказе для $M_0 = 5,0$. С помощью системы FCAZ определены высокосейсмичные области в объединенном регионе, включающем Крым и западную часть Северного Кавказа, для двух значений M_0 (4,5 и 5,0) [Гвишиани и др., 2017a], а также путем итерационного сужения множества объектов распознавания в регионе Прибайкалье-Забайкалье для трех магнитудных порогов M_0 (5,5; 5,75 и 6,0) [Гвишиани и др., 2017б]. Итерационное сужение означает, что высокосейсмичные области для рассматриваемого магнитудного порога распознаются внутри областей, уже распознанных как опасные для меньшей пороговой магнитуды. Следующим применением системы было распознавание высокосейсмичных зон в объединенном регионе Алтай-Саяны для пороговой магнитуды $M_0 = 5,5$ [Гвишиани и др., 2018].

4. Оценка сейсмической опасности и рисков для населения и инфраструктуры на примере Кавказа

Процесс возникновения землетрясений в пространстве и времени имеет фрактальный характер и подчиняется общим законам иерархической самоорганизации, что было отмечено в работах [Садовский и др., 1982, 1984; Okubo and Aki, 1987]. Понимание этого продолжает углубляться, что, в частности, нашло выражение в формулировке Общего закона подобия для землетрясений (ОЗПЗ), который уточняет эмпирическое соотношение Гутенберга-Рихтера, учитывая естественное фрактальное распределение сейсмичности. Конкретнее, результаты глобального и регионального анализа [Кейлис-Борок и др., 1989; Кособоков, Мажкенов, 1992; Bak et al. 2002; Кособоков, Некрасова, 2004] показали, что среднегодовое число землетрясений, $N(M, L)$, с магнитудой M в сейсмоактивной области линейного размера L , для широкого диапазона магнитуд M из интервала (M_-, M_+) и размеров L из интервала (L_-, L_+) , довольно хорошо согласуется со следующей формулой ОЗПЗ: $\lg N(M, L) = A + B \times (5 - M) + C \times \lg L$,

где A , B , C – константы, локально характеризующие соответственно логарифм среднегодовой частоты землетрясений магнитуды 5.0 и выше в области линейного размера в 1 градус Земного меридиана, баланс числа землетрясений разных магнитуд и фрактальную размерность носителя эпицентров землетрясений, а $\lg X$ – десятичный логарифм X .

Вопрос о том, как изменяются характеристики распределения землетрясений при изменении масштабов рассмотрения, фундаментален, а ответ на него *a priori* не ясен и требует локального оценивания. При этом широко используемое в практике сейсморайонирования классическое нормирование на площадь в км², игнорирующее характеристики распределения, может приводить к многократному недооцениванию сейсмической опасности. Так, например, оценивая повторяемость землетрясений в Петропавловске-Камчатском с площадью $S_{PK} = 400$ км², где в соответствии с работой [Кособоков и Некрасова 2004] $A = 0,12$, $B = 0,86$, $C = 1,26$, по данным сейсмичности на всей Камчатке с площадью $S_{Kam} = 270000$ км², получим, что недооценка повторяемости землетрясений в черте города при нормировании на площадь может составить $(S_{Kam}/S_{PK}) / (S_{Kam}/S_{PK})^{0.5 \times 1.26} = 675^{0.37} > 11$ раз.

Оценки коэффициентов ОЗПЗ могут быть использованы для расчетов характеристик сейсмической опасности в терминах достоверно определенной максимальной магнитуды землетрясения, которое возможно в данном месте системы разломов, а также ассоциированных с ним сотрясений на территории и рисков для населения и инфраструктуры (см., например, [Nekrasova et al. 2015]). Последовательность этих расчетов выглядит следующим образом.

Для ячеек $\{s_i \mid i = 0, 1, 2, \dots, n\}$ с центрами в узлах регулярной сетки $l \times l$ и размерами $L_0 \times L_0$, где $l \leq L_0 \in (L_-, L_+)$ – фиксированные константы, рассчитываются коэффициенты A , B и C по многочисленным наборам случайно ориентированных областей $\{2^k L_0 \times 2^k L_0\}$, $k = 0, 1, 2, \dots, K$. При этом набор ячеек определяется наличием в каждой из них эпицентров надежно определенных землетрясений, что обеспечивает покрытие носителя сейсмичности на территории исследования.

Для каждой из рассматриваемых ячеек s_i с использованием ОЗПЗ и значений магнитуды $M \in (M_-, M_+)$ определяется ожидаемое число событий в заданный интервал времени T лет, $N_{i,T}(M, L_0) = T \times N_i(M, L_0)$.

По заданному порогу вероятности p выбирается максимальное значение $M_{i,T}$, для которого ожидаемое за время T число землетрясений $N_{i,T}(M_{i,T}, L_0) > p$. В результате, можно ожидать, что с достоверностью $(1 - p)$ определенная таким образом магнитуда $M_{i,T}$ для конкретной ячейки s_i будет соответствовать максимальной магнитуде землетрясения M_{max} , ожидаемого в ней за интервал времени T . Следует заметить, что для обеспечения более надежной оценки сейсмической опасности карта $\{M_{i,T} \mid i = 0, 1, 2, \dots, n\}$ может быть пополнена результатами распознавания мест возможного возникновения сильных землетрясений на рассматриваемой территории, а также данными исторических и палео свидетельств о землетрясениях.

На основе пополненной карты значений $M_{max} \{M_{i,T}\}$ с использованием неопределенных методов расчета параметров сотрясаемости по результатам исчерпывающего моделирования возможных сценариев ожидаемых землетрясений максимальной силы [Panza et al., 2001] создается карта сейсмической опасности в терминах, необходимых для расчета конкретных рисков для населения и инфраструктуры рассматриваемой территории, или определяются параметры сотрясаемости конкретных сооружений [Paskaleva et al. 2007; Vaccari et al. 2009; Panza et al. 2013].

Выполняется оценка рисков для конкретных объектов.

В случае осуществления на рассматриваемой территории мониторинга периодов повышенной вероятности сильных землетрясений с помощью алгоритмов прогноза землетрясений возможен оперативный расчет сейсмической опасности и рисков [Peresan et al. 2011].

Оценка сейсмической опасности и рисков выполнена для региона Большого Кавказа [Kossobokov, Nekrasova, 2018] в пределах 40°–46° с.ш. и 36°–51.5° в.д.

В качестве данных о сейсмичности Северного Кавказа использовался тщательно выверенный региональный каталог, составленный с использованием ежегодных выпусков «Землетрясения Северной Евразии» в 1998-2008 гг. и «Землетрясения России» в 2004-2014 гг.. Каталог покрывает период 1998-2014 гг. и обеспечивает достаточно полную выборку из 4941 землетрясения энергетического класса $K \geq 10,5$, что соответствует магнитуде $M \geq 3,6$, с глубиной гипоцентра менее 70 км. Данные о распределении населения в регионе взяты по оценке GPWv3 на 2015 год [Gridded Population of the World, 2005], а для городов с населением более 100 тыс. жителей по данным переписи [ФССС, 2016].

Расчет параметров ОЗПЗ на территории Северного Кавказа проводился в узлах регулярной сетки ($l = 1/4^\circ$) с использованием иерархии квадратных ячеек со стороной от $1/4^\circ$ до 2° земного меридиана ($K = 3$), а также в пересечениях морфоструктурных линейментов. Схема МСР для Большого Кавказа была построена в работе [Гвишиани и др. 1986], для всего кавказского региона – в работах [Соловьев и др., 2013]. Задача РМСЗ для этого региона неоднократно решалась для различных пороговых магнитуд с помощью различных алгоритмов (см. Таблицу 1). Отметим исследование [Соловьев и др., 2016], в котором по предложению академика А.Д.Гвишиани впервые в описание объектов распознавания были включены отражающие аномалии магнитного поля Земли характеристики, показавшие высокую эффективность при решении задачи РМСЗ (рис. 1), а так же работу [Гвишиани и др., 2017в], в которой впервые для решения задачи РМСЗ был применен новый алгоритм «Барьер», использующий обучающую выборку только для одного класса. Для региона Кавказа было также выполнено численное моделирование динамики системы блоков и разломов, а также возникающей при этом сейсмичности [Соловьев, Горшков, 2017]. При этом обнаружено наличие модельных землетрясений с магнитудой $M \geq 6$ в тех частях высокосейсмичных областей, показанных на рис. 1, где не были зарегистрированы реальные события с $M \geq 6$.

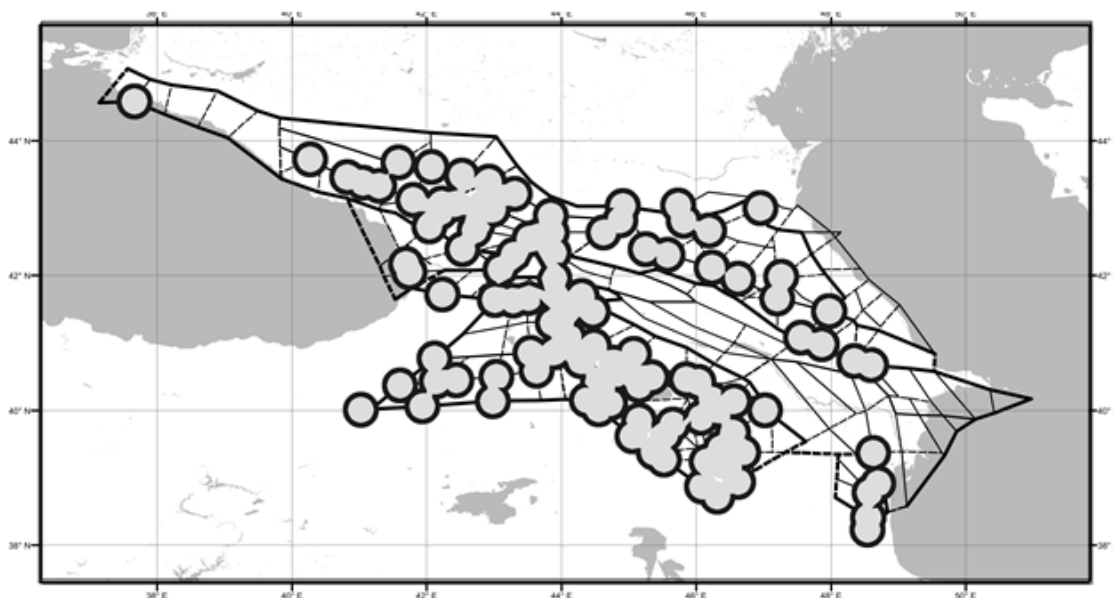


Рис. 1: Области возможного возникновения землетрясений с магнитудой $M \geq 6$ (ограничены жирными черными кривыми), полученные с помощью алгоритма распознавания «Кора-3» с использованием характеристик, отражающих аномалии магнитного поля Земли [Соловьев и др., 2016].

Содержательные оценки коэффициентов A , B и C получены для 102 из 107 пересечений Северного Кавказа из работы [Гвишиани и др. 1986]. В пяти случаях данных о землетрясе-

ниях в 1998-2014 гг. оказалось недостаточно для надежного определения параметров ОЗПЗ. На рис. 2 приведены карты коэффициентов A , B и C , а также суммы квадратов ошибки их определения по статистике стократного случайного поворота областей $2^\circ \times 2^\circ$. Пересечения, где параметр A превышает 0, что соответствует ожиданию одного события с $M=5,0$ в год, в основном расположены в Дагестане. Средние значения сейсмической активности, где повторяемость землетрясений втрое меньше, распространены в центральных и восточных районах Северного Кавказа. Остальные сейсмически активные области на рассматриваемой территории характеризуются еще более низкой повторяемостью землетрясений умеренной силы. Основная часть полученных значений параметра B , характеризующего наклон графика повторяемости, находится в пределах от 0,8 до 1,3, а его значения около 0,4 в пересечениях на юго-востоке региона могут быть связаны с отсутствием в этих районах сильных землетрясений в 1998-2014 гг. Фрактальная размерность распределения эпицентров (параметр C) в основном принимает значения от 0,6 до 1,5 с очевидным пиком около 1,1, что соответствует в целом линейному простиранию морфоструктур. Области высокой раздробленности, где значение коэффициента $C > 1,2$, четко выделяют сейсмоактивные районы Дагестана, Чеченской и Карачаево-Черкесской Республик.

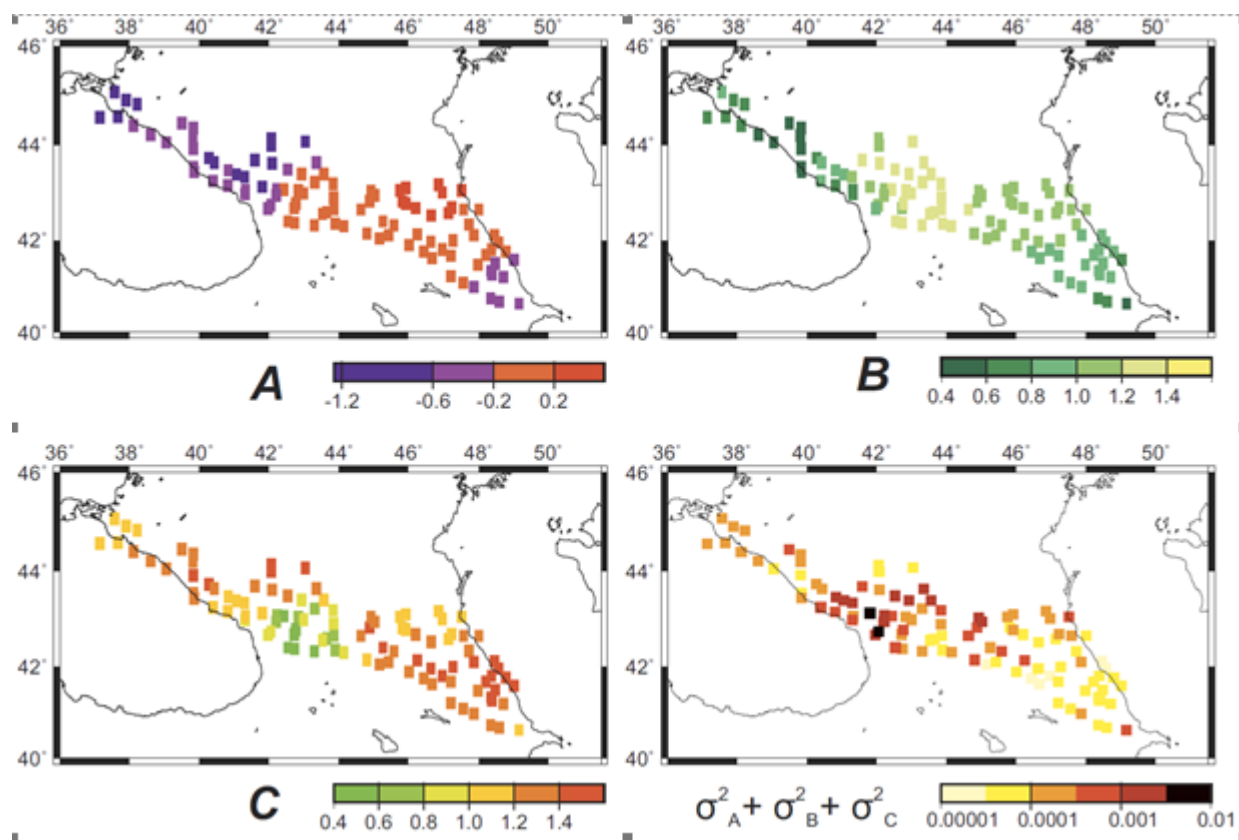
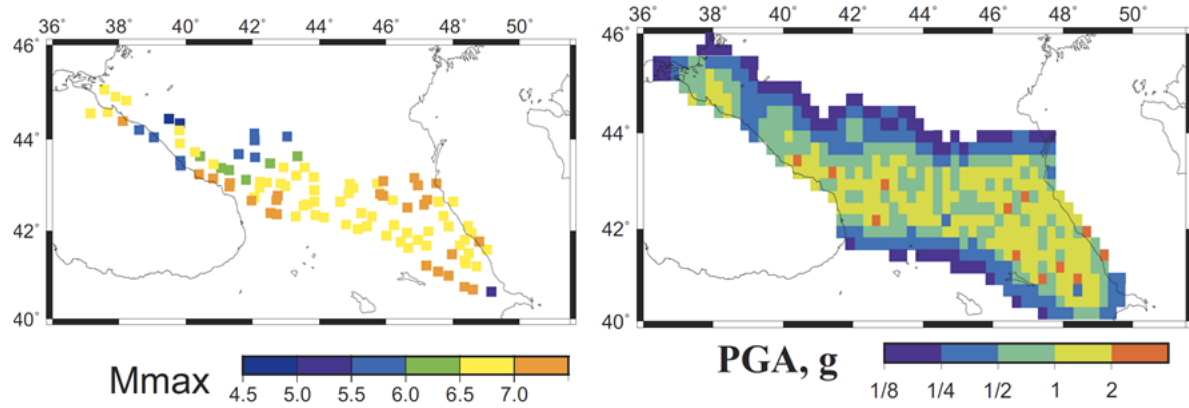


Рис. 2: Карты параметров ОЗПЗ A, B, C и суммы квадратов ошибки их определения ($\sigma_A^2 + \sigma_B^2 + \sigma_C^2$) для 102 пересечений морфоструктурных линеаментов Северного Кавказа.

На рис. 3 представлены результаты расчета M_{max} и сейсмической опасности в терминах пикового ускорения на скальном основании PGA при $T = 50$ лет и $p = 0,1$ (что соответствует ставшему традиционным утверждению о «вероятности превышения 10% в период 50 лет», надежное обоснование для которого согласно [Beauval et al. 2008] может быть получено лишь по наблюдениям за десятки тысяч лет). Следует заметить, что расчеты ожидаемых сотрясаний на скальном основании в терминах максимального пикового ускорения (PGA) проводились по

Рис. 3: Карты расчетных оценок M_{max} и PGA.

упрощенной схеме с использованием эмпирической формулы затухания ускорения вызванного землетрясением магнитуды M_{max} , полученной по результатам нео-детерминистского моделирования [Parvez et al. 2003], $\text{Acc}(M_{max}, D) = \text{const} \times g \times D^{-1,5} \times \exp(M_{max} - 5)$, где D - расстояние от источника до приемника на регулярной сетке $0,25 \times 0,25^\circ$, $\text{const} = 6 \times 4,8$, $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ - постоянная силы тяжести, а $\exp(X)$ - основание натуральных логарифмов e в степени X . Следует заметить, что лишь в местах возникновения 5 из 344 землетрясений с магнитудой от 5 и выше в период с 550 до н.э. на территории Северного Кавказа [Kondorskaya et al., 1982] сейсмическая опасность, возможно, недооценена на картах, приведенных на рис. 3. Причем, недооценка M_{max} лишь в случае Шемахинского землетрясения 1668 г. ($M = 7,8 \pm 0,5$, $M_{max} = 7,1$) превышает точность определения магнитуды.

Карты модельных рисков для населения на территории Северного Кавказа опубликованы в работе [Kossobokov and Nekrasova 2018]. При этом рассмотрены риски $R_{ii}(s) = H(s) \times \int_s P \times P$ и $R_{iv}(s) = H(s) \times \int_s P \times P^3$, где P - плотность населения, $\int_s P$ - интеграл от плотности населения в ячейке s , т. е. число лиц, находящихся на площади ячейки s . Оценка риска $R_{ii}(s)$ различает персональную уязвимость, линейно-пропорционально возрастающую с плотностью населения в данном месте, а $R_{iv}(s)$ - нелинейно возрастающую. Предположения об уязвимости представляются довольно естественными в силу специфики инфраструктуры, определяемой численностью и плотностью населения в районах его высокой концентрации (в качестве примера может служить этажность и категории типичных построек).

В Таблице 2 приведены оценки сейсмической опасности и рисков для населения крупнейших городов Северного Кавказа и прилегающих областей. Как и следовало ожидать значения рисков коррелированы с населением города и анти-коррелированы с его площадью.

Чтобы избежать вводящие в заблуждение контрпродуктивные интерпретации, необходимо подчеркнуть, что оценки риска на рассматриваемой территории приведены здесь исключительно в научных-методологических целях. Эти оценки не используют более сложные, комплексные процедуры, которые могут быть более адекватными свертками опасности объектов риска и их уязвимости. Оценки риска используются здесь лишь для иллюстрации общего проблемно-ориентированного подхода. В практических, а значит, реалистичных оценках сейсмических рисков, очевидно, должны участвовать эксперты в области распределения сейсмической опасности и объектов риска разной уязвимости, т.е. специалисты по сейсмозонированию, инженерной сейсмологии, социальным и экономическим наукам.

Максимальная магнитуда ожидаемого землетрясения для сейсмоопасных мест может быть реалистично оценена с высокой достоверностью. Подготовка к максимально возможным опасным событиям позволяет снизить масштаб или даже избежать возможные бедствия. Человеческие жертвы не связаны напрямую с сейсмическим событием, они связаны с его послед-

Город	Население	S, км ²	PGA, g	R _{ii} , au	R _{iv} , au
Краснодар	853,848	339	0.41	746	436
Махачкала	587,876	468	1.19	739	108
Ставрополь	429,571	172	0.08	73	42
Сочи	401,291	177	0.81	618	293
Владикавказ	307,478	291	1.34	368	38
Грозный	287,410	324	1.93	415	30
Новороссийск	266,977	81	1.35	1000	1000
Нальчик	239,040	67	0.81	585	687
Пятигорск	145,448	97	0.43	78	16
Майкоп	144,055	59	0.54	161	90
Хасавюрт	138,420	40	1.22	492	544
Кисловодск	129,993	72	0.70	138	42
Черкесск	123,128	70	0.62	113	32
Дербент	122,354	70	1.61	292	83
Невинномысск	117,891	100	0.32	37	5
Назрань	113,288	80	1.15	155	29
Каспийск	110,080	33	1.14	353	364
Ессентуки	105,881	50	0.33	63	26

Таблица 2: Сейсмическая опасность и риски для городов Северного Кавказа и прилегающих областей с населением более 100 тыс. человек. Примечание: Значения рисков даны в условных единицах (au), нормированных пропорционально максимальному значению 1000.

ствиями, например, с цунами, оползнями, обрушением зданий, мостов и других сооружений. Сценарии последствий катастрофического события, основанные на результатах неопределенных расчетов, служат основанием для принятия необходимых упреждающих мер безопасности, начиная с планирования землепользования и регулирования строительных норм и заканчивая управлением в условиях чрезвычайных ситуаций. Есть много рисков, связанных с землетрясениями. Они не должны игнорироваться при любой реалистичной и ответственной оценке сейсмической опасности и при осознанно-оптимальном выборе мер по предотвращению стихийных бедствий.

5. Заключение

Методология решения задачи РМСЗ вместе с оценкой сейсмической опасности и рисков на основе применения ОЗПЗ позволяет создать научную основу для выработки мероприятий по сокращению ущерба от природных катастроф, связанных с землетрясениями.

Оценки сейсмической опасности конкретных мест могут быть оперативно уточнены с помощью результатов, получаемых от алгоритмов прогноза времени землетрясений, созданных на основе подходов распознавания образов.

Алгоритмы распознавания образов оказываются эффективными при решении различных геофизических задач, связанных с анализом временных рядов, возникающих, в частности, при обработке сейсмограмм и записей сильных движений, а также геомагнитных данных.

Отметим, что алгоритмическая система определения высокосейсмичных зон FCAZ и ее модификации относятся к методологии перспективного системного анализа, поскольку в ре-

зультате их применения высокосейсмичные зоны определяются четко и однозначно как части объемлющего их целого и отделяются от нечеткого дополнения однозначно определенной и воспроизводимой границей. Система FCAZ обладает другим характерным свойством системного анализа – инвариантностью по отношению к масштабам изучаемых подобных явлений. Иными словами метод адаптируется, «настраивается» под данную «степень подобия» исследуемой системы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Агаян С.М., Соловьев А.А. Выделение плотных областей в метрических пространствах на основе кристаллизации // System Research and Information Technologies. 2004. №2. С. 7-23.
2. Агаян С.М., Богоутдинов Ш.Р., Добровольский М.Н. Об одном алгоритме поиска плотных областей и его геофизических приложениях // Математические методы распознавания образов: 15-я Всероссийская конференция, г. Петрозаводск, 11-17 сентября 2011 г.: Сборник докладов. М.: 2011. С. 543-546.
3. Алексеевская М.А., Габриэлов А.М., Гвишиани А.Д., Гельфанд И.М., Ранцман Е.Я. Морфоструктурное районирование горных стран по формализованным признакам // Распознавание и спектральный анализ в сейсмологии / Под ред. Кейлис-Борока В.И. М.: Наука. 1977. С. 33-49 (Вычисл. сейсмология; Вып. 10).
4. Бонгард М.М. Проблема узнавания. М.: Наука. 1967. 320 с.
5. Бхатия С.С., Горшков А.И., Ранцман Е.Я., Рао М.Н., Филимонов М.Б., Четти Т.Р.К. Распознавание мест возможного возникновения сильных землетрясений. XVIII. Гималаи, ($M \geq 6,5$) // Проблемы прогноза землетрясений и интерпретация сейсмологических данных / Под ред. Кейлис-Борока В.И. и Левшина А.Л. М.: Наука. 1992. С. 71-83 (Вычисл. сейсмология; Вып. 25).
6. Вебер К., Гвишиани А.Д., Годфруа П., Горшков А.И., Кособоков В.Г., Ламбер С., Ранцман Е.Я., Саллантен Ж., Сальдано А., Систернас А., Соловьев А.А. Распознавание мест возможного возникновения сильных землетрясений. XII. Два подхода к прогнозу мест возможного возникновения сильных землетрясений в Западных Альпах // Теория и анализ сейсмологической информации / Под ред. Кейлис-Борока В.И. и Левшина А.Л. М.: Наука, 1985. С. 139-154. (Вычисл. сейсмология; Вып. 18).
7. Вебер К., Гвишиани А.Д., Годфруа П., Ламбер Ж., Соловьев А.А., Трусков А.В. Распознавание мест возможного возникновения сильных землетрясений. XIII. Неотектоническая схема Западных Альп. $M \geq 5,0$ // Математические методы в сейсмологии и геодинامي-ке / Под ред. Кейлис-Борока В.И. и Левшина А.Л. М.: Наука, 1986. С. 82-94. (Вычисл. сейсмология; Вып. 19).
8. Габриэлов А.М., Горшков А.И., Ранцман Е.Я. Опыт морфоструктурного районирования по формализованным признакам // Распознавание и спектральный анализ в сейсмологии / Под ред. Кейлис-Борока В.И. М.: Наука. 1977. С. 50-58 (Вычисл. сейсмология; Вып. 10).
9. Габриэлов А.М., Гвишиани А.Д., Жидков М.П. Формализованное морфоструктурное районирование горного пояса Анд // Математические модели строения Земли и прогноза землетрясений / Под ред. Кейлис-Борока В.И. и Левшина А.Л. М.: Наука, 1982. С. 38-56. (Вычисл. сейсмология; Вып. 14).

10. Гвишиани А.Д., Зелевинский А.В., Кейлис-Борок В.И., Кособоков В.Г. Исследование мест возникновения сильнейших землетрясений Тихоокеанского пояса с помощью алгоритмов распознавания // Известия АН СССР. Физика Земли. 1978. №9. С. 31-42.
11. Гвишиани А.Д., Зелевинский А.В., Кейлис-Борок В.И., Кособоков В.Г. Распознавание мест возникновения сильнейших землетрясений Тихоокеанского пояса ($M > 8,2$) // Методы и алгоритмы интерпретации сейсмологических данных / Под ред. Кейлис-Борока В.И. и Левшина А.Л. М.: Наука, 1980. С. 30-44. (Вычисл. сейсмология; Вып. 13).
12. Гвишиани А.Д., Кособоков В.Г. К обоснованию результатов прогноза мест сильных землетрясений, полученных методами распознавания // Известия АН СССР. Физика Земли. 1981. №2. С. 21-36.
13. Гвишиани А.Д., Соловьев А.А. О приуроченности эпицентров сильных землетрясений к пересечениям морфоструктурных линейментов на территории Южной Америки. Методы и алгоритмы интерпретации сейсмологических данных / Под ред. Кейлис-Борока В.И. и Левшина А.Л. М.: Наука. 1981. С. 46-50 (Вычисл. сейсмология; Вып. 13).
14. Гвишиани А.Д., Жидков М.П., Соловьев А.А. Распознавание мест возможного возникновения сильных землетрясений. X. Места землетрясений магнитуды $M \geq 7,75$ на Тихоокеанском побережье Южной Америки. Математические модели строения Земли и прогноза землетрясений / Под ред. Кейлис-Борока В.И. и Левшина А.Л. М.: Наука. 1982. С. 56-67 (Вычисл. сейсмология; Вып. 14).
15. Гвишиани А.Д., Соловьев А.А. К решению задачи прогноза мест возникновения сильных землетрясений на Тихоокеанском побережье Южной Америки // Известия АН СССР. Физика Земли. 1982. №1. С. 86-87.
16. Гвишиани А.Д. Устойчивость по времени прогноза мест сильных землетрясений. I. Юго-Восточная Европа и Малая Азия // Известия АН СССР. Физика Земли. 1982. №8. С. 13-19.
17. Гвишиани А.Д., Гурвич В.А. Устойчивость по времени прогноза мест сильных землетрясений. II. Восток Средней Азии // Известия АН СССР. Физика Земли. 1982. №9. С. 30-38.
18. Гвишиани А.Д. Формализованный анализ линейментов в связи с задачей прогноза землетрясений // Экспериментальная сейсмология. М.: Наука. 1983. С. 181-190.
19. Гвишиани А.Д., Кособоков В.Г. О выборе порога магнитуды для классификации мест сильнейших землетрясений Тихоокеанского сейсмического пояса // Прогноз землетрясений и изучение строения Земли / Под ред. Кейлис-Борока В.И. и Левшина А.Л. М.: Наука. 1983. С. 74-80 (Вычисл. сейсмология; Вып. 15).
20. Гвишиани А.Д., Жидков М.П., Соловьев А.А. К переносу критериев высокой сейсмичности горного пояса Анд на Камчатку // Известия АН СССР. Физика Земли. 1984. №1. С. 20-33.
21. Гвишиани А.Д., Гурвич В.А. Динамические задачи распознавания образов. I. Условия стабильности для прогноза мест сильных землетрясений // Математическое моделирование и интерпретация геофизических данных. / Под ред. Кейлис-Борока В.И. и Левшина А.Л. М.: Наука. 1984а. С. 70-78 (Вычисл. сейсмология; Вып. 16).

22. Гвишиани А.Д., Гурвич В.А. Динамические задачи распознавания образов. II. Стабилизирующие множества и локальная стабильность прогноза мест сильных землетрясений // Логические и вычислительные методы в сейсмологии / Под ред. Кейлис-Борока В.И. и Левшина А.Л. М.: Наука. 1984б. С. 29-36 (Вычисл. сейсмология; Вып. 17).
23. Гвишиани А.Д., Соловьев А.А., Саллантен Ж., Сальдано А., Систернас А. Результаты советско-французских исследований по распознаванию высокосейсмичных зон в Западных Альпах // Докл. АН СССР. 1984. Т. 275. №6. С.1353-1358.
24. Гвишиани А.Д., Гурвич В.А., Расцветаев А.Л. Динамические задачи распознавания образов. III. Исследование стабильности прогноза мест сильнейших землетрясений Тихоокеанского подвижного пояса // Теория и анализ сейсмологической информации / Под ред. Кейлис-Борока В.И. и Левшина А.Л. М.: Наука. 1985а. С. 117-127 (Вычисл. сейсмология; Вып. 18).
25. Гвишиани А.Д., Горшков А.И., Кособоков В.Г., Ранцман Е.Я., Соловьев А.А. Места возможных землетрясений с $M \geq 5,0$ в Западных Альпах // Основные проблемы сейсмотектоники. М. 1985б. С. 83-91.
26. Гвишиани А.Д., Горшков А.И., Кособоков В.Г., Ранцман Е.Я. Морфоструктуры и места землетрясений Большого Кавказа // Известия АН СССР. Физика Земли. 1986. №9. С. 45-55.
27. Гвишиани А.Д., Горшков А.И., Кособоков В.Г. Распознавание высокосейсмичных зон в Пиренеях // Докл. АН СССР. 1987а. Т. 292. №1. С. 56-59.
28. Гвишиани А.Д., Горшков А.И., Кособоков В.Г., Систернас А., Филип Э. Распознавание мест возможного возникновения сильных землетрясений. XIV. Пиренеи и Альпы // Численное моделирование и анализ геофизических процессов / Под ред. Кейлис-Борока В.И. и Левшина А.Л. М.: Наука. 1987б. С. 123-135 (Вычисл. сейсмология; Вып. 20).
29. Гвишиани А.Д., Горшков А.И., Жидков М.П., Ранцман Е.Я., Трусов А.В. Распознавание мест возможного возникновения сильных землетрясений. XV. Морфоструктурные узлы Большого Кавказа, $M \geq 5,5$ // Численное моделирование и анализ геофизических процессов / Под ред. Кейлис-Борока В.И. и Левшина А.Л. М.: Наука. 1987в. С. 136-148 (Вычисл. сейсмология; Вып. 20).
30. Гвишиани А.Д., Горшков А.И., Ранцман Е.Я., Систернас А., Соловьев А.А. Прогнозирование мест землетрясений в регионах умеренной сейсмичности. М: Наука. 1988а. 176 с.
31. Гвишиани А.Д., Жижин М.Н., Тумаркин А.Г. Распознавание интенсивности по динамическим параметрам акселерограмм // Вопросы инженерной сейсмологии. 1988б. Т. 29. С. 73-80.
32. Гвишиани А.Д., Горшков А.И., Тумаркин А.Г., Филимонов М.Б. Распознавание мест возможного возникновения сильных землетрясений. XVI. Общие критерии умеренной сейсмичности четырех регионов Средиземноморской области ($M \geq 5,0$) // Теория и алгоритмы интерпретации геофизических данных / Под ред. Кейлис-Борока В.И. и Левшина А.Л. М.: Наука. 1989. С. 211-221 (Вычисл. сейсмология; Вып. 22).
33. Гвишиани А.Д., Жижин М.Н., Иваненко Т.И. Синтаксический анализ записей сильных движений // Компьютерный анализ геофизических полей / Под ред. Кейлис-Борока В.И. и Левшина А.Л. М.: Наука, 1990. С. 235-253 (Вычисл. сейсмология; Вып. 23).

34. Гвишиани А.Д., Гурвич В.А.. Динамические задачи классификации и выпуклое программирование в приложениях. М.: Наука. 1992. 360 с.
35. Гвишиани А.Д., Агаян С.М., Богоутдинов Ш.Р. О новом подходе к кластеризации // Кибернетика и системный анализ. 2002а. №2. С. 104-122.
36. Гвишиани А.Д., Диамант М., Михайлов В.О., Гальдеано А., Агаян С.М., Богоутдинов Ш.Р., Граева Е.М. Алгоритмы искусственного интеллекта для кластеризации магнитных аномалий // Физика Земли. 2002б. №7. С. 13-28.
37. Гвишиани А.Д., Агаян С.М., Богоутдинов Ш.Р. Дискретный математический анализ и мониторинг вулканов // Инженерная экология. 2008. №5. С. 26-31.
38. Гвишиани А.Д., Агаян С.М., Богоутдинов Ш.Р., Соловьев А.А. Дискретный математический анализ и геолого-геофизические приложения // Вестник КРАУНЦ. Науки о Земле. 2010. №2. С. 109-125.
39. Гвишиани А.Д., Агаян С.М., Добровольский М.Н., Дзобоев Б.А. Объективная классификация эпицентров и распознавание мест возможного возникновения сильных землетрясений в Калифорнии // Геоинформатика. 2013а. №2. С. 44-57.
40. Гвишиани А.Д., Дзобоев Б.А., Агаян С.М. О новом подходе к распознаванию мест возможного возникновения сильных землетрясений на Кавказе // Физика Земли. 2013б. №6. С. 3–19.
41. Гвишиани А.Д., Дзобоев Б.А., Агаян С.М. Интеллектуальная система распознавания FCAZm в определении мест возможного возникновения сильных землетрясений горного пояса Анд и Кавказа // Физика Земли. 2016, №4. С. 3–23. doi: 10.7868/S0002333716040013.
42. Гвишиани А.Д., Дзобоев Б.А., Сергеева Н.А., Рыбкина А.И. Формализованная кластеризация и зоны возможного возникновения эпицентров значительных землетрясений на Крымском полуострове и Северо-Западе Кавказа // Физика Земли. 2017а. №3. С. 33–42. doi: 10.7868/S0002333717030036.
43. Гвишиани А.Д., Дзобоев Б.А., Белов И.О., Сергеева Н.А., Вавилин Е.В. Последовательное распознавание мест возможного возникновения значительных и сильных землетрясений: Прибайкалье-Забайкалье // ДАН. 2017б. Т. 477. №6. С. 704–710. doi: 10.7868/S0869565217360178.
44. Гвишиани А.Д., Агаян С.М., Дзобоев Б.А., Белов И.О. Распознавание мест возможного возникновения эпицентров сильных землетрясений с одним классом обучения // ДАН. 2017в. Т. 474. №1. С. 86–92. doi: 10.7868/S0869565217130175.
45. Гвишиани А.Д., Дзобоев Б.А., Сергеева Н.А., Белов И.О., Рыбкина А.И. Зоны возможного возникновения эпицентров значительных землетрясений в регионе Алтай-Саяны // Физика Земли. 2018. №3. С. 18–28. doi: 10.7868/S000233371803002X.
46. Гельфанд И.М., Губерман Ш.А., Извекова М.Л., Кейлис-Борок В.И., Ранцман Е.Я. О критериях высокой сейсмичности // Докл. АН СССР. 1972. Т. 202. №6. С. 1317-1320.
47. Гельфанд И.М., Губерман Ш.А., Извекова М.Л., Кейлис-Борок В.И., Ранцман Е.Я. Распознавание мест возможного возникновения сильных землетрясений. I. Памир и Тянь-Шань // Вычислительные и статистические методы интерпретации сейсмических данных / Под ред. Кейлис-Борока В.И. М.: Наука. 1973. С. 107-133 (Вычисл. сейсмология. Вып. 6).

48. Гельфанд И.М., Губерман Ш.А., Жидков М.П., Кейлис-Борок В.И., Ранцман Е.Я. Распознавание мест возможного возникновения сильных землетрясений. II. Четыре региона Малой Азии и Юго-Восточной Европы // Машинный анализ цифровых сейсмических данных / Под ред. Кейлис-Борока В.И. М.: Наука. 1974а. С. 3-40 (Вычисл. сейсмология; Вып. 7).
49. Гельфанд И.М., Губерман Ш.А., Жидков М.П., Кейлис-Борок В.И., Ранцман Е.Я., Ротвайн И.М. Распознавание мест возможного возникновения сильных землетрясений. III. Случай, когда границы дизъюнктивных узлов неизвестны // Машинный анализ цифровых сейсмических данных / Под ред. Кейлис-Борока В.И. М.: Наука. 1974б. С. 41-64 (Вычисл. сейсмология; Вып. 7).
50. Гельфанд И.М., Губерман Ш.А., Кейлис-Борок В.И., Кнопов Л., Пресс Ф.С., Ранцман Е.Я., Ротвайн И.М., Садовский А.М. Условия возникновения сильных землетрясений (Калифорния и некоторые другие регионы) // Исследование сейсмичности и моделей Земли / Под ред. Кейлис-Борока В.И. М.: Наука. 1976. С. 3-91 (Вычисл. сейсмология. Вып. 9).
51. Гласко М.П., Ранцман Е.Я. О морфоструктурных узлах – местах активизации современных рельефообразующих процессов // Геоморфология. 1992. №4. С. 53-61.
52. Горшков А.И., Капуто М., Кейлис-Борок В.И., Офицерова Е.И., Ранцман Е.Я., Ротвайн И.М. Распознавание мест возможного возникновения сильных землетрясений. IX. Италия ($M \geq 6,0$) // Теория и анализ сейсмологических наблюдений / Под ред. Кейлис-Борока В.И. М.: Наука. 1979. С. 3-17 (Вычисл. сейсмология; Вып. 12).
53. Горшков А.И., Жидков М.П., Ранцман Е.Я., Тумаркин А.Г. Морфоструктура Малого Кавказа и места землетрясений, $M \geq 5,5$ // Известия АН СССР. Физика Земли. 1991. №6. С. 30-38.
54. Горшков А.И. Распознавание мест сильных землетрясений в Альпийско-Гималайском поясе. М.: КРАСАНД. 2010. 472 с. (Вычисл. сейсмология; Вып. 40).
55. Горшков А.И., Соловьев А.А., Жарких Ю.И. Морфоструктурное районирование горной части Крыма и места возможного возникновения сильных землетрясений // Вулканология и сейсмология. 2017. №6. С. 21-27, doi:10.7868/S0203030617060025.
56. Горшков А.И., Соловьев А.А., Жарких Ю.И. Распознавание мест возможного возникновения сильных землетрясений в регионе Алтай–Саяны–Прибайкалье // ДАН. 2018. Т. 479. №3. С. 333-335, doi:10.7868/S0869565218090219.
57. Гурвич В.А., Кособоков В.Г. О связи вулканизма и перепада высот с эпицентрами сильнейших землетрясений. Математическое моделирование и интерпретация сейсмических данных. / Под ред. Кейлис-Борока В.И. и Левшина А.Л. М.: Наука. 1984. С. 88-93 (Вычисл. сейсмология; Вып. 16).
58. Жидков М.П., Кособоков В.Г. Распознавание мест возможного возникновения сильных землетрясений. XIII. Пересечения линеаментов востока Средней Азии. Интерпретация данных сейсмологии и геотектоники / Под ред. Кейлис-Борока В.И. М.: Наука. 1978. С. 48-71 (Вычисл. сейсмология; Вып. 11).
59. Жидков М.П., Тумаркин А.Г., Филимонов М.Б. Распознавание мест возможного возникновения сильных землетрясений. XVII. Общие критерии высокой сейсмичности горного пояса Анд Южной Америки ($M \geq 7,0$) // Компьютерный анализ геофизических полей

- / Под ред. Кейлис-Борока В.И. и Левшина А.Л. М.: Наука, 1990. С. 274-284 (Вычисл. сейсмология; Вып. 23).
60. Кейлис-Борок В.И., Кособоков В.Г., Мажкенов С.А. О подобии в пространственном распределении сейсмичности. Теория и алгоритмы интерпретации геофизических данных // Теория и алгоритмы интерпретации геофизических данных / Под ред. Кейлис-Борока В.И. и Левшина А.Л. М.: Наука. 1989. С. 28-40 (Вычисл. сейсмология; Вып. 22).
61. Кособоков В. Г., Ротвайн И.М. Распознавание мест возможного возникновения сильных землетрясений. VI. Магнитуда $M \geq 7,0$ // Распознавание и спектральный анализ в сейсмологии / Под ред. Кейлис-Борока В.И. М.: Наука. 1977. С. 3-18 (Вычисл. сейсмология; Вып. 10).
62. Кособоков В. Г. Распознавание мест сильных землетрясений востока Средней Азии и Анатолии методом Хемминга // Математические модели строения Земли и прогноза землетрясений / Под ред. Кейлис-Борока В.И. и Левшина А.Л. М.: Наука. 1982. С. 76-81 (Вычисл. сейсмология; Вып. 14).
63. Кособоков В.Г., Мажкенов С.А. Интенсивность потока землетрясений в очаговой области // Доклады Академии наук Республики Казахстан, 1992, №1. С. 53-57.
64. Кособоков В.Г., Некрасова А.К. Общий закон подобия для землетрясений: глобальная карта параметров // Анализ геодинамических и сейсмических процессов / Под ред. Кейлис-Борока В.И. и Молчана Г.М. М.: ГЕОС, 2004. С. 160-175 (Вычисл. сейсмология; Вып. 35).
65. Кособоков В.Г., Некрасова А.К. Карты Глобальной программы оценки сейсмической опасности (GSHAP) ошибочны // Вопросы инженерной сейсмологии. 2011. Т. 38. №1. С. 65-76.
66. Кособоков В.Г., Соловьев А.А. Об оценке результатов тестирования алгоритмов прогноза землетрясений // ДАН. 2015. Т. 460. №6. С. 710-712, doi:10.7868/S0869565215060213.
67. Ранцман Е.Я. Места землетрясений и морфоструктура горных стран. М.: Наука. 1979. 170 с.
68. Ромашкова Л.Л., Кособоков В.Г. Динамика сейсмической активности до и после сильнейших землетрясений мира, 1985-2000. Проблемы динамики литосферы и сейсмичности / Под ред. Молчана Г.М., Наймарка Б.М. и Левшина А.Л. М.: ГЕОС, 2001. С. 162-189 (Вычисл. сейсмология; Вып. 32).
69. Садовский М.А., Болховитинов Л.Г., Писаренко В.Ф., О свойстве дискретности горных пород. Известия АН СССР. Физика Земли. 1982. №12. С. 3-18.
70. Садовский, М.А., Голубева Т.В., Писаренко В.Ф., Шнирман М.Г. Характерные размеры горной породы и иерархические свойства сейсмичности. Известия АН СССР. Физика Земли. 1984. №2. С. 3-15.
71. Соловьев А.А., Новикова О.В., Горшков А.И., Пиотровская Е.П. Распознавание расположения потенциальных очагов сильных землетрясений в Кавказском регионе с использованием ГИС-технологий // ДАН. 2013. Т. 450. №5. С. 599-601, doi:10.7868/S0869565213170222.

72. Соловьев А.А., Гвишиани А.Д., Горшков А.И., Добровольский М.Н., Новикова О.В. Распознавание мест возможного возникновения землетрясений: Методология и анализ результатов // *Физика Земли*. 2014. №2. С. 3-20, doi:10.7868/S0002333714020112.
73. Соловьев Ал.А., Горшков А.И., Соловьев Ан.А. Применение данных по литосферным магнитным аномалиям в задаче распознавания мест возможного возникновения землетрясений // *Физика Земли*. 2016. №6. С. 21-27, doi:10.7868/S0002333716050148.
74. Соловьев А.А., Горшков А.И. Моделирование динамики блоковой структуры и сейсмичности Кавказа // *Физика Земли*. 2017. №3. С. 3-13, doi:10.7868/S0002333717030127.
75. Федеральная служба государственной статистики, 2016. Население Российской Федерации для муниципалитетов на 1 января 2016 года. ФССС: Москва, Российская Федерация, http://www.gks.ru/free_doc/doc_2016/bul_dr/mun_obr2016.rar.
76. Фу К. Структурные методы в распознавании образов. М.: Мир. 1977. 319 с.
77. Alekseevskaya M. A., Gabrielov A. M., Gvishiani A. D., Gelfand I. M., Ranzman E. Ya. Formal morphostructural zoning of mountain territories // *J. Geophys.* 1977. Vol. 43. P. 227-233.
78. Bak P., Christensen K., Danon L., Scanlon T. Unified scaling law for earthquakes // *Physical Review Letters*. 2002. Vol. 88. P. 178501–178504.
79. Beauval C., Bard P.-Y., Hainzl S., Gue ´guen P. Can strong-motion observations be used to constrain probabilistic seismic-hazard estimates? // *Bull. Seismol. Soc. Am.* 2008. Vol. 98, №2. P. 509-520, doi:10.1785/0120070006.
80. Ben-Zion Y. Collective behavior of earthquakes and faults: continuum-discrete transitions, progressive evolutionary changes, and different dynamic regimes // *Reviews of Geophysics*. 2008. Vol. 46, № 4. P. RG4006, doi:10.1029/2008RG000260.
81. Bhatia S. C., Chetty T. R. K., Filimonov M., Gorshkov A., Rantsman E., Rao M. N. Identification of potential areas for the occurrence of strong earthquakes in Himalayan arc region // *Proc. Indian Acad. Sci. (Earth Planet. Sci.)*. 1992. Vol. 101, №4. P. 369-385.
82. Caputo M., Keilis-Borok V., Oficerova E., Ranzman E., Rotwain I., Solovjeff A. Pattern recognition of earthquake-prone areas in Italy // *Phys. Earth Planet Int.* 1980. Vol. 21. P. 305-320.
83. Cisternas, A., Godefroy P., Gvishiani A., Gorshkov A.I., Kossobokov V., Lambert M., Ranzman E., Sallantin J., Soldano H., Soloviev A., Weber C. A dual approach to recognition of earthquake prone areas in the western Alps // *Annales Geophysicae*. 1985. Vol. 3, №2. P. 249-270.
84. Davis C., Keilis-Borok V., Kossobokov V., Soloviev A. Advance prediction of the March 11, 2011 Great East Japan Earthquake: A missed opportunity for disaster preparedness // *Int. J. Disaster Risk Reduction*. 2012. Vol. 1. P. 17-32, doi:10.1016/j.ijdr.2012.03.001.
85. Dubois J., Gvishiani A. Dynamic Systems and Dynamic Classification Problems in Geophysical Applications. Paris: Springer-Verlag. 1998. 256 p.
86. Gelfand I. M., Guberman Sh., Izvekova M. L., Keilis-Borok V. I., Ranzman E. Ia. Criteria of high seismicity determined by pattern recognition // *Tectonophysics*. 1972. Vol. 13, №1-4. P. 415-422.

87. Gelfand I. M., Guberman Sh. A., Keilis-Borok V. I., Knopoff L., Press F., Ranzman I. Ya., Rotwain I.M., Sadovsky A.M. Pattern recognition applied to earthquake epicenters in California // *Phys. Earth Planet. Inter.* 1976. Vol. 11. P. 227-283.
88. Giardini, D. The global seismic hazard assessment program (GSHAP) – 1992/1999 // *Ann. Geophys.* 1999. Vol. 42. P. 957-974.
89. Gorshkov A. I., Panza G. F., Soloviev A. A., Aoudia A. Morphostructural zonation and preliminary recognition of seismogenic nodes around the Adria margin in peninsular Italy and Sicily // *J. Seismol. Earthquake Engineering*, 2002. Vol. 4, №1. P. 1-24.
90. Gorshkov A., Kossobokov V., Soloviev A. Recognition of Earthquake-Prone Areas // *Nonlinear Dynamics of the Lithosphere and Earthquake Prediction* / Keilis-Borok V. I., Soloviev A. A. (eds). Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag. 2003. P. 239-310.
91. Gorshkov A. I., Panza G. F., Soloviev A. A., Aoudia A. Identification of seismogenic nodes in the Alps and Dinarides // *Bolletino della Societa Geologica Italiana*. 2004. Vol. 123, №1. P. 3-18.
92. Gorshkov A. I., Panza G. F., Soloviev A. A., Aoudia A., Peresan A. Delineation of the geometry of nodes in the Alps-Dinarides hinge zone and recognition of seismogenic nodes ($M \geq 6$) // *Terra Nova*. 2009. Vol. 21. P. 257-264.
93. Gorshkov A. I., Soloviev A. A., Jiménez M. J., García-Fernández M., Panza G. F. Recognition of earthquake-prone areas ($M \geq 5.0$) in the Iberian Peninsula // *Rendiconti Lincei*. 2010. Vol. 21, №2. P. 131-162.
94. Gridded Population of the World, Version 3 (GPWv3), 2005. CityPalisades, StateNY: Socioeconomic Data and Applications Center (SEDAC), placePlaceNameColumbia PlaceTypeUniversity, <http://sedac.ciesin.columbia.edu/gpw>.
95. Gvishiani A. D. Earthquake-prone areas in the Andes // *Revista Geofisica Instituto Panamericano de Geografia e Historia*. 1982a. №17. P. 105-111.
96. Gvishiani A. D. Prevision des tremblements de terre et stabilite de la classification. Presentee par Jean Coulomb. // *Compte-rendus a l'Academi Sciences*. placeCityParis. 1982b. Vol. 294, serie 11. P.749-752.
97. Gvishiani A. D., Soloviev A. A. Recognition of places on the Pacific coast of the South America where strong earthquakes may occur // *Earthquake. Predict. Res.* 1984. Vol. 2. P. 237-243.
98. Gvishiani A., Gorshkov A., Kossobokov V., Cisternas A., Philip H., Weber C. Identification of seismically dangerous zones in the Pyrenees // *Annales Geophysicae*. 1987. Vol. 5B, №6. P. 681-690.
99. Gvishiani A., Tumarkin A. G., Zhizhin M. N., Schenk V. Pattern recognition of the macroseismic significance of the parameters of strong earth tremors // *Seismic Risk Assessment and Design of Building Structures*. Omega Scientific. 1988.
100. Gvishiani A., Bonnin J., Zhizhin M., Mohammadioun B. Strong motion data classification using syntactic pattern recognition // *Proceedings of the Fourth International Conference on Seismic Zonation*. Stanford, California. 1991. Vol. 2. P. 549-555.

-
101. Gvishiani A., Zhizhin M., Rouland D., Mohammadioun B., Bonnin J. Identification of a geological region for earthquakes using syntactic pattern recognition of seismograms // *Natural Hazards*. 1994. Vol. 10. P. 139-147.
 102. Gvishiani A., Zhizhin M., Rouland D., Mohammadioun B., Bonnin J., Madariaga R. Syntactic pattern recognition scheme (SPARS) applied to seismological waveforms analysis // *Cahiers du Centre Europeen de Geodynamique et de Seismologie*. 1995. Vol. 9. P. 17-26.
 103. Gvishiani A., Zhizhin M., Dubois J., Battaglia J. Syntactic recognition of magnetic anomalies along the Mid-Atlantic Ridge // *C.R. Acad. Sci. Paris. Sciences de la terre et des planets / Earth & Planetary Sciences*. 1997. P. 983-990.
 104. Gvishiani A., Dubois J. *Artificial Intelligence and Dynamic Systems for Geophysical Applications*. Springer-Verlag, CityplaceParis. 2002. 350 p.
 105. Gvishiani A. D., Agayan S. M., Bogoutdinov Sh. R., Tikhotsky S. A., Hinderer J., Bonnin J., Diamant M. Algorithm FLARS and recognition of time series anomalies // *System Research & Information Technologies*. 2004. №3. P. 7-16.
 106. Gvishiani A., Dobrovolsky M., Agayan S., Dzeboev B. Fuzzy-based clustering of epicenters and strong earthquake-prone areas // *Environmental Engineering and Management Journal*. 2013. Vol. 12. №1. P. 1-10.
 107. Keilis-Borok V. I., Kossobokov V. G. Premonitory activation of earthquake flow: algorithm M8 // *Phys. Earth Planet. Inter.* 1990. Vol. 61, №1-2. P. 73-83.
 108. Keilis-Borok V. I., Rotwain I. M. Diagnosis of Time of Increased Probability of strong earthquakes in different regions of the world: algorithm CN // *Phys. Earth Planet. Inter.* 1990, Vol. 61, №1-2. P. 57-72.
 109. Kondorskaya N. V., Shebalin N. V., Khrometskaya Ya. A., Gvishiani A. D. New catalog of strong earthquakes in the U.S.S.R. from ancient times through 1977. *World Data Center A for Solid Earth Geophysics*, Report SE-31, 1982. 609 p.
 110. Kossobokov V. G., Romashkova L. L. Seismicity dynamics prior to and after the largest earthquakes worldwide, 1985-2000. In D.K.Chowdhury (ed.), *Computational Seismology and Geodynamics*. Volume 7. Am. Geophys. CityplaceUn., StateWashington, D.C., 2005. P. 138-160, doi:10.1029/CS007p0138.
 111. Kossobokov V. G., Lepreti F., Carbone V. Complexity in sequences of Solar flares and earthquakes // *Pure Appl. Geophys.* 2008, Vol. 165, №3-4. P. 761-775, doi:10.1007/s00024-008-0330-z
 112. Kossobokov V. G. Earthquake prediction: 20 years of global experiment // *Natural Hazards*. 2013. Vol. 69. P. 1155-1177, doi:10.1007/s11069-012-0198-1.
 113. Kossobokov V., Peresan A., Panza G. F. Reality check: Seismic hazard models you can trust // *EOS. Earth & Space Sci. News*, July 2015. Vol. 96, №13. P. 9-11, doi:10.1029/2015EO031919.
 114. Kossobokov V. G., Nekrasova A. K. Earthquake hazard and risk assessment based on Unified Scaling Law for Earthquakes: Greater Caucasus and Crimea // *J. Seismology*. 2018. Vol. 22. P. 1157-1169, doi:10.1007/s10950-018-9759-4.

-
115. Nekrasova A., Kossobokov V., Peresan A., Magrin A. The comparison of the NDSHA, PSHA seismic hazard maps and real seismicity for the Italian territory // *Natural Hazards*. 2014. Vol. 70, №1. P. 629-641, doi:10.1007/s11069-013-0832-6.
 116. Nekrasova A., Kossobokov V., Parvez I. A., Tao X. Seismic hazard and risk assessment based on the unified scaling law for earthquakes // *Acta Geodaetica et Geophysica*. 2015. Vol. 50, №1. P. 21-37, doi:10.1007/s40328-014-0082-4.
 117. Okubo P. G., Aki K. Fractal geometry in the San Andreas Fault system // *J. Geophys. Res.* 1987. Vol. 92, №B1. P. 345-356.
 118. Panza G. F., Romanelli F., Vaccari F. Seismic wave propagation in laterally heterogeneous anelastic media: theory and applications to seismic zonation // *Adv. Geophys.* 2001. Vol. 43. P. 1-95.
 119. Panza G., Irikura K., Kouteva-Guentcheva M., Peresan A., Wang Z., Saragoni R. (Eds.), *Advanced Seismic Hazard Assessment* // *Pure Appl. Geophys.* 2011. Vol. 168, №1-4. P. 1-752.
 120. Panza G. F., Peresan A., La Mura C. Seismic hazard and strong ground motion: an operational neo-deterministic approach from national to local scale // *UNESCO-EOLSS Joint Committee (Ed.), Encyclopedia of Life Support Systems (EOLSS), Geophysics and Geochemistry. Developed under the Auspices of the UNESCO, Eolss Publishers, CityOxford, UK*. 2013. P. 1-49.
 121. Panza G. F., Kossobokov V., Peresan A., Nekrasova A. Chapter 12. Why are the standard probabilistic methods of estimating seismic hazard and risks too often wrong? // *Earthquake Hazard, Risk, and Disasters* / Wyss M., Shroder J. (eds). Elsevier, London. 2014. P. 309-357.
 122. Parvez I. A., Vaccari F., Panza G. F. A deterministic seismic hazard map of India and adjacent areas // *Geophys. J. Int.* 2003. Vol. 155. P. 489-508.
 123. Paskaleva I., Dimova S., Panza G. F., Vaccari F. An earthquake scenario for the microzonation of Sofia and the vulnerability of structures designed by use of the Eurocodes // *Soil Dyn. Earthquake Eng.* 2007. Vol. 27. P. 1028-1041.
 124. Peresan A., Zuccolo E., Vaccari F., Gorshkov A., Panza G.F. Neo-deterministic seismic hazard and pattern recognition techniques: Time-dependent scenarios for North-Eastern Italy // *Pure Appl. Geophys.* 2011. Vol. 168, №3-4. P. 583-607, doi:10.1007/s00024-010-0166-1.
 125. Rotwain I., Novikova O. Performance of the earthquake prediction algorithm CN in 22 regions of the world // *Phys. Earth Planet. Inter.* 1999. Vol. 111, №3-4. P. 207-213.
 126. Shearer P.M. Self-similar earthquake triggering, Bath's law, and foreshock/aftershock magnitudes: Simulations, theory, and results for southern California // *J. Geophys. Res. – Solid Earth*. 2012. Vol. 117, №B6, doi:10.1029/2011jb008957.
 127. Utsu T., Ogata Y., Matsu'ura R. S. The centenary of the Omori formula for a decay law of aftershock activity // *J. Phys. Earth*. 1995. Vol. 43, №1. P. 1-33.
 128. Vaccari F., Peresan A., Zuccolo E., Romanelli F., Marson C., Fiorotto V., Panza G. F. Neo-deterministic seismic hazard scenarios: application to the engineering analysis of historical buildings // *Proceedings of PROHITECH 2009-Protection of Historical Buildings Mazzolani*. Taylor & Francis Group, London. 2009. P. 1559-1564.

129. Wyss M., Nekrasova A., Kossobokov V. Errors in expected human losses due to incorrect seismic hazard estimates // *Natural Hazards*. 2012. Vol. 62, №3. P. 927-935, doi:10.1007/s11069-012-0125-5.

REFERENCES

1. Agayan, S. M. & Soloviev, A. A. 2004, "Separation of dense areas in metric spaces on the basis of crystallization", *System Res. Inform. Technol.*, no. 2, pp. 7-23.
2. Agayan, S. M., Bogoutdinov, Sh. R. & Dobrovolsky, M. N. 2011, "On an algorithm for finding dense areas and its geophysical applications", *Matematicheskie metody raspoznavaniya obrazov: 15 Vserossiiskaya Konferentsiya, Petrozavodsk, 11-17 sentyabrya 2011, Sbornik dokladov* (Mathematical Methods of Pattern Recognition. The 15th All-Russian Conference, Petrozavodsk, 11-17 Sept. 2011, Collection of reports). Moscow, 2011, pp. 543-546.
3. Alekseevskaya, M. A., Gabrielov, A. M., Gvishiani, A. D., Gelfand, I. M. & Ranzman, E. Ya. 1977, "Morphostructural zoning of mountain territories according to formalized criterions", *Raspoznavanie i spektralnyi analiz v seismologii* (Recognition and Spectral Analysis in Seismology), Nauka, Moscow, pp. 33-49 (Comput. Seismol., 10).
4. Bongard, M. M. 1967, *Problema uznaniya* (Classification Problem), Nauka, Moscow.
5. Bhatia, S. G., Gorshkov, A. I., Rantsman, E. Ya., Rao, M. N., Filimonov, M. B. & Chetty, T. R. K. 1992, "Recognition of earthquake-prone areas. XVIII. The Himalaya ($M \geq 6.5$)", *Problemy prognoza zemletryaseni i interpretatsiya seismologicheskikh dannyykh* (Problems in Earthquake Prediction and Interpretation of Seismological Data), Nauka, Moscow, pp. 71-83 (Comput. Seismol.; 25).
6. Weber, C., Gvishiani, A. D., Godefroy, P., Gorshkov, A. I., Kossobokov, V. G., Lambert, M., Ranzman, E. Ya., Sallantin, J., Soldano, H., Cisternas, A. & Soloviev, A. A. 1985, "Recognition of earthquake-prone areas. XII. Two approaches to identification of strong earthquake prone areas in the Western Alps", *Teoriya i analiz seismologicheskoi informatsii* (Theory and Analysis of Seismological Information), Nauka, Moscow, pp. 139-154 (Comput. Seismol.; 18).
7. Weber, C., Gvishiani, A. D., Godefroy, P., Lambert, M., Soloviev, A. A. & Trusov, A. V. 1986, "Recognition of earthquake-prone areas. XIII. Neotectonic scheme of the western Alps", *Matematicheskie metody v seismologii i geodinamike* (Mathematical Methods in Seismology and geodynamics), Nauka, Moscow, pp. 82-94 (Comput. Seismol.; 19).
8. Gabrielov, A. M., Gorshkov, A. I., & Ranzman, E. Ya. 1977, "The experience of morphostructural zoning according to formalized features", *Raspoznavanie i spektralnyi analiz v seismologii* (Recognition and Spectral Analysis in Seismology), Nauka, Moscow, pp. 50-58 (Comput. Seismol., 10).
9. Gabrielov, A. M., Gvishiani, A. D. & Zhidkov, M. P. 1982 "Formalized morphostructural zoning of the Andes mountain belt", *Matematicheskie modeli stroeniya Zemli i prognoza zemletryaseni* (Mathematical Models of Earth Structure and Earthquake Prediction), Nauka, Moscow, pp. 38-56 (Comput. Seismol., 14).
10. Gvishiani, A. D., Zelevinsky, A. V., Keilis-Borok, V. I. & Keilis-Borok, V. I., Kossobokov, V. G. 1978, "Study of the violent earthquake occurrence in the Pacific Ocean Belt with the help of recognition algorithms", *Izv. Acad. Sci. SSSR. Fizika Zemli*, no. 9, pp. 31-42.

11. Gvishiani, A. D., Zelevinsky, A. V., Keilis-Borok, V. I. & Keilis-Borok, V. I., Kossobokov, V. G. 1980, "Recognition of strongest earthquake prone areas of the Pacific Ocean Belt", *Metody i algoritmy interpretatsii seismologicheskikh dannykh* (Methods and Algorithms of Seismological Data Interpretation), Nauka, Moscow, pp. 30-44 (Comput. Seismol., 13).
12. Gvishiani, A. D. & Kossobokov, V. G. 1981, "On foundations of the pattern recognition results applied to earthquake-prone areas", *Izv. Acad. Sci. SSSR. Fizika Zemli*, no. 2, pp. 21-36.
13. Gvishiani, A. D. & Soloviev, A. A. 1981, "Association of the epicenters of strong earthquakes with the intersections of morphostructural lineaments in South America", *Metody i algoritmy interpretatsii seismologicheskikh dannykh* (Methods and Algorithms of Seismological Data Interpretation), Nauka, Moscow, pp. 46-50 (Comput. Seismol., 13).
14. Gvishiani, A. D., Zhidkov, M. P. & Soloviev, A. A. 1982, "Recognition of earthquake-prone areas. X. Places of earthquakes of magnitude $M \geq 7,75$ on the Pacific coast of South America", *Matematicheskie modeli stroeniya Zemli i prognoza zemletryasenii* (Mathematical Models of Earth Structure and Earthquake Prediction), Nauka, Moscow, pp. 56-67 (Comput. Seismol., 14).
15. Gvishiani, A. D. & Soloviev, A. A. 1982, "To the solution of the problem of predicting places of occurrence of strong earthquakes on the Pacific coast of South America", *Izv. Acad. Sci. SSSR. Fizika Zemli*, no. 1, pp. 86-87.
16. Gvishiani, A. D. 1982, "Stability in time of the identification of places of strong earthquakes. I. South-Eastern Europe and Asia Minor", *Izv. Acad. Sci. SSSR. Fizika Zemli*, no. 8, pp. 13-19.
17. Gvishiani, A. D. & Gurvich, V. A. 1982, "Stability in time of the identification of places of strong earthquakes. II. East of Central Asia", *Izv. Acad. Sci. SSSR. Fizika Zemli*, no. 9, pp. 30-38.
18. Gvishiani, A. D. 1983, Formalized analysis of lineaments in connection with the problem of earthquake prediction", *Eksperimentalnaya seismologiya* (Experimental Seismology), Nauka, Moscow, pp. 181-190.
19. Gvishiani, A. D. & Kossobokov, V. G. 1983, "On the selection of the magnitude threshold for the classification of places of the strongest earthquakes in the Pacific Ocean Seismic Belt", *Prognoz zemletryasenii i izuchenie stroeniya Zemli* (Earthquake Prediction and Earth Structure Study), Nauka, Moscow, pp. 74-80 (Comput. Seismol., 15).
20. Gvishiani, A. D., Zhidkov, M. P. & Soloviev, A. A. 1984, "To the transfer of criteria for high seismicity of the Andes mountain belt to Kamchatka", *Izv. Acad. Sci. SSSR. Fizika Zemli*, no. 9, pp. 20-33.
21. Gvishiani, A. D. & Gurvich, V. A. 1984a, "Dynamic pattern recognition problems. I. Stability conditions for the forecast of places of strong earthquakes", *Matematicheskoe modelirovanie i interpretatsiya geofizicheskikh dannykh* (Mathematical Modeling and Interpretation of Geophysical Data), Nauka, Moscow, pp. 70-78 (Comput. Seismol., 16).
22. Gvishiani, A. D. & Gurvich, V. A. 1984b, "Dynamic pattern recognition problems. II. Stabilizing sets and local stability of the identification of places of strong earthquakes", *Logicheskie i vyuchislitelnyue metody v seismologii* (Logical and Computational Methods in Seismology), Nauka, Moscow, pp. 29-36 (Comput. Seismol., 17).

23. Gvishiani, A. D., Soloviev, A. A., Sallantin, J., Soldano, H. & Cisternas, A. 1984, "Results of Soviet-French studies on the recognition of high seismic zones in the Western Alps", *Doklady Acad. Sci. SSSR*, vol. 275, no. 6, pp. 1353-1358.
24. Gvishiani, A. D., Gurvich, V. A. & Rastsvetaev, A. L. 1985a, "Dynamic pattern recognition problems. III. Study of the stability of the identification of the strongest earthquake places of the Pacific Ocean Mobile Belt", *Teoriya i analiz seismologicheskoi informatsii* (Theory and Analysis of Seismological Information), Nauka, Moscow, pp. 117-127 (Comput. Seismol., 18).
25. Gvishiani, A. D., Gorshkov, A. I., Kossobokov, V. G., Ranzman, E. Ya. & Soloviev, A. A. 1985b, "Places of possible earthquakes with $M \geq 5.0$ in the Western Alps", *Osnovnyye problemy seismotektoniki* (The Main Problems of Seismotectonics), Moscow, pp. 83-91.
26. Gvishiani, A. D., Gorshkov, A. I., Kossobokov, V. G. & Ranzman, E. Ya. 1986, "Morphostructures and places of earthquakes of the Greater Caucasus", *Izv. Acad. Sci. SSSR. Fizika Zemli*, no. 9, pp. 45-55.
27. Gvishiani, A. D., Gorshkov, A. I. & Kossobokov, V. G. 1987a, "Recognition of high seismic zones in the Pyrenees", *Doklady Acad. Sci. SSSR*, vol. 292, no. 1, pp. 56-59.
28. Gvishiani, A. D., Gorshkov, A. I., Kossobokov, V. G., Cisternas, A. & Philip, H. 1987b, "Recognition of earthquake-prone areas. XIV. The Pyrenees and the Alps", *Chislennoe modelirovanie i analiz geofizicheskikh protsessov* (Numerical Modeling and Analysis of Geophysical Processes), Nauka, Moscow, pp. 123-135 (Comput. Seismol.; 20).
29. Gvishiani, A. D., Gorshkov, A. I., Zhidkov, M. P., Ranzman, E. Ya. & Trusov, A. V. 1987b, "Recognition of earthquake-prone areas. XV. Morphostructure nodes of the Greater Caucasus, $M \geq 5.5$ ", *Chislennoe modelirovanie i analiz geofizicheskikh protsessov* (Numerical Modeling and Analysis of Geophysical Processes), Nauka, Moscow, pp. 136-148 (Comput. Seismol.; 20).
30. Gvishiani, A. D., Gorshkov, A. I., Ranzman, E. Ya., Cisternas, A. & Soloviev, A. A. 1988a, *Prognozirovanie mest zemletryasenii v regionakh umerennoi seismichnosti* (Identification of Earthquake-prone Areas in the Regions of Moderate Seismicity), Nauka, Moscow.
31. Gvishiani, A. D., Zhizhin, M. N. & Tumarkin, A. G. 1988b, "Intensity recognition by dynamic parameters of accelerograms", *Voprosy inzhenernoi seismologii*, vol. 29, pp. 73-80.
32. Gvishiani, A. D., Gorshkov, A. I., Tumarkin, A. G. & Filimonov, M. B. 1989, "Recognition of earthquake-prone areas. XVI. The general criteria for the moderate seismicity of the four regions of the Mediterranean region ($M \geq 5.0$)", *Teoriya i algoritmy interpretatsii geofizicheskikh dannyykh* (Theory and Algorithms for Geophysical Data Interpretation), Nauka, Moscow, pp. 211-221 (Comput. Seismol.; 22).
33. Gvishiani, A. D., Zhizhin, M. N. & Ivanenko, T. I. 1990, "Syntactic pattern recognition of strong motion waveforms", *Comp'yuternyyi analiz geofizicheskikh polei* (Computer Analysis of Geophysical Fields), Nauka, Moscow, pp. 235-253 (Comput. Seismol.; 23).
34. Gvishiani, A. D. & Gurvich, V. A. 1992, *Dinamicheskie zadachi klassifikatsii i vyupukloe programmirovaniye v prilozheniyakh* (Dynamic Classification Problems and Convex Programming in Applications), Nauka, Moscow.
35. Gvishiani, A. D., Agayan, S. M. & Bogoutdinov, Sh. R. 2002a, "On a New Approach to Clustering", *Cibernetika i sistemnyi analiz* (Cybernetics and Systems Analysis), no. 2, pp. 104-122.

36. Gvishiani, A. D., Diamant, M., Mikhailov, V. O., Galdeano, A., Agayan, S. M., Bogoutdinov, Sh. R. & Graeva, E.M. 2002b, "Artificial intelligence algorithms for magnetic anomaly clustering", *Izvestiya. Phys. Solid Earth*, vol. 38, no. 7, pp. 545-559.
37. Gvishiani, A. D., Agayan, S. M. & Bogoutdinov, Sh. R. 2008, "Discrete mathematical analysis and monitoring of volcanoes", *Inzhenernaya ekologiya*, no. 5, pp. 26-31.
38. Gvishiani, A. D., Agayan, S. M., Bogoutdinov, Sh. R. & Soloviev, A.A. 2010, "Discrete mathematical analysis and geological and geophysical applications", *Vestnik KRAUNTs. Nauki o Zemle*, no. 2, pp. 109-125.
39. Gvishiani, A. D., Agayan, S. M., Dobrovolsky, M. N. & Dzeboev, B. A. 2013a, "Objective classification of epicenters and recognition of places of possible occurrence of strong earthquakes in California", *Geoinformatika*, no. 2, pp. 44-57.
40. Gvishiani, A. D., Dzeboev, B. A. & Agayan, S. M. 2013b, "A New approach to recognition of the strong earthquake-prone areas in the Caucasus", *Izvestiya. Physics of the Solid Earth*, vol. 49, no. 6, pp. 747-766. doi: 10.1134/S1069351313060049
41. Gvishiani, A. D., Dzeboev, B. A. & Agayan, S. M. 2016, "FCaZm intelligent recognition system for locating areas prone to strong earthquakes in the Andean and Caucasian mountain belts", *Izvestiya. Physics of the Solid Earth*, vol. 52, no. 4, pp. 461-491. doi: 10.1134/S1069351316040017
42. Gvishiani, A. D., Dzeboev, B. A., Sergeyeva, N. A. & Rybkina, A. I. 2017a, "Formalized clustering and significant earthquake-prone areas in the Crimean Peninsula and Northwest Caucasus", *Izvestiya. Physics of the Solid Earth*, vol. 53, no. 3, pp. 353-365. doi: 10.1134/S106935131703003X
43. Gvishiani, A. D., Dzeboev, B. A., Belov, I. O., Sergeeva, N. A. & Vavilin, E. V. 2017b, "Successive recognition of significant and strong earthquake-prone areas: The Baikal-Transbaikalia region", *Doklady Earth Sciences*, vol. 477, no. 2, pp. 1488-1493. doi: 10.1134/S1028334X1712025X
44. Gvishiani, A. D., Agayan, S. M., Dzeboev, B. A. & Belov, I. O. 2017c, "Recognition of strong earthquake-prone areas with a single learning class", *Doklady Earth Sciences*, vol. 474, no. 1, pp. 546-551. doi: 10.1134/S1028334X17050038
45. Gvishiani, A. D., Dzeboev, B. A., Sergeeva, N. A., Belov, I. O. & Rybkina, A. I. 2018, "Significant earthquake-prone areas in the Altai-Sayan region", *Izvestiya. Physics of the Solid Earth*, vol. 54, no. 3, pp. 406-414. doi: 10.1134/S1069351318030035
46. Gelfand, I. M., Guberman, Sh. A., Izvekova, M. L., Keilis-Borok, V. I. & Ranzman, E. Ya. 1972, "On criteria of high seismicity", *Doklady Acad. Sci. SSSR*, vol. 202, no. 6, pp. 1317-1320.
47. Gelfand, I. M., Guberman, Sh. A., Izvekova, M. L., Keilis-Borok, V. I. & Ranzman, E. Ya. 1973, "Recognition of earthquake-prone areas. I. Pamir and Tien Shan", *Vyuchislitelnye i statisticheskie metody interpretatsii seismicheskikh dannyykh* (Computational and Statistical Methods of Seismic Data Interpretation), Nauka, Moscow, pp. 107-133 (Comput. Seismol.; 6).
48. Gelfand, I. M., Guberman, Sh. A., Zhidkov, M. P., Keilis-Borok, V. I. & Ranzman, E. Ya. 1974a, "Recognition of earthquake-prone areas. II. Four regions of Asia Minor and South-Eastern Europe", *Mashinnyi analiz tsyufrovyykh seismicheskikh dannyykh* (Computer Analysis of Digital Seismic Data), Nauka, Moscow, pp. 3-40 (Comput. Seismol.; 7).

49. Gelfand, I. M., Guberman, Sh. A., Zhidkov, M. P., Keilis-Borok, V. I., Ranzman, E. Ya. & Rotwain, I. M. 1974b, "Recognition of earthquake-prone areas. III. The case when the boundaries of disjunctive nodes are unknown", *Mashinnyi analiz tsyufrovyykh seismicheskikh dannykh* (Computer Analysis of Digital Seismic Data), Nauka, Moscow, pp. 41-64 (Comput. Seismol.; 7).
50. Gelfand, I. M., Guberman, Sh. A., Keilis-Borok, V. I., Knopoff, L., Press, F., Ranzman, I. Ya., Rotwain, I. M. & Sadovsky, A.M. 1976, "Conditions for the occurrence of strong earthquakes (California and some other regions)", *Issledovanie seismichnosti i modelei Zemli* (Investigation of seismicity and Earth models), Nauka, Moscow, pp. 3-91 (Comput. Seismol.; 9).
51. Glasko, M. P. & Ranzman, E. Ya. 1992, "On morphostructural nodes - sites of activation of modern relief-forming processes", *Geomorfologiya* (Geomorphology), no. 4, pp. 53-61.
52. Gorshkov, A. I., Caputo, M., Keilis-Borok, V. I., Oficerova, E. I., Ranzman, E. Ya. & Rotwain, I. M. 1979, "Recognition of earthquake-prone areas. IX. Italy ($M \geq 6.0$)", *Teoriya i analiz seismologicheskikh nabljudenii* (Theory and Analysis of Seismological Observations), Nauka, Moscow, pp. 3-17 (Comput. Seismol.; 12).
53. Gorshkov, A. I., Zhidkov, M. P., Ranzman, E. Ya., & Tumarkin, A. G. 1991, "Morphostructure of the Lesser Caucasus and the location of earthquakes, $M \geq 5.5$ ", *Izv. Acad. Sci. SSSR. Fizika Zemli*, no. 6, pp. 30-38.
54. Gorshkov, A. I. 2010, *Raspoznavanie mest silnykh zemletryasenii v Alpiisko-Gimalaiskom poyase* (Recognition of Places of Strong Earthquakes in the Alpine-Himalayan Belt), KRASAND, Moscow (Comput. Seismol.; 40).
55. Gorshkov, A. I., Soloviev, A. A. & Zharkikh, Yu. I. 2017, "A Morphostructural Zoning of the Mountainous Crimea and the Possible Locations of Future Earthquakes", *Journal of Volcanology Seismology*, vol. 11, no. 6, pp. 407-412. doi: 10.1134/S0742046317060021
56. Gorshkov, A. I., Soloviev, A. A. & Zharkikh, Yu. I., 2018, "Recognition of strong earthquake prone areas in the Altai-Sayan-Baikal region. *Doklady Earth Sciences*, vol. 479, no. 1, pp. 412-414. doi: 10.1134/S1028334X1803025X
57. Gurvich, V. A. & Kossobokov, V. G. 1984, "On the connection between volcanism and the difference in heights with the epicenters of the strongest earthquakes", *Matematicheskoe modelirovanie i interpretatsiya geofizicheskikh dannykh* (Mathematical Modeling and Interpretation of Geophysical Data), Nauka, Moscow, pp. 88-93 (Comput. Seismol., 16).
58. Zhidkov, M. P. & Kossobokov, V. G. 1978, "Recognition of earthquake-prone areas. XIII. Intersections of lineaments of the east of Central Asia", *Intepretatsiya dannykh seismologii i geotectoni* (Interpretation of Seismology and Geotectonics Data), Nauka, Moscow, pp. 48-71 (Comput. Seismol., 11).
59. Zhidkov, M. P., Tumarkin, A. G. & Filimonov, M. B. 1990, "Recognition of earthquake-prone areas. XVII. General criteria for the high seismicity of the mountain belt of the Andes of South America ($M \geq 7.0$)", *Comp'yuternyy analiz geofizicheskikh polei* (Computer Analysis of Geophysical Fields), Nauka, Moscow, pp. 274-284 (Comput. Seismol.; 23).
60. Keilis-Borok, V. I., Kossobokov, V. G. & Mazhenov, S. A. 1989, "C.A. On the similarity in the spatial distribution of seismicity", *Teoriya i algoritmy interpretatsii geofizicheskikh dannykh* (Theory and Algorithms for Geophysical Data Interpretation), Nauka, Moscow, pp. 28-40 (Comput. Seismol.; 22).

61. Kossobokov, V. G. & Rotwain, I. M. 1977, "Recognition of earthquake-prone areas. VI. Magnitude $M \geq 7,0$ ", *Raspoznavanie i spektralnyi analiz v seismologii* (Recognition and Spectral Analysis in Seismology), Nauka, Moscow, pp. 3-18 (Comput. Seismol., 10).
62. Kossobokov, V. G. 1982, "Recognition of places of strong earthquakes in the east of Central Asia and Anatolia by the Hamming method", *Matematicheskie modeli stroeniya Zemli i prognoza zemletryasenii* (Mathematical Models of Earth Structure and Earthquake Prediction), Nauka, Moscow, pp. 76-81 (Comput. Seismol., 14).
63. Kossobokov, V. G., & Mazhenov, S. A. 1992, "Intensity of the earthquake flow in the focal area", *Doklady Akademii nauk Respubliki Kazakhstan*, no.1. pp. 53-57.
64. Kossobokov, V. G. & Nekrasova, A. K. 2004, "Unified scaling law for earthquakes: global map of parameters", *Analiz geodinamicheskikh i seismicheskikh protsessov* (The Analysis of Geodynamic and Seismic Processes), GEOS, Moscow, pp. 160-175 (Comput. Seismol., 35).
65. Kossobokov, V. G. & Nekrasova, A. K. 2012, "Global Seismic Hazard Assessment Program maps are misleading", *Seismic Instruments*, vol. 48, no. 2, pp. 162-170.
66. Kossobokov, V. G. & Soloviev, A. A. 2015, "Evaluating the results of testing algorithms for prediction of earthquakes", *Doklady Earth Sciences*, vol. 460, no. 2, pp. 192-194. doi: 10.1134/S1028334X15020208
67. Ranzman, E. Ya. 1979, *Mesta zemletryasenii i morfostruktura gornyykh stran* (Places of Earthquakes and Morphostructure of Mountain Countries), Nauka, Moscow.
68. Romashkova, L. L. & Kossobokov, V. G. 2001, "Dynamics of seismic activity before and after the strongest earthquakes of the World, 1985-2000", *Problemy dinamiki litosfery i seismichnosti* (Problems in the Lithosphere Dynamics and Seismicity), GEOS, Moscow, pp. 162-189 (Comput. Seismol., 32).
69. Sadovsky, M. A., Bolkhovitinov, L. G. & Pisarenko V. F. 1982, "On the property of discreteness of rocks", *Izv. Acad. Sci. SSSR. Fizika Zemli*, no. 12, pp. 3-18.
70. Sadovsky, M. A., Golubeva, T. V., Pisarenko V. F. & Shnirman, M. G. 1984, "The characteristic dimensions of the rock and the hierarchical properties of seismicity", *Izv. Acad. Sci. SSSR. Fizika Zemli*, no. 2, pp. 3-15.
71. Soloviev, A. A., Novikova, O. V., Gorshkov, A. I. & Piotrovskaya, E. P. 2013, "Recognition of potential sources of strong earthquakes in the Caucasus region using GIS technologies", *Doklady Earth Sciences*, vol. 450, no. 2, pp. 658-660. doi: 10.1134/S1028334X13060159
72. Soloviev, A. A., Gvishiani, A. D., Gorshkov, A. I., Dobrovolsky, M. N. & Novikova, O. V. 2014, "Recognition of earthquake-prone areas: Methodology and analysis of the results", *Izvestiya. Physics of the Solid Earth*, vol. 50, no. 2, pp. 151-168. doi: 10.1134/S1069351314020116
73. Soloviev, A. A., Gorshkov, A. I. & Soloviev, A. A. 2016, "Application of the data on the lithospheric magnetic anomalies in the problem of recognizing the earthquake prone areas", *Izvestiya. Physics of the Solid Earth*, vol. 52, no. 6, pp. 803-809. doi: 10.1134/S1069351316050141
74. Soloviev, A. A. & Gorshkov, A. I. 2017, "Modeling the dynamics of the block structure and seismicity of the Caucasus", *Izvestiya. Physics of the Solid Earth*, vol. 53, no. 3, pp. 321-331. doi: 10.1134/S1069351317030120

-
75. Federal State Statistics Service 2016, "Population of the Russian Federation for municipalities on January 1, 2016", FSSS, Moscow, Russian Federation, Available at: http://www.gks.ru/free_doc/doc_2016/bul_dr/mun_obr2016.rar.
 76. Fu, K. 1977, *Strukturnyue metody v raspoznavanii obrazov* (Syntactic Methods in Pattern Recognition), Mir, Moscow.
 77. Alekseevskaya, M. A., Gabrielov, A. M., Gvishiani, A. D., Gelfand, I. M. & Ranzman, E. Ya. 1977, "Formal morphostructural zoning of mountain territories", *J. Geophys.*, vol. 43, pp. 227-233.
 78. Bak, P., Christensen, K., Danon, L. & Scanlon, T. 2002, "Unified scaling law for earthquakes", *Phys. Rev. Lett.*, vol. 88, pp. 178501–178504.
 79. Beauval, C., Bard, P.-Y., Hainzl, S. & Gue ´guen P. 2008, "Can strong-motion observations be used to constrain probabilistic seismic-hazard estimates?", *Bull. Seismol. Soc. Am.*, vol. 98, no. 2, pp. 509-520. doi:10.1785/0120070006
 80. Ben-Zion, Y. 2008, "Collective behavior of earthquakes and faults: continuum-discrete transitions, progressive evolutionary changes, and different dynamic regimes", *Reviews Geophys.*, vol. 46, no. 4, pp. RG4006. doi:10.1029/2008RG000260
 81. Bhatia, S. C., Chetty, T. R. K., Filimonov, M., Gorshkov, A., Rantsman, E. & Rao, M. N. 1992, "Identification of potential areas for the occurrence of strong earthquakes in Himalayan arc region", *Proc. Indian Acad. Sci. (Earth Planet. Sci.)*, vol. 101, no. 4, pp. 369-385.
 82. Caputo, M., Keilis-Borok, V., Oficerova, E., Ranzman, E., Rotwain, I. & Solovjeff, A. 1980, "Pattern recognition of earthquake-prone areas in Italy", *Phys. Earth Planet. Int.*, vol. 21, pp. 305-320.
 83. Cisternas, A., Godefroy, P., Gvishiani, A., Gorshkov, A. I., Kossobokov, V., Lambert, M., Ranzman, E., Sallantin, J., Soldano, H., Soloviev, A. & Weber C. 1985, "A dual approach to recognition of earthquake prone areas in the Western Alps", *Annales Geophysicae*, vol. 3, no.2, pp. 249-270.
 84. Davis, C., Keilis-Borok, V., Kossobokov, V. & Soloviev, A. 2012, "Advance prediction of the March 11, 2011 Great East Japan Earthquake: A missed opportunity for disaster preparedness", *Int. J. Disaster Risk Reduction*, vol. 1, pp. 17-32. doi: 10.1016/j.ijdr.2012.03.001
 85. Dubois, J. & Gvishiani, A. 1998, *Dynamic Systems and Dynamic Classification Problems in Geophysical Applications*, Springer-Verlag, Paris.
 86. Gelfand, I. M., Guberman, Sh., Izvekova, M. L., Keilis-Borok, V. I. & Ranzman, E. Ia. 1972, "Criteria of high seismicity determined by pattern recognition", *Tectonophysics*, vol. 13, no. 1-4, pp. 415-422.
 87. Gelfand, I. M., Guberman, Sh. A., Keilis-Borok, V. I., Knopoff, L., Press, F., Ranzman, I. Ya., Rotwain, I. M. & Sadovsky, A. M. 1976, "Pattern recognition applied to earthquake epicenters in California", *Phys. Earth Planet. Inter.*, vol. 11, pp. 227-283.
 88. Giardini, D. 1999, "The global seismic hazard assessment program (GSHAP) – 1992/1999", *Ann. Geophys.*, vol. 42, pp. 957-974.

89. Gorshkov, A. I., Panza, G. F., Soloviev, A. A. & Aoudia A. 2002, "Morphostructural zonation and preliminary recognition of seismogenic nodes around the Adria margin in peninsular Italy and Sicily", *J. Seismol. Earthquake Engineering*, vol. 4, no. 1, pp. 1-24.
90. Gorshkov, A., Kossobokov & V., Soloviev, A. 2003, "Recognition of Earthquake-Prone Areas", *Nonlinear Dynamics of the Lithosphere and Earthquake Prediction*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, pp. 239-310.
91. Gorshkov, A. I., Panza, G. F., Soloviev, A. A. & Aoudia, A. 2004, "Identification of seismogenic nodes in the Alps and Dinarides", *Bolletino della Societa Geologica Italiana*, vol. 123, no.1, pp. 3-18.
92. Gorshkov, A. I., Panza, G. F., Soloviev, A. A., Aoudia, A. & Peresan, A. 2009, "Delineation of the geometry of nodes in the Alps-Dinarides hinge zone and recognition of seismogenic nodes ($M \geq 6$)", *Terra Nova*, vol. 21, pp. 257-264.
93. Gorshkov, A. I., Soloviev, A. A., Jiménez, M. J., García-Fernández, M. & Panza, G. F. 2010, "Recognition of earthquake-prone areas ($M \geq 5.0$) in the Iberian Peninsula", *Rendiconti Lincei*, vol. 21, no.2, pp. 131-162.
94. Gridded Population of the World, Version 3 (GPWv3) 2005, *Socioeconomic Data and Applications Center (SEDAC)*, Columbia University, Palisades, NY, Available at: <http://sedac.ciesin.columbia.edu/gpw>.
95. Gvishiani, A. D. 1982a, "Earthquake-prone areas in the Andes", *Revista Geofisica Instituto Panamericano de Geografia e Historia*, no.17, pp. 105-111.
96. Gvishiani, A. D. 1982b, "Prevision des tremblements de terre et stabilite de la classification", *Presentee par Jean Coulomb., Compte-rendus a l'Academi Sciences., Paris.*, vol. 294, serie 11, pp. 749-752.
97. Gvishiani, A. D. & Soloviev, A. A. 1984, "Recognition of places on the Pacific coast of the South America where strong earthquakes may occur", *Earthquake. Predict. Res.*, vol. 2, pp. 237-243.
98. Gvishiani, A., Gorshkov, A., Kossobokov, V., Cisternas, A., Philip, H. & Weber, C. 1987, "Identification of seismically dangerous zones in the Pyrenees", *Annales Geophysicae*, vol. 5B, no. 6, pp. 681-690.
99. Gvishiani, A., Tumarkin, A. G., Zhizhin, M. N. & Schenk, V. 1988, "Pattern recognition of the macroseismic significance of the parameters of strong earth tremors", *Seismic Risk Assessment and Design of Building Structures*, Omega Scientific.
100. Gvishiani, A., Bonnin, J., Zhizhin, M. & Mohammadioun, B. 1991, "Strong motion data classification using syntactic pattern recognition", *Proceedings of the Fourth International Conference on Seismic Zonation. Stanford, California*, vol. 2, pp. 549-555.
101. Gvishiani, A., Zhizhin, M., Rouland, D., Mohammadioun, B. & Bonnin, J. 1994, "Identification of a geological region for earthquakes using syntactic pattern recognition of seismograms", *Natural Hazards*, vol. 10, pp. 139-147.
102. Gvishiani, A., Zhizhin, M., Rouland, D., Mohammadioun, B., Bonnin, J. & Madariaga, R. 1995, "Syntactic pattern recognition scheme (SPARS) applied to seismological waveforms analysis", *Cahiers du Centre Europeen de Geodynamique et de Seismologie*, vol. 9, pp. 17-26.

103. Gvishiani, A., Zhizhin, M., Dubois, J. & Battaglia, J. 1997, "Syntactic recognition of magnetic anomalies along the Mid-Atlantic Ridge", *C.R. Acad. Sci. Paris. Sciences de la terre et des planets / Earth & Planetary Sciences*, pp. 983-990.
104. Gvishiani, A. & Dubois, J. 2002, *Artificial Intelligence and Dynamic Systems for Geophysical Applications*, Springer-Verlag, Paris.
105. Gvishiani, A. D., Agayan, S. M., Bogoutdinov, Sh. R., Tikhotsky, S. A., Hinderer, J., Bonnin, J. & Diamant, M. 2004, "Algorithm FLARS and recognition of time series anomalies", *System Research & Information Technologies*, no. 3, pp. 7-16.
106. Gvishiani, A., Dobrovolsky, M., Agayan, S. & Dzeboev, B. 2013, "Fuzzy-based clustering of epicenters and strong earthquake-prone areas", *Environmental Engineering and Management Journal*, vol. 12. no. 1, pp. 1-10.
107. Keilis-Borok, V. I. & Kossobokov, V. G. 1990, "Premonitory activation of earthquake flow: algorithm M8", *Phys. Earth Planet. Inter.*, vol. 61, no. 1-2, pp. 73-83.
108. Keilis-Borok, V. I. & Rotwain, I. M. 1990, "Diagnosis of Time of Increased Probability of strong earthquakes in different regions of the world: algorithm CN", *Phys. Earth Planet. Inter.*, Vol. 61, no.1-2, pp. 57-72.
109. Kondorskaya, N. V., Shebalin, N. V., Khrometskaya, Ya. A. & Gvishiani, A. D. 1982, *New catalog of strong earthquakes in the U.S.S.R. from ancient times through 1977*, World Data Center A for Solid Earth Geophysics, Report SE-31.
110. Kossobokov, V. G. & Romashkova, L. L. 2005, "Seismicity dynamics prior to and after the largest earthquakes worldwide, 1985-2000", *Computational Seismology and Geodynamics*, vol. 7, Am. Geophys. CityUn., Washington, D.C., pp. 138-160. doi: 10.1029/CS007p0138
111. Kossobokov, V. G., Lepreti, F. & Carbone, V. 2008, "Complexity in sequences of Solar flares and earthquakes", *Pure Appl. Geophys.*, vol. 165, no. 3-4, pp. 761-775. doi: 10.1007/s00024-008-0330-z
112. Kossobokov, V. G. 2013, "Earthquake prediction: 20 years of global experiment", *Natural Hazards*, vol. 69, pp. 1155-1177. doi: 10.1007/s11069-012-0198-1
113. Kossobokov, V., Peresan A. & Panza, G. F. 2015, "Reality check: Seismic hazard models you can trust", *EOS. Earth & Space Sci. News, July 2015*, vol. 96, no. 13, pp. 9-11. doi: 10.1029/2015EO031919
114. Kossobokov, V. G. & Nekrasova, A. K. 2018, "Earthquake hazard and risk assessment based on Unified Scaling Law for Earthquakes: Greater Caucasus and Crimea", *J. Seismology*, vol. 22, pp. 1157-1169. doi: 10.1007/s10950-018-9759-4
115. Nekrasova, A., Kossobokov, V., Peresan, A. & Magrin, A. 2014, "The comparison of the NDSHA, PSHA seismic hazard maps and real seismicity for the Italian territory", *Natural Hazards*, vol. 70, no. 1, pp. 629-641. doi: 10.1007/s11069-013-0832-6
116. Nekrasova, A., Kossobokov, V., Parvez, I. A. & Tao, X. 2015, "Seismic hazard and risk assessment based on the unified scaling law for earthquakes", *Acta Geodaetica et Geophysica*, vol. 50, no. 1, pp. 21-37. doi: 10.1007/s40328-014-0082-4
117. Okubo, P. G. & Aki, K. 1987, "Fractal geometry in the San Andreas Fault system", *J. Geophys. Res.*, vol. 92, no. B1, pp. 345-356.

118. Panza, G. F., Romanelli, F. & Vaccari, F. 2001, "Seismic wave propagation in laterally heterogeneous anelastic media: theory and applications to seismic zonation", *Adv. Geophys.*, vol. 43, pp. 1-95.
119. Panza, G., Irikura, K., Kouteva-Guentcheva, M., Peresan, A., Wang, Z. & Saragoni, R. (Eds.) 2011, "Advanced Seismic Hazard Assessment", *Pure Appl. Geophys.*, vol. 168, no. 1-4, pp. 1-752.
120. Panza, G. F., Peresan, A. & La Mura, C. 2013, "Seismic hazard and strong ground motion: an operational neo-deterministic approach from national to local scale", *UNESCO-EOLSS Joint Committee (Ed.), Encyclopedia of Life Support Systems (EOLSS), Geophysics and Geochemistry. Developed under the Auspices of the UNESCO*, Eolss Publishers, CityOxford, UK., pp. 1-49.
121. Panza, G. F., Kossobokov, V., Peresan, A. & Nekrasova, A. 2014, "Chapter 12. Why are the standard probabilistic methods of estimating seismic hazard and risks too often wrong?", *Earthquake Hazard, Risk, and Disasters*, Elsevier, London. pp. 309-357.
122. Parvez, I. A., Vaccari, F. & Panza, G. F. 2003, "A deterministic seismic hazard map of India and adjacent areas", *Geophys. J. Int.*, vol. 155, pp. 489-508.
123. Paskaleva, I., Dimova, S., Panza, G. F. & Vaccari, F. 2007, "An earthquake scenario for the microzonation of Sofia and the vulnerability of structures designed by use of the Eurocodes", *Soil Dyn. Earthquake Eng.*, vol. 27, pp. 1028-1041.
124. Peresan, A., Zuccolo, E., Vaccari, F., Gorshkov, A. & Panza G.F. 2011, "Neo-deterministic seismic hazard and pattern recognition techniques: Time-dependent scenarios for North-Eastern Italy", *Pure Appl. Geophys.*, vol. 168, no. 3-4, pp. 583-607, doi:10.1007/s00024-010-0166-1.
125. Rotwain, I. & Novikova O. 1999, "Performance of the earthquake prediction algorithm CN in 22 regions of the world", *Phys. Earth Planet. Inter.*, vol. 111, no. 3-4, pp. 207-213.
126. Shearer, P.M. 2012, "Self-similar earthquake triggering, Bath's law, and foreshock/aftershock magnitudes: Simulations, theory, and results for southern California", *J. Geophys. Res. – Solid Earth*, vol. 117, no. B6, pp. B06310. doi: 10.1029/2011jb008957
127. Utsu, T., Ogata, Y. & Matsu'ura, R. S. 1995, "The centenary of the Omori formula for a decay law of aftershock activity", *J. Phys. Earth*, vol. 43, no. 1, pp. 1-33.
128. Vaccari, F., Peresan, A., Zuccolo, E., Romanelli, F., Marson, C., Fiorotto, V. & Panza, G. F. 2009, "Neo-deterministic seismic hazard scenarios: application to the engineering analysis of historical buildings", *Proceedings of PROHITECH 2009-Protection of Historical Buildings Mazzolani*, Taylor & Francis Group, London, pp. 1559-1564.
129. Wyss, M., Nekrasova, A. & Kossobokov, V. 2012, "Errors in expected human losses due to incorrect seismic hazard estimates", *Natural Hazards*, vol. 62, no. 3, pp. 927-935. doi: 10.1007/s11069-012-0125-5

Получено 27.07.2018

Принято в печать 22.10.2018

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 19. Выпуск 4

УДК 51-73:537, 519.63

DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-4-91-102

Численное моделирование параметров полярной ионосферы¹

Лукьянова Рената Юрьевна — доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, Геофизический центр РАН.

e-mail: r.lukianova@gcras.ru

Аннотация

В статье дается обзор разработанных трех численных моделей для расчета электродинамических параметров высокоширотной ионосферы Земли. Модель глобального распределения ионосферного электрического потенциала, построенная на основе решения краевой задачи о растекании ионосферных токов, позволяет рассчитать траектории конвекции ионосферной плазмы в северном и южном полушариях. Модель высокоширотной ионосферы позволяет оперативно рассчитывать трехмерную структуру электронной плотности в диапазоне высот 120–500 км при различных гелио-геофизических условиях. Учитывается определяющая роль электрических полей магнитосферного происхождения. Концентрация основных ионосферных ионов определяется решением уравнения фотохимического баланса и конвективно-диффузионного уравнения вдоль траектории конвекции плазменных трубок с учётом параметров термосферы. Разработана методика и алгоритмы численного расчета распределения магнитного поля над ионосферой, которое создается электрическими токами магнитосферного происхождения. Модель базируется на решении уравнения для векторного магнитного потенциала и позволяет рассчитать двумерную картину магнитных вариаций.

Ключевые слова: Ионосфера, Электродинамика, Электронная плотность, Численное моделирование, Дифференциальные уравнения, Итерационные методы

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:

Р. Ю. Лукьянова. Численное моделирование параметров полярной ионосферы // Чебышевский сборник, 2018, т. 19, вып. 4, с. 91–102.

¹Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда (проект 16-17-00121)).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 19. No. 4

UDC 51-73:537, 519.63

DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-4-91-102

Numerical modeling of the polar ionosphere parameters

Lukyanova Renata Yurievna — D.Sc., Principal research scientist, Geophysical Center RAS.
e-mail: r.lukianova@gcras.ru

Abstract

An overview of the three numerical models for calculating the electrodynamic parameters of the Earth's high-latitude ionosphere is presented. The model of the global distribution of the ionospheric electric potential, constructed on the basis of the solution of the boundary value problem on the spreading of ionospheric currents, makes it possible to calculate the trajectories of convection of the ionospheric plasma in the northern and southern hemispheres. The model of the high-latitude ionosphere allows calculating the three-dimensional structure of the electron density in the altitude range of 120-500 km under various helio-geophysical conditions. Importance of the electric fields of magnetospheric origin is stressed. Concentration of the main ionospheric ions is determined by the solution of the photochemical balance equation and the convective-diffusion equation along the trajectory of the plasma tube convection, taking into account the parameters of the thermosphere. A methodology and algorithms for calculating the distribution of magnetic field over the ionosphere, which is created by electric currents of magnetospheric origin, are developed. The model is based on the solution of the equation for the vector magnetic potential and makes it possible to calculate a two-dimensional picture of the magnetic variations.

Keywords:

Bibliography: 15 titles.

For citation:

R. Yu. Lukyanova, 2018, "Numerical modeling of the polar ionosphere parameters", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 4, pp. 91–102.

1. Введение

При взаимодействии плазмы солнечного ветра и межпланетного магнитного поля с земным диполем в ионосфере и магнитосфере Земли генерируются мощные электрические поля и токи. Электродинамические процессы, происходящие в ионосферно-магнитосферной системе, оказывают значительное влияние на функционирование современных технологических систем на Земле и в космосе. Они являются источниками спорадических возмущений геомагнитного поля, особенно интенсивных в полярных регионах, в Арктике и Антарктике. Изучение электродинамики верхней атмосферы Земли важно для понимания солнечно-земных связей, а разработка инструментов прогнозирования имеет прикладное значение для определения, например, условий распространения радиоволн в высоких широтах и предупреждения сбоев в системах электроснабжения вследствие индукционных токов.

Последние десятилетия характеризуются интенсивным развитием космических и наземных систем наблюдения за электродинамическими параметрами ионосферы и магнитосферы. Статистический анализ большого количества полученных данных позволяет строить эмпирические модели, описывающие усредненные состояния окружающей среды [1, 2, 3, 4]. С другой стороны, эффективным способом количественного описания глобального распределения параметров является математическое моделирование, основанное на решении уравнений, описывающих физические процессы, происходящие в ионосферно-магнитосферной системе. В отличие от эмпирических математические модели позволяют не только воспроизводить фоновые, достаточно спокойные условия, но и дают возможность проводить численные эксперименты, в которых входные параметры задаются в широких пределах, что важно для прогнозирования экстремальных ситуаций.

В течение нескольких лет в ГЦ РАН проводились работы по развитию семейства численных физико-математических моделей для исследования электродинамики высокоширотной ионосферы. Основными компонентами этого семейства являются (*) модель распределения магнитного поля на верхней границе ионосферы, которое создается электрическими токами магнитосферного происхождения; (*) модель распределения электрического потенциала в ионосфере Земли в глобальной постановке, т.е. при учете электродинамической связи между ионосферными оболочками северного и южного полушарий; (*) модель распределения концентрации электронов в диапазоне высот 120-500 км. В статье дается обзор полученных результатов.

2. Общая схема расчетной области

Общая схема расчетной области, аппроксимирующей ионосферу Земли, представлена на Рис. 1. Ионосфера представляет собой сферическую оболочку конечной толщины, нижняя поверхность которой находится на высоте 120 км от поверхности Земли, а верхняя – на высоте 500 км. Продольные электрические токи, которые генерируются в пограничных слоях магнитосферы (вне расчетной области), втекают и вытекают из ионосферы в высокоширотных областях и растекаются по всей нижней поверхности ионосферной оболочки, проводимость которой неоднородна. С высотой проводимость ионосферы не меняется, на нижней поверхности она задается в виде интегральной по высоте величины. Продольные токи, текущие вдоль силовых линий геомагнитного поля, являются источником электрического потенциала на нижней границе ионосферы. Эти же токи являются источником магнитного потенциала на верхней границе. На рис. 1 нижняя ионосферная оболочка разделена на три области: северная и южная полярные шапки, где силовые линии геомагнитного поля разомкнуты и вытянуты далеко в хвост магнитосферы, и остальная часть сферы, где силовые линии опираются на сопряженные точки в северном и южном полушариях.

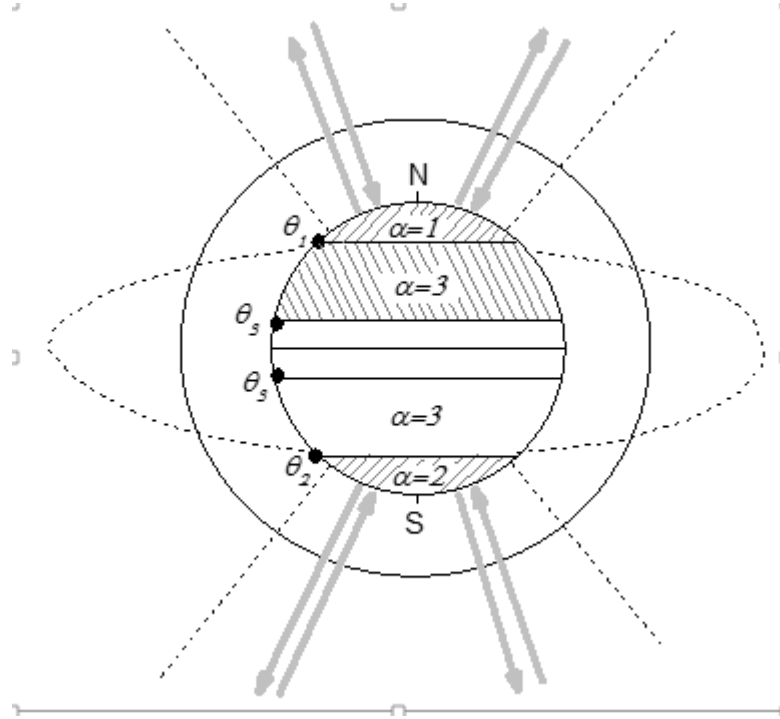


Рис. 1: Схема расчетной области для ионосферы. Двумя concentric окружностями показаны верхняя и нижняя границы ионосферы. Пунктирные линии обозначают замкнутые в среднеширотной области и разомкнутые в полярных шапках силовые линии магнитного диполя. Толстые серые стрелки в северной и южной полярных шапках обозначают продольные токи, втекающие и вытекающие из ионосферы. Сплошными горизонтальными линиями показаны границы полярных шапок, приэкваториальные границы среднеширотных областей и магнитный экватор. Буквы, обозначающие границы и заштрихованные области относятся к модели электрического потенциала (см. раздел 4)

3. Моделирование магнитного поля, создаваемого продольными токами над ионосферой

Магнитное поле, которое создается продольными токами на верхней границе ионосферы, измеряется низколетящими спутниками с полярной орбитой. Обычно это три компоненты поля: зональная, меридиональная и вертикальная. Спутник может измерять поле только в точках своей траектории [5]. Для получения общей картины распределения магнитного поля и верификации спутниковых измерений была разработана алгоритм численного расчета распределения магнитного потенциала. Модель базируется на решении уравнения

$$\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A} \text{ при дополнительном условии } \text{div} \mathbf{A} = 0 \quad (1)$$

где $\mathbf{B}$ – вектор индукции магнитного поля, которое создается электрическим током, $\mathbf{A}$ – векторный магнитный потенциал.

Уравнение 1 записывается в сферических координатах θ, φ, r , где θ – геомагнитная широта, φ – долгота, r – радиус Земли + 120 км, и дискретизируется на сетке с шагом $\Delta\theta, \Delta\varphi$. Продольный ток $\mathbf{j}$, создающий магнитное поле $\mathbf{B}$, в высоких широтах земного шара направлен практически перпендикулярно к ионосферной оболочке. Тогда из выражения $\mathbf{B} = \text{rot} A((\theta, \varphi)\mathbf{e}_r$ широтная и долготная компоненты индукции определяются как

Для прямоугольного контура с центром в точке сетки, периметром L , площадью s и плот-

ностью тока внутри контура j можно записать:

$$B_\varphi = -\frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial \theta}, \quad B_\theta = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A}{\partial \varphi} \quad (2)$$

$$\oint_L \frac{1}{\mu} B_l dl - \frac{4\pi}{c} \int_s j ds = 0 \quad (3)$$

Компоненты $\mathbf{B}$ для узла (i, j) , находящегося в центре единичного контура с угловыми точками (1234), дискретизируются через компоненты $\mathbf{A}$:

$$\begin{aligned} (B_\varphi)_1 &= -\frac{A_{ij} - A_{i-1j}}{r \Delta \theta} \\ (B_\varphi)_2 &= -\frac{A_{i+1j} - A_{ij}}{r \Delta \theta} \\ (B_\theta)_3 &= \frac{1}{r \sin \theta_i} \frac{A_{ij} - A_{ij-1}}{\Delta \varphi} \\ (B_\theta)_3 &= \frac{1}{r \sin \theta_i} \frac{A_{ij+1} - A_{ij}}{\Delta \varphi} \end{aligned} \quad (4)$$

Итерационное уравнение для A записывается как

$$\begin{aligned} A_{ij}^{(n+1)} &= A_{ij}^{(n)} - \Delta A_{ij}^{(n,n+1)} \\ \Delta A_{ij}^{(n,n+1)} &= \omega \frac{f_{ij} \left(A_{11}^{n+1}, \dots, A_{ij}^{(n+1)}, A_{ij}^{(n)}, \dots \right)}{\frac{\partial}{\partial A_{ij}^{(n)}} f_{ij} \left(A_{11}^{n+1}, \dots, A_{ij}^{(n+1)}, A_{i-1j}, A_{ij}^{(n)} \right)} \end{aligned} \quad (5)$$

где f – левая часть уравнения, w – параметр релаксации, n – номер итерации.

Двумерное распределение $\mathbf{A}$ однозначно определяет значения широтной и долготной компонент $\mathbf{B}$ в каждой точке расчетной сетки. Задавая произвольное распределение продольных токов j , можно получить картину создаваемого этими токами магнитного поля на высотах верхней границы ионосферы. Для решения задачи был разработан алгоритм, реализованный в программном модуле на языке Fortran. Задача решалась на сетке с шагом $\Delta \theta, \Delta \varphi = 0.5^\circ$, покрывающей полярную область от полюса до магнитной широты 60° при различных распределениях входных параметров.

4. Численная модель глобального распределения электрического потенциала в ионосфере Земли

Трехмерное уравнение непрерывности электрических токов, обеспечивающих магнитосферно-ионосферное взаимодействие, записывается как

$$\text{div} \mathbf{J} = j \cdot \sin \chi \quad (6)$$

где $\mathbf{J}$ – интегральные горизонтальные токи, текущие в ионосфере, j – продольные токи, текущие вдоль силовых линий геомагнитного поля и в высоких широтах практически перпендикулярные к ионосферной оболочке, χ – магнитное наклонение.

Согласно постановке задачи, ионосфера разделена на три области (см. рис. 1): северная и южная полярные шапки и средние широты, где силовые линии геомагнитного поля замкнуты

[6]. На рис. 1 границы этих областей обозначены как θ_1 , θ_2 и θ_3 , а сами области заштрихованы (из среднеширотных – только северная) и обозначены как $\alpha = 1, 2, 3$. Индекс 1 соответствует северной полярной шапке с экваториальной границей на $\theta = \theta_1$; индекс 2 – южной полярной шапке с границей на $\theta = \theta_2$; индекс 3 – среднеширотной области с границами на $\theta = \theta_1$ и $\theta = \theta_3$. Постановка задачи учитывает электродинамическое сопряжение ионосфер противоположных полушарий. Внутри северной и южной полярных шапок процесс растекания горизонтальных ионосферных токов описывается своим уравнением непрерывности, с присущим данной шапке распределением проводимости и источников (продольных токов), в то время как вне области полярных шапок замкнутые магнитные силовые линии земного диполя эффективно выравнивают электрический потенциал в сопряженных точках противоположных полушарий. Выполнение граничных условий, отражающих неразрывность общей токовой цепи и выравнивание потенциала на границах полярных шапок, приводит к взаимозависимости распределения потенциала внутри шапок и влиянию обеих шапок на распределение потенциала в среднеширотной области.

Уравнение (6) в координатах (θ, φ) решается для северной, южной и среднеширотной областей отдельно, а соответствующие граничные условия связывают эти три области в единую систему. В средних широтах уравнение решается на половине (для определенности, северной) области с низкоширотной границей, несколько отстоящей от экватора, а в качестве интегральной проводимости и источника используются сумма проводимостей и сумма источников в сопряженных точках обоих полушарий.

Краевая задача имеет вид

$$\operatorname{div} \mathbf{J}_1 = j_1 \text{ для } \theta \leq \theta_1 \quad (7)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{J}_2 = j_2 \text{ для } \pi - \theta_1 \leq \theta < \pi \quad (8)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{J}_3 = j_3 \text{ для } \theta_1 \leq \theta \leq \theta_3 \quad (9)$$

Граничные условия:

$$U_1(\theta_1, \varphi) = U_3(\theta_1, \varphi) = U_2(\theta_2, \varphi) \quad (10)$$

$$J_1(\theta_1, \varphi) - J_3(\theta_1, \varphi) = J_2(\theta_2, \varphi) \quad (11)$$

$$J_3(\theta_3, \varphi) = 0, \quad (12)$$

где U_α , J_α и j – ионосферный электрический потенциал, интегральный ионосферный ток и источник возбуждения потенциала в виде продольного тока в соответствующих областях ($\alpha = 1, 2, 3$). Граничное условие (10) означает отсутствие скачка потенциала поперек границы заданной шапки и между границами противоположных шапок. Условие (11) означает, что возможные разрывы нормальной компоненты тока в плоскости (θ, φ) на границах северной и южной шапок компенсируют друг друга за счет токов перетекания из одного полушария в другое. Условие (12) соответствует отсутствию тока через экваториальную границу.

Параметры U_α и J_α связаны законом Ома:

$$\mathbf{J}_\alpha = \Sigma_\alpha (-\nabla U_\alpha), \quad (13)$$

где Σ_α – тензор интегральной по высоте ионосферной проводимости [7], т.е.

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{\theta\theta} & \Sigma_{\theta\varphi} \\ -\Sigma_{\theta\varphi} & \Sigma_{\varphi\varphi} \end{pmatrix} \quad (14)$$

$$\Sigma_{\theta\theta} = \Sigma_P / \sin^2 \chi, \Sigma_{\theta\varphi} = \Sigma_H / \sin^2 \chi, \Sigma_{\varphi\varphi} = \Sigma_P \sin \chi = 2 \cdot \cos \theta / (1 + 3 \cdot \cos^2 \theta)^{1/2},$$

где Σ_P и Σ_H – ионосферные проводимости Педерсена и Холла.

Уравнения (7) – (12) представляют собой краевую задачу, эффективным численным методом решения которой является метод конечных разностей. Для перехода к итерационной схеме вводится переменная Z_α :

$$Z_\alpha^{(n+1)} = (U_\alpha^{(n+1)} - U_\alpha^{(n)}) / \tau^{(n+1)} \quad (15)$$

где τ – релаксационный параметр [8], n – номер итерации, $U^{(n+1)}$ и $U^{(n)}$ – решения в соответствующих областях ($\alpha = 1, 2, 3$), соответственно на итерациях n и $(n+1)$. Из (15) видно, что если итерационный процесс сходится (т.е. $Z_\alpha^{(n+1)} \rightarrow 0$), то $U_\alpha^{(n+1)} \rightarrow U_\alpha^{(n)} \rightarrow U_\alpha$, а U_α является решением исходной задачи (7) – (12).

Уравнения (7) – (9) для переменной Z_α в итерационном виде имеют вид

$$\text{div}(-\nabla Z_\alpha^{(n+1)}) + \text{div} J_\alpha^{(n)} = j_\alpha \quad (16)$$

Граничные условия 10 – 12 удовлетворяются на каждой итерации. Условие 10 в терминах Z_α (вертикальная линия обозначает границу на соответствующей границе θ) записывается как

$$Z_1^{(n+1)} \Big|_{\theta_1} - Z_2^{(n+1)} \Big|_{\theta_2} = (U_2^{(n)} \Big|_{\theta_2} - U_1^{(n)} \Big|_{\theta_1}) / \tau^{(n+1)} \quad (17)$$

$$Z_1^{(n+1)} \Big|_{\theta_1} - Z_3^{(n+1)} \Big|_{\theta_3} = (U_3^{(n)} \Big|_{\theta_3} - U_1^{(n)} \Big|_{\theta_1}) / \tau^{(n+1)} \quad (18)$$

Граничные условия (11) и (12) в итерационном виде выражаются как

$$\frac{\partial Z_1^{(n+1)}}{\partial \theta} \Big|_{\theta_1} - \frac{\partial Z_2^{(n+1)}}{\partial \theta} \Big|_{\theta_2} - \frac{\partial Z_3^{(n+1)}}{\partial \theta} \Big|_{\theta_1} = J_1^{(n)} \Big|_{\theta_1} - J_2^{(n)} \Big|_{\theta_2} - J_3^{(n)} \Big|_{\theta_1} \quad (19)$$

$$\frac{\partial Z_3^{(n+1)}}{\partial \theta} \Big|_{\theta_3} = J_3^{(n)} \Big|_{\theta_3} \quad (20)$$

Далее применяется метод разделения переменных. В левую часть уравнения (16) вводится регуляризатор R , который представляет собой угловую (θ, φ) часть оператора Лапласа [9]:

$$R \equiv \text{div}(-\nabla) \equiv -\Delta_{\theta\varphi} \quad (21)$$

Для переменной Z_α получаем

$$R Z_\alpha^{(n+1)} \equiv \text{div}(-\nabla Z_\alpha^{(n+1)}) \equiv -\Delta Z_\alpha^{(n+1)} \quad (22)$$

$$\Delta Z_\alpha^{(n+1)} = \text{div} J_\alpha^{(n)} - j_\alpha \quad (23)$$

Лапласиан допускает разделение переменных, и решение (16) можно представить в виде ряда Фурье

$$Z_\alpha^{(n+1)}(\theta, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} C_{\alpha m}(\theta) \cdot e^{im\varphi} \quad (24)$$

где $C_{\alpha m}(\theta)$ – комплексные коэффициенты Фурье, зависящие только от θ , m – номер узла сетки по долготе.

Подстановка (24) в (16) – (20) приводит к одномерной краевой задаче для $C_{\alpha m}(\theta)$:

$$\frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \cdot (\sin \theta \cdot \frac{\partial C_{\alpha m}}{\partial \theta}) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \cdot C_{\alpha m} = F_m \left\{ -j_\alpha + \text{div} J_\alpha^{(n)} \right\} \quad (25)$$

$$C_{1m}|_{\theta_1} - C_{2m}|_{\theta_2} = F_m \left\{ \frac{U_2^{(n)}|_{\theta_2} - U_1^{(n)}|_{\theta_1}}{\tau^{(n+1)}} \right\} \quad (26)$$

$$C_{1m}|_{\theta_1} - C_{3m}|_{\theta_2} = F_m \left\{ \frac{U_3^{(n)}|_{\theta_1} - U_1^{(n)}|_{\theta_1}}{\tau^{(n+1)}} \right\} \quad (27)$$

$$\frac{\partial C_{1m}}{\partial \theta} \Big|_{\theta_1} - \frac{\partial C_{2m}}{\partial \theta} \Big|_{\theta_2} = F_m \left\{ J_1^{(n)} \Big|_{\theta_1} - J_2^{(n)} \Big|_{\theta_2} - J_3^{(n)} \Big|_{\theta_1} \right\} \quad (28)$$

$$\frac{\partial C_{3m}}{\partial \theta} \Big|_{\theta_3} = F_m \left\{ J_3^{(n)} \Big|_{\theta_3} \right\} \quad (29)$$

где $F_m\{\cdot\}$ – зависящий от θ коэффициент Фурье от выражения в скобках для m -го узла сетки по долготе, а $C_{\alpha m}$ есть $C_{\alpha m}(\theta)$.

В конечно-разностном виде уравнение (25) имеет вид

$$\frac{1}{\Delta\theta \cdot \sin \theta_1} \cdot \left[\sin \theta_{i+1/2} \cdot \frac{C_{i+1} - C_i}{\Delta\theta} - \sin \theta_{i-1/2} \cdot \frac{C_i - C_{i-1}}{\Delta\theta} \right] - \frac{1}{\Delta\theta \cdot \sin \theta_i} \cdot C_i = F_i \left\{ j_\alpha + \text{div} J_\alpha^{(n)} \right\} \quad (30)$$

где $\Delta\theta$ – шаг по кошироте, i – номер узла сетки по кошироте. Значки α и m далее опущены, так что $C_{\alpha m}(\theta)$ в i -м узле сетки обозначено как C_i .

Три системы разностных уравнений вида (30) для областей, дополненные разностными аналогами граничных условий (26) – (29), приводят к связности этих систем по значениям в трех парах узлов сетки, ближайших к границам θ_1 , θ_2 и θ_3 . Для этих значений можно выделить отдельную замкнутую подсистему. После ее решения каждая из трех основных систем разностных уравнений решается методом прогонки.

Изложенные выше алгоритмы были реализованы в виде набора программ на языке Фортран. Расчеты проводились с двойной точностью. Программное средство было протестировано на ряде модельных задач [10, 11]. Сходимость оценивалась по нормам невязок

$$\varepsilon_\alpha = \left\| \text{div} J_\alpha^{(n)} - j_\alpha \right\| / \left\| \text{div} J_\alpha^{(1)} - j_\alpha \right\| \quad (31)$$

5. Численная модель распределения электронной концентрации в F области полярной ионосферы

Модель рассчитывает распределение электронной концентрации (Ne) в полярной ионосфере в области выше 50° магнитной широты [12, 13]. Основными факторами, определяющими состояние высокоширотной ионосферы, являются динамика плазмы и процессы образования и химических потерь ионов. Соответственно с этим модель состоит из двух блоков. В первом блоке с целью определить траектории, вдоль которых дрейфует плазменная трубка, рассчитываются геометрические и электродинамические параметры картин конвекции ионосферной плазмы. Скорость движения заряженной частицы определяется суммой скорости коротации и скорости дрейфа в скрещенных электрическом и магнитном полях. Так как на высотах >120 км плазма замагничена, линии конвекции совпадают с изолиниями ионосферного электрического потенциала. В рамках модели распределение электрического потенциала параметризовано и описывается соответствующими аналитическими формулами согласно [14]. Во втором блоке решается задача интегрирования по высоте конвективно-диффузионного уравнения и уравнения фотохимического равновесия в вертикальной плазменной трубке, дрейфующей под действием электрических полей магнитосферной конвекции и коротации.

Уравнения траектории конвекции записываются в геомагнитных сферических координатах θ, φ, r . Система обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающая конвективные траектории, имеет вид:

$$d\theta/dt = -2 \cdot E_\varphi(\theta, \varphi). \quad (32)$$

$$d\varphi/dt = E_\theta(\theta, \varphi). \quad (33)$$

где E_θ и E_φ – компоненты ионосферного электрического поля, которое возбуждается продольным током магнитосферного происхождения, M – магнитный момент Земли, ω – частота углового вращения Земли вокруг геомагнитной оси, $R = R_E + 200$ км, R_E – радиус Земли, t – время.

Конфигурация и плотность продольного тока j аппроксимировались аналитическими функциями в зависимости от параметров солнечного ветра.

$$j(\varphi) = \sum_m [j_m \cdot \sin(m\varphi)] \quad (34)$$

$$j(\varphi) = j_0 + \sum_m [j_m \cdot \cos(m\varphi)] \quad m = 1, \dots \quad (35)$$

Базовая картина конвекции задавалась распределением электрического потенциала Ψ , симметричным относительно меридиана полдень-полночь:

$$\Psi(\theta, \varphi) = -T(\theta)F(\varphi), \quad (36)$$

где $F(\varphi) = \sin(\varphi - \varphi_0)$ – определяет поворот картины конвекции относительно меридиана полдень-полночь, $T(\theta)$ рассчитывается интегрированием вдоль меридиана утро-вечер функции распределения электрического поля (E_{Y-B}) при условии равенства падения потенциала в полярной шапке Ψ_{PC} и в авроральной зоне. Аналитическое описание базируется на непрерывном изменении профиля E_{Y-B} , в зависимости от параметров солнечного ветра, геомагнитной активности, сезона.

Ионосферный блок описывает трёхмерное распределение Ne . В точках, расположенных вдоль траекторий конвекции, решается задача интегрирования нестационарного конвективно-диффузионного уравнения для иона кислорода O^+ :

$$\frac{\partial}{\partial t} n(O^+) = \frac{\partial}{\partial z} \left(D \cdot \frac{\partial}{\partial z} n(O^+) + R \cdot n(O^+) \right) + Q_{O^+} - L \quad (37)$$

где $n(O^+)$ – ионная концентрация, t – время, z – высота, D и R – коэффициенты, соответствующие вертикальной скорости O^+ , зависящей от скорости ионообразования, параметров термосферы, частот соударений, географических координат, значений электрического и магнитного поля, Q_{O^+} и L – скорость ионизации и потерь ионов, соответственно. Также интегрируется уравнение фотохимического равновесия для концентрации обобщенного молекулярного иона M^+ :

$$Q_{M^+} + L = \alpha \cdot n(M^+) \cdot (n(M^+) + n(O^+)), \quad (38)$$

где $n(M^+)$ – ионная концентрация, α – эффективный коэффициент рекомбинации.

На нижней границе ионосферы задаётся концентрация $n(O^+)$ из условия фотохимического равновесия, а на верхней – величина уходящего потока. Потери ионов определяются скоростью рекомбинации в химических реакциях, часть из этих реакций зависит от температуры. Для иона O^+ учитываются следующие реакции:



В уравнении (38) учтено образование иона M^+ под действием излучения (корпускулярного, связанного с высыпаниями энергичных частиц из магнитосферы, а также прямого и рассеянного солнечного УФ) и в реакции потерь O^+ .

$$n(M^+) = n(NO^+) + n(O^2) + n(N_2^+) \tag{40}$$

Скорость ионообразования за счет высыпающихся частиц рассчитывается по эмпирическим статистическим моделям для потоков электронов. Скорость образования ионов за счет солнечной радиации на различных длинах волн определяется по эмпирическим формулам. Для сокращения времени расчета параметры термосферы не моделируются внутри ионосферного блока, а задаются на основе эмпирической модели [15]. Таким образом, в ионосферном блоке при заданных гелиогеофизических условиях, дне года и моменте мирового времени рассчитывается высотное распределение Ne в любом заданном наборе точек на сетке, покрывающей высокоширотную область.

В результате расчетов для заданных входных параметров рассчитываются высотные профили Ne в точках расчетной сетки, покрывающей полярную область, а также строятся карты изолиний максимума Ne .

6. Заключение

Разработаны численные модели для расчета распределения электродинамических параметров высокоширотной ионосферы Земли. Модель глобального распределения электрического потенциала, построенная на основе решения краевой задачи о растекании ионосферных токов, позволяет рассчитать траектории конвекции ионосферной плазмы в северном и южном полушариях и выявляет возможность эффективного проникновения электрических полей, генерируемых в полярной шапке продольными токами магнитосферного происхождения, в средние широты и в противоположную полярную шапку за счет электродинамической связи полушарий.

Расчет магнитного потенциала, создаваемого продольными токами над ионосферой, позволяет моделировать общую картину распределения горизонтальных компонент магнитной индукции и может служить для верификации измерений спутниковых магнитометров, которые регистрируют компоненты поля в точках вдоль своей орбиты.

Численная модель высокоширотной ионосферы позволяет оперативно рассчитывать трехмерную структуру F-области при различных гелио-геофизических условиях. Траектории конвекции моделируются в блоке расчёта электрических полей с непрерывной зависимостью их геометрии и интенсивности от входных параметров в виде значений межпланетного магнитного поля, скорости солнечного ветра, дня года, мирового времени и уровня геомагнитной и солнечной активности. В ионосферном блоке рассчитывается высотное распределение Ne . Учитываются обобщенный молекулярный ион M^+ и ион O^+ , концентрация которых определяется соответственно решением уравнения баланса и конвективно-диффузионного уравнения вдоль траектории конвекции с учётом поля конвекции и коротации и параметров термосферы. Все модели реализованы в виде программных средств, удобных для практических приложений.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Heppner J.P., Maynard N.C. Empirical high-latitude electric field model // J.Geophys.Res. 1987. Vol. A2, № 5, P.4467-4489.
2. Papitashvili, V.O., Christiansen F., Neubert T. A new model of field-aligned currents derived from high-precision satellite magnetic field data // Geophys. Res. Lett. 2002. Vol. 29, № 14, 1683. <http://dx.doi.org/10.1029/2001GL014207>.
3. Ruohoniemi J.M., Greenwald R.A. Dependencies of high-latitude plasma convection: consideration of IMF, seasonal, and UT factors in statistical patterns // J. Geophys. Res. 2005. Vol. 110, A09204. <http://dx.doi.org/10.1029/2004JA010815>.
4. Bilitza D., McKinnell L.-A., Reinisch B.W., Fuller-Rowell T. The international reference ionosphere today and in the future // J. Geodesy. 2010, Vol. 85, P. 909-920, doi: 10.1007/s00190-010-0427-x.
5. Lukianova R., Troshichev O.A., Galperin Y.I., Jorjio N.V. Reconstruction of the FAC structure along spacecraft trajectory with regard for edge effects of current sheets // Int. J.Geomag. Aeronomy. 2001, Vol. 2, № 3. P.159-172. .
6. Лукьянова Р.Ю. Распределение электрического потенциала в ионосфере Земли с учетом электродинамической сопряженности полушарий: численная модель // *Матем. моделирование*, 2017. Т. 29, № 5. С. 122–132.
7. Брюнелли Б.Е., Намгаладзе А.А. Физика ионосферы // Л.: Наука, 1988. 526с.
8. Владимиров В.С. Уравнения математической физики // М.: Наука, 1981. 512 с.
9. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений // М.: Наука, 1978, 592 с.
10. Lukianova R., Christiansen F. Modeling of the global distribution of ionospheric electric field based on realistic maps of field-aligned currents // J. Geophys. Res. 2006. Vol. 111, A03213, doi:10.1029/2005JA011465.
11. Lukianova R., Hanuise C., Christiansen F. Asymmetric distribution of the ionospheric electric potential in the opposite hemispheres as inferred from the SuperDARN observations and FAC-based convection model // J. Atmos. Solar-Terr. Phys. 2008. Vol. 70. P. 2324-2335, doi:10.1016/j.jastp.2008.05.015.
12. Uvarov V.M., R.Yu. Lukianova, Numerical modeling of the polar F region ionosphere taking into account the solar wind conditions // Adv. Space Research, 56, 2563–2574 10.1016/j.asr.2015.10.004, 2015.
13. Lukianova R., Uvarov V.M., Coisson P. Evolution of the high-latitude F region large-scale ionospheric irregularities under different solar wind and zenith angle conditions // Adv. Space Res. 2017. Vol. 59, № 2. P. 557-570, doi:10.1016/j.asr.2016.10.010.
14. Уваров В.М., Барашков П.Д. Типы распределения электрических полей и соответствующие им типы конвекции в полярной ионосфере. Модель // Геомагнетизм и аэронамия. 1989. Т. 29. № 4. С. 621-628.
15. Hedin, A. E. MSIS-86 Thermospheric Model // J. Geophys. Res. 1987. Vol. 92, № 5. P. 4649-4662.

REFERENCES

1. Heppner J.P. Maynard N.C. 1987, "Empirical high-latitude electric field model", *J. Geophys. Res.* Vol. A2, № 5, P. 4467-4489.
2. Papitashvili, V.O., Christiansen F., Neubert T. 2002, "A new model of field-aligned currents derived from high-precision satellite magnetic field data", *Geophys. Res. Lett.* Vol. 29, № 14, 1683. <http://dx.doi.org/10.1029/2001GL014207>.
3. Ruohoniemi J.M., Greenwald R.A. 2005, "Dependencies of high-latitude plasma convection: consideration of IMF, seasonal, and UT factors in statistical patterns", *J. Geophys. Res.* Vol. 110, A09204. <http://dx.doi.org/10.1029/2004JA010815>.
4. Bilitza D., McKinnell L.-A. Reinisch B.W., Fuller-Rowell T. 2010, "The international reference ionosphere today and in the future", *J. Geodesy.* Vol. 85, P. 909-920, doi: 10.1007/s00190-010-0427-x.
5. Lukianova R., Troshichev O.A., Galperin Y.I., Jorjio N.V. 2001, "Reconstruction of the FAC structure along spacecraft trajectory with regard for edge effects of current sheets", *Int. J. Geomag. Aeronomy.* Vol. 2, № 3. P. 159-172.
6. Lukianova R.Yu. 2017, "Distribution of the electric potential in the Earth's ionosphere taking into account the electrodynamic coupling of the hemispheres: numerical model", *Math. Modeling.* Vol. 29, № 5. P. 122-132.
7. Brunelli B.E., Namgaladze A.A. 1988, *Physics of the ionosphere* L.: Nauka, 526 p.
8. Vladimirov V.S. 1981 *Equations of mathematical physics* M.: Nauka, 512 p.
9. Samarsky A.A., Nikolaev E.S. 1978, *Methods of solution of network equations* M.: Nauka, 592p.
10. Lukianova R., Christiansen F. 2006, "Modeling of the global distribution of ionospheric electric field based on realistic maps of field-aligned currents", *J. Geophys. Res.* Vol. 111, A03213, doi:10.1029/2005JA011465.
11. Lukianova R., Hanuise C., 2008, "Christiansen F. Asymmetric distribution of the ionospheric electric potential in the opposite hemispheres as inferred from the SuperDARN observations and FAC-based convection model", *J. Atmos. Solar-Terr. Phys.* Vol. 70. P. 2324-2335, doi:10.1016/j.jastp.2008.05.015.
12. Uvarov V.M., R.Yu. Lukianova, 2015, "Numerical modeling of the polar F region ionosphere taking into account the solar wind conditions", *Adv. Space Research*, 56, 2563-2574 10.1016/j.asr.2015.10.004.
13. Lukianova R., Uvarov V.M., Coisson P. 2017, "Evolution of the high-latitude F region large-scale ionospheric irregularities under different solar wind and zenith angle conditions", *Adv. Space Res.* Vol. 59, № 2. P. 557-570, doi:10.1016/j.asr.2016.10.010.
14. Uvarov V.M., Barashkov P.D. 1989 "Types of electric field distribution and corresponding types of convection in the polar ionosphere. A model", *Geomagnetizm i aeronomy.* Vol. 29. № 4. P. 621-628.
15. Hedin, A. E. 1987, "MSIS-86 Thermospheric Model", *J. Geophys. Res.* Vol. 92, № 5. P. 4649-4662.

Получено 27.07.2018

Принято в печать 22.10.2018

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 19. Выпуск 4

УДК 519.1

DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-4-103-117

Эволюционные уравнения и случайные графы¹

Лушников Алексей Алексеевич — доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, Геофизический центр РАН.

e-mail: alex.lushnikov@mail.ru

Аннотация

На примере эволюции случайного графа обсуждается подход к стохастической динамике сложных систем на основе эволюционных уравнений. Для случая графа эти уравнения описывают временные изменения в структуре графа, связанные с процессом случайного добавления в него новых связей. Такой процесс тесно связан с коалесценцией отдельных неприводимых компонент графа и ведет к появлению сингулярностей в спектрах и их моментах в течение конечных промежутков времени. Эти сингулярности возникают вследствие появления гигантской связной компоненты, порядок которой сравним с полным порядком всего графа. В работе демонстрируется метод анализа динамики процесса эволюции случайного графа, основанный на точном решении эволюционного уравнения, которое описывает зависимость от времени производящего функционала для вероятности застать в системе заданное распределение связных компонент графа. Дан вывод нелинейного интегрального уравнения для производящей функции распределения по числу связных компонент и обрисованы методы его анализа. В заключительной части обсуждены возможности применения изложенного подхода для решения ряда эволюционных проблем статистической геодинамики.

Ключевые слова: эволюционные уравнения, конечные случайные графы, циклы.

Библиография: 22 названия.

Для цитирования:

А. А. Лушников, Эволюционные уравнения и случайные графы // Чебышевский сборник, 2018, т. 19, вып. 4, с. 103–117.

¹Исследование выполнено в рамках Государственного задания ГЦ РАН.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 19. No. 4

UDC 519.1

DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-4-103-117

Evolutionary equations and random graphs

Lushnikov Alexey Alekseevich — D.Sc., Principal research scientist, Geophysical Center RAS.
e-mail: alex.lushnikov@mail.ru

Abstract

An example of the evolution of a random graph is used to discuss the approach to stochastic dynamics of complex systems based on evolutionary equations. For the case of a graph, these equations describe temporal changes in the structure of the graph associated with the process of randomly adding new bonds to it. Such a process is closely related to the coalescence of individual irreducible components of the graph and leads to the appearance of singularities in the spectra and their moments during finite time intervals. These singularities arise due to the appearance of a giant connected component whose order is comparable with the total order of the entire graph. The paper demonstrates a method for analyzing the dynamics of the process of evolution of a random graph based on the exact solution of an evolutionary equation that describes the time dependence of the generating functional for the probability of finding in the system a given distribution of connected components of the graph. A derivation of the nonlinear integral equation for the generating function distribution on the number of connected components is given and outlined the methods of its analysis. In the concluding part, the possibilities of applying this approach to solving a number of evolutionary problems of statistical geodynamics are discussed.

Keywords: evolutionary equations, finite random graphs, cycles.

Bibliography: 22 titles.

For citation:

A. A. Lushnikov, 2018, "Evolutionary equations and random graphs", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 4, pp. 103–117.

1. Введение

Многие геофизические процессы управляются случайными факторами и поэтому являются привлекательными объектами для использования аппарата эволюционных уравнений. Речь идет о необратимых процессах, в которых состояния системы меняются случайными скачками. Самый простой пример такой системы – обыкновенная диффузия частицы, которая под влиянием внешних факторов совершает случайные скачки в пространстве. В более общем случае состояния задаются векторами в фазовом пространстве, а динамика такой системы описывается уравнением вида

$$\partial_t W(Q, t) = \sum_{Q^+} A(Q^+, Q) W(Q^+, t) - W(Q, t) \sum_{Q^-} A(Q, Q^-), \quad (1)$$

где $A(Q_1, Q_2)$ скорости переходов системы из точки Q_1 фазового пространства в точку Q_2 . В простейшем случае диффузии Q – это точки обычного пространства. Величины скоростей полностью определяются физическими процессами, которые мы хотим рассмотреть. Уравнение (1) мы будем называть эволюционным уравнением. Совершенно ясно, что описанная общая схема может быть применена для решения многих задач дискретного математического анализа [1].

Мы продемонстрируем как такая общая схема может быть применена к решению знаменитой задачи об эволюции случайного графа. Речь пойдет о множестве точек, случайным образом соединяемых ребрами. Ребра добавляются по одному (в среднем) в единицу времени. Такая задача всегда решалась с использованием аппарата комбинаторного анализа, но, как оказалось, аппарат эволюционного уравнения оказался более эффективным для решения этой задачи [2, 3, 4, 5].

Для случая графа уравнение (1) описывает временные изменения в структуре графа, связанные с процессом случайного добавления в него новых ребер. Этот процесс тесно связан с коалесценцией дисперсных частиц и также ведет к появлению сингулярностей в поведении спектров и их моментов в течение конечных промежутков времени. Такие сингулярности возникают вследствие появления гигантских агломератов. В случае графа – это гигантский связный суперграф, порядок которого сравним с полным числом вершин во всем графе.

Рассмотрим набор точек соединенных между собой случайным образом линиями. Такой объект называется случайным конечным графом. Точки называются вершинами, а линии их соединяющие – ребрами. Полная классификация случайных графов и методы их анализа могут быть найдены в работах [7, 8]

Пусть M – полное число вершин в графе, а сам граф состоит из неприводимых компонент, которые не распадаются на независимые части при устранении одного ребра. Каждая реализация графа может быть охарактеризована $\{n_{g,\nu}\}$ – числом неприводимых компонент имеющих в своем составе g вершин (порядок компоненты) и ν ребер. Удобный метод генерации случайного графа – это добавление одного ребра в единицу времени к графу уже содержащему g вершин. Конечно, есть и другие способы генерации, но этот самый простой. Вновь появляющееся ребро меняет состояние графа. Ребро может соединить две неприводимые компоненты, и тогда возникнет одна компонента, порядок которой равен сумме порядков материнских компонент

$$(l, \lambda) + (m, \mu) \longrightarrow (l + m, \lambda + \mu + 1), \quad (2)$$

или ребро может соединить две вершины принадлежащие одной компоненте. Тогда на единицу изменится число ребер в этой компоненте

$$(g, \nu) \longrightarrow (g, \nu + 1). \quad (3)$$

Любая реализация случайного графа задается набором чисел заполнения $\{n_{g,\nu}\}$, числом связных компонент порядка g с ν ребрами. Задача об эволюции графа ставится следующим образом. Нужно найти зависящую от времени вероятность обнаружить граф в заданном состоянии. Комбинаторное решение этой проблемы дано в классических работах Эрдеша и Реньи [6], а также в более поздних работах [7, 9, 10].

Кинетический подход [3, 4] предполагает изменение состояния случайного графа со временем. В этих работах использовалось уравнение Смолуховского описывающее в самом примитивном виде процессы слияния частиц в коллоидных системах и полимерах (см. [11, 12, 13]). Примечательно, что все эти авторы рассматривали эволюцию бесконечных графов, т.е. полное число вершин в графе никак не ограничивалось. Далее, если скорость слияния двух объектов зависела от произведения их масс (для графов это произведение порядков связных компонент), то соответствующее кинетическое уравнение теряет смысл после некоторого конечного критического интервала времени. Этому эффекту было придумано объяснение. Предполагалось, что в критический момент времени в системе образуется бесконечный кластер, который способен поглощать более мелкие объекты. Существование такого кластера никак не следовало из кинетического уравнения Смолуховского, прекрасно описывающего эволюцию системы в докритический период. Хотя такая модель качественно описывала процессы полимеризации, ее неудовлетворительность оставалась очевидной.

Конечные случайные графы рассматривались настоящим автором на основе теории конечных коагулирующих систем [14, 17, 18, 19]. В рамках этой теории рассмотрение ведется на основе эволюционного уравнения для изменения со временем вероятности застать систему в заданном состоянии. Это уравнение в качестве переменных помимо времени содержит бесконечный набор чисел заполнения. Далее, на основе этого уравнения формулируется уравнение для производящего функционала: вместо чисел заполнения вводится набор формальных переменных, линейные операции над которыми позволяют вычислять средние по вероятности. Уравнение для производящего функционала – линейное уравнение второго порядка с бесконечным числом переменных (см. ниже). Это уравнение доступно для анализа и получения внятных аналитических результатов несмотря на то, что число переменных в уравнении бесконечно.

2. Основные уравнения

Пусть есть граф порядка M , содержащий N связных компонент. Каждая компонента характеризуется ее порядком g и степенью заполнения ν . Ясно, что $g - 1 \leq \nu \leq g(g - 1)/2$. Минимальное значение ν соответствует дереву порядка g , а максимальное – полному графу того же порядка.

Любое состояние графа задается набором чисел заполнения

$$Q = (n_{1,0}, n_{2,1}, n_{3,2}, n_{3,3}, \dots, n_{g,\nu}, \dots) = \{n_{g,\nu}\}, \quad (4)$$

где $n_{g,\nu}$ – число связных компонент порядка g с ν ребрами.

Удобный метод генерации случайного графа – добавление одного ребра в единицу времени к графу уже содержащему g вершин. Конечно, есть и другие способы генерации, но этот самый простой.

Вновь появляющееся ребро меняет состояние графа. Ребро может соединить две неприводимые компоненты и тогда возникнет одна компонента, порядок которой равен сумме порядков материнских компонент (уравнение (2)) или ребро может соединить две вершины принадлежащие одной компоненте (уравнение (3)). Тогда на единицу изменится число ребер в этой компоненте.

Данному состоянию Q предшествует два типа состояний,

$$Q^- = \{n_{1,0}, n_{2,1}, n_{3,2}, n_{3,3}, \dots, n_{l,\lambda} + 1 \dots n_{m,\mu} + 1 \dots n_{g,\lambda+\mu} - 1, \dots\} \quad (5)$$

и

$$\tilde{Q}^- = \{n_{1,0}, n_{2,1}, n_{3,2}, n_{3,3}, \dots, n_{g,\nu-1} + 1, n_{g,\nu} - 1, \dots\}. \quad (6)$$

Для помеченных графов эффективность процесса коалесценции пропорциональна lm — числу способов соединить две связные компоненты ребром. Эффективность заполнения связной компоненты пропорциональна $g(g-1)/2 - \nu$ — числу свободных мест, на которые можно поместить ребро.

На этом этапе мы введем вероятность $W(Q, t)$ обнаружить граф в состоянии Q в момент времени t . Для этой вероятности можно написать эволюционное уравнение,

$$\begin{aligned} \frac{dW(Q, t)}{dt} = & \sum_{Q^-} A(Q, Q^-) W(Q^-, t) - \sum_{Q^+} A(Q^+, Q) W(Q, t) \\ & + \sum_{\tilde{Q}^-} B(Q, \tilde{Q}^-) W(\tilde{Q}^-, t) - \sum_{\tilde{Q}^+} B(\tilde{Q}^+, Q) W(Q, t). \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь $(Q^+)^- = (Q^-)^+ = Q$ и $(\tilde{Q}^+)^- = (\tilde{Q}^-)^+ = Q$, т.е. состояние Q предшествует состояниям Q^+ и $\tilde{Q}^+$. Скорости переходов A и B выражаются через числа заполнения,

$$A(Q, Q^-) = \frac{1}{2T} n_{l,\lambda}(Q^-) (n_{m,\mu}(Q^-) - \delta_{l,m} \delta_{\lambda,\mu}) \quad (8)$$

и

$$B(Q, \tilde{Q}^-) = \frac{1}{T} \left(\frac{g(g-1)}{2} - \nu + 1 \right) n_{g,\nu-1}(\tilde{Q}^-). \quad (9)$$

Здесь $1/T$ скорость подачи новых ребер и $\delta_{l,m}$ — дельта символ Кронекера. Начальное условие к уравнению (7) считается заданным.

Введем производящий функционал для вероятности

$$\Psi(X, t) = \sum_Q W(Q, t) \prod_{g,\nu} x_{g,\nu}^{n(g,\nu|Q)}, \quad (10)$$

где обозначение $n(g, \nu|Q)$ используется для набора чисел заполнения $n_{g,\nu}$, принадлежащих заданному состоянию Q и $X = \{x_{g,\nu}\}$ — набор независимых формальных переменных.

Уравнение для Ψ легко выводится из (7), (8) и (9),

$$T \frac{\partial \Psi}{\partial t} = (\hat{\mathcal{L}}_f + \hat{\mathcal{L}}_c) \Psi, \quad (11)$$

В правой части этого уравнения стоят два оператора $\hat{\mathcal{L}}_f$ и $\hat{\mathcal{L}}_c$. Оператор $\hat{\mathcal{L}}_f$ отвечает за эволюцию заполнения связного кластера,

$$\hat{\mathcal{L}}_f = \sum_{l,\lambda} \left(\frac{l(l-1)}{2} - \lambda + 1 \right) x_{l,\lambda} \frac{\partial}{\partial x_{l,\lambda-1}} - \sum_{l,\lambda} \left(\frac{l(l-1)}{2} - \lambda \right) x_{l,\lambda} \frac{\partial}{\partial x_{l,\lambda}}. \quad (12)$$

Пределы суммирования в первой сумме в правой части включают интервал от $\lambda_{min} = g$ до $\lambda_{max} = [g(g-1)/2 + 1]$, а во второй сумме соответствующие пределы меняются от $\lambda_{min} = g-1$ до $\lambda_{max} = g(g-1)/2$. Более удобно переписать этот оператор так,

$$\hat{\mathcal{L}}_f = \sum_{l,\lambda} \left(\frac{l(l-1)}{2} - \lambda \right) (x_{l,\lambda+1} - x_{l,\lambda}) \frac{\partial}{\partial x_{l,\lambda}}. \quad (13)$$

Теперь суммирование по λ идет от $\lambda_{min} = g - 1$ до $\lambda_{max} = g(g - 1)/2$.

Оператор ответственный за коалесценцию имеет вид,

$$\hat{\mathcal{L}}_c = \frac{1}{2} \sum_{l,\lambda;m,\mu} lm(x_{l+m,\lambda+\mu+1} - x_{l,\lambda}x_{m,\mu}) \frac{\partial^2}{\partial x_{l,\lambda} \partial x_{m,\mu}}. \quad (14)$$

Уравнение (11) заменяет уравнение (7) для вероятности $W(Q, t)$.

Уравнение (11) необходимо дополнить начальными условиями,

$$\Psi(X, t = 0) = \Psi_0(X), \quad (15)$$

где $\Psi_0(x)$ — известный функционал. Например,

$$\Psi_0(X) = x_{1,0}^M \quad (16)$$

для первоначально пустого графа порядка M .

Разумеется,

$$\Psi(X = 1, t) = 1, \quad (17)$$

что соответствует нормировке $W(Q, t)$ на единицу, $\sum_Q W(Q, t) = 1$.

Мы введем операторы чисел заполнения, оператор полного числа связных компонент и оператор полного порядка графа. Эти операторы выглядят следующим образом,

$$\hat{n}_{l,\lambda} = x_{l,\lambda} \frac{\partial}{\partial x_{l,\lambda}}, \quad \hat{N}_l = \sum_{\lambda} \hat{n}_{l,\lambda}, \quad \hat{N} = \sum_{l,\lambda} \hat{n}_{l,\lambda} \quad \hat{M} = \sum_l l \hat{n}_{l,\lambda}. \quad (18)$$

Любое среднее по вероятности выражается через Ψ . Например, средний спектр неприводимых компонент в графе имеет вид, $\bar{n}_{g,\nu}(t) = \sum_Q n_{g,\nu}(Q) W(Q, t)$,

$$\bar{n}_{g,\nu}(t) = \hat{n}_{g,\nu} \Psi(X, t)|_{X=1}. \quad (19)$$

3. Решение эволюционного уравнения

Так как полный порядок графа не меняется в течение эволюционного процесса, мы попытаемся найти решение эволюционного уравнения (14) в виде собственного функционала оператора полного порядка графа $\hat{M}\Psi_M = M\Psi_M$.

$$\Psi_M = \frac{M!}{2\pi i} \oint z^{-(M)} \exp \left(\sum_{g,\nu} a_{g,\nu}(t) x_{g,\nu} z^g \right) dz. \quad (20)$$

Интеграл берется по контуру окружающему точку $z = 0$.

Подстановка (20) в уравнение (14) дает систему уравнений для $a_{g,\nu}(t)$,

$$\begin{aligned} T \frac{da_{g,\nu}}{dt} = & \left[\frac{1}{2} g(g-1) - \nu + 1 \right] a_{g,\nu-1} - \left[\frac{1}{2} g(g-1) - \nu \right] a_{g,\nu} \\ & + \frac{1}{2} \sum_{l,\lambda;m,\mu} l m a_{l,\lambda} a_{m,\mu} \delta_{g,l+m} \delta_{\nu,\lambda+\mu+1} - \frac{1}{2} M g a_{g,\nu} + \frac{g^2}{2} a_{g,\nu}. \end{aligned} \quad (21)$$

Начальные условия к этой системе (21) выбираем в виде:

$$a_{g,\nu}(0) = \delta_{g,1} \delta_{\nu,0}. \quad (22)$$

Легко проверить что это начальное условие соответствует первоначально пустому графу $\Psi(X, 0) = x_{1,0}^M$. Далее, все $a_{g,\nu}(t) = 0$, вне разрешенного интервала $(g-1) \leq \nu \leq g(g-1)/2$.

Для решения уравнения (22) введем производящую функцию для $a_{g,\nu}(t)$.

$$G(z, \zeta; t) = \sum_{g,\nu} z^g \zeta^\nu a_{g,\nu}(t). \quad (23)$$

Уравнение для $G(z, \zeta; t)$ следует из (22),

$$T \frac{\partial G}{\partial t} = \frac{\zeta}{2} \left[\left(z \frac{\partial G}{\partial z} \right)^2 + z \frac{\partial}{\partial z} z \frac{\partial G}{\partial z} \right] - (\zeta - 1) \left(\zeta \frac{\partial G}{\partial \zeta} + \frac{1}{2} z \frac{\partial G}{\partial z} \right) - \frac{M}{2} z \frac{\partial G}{\partial z}. \quad (24)$$

Подстановка $D(z, \zeta; t) = \exp[G(ze^{t/2T}, \zeta; t)]$ сводит это уравнение к линейному,

$$\frac{1}{T} \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{\zeta}{2} z \frac{\partial}{\partial z} z \frac{\partial D}{\partial z} - (\zeta - 1) \left(\zeta \frac{\partial D}{\partial \zeta} + \frac{1}{2} z \frac{\partial D}{\partial z} \right). \quad (25)$$

Начальные условия имеют вид,

$$D(z, \zeta; 0) = e^z. \quad (26)$$

Уравнение (25) решается разделением переменных,

$$D(z, \zeta; t) = \sum_{n,\kappa} \Theta_\kappa(t,) Z_{n,\kappa}(\zeta) z^n.$$

Тогда $\Theta_\kappa(t) = e^{\kappa t/T}$ и

$$\kappa Z_{n,\kappa} = \frac{\zeta}{2} n^2 Z_{n,\kappa} + (1 - \zeta) \left(\zeta \frac{dZ_{n,\kappa}}{d\zeta} + \frac{n}{2} Z_{n,\kappa} \right). \quad (27)$$

Здесь κ — константа разделения. Решение этого уравнения имеет вид,

$$Z_{n,\kappa}(\zeta) = b_{n,\kappa} (1 - \zeta)^{n^2/2 - \kappa} \zeta^{\kappa - n/2}. \quad (28)$$

Так как функция D должна быть аналитической при $\zeta = 0$, мы имеем $\kappa - n/2 = s$, где s — неотрицательное целое число. Далее, коэффициенты $b_{n,\kappa}$ определяются начальным условием (26). Легко видеть что

$$b_{n,\kappa} = \frac{1}{n!} \binom{(n^2 - n)/2}{s}.$$

Мы приходим к результату,

$$D(z, \zeta; t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} e^{nt/2T} [\zeta e^{t/T} + (1 - \zeta)]^{(n^2 - n)/2}. \quad (29)$$

Для того, чтобы вернуться к $a_{g,\nu}(t)$, мы введем производящую функцию для числа связных компонент. Воспользуемся теоремой Ридделя, которая связывает экспоненциальную производящую функцию всех (связных и несвязных) компонент графа с производящей функцией для числа только связных компонент

$$\ln \sum_{n=1}^{\infty} (1 + \delta)^{n(n-1)/2} \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \delta^{n-1} P_{n-1}(\delta) \frac{z^n}{n!} \quad (30)$$

Здесь введены полиномы $P_g(\delta)$, которые являются производящими функциями для числа связных компонент.

Уравнение (30) позволяет восстановить $A_g(\zeta, t) = \sum_{\nu} a_{g,\nu}(t)\zeta^{\nu}$,

$$A_g(\zeta, t) = \frac{1}{g!} e^{-g(M-1)t/2T} (e^{t/T} - 1)^{g-1} \zeta^{g-1} P_{g-1}(\zeta e^{t/T} - \zeta). \quad (31)$$

Используя определение P_g , имеем,

$$\delta^{g-1} P_{g-1}(\delta) = \sum_{\nu=g-1}^{g(g-1)/2} C_{g,\nu} \delta^{\nu}, \quad (32)$$

где $C_{g,\nu}$ — число помеченных связных графов порядка g с ν ребрами. Применим (32) для восстановления $a_{g,\nu}(t)$. Получаем,

$$a_{g,\nu}(t) = \frac{1}{g!} e^{-g(M-1)t/2T} (e^{t/T} - 1)^{\nu} C_{g,\nu}. \quad (33)$$

Теперь найдем среднее число связных компонент. Из (56) и (20) имеем,

$$\bar{n}_{g,\nu}(t) = a_{g,\nu}(t) \frac{M!}{2\pi i} \oint z^{-M+g} D(z, 1; t) dz. \quad (34)$$

При $\zeta = 1$ уравнение (29) дает,

$$D(z, 1; t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} e^{n^2 t/2T}. \quad (35)$$

Мы приходим к результату,

$$\bar{n}_{g,\nu}(t) = \binom{M}{g} e^{(g^2-2Mg+g)t/2T} (e^{t/T} - 1)^{\nu} C_{g,\nu}. \quad (36)$$

Главный результат этого рассмотрения — точное выражение для среднего спектра связных компонент,

$$\bar{n}_{g,\nu}(t) = \binom{M}{g} e^{(g^2-2Mg+g)t/2T} (e^{t/T} - 1)^{\nu} C_{g,\nu}. \quad (37)$$

Здесь $C_{g,\nu}$ — число связных компонент порядка g , соединенных ν ребрами, а T — характерное время процесса коалесценции. Это время характеризует временную шкалу процесса и зависит от конкретной реализации генерации графа

В большинстве случаев $T \propto M\delta$ и мы будем придерживаться этой калибровки.

Перепишем уравнение (37) в виде,

$$\bar{n}_{g,\nu}(t) = \binom{M}{g} \exp(-S_{M,g} t/2T) (e^{\frac{t}{T}} - 1)^{\nu} C_{g,\nu}, \quad (38)$$

где $S_{M,g} = M(M-1)/2 - (M-g)(M-g-1)/2$. Это то же самое, что и уравнение (37). Действительно, $S_{M,g} = -g^2 + 2Mg - g$. Эта величина имеет прозрачный физический смысл: это разница между числом всех возможных пар вершин в графе и числом пар вакантных вершин вне (g, ν) — кластера. Важно подчеркнуть, что первые два множителя в правой части уравнения (38) не зависят от степени заполнения компоненты. Поэтому удобно представить выражение для $\bar{n}_{g,\nu}$ в виде произведения двух множителей,

$$\bar{n}_{g,\nu}(t) = u_M u_{\infty}. \quad (39)$$

Первый сомножитель не зависит от заполнения,

$$u_M = \frac{M!}{(M-g)!} e^{t(g^2+g)/2T}, \quad (40)$$

а второй не зависит от полного порядка графа M ,

$$u_\infty = \frac{1}{g!} e^{-gt} [(e^{t/T} - 1)]^\nu C_{g,\nu}. \quad (41)$$

В дальнейшем мы уделим внимание большим графам с $M \gg 1$, $g \gg 1$, $M - g \gg 1$, и мы положим также $T = M$ и применим формулу Стирлинга для преобразования факториалов. После несложной алгебры мы получим,

$$\tilde{u}_M = \frac{M^{1-k}}{\sqrt{1-x}} e^{-M[(1-x)\ln(1-x) - (1-x) - tx^2/2]}, \quad (42)$$

$$\tilde{u}_\infty = \frac{1}{g!} e^{-gt} t^\nu C_{g,\nu}. \quad (43)$$

Здесь $x = g/M$ и $k = \nu - g + 1$ — число циклов, а $\tilde{u}_\infty = M^\nu u_\infty$ и $\tilde{u}_M = M^{-\nu} u_M$.

Важно отметить, что фактор u_M имеет максимум при $x = x_c$, что соответствует появлению гигантской компоненты в графе, т.е. x_c — ненулевой корень уравнения

$$t = \frac{1}{x_c} \ln \frac{1}{1-x_c}. \quad (44)$$

4. Производящие функции

Мы введем полиномы $P_g(z)$ как производящие функции для $C_{g,\nu}$,

$$z^{g-1} P_{g-1}(z) = \sum_{\nu=g-1}^{g(g-1)/2} C_{g,\nu} z^\nu. \quad (45)$$

Пределы суммирования здесь — это минимальное число ребер в дереве порядка g и максимальное число ребер $g(g-1)/2$ в полном графе того же порядка. Множитель z^{g-1} введен для того, чтобы сделать минимальную степень z в $P_g(z)$ равной нулю.

Введем экспоненциальную производящую функцию для числа связных компонент,

$$w(\xi, z) = \sum_{g=1}^{\infty} \frac{\xi^g}{g!} \sum_{\nu=g-1}^{g(g-1)/2} C_{g,\nu} z^\nu = \sum_{g=1}^{\infty} \frac{\xi^g}{g!} z^{g-1} P_{g-1}(z). \quad (46)$$

Теорема Ридделя [22] позволяет связать $w(\xi, z)$ с экспоненциальной производящей функцией $\mathcal{W}(\xi, z)$ для всех графов порядка g с ν ребрами [20]. Последняя просто находится. Число способов соединить g вершин ν ребрами есть $\binom{g(g-1)/2}{\nu}$. Значит, полином $(1+z)^{g(g-1)/2}$ является производящей функцией числа графов порядка g , имеющих в точности ν ребер. Экспоненциальная производящая функция для этих графов задается формальным рядом,

$$\mathcal{W}(\xi, z) = \sum_{g=0}^{\infty} \frac{\xi^g}{g!} (1+z)^{g(g-1)/2}. \quad (47)$$

Теорема Ридделя гласит,

$$w(\xi, z) = \ln \mathcal{W}(\xi, z). \quad (48)$$

Таким образом, мы приходим к результату,

$$\ln \sum_{g=0}^{\infty} \frac{\xi^g}{g!} (1+z)^{g(g-1)/2} = \sum_{g=1}^{\infty} \frac{\xi^g}{g!} z^{g-1} P_{g-1}(z). \quad (49)$$

Теперь можно проанализировать полиномы $P_g(z)$.

Продифференцируем обе стороны уравнения (48) по ξ и заметим что

$$\partial_{\xi} \mathcal{W}(\xi, z) = \mathcal{W}[(1+z)\xi, z]. \quad (50)$$

Введем экспоненциальную производящую функцию полиномов $P_g(\xi)$,

$$y(\xi, z) = \sum_{g=1}^{\infty} \frac{\xi^g}{g!} P_g(z) \quad (51)$$

и выведем интегральное уравнение для нее. С этой целью мы используем тождество

$$\partial_{\xi} w(\xi, z) = y(\xi z, z). \quad (52)$$

Из (48) и (50) получим,

$$\partial_{\xi} w(\xi, z) = \frac{\partial_{\xi} W(\xi, z)}{W(\xi, z)} = \frac{W[(1+z)\xi, z]}{W(\xi, z)}. \quad (53)$$

Результат переписывается так,

$$y(\xi, z) = \frac{W((1+z)\xi, z)}{W(\xi, z)} = W[(1+z)\xi, \xi] e^{-w(\xi, z)}. \quad (54)$$

Используя теорему Ридделя (48) получаем,

$$\ln y(\xi z, z) = w[(1+z)\xi, z] - w(\xi, z). \quad (55)$$

Это равенство дает уравнение для $y(\xi, z)$,

$$\ln y(\xi z, z) = w[(1+z)\xi, z] - w(\xi, z) = \int_{\xi}^{(1+z)\xi} y(xz, z) dx. \quad (56)$$

Замена $\xi z = \zeta$ и $x = \zeta(1+uz)/z$ сводит уравнение (56) к интегральному уравнению [18],

$$\ln y(\zeta, z) = \zeta \int_0^1 y[\zeta(1+uz), z] du. \quad (57)$$

Для дальнейшего удобно также переписать уравнение (57) в виде,

$$y_z(\zeta, z) = Q_z(\zeta, z) y(\zeta, z), \quad (58)$$

где

$$Q(\zeta, z) = \zeta \int_0^1 y[\zeta(1+uz), z] du \quad (59)$$

и индексом обозначается дифференцирование по соответствующей переменной. Суммирование в (37) по ν приводит к выражению для спектра связанных компонент, известное из теории коагуляции в системах с ядром $K(g, l) = gl$ [19],

$$\bar{n}_g(t) = \binom{M}{g} e^{S_{M,g} t / 2T} (e^{t/T} - 1)^{g-1} P_{g-1}(e^{t/T} - 1). \quad (60)$$

5. Циклы

Очевидно, что связные компоненты порядка g , имеющие минимально возможное число ребер $\nu = g - 1$ являются деревьями, т.е. в них не образуется циклов. Поэтому в соответствии с уравнениями (45) и (51) число связных компонент с k циклами есть

$$C_{g,g+k-1} = k!^{-1} d_k P_{g-1}|_{z=0} \quad (61)$$

или

$$C_{g,g+k-1} = \frac{(g-1)!}{k!} \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{d\xi}{\xi^g} \frac{\partial^k y(\xi, z)}{\partial z^k} \Big|_{z=0}. \quad (62)$$

Таким образом, число $U_k(g, t)$ связных компонент с k циклами в соответствии с уравнениями (37) и (62) есть,

$$U_k(g, t) = \binom{M}{g} e^{S_{M,g}/2T} (e^{t/T} - 1)^{g+k-1} \frac{(g-1)!}{k!} \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{d\xi}{\xi^g} \frac{\partial^k y(\xi, z)}{\partial z^k} \Big|_{z=0}. \quad (63)$$

5.1. Число деревьев в графе

Число деревьев в графе $U_0(g, t)$ выражается через полином $P_{g-1}(0)$. Положив $z = 0$ в уравнении (57) имеем для $y^o = y^o(\xi) = y(\xi, 0)$,

$$\ln y^o = \xi y^o. \quad (64)$$

Отсюда легко восстановить $P_g(0)$,

$$P_g(0) = \frac{g!}{2\pi i} \oint \frac{y^o(\xi) d\xi}{\xi^{g+1}} = (g+1)^{g-1}. \quad (65)$$

Тогда для числа деревьев мы получаем простое выражение,

$$U_0(g, t) = \bar{n}_{g,g+k-1}(t) = \frac{1}{g} \binom{M}{g} e^{(g^2-2Mg+g)t/2T} (e^{t/T} - 1)^{g-1} g^{g-1}. \quad (66)$$

В асимптотическом пределе для больших графов найдем,

$$U_0(g, t) = \bar{n}_{g,g+k-1}(t) = \frac{M}{gg! \sqrt{1-x}} \times e^{-M[(1-x)\ln(1-x)+x-tx^2/2]} e^{-gt} t^{g-1} g^{g-1}, \quad (67)$$

5.2. Одноцикловые и двуцикловые компоненты

Найдем спектр одноцикловых графов. С этой целью разложим подынтегральное выражение в правой части уравнения (57) по степеням uz ,

$$y[\zeta(1+zu), z] = y(\zeta, z) + \zeta zu \frac{\partial y(\zeta, z)}{\partial \zeta} + \frac{(\zeta zu)^2}{2!} \frac{\partial^2 y(\zeta, z)}{\partial \zeta^2} \dots \quad (68)$$

Подставляя это выражение в уравнение (58), имеем,

$$Q(\zeta, z) = \zeta y + \frac{\zeta^2 z}{2} y_\zeta + \frac{\zeta^3 z^2}{6} y_{\zeta\zeta} \dots \quad (69)$$

При $z = 0$ из уравнений (58) имеем,

$$(y_z)^o = (Q_z)^o y^o. \quad (70)$$

Верхний индекс o означает что аргумент z в соответствующей функции равен нулю. Например, $y^o = y(\zeta, 0)$, $(y_z)^o = \partial_z y(\zeta, z)|_{z=0}$, но $(y_\zeta)^o = y_\zeta^o$.

Уравнение (70) дает,

$$(Q_z)^o = \zeta(y_z)^o + \frac{\zeta^2}{2} y_\zeta^o. \quad (71)$$

Дифференцируя уравнение (63) по ζ и полагая $z = 0$, мы имеем,

$$y_\zeta^o = \frac{(y^o)^2}{1 - \ln y^o} = A_{0,2,1}(\zeta), \quad (72)$$

где

$$A_{a,b,c}(\zeta) = \frac{\zeta^a (y^o)^b}{(1 - \ln y^o)^c}. \quad (73)$$

Таким образом,

$$(y_z)^o = \frac{1}{2} \frac{\zeta^2 (y^o)^3}{(1 - \ln y^o)^2} = \frac{1}{2} A_{2,3,2}. \quad (74)$$

В дальнейшем для краткости аргумент ζ опускается.

В соответствии с уравнением (63) мы имеем,

$$U_1(g, t) = \frac{1}{2} \binom{M}{g} e^{(g^2 - 2Mg + g)t/2T} (e^{t/T} - 1)^g (g - 2)(g - 1)g^{g-3} \int_0^\infty e^{-t} (1 + t/g)^{g-3} dt. \quad (75)$$

Интеграл в правой части выражается через неполную экспоненту $\exp_{g-3} g$.

Точно таким же способом можно рассчитать спектр неприводимых компонент с двумя циклами. Выкладки длинные и здесь не приводятся. Окончательный результат имеет вид

$$y_{zz} = Q_{zz}y + Q_z y_z. \quad (76)$$

Сохраним члены до второго порядка по z в разложении (69) и положим $z = 0$,

$$(Q_{zz})^o = \zeta(y_{zz})^o + \zeta^2(y_{\zeta z})^o + \frac{\zeta^3}{3} y_{\zeta\zeta}^o. \quad (77)$$

Далее, мы продифференцируем уравнение (74) по ζ и получим,

$$(y_{\zeta z})^o = A_{1,3,2} + \frac{3}{2} A_{2,4,3} + A_{2,4,4}. \quad (78)$$

Двойное дифференцирование уравнения (64) дает,

$$y_{\zeta\zeta}^o = 2A_{0,3,2} + A_{0,3,3}. \quad (79)$$

Тогда из уравнения (76) мы окончательно имеем,

$$U_2 = \binom{M}{g} e^{(g^2 - 2Mg + g)t/2T} (e^{t/T} - 1)^{g-1} \left[\frac{5}{3} Z_{g,g-4,2} + \frac{7}{4} Z_{g,g-5,3} + Z_{g,g-5,4} + \frac{1}{4} Z_{g,g-6,4} + \frac{1}{3} Z_{g,g-4,3} \right], \quad (80)$$

где

$$Z_{\alpha,r,\beta} = \frac{\alpha^r}{r!(\beta-1)!} \int_0^\infty x^{\beta-1} e^{-x} (1 + x/\alpha)^r dx.$$

6. Заключение

В работе продемонстрирован метод исследования временной эволюции случайных графов в самой общей формулировке. Наибольший интерес представляет подход к эволюции нелинейных систем, описание которых в рамках непрерывной математики затруднительно. Вместо этого предлагается сводить систему к множеству точек и задавать эволюционный закон, позволяющий выделять наиболее существенные черты эволюционного процесса. Например, если мы имеем дело с дисперсной системой — множеством изолированных объектов, которые с течением времени сливаются (или, наоборот, распадаются в результате взаимодействия элементов системы между собой, то удобно представлять такую систему случайным графом, а каждый акт взаимодействия моделировать появлением (или исчезновением) ребра между вершинами графа. Так можно смоделировать эволюцию сетей (например, Интернета), появление и развитие трещин на поверхности, возникновение критических явлений во время землетрясений и даже возникновение и развитие интеллекта. Совершенно очевидно, что несмотря на крайнюю простоту исходной схемы (система вершин плюс система ребер) эволюционные свойства модели приводят к абсолютно нетривиальным результатам, таким как образование гигантской компоненты и ее посткритическое развитие.

В течение многих лет в Геофизическом центре РАН под руководством академика Алексея Джерменовича Гвишиани был создан и развивался ДИСКРЕТНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ — направление прикладной математики, нашедшее широкое применение для анализа многих геофизических процессов. Описанный в этой статье метод эволюционных уравнений также оперирует со случайными дискретными объектами. Его применение может привести к дальнейшему развитию тех замечательных результатов, которые были получены в последнее десятилетие в ГЦ РАН.

Автор этой статьи поздравляет Алексея Джерменовича с семидесятилетием и желает ему здоровья и дальнейших творческих успехов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Krapivsky, P. L., Redner, S. & Ben-Naim, E. A Kinetic View of Statistical Physics // Cambridge Univ. Press, Cambridge. 2010. Mathematical Reviews (MathSciNet): MR2757286 Zentralblatt MATH: 1235.82040
2. Lushnikov, A. A. Time evolution of a random graphs // J. Phys. A, 2005, vol. 38, pp L777.
3. Ben-Naim, E., & P. L. Krapivsky. Kinetic theory of random graphs: From paths to cycles // Physical Review, 2005, E 71.2 : 026129.
4. Ben-Naim E. & P. L. Krapivsky, Unicyclic components in random graphs // J. Phys., 2004, A 37, L189 (2004).
5. Lushnikov, A. A. Exactly solvable model of a coalescing random graph // Physical Review, 2015, vol. 91, p. 02211
6. Erdős, R & Rényi, A., On the random graphs // A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei, 1960, 5, 17–61.
7. Bollobas, B., Random Graphs: (2nd ed.). 2001. Cambridge University Press. ISBN 0-521-79722-5.
8. Albert, R., & Barabási, A-L., Statistical mechanics of complex networks // Rev. Mod. Phys., 2002, 74, 47–97.

9. Newman, M. E. J., *Networks: An Introduction*. 2010, Oxford.
10. Cohen, R. & Havlin, S. *Complex networks: structure, robustness and function*. // Cambridge university press. 2010.
11. Flory, P. J., *Molecular Size Distribution in Three Dimensional Polymers I. Gelation* // J. Am. Chem. Soc., Vol. 30, 3083. Flory, P.J. (1941). J. Am. Chem. Soc. 63, 3083 Stockmayer, Walter H.(1944). "Theory of Molecular Size Distribution and Gel Formation in Branched Polymers II. General Cross Linking". Journal of Chemical Physics. 12,4, 125
12. Stockmayer, W.H. Theory of molecular size distribution and gel formation in branched-chain polymers, //J. Chem. Phys. Vol. 11, p. 45.
13. Ziff, R. M. & Stell, G., Kinetics of polymer gelation // J. Chem. Phys., 1980, Vol. 73, 3492–3499.
14. Marcus, A. H., Stochastic coalescence // Technometrics, 1968, 10, 133–143.
15. Aldous, D. J., Deterministic and stochastic models for coalescence (aggregation, coagulation; review of the mean-field theory for probabilists) // Bernoulli, 1999, Vol. 5 3–122.
16. Leyvraz, F., Scaling theory and exactly solved models in the kinetics of irreversible aggregation // Phys. Rep., 2003, Vol. 383, 95–212.
17. Lushnikov A. A., Coagulation in finite systems, // J. Colloid Interface Sci., 1978, Vol. 65 276–285.
18. Lushnikov A. A., From sol to gel exactly // Phys. Rev. Lett., 2004, Vol. 93, 198302.
19. Lushnikov A. A., Sol-gel transition in coagulating systems //Physica D, 2006, Vol. 222, 37.
20. Knuth, D. E., Linear probing and graphs // Algorithmica, 1998, Vol. 22 561–568.
21. Kreweras, G., Une famille de polynomes ayant plusieurs proprietes enumeratives // Period. Math.Hungar., 1980, Vol. 11 309–320.
22. Riddell R. J. & Ulenbeck G. E., On the Theory of the Virial Development of the Equation of State of Monoatomic Gases // J. Chem. Phys. 1953, Vol. 21 2056–2064.

REFERENCES

1. Krapivsky, P. L., Redner, S. & Ben-Naim, E. 2010. "A Kinetic View of Statistical Physics". Cambridge Univ. Press, Cambridge. Mathematical Reviews (MathSciNet): MR2757286 Zentralblatt MATH: 1235.82040
2. Lushnikov, A. A. 2005, "Time evolution of a random graphs"*J. Phys. A* vol. 38, pp L777.
3. Ben-Naim, E., & P. L. Krapivsky. 2005, "Kinetic theory of random graphs: From paths to cycles."*Physical Review E* 71.2 : 026129.
4. Ben-Naim E. & P. L. Krapivsky, 2004 "Unicyclic components in random graphs"*J. Phys. A* 37, L189 (2004).
5. Lushnikov, A. A. 2015. "Exactly solvable model of a coalescing random graph"*Physical Review* vol. 91, p. 02211

6. Erdős, R. & Rényi, A., 1960, "On the random graphs" *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* 5, 17–61.
7. Bollobas, B., 2001. "Random Graphs: (2nd ed.). Cambridge University Press. ISBN 0-521-79722-5.
8. Albert, R., & Barabási, A-L., 2002 "Statistical mechanics of complex networks *Rev. Mod. Phys.* 74, 47–97.
9. Newman, M. E. J., 2010, "Networks: An Introduction". Oxford.
10. Cohen, R. & Havlin, S. 2010, "Complex networks: structure, robustness and function". – Cambridge university press.
11. Flory, P.J., 1941 "Molecular Size Distribution in Three Dimensional Polymers I. Gelation". *J. Am. Chem. Soc.*, Vol. 30, 3083. Flory, P.J. (1941). *J. Am. Chem. Soc.* 63, 3083 Stockmayer, Walter H. (1944). "Theory of Molecular Size Distribution and Gel Formation in Branched Polymers II. General Cross Linking". *Journal of Chemical Physics*. 12,4, 125
12. Stockmayer, W.H. "Theory of molecular size distribution and gel formation in branched-chain polymers *J. Chem. Phys.* Vol. 11, p. 45.
13. Ziff, R. M. & Stell, G., 1980, "Kinetics of polymer gelation *J. Chem. Phys.*, Vol. 73, 3492–3499.
14. Marcus, A. H., 1968, "Stochastic coalescence *Technometrics*, 10, 133–143.
15. Aldous, D.J., 1999 "Deterministic and stochastic models for coalescence (aggregation, coagulation; review of the mean-field theory for probabilists)", *Bernoulli* Vol. 5 3–122.
16. Leyvraz, F., 2003, "Scaling theory and exactly solved models in the kinetics of irreversible aggregation *Phys. Rep.* Vol. 383, 95–212.
17. Lushnikov A. A., 1978, "Coagulation in finite systems *J. Colloid Interface Sci.*, Vol. 65 276–285.
18. Lushnikov A. A., 2004, "From sol to gel exactly" *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 93, 198302.
19. Lushnikov A. A., 2006, "Sol–gel transition in coagulating systems" *Physica D* Vol. 222, 37.
20. Knuth, D. E., 1998, "Linear probing and graphs textit *Algorithmica*, Vol. 22 561–568.
21. Kreweras, G., 1980, "Une famille de polynomes ayant plusieurs propriétés énumératives *Period. Math. Hungar.*, Vol. 11 309–320.
22. Riddell R. J. & Ulenbeck G. E., 1953, On the Theory of the Virial Development of the Equation of State of Monoatomic Gases *J. Chem. Phys.* Vol. 21 2056–2064.

Получено 27.07.2018

Принято в печать 22.10.2018

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 19. Выпуск 4

УДК 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-4-118-176

О классических теоретико-числовых сетках¹²

Реброва Ирина Юрьевна — кандидат физико-математических наук, доцент, декан факультета математики, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого.

e-mail: i_rebrova@mail.ru

Чубариков Владимир Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математических и компьютерных методов анализа, декан механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

e-mail: chubarik2009@live.ru

Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет.

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Добровольский Михаил Николаевич — кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Геофизический центр РАН.

e-mail: m.dobrovolsky@gcras.ru

Добровольский Николай Михайлович — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой алгебры, математического анализа и геометрии, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого.

e-mail: dobrovol@tspu.ru

Аннотация

В работе рассмотрена гиперболическая дзета-функция сеток с весами и распределение значений погрешности приближенного интегрирования при модификациях сеток.

Рассмотрены: параллелепипедальные сетки $M(\vec{a}, p)$, состоящие из точек

$$M_k = \left(\left\{ \frac{a_1 k}{p} \right\}, \dots, \left\{ \frac{a_s k}{p} \right\} \right) \quad (k = 1, 2, \dots, p);$$

неравномерные сетки $M(P)$, координаты точек которых выражаются через степенные функции по модулю P :

$$M_k = \left(\left\{ \frac{k}{P} \right\}, \left\{ \frac{k^2}{P} \right\}, \dots, \left\{ \frac{k^s}{P} \right\} \right) \quad (k = 1, 2, \dots, P),$$

где $P = p$ или $P = p^2$ и p — нечетное простое число;

обобщенные равномерные сетки $M(\vec{n})$ из $N = n_1 \cdot \dots \cdot n_s$ точек вида

$$M_{\vec{k}} = \left(\left\{ \frac{k_1}{n_1} \right\}, \left\{ \frac{k_2}{n_2} \right\}, \dots, \left\{ \frac{k_s}{n_s} \right\} \right) \quad (k_j = 1, 2, \dots, n_j \ (j = 1, \dots, s));$$

алгебраические сетки, введенные К. К. Фроловым в 1976 г. и обобщенные параллелепипедальные сетки, изучение которых началось в 1984 г.

¹Работа подготовлена по гранту РФФИ №16-41-710194_р_центр_а

²Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант №16-01-00-071

Кроме этого, в обзорном порядке рассмотрены p -ичные сетки: сетки Хэммерсли, Холтона, Фора, Соболя и Смоляка.

В заключении рассмотрены актуальные проблемы применения теоретико-числового метода в геофизике, требующие дальнейшего исследования.

Ключевые слова: гиперболическая дзета-функция сеток с весами, классические теоретико-числовые сетки.

Библиография: 48 названий.

Для цитирования:

И. Ю. Реброва, В. Н. Чубариков, Н. Н. Добровольский, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский. О классических теоретико-числовых сетках // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, вып. 4, С. 118–176.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 19. No. 4

UDC 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-4-118-176

On classical number-theoretic nets

Rebrova Irina Yuryevna — candidate of physical and mathematical Sciences, associate professor, dean of the faculty of mathematics, physics and computer science, Tula State L. N. Tolstoy Pedagogical University.

e-mail: i_rebrova@mail.ru

Chubarikov Vladimir Nikolaevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the department of mathematical and computer methods of analysis, dean of the mechanics and mathematics faculty of the M. V. Lomonosov Moscow State University.

e-mail: chubarik2009@live.ru

Dobrovolsky Nikolai Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, assistant of the department of applied mathematics and computer science, Tula State University.

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Dobrovolsky Mikhail Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, senior researcher, Geophysical centre of RAS.

e-mail: m.dobrovolsky@gcras.ru

Dobrovolsky Nikolai Mihailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the department of algebra, mathematical analysis and geometry, Tula State L. N. Tolstoy Pedagogical University.

e-mail: dobrovol@tsput.ru

Abstract

The paper considers the hyperbolic Zeta function of nets with weights and the distribution of error values of approximate integration with modifications of nets.

Considered: parallelepipedal nets $M(\vec{a}, p)$, consisting of points

$$M_k = \left(\left\{ \frac{a_1 k}{p} \right\}, \dots, \left\{ \frac{a_s k}{p} \right\} \right) \quad (k = 1, 2, \dots, p);$$

non-uniform nets $M(P)$, the coordinates of which are expressed via power functions modulo P :

$$M_k = \left(\left\{ \frac{k}{P} \right\}, \left\{ \frac{k^2}{P} \right\}, \dots, \left\{ \frac{k^s}{P} \right\} \right) \quad (k = 1, 2, \dots, P),$$

where $P = p$ or $P = p^2$ and p — odd prime number;

generalized uniform nets $M(\vec{n})$ of $N = n_1 \cdot \dots \cdot n_s$ points of the form

$$M_{\vec{k}} = \left(\left\{ \frac{k_1}{n_1} \right\}, \left\{ \frac{k_2}{n_2} \right\}, \dots, \left\{ \frac{k_s}{n_s} \right\} \right) \quad (k_j = 1, 2, \dots, n_j \ (j = 1, \dots, s));$$

algebraic nets introduced by K. K. Frolov in 1976 and generalized parallelepipedal nets, the study of which began in 1984.

In addition, the review of p -nets is considered: Hammersley, Halton, Faure, Sobol, and Smolyak nets.

In conclusion, the current problems of applying the number-theoretic method in geophysics are considered, which require further study.

Keywords: hyperbolic Zeta function of nets with weights, classical number-theoretic nets.

Bibliography: 48 titles.

For citation:

I. Yu. Rebrova, V. N. Chubarikov, N. N. Dobrovol'skii, M. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, 2018, "On classical number-theoretic nets", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 4, pp. 118–176.

*Посвящается 70-летию академика РАН,
профессора Алексея Джерменовича Гвишиани*

1. Введение	121
1.1 Тригонометрические суммы сеток и решёток	122
1.2 Классы периодических функций	125
1.3 Суммы по гиперболическому кресту	127
1.4 Оценки норм	127
1.5 Квадратурные формулы	128
2. Алгоритмы приближенного интегрирования с правилом останковки	131
3. Оператор взвешенных сеточных средних	134
4. Случайные величины и многомерные квадратурные формулы	136
5. Разбиение Коробова	140
6. Первый, второй и третий гиперболические параметры сеток	142
7. Обобщенная теорема Бахвалова — Коробова для гиперболической дзета-функции сеток	145
8. Обобщенные равномерные сетки	145
9. Обобщенные неравномерные сетки	147
10. Параллелепипедальные сетки	148
11. Комбинированные сетки	150
12. Алгебраические сетки	152
13. Обобщенные параллелепипедальные сетки	153
14. Равномерное распределение, регулярные сетки	154
14.1 Функция ван дер Корпута — Хэммерсли и функции Ченя	156
14.2 Сетки Хэммерсли	158
14.3 Сетки Холтона	159
14.4 Сетки Фора	160
14.5 Сетки Соболя	161
14.6 Сетки Смоляка	165
15. Заключение	170
Список цитированной литературы	171
REFERENCES	174

1. Введение

В большой обзорной статье [7] было указано, что теоретико-числовой метод в приближенном анализе был создан в связи с разработкой отечественного атомного проекта, когда остро стояли задачи решения многомерных математических проблем, возникавших при осуществлении физических расчетов и моделировании физических процессов.

На наш взгляд, развитие теоретико-числового метода в приближенном анализе может получить дополнительный импульс, если специалисты по геофизике будут использовать в своей работе достижения теоретико-числового метода в приближенном анализе. На такую возможность указывают работы [30, 31].

В 1956 — 1960 годах при создании теоретико-числового метода в приближенном анализе Н. М. Коробов ввёл в рассмотрение широкий класс периодических функций E_s^α ($\alpha > 1$) с быстро убывающими коэффициентами Фурье, состоящий из функций $f(x_1, \dots, x_s)$, имеющих по каждой из переменных $x_1, \dots, x_s$ период, равный единице, и для которых их ряды Фурье

$$f(x_1, \dots, x_s) = \sum_{m_1, \dots, m_s = -\infty}^{\infty} C(m_1, \dots, m_s) e^{2\pi i(m_1 x_1 + \dots + m_s x_s)} \quad (1)$$

удовлетворяют условиям

$$|C(m_1, \dots, m_s)| \leq \frac{C}{(\overline{m}_1 \dots \overline{m}_s)^\alpha}, \quad (2)$$

где константа C не зависит от $m_1, \dots, m_s$, и для вещественных m полагаем $\overline{m} = \max(1, |m|)$. Ясно, что такие ряды Фурье сходятся абсолютно, а поэтому для любого ($\alpha > 1$) они представляют непрерывные функции.

Более подробно о классах периодических функций говорится далее в разделе 1.2 (см. стр. 125).

Рассмотрение классов периодических функций в теоретико-числовом методе в приближенном анализе не является случайным. Дело в том, что особая роль теории чисел в вопросах интегрирования периодических функций была выявлена ещё сто лет тому назад в знаменитой работе Г. Вейля [48], с которой начинается теория равномерного распределения по модулю 1, и в которой получил общее развитие метод тригонометрических сумм, возникший в работах К. Ф. Гаусса ещё в 1811 г. (см. [6], стр. 594). Фактически интегральный критерий Г. Вейля, доказанный сто лет тому назад, является предшественником теоретико-числового метода Н. М. Коробова в приближенном анализе, который начал создаваться на семинаре **трёх К** в 1956 году через 40 лет после работы Г. Вейля.

Позднее Н. Н. Ченцов, один из трёх руководителей семинара **трёх К**, предложил метод периодизации задач численного интегрирования, который позволил расширить класс функций, для которых можно применять методы теории чисел. С этими методами можно ознакомиться по монографиям [26], [28] и работе [17].

В этот же период появились и другие теоретико-числовые сетки: в 1960 г. сетки Хэммерсли [43] и сетки Холтона [42], в 1963 г. сетки Смоляка [33], в 1966 г. ЛП₇ сетки Соболя. Несколько позднее в 1982 г. появились сетки Фора [41]. Все эти сетки относятся к классу регулярных p -ичных сеток и дают рекордные характеристики равномерного распределения. Более подробно об этом будет сказано в разделе 14.

Цель данной статьи рассмотреть гиперболическую дзета-функцию сеток с весами, оценить распределение значений погрешности приближенного интегрирования при модификациях сеток и применить его для произведения некоторых типов сеток.

Будут рассмотрены: параллелепипедальные сетки $M(\vec{a}, p)$, состоящие из точек

$$M_k = \left(\left\{ \frac{a_1 k}{p} \right\}, \dots, \left\{ \frac{a_s k}{p} \right\} \right) \quad (k = 1, 2, \dots, p); \quad (3)$$

неравномерные сетки $M(P)$, координаты точек которых выражаются через степенные функции по модулю P :

$$M_k = \left(\left\{ \frac{k}{P} \right\}, \left\{ \frac{k^2}{P} \right\}, \dots, \left\{ \frac{k^s}{P} \right\} \right) \quad (k = 1, 2, \dots, P), \quad (4)$$

где $P = p$ или $P = p^2$ и p — нечетное простое число;

обобщенные равномерные сетки $M(\vec{n})$ из $N = n_1 \cdot \dots \cdot n_s$ точек вида

$$M_{\vec{k}} = \left(\left\{ \frac{k_1}{n_1} \right\}, \left\{ \frac{k_2}{n_2} \right\}, \dots, \left\{ \frac{k_s}{n_s} \right\} \right) \quad (k_j = 1, 2, \dots, n_j \ (j = 1, \dots, s)); \quad (5)$$

алгебраические сетки, введенные К. К. Фроловым в 1976 г. [36], и обобщенные параллелепипедальные сетки, определение которых будет дано позднее, изучение которых началось в 1984 г. [16], [17];

кроме этого мы в обзорном порядке рассмотрим и p -ичные сетки, которые требуют отдельного изучения.

Так как цель данной работы — дать представление о возможностях классических теоретико-числовых сеток, то доказательства всех теорем и лемм опускаются.

1.1. Тригонометрические суммы сеток и решёток

При изучении вопросов приближенного интегрирования и интерполирования периодических функций многих переменных естественным образом возникают тригонометрические суммы. Приведем несколько необходимых определений и результатов из работ [12], [15] и [17].

Через $G_s = [0; 1)^s$ будем обозначать полуоткрытый s -мерный единичный куб. Под сеткой мы понимаем произвольное непустое конечное множество M из G_s . Под сеткой с весами будем понимать упорядоченную пару (M, ρ) , где ρ — произвольная числовая функция на M . Для удобства будем отождествлять сетку M с упорядоченной парой $(M, 1)$, то есть с сеткой с единичными весами $\rho \equiv 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Произведением двух сеток с весами (M_1, ρ_1) и (M_2, ρ_2) из G_s называется сетка с весами (M, ρ) :

$$M = \{ \{ \vec{x} + \vec{y} \} \mid \vec{x} \in M_1, \vec{y} \in M_2 \}, \quad \rho(\vec{z}) = \sum_{\substack{\{ \vec{x} + \vec{y} \} = \vec{z}, \\ \vec{x} \in M_1, \vec{y} \in M_2}} \rho_1(\vec{x}) \rho_2(\vec{y}),$$

где $\{ \vec{z} \} = (\{ z_1 \}, \dots, \{ z_s \})$.

Произведение сеток с весами (M_1, ρ_1) и (M_2, ρ_2) обозначается через

$$(M_1, \rho_1) \cdot (M_2, \rho_2).$$

Кроме этого, если $(M, \rho) = (M_1, \rho_1) \cdot (M_2, \rho_2)$, то будем писать $M = M_1 \cdot M_2$ и говорить, что сетка M — произведение сеток M_1 и M_2 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Тригонометрической суммой сетки с весами (M, ρ) для произвольного целочисленного вектора $\vec{m}$ называется выражение

$$S(\vec{m}, (M, \rho)) = \sum_{\vec{x} \in M} \rho(\vec{x}) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}, \quad (6)$$

а нормированной тригонометрической суммой сетки с весами —

$$S^*(\vec{m}, (M, \rho)) = \frac{1}{|M|} S(\vec{m}, (M, \rho)).$$

Положим $\rho(M) = \sum_{j=1}^{|M|} |\rho_j|$, тогда для всех нормированных тригонометрических сумм сетки с весами справедлива тривиальная оценка

$$|S^*(\vec{m}, (M, \rho))| \leq \frac{1}{|M|} \rho(M).$$

Легко видеть, что для любых сеток с весами (M_1, ρ_1) и (M_2, ρ_2) справедливо равенство

$$S(\vec{m}, (M_1, \rho_1) \cdot (M_2, \rho_2)) = S(\vec{m}, (M_1, \rho_1)) \cdot S(\vec{m}, (M_2, \rho_2)). \quad (7)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Если справедливо равенство

$$(M_1, 1) \cdot (M_2, 1) = (M, 1),$$

то сетки M_1 и M_2 называются взаимно простыми.

Таким образом, если M_1 и M_2 — взаимно простые сетки, то равенство $\vec{z} = \{\vec{x} + \vec{y}\}$ имеет не более одного решения для $\vec{x} \in M_1$ и $\vec{y} \in M_2$. Поэтому для взаимно простых сеток и только для них справедливо равенство $|M_1 \cdot M_2| = |M_1| \cdot |M_2|$.

При $\rho \equiv 1$ приходим к определению тригонометрической суммы сетки.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Тригонометрической суммой сетки M для произвольного целочисленного вектора $\vec{m}$ называется величина

$$S(\vec{m}, M) = \sum_{\vec{x} \in M} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})},$$

а нормированной тригонометрической суммой сетки —

$$S^*(\vec{m}, M) = \frac{1}{|M|} S(\vec{m}, M).$$

Легко видеть, что для любых взаимно простых сеток M_1 и M_2 справедливо равенство

$$S(\vec{m}, M_1 \cdot M_2) = S(\vec{m}, M_1) \cdot S(\vec{m}, M_2). \quad (8)$$

Для произвольного вектора $\vec{x}$ его дробной частью называется вектор $\{\vec{x}\} = (\{x_1\}, \dots, \{x_s\})$. Отсюда следует, что всегда $\{\vec{x}\} \in G_s$. Целой частью вектора называется вектор $[\vec{x}] = \vec{x} - \{\vec{x}\}$. Через $p(\vec{x}) = [\vec{x} + (\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})]$ обозначим ближайший целый вектор в смысле нормы $\|\vec{x}\|_1 = \max(|x_1|, \dots, |x_s|)$. Для нормы вектора отклонения от ближайшего целого $\delta(\vec{x})$, заданного равенством

$$\delta(\vec{x}) = p(\vec{x}) - \vec{x} = \left(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}\right) - \left\{\vec{x} + \left(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}\right)\right\},$$

справедливо неравенство $\|\delta(\vec{x})\|_1 \leq \frac{1}{2}$.

Далее везде под произвольной решеткой $\Lambda \subset \mathbb{R}^s$ мы будем понимать только полные решетки, то есть

$$\Lambda = \{m_1 \vec{\lambda}_1 + \dots + m_s \vec{\lambda}_s = \vec{m} \cdot A \mid \vec{m} = (m_1, \dots, m_s) \in \mathbb{Z}^s\},$$

где $\vec{\lambda}_1 = (\lambda_{11}, \dots, \lambda_{1s}), \dots, \vec{\lambda}_s = (\lambda_{s1}, \dots, \lambda_{ss})$ — система линейно-независимых векторов в $\mathbb{R}^s$, а матрица решётки A задана соотношениями

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \dots & \lambda_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{s1} & \dots & \lambda_{ss} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\lambda}_1 \\ \vdots \\ \vec{\lambda}_s \end{pmatrix}.$$

Взаимная решетка $\Lambda^* = \{\vec{x} \mid \forall \vec{y} \in \Lambda (\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{Z}\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Для произвольной решетки Λ обобщенной параллелепипедальной сеткой $M(\Lambda)$ называется множество $M(\Lambda) = \Lambda^* \cap G_s$.

Сетка $M_1(\Lambda) = \Lambda^* \cap [-1; 1]^s$.

Обобщенной параллелепипедальной сеткой Π рода $M'(\Lambda)$ называется множество

$$M'(\Lambda) = \{\vec{x} \mid \vec{x} = \{\vec{y}\}, \vec{y} \in M_1(\Lambda)\}.$$

Рассмотрим для произвольной целочисленной решётки Λ , целого вектора $\vec{m}$ и произвольного вектора $\vec{x}$ из взаимной решётки Λ^* величины:

$$\delta_\Lambda(\vec{m}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \vec{m} \in \Lambda, \\ 0, & \text{если } \vec{m} \in \mathbb{Z}^s \setminus \Lambda, \end{cases} \quad \delta_\Lambda^*(\vec{x}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \vec{x} \in \mathbb{Z}^s, \\ 0, & \text{если } \vec{x} \in \Lambda^* \setminus \mathbb{Z}^s. \end{cases}$$

Символ $\delta_\Lambda(\vec{m})$ является многомерным обобщением известного теоретико-числового символа Коробова

$$\delta_N(m) = \begin{cases} 1, & \text{если } m \equiv 0 \pmod{N}, \\ 0, & \text{если } m \not\equiv 0 \pmod{N}. \end{cases}$$

Для целочисленной решётки Λ её обобщенная параллелепипедальная сетка $M(\Lambda)$ является полной системой вычетов взаимной решётки Λ^* по фундаментальной подрешётке $\mathbb{Z}^s$. Отсюда следует равенство $|M(\Lambda)| = \det \Lambda$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Полной линейной кратной тригонометрической суммой целочисленной решетки Λ называется выражение

$$s(\vec{m}, \Lambda) = \sum_{\vec{x} \in M(\Lambda)} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} = \sum_{\vec{x} \in \Lambda^* / \mathbb{Z}^s} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})},$$

где $\vec{m}$ — произвольный целочисленный вектор.

Ясно, что для обобщенной параллелепипедальной сетки $M(\Lambda)$ справедливо равенство $S(\vec{m}, M(\Lambda)) = s(\vec{m}, \Lambda)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Полной линейной кратной тригонометрической суммой взаимной решетки Λ^* целочисленной решетки Λ называется выражение

$$s^*(\vec{x}, \Lambda) = \sum_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s / \Lambda} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} = \sum_{j=0}^{N-1} e^{2\pi i(\vec{m}_j, \vec{x})},$$

где $\vec{x}$ — произвольный вектор взаимной решетки Λ^* и $\vec{m}_0, \dots, \vec{m}_{N-1}$ — полная система вычетов решетки $\mathbb{Z}^s$ по подрешетке Λ .

Справедливы следующие двойственные утверждения.

ТЕОРЕМА 1. Для $s(\vec{m}, \Lambda)$ справедливо равенство

$$s(\vec{m}, \Lambda) = \delta_\Lambda(\vec{m}) \cdot \det \Lambda.$$

ТЕОРЕМА 2. Для любой целочисленной решетки Λ с $\det \Lambda = N$ и для произвольного $\vec{x} \in \Lambda^*$ справедливо равенство

$$s^*(\vec{x}, \Lambda) = \delta_\Lambda^*(\vec{x}) \cdot \det \Lambda.$$

1.2. Классы периодических функций

Рассмотрим класс $\mathfrak{A}_s$ всех периодических функций $f(\vec{x})$ с периодом 1 по каждой переменной, у которых их ряд Фурье

$$f(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s} C(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}, \quad C(\vec{m}) = \int_0^1 \dots \int_0^1 f(\vec{x}) e^{-2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} d\vec{x}$$

абсолютно сходится. Пространство $\mathfrak{A}_s$ относительно нормы

$$\|f(\vec{x})\|_{l_1} = \sum_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s} |C(\vec{m})| < \infty$$

является сепарабельным банаховым пространством, изоморфным пространству l_1 — всех абсолютно суммируемых комплексно-значных последовательностей (см. [20]).

Н. М. Коробов ввёл в рассмотрение широкий класс периодических функций $E_s^\alpha(C)$ ($\alpha > 1$) с быстро убывающими коэффициентами Фурье. Через $E_s^\alpha(C)$ обозначается множество функций из E_s^α с нормой, не превосходящей C , то есть шар в банаховом пространстве E_s^α радиуса C с центром в нуле.

Банахово пространство периодических функций $E_s^\alpha \subset \mathfrak{A}_s$ состоит из функций $f(x_1, \dots, x_s)$, у которых для коэффициентов Фурье выполняется оценка³

$$C(\vec{m}) = O\left(\frac{1}{(\overline{m}_1 \dots \overline{m}_s)^\alpha}\right).$$

Таким образом, эти функции удовлетворяют условиям

$$\sup_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s} |C(m_1, \dots, m_s)| (\overline{m}_1 \dots \overline{m}_s)^\alpha = \|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} < \infty. \quad (9)$$

Ясно, что для этих функций ряды Фурье сходятся абсолютно, так как

$$\|f(\vec{x})\|_{l_1} \leq \|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} (1 + 2\zeta(\alpha))^s,$$

а поэтому для любого $\alpha > 1$ они представляют непрерывные функции. Здесь и далее, как обычно, $\zeta(\alpha)$ — дзета-функция Римана.

Усеченной нормой вектора называется величина $q(\vec{x}) = \overline{x}_1 \dots \overline{x}_s$, где для вещественного x обозначаем $\overline{x} = \max(1, |x|)$. Усеченной норменной поверхностью с параметром $t \geq 1$ называется множество $N_s(t) = \{\vec{x} | q(\vec{x}) = t, \vec{x} \neq \vec{0}\}$, которое является границей гиперболического креста $K_s(t)$, заданного соотношениями $K_s(t) = \{\vec{x} | q(\vec{x}) \leq t\}$. Для натурального t на усеченной норменной поверхности имеется $\tau_s^*(t)$ целых ненулевых точек, где⁴

$$\tau_s^*(t) = \sum'_{\vec{m} \in N_s(t)} 1 \quad (10)$$

— число представлений натурального числа t в виде $t = \overline{m}_1 \dots \overline{m}_s$.

Используя новые обозначения, можно написать другое выражение для нормы $\|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}$. Справедливо равенство

$$\|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} = \max\left(|C(\vec{0})|, \sup_{t \in \mathbb{N}} \left(t^\alpha \cdot \max_{\vec{m} \in N(t)} |C(\vec{m})|\right)\right).$$

³Здесь и далее для вещественных m полагаем $\overline{m} = \max(1, |m|)$. Таким образом, величину $\overline{m}$ можно назвать усеченной нормой числа m , что согласуется с понятием усеченной нормы вектора, о которой речь пойдет дальше.

⁴Здесь и далее $\sum'$ означает суммирование по системам $(m_1, \dots, m_s) \neq (0, \dots, 0)$.

Нетрудно видеть, что произвольная периодическая функция $f(\vec{x})$ из $E_s^\alpha(C)$ по модулю ограничена величиной $C \cdot (1 + 2\zeta(\alpha))^s$, при этом данная оценка достижима на функции

$$f(\vec{x}) = \sum_{\vec{m}=-\infty}^{\infty} \frac{C \cdot e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}}{(\overline{m_1} \cdot \dots \cdot \overline{m_s})^\alpha}$$

в точке $\vec{x} = \vec{0}$.

Очевидно, что $E_s^\alpha(C) \subset E_s^\beta(C)$ при $\alpha \geq \beta$. Для любой периодической функции $f(\vec{x}) \in E_s^\alpha(C) \subset E_s^\beta(C)$ справедливо неравенство для норм

$$\|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} \geq \|f(\vec{x})\|_{E_s^\beta}.$$

Равенство достигается только для конечных тригонометрических многочленов вида

$$f(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in N(1)} C(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}.$$

На классе E_s^α рассмотрим эквивалентную норму:

$$\|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha, C_1} = \sup_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s} |C(\vec{m})| (\overline{C_1 m_1} \dots \overline{C_1 m_s})^\alpha. \quad (11)$$

Пространства E_s^α и $E_s^\alpha(\cdot, C_1)$ — несепарабельные банаховы пространства, изоморфные пространству $l_{s, \infty}$ — ограниченных комплекснозначных функций на фундаментальной решётки $\mathbb{Z}^s$, которое в силу счётности $\mathbb{Z}^s$ изоморфно пространству l_∞ — ограниченных последовательностей комплексных чисел.

Действительно, этот изоморфизм нормированных пространств E_s^α и $l_{s, \infty}$ задается равенствами для коэффициентов Фурье

$$C(\vec{m}) = \frac{c(\vec{m})}{(\overline{m_1} \dots \overline{m_s})^\alpha}, \quad \vec{m} \in \mathbb{Z}^s, \quad \|c(\vec{m})\|_\infty = \sup_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s} |c(m_1, \dots, m_s)| < \infty.$$

Шар радиуса $C > 0$ в пространстве $E_s^\alpha(\cdot, C_1)$ с нормой (11) обозначают через $E_s^\alpha(C, C_1)$.

О свойствах класса $E_s^\alpha(C)$ подробно можно узнать в [26] и [28] (так же см. [20]).

Для дальнейшего мы будем рассматривать класс $E_s = \bigcup_{\alpha > 1} E_s^\alpha$. Очевидно $E_s \subset \mathfrak{A}_s$. Ясно, что класс E_s незамкнут в пространстве $\mathfrak{A}_s$ относительно нормы $\|f(\vec{x})\|_{l_1}$, но является всюду плотным множеством.

Наряду с нормой (9) рассмотрим нормы

$$\|f(\vec{x})\|_C = \sup_{\vec{x} \in G_s} |f(\vec{x})| \quad (12)$$

и

$$\|f(\vec{x})\|_{l_1} = \sum_{\vec{m}=-\infty}^{\infty} |c(\vec{m})|, \quad \|f(\vec{x})\|_{l_2} = \left(\sum_{\vec{m}=-\infty}^{\infty} |c(\vec{m})|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (13)$$

Относительно норм (12) и (13) класс E_s^α становится незамкнутым линейным подмножеством пространств непрерывных периодических функций и периодических функций с абсолютно сходящимися рядами Фурье соответственно (см. [20]).

Нетрудно видеть, что справедливы следующие неравенства:

$$\begin{aligned} \|f(\vec{x})\|_{l_2} &\leq \|f(\vec{x})\|_C, \quad \|f(\vec{x})\|_C \leq \|f(\vec{x})\|_{l_1}, \\ \|f(\vec{x})\|_{l_1} &\leq \|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} (1 + 2\zeta(\alpha))^s. \end{aligned} \quad (14)$$

Последнее неравенство (14) можно уточнить при дополнительном ограничении, что $C(\vec{m}) = 0$ при $\vec{m} \in K(t)$. Предварительно сформулируем несколько лемм из работ [10, 9].

1.3. Суммы по гиперболическому кресту

Для натурального $t > 1$ положим:

$$A_j(t) = \sum_{m_1 \dots m_j > t} \frac{1}{(m_1 \dots m_j)^\alpha} \quad (\alpha > 1), \quad (15)$$

$$B_j(t) = \sum_{m_1 \dots m_j \leq t} 1, \quad C_j(t) = \sum_{m_1 \dots m_j \leq t} \frac{1}{m_1 \dots m_j}, \quad (16)$$

суммирование проводится только по натуральным $m_1, \dots, m_j$.

Так как t – натуральное, то

$$A_1(t) = \sum_{m > t} \frac{1}{m^\alpha} < \int_t^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{(\alpha-1)t^{\alpha-1}}, \quad B_1(t) = t, \quad C_1(t) \leq \ln t + 1. \quad (17)$$

ЛЕММА 1. *Справедливо неравенство*

$$C_j(t) \leq \sum_{k=0}^j \frac{C_j^k \ln^k t}{k!}. \quad (18)$$

ЛЕММА 2. *Справедливо неравенство*

$$B_j(t) \leq t \sum_{k=0}^{j-1} \frac{C_{j-1}^k \ln^k t}{k!}. \quad (19)$$

В работе [9] доказана следующая оценка, которая является уточнением известной леммы из книги Н. М. Коробова [26] (см. с. 125, лемма 28).

ЛЕММА 3. *Справедливо неравенство*

$$A_j(t) \leq \frac{1}{t^{\alpha-1}} \left(\frac{\ln^{j-1} t}{(\alpha-1)(j-1)!} + \sum_{m=0}^{j-2} \frac{\ln^m t}{m!} \left(\sum_{k=m}^{j-2} \zeta(\alpha)^{j-2-k} C_k^m \frac{\alpha-1+\zeta(\alpha)}{\alpha-1} + \frac{C_{j-1}^m}{\alpha-1} \right) \right). \quad (20)$$

ТЕОРЕМА 3. *Справедливо неравенство*

$$|KZ_s(t)| \leq \frac{2^s}{(s-1)!} t \left(\ln t + \frac{3s}{2} \right)^{s-1} + 1. \quad (21)$$

ТЕОРЕМА 4. *Справедливо неравенство*

$$|KZ_s(t)| \geq t \frac{2^s \ln^{s-1} t}{(s-1)!} + t(1 - (-1)^s) + (-1)^s. \quad (22)$$

1.4. Оценки норм

ТЕОРЕМА 5. Пусть натуральное $t > 1$ и разложение периодической функции $f(\vec{x}) \in E_s^\alpha$ имеет вид:

$$f(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \notin K_s(t)} c(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}. \quad (23)$$

Справедливо неравенство

$$\|f(\vec{x})\|_{l_1} \leq \frac{\|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}}{t^{\alpha-1}} \left(\frac{2^s \ln^{s-1} t}{(s-1)!(\alpha-1)} + \sum_{m=0}^{s-2} \frac{\ln^m t}{m!} \sum_{k=m}^{s-1} \frac{C_k^m}{\zeta(\alpha)^k} \left(\sum_{j=k+2}^s C_s^j 2^j \zeta(\alpha)^{j-2} + \sum_{j=k+1}^s C_s^j 2^j \frac{\zeta(\alpha)^{j-1}}{\alpha-1} \right) \right). \quad (24)$$

Рассмотрим для любого натурального t конечномерное подпространство $P^{(t)}$ всех тригонометрических полиномов вида:

$$f(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in K_s(t)} c(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}. \quad (25)$$

Тригонометрический полином

$$f_0(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in K_s(t)} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}, \quad (26)$$

очевидно, имеет следующие нормы:

$$\begin{aligned} \|f_0(\vec{x})\|_{l_0} &= \sup_{\vec{m} \in |K_s(t)|} |c(\vec{m})| = 1, \quad \|f_0(\vec{x})\|_C = |KZ_s(t)|, \\ \|f_0(\vec{x})\|_{l_1} &= |KZ_s(t)|, \quad \|f_0(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} = t^\alpha. \end{aligned} \quad (27)$$

Из теоремы 3 и равенств (27) вытекает, что

$$\begin{aligned} \|f_0(\vec{x})\|_{l_0} &= \frac{\|f_0(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}}{t^\alpha}, \\ \|f_0(\vec{x})\|_C = \|f_0(\vec{x})\|_{l_1} &\leq \frac{\|f_0(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}}{t^{\alpha-1}} \left(\frac{2^s}{(s-1)!} \left(\ln t + \frac{3s}{2} \right)^{s-1} + 1 \right). \end{aligned} \quad (28)$$

Из оценки снизу (22) и равенства (27) следует оценка снизу для норм:

$$\|f_0(\vec{x})\|_C = \|f_0(\vec{x})\|_{l_1} \geq \frac{\|f_0(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}}{t^{\alpha-1}} \left(\frac{2^s}{(s-1)!} \ln^{s-1} t + 1 + (-1)^{s-1} + \frac{(-1)^s}{t} \right). \quad (29)$$

Таким образом, оценка сверху (28) и оценка снизу (29) совпадают по порядку относительно t .

1.5. Квадратурные формулы

Рассмотрим *квадратурную формулу с весами*

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 f(x_1, \dots, x_s) dx_1 \dots dx_s = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \rho_k f[\xi_1(k), \dots, \xi_s(k)] - R_N[f]. \quad (30)$$

Здесь через $R_N[f]$ обозначена погрешность, получающаяся при замене интеграла

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 f(x_1, \dots, x_s) dx_1 \dots dx_s$$

средним взвешенным значением функции $f(x_1, \dots, x_s)$, вычисленным в точках

$$M_k = (\xi_1(k), \dots, \xi_s(k)) \quad (k = 1 \dots N).$$

Совокупность M точек M_k называется *сеткой* M , а сами точки — *узлами квадратурной формулы*. Величины $\rho_k = \rho(M_k)$ называются весами квадратурной формулы. В этой работе будем везде предполагать, что все веса вещественнозначные.

Справедлива следующая обобщенная теорема Коробова о погрешности квадратурных формул (см. [8]).⁵

⁵Здесь и далее $\sum'$ означает суммирование по системам $(m_1, \dots, m_s) \neq (0, \dots, 0)$.

ТЕОРЕМА 6. Пусть ряд Фурье функции $f(\vec{x})$ сходится абсолютно, $C(\vec{m})$ — ее коэффициенты Фурье и $S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})$ — тригонометрические суммы сетки с весами, тогда справедливо равенство

$$\begin{aligned} R_N[f] &= C(\vec{0}) \left(\frac{1}{N} S_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) - 1 \right) + \frac{1}{N} \sum'_{m_1, \dots, m_s = -\infty}^{\infty} C(\vec{m}) S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m}) = \\ &= C(\vec{0}) \left(S_{M,\vec{\rho}}^*(\vec{0}) - 1 \right) + \sum'_{m_1, \dots, m_s = -\infty}^{\infty} C(\vec{m}) S_{M,\vec{\rho}}^*(\vec{m}) \end{aligned} \quad (31)$$

и при $N \rightarrow \infty$ погрешность $R_N[f]$ будет стремиться к нулю тогда, и только тогда, когда взвешенные узлы квадратурной формулы равномерно распределены в единичном s -мерном кубе.

Из этой теоремы непосредственно следует, что для нормы линейного функционала погрешности приближенного интегрирования $R_N[f]$ на классе $\mathfrak{A}_s$ справедливо равенство

$$\|R_N[\cdot]\|_{\mathfrak{A}_s} = \max \left(\left| S_{M,\vec{\rho}}^*(\vec{0}) - 1 \right|, \sup_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s \setminus \{\vec{0}\}} |S_{M,\vec{\rho}}^*(\vec{m})| \right). \quad (32)$$

Анализ формулы (32) позволяет сделать вывод, что класс $\mathfrak{A}_s$ слишком широк для рассмотрения вопросов о скорости сходимости погрешности квадратурной формулы к нулю. Как показали Н. М. Коробов и его последователи уже на классе E_s^α этот вопрос становится содержательным.

Обобщая работу [22], в работе [8] дано следующее определение дзета-функции сетки M с весами $\vec{\rho}$ и параметром $p \geq 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Дзета-функцией сетки M с весами $\vec{\rho}$ и параметром $p \geq 1$ называется функция $\zeta(\alpha, p | M, \vec{\rho})$, заданная в правой полуплоскости $\alpha = \sigma + it$ ($\sigma > 1$) рядом Дирихле

$$\zeta(\alpha, p | M, \vec{\rho}) = \sum'_{m_1, \dots, m_s = -\infty}^{\infty} \frac{|S_{M,\vec{\rho}}^*(\vec{m})|^p}{(\overline{m}_1 \dots \overline{m}_s)^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S^*(p, M, \vec{\rho}, n)}{n^\alpha}, \quad (33)$$

где

$$S^*(p, M, \vec{\rho}, n) = \sum_{\vec{m} \in N(n)} |S_{M,\vec{\rho}}^*(\vec{m})|^p. \quad (34)$$

Непосредственно из определения следует неравенство

$$\zeta(p\alpha, p | M, \vec{\rho}) \leq \zeta^p(\alpha, 1 | M, \vec{\rho}) \quad (\alpha > 1). \quad (35)$$

Если все веса равны 1, то будем говорить просто дзета-функция сетки M с параметром p и писать $\zeta(\alpha, p | M)$.

Справедливы две обобщенные теоремы Коробова о погрешности квадратурных формул — это теорема 6 (см. стр. 129) и следующая теорема:

ТЕОРЕМА 7. Если $f(x_1, \dots, x_s) \in E_s^\alpha(C)$, то для погрешности квадратурной формулы справедлива оценка

$$\begin{aligned} |R_N[f]| &\leq C \left| \frac{1}{N} S_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) - 1 \right| + \frac{C}{N} \sum'_{m_1, \dots, m_s = -\infty}^{\infty} \frac{|S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})|}{(\overline{m}_1 \dots \overline{m}_s)^\alpha} = \\ &= C \left| S_{M,\vec{\rho}}^*(\vec{0}) - 1 \right| + C \cdot \zeta(\alpha, 1 | M, \vec{\rho}), \end{aligned} \quad (36)$$

где сумма $S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})$ определена равенством (6). На классе $E_s^\alpha(C)$ эту оценку нельзя улучшить.

Другими словами теорему 7 можно сформулировать так:

Для нормы $\|R_N[f]\|_{E_s^\alpha}$ линейного функционала погрешности приближенного интегрирования по квадратурной формуле (30) справедливо равенство

$$\begin{aligned}\|R_N[f]\|_{E_s^\alpha} &= \left| \frac{1}{N} S_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) - 1 \right| + \frac{1}{N} \sum'_{m_1, \dots, m_s = -\infty}^{\infty} \frac{|S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})|}{(\overline{m}_1 \dots \overline{m}_s)^\alpha} = \\ &= \left| S_{M,\vec{\rho}}^*(\vec{0}) - 1 \right| + \zeta(\alpha, 1|M, \vec{\rho}).\end{aligned}\quad (37)$$

Если рассмотреть класс $E_s^{\alpha,q}$ с нормой

$$\|f(\vec{x})\|_{E_s^{\alpha,q}} = \left(|C(\vec{0})|^q + \sum'_{m_1, \dots, m_s = -\infty}^{\infty} |C(\vec{m})|^q (\overline{m}_1 \dots \overline{m}_s)^{\frac{q\alpha}{p}} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

то справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 8. Если $f(\vec{x}) \in E_s^{\alpha,q}$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, то для погрешности квадратурной формулы справедлива оценка

$$\begin{aligned}|R_N[f]| &\leq \\ &\leq \|f(\vec{x})\|_{E_s^{\alpha,q}} \left(\left| \frac{1}{N} S_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) - 1 \right|^p + \frac{1}{N^p} \sum'_{m_1, \dots, m_s = -\infty}^{\infty} \frac{|S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})|^p}{(\overline{m}_1 \dots \overline{m}_s)^\alpha} \right)^{\frac{1}{p}} = \\ &= \|f(\vec{x})\|_{E_s^{\alpha,q}} \left(\left| S_{M,\vec{\rho}}^*(\vec{0}) - 1 \right|^p + \zeta(\alpha, p|M, \vec{\rho}) \right)^{\frac{1}{p}},\end{aligned}\quad (38)$$

где сумма $S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})$ определена равенством (6). На классе $E_s^{\alpha,q}$ эту оценку нельзя улучшить.

Из теорем 7 и 8 следует, что на классах E_s^α и $E_s^{\alpha,q}$ оценка погрешности приближенного интегрирования сводится к оценке гиперболической дзета-функции сеток. Проводя аналогию с гиперболической дзета-функцией решетки, которая равна гиперболической дзета-функции сеток в случае параллелепipedальной сетки, можно высказать гипотезу, что для гиперболической дзета-функции сеток должен быть справедлив аналог теоремы Бахвалова об оценке гиперболической дзета-функцией решетки через гиперболический параметр решетки.

Цель разделов 6 и 7 — ввести понятие гиперболических параметров сетки и доказать аналог теоремы Бахвалова для гиперболической дзета-функции сеток.

Модифицированной сеткой $M(\vec{\beta})$ будем называть сетку, состоящую из модифицированных узлов

$$M_k(\vec{\beta}) = (\{\xi_1(k) + \beta_1\}, \dots, \{\xi_s(k) + \beta_s\}) \quad (k = 1, \dots, N).$$

Линейный функционал погрешности приближенного интегрирования периодической функции $f(\vec{x})$ из класса E_s^α по квадратурной формуле с весами $\vec{\rho}$ и модифицированной сеткой $M(\vec{\beta})$ будем обозначать через $R_{M(\vec{\beta}),\vec{\rho}}[f(\vec{x})]$, а его норму — через $\|R_{M(\vec{\beta}),\vec{\rho}}\|_{E_s^\alpha}$.

В новых обозначениях утверждение (36) формулируется так: для нормы линейного функционала погрешности приближенного интегрирования функций, принадлежащих классу E_s^α , по квадратурной формуле с весами $\vec{\rho}$ и модифицированной сеткой $M(\vec{\beta})$ выполняется равенство

$$\begin{aligned}\|R_{M(\vec{\beta}),\vec{\rho}}\|_{E_s^\alpha} &= \left| \frac{1}{N} S_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) - 1 \right| + \frac{1}{N} \sum'_{m_1, \dots, m_s = -\infty}^{\infty} \frac{|S_{M,\vec{\rho}}(m_1, \dots, m_s)|}{(\overline{m}_1 \dots \overline{m}_s)^\alpha} = \\ &= \left| S_{M,\vec{\rho}}^*(\vec{0}) - 1 \right| + \zeta(\alpha, 1|M, \vec{\rho}).\end{aligned}\quad (39)$$

Из этого равенства следует, что для всех модифицированных сеток $M(\vec{\beta})$ норма определяется исходной сеткой M и не зависит от вектора модификации. Это просто объяснить через понятие граничной функции класса, которое впервые встречается в работе Н. М. Коробова [27], а более подробно в его монографии [28].

Функции $f(\vec{x})$ с единичной нормой, для которых абсолютная погрешность приближенного интегрирования равна норме линейного функционала погрешности, следуя Коробову, будем называть *граничными функциями класса* E_s^α . Легко видеть, что граничной функцией класса E_s^α для сетки M с весами $\vec{\rho}$ будет функция с коэффициентами Фурье

$$C_0(\vec{m}) = \begin{cases} 0 & \text{при } S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m}) = 0, \\ \frac{\overline{S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})}}{|S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})|q^\alpha(\vec{m})} & \text{при } S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m}) \neq 0. \end{cases} \quad (40)$$

Ясно, что если при некоторых значениях $m_1, \dots, m_s$ тригонометрическая сумма $S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m}) = 0$, то граничная функция класса сеткой определена неоднозначно.

Нетрудно видеть, что если $f(\vec{x})$ — граничная функция класса E_s^α для сетки M , то $g(\vec{x}) = f(\vec{x} - \vec{\beta})$ — граничная функция класса E_s^α для модифицированной сетки $M(\vec{\beta})$.

Так как граничная функция класса зависит от вектора модификации сетки, то приближенное интегрирование одной и той же функции по модифицированным сеткам для разных векторов модификации приводит к появлению дополнительной информации о приближенном значении искомого интеграла. Такая ситуация естественно возникает при использовании произведения сеток, если соответствующим образом организовать суммирование в квадратурной формуле, как будет видно из дальнейшего.

2. Алгоритмы приближенного интегрирования с правилом остановки

Сделаем ещё несколько замечаний по поводу приближенного интегрирования периодических функций многих переменных (см. также [18]). Согласно теореме 7 для погрешности приближенного интегрирования справедлива оценка

$$|R_N[f]| \leq \|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} \cdot \left(|S_{M,\vec{\rho}}^*(\vec{0}) - 1| + \zeta(\alpha, 1|M, \vec{\rho}) \right),$$

но норма функции $\|f\|_{E_s^\alpha}$, как правило, неизвестна и задача её вычисления более сложная чем задача вычисления интеграла, который является значением только одного коэффициента Фурье $C(\vec{0})$. Более того, относительно параметра гладкости α для конкретной функции может быть известна только некоторая оценка, вытекающая из дифференциальных свойств функции, что приводит ещё к большей неопределенности для решения вопроса о достигнутой точности вычисления по конкретной квадратурной формуле для этой конкретной функции. Дадим следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Будем говорить, что задан алгоритм приближенного интегрирования

$$\langle M(j), \vec{\rho}(j), \Delta \rangle \quad (j = 1, 2, \dots)$$

периодической функции $f(\vec{x})$ из класса $E_s = \bigcup_{\alpha > 1} E_s^\alpha$ с правилом остановки $\Delta(f(\vec{x}))$, если задана бесконечная возрастающая последовательность натуральных N_j с $\lim_{j \rightarrow \infty} N_j = \infty$ и сеток с весами $M(j), \vec{\rho}(j)$ из N_j взвешенных узлов равномерно распределенных в единичном s -мерном кубе такая, что для правила остановки $\Delta(f(\vec{x})) < \varepsilon$ величина

$$\Delta(f(\vec{x})) = \Delta(f(\vec{x}), M(j), \vec{\rho}(j))$$

и выполняется равенство

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \Delta(f(\vec{x}), M(j), \vec{\rho}(j)) = 0. \quad (41)$$

В этом определении предполагается, что величина $\Delta(f(\vec{x}), M(j), \vec{\rho}(j))$ алгоритмически выражается через веса и значения функции в узлах сетки. Кроме того предполагается, что для любого N_j из данной последовательности сетка с весами $M(j), \vec{\rho}(j)$ алгоритмически вычисляется. В данной работе будет предложена в качестве правила остановки величины дискретной дисперсии и сеточного размаха, определение которых будет дано ниже. Таким образом, вычисление приближенного значения интеграла продолжается до тех пор, пока для заданного $\varepsilon > 0$ не будет выполнено правило остановки $\Delta(f(\vec{x}), M(j), \vec{\rho}(j)) < \varepsilon$.

Следуя К. И. Бабенко [1] и О. В. Локуциевскому [29], дадим следующее определение ненасыщаемого алгоритма приближенного интегрирования на классе $E_s = \bigcup_{\alpha > 1} E_s^\alpha$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Будем говорить, что периодическая функция $f(\vec{x})$ из класса $E_s = \bigcup_{\alpha > 1} E_s^\alpha$ принадлежит конечному показателю $\alpha = \alpha(f(\vec{x}))$, если $f(\vec{x}) \in E_s^\alpha$ и $f(\vec{x}) \notin E_s^\beta$ для любого $\beta > \alpha$. В противном случае будем говорить, что периодическая функция из класса E_s принадлежит бесконечному показателю.

Ясно, что бесконечному показателю принадлежит любой конечный тригонометрический полином. Если периодическая функция $f(\vec{x}) \in E_s$ не является конечным тригонометрическим полиномом и принадлежит бесконечному показателю, то она будет бесконечно дифференцируемой функцией.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. Будем говорить, что алгоритм приближенного интегрирования $\langle M(j), \vec{\rho}(j), \Delta \rangle$ ($j = 1, 2, \dots$) периодических функций из класса $E_s = \bigcup_{\alpha > 1} E_s^\alpha$ ненасыщаемый типа (γ, λ) , если для любой периодической функции $f(\vec{x})$ конечного показателя $\alpha = \alpha(f(\vec{x}))$ и погрешности приближенного интегрирования выполняется равенство

$$R_{N_j}[f(\vec{x})] = O\left(\frac{\ln^\gamma N_j}{N_j^{\lambda \cdot \alpha}}\right). \quad (42)$$

Как известно (см. [28]), методом оптимальных коэффициентов Коробова можно построить ненасыщаемые алгоритмы типа $((s-1)\alpha, 1)$, а модифицированным методом Фролова — $((s-1), 1)$. Для случая равномерных сеток имеем тип $(0, \frac{1}{s})$.

С точки зрения трудоемкости вычислений разумно выделить класс алгоритмов приближенного интегрирования, в которых j -ая квадратурная формула полностью использует результаты вычислений по $j-1$ -ой квадратурной формуле. Дадим следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. Будем говорить, что задан концентрический алгоритм приближенного интегрирования $\langle M(j), \vec{\rho}(j), \Delta \rangle$ ($j = 1, 2, \dots$) периодических функций из класса $E_s = \bigcup_{\alpha > 1} E_s^\alpha$, если для любого $j \geq 1$ выполняются условия

$$M(j) \subset M(j+1), \quad \exists \rho : \forall \vec{x} \in M(j) : \rho_{j+1}(\vec{x}) = \rho \cdot \rho_j(\vec{x}). \quad (43)$$

Наиболее простой пример концентрических алгоритмов приближенного интегрирования дают квадратурные формулы с равными весами, построенными из первых членов бесконечной равномерно распределенной по модулю 1 бесконечной последовательности точек из единичного s -мерного куба. Другой класс концентрических алгоритмов приближенного интегрирования связан с понятием произведения сеток с весами.

Пусть даны две сетки с весами $\langle M_1, \vec{\rho}_1 \rangle$ и $\langle M_2, \vec{\rho}_2 \rangle$. Напомним определение произведения сеток с весами из работы [21], которое здесь несколько отличается для случая $|M_3| \neq |M_1| \cdot |M_2|$ появлением нормировочного множителя.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13. Произведением двух сеток с весами $\langle M_1, \vec{\rho}_1 \rangle$ и $\langle M_2, \vec{\rho}_2 \rangle$ называется третья сетка

$$\langle M_3, \vec{\rho}_3 \rangle = \langle M_1, \vec{\rho}_1 \rangle \cdot \langle M_2, \vec{\rho}_2 \rangle, \quad (44)$$

где

$$M_3 = \{\{\vec{x} + \vec{y}\} | \vec{x} \in M_1, \vec{y} \in M_2\}, \quad (45)$$

$$\rho_3(\vec{z}) = \frac{|M_3|}{|M_1| \cdot |M_2|} \sum_{\substack{\vec{z} = \{\vec{x} + \vec{y}\}, \\ \vec{x} \in M_1, \vec{y} \in M_2}} \rho_1(\vec{x}) \cdot \rho_2(\vec{y}), \quad (46)$$

и для любого вектора $\vec{z} = (z_1, \dots, z_s)$ дробной частью вектора называется вектор $\{\vec{z}\} = (\{z_1\}, \dots, \{z_s\})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14. Будем говорить, что задан мультипликативный алгоритм приближенного интегрирования $\langle M^*(j), \vec{\rho}^*(j), \Delta \rangle$ ($j = 1, 2, \dots, n, \dots$) периодических функций из класса $E_s = \bigcup_{\alpha > 1} E_s^\alpha$, порожденный бесконечной последовательностью $\langle M(j), \vec{\rho}(j) \rangle$ ($j \in \mathbb{N}$), если $M^*(1) = M(1)$, $\vec{\rho}^*(1) = \vec{\rho}(1)$ и для любого $j \geq 1$ выполняются условия

$$\langle M^*(j+1), \vec{\rho}^*(j+1) \rangle = \langle M^*(j), \vec{\rho}^*(j) \rangle \cdot \langle M(j+1), \vec{\rho}(j+1) \rangle. \quad (47)$$

Нетрудно видеть, что если для каждой сетки $\vec{0} \in M(j)$ ($j = 1, 2, \dots$), то мультипликативный алгоритм приближенного интегрирования будет концентрическим, так как в этом случае всегда $M^*(j) \subset M^*(j+1)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15. Мультипликативный алгоритм приближенного интегрирования

$$\langle M^*(j), \vec{\rho}^*(j), \Delta \rangle \quad (j = 1, 2, \dots, n, \dots)$$

периодических функций из класса $E_s = \bigcup_{\alpha > 1} E_s^\alpha$, порожденный бесконечной последовательностью

$$\langle M(j), \vec{\rho}(j) \rangle \quad (j = 1, 2, \dots)$$

с дополнительным условием

$$\vec{0} \in M(j) \quad (j = 1, 2, \dots),$$

будем называть мультипликативным, концентрическим алгоритмом приближенного интегрирования.

Пусть величины m_f, M_f — минимальное и максимальное значение функции $f(\vec{x})$ определены, соответственно, равенствами

$$m_f = \min_{\vec{x} \in [0;1]^s} f(\vec{x}), \quad M_f = \max_{\vec{x} \in [0;1]^s} f(\vec{x}), \quad (48)$$

а размах функции $v_f = M_f - m_f$, тогда справедливо неравенство

$$v_f \leq \|f\|_{E_s^\alpha} 2((1 + 2\zeta(\alpha))^s - 1). \quad (49)$$

Очевидно, что для любого алгоритма приближенного интегрирования $\langle M(j), \vec{\rho}(j), \Delta \rangle$ ($j = 1, 2, \dots$) можно определить две числовые последовательности

$$m_f(j) = \min_{\vec{x} \in M(j)} f(\vec{x}), \quad M_f(j) = \max_{\vec{x} \in M(j)} f(\vec{x}), \quad (50)$$

для которых справедливы соотношения

$$m_f(j) \geq m_f, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} m_f(j) = m_f, \quad M_f(j) \leq M_f, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} M_f(j) = M_f. \quad (51)$$

Для любого концентрического алгоритма приближенного интегрирования $\langle M(j), \vec{\rho}(j), \Delta \rangle$ ($j = 1, 2, \dots$) будут выполнены дополнительные соотношения монотонности:

$$\begin{aligned} m_f &\leq \dots \leq m_f(j) \leq \dots \leq m_f(2) \leq m_f(1) \leq \\ &\leq M_f(1) \leq M_f(2) \leq \dots \leq M_f(j) \leq \dots \leq M_f. \end{aligned} \quad (52)$$

Так как для "сеточного" размаха $v_f(j) = M_f(j) - m_f(j)$ функции $f(\vec{x})$ отличной от константы выполняется равенство $\lim_{j \rightarrow \infty} v_f(j) = v_f > 0$, то величину сеточного размаха нельзя использовать как правило остановки, но в качестве правила остановки можно использовать величину приращения сеточного размаха $dv_f(j) = v_f(j) - v_f(j-1)$, которая стремится к нулю, но с оговоркой, что если приращение сеточного размаха нулевое, то останавливаться можно только при $\frac{1}{N_j} < \varepsilon$.

Таким образом, простейшее правило остановки для концентрического алгоритма можно определить как

$$\begin{aligned} \Delta(f(\vec{x}), M(j), \vec{\rho}(j)) &= \max \left(\frac{1}{|M(j)|}, \max_{\vec{x} \in M(j)} f(\vec{x}) + \min_{\vec{x} \in M(j-1)} f(\vec{x}) - \right. \\ &\left. - \max_{\vec{x} \in M(j-1)} f(\vec{x}) - \min_{\vec{x} \in M(j)} f(\vec{x}) \right) \quad (j = 2, 3, \dots). \end{aligned} \quad (53)$$

3. Оператор взвешенных сеточных средних

Для любой сетки M с весами $\vec{\rho}$ рассмотрим на пространстве периодических функций E_s^α линейный оператор $A_{M, \vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних заданный равенством

$$g(\vec{x}) = A_{M, \vec{\rho}} f(\vec{x}) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \rho_k f[x_1 + \xi_1(k), \dots, x_s + \xi_s(k)]. \quad (54)$$

Обозначим через $A_{M, \vec{\rho}} C(\vec{m})$ действие линейного оператора $A_{M, \vec{\rho}}$ на коэффициенты Фурье функции $f(\vec{x})$.

ЛЕММА 4. Для любой периодической функции $f(\vec{x})$ из пространства E_s^α и её коэффициентов Фурье $C(\vec{m})$ разложения в ряд Фурье

$$f(\vec{x}) = \sum_{m_1, \dots, m_s = -\infty}^{\infty} C(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} \quad (55)$$

справедливо равенство

$$A_{M, \vec{\rho}} C(\vec{m}) = \frac{S_{M, \vec{\rho}}(\vec{m})}{N} C(\vec{m}) = S_{M, \vec{\rho}}^*(\vec{m}) C(\vec{m}) \quad (56)$$

где $S_{M, \vec{\rho}}(\vec{m})$ — тригонометрическая сумма сетки с весами, а $S_{M, \vec{\rho}}^*(\vec{m})$ — нормированная тригонометрическая сумма сетки с весами.

Кроме того, справедлива тривиальная оценка для нормы образа

$$\|A_{M, \vec{\rho}} f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} \leq \frac{\rho(M)}{N} \|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}. \quad (57)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 16. Назовем линейный оператор $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних нормальным, если он не увеличивает норму любой функции.

Очевидно, что необходимым и достаточным условием нормальности линейного оператора $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних является ограниченность сверху единицей модуля всех нормированных тригонометрических сумм с весами: $|S_{M,\vec{\rho}}^*(\vec{m})| \leq 1$ ($\vec{m} \in \mathbb{Z}^s$).

Из последней леммы следует, что собственными функциями линейного оператора $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних является набор базисных функций $e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})}$ ($\vec{m} \in \mathbb{Z}^s$) за исключением тех гармоник, которые переходят в ноль, то есть принадлежат ядру оператора. Собственными значениями являются соответствующие нормированные тригонометрические сумм сеток с весами $S_{M,\vec{\rho}}^*(\vec{m})$ отличные от нуля.

Таким образом, нормальные линейные операторы $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних выделяются условием, что все собственные значения этих операторов не превосходят по модулю единицу.

Если сетка с весами $\langle M, \vec{\rho} \rangle$ порождает нормальный линейный оператор $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних, то для её дзета-функции будет выполнена оценка сверху

$$\zeta(\alpha, 1|M, \vec{\rho}) \leq \zeta_H(\alpha|\mathbb{Z}^s) = ((1 + 2\zeta(\alpha))^s - 1). \quad (58)$$

Отсюда следует, что для образа $g(\vec{x}) = A_{M,\vec{\rho}}f(\vec{x})$ справедливы более точные неравенства чем (49).

$$\begin{aligned} M_g - C(\vec{0})S_{M,\vec{\rho}}^*(\vec{0}) &\leq \|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} \zeta(\alpha, 1|M, \vec{\rho}), \\ C(\vec{0})S_{M,\vec{\rho}}^*(\vec{0}) - m_g &\leq \|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} \zeta(\alpha, 1|M, \vec{\rho}), \\ v_g &\leq \|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} 2\zeta(\alpha, 1|M, \vec{\rho}). \end{aligned} \quad (59)$$

Из теорем 6 и 7 следует, что для любого алгоритма приближенного интегрирования $\langle M(j), \vec{\rho}(j), \Delta \rangle$ ($j = 1, 2, \dots$) периодической функции $f(\vec{x})$ из класса $E_s = \bigcup_{\alpha>1} E_s^\alpha$ выполняется равенство

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \zeta(\alpha, 1|M(j), \vec{\rho}(j)) = 0, \quad (60)$$

поэтому величину усредненного взвешенного сеточного размаха $v_{g(j)}(j+1)$, где $g(j) = A_{M(j),\vec{\rho}(j)}f(\vec{x}) - j$ -ый образ функции $f(\vec{x})$ под действием j -ого оператора $A_{M(j),\vec{\rho}(j)}$, можно использовать как правило остановки с одной оговоркой, что если усредненный взвешенный сеточный размах нулевой, то останавливаться можно только при $\frac{1}{N_j} < \varepsilon$.

Наиболее компактно правило остановки можно сформулировать для мультипликативного, концентрического алгоритма приближенного интегрирования $\langle M^*(j), \vec{\rho}^*(j), \Delta \rangle$ ($j = 1, 2, \dots, n, \dots$) периодических функций из класса $E_s = \bigcup_{\alpha>1} E_s^\alpha$, порожденный бесконечной последовательностью $\langle M(j), \vec{\rho}(j), \Delta \rangle$ ($j = 1, 2, \dots$) с дополнительным условием $\vec{0} \in M(j)$ ($j = 1, 2, \dots$), если положить $\langle M(0) = \{\vec{0}\}, \vec{\rho}(0) = (1) \rangle$, тогда $A_{M(0),\vec{\rho}(0)}f(\vec{x}) = f(\vec{x})$ и

$$\begin{aligned} \Delta(f(\vec{x}), M^*(j), \vec{\rho}^*(j)) &= \max \left(\frac{1}{|M^*(j)|}, \max_{\vec{x} \in M(j)} \frac{1}{|M^*(j-1)|} \sum_{\vec{y} \in M^*(j-1)} \rho(\vec{y}) f(\vec{x} + \vec{y}) - \right. \\ &\quad \left. - \min_{\vec{x} \in M(j)} \frac{1}{|M^*(j-1)|} \sum_{\vec{y} \in M^*(j-1)} \rho^*(j-1, \vec{y}) f(\vec{x} + \vec{y}) \right) \quad (j = 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (61)$$

Если правило остановки выполнено, то в качестве приближенного значения интеграла берется величина

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{|M^*(j)|} \sum_{\vec{y} \in M^*(j)} \rho^*(j, \vec{y}) f(\vec{y}) = A_{M^*(j), \vec{\rho}^*(j)} f(\vec{0}) = \\ &= \frac{1}{|M(j)|} \sum_{\vec{y} \in M(j)} \rho(j, \vec{y}) \frac{1}{|M^*(j-1)|} \sum_{\vec{y} \in M^*(j-1)} \rho^*(j-1, \vec{y}) f(\vec{x} + \vec{y}) = \\ &= A_{M(j), \vec{\rho}(j)} A_{M^*(j-1), \vec{\rho}^*(j-1)} f(\vec{0}). \end{aligned} \quad (62)$$

ТЕОРЕМА 9. Для любых двух сеток с весами $\langle M_1, \vec{\rho}_1 \rangle$ и $\langle M_2, \vec{\rho}_2 \rangle$ и произведения соответствующих линейных операторов взвешенных сеточных средних справедливо равенство

$$A_{M_1, \vec{\rho}_1} A_{M_2, \vec{\rho}_2} = A_{M_3, \vec{\rho}_3} \quad (63)$$

и сетка с весами $\langle M_3, \vec{\rho}_3 \rangle = \langle M_1, \vec{\rho}_1 \rangle \cdot \langle M_2, \vec{\rho}_2 \rangle$.

Кроме того нормированные тригонометрические суммы сетки с весами мультипликативны, то есть

$$S_{M_1, \vec{\rho}_1}^*(\vec{m}) \cdot S_{M_2, \vec{\rho}_2}^*(\vec{m}) = S_{M_3, \vec{\rho}_3}^*(\vec{m}). \quad (64)$$

4. Случайные величины и многомерные квадратурные формулы

Возьмем произвольную равномерно распределенную случайную точку $\vec{x}$ из единичного s -мерного полукоткрытого куба $G_s = [0; 1]^s$, тогда определена случайная величина $X_f = f(\vec{x})$, для математического ожидания и дисперсии которой справедливы равенства

$$M(X_f) = \int_0^1 \dots \int_0^1 f(\vec{x}) d\vec{x}, \quad (65)$$

$$D(X_f) = \int_0^1 \dots \int_0^1 \left| f(\vec{x}) - \int_0^1 \dots \int_0^1 f(\vec{x}) d\vec{x} \right|^2 d\vec{x}. \quad (66)$$

Пусть характеристическая функция $\chi_t(x)$ промежутка $[0; t)$ задается равенством

$$\chi_t(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq x < t, \\ 0 & \text{при } x \geq t, \end{cases} \quad (67)$$

тогда интегральная функция распределения $F_f(x)$ случайной величины $X_f = f(\vec{x})$ имеет следующее интегральное представление

$$F_f(x) = P(X_f < x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq m_f, \\ \int_0^1 \dots \int_0^1 \chi_x(f(\vec{t}) - m_f) d\vec{t} & \text{при } m_f < x \leq M_f, \\ 1 & \text{при } x > M_f. \end{cases} \quad (68)$$

ЛЕММА 5. Для дисперсии случайной величины X_f периодической функции $f(\vec{x})$ из пространства E_s^α справедливо равенство

$$D(X_f) = \int_0^1 \dots \int_0^1 |f(\vec{x})|^2 d\vec{x} - \left| \int_0^1 \dots \int_0^1 f(\vec{x}) d\vec{x} \right|^2. \quad (69)$$

Из равенства Парсеваля следует, что

$$D(X_f) = \sum_{m_1, \dots, m_s = -\infty}^{\infty'} |C(\vec{m})|^2. \quad (70)$$

Для дисперсии справедлива оценка через норму функции:

$$\begin{aligned} D(X_f) &\leq \|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}^2 \sum_{m_1, \dots, m_s = -\infty}^{\infty'} (\bar{m}_1 \dots \bar{m}_s)^{-2\alpha} = \\ &= \|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}^2 ((1 + 2\zeta(2\alpha))^s - 1). \end{aligned} \quad (71)$$

Нетрудно видеть, что значение в произвольной точке образа функции $f(\vec{x})$ под действием линейного оператора $A_{M, \vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних является статистикой для значения интеграла от $f(\vec{x})$. Пользуясь таким взглядом на линейный оператор $A_{M, \vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних дадим следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 17. Линейный оператор $A_{M, \vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних называется несмещенным, если для любой периодической функции $f(\vec{x})$ из пространства E_s^α справедливо равенство

$$M(X_{A_{M, \vec{\rho}} f}) = \int_0^1 \dots \int_0^1 f(\vec{x}) d\vec{x}. \quad (72)$$

ТЕОРЕМА 10. Линейный оператор взвешенных сеточных средних является несмещенным тогда и только тогда, когда для весов сетки справедливо равенство

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \rho_k = 1, \quad (73)$$

то есть

$$S_{M, \vec{\rho}}^*(\vec{0}) = 1. \quad (74)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Для любой интегрируемой по Риману функции справедливо равенство

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 f(\vec{x}) d\vec{x} = \int_0^1 \dots \int_0^1 f[\{\vec{x} + \vec{w}\}] d\vec{x}, \quad (75)$$

так как отображение $\vec{x} \rightarrow \{\vec{x} + \vec{w}\}$ отображает s -мерный полукоткрытый куб $G_s = [0; 1)^s$ на себя и является кусочно гладким с единичной матрицей Якоби. Отсюда следует, что несмещенный линейный оператор взвешенных сеточных средних обладает свойством несмещенности на классе всех интегрируемых по Риману функций.

Сетки с весами $\langle M, \vec{\rho} \rangle$, задающие несмещенный линейный оператор взвешенных сеточных средних, обладают важным свойством: у них в формуле (39) исчезает член $|S_{M, \vec{\rho}}^*(\vec{0}) - 1|$ и для нормы линейного функционала погрешности приближенного интегрирования функций, принадлежащих классу E_s^α , по квадратурной формуле с весами $\vec{\rho}$ и модифицированной сеткой $M(\vec{\beta})$ выполняется равенство

$$\|R_{M(\vec{\beta}), \vec{\rho}}\|_{E_s^\alpha} = \zeta(\alpha, 1|M, \vec{\rho}). \quad (76)$$

Из мультипликативности нормированных тригонометрических сумм сетки с весами и доказанной теоремы следует, что произведение несмещенных линейных операторов взвешенных сеточных средних является несмещенным линейным оператором взвешенных сеточных средних.

Нетрудно видеть, что для дисперсии случайной величины $X_{A_{M, \vec{\rho}}}f = A_{M, \vec{\rho}}f(\vec{x})$ справедливо равенство

$$D(X_{A_{M, \vec{\rho}}}f) = \sum'_{m_1, \dots, m_s = -\infty}^{\infty} |C(\vec{m})|^2 |S_{M, \vec{\rho}}^*(\vec{m})|^2. \quad (77)$$

Переходя к оценкам коэффициентов Фурье через норму, получим неравенство

$$D(X_{A_{M, \vec{\rho}}}f) \leq \|f\|_{E_s^\alpha}^2 \cdot \zeta(2\alpha, 2|M, \vec{\rho}) \leq \|f\|_{E_s^\alpha}^2 \cdot \zeta^2(\alpha, 1|M, \vec{\rho}). \quad (78)$$

Как правило, норма функции $\|f\|_{E_s^\alpha}$ неизвестна и задача её вычисления более сложная чем задача вычисления интеграла, который является значением только одного коэффициента Фурье $C(\vec{0})$. Поэтому целесообразно оценивать дисперсию $D(X_{A_{M, \vec{\rho}}}f)$, которая убывает вместе с величиной линейного функционала погрешности приближенного интегрирования $R_{M(\vec{\beta}), \vec{\rho}}[f(\vec{x})]$. Так как саму дисперсию вычислить в общем виде не представляется возможным, то дадим следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 18. *Сеточной дисперсией с весами периодической функции $f(\vec{x})$ из пространства E_s^α будем называть величину $D_{M, \vec{\rho}}[f(\vec{x})]$, заданную равенством*

$$\begin{aligned} D_{M, \vec{\rho}}[f(\vec{x})] &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \rho_k \left| f[\xi_1(k), \dots, \xi_s(k)] - \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N \rho_l f[\xi_1(l), \dots, \xi_s(l)] \right|^2 = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \rho_k |f[\xi_1(k), \dots, \xi_s(k)]|^2 - \left| \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N \rho_l f[\xi_1(l), \dots, \xi_s(l)] \right|^2. \end{aligned} \quad (79)$$

ЛЕММА 6. *Для сеточной дисперсии с весами периодической функции $f(\vec{x})$ из пространства E_s^α если линейный оператор $A_{M, \vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних является несмещенным, то справедливо равенство*

$$D_{M, \vec{\rho}}[f(\vec{x})] = D(X_f) - D(X_{A_{M, \vec{\rho}}}f) + DR_{M, \vec{\rho}}[f(\vec{x})], \quad (80)$$

где ⁶

$$DR_{M, \vec{\rho}}[f(\vec{x})] = \sum_{\vec{m}, \vec{n} = -\infty}^{\infty} C(\vec{m}) \overline{C(\vec{n})} (S_{M, \vec{\rho}}^*(\vec{m} - \vec{n}) - S_{M, \vec{\rho}}^*(\vec{m}) S_{M, \vec{\rho}}^*(-\vec{n})). \quad (81)$$

⁶Здесь и далее $\sum^*$ означает суммирование по системам $\vec{m} \neq \vec{0}$, $\vec{n} \neq \vec{0}$, $\vec{m} \neq \vec{n}$.

Нетрудно видеть из доказанной леммы, что для любого алгоритма приближенного интегрирования $\langle M(j), \vec{\rho}(j), \Delta \rangle$ ($j = 1, 2, \dots$) сеточную дисперсию с весами периодической функции $f(\vec{x})$ нельзя использовать как правило остановки, так как она будет сходиться к дисперсии $D(X_f) > 0$. Поэтому дадим следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 19. *Дискретной дисперсией погрешности приближенного интегрирования по квадратурной формуле с сеткой M и весами $\vec{\rho}$ периодической функции $f(\vec{x})$ из пространства E_s^α будем называть величину $D_{M,\vec{\rho}}^*[f(\vec{x})]$, заданную равенством*

$$D_{M,\vec{\rho}}^*[f(\vec{x})] = D_{M,\vec{\rho}}[A_{M,\vec{\rho}}f(\vec{x})]. \quad (82)$$

Следующая лемма показывает, что в принципе в случае несмещенного, нормального линейного оператора $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних дискретная дисперсия $D_{M,\vec{\rho}}^*[f(\vec{x})]$ может выполнять функции правила остановки в алгоритме приближенного интегрирования.

ЛЕММА 7. *Если линейный оператор $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних является несмещенным и нормальным, то для его дискретной дисперсии $D_{M,\vec{\rho}}^*[f(\vec{x})]$ справедливо неравенство*

$$D_{M,\vec{\rho}}^*[f(\vec{x})] \leq 2\|f\|_{E_s^\alpha}^2 \cdot \zeta^2(\alpha, 1|M, \vec{\rho}). \quad (83)$$

Другим важным критерием возможности использования дискретной дисперсии в качестве правила остановки является её трудоемкость вычисления. В следующей лемме дается явное выражение для дискретной дисперсии, из которого видно, что необходимо учитывать конкретные свойства используемой сетки, чтобы провести дальнейшее упрощение выражения для дискретной дисперсии.

ЛЕММА 8. *Для дискретной дисперсии $D_{M,\vec{\rho}}^*[f(\vec{x})]$ справедливо равенство*

$$D_{M,\vec{\rho}}^*[f(\vec{x})] = A_{M,\vec{\rho}} \left| A_{M,\vec{\rho}}f(\vec{0}) \right|^2 - \left| A_{M,\vec{\rho}}A_{M,\vec{\rho}}f(\vec{0}) \right|^2. \quad (84)$$

Из последней леммы видно, что вычисление дискретной дисперсии произвольной сетки с весами требует $O(N^2)$ операций, что является существенно более трудоемким чем вычисление приближенного значения интеграла. Поэтому дадим модифицированное определение дискретной дисперсии для случая мультипликативного, концентрического алгоритма приближенного интегрирования. Фактически эта модификация применима для любого произведения двух сеток с весами. Поэтому назовем такую дисперсию мультипликативной дискретной дисперсией.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 20. *Если сетка M с весами $\vec{\rho}$ является произведением двух сеток с весами $\langle M, \vec{\rho} \rangle = \langle M_1, \vec{\rho}_1 \rangle \cdot \langle M_2, \vec{\rho}_2 \rangle$, то мультипликативной дискретной дисперсией погрешности приближенного интегрирования по квадратурной формуле с сеткой M и весами $\vec{\rho}$ периодической функции $f(\vec{x})$ из пространства E_s^α будем называть величину $D_{M,\vec{\rho}}^*[f(\vec{x})]$, заданную равенством*

$$D_{M,\vec{\rho}}^*[f(\vec{x})] = A_{M_2,\vec{\rho}_2} \left| A_{M_1,\vec{\rho}_1}f(\vec{0}) \right|^2 - \left| A_{M,\vec{\rho}}f(\vec{0}) \right|^2. \quad (85)$$

Из определения видно, что функция мультипликативной дискретной дисперсии не является симметричной относительно сомножителей, но зато она по трудоемкости вычислений сравнима с трудоемкостью вычисления приближенного значения интеграла.

ЛЕММА 9. Если сетка M с весами $\vec{\rho}$ является произведением двух сеток с весами $\langle M, \vec{\rho} \rangle = \langle M_1, \vec{\rho}_1 \rangle \cdot \langle M_2, \vec{\rho}_2 \rangle$ и операторы $A_{M_1, \vec{\rho}_1}$ и $A_{M_2, \vec{\rho}_2}$ — нормальные и несмещенные, то для мультипликативной дискретной дисперсии $D_{M, \vec{\rho}}^*[f(\vec{x})]$ справедливо равенство

$$D_{M, \vec{\rho}}^*[f(\vec{x})] = \frac{1}{N_2} \sum_{\vec{x} \in M_2} \rho_2(\vec{x}) \left| \frac{1}{N_1} \sum_{\vec{y} \in M_1} \rho_1(\vec{y}) f(\vec{y} + \vec{x}) - \frac{1}{N} \sum_{\vec{z} \in M} \rho(\vec{z}) f(\vec{z}) \right|^2. \quad (86)$$

ЛЕММА 10. Если сетка M с весами $\vec{\rho}$ является произведением двух сеток с весами $\langle M, \vec{\rho} \rangle = \langle M_1, \vec{\rho}_1 \rangle \cdot \langle M_2, \vec{\rho}_2 \rangle$ и операторы $A_{M_1, \vec{\rho}_1}$ и $A_{M_2, \vec{\rho}_2}$ — нормальные и несмещенные, то для мультипликативной дискретной дисперсии $D_{M, \vec{\rho}}^*[f(\vec{x})]$ справедливо неравенство

$$|D_{M, \vec{\rho}}^*[f(\vec{x})]| \leq \|f\|_{E_s^\alpha}^2 \times (\zeta(\alpha, 1|M, \vec{\rho}) + \zeta^2(\alpha, 1|M_1, \vec{\rho}_1) + \zeta(\alpha, 1|M_1, \vec{\rho}_1)\zeta(\alpha, 1|M, \vec{\rho})). \quad (87)$$

Из последней леммы вытекает, что для мультипликативного, концентрического алгоритма приближенного интегрирования

$$\langle M^*(j), \vec{\rho}^*(j), \Delta \rangle \quad (j = 1, 2, \dots, n, \dots)$$

периодических функций из класса $E_s = \bigcup_{\alpha > 1} E_s^\alpha$, порожденного бесконечной последовательностью $\langle M(j), \vec{\rho}(j), \Delta \rangle \quad (j = 1, 2, \dots)$ с дополнительным условием $\vec{0} \in M(j) \quad (j = 1, 2, \dots)$, правило остановки (61) будет более строгим, если добавить в него ещё величину мультипликативной дискретной дисперсии.

5. Разбиение Коробова

Пусть задана сетка с весами $\langle M, \vec{\rho} \rangle$ определим пять подмножеств фундаментальной решётки $\mathbb{Z}^s$ следующим образом:

$$K_0 = \{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s \mid S_{M, \vec{\rho}}(\vec{m}) = 0\}, \quad (88)$$

$$K_1 = \{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s \mid S_{M, \vec{\rho}}(\vec{m}) = |M|\}, \quad (89)$$

$$K_2 = \{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s \mid S_{M, \vec{\rho}}(\vec{m}) \neq |M|, |S_{M, \vec{\rho}}(\vec{m})| = |M|\}, \quad (90)$$

$$K_3 = \{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s \mid |S_{M, \vec{\rho}}(\vec{m})| < |M|\}, \quad (91)$$

$$K_4 = \{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s \mid |S_{M, \vec{\rho}}(\vec{m})| > |M|\}. \quad (92)$$

Таким образом $\mathbb{Z}^s = K_0 \cup K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup K_4$.

Множества K_0, K_1, K_2, K_3 и K_4 порождают разбиение пространства периодических функций E_s^α на подпространства E_s^{α, K_j} ($j = 0, 1, 2, 3, 4$), где для произвольного подмножества $K \subset \mathbb{Z}^s$

$$E_s^{\alpha, K} = \left\{ f(\vec{x}) \in E_s^\alpha \mid f(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in K} C(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} \right\}. \quad (93)$$

Такое разбиение будем называть разбиением Коробова. Оно фактически возникало в его работах, когда он проводил оценки погрешности приближенного интегрирования по различным сеткам и естественным образом область суммирования разбивалась в зависимости от величины тригонометрической суммы сетки.

Из определения множеств K_0, K_1, K_2, K_3 и K_4 следует, что:

- подпространство E_s^{α, K_0} является ядром линейного оператора $A_{M, \vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних;
- E_s^{α, K_1} — неподвижное подпространство, то есть все функции из этого подпространства переходят сами в себя под действием оператора $A_{M, \vec{\rho}}$;
- E_s^{α, K_2} — подпространство постоянной нормы, то есть все функции из этого подпространства сохраняют свою норму под действием оператора $A_{M, \vec{\rho}}$;
- E_s^{α, K_3} — подпространство сжатия, то есть все ненулевые коэффициенты Фурье уменьшаются на множители равные соответствующим нормированным тригонометрическим суммам сетки с весами;
- E_s^{α, K_4} — подпространство растяжения, то есть все ненулевые коэффициенты Фурье изменяются на множители равные соответствующим нормированным тригонометрическим суммам сетки с весами, которые по модулю больше 1.

Отсюда следует, что каждая периодическая функция $f(\vec{x})$ из пространства E_s^α представима в виде суммы соответствующих компонент из разбиения Коробова:

$$f(\vec{x}) = f_0(\vec{x}) + f_1(\vec{x}) + f_2(\vec{x}) + f_3(\vec{x}) + f_4(\vec{x}).$$

Если некоторое подпространство E_s^{α, K_j} ($j = 0, 1, 2, 3, 4$) пустое, то соответствующая функция представления полагается равной нулю.

Для любого несмещенного линейного оператора $A_{M, \vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних имеем

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 f_j(\vec{x}) d\vec{x} = 0 \quad (j \neq 1), \quad \int_0^1 \dots \int_0^1 f(\vec{x}) d\vec{x} = \int_0^1 \dots \int_0^1 f_1(\vec{x}) d\vec{x}. \quad (94)$$

В силу линейности функционала погрешности приближенного интегрирования имеем равенство

$$R_N[f] = R_N[f_1] + R_N[f_2] + R_N[f_3] + R_N[f_4], \quad (95)$$

так как на подпространстве E_s^{α, K_0} этот функционал тождественно равен нулю.

Согласно первой теореме Коробова, применяя разбиение Коробова, получим

$$R_N[f] = \sum'_{\vec{m} \in K_1} C(\vec{m}) + \sum_{j=2}^4 \sum_{\vec{m} \in K_j} C(\vec{m}) S_{M, \vec{\rho}}^*(\vec{m}). \quad (96)$$

Согласно второй теореме Коробова отсюда следует оценка

$$|R_N[f]| \leq C \left(\sum'_{\vec{m} \in K_1 \cup K_2} \frac{1}{(\vec{m}_1 \dots \vec{m}_s)^\alpha} + \sum_{j=3}^4 \sum_{\vec{m} \in K_j} \frac{|S_{M, \vec{\rho}}^*(\vec{m})|}{(\vec{m}_1 \dots \vec{m}_s)^\alpha} \right) \quad (97)$$

для любой периодической функции $f(\vec{x})$ из пространства $E_s^\alpha(C)$.

Для любого несмещенного, нормального линейного оператора $A_{M, \vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних множество K_4 пусто, а значит и подпространство растяжения тоже пусто. В этом случае формула (97) примет более простой вид

$$|R_N[f]| \leq C \left(\sum'_{\vec{m} \in K_1 \cup K_2} \frac{1}{(\vec{m}_1 \dots \vec{m}_s)^\alpha} + \sum_{\vec{m} \in K_3} \frac{|S_{M, \vec{\rho}}^*(\vec{m})|}{(\vec{m}_1 \dots \vec{m}_s)^\alpha} \right). \quad (98)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 21. Для произвольного подмножества K фундаментальной решётки $\mathbb{Z}^s$ гиперболическим параметром $q(K)$ назовем величину

$$q(K) = \min_{\vec{m} \in K} \overline{m_1} \dots \overline{m_s}. \quad (99)$$

Для пустого множества K полагаем $q(K) = \infty$.

Лемма 2 (см. стр. 127) об оценке сверху суммы (15) (см. стр. 127) позволяет оценивать величину погрешности приближенного интегрирования через гиперболические параметры множеств $K_1 \cup K_2$, K_3 и K_4 .

Рассмотрим разбиение Коробова для некоторых типов сеток. В данной работе мы остановимся на наиболее известном случае несмещенных операторов $A_{M,\vec{\rho}}$, когда все веса ρ_j равны 1. В этом случае множество K_4 пусто, а значит и подпространство растяжения тоже пусто. Указанный случай является наиболее простым примером нормального, несмещенного линейного оператора $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних.

Подводя итог обсуждения проблемы выработки правил остановки в алгоритмах численного интегрирования, дополним следующие соображения из работы [18].

"В приложениях теории многомерных квадратурных формул на практике особенную роль играет вычислительный эксперимент. Дело в том, что результаты о величине погрешности этих формул выражаются в терминах норм линейного функционала погрешности на некотором функциональном пространстве и нормы функции, определенной на нем. А, как правило, норма функции неизвестна и ее вычисление более сложная задача, чем вычисление интеграла. Таким образом, мы сталкиваемся с той самой естественной постановкой задачи, о которой писал академик С. Л. Соболев. Теория нам дает ориентиры, где надо искать удовлетворительное решение проблемы, а уже далее, на основании вычислительного эксперимента вырабатываются рекомендации для конкретного класса задач в конкретной предметной области — какой метод и с какими параметрами дает удовлетворительные, достоверные результаты."

Из предыдущего следует, что при организации численных экспериментов по приближенному вычислению кратных интегралов с целью выработки практических рекомендаций необходимо создавать базу данных интегралов, в которой наряду с функцией и значением интеграла приводятся такие характеристики как сеточный максимум и сеточный минимум, сеточный размах, дискретная дисперсия, эмпирическая функция распределения значений интегрируемой функции и тому подобное. Накопление такой базы данных позволяет ставить вопрос о статистической обработке результатов вычислений и кластерного анализа классов функций, позволяющих давать конкретные рекомендации по применению тех или иных алгоритмов приближенного интегрирования к тому или иному выявленному кластеру функций. Можно предположить, что такие кластеры будут определяться областями параметров, которые определяют функции некоторого класса, возникающего в той или иной предметной области.

6. Первый, второй и третий гиперболические параметры сеток

В работе [23] было дано такое определение.

"Гиперболическим параметром сетки M с весами $\rho(\vec{x})$ назовем величину

$$q(M, \rho(\vec{x})) = \min_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s \setminus \{\vec{0}\}, |S(\vec{m})| > 0} \overline{m_1} \dots \overline{m_s}."$$

В этой работе использовались несколько иные обозначения. Так

$$S(\vec{m}) = \frac{1}{|M|} \sum_{\vec{x} \in M} \rho(\vec{x}) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}$$

— тригонометрическая сумма сетки M с весами $\rho(\vec{x})$;

$$\zeta_H(M, \rho(\vec{x})|\alpha) = \sum'_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s} \frac{|S(\vec{m})|}{(\overline{m}_1 \dots \overline{m}_s)^\alpha}$$

— гиперболическая дзета-функции сетки M с весами $\rho(\vec{x})$.

Первое применение гиперболического параметра сетки вытекает из теоремы Абеля (см. [37], стр. 106), позволяющее представить гиперболическую дзета-функцию сетки M с весами $\rho(\vec{x})$ в интегральном виде

$$\zeta_H(M, \rho(\vec{x})|\alpha) = \alpha \int_{q(M, \rho(\vec{x}))}^{\infty} \frac{D(t|M, \rho(\vec{x}))dt}{t^{\alpha+1}},$$

где

$$D(t|M, \rho(\vec{x})) = \sum'_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s, \overline{m}_1 \dots \overline{m}_s \leq t} |S(\vec{m})|$$

— сумматорная функция тригонометрической суммы.

В работе [8] для любой сетки M с весами $\vec{\rho}$ на пространстве периодических функций E_s^α рассмотрен линейный оператор $A_{M, \vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних заданный равенством

$$g(\vec{x}) = A_{M, \vec{\rho}} f(\vec{x}) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \rho_k f[x_1 + \xi_1(k), \dots, x_s + \xi_s(k)]. \quad (100)$$

Через $A_{M, \vec{\rho}} C(\vec{m})$ обозначается действие линейного оператора $A_{M, \vec{\rho}}$ на коэффициенты Фурье функции $f(\vec{x})$.

ЛЕММА 11. *Для любой периодической функции $f(\vec{x})$ из пространства E_s^α и её коэффициентов Фурье $C(\vec{m})$ разложения в ряд Фурье*

$$f(\vec{x}) = \sum_{m_1, \dots, m_s = -\infty}^{\infty} C(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} \quad (101)$$

справедливо равенство

$$A_{M, \vec{\rho}} C(\vec{m}) = \frac{S_{M, \vec{\rho}}(\vec{m})}{N} C(\vec{m}) = S_{M, \vec{\rho}}^*(\vec{m}) C(\vec{m}) \quad (102)$$

где $S_{M, \vec{\rho}}(\vec{m})$ — тригонометрическая сумма сетки с весами, а $S_{M, \vec{\rho}}^*(\vec{m})$ — нормированная тригонометрическая сумма сетки с весами.

Кроме того, справедлива тривиальная оценка для нормы образа

$$\|A_{M, \vec{\rho}} f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} \leq \frac{\rho(M)}{N} \|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}. \quad (103)$$

С точки зрения величины нормированной тригонометрической суммы сетки с весами естественно определить следующие пять подмножеств фундаментальной решётки $\mathbb{Z}^s$ таким образом:

$$K_0 = K_0(M, \vec{\rho}) = \{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s \mid S_{M, \vec{\rho}}^*(\vec{m}) = 0\}, \quad (104)$$

$$K_1 = K_1(M, \vec{\rho}) = \{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s \mid S_{M, \vec{\rho}}^*(\vec{m}) = 1\}, \quad (105)$$

$$K_2 = K_2(M, \vec{\rho}) = \{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s \mid S_{M, \vec{\rho}}^*(\vec{m}) \neq 1, |S_{M, \vec{\rho}}(\vec{m})| = 1\}, \quad (106)$$

$$K_3 = K_3(M, \vec{\rho}) = \{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s \mid 0 < |S_{M, \vec{\rho}}^*(\vec{m})| < 1\}, \quad (107)$$

$$K_4 = K_4(M, \vec{\rho}) = \{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s \mid |S_{M, \vec{\rho}}^*(\vec{m})| > 1\}. \quad (108)$$

Ясно что $\mathbb{Z}^s = K_0 \cup K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup K_4$. Такое разбиение называется разбиением Коробова. Оно фактически возникало в его работах, когда он проводил оценки погрешности приближенного интегрирования.

В работе [8] было дано определение нормального и несмещенного линейного оператора $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних (см. [8], стр. 195 и 199). Нормальный оператор не увеличивает норму любой функции, то есть $K_4 = \emptyset$, а для несмещенного оператора имеем: $S_{M,\vec{\rho}}^*(\vec{0}) = 1$.

Далее везде будем считать, что веса $\vec{\rho}$ выбраны так, что соответствующий линейный оператор $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних является нормальным и несмещённым. Для таких операторов выражение гиперболической дзета-функции сетки имеет более простой вид

$$\zeta(\alpha, p|M, \vec{\rho}) = \sum'_{\vec{m} \in K_1 \cup K_2} \frac{1}{(\vec{m}_1 \dots \vec{m}_s)^\alpha} + \sum_{\vec{m} \in K_3} \frac{|S_{M,\vec{\rho}}^*(\vec{m})|^p}{(\vec{m}_1 \dots \vec{m}_s)^\alpha}. \quad (109)$$

Используя общее определение гиперболического параметра, в случае нормального, несмещенного линейного оператора $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних можно определить первый, второй и третий гиперболические параметры сетки M с весами $\vec{\rho}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 22. Для произвольной сетки M с весами $\vec{\rho}$ такими, что соответствующий линейный оператор $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних является нормальным и несмещённым, первый, второй и третий гиперболические параметры сетки M с весами $\vec{\rho}$ задаются равенствами

$$q_\nu(M, \rho(\vec{x})) = q(K_\nu(M, \rho(\vec{x}))) \quad (\nu = 1, 2, 3). \quad (110)$$

Ясно, что гиперболический параметр сетки и первый, второй и третий гиперболические параметры сетки M с весами $\vec{\rho}$ связаны соотношением

$$q(M, \rho(\vec{x})) = \min_{\nu=1,2,3} q_\nu(M, \rho(\vec{x})).$$

Пусть сетка M — рациональная со знаменателем p , то есть в s -мерном кубе

$$G_s = \{\vec{x} | 0 \leq x_i < 1 \ (i = 1, \dots, s)\}$$

имеется N рациональных точек вида

$$\left(\frac{x_1^{(k)}}{p}, \dots, \frac{x_s^{(k)}}{p} \right) \quad k = 1, \dots, N, \quad (111)$$

$x_i^{(k)}$ — целые, $0 \leq x_i^{(k)} \leq p-1$, p — натуральное.

ТЕОРЕМА 11. Для любой рациональной сетки M со знаменателем p и с весами $\vec{\rho}$, для которых линейный оператор $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних является нормальным и несмещённым, справедливо соотношение

$$p \cdot \mathbb{Z}^s \subset K_1(M, \rho(\vec{x})),$$

кроме того тригонометрические суммы $S_{M,\vec{\rho}}^*(\vec{m})$ с весами $\vec{\rho}$ принимают конечное число различных значений, не превосходящее p^s .

ТЕОРЕМА 12. Для любой рациональной сетки M со знаменателем p и с положительными весами $\vec{\rho}$, для которых линейный оператор $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних является нормальным и несмещённым, множество $K_1(M, \vec{\rho})$ является целочисленной решеткой.

ТЕОРЕМА 13. Для любой рациональной сетки M со знаменателем p и с положительными весами $\vec{\rho}$, для которых линейный оператор $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних является нормальным и несмещённым, множество $K_1(M, \vec{\rho}) \cup K_2(M, \vec{\rho})$ является целочисленной решеткой.

7. Обобщенная теорема Бахвалова — Коробова для гиперболической дзета-функции сеток

Для формулировки обобщенной теоремы Бахвалова — Коробова для гиперболической дзета-функции сеток нам потребуется обобщенная теорема Бахвалова для гиперболической дзета-функции решеток из работы [15], одна лемма из работы [9] (см. лемму 3, стр. 127) и одно новое определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 23. Будем говорить, что сетка M с весами $\vec{\rho}$, для которой линейный оператор $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних является нормальным и несмещённым, имеет тип $\Delta(N, s) < 1$, если для любого $\vec{m} \in K_3(M, \vec{\rho})$ выполняется оценка

$$|S_{M,\vec{\rho}}^*(\vec{m})| \leq \Delta(N, s).$$

ТЕОРЕМА 14. (Обобщенная теорема Бахвалова для гиперболической дзета-функции решеток) Для любой s -мерной решетки Λ справедливы оценки

$$\zeta_H(\Lambda|\alpha) \leq \begin{cases} (2 + 2\zeta(\alpha))^s \cdot \left(1 + \left\lceil \frac{1}{\lambda} \right\rceil\right)^s, & \text{при } q(\Lambda) = 1; \\ 2^{(\alpha+1)s+1} \alpha \left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)^s \frac{(\ln q(\Lambda) + 1)^{s-1}}{q^\alpha(\Lambda)}, & \text{при } q(\Lambda) > 1, \end{cases}$$

где λ — наибольшее число такое, что s -мерный куб $[-\lambda; \lambda]^s$ не содержит ни одной ненулевой точки решетки Λ .

ТЕОРЕМА 15. (Обобщенная теорема Бахвалова — Коробова для гиперболической дзета-функции сеток) Для любой рациональной сетки M со знаменателем p и с положительными весами $\vec{\rho}$ типа $\Delta(N, s) < 1$, для которых линейный оператор $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних является нормальным и несмещённым, справедлива оценка

$$\begin{aligned} \zeta(\alpha, p|M, \vec{\rho}) &\leq 2^{(\alpha+1)s+1} \alpha \left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)^s \frac{(\ln q(\Lambda) + 1)^{s-1}}{q^\alpha(\Lambda)} + \\ &\quad + \Delta^p(N, s) \frac{1}{t^{\alpha-1}} \left(\frac{\ln^{s-1} t}{(\alpha-1)(s-1)!} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m=0}^{s-2} \frac{\ln^m t}{m!} \left(\sum_{k=m}^{s-2} \zeta(\alpha)^{s-2-k} C_k^m \frac{\alpha-1+\zeta(\alpha)}{\alpha-1} + \frac{C_{s-1}^m}{\alpha-1} \right) \right), \end{aligned} \quad (112)$$

где решетка $\Lambda = K_1(M, \vec{\rho}) \cup K_2(M, \vec{\rho})$ и $t = q_3(M, \rho(\vec{x}))$.

8. Обобщенные равномерные сетки

Для обобщенной равномерной сетки $M(\vec{n})$ с равными весами $\rho_j = 1$ ($j = 1, 2, \dots, N$) имеем для нормированной тригонометрической суммы равенство

$$S_{M(\vec{n})}^*(\vec{m}) = \delta_{n_1}(m_1) \cdot \dots \cdot \delta_{n_s}(m_s) \quad (113)$$

и символ Коробова $\delta_N(b)$ задан равенствами

$$\delta_N(b) = \begin{cases} 0, & \text{если } b \not\equiv 0 \pmod{N}, \\ 1, & \text{если } b \equiv 0 \pmod{N}. \end{cases} \quad (114)$$

Отсюда следует, что $K_2 = K_3 = K_4 = \emptyset$, $K_1 = n_1\mathbb{Z} \times \dots \times n_s\mathbb{Z}$ и $K_0 = \mathbb{Z}^s \setminus K_1$. Таким образом для любой модифицированной обобщенной равномерной сетки $M(\vec{n}, \vec{\beta})$ справедливо следующее равенство для погрешности приближенного интегрирования $R_{M(\vec{n}, \vec{\beta})}[f(\vec{x})]$ по квадратурной формуле с модифицированной обобщенной равномерной сеткой и равными единичными весами

$$R_{M(\vec{n}, \vec{\beta})}[f(\vec{x})] = \sum_{m_1, \dots, m_s = -\infty}^{\infty'} C(m_1 n_1, \dots, m_s n_s) e^{2\pi i(m_1 n_1 \beta_1 + \dots + m_s n_s \beta_s)}. \quad (115)$$

Для случая обобщенной равномерной сетки $M(\vec{n})$ с равными весами $\rho_j = 1$ ($j = 1, 2, \dots, N$) любая периодическая функция $f(\vec{x})$ из пространства E_s^α представима в виде суммы только двух компонент из разбиения Коробова:

$$f(\vec{x}) = f_0(\vec{x}) + f_1(\vec{x}).$$

Ясно, что компонента $f_1(\vec{x}) = A_{M(\vec{n})}f(\vec{x})$ и поэтому она имеет явное выражение

$$f_1(\vec{x}) = \frac{1}{n_1 \dots n_s} \sum_{k_1=0}^{n_1-1} \dots \sum_{k_s=0}^{n_s-1} f\left(\left\{\frac{k_1}{n_1} + x_1\right\}, \dots, \left\{\frac{k_s}{n_s} + x_s\right\}\right). \quad (116)$$

Квадратурная формула с обобщенной равномерной сеткой $M(\vec{n})$ и равными весами $\rho_j = 1$ ($j = 1, 2, \dots, N$) является частным случаем квадратурной формулы с обобщенной параллелепипедальной сеткой с равными единичными весами, поэтому для неё граничной функцией из класса $E_s^2(1, \frac{6}{\pi^2}) \subset E_s^2(1)$ будет функция (см. [3])

$$\begin{aligned} h(x_1, \dots, x_s) &= 3^s (1 - 2\{x_1\})^2 \dots (1 - 2\{x_s\})^2 = \\ &= \sum_{m_1, \dots, m_s = -\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i(m_1 x_1 + \dots + m_s x_s)}}{\psi(m_1) \dots \psi(m_s)}, \end{aligned} \quad (117)$$

где

$$\psi(m) = \begin{cases} 1 & \text{при } m = 0, \\ \frac{\pi^2}{6} m^2 & \text{при } m \neq 0, \end{cases} \quad (118)$$

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 h(x_1, \dots, x_s) dx_1 \dots dx_s = 1. \quad (119)$$

ЛЕММА 12. *Справедливо равенство*

$$\frac{3}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - 2\left\{\frac{k}{n} + x\right\}\right)^2 = 1 + \frac{2}{n^2} - \frac{12}{n^2} \{nx\} (1 - \{nx\}). \quad (120)$$

ЛЕММА 13. *Для обобщенной равномерной сетки $M(\vec{n})$, функции $h(\vec{x})$ и компоненты $h_1(\vec{x})$ из разбиения Коробова справедливо равенство*

$$h_1(\vec{x}) = \prod_{j=1}^s \left(1 + \frac{2}{n_j^2} - \frac{12}{n_j^2} \{n_j x_j\} (1 - \{n_j x_j\})\right). \quad (121)$$

Из последней леммы видно, что значение погрешности приближенного интегрирования для функции $h(\vec{x})$ по модифицированной обобщенной равномерной сетке $M(\vec{n}, \vec{\beta})$ равна $h_1(\vec{\beta})$ и пробегает несимметричный относительно 1 промежуток $\left[\prod_{j=1}^s \left(1 - \frac{1}{n_j^2}\right); \prod_{j=1}^s \left(1 + \frac{2}{n_j^2}\right)\right]$, хотя математическое ожидание этой погрешности равно 1.

9. Обобщенные неравномерные сетки

Классические неравномерные сетки $M(P)$ Коробова, координаты точек которых выражаются через степенные функции по модулю P :

$$M_k = \left(\left\{ \frac{k}{P} \right\}, \left\{ \frac{k^2}{P} \right\}, \dots, \left\{ \frac{k^s}{P} \right\} \right) \quad (k = 1, 2, \dots, P), \quad (122)$$

где $P = p$ или $P = p^2$ и p — нечетное простое число, имеют для нормированной тригонометрической суммы соотношение

$$\left| S_{M(P)}^*(\vec{m}) \right| \leq \begin{cases} \frac{s-1}{\sqrt{P}} & \text{при } (m_1, \dots, m_s, p) = 1, \\ 1 & \text{при } (m_1, \dots, m_s, p) = p. \end{cases} \quad (123)$$

Поведение рациональных тригонометрических сумм достаточно сложное, поэтому мы не можем дать исчерпывающее описание разбиения Коробова для неравномерных сеток. Можно утверждать только следующее: $K_4 = \emptyset$, $K_1 = P\mathbb{Z}^s$, при $P > (s-1)^2$ имеем $K_0 \cup K_3 \supset \mathbb{Z}^s \setminus p\mathbb{Z}^s$. Если $P = p$, то $K_2 = \emptyset$. Если $P = p^2$, то $K_2 \subset p\mathbb{Z}^s \setminus P\mathbb{Z}^s$.

Из вида неравномерных сеток вытекает одно обобщение их, связанное с рассмотрением произвольного P . Такое обобщение приводит к необходимости использовать для оценок погрешности общие рациональные тригонометрические сумм, которые имеют другой вид оценок чем сумм по простому модулю, или по квадрату простого.

Другое обобщение неравномерных сеток возникает из использования конструкции произведения сеток.

Пусть p — нечетное простое число, тогда рассмотрим сетку $M_2(p) = M(p) \cdot M(p)$. Очевидно, что $|M_2(p)| \leq p^2$. Сетка $M_2(p)$ имеет вид

$$M_2(p) = \left\{ \left(\left\{ \frac{x+y}{p} \right\}, \left\{ \frac{x^2+y^2}{p} \right\}, \dots, \left\{ \frac{x^s+y^s}{p} \right\} \right) \mid 0 \leq x, y \leq p-1 \right\}. \quad (124)$$

Для нормированных тригонометрических сумм сетки $M_2(p)$ имеем:

$$\left| S_{M_2(p)}^*(\vec{m}) \right| = \left| S_{M(p)}^*(\vec{m}) \right|^2 \leq \begin{cases} \frac{(s-1)^2}{p} & \text{при } (m_1, \dots, m_s, p) = 1, \\ 1 & \text{при } (m_1, \dots, m_s, p) = p. \end{cases} \quad (125)$$

Отсюда следует, что если $N = |M_2(p)|$, то погрешность приближенного интегрирования с помощью обобщенных неравномерных сеток $M_2(p)$ имеет $O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$, аналогичную оценки погрешности неравномерных сеток Коробова.

Ещё один класс неравномерных сеток получается, если брать произведение неравномерных сеток по разным модулям. Пусть $p_1, \dots, p_k$ — различные нечетные простые числа, тогда рассмотрим сетку

$$M_s(\vec{p}) = M_s(p_1, \dots, p_k) = M(p_1) \cdot \dots \cdot M(p_k).$$

Очевидно, что $N = |M_s(p_1, \dots, p_k)| = p_1 \cdot \dots \cdot p_k$. Сетка $M_s(p_1, \dots, p_k)$ имеет

$$M_s(p_1, \dots, p_k) = \left\{ \left(\left\{ \sum_{j=1}^k \frac{x_j}{p_j} \right\}, \left\{ \sum_{j=1}^k \frac{x_j^2}{p_j} \right\}, \dots, \left\{ \sum_{j=1}^k \frac{x_j^s}{p_j} \right\} \right) \mid 0 \leq x_j \leq p_j - 1, j = 1, 2, \dots, k \right\}. \quad (126)$$

Для нормированных тригонометрических сумм сетки $M_s(\vec{p})$ имеем:

$$\left| S_{M_s(\vec{p})}^*(\vec{m}) \right| = \prod_{j=1}^k \left| S_{M(p_j)}^*(\vec{m}) \right| \leq \begin{cases} \frac{(s-1)^t}{\sqrt{\prod_{\nu=1}^t p_{j_\nu}}} & \text{при } (m_1, \dots, m_s, N) = \frac{N}{\prod_{\nu=1}^t p_{j_\nu}}, \\ 1 & \text{при } (m_1, \dots, m_s, N) = N. \end{cases} \quad (127)$$

ТЕОРЕМА 16. Для дзета-функции обобщенной неравномерной сетки $M_s(\vec{p})$ справедлива оценка

$$\zeta(\alpha, 1|M_s(\vec{p})) \leq \frac{s^k(1 + 2\zeta(\alpha))^s}{\sqrt{N}}. \quad (128)$$

Последняя теорема позволяет сделать вывод, что наилучшая оценка погрешности получается для обычных неравномерных сеток, хотя порядок во всех этих случаях одинаковый.

10. Параллелепипедальные сетки

Рассмотрим бесконечную последовательность попарно взаимно простых чисел $N_1, N_2, \dots, N_k, \dots$. Например, можно рассмотреть последовательность различных простых чисел. Бесконечная последовательность параллелепипедальных сеток $M(\vec{a}_j, N_j)$ ($j = 1, 2, \dots$) порождает концентрический мультипликативный алгоритм приближенного интегрирования $\langle M^*(\vec{b}_j, N_j^*), \Delta \rangle$ ($j = 1, 2, \dots$) с правилом останковки $\Delta = \Delta(f(\vec{x}), M^*(\vec{b}_j, N_j^*))$, выражаемым через мультипликативную дискретную дисперсию и сеточный размах, а параллелепипедальная сетка $M^*(\vec{b}_j, N_j^*)$ является произведением параллелепипедальных сеток

$$M^*(\vec{b}_j, N_j^*) = \prod_{i=1}^j M(\vec{a}_i, N_i), \quad N_j^* = N_1 \cdot \dots \cdot N_j. \quad (129)$$

Для произведения двух параллелепипедальных сеток можно уточнить результат об оценке мультипликативной дискретной дисперсии.

Прежде всего заметим, что для случая параллелепипедальной сетки M с равными весами нормированная тригонометрическая сумма $S_M^*(\vec{m})$ принимает только два значения 0 и 1:

$$S_M^*(\vec{m}) = \delta_\Lambda(\vec{m}) = \begin{cases} 1 & \text{при } \vec{m} \in \Lambda, \\ 0 & \text{при } \vec{m} \notin \Lambda, \end{cases} \quad (130)$$

где Λ — решётка решений линейного сравнения

$$a_1 m_1 + \dots + a_s m_s \equiv 0 \pmod{N}. \quad (131)$$

Таким образом, $K_0 = \mathbb{Z}^s \setminus \Lambda$, $K_1 = \Lambda$ и

- подпространство $E_s^{\alpha, K_0} = E_s^{\alpha, \mathbb{Z}^s \setminus \Lambda}$ является ядром линейного оператора A_M сеточных средних для параллелепипедальной сетки M ;
- $E_s^{\alpha, K_1} = E_s^{\alpha, \Lambda}$ — неподвижное подпространство, то есть все функции из этого подпространства переходят сами в себя под действием оператора A_M ;

Дзета-функция $\zeta(\alpha, p|M)$ параллелепипедальной сетки M с параметром p от этого параметра не зависит и совпадает с гиперболической дзета-функцией решетки решений соответствующего линейного сравнения: $\zeta(\alpha, p|M) = \zeta_H(\Lambda|\alpha)$.

ТЕОРЕМА 17. Если параллелепипедальная сетка M является произведением двух параллелепипедальных сеток $M = M_1 \cdot M_2$, то для мультипликативной дискретной дисперсии $D_M^*[f(\vec{x})]$ справедливы неравенства

$$0 \leq D_M^*[f(\vec{x})] \leq \|f\|_{E_s^\alpha}^2 \times \left(\sum_{j=1}^t \zeta_H^2(\Lambda + \vec{m}_j|\alpha) + (\zeta_H(\Lambda_1|\alpha) - \zeta_H(\Lambda|\alpha)) (1 + \zeta_H(\Lambda|\alpha)) \right), \quad (132)$$

где

$$\zeta_H(\Lambda + \vec{m}_j | \alpha) = \sum_{\vec{m} \in \Lambda} \frac{1}{q^\alpha(\vec{m} + \vec{m}_j)}$$

— обобщенная гиперболическая дзета-функция решётки, а $\vec{0}, \vec{m}_1, \dots, \vec{m}_t$ — полная система вычетов решётки Λ_1 по подрешётке $\Lambda = \Lambda_1 \cap \Lambda_2$.

Следующая лемма объясняет почему понятия дискретной дисперсии недостаточно, а необходимо вводить понятие мультипликативной дискретной дисперсии.

ЛЕММА 14. *Для любой параллелепипедальной сетки M и дискретной дисперсии $D_M^*[f(\vec{x})]$ справедливо равенство*

$$D_M^*[f(\vec{x})] = 0. \quad (133)$$

Из доказательства леммы видно, что оператор A_M является идемпотентом, то есть $A_M A_M = A_M$ для любой параллелепипедальной сетки M . При условии положительности весов сетки верно и обратное утверждение.

ТЕОРЕМА 18. *Если несмещенный линейный оператор $A_{M, \vec{p}}$ взвешенных сеточных удовлетворяет условию идемпотентности $A_{M, \vec{p}} A_{M, \vec{p}} = A_{M, \vec{p}}$ и все веса $\vec{p}$ положительные, то сетка M является обобщенной параллелепипедальной сеткой, а веса $\vec{p}$ — единичными.*

Приведем ещё несколько теоретических фактов, показывающих, что выработка универсального правила остановки является сложной задачей. Пусть $M_0 = \{\vec{0}\}$ — простейшая параллелепипедальная сетка из одного узла и M — произвольная параллелепипедальная сетка из $N > 1$ узлов. Тогда, очевидно, $M = M_0 \cdot M$, поэтому применима теорема 17. По определению дискретной мультипликативной дисперсии в этом случае имеем

$$D_M^*[f(\vec{x})] = \frac{1}{N} \sum_{\vec{x} \in M} \left| f(\vec{0} + \vec{x}) - \frac{1}{N} \sum_{\vec{z} \in M} f(\vec{z}) \right|^2. \quad (134)$$

Если во всех точках сетки M функция $f(\vec{x})$ — постоянная величина, то дискретная мультипликативная дисперсия становится нулевой: $D_M^*[f(\vec{x})] = 0$.

Для описания этого явления напомним, что $\vec{a} = (a_1, \dots, a_s)$, $(a_j, p) = 1$ ($j = 1, \dots, s$), через решётку Λ мы обозначаем решётку решений линейного сравнения (131), и справедливо представление

$$\mathbb{Z}^s = \Lambda \bigcup (\Lambda + \vec{m}_1) \bigcup \dots \bigcup (\Lambda + \vec{m}_{p-1}), \quad (135)$$

где $\vec{m}_j = (j, 0, \dots, 0) \in \mathbb{Z}^s \setminus \Lambda$ ($1 \leq j \leq p-1$).

ЛЕММА 15. *Если $f(\vec{x}) \in E_s$ и во всех точках параллелепипедальной сетки $M(\vec{a}, p)$ функция $f(\vec{x}) = C$ — постоянная величина, то для её коэффициентов Фурье $C(\vec{m})$ справедливы равенства*

$$\begin{aligned} \sum_{\vec{m} \in \Lambda + \vec{m}_j} C(\vec{m}) &= 0 \quad \text{при } j = 1, 2, \dots, p-1, \\ \sum_{\vec{m} \in \Lambda} C(\vec{m}) &= C. \end{aligned} \quad (136)$$

Как известно, одну и ту же параллелепипедальную сетку можно задать многими способами, но есть общий инвариантный способ описания её как множества точек взаимной решетки Λ^* к решётке Λ , попавших в единичный s -мерный полукоткрытый куб $G_s = [0; 1)^s$. Частным случаем ситуации, описанной в лемме 15, является функция $f(\vec{x})$, для которой решётка Λ^* будет множеством периодов, то есть, когда для любого $\vec{x}$ и для любого $\vec{y} \in \Lambda^*$ выполняется равенство $f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x})$. В этом случае справедливо более сильное утверждение относительно коэффициентов функции $f(\vec{x})$.

ЛЕММА 16. *Если $f(\vec{x}) \in E_s$ и решётка Λ^* будет множеством периодов функция $f(\vec{x})$, то для её коэффициентов Фурье $C(\vec{m})$ справедливы равенства*

$$C(\vec{m}) = 0 \quad \text{при } \vec{m} \in \mathbb{Z}^s \setminus \Lambda, \quad (137)$$

то есть

$$f(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in \Lambda} C(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}. \quad (138)$$

11. Комбинированные сетки

В 1992 г. Н. М. Коробов ввел новый класс сеток — комбинированные сетки, основы теории которых были опубликованы в работе [27]. В этой работе впервые Н. М. Коробов применил принципиально новую идею в методе усреднений, которым ранее доказывались теоремы о существовании оптимальных коэффициентов. А именно, если имеется какая-то функция f от оптимальных коэффициентов, для которой среднее арифметическое значение σ по множеству всех наборов коэффициентов заданного вида в количестве P совпадает с каким-то критерием оптимальности, то, перенумеровав все наборы этого вида в порядке возрастания значений этой функции, можно значение функции f от набора с номером $[(P+1)/2]$ оценить величиной 2σ , при этом данная оценка будет справедлива для $[(P+1)/2]$ наборов, по которым можно усреднять значение другой функции. Особенно эффектно эта идея работает, когда f — целочисленная функция, а $\sigma < 1$, тогда получаем более сильное утверждение о том, что для $[(P+1)/2]$ наборов значение $f = 0$. В данной работе примером применения этой идеи являются доказательства всех теорем об алгоритмах построения оптимальных коэффициентов.

Пусть $p \geq 2$, $n \geq 2$, $(n, p) = 1$ и $a_1, \dots, a_s$ — оптимальные коэффициенты по модулю p .

Комбинированными сетками называются сетки вида

$$M \left(\left\{ \frac{k_1}{n} + \frac{a_1 k}{p} \right\}, \dots, \left\{ \frac{k_s}{n} + \frac{a_s k}{p} \right\} \right), \quad (139)$$

$k = 1, 2, \dots, p$; $k_\nu = 1, 2, \dots, n$ ($1 \leq \nu \leq s$).

В [27] доказаны следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 19. *Пусть p пробегает последовательность простых чисел, больших s . Существуют оптимальные коэффициенты $a_1, \dots, a_s$ по модулю p такие, что для любого $\alpha > 1$ выполняются оценки⁷*

$$\sum_{m_1, \dots, m_s = -\infty}^{\infty} \frac{\delta_p(a_1 m_1 + \dots + a_s m_s)}{(\bar{m}_1 \dots \bar{m}_s)^\alpha} \ll \frac{(\ln p)^{\alpha(r-1)}}{p^\alpha} \quad (r = 1, 2, \dots, s), \quad (140)$$

где сумма Σ_r распространена на системы целых $(m_1, \dots, m_s)$, содержащие ровно r величин m_j , отличных от нуля.

⁷Для переменных величин A и $B > 0$ запись $A \ll B$ означает, что $|A| \leq CB$ с некоторой константой $C > 0$.

ТЕОРЕМА 20. Пусть p – простое число, $(n, p) = 1$ и $N = n^s p$. Если оптимальные коэффициенты $a_1, \dots, a_s$ удовлетворяют условию (140), $n \ll \ln p$ и $f \in E_s^\alpha(C)$, то для погрешности квадратурной формулы

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \dots \int_0^1 f(x_1, \dots, x_s) dx_1 \dots dx_s = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^p \sum_{k_1, \dots, k_s=1}^n f\left(\left\{\frac{k_1}{n} + \frac{a_1 k}{p}\right\}, \dots, \left\{\frac{k_s}{n} + \frac{a_s k}{p}\right\}\right) - R_N[f] \end{aligned} \quad (141)$$

выполняется оценка

$$R_N[f] \ll \frac{(\ln N)^{\alpha(s-1)}}{N^\alpha}. \quad (142)$$

Из последней теоремы следует справедливость следующего результата.

ТЕОРЕМА 21. Пусть для целых z функция $H_{pn^s}^*(z)$ определена равенством

$$H_{pn^s}^*(z) = \frac{3^s}{pn^s} \sum_{k=1}^p \sum_{k_1, \dots, k_s=1}^n \left(1 - 2\left\{\frac{k}{p} + \frac{k_1}{n}\right\}\right)^2 \dots \left(1 - 2\left\{\frac{kz^{s-1}}{p} + \frac{k_s}{n}\right\}\right)^2, \quad (143)$$

где p – простое число, большее s , и $n \ll \ln p$, $(n, p) = 1$.

Если при $z = a$ достигается минимум функции $H_{pn^s}^*(z)$ на интервале $1 \leq z \leq p-1$, то целые $a_1 = 1$, $a_2 = a$, $\dots$, $a_s = a^{s-1}$ будут оптимальными коэффициентами по модулю p и для них справедлива оценка (142) в квадратурной формуле (141).

Заметим, что в теоремах 20, 21 используется комбинирование параллелепипедальной сетки по простому модулю и равномерной сетки из n^s точек с небольшим значением n , взаимно простым с этим модулем. Впервые комбинирование двух параллелепипедальных сеток по двум различным простым модулям встречалось в теореме 3. Операцию комбинирования сеток удобно называть произведением сеток (см. [4], [21]), и вопросу изучения мультипликативного моноида сеток посвящены работы [11], [12].

О качестве оптимальных коэффициентов $a_1 = 1$, $a_2 = a$, $\dots$, $a_s = a^{s-1}$ можно судить по величине разности $H_p(a) - 1$, которая для наиболее хороших оптимальных параллелепипедальных сеток имеет порядок $O(\ln^{2(s-1)} p / p^2)$. Аналогично о качестве комбинированной сетки с теми же оптимальными коэффициентами можно судить по разности $H_{pn^s}^*(a) - 1$, которая имеет порядок $O(\ln^{2(s-1)} p / (pn^s)^2)$.

Для сравнения комбинированных сеток и параллелепипедальных, которые имеют одинаковый порядок убывания погрешности квадратурных формул в зависимости от количества точек сетки, возможно два разных подхода: или сравнивать погрешности приближенного интегрирования одних и тех же функций по квадратурным формулам с разными сетками, но с одинаковым количеством узлов, либо сравнивать величины констант в знаке $O()$ для сеток с разным количеством узлов, но с одинаковым порядком убывания погрешности приближенного интегрирования. В обоих случаях оказывается полезной периодическая функция $3(1 - 2\{x\})^2$ из класса E_1^2 , для которой разложение в ряд Фурье в комплексной форме можно записать в виде (см. [25], с. 149):

$$3(1 - 2\{x\})^2 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i m x}}{\psi(m)}, \quad (144)$$

где

$$\psi(m) = \begin{cases} 1, & \text{при } m = 0, \\ \frac{\pi^2}{6} m^2, & \text{при } m \neq 0, \end{cases} \quad \text{и } \int_0^1 3(1 - 2\{x\})^2 dx = 1. \quad (145)$$

В работе [19] построен алгоритм для вычисления оптимальных коэффициентов для комбинированных сеток за $O(N)$ арифметических операций. В работе [10] описаны два алгоритма построения оптимальных коэффициентов для параллелепипедальных сеток по простому модулю и для комбинированных сеток. Проведён численный анализ сравнения качества построенных сеток.

12. Алгебраические сетки

В 1976 году вышла работа [36] К. К. Фролова, в которой впервые появились алгебраические сетки.

Пусть $\vec{a} = (a_0, a_1, \dots, a_{s-1})$ — целочисленный вектор такой, что многочлен

$$P_{\vec{a}}(x) = \sum_{\nu=0}^{s-1} a_{\nu} x^{\nu} + x^s \quad (146)$$

неприводим над полем рациональных чисел и все корни Θ_{ν} ($\nu = 1, \dots, s$) многочлена (146) действительные.

Обозначим через F чисто вещественное алгебраическое поле степени s , порожденное алгебраическим числом $\Theta = \Theta_1$ [5].

Рассмотрим алгебраическую решётку $\Lambda(F)$, которая имеет вид

$$\Lambda(F) = \left\{ \vec{x} = \left(\sum_{\nu=1}^s \Theta_1^{\nu-1} m_{\nu}, \dots, \sum_{\nu=1}^s \Theta_s^{\nu-1} m_{\nu} \right) \mid \vec{m} \in \mathbb{Z}^s \right\}.$$

Алгебраическая решетка $\Lambda(F)$ имеет большое значение в теории обобщенных параллелепипедальных сеток и ее приложений к квадратурным формулам, так как для решетки $\Lambda(t, F) = t \cdot \Lambda(F)$ с $\det \Lambda(t, F) = t^s \det \Lambda(F)$, $N(\Lambda(t, F)) = t^s$ справедлива оценка

$$\zeta_H(\Lambda(t, F) \mid \alpha) \ll \frac{\ln^{s-1} \det \Lambda(t, F)}{(\det \Lambda(t, F))^{\alpha}}$$

и аналогичная оценка справедлива снизу для любой решетки.

Обозначим через $T(\vec{a})$ матрицу степеней алгебраически сопряженных целых алгебраических чисел $\Theta_1, \dots, \Theta_s$ — корней многочлена $P_{\vec{a}}(x)$:

$$T(\vec{a}) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \Theta_1 & \dots & \Theta_s \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \Theta_1^{s-1} & \dots & \Theta_s^{s-1} \end{pmatrix}, \quad (147)$$

а через $\vec{\Theta} = (\Theta_1, \dots, \Theta_s)$ — вектор полного набора алгебраически сопряженных чисел — корней многочлена $P_{\vec{a}}(x)$.

Для любого $t > 0$ решётка $\Lambda(t \cdot T(\vec{a}))$ называется алгебраической. Она имеет вид

$$\Lambda(t \cdot T(\vec{a})) = \left\{ \vec{x} = \left(t \sum_{\nu=1}^s \Theta_1^{\nu-1} m_{\nu}, \dots, t \sum_{\nu=1}^s \Theta_s^{\nu-1} m_{\nu} \right) = t \cdot \vec{m} \cdot T(\vec{a}) \mid \vec{m} \in \mathbb{Z}^s \right\}.$$

Таким образом, алгебраическая решётка $\Lambda(t \cdot T(\vec{a}))$ имеет базис $\vec{\lambda}_{\nu} = t \cdot (\Theta_1^{\nu-1}, \dots, \Theta_s^{\nu-1})$ ($\nu = 1, \dots, s$).

В связи с этим возникает проблема приближения алгебраических решеток целочисленными. Рассмотрим целочисленную решетку

$$\Lambda Z(t, F) = \left\{ \vec{x} = \left(\sum_{\nu=1}^s a_{1,\nu} m_\nu, \dots, \sum_{\nu=1}^s a_{s,\nu} m_\nu \right) \mid \vec{m} \in \mathbb{Z}^s \right\},$$

где $\left| \frac{a_{\mu,\nu}}{t} - \Theta_\mu^{\nu-1} \right| < \frac{1}{2}$, $a_{\mu,\nu} \in \mathbb{Z}$, $(1 \leq \nu, \mu \leq s)$.

Спрашивается, при каких t величина $q(\Lambda Z(t, F))$ будет наибольшей?

Существует ли бесконечная последовательность $t \rightarrow \infty$ такая, что

$$q(\Lambda Z(t, F)) \gg t^s?$$

13. Обобщенные параллелепипедальные сетки

Согласно определению 5 (стр. 124) обобщенной параллелепипедальной сетки $M(\Lambda)$ решётки Λ мы имеем: $M(\Lambda) = \Lambda^* \cap G_s$.

Для теории квадратурных формул с обобщенными параллелепипедальными сетками принципиальное значение имеют следующие определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 24. *Весовой функцией порядка r с константой B называется гладкая функция $\rho(\vec{x})$, удовлетворяющая условиям*

$$\sum_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s = -1}^0 \rho(\vec{x} + (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s)) = 1 \quad \text{при } \vec{x} \in G_s, \quad (148)$$

$$\rho(\vec{x}) = 0 \quad \text{при } \vec{x} \notin (-1; 1)^s, \quad (149)$$

$$\left| \int_{-1}^1 \dots \int_{-1}^1 \rho(\vec{x}) e^{2\pi i(\vec{\sigma}, \vec{x})} d\vec{x} \right| \leq B(\bar{\sigma}_1 \dots \bar{\sigma}_s)^{-r} \quad \text{для любого } \vec{\sigma} \in \mathbb{R}^s. \quad (150)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 25. *Квадратурной формулой с обобщенной параллелепипедальной сеткой II типа и весовой функцией $\rho(\vec{x})$ называется формула вида*

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 f(\vec{x}) d\vec{x} = (\det \Lambda)^{-1} \sum_{\vec{x} \in M'(\Lambda)} \rho_{\vec{x}} f(\vec{x}) - R_{N'(\Lambda)}[f], \quad (151)$$

$$\text{где } \rho_{\vec{x}} = \sum_{\vec{y} \in M_1(\Lambda), \{\vec{y}\} = \vec{x}} \rho(\vec{y}), \quad N'(\Lambda) = |M'(\Lambda)|,$$

$R_{N'(\Lambda)}[f]$ — погрешность квадратурной формулы.

Для погрешности квадратурной формулы с обобщенной параллелепипедальной сеткой II рода на классе E_s^α справедлива оценка (см. [28])

$$R_{N'(\Lambda)}[E_s^\alpha(C)] = \sup_{f \in E_s^\alpha(C)} |R_{N'(\Lambda)}[f]| \leq CB \cdot c_1(\alpha)^s \zeta_H(\Lambda|\alpha), \quad (152)$$

$$\text{где } c_1(\alpha) = 2^{\alpha+1} \left(3 + \frac{2}{\alpha-1} \right), \quad \zeta_H(\Lambda|\alpha) = \sum'_{\vec{x} \in \Lambda} (\bar{x}_1 \dots \bar{x}_s)^{-\alpha}.$$

Пусть целочисленная решётка Λ задана матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & \dots & a_{ss} \end{pmatrix}, \quad \det A \neq 0,$$

где $a_{\nu\mu}$ — целые числа ($\nu, \mu = 1, \dots, s$). Рассмотрим взаимную решётку Λ^* , которая задается матрицей

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\det \Lambda} & \dots & \frac{A_{s1}}{\det \Lambda} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{A_{1s}}{\det \Lambda} & \dots & \frac{A_{ss}}{\det \Lambda} \end{pmatrix},$$

где величина $A_{\nu\mu}$ — алгебраическое дополнение к элементу $a_{\nu\mu}$ в матрице A .

Отметим, что базису $\vec{\lambda}_\nu = (a_{\nu 1}, \dots, a_{\nu s})$ ($\nu = 1, \dots, s$) решётки Λ взаимным базисом $\vec{\lambda}_\nu^*$ ($\nu = 1, \dots, s$) взаимной решётки Λ^* будут векторы

$$\vec{\lambda}_\nu^* = \left(\frac{A_{\nu 1}}{\det \Lambda}, \dots, \frac{A_{\nu s}}{\det \Lambda} \right) \quad (\nu = 1, \dots, s).$$

Из определения сетки $M(\Lambda)$ следует, что

$$M(\Lambda) = \left\{ \vec{x} \mid 0 \leq x_\nu = \frac{k_1 A_{1\nu} + \dots + k_s A_{s\nu}}{\det \Lambda} < 1 \quad (\nu = 1, \dots, s); \vec{k} \in \mathbb{Z}^s \right\}.$$

Нетрудно видеть, что понятие обобщенной параллелепипедальной сетки включает как частные случаи все предыдущие сетки: параллелепипедальные, комбинированные, алгебраические, равномерные и обобщенные равномерные сетки.

14. Равномерное распределение, регулярные сетки

Рассмотрим единичный $s+1$ -мерный куб $G_{s+1} = [0; 1]^{s+1}$. Напомним, что произвольное множество точек $X = \{\vec{x}_\nu | \vec{x}_\nu = (x_{1\nu}, \dots, x_{s+1\nu}), \nu = 1, \dots, N\}$ из G_{s+1} называется сеткой X из N точек или N узлов. Пусть $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_{s+1}) \in [0; 1]^{s+1}$ и величина $Z(X, \vec{\alpha})$ равна количеству точек сетки X , лежащих в области $[0; \alpha_1] \times \dots \times [0; \alpha_{s+1}]$, тогда локальным отклонением сетки X называется функция

$$D(X, \vec{\alpha}) = Z(X, \vec{\alpha}) - N\alpha_1 \dots \alpha_{s+1} \quad (153)$$

от $s+1$ переменных, определенная для всех $\vec{\alpha} \in [0; 1]^{s+1}$.

О равномерности распределения узлов сетки в G_{s+1} можно судить по норме локального отклонения в той или иной метрике:

стандартное отклонение в метрике $L_q (q \geq 1)$

$$\|D(X)\|_q = \left(\int_0^1 \dots \int_0^1 |D(X, \vec{t})|^q d\vec{t} \right)^{1/q}; \quad (154)$$

отклонение

$$D(X) = \sup_{\vec{t} \in [0; 1]^s} |D(X, \vec{t})|; \quad (155)$$

квадратичное отклонение

$$D_2(X) = \int_0^1 \dots \int_0^1 |D(X, \vec{t})|^2 d\vec{t}; \quad (156)$$

q -ое отклонение

$$D_q(X) = \int_0^1 \dots \int_0^1 |D(X, \vec{t})|^q d\vec{t}. \quad (157)$$

В 1954 году Рот [44] показал, что при любом выборе сетки для квадратичного отклонения справедлива оценка снизу

$$D_2(N) \geq c_1(s) \ln^s N, \quad (158)$$

где $c_1(s) > 0$. (Здесь и далее все константы положительные).

Как следствие оценки (158) Рот получил оценку снизу для отклонения

$$D(N) \geq c_2(s) \ln^{s/2} N. \quad (159)$$

В 1972 году В. Шмидт [46] усилил результат Рота при $s = 1$, показав, что

$$D(N) \geq c_3 \ln N. \quad (160)$$

В 1977 году В. Шмидт [47] обобщил оценку Рота снизу для квадратичного отклонения на случай q -ого отклонения

$$D_q(N) \geq c_4(s, q) \ln^{sq/2} N \quad (q > 1). \quad (161)$$

Вопрос о точности оценок (158), (160), (161) был решен положительно.

В 1956 году Давенпорт [40] построил сетки при $s = 1$ с

$$D_2(N) \leq c_5 \ln N. \quad (162)$$

Были даны и другие доказательства существования сеток при $s = 1$, удовлетворяющих неравенству (162). При этом доказательства были эффективные, позволяющие находить конкретные сетки.

В 1980 году для любого $s > 1$ Рот [45] доказал существование сеток Хэммерсли — Рота с

$$D_2(N) \leq c_6(s) \ln^s N. \quad (163)$$

Доказательство Рота неэффективно, так как использовало усреднение по непрерывному параметру сеток Хэммерсли — Рота.

Аналогичный результат для q -ого отклонения получил Чень [38] в 1980 году, опираясь на работу Рота:

$$D_q(N) \leq c_7(s, q) \ln^{sq/2} N \quad (q > 0). \quad (164)$$

Чень также пользовался усреднением по непрерывному параметру сеток Хэммерсли — Рота и его результат неэффективен. В работе [39] в 1983 году Ченю удалось, используя модификацию сеток Фора, получить эффективное доказательство теоремы Рота.

Другое эффективное доказательство теоремы Рота о квадратичном отклонении было получено в работах [13, 14]. В этих работах для каждого $N \geq 3$ рассматривается конечная совокупность модифицированных сеток Хэммерсли — Рота. Показано, что для каждой такой сетки отклонение $D(N) = O(\ln^s N)$. Построены три алгоритма нахождения модифицированных сеток Хэммерсли — Рота, у которых квадратичное отклонение $D_2(N) = O(\ln^s N)$, и тем самым получено эффективное доказательство теоремы Рота о квадратичном отклонении. Вторым алгоритм требует $O(N^3 \ln N)$ операций для нахождения сетки с $D_2(N) = O(\ln^s N)$. Третий алгоритм позволяет за $O(N^3 \ln N)$ операций строить модифицированные сетки Хэммерсли — Рота с "правильным" порядком квадратичного отклонения, для которых соответствующие модифицированные сетки Хэммерсли — Рота меньших размерностей имеют правильный порядок квадратичного отклонения. Даются алгоритмы построения модифицированных сеток

Хэммерсли — Рота, q -ое отклонение которых $D_q(N) = O(\ln^{\frac{sq}{2}} N)$ для любого $q > 0$. При этом, если в первом алгоритме сетка, вообще говоря, зависит от q , то второй алгоритм гарантирует единую сетку с правильным порядком $D_q(N) = O(\ln^{\frac{sq}{2}} N)$ для любого $q > 0$.

Таким образом, получено эффективное усиление теоремы Ченя о q -ом отклонении за счет устранения зависимости сетки от q .

14.1. Функция ван дер Корпута — Хэммерсли и функции Ченя

Пусть для натурального $p \geq 2$, произвольное целое $h \geq 0$ и $P = p^h$. Для произвольного натурального N определим множества:

$$A(N) = \{0, \dots, N-1\} \quad \text{и} \quad B(N) = \left\{0, \frac{1}{N}, \dots, \frac{N-1}{N}\right\}.$$

Для неотрицательного целого n , заданного в p -ичном разложении

$$n = \sum_{\nu \geq 0} n_\nu p^\nu, \quad n_\nu \in A(p),$$

определим функцию ван дер Корпута–Хэммерсли равенством

$$p(n) = \sum_{\nu \geq 0} n_\nu p^{-\nu-1}. \quad (165)$$

ЛЕММА 17. Для любого целого $h \geq 0$ функция $p(n)$ взаимнооднозначно отображает $A(P)$ на $B(P)$.

ЛЕММА 18. Для любого целого $\alpha \geq 0$ и целых $u \in A(p^\alpha)$, $v \geq 0$ справедливо равенство

$$p(u + p^\alpha v) = p(u) + p^{-\alpha} \cdot p(v).$$

Для неотрицательных целых n и t , заданных в p -ичном разложении

$$n = \sum_{\nu \geq 0} n_\nu p^\nu, \quad t = \sum_{\nu \geq 0} t_\nu p^\nu,$$

где $n_\nu, t_\nu \in A(p)$, определим функцию Ченя равенством

$$p(n, t) = \sum_{\nu \geq 0} \left\{ \frac{n_\nu + t_\nu}{p} \right\} \cdot p^{-\nu}. \quad (166)$$

Заметим, что для функции ван дер Корпута — Хэммерсли справедливо равенство $p(n) = p(n, 0)$.

ЛЕММА 19. Для любого $t \in A(P)$ функция $p(n, t)$ взаимнооднозначно отображает $A(P)$ на $B(P)$.

ЛЕММА 20. Для любого целого $\alpha \geq 0$ и целых $u, t \in A(p^\alpha)$, $v, w \geq 0$ справедливо равенство

$$p(u + p^\alpha v, t + p^\alpha w) = p(u, t) + p^{-\alpha} \cdot p(v, w).$$

Определим при фиксированном натуральном h и $P = p^h$, при целом $\alpha \geq 0$ и целых n, t

$$f_\alpha(n) = \begin{cases} 0 & \text{при } n \not\equiv 0 \pmod{p^\alpha} \text{ или } n = 0 \\ p^{-\tau} \left\{ \frac{m}{p} \right\} \left(1 - \left\{ \frac{m}{p} \right\} \right) & \text{при } n = p^\tau m, \quad m \not\equiv 0 \pmod{p}, \quad \tau \geq \alpha \end{cases} \quad (167)$$

$$\begin{aligned} x(n) &= p \left(P \left\{ \frac{n}{P} \right\} \right) \\ x(n, t) &= p \left(P \left\{ \frac{n}{P} \right\}, P \left\{ \frac{t}{P} \right\} \right) \end{aligned} \quad (168)$$

Заметим, что $x(n)$, $x(n, t)$ — периодические функции целых аргументов с периодом P по каждому аргументу. Определим величины:

$$S_\alpha(k, n) = \frac{1}{p^{h-\alpha}} \sum_{t \in A(p^{h-\alpha})} (1 - \max(x(k + t \cdot p^\alpha), x(n + t \cdot p^\alpha))) \quad (169)$$

$$S_\alpha(k, n, t) = \frac{1}{p^{h-\alpha}} \sum_{t \in A(p^{h-\alpha})} (1 - \max(x(k, t + u \cdot p^\alpha), x(n, t + u \cdot p^\alpha))) \quad (170)$$

$$Q_\alpha(k) = \frac{1}{p^{h-\alpha}} \sum_{t \in A(p^{h-\alpha})} (1 - x^2(k + t \cdot p^\alpha)) \quad (171)$$

$$Q_\alpha(k, t) = \frac{1}{p^{h-\alpha}} \sum_{u \in A(p^{h-\alpha})} (1 - x^2(k, t + u \cdot p^\alpha)) \quad (172)$$

ЛЕММА 21. При $0 \leq k, n \leq P - 1$ справедливо равенство

$$S_\alpha(k, n) = 1 + \frac{1}{2P} - \frac{1}{2p^\alpha} - \max \left(x \left(p^\alpha \left\{ \frac{k}{p^\alpha} \right\} \right), x \left(p^\alpha \left\{ \frac{n}{p^\alpha} \right\} \right) \right) - f_\alpha(|k - n|).$$

ЛЕММА 22. При $0 \leq k, n \leq P - 1$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} S_\alpha(k, n, t) &= 1 + \frac{1}{2P} - \frac{1}{2p^\alpha} - f_\alpha(|k - n|) - \\ &- \max \left(x \left(p^\alpha \left\{ \frac{k}{p^\alpha} \right\}, p^\alpha \left\{ \frac{t}{p^\alpha} \right\} \right), x \left(p^\alpha \left\{ \frac{n}{p^\alpha} \right\}, p^\alpha \left\{ \frac{t}{p^\alpha} \right\} \right) \right). \end{aligned}$$

ЛЕММА 23. Справедливо равенство

$$Q_\alpha(k) = 1 - \frac{1}{3p^{2\alpha}} + \frac{1}{2p^{h+\alpha}} - \frac{1}{6P^2} - x^2 \left(p^\alpha \left\{ \frac{k}{p^\alpha} \right\} \right) - x \left(p^\alpha \left\{ \frac{k}{p^\alpha} \right\} \right) \left(\frac{1}{p^\alpha} - \frac{1}{P} \right)$$

ЛЕММА 24. Справедливо равенство

$$\begin{aligned} Q_\alpha(k, t) &= 1 - \frac{1}{3p^{2\alpha}} + \frac{1}{2p^{h+\alpha}} - \frac{1}{6P^2} - x^2 \left(p^\alpha \left\{ \frac{k}{p^\alpha} \right\}, p^\alpha \left\{ \frac{t}{p^\alpha} \right\} \right) - \\ &- x \left(p^\alpha \left\{ \frac{k}{p^\alpha} \right\}, p^\alpha \left\{ \frac{t}{p^\alpha} \right\} \right) \left(\frac{1}{p^\alpha} - \frac{1}{P} \right) \end{aligned}$$

В дальнейшем будем использовать функцию

$$\delta_N(a) = \begin{cases} 1, & \text{если } a \equiv 0 \pmod{N} \\ 0, & \text{если } a \not\equiv 0 \pmod{N}. \end{cases} \quad (173)$$

Нам потребуется специальное представление характеристической функции отрезка $[0, \frac{a}{P}]$ в точках $z \in B(P)$.

ЛЕММА 25. Пусть $a = \sum_{\nu=0}^h a_\nu p^\nu$, $0 \leq a \leq P$,

$$\chi\left(z, \frac{a}{P}\right) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leq z < \frac{a}{P} \\ 0, & \text{если } \frac{a}{P} \leq z \leq 1, \end{cases}$$

тогда для любого целого k справедливо равенство

$$\chi\left(x(k), \frac{a}{P}\right) = a_h + \sum_{\lambda \in A(h)} \sum_{y=1}^{a_h - \lambda - 1} \delta_{p^{\lambda+1}}(k + y \cdot p^\lambda - P \cdot x(a)).$$

Зададим на множестве $A(P)$ групповую операцию $\oplus$ равенством

$$t_1 \oplus t_2 = P \left\{ \frac{t_1 + t_2}{P} \right\},$$

для любых t_1 и t_2 из множества $A(P)$ и обозначим полученную группу через $G(P)$. Очевидно, что $G(P)$ изоморфна $\mathbb{Z}_P$ — группе вычетов по модулю P .

Используя p -ичные разложения элементов множества $A(P)$, определим другую групповую операцию $\odot$ равенством

$$t_1 \odot t_2 = \sum_{\nu \in A(h)} \left\{ \frac{t_{1\nu} + t_{2\nu}}{p} \right\} \cdot p^{\nu+1}$$

и группу с указанной операцией обозначим через $G^*(P)$. Ясно, что $G^*(P)$ изоморфна $\mathbb{Z}_p^h$.

Зададим действие группы $G(P)$ на множестве $B(P)$ с помощью периодизированной функции ван дер Корпута–Хэммерсли следующим равенством: для любых $t \in G(P)$ и $z \in B(P)$

$$t * z = x(t + P \cdot x(P \cdot z)),$$

то есть, если $z = x(n)$, то $t * z = x(n + t)$.

Такое преобразование будем называть арифметическим сдвигом, а $G(P)$ — группой арифметических сдвигов множества $B(P)$.

Аналогично зададим действие группы $G^*(P)$ на множестве $B(P)$ для любых $t \in G^*(P)$ и $z \in B(P)$ с помощью периодизированной функции Чена следующим образом

$$t \bullet z = x(P \cdot x(P \cdot z), t),$$

то есть из $z = x(n)$, следует $t \bullet z = x(n, t)$ и

$$t_1 \bullet (t_2 \bullet z) = x(n, t_1 \odot t_2) = (t_1 \odot t_2) \bullet z.$$

Данное преобразование назовем покоординатно-поразрядным сдвигом, а $G^*(P)$ — группой поразрядных сдвигов множества $B(P)$.

14.2. Сетки Хэммерсли

Перейдем к определению сеток Хэммерсли — Рота.

Пусть $p_1, \dots, p_s$ — различные попарно взаимно простые натуральные числа больше 1. Для произвольного натурального $N \geq 3$ определим величины

$$h_j = [\ln N / \ln p_j] + 1, \quad P_j = p_j^{h_j} \quad (j=1, \dots, s); \quad M = P_1 \dots P_s; \quad M_j = M / P_j \quad (j=1, \dots, s). \quad (174)$$

Тогда справедливы соотношения

$$N < P_j \leq Np_j, (M_j, P_j) = 1 \ (j = 1, \dots, s); \ N^s < M \leq N^s p_1 \dots p_s. \quad (175)$$

Через $x_j(n)$ будем обозначать функцию $x(n)$ при $p = p_j, h = h_j, P = P_j$ ($j = 1, \dots, s$). Пусть $\vec{t} = (t_1, \dots, t_s)$ — произвольный целочисленный вектор. Для любого целого n полагаем

$$\vec{x}(n, \vec{t}) = \left(x_1(n + t_1), \dots, x_s(n + t_s), \frac{n}{N} \right). \quad (176)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 26. Модифицированной сеткой Хэммерсли — Рота будем называть сетку

$$XR(N, \vec{t}) = \{ \vec{x}(n, \vec{t}) \mid n = 0, \dots, N-1 \} \quad (177)$$

из N узлов.

Из периодичности $x_j(n)$ с периодом P_j следует, что сетка $XR(N, \vec{t})$ периодически зависит от t_j с периодом P_j ($j = 1, \dots, s$). Отсюда вытекает, что при заданном N существует ровно M различных модифицированных сеток Хэммерсли — Рота, то есть порядка N^s различных сеток.

14.3. Сетки Холтона

Пусть $p_1, \dots, p_s$ попарно взаимно простые числа, например, первые s простых чисел.

Рассмотрим пару $\vec{p}$ -ичных сеток $X = XR(N), \ Y = X(N)$, где

$$XR(N) = \left\{ \left(x_1(n), \dots, x_s(n), \frac{n}{N} \right) \mid n \in A(N) \right\} \quad (178)$$

— сетка Хэммерсли,

$$X(N) = \{ (x_1(n), \dots, x_s(n)) \mid n \in A(N) \} \quad (179)$$

— сетка Холтона.

Модифицированные сетки Хэммерсли-Рота $XR(N, \vec{t})$, предложенные Н. М. Добровольским в работах [13, 14] имеют вид

$$XR(N, \vec{t}) = \left\{ \left(x_1(n + t_1), \dots, x_s(n + t_s), \frac{n}{N} \right) \mid n \in A(N) \right\} \quad (180)$$

и их совокупность образует G -орбиту сетки Хэммерсли.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 27. Сеткой Хэммерсли-Рота-Чена будем называть сетку вида

$$XRC(N, \vec{t}) = \left\{ \left(x_1(n, t_1), \dots, x_s(n, t_s), \frac{n}{N} \right) \mid n \in A(N) \right\}. \quad (181)$$

Очевидно, что множество всех сеток Хэммерсли-Рота-Чена образуют G^* -орбиту сетки Хэммерсли.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 28. Модифицированной сеткой Холтона будем называть сетку вида

$$X(N, \vec{t}) = \{ (x_1(n + t_1), \dots, x_s(n + t_s)) \mid n \in A(N) \}. \quad (182)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 29. Сеткой Холтона-Чена будем называть сетку вида

$$XC(N, \vec{t}) = \{ (x_1(n, t_1), \dots, x_s(n, t_s),) \mid n \in A(N) \}. \quad (183)$$

Ясно, что множества модифицированных сеток Холтона и сеток Холтона-Чена образуют соответственно G -орбиту и G^* -орбиту сетки Холтона.

14.4. Сетки Фора

Пусть $p_1 = p_2 = \dots = p_s = p \geq s$ и p — простое число. В этом случае будем говорить просто о p -ичных сетках. Таким образом имеет место следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 30. p -ичной сеткой I рода или просто p -ичной сеткой называется любая сетка X вида

$$X = \left\{ \left(x(m_{1k}), \dots, x(m_{sk}), \frac{k}{N} \right) \mid k \in A(N) \right\} \quad (184)$$

при этом целые $m_{\nu k}$ должны удовлетворять условию

$$m_{\nu k_1} \not\equiv m_{\nu k_2} \pmod{P} \quad \text{при} \quad k_1 \neq k_2, \quad (\nu = 1, \dots, s). \quad (185)$$

Таким образом, p -ичная сетка является N -подмножеством декартового произведения:

$$B^s(P) \times B(N), \quad (186)$$

при этом проекция сетки на любую координату состоит из N различных точек.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 31. p -ичной сеткой II рода называется сетка Y вида

$$X = \{(x(m_{1k}), \dots, x(m_{sk})) \mid k \in A(N)\}, \quad (187)$$

где целые $m_{\nu k}$, где $(\nu = 1, \dots, s)$ удовлетворяют условиям (185).

Определения 30 и 31 фактически содержатся в работе Фора [41], хотя несколько отличаются в деталях. Так как в этой работе Фора речь идет о регулярных p -ичных сетках, то дадим следующие определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 32. Для любого $N \geq 2$ и $p \geq s$ обобщенными сетками Фора I и II рода назовем соответственно произвольные регулярные p -ичные сетки X и Y вида (184) и (187).

Для любого целого $n \geq 0$ и $k \geq 0$ целого определим функции

$$y_k(n) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{p} \sum_{\mu=\nu}^{\infty} C_{\mu}^{\nu} \cdot k^{\mu-\nu} \cdot n_{\mu} \right\} \cdot p^{\nu+1}, \quad (188)$$

где

$$n = \sum_{\nu=0}^{\infty} n_{\nu} \cdot p^{\nu} \quad n_{\nu} \in A(p), \quad (\nu = 0). \quad (189)$$

Так как в p -ичном разложении (189) целого числа n лишь конечное число p -ичных цифр n_{ν} отличны от нуля, то все ряды в (188) на самом деле являются конечными суммами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 33. Вектор $\vec{k} = (k_1, \dots, k_s)$ назовем p -вектором, если $k_j \in A(p)$, $(j = 1, \dots, s)$ и $k_j \neq k_i$ при $j \neq i$.

Через $K(p)$ обозначим множество всех p -векторов $\vec{k}$. Очевидно $|K(p)| = p \cdot (p-1) \cdot \dots \cdot (p-s+1)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 34. Для любого p -вектора $\vec{k}$ и натурального $N \geq 2$ сетками Фора $F(N, \vec{k})$, $F^*(N, \vec{k})$ назовем p -ичную сетку вида

$$F(N, \vec{k}) = \left\{ (x(y_{k_1}(n)), \dots, x(y_{k_s}(n)), \frac{n}{N}) \mid n \in A(N) \right\}, \quad (190)$$

$$F^*(N, \vec{k}) = \{(x(y_{k_1}(n)), \dots, x(y_{k_s}(n))) \mid n \in A(N)\}. \quad (191)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 35. Для любого p -вектора $\vec{k}$ и натурального $N \geq 2$, $\vec{t} \in A^s(P)$ модифицированными сетками Фора I и II рода назовем соответственно сетки $F(N, \vec{k}, \vec{t})$ и $F^*(N, \vec{k}, \vec{t})$ вида

$$F(N, \vec{k}, \vec{t}) = \left\{ (x(y_{k_1}(n) + t_1), \dots, x(y_{k_s}(n) + t_s), \frac{n}{N}) \mid n \in A(N) \right\}, \quad (192)$$

$$F^*(N, \vec{k}, \vec{t}) = \{ (x(y_{k_1}(n) + t_1), \dots, x(y_{k_s}(n) + t_s)) \mid n \in A(N) \}. \quad (193)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 36. Для любого p -вектора $\vec{k}$ и натурального $N \geq 2$, $\vec{t} \in A^s(P)$ сетками Фора-Чена I и II рода назовем соответственно сетки $FC(N, \vec{k}, \vec{t})$ и $FC^*(N, \vec{k}, \vec{t})$ вида

$$FC(N, \vec{k}, \vec{t}) = \left\{ (x(y_{k_1}(n), t_1), \dots, x(y_{k_s}(n), t_s), \frac{n}{N}) \mid n \in A(N) \right\}, \quad (194)$$

$$FC^*(N, \vec{k}, \vec{t}) = \{ (x(y_{k_1}(n), t_1), \dots, x(y_{k_s}(n), t_s)) \mid n \in A(N) \}. \quad (195)$$

ТЕОРЕМА 22. Для любого p -вектора $\vec{k}$ и натурального $N \geq 2$ сетки $F(N, \vec{k})$ и $F^*(N, \vec{k})$ являются обобщенными сетками Фора I и II рода соответственно.

Из теоремы 22 следует, что для любого $N \geq 2$ множество обобщенных сеток Фора непусто.

СЛЕДСТВИЕ 1. Для любого p -вектора $\vec{k}$, натурального $N \geq 2$ и целочисленного вектора $\vec{t} \in A^s(P)$ следующие сетки $F(N, \vec{k}, \vec{t})$, $F^*(N, \vec{k}, \vec{t})$, $FC(N, \vec{k}, \vec{t})$ и $FC^*(N, \vec{k}, \vec{t})$ являются обобщенными сетками Фора.

Для сеток Фора I и II рода справедливы соотношения

$$\sigma_{s+1}(GF(N, \vec{k})) = \sigma_{s+1}(G^*F(N, \vec{k})) \leq c(s, p) \cdot \ln^s N + O(\ln^{s-1} N), \quad (196)$$

$$\sigma_s(GF^*(N, \vec{k})) = \sigma_s(G^*F^*(N, \vec{k})) \leq c(s, p) \cdot \ln^s N + O(\ln^{s-1} N), \quad (197)$$

где

$$c(s, p) = \frac{1}{s!} \left(\frac{p^2 - 1}{6 \cdot \ln p} \right)^s.$$

Так как для любого $s \geq 2$ существует простое p с $s \leq p < 2s$, то для величины $c(s) = \min_{p \geq s} c(s, p)$ получим

$$\frac{1}{s!} \left(\frac{s^2 - 1}{6 \cdot \ln s} \right)^s < c(s) < \frac{1}{s!} \left(\frac{2(s^2 - 1)}{3 \cdot \ln s} \right)^s.$$

14.5. Сетки Соболя

Пусть $p_1 = p_2 = \dots = p_s = 2$. В этом случае будем говорить просто о 2-ичных сетках. Таким образом имеет место следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 37. 2-ичной сеткой I рода называется 2-ичная сетка X вида

$$X = \left\{ \left(x(m_{1k}), \dots, x(m_{sk}), \frac{k}{N} \right) \mid k \in A(N) \right\}, \quad (198)$$

при этом целые $m_{\nu k}$ должны удовлетворять условию

$$m_{\nu k_1} \not\equiv m_{\nu k_2} \pmod{P} \quad \text{при} \quad k_1 \neq k_2, \quad (\nu = 1, \dots, s). \quad (199)$$

Здесь и далее на протяжении всего параграфа

$$\begin{aligned} x(n) &= \sum_{\nu \in A(h)} n_\nu \cdot 2^{-\nu-1} \quad \text{при} \quad n = \sum_{\nu \in A(h)} n_\nu \cdot 2^\nu, \quad n_\nu \in \{0; 1\}, \\ n &\in A(P), \quad P = 2^h, \quad N < P \leq 2N. \end{aligned} \quad (200)$$

Таким образом, 2-ичная сетка является N -подмножеством декартового произведения

$$B^s \times B(N), \quad (201)$$

при этом проекция сетки на любую координату состоит из N различных точек.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 38. 2-ичной сеткой II рода называется сетка Y вида

$$Y = \{(x(m_{1k}), \dots, x(m_{sk})) \mid k \in A(N)\}, \quad (202)$$

где целые $m_{\nu k}$, $(\nu = 1, \dots, s)$ удовлетворяют условиям (8.2).

В работах И. М. Соболя [35] исследуются регулярные 2-ичные сетки типа $q = 2^\tau$, поэтому дадим следующие определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 39. Для любых целых $N \geq 2$ и $\tau \geq 0$ рациональными Π_τ сетками I и II рода назовем соответственно произвольные регулярные 2-ичные сетки X и Y типа $q = 2^\tau$ вида (198) и (202).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 40. Допустимой последовательностью

$$V = \{V_0, \dots, V_k, \dots\}$$

назовем произвольную последовательность ненулевых рациональных чисел таких, что

$$V_k \in B(2^{k+1}) \setminus B(2^k).$$

Другими словами, V_k — несократимая дробь со знаменателем 2^{k+1} .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 41. Функцией Соболя с допустимой последовательностью V назовем функцию $c(n)$, задаваемую равенствами

$$c(n) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{\mu=0}^{\infty} n_\mu \cdot v_{\mu\nu} \right\} \cdot 2^{\nu+1}, \quad (203)$$

где

$$n = \sum_{\nu=0}^{\infty} n_\nu \cdot 2^\nu, \quad v_\mu = \sum_{\nu=0}^{\infty} v_{\mu\nu} \cdot 2^{-\nu-1} = \sum_{\nu \in A(\mu+1)} v_{\mu\nu} \cdot 2^{-\nu-1}.$$

ЛЕММА 26. Пусть $n \in A(2^k)$, тогда $c(n) \in A(2^k)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 42. Пусть m — натуральное число и матрица B , состоящая из 0 и 1, имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \\ v_{10} & 1 & 0 & \\ \dots & & 1 & 0 \\ v_{m-10} \dots v_{m-1m-2} & 1 & & \end{pmatrix} \quad (204)$$

и целое

$$a \in A(2^{m-1}), \quad a = \sum_{\nu \in A(m-1)} a_\nu \cdot 2^\nu, \quad (205)$$

тогда последовательностью типа (B, a, m) назовем последовательность

$$V(B, a) = \{V_0, \dots, V_k, \dots\},$$

задаваемую соотношениями

$$V_k = \begin{cases} \sum_{\nu \in A(m)} v_{k\nu} \cdot 2^{-\nu-1}, & k \in A(m) \\ \sum_{\nu \geq 0} v_{k\nu} \cdot 2^{-\nu-1}, & k \geq m \end{cases} \quad (206)$$

где для $k \geq m$ $v_{k\nu}$ определяются рекуррентными соотношениями

$$V_{k\nu} = \begin{cases} 2 \cdot \left\{ -\frac{1}{2} \left(\sum_{\mu \in A(m-1)} a_\mu v_{k+\mu-m+1\nu} + v_{k-m\nu} \right) \right\} & \nu \in A(m) \\ 2 \cdot \left\{ \frac{1}{2} \left(v_{k-m\nu-m} - \sum_{\mu \in A(m-1)} a_\mu \cdot v_{k+\mu-m+1\nu} - v_{k-m\nu} \right) \right\} & \text{при } \nu \geq m \end{cases} \quad (207)$$

ЛЕММА 27. Для любой матрицы B вида (204) и целого a вида (205) последовательность $V(B, a, m)$ является допустимой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 43. Для любого натурального m и целого a вида (205) линейным разностным оператором $L = L(m, a)$ называется оператор вида

$$Lu_i = u_{i+m} + a_{m-1}u_{i+m-1} + \dots + a_1u_{i+1} + u_i, \quad (208)$$

где $\{u_i\}$ последовательность из нулей и единиц.

Решением линейного разностного сравнения порядка m с постоянными коэффициентами вида

$$Lu_i \equiv 0 \pmod{2} \quad (209)$$

называется бесконечная последовательность

$$\dots, \quad u_{-2}, \quad u_{-1}, \quad u_0, \quad u_1, \quad u_2, \quad \dots,$$

определенная для всех $-\infty < i < \infty$ и удовлетворяющая сравнению (209).

В работе [35] рассматривается понятие моноциклического разностного оператора $L = L(m, a)$ и изучены его свойства.

Рассмотрим s последовательностей

$$V(B_j, a_j) = \left\{ V_{jk} = \sum_{\nu \geq 0} v_{k\nu}^{(j)} \mid k \geq 0 \right\} \quad (j = 1, \dots, s)$$

и для неотрицательных целых $\nu_1, \dots, \nu_s$ с $\sum_{j=1}^s \nu_j = \nu - \tau$ систему линейных сравнений

$$\begin{cases} \sum_{\mu \in A(\nu)} n_\mu \cdot v_{\mu\lambda}^{(j)} \equiv d_{j\lambda} \pmod{2} \\ \lambda \in A(\nu_j), \quad (j = 1, \dots, s) \\ n_\mu \in \{0; 1\} \quad \mu \in A(\nu) \end{cases} \quad (210)$$

из $\nu - \tau$ сравнений с ν неизвестными.

В той же работе доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 23. Теорема Соболя. Пусть $L(m_1, a_1), \dots, L(m_s, a_s)$ — различные моноциклические операторы, порядки которых равны $m_1, \dots, m_s$ и $B_1, \dots, B_s$ — квадратные матрицы вида (204), порядков $m_1, \dots, m_s$ соответственно. Тогда система сравнений (210) при

$$\tau = \sum_{j=1}^s (m_j - 1) \quad \text{и} \quad \nu \geq \tau$$

имеет точно 2^τ решений при любых значениях $d_{j\lambda}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 44. Для любого $N \geq 2$ и набора $L(m_1, a_1), \dots, L(m_s, a_s)$ — различных моноциклических операторов, сетками Соболя I и II рода назовем соответственно сетки

$$S(N, \vec{m}, \vec{a}) = \left\{ \left(x(c_1(n)), \dots, x(c_s(n)), \frac{n}{N} \right) \mid n \in A(N) \right\}, \quad (211)$$

$$S^*(N, \vec{m}, \vec{a}) = \{ (x(c_1(n)), \dots, x(c_s(n))) \mid n \in A(N) \} \quad (212)$$

где $c_j(n)$ — функция Соболя с допустимой последовательностью

$$V = V(B_j, a_j), \quad \vec{a} = (a_1, \dots, a_s)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 45. Для любого $N \geq 2$ и $\vec{t} \in A^s(P)$ модифицированными сетками Соболя I и II рода назовем соответственно сетки вида :

$$S(N, \vec{m}, \vec{a}, \vec{t}) = \left\{ \left(x(c_1(n) + t_1), \dots, x(c_s(n) + t_s), \frac{n}{N} \right) \mid n \in A(N) \right\}, \quad (213)$$

$$S^*(N, \vec{m}, \vec{a}, \vec{t}) = \{ (x(c_1(n) + t_1), \dots, x(c_s(n) + t_s)) \mid n \in A(N) \}. \quad (214)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 46. Для любого $N \geq 2$ и $\vec{t} \in A^s(P)$ сетками Соболя-Чена I и II рода назовем соответственно сетки вида :

$$SC(N, \vec{m}, \vec{a}, \vec{t}) = \left\{ (x(c_1(n), t_1), \dots, x(c_s(n), t_s), \frac{n}{N}) \mid n \in A(N) \right\} \quad (215)$$

$$SC^*(N, \vec{m}, \vec{a}, \vec{t}) = \{ (x(c_1(n), t_1), \dots, x(c_s(n), t_s)) \mid n \in A(N) \} \quad (216)$$

ТЕОРЕМА 24. Для любого $N \geq 2$ и сетки Соболя-Чена I и II рода являются рациональными Π_τ сетками с $\tau = \sum_{j=1}^s (m_j - 1)$.

Из теоремы 24 следует, что для любого $N \geq 2$ множество рациональных Π_τ сеток непусто при $\tau \geq \tau(s)$, где $\tau(s) = \min \sum_{j=1}^s (m_j - 1)$ и минимум берется по всем наборам различных моноциклических операторов $L(m_1, a_1), \dots, L(m_s, a_s)$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Для любого натурального $N \geq 2$ и $\vec{t} \in A^s(P)$ следующие сетки $S(N, \vec{m}, \vec{a}, \vec{t})$, $S^*(N, \vec{m}, \vec{a}, \vec{t})$, $SC(N, \vec{m}, \vec{a}, \vec{t})$ и $SC^*(N, \vec{m}, \vec{a}, \vec{t})$ являются рациональными Π_τ сетками с $\tau = \sum_{j=1}^s (m_j - 1)$

Для сеток Соболя I и II рода справедливы соотношения

$$\sigma_{s+1}(GS(N, \vec{m}, \vec{a})) = \sigma_{s+1}(G^*S(N, \vec{m}, \vec{a})) \leq c(s) \cdot \ln^s N + O(\ln^{s-1} N), \quad (217)$$

$$\sigma_s(GS^*(N, \vec{m}, \vec{a})) = \sigma_s(G^*S^*(N, \vec{m}, \vec{a})) \leq c(s) \cdot \ln^s N + O(\ln^{s-1} N), \quad (218)$$

где

$$c(s) = \frac{4^\tau}{s!} \left(\frac{1}{\ln 4} \right)^s = \frac{4^\tau}{s! \cdot \ln^s 4} \quad \text{и} \quad \tau = \sum_{j=1}^s (m_j - 1).$$

14.6. Сетки Смоляка

Рассмотрим s -мерную простейшую декартову сетку

$$M(\nu_1, \dots, \nu_s) = \left\{ \left(\frac{k_1}{2^{\nu_1}}, \dots, \frac{k_s}{2^{\nu_s}} \right) \mid 0 \leq k_j \leq 2^{\nu_j} - 1 \ (j = 1, \dots, s) \right\}$$

из $2^{\nu_1 + \dots + \nu_s}$ точек, которая является декартовым произведением одномерных равномерных сеток, вообще говоря, с различным количеством узлов:

$$M(\nu_1, \dots, \nu_s) = M(\nu_1) \times \dots \times M(\nu_s).$$

В случае, когда величины $\nu_1, \dots, \nu_s$ равны, сетку $M(\nu_1, \dots, \nu_s)$ называют равномерной, в противном случае — обобщенной равномерной сеткой.

Модифицированной обобщенной равномерной сеткой $M(\nu_1, \dots, \nu_s; \vec{\beta})$ будем называть сетку

$$M(\nu_1, \dots, \nu_s; \vec{\beta}) = \left\{ \left(\left\{ \frac{k_1}{2^{\nu_1}} + \beta_1 \right\}, \dots, \left\{ \frac{k_s}{2^{\nu_s}} + \beta_s \right\} \right) \mid 0 \leq k_j \leq 2^{\nu_j} - 1 \ (j = 1, \dots, s) \right\},$$

полученную в результате сдвига по модулю 1 на вектор $\vec{\beta}$. Ясно, что различные сетки будут получаться, когда $\vec{\beta}$ пробегает полуоткрытый s -мерный прямоугольный параллелепипед $[0, \frac{1}{2^{\nu_1}}) \times \dots \times [0, \frac{1}{2^{\nu_s}})$.

Заметим, что модифицированная равномерная сетка $M(\nu_1, \dots, \nu_s; \vec{\beta})$ совпадает с произведением равномерной сетки $M(\nu_1, \dots, \nu_s)$ и одноточечной сетки $M = \{\vec{\beta}\}$:

$$M(\nu_1, \dots, \nu_s; \vec{\beta}) = M(\nu_1, \dots, \nu_s) \cdot M.$$

Напомним, что произведение двух сеток M_1 и M_2 задается равенством

$$M_1 \cdot M_2 = \{ \{ \vec{x} + \vec{y} \} \mid \vec{x} \in M_1, \vec{y} \in M_2 \}$$

и для любого вектора $\vec{z} = (z_1, \dots, z_s)$ его дробная часть задается равенством

$$\{ \vec{z} \} = (\{ z_1 \}, \dots, \{ z_s \}).$$

Кроме этого имеет место разложение модифицированной равномерной сетки в декартово произведение одномерных модифицированных равномерных сеток:

$$M(\nu_1, \dots, \nu_s; \vec{\beta}) = M(\nu_1; \beta_1) \times \dots \times M(\nu_s; \beta_s).$$

Нетрудно видеть, что при $\vec{\nu} \leq \vec{\mu}$, то есть при $\nu_1 \leq \mu_1, \nu_2 \leq \mu_2, \dots, \nu_s \leq \mu_s$, справедливо вложение $M(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_s) \subset M(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s)$. Для произвольных обобщенных равномерных сеток $M(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_s)$ и $M(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s)$ справедливо равенство

$$M(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_s) \cap M(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s) = M(\min(\nu_1, \mu_1), \min(\nu_2, \mu_2), \dots, \min(\nu_s, \mu_s))$$

и вложение

$$\begin{aligned} & M(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_s) \cup M(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s) \subset \\ & \subset M(\max(\nu_1, \mu_1), \max(\nu_2, \mu_2), \dots, \max(\nu_s, \mu_s)). \end{aligned}$$

Как было показано в [12], справедливо следующее равенство для произведения обобщенных равномерных сеток

$$M(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_s) \cdot M(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s) = M(\max(\nu_1, \mu_1), \max(\nu_2, \mu_2), \dots, \max(\nu_s, \mu_s)).$$

В определении обобщенной равномерной сетки для каждой координаты все точки сетки имеют один и тот же знаменатель. Для дальнейшего полезно разбить одномерную сетку на непересекающиеся подсетки, у которых точки представлены несократимыми дробями с равными знаменателями. Положим

$$M^*(\nu) = \begin{cases} \{0\} & \text{при } \nu = 0, \\ \left\{ \frac{2k+1}{2^\nu} \mid 0 \leq k \leq 2^{\nu-1} - 1 \right\} & \text{при } \nu \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} \{0\} & \text{при } \nu = 0, \\ M\left(\nu - 1; \frac{1}{2^\nu}\right) & \text{при } \nu \geq 1, \end{cases}$$

тогда

$$M(\nu) = \bigcup_{\lambda=0}^{\nu} M^*(\lambda), \quad 2^\nu = |M(\nu)| = \sum_{\lambda=0}^{\nu} |M^*(\lambda)| = \sum_{\lambda=0}^{\nu} 2^{\bar{\lambda}-1},$$

где для любого вещественного x полагаем $\bar{x} = \max(1, |x|)$, а для любого конечного множества A через $|A|$ обозначается количество его элементов.

Переходя к многомерному случаю и полагая $M^*(\vec{\nu}) = M^*(\nu_1) \times \dots \times M^*(\nu_s)$, получим

$$M(\vec{\nu}) = \bigcup_{\vec{0} \leq \vec{\lambda} \leq \vec{\nu}} M^*(\vec{\lambda}), \quad |M^*(\vec{\lambda})| = 2^{\bar{\lambda}_1 + \dots + \bar{\lambda}_s - s},$$

где $\vec{0} = (0, \dots, 0)$.

Нетрудно видеть, что за исключением особого случая, когда

$$(\beta_1 - \beta_2)2^{\max(\nu_1, \nu_2)} \in \mathbb{Z},$$

две модифицированные равномерные сетки $M(\nu_1; \beta_1)$ и $M(\nu_2; \beta_2)$ не имеют общих точек. Очевидно, что и при $\vec{\beta}_1 - \vec{\beta}_2$ общего положения модифицированные равномерные сетки $M(\vec{\nu}_1; \vec{\beta}_1)$ и $M(\vec{\nu}_2; \vec{\beta}_2)$ не имеют общих точек.

Введем обозначение: для натурального $q \geq s$

$$\begin{aligned} A_s(q) &= \{ \vec{\nu} = (\nu_1, \dots, \nu_s) \in \mathbb{N}^s \mid \nu_1 + \dots + \nu_s \leq q, \nu_j \geq 1 (j = 1, \dots, s) \}, \\ B_s(q) &= \mathbb{N}^s \setminus A(q) = \left\{ \vec{\nu} = (\nu_1, \dots, \nu_s) \in \mathbb{N}^s \mid \begin{array}{l} \nu_1 + \dots + \nu_s > q, \\ \nu_j \geq 1 (j = 1, \dots, s) \end{array} \right\}, \\ C_s(q) &= \{ \vec{\nu} = (\nu_1, \dots, \nu_s) \in \mathbb{N}^s \mid \nu_1 + \dots + \nu_s = q, \nu_j \geq 1 (j = 1, \dots, s) \}. \end{aligned}$$

Ясно, что

$$A_s(q) = \bigcup_{k=s}^q C_s(k), \quad B_s(q) = \bigcup_{k=q+1}^{\infty} C_s(k).$$

Из комбинаторики известно, что для количеств элементов в множествах $C_s(q)$ и $A_s(q)$ справедливы равенства

$$|C_s(q)| = C_{q-1}^{s-1}, \quad |A_s(q)| = \sum_{k=s}^q C_{k-1}^{s-1} = \sum_{k=s}^q (C_k^s - C_{k-1}^s) = C_q^s.$$

Последнее равенство становится совсем очевидным, если учесть взаимнооднозначное соответствие $(\nu_1, \dots, \nu_s) \leftrightarrow (\nu_1, \dots, \nu_{s+1})$, где $\nu_{s+1} = q+1 - (\nu_1 + \dots + \nu_s)$, между элементами множества $A_s(q)$ и множества $C_{s+1}(q+1)$.

Сетка Смоляка $Sm(q, s)$ с параметром $q \geq s$ определяется как объединение всех простейших декартовых сеток $M(\nu_1, \dots, \nu_s)$ с

$$\max(q - s + 1, s) \leq \nu_1 + \dots + \nu_s \leq q, \quad \nu_1, \dots, \nu_s \geq 1.$$

Таким образом

$$Sm(q, s) = \left\{ \left(\frac{k_1}{2^{\nu_1}}, \dots, \frac{k_s}{2^{\nu_s}} \right) \middle| \begin{array}{l} 0 \leq k_j \leq 2^{\nu_j} - 1 \ (j = 1, \dots, s), \ \nu_1, \dots, \nu_s \geq 1, \\ \max(s, q - s + 1) \leq \nu_1 + \dots + \nu_s \leq q \end{array} \right\} = \\ = \left\{ \left(\frac{k_1}{2^{\nu_1}}, \dots, \frac{k_s}{2^{\nu_s}} \right) \middle| 0 \leq k_j \leq 2^{\nu_j} - 1 \ (j = 1, \dots, s), \vec{\nu} \in \bigcup_{k=0}^{\min(q-s, s-1)} C_s(q-k) \right\}.$$

В работах [32] — [34] сетки $Sm(q, s)$ использовались для построения квадратурных и интерполяционных формул с весами, и для них на различных классах функций были получены результаты сравнимые с наилучшими из известных.

Модифицированной сеткой Смоляка будем называть сетку

$$Sm(q, s, \vec{\beta}_{\vec{\nu}} | \vec{\nu} \in A_s^*(q)),$$

полученную объединением всех модифицированных обобщенных равномерных сеток $M(\vec{\nu}; \vec{\beta}_{\vec{\nu}})$ по $\vec{\nu} \in A_s^*(q)$, где $A_s^*(q) = A_s(q) \setminus A_s(\max(s-1, q-s))$.

Ясно, что если система векторов сдвигов $\vec{\beta}_{\vec{\nu}}$ образует систему общего положения, то модифицированные обобщенные равномерные сетки $M(\vec{\nu}; \vec{\beta}_{\vec{\nu}})$ попарно не пересекаются. Поэтому в общем случае имеем

$$\begin{aligned} \left| Sm(q, s, \vec{\beta}_{\vec{\nu}} | \vec{\nu} \in A_s^*(q)) \right| &= \sum_{k=0}^{\min(q-s, s-1)} C_{q-k-1}^{s-1} 2^{q-k} = \\ &= \sum_{k=\max(s, q-s+1)}^q C_{k-1}^{s-1} 2^k = O(q^{s-1} 2^q). \end{aligned} \quad (219)$$

Естественно изучить величину отклонения этих сеток, как меры равномерности распределения их точек в s -мерном единичном кубе.

В отличие от общего случая модифицированной сетки Смоляка для сетки Смоляка входящие в объединение обобщенные равномерные сетки имеют непустое пересечение. Поэтому этот случай требует особого рассмотрения. Здесь возможно три различных подхода: с учетом кратности точек в объединении или без учета, или с весами из квадратурных формул. В первых двух случаях получаются парадоксальные результаты, согласно которым точки сеток Смоляка равномерно распределены, но величина отклонения у них порядка $O(N \ln^{-1} N)$, где N — количество точек сетки. Этот результат свидетельствует об особой роли весов в квадратурных и интерполяционных формулах, построенных по методу Смоляка.

Задача об оценке отклонения сеток Смоляка была поставлена профессором Н. М. Коробовым в 1969 году и решена Н. М. Добровольским в 1970 году в его курсовой работе. В научном архиве профессора Н. М. Коробова сохранилась рукопись этой курсовой работы Н. М. Добровольского, которую он выполнял под руководством Н. М. Коробова на третьем курсе механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова.

Для произвольной модифицированной сетки Смоляка задача Н. М. Коробова сделана в работе [24].

В данном разделе дается прямой метод оценки погрешности квадратурных формул построенных на основе модифицированных сеток Смоляка, который отличен от методов работ [32] — [34].

Оценки отклонения будут сделаны для сетки квадратурной формулы, построенной методом С. А. Смоляка. Эти формулы строятся для класса функций E_s^α (см. раздел 1.2, стр. 125).

Метод Смоляка указывает способ перенесения квадратурных формул из одномерного случая в многомерный. Основой для метода служит теорема 25, которая дает способ приближения абсолютно сходящегося s -кратного ряда образованного путем перемножения однократных абсолютно сходящихся рядов, если даны приближения этих рядов. Предварительно докажем лемму.

ЛЕММА 28. Пусть $\rho > 1$, целые $m \geq s \geq 1$ и

$$T(\rho) = T(\rho, m, s) = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{C_{k-1}^{s-1}}{\rho^k},$$

тогда справедливо равенство

$$T(\rho, m, s) = \frac{1}{\rho^{m-1}} \sum_{k=1}^s \frac{C_{m-1}^{s-k}}{(\rho-1)^k}.$$

ТЕОРЕМА 25. Пусть $\rho > 1$, $A > 0$, $\alpha > 1$, $\alpha_m^{(0,j)} = 0$, заданы ряды

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{|\varphi_m^{(j)}|}{\bar{m}^\alpha}, \quad \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{|\alpha_m^{(\nu,j)}|}{\bar{m}^\alpha} \quad (j = 1, \dots, s, \nu \geq 1) \quad (220)$$

и для любого целого $\nu \geq 0$ и $j = 1, \dots, s$ справедливы неравенства:

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{|\varphi_m^{(j)} - \alpha_m^{(\nu,j)}|}{\bar{m}^\alpha} \leq \frac{A}{\rho^\nu}. \quad (221)$$

Положим $\beta_m^{(\nu,j)} = \alpha_m^{(\nu,j)} - \alpha_m^{(\nu-1,j)}$ ($\nu \geq 1, j = 1, \dots, s$).

При $q \geq s$ справедлива оценка:

$$\begin{aligned} \sum_{m_1, \dots, m_s = -\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\bar{m}_1 \dots \bar{m}_s)^\alpha} \left| \varphi_{m_1}^{(1)} \dots \varphi_{m_s}^{(s)} - \sum_{\vec{\nu} \in A_s(q)} \beta_{m_1}^{(\nu_1,1)} \dots \beta_{m_s}^{(\nu_s,s)} \right| \leq \\ \leq A^s (1 + \rho)^s C(\rho, s) \frac{q^{s-1}}{\rho^q}, \end{aligned} \quad (222)$$

где положительная константа

$$C(\rho, s) = \sum_{k=1}^s \frac{1}{(\rho-1)^k (s-k)!}$$

зависит только от s, ρ .

Для выяснения явного вида членов приближающего ряда служит лемма 29.

ЛЕММА 29. Пусть $q(s) = \min(q-s, s-1)$ и

$$\omega_{m_1, \dots, m_s} = \sum_{\vec{\nu} \in A_s(q)} \beta_{m_1}^{(\nu_1,1)} \dots \beta_{m_s}^{(\nu_s,s)},$$

тогда

$$\omega_{m_1, \dots, m_s} = \sum_{k=0}^{q(s)} (-1)^k C_{s-1}^k \sum_{\vec{\nu} \in C_s(q-k)} \alpha_{m_1}^{(\nu_1,1)} \dots \alpha_{m_s}^{(\nu_s,s)}.$$

Для дальнейшего потребуется символ Киробова

$$\delta_m(a) = \frac{1}{m} \sum_{l=0}^{m-1} e^{2\pi i \frac{la}{m}} = \begin{cases} 1, & \text{если } a \equiv 0 \pmod{m}, \\ 0, & \text{если } a \not\equiv 0 \pmod{m}, \end{cases}$$

который является характеристической функцией множества целых чисел кратных m на множестве всех целых чисел $\mathbb{Z}$.

Многомерные квадратурные формулы методом Смоляка будем строить на основе квадратурных формул с одномерными модифицированными равномерными сетками, которые описываются леммой 30. Заметим, что в одномерном случае мы имеем дело с обычными формулами прямоугольников со сдвигом β .

ЛЕММА 30. Пусть $\alpha > 1$, $C > 0$ и $f(x) \in E_1^\alpha(C)$, то есть

$$f(x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_m e^{2\pi i m x} \quad \text{и} \quad |C_m| \leq \frac{C}{m^\alpha},$$

тогда при $\nu \geq 1$, $N = 2^\nu$ для погрешностей $R_N[f]$ квадратурной формул с модифицированной равномерной сеткой из N узлов

$$f(x) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f\left(\left\{\frac{k}{N} + \beta\right\}\right) \sum_{l=-2^{\nu-1}}^{2^{\nu-1}-1} e^{2\pi i l(x - \frac{k}{N} - \beta)} - R_N[f(x)], \quad (223)$$

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f\left(\left\{\frac{k}{N} + \beta\right\}\right) - R_N[f] \quad (224)$$

справедливы оценки:

$$|R_N[f(x)]| \leq \frac{C \cdot C_1(\alpha)}{N^{\alpha-1}}, \quad |R_N[f]| \leq \frac{C \cdot C_2(\alpha)}{N^\alpha}. \quad (225)$$

Таким образом из леммы 30 вытекает, что на классах периодических функций квадратурные и интерполяционные формулы с модифицированной равномерной сеткой обладают важным свойством ненасыщаемости (см. [1]. с. 371), то есть они автоматически реагируют на гладкость интегрируемых функций — чем выше гладкость, тем быстрее убывает функционал погрешности приближенного интегрирования или оператор погрешности интерполирования.

Отметим, что для периодических функций квадратурная формула прямоугольников со сдвигом β (224) получается интегрированием интерполяционной формулы (223). Действительно, для интеграла от интерполяционного тригонометрического полинома имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f\left(\left\{\frac{k}{N} + \beta\right\}\right) \sum_{l=-2^{\nu-1}}^{2^{\nu-1}-1} e^{2\pi i l(x - \frac{k}{N} - \beta)} dx = \\ & = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f\left(\left\{\frac{k}{N} + \beta\right\}\right) \sum_{l=-2^{\nu-1}}^{2^{\nu-1}-1} e^{-2\pi i (\frac{lk}{N} + l\beta)} \int_0^1 e^{2\pi i l x} dx = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f\left(\left\{\frac{k}{N} + \beta\right\}\right). \end{aligned}$$

Аналогично, интегрируя функцию погрешности интерполирования, получаем значение функционала погрешности приближенного интегрирования

$$\begin{aligned} \int_0^1 R_N[f(x)] dx &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-2^{\nu-1}}^{2^{\nu-1}-1} C(mN + l) \int_0^1 \left(e^{2\pi i (lx + mN\beta)} - e^{2\pi i (mN + l)x} \right) dx = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C(mN) e^{2\pi i mN\beta} = R_N[f]. \end{aligned}$$

Многомерные квадратурные формулы, построенные методом Смоляка из одномерных квадратурных формул с модифицированными равномерными сетками, описываются теоремой 26.

ТЕОРЕМА 26. Пусть $f(x_1, \dots, x_s) \in E_s^\alpha(C)$, $q \geq s$, тогда для погрешности квадратурной формулы

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \dots \int_0^1 f(x_1, \dots, x_s) dx_1 \dots dx_s = \\ & = \sum_{k=0}^{q(s)} \frac{(-1)^k C_{s-1}^k}{2^{q-k}} \sum_{\vec{\nu} \in C_s(q-k)} \sum_{k_1=0}^{2^{\nu_1}-1} \dots \sum_{k_s=0}^{2^{\nu_s}-1} f\left(\left\{\frac{k_1}{2^{\nu_1}} + \beta_{1,\nu_1}\right\}, \dots, \left\{\frac{k_s}{2^{\nu_s}} + \beta_{s,\nu_s}\right\}\right) - \\ & - R_{N(q)}[f] \end{aligned} \quad (226)$$

справедлива оценка

$$|R_{N(q)}[f]| \leq C \cdot C_3(\alpha, s) \frac{q^{s-1}}{2^{\alpha q}} = O\left(\frac{\ln^{(\alpha+1)(s-1)} N(q)}{N^\alpha(q)}\right), \quad (227)$$

где $N(q) = O(q^{s-1} 2^q)$ — количество точек модифицированной сетки Смоляка

$$Sm\left(q, s, \vec{\beta}_{\vec{\nu}} \mid \vec{\nu} \in A_s^*(q)\right).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. На классе E_s^α наилучший возможный порядок погрешности приближенного интегрирования $O\left(\frac{\ln^{s-1} N}{N^\alpha}\right)$ достигается на квадратурных формулах с весами и алгебраическими сетками, предложенными в 1976 году К. К. Фроловым в работе [36]. Для параллелепипедальных сеток наилучшая оценка $O\left(\frac{\ln^{(s-1)\alpha} N}{N^\alpha}\right)$ была получена Н. С. Бахвалов в 1959 году в работе [2]. Для комбинированных сеток такая же оценка была получена Н. М. Коробовым в 1994 году в работе [27]. Таким образом мы видим, что квадратурные формулы с модифицированными сетками Смоляка сравнимы по порядку погрешности приближенного интегрирования с наилучшими известными квадратурными формулами.

Отметим важную особенность параллелепипедальных сеток, комбинированных сеток, алгебраических сеток, обобщенных параллелепипедальных сеток и сеток Смоляка. Алгоритмы численного интегрирования по квадратурным формулам с этими классами сеток являются ненасыщаемыми на классах функций E_s^α .

15. Заключение

В данном обзоре нам удалось лишь коротко осветить некоторые вопросы, связанные с многомерными теоретико-числовыми сетками. В основном это были вопросы численного интегрирования функций многих переменных. В этом направлении научных исследований накоплен обширный массив результатов, который говорит о перспективности данного направления.

В стороне остались вопросы связанные с моделированием различных физических (в частности, геофизических процессов) с помощью многомерных теоретико-числовых сеток.

На наш взгляд, в настоящее время было бы полезно проводить такое моделирование, используя весь спектр классических теоретико-числовых сеток.

Во-первых, такой подход дал бы возможность накопить фактический материал результатов компьютерных экспериментов, что позволило бы объективно сравнивать эффективность различных методов моделирования на основе различных сеток.

Во-вторых, теоретико-числовые методы в приближенном анализе позволяют разрабатывать методы генерации равномерно распределенных последовательностей размерности $s \sim 100$ с количеством точек порядка $10^7 - 10^9$, что реально может быть реализовано только на современных суперкомпьютерах, например, на "Ломоносове".

В-третьих, проблема организации доверенных вычислений не сводится только к организации защиты от несанкционированных вмешательств извне, искажающих результаты, но ещё в большей мере это проблема получения достоверных результатов с оценкой их точности. Наличие большого количества принципиально различных методов генерации теоретико-числовых сеток позволяет говорить о возможности объективной оценки достоверности получаемых результатов.

Наконец, мы считаем, что настало время, когда под руководством А. Д. Гвишиани можно организовать на базе ГЦ РАН совместный семинар по проблеме использования теоретико-числовых методов в геофизике с участием кафедры "Математических и компьютерных методов анализа" Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова и представителей Тульской школы теории чисел.

Авторы от всей души желают академику РАН, доктору физико-математических наук, профессору Алексею Джерменовичу Гвишиани здоровья, долгих лет жизни и неиссякаемой энергии в служении науке и Отечеству!

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бабенко К. И. Основы численного анализа. М.: Наука, 1986.
2. Бахвалов Н. С. О приближенном вычислении кратных интегралов // Вестн. Моск. ун-та, 1959. N 4. С. 3–18.
3. Бочарова Л. П. О граничных функциях некоторых классов // Научное образование. Традиции. Иновации. Перспективы. Сборник межвузовских научных статей. Тула, АНО-ВО "ТИНО", 2006. С. 198–202.
4. Быковский В. А. Экстремальные кубатурные формулы для анизотропных классов. / Хабаровск, 1995. с. 13. (Препринт.)
5. Гекке Э. Лекции по теории алгебраических чисел. М.–Л.: Гостехиздат 1940.
6. Гаусс К. Ф. Труды по теории чисел. Перевод Б. Б. Демьянова, общая редакция И. М. Виноградова, комментарии Б. Н. Делоне. — М.: Изд-во АН СССР, 1959. 978 с.
7. С. С. Демидов, Е. А. Морозова, В. Н. Чубариков, И. Ю. Реброва, И. Н. Балаба, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, Л. П. Добровольская, А. В. Родионов, О. А. Пихтилькова Теоретико-числовой метод в приближенном анализе // Чебышевский сборник. 2017. Том 18 № 4(64). С. 6-85.
8. Добровольская Л. П., Добровольский Н. М., Симонов А. С. О погрешности приближенного интегрирования по модифицированным сеткам // Чебышевский сборник, 2008 Т. 9. Вып. 1(25). Тула, Из-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого. С. 185 — 223.
9. Добровольский М. Н. Оценки сумм по гиперболическому кресту // Изв. ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2003. Т. 9, вып. 1. С. 82–90.

10. Добровольский М. Н. Об оптимальных коэффициентах комбинированных сеток // Чебышевский сборник, 2004. Т. 5, вып. 1(9). С. 95–121.
11. Добровольский М. Н., Добровольский Н. М., Киселева О. В. О произведении обобщенных параллелепипедальных сеток целочисленных решёток // Современные проблемы математики, механики, информатики: Тезисы докладов Всероссийской научной конференции. Тула: ТулГУ, 2002. С. 22–23.
12. Добровольский М. Н., Добровольский Н. М., Киселева О. В. О произведении обобщенных параллелепипедальных сеток целочисленных решёток // Чебышевский сборник Тула. 2002. Т. 3, вып. 2(4) С. 43–59.
13. Добровольский Н. М. Эффективное доказательство теоремы Рота о квадратичном отклонении // УМН. Т. 39 (123). 1984. С. 155–156.
14. Добровольский Н. М. Оценки отклонений модифицированных сеток Хэммерсли — Рота // Деп. в ВИНТИ 23.02.84, №1365–84.
15. Н. М. Добровольский Гиперболическая дзета-функция решёток // Деп. в ВИНТИ 24.08.84, №6090–84.
16. Добровольский Н. М. Оценки отклонений обобщенных параллелепипедальных сеток. Деп. в ВИНТИ 24.08.84, №6089–84.
17. Н. М. Добровольский Квадратурные формулы на классах $E_s^\alpha(c)$ и $H_s^\alpha(c)$ // Деп. в ВИНТИ 24.08.84. №6091–84.
18. Добровольский Н. М., Бочарова Л. П. Пятьдесят лет теоретико-числовому методу в приближенном анализе // Наукоемкое образование. Традиции. Иновации. Перспективы. Сборник межвузовских научных статей. Тула, АНОВО "ТИНО 2006. С. 189–198.
19. Добровольский Н. М., Коробов Н. М. Оптимальные коэффициенты для комбинированных сеток.// Труды IV Международной конференции „Современные проблемы теории чисел и ее приложения“ Чебышевский сборник. 2001. Т. 2. С. 41–53.
20. Добровольский Н. М., Манохин Е. В. Банаховы пространства периодических функций // Изв. ТулГУ. Сер. Механика. Математика. Информатика. Т. 4, вып. 3. Тула, 1998. С. 56–67.
21. Добровольский Н. М., Манохин Е. В., Реброва И. Ю., Аккуратова С. В. О некоторых свойствах нормированных пространств и алгебр сеток // Известия ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. Т. 5, вып. 1. — Тула, 1999. С. 100–113.
22. Добровольский Н. М., Манохин Е. В., Реброва И. Ю., Рощеня А. Л. О непрерывности дзета-функции сетки с весами // Известия ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. Т. 7, вып. 1. — Тула, 2001. С. 82–86.
23. Добровольский Н. Н. ПОИВС ТМК: Гиперболический параметр сеток с весами // Многомасштабное моделирование структур и нанотехнологии: материалы международной научно-практической конференции. Тула, 3-7 октября 2011. Тула: изд-во ТГПУ им Л. Н. Толстого. С. 266–267.
24. О. В. Киселёва О задаче Коробова для модифицированных сеток Смоляка // Чебышевский сборник. 2007. Т. 8, вып. 4(24). С. 50–104.

-
25. Коробов Н. М. Вычисление кратных интегралов методом оптимальных коэффициентов // Вестн. Моск. ун-та, 1959. №4. С. 19–25.
 26. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. М.: Физматгиз, 1963.
 27. Коробов Н. М. Квадратурные формулы с комбинированными сетками // Мат. заметки. 1994. Т. 55, вып. 2. С. 83–90.
 28. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. (второе издание) М.: МЦНМО, 2004. 288 с.
 29. Локуциевский О. В., Гавриков М. Б. Начала численного анализа. М.: ТОО Янус, 1995.
 30. Никитин А. Н., Русакова Е. И., Пархоменко Э. И., Иванкина Т. И., Добровольский Н. М. О реконструкции палеотектонических напряжений по данным о пьезоэлектрических текстурах горных пород. // Известия АН СССР. Физика Земли. 1988. N 9. С. 66–74.
 31. Никитин А. Н., Русакова Е. И., Пархоменко Э. И., Иванкина Т. И., Добровольский Н. М. Reconstruction of Paleotectonic Stresses Using Data on Piezoelectric Textures of Rocks // Izvestiya Earth Physics Vol 24. 1988. No 9. С. 728–734.
 32. Смоляк С. А. Интерполяционные и квадратурные формулы на классах W_s^α и E_s^α // ДАН СССР. 1960. Т. 131. № 5. С. 1028 – 1031.
 33. Смоляк С. А. Квадратурные и интерполяционные формулы на тензорных произведениях некоторых классов функций // ДАН СССР. 1963. Т. 148, № 5. С. 1042–1045.
 34. Смоляк С.А. Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них. Дисс. ... к. ф.-м. н. М.: МГУ, 1966.
 35. Соболев И. М. Многомерные квадратурные формулы и функции Хаара. / М.: Наука, 1969.
 36. Фролов К. К. Оценки сверху погрешности квадратурных формул на классах функций // ДАН СССР. 1976. Т. 231. № 4. С. 818–821.
 37. Чандрасекхаран К. Введение в аналитическую теорию чисел. М.: Мир, 1974. 188 с.
 38. Chen W. W. L. On irregularities of distribution // Mathematika. 27. 1980. N 2. P. 153–170.
 39. Chen W. W. L. On irregularities of distribution II // Quart. J.Math. Oxford (2). 34. 1983. P. 257–279.
 40. Davenport H. Note on irregularities of distribution // Mathematika. 3. 1956. P. 131–135.
 41. Faure H. Discrepance de suites associees a un systeme denumeration (en dimention s) // Acta Arith. 41. 1982. P. 337–351.
 42. Halton J. H. On the efficiency of certain quasirandom sequences of points in evaluating multidimensional integrals. // Numerische Math. 27. № 2 (1960) 84–90 Bd 2 № 2.
 43. Hammersley J. M. Monte-Carlo methods for sobving multivariable problems // Proc. N 4. Acad. Sci. 1960.
 44. Roth K. F. On irregularities of distribution // Mathematika. 1. 1954, P. 73–79.
 45. Roth K. F. On irregularities of distribution – IV, // Acta Arithm. 37. 1980. P. 65–75.

46. Schmidt W. M. Irregularities of distribution – VII, // *Acfa Arithm.* 21. 1972. P. 45–50.
47. Schmidt W. M. Irregularities of distribution – X // *Number Theory and Algebra* (H.Zassenhaus ed.) New York: Academic Press. 1977. P. 311–329.
48. Weyl H. Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins. // *Math. Ann.* 1916. Bd. 77. S. 313–352 (пер. в кн.: Вейль Г. Математика. Теоретическая физика. М.: Наука, 1984)

REFERENCES

1. Babenko, K.I. 1986, *Osnovy chislennogo analiza* [Fundamentals of numerical analysis], Nauka, Moscow, Russia.
2. Bakhvalov, N.S. 1959, “On approximate computation of multiple integrals”, *Vestnik Moskovskogo universiteta*, no. 4, pp. 3–18.
3. Bocharova, L.P. 2006, “On the boundary of some classes of functions”, *Naukoemkoe obrazovanie. Traditsii. Innovatsii. Perspektivy*, *Sbornik mezhvuzovskikh nauchnykh statej*, pp.198–202.
4. Bykovskij, V.A 1995, *Ehkstremal’nye kubaturnye formuly dlya anizotropnykh klassov* [Extremal cubature formulas for anisotropic classes], Preprint, Khabarovsk, Russia.
5. Hecke E. 1940, *Lectures on algebraic number theory.* , M. – L.: Gostekhizdat.
6. Gauss K. 1959, *The Works on the theory of numbers.* Translations of B. B. Demyanov, under the General editorship of I. M. Vinogradov, comments bn. Delaunay. - Moscow: Publishing house of the USSR, 978 p.
7. Demidov S. S., Morozova E. A., Chubarikov V. N., Rebrov I. Yu., Balaba I. N., Dobrovol’skii N. N., Dobrovol’skii N. M., Dobrovol’skaya L. P., Rodionov A. V., Pikhtil’kova O. A., 2017, "Number-theoretic method in approximate analysis" *Chebyshevskii Sbornik* vol. 18, № 4. pp. 6–85.
8. Dobrovol’skaya, L. P., Dobrovol’skii, N. M. & Simonov, A.S. 2008, “On the error of approximate integration over modified grids”, *Chebyshevskij sbornik*, vol. 9, no. 1(25), pp. 185–223.
9. Dobrovol’skii, M. N. 2003, “Estimates of sums over a hyperbolic cross”, *Izvestie Tul’skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika*, vol.9, no. 1, pp. 82–90.
10. Dobrovol’skii, M. N. 2004, “The optimum coefficients of the combined meshes”, *Chebyshevskij sbornik*, vol. 5, no. 1(9), pp. 95–121.
11. Dobrovol’skii, M. N., Dobrovol’skii, N. M. & Kiseleva, O.V. 2002, “On the product of generalized parallelepipedal grids of integer lattices”, *Sovremennye problemy matematiki, mekhaniki, informatiki: Tezisy докладov Vserossijskoj nauchnoj konferentsii*, Tula, Russia, pp. 22–23.
12. Dobrovol’skii, M. N., Dobrovol’skii, N. M. & Kiseleva, O.V. 2002, “On the product of generalized parallelepipedal grids of integer lattices”, *Chebyshevskij sbornik*, vol. 3, no. 2(4), pp. 43–59.
13. Dobrovol’skii, N. M. 1984, “An effective proof of Roth’s quadratic deviation theorem”, *Uspekhi matematicheskikh nauk*, vol. 39(123), pp. 155–156.
14. Dobrovol’skii, N. M. 1984, “Estimates of variance of modified grids Hammersly Rota”, *Dep. v VINITI*, no. 1365– 84.

15. Dobrovol'skii, N. M. 1984, "Evaluation of generalized variance parallelepipedal grids", Dep. v VINITI, no. 6089–84.
16. Dobrovol'skii, N. M. 1984, "The hyperbolic Zeta function of lattices", Dep. v VINITI, no. 6090–84.
17. Dobrovol'skii, N. M. 1984, "On quadrature formulas in classes $E_s^\alpha(c)$ and $H_s^\alpha(c)$ ", Dep. v VINITI, no. 6091–84.
18. Dobrovol'skii, N. M. & Bocharova, L.P. 2006, "Fifty years of the number-theoretic method in the approximate analysis", Naukoemkoe obrazovanie. Traditsii. Innovatsii. Perspektivy, Sbornik mezhevuzovskikh nauchnykh statej, pp.189–198.
19. Dobrovol'skii, N. M. & Korobov, N. M. 2001, "The optimal coefficients for mixed meshes", Chebyshevskij sbornik, vol. 2, pp. 41–53.
20. Dobrovol'skii, N. M. & Manokhin, E.V. 1998, "Banach spaces of periodic functions", Izvestiya TulGU. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika, vol. 4, no. 3, pp. 56–67.
21. Dobrovol'skii, N. M., Manokhin, E.V., Rebrova, I. YU. & Akkuratova, S.V.1999, "On some properties of normed spaces and algebras of nets", Izvestiya TulGU. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika, vol. 5, no. 1, pp. 100–113.
22. Dobrovolsky N. M. Manokhin E. V., Rebrov I. Yu., Rosena A. L. 2001, "Of the continuity of the Zeta function of mesh with weights", Izvestiya TulGU. Ser. Mathematics. Mechanics. Informatics. Vol. 7, no. 1. — Tula, pp. 82–86.
23. Dobrovolsky N. N. 2011, "PODPS TMK: Hyperbolic parameter of grids with weights", Multiscale modeling of structures and nanotechnology: proceedings of the international scientific-practical conference. Tula, 3-7 October 2011. Tula: publishing house of Tula state pedagogical University named after L. N. Tolstoy. P. 266-267.
24. Kiseleva O. V. 2007, "The challenge Korobov for modified grids of Smolyak", Chebyshevskii sbornik. Vol. 8, issue. 4 (24). P. 50–104.
25. Korobov, N.M. 1959, "The evaluation of multiple integrals by method of optimal coefficients", Vestnik Moskovskogo universiteta, no. 4, pp. 19–25.
26. Korobov, N.M. 1963, Teoretiko-chislovye metody v priblizhennom analize [Number-theoretic methods in approximate analysis], Fizmat-giz, Moscow, Russia.
27. Korobov, N.M. 1994, "Quadrature formulas with combined grids", Matematicheskie zametki, vol. 55, no. 2, pp. 83–90.
28. Korobov, N.M. 2004, Teoretiko-chislovye metody v priblizhennom analize [Number-theoretic methods in approximate analysis], 2nd ed, MTSNMO, Moscow, Russia.
29. Lokutsievskij, O. V. & Gavrikov, M. B. 1995, Nachala chislennogo analiza [The beginning of numerical analysis], TOO "Yanus", Moscow, Russia.
30. Nikitin, A.N., Rusakova, E.I., Parkhomenko, E.H.I., Ivankina, T.I. & Dobrovol'skij, N.M. 1988, "On the reconstruction of the paleotectonic stress according to the piezoelectric texture of the rocks", Izvestiya AN SSSR. Fizika Zemli, no. 9, pp. 66–74.

31. Nikitin, A.N., Rusakova, E.I., Parkhomenko, E.H.I., Ivankina, T.I. & Dobrovol'skij, N.M. 1988, "Reconstruction of Paleotectonic Stresses Using Data on Piezoelectric Textures of Rocks", *Izvestiya Earth Physics*, vol 24, no 9. pp. 728–734.
32. Smolyak, S.A. 1960, "Interpolation and quadrature formulas on classes W_s^α and E_s^α ", *Doklady Akademii nauk SSSR*, vol. 131, no. 5, pp. 1028–1031.
33. Smolyak, S.A. 1963, "Quadrature and interpolation formulas on tensor products of some classes of functions", *Doklady Akademii nauk SSSR*, vol. 148, no. 5, pp. 1042–1045.
34. Smolyak, S.A. 1966, On optimal recovery of functions and functionals from them, Ph.D. Thesis, Moscow State University, Moscow, USSR.
35. Sobol', I.M. 1969, *Mnogomernye kvadrturnye formuly i funktsii Khaara* [Multidimensional quadrature formulas and Haar functions], Nauka, Moscow, USSR.
36. Frolov, K.K. 1976, "Upper bounds on the error of quadrature formulas on classes of functions", *Doklady Akademii nauk SSSR*, vol. 231, no.4, pp. 818–821.
37. Chandrasekharan K., 1974, *Vvedenie v analiticheskuyu teoriju chisel*, Izd-vo Mir, Moskva, 188 p.
38. Chen, W.W.L. 1980, "On irregularities of distribution II", *Mathematika*, vol. 27, no. 2. P. 153–170.
39. Chen, W.W.L. 1983, "On irregularities of distribution II", *Quart. J.Math. Oxford* (2). 34, pp. 257–279.
40. Davenport, H. 1956, "Note on irregularities of distribution", *Mathematika*, vol. 3, pp. 131–135.
41. Faure, H. 1982, "Discrepance de suites associees a un systeme denumeration (en dimension s)", *Acta Arith*, vol. 41, pp. 337–351.
42. Halton, J. H. 1960, "On the efficiency of certain quasirandom sequences of points in evaluating multidimensional integrals", *Numerische Math*, vol. 27, no. 2, pp. 84–90.
43. Hammersley, J.M. 1960, "Monte-Carlo methods for solving multivariable problems", *Ann. New York Acad. Sci.*, vol. 86, 844–874.
44. Roth, K.F. 1954, "On irregularities of distribution", *Mathematika*, 1, pp. 73–79.
45. Roth, K.F. 1980, "On irregularities of distribution - IV", *Acta Arithm*, 37. pp. 65–75.
46. Schmidt Wolfgang, M. 1972, "Irregularities of distribution -VII", *Acta Arithm*, 21, pp. 45–50.
47. Schmidt Wolfgang M. 1977, "Irregularities of distribution - X", *Number Theory and Algebra* (H.Zassenhaus ed.), pp. 311–329.
48. Weyl H. 1916, "On the uniform distribution of Numbers mod. one", *Math. Ann.*, vol. 77, pp. 313–352.

Получено 23.07.2018

Принято в печать 22.10.2018

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 19. Выпуск 4

УДК 539.3:534.26

DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-4-177-193

Дифракция звука на упругом шаре с неоднородным покрытием и полостью в полупространстве¹

Скобельцын Сергей Алексеевич — кандидат физико-математических наук, кафедра прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет.

e-mail: skbl@rambler.ru

Федотов Иван Сергеевич — аспирант, кафедра прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет.

e-mail: fedyafed@mail.ru

Титова Ангелина Сергеевна — аспирант, кафедра прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет.

e-mail: TitA-2005@yandex.ru

Аннотация

Рассматривается решение задачи дифракции плоской гармонической звуковой волны на упругом шаре T с полостью вблизи идеальной плоскости Π . Внешний слой шара является неоднородным.

Решение проводится путем расширения области задачи до полного пространства и введения дополнительного препятствия, являющегося копией T , расположенной зеркально по отношению к плоскости Π .

Добавление второй падающей плоской волны обеспечивает выполнение того условия в точках плоскости Π , которое соответствует типу границы полупространства в начальной постановке задачи. Таким образом, задача сводится к задаче о рассеянии двух плоских звуковых волн на двух неоднородных шарах в неограниченном пространстве.

Решение проводится на основе линейной теории упругости и модели распространения малых возмущений в идеальной жидкости. Во внешней части жидкости решение ищется аналитически в форме разложения по сферическим гармоникам и функциям Бесселя. В шаровой области, включающей два шара и прилегающий слой жидкости, используется метод конечных элементов (МКЭ).

Представлены результаты расчета диаграмм направленности рассеянного звукового поля в дальней зоне, которые показывают влияние геометрических и материальных параметров неоднородного препятствия на рассеяние звука.

Ключевые слова: дифракция звука, полупространство, упругий шар, неоднородное покрытие, метод конечных элементов.

Библиография: 24 названия.

Для цитирования:

С. А. Скобельцын, И. С. Федотов, А. С. Титова. Дифракция звука на упругом шаре с неоднородным покрытием и полостью в полупространстве // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, вып. 4, С. 177–193.

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 18-11-00199).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 19. No. 4

UDC 539.3:534.26

DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-4-177-193

Diffraction of sound on an elastic sphere with a nonhomogeneous coating and cavity in semi-space

Skobel'tsyn Sergey Alekseevich — candidate of physical and mathematical sciences, department of applied mathematics and computer science, Tula State University.

e-mail: skbl@rambler.ru

Fedotov Ivan Sergeevich — postgraduate, department of applied mathematics and computer science, Tula State University.

e-mail: fedyafed@mail.ru

Titova Angelina Sergeevna — postgraduate, department of applied mathematics and computer science, Tula State University.

e-mail: Tita-2005@yandex.ru

Abstract

The problem for diffraction a plane harmonic sound wave on an elastic sphere T with cavity near ideal plane Π is considered. The outer ball layer is nonhomogeneous.

Решение проводится путем расширения области задачи до полного пространства. The solution is carried out by expanding the scope of the problem to the full space. При этом вводится дополнительное препятствие, которое является копией T , расположенной зеркально по отношению к плоскости Π . In this case, an additional obstacle is introduced, which is a copy of T , which is located mirror with respect to the Π .

A second incident plane wave is also added. This wave ensures the fulfillment of that condition at the points of the plane Π , which corresponds to the type of the half-space boundary in the initial formulation of the problem. Thus, the problem is transformed into the problem of scattering of two plane sound waves on two inhomogeneous spheres in unbounded space.

The solution is based on the linear theory of elasticity and the model of propagation of small vibrations in an ideal fluid. In the outer part of the liquid, the solution is sought analytically in the form of an expansion in spherical harmonics and Bessel functions. In the spherical region, which includes two elastic balls and an adjacent layer of liquid, the finite element method (FEM) is used.

The results of the calculation of the directivity patterns of the scattered sound field in the far zone are presented. These dependencies show the influence of the geometric and material parameters of the obstacle on the diffraction of sound.

Keywords: sound diffraction, half-space, inhomogeneous elastic ellipsoid, finite element method.

Bibliography: 24 titles.

For citation:

S. A. Skobel'tsyn, I. S. Fedotov, A. S. Titova, 2018, "Sound diffraction on an elastic sphere with a nonhomogeneous coating and cavity in semi-space", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 4, pp. 177–193.

1. Введение

Ряд работ академика А. Д. Гвишиани посвящен проблемам динамических процессов в теле Земли (например, [1, 2, 3]). Такие исследования предусматривают использование моделей распространения упругих волн как существенной части самих природных процессов, так и инженерных средств диагностики состояния массивов земной породы.

Простейшие модели упругих волн используются и в акустике. Решения задач дифракции акустических волн на упругих телах могут быть применены при разработке методов исследования в ультразвуковой диагностике, дефектоскопии и гидроакустике, а также могут служить основой решений задач в сейсмологии.

Значительный интерес для теории и практики представляют исследования дифракции звуковых волн на телах сферической формы, так как многие реальные объекты достаточно хорошо могут быть аппроксимированы такими телами. Кроме того, результаты решения задач дифракции звука на таких объектах служат основой для изучения дифракции звуковых волн на телах более сложной формы.

Первыми работами о дифракции звука на упругих телах сферической формы были работы [4, 5]. В работе [4] рассмотрено рассеяние плоских волн сплошным шаром. Статья [5] посвящена изучению рассеяния плоской волны тонкой сферической оболочкой, движение которой описано по безмоментной теории.

В статье [6] приведено решение задачи рассеяния плоской звуковой волны сплошным упругим шаром и определена сила, действующая на шар.

Дифракция сферической звуковой волны на упругой сферической оболочке рассматривалась в [7]. Проведен теоретический анализ распределения звукового давления вблизи поверхности оболочки на расстояниях, сравнимых с ее радиусом.

Дифракция звука на упругих сферических телах с произвольно расположенными сферическими полостями изучалась в работах [8, 9, 10, 11].

Широкие возможности для исследования задач дифракции дает использование метода конечных элементов [12, 13, 14]. В монографии [14] подробно изложены различные аспекты применения МКЭ при решении задач о рассеянии звука объектами различного типа: жесткими, мягкими, упругими. В работах автора [15, 16] используется подход, в котором во внешней области решение представляется в виде разложения по ортогональной системе волновых функций. Поэтому искусственная внешняя граница рассматривается как поверхность, на которой устанавливаются обычные граничные условия согласования звуковых колебаний в двух областях жидкости: внешней (с аналитическим представлением решения) и внутренней, в которой для решения используется МКЭ.

В данной работе представлено решение задачи об отражении плоской звуковой волны упругим шаром с внешним неоднородным слоем и полостью на основе метода конечных элементов. Предполагается, что шар расположен вблизи плоской поверхности идеальной жидкости. Сама граница жидкости является жесткой или идеально мягкой. Такого рода задачи решались для однородных тел и тел, имеющих другую форму, [17, 18, 19, 20, 16]. Здесь, как и в указанных работах используется метод замены границы полупространства на симметрично расположенную копию препятствия и решения задачи с двумя телами в неограниченной области.

2. Постановка задачи

Пусть у границы полупространства Π , заполненного идеальной жидкостью с плотностью ρ_0 и скоростью звука c_0 находится упругий шар T . Внешний слой шара фиксированной толщины h является неоднородным: плотность и модули упругости в нем являются функциями координат. Упругий материал внутренней части шара радиуса R_1 является однородным, но

в этой части находится полость радиуса R_2 . В общем случае центр полости не совпадает с центром всего шара O_1 . Смещение центра полости относительно центра шара известно. Считается заданным d – расстояние от центра шара O до Π . Также известны модули упругости Ламе и плотности для однородной части шара – λ_1, μ_1, ρ_1 и для внешнего слоя – $\lambda(\mathbf{r}), \mu(\mathbf{r}), \rho(\mathbf{r})$, где $\mathbf{r}$ – радиус-вектор точки пространства.

Граница полупространства является идеально жесткой или идеально мягкой. На шар набегают гармоническая плоская звуковая волна с потенциалом смещения

$$\Psi_0 = \exp[i(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} - \omega t)], \quad (1)$$

где $\mathbf{k}_0$ – волновой вектор падающей волны ($|\mathbf{k}_0| = k_0 = \omega/c_0$); ω – круговая частота; t – время. Далее множители $\exp(-i\omega t)$ у величин, зависящих от времени будем опускать. Без ограничения общности полагается $|\Psi_0| = 1$.

Геометрическая схема задачи представлена на рис. 1. Символом Ψ_s на нем условно показан потенциал смещений в рассеянной волне, который требует определения в задаче. Точка O на рисунке – проекция центра шара O_1 на плоскость Π .

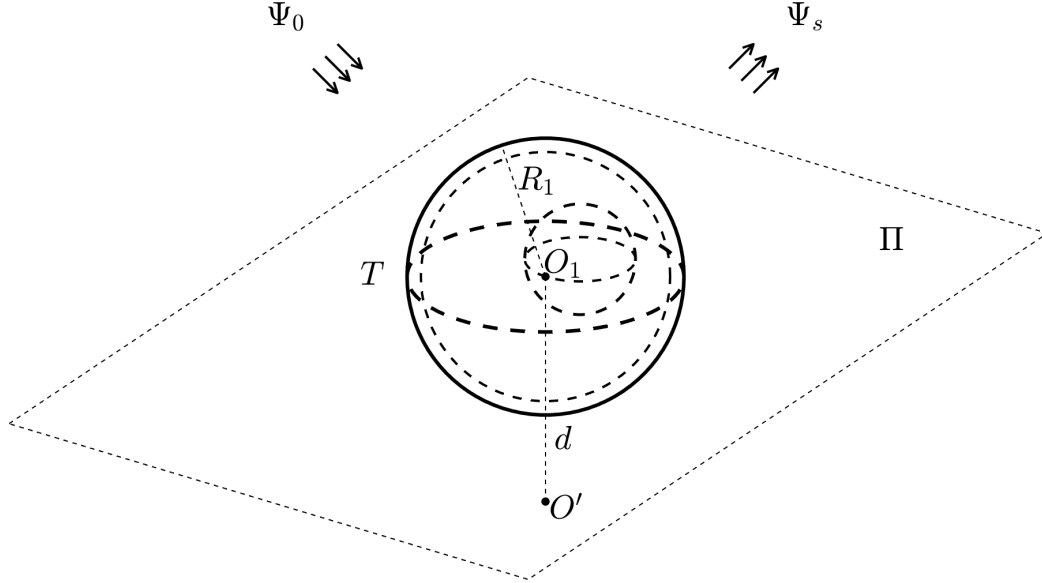


Рис. 1: Геометрия задачи

Введем глобальную ортогональную декартову систему координат x, y, z так, чтобы ее начало было в точке O , а плоскость Π совпадала с координатной поверхностью $z = 0$. Направление оси x выберем так, чтобы волновой вектор $\mathbf{k}_0$ лежал в плоскости xOz . Наклон вектора $\mathbf{k}_0$ будем задавать углом θ_0 между осью z и $\mathbf{k}_0$ так, что

$$\mathbf{k}_0 = k_0 \sin \theta_0 \mathbf{i}_x + k_0 \cos \theta_0 \mathbf{i}_z,$$

где $\mathbf{i}_x, \mathbf{i}_z$ – единичные координатные векторы.

Также введем локальную систему координат x_1, y_1, z_1 , оси которой направлены так же, как x, y, z , но центр находится в точке O_1 . Связь между координатами будет описываться соотношениями

$$x_1 = x, \quad y_1 = y, \quad z_1 = z - d.$$

При этом внутренняя поверхность неоднородного слоя Γ_1 будет задаваться уравнением

$$\Gamma_1 : \quad x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = R_1^2; \quad (2)$$

внешняя поверхность неоднородного слоя Γ_{11} –

$$\Gamma_{11} : \quad x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = (R_1 + h)^2; \quad (3)$$

а поверхность полости – Γ_{11} – уравнением

$$\Gamma_{12} : \quad (x_1 + a)^2 + (y_1 + b)^2 + (z_1 + c)^2 = R_2^2,$$

где a, b, c обозначены известные смещения по осям координат x, y, z центра полости относительно O_1 .

Схематично, геометрия задачи после введения систем координат представлена на рис. 2.

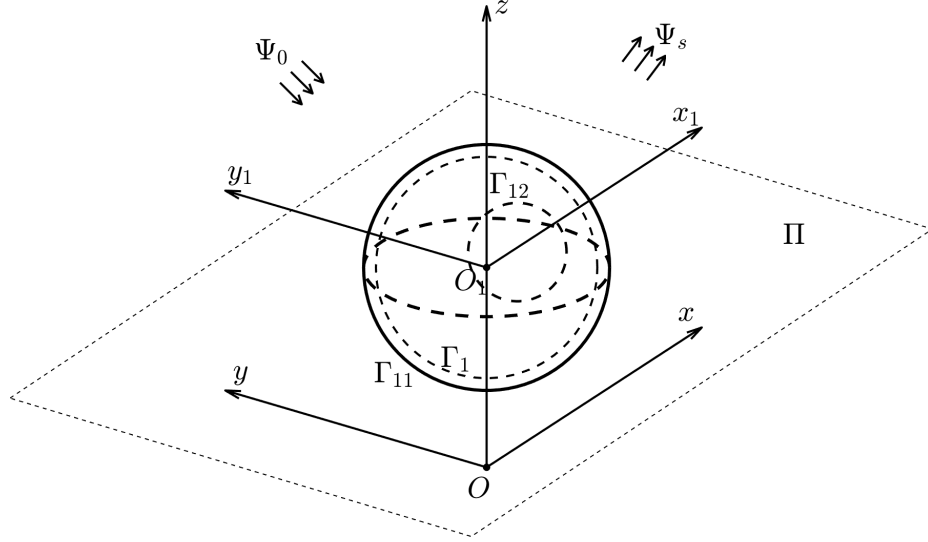


Рис. 2: Введение систем координат

Обозначим области, занимаемые различными средами так: Ω_0 — область полупространства $z > 0$, занятая идеальной жидкостью; Ω_1 — область шара, занятая однородной упругой средой $\{(x_1, y_1, z_1) : (x_1 + a)^2 + (y_1 + b)^2 + (z_1 + c)^2 \geq R_2^2 \text{ \& } x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \leq R_1^2\}$; Ω_{11} — неоднородный слой упругого шара $\{(x_1, y_1, z_1) : R_1^2 < x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \leq (R_1 + h)^2\}$.

В области Ω_0 движение частиц идеальной жидкости определяется потенциалами смещений в падающей Ψ_0 и рассеянной Ψ_s волнах. Смещение $\mathbf{u}_0$ и давление p_0 в области Ω_0 определяются через эти потенциалы так [22]:

$$\mathbf{u}_0 = \text{grad}(\Psi_0 + \Psi_s), \quad p_0 = \rho_0 \omega^2 (\Psi_0 + \Psi_s). \quad (4)$$

При этом потенциал Ψ_s должен удовлетворять уравнению Гельмгольца

$$\Delta \Psi_s + k_0^2 \Psi_s = 0 \quad (5)$$

и условиям излучения на бесконечности [23].

Будем считать, что движение частиц в шаре подчиняется законам линейной теории упругости [24]. Обозначим вектор смещения и тензор напряжения в области Ω_1 через $\mathbf{u}_1$ и σ_1 соответственно. Тогда гармонические колебания частиц в однородной части тела T описываются уравнениями движения

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{1xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{1xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{1xz}}{\partial z} &= -\rho_1 \omega^2 u_{1x}, \\ \frac{\partial \sigma_{1yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{1yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{1yz}}{\partial z} &= -\rho_1 \omega^2 u_{1y}, \\ \frac{\partial \sigma_{1zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{1zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{1zz}}{\partial z} &= -\rho_1 \omega^2 u_{1z}, \end{aligned} \quad (6)$$

где u_{1j}, σ_{1jk} — компоненты вектора $\mathbf{u}_1$ и тензора σ_1 в декартовой системе координат $(x, y, z$ или $x_1, y_1, z_1)$.

Аналогично в неоднородном слое шара уравнения движения будут иметь вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} &= -\rho_1 \omega^2 u_x, \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} &= -\rho_1 \omega^2 u_y, \\ \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} &= -\rho_1 \omega^2 u_z,\end{aligned}\tag{7}$$

где $\mathbf{u}$ и σ — вектор смещения и тензор напряжения в области Ω_{11} .

Тензор напряжения выражается через компоненты вектора смещения посредством закона Гука, так что уравнения (6), (7) можно рассматривать как системы дифференциальных уравнений второго порядка относительно компонент векторов смещения $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}$.

На свободной поверхности полости — Γ_{12} должен обращаться в ноль вектор напряжения:

$$\sigma_{nn}|_{\Gamma_{12}} = 0, \quad \sigma_{n\tau}|_{\Gamma_{12}} = 0 \quad (\tau = 1, 2);\tag{8}$$

здесь индекс n соответствует проекции вектора напряжений на нормаль к сферической поверхности Γ_{12} (индекс τ на касательные).

На поверхности (2) соединения неоднородного слоя и однородной части шара должны быть непрерывными смещения и вектор напряжений:

$$\mathbf{u}|_{\Gamma_1} = \mathbf{u}_1, \quad \sigma_{rr}|_{\Gamma_1} = \sigma_{1rr}, \quad \sigma_{rk}|_{\Gamma_1} = \sigma_{1rk} \quad (k = \theta_1, \varphi_1),\tag{9}$$

где $\sigma_{rk}, \sigma_{1rk}$ — компоненты скалярных произведений $\sigma \cdot \mathbf{r}_1/r_1, \sigma_1 \cdot \mathbf{r}_1/r_1$; r_1, θ_1, φ_1 — сферические координаты, связанные с декартовой системой координат x_1, y_1, z_1 ; $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$.

На внешней поверхности тела — Γ_{11} — поверхности соприкосновения жидкости и упругого материала должны быть непрерывными нормальная компонента вектора смещения и вектор напряжений:

$$u_r|_{\Gamma_{11}} = u_{0r}, \quad \sigma_{rr}|_{\Gamma_{11}} = p_0, \quad \sigma_{rk}|_{\Gamma_{11}} = 0 \quad (k = \theta, \varphi);\tag{10}$$

здесь величины u_{0r}, p_0 выражаются через потенциалы Ψ_0, Ψ_s в соответствии с (4).

Наконец, на границе полупространства Π в зависимости от ее типа должно выполняться условие

$$a) \quad u_{0z}|_{z=0} = 0, \quad \text{или} \quad b) \quad p_0|_{z=0} = 0,\tag{11}$$

где случай $a)$ соответствует варианту жесткой поверхности Π , а $b)$ — абсолютно мягкой.

Таким образом, требуется решить уравнения (5), (6), (7) с учетом граничных условий (8), (9), (10), (11) и условий излучения на бесконечности.

3. Решение задачи

Для решения задачи применим подход, использованный в [21] при решении задачи о рассеянии звука сфероидом в присутствии подстилающей поверхности. Исключим из рассмотрения границу полупространства Π , расширив область Ω_0 до полного пространства, введя в рассмотрение второй рассеиватель T' , являющийся зеркальным отражением исходного T относительно плоскости $z = 0$, и вторую падающую плоскую волну Ψ_1 , распространяющуюся в направлении волнового вектора $\mathbf{k}_1 = (k_0 \sin \theta_0 \cos \varphi_0, k_0 \sin \theta_0 \sin \varphi_0, -k_0 \cos \theta_0)$ (см. рис. 3).

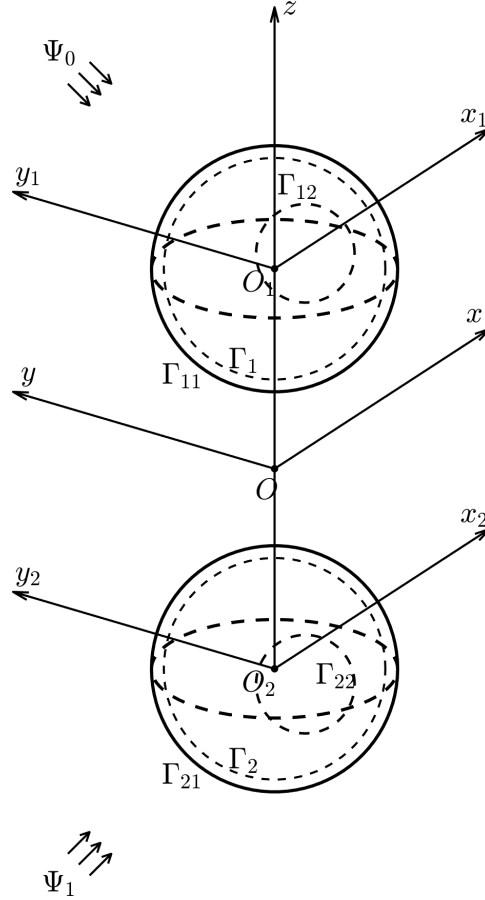


Рис. 3: Введение второго тела

На рисунке O_2 — центр шара T' (глобальные координаты $-(0, 0, -d)$), x_2, y_2, z_2 — локальная система координат с началом в точке O_2 в которой поверхность однородной части T' имеет вид, аналогичный (2)

$$x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = R_1^2.$$

Эту поверхность будем обозначать Γ_2 , область однородного материала во втором шаре — Ω_2 . Внешнюю поверхность тела T' , которая определяется уравнением вида (3), обозначим Γ_{21} , а область неоднородного слоя между Γ_2 и Γ_{21} — Ω_{21} .

В случае абсолютно жесткой плоскости Π потенциал смещений во второй падающей плоской волне должен быть равен [18]

$$\Psi_1 = \exp[i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r})].$$

В случае акустически мягкой плоскости потенциал Ψ_1 должен иметь вид

$$\Psi_1 = -\exp[i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r})].$$

Тогда граничные условия (11) на плоскости $z = 0$ будут выполнены автоматически.

Таким образом, исходная задача сводится к задаче дифракции двух плоских волн на двух идентичных телах, находящихся в безграничном пространстве Ω_0 , заполненном однородной идеальной жидкостью.

В силу линейной постановки задачи следует найти решение задачи дифракции каждой из двух плоских волн на двух неоднородных шарах, а затем полученные результаты просуммировать.

Рассмотрим корректировку математической постановки задачи о дифракции плоской звуковой волны Ψ_0 на двух упругих шарах с неоднородными внешними слоями. Уравнения (6), (7) должны быть продублированы для областей Ω_2 и Ω_{21} соответственно. Будем обозначать векторы смещений и тензоры напряжений в областях Ω_2 и Ω_{21} через $\mathbf{u}_2$, σ_2 и $\mathbf{u}'$, σ' .

На поверхностях Γ_{22} , Γ_2 , Γ_{21} должны быть введены граничные условия, подобные (8), (9), (10):

$$\sigma_{nn}|_{\Gamma_{22}} = 0, \quad \sigma_{n\tau}|_{\Gamma_{22}} = 0 \quad (\tau = 1, 2); \quad (12)$$

$$\mathbf{u}'|_{\Gamma_2} = \mathbf{u}_2, \quad \sigma'_{rr}|_{\Gamma_2} = \sigma_{2rr}, \quad \sigma'_{rk}|_{\Gamma_2} = \sigma_{2rk} \quad (k = \theta_2, \varphi_2); \quad (13)$$

$$u'_r|_{\Gamma_{21}} = u_{0r}, \quad \sigma'_{rr}|_{\Gamma_{21}} = p_0, \quad \sigma'_{nk}|_{\Gamma_{21}} = 0, \quad (14)$$

здесь индекс n соответствует проекции вектора напряжений на нормаль к сферической поверхности Γ_{22} (индекс τ на касательные); σ'_{rk} , σ_{2rk} — компоненты скалярных произведений $\sigma' \cdot \mathbf{r}_2/r_2$, $\sigma_2 \cdot \mathbf{r}_2/r_2$; r_2 , θ_2 , φ_2 — сферические координаты, связанные уже с декартовой системой координат x_2 , y_2 , z_2 ; $\mathbf{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$.

В новой постановке условия (11) на поверхности Π исключаются.

Заметим, что в общем случае зависимостей $\rho(\mathbf{r})$, $\lambda(\mathbf{r})$, $\mu(\mathbf{r})$ для неоднородного слоя рассеивателя аналитическое решение поставленной задачи невозможно. Значительно осложняется поиск аналитического решения и тем, что граничные поверхности Γ_{12} , Γ_{22} не являются координатными поверхностями сферических систем координат, связанных с x_1 , y_1 , z_1 и x_2 , y_2 , z_2 .

Будем решать сформулированную задачу численно с использованием метода конечных элементов на основе подхода, предложенного в работах [15, 16, 21].

В соответствии с этим подходом в области жидкости, прилегающей к телам T и T' , выделим сферическую поверхность Γ_0 радиуса R_0 такого, чтобы внутри этой поверхности оказались оба препятствия и некоторая область жидкости Ω'_0 , содержащая упругие тела. При этом минимальное расстояние от упругих тел до поверхности Γ_0 должно иметь порядок характерного размера упругого тела.

Тогда совокупность областей жидкой и упругих сред $\Omega = \Omega'_0 \cup \Omega_1 \cup \Omega_{11} \cup \Omega_2 \cup \Omega_{21}$ можно рассматривать как некоторое неоднородное сферическое препятствие для падающей волны Ψ_0 (см. рис. 4).

Решение уравнений движения во всей области такого неоднородного препятствия будем выполнять с помощью МКЭ. Для этого, к уравнениям вида (6), (7) для упругих областей Ω_1 , Ω_{11} , Ω_2 и Ω_{21} надо добавить уравнения, описывающие колебания жидкости в Ω'_0 . Введем новую переменную — потенциал смещений в Ω'_0 — Ψ . Поскольку в Ω'_0 находится та же жидкость, что и во всем Ω_0 , то Ψ должен удовлетворять волновому уравнению вида (5)

$$\Delta \Psi + k_0^2 \Psi = 0. \quad (15)$$

Немного изменится вид граничных условий (10), (14) на поверхностях Γ_{11} , Γ_{21} . В них надо заменить u_{0n} и p_0 на

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{n}} \quad \text{и} \quad p = \rho_0 \omega^2 \Psi,$$

соответственно.

На сферической внешней поверхности области Ω'_0 надо ввести условия согласования параметров движения жидкости в Ω'_0 и во внешней среде Ω_0

$$\left. \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right|_{r=R_0} = \frac{\partial(\Psi_0 + \Psi_s)}{\partial r}, \quad \Psi|_{r=R_0} = \Psi_0 + \Psi_s. \quad (16)$$

Здесь первое условие выражает требование равенства нормальных смещений в частицах, расположенных по обе стороны Γ_0 , а второе — требование равенства давлений.

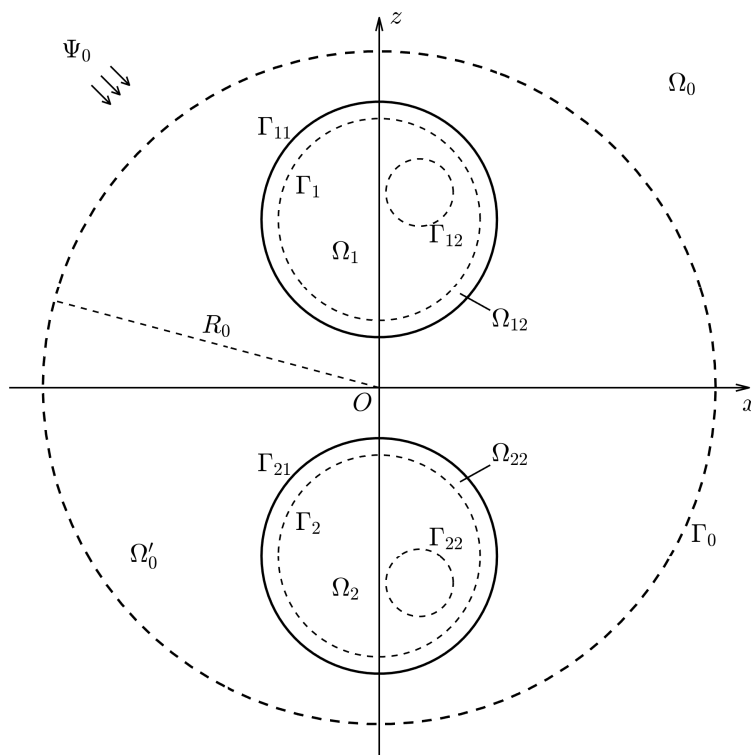


Рис. 4: Сечение области неоднородного шара Ω

Разобьем все подобласти шара Ω на конечные элементы в форме тетраэдров. Двумерная иллюстрация этой процедуры представлена на рис. 5.

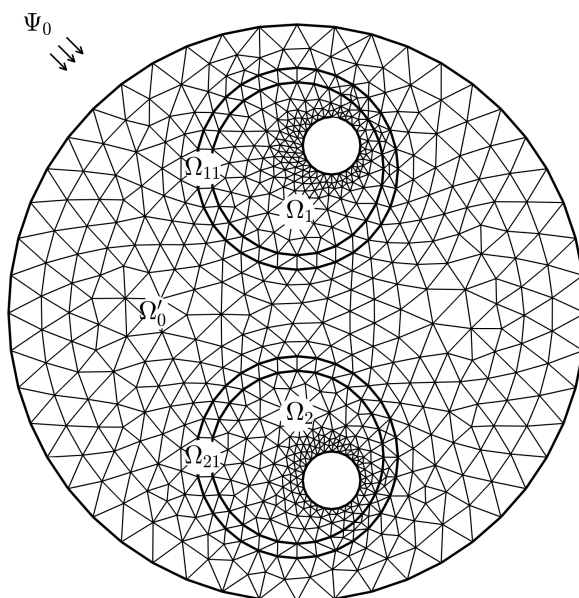


Рис. 5: Схема разбиения Ω на конечные элементы

Все неизвестные функции в Ω представляются в виде линейных комбинаций координатных

функций узлов [14]. В частности для потенциала Ψ можно записать

$$\Psi(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^K \psi_k f_k(\mathbf{r}), \quad (17)$$

где ψ_k — узловые значения потенциала в области Ω ; $f_k(\mathbf{r})$ — координатные функции конечно-элементной модели; K — количество узлов; будем считать, что множество значений $k = \overline{1...K}$ охватывает узлы всей КЭ-сетки области Ω , просто в узлах, не относящихся к Ω'_0 , положим $\psi_k \equiv 0$.

Во внешней области содержащей жидкости потенциал смещений Ψ_s в рассеянной волне будем искать в виде разложения по сферическим гармоникам с учетом условий излучения

$$\Psi_s = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n A_{nm} h_n(k_0 r) P_n^m(\cos \theta) \exp(im\varphi), \quad (18)$$

где $h_n(x)$ — сферическая функция Ханкеля первого рода порядка n ; $P_n^m(x)$ — присоединенный многочлен Лежандра степени n порядка m ; r, θ, φ — координаты сферической системы координат, связанной с системой x, y, z ; A_{nm} — неизвестные коэффициенты подлежащие определению из граничных условий.

Разложим также по сферическим гармоникам и потенциал смещений в падающей плоской волне [23]

$$\Psi_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \gamma_{nm} j_n(k_0 r) P_n^m(\cos \theta) \exp(im\varphi), \quad (19)$$

где $\gamma_{nm} = \frac{i^n (2n+1)(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \theta_0) \exp(-im\varphi_0)$; $j_n(x)$ — сферическая функция Бесселя первого рода порядка n .

Подставляя (17), (18), (19) во второе граничное условие (16) и, используя ортогональность сферических гармоник, получим выражения A_{nm} через узловые значения ψ_k на поверхности $r = R_0$

$$A_{nm} = -\gamma_{nm} \frac{j_n(k_0 r)}{h_n(k_0 r)} + \frac{1}{h_n(k_0 r) N_{nm}} \sum_{j=1}^M \psi_j (f_j, Y_{nm}), \quad (20)$$

где $N_{nm} = \frac{4\pi(n+m)!}{(2n+1)(n-m)!}$ — норма сферической гармоники $Y_{nm}(\theta, \varphi) = P_n^m(\cos \theta) \exp(im\varphi)$;

$(f_j, Y_{nm}) = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f_j(R_0, \theta, \varphi) \bar{Y}_{nm}(\theta, \varphi) \sin \theta d\varphi d\theta$ — скалярное произведение на поверхности Γ_0

координатной функции $f_k(R_0, \theta, \varphi)$ и сферической гармоники $Y_{nm}(\theta, \varphi)$; здесь множество значений $j = \overline{1...M}$ соответствует множеству узлов, расположенных на поверхности Γ_0 .

Затем подставим выражение (20) для A_{nm} в первое граничное условие (16).

В форме, аналогичной (17), будем искать и смещение в упругой части препятствия (в областях $\Omega_1, \Omega_{11}, \Omega_2, \Omega_{21}$)

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^K \mathbf{U}_k f_k(\mathbf{r}).$$

Здесь $\mathbf{u}$ рассматривается как общее обозначение для смещений $\mathbf{u}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}', \mathbf{u}_2$, введенных выше.

В результате граничные условия (9), (10), (13), (14) и первое из (16) будут содержать в качестве неизвестных только узловые значения функций $\Psi, \mathbf{u}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}', \mathbf{u}_2$ из ограниченной области Ω . Далее можно решать краевую задачу для уравнений (6), (7), аналогичных для T'

и (15) с указанными граничными условиями стандартной технологией МКЭ [14]. В результате решения находим все узловые значения неизвестных функций ψ_k , U_k ($k = 1, 2, \dots, K$). Подставляя найденные значения ψ_j ($j = 1, 2, \dots, M$) в (20), найдем коэффициенты в разложении потенциала смещения в рассеянном поле (18).

Аналогично решим задачу о рассеянии второй падающей волны Ψ_1 и найдем коэффициенты A'_{nm} в разложении потенциала смещения в рассеянном поле, подобном (18). Тогда потенциал смещения в рассеянном поле, полученном от действия двух волн, можно представить в виде

$$\Psi_s(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n B_{nm} h_n(k_0 r) Y_{nm}(\theta, \varphi), \quad (21)$$

где $B_{nm} = A_{nm} + A'_{nm}$.

4. Численные исследования

Используя асимптотическое поведение сферической функции Ханкеля при больших значениях аргумента, представим $\Psi_s(r, \theta, \varphi)$ при $r \rightarrow \infty$ из (21) в виде

$$\Psi_s|_{r \rightarrow \infty} \approx \frac{R_0 \exp(ik_0 r)}{2r} \Phi(\theta, \varphi),$$

где $\Phi(\theta, \varphi)$ — нормированная форм-функция рассеянного поля в дальней зоне, определяющая распределение амплитуды и фазы отраженной волны вдали от препятствия,

$$\Phi(\theta, \varphi) = \frac{2}{k_0 R_0} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (-i)^{n+1} B_{nm} Y_{nm}(\theta, \varphi).$$

При проведении численных исследований решения анализировалось распределение по углам θ и φ амплитуды рассеянного поля, поэтому расчеты выполнялись для функции

$$F(\theta, \varphi) = \frac{1}{k_0 R'} \left| \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (-i)^{n+1} B_{nm} Y_{nm}(\theta, \varphi) \right|, \quad (22)$$

где коэффициент 2 заменен на 1, поскольку нас интересует отражение одного тела; $R' = R_1 + h$ — радиус исходного упругого препятствия.

В качестве функциональных зависимостей переменных параметров упругой среды в неоднородном слое препятствия рассматривались линейные функции, в которых независимой переменной выступает расстояние q от однородной части шара (например, для T $q = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} - R_1$)

$$f(q) = 1 + \alpha(2q/h - 1), \quad g(q) = 1 + \beta(2q/h - 1). \quad (23)$$

При этом функция $f(q)$ принимают значения из интервала $[1 - |\alpha|, 1 + |\alpha|]$. В середине неоднородного слоя ($q = 0.5h$) $g(q) = f(q) = 1$.

Зависимость параметров материала неоднородного слоя от координат представлялась в виде

$$\rho = \rho' f(q), \quad \lambda = \lambda' g(q), \quad \mu = \mu' g(q),$$

где ρ' , λ' , μ' — средние значения материального параметра по толщине слоя.

Рассматривалось препятствие, однородная часть которого представляла собой шар радиусом R_1 , полость в котором имеет радиус R_2 такой, что $R_1/R_2 = 2$. Толщина внешнего слоя

h полагалась такой, что $R_1/h = 4$. Если не оговорено другое, то в представленных далее расчетах расстояние d установлено таким, что $d/R_1 = 2$.

Плотность и модули упругости в однородной эллипсоид части заданы так: $\rho_1 = 2700 \text{ кг/м}^3$, $\lambda_1 = 5.3 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$, $\mu_1 = 2.6 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$. В большей части экспериментов материалы свойства для внешнего слоя полагались равными: $\rho' = \rho_1$, $\lambda' = \lambda_1$, $\mu' = \mu_1$.

В качестве идеальной среды, заполняющей полупространство, использовалась жидкость с плотностью $\rho_0 = 1000 \text{ кг/м}^3$ и скоростью звука $c_0 = 1485 \text{ м/с}$. Граница полупространства, занятого жидкостью полагалась абсолютно жесткой.

Частота падающей волны выбиралась такой, что $k_0 R' = 3$. Во всех, показанных далее расчетах, $\theta_0 = 120^\circ$, $\varphi_0 = 0$. Для результатов, представленных на рис. 6–8 коэффициенты α , β в (23) равны 0.

На рис. 6 показано влияние на форм-функцию $F(\theta, 0)$ (см. (22)) наличия полости внутри шара. Пунктирной линией изображена диаграмма для случая, когда полость отсутствует, а сплошной – диаграмма в случае наличия полости с $R_1/R_2 = 2$ и центром совпадающим с O_1 ($a = b = c = 0$).

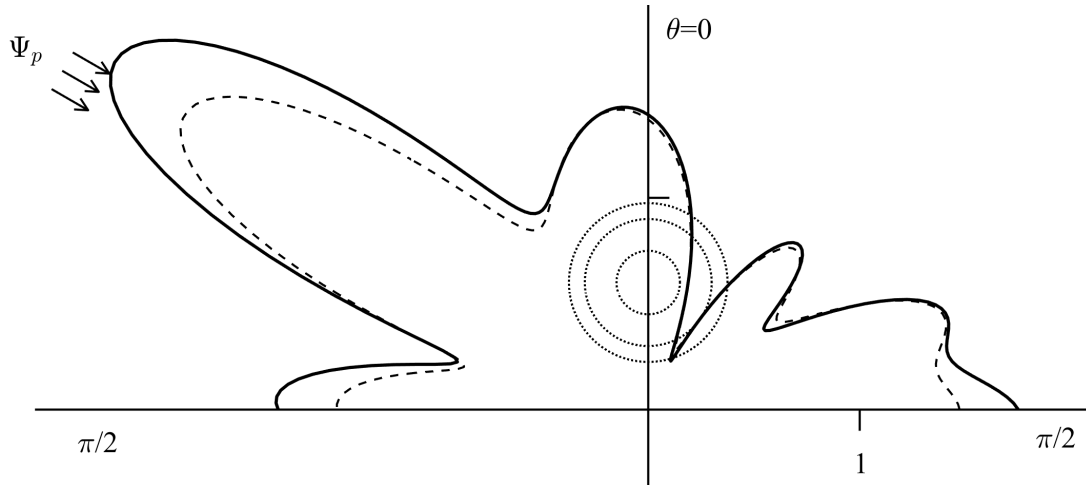


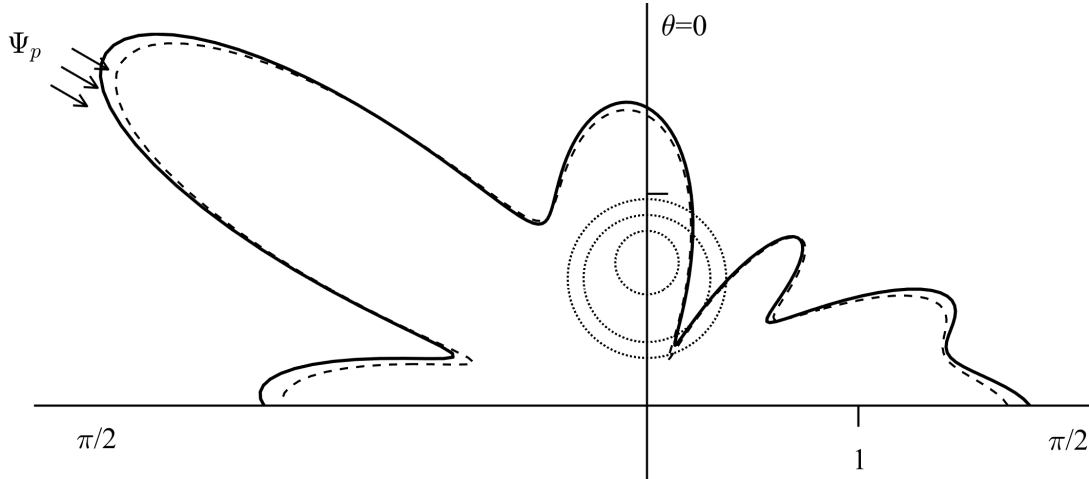
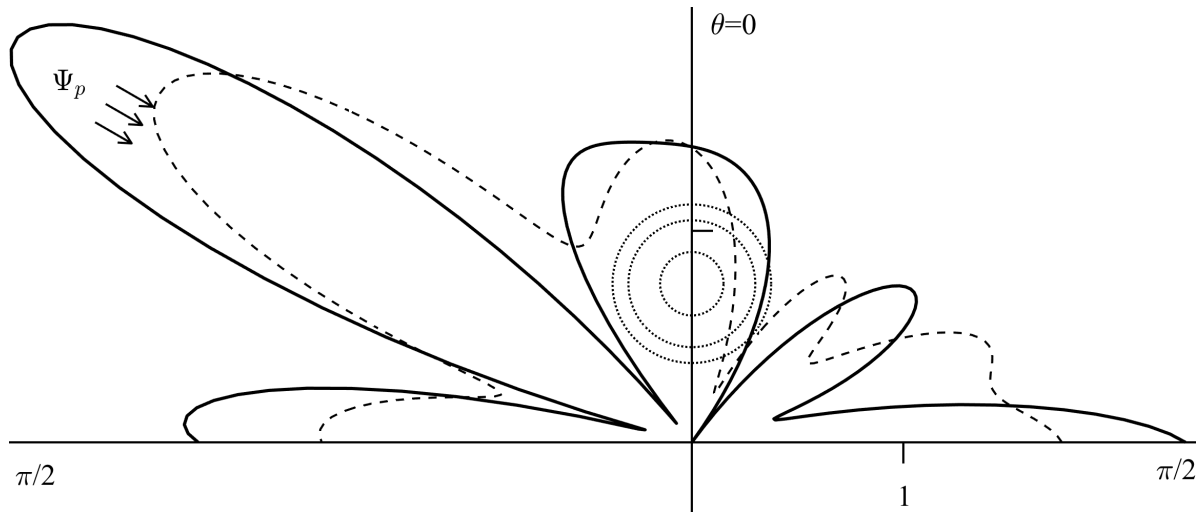
Рис. 6: Сравнение диаграммы $F(\theta, 0)$ со случаем отсутствия полости

Структура неоднородного шара на рисунке схематично представляется тремя окружностями близи начала координат, изображенными тонкой пунктирной линией. Эти окружности показывают центральные сечения поверхностей Γ_{11} – внешняя окружность; Γ_1 – окружность среднего радиуса; Γ_{12} – малая окружность. Видно, что наличие полости приводит к увеличению коэффициента отражения в освещенной области и в лепестке диаграммы вблизи $\theta = \pi/2$ теневой области.

Рис. 7 иллюстрирует влияние на процесс рассеяния положения полости относительно центра шара. Пунктирной линией изображена диаграмма для случая $a = b = c = 0$, когда полость находится в центре. Сплошная линия представляет диаграмму для случая $a = b = 0$, $c = 0.25a$. Как видно, смещение полости приводит к увеличению максимумов в лепестках диаграммы $F(\theta, 0)$ на 5-7% во всех направлениях.

На рис. 8 показано влияние на форм-функцию $F(\theta, \varphi)$ расстояния d до плоскости П. Пунктирной линией, как и на рис. 7, изображена диаграмма для случая $d/R_1 = 2$, а сплошной линией показана диаграмма для случая $d/R_1 = 2.5$. Увеличение d приводит к существенным изменениям коэффициента отражения во всех направлениях. При этом минимумы диаграммы становятся более выраженными, а увеличение коэффициента отражения в максимумах составляет до 30%.

На рис. 9 показано влияние на форм-функцию $F(\theta, 0)$ неоднородности материала внеш-

Рис. 7: Диаграмма $F(\theta, 0)$ при $c/a = 0.25$ Рис. 8: Диаграмма $F(\theta, 0)$ при $d/R_1 = 2.5$

него слоя шара при $k_0 R' = 5$. Пунктирной линией изображена диаграмма для случая, когда упругий материал всего тела T является однородным с параметрами $\rho' = \rho_1$, $\lambda' = \lambda_1$, $\mu' = \mu_1$.

Сплошной линией изображена диаграмма $F(\theta, 0)$ для случая, когда все параметры внешнего слоя являются переменными при $\alpha = 0.5$, $\beta = -0.5$. В этом случае в пределах неоднородного слоя плотность увеличивается с ростом расстояния от поверхности Γ_1 , а величина модулей упругости λ , μ убывает. При такой неоднородности коэффициент отражения в направлении, обратном направлению распространения волны, и при θ в окрестности $\pi/2$ практически не меняется. В большей части боковых лепестков коэффициент отражения уменьшается на 5-10%. И только в узком лепестке в окрестности $\theta = 70^\circ$ теневой области коэффициент отражения изменяется существенней, увеличиваясь в 2 раза. Заметим, рассмотренная неоднородность параметров внешнего слоя при $k_0 R' = 3$ практически не влияет на характер рассеяния звука.

5. Заключение

Представленное решение показывает возможность использования метода конечных элементов для решения задач о рассеянии звука при достаточно сложных конфигурациях упругих

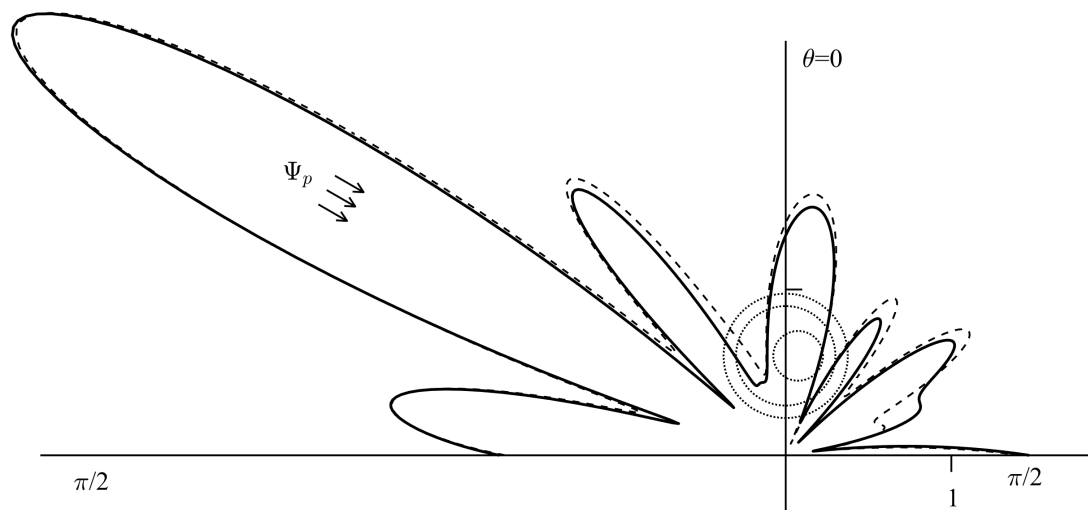


Рис. 9: Диаграмма $F(\theta, 0)$ для случая $\alpha = 0.5$, $\beta = -0.5$

рассеивающих объектов при наличии структурных неоднородностей и неоднородности материала препятствия.

Полученные результаты показывают, что при невысоких частотах звуковой волны структурные параметры задачи оказывают большее влияние на характер рассеянного поля, чем неоднородность упругой среды рассеивающего тела. Но при определенных сочетаниях зависимостей в изменении параметров в форм-функции рассеянного поля есть заметные изменения. Показано, что повышение частоты падающей волны приводит к более выраженным изменениям амплитуды рассеянного поля при изменении зависимостей в неоднородном покрытии шара.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гвишиани А. Д., Жижин М. Н., Мостинский А. З., Тумаркин А. Г. Классификация сильных движений алгоритмами распознавания / Математические методы обработки геофизической информации. М.: ИФЗ АН СССР, 1986. С. 136-156.
2. Bonnin J., Bottard S., Gvishiani A., Mohammadioun B., Zhizhin M. Classification of strong motion waveforms from different geological regions using syntactic pattern recognition scheme // Cahiers du Centre Europeen de Geodynamique et de Seismologie. 1992. V. 6. P. 33-42.
3. Gvishiani A., Dubois J. Artificial intelligence and dynamic systems for geophysical applications. Paris: Springer-Verlag, 2002. 350 p.
4. Faran J.J. Sound scattering by solid cylinders and spheres // J. Acoust. Soc. Amer. 1951. V. 23. N 4. P. 405-420.
5. Junger M.C. Sound scattering by thin elastic shells // J. Acoust. Soc. Amer. 1952. V. 24. N 4. P. 366-373.
6. Hasegawa T., Yosioka K. Acoustic-radiation force on a solid elastic sphere // J. Acoust. Soc. Amer. 1969. V. 46. N 5. Part 2. P. 1139-1143.
7. Плахов Д. Д., Саволайнен Г. Я. Дифракция сферической звуковой волны на упругой сферической оболочке // Акуст. журн. 1975. Т. 21. Вып. 5. С. 789-796.

8. Толоконников Л. А., Филатова Ю. М. Дифракция плоской звуковой волны на упругом шаре с произвольно расположенной сферической полостью // Известия ТулГУ. Естественные науки. 2010. Вып. 1. С. 115-123.
9. Толоконников Л. А., Филатова Ю. М. О дифракции цилиндрической звуковой волны на упругом шаре с произвольно расположенной полостью // Известия ТулГУ. Естественные науки. 2010. Вып. 2. С. 134-141.
10. Филатова Ю. М. О рассеянии звуковых волн упругим шаром с неконцентрической полостью // Материалы междунар. научн. конф. "Современные проблемы математики, механики, информатики". Тула: Изд-во ТулГУ, 2009. С. 295-296.
11. Филатова Ю. М. Рассеяние сферической звуковой волны упругим шаром с полостью // Вестник ТулГУ. Сер. Дифференциальные уравнения и прикладные задачи. 2010. Вып. 1. С. 87-92.
12. Harari I., Hughes T. J. R. Finite element method for the Helmholtz equation in an exterior domain: model problems // Comp. Methods Appl. Mech. Eng. 1991. V. 87. P. 59-96.
13. Gan H., Levin P. L., Ludwig R. Finite element formulation of acoustic scattering phenomena with absorbing boundary condition in the frequency domain // J. Acoust. Soc. Amer. 1993. V. 94. № 3, Pt. 1, P. 1651-1662.
14. Ihlenburg F. Finite element analysis of acoustic scattering. New York: Springer Publishing Company Inc., 2013. 226 p.
15. Скобельцын С. А. Подход к решению задач о рассеянии упругих волн с использованием МКЭ // Тез. докл. междунар. научн. конф. "Современные проблемы математики, механики, информатики" Тула: ТулГУ. 2004. С. 135-136.
16. Иванов В. И., Скобельцын С. А. Моделирование решений задач акустики с использованием МКЭ // Известия ТулГУ. Естественные науки. 2008. Вып. 2. С. 132-145.
17. Иванов Е. А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск: Наука и техника. 1968. 584 с.
18. Клещев А. А. Рассеяние звука сфероидальными телами, находящимися у границы раздела сред // Акуст. журн. 1977. Т. 23, Вып. 3. С. 404-410.
19. Gaunaurd J. C., Huang H. Acoustic scattering by a spherical body near a plane boundary // J. Acoust. Soc. Amer. 1994. V. 96, N 6. P. 2526-2536.
20. Толоконников Л. А., Логвинова А. Л. Дифракция плоской звуковой волны на двух неоднородных цилиндрах с жесткими включениями // Изв. ТулГУ. Естественные науки. 2015. Вып. 1. С. 54-66.
21. Скобельцын С. А., Толоконников Л. А. Дифракция плоской звуковой волны на упругом сфероиде с неоднородным покрытием в присутствии подстилающей поверхности // Изв. ТулГУ. Естественные науки. 2015. Вып. 2. С. 64-75.
22. Исакович М. А. Общая акустика. М.: Наука, 1973. 496 с.
23. Скучик Е. Основы акустики. Т. 2. М.: Мир, 1976. 542 с.
24. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.

REFERENCES

1. Gvishiani, A.D., Zhizhin, M.N., Mostinskii, A.Z. & Tumarkin, A.G. 1986, "Classifikatsiia sil'ny'kh dvizhenii' algoritmami raspoznavaniia", *Matematicheskie metody obrabotki geofizicheskoi' informatsii*, M.: IFZ AN USSR, pp. 136-156.
2. Bonnin, J., Bottard, S., Gvishiani, A., Mohammadioun B. & Zhizhin, M. 1992, "Classification of strong motion waveforms from different geological regions using syntactic pattern recognition scheme", *Cahiers du Centre Europeen de Geodynamique et de Seismologie*, vol. 6, pp. 33-42.
3. Gvishiani A. & Dubois J. 2002, "Artificial intelligence and dynamic systems for geophysical applications", Springer-Verlag, Paris, 350 p.
4. Faran J.J. 1951, "Sound scattering by solid cylinders and spheres", *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 23, no 4, pp. 405-420.
5. Junger M.C. 1952, "Sound scattering by thin elastic shells", *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 24, no 4, pp. 226-373.
6. Hasegawa, T. & Yosioka, K. 1969, "Acoustic-radiation force on a solid elastic sphere", *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 46, no 5, part 2, pp. 1139-1143.
7. Plahov, D.D. & Savolai'nen, G.Y. 1975, "Difraktsiia sfericheskoi' zvukovoi' volny' na uprugoi' sfericheskoi' obolochke", *Akust. Zhurnal*, vol. 21, no 5, pp. 789-796.
8. Tolokonnikov, L. A. & Filatova, U.M. 2010, "Difraktsiia ploskoi' zvukovoi' volny' na uprugom share s proizvol'no raspolozhennoi' sfericheskoi' polost'iu", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no 1, pp. 115-123.
9. Tolokonnikov, L. A. & Filatova, U.M. 2010, "O difraktsii tsilindricheskoi' zvukovoi' volny' na uprugom share s proizvol'no raspolozhennoi' polost'iu", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no 2, pp. 134-141.
10. Filatova, U.M. 2009, "O rasseianii zvukovy'kh voln uprugim sharom s nekoncentricheskoi' polost'iu", *Materialy' mezhdunar. nauchn. konf. "Sovremennyy'e problemy' matematiki, mehaniki, informatiki"*, Tul. Gos. Univ., Tula, pp. 295-296.
11. Filatova, U. M. 2010, "Рассеяние сферической звуковой волны упругим шаром с полостью", *Vestnik Tul. Gos. Univ., Ser. Differential'ny'e uravneniia i prikladny'e zadachi.*, no 1, pp. 87-92.
12. Harari, I. & Hughes, T.J.R. 1991, "Finite element method for the Helmholtz equation in an exterior domain: model problems", *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.* vol. 87, pp. 59-96.
13. Gan, H., Levin, P.L. & Ludwig, R. 1993, "Finite element formulation of acoustic scattering phenomena with absorbing boundary condition in the frequency domain", *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 94, no 3, pt. 1, pp. 1651-1662.
14. Ihlenburg, F. 2013, *"Finite element analysis of acoustic scattering"*, Springer Publishing Company Inc., New York, 226 p.
15. Skobel'tsyn, S.A. 2004, "Approach to solving problems on the scattering of elastic waves using FEM", *Tez. doc. Intern. scientific. Conf. "Modern problems of mathematics, mechanics, computer science"*, Tul. Gos. Univ., Tula, pp. 135-136.

16. Ivanov, V.I. & Skobel'tsyn, S.A. 2008, "Modeling solutions to acoustics using FEM", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no 2, pp. 132-145.
17. Ivanov, E. A. 1968, "*Diffraction of electromagnetic waves by two bodies*", Nauka i tekhnika, Minsk, 584 p.
18. Kleshchev, A. A. 1977, "Scattering of sound by spheroidal bodies located at the interface between media" *Akust. Zhurnal*, vol. 23, no. 3, pp. 404-410.
19. Gaunaurd, J. C. & Huang, H. 1994, "Acoustic scattering by a spherical body near a plane boundary", *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 96, no 6, pp. 2526-2536.
20. Tolokonnikov, L. A. & Logvinova, A. L. 2015, "Diffraction of a plane sound wave on two non-uniform cylinders with rigid inserts", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no 1, pp. 54-66.
21. Skobel'tsyn, S.A. & Tolokonnikov, L. A. 2015, "Diffraction of a plane sound wave on an elastic spheroid with an inhomogeneous coating in the presence of an underlying surface", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no 2, pp. 64-75.
22. Isakovich, M.A. 1973, "*General acoustics*", Nauka, Moscow, 496 p.
23. Skudryzk, E.F. 1971, "*The Foundations Acoustic*", Springer-Verlag, New York, 542 p.
24. Nowacki, W. 1975, "*Teoria sprężystości*", Mir, Moscow, 872 p.

Получено 27.07.2018

Принято в печать 22.10.2018

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 19. Выпуск 4

УДК 51-7, 004.8

DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-4-194-214

Методы геоинформатики и нечеткой математики в анализе геофизических данных¹

Соловьев Анатолий Александрович — доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, заместитель директора по науке, заведующий лабораторией, главный научный сотрудник, Геофизический центр РАН; ведущий научный сотрудник, Институт физики Земли им. О. Ю. Шмидта РАН.

e-mail: a.soloviev@gcras.ru

Аннотация

В настоящей работе приведен обзор базовых математических понятий и конструкций, которые легли в основу методов геоинформатики, развиваемых научной школой академика А.Д. Гвишиани. Важно отметить, что в рамках указанной школы геоинформатика понимается более широко, чем изучение и применение географических информационных систем. Геоинформатика включает в себя исследования по созданию методов и алгоритмов, позволяющих автоматизировать решение задач в области наук о Земле на базе данных исходных наблюдений. Под решением понимается адекватное моделирование логики эксперта, осуществляющего анализ данных и принятие решений вручную. Именно системы наблюдений и регистрируемые данные о процессах, происходящих в недрах Земли и в околоземном пространстве, являются основой фундаментальных исследований как в области геоинформатики, так и других науках о Земле. Так, под руководством академика А.Д. Гвишиани была существенно развита система наблюдений магнитного поля Земли. Настоящая статья в большей мере посвящена математическому аппарату, используемому для анализа данных наблюдений с целью последующего выявления новых закономерностей в процессах Земли и околоземного пространства.

Ключевые слова: Геоинформатика, нечеткие множества, распознавание образов, геофизические данные, временные ряды, метрические пространства.

Библиография: 44 названий.

Для цитирования:

А. А. Соловьев. Методы геоинформатики и нечеткой математики в анализе геофизических данных // Чебышевский сборник, 2018, т. 19, вып. 4, с. 194–214.

¹Статья написана в рамках Государственного задания ГЦ РАН на 2018 г.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 19. No. 4

UDC 51-7, 004.8

DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-4-194-214

Methods of geoinformatics and fuzzy mathematics in geophysical data analysis

Soloviev Anatoly Aleksandrovich — D.Sc., Corresponding member of the Russian Academy of Sciences, Deputy Director for Research, Chief of laboratory, Principal research scientist, Geophysical Center RAS; Leading research scientist, Schmidt Institute of Physics of the Earth RAS.

e-mail: a.soloviev@gcras.ru

Abstract

Herein we give an overview of the basic mathematical concepts and constructions that underlie the methods of geoinformatics developed by the scientific school under the leadership of RAS academician A. Gvishiani. It is important to note that we understand geoinformatics more widely than the study and application of geographic information systems. Geoinformatics includes research on the creation of methods and algorithms that make it possible to automate the problem solution in the field of geosciences using observational data. The solution is understood as an adequate modelling of expert's logic, who performs data analysis and decision making manually. It is the observation systems and recorded data on the processes in the Earth's interior and near-Earth space that form the basis for fundamental studies in the field of geoinformatics and other geosciences. Particularly, under the leadership of RAS academician A. Gvishiani the system of geomagnetic field observations has been significantly developed. This article is mostly devoted to the mathematical apparatus, used to analyze observational data in order to subsequently identify new regularities in the processes of the Earth and near-Earth space.

Keywords:

Bibliography: 44 titles.

For citation:

A. A. Soloviev, 2018, "Methods of geoinformatics and fuzzy mathematics in geophysical data analysis", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 4, pp. 194–214.

1. Введение

Последние десятилетия в геофизике и смежных науках наблюдается стремительный рост объема получаемой информации о внутренних и внешних процессах Земли. Например, только в нашей стране под руководством академика А.Д. Гвишиани за последние 15 лет система наблюдений магнитного поля Земли была расширена почти вдвое; достижения в этой области подробно изложены в [1-7]. Вследствие этого возросла роль автоматизации сбора и анализа данных и математических методов их обработки. Действительно, при небольших объемах данных опытному эксперту не составляет труда извлечь из них полезную информацию. Но для эффективного использования объемных массивов данных и получения на этой основе качественно новых результатов необходимо создание адекватных автоматизированных методов комплексного анализа и обработки данных. Извлечение полезной информации должно быть формализовано, происходить единообразно и объективно. Несмотря на огромное многообразие и разнородность типов геофизических наблюдений эта проблема может рассматриваться в общей постановке, достаточно инвариантной к выбору того или иного типа информации. Возникает необходимость создания общей теории и методов распознавания аномалий различной природы. Этот общий метод должен адаптироваться к конкретному выбору типа геофизических данных в виде нетривиальной самостоятельной реализации. Во многих случаях априорная информация об искомых возмущениях весьма ограничена и касается только общих представлений об их форме. Форма аномалии является достаточно нечетким понятием, а корреляционные свойства ее неизвестны. Поскольку природа явлений, отраженных в регистрируемых данных, априори не известна и изменчива во времени, то и методы должны быть в большой степени адаптивными.

2. Предпосылки использования аппарата нечеткой математики

Одно из направлений развития дискретной математики связано с моделированием умения человека анализировать данные. Действительно, опытный исследователь прекрасно выделяет аномалии в двух- и трёхмерных физических полях, умеет перейти от их локального уровня к глобальному для целостной интерпретации, находит сигналы нужной формы на записях небольшой длины и делает многое другое. Приведём три примера.

1. Гладкая в математическом смысле функция f на отрезке $[a, b]$ после даже достаточно тщательной дискретизации $[a, b]$ либо под воздействием небольшого стохастического возмущения потеряет это свойство, но по-прежнему останется гладкой для человека.
2. Математическую монотонность f на $[a, b]$ может нарушить любое сингулярное возмущение, в то время как человеческое восприятие тренда более устойчиво к нему. Лишь достаточно «большое» возмущение заставит человека изменить своё решение о монотонности f на $[a, b]$.
3. В многомерном конечном массиве X любой, в частности, геолого-геофизической природы особую роль реперных точек играют наиболее «плотные» из них, сильнее всего концентрирующие X вокруг себя. Они важны для анализа X , например, при кластеризации или трассировании в нём. Нетривиальное формальное выражение плотности в X не может быть построено в рамках классической математики, потому что для неё X – дискретное пространство, все точки которого одинаково изолированы.

В 1965 году американский математик Лотфи Заде создал теорию нечётких множеств [8]. Основная идея Заде заключалась в том, что человеческий способ рассуждений, опирающийся

на естественный язык, не может быть описан в рамках традиционных математических формализмов. Этим формализмам присуща строгая однозначность интерпретации, а всё, что связано с использованием естественного языка, имеет многозначную интерпретацию. Программа Заде состояла в построении новой математической дисциплины, в основе которой лежала бы не классическая теория множеств, а теория нечётких множеств. Последовательно проводя идею нечёткости, по мнению Заде, можно было построить нечёткие аналоги всех основных математических понятий и создать необходимый формальный аппарат для моделирования человеческих рассуждений и человеческого способа решения задач. Это обстоятельство делает нечёткую математику привлекательной для геологии и геофизики. Нечёткая математика способна адекватно учесть не только мнение экспертов, но и нечёткость исходных данных. Действительно, в геофизике мы часто имеем дело с приближенными величинами, да и модели сложных природных процессов не всегда точны из-за излишней их идеализации. Это свидетельствует о естественности нечёткого подхода к геологии и геофизике, которым изначально присущ нечёткий характер в силу неполноты и расплывчатости наших знаний о Земле.

С 1999 г. школой академика А.Д. Гвишиани активно продолжается программа Заде в части проникновения нечётких множеств в непрерывную математику и ведется разработка мягких, нечётких методов анализа данных с их применением в изучении физических полей Земли.

3. Базовые элементы теории нечетких множеств

3.1. Основные определения

Основной особенностью классического множества является наличие четкой границы между элементами, которые принадлежат и не принадлежат этому множеству. Другими словами, если все рассматриваемые элементы принадлежат универсальному множеству U , тогда классическое подмножество $A \subset U$ может определяться функцией принадлежности, принимающей только два значения: «элементы, принадлежащие A » и «элементы, не принадлежащие A ».

Теория нечетких множеств расширяет это понятие путем введения более сложных функций принадлежности. Для начала дадим некоторые формальные определения. Рассмотрим основное множество U , которое назовем универсальным [9].

Определение 1. A – нечеткое подмножество U (или A – нечеткое множество на U), если существует отображение

$$\mu_A : U \rightarrow L,$$

где L – некоторое упорядоченное множество.

Простым примером L является отрезок $[0, 1]$.

Назовем значения отображения $\mu_A(x)$, $x \in U$ степенью принадлежности элемента x нечеткому множеству A . Назовем μ_A функцией принадлежности нечеткого множества A . Если $L=[0, 1]$, тогда используется следующая терминология:

1. « $x \in U$ полностью принадлежит A » тогда и только тогда, когда $\mu_A(x) = 1$;
2. « $x \in U$ не принадлежит A » тогда и только тогда, когда $\mu_A(x) = 0$;
3. « $x \in U$ частично принадлежит A » тогда и только тогда, когда $0 < \mu_A(x) < 1$.

Введем два особых нечетких множества:

1. пустое множество $\emptyset$ такое, что $\mu_{\emptyset}(x) = 0 \forall x \in U$;
2. универсальное множество U такое, что $\mu_U(x) = 1 \forall x \in U$.

Любое классическое подмножество $A \subset U$ может рассматриваться как нечеткое множество на U с функцией принадлежности

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A \\ 0, & \text{если } x \notin A \end{cases}.$$

Если множество U конечно или $U = \mathbb{R}$ является множеством натуральных чисел, тогда его нечеткие подмножества A обозначаются следующим образом:

$$\begin{aligned} A &= \{\mu_A(x_1)/x_1, \mu_A(x_2)/x_2, \dots, \mu_A(x_n)/x_n, \dots\}, \\ A &= \sum_{x_i \in A} \mu_A(x_i)/x_i, \text{ или} \\ A &= \mu_A(x_1)/x_1 + \mu_A(x_2)/x_2 + \dots + \mu_A(x_n)/x_n + \dots \end{aligned},$$

где $U = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$, а под знаком суммы понимается операция объединения классических множеств.

Определение 2. Если A – нечеткое множество на U , тогда элемент $x_0 \in U$ такой, что $\mu_A(x_0) = 0.5$ называется точкой перехода множества A .

Если универсальное множество U является множеством вещественных чисел $\mathbb{R}$, тогда используется следующая запись:

$$A = \int_U (\mu_A(x)/x) dx.$$

Определение 3. Нечеткие множества с функцией принадлежности $\mu_A : U \rightarrow [0, 1]$ называются нечеткими множествами первого типа. Если $\mu_A : U \rightarrow L$, где L – нечеткое множество первого типа на отрезке $[0, 1]$, тогда A называется нечетким множеством второго типа, или супер нечетким множеством. Следующий пример иллюстрирует это определение.

Положим $U = \{0, 0.1, 0.2, 0.3, \dots, 0.9, 1\}$.

Пусть A – нечеткое множество на U , в котором только для трех элементов x_1, x_2, x_3 $\mu_A(x) \neq 0$. Остальные элементы $U \setminus \{x_1, x_2, x_3\}$ не принадлежат A . Допустим, что элементы x_1, x_2, x_3 имеют разную степень принадлежности множеству A : x_1 – «слабо», x_2 – «умеренно», x_3 – «сильно» принадлежат A .

Тогда нечеткое множество A может быть записано следующим образом:

$$A = \{\text{«слабо»}/x_1, \text{«умеренно»}/x_2, \text{«сильно»}/x_3\}. \quad (1)$$

Теперь определим каждое из множеств «слабо», «умеренно» и «сильно», как нечеткое множество первого типа на отрезке $[0, 1]$.

$$W = \text{«слабо»} = \{0.1/0, 0.1/0.1, 0.2/0.2, 0.8/0.3\}, \quad (2)$$

$$W = \text{«умеренно»} = \{0.5/0.3, 0.7/0.4, 1/0.5, 0.8/0.6\}, \quad (3)$$

$$W = \text{«сильно»} = \{0.6/0.6, 0.8/0.7, 0.9/0.9, 1/1\}. \quad (4)$$

Другими словами, когда мы говорим «сильно», мы имеем ввиду, что в формуле (1) элементу x_3 соответствует нечеткое множество первого типа на отрезке $[0, 1]$, которое определяется формулой (4). Аналогично для (2) и (3). Таким образом, A (1) является нечетким множеством второго типа, или супер нечетким множеством.

На базе этого примера можно определить нечеткое множество A второго типа следующим образом.

Положим, U – конечное, либо целочисленное множество. Тогда

$$A = \{A_1/x_1, A_2/x_2, \dots, A_n/x_n, \dots\},$$

где $A_i = 0$, либо A_i является нечетким множеством первого типа и определяется формулой:

$$A_i = \{\mu_{A_i}(y_1)/y_1, \dots, \mu_{A_i}(y_k)/y_k, \dots\}. \quad (5)$$

В (5) $y_j \in [0, 1]$ и $\mu_{A_i}(y_j) \in [0, 1]$.

Не следует путать понятия «степень принадлежности» и «вероятность». Несмотря на то, что в обоих случаях мы имеем дело с вещественной характеристикой на отрезке $[0, 1]$, сущность этих характеристик принципиально разная. Понятие степени принадлежности предполагает наличие универсума U и показывает, насколько сильно элементы $x \in U$ обладают изначально заданными свойствами, что определяется функцией μ_A . Напротив, понятие вероятности связано с событием, другими словами, изменением универсума. Разница может быть продемонстрирована на следующем примере. Допустим, автобус вмещает 50 пассажиров. Для того, чтобы определить нечеткое множество «молодых» с помощью множества пассажиров, необходимо рассмотреть 50 конкретных людей и определить, в какой степени μ_A каждый пассажир является молодым. В случае «вероятности», задача формулируется иначе: каковы шансы того, что среди произвольной группы из 50 человек найдется молодой человек на конкретном месте. Опять же, понятие «молодой» может быть сформулировано в терминах нечетких множеств. Им будет являться человек, для которого степень «молодости» не равна нулю [9].

Пусть A – нечеткое множество на универсальном множестве U с функцией принадлежности

$$\mu_A : U \rightarrow [0, 1].$$

Определение 4. Определим носитель A классическим подмножеством:

$$\text{supp}(A) = \{x \in U : \mu_A(x) \neq 0\}.$$

Если $\text{supp}(A) = \{x_1, \dots, x_n\}$ – конечное множество, тогда A может быть записано как

$$A = \{\mu_A(x_1)/x_1, \dots, \mu_A(x_n)/x_n\} = \sum_{i=1}^n \mu_A(x_i)/x_i.$$

3.2. Операции над нечеткими множествами

Для создания алгоритмов с использованием классификаций нечетких множеств необходимо ввести основные операции над нечеткими множествами аналогичные тем, которые используются в теории классических множеств. Ниже приводятся формальные определения таких операций.

Определение 1. Пусть A и B – нечеткие множества, μ_A и μ_B – их функции принадлежности, X – универсальное множество.

Тогда,

$A = B$, если $\forall x \in X \Rightarrow \mu_A(x) = \mu_B(x)$ (равенство),

$A \subseteq B$, если $\forall x \in X \Rightarrow \mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ (включение).

Определение 2. Дополнение $\bar{A}$ нечеткого множества A определяется функцией принадлежности

$$\mu_{\bar{A}}(x) = n(\mu_A(x)),$$

где

$$n : [0, 1] \rightarrow [0, 1] \text{ – операция отрицания} \quad (6)$$

Другими словами, n – невозрастающая инволютивная функция, такая что $n(0) = 1$, а $n(1) = 0$. Функция $n(u)$ может иметь разный вид. Классическая функция отрицания выглядит так:

$$n(u) = 1 - u.$$

Тем самым, (6) может быть представлено следующим образом: $\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$

Аналогичные принципы могут быть построены с использованием других функций отрицания. Некоторые известные функции отрицания приведены ниже:

квадратичное отрицание: $n_r(u) = \sqrt{1 - u^2}$,

отрицание Сучено: $n_\lambda(u) = \frac{1-u}{1+\lambda u}$.

Определение 3. Определим т-норму как функцию

$$T: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1],$$

удовлетворяющую следующим условиям:

1. $T(0, 0) = 0$;
2. $T(u_1, v_1) \leq T(u_2, v_2)$, если $u_1 \leq u_2, v_1 \leq v_2$;
3. $T(u, v) = T(v, u)$;
4. $T(u, 1) = T(1, u) = u$;
5. $T(u, T(v, w)) = T(T(u, v), w)$.

Т-норма T называется «архимедовой», если T непрерывна как функция от двух аргументов и $T(u, u) < u \ \forall u \in [0, 1]$. Т-норма T называется «строгой т-нормой», если T строго возрастающая функция от обоих аргументов. Ниже приведены некоторые примеры т-норм:

минимум (т-норма Задэ): $T(u, v) = \min(u, v)$;

вероятностная т-норма: $T_p(u, v) = u \cdot v$;

т-норма Лукашевича: $T_m(u, v) = \max(0, u + v - 1)$;

т-норма Домби: $T_w(u, v) = \begin{cases} \min(u, v), & \text{если } u = 1 \text{ или } v = 1 \\ 0, & \text{в остальных случаях} \end{cases}$.

Определение 4. Определим т-конорму как функцию

$$\perp : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1],$$

удовлетворяющую следующим условиям:

1. $\perp(1, 1) = 1$;
2. $\perp(u_1, v_1) \geq \perp(u_2, v_2)$, если $u_1 \geq u_2, v_1 \geq v_2$;
3. $\perp(u, v) = \perp(v, u)$;
4. $\perp(0, v) = \perp(v, 0) = v$;
5. $\perp(u, \perp(v, w)) = \perp(\perp(u, v), w)$.

Т-конорма $\perp$ называется «архимедовой», если $\perp$ непрерывна как функция от двух аргументов и $\perp(u, u) > u \ \forall u \in [0, 1]$. Т-конорма $\perp$ называется «строгой т-конормой», если $\perp$ строго возрастающая функция от обоих аргументов.

Класс т-конорм дуален классу т-норм. Это означает, что любая т-конорма $\perp$ может быть получена из т-нормы T , используя следующее преобразование:

$$\perp(u, v) = 1 - T(1 - u, 1 - v).$$

Примеры т-конорм включают в себя:

$$\perp(u, v) = \max(u, v); \perp_p(u, v) = u + v - u \cdot v; \perp_m(u, v) = \min(1, u + v);$$

$$\perp_w(u, v) = \begin{cases} \max(u, v), & \text{если } u = 0 \text{ или } v = 0 \\ 1, & \text{в остальных случаях} \end{cases}.$$

Дуальными являются следующие пары т-норм и т-конорм:

$$T(u, v) = \min(u, v) \text{ и } \perp(u, v) = \max(u, v); T_p(u, v) = u \cdot v \text{ и } \perp_p(u, v) = u + v - u \cdot v;$$

$$T_m(u, v) = \max(0, u + v - 1) \text{ и } \perp_m(u, v) = \min(1, u + v); T_w(u, v) \text{ и } \perp_w(u, v).$$

Понятия т-норм и т-конорм используются для определения операций пересечения и объединения нечетких множеств.

Определение 5. Пусть A и B – нечеткие множества, μ_A и μ_B – их функции принадлежности, T – т-норма и $\perp$ – т-конорма, дуальная по отношению к T . Тогда пересечение и объединение нечетких множеств A и B определяются следующими функциями принадлежности:

$$\mu_{A \cap B} = T(\mu_A, \mu_B),$$

$$\mu_{A \cup B} = \perp(\mu_A, \mu_B).$$

Действительно, $\forall x \in X, \mu_{A \cap B}(x) = T(\mu_A(x), \mu_B(x))$ и $0 \leq \mu_{A \cap B}(x) \leq 1$ по определению т-нормы (см. определение 3). Аналогично, $\forall x \in X, \mu_{A \cup B}(x) = \perp(\mu_A(x), \mu_B(x))$ [9].

3.3. Нечеткие бинарные отношения

Архимедовы т-нормы и, соответственно, операции пересечения и объединения нечетких множеств, могут быть представлены аддитивными генераторами архимедовых функций. Такие генераторы являются непрерывными, монотонно убывающими функциями $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$ ($\mathbb{R}^+$ – множество неотрицательных вещественных чисел), такими как:

$$T(u, v) = f^{-1}(f(u) + f(v)),$$

где

$$f^{(-1)}(y) = \begin{cases} f^{-1}(y), & \text{если } y \in [0, f(0)] \\ 0, & \text{если } y > f(0) \end{cases}.$$

Аддитивные генераторы и дуальность т-норм и т-конорм являются основой в изучении обобщенных операций пересечения и объединения нечетких множеств.

Следующий оператор усреднения также играет важную роль в приводимых конструкциях. Понятие «обобщенное среднее значение» было введено А.Н. Колмогоровым [10]. Среднее значений $C_1, C_2, \dots, C_n$ определяется по формуле:

$$M^F(C_1, C_2, \dots, C_N) = F^{-1} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N F(C_i) \right), \quad (7)$$

где $F(u)$ – функция, а F^{-1} – ее обратное преобразование.

Ниже приведен часто используемый особый вариант обобщенного среднего:

$$M_r^F(C_1, C_2, \dots, C_N) = F^{-1} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N C_i^r \right)^{1/r}.$$

Несложно показать, что если $C_i > 0, i = 1, \dots, N$, тогда

$$M_{-\infty}(C_1, C_2, \dots, C_N) = \min_{1 \leq i \leq N} (C_i)$$

$$M_{+\infty}(C_1, C_2, \dots, C_N) = \max_{1 \leq i \leq N} (C_i),$$

$$M_0(C_1, C_2, \dots, C_N) = \left(\prod_{i=1}^N C_i \right)^{1/N}, \quad (8)$$

$$M_1(C_1, C_2, \dots, C_N) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N C_i. \quad (9)$$

Формулы (8) и (9) очевидно определяют геометрическое и арифметическое среднее соответственно. Этот факт также является основанием для использования термина «обобщенное среднее» в отношении функции (7).

Пусть имеется отображение $\varphi: X \rightarrow Y$ и нечеткое множество $A \subset X$. Тогда образ A , отображенный при помощи φ , будет представлять собой нечеткое множество $B \subset Y$ с функцией принадлежности

$$\mu_B(y) = \sup_{x \in \varphi^{-1}(y)} \mu_A(x), \quad y \in Y, \quad (10)$$

где $\varphi^{-1}(y) = \{x \in X \mid \varphi(x) = y\}$.

Определение 1. Бинарное нечеткое отношение R между множествами X и Y является нечетким множеством в прямом произведении $X \times Y$ с функцией принадлежности

$$\mu_R : X \times Y \rightarrow [0, 1],$$

определенной по формуле (10).

Пусть φ – бинарное нечеткое отношение между X и Y с функцией принадлежности $\mu_\varphi(x, y)$ и A – нечеткое множество в X с функцией принадлежности $\mu_A(x)$. Тогда образ B нечеткого множества A , порожденный нечетким отношением φ , будет являться нечетким множеством в Y с функцией принадлежности [9]:

$$\mu_B(y) = \sup_{x \in X} \min(\mu_A(x), \mu_\varphi(x, y)), \quad y \in Y.$$

4. Некоторые общие элементы методов геоинформатики

Ниже приведены некоторые математические конструкции, на которые опираются методы геоинформатики, разработанные школой академика А. Д. Гвишиани. Все они базируются на принципах нечеткой математики и предназначены для анализа дискретных данных. Указанные методы успешно применялись к дискретным геофизическим наблюдениям, в результате чего были получены новые результаты в таких областях как изучение аномалий на сейсмических, геоэлектрических, геомагнитных и гравитационных записях, распознавание мест возможного возникновения сильных землетрясений, поиск магнитных аномалий, мониторинг вулканов, геодинамические приложения, геоэкологические исследования мест возможного захоронения радиоактивных отходов, анализ геомагнитной активности, изучение эволюции главного магнитного поля Земли, распознавание предвестников цунами и др.

4.1. Нечеткие сравнения

Во многих случаях обычная мера превосходства одного числа над другим в виде их разности оказывается слишком грубой. В частности, наши алгоритмы требуют более тонких конструкций сравнения чисел.

Определение 1. Нечеткое сравнение $n(a, b)$ действительных чисел a и b измеряет в знакопеременной шкале отрезка $[-1, 1]$ степень превосходства “ b ” над “ a ”:

$$n(a, b) = \text{mes}(a < b) \in [-1, 1].$$

Таким образом, роль нечеткого сравнения может играть любая функция $f(a, b)$, $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow [-1, 1]$, возрастающая по b при фиксированном a и убывающая по a при фиксированном b (возрастание и убывание понимаются при этом в обычном смысле) с дополнительными

граничными условиями:

$$\forall a \lim_{b \rightarrow \pm\infty} f(a, b) = \pm 1, \forall b \lim_{a \rightarrow \pm\infty} f(a, b) = \mp 1, \forall a f(a, a) = 0.$$

Если $n(a, b)$ - нечеткое сравнение, а ψ - монотонно возрастающее преобразование отрезка $[-1, 1]$ в себя, то суперпозиция $(\psi \circ n)(a, b)$ также будет нечетким сравнением, которое называется вариацией n при помощи ψ . Выбор ψ дает возможность усиливать или ослаблять базовое сравнение n .

Введем следующее семейство базовых нечетких сравнений $n_\nu(a, b)$, $\nu > 0$, а также их вариации специального вида $n_{\gamma, \nu}(a, b)$.

Определение 2. Если $a, b \in \mathbb{R}^+$, то

1. для любого $\nu > 0$

$$n_\nu(a, b) = \frac{b - a}{(a^\nu + b^\nu)^{1/\nu}}$$

2. для любого $\gamma \in (-1, 1)$ положим $n_{\gamma, \nu}(a, b) = \psi_\gamma(n_\nu(a, b))$, где

$$\psi_\gamma(t) = \begin{cases} \frac{t-\gamma}{1-\gamma}, & t \in [\gamma, 1] \\ \frac{t-\gamma}{1+\gamma}, & t \in [-1, \gamma] \end{cases}.$$

Такая вариация корректна: $n_{0, \nu}(a, b) = \psi_0(n_\nu(a, b)) = n_\nu(a, b)$. При $\gamma > 0$ получается усиление n_ν , при $\gamma < 0$ - наоборот, его ослабление.

Нам понадобится расширение $n(a, b)$ до понятия нечетких сравнений $n(a, A)$ и $n(A, a)$ произвольного числа $a \geq 0$ с произвольной взвешенной совокупностью чисел

$$A = \{(a_i, w_i)\}_1^N, a_i \in \mathbb{R}^+, 0 < w_i - \text{вес } a_i, i = 1, \dots, N\}.$$

Такое расширение неоднозначно. Каждый вариант такого расширения по-своему дает формализацию понятия «большой (маленький) относительно A (по модулю A)». Мы понимаем $n(a, A) = \text{mes}(a < A)$ как функцию принадлежности на $\mathbb{R}^+$ к нечеткому понятию «быть маленьким по модулю A » и $n(A, a) = \text{mes}(A < a)$, как функцию принадлежности на $\mathbb{R}^+$ к нечеткому понятию «быть большим по модулю A ». В дальнейшем развитии алгоритмических конструкций алгоритмов использовались три расширения:

Бинарное расширение.

$$n_b(a, A) = \frac{\sum_{i=1}^N n(a, a_i) w_i}{\sum_{i=1}^N w_i} \in [-1, 1]$$

$$n_b(A, a) = \frac{\sum_{i=1}^N n(a_i, a) w_i}{\sum_{i=1}^N w_i} \in [-1, 1]$$

Гравитационное расширение.

Пусть grA центр тяжести совокупности A , т.е. $grA = \frac{\sum_{i=1}^N a_i w_i}{\sum_{i=1}^N w_i}$, тогда

$$n_g(a, A) = n(a, grA) \in [-1, 1]$$

$$n_g(A, a) = n(grA, a) \in [-1, 1]$$

σ -расширение.

Левый момент $\sigma^l(a, A) = (\sum (a - a_i) w_i : a_i < a)$ есть довод за максимальность « a » по модулю A . Соответственно, правый момент $\sigma^r(a, A) = (\sum (a_i - a) w_i : a_i > a)$ есть довод за минимальность « a » по модулю A . Тогда

$$n_\sigma(a, A) = n(\sigma^l(a, A), \sigma^r(a, A)) \in [-1, 1]$$

$$n_\sigma(a, A) = n(\sigma^r(a, A), \sigma^l(a, A)) \in [-1, 1].$$

Представляется естественным считать, что если выполнение некоторого свойства выражается в шкале $[-1, 1]$, то попадание в отрезок $[1/2, 1]$ ($[0, 1/2]$) означает сильно- (слабо-) экстремальное проявление этого свойства.

Пример. Параметр локального обзора Δ в алгоритмах DRAS и FLARS [11, 12] означает близость на отрезке регистрации T записи y . С помощью нечетких сравнений его выбор также может быть автоматизирован: обозначим через $dT = \{ |k - \bar{k}| : k \neq \bar{k} \in T \}$ совокупность всех нетривиальных расстояний на T . Тогда Δ - сильноминимальный элемент по $moddT$ и является решением уравнения $n(\Delta, dT) = 1/2$.

4.2. Мера близости и плотность подмножества

Пусть X – конечное метрическое пространство с расстоянием $d(x, y)$. Введем функцию меры близости $\delta_x(y) \in [0, 1]$, моделирующую близость в X точки y к точке x . Она может считаться нечеткой мерой принадлежности y к x . Таким образом, в общем случае $\delta_x(y)$ не только убывает с ростом расстояния $d(x, y)$, но и зависит от топологии X вокруг x . Приведем примеры:

$$\delta_x(y) = \frac{1}{1 + d(x, y)}; \delta_x^r(y) = \begin{cases} 1 - \frac{d(x, y)}{r}, & d(x, y) \leq r \\ 0, & d(x, y) > r \end{cases}; \delta_x^{er}(y) = e^{-\frac{d(x, y)}{r}};$$

$$\delta_x(y) = \frac{|\bar{y} \in X : d(x, \bar{y}) > d(x, y)| + 1}{|X|}.$$

Для точки $x \in X$ и произвольного подмножества $A \subset X$ положим

$$A_x \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} A, & \text{если } x \notin A \\ A - x, & \text{если } x \in A \end{cases}; |A|_x \stackrel{\text{def}}{=} |A_x| = \begin{cases} |A|, & \text{если } x \notin A \\ |A| - 1, & \text{если } x \in A \end{cases}; O_A(x) = \sum_{y \in A_x} \delta_y(x).$$

$O_A(x)$ является монотонной функцией: если $A \subset B$, то $O_A(x) \leq O_B(x)$.

Определение 1. Назовем плотностью $P_A(x)$ подмножества $A \subset X$ в точке $x \in X$ усреднение $O_A(x)$:

$$P_A(x) = \frac{O_A(x)}{|A|_x}.$$

Результаты исследований подтверждают способность плотности численно отражать интегральную сконцентрированность пространства A вокруг точки x : чем выше плотность $P_A(x)$, тем больше оснований считать x центром (возможно искусственным, если $x \notin A$) для A .

Для каждой меры $\delta_x(y)$ существует своя константа $\alpha_\delta \in [0, 1]$, устойчиво моделирующая близость в пространстве X . Таким образом, в качестве правильного шара $D(x)$ нужно взять все близкие к x точки в X на основании той или иной меры $\delta_x(y)$:

$$D(x) = D(x, \alpha_\delta, \delta) = \{y \in X : \delta_x(y) \geq \alpha_\delta\} = D_x(x, r(x, \delta)),$$

где

$r(x, \delta) = \max\{d(x, y) : \delta_x(y) \geq \alpha_\delta\}$ - радиус близости.

Положим

$$r(\delta) = \min_X r(x, \delta), D(x) = \{y \in X : d(x, y) \leq r(\delta)\}.$$

4.3. Монолитность в метрическом пространстве

Перейдем к определению монолитности $mon_{D(x)}(x)$ точки x в шаре $D(x)$.

Определение 1. Пусть h -квант и $R_h^+ = \{kh, k = 0, 1, \dots\}$. Назовем квантованием соответствие $t \rightarrow h(t) : R^+ \rightarrow R_h^+$

$$h(t) = \begin{cases} nh, & \text{если } t = nh \\ (n+1)h, & \text{если } t \in (nh, (n+1)h) \end{cases}.$$

Применяя $h(t)$ к группе нормирования $\Gamma_{D(x)}(x) = \{0 < r_1 = r_1(x, D(x)) < \dots < r(\delta)\}$, получим простое квантованное нормирование $\Gamma_{h,D(x)}(x) = \{nh, \text{ если } \exists z \in D(x) : nh = h(d(x, z))\}$. На отрезке $[0, h(r(\delta))] \in R_h^+$ точки из $\Gamma_{h,D(x)}(x)$ отметим «*», остальные – «0». За монолитность A в x примем монолитность нуля в $\Gamma_{h,D(x)}(x)$ в контексте этого отрезка. Особое положение нуля требует монотонного отношения к квантам nh в $[0, h(r(\delta))]$: чем они больше, тем меньше они имеют значения. Это достигается весом ψ :

$$\psi(nh) = 1 - \frac{nh}{h(r(\delta)) + h}$$

и

$$\text{mon}_{D(x)}(x) = \text{mon}_{\Gamma_{h,D(x)}}(0) = \frac{\sum \psi(*)}{\sum \psi(*) + \psi(0)} \text{ или } \text{mon}_{D(x)}(x) = \frac{\sum \psi(nh) : nh \in \Gamma_h(x)}{\sum \psi(nh) : nh \in [0, h(r(\delta))]}.$$

4.4. Выпрямления

Пусть дана дискретная положительная полуось $R_h^+ = \{kh, h > 0, k = 1, 2, \dots\}$ и конечный временной ряд $y = \{y_k = y(kh)\}$, определенный на отрезке (периоде регистрации) $T \in R_h^+$. Введем параметр локального обзора $\Delta > 0$, кратный h : $\Delta \in R_h^+$. Назовем фрагменты локального обзора записи y с центром в $kh \in T$ ее отрезок:

$$\Delta^k y = \left\{ y_{k-\Delta/h}, \dots, y_k, \dots, y_{k+\Delta/h} \right\} \in R^{2\Delta/h+1}.$$

Определение 1. Если $J = \{\Delta^k y\}$ совокупность фрагментов локального обзора записи y и $\Phi : J \rightarrow R^+$, где R^+ - множество положительных действительных чисел, то суперпозицию $k \rightarrow \Delta^k y \rightarrow \Phi(\Delta^k y) \stackrel{\text{def}}{=} \Phi_y(k)$ назовем выпрямлением y на основе Φ . Собственно отображение Φ будем называть выпрямляющим функционалом.

Выпрямление можно считать определенным удачно, если то, что эксперт объявляет аномалиями на записи, переходит к возвышенности на выпрямлении. Соответственно для построения выпрямления крайне полезным оказывается наличие материала обучения, т.е. обработки достаточно длительной части записи экспертом. Ниже приведем примеры выпрямлений [11].

1. Длина фрагмента обзора:

$$L(\Delta^k y) = \sum_{j=k-\Delta/h}^{k+\Delta/h-1} |y_{j+1} - y_j|;$$

2. Энергия фрагмента обзора:

$$E(\Delta^k y) = \sum_{j=k-\Delta/h}^{k+\Delta/h} (y_j - \bar{y}_k)^2, \text{ где } \bar{y}_k = \frac{h}{2\Delta+h} \sum_{j=k-\Delta/h}^{k+\Delta/h} y_j;$$

3. Отличие фрагмента обзора от его регрессии n -го порядка:

$$R_n(\Delta^k y) = \sum_{j=k-\frac{\Delta}{h}}^{k+\frac{\Delta}{h}} [y_j - \text{Regr}_{\Delta^k y}^n(jk)]^2,$$

где $Regr_{\Delta^k y}^n$ - оптимальное среднеквадратичное приближение n -го порядка фрагмента $\Delta^k y$. Заметим, что при $n=0$ получается предыдущий функционал "энергия".

4. Осцилляция фрагмента обзора:

$$O(\Delta^k y) = \max_{j=k-\frac{\Delta}{h}}^{k+\frac{\Delta}{h}} y_j - \min_{j=k-\frac{\Delta}{h}}^{k+\frac{\Delta}{h}} y_j.$$

Единый локальный уровень семейства алгоритмов для анализа временных рядов состоит в построении выпрямления Φ_y и переходе к нему от записи y . Это преобразование моделирует первый этап анализа, проводимого экспертом «на глаз». Второй этап состоит в поиске возвышенностей на выпрямлении, включая незначительные локальные экстремумы. Для этого используются нечеткие сравнения.

4.5. Нечеткие грани

Пусть $A = \{a_i\}_1^n$ конечное числовое множество и $B \subseteq A$ - его произвольное подмножество. Тогда $|B|$ - порядок этого подмножества, $\sum B = \sum b: b \in B$ - сумма его элементов, $S(B) = \frac{\sum B}{|B|}$ - их среднее значение. Нечеткие итерационные верхние и нижние скалярные грани $S^+(A)$ и $S^-(A)$ определяются для A индуктивно с использованием вспомогательных подмножеств A_k^+ , A_k^- [13].

В начале индукции для $k = 0$ полагаем

$$S_0^+(A) = S_0^-(A) = S(A); A_0^+ = \{a \in A : a \geq S_0^+(A)\}; A_0^- = \{a \in A : a \leq S_0^-(A)\}.$$

Считая грани $S_k^+(A)$, $S_k^-(A)$ и множества A_k^+ , A_k^- уже определенными, положим

$$S_{k+1}^+(A) = \frac{\sum A_k^+ - |A_k^+| \cdot S_k^+(A)}{|A|} + S_k^+(A); S_{k+1}^-(A) = \frac{\sum A_k^- - |A_k^-| \cdot S_k^-(A)}{|A|} + S_k^-(A);$$

$$A_{k+1}^+ = \{a \in A : a \geq S_{k+1}^+(A)\}; A_{k+1}^- = \{a \in A : a \leq S_{k+1}^-(A)\}.$$

В качестве нечетких верхней и нижней граней $\overline{\sup} A$ и $\overline{\inf} A$ для A выбираются S_k^+ и S_k^- для подходящего порядка k .

Нечеткие грани с разной степенью жесткости разбивают числовую прямую $\mathbb{R}$ относительно A на четыре части: маленькие, слабомаленькие, слабобольшие, большие. Чем k больше, тем разбиение жестче, менее учитывает специфику A и поэтому неинтереснее.

$$P \in \mathbb{R} \quad \begin{array}{l} S_k \text{ маленький (значительный)} \\ W_k \text{ маленький (незначительный)} \\ W_k \text{ большой (незначительный)} \\ S_k \text{ большой (значительный)} \end{array} \quad \text{по mod } A \Leftrightarrow p \in \begin{array}{l} (-\infty, S_k^-(A)] \\ (S_k^-(A), S_0(A)] \\ (S_0, S_k^+(A)] \\ (S_k^+(A), +\infty] \end{array}.$$

Предельно жесткое разбиение получается при $k = \infty$, если положить $S_k^- = \min A$, $S_k^+ = \max A$ и совершенно не учитывать A :

$$P \in \mathbb{R} \quad \begin{array}{l} S_\infty \text{ маленький} \\ W_\infty \text{ маленький} \\ W_\infty \text{ большой} \\ S_\infty \text{ большой} \end{array} \quad \text{по mod } A \Leftrightarrow p \in \begin{array}{l} (-\infty, \min A] \\ (\min A, S_0] \\ (S_0, \max A] \\ (\max A, +\infty] \end{array}.$$

Разницу $W_k(A) = S_k^+(A) - S_k^-(A)$ естественно назвать стохастической шириной A k -го порядка. Ширина $W_k(A)$ гибко отображает обычное статистическое отклонение $\sigma(A) = \sqrt{d(A)}$.

4.6. Дискретные регрессионные производные

Утверждение 1. Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема в точке $t \in [a, b]$. Тогда линейная регрессия $pr_{\Delta} f$ для f в окрестности $U(t, \Delta) = (t - \Delta, t + \Delta)$, где $\Delta \rightarrow 0$, стремится к ее касательной в точке t (доказательство приведено в [14]).

Пусть T – период наблюдения, представляющий собой конечное, в общем случае, нерегулярное множество узлов t : $T = \{t\}$, $|T| < \infty$. Функция y – временной ряд, заданный на T :

$$y : T \rightarrow \mathbb{R}, y = \{y_t = y(t), t \in T\}.$$

Предельный переход $\Delta \rightarrow 0$ в дискретном случае заменяется мерой близости $\delta_t(\bar{t})$ – нечетким бинарным отношением на T , показывающим в какой степени узел $\bar{t}$ близок к узлу t в T (см. раздел 4.2).

Касательной $R_{y,t}(\bar{t}) = a_t \bar{t} + b_t$ к функции y в узле $t \in T$ считается линейная регрессия, построенная по взвешенному графику $\Gamma_y(\delta_t) = \{(\bar{t}, y_{\bar{t}}), \delta_t(\bar{t}), \bar{t} \in T\}$. Опуская стандартные вещи, связанные с линейными регрессиями, приведём формулы для a_t и b_t :

$$a_t = \frac{\begin{vmatrix} \sum_{\bar{t} \in T} \bar{t} \delta_t(\bar{t}) y_{\bar{t}} & \sum_{\bar{t} \in T} \bar{t} \delta_t(\bar{t}) \\ \sum_{\bar{t} \in T} \delta_t(\bar{t}) y_{\bar{t}} & \sum_{\bar{t} \in T} \delta_t(\bar{t}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum_{\bar{t} \in T} \bar{t}^2 \delta_t(\bar{t}) & \sum_{\bar{t} \in T} \bar{t} \delta_t(\bar{t}) \\ \sum_{\bar{t} \in T} \bar{t} \delta_t(\bar{t}) & \sum_{\bar{t} \in T} \delta_t(\bar{t}) \end{vmatrix}}, b_t = \frac{\begin{vmatrix} \sum_{\bar{t} \in T} \bar{t}^2 \delta_t(\bar{t}) & \sum_{\bar{t} \in T} \bar{t} \delta_t(\bar{t}) y_{\bar{t}} \\ \sum_{\bar{t} \in T} \bar{t} \delta_t(\bar{t}) & \sum_{\bar{t} \in T} \delta_t(\bar{t}) y_{\bar{t}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum_{\bar{t} \in T} \bar{t}^2 \delta_t(\bar{t}) & \sum_{\bar{t} \in T} \bar{t} \delta_t(\bar{t}) \\ \sum_{\bar{t} \in T} \bar{t} \delta_t(\bar{t}) & \sum_{\bar{t} \in T} \delta_t(\bar{t}) \end{vmatrix}}.$$

Определение 1. Угловой коэффициент a_t регрессионной касательной $R_{y,t}$ называется регрессионной производной функции y в узле t и обозначается через $(R'y)(t)$.

Определение 2. Значение $R_{y,t}(t)$ касательной $R_{y,t}$ в узле t называется регрессионным значением y в узле t и обозначается через $(Ry)(t)$.

Итак,

$$(R'y)(t) = a_t, (Ry)(t) = a_t t + b_t.$$

5. Заключение

За последние 20 лет с использованием описанных конструкций школой академика А. Д. Гвишиани было разработано целое семейство алгоритмов для анализа конечных метрических пространств и временных рядов.

Алгоритмы, нацеленные на поиск кластеров, сгущений, трасс в многомерных дискретных пространствах изложены в [15-18]. Все они нашли успешное применение в различных геолого-геофизических задачах. К ним, в частности, относятся:

1. распознавание мест возможного возникновения сильных землетрясений [19-26];
2. изучение источников аномального магнитного поля [27-29];
3. интерпретация гравитационных аномалий [30].

Алгоритмы анализа конечных временных рядов нацелены на поиск связанных аномалий, распознавание фоновых участков, поиск нечетких монотонностей, экстремумов и трендов, взвешенное сглаживание нерегулярных рядов и др. [31-34]. Такие алгоритмы хорошо себя зарекомендовали в решении следующих важных задачах геофизики:

1. анализ геомагнитной активности [35-38];
2. изучение эволюции главного магнитного поля Земли [39];
3. мониторинг вулканов [40-42];
4. исследование геодинамической стабильности регионов [43-44].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gvishiani A., Lukianova R., Soloviev An., Khokhlov A. Survey of Geomagnetic Observations Made in the Northern Sector of Russia and New Methods for Analysing Them // *Surveys in Geophysics*. 2014. Vol.35. № 5. P.1123-1154.doi: 10.1007/s10712-014-9297-8
2. Гвишиани А.Д., Лукьянова Р. Ю. Геоинформатика и наблюдения магнитного поля Земли: российский сегмент // *Физика Земли*. 2015. № 2, С. 3–20. DOI: 10.7868/S0002333715020040
3. Гвишиани А.Д., Старостенко В.И., Сумарук Ю. П., Соловьев Ан. А., Легостаева О. В. Уменьшение солнечной и геомагнитной активности с 19 го по 24 й цикл // *Геомагнетизм и аэронавигация*, 2015, Т. 55, № 3. С. 314–322 DOI: 10.7868/S0016794015030098
4. Гвишиани А.Д., Лукьянова Р. Ю. Исследование геомагнитного поля и проблемы точности бурения наклонно направленных скважин в Арктическом регионе. // *Горный журнал*. 2015. № 10. С.94-99. doi:http://dx.doi.org/10.17580/gzh.2015.10.17
5. Gvishiani A, Soloviev An., Krasnoperov R., Lukianova R. Automated Hardware and Software System for Monitoring the Earth's Magnetic Environment. // *Data Science Journal*. 2016.15, p.18. DOI: 10.5334/dsj-2016-018
6. Gvishiani A., Sidorov, R. Lukianova R, Soloviev An. Geomagnetic activity during St. Patrick's Day storm inferred from global and local indicators // *Russ. J. Earth Sci.*, 16, ES6007, doi:10.2205/2016ES000593
7. Лаверов Н.П., Леонов Ю.Г., Макоско А.А., Бондур В.Г., Гвишиани А.Д., Глико А.О., Гольдин С.В., Гордеев Е.И., Диденко А.Н., Куликов Е.А., Левин Б.В., Лобковский Л.И., Маловичко А.А., Соболев Г.А. Предложения по развитию и модернизации системы сейсмологических наблюдений и прогноза землетрясений // *Проблемы национальной безопасности. Экспертные заключения. Аналитические материалы. Предложения* / Под общ. ред. акад. Н.П.Лаверова. М.: Наука. 2008. С.206-232.
8. Zadeh L.A. Fuzzy sets // *Information and Control*. 1965. № 8, 338-353.
9. Gvishiani A., Dubois J. Artificial intelligence and dynamic systems for geophysical applications. Springer-Verlag, Paris. 2002. 350 p.
10. А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа, 5-ое изд. М. Наука. 1981. 544 с.
11. Гвишиани А.Д., Агаян С.М., Богоутдинов Ш.Р., Леденев А.В., Злотники Ж., Боннин Ж. Математические методы геоинформатики II. Алгоритмы нечеткой логики в задачах выделения аномалий на временных рядах // *Кибернетика и системный анализ* 2003.т.39. №4. С.103-111.
12. Gvishiani A.D., Agayan S.M., Bogoutdinov Sh.R., Tikhotsky S.A., Hinderer J., Bonnin J., Diamant M. Algorithm FLARS and recognition of time series anomalies // *System Research & Information Technologies*. 2004. №. 3. P.7-16.
13. Soloviev A., Sh. Bogoutdinov, S. Agayan, R. Redmon, T. M. Loto'aniu, H. J. Singer (2018), Automated recognition of jumps in GOES satellite magnetic data, *Russ. J. Earth Sci.*, 18, ES4003, doi:10.2205/2018ES000626

14. С.М. Агаян, А.А. Соловьев, Ш.Р. Богоутдинов, Ю.И. Николова. Регрессионные производные и их применение в изучении геомагнитных джерков // Геомагнетизм и аэрономия, том 59, №1. 2019
15. Гвишиани А.Д., Агаян С.М., Богоутдинов Ш.Р. Математические методы геоинформатики. I. О новом подходе к кластеризации // Кибернетика и системный анализ. 2002. № 2. С. 104-122.
16. Gvishiani A.D., Mikhailov V.O., Agayan S.M., Bogoutdinov Sh., Tikhotsky S.A., Diamant M., Galdeano A. Artificial intelligence technique in potential field and other geophysical studies // Conseil de l'Europe. Cahiers du Centre Europeen de Geodynamique et de Seismologie. Grand-Duchy of Luxemburg. 2003. Vol. 20. P.63-69
17. Гвишиани А.Д., Агаян С.М., Богоутдинов Ш.Р., Соловьев А.А. Дискретный математический анализ и геолого-геофизические приложения // Вестник Краунц. Науки о Земле. 2010. № 2. Вып. 16. С.109-125
18. Агаян С.М., Соловьев А.А. Выделение плотных областей в метрических пространствах на основе кристаллизации // System Research & Information Technologies — 2004. — № 2. — С. 7-23
19. Гвишиани А.Д., Дзедобоев Б.А., Агаян С.М. Интеллектуальная система распознавания FCAZm в определении мест возможного возникновения сильных землетрясений горного пояса Анд и Кавказа // Физика Земли. 2016, № 4. С. 3–23. DOI: 10.7868/S0002333716040013
20. Гвишиани А.Д., Агаян С.М., Добровольский М.Н., Дзедобоев Б.А. Объективная классификация эпицентров и распознавание мест возможного возникновения сильных землетрясений в Калифорнии // Геоинформатика. 2013. № 2. С.44-57.
21. Гвишиани А.Д., Дзедобоев Б.А., Агаян С.М. О новом подходе к распознаванию мест возможного возникновения сильных землетрясений на Кавказе // Физика Земли. 2013. № 6. С. 3-19. DOI: 10.7868/S0002333713060045
22. Gvishiani A., Dobrovolsky M., Agayan S., Dzeboev B. Fuzzy-based clustering of epicenters and strong earthquake-prone areas // Environmental Engineering and Management Journal. 2013. Vol.12. No. 1. P. 1-10.
23. Гвишиани А.Д., Дзедобоев Б.А., Сергеева Н.А., Рыбкина А.И. Формализованная кластеризация и зоны возможного возникновения эпицентров значительных землетрясений на Крымском полуострове и Северо-Западе Кавказа // Физика Земли. 2017. № 3. С. 33–42. DOI: 10.7868/S0002333717030036
24. Гвишиани А.Д., Агаян С.М., Дзедобоев Б.А., Белов И.О. Распознавание мест возможного возникновения эпицентров сильных землетрясений с одним классом обучения // Доклады академии наук. 2017. Т. 474. № 1. С. 86–92. DOI: 10.7867/S0869565217130175.
25. Гвишиани А.Д., Дзедобоев Б.А., Белов И.О., Сергеева Н.А., Вавилин Е.В. Последовательное распознавание мест возможного возникновения значительных и сильных землетрясений: Прибайкалье-Забайкалье // Доклады Академии наук. 2017. Т. 477. № 6. С. 704–710. DOI: 10.7868/S0869565217360178.
26. Гвишиани А.Д., Дзедобоев Б.А., Сергеева Н.А., Белов И.О., Рыбкина А.И. Зоны возможного возникновения эпицентров значительных землетрясений в регионе Алтай-Саяны // Физика Земли. 2018. № 3. С. 18–28. DOI: 10.7868/S000233371803002X.

27. Гвишиани А.Д., Диамант М., Михайлов В.О., Гальдеано А., Агаян С.М., Богоутдинов Ш.Р., Граева Е.М. Алгоритмы искусственного интеллекта для кластеризации магнитных аномалий // *Физика Земли*. 2002. №7. С.13-28.
28. Mikhailov V., Galdeano A., Diamant M., Gvishiani A., Agayan S., Bogoutdinov S., Graeva E., and Sailhas P. Application of artificial intelligence for Euler solutions clustering // *Geophysics*. 2003. Vol. 68. № 1. P.168-180.
29. Соловьёв Ан.А., Шур Д.Ю., Гвишиани А.Д., Михайлов В.О., Тихоцкий С.А.. Определение вектора магнитного момента при помощи кластерного анализа результатов локальной линейной псевдоинверсии аномалий ΔT // *Доклады Академии наук*. 2005. Том 404. № 1. С. 109-112.
30. Widiwijayanti C., Mikhailov V., Diamant M., Deplus C., Louat R., Tikhotsky S., Gvishiani A. Structure and evolution of the Molucca Sea area: constraints based on interpretation of a combined sea-surface and satellite gravity dataset // *Earth and Planetary Science Letters*. 2003. Vol. 215. P.135-150.
31. Гвишиани А.Д., Агаян С.М., Богоутдинов Ш.Р. Определение аномалий на временных рядах методами нечеткого распознавания // *Доклады АН*. 2008. Т. 421. № 1. С. 101-105.
32. Гвишиани А.Д., Агаян С.М., Богоутдинов Ш.Р., Злотники Ж., Боннин Ж. Математические методы геоинформатики III. Нечеткие сравнения и распознавание аномалий на временных рядах // *Кибернетика и системный анализ*. 2008. Т.44. №3. С.3-18
33. Gvishiani A.D., Agayan S.M., Bogoutdinov Sh.R., Graeva E.M., Zlotnicki J., and J. Bonnin. Recognition of anomalies from time series by fuzzy logic methods // *Russian Journal of Earth Sciences*. 2008. Vol. 10. № 1.С.1-9. ES1001, doi:10.2205/2007ES000278.
34. Гвишиани А.Д., Агаян С.М., Богоутдинов Ш.Р., Каган А.И. Гравитационное сглаживание временных рядов // *Труды Института математики и механики УрО РАН*. 2011. Т.17. № 2. С.62-70.
35. Богоутдинов Ш.Р., Гвишиани А.Д., Агаян С.М., Соловьев Ан.А., Кин Э. Распознавание возмущений с заданной морфологией на временных рядах. I. Выбросы на магнитограммах всемирной сети ИНТЕРМАГНЕТ // *Физика Земли*. 2010. № 11. С.99-112.
36. Гвишиани А.Д., Соловьев Ан.А., Агаян С.М., Богоутдинов Ш.Р., Сидоров Р.В. Алгоритмическая система распознавания выбросов на магнитограммах // *Динамика физических полей Земли*. М.: Светоч Плюс. 2011. С.297-309.
37. Соловьев Ан.А., Агаян С.М., Гвишиани А.Д., Богоутдинов Ш.Р., Шульа А. Распознавание возмущений с заданной морфологией на временных рядах. II. Выбросы на секундных магнитограммах // *Физика Земли*. 2012. № 5. С. 37-52.
38. Soloviev An., Chulliat A., Bogoutdinov S., Gvishiani A., Agayan S., Peltier A., Heumez B. Automated recognition of spikes in 1 Hz data recorded at the Easter Island magnetic observatory // *Earth Planets Space*. 2012. Vol.64. № 9. P.743-752. Doi:10.5047/eps.2012.03.004.
39. A.Soloviev, A.Chulliat, S.Bogoutdinov (2017), Detection of secular acceleration pulses from observatory data, *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 270 (2017), p. 128-142, doi: 10.1016/j.pepi.2017.07.005

40. Zlotnicki J., Le Mouel J.-L., Gvishiani A., Agayan S., Mikhailov V., Bogoutdinov Sh., Kanwar R., Yvetot P. Automatic fuzzy-logic recognition of anomalous activity on long geophysical records: Application to electric signals associated with the volcanic activity of La Fournaise volcano (Reunion Island) // *Earth and Planetary Science Letters*. 2005. Vol. 234. P.261-278.
41. Богоутдинов Ш.Р., Агаян С.М., Гвишиани А.Д., Граева Е.М., Родкин М.В., Злотники Ж., Ле Муэль Ж. Алгоритмы нечеткой логики в анализе электротеллурических данных в связи с мониторингом вулканической активности // *Физика Земли*. 2007. №7. С.72-85.
42. Гвишиани А.Д., Агаян С.М., Богоутдинов Ш.Р. Дискретный математический анализ и мониторинг вулканов // *Инженерная экология*. 2008. № 5. С.26-31.
43. Гвишиани А.Д., Белов С.В., Агаян С.М., Родкин М.В., Морозов В.Н., Татаринцов В.Н., Богоутдинов Ш.Р. Геоинформационные технологии: методы искусственного интеллекта при оценке тектонической стабильности Нижнеканского массива // *Инженерная экология*. 2008. №2. С.3-14.
44. Гвишиани А.Д., Дзобоев Б.А. Оценка сейсмической опасности при выборе мест захоронения радиоактивных отходов // *Горный журнал*. 2015. № 10. С.39-43. doi:<http://dx.doi.org/10.17580/gzh.2015.10.07>

REFERENCES

1. Gvishiani A., Lukianova R., Soloviev An., Khokhlov A. Survey of Geomagnetic Observations Made in the Northern Sector of Russia and New Methods for Analysing Them // *Surveys in Geophysics*. 2014. Vol.35. № 5. P.1123-1154. doi: 10.1007/s10712-014-9297-8
2. Gvishiani A. D., Lukianova R. Yu. Geoinformatics and observations of the Earth's magnetic field: The Russian segment // *Izvestiya-Physics of the Solid Earth*. 2015. Vol. 51, Issue 2. P. 157-175. doi:10.1134/S1069351315020044
3. Gvishiani A.D., Starostenko V.I., Sumaruk Y.P., Soloviev A.A., Legostaeva O.V. A decrease in solar and geomagnetic activity from cycle 19 to cycle 24 // *Geomagnetism and Aeronomy*. 2015. Vol. 55. No 3. P. 299-306. DOI:10.1134/S0016793215030093
4. Gvishiani A. D., Lukianova R. Yu., Soloviev A.A. Geomagnetic field analysis and directional drilling problem in the Arctic region // *Gornyi Zhurnal (Mining Journal)*, 2015. No 10. P. 94-99. doi:10.17580/gzh.2015.10.17
5. Gvishiani A, Soloviev An., Krasnoperov R., Lukianova R. Automated Hardware and Software System for Monitoring the Earth's Magnetic Environment. // *Data Science Journal*. 2016. 15, p.18. DOI: 10.5334/dsj-2016-018
6. Gvishiani A., Sidorov, R. Lukianova R, Soloviev An. Geomagnetic activity during St. Patrick's Day storm inferred from global and local indicators // *Russ. J. Earth Sci.*, 16, ES6007, doi:10.2205/2016ES000593
7. Laverov N.P., Leonov Yu. G., Makosko A.A., Bondur V.G., Gvishiani A.D., Gliko A.O., Goldin S.V., Gordeev E.I., Didenko A.N., Kulikov E.A., Levin B.V., Lobkovsky L.I., Malovichko A.A., Sobolev G.A. Solutions for Modernization and Development of System for Seismological Monitoring and Earthquake Forecast // *Problems of National Security. Expert Report. Analysis Findings. Suggestions* / Under the general editorship of ac. Laverov N.P. M.: Nauka. 2008. Pp. 206-232

8. Zadeh L.A. Fuzzy sets // Information and Control. 1965. № 8, 338-353.
9. Gvishiani A., Dubois J. Artificial intelligence and dynamic systems for geophysical applications. Springer-Verlag, Paris. 2002. 350 p.
10. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis. 5th edition. M.: Nauka. 1981. Pp. 544
11. Gvishiani A.D. et al. Mathematical Methods of Geoinformatics. II. Fuzzy-Logic Algorithms in the Problems of Abnormality Separation in Time Series // Cybernetics and Systems Analysis. 2003. V. 39. № 4. Pp. 555–563. DOI:10.1023/B:CASA.0000003505.56410.4f
12. Gvishiani A.D., Agayan S.M., Bogoutdinov Sh.R., Tikhotsky S.A., Hinderer J., Bonnin J., Diamant M. Algorithm FLARS and recognition of time series anomalies // System Research & Information Technologies. 2004. №. 3. P.7-16.
13. Soloviev A., Sh. Bogoutdinov, S. Agayan, R. Redmon, T. M. Loto'aniu, H. J. Singer (2018), Automated recognition of jumps in GOES satellite magnetic data, Russ. J. Earth Sci., 18, ES4003, doi:10.2205/2018ES000626
14. S.M. Agayan, A.A. Soloviev, S.R. Bogoutdinov, Y.I. Nikolova. Regression derivatives and their application to geomagnetic jerk studies // Geomagnetism and Aeronomy, 2019
15. Gvishiani A.D., Agayan S.M., Bogoutdinov S.R. Mathematical Methods of Geoinformatics. I. A New Approach to Clusterization // Cybernetics and Systems Analysis. 2002. V. 38. № 2. Pp. 238–254. DOI: 10.1023/A:1016347513346
16. Gvishiani A.D., Mikhailov V.O, Agayan S.M., Bogoutdinov Sh., Tikhotsky S.A., Diamant M., Galdeano A. Artificial intelligence technique in potential field and other geophysical studies // Conseil de l'Europe. Cahiers du Centre Europeen de Geodynamique et de Seismologie. Grand-Duchy of Luxemburg. 2003. Vol. 20. P.63-69
17. Gvishiani A.D., Agayan S.M., Bogoutdinov Sh.R., Solovyov A.A.: "Discrete Mathematical Analysis And Applications Geology And Geophysics" // Vestnik KRAUNC. Earth Sciences. 2010. №2. Pp. 104-122
18. Agayan S.M, Soloviev A.A. Recognition of dense areas in metric spaces basing on crystallization, System Research and Information Technologies, No.2, 2004, p. 7-23
19. Gvishiani A.D., Dzeboev B.A., Agayan S.M. FCAZm intelligent recognition system for locating areas prone to strong earthquakes in the Andean and Caucasian mountain belts // Izvestiya, Physics of the Solid Earth. 2016. Vol. 52, Issue 4. P. 461-491. DOI: 10.1134/S1069351316040017
20. Gvishiani A., Dobrovolsky M., Agayan S., Dzeboev B. Objective classification of epicenters and recognition of the earthquake-prone areas in California // Geoinformatika. 2013. № 2. P. 44–57
21. Gvishiani A., Dzeboev B., Agayan S. A new approach to recognition of the earthquake-prone areas in the Caucasus // Izvestiya, Physics of the Solid Earth. 2013. Vol. 49. Is. 6. P. 747–766. DOI: 10.1134/S1069351313060049
22. Gvishiani A., Dobrovolsky M., Agayan S., Dzeboev B. Fuzzy-based clustering of epicenters and strong earthquake-prone areas // Environmental Engineering and Management Journal. 2013. Vol.12. No. 1. P. 1-10.

23. Gvishiani A.D., Dzeboev B.A., Sergeyeva N.A., Rybkina A.I. Formalized Clustering and the Significant Earthquake-Prone Areas in the Crimean Peninsula and Northwest Caucasus // *Izvestiya. Physics of the Solid Earth*. 2017. Vol. 53. Is. 3. P. 353–365. DOI:10.1134/S106935131703003X
24. Gvishiani A.D., Agayan S.M., Dzeboev B.A., Belov I.O. Recognition of Strong Earthquake-Prone Areas with a Single Learning Class // *Doklady Earth Sciences*. 2017. Vol.474. Part 1. P.546–551. DOI: 10.1134/S1028334X17050038
25. Gvishiani A.D., Dzeboev B.A., Belov I.O., Sergeyeva N.A., Vavilin E.V. Successive Recognition of Significant and Strong Earthquake-Prone Areas: The Baikal–Transbaikalia Region // *Doklady Earth Sciences*. 2017. Vol. 477. Part 2. P. 1488–1493.
DOI: 10.1134/S1028334X1712025X
26. Gvishiani A.D., Dzeboev B.A., Sergeyeva N.A., Belov I.O., Rybkina A.I. Significant Earthquake-Prone Areas in the Altai–Sayan Region // *Izvestiya, Physics of the Solid Earth*. 2018. Vol. 54. Is. 3. P. 406–414. DOI: 10.1134/S1069351318030035
27. Gvishiani A.D., Mikhailov V.O., Agayan S.M., Bogoutdinov S.H.R., Graeva E.M., Diamant M., Galdeano A. Artificial Intelligence Algorithms for Magnetic Anomaly Clustering // *Izvestiya. Physics of the Solid Earth*. 2002. V. 38. № 7. Pp. 545–559
28. Mikhailov V., Galdeano A., Diamant M., Gvishiani A., Agayan S., Bogoutdinov S., Graeva E., and Sallhac P. Application of artificial intelligence for Euler solutions clustering // *Geophysics*. 2003. Vol. 68. № 1. P.168–180.
29. Solov'ev A.A., Shur D.Yu., Gvishiani A.D., Mikhailov V.O., Tikhotskii S.A. (2005), Determination of the magnetic moment vector using cluster analysis of the local linear pseudoinversion of ΔT anomalies, *Doklady Earth Sciences*, Vol. 404, N 7, pp. 1068–1071
30. Widiwijayanti C., Mikhailov V., Diamant M., Deplus C., Louat R., Tikhotsky S., Gvishiani A. Structure and evolution of the Molucca Sea area: constraints based on interpretation of a combined sea-surface and satellite gravity dataset // *Earth and Planetary Science Letters*. 2003. Vol. 215. P.135–150.
31. Gvishiani A.D., Agayan S.M., Bogoutdinov S.R. Fuzzy recognition of anomalies in time series // *Doklady Earth Sciences*. 2008. V. 421. № 1. Pp. 838–842. DOI:10.1134/S1028334X08050292
32. Gvishiani A.D., Agayan S.M., Bogoutdinov S.H.R., Zlotnicki J., Bonnin J. Mathematical methods of geoinformatics. III. Fuzzy comparisons and recognition of anomalies in time series // *Cybernetics and systems analysis*. 2008. T. 44. No 3. C. 309–323
33. Gvishiani A.D., Agayan S.M., Bogoutdinov S.H.R., Graeva E.M., Zlotnicki J., and J. Bonnin. Recognition of anomalies from time series by fuzzy logic methods // *Russian Journal of Earth Sciences*. 2008. Vol. 10. № 1.C.1–9. ES1001, doi:10.2205/2007ES000278.
34. Gvishiani, A.D., Agayan, S.M., Bogoutdinov, S.R., Kagan, A.I., 2011. Gravitational smoothing of time series. *Tr. IMM UrO RAN* 17 (2), 62–70
35. S.H.R. Bogoutdinov, A.D. Gvishiani, S.M. Agayan, A.A. Solovyev, E. Kihn, Recognition of Disturbances with Specified Morphology in Time Series. Part 1: Spikes on Magnetograms of the Worldwide INTERMAGNET Network, *Izvestiya, Physics of the Solid Earth*, 2010, Vol. 46, No. 11, pp. 1004–1016

36. Gvishiani A.D., Soloviev A.A., Agayan S.M., Bogoutdinov Sh.R., Sidorov R.V. Algorithmic system for magnetic record blow recognition // *Dinamika Fizicheskikh Polei Zemli*. M.: Svetoch Plus. 2011. Pp. 297-309
37. A.A. Soloviev, S.M. Agayan, A.D. Gvishiani, Sh.R. Bogoutdinov, A. Chulliat, Recognition of Disturbances with Specified Morphology in Time Series: Part 2. Spikes on 1-s Magnetograms, *Izvestiya, Physics of the Solid Earth*, 2012, Vol. 48, No. 5, pp. 395–409
38. Soloviev An., Chulliat A., Bogoutdinov S., Gvishiani A., Agayan S., Peltier A., Heumez B. Automated recognition of spikes in 1 Hz data recorded at the Easter Island magnetic observatory // *Earth Planets Space*. 2012. Vol.64. № 9. P.743-752. Doi:10.5047/eps.2012.03.004
39. A.Soloviev, A.Chulliat, S.Bogoutdinov (2017), Detection of secular acceleration pulses from observatory data, *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 270 (2017), p. 128-142, doi: 10.1016/j.pepi.2017.07.005
40. Zlotnicki J., Le Mouel J.-L., Gvishiani A., Agayan S., Mikhailov V., Bogoutdinov Sh., Kanwar R., Yvetot P. Automatic fuzzy-logic recognition of anomalous activity on long geophysical records: Application to electric signals associated with the volcanic activity of La Fournaise volcano (Reunion Island) // *Earth and Planetary Science Letters*. 2005. Vol. 234. P.261-278
41. Bogoutdinov S.R. et al. Fuzzy logic algorithms in the analysis of electrotelluric data with reference to monitoring of volcanic activity // *Izvestiya, Physics of the Solid Earth*. 2007. V. 43. № 7. Pp. 597–609. DOI: 10.1134/S1069351307070099
42. Gvishiani A.D., Agayan S.M., Bogoutdinov Sh.R. Discrete mathematical analysis and volcano monitoring // *Engineering ecology*. 2008. №5. Pp. 26-31
43. Gvishiani A.D., Belov S.V., Agayan S.M., Rodkin M.V., Morozov V.N., Tatarinov V.N., Bogoutdinov Sh.R. Geoinformational technologies: artificial intelligence methods used in Nizhnekans massif tectonical stability assessment // *Engineering ecology*. 2008. №2. Pp. 3-14
44. Gvishiani A.D., Dzeboev B.A. Assessment of seismic hazard in choosing of a radioactive waste disposal location, *Gornyi Zhurnal (Mining Journal)*, 2015. No 10. P. 39-43, doi:10.17580/gzh.2015.10.07

Получено 27.07.2018

Принято в печать 22.10.2018

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 19. Выпуск 4

УДК 539.3:534.26

DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-4-215-226

Дифракция сферической звуковой волны на упругом цилиндре с неоднородным покрытием¹

Л. А. Толоконников (г. Тула)

Аннотация

С помощью непрерывно-неоднородных упругих покрытий можно эффективно изменять характеристики рассеяния тел в определенных направлениях, если подобрать соответствующие законы неоднородности для механических параметров покрытия. В статье рассматривается задача дифракции сферической звуковой волны на однородном изотропном упругом цилиндре с радиально-неоднородным упругим покрытием. Полагается, что бесконечный круговой цилиндр с покрытием помещен в идеальную безграничную жидкость, законы неоднородности материала покрытия описываются дифференцируемыми функциями, на тело падает гармоническая сферическая звуковая волна, излучаемая точечным источником.

В случае установившихся колебаний распространение малых возмущений в идеальной жидкости описывается скалярным уравнением Гельмгольца, а в упругом однородном изотропном цилиндре — скалярным и векторным уравнениями Гельмгольца. Колебания неоднородного изотропного упругого цилиндрического слоя описываются общими уравнениями движения сплошной среды.

Аналитическое решение рассматриваемой задачи получено на основе известного решения аналогичной задачи дифракции плоской волны. Потенциал скорости сферической волны представляется в интегральной форме в виде разложения по цилиндрическим волновым функциям. При этом подынтегральное выражение оказывается аналогичным по форме выражению потенциала скорости плоской волны. Поэтому потенциал скорости рассеянной волны в случае падения сферической волны на цилиндр с покрытием записывается в виде интеграла, подынтегральное выражение которого аналогично по форме выражению потенциала скорости рассеянной волны при падении плоской волны на тело. Для вычисления подынтегральной функции необходимо определить поле смещения в неоднородном покрытии, решая построенную краевую задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Рассматриваются вычислительные аспекты оценки интеграла.

Ключевые слова: дифракция, звуковые волны, однородный упругий цилиндр, неоднородное упругое покрытие.

Библиография: 22 названий.

Для цитирования:

Л. А. Толоконников. Дифракция сферической звуковой волны на упругом цилиндре с неоднородным покрытием // Чебышевский сборник, 2018, т. 19, вып. 4, с. 215–226.

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 18-11-00199).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 19. No. 4

UDC 539.3:534.26

DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-4-215-226

Diffraction of a spherical sound wave by an elastic cylinder with an non-uniform coating

L. A. Tolokonnikov (Tula)

Abstract

By means of an continuous-non-uniform elastic coatings it is possible to change effectively scattering performances of bodies in determinate directions if to pick up corresponding the inhomogeneity laws for mechanical parametres of a coating. In paper the problem of diffraction of a spherical sound wave by a homogeneous isotropic elastic cylinder with radially non-uniform elastic coating is considered. It is believed that an infinite circular cylinder with a coating is placed in an ideal unlimited fluid, heterogeneity laws of a coating material are described by differentiable functions, on the body falls a harmonic spherical sound wave emitted by a point source.

In the case of steady state oscillations the propagation of small perturbations in ideal fluid is described by the scalar Helmholtz's equation, and in elastic homogeneous isotropic cylinder — scalar and vector Helmholtz's equations. The oscillations of an inhomogeneous isotropic elastic cylindrical layer described by general motion equations of the continuous medium.

The analytical solution of the viewed problem was obtained on the basis of the known solution for a similar problem of the diffraction of a plane wave. The velocity potential of a spherical wave is represented in integral form as a decomposition on wave cylindrical functions. The integrand turns out to be similar in form to the expression of the velocity potential of a plane wave. The velocity potential of the scattered wave in the case of a falling of a spherical wave on a cylinder with a coating is written as an integral, the integrand of which is similar in form to the expression of the potential of the scattered wave when a plane wave falls on the body. It is necessary to determine the displacement field in a non-uniform coating to calculate the integrand. For this the built boundary-value problem for the system of ordinary differential equations of the second order must be solved. The computational aspects of integral evaluation are considered.

Keywords: diffraction, sound waves, uniform elastic cylinder, non-uniform elastic coating.

Bibliography: 22 titles.

For citation:

L. A. Tolokonnikov, 2018, "Diffraction of a spherical sound wave by an elastic cylinder with an non-uniform coating", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 4, pp. 215–226.

1. Введение

Задачи дифракции плоских гармонических звуковых волн на однородных изотропных упругих цилиндрах рассматривались во многих работах. Например, случай нормального падения плоской волны исследовался в [1, 2], а случай наклонного падения — в [3,4]. Задачи о рассеянии плоских звуковых волн на неоднородных и анизотропных цилиндрических телах решены в [5-9].

Однако падающую волну можно считать плоской, если расстояние от источника звука до рассеивателя много больше длины звуковой волны. На практике часто приходится учитывать криволинейность фронта падающей волны. Расходимость падающей волны приводит не только к количественным, но и качественным изменениям рассеянного поля.

Рассеяние цилиндрической звуковой волны на упругом цилиндре изучалось в [10]. Задачи дифракции сферических звуковых волн на упругих цилиндрических телах с математической точки зрения являются значительно более сложными по сравнению с задачами дифракции плоских и цилиндрических волн. Такие задачи рассматривались в [11-13]. В [11] получено приближенное решение дифракционной задачи в предположении, что один из компонентов векторного потенциала смещения равен нулю. Поэтому это решение имеет ограниченную область применения. В [12] показано, что решение задачи дифракции сферической волны можно получить, используя известное решение задачи дифракции плоской волны. Поэтому нет необходимости решать сложные дифференциальные уравнения с соответствующими граничными условиями. В [13] задача решается с помощью потенциалов Дебая.

В ряде работ исследовалась возможность изменения звукоотражающих свойств тел с помощью непрерывно-неоднородных упругих покрытий путем выбора соответствующих законов неоднородности для механических параметров покрытия. Задачи дифракции плоской и цилиндрической звуковых волн на упругом цилиндре с радиально-неоднородным упругим покрытием решены в [14-15]. Моделирование неоднородного покрытия упругого цилиндра с заданными звукоотражающими свойствами осуществлено в [16]. Радиально-неоднородное покрытие цилиндра можно реализовать с помощью системы однородных упругих слоев с различными значениями механических параметров [17].

В настоящей работе рассматривается задача дифракции сферической звуковой волны на однородном изотропном упругом цилиндре с непрерывно-неоднородным упругим покрытием.

2. Постановка задачи

Рассмотрим бесконечный однородный изотропный упругий цилиндр радиуса r_0 , материал которого характеризуется плотностью ρ_0 и упругими постоянными λ_0 и μ_0 . Цилиндр имеет покрытие в виде радиально-неоднородного изотропного упругого цилиндрического слоя с внешним радиусом r_1 . Полагаем, что плотность материала покрытия ρ является непрерывной функцией радиальной координаты r , а модули упругости λ и μ — дифференцируемыми функциями координаты r цилиндрической системы координат r, φ, z , связанной с цилиндрическим телом. Ось вращения цилиндра совпадает с координатной осью z . Окружающая цилиндр жидкость является идеальной. Ее плотность и скорость звука соответственно равны ρ_1 и c .

Пусть из внешнего пространства на цилиндр падает гармоническая сферическая звуковая волна, излучаемая точечным источником, координаты которого (r_i, φ_i, z_i) . Потенциал скорости падающей волны

$$\Psi_i = \frac{e^{i(kR - i\omega t)}}{R},$$

где $k = \omega/c$ — волновое число жидкости; ω — круговая частота; $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|$; $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}_i$ — векторы, соединяющие начало координат с точкой наблюдения (r, φ, z) и с точечным источником (r_i, φ_i, z_i) соответственно; t — время. В дальнейшем временной множитель $e^{-i\omega t}$ будем опускать.

Определим акустическое поле, рассеянное упругим цилиндром с непрерывно-неоднородным покрытием.

3. Аналитическое решение задачи

Распространение малых возмущений в идеальной жидкости в случае установившихся колебаний описывается уравнением Гельмгольца [18]

$$\Delta \Psi^{(1)} + k^2 \Psi^{(1)} = 0, \quad (1)$$

где $\Psi^{(1)} = \Psi_i + \Psi_s$ — потенциал скорости полного акустического поля во внешней области, Ψ_s — потенциал скорости рассеянной волны. При этом скорость частиц $\mathbf{v}$ и акустическое давление p в жидкости определяются по формулам

$$\mathbf{v} = \text{grad } \Psi^{(1)}, \quad p = i\rho_1 \omega \Psi^{(1)}.$$

Распространение малых возмущений в упругом однородном изотропном цилиндре в случае гармонического движения описывается скалярным и векторным уравнениями Гельмгольца [18]

$$\Delta \Psi^{(2)} + k_l^2 \Psi^{(2)} = 0, \quad \Delta \Phi + k_\tau^2 \Phi = 0, \quad (2)$$

где $\Psi^{(2)}$ и Φ — скалярный и векторный потенциалы смещения $\mathbf{u}^0$;

$$\mathbf{u}^0 = \text{grad } \Psi^{(2)} + \text{rot } \Phi;$$

$k_l = \omega/c_l$ — волновое число продольных упругих волн; $k_\tau = \omega/c_\tau$ — волновое число поперечных упругих волн; $c_l = \sqrt{(\lambda_0 + 2\mu_0)/\rho_0}$ и $c_\tau = \sqrt{\mu_0/\rho_0}$ — скорости продольных и поперечных волн соответственно.

Представляя вектор Φ в виде

$$\Phi = \text{rot } L \mathbf{e}_z + k_\tau M \mathbf{e}_z,$$

переходим от векторного уравнения (2) к двум скалярным уравнениям

$$\Delta L + k_\tau^2 L = 0, \quad \Delta M + k_\tau^2 M = 0, \quad (3)$$

где L и M — скалярные функции координат r, φ, z ; $\mathbf{e}_z$ — единичный вектор координатной оси z .

Выражения компонентов $u_r^0, u_\varphi^0, u_z^0$ вектора смещения $\mathbf{u}^0$ и компонентов тензора напряжений σ_{ij}^0 в однородном цилиндре через функции $\Psi^{(2)}, L$ и M приведены в [14].

Уравнения движения неоднородного изотропного упругого цилиндрического слоя в случае установившихся колебаний в цилиндрической системе координат имеют вид [19]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} &= -\omega^2 \rho(r) u_r, \\ \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial z} + \frac{2}{r} \sigma_{r\varphi} &= -\omega^2 \rho(r) u_\varphi, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r} \sigma_{rz} = -\omega^2 \rho(r) u_z,$$

где u_r, u_φ, u_z — компоненты вектора смещения $\mathbf{u}$ частиц неоднородного слоя; σ_{ij} — компоненты тензора напряжений в неоднородном слое.

Решения дифференциальных уравнений (1)–(4) должны удовлетворять граничным условиям.

Граничные условия на внешней поверхности неоднородного покрытия заключаются в равенстве нормальных скоростей частиц упругой неоднородной среды и жидкости, равенстве на ней нормального напряжения и акустического давления, отсутствии касательных напряжений

$$r = r_1 : -i\omega u_r = v_r, \quad \sigma_{rr} = -p, \quad \sigma_{r\varphi} = 0, \quad \sigma_{rz} = 0.$$

На внутренней поверхности покрытия при переходе через границу раздела упругих сред должны быть непрерывны составляющие вектора смещения частиц, а также нормальные и тангенциальные напряжения

$$r = r_0 : u_r = u_r^0, \quad u_\varphi = u_\varphi^0, \quad u_z = u_z^0, \quad \sigma_{rr} = \sigma_{rr}^0, \quad \sigma_{r\varphi} = \sigma_{r\varphi}^0, \quad \sigma_{rz} = \sigma_{rz}^0.$$

Для решения рассматриваемой задачи применим подход, предложенный в работе [12].

Воспользуемся известным решением задачи дифракции наклонно падающей плоской звуковой волны на упругом цилиндре с неоднородным покрытием [14]. Согласно [14] потенциал скорости плоской волны, падающей на цилиндр $\Psi_{i\text{plane}}$, потенциал скорости рассеянной волны $\Psi_{s\text{plane}}$ и компоненты вектора смещения в неоднородном покрытии $u_{r\text{plane}}, u_{\varphi\text{plane}}, u_{z\text{plane}}$ определяются по формулам

$$\Psi_{i\text{plane}} = e^{i\alpha z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A i^n J_n(\beta r) e^{in(\varphi-\varphi_0)}, \quad (5)$$

$$\Psi_{s\text{plane}} = e^{i\alpha z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n H_n^{(1)}(\beta r) e^{in(\varphi-\varphi_0)}, \quad (6)$$

$$u_{r\text{plane}} = e^{i\alpha z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_{1n}(r) e^{in(\varphi-\varphi_0)}, \quad u_{\varphi\text{plane}} = e^{i\alpha z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_{2n}(r) e^{in(\varphi-\varphi_0)},$$

$$u_{z\text{plane}} = e^{i\alpha z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_{3n}(r) e^{in(\varphi-\varphi_0)},$$

где A — амплитуда плоской волны; θ_0 и φ_0 — полярный и азимутальный углы падения плоской волны; $\alpha = k \cos \theta_0$; $\beta = k \sin \theta_0$; J_n — цилиндрическая функция Бесселя порядка n ; $H_n^{(1)}$ — цилиндрическая функция Ганкеля первого рода порядка n ;

$$A_n = \frac{A i^n \beta J_n'(\beta r_1) + i\omega u_{1n}(r_1)}{\beta H_n^{(1)'}(\beta r_1)}.$$

Здесь и далее штрихи означают дифференцирование по аргументу.

Функции $u_{jn}(r)$ ($j = 1, 2, 3$) являются решением краевой задачи для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка [14]

$$\begin{aligned} \hat{A}_n \mathbf{U}_n'' + \hat{B}_n \mathbf{U}_n' + \hat{C}_n \mathbf{U}_n &= 0, \\ \left(\frac{1}{r_2} \hat{A}_n \mathbf{U}_n' + \hat{E}_n \mathbf{U}_n \right)_{r=r_1} &= \hat{G}_n, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\left(\frac{1}{r_2} \hat{A}_n \mathbf{U}'_n + \hat{F}_n \mathbf{U}_n \right)_{r=r_0} = 0,$$

где $\mathbf{U}_n = (u_{1n}, u_{2n}, u_{3n})^T$; $\hat{A}_n = (a_{nij})_{3 \times 3}$, $\hat{B}_n = (b_{nij})_{3 \times 3}$, $\hat{C}_n = (c_{nij})_{3 \times 3}$, $\hat{E}_n = (e_{nij})_{3 \times 3}$, $\hat{F}_n = (f_{nij})_{3 \times 3}$, $\hat{G}_n = (g_{ni})_{3 \times 1}$ — матрицы, выражения для элементов которых приведены в [14].

Запишем сферическую волну в виде разложения по цилиндрическим волновым функциям [20]

$$\Psi_i = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Psi}_i(h) dh, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_i(h) &= \frac{i}{2} e^{ih(z-z_i)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in(\varphi-\varphi_i)} J_n(k_h r_i) H_n^{(1)}(k_h r) \quad \text{при } r > r_i, \\ \tilde{\Psi}_i(h) &= \frac{i}{2} e^{ih(z-z_i)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in(\varphi-\varphi_i)} J_n(k_h r) H_n^{(1)}(k_h r_i) \quad \text{при } r < r_i, \end{aligned} \quad (9)$$

$$k_h = \sqrt{k^2 - h^2}.$$

Здесь и в дальнейшем знаком "тильда" будем обозначать величины, зависящие от h .

Без ограничения общности положим $z_i = 0$.

При удовлетворении граничных условий на поверхности покрытия $r = r_1$ следует для сферической волны использовать разложение (9), которое запишем в виде

$$\tilde{\Psi}_i(h) = e^{ihz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(h) i^n J_n(k_h r) e^{in(\varphi-\varphi_0)}, \quad (10)$$

где

$$I_n(h) = \frac{1}{2} (-i)^{n-1} H_n^{(1)}(k_h r_i).$$

Сравнивая формулы (10) и (5) и учитывая, что $\beta = (k^2 - \alpha^2)^{1/2}$, замечаем, что подынтегральное выражение в (8), определяемое (10), аналогично по форме выражению плоской волны (5). При этом h соответствует α , а $I_n(h)$ — A . Следовательно, при рассеянии первичного поля возмущений, определяемого $\tilde{\Psi}_i(h)$, потенциал скорости рассеянной волны $\tilde{\Psi}_s(h)$ определяется формулой, которая аналогична формуле (6). При этом в (6) следует сделать замены α на h и A на $I_n(h)$.

Получаем

$$\tilde{\Psi}_s(h) = e^{ihz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{A}_n(h) H_n^{(1)}(k_h r) e^{in(\varphi-\varphi_0)}, \quad (11)$$

где

$$\tilde{A}_n(h) = \frac{I_n(h) i^n k_h J'_n(k_h r_1) + i\omega \tilde{u}_{1n}(r_1, h)}{k_h H_n^{(1)'}(k_h r_1)}.$$

Кроме того, указанные выше замены следует произвести в выражениях для элементов матриц краевой задачи (7). В результате будем иметь

$$\begin{aligned} a_{n11} &= (\lambda + 2\mu)r^2, \quad a_{n22} = a_{n33} = \mu r^2, \quad a_{nij} = 0, \quad (i \neq j), \\ b_{n11} &= (\lambda' + 2\mu')r^2 + (\lambda + 2\mu)r, \quad b_{n12} = \hat{b}_{n21} = in(\lambda + \mu)r, \\ b_{n13} &= b_{n31} = i h (\lambda + \mu)r^2, \quad b_{n22} = b_{n33} = \mu' r^2 + \mu r, \quad b_{n23} = b_{n32} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{n11} &= \lambda' r - \lambda - (n^2 + 2 + h^2 r^2) \mu + \omega^2 \rho r^2, \\
c_{n12} &= i n (\lambda' r - \lambda - 3\mu), \quad c_{n13} = i h \lambda' r^2, \quad c_{n21} = i n (\mu' r + \lambda + 3\mu), \\
c_{n22} &= -\mu' r - n^2 \lambda - (2n^2 + h^2 r^2 + 1) \mu + \omega^2 \rho r^2, \quad c_{n23} = \tilde{c}_{n32} = -n h (\lambda + \mu) r, \\
c_{n31} &= i h (\mu' r + \lambda + \mu) r, \quad c_{n33} = -(n^2 + 2h^2 r^2) \mu' r - h^2 \lambda r^2 + \omega^2 \rho r^2, \\
e_{n11} &= \frac{\lambda}{r} + \frac{\omega^2 \rho_1 H_n^{(1)}(k_h r)}{k_h H_n^{(1)'}(k_h r)}, \quad e_{n12} = \frac{i n \lambda}{r}, \quad e_{n13} = i h \lambda, \\
e_{n21} &= \frac{i n \mu}{r}, \quad e_{n22} = -\frac{\mu}{r}, \quad e_{n31} = i h \mu, \quad e_{n23} = e_{n32} = e_{n33}, \\
g_{n1} &= \frac{i \omega \rho_1 H_n^{(1)}(k_h r)}{\pi k_h r H_n^{(1)'}(k_h r)}, \quad g_{n2} = g_{n3} = 0, \\
f_{n11} &= \frac{\lambda}{r} - (\gamma_{1n} b_{1n} + \gamma_{2n} c_{1n} + \gamma_{3n} d_{1n}) q_n^{-1}, \quad f_{n12} = \frac{i n \lambda}{r} - (\gamma_{1n} b_{2n} + \gamma_{2n} c_{2n} + \gamma_{3n} d_{2n}) q_n^{-1}, \\
f_{n13} &= i h \lambda - (\gamma_{1n} b_{3n} + \gamma_{2n} c_{3n} + \gamma_{3n} d_{3n}) q_n^{-1}, \quad f_{n21} = \frac{i n \mu}{r} - (\gamma_{4n} b_{1n} + \gamma_{5n} c_{1n} + \gamma_{6n} d_{1n}) q_n^{-1}, \\
f_{n22} &= -\frac{\mu}{r} - (\gamma_{4n} b_{2n} + \gamma_{5n} c_{2n} + \gamma_{6n} d_{2n}) q_n^{-1}, \quad f_{n23} = -(\gamma_{4n} b_{3n} + \gamma_{5n} c_{3n} + \gamma_{6n} d_{3n}) q_n^{-1}, \\
f_{n31} &= i h \mu - (\gamma_{7n} b_{1n} + \gamma_{8n} c_{1n} + \gamma_{9n} d_{1n}) q_n^{-1}, \quad f_{n32} = -(\gamma_{7n} b_{2n} + \gamma_{8n} c_{2n} + \gamma_{9n} d_{2n}) q_n^{-1}, \\
f_{n33} &= -(\gamma_{7n} b_{3n} + \gamma_{8n} c_{3n} + \gamma_{9n} d_{3n}) q_n^{-1}.
\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
q_n &= k_\tau k_{2h}^2 r_0^2 J_n'(k_{2h} r_0) [k_{1h} k_{2h} J_n'(k_{1h} r_0) J_n(k_{2h} r_0) + h^2 J_n(k_{1h} r_0) J_n'(k_{2h} r_0)] - \\
&\quad - n^2 k_\tau^3 J_n(k_{1h} r_0) J_n^2(k_{2h} r_0), \\
k_{1h} &= \sqrt{k_l^2 - h^2}, \quad k_{2h} = \sqrt{k_\tau^2 - h^2}, \\
b_{1n} &= k_\tau k_{2h}^3 r_0^2 J_n(k_{2h} r_0) J_n'(k_{2h} r_0), \quad b_{2n} = i n k_\tau k_{2h}^2 r_0 J_n^2(k_{2h} r_0), \\
b_{3n} &= i h k_\tau [n^2 J_n^2(k_{2h} r_0) - (k_{2h} r_0)^2 J_n'^2(k_{2h} r_0)], \\
c_{1n} &= -i h k_\tau k_{2h} r_0^2 J_n(k_{1h} r_0) J_n'(k_{2h} r_0), \quad c_{2n} = n h k_\tau r_0 J_n(k_{1h} r_0) J_n(k_{2h} r_0), \\
c_{3n} &= [q_n - i h J_n(k_{1h} r_0) b_{3n}] / [k_{2h}^2 J_n(k_{2h} r_0)], \quad d_{1n} = i n k_\tau^2 r_0 J_n(k_{1h} r_0) J_n(k_{2h} r_0), \\
d_{2n} &= -k_{2h} r_0^2 [k_{1h} k_{2h} J_n'(k_{1h} r_0) J_n(k_{2h} r_0) + h^2 J_n(k_{1h} r_0) J_n'(k_{2h} r_0)], \\
d_{3n} &= n h r_0 [k_{2h} J_n(k_{1h} r_0) J_n'(k_{2h} r_0) - k_{1h} J_n'(k_{1h} r_0) J_n(k_{2h} r_0)], \\
\gamma_{1n} &= 2 \mu_2 k_{1h}^2 J_n''(k_{1h} r_0) - \lambda_2 k_l^2 J_n(k_{1h} r_0), \quad \gamma_{2n} = 2 i \mu_2 h k_{2h}^2 J_n''(k_{2h} r_0), \\
\gamma_{3n} &= 2 i r_0^{-2} \mu_2 n k_\tau [k_{2h} r_0 J_n'(k_{2h} r_0) - J_n(k_{2h} r_0)], \\
\gamma_{4n} &= 2 i r_0^{-2} \mu_2 n [k_{1h} r_0 J_n'(k_{1h} r_0) - J_n(k_{1h} r_0)], \\
\gamma_{5n} &= -2 r_0^{-2} \mu_2 n h [k_{2h} r_0 J_n'(k_{2h} r_0) - J_n(k_{2h} r_0)], \\
\gamma_{6n} &= r_0^{-2} \mu_2 k_\tau [-(k_{2h} r_0)^2 J_n''(k_{2h} r_0) + k_{2h} r_0 J_n'(k_{2h} r_0) - n^2 J_n(k_{2h} r_0)], \\
\gamma_{7n} &= 2 i \mu_2 h k_{1h} J_n'(k_{1h} r_0), \quad \gamma_{8n} = \mu_2 k_{2h} J_n'(k_{2h} r_0) (k_\tau^2 - 2h^2), \\
\gamma_{9n} &= -r_0^{-1} \mu_2 k_\tau n h J_n(k_{2h} r_0).
\end{aligned}$$

Потенциал скорости рассеянной волны, возникающей при дифракции сферической волны на цилиндре с покрытием, определяется путем интегрирования $\tilde{\Psi}_s(h)$ по h

$$\Psi_s = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Psi}_s(h) dh. \quad (12)$$

Подставляя (11) в (12) получаем

$$\Psi_s = i \int_{-\infty}^{\infty} e^{ihz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{k_h H_n^{(1)}(k_h r_i) J'_n(k_h r_1) + 2\omega \tilde{u}_{1n}(r_1, h)}{2k_h H_n^{(1)'}(k_h r_1)} H_n^{(1)}(k_h r) e^{in(\varphi - \varphi_0)} dh. \quad (13)$$

Для нахождения $\tilde{u}_{1n}(r_1, h)$ следует решить краевую задачу (7). Она может быть решена различными методами, например, методом сведения к задачам с начальными условиями [7], методом сплайн-коллокации [9], методом степенных рядов [21].

Оценить аналитически интеграл (13) не представляется возможным. Он подлежит только численному расчету, хотя и при этом возникают значительные трудности.

На вещественной оси отсутствуют особенности подынтегральной функции (нули знаменателя), но имеются точки ветвления $h = \pm k$, которые определяются двужанной функцией $k_h = \sqrt{k^2 - h^2}$ аргумента h .

В (13) на участках интегрирования от $h = -\infty$ до $-k$ и от $h = k$ до $+\infty$ величина $k_h = \sqrt{k^2 - h^2}$ становится чисто мнимой. Чтобы выполнялись условия излучения на бесконечности для потенциала Ψ_s при $r \rightarrow \infty$, необходимо потребовать, чтобы $\text{Im } k_h \geq 0$. Это следует из привлечения асимптотической формулы для функции $H_n^{(1)}(k_h r)$, стоящей в (13), при больших значениях аргумента ($k_h r \gg 1$) [22]

$$H_n^{(1)}(k_h r) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi k_h r}} \exp \left[i \left(k_h r - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right].$$

Таким образом, $k_h = \sqrt{k^2 - h^2}$ при $-k < h < k$ и $k_h = i\sqrt{h^2 - k^2}$ при $|h| > k$.

При $h \rightarrow \pm k$ возникают затруднения при вычислении подынтегрального выражения в (13).

Учитывая, что $J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z)$ и $H_{-n}^{(1)}(z) = (-1)^n H_n^{(1)}(z)$, в окрестности точек $h = \pm k$ заменим в (13) цилиндрические функции Бесселя и их производные асимптотическими формулами при малых значениях аргумента ($z \rightarrow 0$) [22]

$$J_n(z) \approx \frac{1}{n!} \left(\frac{z}{2} \right)^n, \quad H_n^{(1)}(z) \approx -\frac{i}{\pi} (n-1)! \left(\frac{2}{z} \right)^n, \quad n \geq 1,$$

$$J_0(z) \approx 1, \quad H_0^{(1)}(z) \approx \frac{2i}{\pi} \ln \frac{z}{2},$$

$$J'_n(z) \approx \frac{z^{n-1}}{2^n (n-1)!}, \quad H_n^{(1)'}(z) \approx \frac{2^n i n!}{\pi z^{n+1}}, \quad n \geq 1,$$

$$J'_0(z) \approx -\frac{z}{2}, \quad H_0^{(1)'}(z) \approx \frac{2i}{\pi z}.$$

Анализируя полученное асимптотическое выражение для подынтегральной функции, устанавливаем, что при $n \neq 0$ слагаемые в подынтегральном выражении в окрестности точек $h = \pm k$ стремятся к нулю, так что их следует положить равными нулю. Слагаемое при $n = 0$ имеет порядок $\ln \sqrt{k^2 - h^2}$. Следовательно, подынтегральное выражение в (13) имеет логарифмические особенности в точках $h = \pm k$. Устраним эти особенности путем обхода точек $h = \pm k$ по полуокружностям малого радиуса ε в комплексной плоскости h . Для обхода точки

$h = k$ полуокружность берется под действительной осью, а для обхода точки $h = -k$ — над этой осью. Именно при таком обходе выполняется условие $\text{Im } k_h \geq 0$. При интегрировании по полуокружности при обходе точки $h = k$ сделаем замену переменной в $\ln \sqrt{k^2 - h^2}$ по формуле $h = k + \varepsilon \exp(i\phi)$. В результате приходим к интегралу

$$i \varepsilon \int_{\pi}^{2\pi} \left(\ln \sqrt{-2k \varepsilon} + \frac{i \phi}{2} \right) e^{i\phi} d\phi,$$

который стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$. Аналогичная ситуация имеет место и при обходе точки $h = -k$. В этом случае замена переменной интегрирования h на ϕ производится по формуле $h = -k + \varepsilon \exp(i\phi)$. Таким образом, при $n = 0$ подынтегральное выражение в точках $h = \pm k$ также как и при $n \neq 0$ не вычисляется, а заменяется на ноль.

Точка наблюдения, как правило, находится далеко от рассеивателя. Так как функция Ганкеля $H_n^{(1)}(k_h r)$ стремится к нулю при $k_h r \rightarrow \infty$, то интеграл (13) можно численно оценить, рассматривая конечный и сравнительно небольшой интервал интегрирования.

4. Заключение

В настоящей работе получено точное решение задачи дифракции сферической звуковой волны на упругом цилиндре с непрерывно-неоднородным упругим покрытием на основе известного решения аналогичной задачи в случае плоской падающей волны. Подобный подход может быть использован при решении других задач дифракции неплоских волн, когда геометрии тела и фронта падающей волны различны. При этом предполагается наличие разложения падающей волны по плоским волнам и аналитического решения соответствующей задачи дифракции плоской волны.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Faran J.J. Sound scattering by solid cylinders and spheres // J. Acoust. Soc. Amer. 1951. Vol. 23, № 4. P. 405-418.
2. Doolittle R.D., Uberall H. Sound scattering by elastic cylindrical shells // J. Acoust. Soc. Amer. 1966. Vol. 39, № 2. P. 272—275.
3. Flax L., Varadan V.K., Varadan V.V. Scattering of an obliquely incident acoustic wave by an infinite cylinder // J. Acoust. Soc. Amer. 1980. Vol. 68, № 6. P. 1832-1835.
4. Li T., Ueda M. Sound scattering of a plane wave obliquely incident on a cylinder // J. Acoust. Soc. Amer. 1989. Vol. 86, № 6. P. 2363-2368.
5. Безруков А.В., Приходько В.Ю., Тютюкин В.В. Рассеяние звуковых волн упругими радиально-слоистыми цилиндрическими телами // Акустический журн. 1986. Т. 32, вып. 6. С. 762-766.
6. Коваленко Г.П. К задаче о дифракции акустической волны на неоднородном твердом теле // Акустический журн. 1987. Т. 33, вып. 6. С. 1060-1063.
7. Скобельцын С.А., Толоконников Л.А. Рассеяние звуковых волн трансверсально-изотропным неоднородным цилиндрическим слоем // Акустический журн. 1995. Т. 41, № 1. С. 134-138.

8. Толоконников Л. А. Дифракция звуковых волн на неоднородном анизотропном полом цилиндре // Оборонная техника. 1998. № 4-5. С. 11-14.
9. Ларин Н. В., Толоконников Л. А. Дифракция плоской звуковой волны на неоднородном термоупругом цилиндрическом слое, граничащем с невязкими теплопроводными жидкостями // Прикладная математика и механика. 2009. Т. 73, вып. 3. С. 474-483.
10. Lee F. A. Scattering of a cylindrical wave of sound by an elastic cylinder // *Acustica*. 1963. Vol. 13, № 3. P. 26-31.
11. Piquette J. C. Spherical wave scattering by an elastic solid cylinder of infinite length // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1986. Vol. 79, № 5. P. 1248-1259.
12. Li T., Ueda M. Sound scattering of spherical wave incident on a cylinder // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1990. Vol. 87, № 5. P. 1871-1879.
13. Клещев А. А. Дифракция звука от точечного источника на упругой цилиндрической оболочке // *Акустический журн.* 2004. Т. 50, № 1. С. 86-89.
14. Толоконников Л. А. Рассеяние наклонно падающей плоской звуковой волны упругим цилиндром с неоднородным покрытием // *Известия Тульского гос. ун-та. Естественные науки*. 2013. Вып. 2. Часть 2. С. 265-274.
15. Толоконников Л. А. Дифракция цилиндрических звуковых волн на цилиндре с неоднородным упругим покрытием // *Известия Тульского гос. ун-та. Естественные науки*. 2013. Вып. 3. С. 202-208.
16. Толоконников Л. А., Ларин Н. В., Скобельцын С. А. Моделирование неоднородного покрытия упругого цилиндра с заданными звукоотражающими свойствами // *Прикладная механика и техническая физика*. 2017. Т. 58, № 4. С. 189-199.
17. Ларин Н. В., Толоконников Л. А. Рассеяние плоской звуковой волны упругим цилиндром с дискретно-слоистым покрытием // *Прикладная математика и механика*. 2015. Т. 79, вып. 2. С. 242-250.
18. Шендеров Е. Л. Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 352 с.
19. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
20. Иванов Е. А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск: Наука и техника, 1968. 584 с.
21. Романов А. Г., Толоконников Л. А. Рассеяние звуковых волн цилиндром с неоднородным упругим покрытием // *Прикладная математика и механика*. 2011. Т. 75, вып. 5. С. 850-857.
22. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. М.: Физматгиз, 1963. 358 с.

REFERENCES

1. Faran, J. J. 1951, "Sound scattering by solid cylinders and spheres", *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 23, no 4, pp. 405-418.
2. Doolittle, R. D. & Uberall, H. 1966, "Sound scattering by elastic cylindrical shells", *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 39, no 2, pp. 272-275.

3. Flax, L., Varadan, V.K. & Varadan, V.V. 1980, "Scattering of an obliquely incident acoustic wave by an infinite cylinder", *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 68, no 6, pp. 1832-1835.
4. Li T. & Ueda M. 1989, "Sound scattering of a plane wave obliquely incident on a cylinder", *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 86, no 6, pp. 2363-2368.
5. Bezrukov, A. V., Prihod'ko, V. Yu. & Tyutekin, V. V. 1986, "Scattering of sound waves by elastic radially-layered cylindrical bodies", *Akust. Zhurnal*, vol. 32, no. 6, pp. 762-766 [in Russian].
6. Kovalenko, G. P. 1987, "About a problem of diffraction of acoustic wave by an inhomogeneous solid body", *Akust. Zhurnal*, vol. 33, no. 6, pp. 1060-1063 [in Russian].
7. Skobel'tsyn, S. A. & Tolokonnikov, L. A. 1995, "Scattering of sound waves by a transversely isotropic inhomogeneous cylinder layer", *Acoustical Physics*, vol. 41, no 1, pp. 114-117.
8. Tolokonnikov, L. A. 1998, "Diffraction of sound waves by an inhomogeneous non-isotropic hollow cylinder", *Oboron. Tekh.*, no 4-5, pp. 11-14 [in Russian].
9. Larin, N. V. & Tolokonnikov, L. A. 2009, "Diffraction of a plane acoustic wave by a non-uniform thermoelastic cylindrical layer bounded by inviscid heat-conducting fluids", *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 73, no. 3, pp. 336-343.
10. Lee F. A. 1963, "Scattering of a cylindrical wave of sound by an elastic cylinder", *Acustica*, vol. 13, no 3. pp. 26-31.
11. Piquette J. C. 1986, "Spherical wave scattering by an elastic solid cylinder of infinite length", *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 79, no 5, pp. 1248-1259.
12. Li T., Ueda M. 1980, "Sound scattering of spherical wave incident on a cylinder", *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 87, no 5, pp. 1871-1879.
13. Kleshchev A. A. 2004, "Diffraction of point-source-generated sound by an elastic cylindrical shell", *Acoustical physics*, vol. 50, no 1, pp. 74-76.
14. Tolokonnikov, L. A. 2013, "Scattering of an obliquely incident plane sound wave by an elastic cylinder with a non-uniform covering", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no. 2-2, pp. 265-274 [in Russian].
15. Tolokonnikov, L. A. 2013, "Diffraction of cylindrical sound waves by an cylinder with a non-uniform elastic coating", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no. 3, pp. 202-208 [in Russian].
16. Tolokonnikov, L. A., Larin, N. V. & Skobel'tsyn, S. A. 2017, "Modeling of inhomogeneous coating of an elastic cylinder with given sound-reflecting properties", *J. Appl. Mech. and Techn. Physics*, no 4, pp. 733-742.
17. Larin, N. V. & Tolokonnikov, L. A. 2015, "The scattering of a plane sound wave by an elastic cylinder with a discrete-layered covering", *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 79. no 2, pp. 164-169.
18. Shenderov, E. L. 1972, "Wave problems of underwater acoustics", Sudostroenie, Leningrad, 352 p. [in Russian].
19. Nowacki, W. 1975, "Teoria sprężystości", Mir, Moscow, 872 p.
20. Ivanov, E. A. 1968, "Diffraction of electromagnetic waves by two bodies", Nauka i tekhnika, Minsk, 584 p. [in Russian].

21. Romanov, A. G. & Tolokonnikov, L. A. 2011, "The scattering of acoustic waves by a cylinder with a non-uniform elastic coating", *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 75, no. 5, pp. 595-600.
22. Lebedev, N. N. 1963, "*Special functions and their applications*", Fizmatgiz, Moscow, 358 p. [in Russian].

Получено 20.07.2018

Принято в печать 22.10.2018

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 19. Выпуск 4

УДК 517

DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-4-227-242

Математические методы анализа и прогноза афтершоков землетрясений: необходимость смены парадигмы¹

Шебалин Петр Николаевич — доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, Институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики РАН.
e-mail: shebalin@mitp.ru

Аннотация

Анализ и прогноз афтершоков сильных землетрясений в мировой практике в настоящее время основан исключительно на стохастических моделях развития афтершокового процесса. Это дает возможность использования статистических методов анализа, а также применять в прогнозе "сценарный" подход путем многократного генерирования случайных последовательностей афтершоков и подсчета частоты повторения интересующих событий. Исследования по проекту РНФ "Создание информационной системы автоматической оценки сейсмической опасности после сильных землетрясений по данным геофизического мониторинга" в 2016-2018 гг. показали однако, что эффективность таких подходов имеет существенные ограничения. В статье дается критический обзор статистических методов анализа и прогноза афтершоков, интерпретируются пределы эффективности прогнозов при использовании стандартных подходов, приводится обоснование необходимости смены парадигмы. В качестве одного из направлений поиска предлагается применение методов Дискретного математического анализа (ДМА), разрабатываемых академиком А.Д. Гвишиани и его научной школой. Очевидное преимущество такого подхода продемонстрировано на примере простого алгоритма идентификации афтершоков с использованием аппарата нечетких сравнений.

Ключевые слова: афтершоки землетрясений, закон Омори, закон Гутенберга-Рихтера, закон повторяемости числа афтершоков, кластер, дискретный математический анализ, нечеткие множества, нечеткие сравнения.

Библиография: 37 названий.

Для цитирования:

П. Н. Шебалин. Математические методы анализа и прогноза афтершоков землетрясений: необходимость смены парадигмы // Чебышевский сборник, 2018, т. 19, вып. 4, с. 227–242.

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 16-17-00093).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 19. No. 4

UDC 517

DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-4-227-242

Mathematical methods of analysis and forecast of earthquake aftershocks: the need to change the paradigm

Shebalin Petr Nikolaevich — D. Sci.; Chief scientist; Institute of Earthquake Prediction Theory and Mathematical Geophysics RAS.

e-mail: shebalin@mitp.ru

Abstract

Analysis and forecast of aftershocks of large earthquakes in the world practice is currently based exclusively on stochastic models of aftershock process. This makes it possible to use statistical methods of analysis, and also to apply the "scenario" approach in forecasts by repeatedly generating random sequences of aftershocks and counting the frequency of repetition of the events of interest. Studies on the Russian Science Foundation project "Development of information system for automatic seismic hazard assessment after large earthquakes based on geophysical monitoring" in 2016-2018 showed however that the effectiveness of such approaches has significant limitations. In this paper I give a critical review of statistical methods for the analysis and forecast of aftershocks, an interpretation of the effectiveness limits of forecasts using standard approaches, provide the rationale for the need to change the paradigm. As one of the search directions, the application of Discrete Mathematical Analysis (DMA) methods developed by Academician A.D. Gvishiani and his scientific school. An obvious advantage of this approach is demonstrated by the example of a simple algorithm for identification of aftershocks using fuzzy comparisons.

Keywords: aftershocks of earthquakes, Omori law, Gutenberg-Richter law, law of repeatability of the number of aftershocks, cluster, Discrete Mathematical Analysis, fuzzy sets, fuzzy comparisons.

Bibliography: 37 titles.

For citation:

P. N. Shebalin, 2018, "Mathematical methods of analysis and forecast of earthquake aftershocks: the need to change the paradigm", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 4, pp. 227–242.

1. Введение

Изучение афтершоков играет важную роль в сейсмологии и в задачах оценки сейсмической опасности. Афтершоки – это повторные толчки, возникающих после землетрясения вследствие перераспределения напряжений в его очаге, вызванного неравномерным скольжением по разлому. Полноценное изучение очага сильного землетрясения невозможно без исследования сопровождавших его афтершоков. Они несут важную информацию о структуре очага, о характере и скорости пост-сейсмических процессов. Для оценок сейсмической опасности обычно используются каталоги землетрясений с исключенными афтершоками. Но с точки зрения сейсмической опасности афтершоки имеют и самостоятельное значение. Известны случаи, когда афтершоки приносили больше разрушений, чем соответствующие основные толчки. Всегда после сильных землетрясений возникают вопросы: следует ли ожидать повторные толчки? в течение какого времени? насколько они могут быть разрушительны? Очевидно, что ответы на эти вопросы необходимы для принятия эффективных мер при ликвидации последствий землетрясения.

С физической точки зрения, несмотря на несколько различающиеся причины возникновения, афтершоки ничем не отличаются от основных толчков, поэтому выделять их по каким-либо физическим параметрам практически невозможно. Вместе с тем, сейсмичность имеет крайне неоднородное распределение по пространству и времени, часто образуя явно выраженные кластеры. Под афтершоками обычно и понимаются кластеры сейсмических событий, в которых наиболее сильное событие находится в начале во времени. Иногда такие сильные события в кластере предваряются более слабыми землетрясениями, называемыми форшоками. Число форшоков, как правило, значительно меньше числа афтершоков.

Известно, что землетрясения в каталоге, в котором исключены афтершоки и форшоки, могут рассматриваться как независимые, и тогда поток событий может считаться Пуассоновским [8]. Все расчеты сейсмической опасности основаны на этом предположении. Поэтому для задач оценки сейсмической опасности способ выделения афтершоков с целью их исключения из каталога ("declustering" в англоязычной литературе) играет чрезвычайно важное значение. Выделению афтершоков посвящен первый раздел данной статьи, в котором приводится обзор существующих методов, среди которых особое место занимает метод [34, 35]. Несмотря на то, что он предложен лишь недавно, это подход уже успел занять позиции парадигмы. При несомненных достоинствах этот подход имеет и принципиальные недостатки. Одному из возможных путей устранения этих недостатков посвящен последний раздел данной статьи.

В сейсмологии известны лишь небольшое число общих законов. Наиболее известными из них являются закон Гутенберга-Рихтера [10], закон Омори [26] и закон Бота [5]. В соответствие с законом Гутенберга-Рихтера логарифм частоты землетрясений данной магнитуды линейно зависит от магнитуды с коэффициентом наклона, называемым "b-value". В соответствие с законом Омори частота афтершоков убывает со временем от момента основного толчка по степенному закону. В соответствие с законом Бота магнитуда сильнейшего афтершока в среднем примерно на единицу меньше магнитуды основного толчка. Отметим, что все три закона касаются афтершоков (только первый из них касается и сейсмичности вообще), и что все три закона имеют статистический характер. Благодаря этому почти все подходы к анализу и прогнозу афтершоков основаны на статистических методах для точечных процессов.

Для прогноза афтершоков в мировой практике применяются два основных подхода. Первый основан на комбинации законов Гутенберга-Рихтера и Омори. В предположении независимости магнитуд событий от времени (так называемый подход Ризенберга-Джонс [28] рассчитываются вероятности интересующего события или распределения вероятности той или иной величины, например, вероятность афтершока магнитуды выше заданной, распределение вероятности магнитуды сильнейшего афтершока, времени ожидания сильнейшего афтершока или афтершока заданной магнитуды. Во втором подходе моделируются последовательности после-

дующих афтершоков на основе более сложных моделей, учитывающих возможность проявления вторичных афтершоков, то есть афтершоков, для которых основным толчком является афтершок более раннего землетрясения. Вероятности интересующих событий или распределения интересующих величин оцениваются как соответствующие частоты при многократном случайном генерировании последовательностей афтершоков. Преимущество второго подхода состоит в возможности перехода на конечном этапе к моделированию наиболее вероятного сотрясения конкретного здания или даже конкретного этажа благодаря подбору подходящей акселерограммы (записи ускорения движения, вызванного сейсмической волной). Отметим, однако, что в обоих подходах ключевую роль играет оценка параметров моделей. Конечный результат может варьировать в больших пределах, в особенности если невелико количество данных для оценки параметров. В таких случаях, очевидно, предпочтительны более простые модели с меньшим числом оцениваемых параметров.

На качество прогнозов влияет не только точность оценок параметров моделей. Определенные ограничения обусловлены и самими моделями, не в полной мере отражающими реальные процессы. Например, общепринятая в мировой практике модель ETAS (Epidemic type aftershock sequence [24, 25]), используемая для прогноза афтершоков, особенно в "сценарном" подходе, базируется, в дополнение к законам Гутенберга-Рихтера и Омори, на правиле подобия Утсу [32]. В соответствие с этим правилом предполагается, что логарифм числа афтершоков определенной магнитуды линейно зависит от магнитуды соответствующего основного толчка с коэффициентом наклона, называемым " α -value". В модели ETAS это правило распространяется и на вторичные афтершоки с теми же коэффициентами. В тех случаях, когда параметры модели ETAS оцениваются по начальной части афтершоковой последовательности после землетрясения, чаще всего происходит значительное завышение прогнозной активности последующих афтершоков по сравнению с реальной. Во втором разделе на основе результатов исследований по проекту РНФ "Создание информационной системы автоматической оценки сейсмической опасности после сильных землетрясений по данным геофизического мониторинга" делается ряд выводов относительно существующих в настоящее время подходов к прогнозу афтершоков, которые сводятся к необходимости ревизии используемых моделей.

Модели афтершокового процесса напрямую связаны с определением, что такое афтершок и с методами их идентификации. Поэтому прежде всего необходима ревизия подходов к выделению афтершоков. В настоящее время все методы сводятся к представлению, что афтершоки образуют иерархический каскад, в котором каждый афтершок порождается каким-либо одним сейсмическим событием. Как показано в первых двух разделах, это представление нуждается в пересмотре. В третьем разделе предлагается простейший алгоритм идентификации афтершоков на основе методов дискретного математического анализа. Главное отличие этого алгоритма от других методов состоит в том, что "предком" для "потомка" считается вся совокупность предыдущих сейсмических событий, включая как основной толчок, так и афтершоки. Предложенный алгоритм не претендует на роль алгоритма для повсеместного использования, задача состояла в том, чтобы наметить путь возможного решения проблемы.

2. Идентификация афтершоков

Как правило, считается, что сейсмичность состоит из двух частей: (1) землетрясения, которые являются независимыми и (2) землетрясения, возникающие под воздействием других землетрясений. Предполагается, что независимые землетрясения в основном вызваны медленно меняющимися тектоническими напряжениями. Вторая часть соответствует землетрясениям, вызванным изменениями статического или динамического напряжения, сейсмически активированными потоками жидкости, последующим скольжением по разломам и т. д., то есть механическими процессами, которые, по меньшей мере, частично контролируются предыду-

щими землетрясениями. Эти землетрясения обычно образуют выраженные пространственно-временные кластеры. Поэтому процесс разделения землетрясений на эти два класса известен как декластеризация ("declustering" в англоязычной литературе).

Идентификация фоновых землетрясений важна для многих применений в сейсмологии, в особенности для оценки сейсмической опасности. Однако это некорректная задача, так как не имеет единственного решения. При изучении больших тектонических зон можно построить множество различных подсистем землетрясений, которые моделируются как стационарный пуассоновский процесс. Действительно, для любого такого подмножества любое произвольно выбранное подмножество, например, путем случайного сохранения фоновых землетрясений с заданной фиксированной вероятностью, также будет построено как стационарный пуассоновский процесс. Поэтому требование о том, чтобы выбранные землетрясения были независимы друг от друга, само по себе не является достаточным. Таким образом, методы декластеризации должны опираться на концептуальную модель того, что является основным толчком в группе связанных между собой сейсмических событий. Формально афтершок может быть сильнее события, которое его вызвало. Но для сейсмологов интерес представляют сильнейшие в группе землетрясения.

Чтобы перейти к рассмотрению различных методов декластеризации, введем обозначения. Каталог землетрясений – это множество Q векторов $q = \{\varphi(q), \lambda(q), h(q), t(q), M(q)\}$, где компоненты вектора, соответственно, широта, долгота, глубина гипоцентра, время и магнитуда. Расстояние между гипоцентрами двух событий x и y будем обозначать $r(x, y)$.

До недавнего времени большинство пользователей применяли варианты метода декластеризации, предложенного в работе [8], часто именуемого "оконным методом". Каталог землетрясений в этом методе разбивается на два класса: 1) основные толчки и независимые события и 2) афтершоки. Афтершок определяется как событие x , для которого выполняется условие:

$$\exists y \in Q : r(x, y) \leq r_0(M(y)), 0 < t(x) - t(y) \leq t_0(M(y)), M(x) \leq M(y). \quad (1)$$

"Окна" $r_0(M)$ и $t_0(M)$ определяются магнитудой основного толчка, в работе [8] они заданы ступенчатыми функциями, которые хорошо аппроксимируются выражениями:

$$r_0(M) = 10^{0.1238 M + 0.983} [km], t_0(M) = \begin{cases} 10^{0.032 M + 2.7309}, & \text{if } M \geq 6.5 \\ 10^{0.5409 M - 0.547}, & \text{else} \end{cases} [days] \quad (2)$$

Недостатки этого метода в том, что он не учитывает протяженность и направленность очага землетрясения, региональные особенности, механизм очага. Кроме того, пространственный порог многим исследователям представляется сильно заниженным для сильных землетрясений.

Первый метод, основанный на кластерном анализе был предложен Савадж [29], усовершенствованный затем Ризенбергом [27]. Этот алгоритм связывает землетрясения с кластерами в соответствии с зонами пространственного и временного взаимодействия. Благодаря этому кластеры обычно растут в размерах при обработке все большего количества землетрясений. Пространственная протяженность зоны взаимодействия выбирается в соответствии с порогом $\log d(km) = 0, 4M - 0, 943$. Временное расширение зоны взаимодействия основано на законе Омори. Все связанные события определяют кластер, для которого наибольшее землетрясение считается основным толчком, а меньшие землетрясения разделены на афтершоки и форшоки. Процедура свободна от априорных предположений о пространственной структуре афтершоков, поэтому способна, например, выявить миграцию афтершоков. Существенный недостаток метода – частая идентификация ложных афтершоков [23]. Метод Ризенберга до настоящего времени был чрезвычайно популярным у американских сейсмологов, применявших его, однако, без оценивания результатов и с повсеместным использованием значений параметров, оптимизированных для сейсмичности Центральной Калифорнии.

Важным шагом в развитии методов идентификации афтершоков был метод Молчанова-Дмитриевой [23], ставший весьма популярным у российских сейсмологов благодаря свободно распространявшемуся компьютерному коду, подготовленному В. Смирновым [31]. В этом алгоритме отличие афтершоковой последовательности от потока фоновых землетрясений определяется различием функций распределения во времени и пространстве. Постулируется, что фоновые события представляют собой Пуассоновский поток с равномерной плотностью. Для афтершоковой последовательности принимается двумерная гауссова функция плотности распределения в пространстве (глубины афтершоков не рассматриваются) и степенная функция распределения во времени (закон Омори). Параметры распределений, определяющие, в конечном счете, величины фонового и афтершокового потоков, оцениваются локально в соответствии с выбранным разбиением исследуемой пространственно-временной области. При идентификации афтершоков возможны ошибки двух типов: отнесение афтершока к группе фоновых событий и, наоборот, идентификация фонового события как афтершока. Алгоритм строится таким образом, чтобы уравнивать эти ошибки, что обеспечивает равенство математического ожидания количества идентифицированных афтершоков их истинному значению. Недостаток этого метода в редких случаях проявляется в виде неоднозначности решения. Это происходит при специфической конфигурации афтершоковой области, когда она состоит из двух разделенных между собою областей, за счет того, что сильные афтершоки приурочены к противоположным концам очага. Другой недостаток – при локально небольшом числе событий, участвующих в анализе, очевидные афтершоки могут идентифицироваться как фоновые события. Во всех рассмотренных выше методах явно или неявно подразумевается, что каждый афтершок или форшок являются афтершоком или форшоком какого-то конкретного землетрясения. Широкое применение модели ETAS, в которой каждое событие в той или иной степени является в широком смысле афтершоком всех предыдущих, привело к появлению стохастических методов декластеризации. Впервые идея такого подхода сформулирована в работе [20]. В виде алгоритма такой подход был реализован в работе [36]. Ядром этого метода стохастической декластеризации является расчетная интенсивность фона, предполагаемая функцией пространства, но не времени, и параметры, связанные с кластерными структурами. Используя операцию прореживания для точечных процессов, можно оценить вероятности того, что каждое событие является фоновым событием или инициированным (triggered) событием. Пространственно-временная модель ETAS, на которой основана стохастическая декластеризация, может быть представлена условной интенсивностью в форме:

$$\lambda(t, \varphi, \lambda) = \mu(\varphi, \lambda) + \sum_{t_k < t} \kappa(M_k) g(t - t_k) f(\varphi - \varphi_k, \lambda - \lambda_k | M_k), \quad (3)$$

где $\mu(\varphi, \lambda)$ - функция интенсивности фона, а функции $g(t)$ и $f(\varphi, \lambda | M_k)$ являются соответственно нормированными функциями отклика для времени возникновения и местоположения. $\kappa(M_k)$ представляет ожидаемое число потомков от предка магнитуды M_k .

Алгоритм декластеризации строится на оценке параметров модели (3) и генерировании с помощью датчика случайных чисел цепочек событий, в каждой из которых каждый предок может иметь несколько потомков, но каждый потомок имеет лишь одного предка. Датчик случайных чисел, таким образом, используется для выбора конкретного предка из всех вероятных. Алгоритм, очевидным образом, не имеет единственного решения. Но в каждой конкретной реализации выделение кластеров однозначно. Для практических целей может использоваться набор реализаций. Данный алгоритм требует значительных вычислительных ресурсов как для оценки параметров модели, так и для построения цепочек событий. Оценки параметров модели весьма неустойчивы из-за огромного количества параметров. По-видимому, из-за указанных причин метод пока не нашел широкого применения.

Еще один метод стохастической декластеризации предложен в работе [22]. Метод предусмат-

ривает использование более широкого класса моделей по сравнению с (3). В этом алгоритме декомпозиция каталога на кластеры также осуществляется с помощью датчика случайных чисел, поэтому для практических целей необходимо использовать множество реализаций.

Афтершоки характеризуют пространственно-временное группирование событий. Поэтому многими исследователями предпринимались попытки ввести определение обобщенного расстояния в пространстве-времени. Первая достаточно удачная попытка была предпринята в работе [7]. В этой работе обобщенное расстояние определено как

$$d_{xy} = \sqrt{[r(x, y)]^2 + C^2 [t(y) - t(x)]^2}. \quad (4)$$

Для масштабирующего коэффициента C было найдено оптимальное значение $C = 1$ km/day. Афтершоком в данном методе считается событие y такое, что

$$\exists x \in Q : d_{xy} \leq D, t(y) > t(x).$$

В методе предполагается, у афтершока может быть только один основной толчок, который определяется минимизацией величины d относительно всех потенциальных основных толчков. Для величины D найдено оптимальное выражение $D = 9.4\sqrt{S_1} - 25.2[km]$, где S_1 -медиана всех обобщенных расстояний, выраженных в км.

Байеси и Пачуцки [1] предложили корреляционный вариант пространственно-временной метрики:

$$\nu(a, b) = \begin{cases} (t(b) - t(a)) \sim [r(a, b)]^{d_f} \sim 10^{-b \sim M(a)}, t(b) \geq t(a); \\ \infty, t(b) < t(a). \end{cases}, \quad (5)$$

где d_f - фрактальная размерность, характеризующая распределение эпи- или гипоцентров, и b - параметр закона Гутенберга-Рихтера. Малые значения этой метрики соответствуют зависимым событиям, а большие независимым. Авторами, однако, не было предложено формальное правило для нахождения порогового значения. Заляпин и др. [33] ввели определения перемасштабированных времени и расстояния, произведение которых равно величине ν (5):

$$T_{xy} = (t(x) - t(y)) 10^{-b M(x)/2}, R_{xy} = [r(x, y)]^{d_f} 10^{-b M(x)/2}. \quad (6)$$

Авторы проанализировали графики $R(T)$ в билогарифмическом масштабе и обнаружили четко разделенные популяции точек для каталога землетрясений Калифорнии и для синтетического каталога с использованием модели ETAS. Группа точек с малыми значениями R и T (связанные события) вытянута вдоль оси T , что очевидным образом соответствует закону Омори. Группа точек с большими R и T (независимые события, или "фон") расположена вдоль диагонали $R * T = const = \nu_0$, четко разделяющей две популяции. В дальнейшем Заляпин и Бен-Зион [34, 35] сформулировали простой и четкий алгоритм построения кластеров связанных событий. В этом алгоритме каждое событие может иметь несколько "потомков" (offspring в терминологии авторов), но каждый потомок может иметь только одного "предка" (parent в терминологии авторов). Потомок определен условием $\nu(a, b) \leq \nu_0$, а соответствующий ему предок находится по минимуму ν (5). Отметим, что такая иерархическая цепочка позволяет определить "ранг" афтершока, что может быть полезно, например, для выделения только непосредственных афтершоков, т.е. афтершоков первого ранга, для которых "предки" не являются "потомками" других событий.

Этот метод, благодаря простоте и убедительной демонстрации разделения связанных и независимых событий, быстро набирает популярность у сейсмологов. Было продемонстрировано, что величина ν (5) во многих регионах имеет бимодальное распределение, и нет необходимости построения графиков $R(T)$ для определения порога ν_0 . Были предложены разные методы алгоритмического определения этого порога. К недостаткам метода следует отнести

то, что очаги землетрясений рассматриваются как точки в пространстве и времени, хотя размеры очагов землетрясений близки размеру области афтершоков. Это представляет иногда и чисто техническую проблему: величина ν (5) равна 0, если эпицентры двух событий совпадают, даже если события разделены по времени десятками лет. Аналогично, при точном совпадении времени, величина ν остается равной 0 на очень больших расстояниях. Для устранения этих проблем приходится вводить дополнительные ограничения. Подводя итог этому разделу, отмечу, что все существующие на данный момент методы декластеризации сейсмичности ориентированы на представление сейсмичности как точечного процесса. Более того, популярность модели ETAS привела к представлению об афтершоках как об иерархическом каскаде от больших событий к малым: основной толчок порождает серию первичных афтершоков несколько меньшей силы, каждый из которых порождает вторичные афтершоки в среднем еще меньшей силы и т.д. Таким образом, доля сильных событий в последовательности афтершоков должна снижаться. По мнению автора (подтверждаемому результатами, упомянутыми в следующем разделе) такое представление ошибочно. Неверно оно и с точки зрения физики процесса. Напряжения в земной коре накапливаются в течение длительного времени. Именно эти напряжения являются причиной как основных толчков, так и афтершоков. Афтершоки возникают в результате неравномерного сброса напряжений вдоль очага землетрясения, в результате чего накопленные напряжения перераспределяются и затем продолжают сбрасываться в серии афтершоков. Таким образом, сложившаяся схема представления афтершоков в виде точечного процесса, хотя и очень удобна в плане применения статистических методов, несомненно требует ревизии.

3. Прогноз афтершоков

Анализ и моделирование афтершоковых процессов представляет интерес и с точки зрения оценки сейсмической опасности. После сильных землетрясений жители покидают жилища, для них приходится организовывать временные места проживания. Учреждения временно прекращают работу. Приходится временно останавливать работу электростанций и других объектов жизнеобеспечения. Все это связано с огромными финансовыми затратами. Поэтому всегда после сильных землетрясений возникают вопросы: следует ли ожидать повторные толчки? в течение какого времени? насколько они могут быть разрушительны?

В настоящее время существует два основных подхода для оценки опасности последующих афтершоков. Оба подхода основаны на моделях афтершоков. Первый метод базируется на оценке параметров модели и на этой основе оценке искомых величин. Обычно используются Байесовские оценки, позволяющие построить апостериорные распределения этих величин. Во втором подходе, сценарном, обычно используются более сложные модели, на основе которых многократно синтезируется искусственный каталог будущих землетрясений и вероятностные оценки величин делаются на основе подсчета частот повторения в разных реализациях.

В задачу данного раздела не ставится обзор существующих методов прогноза активности афтершоков. Эта тема в течение последних трех лет была темой подробных исследований в рамках проекта РНФ "Создание информационной системы автоматической оценки сейсмической опасности после сильных землетрясений по данным геофизического мониторинга" под руководством автора данной статьи. Результаты этих исследований позволяет сделать ряд выводов, на важнейших из которых и хотелось бы здесь остановиться.

Во-первых, существующие модели афтершоков позволяют получить определенные положительные результаты для прогноза афтершоков. В частности, удалось не только объяснить закон Бота [5], утверждающего, что разность магнитуд основного толчка и сильнейшего афтершока составляет в среднем единицу магнитуды, но и теоретически воспроизвести форму эмпирического распределения этой величины, полученной для 800 серий афтершоков от

землетрясений магнитуды 6.5 и выше в мире [30]. Более того, прямая суперпозиция законов Гутенберга-Рихтера и Омори (подход Ризенберга-Джонс [28]) позволила теоретически воспроизвести эмпирические распределения этой величины, зависящей от времени (чем больше прошло времени с момента основного толчка, тем ниже максимальная магнитуда последующих афтершоков) и обосновать Динамический закон Бота [3].

Во-вторых, представление об афтершоках как об иерархическом каскаде является удобным, но неверным упрощением. Такое представление опровергается статистикой времен сильнейших и вторых, третьих и т.д. по силе в своей серии афтершоков. Оказалось, что распределения этих величин в глобальном плане подчиняется закону Омори с тем же параметрами, что и все события представительной магнитуды [4] и, таким образом, магнитуды афтершоков не зависят от времени.

В-третьи, модель ETAS, занявшая позиции парадигмы для прогноза афтершоков, да и в многих других задачах, в особенности на Западе, требует пересмотра не только поскольку она реализует схему иерархического каскада афтершоков. Модель базируется на правиле подобия Утсу [32], в соответствие с которым предполагается, что логарифм числа афтершоков определенной магнитуды линейно зависит от магнитуды соответствующего основного толчка с коэффициентом наклона, называемым " α -value". Параметры этого правила подобия предполагаются одинаковыми на всех уровнях иерархии каскада. При генерировании синтетического каталога обычно число "потомков" либо фиксировано в зависимости от магнитуды "предка", либо генерируется в соответствии с распределением Пуассона. Но, как оказалось [30], в природе это распределение имеет вид экспоненциального распределения, то есть далеко от Пуассоновского, и имеет моду в нуле. Это вполне объясняет тот факт, что при попытках моделирования продолжения афтершокового процесса по его начальной стадии с оценкой параметров модели ETAS, результат часто оказывается сильно отличным от наблюдаемого в сторону завышения активности. Для преодоления этой проблемы обычно вводятся плохо обоснованные дополнительные условия. Анализ афтершоков, разделенных на уровни иерархии с использованием метода Заляпина-Бен-Зиона показало, что предположение о равенстве параметров правила подобия Утсу для разных уровней неверно. Оказалось, что количество "потомков" по мере снижения уровня иерархии при прочих равных условиях уменьшается.

В-четвертых, использование статистических оценок на основе существующих моделей афтершоков позволяет получить положительные результаты в прогнозе. Например, оценки магнитуды сильнейшего на последующем интервале афтершока по данным об афтершоках на предыдущем интервале оказываются в среднем на 20% эффективнее оценок по динамическому закону Бота, для которых используется лишь магнитуда основного толчка и время от его момента [2]. Вместе с тем, в-пятых, эффективность таких оценок имеет существенные ограничения. В частности, для оценок максимальной магнитуды последующих афтершоков источником ошибок является неточная оценка параметров используемой модели. Но, как оказалось, даже если бы параметры могли быть оценены точно, это привело бы к увеличению эффективности не более 100% по отношению к оценкам по динамическому закону Бота [2]. Такая эффективность не может рассматриваться как прорывная.

Таким образом, существующие модели афтершокового процесса требуют ревизии. Очевидно, что такие модели напрямую связаны с определением того, что является афтершоками и, соответственно, с методами их выделения в каталоге землетрясений, которые, как было показано в первом разделе, также нуждаются в ревизии.

4. ДМА-анализ афтершоков

Как было показано в первом разделе, существующие методы декластеризации сейсмичности можно разделить на два класса: детерминистские и стохастические. В первом случае

каждое сейсмическое событие считается либо основным толчком, либо афтершоком, либо форшоком. Во втором случае каждое событие является афтершоком каждого из предшествующих событий с какой-то вероятностью. Для практических целей стохастические методы приводятся к детерминистским, вводя пороговые значения вероятности. Все методы фактически построены на различных мерах близости между парами событий. Наиболее удачной мерой представляется мера (5), поскольку для этой меры продемонстрировано четкое региональное разделение зависимых и независимых событий [34]. Вместе с тем, ни одна из мер не учитывает протяженность очага сильного землетрясения и его ориентацию в пространстве. Не учитываются ошибки определения гипоцентров землетрясений. Не учитывается также и то, что причиной возникновения афтершоков являются не собственно основные толчки, а поле напряжений, сформированное до основного толчка, и, таким образом, основные толчки и афтершоки имеют общую причину.

Для преодоления перечисленных выше недостатков наиболее естественным решением является применение методов дискретного математического анализа (ДМА) с использованием нечеткой меры близости точки до множества точек [37, 6, 12, 13, 21, 15]. По мнению автора, методы ДМА хорошо подходят для решения данной задачи, поскольку они хорошо зарекомендовали себя для случаев с высокой долей шума [15, 17, 11], могут оперировать с данными с весьма неоднородной плотностью точек [16, 19, 18], моделируют представления человека о процессе [16, 19, 14, 18].

Ниже приводится описание простейшего алгоритма декластеризации, основанного на нечетких сравнениях. В качестве меры попарной близости двух сейсмических событий воспользуемся "функцией соседства" (neighborhood function) ν (5) [1, 33]. Предлагаемый алгоритм декластеризации каталога землетрясений является лишь первой попыткой применения методов ДМА для данной задачи, поэтому для перехода к нечеткой мере близости $\delta_a(b)$ от точки a до точки b , определенной на отрезке $[0, 1]$ здесь пока используется простейшее симметричное соотношение:

$$\delta_a(b) = \delta_b(a) = e^{-\nu(a,b)/\nu_0}, \quad (7)$$

где ν_0 - масштабный параметр. Каждая точка максимально "близка" к самой себе: $\delta_a(a) = 1$.

Цель данного алгоритма – формировать кластеры связанных между собой событий не относительно только сильнейших событий, а относительно подмножества, элементы которого связаны друг с другом, включая и сильнейшее событие. Для этого вводится определение нечеткой меры $P_A(x)$ принадлежности точки x подмножеству A [21]:

$$P_A(x) = \frac{\sum \delta_y(x) : y \in A}{|A|}. \quad (8)$$

С учетом структуры "функции соседства" (5), наиболее сильные события, тем не менее, должны играть существенную роль в формировании кластеров. Чтобы это учесть, мы вводим понятие ядра кластера A^0 , как подмножества, формируемого парами событий с "заведомо" сильными связями:

$$\exists x \neq y \in A^0 : \delta_y(x) \geq \delta_0; \delta_x(z) < \delta_0, \delta_y(z) < \delta_0 \forall z \in Q - A. \quad (9)$$

Для кластера может быть введено определение его радиуса:

$$R(A) = \frac{\sum_{x \neq y \in A} \delta_y(x)}{|A| (|A| - 1)}. \quad (10)$$

Для кластера, состоящего из одного элемента, принимается $R(A) = \delta_0$. Наконец, для построения кластеров связанных событий используются следующие условия:

$$P_A(x) \geq R(A^0), \forall x \in A - A^0, A \supset A^0, P_A(y) < R(A), \forall y \in Q - A. \quad (11)$$

Это определение является конструктивным, так как добавление новых элементов в кластер, в соответствии с определением (10), не увеличивает его радиус. Поиск кластеров начинается с первого события в упорядоченном по возрастанию времени каталоге землетрясений. Сначала строится ядро кластера, включающее выбранное событие. На втором шаге в кластер добавляются события в соответствии с условиями (11). Затем осуществляется переход к событию, которое еще не вошло ни в один из кластеров и т.д. С целью проверки работоспособности алгоритма мы применили его для декластеризации каталога землетрясений Камчатки за 2010-2018 гг. системы детальных сейсмологических наблюдений на Камчатке и прилегающих районах (ЕИССД), <http://www.emsd.ru/sdis>) [9]. Для этого региона применение метода работы [34] затруднено тем, что региональное распределение величины (5) имеет лишь один максимум, и, таким образом, нет четкого разделения независимых и связанных событий по этому параметру, как это имеет место в других регионах. Вместе с тем, малые значения параметра действительно соответствуют парам событий, для которых наименование "основной толчок – афтершок" или "форшок – основной толчок" не вызывает сомнений. Соответствующее пороговое значение было пересчитано в значение параметра δ_0 . За счет того, что радиус ядра кластера меньше значения параметра δ_0 , наш алгоритм позволяет выявить дополнительные по сравнению с ядром элементы. Такой подход оказался более оправданным по сравнению с простым увеличением порогового значения в методе [34]. Вместе с тем, алгоритм имеет определенные недостатки. Нет объективного правила выбора порога δ_0 . Хотелось также чтобы алгоритм учитывал топологию окружения кластеров, как это реализовано в алгоритме Молчана-Дмитриевой [23]. Вместе с тем, в данной статье автор и не ставил цели создания исчерпывающего алгоритма декластеризации сейсмичности. Главной целью автор считает привлечение внимание математиков к интересной задаче, имеющей важнейшие приложения в сейсмологии. Эта задача имеет прямое отношение и к другой важной задаче, которую автор затронул во втором разделе – прогнозу афтершоков.

5. Заключение

В данной работе на основе обзора существующих методов идентификации афтершоков (декластеризации) и критического анализа результатов применения существующих моделей афтершокового процесса для прогноза делается вывод о необходимости ревизии этих моделей и методов декластеризации. Главная задача – переход от представления об афтершоках как об иерархическом каскаде к более универсальному представлению, в котором предполагается взаимозависимость всех афтершоков и основного толчка. Предложен простейший алгоритм декластеризации, в котором с помощью методов дискретного математического анализа реализована схема идентификации афтершоков относительно основного толчка и совокупности всех предыдущих афтершоков.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Baiesi M., Paczuski M. Scale-free networks of earthquakes and aftershocks // Phys. Rev. E. 2004. Vol. 69.
2. Baranov S., Pavlenko V., Shebalin P. Forecasting aftershock activity: 4. Estimating maximum magnitude of subsequent aftershocks // Izvestiya, Physics of the Solid Earth. 2019. Vol. 55, no. 1.

3. Baranov S., Shebalin P. Forecasting aftershock activity: 3. Båth dynamic law // *Izvestiya, Physics of the Solid Earth*. 2018. Vol. 54, no. 6. P. 926–932.
4. Baranov S., Shebalin P. Global statistics of aftershocks of large earthquakes: independence of times and magnitudes // *Journal of Volcanology and Seismology*. 2018. Vol. 12, no. 6.
5. Bath M. Lateral inhomogeneities in the upper mantle // *Tectonophysics*. 1965. Vol. 2. P. 483–514.
6. Fuzzy logic algorithms in the analysis of electrotelluric data with reference to monitoring of volcanic activity / Sh.R. Bogoutdinov, S.M. Agayan, A.D. Gvishiani et al. // *Izvestiya. Physics of the Solid Earth*. 2007. Vol. 43, no. 7. P. 597–609.
7. Davis S., Frohlich C. Single-link cluster analysis of earthquakes aftershocks: decay laws and regional variations // *J. Geophys. Res.* 1991. Vol. 96. P. 6335–1350.
8. Gardner J., Knopoff L. Is the sequence of earthquakes in Southern California with aftershocks removed Poissonian? // *Bull. Seismol. Soc. Am.* 1974. Vol. 5. P. 1363–1367.
9. Gordeev E., Fedotov S., Chebrov V. Detailed Seismological Investigations in Kamchatka during the 1961–2011 period: main results // *Journal of Volcanology and Seismology*. 2013. Vol. 7, no. 1. P. 1–15.
10. Gutenberg B., Richter C. *Seismicity of the Earth*. Princeton Univ. Press, 1954.
11. Algorithm barrier with single learning class for strong earthquake-prone areas recognition / A.D. Gvishiani, S. Agayan, B. Dzeboev, I. Belov // *Geoinformatics Research Papers: Proceedings of Geophysical Center RAS*. 2017. Vol. 5, no. 1. P. 95.
12. Gvishiani A., Agayan S., Bogoutdinov S. Fuzzy recognition of anomalies in time series // *Doklady Earth Sciences*. 2008. Vol. 421, no. 1. P. 838–842.
13. Mathematical methods of geoinformatics. III. Fuzzy comparisons and recognition of anomalies in time series / A.D. Gvishiani, S.M. Agayan, Sh.R. Bogoutdinov et al. // *Cybernetics and Systems Analysis*. 2008. Vol. 44, no. 3. P. 309–323.
14. Recognition of strong earthquake-prone areas with a single learning class / A.D. Gvishiani, S.M. Agayan, B.A. Dzeboev, I.O. Belov // *Doklady Earth Sciences*. 2017. Vol. 474, no. 1. P. 546–551.
15. Fuzzy-based clustering of epicenters and strong earthquake-prone areas / A.D. Gvishiani, M.N. Dobrovolsky, S. Agayan, B. Dzeboev // *Environmental Engineering and Management Journal*. 2013. Vol. 12, no. 1. P. 1–10.
16. Gvishiani A., Dzeboev B., Agayan S. A new approach to recognition of the strong earthquake-prone areas in the Caucasus // *Izvestiya. Physics of the Solid Earth*. 2013. Vol. 49, no. 6. P. 747–766.
17. Gvishiani A., Dzeboev B., Agayan S. Fcazm intelligent recognition system for locating areas prone to strong earthquakes in the Andean and Caucasian mountain belts // *Izvestiya. Physics of the Solid Earth*. 2016. Vol. 52, no. 4. P. 461–491.

18. Significant earthquake-prone areas in the Altai-Sayan region / A.D. Gvishiani, B.A. Dzeboev, N.A. Sergeeva et al. // *Izvestiya, Physics of the Solid Earth*. 2018. Vol. 54, no. 3. P. 406–414.
19. Formalized clustering and significant earthquake-prone areas in the Crimean peninsula and Northwest Caucasus / A.D. Gvishiani, B.A. Dzeboev, N.A. Sergeeva, A.I. Rybkina // *Izvestiya. Physics of the Solid Earth*. 2017. Vol. 53, no. 3. P. 353–365.
20. Kagan Y., Jackson D. Long-term earthquake clustering // *Geophys. J. Intern.* 1991. Vol. 104. P. 117–133.
21. Fuzzy logic methods for geomagnetic events detections and analysis / R.G. Kulchinsky, E.P. Kharin, I.P. Shestopalov et al. // *Russian Journal of Earth Sciences*. 2010. Vol. 11, no. 4. P. 1–6.
22. Marsan D., Lengline O. A new estimation of the decay of aftershock density with distance to the mainshock // *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*. 2010. Vol. 115, no. B9.
23. Molchan G., Dmitrieva O. Aftershock identification: methods and new approaches // *Geophys. J. Int.* 1992. Vol. 109. P. 501–516.
24. Ogata Y. Statistical models for standard seismicity and detection of anomalies by residual analysis // *Tectonophysics*. 1989. Vol. 169. P. 159–174.
25. Ogata Y. Seismicity analysis through point-process modeling; a review // *PAGEOPH.* 1999. Vol. 155. P. 471–508.
26. Omori F. On the aftershocks of earthquake // *J. Coll. Sci. Imp. Univ. Tokyo*. 1894. Vol. 7. P. 111–200.
27. Reasenberg P. Second-order moment of Central California seismicity, 1969-1982 // *J. Geophys. Res.* 1985. Vol. 90. P. 5479–5495.
28. Reasenberg P., Jones L. Earthquake hazard after a mainshock in California // *Science*. 1989. Vol. 242. P. 1173–1176.
29. Savage W. Microearthquake clustering near Fairview Peak, Nevada, and in the Nevada Seismic Zone // *J. Geophys. Res.* 1972. Vol. 77, no. 35. P. 7049–7056.
30. Shebalin P., Baranov S., Dzeboev B. The law of the repeatability of the number of aftershocks // *Doklady Earth Sciences*. 2018. Vol. 481, no. 1. P. 963–966.
31. Smirnov V. Prognostic anomalies of seismic regime: methodical basis of data preprocessing // *Geofisicheskiye Issledovaniya*. 2009. Vol. 10, no. 2. P. 7–22.
32. Utsu T. A statistical study on the occurrence of aftershocks // *Geophys. Mag.* 1961. Vol. 30. P. 521–605.
33. Clustering analysis of seismicity and aftershock identification / I. Zaliapin, A. Gabrielov, V. Keilis-Borok, H. Wong // *Phys. Rev. Lett.* 2008. Vol. 101, no. 1. P. 1–4.
34. Zaliapin I., Ben-Zion Y. Earthquake clusters in Southern California I: Identification and stability // *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*. 2013. Vol. 118, no. 6. P. 2847–2864.
35. Zaliapin I., Ben-Zion Y. A global classification and characterization of earthquake clusters // *Geophysical Journal International*. 2016. Vol. 207, no. 1. P. 608–634.

36. Zhuang J. Y., Ogata K., Vere-Jones D. Stochastic declustering of space–time earthquake occurrences // *J. Am. Stat. Assoc.* 2002. Vol. 97. P. 369–380.
37. Automatic fuzzy–logic recognition of anomalous activity on long geophysical records: application to electric signals associated with the volcanic activity of La Fournaise volcano (Réunion island) / J. Zlotnicki, J.L. LeMouel, A. Gvishiani et al. // *Earth and Planetary Science Letters.* 2005. Vol. 234, no. 1–2. P. 261–278.

REFERENCES

1. M. Baiesi and M. Paczuski. 2004, "Scale–free networks of earthquakes and aftershocks", *Phys. Rev. E*, vol. 69.
2. S.V. Baranov, V.A. Pavlenko, and P.N. Shebalin. 2019, "Forecasting aftershock activity: 4. Estimating maximum magnitude of subsequent aftershocks", *Izvestiya, Physics of the Solid Earth*, vol 55, no. 1.
3. S.V. Baranov and P.N. Shebalin. 2018, "Forecasting aftershock activity: 3. Båth dynamic law", *Izvestiya, Physics of the Solid Earth*, vol. 54, no. 6, pp. 926–932.
4. S.V. Baranov and P.N. Shebalin. 2018, "Global statistics of aftershocks of large earthquakes: independence of times and magnitudes", *Journal of Volcanology and Seismology*, vol. 12, no. 6.
5. M. Bath. 1965 "Lateral inhomogeneities in the upper mantle", *Tectonophysics*, vol. 2, pp. 483–514.
6. Sh.R. Bogoutdinov, S.M. Agayan, A.D. Gvishiani, E.M. Graeva, M.V. Rodkin, J. Zlotnicki, and J.L. LeMouel. 2007, "Fuzzy logic algorithms in the analysis of electrotelluric data with reference to monitoring of volcanic activity", *Izvestiya. Physics of the Solid Earth*, vol. 43, no. 7, pp. 597–609.
7. S.D. Davis and C. Frohlich. 1991, "Single-link cluster analysis of earthquakes aftershocks: decay laws and regional variations", *J. Geophys. Res.*, vol. 96, pp. 6335–1350.
8. J. Gardner and L. Knopoff. 1974, "Is the sequence of earthquakes in Southern California with aftershocks removed Poissonian?" *Bull. Seismol. Soc. Am.*, vol. 5, pp.1363–1367.
9. E.I. Gordeev, S.A. Fedotov, and V.N. Chebrov. 2013, "Detailed seismological investigations in Kamchatka during the 1961–2011 Period: main results". *Journal of Volcanology and Seismology*, vol. 7, no. 1, pp.1–15.
10. B. Gutenberg and C.F. Richter. 1954, "*Seismicity of the Earth*". Princeton Univ. Press.
11. A.D. Gvishiani, S. Agayan, B. Dzeboev, and I. Belov. 2017, "Algorithm barrier with single learning class for strong earthquake–prone areas recognition", *Geoinformatics Research Papers: Proceedings of Geophysical Center RAS*, vol. 5, no. 1, p.95.
12. A.D. Gvishiani, S.M. Agayan, and Sh.R. Bogoutdinov. 2008, "Fuzzy recognition of anomalies in time series", *Doklady Earth Sciences*, vol. 421, no. 1, pp.838–842.
13. A.D. Gvishiani, S.M. Agayan, Sh.R. Bogoutdinov, J. Zlotnicki, and J. Bonnin. 2008, "Mathematical methods of geoinformatics. III. Fuzzy comparisons and recognition of anomalies in time series", *Cybernetics and Systems Analysis*, vol. 44, no. 3, pp.309–323.

14. A.D. Gvishiani, S.M. Agayan, B.A. Dzeboev, and I.O. Belov. 2017, "Recognition of strong earthquake-prone areas with a single learning class", *Doklady Earth Sciences*, vol. 474, no. 1, pp.546–551.
15. A.D. Gvishiani, M.N. Dobrovolsky, S. Agayan, and B. Dzeboev. 2013, "Fuzzy-based clustering of epicenters and strong earthquake-prone areas", *Environmental Engineering and Management Journal*, vol. 12, no. 1, pp.1–10.
16. A.D. Gvishiani, B. Dzeboev, and S. Agayan. 2013, "A new approach to recognition of the strong earthquake-prone areas in the Caucasus", *Izvestiya. Physics of the Solid Earth*, vol. 49, no.6, pp.747–766.
17. A.D. Gvishiani, B. Dzeboev, and S. Agayan. 2016, "FCAZM intelligent recognition system for locating areas prone to strong earthquakes in the Andean and Caucasian mountain belts", *Izvestiya. Physics of the Solid Earth*, vol. 52, no.4, pp.461–491.
18. A.D. Gvishiani, B.A. Dzeboev, N.A. Sergeeva, I.O. Belov, and A.I. Rybkina. 2018, "Significant earthquake-prone areas in the Altai-Sayan region", *Izvestiya, Physics of the Solid Earth*, vol. 54, no.3, pp. 406–414.
19. A.D. Gvishiani, B.A. Dzeboev, N.A. Sergeeva, and A.I. Rybkina. 2017 "Formalized clustering and significant earthquake-prone areas in the Crimean peninsula and Northwest Caucasus", *Izvestiya. Physics of the Solid Earth*, vol. 53, no. 3, pp. 353–365.
20. Y. Kagan and D. Jackson. 1991, "Long-term earthquake clustering", *Geophys. J. Intern.*, vol.104, pp.117–133.
21. R.G. Kulchinsky, E.P. Kharin, I.P. Shestopalov, A.D. Gvishiani, S.M. Agayan, and Sh.R. Bogoutdinov. 2010, "Fuzzy logic methods for geomagnetic events detections and analysis", *Russian Journal of Earth Sciences*, vol. 11, no.4, pp.1–6.
22. D. Marsan and O. Lengline. 2010, "A new estimation of the decay of aftershock density with distance to the mainshock", *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, vol. 115(B9).
23. G. Molchan and O. Dmitrieva. 1992, "Aftershock identification: methods and new approaches", *Geophys. J. Int.*, vol. 109, pp.501–516.
24. Y. Ogata. 1989, "Statistical models for standard seismicity and detection of anomalies by residual analysis", *Tectonophysics*, vol. 169, pp. 159–174.
25. Y. Ogata. 1999, "Seismicity analysis through point-process modeling; a review", *PAGEOPH*, vol. 155, pp.471–508.
26. F. Omori. 1894, "On the aftershocks of earthquake". *J. Coll. Sci. Imp. Univ. Tokyo*, vol.7, pp.111–200.
27. P. Reasenber. 1985, "Second-order moment of central California seismicity, 1969-1982" *J. Geophys. Res.*, vol. 90, pp.5479–5495.
28. P.A. Reasenber and L.M. Jones. 1989, "Earthquake hazard after a mainshock in California". *Science*, vol. 242, pp.1173–1176.
29. W.U. Savage. 1972, "Microearthquake clustering near Fairview Peak, Nevada, and in the Nevada seismic zone", *J. Geophys. Res.*, vol. 77, no. 35, pp. 7049–7056.

30. P.N. Shebalin, S.V. Baranov, and B.A. Dzeboev. 2018, "The law of the repeatability of the number of aftershocks", *Doklady Earth Sciences*, vol. 481, no.1, pp.963–966.
31. V.B. Smirnov. 2009, "Prognostic anomalies of seismic regime: methodical basis of data preprocessing", *Geofisicheskiye Issledovaniya*, vol. 10, no.2, pp.7–22.
32. T. Utsu. 1961, "A statistical study on the occurrence of aftershocks", *Geophys. Mag.*, vol.30, pp.521–605.
33. I. Zaliapin, A. Gabrielov, V. Keilis-Borok, and H. Wong. 2008, "Clustering analysis of seismicity and aftershock identification", *Phys. Rev. Lett.*, vol. 101, no.1, pp.1–4.
34. Ilya Zaliapin and Yehuda Ben-Zion. 2013, "Earthquake clusters in Southern California I: Identification and stability", *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, vol. 118, no.6, pp.2847–2864.
35. Ilya Zaliapin and Yehuda Ben-Zion. 2016, "A global classification and characterization of earthquake clusters", *Geophysical Journal International*, vol. 207, no.1, pp.608–634.
36. J. Y. Zhuang, K. Ogata, and D. Vere-Jones. 2002, "Stochastic declustering of space–time earthquake occurrences", *J. Am. Stat. Assoc.*, vol. 97, pp.369–380.
37. J. Zlotnicki, J.L. LeMouel, A. Gvishiani, S. Agayan, V. Mikhailov, S. Bogoutdinov, R. Kanwar, and P. Yvetot. 2005, "Automatic fuzzy–logic recognition of anomalous activity on long geophysical records: application to electric signals associated with the volcanic activity of La Fournaise volcano (Réunion island)", *Earth and Planetary Science Letters*, vol. 234, no.1–2, pp. 261–278.

Получено 27.07.2018

Принято в печать 22.10.2018

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 19. Выпуск 4

УДК 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-4-243-251

**Аналог теоремы даффина-шеффера для одного класса рядов
дирихле с конечнозначными коэффициентами**

Кузнецов Валентин Николаевич — доктор технических наук, профессор, профессор кафедры прикладной математики и системного анализа, Саратовский государственный технический университет им. Ю. А. Гагарина.

e-mail: Kuznetsov VN@info.sgu.ru

Матвеева Ольга Андреевна — кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры алгебры и теории чисел, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского.

e-mail: olga.matveeva.0@gmail.com

Аннотация

Известная теорема, доказанная Доффиним и Шеффером, утверждает, что ограниченность степенного ряда с конечнозначными коэффициентами в некотором секторе единичного круга равносильна периодичности его коэффициентов, начиная с некоторого номера. В работе указывается класс рядов Дирихле с конечнозначными коэффициентами, ограниченными в любой полосе правой полуплоскости комплексной плоскости константой, зависящей только от высоты полосы, для которых доказан аналог теоремы Даффина-Шеффера.

Ранее аналог теоремы Даффина-Шеффера был получен авторами для рядов Дирихле с мультипликативными коэффициентами. Методика доказательства этого результата позволила, в частности, решить известную проблему обобщенных характеров, поставленную в 1950 году Ю.В. Линником и Н.Г. Чудаковым.

В данной работе эта методика использована при доказательстве аналога Даффина-Шеффера для указанного класса рядов Дирихле с мультипликативными коэффициентами.

Ключевые слова: аппроксимационные полиномы Дирихле, аналитическое продолжение рядов Дирихле целым образом на комплексную плоскость, условие периодичности, начиная с некоторого номера, коэффициентов ряда Дирихле.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:

В. Н. Кузнецов, О. А. Матвеева. Аналог теоремы Даффина-Шеффера для одного класса рядов дирихле с конечнозначными коэффициентами // Чебышевский сборник, 2018, т. 19, вып. 4, с. 243–251.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 19. No. 4

UDC 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-4-243-251

Analogue of the Duffin – Scheffer theorem for one class of Dirichlet series with finite-valued coefficients

Kuznetsov Valentin Nikolaevich — doctor of technical sciences, professor, professor of the department of applied mathematics and systems analysis, Saratov State Technical University.

e-mail: Kuznetsov VN@info.sgu.ru

Matveeva Olga Andreevna — candidate of physical and mathematical sciences, assistant of the department of computer algebra and number theory, Saratov State University.

e-mail: olga.matveeva.0@gmail.com

Abstract

The well-known theorem, proved by Duffin and Scheffer, states that the boundedness of a power series with finite-valued coefficients in a certain sector of the unit circle is equivalent to the periodicity of its coefficients, starting from a certain number. The paper indicates the class of Dirichlet series with finite-valued coefficients bounded in any strip of the right half-plane of the complex plane by a constant depending only on the height of the strip, for which an analogue of Duffin – Scheffer theorem is proved.

Earlier, an analogue of the Duffin – Scheffer theorem was obtained by the authors for Dirichlet series with multiplicative coefficients. The method of proving this result allowed, in particular, to solve the well-known problem of generalized characters posed in 1950 by Yu.V. Linnik and N.G. Eccentric

In this paper, this technique is used to prove an analogue of the Duffin – Scheffer theorem for the indicated class of Dirichlet series with multiplicative coefficients.

Keywords: Dirichlet approximation polynomials, analytic continuation of the Dirichlet series to the complex plane, condition for periodicity of coefficients of Dirichlet series.

Bibliography: 15 titles.

For citation:

V. N. Kuznetsov, O. A. Matveeva, 2018, "Analogue of the Duffin – Scheffer theorem for one class of Dirichlet series with finite-valued coefficients", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 4, pp. 243–251.

1. Введение

Цель данной работы - для определенного класса рядов Дирихле с конечнозначными коэффициентами доказать аналог известной в теории степенных рядов теоремы Даффина-Шеффера, которая утверждает (см.[1]), что ограниченность в некотором секторе единичного круга степенного ряда с конечнозначными коэффициентами равносильна периодичности, начиная с некоторого места, коэффициентов этого ряда. Легко привести пример ряда Дирихле с конечнозначными, непериодичными коэффициентами, который ограничен в некоторой полосе: $0 < \sigma < \infty, |t| < \delta, (s = \sigma + it)$. Поэтому в работе изучаются ряды Дирихле с конечнозначными коэффициентами, которые ограничены в любой области: $0 < \sigma < \infty, |t| \leq T$, константой, зависящей только от величины T .

В основе изучения таких рядов Дирихле лежит аппроксимационный подход, разработанный в работах авторов [2]-[7], суть которого заключается в построении полиномов Дирихле, приближающих ряд Дирихле в правой полуплоскости комплексной плоскости и переносе отдельных свойств полиномов Дирихле на ряд Дирихле.

Ранее в работах [8]-[10] авторы получили условие периодичности коэффициентов для определенных классов рядов Дирихле с конечнозначными мультипликативными коэффициентами, выраженное в терминах поведения этих рядов на мнимой оси. В работе [8] получено условие аналитического продолжения ряда Дирихле целым образом на комплексную плоскость. В работах [9] и [10] показаны периодичность коэффициентов таких рядов Дирихле.

В данной работе показано, что основные идеи работ [8]-[10] удастся перенести на ряды Дирихле

$$f(s) = \sum_1^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, s = \sigma + it, \quad (1)$$

удовлетворяющих условиям:

1. a_n – конечнозначные коэффициенты;
2. сумматорная функция коэффициентов $S(x) = \sum_{n \geq x} a_n$ является ограниченной функцией;
3. для соответствующего степенного ряда $q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ выполняются условия:
 - существует конечный предел вида

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} q(x) = \alpha_0. \quad (2)$$

- для любого натурального k найдется такое $0 < \delta_k < 1$, что для всех $x \in [1 - \delta_k, 1]$

$$|q(x) - \alpha_0| < \frac{C}{\ln^k(1-x)}, \quad (3)$$

где константа C не зависит от x и k ;

4. ряд Дирихле (1) не имеет нулей при $\sigma \geq \sigma_0 > 1$. Более того, при $\sigma > 1 + \delta : |f(s)| > C$, где константа C зависит только от δ .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Условие (3) является более слабым, чем условие существования у ряда $q(x)$ в точке $x = 1$ односторонней производной вида

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} q'(x) = \alpha_1$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. *Ниже будет показано, что свойства 1.-3. обеспечивают ограниченность ряда Дирихле (1) в любой полосе, т.е. при $0 < \delta < \infty, |t| \leq T$:*

$$|f(s)| < C,$$

где константа C зависит только от T .

ЗАМЕЧАНИЕ 3. *В дальнейшем в работе рассматриваются только ряды Дирихле (1), удовлетворяющих условиям 1.-4.*

2. Аппроксимационные полиномы, их свойства

Последовательность полиномов Дирихле $Q_n(s)$ называется последовательностью аппроксимационных полиномов для ряда Дирихле (1), если выполняются условия (см. [6]-[8]) :

1. В любой полосе: $0 < \sigma_0 \leq \sigma < \infty, |t| \leq T$, последовательность полиномов $Q_n(s)$ равномерно сходится к функции $f(s)$, определенной рядом Дирихле (1);
2. Пусть $\varepsilon_n \rightarrow 0$. Тогда для любого ε_{n_0} наблюдается такое n_1 , что при $n \geq n_1$ в полосе $0 < \sigma_0 \leq \sigma < \infty, |t| \leq T$. Выполняется неравенство

$$|f(s) - Q_n(s)| < C \cdot \varepsilon_{n_0},$$

где константа C не зависит от n и ε_{n_0} ;

3. Для любой полосы: $0 < \sigma_0 \leq \sigma < \infty, |t| \leq T$, существует такое n_1 , что при $n \geq n_1$ нормы полиномов $Q_n(s)$ ограничены константы, зависящий только от величины T .

В работах [4],[6] показано, что в силу условий 1.-3. для рядов Дирихле (1) последовательность аппроксимационных полиномов определяется неоднозначно. В этих работах показано, что для ограниченных коэффициентов рядов Дирихле существует последовательность аппроксимационных полиномов вида

$$Q_n(s) = \sum_{k=1}^n \frac{a_k r_n^k}{k^s}, \quad (4)$$

где величина $r_n, 0 < r_n < 1$ своя для каждого n .

3. Граничное поведение рядов Дирихле (1)

Отметим, что в силу определения аппроксимационных полиномов функция $f(s)$, определенная рядом Дирихле (1), в любой полосе: $0 < \sigma < \infty, |t| \leq T$ ограничена константой, зависящей только от T .

В работах [4],[6] показано, что функция $f(s)$, определенная рядом Дирихле (1), является непрерывной в широком смысле на мнимой оси. В этом разделе докажем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. *Функция $f(s)$, определенная рядом Дирихле (1), является регулярной на мнимой оси.*

Доказательству теоремы предпошлем ряд утверждений, доказательство которых дословно повторяет доказательство аналогичных утверждений, приведенных в работе [9].

ЛЕММА 1. Для производной m -го порядка аппроксимационного полинома $Q_n(s)$ в полосе: $0 < \sigma_0 \leq \sigma < \infty, |t| \leq T$ имеет место оценка вида

$$\left| Q_n^{(m)}(s) \right| \leq C \ln^m n,$$

где константа C зависит только от величины T .

ЛЕММА 2. Пусть $Q_{n_k}(s)$ – последовательность аппроксимационных полиномов, где $n_k = k^k$ и где $k > 2$ – некоторое натуральное. Тогда в полосе: $0 < \sigma < \infty, |t| \leq T$ для любого m имеет место оценка вида

$$\left| Q_{(n+1)_k}(k)^{(m)} - Q_{n_k}^{(m)}(s) \right| = O\left(\frac{(n+1)^m \ln^m k}{n^l \ln^l k}\right),$$

где l – любое натуральное, а константа в символе « O » зависит от T и l .

Рассмотрим разложение функции $f(s)$ в ряд

$$f(s) = Q_{n_k}(s) + \sum_{n_k}^{\infty} (Q_{(n+1)_k}(s) - Q_{n_k}(s)),$$

который в силу леммы 2 абсолютно сходится при любом s из полосы: $0 < \sigma < \infty, |t| \leq T$. В результате его конечного дифференцирования имеем

$$f^{(m)}(s) = Q_{n_k}^{(m)}(s) + \sum_{n_k}^{\infty} (Q_{(n+1)_k}^{(m)}(s) - Q_{n_k}^{(m)}(s)) \quad (5)$$

В силу (5) и леммы 2 получаем следующее утверждение.

ЛЕММА 3. В полосе: $0 < \sigma < \infty, |t| \leq T$ для любого m имеет место оценка

$$\left| f^{(m)}(s) \right| = O\left(\frac{1}{(l-m-1)n_0^{l-m} \ln^{l-m} k}\right),$$

где k – натуральное, $k > 2$; l – натуральное, $l > m+1$; n_0 – некоторое натуральное, которое может быть достаточно большим; константа в символе « O » зависят от T и l .

Пусть C_l обозначает наименьшее число, входящее в символ « O » оценки леммы 3.

Имеет место (см. [9]).

ЛЕММА 4. Для константы C_l выполняется оценка

$$C_l \leq \left\| g^{(l)}(x) \right\|_{C[0,1-\varepsilon]},$$

где $g(x)$ – функция, определенная степенным рядом, соответствующим ряду Дирихле (1), ε – положительное число, меньшее, чем 1.

Из леммы 4 так же как и в работе [9] следует следующее утверждение.

ЛЕММА 5. Имеет место неравенство

$$\varlimsup_l \sqrt[l]{\frac{C_l}{l!}} < \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.

Рассмотрим формальный ряд Тейлора

$$f(s) = f(s_0) + \sum_1^{\infty} \frac{f^{(m)}(s_0)}{m!} (s - s_0)^m,$$

где s_0 лежит на мнимой оси, и покажем, что он имеет ненулевой радиус сходимости R .
Так как

$$\frac{1}{R} = \varlimsup_m \sqrt[m]{\frac{f^{(m)}(s_0)}{m!}},$$

то положив в лемме 3 $l = m + 2$ в силу леммы 5 получим

$$\frac{1}{R} = \varlimsup_m \sqrt[m]{\frac{l_m}{m!}} < \infty,$$

что и доказывает утверждение теоремы 1.

4. Аналитическое продолжение рядов Дирихле (1) целым образом на комплексную плоскость

В этом разделе будет показано, что в задаче аналитического продолжения рядов Дирихле (1) имеет место тот же подход, что и для рядов Дирихле с мультипликативными коэффициентами, разработанный авторами в работе [8]. А именно при аналитическом продолжении рядов (1) можно воспользоваться основными идеями принципа симметрии Римана-Шварца, изложенными в монографиях [11], [12].

Этот подход позволяет доказать следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. *Ряд Дирихле (1) продолжается как целая функция на комплексную плоскость.*

Приведем ряд утверждений, предшествующих доказательству теоремы 2.

ЛЕММА 6. *Для любого $\sigma_0 > 1$ существует n_0 , что при $n \geq n_0$ производные аппроксимационных полиномов вида (4) не имеют нулей в полуплоскости $\sigma \geq \sigma_0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Свойство 4. рядов Дирихле (1) позволяет утверждать, что частичные суммы $S_n(x)$ ряда Дирихле при $n \geq n_1$ не имеют нулей в полуплоскости $\sigma \geq \sigma_0$.

Этот факт позволяет перенести доказательство леммы 4 работы [8] на наш случай и доказать, что аппроксимационные полиномы $Q_n(s)$ вида (4) при $n \geq n_0$ не имеют нулей в полуплоскости $\sigma \geq \sigma_0$.

Рассмотрим последовательность областей D_k , ограниченных контурами Γ_k , состоящими из участков: $\Gamma_{k,1} : \sigma = \sigma_k, |t| \leq T_k$; $\Gamma_{k,2} : \sigma_k \leq \sigma \leq \sigma_{k+1}, t = T_k$; $\Gamma_{k,3} : \sigma = \sigma_{k+1}, |t| \leq T_k$; $\Gamma_{k,4} : \sigma_k \leq \sigma \leq \sigma_{k+1}, t = -T_k$, где $\sigma_k \rightarrow 1, \sigma_{k+1} \rightarrow \infty, T_k \rightarrow \infty$, при $k \rightarrow \infty$.

Пусть $Q_{n_k}(s)$ – последовательность аппроксимационных полиномов вида (4), удовлетворяющих лемме 6, т.е. $Q'_{n_k}(s) \neq 0$ при $\sigma \geq \sigma_k$. В этом случае имеет место

ЛЕММА 7. *Отображение $w = Q_{n_k}(s)$ является однолиственным конформным отображением области D_k на область $\hat{D}_k$. При этом контур Γ_k отображается в простой жордановый контур γ_k , который является границей области $\hat{D}_k$.*

Доказательство леммы 7 следует из результатов о конформных отображениях, приведенных в [12].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Как показано в [8] из результатов Римана о существовании конформного отображения области $\tilde{D}_k$ на единичный круг с центром в начале координат существует конформное отображение области D_k и круг радиуса R_k . Этот факт как и в работе [8] позволяет определить функцию $f_1(s)$ аналитическую в любой полуплоскости комплексной плоскости, и функция $f_1(s)$ определяет аналитическое продолжение функции $f(s)$ на комплексную плоскость, если только $f(s)$ регулярна на мнимой оси. Последний факт имеет место в силу теоремы 1. Таким образом, теорема 2 полностью доказана.

5. Теорема о периодичности, начиная с некоторого номера, коэффициентов рядов Дирихле (1)

Как уже отмечалось во введении в работе [8] был получен критерий аналитического продолжения целым образом на комплексную плоскость для рядов Дирихле с конечнозначными мультипликативными коэффициентами.

В работе [9] было показано, что этот критерий имеет место для рядов Дирихле, коэффициенты которых определяются значениями неглавных обобщенных характеров.

В работе [10] было показано, что ряды Дирихле, которые определяются неглавными обобщенными характерами продолжаются на комплексную плоскость как целые функции с определенным порядком роста модуля. В работе [13] было доказано, что последний факт обеспечивает периодичность коэффициентов.

Таким образом, результаты работ [8],[9],[10] решают известную проблему обобщенных характеров, поставленную в 1950 году Ю.В. Линником и Н.Г. Чудаковым (см. [14],[15]).

Результат данной работы так же непосредственно связан с результатами работ [8],[9],[10]. В предыдущих разделах было показано, что результаты работ [8],[9] позволили доказать аналитическое продолжение рядов Дирихле вида (1) целым образом на комплексную плоскость.

В данном разделе будет показано, что результаты работы позволяют доказать аналог теоремы Даффина-Шеффера для рядов Дирихле вида (1). Имеет место

ТЕОРЕМА 3. *Коэффициенты рядов Дирихле вида (1) являются периодическими, начиная с некоторого номера.*

Остановимся на основных моментах доказательства теоремы 3. Имеет место

ЛЕММА 8. *Модуль целой функции $f(s)$, определенной рядом Дирихле вида (1) удовлетворяет следующему условию*

$$|f(s)| < C_l^{|s| \ln|s| + A|s|}, \quad (6)$$

где A и C – некоторые положительные константы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Как было сказано ранее аналитическое продолжения ряда Дирихле (1) в левую полуплоскость комплексной плоскости осуществляется по той же схеме, что и в работе [8]. Поэтому доказательство оценки (6) проводится точно так же как и доказательство соответствующего результата работы [10].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.

В работе [13] доказано, что ряд Дирихле с конечнозначными коэффициентами тогда и только тогда определяет мероморфную с единственным возможным простым полюсом в точке $s = 1$ функцию с условием роста модуля.

$$|f(s)(s-1)| < C_l^{|s| \ln|s| + A|s|},$$

где C и A – некоторые положительные константы, когда коэффициенты этого ряда периодичны, начиная с некоторого номера. Этот результат с учетом леммы 8 доказывает утверждение теоремы 3.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бибербах Л. Аналитическое продолжение – М: Наука, 1970.
2. Матвеева О. А. Аппроксимационные полиномы и поведение L-функций Дирихле в критической полосе // Известия Саратов. ун-та. Математика, Механика. Информатика — Саратов: изд-во СГУ, 2013, Вып. 4, ч. 2, С. 80 – 84.
3. Матвеева О. А. Аналитические свойства определённых классов рядов Дирихле и некоторые задачи теории L-функций Дирихле: Диссертация на соискание учебной степени к. ф.-м.н. по специальности 01.01.06 – Ульяновск, 2014.
4. Кузнецов В. Н., Матвеева О. А. О граничном поведении одного класса рядов Дирихле с мультипликативными коэффициентами // Чебышевский сборник — Тула: изд-во ТПГУ, 2016, Т. 17, Вып. 2, С. 142 – 149.
5. Кузнецов В. Н., Матвеева О. А. Аппроксимационные полиномы Дирихле и некоторые свойства L-функций Дирихле // Чебышевский сборник — Тула: изд-во ТПГУ, 2017, Т. 18, Вып. 4, С. 196 – 204.
6. Кузнецов В. Н., Матвеева О. А. О граничном поведении одного класса рядов Дирихле с мультипликативными коэффициентами // Чебышевский сборник — Тула: изд-во ТПГУ, 2016, Т. 17, Вып. 3, С. 115 – 124.
7. Кузнецов В. Н., Матвеева О. А. К задаче аналитического продолжения рядов Дирихле с конечнозначными коэффициентами как целых функций на комплексную плоскость // Чебышевский сборник — Тула: изд-во ТПГУ, 2017, Т. 18, Вып 4, С. 205-2013.
8. Кузнецов В. Н., Матвеева О. А. Граничное поведение и задача аналитического продолжения одного класса рядов Дирихле с мультипликативными коэффициентами // Чебышевский сборник — Тула: изд-во ТПГУ, 2018, Т. 19, Вып 2.
9. Кузнецов В. Н., Матвеева О. А. К одной задаче Ю.В. Линника // Чебышевский сборник — Тула: изд-во ТПГУ, 2018, Т. 19, Вып 3.
10. Кузнецов В. Н., Матвеева О. А. К проблеме обобщенных характеров // Чебышевский сборник — Тула: изд-во ТПГУ, 2018, Т. 19, Вып 3.
11. Гурвиц А., Курант Р. Теория функций– М: Наука, 1968.
12. Маркушевич А. Н. Теория аналитических функций – М: Наука, 1967, Т.2.
13. Кузнецов В. Н. Аналог теоремы Сёге для одного класса рядов Дирихле // Мат. заметки, 1984, Т.36, № 6, С. 805-813.
14. Чудаков Н. Г., Линник Ю. В. Об одном классе вполне мультипликативных функций // ДАН СССР, 1950, Т. 74, №2. С. 133-136.
15. Чудаков Н. Г. Обобщенные характеры // Междунар. конгресс математиков в Ницце – 1970. Доклады советских математиков – М.: Наука, 1972, С. 335.

REFERENCES

1. Бибербах Л. Аналитическое продолжение – М: Наука, 1970.
2. Матвеева О. А. Аппроксимационные полиномы и поведение L-функций Дирихле в критической полосе // Известия Сарат. ун-та. Математика, Механика. Информатика — Саратов: изд-во СГУ, 2013, Вып. 4, ч. 2, С. 80 – 84.
3. Матвеева О. А. Аналитические свойства определённых классов рядов Дирихле и некоторые задачи теории L-функций Дирихле: Диссертация на соискание учебной степени к. ф.-м.н. по специальности 01.01.06 – Ульяновск, 2014.
4. Кузнецов В. Н., Матвеева О. А. О граничном поведении одного класса рядов Дирихле с мультипликативными коэффициентами // Чебышевский сборник — Тула: изд-во ТПГУ, 2016, Т. 17, Вып. 2, С. 142 – 149.
5. Кузнецов В. Н., Матвеева О. А. Аппроксимационные полиномы Дирихле и некоторые свойства L-функций Дирихле // Чебышевский сборник — Тула: изд-во ТПГУ, 2017, Т. 18, Вып. 4, С. 196 – 204.
6. Кузнецов В. Н., Матвеева О. А. О граничном поведении одного класса рядов Дирихле с мультипликативными коэффициентами // Чебышевский сборник — Тула: изд-во ТПГУ, 2016, Т. 17, Вып. 3, С. 115 – 124.
7. Кузнецов В. Н., Матвеева О. А. К задаче аналитического продолжения рядов Дирихле с конечнозначными коэффициентами как целых функций на комплексную плоскость // Чебышевский сборник — Тула: изд-во ТПГУ, 2017, Т. 18, Вып. 4, С. 205-2013.
8. Кузнецов В. Н., Матвеева О. А. Граничное поведение и задача аналитического продолжения одного класса рядов Дирихле с мультипликативными коэффициентами // Чебышевский сборник — Тула: изд-во ТПГУ, 2018, Т. 19, Вып. 2.
9. Кузнецов В. Н., Матвеева О. А. К одной задаче Ю.В. Линника // Чебышевский сборник — Тула: изд-во ТПГУ, 2018, Т. 19, Вып. 3.
10. Кузнецов В. Н., Матвеева О. А. К проблеме обобщенных характеров // Чебышевский сборник — Тула: изд-во ТПГУ, 2018, Т. 19, Вып. 3.
11. Гурвиц А., Курант Р. Теория функций– М: Наука, 1968.
12. Маркушевич А. Н. Теория аналитических функций – М: Наука, 1967, Т.2.
13. Кузнецов В. Н. Аналог теоремы Сёге для одного класса рядов Дирихле // Мат. заметки, 1984, Т.36, № 6, С. 805-813.
14. Чудаков Н. Г., Линник Ю. В. Об одном классе вполне мультипликативных функций // ДАН СССР, 1950, Т. 74, №2. С. 133-136.
15. Чудаков Н. Г. Обобщенные характеры // Междунар. конгресс математиков в Ницце – 1970. Доклады советских математиков – М.: Наука, 1972, С. 335.

Получено 27.07.2018

Принято в печать 22.10.2018

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 19. Выпуск 4

УДК 511

DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-4-252-258

Теорема о среднем для неполных рациональных
тригонометрических сумм¹

Чубариков Владимир Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математических и компьютерных методов анализа, декан механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

e-mail: chubarik2009@live.ru

Салиба Холем Мансур — кандидат физико-математических наук, доцент факультета естественных и прикладных наук университета Нотр-Дам-Луэз.

e-mail: qwe123@rocketmail.com

Аннотация

При $2k > 0.5n(n+1) + 1$, $0 \leq l \leq 0,5k - w - 1$, $w = [\ln n / \ln p]$ доказана асимптотическая формула для числа решений системы сравнений

$$\begin{cases} x_1 + \dots + x_k \equiv y_1 + \dots + y_k \pmod{p^m} \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ x_1^n + \dots + x_k^n \equiv y_1^n + \dots + y_k^n \pmod{p^m}, \end{cases}$$

где неизвестные $x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_k$ пробегает значения от 1 до p^{m-l} из полной системы вычетов по модулю p^m .

При $2k \leq 0.5n(n+1) + 1$ найденная формула не имеет места.

Пусть $1 \leq s < r < \dots < n$, $s + r + \dots + n < 0.5n(n+1)$, $0 \leq l \leq 0,5k - w - 1$. Тогда при $2k > s + r + \dots + n$ для числа решений системы сравнений

$$\begin{cases} x_1^s + \dots + x_k^s \equiv y_1^s + \dots + y_k^s \pmod{p^m} \\ x_1^r + \dots + x_k^r \equiv y_1^r + \dots + y_k^r \pmod{p^m} \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ x_1^n + \dots + x_k^n \equiv y_1^n + \dots + y_k^n \pmod{p^m}, \end{cases}$$

где неизвестные $x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_k$ принимают значения от 1 до p^{m-l} из полной системы вычетов по модулю p^m , найдена асимптотическая формула. Эта формула не имеет места при $2k \leq s + r + \dots + n$.

Ключевые слова: неполные рациональные тригонометрические суммы, метод Хуа Локена, показатель сходимости среднего значения неполных тригонометрических сумм

Библиография: 10 названий.

Для цитирования:

В. Н. Чубариков, Х. М. Салиба. Теорема о среднем для неполных рациональных тригонометрических сумм // Чебышевский сборник, 2018, т. 19, вып. 4, с. 252–258.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 16-01-00-071

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 19. No. 4

UDC 511

DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-4-252-258

Mean-value theorem for non-complete rational trigonometric sums

Chubarikov Vladimir Nikolaevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the department of mathematical and computer methods of analysis, dean of the mechanics and mathematics faculty of the M. V. Lomonosov Moscow State University.

e-mail: chubarik2009@live.ru

Saliba Holem Mansour — Ph.D. Assistant Professors of faculty of natural & applied sciences of Notre Dame University Louaize

e-mail: qwe123@rocketmail.com

Abstract

For $2k > 0.5n(n+1) + 1$ $0 \leq l \leq 0, 5k - w - 1$, $w = [\ln n / \ln p]$ the asymptotic formulas was proved for the number of solutions of the system of congruences

$$\begin{cases} x_1 + \dots + x_k \equiv y_1 + \dots + y_k \pmod{p^m} \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ x_1^n + \dots + x_k^n \equiv y_1^n + \dots + y_k^n \pmod{p^m}, \end{cases}$$

where unknowns $x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_k$ run values up 1 to p^{m-l} from the complete system residues by modulo p^m .

The finding formula for $2k \leq 0.5n(n+1) + 1$ has no the place.

Let be $1 \leq s < r < \dots < n, s + r + \dots + n < 0.5n(n+1)$, $0 \leq l \leq 0, 5k - w - 1$. Then as $2k > s + r + \dots + n$ for the number of the system of congruencies

$$\begin{cases} x_1^s + \dots + x_k^s \equiv y_1^s + \dots + y_k^s \pmod{p^m} \\ x_1^r + \dots + x_k^r \equiv y_1^r + \dots + y_k^r \pmod{p^m} \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ x_1^n + \dots + x_k^n \equiv y_1^n + \dots + y_k^n \pmod{p^m}, \end{cases}$$

where unknowns $x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_k$ run values up 1 to p^{m-l} from the complete system residues by modulo p^m , was found the asymptotic formula. This formula has no place as $2k \leq s + r + \dots + n$.

Keywords: non-complete rational trigonometric sums, Hua Loo-keng's method, the exponent of convergence of the average value of non-complete trigonometric sums

Bibliography: 10 titles.

For citation:

V. N. Chubarikov, H. M. Saliba, 2018, "Mean-value theorem for non-complete rational trigonometric sums", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 4, pp. 252–258.

1. Введение

В настоящей работе мы продолжаем исследования по методу тригонометрических сумм ([1]-[10]).

Полной рациональной тригонометрической суммой называют сумму вида

$$S(q; F) = \sum_{x=1}^q e^{2\pi i \frac{F(x)}{q}},$$

где q — натуральное число, $F(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x$ — многочлен с целыми коэффициентами, которые в совокупности взаимно просты с q . Как известно, асимптотические формулы для числа решений в аддитивных задачах теории чисел содержат в себе их средние значения вида

$$\sigma = \sum_{q=1}^{+\infty} \sum_{\substack{a_n=0 \\ (a_n, \dots, a_1, q)=1}}^{q-1} \dots \sum_{a_1=0}^{q-1} |q^{-1} S(q; F)|^{2k},$$

где степень осреднения $2k$ равна количеству переменных в аддитивной задаче.

Хуа Ло-кен [2] доказал, что ряд σ сходится при $2k > 0, 5n(n+1) + 2$ и расходится при $2k \leq 0, 5n(n+1) + 2$. Как показал второй автор этой статьи [6], для многочлена вида

$$F(x) = a_n x^n + \dots + a_r x^r + a_m x^m,$$

где $1 \leq m < r < \dots < n, m+r+\dots+n < 0, 5n(n+1)$, ряд

$$\sigma' = \sum_{q=1}^{+\infty} \sum_{\substack{a_n=0 \\ (a_n, \dots, a_r, a_m, q)=1}}^{q-1} \dots \sum_{a_r=0}^{q-1} \sum_{a_m=0}^{q-1} |q^{-1} S(q; F)|^{2k}$$

будет сходиться при $2k > m+r+\dots+n+1$ и расходиться при $2k \leq m+r+\dots+n+1$.

2. Неполные суммы и их средние значения

Рассмотрим неполную рациональную тригонометрическую сумму вида

$$S(p^m; m-l, f(x)) = \sum_{x=1}^{p^{m-l}} e^{2\pi i f(x)}, \quad (1)$$

$$f(x) = \sum_{s=1}^n \frac{a_s x^s}{p^{m_s}}, (a_s, p) = 1, m_s \leq m; l > 0.$$

Оценка такой суммы найдена в работе [9]. Её среднее значение $N(p^m; m-l)$ имеет вид

$$\begin{aligned} N(p^m; m-l) &= p^{-mn} \sum_{\max\{m_n, \dots, m_1\} \leq m} 1 \times \\ &\times \sum_{\substack{a_n=0 \\ (a_n, p)=1}}^{p^{m_n}-1} \dots \sum_{\substack{a_1=0 \\ (a_1, p)=1}}^{p^{m_1}-1} |S(p^m; m-l, f(x))|^{2k}. \end{aligned} \quad (2)$$

При $l = 0$ сумма $S(p^m; f) = S(p^m; m, f)$ будет полной рациональной тригонометрической суммой. Асимптотика среднего значения полных сумм получена в работе [10].

Положим $t = \max\{m_1, \dots, m_n\}$. Из (2) получим

$$\begin{aligned}
 N(p^m; m-l) &= p^{-mn} \sum_{t=0}^m \sum_{a_n=0}^{p^t-1} \cdots \sum_{\substack{a_1=0 \\ (a_n, \dots, a_1, p)=1}}^{p^t-1} \left| S \left(p^m; m-l, \frac{a_n x^n + \cdots + a_1 x}{p^t} \right) \right|^{2k} = \\
 &= p^{2k(m-l)-mn} \sum_{t=0}^{m-l} \sum_{a_n=0}^{p^t-1} \cdots \sum_{\substack{a_1=0 \\ (a_n, \dots, a_1, p)=1}}^{p^t-1} \left| p^{-t} S \left(p^t; \frac{a_n x^n + \cdots + a_1 x}{p^t} \right) \right|^{2k} + \\
 &+ p^{-mn} \sum_{t=m-l+1}^m \sum_{a_n=0}^{p^t-1} \cdots \sum_{\substack{a_1=0 \\ (a_n, \dots, a_1, p)=1}}^{p^t-1} \left| S \left(p^t; m-l, \frac{a_n x^n + \cdots + a_1 x}{p^t} \right) \right|^{2k} = \\
 &= p^{2k(m-l)-mn} \sigma(p^{m-l}) + \sigma'.
 \end{aligned} \tag{3}$$

Запишем все рациональные коэффициенты многочлена в экспоненте суммы как дроби со знаменателем p^m . Получим

$$N(p^m; m-l) = p^{-mn} \sum_{a_n=0}^{p^m-1} \cdots \sum_{a_1=0}^{p^m-1} \left| S \left(p^m; m-l, \frac{g(x)}{p^m} \right) \right|^{2k}, \quad g(x) = \sum_{s=1}^n a_s x^s,$$

что равно числу решений следующей системы сравнений

$$\begin{cases} x_1 + \cdots + x_k \equiv y_1 + \cdots + y_k \pmod{p^m} \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ x_1^n + \cdots + x_k^n \equiv y_1^n + \cdots + y_k^n \pmod{p^m}, \end{cases}$$

где неизвестные $x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_k$ принимают значения из полной системы вычетов по модулю p^{m-l} .

Справедливы следующие утверждения.

Пусть $w = [\ln n / \ln p]$, $p^\tau \parallel (na_n, \dots, 2a_2, a_1)$, тогда $\tau \leq w$.

Определим, следуя Хуа Ло-куну ([2], p.217), решения

$$x = \xi_1 + p\xi_2 + \cdots + p^{s-1}\xi_s + \dots \tag{4}$$

сравнения $f'(x) \equiv 0 \pmod{p^k}$ следующим образом

$$p^{-\tau_0} f'(\xi_1) \equiv 0 \pmod{p}, p^{u_1} g_{\xi_1}(x) = f(\xi_1 + px) - f(\xi), \tag{5}$$

где коэффициенты полиномов $g_{\xi_1}(x)$ и число p не имеют общего множителя, отличного от 1, и далее по аналогии для $s \geq 1$ положим

$$p^{-\tau_{s-1}} g_{(\xi_1, \dots, \xi_{s-1})}(\xi_s) \equiv 0 \pmod{p}, \tag{6}$$

$$p^{u_r} g_{(\xi_1, \dots, \xi_r)}(x) = g_{(\xi_1, \dots, \xi_{r-1})}(\xi_r + px) - g_{(\xi_1, \dots, \xi_{r-1})}(\xi_r), \tag{7}$$

$$k_s = k_{s-1} - u_s, l_s = l_{s-1} - u_s + 1. \tag{8}$$

Лемма 1. Пусть неравенства $k_{r-1} \geq 2(l_{r-1} + w + 1)$, $k_r < 2(l_r + w + 1)$ определяют число r . Тогда имеем

$$S(p^k; k-l, f) = \sum_{(\xi_1, \dots, \xi_r)} e \left(\frac{f(\xi_1)}{p^k} + \frac{g_{\xi_1}(\xi_2)}{p^{k_1}} + \cdots + \frac{g_{\xi_1, \dots, \xi_{r-1}}(\xi_r)}{p^{k_{r-1}}} \right) \times$$

$$\times S(p^{k_r}; k_r - l_r, g_{(\xi_1, \dots, \xi_r)}).$$

Лемма 2. Пусть r — наименьшее число по всем решениям $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r)$, определённым в (4)–(8), и удовлетворяющим неравенствам $k_{r-1} \geq 2(l_{r-1} + w + 1)$, $k_r < 2(l_r + w + 1)$. Тогда

$$|S(p^k; k - l, f)| \leq (n - 1)p^{k-l-r}.$$

Доказательство лемм 1 и 2 ([9], теоремы 1 и 2).

Теорема 1. Пусть $n \geq 2$, m — натуральные числа, p — простое число. Тогда при $2k > \frac{n(n+1)}{2} + 1$, $0 \leq l \leq 0$, $5k - w - 1$ и $m \rightarrow \infty$ имеем

$$N(p^m; m - l) = p^{2k(m-l)-mn}(\sigma_p + O(m^n p^{((m-1)/n)(0,5n(n+1)+1-2k)})),$$

где

$$\sigma_p = 1 + \sum_{t=1}^{+\infty} A(p^t), \quad A(p^t) = \sum_{\substack{a_n=0 \\ (a_n, \dots, a_1, p)=1}}^{p^t-1} \cdots \sum_{a_1=0}^{p^t-1} |p^{-t} S(p^t; (a_n x^n + \dots + a_1 x)/p^t)|^{2k},$$

$$S(p^t; (a_n x^n + \dots + a_1 x)/p^t) = \sum_{x=1}^{p^t} e^{2\pi i \frac{a_n x^n + \dots + a_1 x}{p^t}}.$$

Доказательство. Так как ряд σ_p сходится при $2k > \frac{n(n+1)}{2} + 1$ и

$$A(p^t) \leq n^{2k} (tp)^n p^{((t-1)/n)(0,5n(n+1)+1-2k)}$$

(см. [5], с.69), то из формулы (1), пользуясь оценками лемм 1 и 2, имеем

$$\begin{aligned} N(p^m; m - l) &= p^{2k(m-l)-mn} \sigma(p^{m-l}) + \sigma' = \\ &= p^{2k(m-l)-mn} (\sigma_p + O(m^n p^{((m-1)/n)(0,5n(n+1)+1-2k)})) + \sigma', \end{aligned}$$

где сумма σ' определена в (3) и имеет вид

$$\sigma' = p^{-mn} \sum_{t=m-l+1}^m \sum_{\substack{a_n=0 \\ (a_n, \dots, a_1, p)=1}}^{p^t-1} \cdots \sum_{a_1=0}^{p^t-1} \left| S\left(p^t; m - l, \frac{a_n x^n + \dots + a_1 x}{p^t}\right) \right|^{2k}.$$

Теорема 1 доказана.

Утверждение следующей теоремы 2 основано на сходимости ряда σ'_p при $2k > s + r + \dots + n$ (см. [4], с.71, теорема 5).

Теорема 2. Пусть $1 \leq s < r < \dots < n$, m — натуральные числа, количество чисел $s, r, \dots, n$ равно l , причём $l < n$, и пусть $p > n$ — простое число, $N_l(p^m)$ — число решений системы сравнений

$$\begin{cases} x_1^s + \dots + x_k^s \equiv y_1^s + \dots + y_k^s \pmod{p^m} \\ x_1^r + \dots + x_k^r \equiv y_1^r + \dots + y_k^r \pmod{p^m} \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ x_1^n + \dots + x_k^n \equiv y_1^n + \dots + y_k^n \pmod{p^m}, \end{cases}$$

где неизвестные $x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_k$ принимают значения из полной системы вычетов по модулю p^m . Тогда при $2k > s + r + \dots + n$ и $m \rightarrow \infty$ имеем

$$N_l(p^m) = p^{m(2k-l)} (\sigma'_p + O(m^n p^{((m-1)/n)(s+r+\dots+n-2k)})),$$

$$\sigma'_p = 1 + \sum_{t=1}^{+\infty} A_t(p^t), A_t(p^t) = \sum_{\substack{a_n=0 \\ (a_n, \dots, a_r, a_s, p)=1}}^{p^t-1} \cdots \sum_{a_r=0}^{p^t-1} \sum_{a_s=0}^{p^t-1} |p^{-t} S(p^t; a_n x^n + \cdots + a_r x^r + a_s x^s)|^{2k},$$

$$S(p^t; (a_n x^n + \cdots + a_r x^r + a_s x^s)/p^t) = \sum_{x=1}^{p^t} e^{2\pi i \frac{a_n x^n + \cdots + a_r x^r + a_s x^s}{p^t}}.$$

3. Заключение

Было бы интересно получить асимптотические формулы теорем 1 и 2 для более коротких неполных рациональных тригонометрических сумм. Авторы предполагают продолжить исследование подобных вопросов для кратных рациональных тригонометрических, начатые вторым автором настоящей статьи [7]-[6]. Но ещё больший интерес представляют оценки очень коротких рациональных тригонометрических и арифметических сумм.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Виноградов И.М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел. — М.: Наука, 1980.
2. Hua L.-K. Selected Papers. — New York Inc.: Springer Verlag, 1983, p. 888.
3. Архипов Г. И. Избранные труды. Орел: Изд-во Орловского гос.ун-та, 2013. 464 с.
4. Архипов Г.И., Карацуба А.А., Чубариков В.Н. Теория кратных тригонометрических сумм. — М.: Наука. 1987.
5. Arkhipov G.I., Chubarikov V.N., Karatsuba A.A. Trigonometric Sums in Number Theory and Analysis. — Berlin–New York: Walter de Gruyter (de Gruyter Expositions in Mathematics 39). 2004.
6. Чубариков В. Н. Об асимптотических формулах для интеграла И.М.Виноградова и его обобщений // Тр.МИАН., 1981, т.157, 214–232.
7. Чубариков В. Н. Кратные полные рациональные арифметические суммы от значений многочлена // Докл.РАН., 2018, т.478, № 1, 22–24.
8. Архипова Л. Г., Чубариков В. Н., Показатель сходимости особого ряда одной многомерной проблемы // Вестн. Моск. ун-та. Сер. I, Математика, механика. 2018. № 5. 59-62.
9. Saliba H. M. On non-complete rational trigonometric sums // Чебышевский сборник. 2018. т. 19. № 3.
10. Чубариков В. Н., Об одной теореме о среднем // Вестн. Моск. ун-та. Сер. I, Математика, механика. 2019. № 1. 59-62.

REFERENCES

1. Vinogradov I. M., 1980, *Metod trigonometricheskikh summ v teorii chisel*. M.: Nauka.
2. Hua L.-K. 1983, *Selected Papers*. New York Inc.: Springer Verlag, p. 888.
3. Arhipov G. I. 2013, *Izbrannye trudy*. Orel: Izd-vo Orlovskogo gos.un-ta, p. 464.

4. Arhipov G. I., Karacuba A. A., Chubarikov V. N. 1987, *Teoriya kratnyh trigonometricheskikh summ*. M.: Nauka.
5. Arkhipov G.I., Chubarikov V.N., Karatsuba A.A. 2004, *Trigonometric Sums in Number Theory and Analysis*. Berlin–New York: Walter de Gruyter (de Gruyter Expositions in Mathematics 39).
6. Chubarikov V. N. 1981, "Ob asimptoticheskikh formulah dlya intngrala I. M. Vinogradova i ego obobshchenij", *Tr.MIAN.*, vol. 157, pp. 214–232.
7. Chubarikov V. N. 2018, "Kratnye polnye racional'nye arifmeticheskie summy ot znachenij mnogochlena", *Dokl.RAN.*, 2018, vol. 478, № 1, pp. 22–24.
8. Arhipova L. G., Chubarikov V. N., 2018, "Pokazatel' skhodimosti osobogo ryada odnoj mnogomernoj problemy", *Vestn. Mosk. un-ta. Ser.I, Matematika, mekhanika*. № 5. pp. 59-62.
9. Saliba H. M. 2018, "On non-complete rational trigonometric sums", *Chebyshevskii sbornik*. vol. 19. № 3.
10. Chubarikov V. N., 2019, "Ob odnoj teoreme o srednem", *Vestn. Mosk. un-ta. Ser.I, Matematika, mekhanika*. 2019. № 1. pp. 59-62.

Получено 27.07.2018

Принято в печать 22.10.2018

РЕДКОЛЛЕГИЯ

Том 19 Выпуск 4

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Чубариков Владимир Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математических и компьютерных методов анализа, декан механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

e-mail: chubarik2009@live.ru

ЗАМЕСТИТЕЛИ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

Добровольский Николай Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой алгебры, математического анализа и геометрии Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого.

e-mail: dobrovol@tsput.ru

Михалёв Александр Васильевич — доктор физико-математических наук, профессор механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

e-mail: mikhalev@shade.msu.ru

Нижников Александр Иванович — доктор педагогических наук, профессор, заведующий кафедрой математической физики Московского педагогического государственного университета, заслуженный работник высшей школы Российской Федерации.

e-mail: ainizhnikov@mail.ru, nizhnikov.ai@mail.ru

ПРИГЛАШЕННЫЙ РЕДАКТОР

Соловьёв Анатолий Александрович — доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, заместитель директора по науке, заведующий лабораторией, главный научный сотрудник, Геофизический центр РАН; ведущий научный сотрудник, Институт физики Земли им. О. Ю. Шмидта РАН.

e-mail: a.soloviev@gcras.ru

ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ

Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры прикладной математики и информатики Тульского государственного университета.

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

ЧЛЕНЫ РЕДКОЛЛЕГИИ

Артамонов Вячеслав Александрович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей алгебры механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

e-mail: viacheslav.artamonov@gmail.com

Быковский Виктор Алексеевич — доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, заместитель директора по научной работе Федерального государственного бюджетного учреждения науки «Институт прикладной математики Дальневосточного отделения Российской академии наук» (ИПМ ДВО РАН), директор Хабаровского отделения ИПМ ДВО РАН.

e-mail: vab@iam.khv.ru

Востоков Сергей Владимирович — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры алгебры и теории чисел Санкт-Петербургского университета, президент фонда им. Л. Эйлера.

e-mail: sergei.vostokov@gmail.com

Гвоздев Александр Евгеньевич — доктор технических наук, профессор, профессор кафедры технологии и сервиса Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого.

e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru

Георгиевский Дмитрий Владимирович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теории упругости механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

e-mail: georgiev@mech.math.msu.su

Глухов Михаил Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, академик-секретарь отделения математических проблем криптографии Академии криптографии Российской Федерации.

e-mail: glukhovmm@rambler.ru

Гриценко Сергей Александрович — доктор физико-математических наук, профессор кафедры Математика 1 Финансового университета при Правительстве РФ, профессор механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова.

e-mail: s.gritsenko@gmail.com

Демидов Сергей Сергеевич — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры теории вероятностей механико-математического факультета МГУ, заведующий кабинетом истории и методологии математики и механики, зав. Отделом истории физико-математических наук Института истории естествознания и техники РАН, Главный редактор «Историко-математических исследований», Президент Международной Академии истории науки.

e-mail: serd42@mail.ru

Дурнев Валерий Георгиевич — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой компьютерной безопасности и математических методов обработки информации Ярославского государственного университета.

e-mail: durnev@univ.uniyar.ac.ru

Есаян Альберт Рубенович — доктор педагогических наук, профессор, Институт стратегии развития образования РАО.

e-mail: esayanalbert@mail.ru

Зубков Андрей Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математической статистики и случайных процессов механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, заведующий Отделом дискретной математики Математического института им. В. А. Стеклова РАН.

e-mail: zubkov@mi.ras.ru

Иванов Валерий Иванович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики и информатики Института прикладной математики и компьютерных наук Тульского государственного университета.

e-mail: ivaleryi@mail.ru

Карташов Владимир Константинович — кандидат физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой алгебры, геометрии и информатики Волгоградского государственного социально-педагогического университета.

e-mail: kartashovvk@yandex.ru

Королёв Максим Александрович — доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник кафедры алгебры и теории чисел Математического института им. В. А. Стеклова РАН.

e-mail: korolevma@mi.ras.ru

Кузнецов Валентин Николаевич — доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой Саратовского государственного университета имени Н. Г. Чернышевского.

e-mail: kuznetsovvn@info.sgu.ru

Латышев Виктор Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры Высшей алгебры механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

e-mail: latyshev@basis.math.msu.su

Матиясевич Юрий Владимирович — доктор физико-математических наук, профессор, академик Российской академии наук, советник РАН Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова РАН, президент Санкт-Петербургского математического общества.

e-mail: yumat@pdmi.ras.ru

Мищенко Сергей Петрович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой алгебро-геометрических вычислений Ульяновского государственного университета.

e-mail: mishchenkosp@mail.ru

Нестеренко Юрий Валентинович — доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН, заведующий кафедрой теории чисел механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

e-mail: nester@mi.ras.ru

Панин Владимир Алексеевич — доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН, ректор Тульского государственного педагогического университета имени Л. Н. Толстого.

e-mail: tgpu@tula.net

Фомин Александр Александрович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой алгебры Московского педагогического государственного университета.

e-mail: alexander.fomin@mail.ru

Чирский Владимир Григорьевич — доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой теории чисел Московского педагогического государственного университета, профессор механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Белов Алексей Яковлевич — доктор физико-математических наук, федеральный профессор математики, профессор университета Бар Илана, Рамат Ган, Израиль.

e-mail: Kanelster@gmail.com

Берник Василий Иванович (Белоруссия) — доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Института математики НАН Белоруссии.

e-mail: bernik@im.bas-net.by

Касьянов Павел Олегович (Украина) — доктор физико-математических наук, профессор, руководитель исследовательского отдела Учебно-научного комплекса комплекс «Институт прикладного системного анализа» НТУУ «КПИ» МОН и НАН Украины.

e-mail: kasyanov@i.ua

Лауринчикас Антанас (Литва) — доктор физико-математических наук, профессор, Действительный член Академии наук Литвы, заведующий кафедрой теории вероятностей и теории чисел Вильнюсского университета.

e-mail: antanas.laurincikas@mif.vu.lt

Лю Юнпин (Китай) — доктор наук, профессор, руководитель Исследовательского центра современного математического анализа Пекинского педагогического университета.

e-mail: ypliu@bnu.edu.cn

Мисир Джумаил оглы Марданов (Азербайджан) — доктор физико-математических наук, профессор, директор Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

e-mail: rmi@lan.ab.az

Рахмонов Зарулло Хусейнович (Таджикистан) — доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент Академии наук Республики Таджикистан, директор Института математики Таджикской АН.

e-mail: zarullo_r@tajik.net, zarullo-r@rambler.ru

Салиба Холем Мансур (Ливан) — кандидат физико-математических наук, доцент факультета естественных и прикладных наук университета Нотр-Дам-Луэз.

e-mail: qwe123@rocketmail.com

Табари Абдулло Хабибулло (Таджикистан) — доктор физико-математических наук, профессор, член корреспондент Академии наук Таджикистана, ректор Кулябского государственного университета имени Абуабдуллаха Рудаки.

e-mail: rektor@kgu.tj

THE EDITORIAL BOARD

Volume 19, Issue 4

THE MAIN EDITOR

Chubarikov Vladimir Nikolaevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the department of mathematical and computer methods of analysis, dean of the mechanics and mathematics faculty of the M. V. Lomonosov Moscow State University.
e-mail: chubarik2009@live.ru

THE ASSISTANTS OF THE MAIN EDITOR:

Dobrovolsky Nikolai Mihailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the department algebra, calculus and geometry of the Tula State L. N. Tolstoy Pedagogical University.
e-mail: dobrovol@tspu.ru

Mihalev Alexander Vasilyevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the department theoretical Informatics of the faculty of mechanics and mathematics of the M. V. Lomonosov Moscow State University.
e-mail: mikhalev@shade.msu.ru

Nijnikov Alexander Ivanovich — doctor of pedagogical sciences, professor, head of chair of the mathematical physics of the Moscow Pedagogical State University, honored worker of the higher school of the Russian Federation.
e-mail: ainizhnikov@mail.ru, nizhnikov.ai@mail.ru

INVITED EDITOR

Soloviev Anatoly Aleksandrovich — doctor of physical and mathematical sciences, corresponding member of RAS, deputy director for research, chief of laboratory, principal research scientist, Geophysical Center RAS; leading research scientist, Schmidt Institute of Physics of the Earth RAS.
e-mail: a.soloviev@gcras.ru

THE EXECUTIVE SECRETARY

Dobrovolsky Nikolai Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, assistant of the department of applied mathematics and computer science of the Tula State University.
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

THE MEMBERS OF THE EDITORIAL BOARD:

Artamonov Vyacheslav Alexandrovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the department higher algebra's of the mechanics and mathematics faculty of the M. V. Lomonosov Moscow State University.
e-mail: viacheslav.artamonov@gmail.com

Bezverhny Vladimir Nikolaevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, professor of the Tula State L.N. Tolstoy Pedagogical University.
e-mail: Vnbezv@rambler.ru

Bykovsky Victor Alekseevich — doctor of physical and mathematical Sciences, corresponing member of RAS, deputy director for science of the Federal budgetary state institution of science, Institute of applied mathematics of the far Eastern branch of the Russian Academy of Sciences (IPM RAS), director of the Khabarovsk branch of the IPM DVO RAS.

e-mail: vab@iam.khv.ru

Vostokov Sergey Vladimirovich — doctor of physical and mathematical Sciences, Professor, Professor of algebra and number theory Department of St. Petersburg University, President of the Foundation. L. Euler.

e-mail: sergei.vostokov@gmail.com

Gvozdev Alexander Evgenievich — doctor of technical sciences, professor, professor of Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University.

e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru

Georgievsky Dmitry Vladimirovich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of Chair of Elasticity at Mechanical and Mathematical Department of the M. V. Lomonosov Moscow State University.

e-mail: georgiev@mech.math.msu.su

Gluhov Mihail Mihailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, academician-secretary of the cryptography mathematical problems' department in the Academy of Cryptography of the Russian Federation.

e-mail: glukhovmm@rambler.ru

Gritsenko Sergey Alexandrovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor of the chair mathematics of the 1 Financial University under the Government of the Russian Federation, professor of the mechanics and mathematics faculty of the M. V. Lomonosov Moscow State University.

e-mail: s.gritsenko@gmail.com

Demidov Sergey Sergeyivich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, professor of the department of probability theory of mechanics and mathematics of Moscow state University, head of the cabinet of history and methodology of mathematics and mechanics, head. department of history of physical and mathematical sciences of the Institute of history of science and technology RAS, editor-in-chief of "Historical and mathematical research president of the International Academy of history of science.

e-mail: serd42@mail.ru

Durnev Valery Georgievich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the department of computer security and mathematical methods of information processing of the Yaroslavl statea public University. P. G. Demidov.

e-mail: durnev@univ.uniyar.ac.ru

Esayan Albert Rubenovich — doctor of pedagogical sciences, professor, Institute of Educational Development Strategy RAO.

e-mail: esayanalbert@mail.ru

Zubkov Andrey Mihailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the department of mathematical statistics and random processes of the faculty of mechanics and mathematics of the M. V. Lomonosov Moscow State University., head of the department of discrete mathematics of Steklov mathematical Institute RAS.

e-mail: zubkov@mi.ras.ru

Ivanov Valery Ivanovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the department of applied mathematics and computer science of Institute of Applied Mathematics and Computer Science of the Tula State University.

e-mail: ivaleryi@mail.ru

Kartashov Vladimir Konstantinovich — candidate of physical and mathematical sciences, professor, head of the Department of algebra, geometry and Informatics of the Volgograd State Social and Pedagogical University.

e-mail: kartashovvk@yandex.ru

Korolev Maxim Aleksandrovich — doctor of physical and mathematical sciences, the senior researcher of the department of algebra and number theory of Steklov Mathematical Institute of RAS.

e-mail: korolevma@mi.ras.ru

Kuznetsov Valentin Nikolaevich — doctor of technical sciences, professor, head of the Department of computer algebra and of numbers theory of the N. G. Chernyshevsky Saratov State University.

e-mail: kuznetsovn@info.sgu.ru

Latyshev Viktor Nikolaevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, professor of the faculty of mechanics and mathematics of the M. V. Lomonosov Moscow State University.

e-mail: latyshev@basis.math.msu.su

Matiyasevich Yuri Vladimirovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, full member of Russian Academy of Sciences, RAS Counselor of St. Petersburg department of Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, president of the St. Petersburg Mathematical society.

e-mail: yumat@pdmi.ras.ru

Mishchenko Sergey Petrovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the department of algebraic and geometric computations of the Ulyanovsk State University.

e-mail: mishchenkosp@mail.ru

Nesterenko Yury Valentinovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, corresponding member of RAS, head of the department of number theory of the faculty mechanics and mathematics of the M. V. Lomonosov Moscow State University.

e-mail: nester@mi.ras.ru

Panin Vladimir Alexeyevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, corresponding member RANS, rector of the Tula State L. T. Tolstoy Pedagogical University.

e-mail: tgpu@tula.net

Fomin Alekxander Alekxandrovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the department of algebra of the Moscow Pedagogical State University.

Chirsky Vladimir Grigoryevich — doctor of physical and mathematical sciences, associate professor, head of the department number theory's of the Moscow Pedagogical State University, professor of the mechanics and mathematics faculty of the M. V. Lomonosov Moscow State University.

e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Belov Alexey Yakovlevich (Israel) — doctor of physical and mathematical sciences, federal professor of mathematics, professor Bar Ilan University, Ramat Gan, Israel.

e-mail: Kanelster@gmail.com

Bernik Vasily Ivanovich (Belorussia) — doctor of physical and mathematical sciences, professor, the chief researcher of the Belorussia Institute of Mathematics of NAS.

e-mail: bernik@im.bas-net.by

Kasyanov Pavel Olegovich (Ukraine) — doctor of physical and mathematical Sciences, professor, head of the research department at Educational and Scientific Complex "Institute for Applied System Analysis" of the NTUU «KPI» of the MES and NAS of Ukraine.

e-mail: kasyanov@i.ua

Laurinchikas Antanas (Lithuania) — Full member of the AS in Lithuania, doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the department of probability theory and number theory of the Vilnius University.

e-mail: antanas.laurincikas@mif.vu.lt

Liu Yongping (China) — Ph.D, professor, head of the Research Center for Modern Analysis of Mathematics of the Beijing Normal University.

e-mail: ypliu@bnu.edu.cn

Misir Jumayil oglu Mardanov (Azerbaijan) — doctor of physical and mathematical sciences, professor, director of the institute of Mathematics and Mechanics of the National Academy of Sciences of Azerbaijan.

e-mail: rmi@lan.ab.az

Rahmonov Zarullo Huseinovich (Tajikistan) — doctor of physical and mathematical sciences, professor, full member of the Republic of Tajikistan AS, director of the Institute of Mathematics of the Tajik AS.

e-mail: zarullo_r@tajik.net, zarullo-r@rambler.ru

Saliba Holem Mansour (Lebanon) — Ph.D. Assistant Professors of faculty of natural & applied sciences of Notre Dame University Louaize

e-mail: qwe123@rocketmail.com

Tabari Abdullo Habibullo (Tajikistan) — doctor of physical and mathematical sciences, professor, corresponding member of the Republic of Tajikistan AS, rector of the Kulob State University named after Abuabdullo Rudaki.

e-mail: rektor@kgu.tj

TABLE OF CONTENTS

Volume 19 Issue 4

From the editor	3
A. A. Soloviev, R. I. Krasnoperov. The 70th anniversary of academician RAS Alexey Dzhermenovich Gvishiani	5
S. M. Agayan, D. A. Kamaev, Sh. R. Bogoutdinov, A. S. Pavelev. The Laplace transform of Dirichlet L -functions	11
V. G. Getmanov. Local and spline approximations in digital processing of geomagnet-ic observations	26
G.M. Zhuravlev, A.E. Gvozdev, A.G. Kolmakov, A. N. Sergeev, D. V. Maliy. Application of mathematical method of local variations to solve problems of plastic formification of metal, powder and nanocomposition materials	43
V. G. Kossobokov, A. A. Soloviev. Pattern recognition in problems of seismic hazard assessment	55
R. Yu. Lukianova. Numerical modeling of the polar ionosphere parameters	91
A. A. Lushnikov. Evolutionary equations and random graphs	103
I. Yu. Rebrova, V. N. Chubarikov, N. N. Dobrovol'skii, M. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii. On classical number-theoretic nets	118
S. A. Skobel'tsyn, I. S. Fedotov, A. S. Titova. Sound diffraction on an elastic sphere with a nonhomogeneous coating and cavity in semi-space	177
A. A. Soloviev. Methods of geoinformatics and fuzzy mathematics in geophysical data analysis	194
L. A. Tolokonnikov. Diffraction of a spherical sound wave by an elastic cylinder with an non-uniform coating	215
P. N. Shebalin. Mathematical methods of analysis and forecast of earthquake aftershocks: the need to change the paradigm	227
BRIEF REPORTS	
V. N. Kuznetsov, O. A. Matveeva. Analogue of the Duffin – Scheffer theorem for one class of Dirichlet series with finite-valued coefficients	243
V. N. Chubarikov, H. M. Saliba. Mean-value theorem for non-complete rational trigonometric sums	252
РЕДКОЛЛЕГИЯ	259
THE EDITORIAL BOARD	263