Учредитель: ФГБОУ ВО «ТГПУ им. Л. Н. Толстого»

Каталог «Пресса России»
Подписной индекс 10642

Адрес редакции: 300026, г. Тула, пр. Ленина, 125, каб. 310
Тел: +79156812638, 8(4872)374051

E-mail: cheb@tsput.ru

URL: http://www.chebsbornik.ru

В журнале публикуются оригинальные статьи по направлениям современной математики: теория чисел, алгебра и математическая логика, теория функций вещественного и комплексного переменного, функциональный анализ, дифференциальные уравнения, математическая физика, геометрия и топология, теория вероятностей и математическая статистика, численные методы, теория оптимизации и др.

Также публикуются статьи о памятных датах и юбилеях.

Журнал включен в перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание ученых степеней кандидата наук и доктора наук (перечень ВАК), индексируются и/или реферируются: Scopus, MathSciNet, Zentralblatt MATH, Russian Science Citation Index (RSCI), РЖ «Математика», «Mathematical Reviews», РИНЦ, Google Scholar Metrics.

Выпуск осуществлен при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках государственного контракта № 14.597.11.0035

Журнал выходит под эгидой Министерства образования и науки Российской Федерации, Российской академии наук, Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Московского педагогического университета, Тульского государственного университета.

Главный редактор
В. Н. Чубариков (Россия, г. Москва)

Ответственный секретарь
Н. Н. Добровольский (Россия, г. Тула)

Заместители главного редактора: Н. М. Добровольский (Россия, г. Тула), А. В. Михалёв (Россия, г. Москва), А. И. Нижников (Россия, г. Москва)

Редакционная коллегия:

В. А. Артамонов (Россия, г. Москва)
В. А. Быковский (Россия, г. Хабаровск)
С. В. Востоков (Россия, г. Санкт-Петербург)
А. Е. Гвоздев (Россия, г. Тула)
Д. В. Георгиевский (Россия, г. Москва)
М. М. Глухов (Россия, г. Москва)
Е. С. Голод (Россия, г. Москва)
С. А. Гриценко (Россия, г. Москва)
С. С. Демидов (Россия, г. Москва)
В. Г. Дурнев (Россия, г. Ярославль)
А. Р. Есаян (Россия, г. Москва)
А. М. Зубков (Россия, г. Москва)
В. И. Иванов (Россия, г. Тула)
В. К. Карташов (Россия, г. Волгоград)
М. А. Королёв (Россия, г. Москва)
В. Н. Кузнецов (Россия, г. Саратов)
В. Н. Латышев (Россия, г. Москва)
Ю. В Матиясевич (Россия, г. Санкт-Петербург)
С. П. Мищенко (Россия, г. Ульяновск)
Ю. В. Нестеренко (Россия, г. Москва)
В. А. Панин (Россия, г. Тула)
А. А. Фомин (Россия, г. Москва)
В. Г. Чирский (Россия, г. Москва)
А. Я. Белов (Израиль, г. Рамат Ган)
В. И. Берник (Беларусь, г. Минск)
П. О. Касьянов (Украина, г. Киев)
А. Лауринчикас (Литва, г. Вильнюс)
Лю Юнпин (Китай, г. Пекин)
М. Дж. Марданов (Азербайджан, г. Баку)
З. Рахмонов (Таджикистан, г. Душанбе)
Х. М. Салиба (Ливан)
А. Х. Табари (Таджикистан, г. Куляб)

СОДЕРЖАНИЕ

Том 19 Выпуск 1

В. И. Берник, Н. В. Бударина, А. В. Луневич, Х. О'Доннелл. Распределение нулей невырожденных функций на коротких отрезках 5

И. В. Бондарева, М. Ю. Лучин, В. Х. Салихов. Симметризованные многочлены в задаче оценки меры иррациональности числа $\ln 3$ 15

Д. А. Бредихин. О базисах тождеств многообразий группоидов отношений 26

Р. Б. Гарибов, И. Г. Овчинников. Осесимметричное деформирование направленно армированной оболочки в условиях радиационного облучения 35

Н. М. Глазунов. Двойственность в абелевых многообразиях и формальных группах над локальными полями. 44

Д. В. Горбачев, В. И. Иванов, Е. П. Офицеров, О. И. Смирнов. Вторая экстремальная задача Логана для преобразования Фурье по собственным функциям оператора Штурма–Лиувилля 57

Н. Н. Добровольский. О моноидах натуральных чисел с однозначным разложением на простые элементы 79

Н. Н. Добровольский, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, И. Н. Балаба, И. Ю. Реброва. Гипотеза о «заградительном ряде» для дзета-функций моноидов с экспоненциальной последовательностью простых 106

В. Н. Кузнецов, О. А. Матвеева. Граничное поведение и задача аналитического продолжения одного класса рядов Дирихле с мультипликативными коэффициентами как целых функций на комплексную плоскость 124

А. Лауринчикас, А. Минцевич. Совместная дискретная универсальность дзета-функций Лерха 138

Э. С. Макаров, А. Е. Гвоздев, Г. М. Журавлев, А. Г. Колмаков, А. Н. Сергеев, С. В. Сапожников, А. Д. Бреки, Д. В. Малий, Н. Н. Добровольский. Анализ уравнений теории пластичности порошковых металлических систем 152

Е. В. Мещерина, О. А. Пихтилькова. Развитие понятия «артиновость» для алгебр Ли ... 167

С. П. Мищенко, О. В. Шулежко. Многообразия с дробным полиномиальным ростом и проблема Шпехта 176

Е. П. Офицеров. Классификация последовательностей на основе коротких мотивов 187

Е. М. Рарова. О взвешенном числе точек алгебраической сетки 200

С. А. Скобельцын. Рассеяние звуковых волн упругим эллипсоидом с неоднородным покрытием в полупространстве с идеальной поверхностью 220

Л. А. Толоконников. Дифракция плоской звуковой волны на двух упругих цилиндрах с неоднородными покрытиями 238

РЕДКОЛЛЕГИЯ 255

THE EDITORIAL BOARD 259

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ РУКОПИСЕЙ 263

TABLE OF CONTENTS 265

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 19. Выпуск 1

УДК 511.42 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-1-5-14

Распределение нулей невырожденных функций на коротких отрезках

Берник Василий Иванович — доктор физико-математических наук наук, профессор, старший научный сотрудник. Беларусь, г. Минск, Институт математики НАН Беларуси.
e-mail: bernik.vasili@mail.ru
Бударина Наталия Викторовна — доктор физ.-мат. наук, профессор. Республика Ирландия, Дублин-роуд, Маршес Аппер, Технологический институт.
e-mail: Natalia.Budarina@maths.nuim.ie
Луневич Артём Вадимович — кандидат физико-математических наук наук, младший научный сотрудник. Беларусь, г. Минск, Институт математики НАН Беларуси.
e-mail: lunevichav@gmail.com
О'Доннел Хью — доктор физико-математических наук, профессор, Республика Ирландия, г. Дублин, Технологический институт.
e-mail: hugh.odonnell@dit.ie

Аннотация

В работе получены оценки сверху и снизу количества нулей функций специального вида, а также оценка меры множества точек в которых такие функции принимают малые значения. Пусть $f_1(x)$, ..., $f_n(x)$ функции определенные на интервале I, $n+1$ раз дифференцируемы и вронскиан из производных почти везде (в смысле меры Лебега) на I отличен от 0. Такие функции называются невырожденными. Задача о распределении нулей функции $F(x) = a_n f_n(x) + \ ... \ + a_1 f_1(x) + a_0$, $a_j \in Z$, $1 \le j \le n$ является обобщением многих задач о распределении нулей полиномов и имеет важное значение в метрической теории диофантовых приближений. Интересным оказался тот факт, что в распределении корней функции $F(x)$ и распределении нулей полиномов есть много общего. Например, количество нулей функции $F(x)$ на фиксированном отрезке не превышает n, как и у полиномов — количество нулей не превышает степень полинома.

Были доказаны три теоремы: об оценке количества нулей сверху, об оценке количества нулей снизу, а также вспомогательная метрическая теорема, которая необходима для получения оценок снизу. При получении нижних оценок был использован метод существенных и несущественных областей, которые ввел В. Г. Спринджук.

Пусть $Q > 1$ достаточно большое целое число, а интервал I имеет длину $Q^{-\gamma}$, $0 \le \gamma < 1$. Были получены оценки сверху и снизу для количества нулей функции $F(x)$ на интервале I, при $|a_j| \le Q$, $0 \le \gamma < 1$, а также была указана зависимость этого количества от интервала I. При $\gamma = 0$ аналогичные результаты имеются у А. С. Пяртли, В. Г. Спринджука, В. И. Берника, В. В. Бересневича, Н. В. Будариной.

Ключевые слова: невырожденные функции, нули невырожденных функций.

Библиография: 22 названия.

Для цитирования:
В. И. Берник, Н. В. Бударина, А. В. Луневич, Х. О'Доннелл. Распределение нулей невырожденных функций на коротких отрезках // Чебышевский сборник, 2018, т. 19, вып. 1, с. 5–14.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 19. No. 1

UDC 511.42 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-1-5-14

Distribution of zeros of nondegenerate functions on short cuttings

Bernik Vasili Ivanovich — Ph.D, professor, senior researcher, Belarus, Minsk, Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Belarus.
e-mail: bernik.vasili@mail.ru
Budarina Natalia Viktorovna — Ph.D, professor, Republic of Ireland, Dublin Road, Dundalk.
e-mail: Natalia.Budarina@maths.nuim.ie
Lunevich Artyom Vadimovich — PhD, junior researcher, Belarus, Minsk, Institute of Mathemtics of National Academy of Sciences of Belarus.
e-mail: lunevichav@gmail.com
O'Donnell Hugh — Ph.D, professor, Republic of Ireland, Dublin, D2, Dublin Institute of Technology
e-mail: hugh.odonnell@dit.ie

Abstract

In this paper, we obtain estimates from above and from below the number of zeros of functions of a special kind, as well as an estimate of the measure of the set of points in which such functions take small values. Let $f_1(x)$, ..., $f_n(x)$ function defined on an interval I, $n+1$ times differentiable and Wronskian of derivatives almost everywhere (in the sense of Lebesgue measure) on I different from 0. Such functions are called nondegenerate. The problem of distributing zeros of $F(x) = a_n f_n(x) + \ \ldots \ + a_1 f_1(x) + a_0$, $a_j \in Z$, $1 \le j \le n$ is a generalization of many problems about the distribution of zeros of polynomials is important in the metric theory of Diophantine approximations. An interesting fact is that there is a lot in common in the distribution of roots of the function $F(x)$ and the distribution of zeros of polynomials. For example, the number of zeros of $F(x)$ on a fixed interval does not exceed n, as well as for polynomials — the number of zeros does not exceed the polynomial degree.

Three theorems were proved: on the evaluation of the number of zeros from above, on the evaluation of the number of zeros from below, as well as an auxiliary metric theorem, which is necessary to obtain estimates from below. While obtaining lower bounds method was used for major and minor fields, who introduced V. G. Sprindzuk.

Let $Q > 1$ be a sufficiently large integer, and the interval I has the length $Q^{-\gamma}$, $0 \le \gamma < 1$. Produced estimates on the top and bottom for the number of zeros of the function $F(x)$ on the interval I, with $|a_j| \le Q$, $0 \le \gamma < 1$, and also indicate the dependence of this quantity from the interval I. When $\gamma = 0$ similar results are available from A. S. Pyartli, V. G. Sprindzhuk, V. I. Bernik, V. V. Beresnevich, N. V. Budarina.

Keywords: nondegenerate functionsons, zeros of nondegenerate functionsons.

Bibliography: 22 titles.

For citation:
V. I. Bernik, N. V. Budarina, A. V. Lunevich, H. O'Donnell, 2018, "Distribution of zeros of nondegenerate functions on short cuttings *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 1, pp. 5–14.

1. Введение

К задаче о количестве и распределении действительных нулей многочленов

$$P=(x)=a_nx^n+a_{n-1}+...+a_1x+a_0$$

как в математическом анализе, теории чисел и теории вероятностей в последние годы приковано большое внимание [1, 2, 3, 18, 19, 20, 21, 22].

Основой результатов статей [4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17] является метрическая теорема о свойствах множеств разрешимости неравенств вида $|P_n(x)|<Q^{-w},\ w>0$ и распределений действительных корней $P_n(x)$ при достаточно большом Q и многочленах $P_n(x)$ степени $\deg P=n$ и высоты $H=H(P)=\max\limits_{0\le j\le n}|a_j|\le Q$.

В данной работе мы обобщаем эти результаты на класс функций

$$\mathcal{F}_l\left(Q,\bar{f}\right)=\left\{F_n(x)\ :\ H(F_n)\le Q\right\},\ l_i=\max_{x\in I}|f_i(x)|,\ l=\max_{0\le i\le n}\{l_i\} \tag{1}$$

где

$$F_n(x)=a_nf_n(x)+...+a_1f_1(x)+a_0,$$

функции $f_1(x),\ f_2(x),\ ...,\ f_n(x)$ — $n+1$-раз непрерывно-дифференцируемы и вронскиан их производных

$$W(x)=\begin{vmatrix} f_1'(x) & ... & f_n'(x)\\ f_1''(x) & ... & f_n''(x)\\ . & . & .\\ f_1^n(x) & ... & f_n^n(x)\end{vmatrix}$$

отличен от нуля для всех всех x (в смысле меры Лебега) на интервале I. Такие функции $f_1(x),\ ...,\ f_n(x)$ будем называть невырожденными на I.

2. Основной текст статьи

Теорема 1. *На любом интервале $I,\mu I=Q^{-\gamma},\ 0\le\gamma\le 1$ количество нулей функций $F_n(x)\in\mathcal{F}_l\left(Q,\bar{f}\right)$ не превосходит $c_1nl2^{n+3}Q^{n+1}\mu I$.*

Теорема 2. *Существует $c_2>0$, что на любом интервале $I,\mu I=Q^{-\gamma},\ 0<\gamma<\gamma_0$ не менее $c_2Q^{n+1}\mu I$ количество нулей функций $F_2(x)\in\mathcal{F}_l\left(Q,\bar{f}\right)$.*

Теорема 3. *Обозначим через $M_2(I,\ Q)$ множество $x\in I$, для которых система неравенств*

$$(|F_2(x))|<Q^{-2},\ \left|F'(x)\right|<\delta_0Q$$

имеет решение хотя бы для одной функции $F_2\in\mathcal{F}_2(Q)$. Тогда при достаточно малом δ_0 справедливо неравенство

$$\mu M_2(I,\ Q)<\frac{1}{4}\mu I. \tag{2}$$

Покажем как из теоремы 3 следует теорема 2. Введем множество $B_1=I\backslash M_2(I,\ Q)$. Из (2) следует, что

$$\mu B_1\ge\frac{3}{4}\mu I. \tag{3}$$

Пусть $x\in B_1$. С помощью принципа ящиков Дирихле нетрудно доказать, что существует функция $F_2\in\mathcal{F}_2(Q)$ такая, что

$$|F_2(x)|<c_3Q^{-2}. \tag{4}$$

Так как $x \in B_1$, то наряду с (4) верно неравенство

$$\left|F_2'(x)\right| \geq \delta_0 Q. \tag{5}$$

Неравенство (5) определяет интервал T_1 с центром в точке x_1 меры

$$\mu T_1 = 2c_3\delta_0^{-1}Q^{-3}. \tag{6}$$

Возьмем точку $x_2 \in B_2 \subset I \backslash M_2(I,\ Q) \backslash T_1$ и аналогичным образом найдем другую функцию $F_2 \in \mathcal{F}_2(Q)$, у которой действительный корень α_2 удовлетворяет неравенству

$$|x_2 - \alpha_2| < c_4\delta_0^{-1}Q^{-3}.$$

Такую процедуру можно продолжать и строить t нулей функции $F_2 \in \mathcal{F}_2(Q)$ до тех пор, пока выполняется неравенство $t \cdot 2c_5\delta_0^{-1}Q^{-3} < \frac{3}{4}\mu I$, откуда следует, что количество нулей не менее

$$|x_2 - \alpha_2| < c_5 2^3 \delta_0^{-1} Q^{-3} \mu I.$$

Прежде, чем приступить к доказательству теорем приведем несколько лемм о невырожденных функциях. Всюду в дальнейшем

$$\max_{x \in (a,\ b)} \left|f'(x)\right| < c_6 \tag{7}$$

Лемма 1. *Пусть* $\alpha_0,\ ...,\ \alpha_{N-1},\ \beta_1,\ ...,\ \beta_n \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *таковы, что* $\alpha_0 > 0,\ \alpha_k > \beta_k \geq 0,$ $k = 1,\ ...,\ N-1$ *и* $0 < \beta < \infty$. *Пусть* $f\ :\ (a,\ b) \to \mathbb{R}$ *есть* N*-раз непрерывно дифференцируемая функция, такая, что* $\inf\limits_{x \in (a,\ b)} \left|f^{(N)}(x)\right| \geq \beta_n$. *Тогда множество* B_2 *тех* $x \in (a,\ b)$, *удовлетворяющих системе неравенств*

$$\left\{ \begin{array}{l} |f(x) \leq \alpha_0| \\ \beta_k \leq \left|f^{(k)}\right| \leq \alpha_k \ \ (k = 1,\ ...,\ N-1) \end{array} \right).$$

является объединением не более $(N+1)/2$ *интервалов длины не более*

$$\min_{0 \leq k \leq l \leq N} 3^{l-k+1} \left(\alpha_k/\beta_l\right)^{1/l-k}.$$

Лемма 1 следует из лемм 5 и 6 в [2].

Лемма 2 (6). *Существует постоянная* $\Delta_0 = \Delta_0(c_6,\ M)$ *такая, что для любого интервала* K *длиной не более* Δ_0 *для любой функции* $F_n(x) \in \mathcal{F}_I\left(Q, \bar{f}\right),\ H(F) \gg Q,$

$$\inf_{x \in I} \min_{1 \leq j \leq n} \left|F^{(j)}\right| \gg Q.$$

Лемма 3 (6). *При условии* $x \in (a,\ b)$ *мера множества решений системы неравенств*

$$|F_n(x)| < \delta,\ \left|F'(x)\right| < K,\ H(F) \leq Q \tag{8}$$

не превосходит $c_7\left(\delta K Q^{n-1}\right)^{\frac{1}{(n+1)(2n-1)}}$.

При $n = 2$ показатель степени в (8) равен $1/9$.

Доказательство теоремы 1. Разложим функции $F_j(x)$ на интервале I в ряд Тейлора в нуле α_{1j} функции $F_j(x)$, лежащем в I.

$$F_j(x) = F_j(\alpha_{1j}) + F_j'(\alpha_{1j})(x-\alpha_{1j}) + \frac{1}{2}F_j''(\xi)(x-\alpha_{1j})^2,\ \xi \in (x,\ \alpha_{1j}).$$

Так как $F(\alpha_{1j}) = 0,\ |x-\alpha_{1j}| \le \mu I = Q^{-\gamma}$,

$$\left|F_j''(\xi_j)\right| < m_1 nQ,\ \left|F_j'(\alpha_{1j})(x-\alpha_{1j})\right| < nlQ^{1-\gamma},$$

то при достаточно большом Q имеем для всех $x \in I$ оценку

$$|F_j(x)| < 2nlQ^{1-\gamma}. \tag{9}$$

Введем вектор $\bar{b} = (a_n,\ ...,\ a_1)$, состоящий из коэффициентов функции $F_j(x)$ и множество функций $F_j(x)$ с одним и тем же вектором $\bar{b}$ обозначим $\mathcal{F}\left(\bar{b}\right)$. При достаточно большом Q верно неравенство

$$\#\mathcal{F}\left(\bar{b}\right) = (2Q+1)^n < 2^{n+1}Q^n.$$

Занумеруем функции $F_j(x),\ j = 0, 1, ..., 2c_8 nl 2^{n+1}Q^{n+1}\mu I$, нули которых лежат на интервале I. образуем новые функции

$$R_j(x) = F_j(x) - F_0(x) = d_i$$

которые являются различными целыми числами и

$$\max|d_i| > 2nkQ^{1-\gamma}$$

вопреки (9). Полученное противоречие доказывает теорему 1.

Доказательство теоремы 3 поделим на три этапа в зависимости от величин модуля производной $|F_2'(x)|$ на интервале I. Обозначим через $\mathcal{L}(I,\ Q)$ множество $x \in I$, для которого выполняется неравенство

$$|F_2(x)| < Q^{-2},\ \left|F'(x)\right| < c_9 Q,$$

а через $\mathcal{L}_1(I,\ Q)$ множество $x \in I$, для которого выполняется система неравенств

$$|F_2(x)| < Q^{-2},\ Q^{\frac{5}{8}} < \left|F'(x)\right| < \delta_0 Q, \tag{10}$$

Предложение 1. *Справедливо неравенство*

$$\mu\mathcal{L}_1(I,\ Q) < 2^{-4}\mu I. \tag{11}$$

Доказательство. Будем считать, что система неравенств (10) рассматривается на интервале монотонности функции $F_2(x)$. Тогда множество $x \in I$, для которых верна система неравенств (10) содержится в интервале, который можно записать в виде

$$\sigma(F) := \left\{x \in I\ :\ |x-\alpha_1(F)| < c_{10}Q^{-2}\left|F'(\beta_1)\right|\right\}). \tag{12}$$

Наряду с интервалами $\sigma(F)$ рассмотрим интервал

$$\sigma_1(F) := \left\{x \in I\ :\ |x-\alpha_1(F)| < c_{11}\left|F'(\beta_1)\right|\right\}). \tag{13}$$

Из (12) и (13) следует неравенство

$$\mu\sigma(F) < c_{11}c_{10}^{-1}Q^{-2}\mu\sigma_1(F). \tag{14}$$

Зафиксируем вектор $\bar{b} = (a_1,\ a_2)$, координаты которого являются коэффициентами $F_2(x)$. Интервалы $\sigma_1(F)$, имеющие один и тот же вектор $\bar{b}$ объединим в один класс $\mathcal{F}_2\left(\bar{b}\right)$. Покажем,

что при подходящем выборе c_10 интервалы $\sigma_1(F_1)$ и $\sigma_1(F_2)$ не пересекаются. Предположим противное:

$$s_1 = \sigma_1(F_1) \cap \sigma_1(F_2) \neq$$

и $x_0 \in s_1$. Разложим функцию $F_j(x),\ j = 1, 2$ на интервалах $\sigma_1(F_1)$ и $\sigma_1(F_2)$ в ряд Тейлора и оценим значения $|F_j(x_0)|$. Имеем

$$|F_j(x_0)| \le |F_j(\alpha_1)| + \left|F_j'(\alpha_1)(x-\alpha_1) + F_j(\xi_j)(x-\alpha_1)^2\right|,\ \xi_j \in (x_0,\ \alpha_1).$$

Нетрудно видеть, что

$$|F_j(x_0)| < 2c_{10}$$

и

$$\begin{gathered} R(x_0) = d \in \mathbb{Z},\ d \neq 0, \\ |R(x_0)| = |F_2(x_0) - F_1(x_0)| < 4c_{10}. \end{gathered} \tag{15}$$

Неравенство (15) при $c_{10} = \frac{1}{8}$ противоречиво. Из того, что интервалы $\sigma_1(F)$ не пересекаются следует, что

$$\sum_{F \in \mathcal{F}(\bar{b})} \mu\sigma_1(F) \le \mu I. \tag{16}$$

Воспользуемся неравенством (16). тогда из (14) и (16) следует

$$\sum_{\bar{b}} \sum_{F \in \mathcal{F}(\bar{b})} \mu\sigma(F) < 4c_{10}^{-1}\delta_0\mu I < 2^{-4}\mu I,$$

поскольку из неравенства $|F'(x)| < \delta_0 Q$ следует, что a_1 принимает не более δQ значений.

Предложение 2. *Обозначим через $\mathcal{L}(I,\ Q)$ множество $x \in I$ для которых система неравенств*

$$|F_2(x)| < Q^{-2},\ 1 \le \left|F'(x)\right| \le Q^{\frac{5}{8}}$$

имеет хотя бы одно решение в функциях $F_2(x) \in \mathcal{L}(I,\ Q)$. Тогда

$$\mu\mathcal{L}_2(I,\ Q) < 2^{-4}\mu I.$$

Доказательство. Введем при фиксированном $b = a_2$ класс функций с одним и тем же b, который обозначим $\mathcal{F}(b)$. Определим интервалы

$$\sigma_2 := \left\{x \in I\ :\ |x-\alpha_1|(F) < c_{12}Q^{-1}\left|F'(\beta_1)\right|^{-1}\right\} \tag{17}$$

из определения $\sigma(F)$ и $\sigma_2(F)$ следует

$$\mu\sigma(F) < c_{12}^{-1}\mu\sigma_2(F). \tag{18}$$

Интервал $\sigma_2(F_1)$ будем называть существенным, если не существует интервала

$$\sigma_2(F_2),\ F_2 \in \mathcal{F}(b),$$

такого что

$$\mu\sigma_2(F_1)\sup\sigma_2(F_2) > 0.5\mu\sigma_2(F_1). \tag{19}$$

Если же такой интервал найдется, т. е. при некотором $F_2(x) \in \mathcal{F}(b)$ выполняется неравенство

$$\mu\sigma_2(F_1)\sup\sigma_2(F_2) > 0.5\mu\sigma_2(F_1),$$

то интервал $\sigma_2(F_1)$ будем называть несущественным.

В случае существенных интервалов воспользуемся (18). Тогда из $\sum\limits_{F\in\mathcal{F}} \mu\sigma_2(F) < 2\mu I$ и (18) получим

$$\sum_b \sum_{F\in\mathcal{F}(b)} \mu\sigma(F) < c_{13}\mu I. \tag{20}$$

В случае несущественных интервалов разложим функции $F_2(x)$ и $F_2'(x)$ на интервале $\sigma_2(F)$ в ряд Тейлора и оценим их модули сверху пользуясь (6). Получим систему неравенств

$$|a_1x+b| < c_{14}Q^{-1},\ |a_1| < 2Q^{\frac{5}{8}},$$

откуда

$$\left|x+\frac{b_1}{a_1}\right| < c_{14}Q^{-1}a_1^{-1}. \tag{21}$$

Неравенство (21) выполняется для интервала с центром в точке $-\frac{b_1}{a_1}$ длиной $2c_{14}Q^{-1}a_1^{-1}$. Просуммируем эту величину по b_1, количество которых не превосходит $a_1\mu I$, а затем по a_1, $|a_1| < 2Q^{\frac{5}{8}}$. Получим оценку $c_{15}Q^{\frac{5}{8}-1}\mu I$, которая вместе с (20) завершает доказательство предложения 2.

Предложение 3. *Обозначим через B_3 множество решений системы неравенств*

$$|a_2f(x)+a_1x+a_0| < c_{16}Q^{-2},\ |a_2f'(x)| < c_{14}. \tag{22}$$

Тогда

$$\mu B_3 < 2^{-4}\mu I.$$

Для доказательства предложения 3 применим к системе неравенств (10), (20) лемму 3 при $\delta = Q^{-3}$, $c_{16} = K$. Получим

$$\mu B_3 < 2^{-4}Q^{\frac{1}{9}}$$

что меньше $2^{-4}\mu I$ при $0 \le \gamma < \frac{1}{9}$ и достаточно большом Q. Из предложений 1—3 следует теорема 3.

3. Заключение

В дальнейших работах авторы предполагают привести применения результатов статьи в метрической теории диофантовых приближений и при получении оценок сверху для размерности Хаусдорфа резонансных множеств.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ибрагимов, И. А., Маслова, Н. Б. О среднем числе вещественных нулей случайных полиномов. II. Коэффициенты с ненулевым средним // Теория вероятн. и ее примен., 1971 vol. 16, P. 595-503

2. Запорожец, Д. Н. Ибрагимов, И. А. О площади случайной поверхности. Вероятность и статистика // Зап. научн. сем. ПОМИ, 2010, vol. 384, P. 154-1750.

3. Берник, В. И., Гётце, Ф. Распределение действительных алгебраических чисел произвольной степени в коротких интервалах // Изв. РАН. Сер. матем., 2015, vol. 79, no.1, P. 21-42.

4. Beresnevich, V. On approximation of real numbers by real algebraic numbers // Acta Arith, 1999, Vol. 90, no. 8, P. 97-112.

5. Beresnevich, V., Bernik V. On a metrical theorem of W. Shmidt. Acta Arith // Acta Arith, 1996, vol. 75, P. 219-233.

6. Beresnevich, V. A. Grasher type theorem for convergence on maifolds // Acta Matth. Hung, 2002, vol. 94(1—2), P. 99-130.

7. Baker, R. Metric diophantine approximation on manifolds // J. Lond. Math. Soc., 1976, vol. 14, P. 43-48.

8. Berink, V. On the exact order of approximation of zero by the values of integer-valued polynomials // Acta. Arith., 1989, vol. 53, no. 1, P. 17-28.

9. Berink, V. Kleinbok, D., Marguli Y. 2001 Khinchine-type theorems on manifolds: the convergence case for standart and multiplicative versions // Jntern. Math. Res., vol. 9, P. 453-486.

10. Berink, V., Götze, F. Distribution of real algebraic numbers of arbitary degree in short intervals // Jzv. Math. RAN., 2015, vol. 79, no. 1, P. 18-39.

11. Berink, V., Gusakova, A., Götze F. On ponts with algebraically conjugate coordinates close to smooth curves // Moscow Journal of Combinations and Number Theory, 2016, vol. 6, iss. 2-3, P. 56-101.

12. Kleinbok, D., Margulis, G. Flow on homogeneous spaces and Diophantine approximation on manifolds // Ann. of Math., 1998, vol. 148 no. 2, P. 339-360

13. Mahker K. Über das Mass der Menge aller S-Zhlen // Math. Ann.,1932, vol. 106, P. 131-139.

14. Pyartly, A. Diophantine approximation on submanifolds of euclidion space // Funk. Analis and its application, 1969, vol. 3, no. 4, P. 303-306

15. Shmidt, W. Metrische Satze über simultane Approximationen abhangiger Grossen // Monatsh. Math.,1964, vol. 68, P. 145-166

16. Sprindzuk, V. Achievements and problems of the theory of Diophantine approximations // Uspekhi mat. Baur.,1980, vol. 35, no. 4, P. 3-68.

17. Sprindzuk, V. Mahler problem in metric theory numbers, Eng. trans. // Amer. Math. Soc. Providence, 1969.

18. Götze, F. Koleda, D., Zaporozhets, D. Distribution of complex algebraic numbers // Proc. Amer. Math. Soc., 2017, vol. 145, no. 1, (), 61-71.

19. Bernik A., Götzeb F., Kukso O. Bad-approximable points and distribution of discriminants of the product of linear integer polynomials // Чебышевский сб., 2007m vol. 8, no. 2, P 140–147

20. Bernik A., Götzeb F., Gusakova A. On the distribution of points with algebraically conjugate coordinates in a neighborhood of smooth curves // Записки ПОМИ, 2016, P. 14-47

21. Beresnevich V., Bernik V., Götze F. Integral polynomials with small discriminants and resultants // Adv. Math., 2016, vol. 298, P. 393-412.

22. Koleda, D. V. On the density function of the distribution of real algebraic numbers // Journal de Theorie des Nombres de Bordeaux, 2017, vol. 29, P. 179-200.

REFERENCES

1. Ibragimov, I. A., Maslova, N. B., 1971 "On the Expected Number of Real Zeros of Random Polynomials. II. Coefficients With Non-Zero Means *Theory Probab. Appl.*, vol. 16, pp. 486-493

2. Zaporozhets, D. N. Ibragimov, I. A.2010 "On random surface area" *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 176, pp. 190-202.

3. Берник, В. И., Гётце, Ф. 2015 "Distribution of real algebraic numbers of arbitrary degree in short intervals" *Izvestiya: Mathematics*, vol. 79, no.1, P. 21-42.

4. Beresnevich, V. 1999, "On approximation of real numbers by real algebraic numbers", *Acta Arith* Vol. 90, no. 8, pp. 97-112.

5. Beresnevich, V., Bernik V. 1996 "On a metrical theorem of W. Shmidt. Acta Arith" *Acta Arith*, vol. 75, pp. 219-233.

6. Beresnevich, V. A. 2002 "Grasher type theorem for convergence on maifolds", *Acta Matth. Hung*, vol. 94(1—2), pp. 99-130.

7. Baker, R. 1976 "Metric diophantine approximation on manifolds" *J. Lond. Math. Soc.*, vol. 14, pp. 43-48.

8. Berink, V. 1989 "On the exact order of approximation of zero by the values of integer-valued polynomials", *Acta. Arith.*, vol. 53, no. 1, pp. 17-28.

9. Berink, V. Kleinbok, D., Marguli Y. 2001 "Khinchine-type theorems on manifolds: the convergence case for standart and multiplicative versions", *Jntern. Math. Res.*, vol. 9, pp. 453-486.

10. Berink, V., Götze, F. 2015 "Distribution of real algebraic numbers of arbitary degree in short intervals", *Jzv. Math. RAN.*, vol. 79, no. 1, pp. 18-39.

11. Berink, V., Gusakova, A., Götze F. 2016 "On ponts with algebraically conjugate coordinates close to smooth curves", *Moscow Journal of Combinations and Number Theory*, vol. 6, iss. 2-3, pp. 56-101.

12. Kleinbok, D., Margulis, G. 1998 "Flow on homogeneous spaces and Diophantine approximation on manifolds", *Ann. of Math.*, vol. 148 no. 2, pp. 339-360

13. Mahker K. 1932 "Über das Mass der Menge aller S-Zhlen", *Math. Ann.*, vol. 106, pp. 131-139.

14. Pyartly, A. 1969 "Diophantine approximation on submanifolds of euclidion space", *Funk. Analis and its application*, vol. 3, no. 4, pp. 303-306

15. Shmidt, W. 1964 "Metrische Satze über simultane Approximationen abhangiger Grossen", *Monatsh. Math.*, vol. 68, pp. 145-166

16. Sprindzuk, V. 1980 "Achievements and problems of the theory of Diophantine approximations", *Uspekhi mat. Baur.* vol. 35, no. 4, pp. 3-68.

17. Sprindzuk, V. 1969 "Mahler problem in metric theory numbers", Eng. trans. *Amer. Math. Soc. Providence*

18. Götze, F. Koleda, D., Zaporozhets, D. 2017 "Distribution of complex algebraic numbers", *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 145, no. 1, (), 61-71.

19. Bernik A., Götzeb F., Kukso O. 2007 "Bad-approximable points and distribution of discriminants of the product of linear integer polynomials", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 8, no. 2, pp 140–147

20. Bernik A., Götzeb F., 2016 "Gusakova A. On the distribution of points with algebraically conjugate coordinates in a neighborhood of smooth curves", *Zapiski POMI*, pp. 14-47

21. Beresnevich V., Bernik V., Götze F. 2016 "Integral polynomials with small discriminants and resultants", *Adv. Math.*, vol. 298, pp. 393-412.

22. Koleda, D. V. 2017 "On the density function of the distribution of real algebraic numbers" *Journal de Theorie des Nombres de Bordeaux*, vol. 29, pp. 179-200.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 19. Выпуск 1

УДК 511.36 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-1-15-25

Симметризованные многочлены в задаче оценки меры иррациональности числа $\ln 3$[1]

Бондарева Инна Васильевна — аналитик данных, Брянский государственный технический университет, ООО "АйТи Про".
e-mail: innagorda@ya.ru
Лучин Михаил Юрьевич — Брянский государственный технический университет.
e-mail: m.y.luchin@mail.ru
Салихов Владислав Хасанович — профессор кафедры высшей математики, Брянский государственный технический университет.
e-mail: svdh@rambler.ru

Аннотация

Оценка меры иррациональности различных трансцендентных чисел является одним из основыных направлений теории диофантовых приближений.

В настоящее время разработан целый ряд методов, позволяющих получать подобные оценки для значений аналитических функций. Наиболее эффективным оказался метод, связанный с построением различных интегральных конструкций; одним из первых подобных построений является классическое интугральное представление гипергеометрической функции Гаусса.

Оценки снизу меры иррациональности логарифмов рациональных чисел рассматривались многими зарубежными авторами: А. Бейкер и Д. Вустольц [4], А. Хеймонен, Т. Матала-ахо, К. Вааананен [5], К. Ву [6], Д. Рин и П. Тоффин [7]. В своих работах они применяли различные интегральные конструкции, дающие малые линейные формы от логарифмов и других чисел, вычисляли асимптотику интегралов и коэффициентов линейных форм с помощью метода перевала, теоремы Лапласа, оценивали знаменатель коэффициентов линейных форм с использованием различных схем "сокращения простых чисел". Обзор некоторых методов из теории диофантовых приближений логарифмов рациональных чисел того времени был представлен в 2004 году в статье В. В. Зудилина [8].

Затем В. Х. Салихов в работе [3], основываясь на тех же асимптотических методах, но использовав новый вид интегральной конструкции, обладающей свойством симметрии, значительно улучшил оценку меры иррациональности числа $\ln 3$. Впоследствии В. Х. Салихову, благодаря использованию уже комплексного симметризованного интеграла, удалось улучшить оценку меры иррациональности числа π [15]. В дальнейшем данный метод (применительно к диофантовым приближениям логарифмов рациональных чисел) получил развитие в работах его учеников: Е. С. Золотухиной [10, 11], М. Ю. Лучина [12, 13], Е. Б. Томашевской [14]. Это привело к улучшению оценок мер иррациональности целого ряда чисел:

$\mu(\log(5/3)) \leqslant 5.512\ldots$ [14], $\mu(\log(8/5)) < 5.9897$ [12], $\mu(\log(7/5)) \leqslant 4.865\ldots$ [14], $\mu(\log(9/7)) \leqslant 3.6455\ldots$ [10], $\mu(\log(7/4)) < 8.1004$ [13].

С помощью интегральной конструкции, основанной на симметризованных многочленах, получена новая оценка меры иррациональности числа $\ln 3$. Предыдущий результат принадлежал К. Ву и Л. Вангу и был установлен в 2014 г.

Улучшение оценки связано с добавлением к симметризованным многочленам, использованным в интегральной конструкции К. Ву и Л. Ванга, специального квадратного симметризованного многочлена.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 18-01-00296-а).

Ключевые слова: диофантовы приближения, мера иррациональности, симметризованные многочлены.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:
И. В. Бондарева, М. Ю. Лучин, В. Х. Салихов. Симметризованные многочлены в задаче оценки меры иррациональности числа $\ln 3$ // Чебышевский сборник, 2018, т. 19, вып. 1, с. 15–25.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 19. No. 1

UDC 511.36 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-1-15-25

Symmetrized polynomials in a problem of estimating of the irrationality measure of number $\ln 3$

Bondareva Inna Vasilievna — data analyst, Bryansk State Technical University, "IT Pro"LLC.
e-mail: innagorda@ya.ru
Luchin Mikhail Yurievich — Bryansk State Technical University.
e-mail: m.y.luchin@mail.ru
Salikhov Vladislav Khasanovich — Professor of the Department of Higher Mathematics, Bryansk State Technical University.
e-mail: svdh@rambler.ru

Abstract

An estimate of the irrationality measure of various transcendental numbers is one of the directions in the theory of Diophantine approximations foundations.

Nowadays there is a range of methods which make possible to obtain similar estimates for the values of analytic functions. The most effective method is the adding of various integral constructions; one of the first early constructions is the classical intuitive representation of the Gauss hypergeometric function.

Lower estimates of the irrationality measure of rational numbers logarithms were considered by many foreign authors: A. Baker and G. Wüstholz [4], A. Heimonen, T. Matala-aho, K. Väänänen [5], Q. Wu [6], G. Rhin and P. Toffin [7]. In their works they used various integral constructions, giving small linear forms from logarithms and other numbers, calculated asymptotic of integrals and coefficients of the linear forms using the saddle point method, Laplace theorem, evaluated the denominator coefficients of the linear forms using various schemes "reduction of prime numbers". Review of some methods from the theory of diophantine approximation of rational numbers logarithms at that time was introduced in 2004 by V. Zudilin [8].

Then V. Kh. Salikhov in [3] considerably improved estimate of the irrationality measure of $\ln 3$, based on the same asymptotic methods, but used a new type of integral construction, which has property of summetry. Subsequently, V. Kh. Salikhov due to usage of already complex symmetrized integral improved estimate of the irrationality measures of π [15]. In the future, this method (as applied to diophantine approximation of logarithms of rational numbers) was developed by his pupils: E. S. Zolotuhina [10, 11], M. Yu. Luchin [12, 13], E. B. Tomashevskaya [14]. It led to improvement of the irrationality measure estimates for the following numbers:

$\mu(\log(5/3)) \leqslant 5.512\ldots$ [14], $\mu(\log(8/5)) < 5.9897$ [12], $\mu(\log(7/5)) \leqslant 4.865\ldots$ [14], $\mu(\log(9/7)) \leqslant 3.6455\ldots$ [10], $\mu(\log(7/4)) < 8.1004$ [13].

In this paper due to usage the symmetrized real integral we obtain a new estimate of the irrationality measure of $\ln 3$. The previous irrationality measure estimate of $\ln 3$ was received in 2014 by Q. Wu and L. Wang [1].

The estimate improvement had resulted from the addition of a special square symmetrized polynomial to the symmetrized polynomials used in the integral construction of K. Wu and L. Wang.

Keywords: diophantine approximations, irrationality measure, symmetrized polynomials.

Bibliography: 15 titles.

For citation:
I. V. Bondareva, M. Y. Luchin, V. H. Salikhov, 2018, "Symmetrized polynomials in a problem of estimating of the irrationality measure of number $\ln 3$ *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 1, pp. 15–25.

1. Введение

Мерой иррациональности $\mu(\gamma)$ вещественного числа γ называется нижняя грань множества чисел α, для которых, начиная с некоторого положительного $q \geqslant q_0(\alpha)$, выполняется неравенство

$$|\gamma - \frac{p}{q}| > q^{-\alpha}, \quad p \in \mathbb{Z}, \quad q \in \mathbb{N}.$$

В работе [1] была получена оценка $\mu(\ln 3) \leqslant 5.1163051$. Отметим, что в работе [2] Д. Рин получил оценку $\mu(\ln 3) \leqslant 8.616$, а в работе [3] В. Х. Салихов с помощью симметризованных многочленов улучшил результат Д. Рина: $\mu(\ln 3) \leqslant 5.125$.

В настоящей работе доказан следующий результат:

Теорема 1. *Пусть* $h_1, h_2, h \in \mathbb{Z}$, $H = \max(|h_1|, |h_2|)$, $H \geqslant H_0$. *Тогда*

$$|h_1 \ln 2 + h_2 \ln 3 + h| > H^{-\mu},$$

где $\mu = 4.116201$.

Следствие 1. *Справедлива оценка*

$$\mu(\ln 3) \leqslant 5.116201.$$

2. Доказательство теоремы 1

Пусть далее $d = 35$, $t = (x-d)^2$, $A \in \mathbb{N}$, $B \in \mathbb{Z}^+$, $(A, B) = 1$ в случае $B \neq 0$,

$$P = At - B = A_2 x^2 + A_1 x + A_0, \tag{1}$$

где $A_2 = A$, $A_1 = -2Ad$, $A_0 = Ad^2 - B$.

Определим для несократимой дроби a/b, где $a \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$, $b \in \mathbb{N}$, показатель $\Upsilon_p = \Upsilon_p(a/b) \in \mathbb{Z}$ простого числа p так, что

$$\frac{a}{b} = p^{\Upsilon_p} \frac{a_1}{b_1},$$

где $a_1 \in \mathbb{Z}$, $b_1 \in \mathbb{N}$, $(a_1, p) = (b_1, p) = 1$.

Пусть, наконец, для аналитической в точке $x = 0$ функции $f(x)$

$$D_0(f(x)) = f(0), \quad D_N(f(x)) = \frac{f^{(N)}(0)}{N!}, \quad N \in \mathbb{N}.$$

Определим для многочлена P из (1)

$$\begin{aligned} &\Upsilon_p(P) = \min(2, \Upsilon_p(A_0)), \quad \text{где } p \in \{5; 7\}, \\ &\Upsilon_3(P) = \min(1, \Upsilon_3(A_0)), \\ &\Upsilon_2(P) = \min(4, \Upsilon_2(A_0)). \end{aligned} \tag{2}$$

Лемма 1. *Пусть* $m \in \mathbb{N}$, $N \in \mathbb{Z}^+$, $N \leqslant 2m$. *Тогда выполняются следующие оценки*

$$\Upsilon_p(D_N(P^m)) \geqslant m\Upsilon_p(P) - N, \quad p \in \{3; 5; 7\}, \tag{3}$$

$$\Upsilon_2(D_N(P^m)) \geqslant m\Upsilon_p(P) - 3N. \tag{4}$$

Доказательство. Пусть далее $\overline{m} = (m_0, m_1, m_2) \in (\mathbb{Z}^+)^3$, $|\overline{m}| = m_0 + m_1 + m_2$,

$$\gamma(\overline{m}) = \frac{|\overline{m}|}{m_0!m_1!m_2!} \in \mathbb{N}.$$

Тогда из (1) имеем

$$P^m = \sum_{|\overline{m}|=m} \gamma(\overline{m}) A_2^{m_2} A_1^{m_1} A_0^{m_0} x^{m_1+2m_2},$$

$$D_N(P^m) = \sum_{|\overline{m}|=m, m_1+2m_2=N} \gamma(\overline{m}) A_0^{m_0} (2d)^{m_1} A_3, A_3 = (-1)^{m_1} A^{m_1+m_2} \in \mathbb{Z}.$$

Для $p \in \{5; 7\}$ получим

$$\Upsilon_p(D_N(P^m)) \geqslant m_0\Upsilon_p(A_0) + m_1 \geqslant (m_0 + m_1 + m_2)\Upsilon_p(P) - (m_1 + 2m_2) = m\Upsilon_p(P) - N,$$

т.к. из (2) имеем $\Upsilon_p(A_0) \geqslant \Upsilon_p(P)$, $\Upsilon_p(P) \leqslant 2$.

Аналогично

$$\Upsilon_3\left(D_N^{P^m}\right) \geqslant m_0\Upsilon_3(A_0) \geqslant (m_0 + m_1 + m_2)\Upsilon_3(P) - (m_1 + 2m_2) = m\Upsilon_3(P) - N,$$

т.к. из (2) имеем $\Upsilon_3(A_0) \geq \Upsilon_3(P)$, $\Upsilon_3(P) \leq 1$, и неравенства (3) доказаны.

Имеем далее

$$\Upsilon_2(D_N^{P^m}) \geqslant m_0\Upsilon_2(A_0) + m_1 \geqslant (m_0, m_1, m_2)\Upsilon_2(P) - 3(m_1 + 2m_2) = m\Upsilon_2(P) - 3N,$$

т.к. из (2) имеем $\Upsilon_2(A_0) \geq \Upsilon_2(P)$, $\Upsilon_2(P) \leq 4$, и неравенство (4), а вместе с ним и лемма 1 доказаны.

Пусть $A, B, C \in \mathbb{N}$, $(A, B, C) = 1$,

$$P = At^2 - Bt + C = \sum_{i=0}^{4} A_i x^i, \tag{5}$$

где $A_4 = A$, $A_3 = -4dA$, $A_2 = 6d^2A - B$, $A_1 = -4d^3A + 2dB$, $A_0 = d^4A - d^2B + C$.

Определим для многочлена (5) показатели

$$\begin{aligned} &\Upsilon_p(P) = \min(4, \Upsilon_p(A_0), \Upsilon_p(A_1) + 1, \Upsilon_p(A_2) + 2), \quad p \in \{5; 7\}, \\ &\Upsilon_3(P) = \min(2, \Upsilon_3(A_0), \Upsilon_3(A_1) + 1), \\ &\Upsilon_2(P) = \min(8, \Upsilon_2(A_0), \Upsilon_2(A_1) + 3, \Upsilon_2(A_2) + 6). \end{aligned} \tag{6}$$

Лемма 2. *Для многочлена (5) выполнены оценки (3) и (4), где $N \leq 4m$, а показатели $\Upsilon_p(P)$ определены равенствами (6).*

Доказательство. Пусть далее

$$\overline{m} = (m_0, m_1, m_2, m_3, m_4) \in (\mathbb{Z}^+)^5, \quad |\overline{m}| = m_0 + m_1 + m_2 + m_3 + m_4,$$

$$\gamma(\overline{m}) = \frac{|\overline{m}|}{m_0!m_1!m_2!m_3!m_4!} \in \mathbb{N}.$$

Тогда

$$P^m = \sum_{|\overline{m}|=m} \gamma(\overline{m}) \prod_{i=0}^{4} (A_i x^i)^{m_i},$$

$$D_N(P^m) = \sum_{|\overline{m}|=m, \sum_{i=1}^{4} i m_i = N} \gamma(|\overline{m}|) \prod A_i^{m_i}.$$

Рассмотрим ряд случаев

1. $p \in \{5; 7\}$.

   Имеем

$$\Upsilon_p(D_N(P^m)) \geq \sum_{i=0}^{4} m_i \Upsilon_p(A_i) \geq m\Upsilon_p(P) - \sum_{i=0}^{4} i m_i = m\Upsilon_p(P) - N,$$

   т.к. $\Upsilon_p(A_i) + i \geq \Upsilon_p(P)$, $i = 0, 1, ..., 4$. Для $i \in \{0; 1; 2\}$ это следует из определения (6), при $i = 3$ $\Upsilon_p(A_3) + 3 \geq 1 + 3 \geq \Upsilon_p(P)$, при $i = 4$ $\Upsilon_p(A_4) + 4 \geq 4 \geq \Upsilon_p(P)$

2. $p = 3$.

   В этом случае

$$\Upsilon_3(D_N(P^m)) \geq \sum_{i=0}^{4} m_i \Upsilon_3(A_i) \geq m\Upsilon_3(P) - N,$$

   т.к. снова $\Upsilon_3(A_i) + i \geq \Upsilon_3(P)$, $i = 0, 1, ..., 4$. Для $i \in \{0; 1\}$ это неравенство следует из (6), а для $i \in \{2; 3; 4\}$ $\Upsilon_3(A_i) + i \geq 2 \geq \Upsilon_3(P)$, и неравенства (3) для многочлена (5) доказаны.

3. $p = 2$.

   Здесь

$$\Upsilon_2(D_N(P^m)) \geq \sum_{i=0}^{4} m_i \Upsilon_2(A_i) \geq m\Upsilon_2(P) - 3\sum_{i=0}^{4} i m_i = m\Upsilon_2(P) - 3N,$$

   т.к. $\Upsilon_2(A_i) + 3i \geq \Upsilon_2(P)$, $i = 0, 1, ..., 4$. Для $i \in \{0; 1; 2\}$ это следует из определения (6), а при $i \in \{3; 4\}$ $\Upsilon_2(A_i) + 3i \geq 9 > \Upsilon_2(P)$, и неравенство (4), а вместе с ним и лемма 2 доказаны.

При доказательстве теоремы 1 мы будем применять 7 многочленов вида (1), а также один многочлен вида (5), а именно

$$P_1(x) = (x - 28)(x - 42) = t - 49;$$
$$P_2(x) = (x - 30)(x - 40) = t - 25;$$
$$P_3(x) = (x - 35)^2 = t;$$
$$P_4(x) = 3x^2 - 210x + 3640 = 3t - 35;$$
$$P_5(x) = 71x^2 - 4970x + 86240 = 71t - 735;$$
$$P_6(x) = (11x - 420)(11x - 350) = 121t - 1225;$$
$$P_7(x) = 113x^2 - 7910x + 137200 = 113t - 1225;$$
$$P_8(x) = 61t^2 - 3066t + 25725, t = (x - 35)^2.$$

Положим $\{p_1; p_2; p_3; p_4\} = \{7; 5; 3; 2\}$, для выписанных многочленов $P_k(x)$, $k = 1, ..., 8$, обозначим

$$\prod_k = \prod_{j=1}^{4} p_j^{\Upsilon_{p_j}(P_k)}$$

.

Из определений показателей (2) и (6) имеем

$$\prod_1 = 7^2 * 3^1 * 2^3; \quad \prod_2 = 5^2 * 3^1 * 2^4; \quad \prod_3 = 7^2 * 5^2; \quad \prod_4 = 7^1 * 5^1 * 2^3;$$
$$\prod_5 = 7^2 * 5^1 * 2^4; \quad \prod_6 = 7^2 * 5^2 * 3^1 * 2^3; \quad \prod_7 = 7^2 * 5^2 * 2^4; \quad \prod_8 = 7^3 * 5^2 * 2^8; \tag{7}$$

Пусть

$$\begin{array}{llll}\alpha_1 = 0.499408; & \alpha_2 = 0.499623; & \alpha_3 = 0.497422; & \alpha_4 = 0.000651;\\ \alpha_5 = 0.000327; & \alpha_6 = 0.000969; & \alpha_7 = 0.001394; & \alpha_8 = 0.000103;\end{array} \tag{8}$$

Рассмотрим рациональную функцию

$$R_n(x) = \frac{\prod_{k=1}^{8} P_k^{\alpha_k n}}{x^{n+1}(70-x)^{n+1}}, \tag{9}$$

где $n \in \mathbb{N}$, n кратно 10^6, а тогда все $\alpha_k n \in \mathbb{N}$.

Отметим, что в работе [3] рассматривались лишь многочлены $P_1(x), P_2(x)$ и $P_3(x)$, а в работе [1] к этим многочленам были добавлены $P_k(x)$, $k = 4; 5; 6; 7$. Наконец, в нашей конструкции ко всем этим многочленам добавлен квадратичный многочлен $P_8(x)$.

Определим следующие интегралы

$$\omega_1 = \int_{35}^{40} R_n(x)dx, \quad \omega_2 = \int_{40}^{42} R_n(x)dx. \tag{10}$$

Функция (9) симметрична относительно точки $x = 35$. Следовательно, её разложение в сумму простейших дробей имеет вид

$$R_n(x) = Q_{n-2}(x) + \sum_{i=1}^{n+1}\left(\frac{a_i}{x^i} + \frac{a_i}{(70-x)^i}\right), \tag{11}$$

где все $a_i \in \mathbb{Q}$, $Q_{n-2}(x) \in \mathbb{Z}[x]$, $\deg Q_{n-2}(x) = 2n(\alpha_1 + ... + \alpha_7) + 4n\alpha_8 - 2n - 2 = n - 2$.

Следующая лемма аналогична лемме 1 работы [3].

Лемма 3. *Для всех $i = 1, ..., n+1$ имеет место представление*

$$a_i = 7^{i-2} * 5^{i-2} * 3^{i-1} * 2^{3i-4-\alpha_n} M_i, \tag{12}$$

где $M_i \in \mathbb{Z}$, $\alpha = 0.490716$.

Доказательство. Пусть $\overline{m} = (m_1, ..., m_9) \in (\mathbb{Z}^+)^9$, $|\overline{m}| = m_1 + ... + m_9$. Тогда из (9) и (11) получим

$$a_i = D_{n+1-i}(R_n(x)x^{n+1}) = \sum_{|\overline{m}|=n+1-i} \prod_{k=1}^{8} D_{m_k}\left(P_k(x)^{\alpha_k n}\right) D_{m_9}\left((70-x)^{-n-1}\right).$$

Имеем

$$D_{m_9}\left((70-x)^{-n-1}\right) = \binom{n+m_9}{m_9} 70^{-n-m_9-1}.$$

Как в лемме 1 работы [3], необходимо оценить снизу показатели $\gamma_{p_j}(a_i)$, $p_j \in \{7; 5; 3; 2\}$. Мы будем применять леммы 1, 2, а также равенства (7) и (8). Имеем последовательно

$$\Upsilon_7(a_i) \geqslant 2\alpha_1 n - m_1 + 2\alpha_3 n - m_3 + \alpha_4 n - m_4 + 2\alpha_5 n - m_5 + 2\alpha_6 n - m_6 + 2\alpha_7 n - m_7 + 3\alpha_8 n -$$
$$-m_8 - n - m_9 - 1 \geqslant n(2\alpha_1 + 2\alpha_3 + \alpha_4 + 2\alpha_5 + 2\alpha_6 + 2\alpha_7 + 3\alpha_8) - n - 1 - (n+1-i) = i - 2;$$
$$\Upsilon_5(a_i) \geqslant 2\alpha_2 n - m_2 + 2\alpha_3 n - m_3 + \alpha_4 n - m_4 + \alpha_5 n - m_5 + 2\alpha_6 n - m_6 + 2\alpha_7 n - m_7 + 2\alpha_8 n -$$
$$-m_8 - n - m_9 - 1 \geqslant n(2\alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + 2\alpha_6 + 2\alpha_7 + 2\alpha_8) - n - 1 - (n+1-i) = i - 2;$$
$$\Upsilon_3(a_i) \geqslant \alpha_1 n - m_1 + \alpha_2 n - m_2 + \alpha_6 n - m_6 \geqslant n(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_6) - (n+1-i) = i - 1;$$
$$\Upsilon_2(a_i) \geqslant 3\alpha_1 n - 3m_1 + 4\alpha_2 n - 3m_2 + 3\alpha_4 n - 3m_4 + 4\alpha_5 n - 3m_5 + 3\alpha_6 n - 3m_6 + 4\alpha_7 n - 3m_7 +$$
$$+8\alpha_8 n - 3m_8 - n - m_9 - 1 \geqslant n(3\alpha_1 + 4\alpha_2 + 3\alpha_4 + 4\alpha_5 + 3\alpha_6 + 4\alpha_7 + 8\alpha_8) - n - 1 -$$
$$-3(n+1-i) = -\alpha n + 3i - 4.$$

Лемма доказана.

Обозначим $\Delta_n = \text{НОК}(1,2,...,n)$, $C_n = 70{*}2^{\alpha{*}n}{*}\Delta_n$, $\varepsilon_n^{(1)} = C_n\omega_1$, $\varepsilon_n^{(2)} = C_n\omega_2$, где интегралы ω_1 и ω_2 определены в равенствах (10).

Лемма 4. *Справедливы представления вида*

$$\varepsilon_n^{(1)} = r_n \ln\frac{4}{3} - p_n^{(1)}, \quad \varepsilon_n^{(2)} = r_n\left(\ln\frac{3}{2} - \ln\frac{4}{3}\right) - p_n^{(2)},$$

где $r_n = C_n a_1 \in \mathbb{Z}$, $p_n^{(1)} \in \mathbb{Z}$, $p_n^{(2)} \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Необходимо проинтегрировать тождество (11) и воспользоваться леммой 3. Имеем из (10) - (12)

$$\varepsilon_n^{(1)} = C_n\left(\int_{35}^{40} Q_{n-2}(x)dx + a_1 \ln\frac{x}{70-x}\Big|_{35}^{40} - \sum_{i=2}^{n+1}\frac{a_i}{i-1}\left(\frac{1}{40^{i-1}} - \frac{1}{30^{i-1}}\right)\right) =$$

$$= C_n a_1 \ln\frac{4}{3} - p_n^{(1)}, \quad p_n^{(1)} \in \mathbb{Z}$$

$$\varepsilon_n^{(2)} = C_n\left(\int_{40}^{42} Q_{n-2}(x)dx + a_1 \ln\frac{x}{70-x}\Big|_{40}^{42} - \sum_{i=2}^{n+1}\frac{a_i}{i-1}\left(\frac{1}{42^{i-1}} - \frac{1}{40^{i-1}} - \frac{1}{28^{i-1}} + \frac{1}{30^{i-1}}\right)\right) =$$

$$= C_n a_1\left(\ln\frac{3}{2} - \ln\frac{4}{3}\right) - p_n^{(2)}, \quad p_n^{(2)} \in \mathbb{Z}.$$

Лемма доказана.

Для завершения доказательства теоремы 1, как и в работе [3], нам будет необходима следующая лемма, доказанная М. Хата [лемма 2.1].

Лемма 5. *Пусть* $\Theta_1, \Theta_2 \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_n^{(1)} = r_n\Theta_1 - p_n^{(1)}$, $\varepsilon_n^{(2)} = r_n\Theta_2 - p_n^{(2)}$, *где* $r_n, p_n^{(1)}, p_n^{(2)} \in \mathbb{Z}$;

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\left|\varepsilon_n^{(1)}\right| = -\tau_1, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\left|\varepsilon_n^{(2)}\right| = -\tau_2,$$

где $\tau > 0, \tau_2 > 0, \tau_1 \neq \tau_2$.

Пусть далее $\tau = \min(\tau_1, \tau_2)$,

$$\lim_{n\to\infty}\sup\frac{1}{n}\ln|r_n| \leqslant \lambda;$$

$L_1, L_2, L \in \mathbb{Z}$, $H = \max(|L_1|, |L_2|)$, $\mu > \lambda/\tau$, $H \geqslant H_0(\mu)$.

Тогда

$$|L_1\Theta_1 + L_2\Theta_2 + L| \geqslant \frac{1}{H^\mu}.$$

В рассматриваемом нами случае $\Theta_1 = \ln\frac{4}{3}$, $\Theta_2 = \ln\frac{3}{2} - \ln\frac{4}{3} = \ln\frac{9}{8}$. Асимптотику интегралов (10) несложно вычислить с помощью теоремы Лапласа, а асимптотику коэффициента a_1 из разложения (11) - с помощью метода перевала.

Имеем $x(70-x) = 1225 - t$. Обозначим (см. (9))

$$g(t) = \frac{\prod_{k=1}^{8} P_k^{\alpha_k}}{(1225-t)},$$

где все многочлены P_k выражены через переменную $t = (x-35)^2$.

Необходимо найти нули функции $g'(t)/g(t)$. Укажем лишь нули, с помощью которых выражаются константы τ_1, τ_2, λ: $t_1 = 10.50416113$; $t_2 = 38.91332129$; $t_3 = 3625,441321$.

Стандартным образом

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\Delta_n = 1.$$

Поэтому

$$-\tau_1 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln|C_n\omega_1| = \alpha\ln 2 + 1 + \ln|g(t_1)| = -1.422145$$
$$-\tau_2 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln|C_n\omega_2| = \alpha\ln 2 + 1 + \ln|g(t_2)| = -1.422147$$
$$\tau = \min(\tau_1,\tau_2) = 1.422145$$
$$\lambda \leqslant \alpha\ln 2 + 1 + \ln|g(t_3)| = 5.853833$$
$$\frac{\lambda}{\tau} = 4.116201$$

Поэтому по лемме 5

$$|L_1\ln\frac{4}{3} + L_2\ln\frac{9}{8} + L| > H^{\mu},$$

где $L_1, L_2, L \in \mathbb{Z}$, $H = \max(|L_1|,|L_2|)$, $\mu > \lambda/\tau$, $\mu = 4.116201$, $H \geqslant H_0$.

Остается отметить, что

$$L_1\ln\frac{4}{3} + L_2\ln\frac{9}{8} = (2L_1 - 3L_2)\ln 2 + (2L_2 - L_1)\ln 3 \equiv h_1\ln 2 + h_2\ln_3,$$

где $L_1 = 2h_1 + 3h_2$, $L_2 = h_1 + 2h_2$, и теорема 1 доказана.

3. Заключение

В данной работе была доказана оценка меры иррациональности числа $\ln 3$:

$$\mu(\ln 3) \leqslant 5.116201,$$

которая несколько лучше предыдущего результата $\mu(\ln 3) \leqslant 5.1163051$, опубликованного в 2014 году К. Ву и Л. Вангом.

Улучшение достигнуто за счёт добавления симметризованного квадратного многочлена к соответствующей интегральной конструкции, основанной на симметризованных многочленах первой степени.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Wu Q., Wang L. On the irrationality measure of $\log 3$ // Journal of Number Theory. 2014. Vol. 142. P. 264-273.

2. Rhin G. Approximants de Pade et mesures effectives d' irrationalite // Seminaire de Theorie des Nombres, Paris 1985-1986. Boston: Birkhauser, 1987. P. 155-164. (Progress i Mathematics. Vol. 71.)

3. Салихов В. Х. О мере иррациональности $\ln 3$ // Доклады АН РФ. 2007. Т. 417, № 6. С. 753-755.

4. Baker A., Wüstolz G. Logarithmic forms and group varieties // J. Reine Angew. Math. 1993. Vol. 442. P. 19-62.

5. Heimonen A., Matala-aho T., Väänänen K. On irrationality measures of the values of Gauss hypergeometric function // Manuscripta Math. 1993. Vol. 81. № 1. P. 183-202.

6. Wu Q. On the linear independence measure of logarithms of rational numbers // Math. Comput. 2002. Vol. 72, № 242. P. 901-911.

7. Rhin G., Toffin P. Approximants de Padé simultanés de logaritmes // J. Number Theory. 1986. Vol. 24. P. 284-297.

8. Зудилин В. В. Эссе о мерах иррациональности π и других логарифмов // Чебышевский сборник. 2004. Т. 5, № 2. С. 49-65.

9. Салихов В. Х. О мере иррациональности числа π // Математические заметки. 2010. Т. 88, № 4. С. 583-593.

10. Золотухина Е. С. Диофантовы приближения некоторых логарифмов : дис. ... канд. физ.-мат. наук. Брянск, 2009. 100 с.

11. Сальникова Е. С. Приближения некоторых логарифмов числами из полей $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ // Фундамент. и приклад. математика. 2010. Т. 16, № 6. С. 139-155.

12. Лучин М. Ю. О диофантовых приближениях некоторых логарифмов // Вестник Брян. гос. ун-та. 2012. № 4 (2). С. 22-28.

13. Лучин М. Ю. Оценка меры иррациональности числа $\ln\frac{7}{4}$ // Чебышевский сборник. 2013. Т. 14, № 2. С. 123-131. то же [Электронный ресурс].

URL: http://www.chebsbornik.ru/jour/article/view/82

14. Томашевская Е. Б. О диофантовых приближениях значений функции $\log x$ // Фундамент. и приклад. математика. 2010. Т. 16, № 6. С. 157-166.

15. Hata M. Rational approximations to π and some other numbers // Acta Arith. 1993. Vol. LXIII, № 4. P. 335-349.

REFERENCES

1. Wu, Q. & Wang, L. 2014, "On the irrationality measure of $\log 3$", *Journal of Number Theory.*, vol. 142, pp. 264-273.

2. Rhin, G. 1987, "Approximants de Pade et mesures effectives d' irrationalite, Seminaire de Theorie des Nombres, Paris 1985-1986", *Progress i Math., Boston: Birkhauser.*, no. 71, pp. 155-164.

3. Salikhov, V. H. 2007, "On the measure of irrationality $\ln 3$", *Doklady Mathematics*, vol. 47, no. 6, pp. 753-755.

4. Baker, A. Wüstolz G. 1993, "Logarithmic forms and group varieties", *J. Reine Angew. Math.*, vol. 442, pp. 19-62.

5. Heimonen, A. & Matala-aho, T. Väänänen K. 1993, "On irrationality measures of the values of Gauss hypergeometric function", *Manuscripta Math.*, vol. 81, no. 1, pp. 183-202.

6. Wu, Q. 2002, "On the linear independence measure of logarithms of rational numbers" ,*Math. Comput.*, vol. 72, no. 242, pp. 901-911.

7. Rhin, G. & Toffin, P. 1986, "Approximants de Padé simultanés de logaritmes", *J. Number Theory.*, vol. 24, pp. 284-297.

8. Zudilin, V. V. 2004, "An essay on irrationality measures of π and other logarithms", *CHebyshevskij sbornik*, vol. 5, no. 2, pp. 49-65.

9. Salikhov, V. H. 2010, "On the measure of irrationality of a number π", *Mathematical Notes*, vol. 88, no. 4, pp. 583-593.

10. Zolotukhina, E. S. 2009, "Diophantine approximations of some logarithms: dis. kand. fiz.-mat. nauk", Bryansk, 100 p.

11. Sal'nikova, E. S. 2010, "Approximations of some logarithms by numbers from fields $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$", *Fundam. i prikl. matematika*, vol. 16, no. 6, pp. 139-155.

12. Luchin, M. Y. 2012, "On Diophantine approximations of some logarithms " *Vestnik Bryanskogo gosudarstvennogo universiteta* , no. 4 (2), pp. 22-28.

13. Luchin, M. Y. 2013, "Measure of irrationality of a number $\ln \frac{7}{4}$" *CHebyshevskij sbornik* , vol. 14, no. 2, pp. 123-131.

14. Tomashevskaya, E. B. 2010, "On Diophantine approximations of function values $\log x$" *Fundam. i prikl. matematika* , vol. 16, no. 6, pp. 157-166.

15. Hata, M. 1993, "Rational approximations to π and some other numbers", *Acta Arith.*, vol. LXIII, no. 4, pp. 335-349.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 19. Выпуск 1

УДК 512.572 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-1-26-34

О базисах тождеств многообразий группоидов отношений

Бредихин Дмитрий Александрович — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры «Математика и моделирование», Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю.А.
e-mail: bredikhin@mail.ru

Аннотация

Множество бинарных отношений, замкнутое относительно некоторой совокупности операций над ними, образует алгебру, называемую алгеброй отношений. Всякую такую алгебру можно рассматривать как упорядоченную отношением теоретико-множественного включения. Для заданного множества Ω операций над бинарными отношениями обозначим через $Var\{\Omega\}$ ($Var\{\Omega, \subset\}$ многообразие, порождённое алгебрами [соответственно упорядоченными алгебрами] отношений с операциями из Ω. Операции над отношениями, как правило, задаются формулами исчисления предикатов первого порядка. Такие операции называются логическими. Важным классом логических операция является класс диофантовых операций. Операция называется диофантовой, если она может быть задана с помощью формулы, которая в своей предваренной нормальной форме содержит лишь операции конъюнкции и кванторы существования. В работе изучаются алгебры отношений с одной бинарной диофантовой операцией, то есть группоиды отношений. В качестве рассматриваемой операции выступает диофантова операция $*$, определяемая следующим образом: $\rho * \sigma = \{(x, y) \in X \times X : (\exists z)(x, z) \in \rho \wedge (x, z) \in \sigma\}$. Отношение $\rho * \sigma$ представляет собой результат цилиндрификации пересечения $\rho \cap \sigma$ бинарных отношений ρ и σ. В работе находятся конечные базисы тождеств для многообразий $Var\{*\}$ и $Var\{*, \subset\}$. Группоид $(A, \cdot)$ принадлежит многообразию $Var\{*\}$ тогда и только тогда, когда он удовлетворяет тождествам: $xy = yx$ (1), $(xy)^2 = xy$ (2), $(xy)y = xy$ (3), $x^2y^2 = x^2y$ (4), $(x^2y^2)z = x^2(y^2z)$ (5). Упорядоченный группоид $(A, \cdot, \leq)$ принадлежит многообразию $Var\{*, \subset\}$ тогда и только тогда, когда он удовлетворяет тождествам (1)–(5) и тождествам: $x \leq x^2$ (6), $xy \leq x^2$ (7). В качестве следствия также получен конечный базис тождеств многообразия $Var\{*, \cup\}$.

Ключевые слова: алгебры отношений, диофантовые операции, тождества, многообразия, группоиды, упорядоченные группоиды.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:
Д. А. Бредихин. О базисах тождеств многообразий группоидов отношений // Чебышевский сборник, 2018, т. 19, вып. 1, с. 26–34.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 19. No. 1

UDC 512.572 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-1-26-34

On bases of identities for varieties of groupoids of relations

Bredikhin Dmitry Aleksandrovich — Doctor of physical and mathematical sciences, professor, professor of Department of "Mathematics and Modeling"of Saratov State Technical University.
e-mail: bredikhin@mail.ru

Abstract

A set of binary relations closed with respect to some collection of operations on relations forms an algebra called an algebra of relations. Any such algebra can be considered as partially ordered by the relation of set-theoretic inclusion. For a given set Ω of operations on relations, we denote by $Var\{\Omega\}$ $[Var\{\Omega, \subset\}]$ the variety generated by the algebras [respectively ordered algebras] of relations with operations from Ω. Operations on relations, as a rule, are given by formulas of the first order predicate calculus. Such operations are called logical operations. An important class of logical operations is the class of Diophantine operations. An operation on relations is called Diophantine if it can be defined by a formula containing in its prenex normal form only existential quantifiers and conjunctions. We study algebras of relations with one binary Diophantine operation, i.e., groupoids of relations. As the operation being considered, the Diophantine operation $*$ that is defined in the following way: $\rho * \sigma = \{(x, y) \in X \times X : (\exists z)(x, z) \in \rho \wedge (x, z) \in \sigma\}$. The relation $\rho * \sigma$ is the result of the cylindrification of the intersection $\rho \cap \sigma$ of the binary relations ρ and σ. In the paper, the finite bases of identities for varieties $Var\{*\}$ and $Var\{*, \subset\}$ are found. The groupoid $(A, \cdot)$ belongs to the variety $Var\{*\}$ if and only if it satisfies the identities: $xy = yx$ (1), $(xy)^2 = xy$ (2), $(xy)y = xy$ (3), $x^2y^2 = x^2y$ (4), $(x^2y^2)z = x^2(y^2z)$ (5). The partially ordered groupoid $(A, \cdot, \leq)$ belongs to the variety $Var\{*, \subset\}$ if and only if it satisfies the identities (1) - (5) and the identities: $x \leq x^2$ (6), $xy \leq x^2$ (7). As a consequence, we also obtain a finite basis of identities for the variety $Var\{*, \cup\}$.

Keywords: algebra of relations, diophantine operations, identities, varieties, groupoids, patially ordered groupoids.

Bibliography: 15 titles.

For citation:
D. A. Bredikhin, 2018, "On bases of identities for varieties of groupoids of relations *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 1, pp. 26–34.

1. Введение

Основы абстрактно-алгебраического подхода к изучению алгебр отношений были заложены в работах А.Тарского [1, 2]. Под *алгеброй отношений* мы понимаем упорядоченную пару (Φ, Ω), где Φ – множество бинарных отношений на некотором множестве, замкнутое относительно совокупности Ω операций над ними [3]. Важную роль в теории алгебр отношений играет изучение многообразий, порожденных различными их классами [4, 5]. Операция над отношениями называется диофантовой [9, 10] (в другой терминологии примитивно-позитивной [14]), если она может быть задана с помощью формулы, которая в своей предваренной нормальной форме содержит лишь операции конъюнкции и кванторы существования. Диофантовы операции согласованы с отношением теоретико-множественного включения $\subset$ и, следовательно, всякая алгебра отношений (Φ, Ω) с диофантовыми операциями может быть рассмотрена как упорядоченная $(\Phi, \Omega, \subset)$ этим отношением.

Для заданного множества Ω операций над бинарными отношениями обозначим через $R\{\Omega\}$ ($R\{\Omega, \subset\}$) класс алгебр (упорядоченных алгебр) изоморфных алгебрам отношений с операциями из Ω. Пусть $Var\{\Omega\}$ ($Var\{\Omega, \subset\}$) – многообразие, порожденное классом $R\{\Omega\}$ ($R\{\Omega, \subset\}$).

Предметом нашего рассмотрения будут вопросы, касающиеся нахождения базисов тождеств многообразий, порожденных классами алгебр отношений с одной бинарной диофантовой операцией, то есть классами группоидов отношений. Мотивация такого рода исследований приведена в [8, 13]. Некоторые результаты в этом направлении можно также найти в работах [6, 11, 12].

Сосредоточим внимание на следующей операции над отношениями, задаваемой формулой:

$$\rho * \sigma = \{(x, y) \in X \times X : (\exists z)(x, z) \in \rho \wedge (x, z) \in \sigma\},$$

где ρ и σ – бинарные отношения на множестве X.

Заметим, что отношение $\rho * \sigma$ представляет собой результат цилиндрификации [15] пересечения $\rho \cap \sigma$ бинарных отношений ρ и σ.

Основным результатом данной работы является нахождение базисов тождеств для многообразий $Var\{*\}$, $Var\{*, \subset\}$ и $Var\{*, \cup\}$. Доказательства основываются на описаниях эквациональных теорий алгебр отношений с диофантовыми операциями, полученных в [7, 9, 10]. Результаты докладывались на 14 Международной конференции „Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения“, посвященной 70-летию со дня рождения Г.И.Архипова и С.М.Воронина (Саратов, 12-15 сентября 2016 г.).

2. Формулировка результатов

Группоидом называется алгебра $(A, \cdot)$ с одной бинарной операцией. Упорядоченным группоидом $(A, \cdot, \leq)$ назовем группоид с заданным на множестве A отношением порядка, согласованным с операцией группоида. Это означает, что $x \leq y$ и $u \leq v$ влечет $xu \leq yv$. Полурешеточно упорядоченный группоид – это алгебра $(A, \cdot, \vee)$ типа $(2, 2)$, где $(A, \cdot)$ – группоид, $(A, \vee)$ – верхняя полурешетка, каноническое отношение порядка которой согласовано с операцией группоида. Алгебры отношений вида $(\Phi, *)$, $(\Phi, *, \subset)$ и $(\Phi, *, \cup)$ образуют соответственно группоид, упорядоченный группоид и полурешеточно упорядоченный группоид бинарных отношений.

Теорема 1. *Группоид $(A, \cdot)$ принадлежит многообразию $Var\{*\}$ тогда и только тогда, когда он удовлетворяет тождествам:*

$$xy = yx\ (1),\ (xy)^2 = xy\ (2),\ (xy)y = xy\ (3),\ x^2y^2 = x^2y\ (4),\ (x^2y^2)z = x^2(y^2z)\ (5).$$

Теорема 2. *Упорядоченный группоид $(A, \cdot, \leq)$ принадлежит многообразию $Var\{*, \subset\}$ тогда и только тогда, когда он удовлетворяет тождествам (1)–(5) и тождествам:*

$$x \leq x^2 \ (6), \ xy \leq x^2 \ (7).$$

Теорема 3. *Полурешеточно упорядоченный группоид $(A, \cdot, \vee)$ принадлежит многообразию $Var\{*, \cup\}$ тогда и только тогда, когда он удовлетворяет тождествам (1)–(5) и тождествам:*

$$(x \vee y)z = xz \vee yz \ (8), \ x \vee x^2 = x^2 \ (9), \ xy \vee x^2 = x^2 \ (10).$$

3. Доказательства

Разобьем доказательство теорем на ряд шагов.

Шаг 1. Приведем ряд определений и обозначений, используемых в дальнейшем изложении, и сформулируем необходимый результат из работ [7].

Обозначим через $Rel(U)$ множество всех бинарных отношений на U. Всякая формула $\phi(z_0, z_1, r_1, \ldots, r_m)$ логики предикатов первого порядка с равенством, содержащая m бинарных предикатных символов $r_1, \ldots, r_m$ и две свободные индивидуальные переменные z_0, z_1, определяет m-арную операцию F_φ на $Rel(U)$:

$$F_\varphi(\rho_1, \ldots, \rho_m) = \{(x, y) \in U \times U : \varphi(x, y, \rho_1, \ldots, \rho_m)\},$$

где $\varphi(x, y, R_1, \ldots, R_m)$ означает, что формула φ выполняется, если z_0, z_1 интерпретируются как x, y и $r_1, \ldots, r_m$ интерпретируются как отношения $\rho_1, \ldots, \rho_m$ из $Rel(U)$.

Операция над бинарными отношениями называется диофантовой [9, 10] (в другой терминологии примитивно-позитивной [14]), если она может быть определена формулой, содержащей в своей записи лишь кванторы существования и операцию конъюнкции. Диофантовы операции могут быть описаны с помощью графов [3, 4].

Обозначим через N множество всех натуральных чисел. Помеченным графом назовем пару $G = (V, \ E)$, где $V = V(G)$ – конечное множество, называемое множеством вершин, и $E = E(G) \subset V \times N \times V$ – тернарное отношение. Тройку $(u, k, v) \in E$ будем называть ребром графа, идущим из вершины u в вершину v, помеченным меткой k, и графически изображать следующим образом: $u \cdot \stackrel{k}{\to} \cdot v$. Мы также будем говорить, что вершины u и v инцидентны ребру (u, k, v).

Под двухполюсником мы понимаем помеченный граф с парой выделенных вершин, то есть систему вида $G = (V, E, in, out)$, где (V, E) – помеченный граф; $in = in(G)$ и $out = out(G)$ – две выделенные вершины (не обязательно различные), называемые входом и выходом двухполюсника соответственно.

Понятие изоморфизма помеченных графов и двухполюсников определяется естественным образом. В дальнейшем все графы будут рассматриваться с точностью до изоморфизма. Мы также будем отождествлять двухполюсники, различающиеся лишь числом изолированных вершин, отличных от его входа и выхода, так как такие двухполюсники соответствуют одной и той же операции над отношениями.

Пусть $F = F_\varphi$ – диофантова операция, задаваемая формулой φ. С этой операцией может быть ассоциирован двухполюсник $G = G(F) = G(\varphi)$, определяемый следующим образом: $V(G)$ – множество всех индексов индивидуальных переменных, входящих в формулу φ; $in(G) = 0$, $out(G) = 1$; $(i, k, j) \in E(G)$ тогда и только тогда, когда атомарная формула $r_k(z_i, z_j)$ входит в φ; если формула $z_i = z_j$ входит в φ, то вершины i и j отождествляются.

Заметим, что двухполюсник, соответствующий операции $*$, задается следующим образом:

$$in = \cdot \overset{1}{\underset{2}{\rightrightarrows}} \cdot \qquad \cdot = out$$

Пусть $G = (V, E, in, out)$ и $G_k = (V_k, E_k, in_k, out_k)$ $(k = 1, \ldots, m)$ – двухполюсники с попарно непересекающимися множествами вершин. Назовем композицией этих двухполюсников новый двухполюсник $G(G_1, \ldots, G_m)$, определяемый следующим образом [14]: возьмем двухполюсник G и заменим каждое его ребро $(u, k, v) \in E$ на двухполюсник G_k, отождествляя при этом вершину in_k с вершиной u и вершину out_k с вершиной v.

Рассмотрим множество $\Omega = \{F_{\varphi_1}, \ldots, F_{\varphi_n}\}$ диофантовых операций над отношениями, и пусть $A = (A, f_1, \ldots, f_n)$ – универсальная алгебра соответствующего типа. Положим $G_1 = G(\varphi_1)$, $\ldots$, $G_n = G(\varphi_n)$.

Для всякого терма p алгебры A определим следующим индуктивным образом двухполюсник $G(p) = (V(p), E(p), in(p), out(p))$:

1) если $p = x_k$, то $G(p)$ представляет собой двухполюсник вида $in \cdot \overset{k}{\rightarrow} \cdot out$;

2) если $p = f_k(p_1, \ldots, p_m)$, то $G(p)$ есть композиция $G_k(G(p_1), \ldots, G(p_m))$.

Пусть $G_1 = (V_1, E_1, in_1, out_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2, in_2, out_2)$ – двухполюсники. Отображение $f : V_2 \to V_1$ называется гомоморфизмом из G_2 в G_1, если $f(in_2) = in_1$, $f(out_2) = out_1$ и $(f(u), k, f(v)) \in E_1$ для всякой тройки $(u, k, v) \in E_2$.

Мы будем писать $G_1 \prec G_2$, если существует гомоморфизм из G_2 в G_1, и $G_1 \cong G_2$, если $G_1 \prec G_2$ и $G_2 \prec G_1$.

Обозначим через $Eq\{\Omega\}$ $(Eq\{\Omega, \subset\})$ эквациональную теорию класса $R\{\Omega\}$ $(R\{\Omega, \subset\})$, то есть совокупность всх тождеств, выполняющихся на алгебрах из этого класса. Теперь мы готовы сформулировать основной результат работы [7]:

Тождество $p = q$ $(p \le q)$ принадлежит эквациональной теории $Eq\{\Omega\}$ $(Eq\{\Omega, \subset\})$ тогда и только тогда, когда $G(p) \cong G(q)$ $(G(p) \prec G(q))$.

Шаг 2. Рассмотрим счетное множество индивидуальных переменных $X = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$. Напомним, что термы группоида определяются следующим индуктивным образом: всякая индивидуальная переменная является термом; если p_1 и p_2 – термы, то выражение $(p_1 p_2)$ является термом, называемым произведением термов p_1 и p_2. В дальнейшем внешние скобки в записи термов, как правило, будут опускаться. Множество Ξ всех термов относительно операции произведения термов образует счетно порожденную свободную алгебру в классе всех группоидов.

Обозначим через Σ $(\Sigma^{\le})$ эквациональную теорию класса группоидов (упорядоченных группоидов), удовлетворяющих тождествам (1)–(5) ((1)–(7)). Для термов p_1 и p_2 из Ξ будем писать $p_1 \cong p_2$ $(p_1 \prec p_2)$, когда тождество $p_1 = p_2$ $(p_1 \le p_2)$ принадлежит Σ $(\Sigma^{\le})$. Отношение $\cong$ является отношением конгруэнции группоида Ξ, а фактор группоид $\Xi/\cong$ является свободным счетно порожденным группоидом в многообразии, задаваемом тождествами (1)–(5). Класс отношения эквивалентности, содержащий терм p обозначим через $[p]$. Фактор группоид $\Xi/\cong$, упорядоченный отношением $\le$ $([p] \le [q] \Leftrightarrow p \prec q)$, является свободным счетно порожденным упорядоченным группоидом в многообразии, задаваемом тождествами (1)–(7).

Пусть $(A, \cdot)$ – группоид, удовлетворяющий тождествам (1)–(5). В дальнейшем при преобразованиях термов группоида мы, как правило, будем указывать номер используемого тождества. Покажем, что тождества (1)–(5) влекут следующее тождество:

$$((xy)(uv))z = (xy)((uv))z) \; (11).$$

Действительно, $((xy)(uv))z \overset{2}{\cong} ((xy)^2(uv)^2)z \overset{5}{\cong} (xy)^2((uv)^2)z \overset{2}{\cong} (xy)((uv))z$.

Из тождества (11) следует, что подгруппоид $(A^2, \cdot)$, где $A^2 = \{ab : a, b \in A\}$, является полугруппой и, следовательно, скобки, указывающие порядок выполнения действий в произведении элементов из A^2, а также в соответствующих термах при их равносильных преобразованиях, могут быть расставлены произвольным образом или просто опущены. В дальнейшем мы будем пользоваться этим свойством без особых упоминаний.

Лемма 1. *Для любого терма $p \in \Xi$, либо $p \in X$, либо $p \cong (x_{i_1}x_{i_2})(x_{i_3}x_{i_4})\dots(x_{i_{2m-1}}x_{i_{2m}})$.*

Доказательство.

Доказательство индукцией по числу вхождений переменных в терм. База индукции очевидна. Пусть $p \cong (x_{i_1}x_{i_2})(x_{i_3}x_{i_4})\dots(x_{i_{2m-1}}x_{i_{2m}})$. Если $q = x_k$, то

$x_k p \cong px_k \cong ((x_{i_1}x_{i_2})(x_{i_3}x_{i_4})\dots(x_{i_{2m-1}}x_{i_{2m}}))x_k \overset{11}{\cong}$
$((x_{i_1}x_{i_2})(x_{i_3}x_{i_4})\dots(x_{i_{2m-3}}x_{i_{2m-1}}))((x_{i_{2m-1}}x_{i_{2m}})x_k) \overset{2}{\cong}$
$((x_{i_1}x_{i_2})(x_{i_3}x_{i_4})\dots(x_{i_{2m-3}}x_{i_{2m-1}}))((x_{i_{2m-1}}x_{i_{2m}})^2x_k) \overset{4}{\cong}$
$((x_{i_1}x_{i_2})(x_{i_3}x_{i_4})\dots(x_{i_{2m-3}}x_{i_{2m-1}}))((x_{i_{2m-1}}x_{i_{2m}})^2(x_kx_k)) \overset{2}{\cong}$
$((x_{i_1}x_{i_2})(x_{i_3}x_{i_4})\dots(x_{i_{2m-3}}x_{i_{2m-1}}))((x_{i_{2m-1}}x_{i_{2m}})(x_kx_k)) \cong$
$(x_{i_1}x_{i_2})(x_{i_3}x_{i_4})\dots(x_{i_{2m-3}}x_{i_{2m-1}})(x_{i_{2m-1}}x_{i_{2m}})(x_kx_k)$.

Пусть теперь $q \cong (x_{j_1}x_{j_2})(x_{j_3}x_{i_4})\dots(x_{j_{2n-1}}x_{j_{2n}})$, тогда
$pq \cong ((x_{i_1}x_{i_2})(x_{i_3}x_{i_4})\dots(x_{i_{2m-1}}x_{i_{2m}}))((x_{j_1}x_{j_2})(x_{j_3}x_{j_4})\dots(x_{j_{2n-1}}x_{j_{2n}}))$
$\cong (x_{i_1}x_{i_2})(x_{i_3}x_{i_4})\dots(x_{i_{2m-1}}x_{i_{2m}})(x_{j_1}x_{j_2})(x_{j_3}x_{j_4})\dots(x_{j_{2n-1}}x_{j_{2n}})$. $\square$

Шаг 3. Согласно определению двухполюсник $G(p) = (V(p), E(p), in_p, out_p)$ для терма $p = (x_{i_1}x_{i_2})(x_{i_3}x_{i_4})\dots(x_{i_{2m-1}}x_{i_{2m}})$ может быть построен следующим образом:

$$V(p) = \{in_p, out_p, v_1, v_2, \dots, v_m\};$$

$$E(p) = \{(in_p, i_1, v_1), (in_p, i_2, v_1), (in_p, i_3, v_2), (in_p, i_4, v_2), \dots, (in_p, i_{2m-1}, v_m), (in_p, i_{2m}, v_m)\}.$$

Заметим, что двухполюсник $G(p)$ получается из объединения двухполюсников $G(x_{i_1}x_{i_2}), G(x_{i_3}x_{i_4}), \dots, G(x_{i_{2m-1}}x_{i_{2m}})$ посредством отождествления их входов и выходов.

Следующие две леммы непосредственно следует из определения гомоморфизма и описанного выше строения двухполюсников.

Лемма 2. *Пусть $G(x_k) \prec G(p)$, где $p = (x_{i_1}x_{i_2})(x_{i_3}x_{i_4})\dots(x_{i_{2m-1}}x_{i_{2m}})$. Тогда*

$$x_{i_1} = x_{i_2} = x_{i_3=} = x_{i_4} = \dots = x_{i_{2m-1}} = x_{i_{2m}} = x_k.$$

Лемма 3. *Пусть $G(p) \prec G(q)$, где $p = (x_{i_1}x_{i_2})(x_{i_3}x_{i_4})\dots(x_{i_{2m-1}}x_{i_{2m}})$, $q = (x_{j_1}x_{j_2})(x_{j_3}x_{j_4})\dots(x_{j_{2n-1}}x_{j_{2n}})$, $V(p) = \{in_p, out_p, v_1, v_2, \dots, v_m\}$, $V(q) = \{in_q, out_q, u_1, u_2, \dots, u_n\}$ и $f : V(q) \to V(p)$ соответствующий гомоморфизм двухполюсника $G(q)$ в двухполюсник $G(p)$. Предположим, что $f(u_k) = v_l$. Тогда возможен один из следующих случаев:*

a) $x_{j_{2k-1}} = x_{i_{2l-1}}$ *и* $x_{j_{2k}} = x_{i_{2l}}$;
b) $x_{j_{2k-1}} = x_{i_{2l}}$ *и* $x_{j_{2k}} = x_{i_{2l-1}}$;
c) $x_{j_{2k-1}} = x_{j_{2k}} = x_{i_{2l-1}}$;
d) $x_{j_{2k-1}} = x_{j_{2k}} = x_{i_{2l}}$.

Лемма 4. *Пусть $G(p) \prec G(q)$, где $p = (x_{i_1}x_{i_2})(x_{i_3}x_{i_4})\dots(x_{i_{2m-1}}x_{i_{2m}})$, $q = (x_{j_1}x_{j_2})(x_{j_3}x_{j_4})\dots(x_{j_{2n-1}}x_{j_{2n}})$. Тогда для любого $k = 1, 2, \dots, n$ имеем $p \cong p(x_{i_{2k-1}}x_{i_{2k}})$.*

Доказательство. Предположим, что $f(u_k) = v_l$. Согласно лемме 3 возможны следующие случаи:

a) $x_{j_{2k-1}} = x_{i_{2l-1}}$ и $x_{j_{2k}} = x_{i_{2l}}$. Тогда

$$p \cong (x_{i_1}x_{i_2})(x_{i_3}x_{i_4})\dots(x_{i_{2l-1}}x_{i_{2l}})\dots(x_{i_{2m-1}}x_{i_{2m}}) \overset{2}{\cong}$$
$$(x_{i_1}x_{i_2})(x_{i_3}x_{i_4})\dots(x_{i_{2l-1}}x_{i_{2l}})^2\dots(x_{i_{2m-1}}x_{i_{2m}}) \cong$$
$$(x_{i_1}x_{i_2})(x_{i_3}x_{i_4})\dots(x_{i_{2l-1}}x_{i_{2l}})(x_{i_{2k-1}}x_{i_{2k}})\dots(x_{i_{2m-1}}x_{i_{2m}}) \overset{1}{\cong}$$
$$(x_{i_1}x_{i_2})(x_{i_3}x_{i_4})\dots(x_{i_{2l-1}}x_{i_{2l}})\dots(x_{i_{2m-1}}x_{i_{2m}})(x_{i_{2k-1}}x_{i_{2k}}) \overset{1}{\cong} p(x_{i_{2k-1}}x_{i_{2k}}).$$

Случай (b) рассматривается аналогично.

c) $x_{j_{2k-1}} = x_{j_{2k}} = x_{i_{2l-1}}$. Тогда

$$p \cong (x_{i_1}x_{i_2})(x_{i_3}x_{i_4})\dots(x_{i_{2l-1}}x_{i_{2l}})\dots(x_{i_{2m-1}}x_{i_{2m}}) \overset{3}{\cong}$$
$$(x_{i_1}x_{i_2})(x_{i_3}x_{i_4})\dots((x_{i_{2l-1}}x_{i_{2l}})x_{i_{2l-1}})\dots(x_{i_{2m-1}}x_{i_{2m}}) \overset{2}{\cong}$$
$$(x_{i_1}x_{i_2})(x_{i_3}x_{i_4})\dots((x_{i_{2l-1}}x_{i_{2l}})^2x_{i_{2l-1}})\dots(x_{i_{2m-1}}x_{i_{2m}}) \overset{4}{\cong}$$
$$(x_{i_1}x_{i_2})(x_{i_3}x_{i_4})\dots((x_{i_{2l-1}}x_{i_{2l}})^2(x_{i_{2l-1}}x_{i_{2l-1}})\dots(x_{i_{2m-1}}x_{i_{2m}}) \overset{2}{\cong}$$
$$(x_{i_1}x_{i_2})(x_{i_3}x_{i_4})\dots(x_{i_{2l-1}}x_{i_{2l}})(x_{i_{2k-1}}x_{i_{2k}})\dots(x_{i_{2m-1}}x_{i_{2m}}) \overset{1}{\cong}$$
$$(x_{i_1}x_{i_2})(x_{i_3}x_{i_4})\dots(x_{i_{2l-1}}x_{i_{2l}})\dots(x_{i_{2m-1}}x_{i_{2m}})(x_{i_{2k-1}}x_{i_{2k}}) \cong p(x_{i_{2k-1}}x_{i_{2k}}).$$

Случай (d) рассматривается аналогично. □

Лемма 5. *Пусть* $G(p) \prec G(q)$, *где* $p = (x_{i_1}x_{i_2})(x_{i_3}x_{i_4})\dots(x_{i_{2m-1}}x_{i_{2m}})$, $q = (x_{j_1}x_{j_2})(x_{j_3}x_{j_4})\dots(x_{j_{2n-1}}x_{j_{2n}})$. *Тогда* $p \cong pq$.

Доказательство. Используя лемму 4, получаем
$p \cong p(x_{j_{2n-1}}x_{j_{2n}}) \cong \dots \cong p(x_{j_1}x_{j_2})(x_{j_3}x_{i_4})\dots(x_{j_{2n-1}}x_{j_{2n}}) = pq.$

□

Шаг 4. Легко проверить, что операции $*$ удовлетворяют тождествам (1)–(7). Отсюда следует, что $\Sigma \subset Eq\{*\}$ и $\Sigma^{\leq} \subset Eq\{*, \subset\}$. Таким образом, для доказательства теорем 1,2 достаточно показать, что всякое тождество $p = q$ ($p \leq q$) из $Eq\{*\}$ ($Eq\{*, \subset\}$) принадлежит Σ ($\Sigma^{\leq}$).

Предположим, что тождество $p \leq q$ принадлежит эквациональной теории $Eq\{*, \subset\}$. Тогда согласно сформулированному выше результату из работы [7] имеем $G(p) \prec G(q)$.

Если $p = x_k$, то, используя лемму 2, получаем

$$p = x_k \overset{6}{\prec} x_k^2 \overset{3}{\cong} x_k^2x_k \overset{4}{\cong} x_k^2x_k^2 \overset{3}{\cong} \dots \overset{3}{\cong} x_k^2x_k^2\dots x_k^2 = q.$$

Если же $q = x_k$, то очевидно, что $p = x_k = q$. Таким образом, согласно лемме 1 можно предположить, что $p = (x_{i_1}x_{i_2})(x_{i_3}x_{i_4})\dots(x_{i_{2m-1}}x_{i_{2m}})$ и $q = (x_{j_1}x_{j_2})(x_{j_3}x_{j_4})\dots(x_{j_{2n-1}}x_{j_{2n}})$. Отсюда, используя лемму 5, получаем $p \cong pq \overset{7}{\prec} q^2 \overset{2}{\cong} q$.

Таким образом, во всех возможных случаях тождество $p \leq q$ принадлежит эквациональной теории Σ, что завершает доказательство теоремы 2.

Предположим теперь, что тождество $p = q$ принадлежит эквациональной теории $Eq\{*\}$. Тогда согласно сформулированному выше результату из [7], имеем $G(p) \cong G(q)$, то есть $G(p) \prec G(q)$ и $G(q) \prec G(p)$. Если хотя бы один из этих термов принадлежит $X = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$, то, как легко видеть, $p = q$. В противном случае, согласно лемме 5 имеем $p \cong pq$ и $q \cong qp$, откуда $p \cong pq \overset{1}{\cong} qp = q$.

Таким образом, во всех возможных случаях тождество $p = q$ принадлежит эквациональной теории Σ, что завершает доказательство теоремы 1.

Теорема 3 непосредственно вытекает из теоремы 2 и следствия 5 работы [7].

4. Заключение

Сформулируем ряд проблем относительно исследуемых классов группоидов отношений.

Проблема 1. Найти систему элементарных аксиом для классов $R\{*\}$, $R\{*,\subset\}$ и $R\{*,\cup\}$.

Проблема 2. Найти базисы квазитождеств для квазимногообразий, порожденных классами $R\{*\}$, $R\{*,\subset\}$ и $R\{*,\cup\}$. Выяснить, являются ли эти квазимногообразии многообразиями.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Tarski A. On the calculus of relations // J. Symbolic Logic. 1941. Vol 4. P. 73-89.
2. Tarski A. Some methodological results concerning the calculus of relations // J. Symbolic Logic. 1953. Vol. 18. P. 188-189.
3. Schein B. M. Relation algebras and function semigroups// Semigroup Forum. 1970. Vol. 1. P. 1-62.
4. Jónsson B. Varieties of relation algebras// Algebra Universalis. 1982. Vol. 54. P. 273-299.
5. Andreka H., Bredikhin D. A. The equational theory of union-free algebras of relations// Algebra Universalis. 1994. Vol. 33. P. 516-532.
6. Bredikhin D. A. Varietes of groupoids associated with involuted restrictive bisemigroups of binary relations // Semigroup Forum. 1992. Vol. 44. P. 87-92.
7. Бредихин Д. А. Эквациональная теория алгебр отношений с позитивными операциями// Изв. вузов. Сер.: Математика. 1993. № 3. С. 23-30.
8. Bredikhin D. A. On relation algebras with general superpositions//Colloq. Math. Soc. J.Bolyai. 1994. Vol. 54. P. 111-124.
9. Bredikhin D. A. On quasi-identities of algebras of relations with diophantine operations // Siberian Mathematical Journal. 1997. Vol. 38, № 1. P. 23-33.
10. Bredikhin D.A. On algebras of relations with Diophantine operations // Doklady Mathematics. 1998. Vol. 57, № 3. P. 435-436.
11. Бредихин Д. А. О многообразии группоидов бинарных отношений// Изв. Сарат. ун-та. Новая серия. Сер.: Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 1, ч. 1. С. 93-98.
12. Бредихин Д. А. О многообразиях группоидов отношений с диофантовыми операциями// Изв. Сарат. ун-та. Новая серия. Сер.: Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 1, ч. 2. С. 28-34.
13. Bredikhin D. A. On Varieties of Groupoids of Relations with Operation of Binary Cylindrification // Algebra Universalis. 2015. Vol. 73. P. 43-52.
14. Böner P., Pöschel F. R. Clones of operations on binary relations// Contributions to general Algebras. 1991. Vol. 7. P. 50-70.
15. Henkin L., Monk J. D., Tarski A. Cylindric Algebras. Amsterdam-London: North-Holland Publishing Company,1971. P. I.: Studies in logic and the foundations of mathematics 508 p.

REFERENCES

1. Tarski, A. 1941, "On the calculus of relations", *J. Symbolic Logic*, vol 4. pp. 73-89.
2. Tarski, A. 1953, "Some methodological results concerning the calculus of relations", *J. Symbolic Logic*, vol 18. pp. 188-189.
3. Schein, B. M. 1970, "Relation algebras and function semigroups", *Semigroup Forum*, vol 1. pp. 1-62.
4. Jónsson, B. 1982, "Varieties of relation algebras", *Algebra Universalis*, vol. 54. pp. 273-299.
5. Andreka, H. & Bredikhin, D. A. 1994, "The equational theory of union-free algebras of relations", *Algebra Universalis*, vol. 33. pp. 516-532.
6. Bredikhin, D. A. 1992, "Varietes of groupoids associated with involuted restrictive bisemigroups of binary relations", *Semigroup Forum*, vol. 44. pp. 87-92.
7. Bredikhin, D. A. 1993, "The equational theory of algebras of relations with positive operations", *Izv. Vuzov. Matem.*, no 3. pp. 23-30 (in Russian).
8. Bredikhin, D. A. 1994, "On relation algebras with general superpositions", *Colloq. Math. Soc. J. Bolyai*, vol. 54. pp. 111-124.
9. Bredikhin, D. A. 1997, "On quasi-identities of algebras of relations with diophantine operations", *Siberian Mathematical Journal*, vol. 38, no 1. P. 23-33.
10. Bredikhin, D. A. 1998, "On algebras of relations with Diophantine operations", *Doklady Mathematics*, vol. 57, no. 3. pp. 435-436.
11. Bredikhin, D. A. 2013, "On varieties of groupoids of binary relations", *Izv. Sarat. Univ. N.S. Ser. Math. Mech. Inform.*, vol. 13, iss. 1, pt. 1. pp. 13-21 (in Russian).
12. Bredikhin, D. A. 2013, "On varieties of groupoids of relations with Diophantine Operations", *Izv. Sarat. Univ. N.S. Ser. Math. Mech. Inform.*, vol. 13, iss. 1, pt. 2,. pp. 28-34 (in Russian).
13. Bredikhin, D. A. 2015, "On Varieties of Groupoids of Relations with Operation of Binary Cylindrifcation", *Algebra Universalis*, vol. 73. pp. 43-52. DOI: 10.1007/s00012-014-0313-0.
14. Böner, P., Pöschel, F. R. 1991, "Clones of operations on binary relations", *Contributions to general algebras*, vol. 7, pp. 50-70.
15. Henkin L., Monk J. D. and Tarski A. 1971, *Cylindric Algebras, Part I*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam and London.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 19. Выпуск 1

УДК 624.04 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-1-35-43

Осесимметричное деформирование направленно армированной оболочки в условиях радиационного облучения

Гарибов Рафаил Баширович — доктор технических наук, профессор, Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Балаковский инженерно-технологический институт (филиал).
e-mail: rbgaribov@mephi.ru
Овчинников Игорь Георгиевич — доктор технических наук, профессор, Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Балаковский инженерно-технологический институт (филиал).

Аннотация

Рассматривается задача моделирования поведения армированной бетонной цилиндрической оболочки в условиях радиационного облучения. Получены разрешающие уравнения для оболочки, учитывающие совместное действие нагрузки и радиационного облучения. Считается, что механические характеристки бетона и арматуры зависят от дозы облучения. Учитывается также неодинаковая работа бетона на растяжение и сжатие. При выводе используется прием замены дискретного армирования в каждом направлении некоторым эквивалентным слоем. Для решения полученных уравнений предложено использовать шаговую по времени методику с нахождением на каждом шаге закона распределения дозы облучения по телу оболочки, деформации распухания, а по ним законов распределения механических характеристик бетона и арматуры с учетом влияния облучения и характера напряженного состояния.

Ключевые слова: армобетонная цилиндрическая оболочки, радиационное облучение, доза облучения, радиационное распухание.

Библиография: 23 названия.

Для цитирования:
Р. Б. Гарибов, И. Г. Овчинников. Осесимметричное деформирование направленно армированной оболочки в условиях радиационного облучения // Чебышевский сборник, 2018, т. 19, вып. 1, с. 35–43.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 19. No. 1

UDC 624.04 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-1-35-43

Axisymmetric deformation of a reinforced shell in the conditions of radiation exposure

Garibov Rafail Bashirovich — doctor of technical sciences, professor, National Research Nuclear University "MEPhI"Balakovo Engineering and Technology Institute (branch).
e-mail: rbgaribov@mephi.ru
Ovchinnikov Igor Georgievich — doctor of technical sciences, professor, National Research Nuclear University "MEPhI"Balakovo Engineering and Technology Institute (branch).

Abstract

The problem of modeling the behavior of reinforced concrete cylindrical shell under conditions of radiation exposure is considered. Solving equations for the shell are obtained, taking into account the joint action of the load and radiation exposure. It is believed that the mechanical characteristics of concrete and reinforcement depend on the radiation dose. The work of concrete on tension and compression is also taken into account. In the output, a method is used to replace the discrete reinforcement in each direction with an equivalent layer. To solve the equations, it was suggested to use a time-stepping technique with finding at each step the law of distribution of the irradiation dose over the body of the shell, the swelling deformation, and according to them the laws of distribution of the mechanical characteristics of concrete and reinforcement, taking into account the effect of irradiation and the nature of the stress state.

Keywords: reinforced concrete cylindrical shell, radiation exposure, dose of radiation, radiation swelling.

Bibliography: 23 titles.

For citation:
R. B. Garibov, I. G. Ovchinnikov, 2018, "Axisymmetric deformation of a reinforced shell in the conditions of radiation exposure *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 1, pp. 35–43.

1. Введение

Разработка математических моделей, описывающих поведение конструкций с учётом воздействия радиационных факторов производится в следующей последовательности [1, 2, 3]:

1. Выбираются параметры, характеризующие состояние материала конструкции в процессе деформирования и разрушения, а также параметры, которые характеризуют внешние воздействия – нагрузку, температуру, радиационное воздействие. Строятся уравнения состояния, то есть соотношения, связывающие характеристики процессов деформирования и разрушения с остальными параметрами; строятся кинетические уравнения, описывающие изменение этих параметров, которые характеризуют воздействие нагрузки, температуры, радиационной среды; формулируется условие локального разрушения (например, достижение параметром некоторого критического значения).

2. Формулируются условия проведения экспериментов, используя результаты которых можно провести идентификацию моделей, то есть можно с использованием результатов эксперимента определить коэффициенты моделей так, чтобы эти модели достаточно корректно описывали экспериментальное поле данных.

3. Формулирование краевой задачи, которая позволяет описать процесс деформирования и разрушения оболочки в заданных условиях (то есть на этом этапе выводятся уравнения цилиндрических оболочек, которые учитывают и свойства материала, из которого сделан конструктивный элемент и внешние факторы, которые действуют на материал через границы элемента.

4. Постановка численных экспериментов и исследование поведения конструктивных элементов при различных комбинациях внешних факторов (нагрузка, радиационная среда, температура). Проверка модели путём сопоставления результатов расчёта полученных с использованием моделей, с другими экспериментальными данными.

Процесс взаимодействия нагруженных элементов конструкций с радиационной средой можно свести к следующей схеме. В материале конструктивного элемента под действием нагрузки протекают два взаимосвязанных процесса – деформирование и разрушение. Причём деформирование может происходить как за счёт ползучести материала, так и за счёт роста дефектов и других повреждений, которые оказывают влияние на механические свойства материалов и приводят к изменению деформированного состояния тела. Под влиянием радиационной среды по объёму конструктивного элемента по некоторому закону распределяется доза облучения, приводя к изменению кратковременных и длительных механических характеристик и к радиационному распуханию. В результате изменяется процесс деформирования конструкции и кинетика её разрушения. Для описания процессов деформирования обычно используется система параметров, которая включает: напряжение σ, деформацию ε, температуру T, время t. Эта система в случае, когда мы хотим описать процесс деформирования и разрушения в радиационной среде оказывается недостаточно полной. Для более корректного описания в дополнение к указанным выше параметрам вводится параметр поврежденности П, параметр радиационного распухания, параметр – доза нейтронного облучения Ф.

Конструктивные элементы, работающие в условиях радиационного облучения, нередко выполняются из армированного бетона в форме цилиндрических оболочек, в качестве расчетной схемы для них используется модель деформирования цилиндрической оболочки – либо осесимметричной, либо полубезмоментной. В указанных расчетных схемах материал находится в условиях плоского напряженного состояния. Поэтому рассмотрим физические соотношения для плоского напряженного состояния для железобетона с учетом воздействия радиационного облучения.

Армированный материал (железобетон) является ортотропным материалом, неодинаково сопротивляющимся деформациям растяжения и сжатия, причём бетон и арматура имеют близкие коэффициенты линейного расширения. Но бетон имеет отличающиеся при растяже-

нии и сжатии диаграммы деформирования, поэтому для описания поведения армированного бетона, будем использовать составную модель ортотропного армированного нелинейного разномодульного материала.

2. Основная часть

Физические соотношения, описывающие поведение материала в условиях плоского напряжённого состояния, складываются из физических соотношений для бетона, работающего в условиях плоского напряженного состояния и физических соотношений для арматуры, которая работает в условиях одноосного напряженного состояния для каждого направления армирования.

Физические соотношения для бетона принимаем в виде:

$$\sigma_{\alpha}^{\text{б}} = \frac{\Psi_j^{\text{б}}}{1-(\nu_j^{\text{б}})^2}(e_{\alpha}+\nu_j^{\text{б}}e_{\beta}) - (1+\nu_j^{\text{б}})\cdot\Psi_j^{\text{б}}\cdot\varepsilon_{\Phi}^{\text{б}},$$

$$\sigma_{\beta}^{\text{б}} = \frac{\Psi_j^{\text{б}}}{1-(\nu_j^{\text{б}})^2}(e_{\beta}+\nu_j^{\text{б}}e_{\alpha}) - (1+\nu_j^{\text{б}})\cdot\Psi_j^{\text{б}}\cdot\varepsilon_{\Phi}^{\text{б}},$$

$$\tau_{\alpha\beta}^{\text{б}} = \frac{\Psi_j^{\text{б}}}{2(1+\nu_j^{\text{б}})}e_{\alpha\beta}.$$

где $\sigma_{\alpha}^{\text{б}}, \sigma_{\beta}^{\text{б}}, \tau_{\alpha\beta}^{\text{б}}$ - компоненты тензора напряжений в бетоне, $e_{\alpha}, e_{\beta}, e_{\alpha\beta}$ - компоненты тензора деформаций, $\nu_j^{\text{б}}$ - коэффициент поперечной деформации бетона, j=1,2, причём , j=1 при $\sigma_0 \geq 0$ и и j=2 при $\sigma_0 < 0$.

Функция $\Psi_j^{\text{б}}$ - имеет вид:

$$\Psi_j^{\text{б}} = \frac{\sigma_{uj}^{\text{б}}(e_u,\Phi)}{e_u}, j = 1,2. \tag{1}$$

Влияние радиационного облучения учитывается введением радиационной деформации распухания бетона $\varepsilon_{\Phi}^{\text{б}}$, а также влиянием флюенса на характер кривой деформирования.

Если бетон упруго работает на растяжение и сжатие, то функция $\Psi_j^{\text{б}}$ (2) может быть принята в виде:

$$\Psi_j^{\text{б}} = \begin{cases} E_j^{\text{б}} & ,\Phi < \Phi_{1\text{пор}} \\ E_j^{\text{б}}(\Phi) & ,\Phi \geq \Phi_{1\text{пор}} \end{cases}, j = 1 \text{ при } \sigma_0^{\text{б}} \geq 0, j = 2 \text{ при } \sigma_0^{\text{б}} \leq 0 \tag{2}$$

где зависимость модуля упругости бетона от флюенса нейтронов $E_j^{\text{б}}(\Phi)$ может быть представлена в виде

$$E_j^{\text{б}}(\Phi) = E_{0j}^{\text{б}} \cdot f_2(\Phi) \tag{3}$$

где $E_j^{\text{б}}(\Phi)$ - величина модуля упругости бетона после облучения флюенсом нейтронов Φ; $E_j^{\text{б}}$- начальное значение модуля упругости; $f_2(\Phi)$ - функция влияния. Физические соотношения для арматуры запишем в виде:

$$\text{а) для направления } \alpha : \sigma_{\alpha}^{\text{а}} = \Psi^{\text{а}}\cdot e_{\alpha} - \Psi^{\text{а}}\cdot\varepsilon_{\Phi}^{\text{а}}; \tag{4}$$

$$\text{б) для направления } \beta : \sigma_{\beta}^{\text{а}} = \Psi^{\text{а}}\cdot e_{\beta} - \Psi^{\text{а}}\cdot\varepsilon_{\Phi}^{\text{а}}; \tag{5}$$

Здесь $\Psi^{\text{а}} = \frac{\sigma^{\text{а}}(e,\Phi)}{e}$, e - деформация арматуры, принимаемая e_{α} - для направления α, e_{β} - для направление β.

Функция $\Psi^{\text{а}}(e,\Phi)$ может быть принята в виде:

$$\Psi^{\text{а}}(e,\Phi)=\text{а}(\Phi)\cdot e^{m(\Phi)-1} \text{ или } \Psi^{\text{а}}=\begin{cases}E^{\text{а}}(\Phi) & ,\sigma^a<\sigma_T^a\\ 0 & ,\sigma^a>\sigma_T^a\end{cases}, \tag{6}$$

а деформации распухания бетона $\varepsilon_{\Phi}^{\text{б}}$,

$$\varepsilon_{\Phi}^{\text{б}}=\begin{cases}0 & ,\Phi<\Phi_{2\text{пор}}\\ \delta\cdot\varepsilon_{max}\times\frac{exp(\nu\cdot(\Phi-\Phi_{\text{пор}}))}{\varepsilon_{max}+\delta\cdot exp(\nu\cdot(\Phi-\Phi_{\text{пор}}))} & ,\Phi\geq\Phi_{2\text{пор}}\end{cases}, \tag{7}$$

Получим теперь уравнения осесимметричного деформирования направленно армированной оболочки, подвергающейся радиационному облучению. При действии радиальной нагрузки P_n и нагрузки P_α, действующей вдоль образующей, уравнения равновесия элемента оболочки будут иметь вид [4, 5]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q_\alpha}{\partial\alpha}-N_\beta+RP_n=0,\\ \frac{\partial N_\alpha}{\partial\alpha}+RP_\alpha=0,\\ \frac{\partial M_\alpha}{\partial\alpha}+Q_\alpha R=0.\end{aligned} \tag{8}$$

Здесь N_α и N_β нормальные усилия в продольном (α) окружном (β) направлении, M_α и Q_α изгибающий момент и перерезывающая сила, R – радиус оболочки (рис.1).

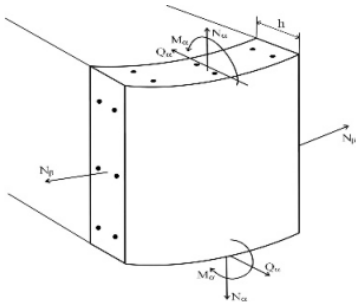

Рис. 1: Действие внутренних усилий на элемент армированной оболочки

Эта система сводится к двум дифференциальным уравнениям:

$$\frac{\partial^2 M_\alpha}{\partial\alpha^2}-RN_\beta+R^2P_n=0,\ \frac{\partial N_\alpha}{\partial\alpha}+RP_\alpha=0, \tag{9}$$

Полагая справедливыми гипотезы Кирхгофа-Лява, можно записать:

$$e_\alpha(z)=\varepsilon_\alpha+z\chi_\alpha,\ e_\beta(z)=\varepsilon_\beta+z\chi_\beta,\ e_{\alpha\beta}(z)=0. \tag{10}$$

$$\varepsilon_\alpha=\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial\alpha},\ \varepsilon_\beta=\frac{W}{R},\ \chi_\alpha=\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 W}{\partial\alpha^2},\chi_\beta=0, \tag{11}$$

Здесь обозначено: $e_\alpha(z)$, $e_\beta(z)$, $e_{\alpha\beta}(z)$ - деформации слоя оболочки на расстоянии z от срединной поверхности; ε_α , ε_β - относительные деформации точек срединной поверхности; $u(\alpha),W(\alpha)$ – перемещения точек срединной поверхности соответственно по направлениям координат α и z. Получим выражения для изгибающего момента и нормальных усилий армированной оболочки, полагая, что они складываются из моментов и усилий, воспринимаемых

бетоном, и моментов и усилий, воспринимаемых арматурой:

$$\begin{aligned} M_\alpha &= M_\alpha^{\text{а}} + M_\alpha^{\text{б}}, \\ N_\alpha &= N_\alpha^{\text{а}} + N_\alpha^{\text{б}}, \\ N_\beta &= N_\beta^{\text{а}} + N_\beta^{\text{б}}. \end{aligned} \tag{12}$$

Выражения для частей моментов и усилий, воспринимаемых бетоном:

$$\begin{aligned} M_\alpha^{\text{б}} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{z_0} \sigma_{\alpha j}^{\text{б}} z\, dz + \int_{z_0}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\alpha i}^{\text{б}} z\, dz, \\ N_\alpha^{\text{б}} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{z_0} \sigma_{\alpha j}^{\text{б}}\, dz + \int_{z_0}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\alpha i}^{\text{б}}\, dz, \\ N_\beta^{\text{б}} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{z_0} \sigma_{\beta j}^{\text{б}}\, dz + \int_{z_0}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\beta i}^{\text{б}}\, dz. \end{aligned} \tag{13}$$

Здесь z_0 - уравнение нейтральной поверхности, определяемой из условия $\sigma_0 = 0$ и отделяющей растянутую зону оболочки от сжатой; h – толщина оболочки, i, j - индексы, характеризующие сжатую и растянутую зоны оболочки. Если нижняя зона изгибаемой оболочки растянута, то $= 1$, $i = 2$; если нижняя зона изгибаемой оболочки сжата, а верхняя растянута, то $j = 2, i = 1$. Выражения для z_0 получается из условия:

$$\sigma_0^{\text{б}} = \frac{\sigma_\alpha^{\text{б}} + \sigma_\beta^{\text{б}}}{3} = 0. \tag{14}$$

подставляя в которое выражения для σ_α и σ_β из (1), после некоторых преобразований найдём: $(e_\alpha + e_\beta) = 2(1 - \nu^2) \cdot \varepsilon_\Phi$ и учитывая (1):

$$z_0 = -\frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{\chi_x + \chi_y} + \frac{2(1 - \nu_{\text{ср}}^2) \cdot \varepsilon_\Phi}{\chi_x + \chi_y}. \tag{15}$$

С учетом соотношений (1) и (3) выражения (14) после некоторых преобразований примут вид:

$$\begin{aligned} M_\alpha^{\text{б}} &= \varepsilon_\alpha J_1^{\text{б}} + \varepsilon_\beta I_1^{\text{б}} + \chi_\alpha J_2^{\text{б}} + \chi_\beta I_2^{\text{б}} + \Delta M_\Phi^{\text{б}}; \\ N_\alpha^{\text{б}} &= \varepsilon_\alpha J_0^{\text{б}} + \varepsilon_\beta I_0^{\text{б}} + \chi_\alpha J_1^{\text{б}} + \chi_\beta I_1^{\text{б}} + \Delta N_\Phi^{\text{б}}; \\ N_\beta^{\text{б}} &= \varepsilon_\beta J_0^{\text{б}} + \varepsilon_\alpha I_0^{\text{б}} + \chi_\alpha J_1^{\text{б}} + \chi_\beta I_1^{\text{б}} + \Delta M_\Phi^{\text{б}}. \end{aligned} \tag{16}$$

где

$$\begin{aligned} J_k^{\text{б}} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{z_0} a_j \cdot z^k\, dz + \int_{z_0}^{\frac{h}{2}} a_i \cdot z^k\, dz \text{ при } k = 0, 1, 2; \\ I_k^{\text{б}} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{z_0} a_j \cdot \nu_j z^k\, dz + \int_{z_0}^{\frac{h}{2}} a_i \cdot \nu_j z^k\, dz \text{ при } k = 0, 1, 2. \end{aligned} \tag{17}$$

в которых

$$a_j = \frac{\Psi_j^{\text{б}}}{1 - (\nu_j)^2},\ a_i = \frac{\Psi_i^{\text{б}}}{1 - (\nu_i)^2}. \tag{18}$$

$$\begin{aligned} \Delta M_\Phi^{\text{б}} &= -\int_{-\frac{h}{2}}^{z_0} (1 - \nu_j)\Psi_j e_\Phi z\, dz - \int_{z_0}^{\frac{h}{2}} (1 - \nu_j)\Psi_j e_\Phi z\, dz \\ \Delta N_\Phi^{\text{б}} &= -\int_{-\frac{h}{2}}^{z_0} (1 - \nu_j)\Psi_j e_\Phi\, dz - \int_{z_0}^{\frac{h}{2}} (1 - \nu_j)\Psi_j e_\Phi\, dz. \end{aligned} \tag{19}$$

Для получения выражений для моментов и усилий, воспринимаемых арматурой, заменим арматурные стержни в направлении координаты α и β сплошными эквивалентными слоями металла (рис.2).

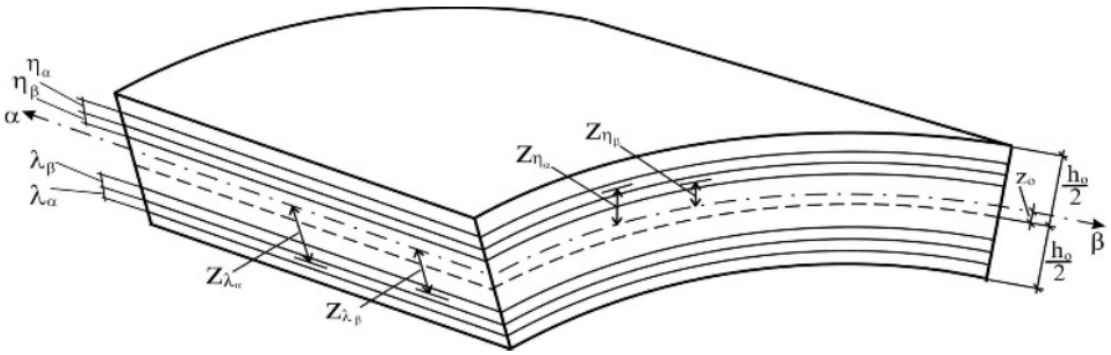

Рис. 2: Замена арматурных стержней эквивалентными слоями

Обозначим η_α и η_β - толщины эквивалентных армирующих слоев в верхней части оболочки, эквивалентных арматуре в направлениях, соответственно α, и β; λ_α, и λ_β - толщины эквивалентных армирующих слоев в нижней части оболочки, эквивалентных арматуре в направлениях, соответственно α, и β ; z_{η_α} и z_{η_β} - ординаты центров тяжести эквивалентных армирующих слоев толщиной соответственно η_α и η_β в верхней части оболочки; z_{λ_α}, и z_{λ_β} - ординаты центров тяжести эквивалентных армирующих слоев толщиной соответственно λ_α, и λ_β в нижней части оболочки. С учетом введенных гипотез выражения для части моментов и усилий, воспринимаемых арматурой, примут вид:

$$\begin{aligned} M_\alpha^{\mathrm{a}} &= \sigma_\alpha^{\mathrm{a}}(z_{\lambda_\alpha})\lambda_\alpha z_{\lambda_\alpha} + \sigma_\alpha^{\mathrm{a}}(z_{\eta_\alpha})\eta_\alpha z_{\eta_\alpha}, \\ N_\alpha^{\mathrm{a}} &= \sigma_\alpha^{\mathrm{a}}(z_{\lambda_\alpha})\lambda_\alpha + \sigma_\alpha^{\mathrm{a}}(z_{\eta_\alpha})\eta_\alpha, \\ N_\beta^{\mathrm{a}} &= \sigma_\beta^{\mathrm{a}}(z_{\lambda_\beta})\lambda_\beta + \sigma_\beta^{\mathrm{a}}(z_{\eta_\beta})\eta_\beta, \end{aligned} \tag{20}$$

Здесь $\sigma_\alpha^{\mathrm{a}}(z_{\lambda_\alpha})$ - напряжение в эквивалентном армирующем слое, работающем в направлении оси α и расположенном в нижней части оболочки на расстоянии z_{λ_α} от срединной поверхности; $\sigma_\alpha^{\mathrm{a}}(z_{\eta_\alpha})$- напряжение в эквивалентном армирующем слое, работающем в направлении оси α и расположенном в верхней части оболочки на расстоянии z_{η_α} от срединной поверхности; $\sigma_\beta^{\mathrm{a}}(z_{\lambda_\beta})$ - напряжение в эквивалентном армирующем слое, работающем в направлении оси β и расположенном в нижней части пластины на расстоянии z_{λ_β} от срединной поверхности; $\sigma_\beta^{\mathrm{a}}(z_{\eta_\beta})$ - напряжение в эквивалентном армирующем слое, работающем в направлении оси β и расположенном в верхней части оболочки на расстоянии z_{η_β} от срединной поверхности. С учетом физических соотношений для арматуры:

$$\sigma_\alpha^{\mathrm{a}} = E^{\mathrm{a}} \cdot e_\alpha - E^{\mathrm{a}} \cdot \varepsilon_\Phi^{\mathrm{a}}, \tag{21}$$

$$\sigma_\beta^{\mathrm{a}} = E^{\mathrm{a}} \cdot e_\beta - E^{\mathrm{a}} \cdot \varepsilon_\Phi^{\mathrm{a}}, \tag{22}$$

выражения для части моментов и усилий, воспринимаемых арматурой, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} M_\alpha^{\mathrm{a}} &= [E^{\mathrm{a}}(\varepsilon_\alpha + z_{\lambda_\alpha}\chi_\alpha) - E^{\mathrm{a}}\varepsilon_\Phi^a]\lambda_\alpha z_{\lambda_\alpha} + [E^{\mathrm{a}}(\varepsilon_\alpha + z_{\eta_\alpha}\chi_\alpha) - E^{\mathrm{a}}\varepsilon_\Phi^a]\eta_\alpha z_{\eta_\alpha}, \\ N_\alpha^{\mathrm{a}} &= [E^{\mathrm{a}}(\varepsilon_\alpha + z_{\lambda_\alpha}\chi_\alpha) - E^{\mathrm{a}}\varepsilon_\Phi^a]\lambda_\alpha + [E^{\mathrm{a}}(\varepsilon_\alpha + z_{\eta_\alpha}\chi_\alpha) - E^{\mathrm{a}}\varepsilon_\Phi^a]\eta_\alpha, \\ N_\beta^{\mathrm{a}} &= [E^{\mathrm{a}}(\varepsilon_\beta + z_{\lambda_\beta}\chi_\beta) - E^{\mathrm{a}}\varepsilon_\Phi^a]\lambda_\beta + [E^{\mathrm{a}}(\varepsilon_\beta + z_{\eta_\beta}\chi_\beta) - E^{\mathrm{a}}\varepsilon_\Phi^a]\eta_\beta. \end{aligned} \tag{23}$$

Вводя обозначения:

$$J^{\text{а}}_{k\alpha} = E^{\text{а}}(\lambda_\alpha z^k_{\lambda_\alpha} + \eta_\alpha z^k_{\eta_\alpha}), k = 0, 1, 2;$$
$$J^{\text{а}}_{k\beta} = E^{\text{а}}(\lambda_\beta z^k_{\lambda_\beta} + \eta_\beta z^k_{\eta_\beta}), k = 0, 1, 2; \tag{24}$$
$$\Delta M^{\text{а}}_\alpha = -E^{\text{а}}\varepsilon^{\text{а}}_\Phi + (z_{\lambda_\alpha}\lambda_\alpha + z_{\eta_\alpha}\eta_\alpha),$$
$$\Delta N^{\text{а}}_\alpha = -E^{\text{а}}\varepsilon^{\text{а}}_\Phi + (\lambda_\alpha + \eta_\alpha), \tag{25}$$
$$\Delta N^{\text{а}}_\beta = -E^{\text{а}}\varepsilon^{\text{а}}_\Phi + (\lambda_\beta + \eta_\beta),$$

запишем:

$$M^{\text{а}}_\alpha = \varepsilon_\alpha J^{\text{а}}_{1\alpha} + \chi_\alpha J^{\text{а}}_{2\alpha} + \Delta M^{\text{а}}_\alpha;$$
$$N^{\text{а}}_\alpha = \varepsilon_\alpha J^{\text{а}}_{0\alpha} + \chi_\alpha J^{\text{а}}_{1\alpha} + \Delta N^{\text{а}}_\alpha; \tag{26}$$
$$N^{\text{а}}_\beta = \varepsilon_\beta J^{\text{а}}_{0\beta} + \chi_\beta J^{\text{а}}_{1\beta} + \Delta N^{\text{а}}_\beta;$$

С учетом полученных выражений полные моменты и усилия примут вид:

$$M_\alpha = M^{\text{б}}_\alpha + M^{\text{а}}_\alpha = \varepsilon_\alpha(J^{\text{б}}_1 + J^{\text{а}}_{1\alpha}) + \chi_\alpha(J^{\text{б}}_2 + J^{\text{а}}_{2\alpha}) + \varepsilon_\beta I^{\text{б}}_1 + \chi_\beta I^{\text{б}}_2 + \Delta M^\Phi_\alpha;$$
$$N_\alpha = N^{\text{б}}_\alpha + N^{\text{а}}_\alpha = \varepsilon_\alpha(J^{\text{б}}_0 + J^{\text{а}}_{0\alpha}) + \chi_\alpha(J^{\text{б}}_1 + J^{\text{а}}_{1\alpha}) + \varepsilon_\beta I^{\text{б}}_0 + \chi_\beta I^{\text{б}}_1 + \Delta M^\Phi_\alpha; \tag{27}$$
$$N_\beta = N^{\text{б}}_\beta + N^{\text{а}}_\beta = \varepsilon_\beta(J^{\text{б}}_0 + J^{\text{а}}_{0\beta}) + \chi_\beta(J^{\text{б}}_1 + J^{\text{а}}_{1\beta}) + \varepsilon_\alpha I^{\text{б}}_0 + \chi_\alpha I^{\text{б}}_1 + \Delta M^\Phi_\beta;$$

Подставляя выражения из (28) в уравнения в (10) и учитывая (12) получим разрешающие интегро-дифференциальные уравнения, описывающие осесимметричную деформацию армированной оболочки в условиях радиационного воздействия:

$$D_1\frac{\partial^4 W}{\partial\alpha^4} + 2D_2\frac{\partial^3 W}{\partial\alpha^3} + D_3\frac{\partial^2 W}{\partial\alpha^2} + D_4\frac{\partial W}{\partial\alpha} + D_5 W =$$
$$= R^4 P_n - F_1\frac{\partial^3 u}{\partial\alpha^3} + F_2\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2} + F_3\frac{\partial u}{\partial\alpha} - R^2\frac{\partial^2\Delta M^\Phi_\alpha}{\partial\alpha^2} + R^3\Delta N^\Phi_\beta \tag{28}$$
$$G_1\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2} + G_2\frac{\partial u}{\partial\alpha} =$$
$$= R^2 P_\alpha - K_1\frac{\partial^3 W}{\partial\alpha^3} - K_2\frac{\partial^2 W}{\partial\alpha^2} - K_3\frac{\partial W}{\partial\alpha} - K_4 W - R\frac{\partial\Delta M^\Phi_\alpha}{\partial\alpha} \tag{29}$$

в которых

$$D_1 = (J^{\text{б}}_2 + J^{\text{а}}_{2\alpha}), D_2 = (J^{\text{б}}_2 + J^{\text{а}}_{2\alpha})', D_3 = [(J^{\text{б}}_2 + J^{\text{а}}_{2\alpha})'' + R(I^{\text{б}}_1)'],$$
$$D4 = R(I^{\text{б}}_1)', D5 = [R(I^{\text{б}}_1)'' - R^2(J^{\text{б}}_0 + J^{\text{а}}_{0\beta}]), F_1 = R(J^{\text{б}}_1 + J^{\text{а}}_{1\alpha}),$$
$$F_2 = 2R(J^{\text{б}}_1 + J^{\text{а}}_{1\alpha}), F_3 = R(J^{\text{б}}_1 + J^{\text{а}}_{1\alpha})'' - R^2(I^{\text{б}}_0)' \tag{30}$$
$$G_1 = J^{\text{б}}_0 + J^{\text{а}}_{0\alpha}, G_2 = (J^{\text{б}}_0 + J^{\text{а}}_{0\alpha})',$$
$$K_1 = \frac{1}{R}(J^{\text{б}}_1 + J^{\text{а}}_{1\alpha}), K_2 = \frac{1}{R}(J^{\text{б}}_1 + J^{\text{а}}_{1\alpha})', K_3 = I^{\text{б}}_0, K_3 = (I^{\text{б}}_0)'$$

К уравнениям (30) с учетом (31) следует присоединить граничные условия: - для жёсткого защемления: $W = 0, \frac{\partial W}{\partial\alpha} = 0, u = 0$; для шарнирного подвижного опирания: $W = 0, M_\alpha = 0, N_\alpha = 0$; для свободного края: $M_\alpha = 0, Q_\alpha = 0, N_\alpha = 0$.

3. Заключение

Для решения полученных уравнений следует использовать пошаговую (по времени) процедуру, в процессе реализации которой на каждом шаге сначала находится распределение дозы

облучения по телу оболочки и деформации распухания, затем находятся законы распределения механических характеристик бетона с учетом влияния облучения и характера напряженного состояния. После этого определяются переменные коэффициенты (31) и численными или вариационными методами решаются уравнения (29).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Филин А.П. Прикладная механика твёрдого деформируемого тела, т. 1. – М.: Наука, 1975. – 832 с.

2. Лихачев Ю. И., Пупко В. Я. Прочность тепловыделяющих элементов ядерных реакторов. — М. : Атомиздат. 1975 – 378 с.

3. Павлина В.С., Попович В.В., Максимович Г.Г. К вопросу о методологии физико-химической механики материалов // Физико-химическая механика материалов. 1980. № 3. - С. 5-14.

4. Власов В.З. Общая теория оболочек и её приложение в технике – М., Л.: Гостехтеориздат, 1949. – 784 с.

5. Филин А.П. Элементы теории оболочек. Л.: Стройиздат, 1987. – 383 с.

REFERENCES

1. Filin A.P., 1975. *Applied mechanics of a rigid deformable body* vol. 1. Moscow: Nauka. 832 p.

2. Likhachev Yu. I., Pupko V. Ya., 1975. *Strength of fuel elements of nuclear reactors.* M.: Atomizdat. 378 p.

3. Pavlina V. S., Popovich V. V., Maksimovich G. G., 1980. "To the question of the methodology of the physico-chemical mechanics of materials" *Physicochemical Mechanics of Materials.* № 3. P. 5-14.

4. Vlasov V. Z., 1949. *General theory of shells and its application in engineering* M., L .: Gostehteorizdat. 784 p.

5. Filin A. P., 1987. *Elements of the theory of shells.* L .: Stroiizdat, 383 p.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 19. Выпуск 1

УДК 513.6 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-1-44-56

Двойственность в абелевых многообразиях и формальных группах над локальными полями

Глазунов Николай Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, Национальный Авиационный Университет, Украина.
e-mail: glanm@yahoo.com

Аннотация

Статья посвящена памяти Олега Николаевича Введенского (1937 – 1981 гг.). О. Н. Введенский был учеником академика И. Р. Шафаревича. Исследования О. Н. и полученные им результаты связаны с двойственностью в эллиптических кривых и с соответствующими когомологиями Галуа над локальными полями, со спариванием Шафаревича-Тэйта и с другими спариваниями, с локальной и квази-локальной теорией полей классов эллиптических кривых, с теорией абелевых многообразий размерности больше 1, с теорией коммутативных формальных групп над локальными полями. Представлены как результаты, полученные О. Н. Введенским, так и новые избранные результаты, развивающие исследования в направлениях фундаментальных групп схем, главных однородных пространств (торсеров) и двойственности. Первая часть статьи, представленння здесь, является введением как в результаты, полученные О. Н. Введенским в направлении двойственности абелевых многообразий и формальных групп, так и в новые избранные результаты, развивающие исследования в направлениях фундаментальных групп схем, главных однородных пространств (торсеров) и двойственности. Во Введении приведены предварительные сведения и представлено содержание статьи. В первом разделе дан краткий обзор избранных результатов по теории алгебраических, квазиалгебраические и проалгебраические группы и групповых схем. Далее, в разделе 2 преставлены избранные результаты по фундаментальным группам алгебраических многообразий, по фундаментальным группам схем, а в разделе 3 - избранные результаты о главных однородных пространствах (торсерах), развивающие исследования О. Н. и других авторов. Термин торсер мы используем как перевод на русский язык в редакции И.Р. Шафаревича английского термина torsor. В разделе 4 даны сведения о двойственности, а в разделе 5 представлены результаты О. Н. по арифметической теории формальных групп и их развитие. Результаты, этого раздела, представленные над локальными и квази-локальными полями K, над их кольцами целых, и над их полями вычетов k, связанны (1) с формальной структурой абелевых многообразий, (2) с коммутативными формальными группами, (3) с соответствующими гомоморфизмами и изогениями. В статье алгебраические многообразия, абелевы схемы и коммутативные формальные групповые схемы определены, как правило, над локальными и квази-локальными полями, над их кольцами целых, и над их полями вычетов. Но кратко рассматриваются эти объектыи и над глобальными полями, так как О. Н. интересовала тематика алгебраических многообразий над глобальными полями и он проводил соответствующие исследования. Предполагается, что характеристика полей вычетов больше 3, если не оговаривается иное.

Я признателен В.Н. Чубарикову за предложение опубликовать статью в сборнике.

Особая признательность Н. М. Добровольскому за помощь и поддержку в процессе подготовки статьи к печати.

Ключевые слова: двойственность; абелево многообразие; локальное поле; группа Пикара; формальная группа; групповая схема; фундаментальная группа; торсер; глобальное поле; проалгебраическая группа; группа универсальных норм.

Библиография: 22 названия.

Для цитирования:
Н. М. Глазунов. Двойственность в абелевых многообразиях и формальных группах над локальными полями. // Чебышевский сборник, 2018, т. 19, вып. 1, с. 44–56.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 19. No. 1

UDC 513.6 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-1-44-56

Duality in abelian varieties and formal groups over local fields

N. M. Glazunov — doctor of physical and mathematical sciences, professor, National aviation university, Ukraine.
e-mail: glanm@yahoo.com

Abstract

The article is dedicated to the memory of Oleg Nikolaevich Vvedenskii (1937-1981). O.N. Vvedenskii was a student of the academician I.R. Shafarevich. O.N. Vvedenskii's research and the results obtained are related to duality in elliptic curves and with the corresponding Galois cohomology over local fields, with Shafarevich-Tate pairing and with other pairings, with local and quasi-local of class fields theory of elliptic curves, with the theory of Abelian varieties of dimension greater than 1, with the theory of commutative formal groups over local fields.

The paper presents both the results obtained by O.N. Vvedenskii, and new selected results, developing research in the directions of the fundamental groups of schemes, the principal homogeneous spaces (torsors), and duality. The first part of the article presented here is an introduction both to the results obtained by O.N. Vvedenskii in the direction of duality of Abelian varieties and formal groups, and in new selected results, developing research in the directions of the fundamental groups of schemes, the principal homogeneous spaces (torsors), and duality. The Introduction gives preliminary information and presents the content of the article. In the first section we give a brief survey of selected results on the theory of algebraic, quasialgebraic and proalgebraic groups and group schemes. Further, in Section 2 we present selected results on fundamental groups of algebraic varieties, on fundamental groups of schemes, and in Section 3 - selected results on principal homogeneous spaces (torsors), developing research by O.N. Vvedenskii and other authors. In Section 4 we give information on duality, and in Section 5 the paper presents the results by O.N. Vvedenskii on the arithmetic theory of formal groups and their development. The results of this section, represented over local and quasi-local fields K, over their rings of integers, and over their residue fields k, are connected (1) with the formal structure of Abelian varieties, (2) with commutative formal groups, (3) with corresponding homomorphisms. In the article, algebraic varieties, Abelian schemes, and commutative formal group schemes are defined, as a rule, over local and quasi-local fields, over their rings of integers, and over their residue fields. But these objects are also briey considered over global fields, since O.N. was interested in the subject of algebraic varieties over global fields and he carried out corresponding studies. It is assumed that the characteristic of the residue fields is more than 3, unless otherwise specified.

I am grateful to V.N. Chubarikov for offering to publish the article in Chebyshevskii Sbornik.

Special thanks to N.M. Dobrovolsky for help and support in the process of preparing the article for publication.

Keywords: duality; Abelian variety; local field; Picard group; formal group; group scheme; fundamental group; torsor; global field; proalgebraic group; group of universal norms.

Bibliography: 22 titles.

For citation:
N. M. Glazunov, 2018, "Duality in abelian varieties and formal groups over local fields. Chebyshevskii sbornik, vol. 19, no. 1, pp. 44–56.

Введение

Статья посвящена памяти Олега Николаевича Введенского (1937 – 1981 гг.). О. Н. Введенский был учеником академика И. Р. Шафаревича [1, 2]. Исследования О. Н. и полученные им результаты связаны с двойственностью в эллиптических кривых и с соответствующими когомологиями Галуа над локальными полями, со спариванием Шафаревича-Тэйта и с другими спариваниями, с локальной и квази-локальной теорией полей классов эллиптических кривых, с теорией абелевых многообразий размерности больше 1, с теорией коммутативных формальных групп над локальными полями [3, 4, 5, 6, 7, 8]. Первая часть статьи, представленя здесь, является введением как в результаты, полученные О. Н. Введенским в направлении двойственности абелевых многообразий и формальных групп, так и в новые избранные результаты, развивающие исследования в направлениях фундаментальных групп схем, главных однородных пространств (торсеров) и двойственности.

Во Введении приведены предварительные сведения и представлено содержание статьи. В первом разделе дан краткий обзор избранных результатов по теории алгебраических, квазиалгебраические и проалгебраические группы и групповых схем. Далее, в разделе 2 преставлены избранные результаты по фундаментальным группам алгебраических многообразий, по фундаментальным группам схем, а в разделе 3 — избранные результаты о главных однородных пространствах (торсерах), развивающие исследования О. Н. и других авторов. Термин торсер мы используем как перевод на русский язык в редакции И.Р. Шафаревича [9] английского термина torsor. В разделе 4 даны сведения о двойственности, а в разделе 5 представлены результаты О. Н. по арифметической теории формальных групп и их развитие. Результаты, этого раздела, представленные над локальными и квази-локальными полями K, над их кольцами целых, и над их полями вычетов k, связанны (1) с формальной структурой абелевых многообразий, (2) с коммутативными формальными группами, (3) с соответствующими гомоморфизмами и изогениями.

В статье алгебраические многообразия, абелевы схемы и коммутативные формальные групповые схемы определены, как правило, над локальными и квази-локальными полями, над их кольцами целых, и над их полями вычетов. Но кратко рассматриваются эти объектыи и над глобальными полями, так как О. Н. интересовала тематика алгебраических многообразий над глобальными полями и он проводил соответствующие исследования.

Предполагается, что характеристика полей вычетов больше 3, если не оговаривается иное.

Пусть S есть схема. Абелевой схемой над S называют S-групповую схему $A \to S$ которая собственная, плоская, конечно-представимая и которая имеет гладкие и связные геометрические слой. Известно, что следствием этих свойств есть коммутативность абелевой схемы. При $S = Spec\ L$, где L - некоторое поле, получают определения абелева многообразия.

В монографии Дж. Милна [9], переведенной на русский язык под редакцией И.Р. Шафаревича по инициативе О. Н. Введенского (который являлся и одним из переводчиков), наряду с терминологией главных однородных пространств используется понятие торсера, или, более точно, G-торсера. Грубо говоря, G-торсер есть схема S, на которой действует групповая схема G, и такое действие удовлетворяет ряду естественных аксиом [9]. Так как в настоящее время представление соответствующих результатов на языке торсеров стало общепринятым [15, 16, 19, 20, 21, 22], и мы используем язык торсеров.

Пополнение абелева многообразия как алгебраической группы совпадает с пополнением компоненты единицы алгебраической группы и является коммутативной формальной группой.

1. Группы и групповые схемы

1.1. Элементы теории алгебраических групп и групповых схем.

Пусть R есть коммутативное кольцо с единицей. Известно, что такое аффинная схема $Spec\ R$ [2]. Напомним здесь, и кратко поясним, следуя [2], некоторые понятия, относящиеся к классу многообразий, которые порождаются приведенными отделимыми гладкими схемами $(X, \mathcal{O}_X)$ конечного типа над алгебраически замкнутым полем. Приведенность означает, что для открытых $U \subset X$ кольца $\mathcal{O}_X(U)$ не имеют нильпотентных элементов.

Важное понятие отделимости схемы определяется через понятие произведения схем и их замкнутости. В свою очередь, произведение схем определяется как произведение объектов в категории схем, а в терминах морфизмов схем над базисной схемой S (например, если S есть алгебраически замкнутое поле) как расслоенное произведение этих морфизмов. Морфизм схем $\varphi : X \to Y$ называют замкнутым вложением, если каждая точка $x \in X$ имеет такую аффинную окрестность U, что схема $\phi^{-1}(U)$ аффинна и гомоморфизм $\varphi_* : \mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_Y(U)$ эпиморфен. В категории схем над S определен морфизм $(1,1) \to X \to X \times_S X$, который называют диагональю.

Схему X называют замкнутой, если морфизм её диагонали есть замкнутое вложение, и схемой над кольцом R, если задан морфизм схем $X \to Spec\ R$. Конечной групповой схемой, или конечной группой порядка m над R, называют групповую схему, локально свободную ранга m над R. Такая групповая схема G определяется пучком локально свободных алгебр A ранга m над R.

В работах [1, 3, 4, 5] строятся и исследуются квазиалгебраических и проалгебраических группы по Серру. В определении квазиалгебраических и проалгебраических группы по Серру [10] используется понятие структуры. Структура St групповой схемы, или групповая структура, задается гомоморфизмами 1) $\mu : X \times_R X \to X$ (групповой закон), 2) $p : X \to X, p(x) = e$ (единица), 3) $i : X \to X$ (взятие обратного), удовлетворяющих аксиомам: a) $\mu \circ (\mu \times 1) = \mu \circ (1 \times \mu)$ (ассоциативность), b) $\mu \circ (1, i) = (i, 1) \circ \mu$, c) $\mu \circ (1, p) = (p, 1) \circ \mu = 1$, задающими, соответственно, групповой закон, единицу и взятие обратного элемента, которые удовлетворяют известным аксиомам [2]. Если в алгебраической группе G, или, более общо, в групповой схеме, фиксирована групповая структура St, то мы обозначаем это через G_{St}.

1.2. Квазиалгебраические и проалгебраические группы.

Далее все группы, если не оговорено противное, предполагаются коммутативными. В этом разделе буквой K обозначаем совершенное поле (алгебраически замкнутое поле), буквой p его характеристическую экспоненту, то есть $p = 1$, если характеристика K равна нулю, характеристическая экспонента $= p$, если характеристика K равна $p > 0$. Все алгебраические многообразия считаем определенными над K. Как известно, в категории алгебраических групп над K существуют биективные морфизмы, не являющиеся морфизмами в смысле алгебраических групп. Другими словами, категория алгебраических групп аддитивная, но не абелева. Напомним известный пример. Пусть $K = k$ - алгебраически замкнутое поле характеристики $p > 0$. Топологические пространства алгебраических групп X и Y, которые мы обозначаем теми же буквами, задаются условием $X = Y = k$. Пусть групповая операция каждой из групп аддитивна и задается отображением $\mu(x, y) = x + y, x, y \in k$. Рассмотрим гомоморфизм $\phi : X \to Y$ алгебраических групп X и Y, задаваемый условием $\phi(x) = x^p$. Как точечное отображение он взаимно-однозначен и как отображение абстрактных групп является изоморфизмом, но как регулярное отображение многообразий изоморфизмом не является, так как соответствующий ему гомоморфизм колец $\phi^* : k[Y] \to k[X]$, $\phi^*(T) = T^p, k[X] = k[Y] = k[T]$ не является изоморфизмом.

1.2.1. Квазиалгебраические группы.

Понятие квазиалгебраической группы [10] объединяет в один класс алгебраические группы, между которыми существуют биекции, могущие и не быть изоморфизмами алгебраических групп. Пусть G_{St} есть алгебраическая группа и $\mathcal{O}$ - пучок функций на G_{St}. Если $q = p^n, n \in \mathbf{Z}$, то обозначим через $\mathcal{O}^q$ пучок, сечения которого над открытыми множествами $U \subset G$ являются q - ыми степенями сечений пучка $\mathcal{O}$ над U. Положим также $\mathcal{O}^{p^{-\infty}} = \bigcup_{n\in\mathbf{Z}} \mathcal{O}^{p^n}$. Если $q \geqslant 1$, то соответствующее пучку $\mathcal{O}^q$ многообразие G^q будет алгебраической группой. Пусть G есть группа. Если St есть структура алгебраической группы на G, совместимая со структурой группы, то через G_{St} обозначают соответствующую алгебраическую группу, и через T_{St} и $\mathcal{O}_{St}$ соответственно топологию и пучок колец. Ниже морфизм означает регулярное отображение (морфизм) алгебраических групп.

Предложение 1. *[10] Пусть St_1 и St_2 - две структуры алгебраической группы на G, совместимые со структурой группы. Следующие условия эквивалентны: (i) Существует структура St_3, такая, что тождественные отображения $St_3 \to St_1$ и $St_3 \to St_2$ являются морфизмами.*
(ii) Существует структура St_4 такая, что тождественные отображения $St_1 \to St_4$ и $St_2 \to St_4$ являются морфизмами.
(iii) Существует для произвольной положительной степени q числа p тождественное отображение $G_{St_1} \to G^q_{St_2}$ которое есть морфизм алгебраических групп.
(vi) $T_{St_1} = T_{St_2}$ и $\mathcal{O}^{p^{-\infty}}_{St_1} = \mathcal{O}^{p^{-\infty}}_{St_2}$.

Определение 1. *Пусть G есть абстрактная группа и пусть St_1 и St_2 - две структуры алгебраической группы на G, совместимые со структурой группы G. Говорят, что St_1 и St_2 эквивалентны, если они удовлетворяют условиям Предложения 1.*

Определение 2. *Квазиалгебраической группой, соответствующей группе G, называют класс эквивалентных (относительно определения 1) структур алгебраической группы на G, совместимы со структурой группы на G.*

Если G есть квазиалгебраическая группа, то структуру алгебраической группы на G, выбранная из класса эквивалентных (в смысле определения квазиалгебраической группы) структур на G, называют совместной с квазиалгебраической структурой на G.

Предложение 2. *[10] Пусть G и $G^{\text{‘}}$ - квазиалгебраические группы и пусть $f : G \to G^{\text{‘}}$ гомоморфизм групп (в теоретико-множественном смысле). Следующие условия эквивалентны: На G и $G^{\text{‘}}$ существуют структуры алгебраических групп St и $St^{\text{‘}}$, совместимые с квазиалгебраическими структурами и такие, что $f : G_{St} \to G^{\text{‘}}_{St^{\text{‘}}}$ есть регулярное отображение алгебраических групп. Отображение f непрерывно, и если ϕ есть сечение пучка $\mathcal{O}^{p^{-\infty}}_{G^{\text{‘}}}$ над открытым $U^{\text{‘}}$, то $\phi \circ f$ есть сечение пучка $\mathcal{O}^{p^{-\infty}}_{G}$ над открытым множеством $f^{-1}(U^{\text{‘}})$. График отображения f есть замкнутая подгруппа в $G \times G^{\text{‘}}$.*

Определение 3. *Если G и $G^{\text{‘}}$ - две квазиалгебраические группы, то морфизмом из G в $G^{\text{‘}}$ называют гомоморфизм $f : G \to G^{\text{‘}}$, удовлетворяющий эквивалентным условиям предложения 2.*

Объекты - квазиалгебраические группы, а также морфизмы между ними, удовлетворяют известным теоретико-категорным свойствам [10, 2]. Тем самым определена категория квазиалгебраических групп $\mathcal{QG}_K$, которая является абелевой по построению.

Замечание 1. *Определение квазиалгебраической группы может быть дано и в терминах групповых схем.*

Напомним кратко такое построение. Расширяем категорию алгебраических групп над K до категории групповых схем над K. Так как здесь в дальнейшем рассматриваем только коммутативные группы, ограничим себя категорией коммутативных групповых схем $\mathcal{CG}_K$ над K. Пусть H и G лежат в $\mathcal{CG}_K$ и $f : H \to G$ есть чисто несепарабельная изогения из H в G. Назовем H и G эквивалентными, если существует групповая схема $F \in \mathcal{CG}_K$ и чисто несепарабельная изогения $f : H \to G$. Тогда квазиалгебраической группой будет класс эквивалентных (в вышеуказанном смысле) групповых схем.

Замечание 1. *По всякой алгебраической группе G можно каноническим образом определить квазиалгебраическую группу $G^{p^{-\infty}}$, структурным пучком которой есть пучок $\mathcal{O}_G^{p^{-\infty}}$.*

1.2.2. Проалгебраические группы.

Определение 4. *Проалгебраической группой называют группу G и непустое семейство $\mathcal{C}$ её подгрупп, такое, что для каждого $H \in \mathcal{C}$ множество G/H имеет структуру квазиалгебраической группы, причем выполнены аксиомы:*
П1. Если $H, H^{'} \in \mathcal{C}$, то $H \bigcap H^{'} \in \mathcal{C}$;
П2. Пусть $H \in \mathcal{C}$. Подгруппа $H^{'}$ содержащая H и лежащая в $\mathcal{C}$ есть прообраз замкнутой подгруппы из G/H.
П3. Если $H, H^{'} \in \mathcal{C}$ и если $H \subset H^{'}$, то $G/H \to G/H^{'}$ является морфизмом квазиалгебраических групп.
П4. Естественное отображение $G \to lim\ inv\ G/H$ есть биекция G на проективный предел групп G/H ($H \in \mathcal{C}$).

2. Фундаментальные группы схем

2.1. Гомотопические группы. Функтор универсального накрытия

В этом подразделе мы следуем [10]. Пусть G квази-алгебраическая группа. Обозначим через G^0 связную компоненту единичного элемента группы G. Далее G^0 называем связной компонентной группы G. Предположим теперь, что G – проалгебраическая группа с полным определяющим множеством $\mathcal{C}$; для $H \in \mathcal{C}$, связная компонента $(G/H)^0$ фактор-группы G/H есть замкнутая подгруппа в G/H , и, если $H^{'} \subset H$, то образ $G/H^{'}$ в G/H есть $(G/H)^0$. Ввиду этого можно положить $G/G^0 := lim\ inv\ (G/H)/(G/H)^0$.

Определение 5. *Фактор-группа G/G^0 обозначается через $\pi_0(G)$ и называется 0-ой гомотопической группой проалгебраической группы G.*

Замечание 2. *Операция факторизации $\pi_0(G) = G/G^0$ определяет функтор*

$$\pi_0 : \mathcal{PG}_K \to \mathcal{PG}_K^0$$

из категории $\mathcal{PG}_K$ в категорию $\mathcal{PG}_K^0$ проалгебраических групп размерности ноль [10] .

Определение 6. *Левые производные функторы функтора π_0 называют i–ыми гомотопическими группами проалгебраической группы G и обозначать через $\pi_i(G)$.*

Замечание 3. *Наличие в категории $\mathcal{PG}_K$ достаточного числа проективних объектов [10] делает определение 6 корректным.*

Определение 7. *Пусть $G \in \mathcal{PG}_K$. Фундаментальной группой группы G называют первую гомотопическую группу $\pi_1(G)$.*

Определение 8. *Группу $G \in \mathcal{PG}_K$ называют связной, если $G = G^0$. Группа $G \in \mathcal{PG}_K$ называется односвязной, если $\pi_1(G) = 0$.*

Предложение 3. *[10] Если G - проалгебраическая группа размерности ноль, то $\pi_i(G) = 0$ для всех $i \geqslant 1$.*

Предложение 4. *[10] Пусть $G \in \mathcal{PG}_K$. Существует связная и односвязная проалгебраическая группа $\overline{G}$ и морфизм $u : \overline{G} \to G$ такие, что ядро и коядро и -проалгебраические группы размерности ноль. Пара $(\overline{G}, u)$ единственна, с точностью до изоморфизма.*

Определение 9. *Пара $(\overline{G}, u)$ называется универсальной накрывающей группы G.*

2.2. Фундаментальные группы числовых полей

В своих работах, которые относятся к арифметике числовых полей и колец, О. Н. Введенский использовал и развивал результаты С. Лихтенбаума. В недавней работе С. Лихтенбаум [14] определил этальный сайт Вейля и исследовал связанные с ним фундаментальные группы. Эти исследования развивает в своих работах Б. Морин [16]. Исследования этих авторов, как и исследования О. Н. Введенского, используют результаты А. Гротендика с соавторами [13]. В цитируемой работе [16] Морин определяет фундаментальную группу, лежащую в основе этальных когомологийт Вейля числового кольца. Соответствующий этальный топос Вейля определяется как утончение этального сайта Вейля по Лихтенбауму. Автор [16] демонстрирует естественность своего определения в случае гладкой проективной кривой и определяет далее этальную фундаментальную группу Вейля открытой подсхемы спектра числового кольца. Эта фундаментальная группа является проективной системой локально компактных топологических групп, которая представляет первые когомологии с коэффициентами в локально-компактной абелевой группе. Автор применяет этот результат для вычисления групп когомологий малых степеней и для проверки того, что этальный топос Вейля удовлетворяет ожидаемым свойствам топоса Лихтенбаума.
Пусть Y есть открытая подсхема гладкой проективной кривой над конечным полем k, и пусть $S_{et}(W_k, \overline{Y})$ есть топос W_k-эквивариантных этальных пучков на проективной кривой $\overline{Y} = Y \otimes_k \overline{k}$.

Теорема 1. *[16] Существует эквивалентность $Y_W^{sm} \simeq S_{et}(W_k, \overline{Y})$ где Y_W^{sm} есть (малый) этальный топос Вейля.*

Для связной этальной $\overline{X}-$схемы $\overline{U}$ автор определяет её этальный топос Вейля как срезанный (slice) топос $\overline{U}_W := \overline{X}_W/\gamma^*\overline{U}$. Пусть K есть числовое поле соответствующее общей точке $\overline{U}$, и пусть $q_{\overline{U}} : Spec(\overline{K}) \to \overline{U}$ есть некоторая геометрическая точка. Подобно определению этальной фундаментальной группы как (строгой) проективной системы конечных факторов группы Галуа G_K, автор определяет аналогичную (строгую) проективную систему $\underline{W}(\overline{U}, q_{\overline{U}})$ локально компактных факторов группы Вейля W_K .

Теорема 2. *[16] Этальный топос Вейля $\overline{U}_W$ является связным и локально-связным над топосом T локально компактных пространств. Геометрическая точка $q_{\overline{U}}$ определяет $T-$значную точку $p_{\overline{U}}$ топоса $\overline{U}_W$, и имеет место изоморфизм*
$\pi_1(\overline{U}_W, p_{\overline{U}}) \simeq \underline{W}(\overline{U}, q_{\overline{U}})$ *топологических про-групп.*

Фундаментальная группа и фундаментальная схема могут быть определены в рамнах подхода по Таннаки (см. [21] и цитируемую там литературу). В следующем разделе мы очень кратко опишем, следуя работам [17, 18, 19] G-торсеры над схемами Дедекинда.

3. Главные однородные пространства и торсеры

В монографии [17] Саверда Ривано дал для главных однородных пространств (G-торсеров) описание по Таннаки. Нори [18] в рамках подхода по Таннаки дал определение фундаментальной схемы.

4. Двойственность и поля классов

Тэйт в своих работах о главных однородных пространствах абелевых многообразий [11] доказал следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть $\mathcal{G}$ есть группа Галуа сепарабельного замыкания K_s локального поля K и пусть E есть любой конечный $\mathcal{G}$-модуль, порядок которого взаимно прост с характеристикой поля K. Пусть E^D есть $\mathcal{G}$-модуль $Hom(E, K_S^*)$. Тогда спаривание*
$H^2(\mathcal{G}, E) \times H^{2-r}(\mathcal{G}, E^D) \to H^2(\mathcal{G}, K_S^*) = \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$
есть совершенная двойственность конечных групп для всякого $r \in \mathbf{Z}$.

Шатц (Shatz) устранил ограничение на условие, что порядок модуля взаимно прост с характеристикой поля K и доказал теорему двойственности [12].

Теорема 4. *Пусть K есть локальное поле и A есть артинова групповая схема над K, A^D - схема, двойственная по Картье схеме A. Пусть $\mathbf{G}_m$ - мультипликативная схема над K. Тогда спаривание*
$H^2(K, A) \times H^{2-r}(K, A^D) \to H^2(K, \mathbf{G}_m) = \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$
есть двойственность по Понтрягину локально компактных групп.

Пусть A - абелево многообразие над полем K с полем вычетов k, A_K - группа точек A, рациональных над K, $\overline{A}$ - многообразие Пикара многообразия A. Для случая алгебраически замкнутого k в [1] доказано, что группа главных однородных пространств над A двойственна фундаментальной группе $\pi_1(\overline{A}_K)$ проалгебраической группы $\overline{A}_K$ (исключая p-компоненты, где $p > 0$ - характеристика k).

5. Формальные группы и универсальные нормы

Пополнение абелева многообразия как алгебраической группы совпадает с пополнением компоненты единицы алгебраической группы и является коммутативной формальной группой.

Далее рассматриваем только n-мерные аффинные формальные схемы в смысле Гротендика, конструируемые из колец $A = R[[X_1, ..., X_n]] = R[[X]]$ формальных степенных рядов от n переменных над коммутативным кольцом R с единицей. Морфизмы формальных схем (ФС) соответствуют непрерывным гомоморфизмам колец A. В категории ФС существует конечный объект $Spf\ R$ (кольцо R наделено дискретной топологией) и произведения, соответствующие пополненным тензорным произведениям колец A над R. Если $\phi : X \to Spf\ R$ - формальная схема, то формальная групповая схема (ФГС) над R определяется обычным способом заданием трех морфизмов: 1) $\mu : X \times_R X \to X$ (групповой закон), 2) $p : X \to X, p(x) = e$ (единица), 3) $i : X \to X$ (взятие обратного), удовлетворяющих аксиомам: a) $\mu \circ (\mu \times 1) = \mu \circ (1 \times \mu)$ (ассоциативность), b) $\mu \circ (1, i) = (i, 1) \circ \mu$, c) $\mu \circ (1, p) = (p, 1) \circ \mu = 1$.

Определение 10. *Формальным групповым законом от n переменных называется набор $F = (F_i)$ из n формальных степенных рядов $F_i \in R[[X, Y]]$ такой, что*
(i) $F(X, Y) \equiv X + Y (mod\, deg\, 2)$,
(ii) $F(F(X, Y), Z) = F(X, F(Y, Z))$ *(ассоциативность).*

Групповой закон $F = (F_i)$ называют коммутативным, если выполнена аксиома

$$F(X, Y) = F(Y, X).$$

Определение 11. *Пусть F и G соответственно n и m - мерные групповые законы над R. Набор φ из m формальных степенных рядов без свободных членов от n переменных $T = (T_1, ..., T_n)$ называется R - гомоморфизмом из F в G, если выполнено условие $\varphi \circ F = G \circ \varphi$. /Эта запись обозначает соответствующие подстановки наборов в наборы/ Множество всех R - гомоморфизмом из F в G будем обозначать через $Hom_R(F, G)$. Если $\varphi, \psi \in Hom_R(F, G)$, то можно определить их сумму $\varphi +_H \psi$, положив $(\varphi +_H \psi)(T) = G(\varphi(T), \psi(T))$.*

Замечание 4. *Операция $+_H$ задает на множестве $Hom_R(F, G)$ структуру абелевой группы.*

Работа [5] продолжает начатое О. Н. Введенским [4] и другими построение аналога локальной и квази-локальной теории полей классов эллиптических кривых и абелевых многообразий. Представим кратко результаты работы [5] и их развитие. Пусть A - эллиптическая кривая одного из следующих 3-х типов, определенная над квази-локальным полем K: I. Инвариант Хассе редукции A отличен от нуля. II. A имеет мультипликативную редукцию. III. Инвариант Хассе редукции A нулевой. Пусть $\overline{F}_L$ проалгебраическая группа, определяемая (по максимальному идеалу кольца целых поля L и по формальной группе F, соответствующей A, или имеющую высоту редукции 3) на $Gal(L/K)$-модуле F_L, $\mathcal{D}_K^* = \bigcap_L N_{L/K}(\pi_1(\overline{F}_L))$ (пересечение по всем конечным расширениям Галуа L/K) - группа универсальных норм формальной группы F, соответствующей A, или формальной группы высоты редукции 3.

Теорема 5. $\mathcal{D}_K^* = 0$.

Доказательство теоремы основано на прямом вычислении действия норменного гомоморфизма $N_{L/K}$ на фильтрацию $\overline{F}_L$.
Пусть A_K проалгебраическая группа точек A, рациональных над K, $\pi_1(A_K)$ - фундаментальная группа группы A_K, $\mathcal{D}_K = \bigcap_L N_{L/K}(\pi_1(A_L))$ - подгруппа универсальных норм в $\pi_1(A_K)$.

Следствие 1. $\mathcal{D}_K = 0$.

Следствие 2. *Существует эллиптическая кривая A типа III над квази-локальным полем K такая, что группа когомологий $H^1(Gal(L/K), A)$ бесконечна.*

О. Н. Введенским сформулирован ряд предположений об универсаьных нормах и норменных подгруппах коммутативных формальных групп над K. Некоторые из этих предположений доказаны Н.М. Глазуновым и Г.Т. Коноваловым.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шафаревич И. Р. Сочинения. Т. 3, ч. 2. М.: Физматлит, 1996. 637 с.
2. Шафаревич И. Р. Основы алгебраической геометрии. В 2 т. М.: Наука, 1988.
3. Введенский О. Н. Двойственность в эллиптических кривых над локальным полем. II // Изв. АН СССР. Сер.: Математика. 1966. Т. 30, № 4. С. 891—922.
4. Введенский О. Н. О локальных "полях классов" эллиптических кривых // Изв. АН СССР. Сер.: Математика. 1973. Т. 37, № 1. С. 20—88.
5. Введенский О. Н. О "универсальных нормах" формальных групп, определенных над кольцом локального поля // Изв. АН СССР. Сер.: Математика. 1973. Т. 37, № 4. С. 737—751.

6. Введенский О. Н. О квази-локальных “полях классов” эллиптических кривых. I // Изв. АН СССР. Сер.: Математика. 1976. Т. 40, № 5. С. 969—992.

7. Введенский О. Н. О спариваниях в эллиптических кривых над глобальными полями // Изв. АН СССР. Сер.: Математика. 1978. Т. 42, № 2. С. 237—260.

8. Введенский О. Н. Эффект Артина в абелевых многообразиях. II // Изв. АН СССР. Сер.: Математика. 1981. Т. 45, № 1. С. 23—46.

9. Милн Дж. Этальные когомологии. М.: Мир, 1983. 393 с.

10. Serre J.-P. Groupes proalgebriques // Publications mathematiques IHES. № 7. 1960. 65 p.

11. Tate J. Duality theorems in Galois cohomology over number fields // Proceedings of Int. Congress of Mathematicians (Stockholm, 1962). Djursholm : Inst. Mittag-Leffler, 1962. P. 288—295.

12. Shatz S.S. Cohomology of artinian group schemes over local fields // Ann. of Math. 1964. Vol. 79, № 2. P. 411—449.

13. Grothendieck A., Artin M., J.L. Verdier Théorie des Topos et cohomologie étale des schémas (SGA4) // Lecture Notes in Math. Berlin-N.Y.: Springer-Verlag, 1972. Vol. 269, 270, 305.

14. Lichtenbaum S. The Weil-etale topology for number rings //Ann. of Math. 2009. Vol. 170, № 2, P. 657—683.

15. Bosch S., Liu Q. Rational points of the group of components of a Néron model // Manuscripta math. 1999. Vol. 98. P. 275—293.

16. Morin B. The Weil-étale fundamental group of a number field . II // Sel. Math., New Ser. 2011. 17, № 1. P. 67—137.

17. Saavedra R. Catégories Tannakiennes // Lecture Notes in Math. Berlin-N.Y.: Springer-Verlag, 1972. Vol. 265. 418 p.

18. Nori M. On the representations of the fundamental group // Compos. Math. 1976. Vol. 33, № 1. P. 29—41.

19. Broshi M. G-torsors over a Dedekind scheme // J. Pure Appl. Algebra. 2013. Vol. 217, № 1. P. 11—19.

20. Conrad B. Reductive group schemes // Autour des schémas en groupes. École d'Été “Schémas en groupes". Paris: Société Mathématique de France (SMF), 2014. Vol. I. P. 42—43, 93—444.

21. Biswas I., Dos Santos João Pedro P. Abelianization of the F-divided fundamental group scheme // Proc. Indian Acad. Sci., Math. Sci. 2017. Vol. 127, № 2. P. 281—287.

22. Tziolas N. Quotients of schemes by α_p or μ_p actions in characteristic $p > 0$ // Manuscr. Math. 2017. Vol. 152, № 1–2. P. 247—279.

REFERENCES

1. Шафаревич И. Р. 1996, *Sochineniya, T. 3, ch. 2.* M.: Fizmatlit, 637 p.

2. SHafarevich I. R. 1988, *Osnovy algebraicheskoj geometrii. V 2 t.* M.: Nauka.

3. Vvedenskij O. N. 1966, "Dvojstvennost' v ehllipticheskih krivyh nad lokal'nym polem. II" *Izv. AN SSSR. Ser.: Matematika.* Vol. 30, № 4. pp. 891—922.

4. Vvedenskij O. N. 1973, "O lokal'nyh "polyah klassov" ehllipticheskih krivyh" *Izv. AN SSSR. Ser.: Matematika.* Vol. 37, № 1. pp. 20—88.

5. Vvedenskij O. N. 1973, "O "universal'nyh normah" formal'nyh grupp, opredelennyh nad kol'com lokal'nogo polya" *Izv. AN SSSR. Ser.: Matematika.* Vol. 37, № 4. pp. 737—751.

6. Vvedenskij O. N. 1976, "O kvazi-lokal'nyh "polyah klassov" ehllipticheskih krivyh. I" *Izv. AN SSSR. Ser.: Matematika.* Vol. 40, № 5. pp. 969—992.

7. Vvedenskij O. N. 1978, "O sparivaniyah v ehllipticheskih krivyh nad global'nymi polyami" Izv. AN SSSR. Ser.: Matematika. Vol. 42, № 2. pp. 237—260.

8. Vvedenskij O. N. 1981, "EHffekt Artina v abelevyh mnogoobraziyah. II" *Izv. AN SSSR. Ser.: Matematika.* Vol. 45, № 1. pp. 23—46.

9. Miln Dzh. 1983, *EHtal'nye kogomologii.* M.: Mir, 393 P.

10. Serre J.-P. 1960, "Groupes proalgebriques" *Publications mathematiques IHES.* № 7. 65 p.

11. Tate J. 1962, "Duality theorems in Galois cohomology over number fields" *Proceedings of Int. Congress of Mathematicians (Stockholm, 1962).* Djursholm : Inst. Mittag-Leffler, pp. 288—295.

12. Shatz S.S. 1964, "Cohomology of artinian group schemes over local fields" *Ann. of Math.* Vol. 79, № 2. P. 411—449.

13. Grothendieck A., Artin M., J.L. Verdier 1972, "Théorie des Topos et cohomologie étale des schémas (SGA4)" *Lecture Notes in Math.* Berlin-N.Y.: Springer-Verlag, Vol. 269, 270, 305.

14. Lichtenbaum S. 2009, "The Weil-etale topology for number rings" *Ann. of Math.* Vol. 170, № 2, pp. 657—683.

15. Bosch S., Liu Q. 1999, "Rational points of the group of components of a Néron model" *Manuscripta math.* Vol. 98. pp. 275—293.

16. Morin B. 2011, "The Weil-étale fundamental group of a number field . II" *Sel. Math., New Ser.* 17, № 1. pp. 67—137.

17. Saavedra R. 1972, "Catégories Tannakiennes" *Lecture Notes in Math.* Berlin-N.Y.: Springer-Verlag, Vol. 265. 418 p.

18. Nori M. 1976, "On the representations of the fundamental group" *Compos. Math.* Vol. 33, № 1. pp. 29—41.

19. Broshi M. 2013, "G-torsors over a Dedekind scheme" *J. Pure Appl. Algebra.* Vol. 217, № 1. pp. 11—19.

20. Conrad B. 2014, "Reductive group schemes" *Autour des schémas en groupes. École d'Été "Schémas en groupes".* Paris: Société Mathématique de France (SMF), Vol. I. pp. 42—43, 93—444.

21. Biswas I., Dos Santos João Pedro P. 2017, "Abelianization of the F-divided fundamental group scheme" *Proc. Indian Acad. Sci., Math. Sci.* Vol. 127, № 2. pp. 281—287.

22. Tziolas N. 2017, "Quotients of schemes by α_p or μ_p actions in characteristic $p > 0$" *Manuscr. Math.* Vol. 152, № 1–2. pp. 247—279.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 19. Выпуск 1

УДК 517.5 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-1-57-78

Вторая экстремальная задача Логана для преобразования Фурье по собственным функциям оператора Штурма–Лиувилля[1]

Горбачёв Дмитрий Викторович — доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет.
e-mail: dvgmail@mail.ru
Иванов Валерий Иванович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики и информатики института прикладной математики. и компьютерных наук, Тульский государственный университет.
e-mail: ivaleryi@mail.ru
Офицеров Евгений Петрович — аспирант кафедры прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет.
e-mail: eofitserov@gmail.com
Смирнов Олег Игоревич — кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет.
e-mail: so.2@mail.ru

Аннотация

Для косинус-преобразования Фурье на полупрямой Б. Логаном в 1983 году были поставлены и решены две экстремальные задачи. В первой задаче необходимо было найти минимальную окрестность нуля, вне которой нетривиальная интегрируемая четная целая функция экспоненциального типа не выше τ, имеющая неотрицательное преобразование Фурье, неположительна. Во второй задаче необходимо было найти минимальную окрестность нуля, вне которой нетривиальная интегрируемая четная целая функция экспоненциального типа не выше τ, имеющая неотрицательное преобразование Фурье и нулевое среднее значение, неотрицательна. Наибольшее развитие получила первая задача Логана, потому что она оказалась связанной с задачей об оптимальном аргументе в модуле непрерывности в точном неравенстве Джексона в пространстве L^2 между величиной наилучшего приближения целыми функциями экспоненциального типа и модулем непрерывности. Она была решена для преобразования Фурье на евклидовом пространстве и его обобщения преобразования Данкля, для преобразования Фурье по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля на полупрямой и преобразования Фурье на гиперболоиде.

Вторая задача Логана была решена только для преобразования Фурье на евклидовом пространстве. В настоящей работе она решается для преобразования Фурье по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля на полупрямой, в частности, для преобразований Ганкеля и Якоби. В качестве следствий этих результатов с помощью усреднения функций по евклидовой сфере получено решение второй задачи Логана для преобразования Данкля и преобразования Фурье на гиперболоиде. Общие оценки получены с помощью квадратурной формулы Гаусса по нулям собственных функций задачи Штурма–Лиувилля на полупрямой, недавно доказанной авторами работы. Во всех случаях построены экстремальные функции. Доказана их единственность.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 16-01-00308.

Ключевые слова: Задача Штурма–Лиувилля на полупрямой, преобразование Фурье на полупрямой, преобразование Данкля, преобразование Фурье на гиперболоиде, экстремальные задачи Логана, квадратурная формула Гаусса.

Библиография: 36 названий.

Для цитирования:
Д. В. Горбачев, В. И. Иванов, Е. П. Офицеров, О. И. Смирнов. Вторая экстремальная задача Логана для преобразования Фурье по собственным функциям оператора Штурма–Лиувилля // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, вып. 1, С. 57–78.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 19. No. 1

UDC 517.5 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-1-57-78

The second Logan extremal problem for the fourier transform over the eigenfunctions of the Sturm–Liouville operator

Gorbachev Dmitry Viktorovich — Professor of the department of applied mathematics and computer science, Doctor of physical and mathematical sciences, Tula State University.
e-mail: dvgmail@mail.ru
Ivanov Valerii Ivanovich — Head of the department of applied mathematics and computer science, doctor of physical and mathematical sciences, Tula State University.
e-mail: ivaleryi@mail.ru
Ofitserov Evgenii Petrovich — graduate student of the department of applied mathematics and computer science, Tula State University/
e-mail: eofitserov@gmail.com
Smirnov Oleg Igorevich — Assistant professor of the department of applied mathematics and computer science, candidate of physical and mathematical sciences, Tula State University.
e-mail: so.2@mail.ru

Abstract

For the cosine Fourier transform on the half-line two extremal problems were posed and solved by B. Logan in 1983. In the first problem it was necessary to find a minimal neighborhood of zero outside of which a nontrivial integrable even entire function of exponential type at most τ, having a nonnegative Fourier transform, is nonpositive. In the second problem it was necessary to find a minimal neighborhood of zero outside of which a nontrivial integrable even entire function of exponential type at most τ, having a nonnegative Fourier transform and a zero mean value, is nonnegative. The first Logan problem got the greatest development, because it turned out to be connected with the problem of the optimal argument in the modulus of continuity in the sharp Jackson inequality in the space L^2 between the value of the best approximation of function by entire functions of exponential type and its modulus of continuity. It was solved for the Fourier transform on Euclidean space and for the Dunkl transform as its generalization, for the Fourier transform over eigenfunctions of the Sturm-Liouville problem on the half-line, and the Fourier transform on the hyperboloid.

The second Logan problem was solved only for the Fourier transform on Euclidean space. In the present paper, it is solved for the Fourier transform over eigenfunctions of the Sturm-Liouville problem on the half-line, in particular, for the Hankel and Jacobi transforms. As a consequence of these results, using the averaging method of functions over the Euclidean sphere, we obtain a solution of the second Logan problem for the Dunkl transform and the Fourier transform on the hyperboloid. General estimates are obtained using the Gauss quadrature formula over the zeros of the eigenfunctions of the Sturm-Liouville problem on the half-line, which was recently proved by the authors of the paper. In all cases, extremal functions are constructed. Their uniqueness is proved.

Keywords: The Sturm-Liouville problem on semidirect, Fourier transform on semidirect, Dunkl transformation, Fourier transform on a hyperboloid, extremal Logan's problems, Gaussian quadrature formula.

Bibliography: 36 titles.

For citation:
D. V. Gorbachev, V. I. Ivanov, E. P. Ofitserov, O. I. Smirnov, 2018, "The second Logan extremal problem for the fourier transform over the eigenfunctions of the Sturm–Liouville operator", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 1, pp. 57–78.

1. Введение

Работа посвящена решению второй экстремальной задачи Логана для преобразования Фурье по собственным функциям задачи (оператора) Штурма–Лиувилля на полупрямой.

В 1983 году Б. Логаном [1, 2] были поставлены и решены две экстремальные задачи для косинус-преобразования Фурье на полупрямой. Сформулируем их для преобразования Фурье в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$. В первой задаче Логана необходимо вычислить радиус наименьшего шара с центром в нуле, вне которого нетривиальная интегрируемая положительно определенная целая функция экспоненциального сферического типа неположительна. Во второй задаче Логана необходимо вычислить радиус наименьшего шара с центром в нуле, вне которого нетривиальная интегрируемая положительно определенная целая функция экспоненциального сферического типа с нулевым средним значением неотрицательна. Положительная определенность интегрируемой целой функции экспоненциального сферического типа эквивалентна неотрицательности ее преобразования Фурье.

Наибольшую известность и развитие получила первая задача Логана. В многомерном случае общая оценка снизу была получена Д.В. Горбачевым [3]. Экстремальная функция в одномерном случае ранее была построена Н.И. Черных [4], а в многомерном случае — В.А. Юдиным [5]. Используя конструкцию экстремальной функции В.А. Юдина, Е.Е. Бердышева [6] решила задачу Логана, когда шар заменяется на куб. Для преобразования Фурье–Данкля в пространстве $\mathbb{R}^d$ с весом Данкля она решена в [7], а для преобразования Фурье на гиперболоиде — в [8, 9].

Экстремальные функции в первой задаче Логана на евклидовом пространстве и гиперболоиде являются сферическими функциями одной переменной и с помощью усреднения допустимых функций по евклидовой сфере задача Логана сводится к первой задаче Логана для преобразования Ганкеля и Якоби на полупрямой $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ (см. [3, 8, 9]). Общие оценки в задаче Логана получаются с помощью квадратурных формул Гаусса для целых функций экспоненциального типа по нулям функций Бесселя и Якоби. Экстремальные функции выписываются с помощью анализа условий равенства в неравенствах, получаемых при применении квадратурных формул. Квадратурная формула Гаусса по нулям функции Бесселя была доказана в [10, 11]. Мы доказали квадратурную формулу Гаусса по нулям функции Якоби [12].

Многие хорошо известные преобразования на полупрямой определяются ядрами, являющимися собственными функциями оператора (задачи) Штурма–Лиувилля:

$$\begin{gathered} \frac{\partial}{\partial t}\Big(w(t)\,\frac{\partial}{\partial t}\,u_\lambda(t)\Big) + \big(\lambda^2 + \lambda_0^2\big)w(t)u_\lambda(t) = 0, \\ u_\lambda(0) = 1, \quad \frac{\partial u_\lambda}{\partial t}\,(0) = 0, \quad \lambda, \lambda_0 \in \mathbb{R}_+, \quad t \in \mathbb{R}_+. \end{gathered} \tag{1}$$

Для преобразования Ганкеля,

$$w(t) = t^{2\alpha+1}, \quad \alpha \geqslant -1/2, \quad \lambda_0 = 0,$$

а для преобразования Якоби

$$w(t) = (\operatorname{sh} t)^{2\alpha+1}(\operatorname{ch} t)^{2\beta+1}, \quad \alpha \geqslant \beta \geqslant -1/2,\ \alpha > -1/2,\ \lambda_0 = \alpha + \beta + 1.$$

В [12] квадратурная формула Гаусса доказана для целых функций экспоненциального типа по нулям собственных функций задачи Штурма–Лиувилля, что позволило решить первую задачу Логана для преобразования Фурье по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля [13].

Е.Е. Бердышева [6] доказала, что первая задача Логана эквивалентна задаче об оптимальном аргументе в модуле непрерывности в точном неравенстве Джексона в пространстве

$L^2(\mathbb{R}^d)$ между величиной наилучшего приближения целыми функциями экспоненциального типа и модулем непрерывности.

Доказательство неравенств Джексона в пространствах L^2 с точной константой и оптимальным аргументом в модуле непрерывности является важным направлением исследований по экстремальным задачам теории приближений. Первые результаты в этом направлении были получены Н.И. Черных [4, 14] для одномерного тора $\mathbb{T}$.

Точная константа в неравенстве Джексона в L^2, зависящая от приближающего подпространства и модуля непрерывности, имеет глобальный минимум. Если фиксировать приближающее подпространство, то минимальное значение аргумента в модуле непрерывности, при котором константа Джексона становится наименьшей, называется оптимальным аргументом.

В многомерном случае оптимальный аргумент зависит как от геометрии спектра V приближающих целых функций, так и геометрии окрестности нуля $U \subset \mathbb{R}^d$ в определении модуля непрерывности. Д.В. Горбачев [3] нашел оптимальный аргумент, когда оба тела являются евклидовыми шарами. Е.Е. Бердышева [6] нашла оптимальный аргумент в неравенстве Джексона в $L^2(\mathbb{R}^d)$, когда тело V есть l_p^d-шар, $1 \leqslant p \leqslant 2$, а U — куб. А.В. Иванов и В.И. Иванов [15] перенесли ее результаты на случай параллелепипеда, который оказался сложнее и потребовал развития конструкции В.А. Юдина экстремальной функции в задаче Логана. Для приближений частичными интегралами преобразования Фурье по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля оптимальные аргументы в неравенствах Джексона вычислены в работах [16, 17, 18, 19]. Для доказательства точных неравенств Джексона со старшим модулем непрерывности понадобилось обобщение задачи Логана (см. [20, 21, 22]).

Вторая задача Логана менее исследована. Она решена только для преобразования Фурье в $\mathbb{R}^d$. Общая оценка снизу получена Д.В. Горбачевым [23]. Экстремальная функция построена В.А. Юдиным [24].

В настоящей работе мы решаем вторую экстремальную задачу Логана для преобразования Фурье по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля на полупрямой, а также для преобразования Фурье–Данкля в пространстве $\mathbb{R}^d$ с весом Данкля и преобразования Фурье на гиперболоиде.

2. Задача Штурма–Лиувилля на полупрямой

Необходимые факты об общей задаче Штурма–Лиувилля на полупрямой можно найти в [12, 13, 18, 19, 23, 25, 26]. Для удобства читателя напомним их.

Пусть $w(t)$ — непрерывная весовая функция на полупрямой $\mathbb{R}_+$, которая положительна и непрерывно дифференцируема при $t > 0$, параметр $\lambda_0 \geqslant 0$.

Предположим, что задача (1) при $\lambda \geqslant 0$ имеет решение $\varphi(t, \lambda)$, которое будем называть собственной функцией задачи Штурма–Лиувилля. Также в дальнейшем будем предполагать, что для задачи Штурма–Лиувилля выполнены следующие свойства.

1. Собственная функция $\varphi(t, \lambda)$ — действительная функция, четная аналитическая в окрестности $\mathbb{R}$ по t и четная целая функция экспоненциального типа $|t|$ при $t \neq 0$ по λ,

$$\varphi(0, \lambda) = 1, \quad |\varphi(t, \lambda)| \leqslant 1, \quad \lambda, t \in \mathbb{R}.$$

2. Для $t > 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\varphi(t, \lambda) = \varphi_0(t) \prod_{k=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_k^2(t)}\Big), \tag{2}$$

где $\varphi_0(t) = \varphi(t, 0) > 0$, $0 < \lambda_1(t) < \ldots < \lambda_k(t) < \ldots$ — положительные нули $\varphi(t, \lambda)$ по λ. Нули $\lambda_k(t)$ непрерывны и монотонно убывают при $t > 0$. При этом $\lambda_k(t) = t_k^{-1}(t)$, где $t_k(\lambda)$ —

положительные нули функции $\varphi(t,\lambda)$ по $t>0$. Нули $t_k(\lambda)$ также непрерывны и монотонно убывают при $\lambda>0$.

3. Спектральная мера $\sigma(\lambda)$ задачи (1) непрерывно дифференцируема на $\mathbb{R}_+$, $\sigma(0)=0$ и

$$\sigma'(\lambda)=s(\lambda)\asymp\lambda^{2\alpha+1},\quad \lambda\to+\infty,\ \alpha\geqslant -1/2.$$

Пусть $d\mu(t)=w(t)\,dt$, $1\leq p<\infty$, $L^p(\mathbb{R}_+,d\mu)$ — пространство комплексных измеримых по Лебегу функций $f(t)$ на $\mathbb{R}_+$ с нормой

$$\|f\|_{p,d\mu}=\Big(\int_{\mathbb{R}_+}|f(t)|^p\,d\mu(t)\Big)^{1/p}<\infty,$$

$L^p(\mathbb{R}_+,d\sigma)$ — пространство комплексных измеримых по Лебегу функций $g(\lambda)$ на $\mathbb{R}_+$ с нормой

$$\|g\|_{p,d\sigma}=\Big(\int_{\mathbb{R}_+}|g(\lambda)|^p\,d\sigma(\lambda)\Big)^{1/p}<\infty,$$

$C_b(\mathbb{R}_+)$ — пространство непрерывных ограниченных функций, $L^\infty(\mathbb{R}_+)$ — пространство измеримых существенно ограниченных функций. Нормы в $C_b(\mathbb{R}_+)$ и $L^\infty(\mathbb{R}_+)$ обозначаем $\|\cdot\|_\infty$.

Прямое и обратное преобразования Фурье определяются равенствами

$$\mathcal{F}f(\lambda)=\int_{\mathbb{R}_+}f(t)\varphi(t,\lambda)\,d\mu(t),\quad \mathcal{F}^{-1}g(t)=\int_{\mathbb{R}_+}g(\lambda)\varphi(t,\lambda)\,d\sigma(\lambda).$$

Для преобразований Фурье справедлива L^2-теория, то есть они осуществляют метрический изоморфизм между пространствами $L^2(\mathbb{R}_+,d\mu)$ и $L^2(\mathbb{R}_+,d\sigma)$. Равенства Планшереля имеют вид

$$\|\mathcal{F}f\|_{2,d\sigma}=\|f\|_{2,d\mu},\quad \|\mathcal{F}^{-1}g\|_{2,d\mu}=\|g\|_{2,d\sigma}.$$

Если $f\in L^1(\mathbb{R}_+,d\mu)$, то $\mathcal{F}f\in C_b(\mathbb{R}_+)$ и применяя неравенство $|\varphi(t,\lambda)|\leqslant 1$, получим

$$\|\mathcal{F}f\|_\infty\leqslant\|f\|_{1,d\mu}. \tag{3}$$

Пусть для $p\geqslant 1$, $p'=\frac{p}{p-1}$ — показатель Гельдера. Интерполируя неравенство (3) и равенство Планшереля, получим неравенство Хаусдорфа–Юнга

$$\|\mathcal{F}f\|_{p',d\sigma}\leqslant\|f\|_{p,d\mu},\quad 1\leqslant p\leqslant 2.$$

Аналогично, если $g\in L^1(\mathbb{R}_+,d\sigma)$, то $\mathcal{F}^{-1}g\in C_b(\mathbb{R}_+)$ и

$$\|\mathcal{F}^{-1}g\|_{p'}\leqslant\|g\|_{p,d\sigma},\quad 1\leqslant p\leqslant 2.$$

Теорема 1 [13]. *Пусть $f\in L^1(\mathbb{R}_+,d\mu)\cap C_b(\mathbb{R}_+)$, $\mathcal{F}f\in L^1(\mathbb{R}_+,d\sigma)$, то $\mathcal{F}f\in C_b(\mathbb{R}_+)$ и для всех $\lambda,t\in\mathbb{R}_+$ справедливы поточечные равенства*

$$\mathcal{F}f(\lambda)=\int_{\mathbb{R}_+}f(t)\varphi(t,\lambda)\,d\mu(t),\quad f(t)=\int_{\mathbb{R}_+}\mathcal{F}f(\lambda)\varphi(t,\lambda)\,d\sigma(\lambda).$$

Аналогично, если $g\in L^1(\mathbb{R}_+,d\sigma)\cap C_b(\mathbb{R}_+)$, $\mathcal{F}^{-1}g\in L^1(\mathbb{R}_+,d\mu)$, то $\mathcal{F}^{-1}g\in C_b(\mathbb{R}_+)$ и для всех $t,\lambda\in\mathbb{R}_+$,

$$\mathcal{F}^{-1}g(t)=\int_{\mathbb{R}_+}g(\lambda)\varphi(t,\lambda)\,d\sigma(\lambda),\quad g(\lambda)=\int_{\mathbb{R}_+}\mathcal{F}^{-1}g(t)\varphi(t,\lambda)\,d\mu(t).$$

4. Для $t > 0$ равномерно на каждом компакте из $(0, \infty)$ справедлива асимптотика

$$\lambda^{\alpha+1/2}\varphi(t,\lambda) = C_t\big(\cos(t\lambda - c_t) + e^{t|\operatorname{Im}\lambda|}O(|\lambda|^{-1})\big), \quad |\lambda| \to \infty,\ \operatorname{Re}\lambda \geqslant 0, \tag{4}$$

где $C_t > 0$, α из (3).

Свойства **1**–**4** являются достаточными для построения квадратурной формулы Гаусса на полуоси по нулям $\lambda_k(t)$ [12].

Пусть B_1^τ — класс четных целых функций экспоненциального типа не выше $\tau > 0$, чьи сужения на $\mathbb{R}_+$ принадлежат $L^1(\mathbb{R}_+, d\sigma)$.

Теорема 2 [12]. *Для произвольной функции $g \in B_1^\tau$ справедлива квадратурная формула Гаусса с положительными весами:*

$$\int_0^\infty g(\lambda)\,d\sigma(\lambda) = \sum_{k=1}^\infty \gamma_k(\tau/2)g(\lambda_k(\tau/2)). \tag{5}$$

Ряд в (5) *сходится абсолютно.*

Для построения экстремальной функции нам понадобятся еще одно предположение о задаче Штурма–Лиувилля (1).

5. Для оператора обобщенного сдвига

$$T^t f(x) = \int_{\mathbb{R}_+} \mathcal{F}f(\lambda)\varphi(t,\lambda)\varphi(x,\lambda)\,d\sigma(\lambda), \quad t, x \in \mathbb{R}_+,$$

действующего в пространстве $L^2(\mathbb{R}_+, d\mu)$, справедливо интегральное представление

$$T^t f(x) = \int_{\mathbb{R}_+} f(z)\,d\tau_{x,t}(z), \tag{6}$$

где для всех $x, t \in \mathbb{R}_+$ $\tau_{x,t}$ — вероятностная борелевская мера, для которой $\tau_{x,t} = \tau_{t,x}$ и носитель $\operatorname{supp}\tau_{x,t} \subset [|x-t|, x+t]$.

Свойства **1**–**5** выполняются для широкого класса весов w, частности, для степенного и гиперболического весов (см. [12, 25, 26, 27, 28]).

Оператор обобщенного сдвига является положительным самосопряженным оператором и $T^t f(x) \in C(\mathbb{R}_+) \times C(\mathbb{R}_+)$, если $f \in C(\mathbb{R}_+)$ [29].

Представление (6) позволяет распространить оператор обобщенного сдвига T^t на пространства $L^p(\mathbb{R}_+, d\mu)$, $1 \leqslant p < \infty$, и пространство $C(\mathbb{R}_+)$ с нормой 1 для всех $t \in \mathbb{R}_+$ (см. [19]).

Отметим еще следующие свойства оператора обобщенного сдвига:

$$\mathcal{F}(T^t f)(\lambda) = \varphi(t,\lambda)\mathcal{F}f(\lambda), \tag{7}$$

$$\text{если } \operatorname{supp} f \subset [0,\delta], \text{ то } \operatorname{supp} T^t f(x) \subset [0, \delta + t]. \tag{8}$$

Нам понадобятся также следующие утверждения.

Лемма 1 [16]. *Пусть $\alpha > -1/2$. Существует четная целая функция $\omega_\alpha(z)$ экспоненциального типа 2, для которой*

$$\omega_\alpha(x) > 0, \quad x > 0,$$

$$\omega_\alpha(x) \asymp x^{2\alpha+1}, \quad x \to +\infty, \qquad |\omega_\alpha(iy)| \asymp y^{2\alpha+1}e^{2y}, \quad y \to +\infty.$$

Лемма 2 [30, прил. VII, лемма Ахиезера]. *Пусть $m \in \mathbb{Z}_+$, F — четная целая функция экспоненциального типа $\tau > 0$, ограниченная на $\mathbb{R}$, Ω — четная целая функция конечного экспоненциального типа, все корни которой входят в множество корней F, и*

$$\liminf_{y\to+\infty} e^{-\tau y}y^{2m}|\Omega(iy)| > 0.$$

Тогда функция $\psi(z) = F(z)/\Omega(z)$ есть четный многочлен степени не больше $2m$.

3. Вторая задача Логана для преобразования Фурье на полупрямой

Пусть $\tau > 0$, $g(\lambda)$ — действительная непрерывная на полупрямой функция,

$$\Lambda_+(g) = \sup\{\lambda > 0 \colon g(\lambda) < 0\}.$$

Вторая задача Логана. Вычислить величину

$$L(\tau, \mathbb{R}_+) = \inf \Lambda_+(g),$$

если

$$\begin{gathered} g \in L^1(\mathbb{R}_+, d\sigma) \cap C_b(\mathbb{R}_+), \quad g(\lambda) \not\equiv 0, \\ \mathcal{F}^{-1}g(t) \geqslant 0, \quad \mathcal{F}^{-1}g(0) = 0, \quad \operatorname{supp} \mathcal{F}^{-1}g \subset [0, \tau]. \end{gathered} \tag{9}$$

Рассмотрим два семейства функций

$$\psi_\varepsilon(\lambda) = \frac{\varphi(\varepsilon, \lambda)}{\varphi_0(\varepsilon)}, \quad \rho_\varepsilon(\lambda) = -\frac{2(1 - \psi_\varepsilon(\lambda))}{\psi_\varepsilon''(0)}, \quad \varepsilon > 0. \tag{10}$$

Лемма 3. *Для всех* $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \rho_\varepsilon(\lambda) = \lambda^2$.

Доказательство. Для всех $\lambda \in \mathbb{R}_+$ справедливо разложение

$$\psi_\varepsilon(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\psi_\varepsilon^{(2k)}(0)}{(2k)!} \lambda^{2k}.$$

Дифференцируя (2) и подставляя $\lambda = 0$, получим

$$(-1)^k \psi_\varepsilon^{(2k)}(0)$$

$$= 2^k \sum_{i_1=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{i_1}^2(\varepsilon)} \Big(\sum_{i_2=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{i_2}^2(\varepsilon)} - \frac{1}{\lambda_{i_1}^2(\varepsilon)} \Big) \cdots \Big(\sum_{i_k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{i_k}^2(\varepsilon)} - \frac{1}{\lambda_{i_1}^2(\varepsilon)} - \cdots - \frac{1}{\lambda_{i_{k-1}}^2(\varepsilon)} \Big).$$

Если $k = 1$, то

$$-\psi_\varepsilon''(0) = 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i^2(\varepsilon)},$$

а если $k > 1$, то $|\psi_\varepsilon^{(2k)}(0)| \leqslant |\psi_\varepsilon''(0)|^k$, поэтому

$$|\rho_\varepsilon(\lambda) - \lambda^2| = \Big| \frac{2(1 - \psi_\varepsilon(\lambda))}{\psi_\varepsilon''(0)} + \lambda^2 \Big| \leqslant 2|\psi_\varepsilon''(0)| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|\psi_\varepsilon''(0)|^{k-2} \lambda^{2k}}{(2k)!}.$$

Остается показать, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} |\psi_\varepsilon''(0))| = 0. \tag{11}$$

Так как нули $\lambda_k(\varepsilon)$ монотонно убывают по ε, $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \lambda_k(\varepsilon) = \infty$, а из асимптотики (4) $\lambda_k(1) \sim \pi k$ при $k \to \infty$, то (11) вытекает из оценки:

$$|\psi_\varepsilon''(0))| \leqslant \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\lambda_k^2(\varepsilon)} + \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2(1)} \leqslant \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\lambda_k^2(\varepsilon)} + \frac{c}{N}, \quad c > 0. \qquad \square$$

Лемма 4. *Пусть функция g удовлетворяет условиям* (9) *и* $\Lambda_+(g) < \infty$. *Тогда*

$$\lambda^2 g \in L^1(\mathbb{R}_+, d\sigma)$$

и

$$\int_0^\infty \lambda^2 g(\lambda)\, d\sigma(\lambda) \leqslant 0. \tag{12}$$

Доказательство. Будем использовать функции $\psi_\varepsilon(\lambda)$ и $\rho_\varepsilon(\lambda)$ (10). Согласно (2), (9), $\psi_\varepsilon''(0) < 0$, $\rho_\varepsilon(\lambda) \geqslant 0$, поэтому

$$\int_0^\infty \rho_\varepsilon(\lambda) g(\lambda)\, d\sigma(\lambda) = \frac{2}{\psi_\varepsilon''(0)\varphi_0(\varepsilon)} \int_0^\infty g(\lambda)\varphi(\varepsilon,\lambda)\, d\sigma(\lambda) = \frac{2\mathcal{F}^{-1}g(\varepsilon)}{\psi_\varepsilon''(0)\varphi_0(\varepsilon)} \leqslant 0. \tag{13}$$

Так как $g(\lambda) \geqslant 0$ при $\lambda \geqslant \Lambda_+(g)$, то применяя (13), лемму 3 и лемму Фату, получим

$$\int_{\Lambda_+(g)}^\infty \lambda^2 g(\lambda)\, d\sigma(\lambda) = \int_{\Lambda_+(g)}^\infty \lim_{\varepsilon\to 0} \rho_\varepsilon(\lambda) g(\lambda)\, d\sigma(\lambda)$$

$$\leqslant \liminf_{\varepsilon\to 0} \int_{\Lambda_+(g)}^\infty \rho_\varepsilon(\lambda) g(\lambda)\, d\sigma(\lambda) \leqslant \liminf_{\varepsilon\to 0} \Big\{ -\int_0^{\Lambda_+(g)} \rho_\varepsilon(\lambda) g(\lambda)\, d\sigma(\lambda) \Big\}$$

$$= -\int_0^{\Lambda_+(g)} \lim_{\varepsilon\to 0} \rho_\varepsilon(\lambda) g(\lambda)\, d\sigma(\lambda) = -\int_0^{\Lambda_+(g)} \lambda^2 g(\lambda)\, d\sigma(\lambda) < \infty.$$

Следовательно, $\lambda^2 g \in L^1(\mathbb{R}_+, d\sigma)$ и выполнено (12). □

Теорема 4. Пусть $\tau > 0$, $\lambda_1 = \lambda_1(\tau/2)$, $\lambda_2 = \lambda_2(\tau/2)$ и для задачи Штурма–Лиувилля (1) выполнены условия **1**–**5**. Тогда во второй задаче Логана

$$L(\tau, \mathbb{R}_+) = \lambda_2,$$

единственная с точностью до положительного множителя экстремальная функция имеет вид

$$g_\tau(\lambda) = \frac{\varphi^2(\tau/2, \lambda)}{(\lambda_1^2 - \lambda^2)(\lambda_2^2 - \lambda^2)}. \tag{14}$$

Доказательство. **Оценка снизу**. По теореме 1 $\mathcal{F}^{-1}g \in L^1(\mathbb{R}_+, d\mu) \cap C_b(\mathbb{R}_+)$,

$$\mathcal{F}^{-1}g(t) = \int_{\mathbb{R}_+} g(\lambda)\varphi(t,\lambda)\, d\sigma(\lambda) \geqslant 0, \quad \mathcal{F}^{-1}g(0) = \int_{\mathbb{R}_+} g(\lambda)\, d\sigma(\lambda) = 0,$$

$$g(\lambda) = \int_0^\tau \mathcal{F}^{-1}g(t)\varphi(t,\lambda)\, d\mu(t).$$

Так как $\varphi(t,\lambda)$ — четная целая функция λ экспоненциального типа t, то $g \in B_1^\tau$, а по лемме 4 и $\lambda^2 g \in B_1^\tau$. Пусть α из условия **3**, а функция $\omega_\alpha(\lambda)$ из леммы 1.

Сначала предположим, что для допустимой функции g, $\Lambda_+(g) \leqslant \lambda_1$ или $\Lambda_+(g) \in (\lambda_1, \lambda_2)$ и $g(\lambda_1) \geqslant 0$. Тогда $g \in B_1^\tau$, $g(\lambda) \geqslant 0$ при $\lambda \geqslant \Lambda_+(g)$, $g(\lambda_1) \geqslant 0$ и применяя квадратурную формулу Гаусса (5), получим

$$0 = \int_0^\infty g(\lambda)\, d\sigma(\lambda) = \sum_{k=1}^\infty \gamma_k(\tau/2) g(\lambda_k(\tau/2)) \geqslant 0, \tag{15}$$

поэтому в точках $\lambda_k(\tau/2)\,(k \geqslant 2)$ функция $g(\lambda)$ имеет двойные нули, а в точке λ_1, по крайней мере, простой нуль. Рассмотрим функции

$$F(\lambda) = \omega_\alpha(\lambda) g(\lambda), \quad \Omega(\lambda) = \omega_\alpha(\lambda) \frac{\varphi^2(\tau/2, \lambda)}{\lambda_1^2 - \lambda^2}.$$

Из асимптотики (4), леммы 1

$$|\Omega(iy)| \asymp y^{-2} e^{(r+2)y}, \quad y \to +\infty.$$

Применяя лемму 2, получим

$$g(\lambda) = (c_1 + c_2\lambda^2) \frac{\varphi^2(\tau/2, \lambda)}{\lambda_1^2 - \lambda^2},$$

что противоречит условию $\lambda^2 g \in L^1(\mathbb{R}_+, d\sigma)$.

Пусть теперь $\Lambda_+(g) \in (\lambda_1, \lambda_2)$ и $g(\lambda_1) < 0$. Применяя формулу Гаусса (5) к функции $(\Lambda_+^2(g) - \lambda^2) g(\lambda) \in B_1^\tau$, по лемме 4 получим противоречие:

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \int_0^\infty (\Lambda_+^2(g) - \lambda^2) g(\lambda)\, d\sigma(\lambda) &= \sum_{k=1}^\infty \gamma_k(\tau/2)(\Lambda_+^2(g) - \lambda_k^2(\tau/2)) g(\lambda_k(\tau/2)) \\ &\leqslant \gamma_1(\Lambda_+^2(g) - \lambda_1^2) g(\lambda_1) < 0. \end{aligned} \tag{16}$$

Итак, $\Lambda_+(g) \geqslant \lambda_2$ и $L(\tau, \mathbb{R}_+) \geqslant \lambda_2$. Оценка снизу доказана.

Построение экстремальной функции. Пусть $\chi_a(t)$ — характеристическая функция отрезка $[0, a]$, $t' \in (0, \tau/2)$ — первый нуль функции $\varphi(t, \lambda_2)$,

$$c_1 = -\frac{\partial \varphi}{\partial t}(\tau/2, \lambda_1), \quad c_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(\tau/2, \lambda_2).$$

Так как нули собственной функции $\varphi(t, \lambda)$ по λ и t простые, то $c_1 > 0$, $c_2 > 0$.

Рассмотрим непрерывную функцию

$$v(t) = (c_2 \varphi(t, \lambda_1) + c_1 \varphi(t, \lambda_2)) \chi_{\tau/2}(t) = v_1(t) - v_2(t). \tag{17}$$

Покажем, что она неотрицательная. Для отрезка $[0, t']$ это очевидно, так как оба слагаемые неотрицательные. Необходимо доказать, что на интервале $(t', \tau/2)$, $v_1(t) \geqslant v_2(t)$.

Отметим следующие свойства функций $v_1(t)$ и $v_2(t)$:

$$v_1(t) > 0,\ v_2(t) > 0\ (t \in (t', \tau/2)), \quad v_1(\tau/2) = v_2(\tau/2) = 0,$$

$$v_1'(\tau/2) = v_2'(\tau/2), \quad \lim_{t \to \tau/2} \frac{v_1(t)}{v_2(t)} = \lim_{t \to \tau/2} \frac{v_1'(t)}{v_2'(t)} = \frac{v_1'(\tau/2)}{v_2'(\tau/2)} = 1.$$

Они также удовлетворяют дифференциальному уравнению (1) при $\lambda = \lambda_1, \lambda_2$:

$$(w(t) v_1'(t))' + (\lambda_1^2 + \lambda_0^2) w(t) v_1(t) = 0, \quad (w(t) v_2'(t))' + (\lambda_2^2 + \lambda_0^2) w(t) v_2(t) = 0. \tag{18}$$

Для неравенства $\frac{v_1(t)}{v_2(t)} \geqslant 1$ достаточно доказать, что

$$\Big(\frac{v_1(t)}{v_2(t)}\Big)' \leqslant 0, \quad t \in (t', \tau/2). \tag{19}$$

Имеем

$$\Big(\frac{v_1(t)}{v_2(t)}\Big)' = \frac{v_2(t)v_1'(t) - v_1(t)v_2'(t)}{v_2^2(t)} = \frac{v_2(t)w(t)v_1'(t) - v_1(t)w(t)v_2'(t)}{w(t)v_2^2(t)} = \frac{\psi(t)}{w(t)v_2^2(t)},$$

поэтому применяя (18), получим

$$\psi'(t) = v_2(t)(w(t)v_1'(t))' - v_1(t)(w(t)v_2'(t))' = (\lambda_2^2 - \lambda_1^2)w(t)v_1(t)v_2(t) > 0.$$

Так как $\psi(\tau/2) = 0$, то $\psi(t) < 0$, $t \in (t', \tau/2)$ и неравенство (19) выполнено.

Неотрицательность функции $v(t)$ доказана. Вычислим ее преобразование Фурье. Согласно (1), (18)

$$\Big\{w(t)\Big(\varphi(t,\lambda)v_1'(t) - \frac{\partial\varphi}{\partial t}(t,\lambda)v_1(t)\Big)\Big\}_t' = \big(\lambda^2 - \lambda_1^2\big)w(t)\varphi(t,\lambda)v_1(t),$$

$$\Big\{w(t)\Big(\varphi(t,\lambda)v_2'(t) - \frac{\partial\varphi}{\partial t}(t,\lambda)v_2(t)\Big)\Big\}_t' = \big(\lambda^2 - \lambda_2^2\big)w(t)\varphi(t,\lambda)v_2(t),$$

поэтому из (17)

$$\mathcal{F}v(\lambda) = \int_0^{\tau/2} w(t)\varphi(t,\lambda)v_1(t)\,dt - \int_0^{\tau/2} w(t)\varphi(t,\lambda)v_2(t)\,dt$$

$$= -w(\tau/2)\frac{\partial\varphi}{\partial t}(\tau/2,\lambda_1)\frac{\partial\varphi}{\partial t}(\tau/2,\lambda_2)\varphi(\tau/2,\lambda)\Big(\frac{1}{\lambda_1^2 - \lambda^2} - \frac{1}{\lambda_2^2 - \lambda^2}\Big).$$

$$= -w(\tau/2)\frac{\partial\varphi}{\partial t}(\tau/2,\lambda_1)\frac{\partial\varphi}{\partial t}(\tau/2,\lambda_2)(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)\frac{\varphi(\tau/2,\lambda)}{(\lambda_1^2 - \lambda^2)(\lambda_2^2 - \lambda^2)}.$$

Применяя свойство (7), получим, что для функции $g_\tau(\lambda)$ (14) справедливо представление

$$g_\tau(\lambda) = -\frac{1}{w(\tau/2)\frac{\partial\varphi}{\partial t}(\tau/2,\lambda_1)\frac{\partial\varphi}{\partial t}(\tau/2,\lambda_2)(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)}\mathcal{F}(T^{\tau/2}v)(\lambda).$$

Так как оператор обобщенного сдвига положительный, $v(t) \geqslant 0$,

$$-w(\tau/2)\frac{\partial\varphi}{\partial t}(\tau/2,\lambda_1)\frac{\partial\varphi}{\partial t}(\tau/2,\lambda_2)(\lambda_2^2 - \lambda_1^2) > 0,$$

то согласно теореме 1, асимптотике (4), свойству (8) для функции $g_\tau(\lambda)$ выполнены условия (9) и $\Lambda_+(g_\tau) = \lambda_2$. Следовательно, функция $g_\tau(\lambda)$ экстремальная.

Единственность экстремальной функции. Пусть $g_0(\lambda)$ — экстремальная функция. Функция $g_0(\lambda) \geqslant 0$ для $\lambda \geqslant \lambda_2$ и $g_0(\lambda_2) = 0$, в противном случае $\Lambda_+(g_0) < \lambda_2$. Согласно (16) $g_0(\lambda_1) \geqslant 0$, а из (15) вытекает, что $g_0(\lambda_1) = 0$. Следовательно, в точках $\lambda_k(\tau/2)$, $k \geqslant 3$, она имеет двойные нули, а в точках λ_1, λ_2, по крайней мере, нули первого порядка. Рассмотрим функции

$$F(\lambda) = \omega_\alpha(\lambda)g_0(\lambda), \quad \Omega(\lambda) = \omega_\alpha(\lambda)g_\tau(\lambda),$$

где $g_\tau(\lambda)$ определена в (14). Из асимптотики (4), леммы 1

$$|\Omega(iy)| \asymp y^{-4}e^{(\tau+2)y}, \quad y \to +\infty.$$

Применяя лемму 2, получим $g_0(\lambda) = \psi(\lambda)g_\tau(\lambda)$, где $\psi(\lambda)$ — четный многочлен степени не выше 4. Он не может иметь степень 2 или 4, иначе по асимптотике (4) $\lambda^2 g_0 \notin L^1(\mathbb{R}_+, d\sigma)$. Следовательно, $g_0(\lambda) = cg_\tau(\lambda)$, $c > 0$. □

В частности, теорема 4 справедлива на полупрямой для преобразования Ганкеля со степенным весом и преобразования Якоби с гиперболическим весом.

4. Вторая задача Логана для преобразования Данкля

Пусть $d \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^d$ — d-мерное действительное евклидово пространство со скалярным произведением $(x, y) = x_1y_1 + \ldots + x_dy_d$ и нормой $|x| = \sqrt{(x, x)}$,

$$v_k(x) = \prod_{\alpha \in R_+} |(a, x)|^{2k(a)}$$

— обобщенный степенной вес или вес Данкля, определяемый положительной подсистемой R_+ системы корней $R \subset \mathbb{R}^d$ и функцией $k(a)\colon R \to \mathbb{R}_+$, инвариантной относительно группы отражений $G(R)$, порожденной R,

$$c_k^{-1} = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-|x|^2/2} v_k(x)\, dx$$

— интеграл Макдональда – Мета – Сельберга, $d\mu_k(x) = c_k v_k(x)\, dx$, $L^1(\mathbb{R}^d, d\mu_k)$ — пространство комплексных измеримых по Лебегу на $\mathbb{R}^d$ функций f с конечной нормой

$$\|f\|_{1,k} = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|\, d\mu_k(x),$$

$e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_d = (0, \ldots, 0, 1)$ — стандартный ортонормированный базис в $\mathbb{R}^d$, $\sigma_a \in O(d)$ — отражение относительно гиперплоскости $(a, x) = 0$,

$$D_j f(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} + \sum_{a \in R_+} k(a)(a, e_j)\, \frac{f(x) - f(\sigma_a x)}{(a, x)}, \quad j = 1, \ldots, d,$$

— дифференциально-разностные операторы Данкля, $e_k(x, y) = E_k(x, iy)$ — обобщенная экспонента (ядро Данкля), являющаяся решением системы уравнений

$$D_j f(x) = iy_j f(x), \quad j = 1, \ldots, d, \qquad f(0) = 1.$$

Для обобщенной экспоненты $e_k(x, y)$ справедливым свойства, аналогичные свойствам экспоненты $e^{i(x,y)}$, многие из которых вытекают из интегрального представления [31]

$$e_k(x, y) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(\xi, y)}\, d\mu_k^x(\xi),$$

где μ_k^x — вероятностная борелевская мера, носитель которой лежит в выпуклой оболочке $\operatorname{co}\{gx\colon g \in G(R)\}$ орбиты x относительно группы $G(R)$. В частности, $|e^{i(x,y)}| \leq 1$, $\overline{e_k(x, y)} = e_k(-x, y) = e_k(x, -y)$, $e_k(x, y) = e_k(y, x)$.

Гармонический анализ в пространствах с весом Данкля осуществляется с помощью преобразования Данкля

$$\mathcal{F}_k(f)(y) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\overline{e_k(x, y)}\, d\mu_k(x).$$

Основные факты из теории Данкля можно найти в [32]. В частности, обратное преобразование Данкля равно $\mathcal{F}_k^{-1}(f)(x) = \mathcal{F}_k(f)(-x)$. В безвесовом случае ($k(a) \equiv 0$) получаем классическое преобразование Фурье.

Пусть $\tau > 0$, $B_\tau = \{y \in \mathbb{R}^d\colon |y| \leqslant \tau\}$ — евклидов шар радиуса τ, $g(y)$ — действительная непрерывная на $\mathbb{R}^d$ функция,

$$\Lambda_+(g, \mathbb{R}^d) = \sup\{|y| > 0\colon g(y) < 0\}.$$

Вторая задача Логана для преобразования Данкля. Вычислить величину

$$L(\tau,(\mathbb{R}^d,d\mu_k))=\inf\Lambda_+(g,\mathbb{R}^d),$$

если

$$\begin{gathered}g\in L^1(\mathbb{R}^d,d\mu_k)\cap C_b(\mathbb{R}^d),\quad g(y)\not\equiv 0,\\ \mathcal{F}_k^{-1}g(x)\geqslant 0,\quad \mathcal{F}_k^{-1}g(0)=0,\quad \operatorname{supp}\mathcal{F}_k^{-1}g\subset B_\tau.\end{gathered}\tag{20}$$

По теореме Пэли–Винера [33] допустимые функции в задаче Логана являются целыми функциями экспоненциального сферического типа не выше τ.

Покажем, что в задаче Логана можно ограничиться радиальными функциями.

Пусть $\Gamma(t)$ — гамма-функция, $J_\alpha(t)$ — функция Бесселя порядка $\alpha\geqslant -1/2$,

$$j_\alpha(t)=2^\alpha\Gamma(\alpha+1)\,\frac{J_\alpha(t)}{t^\alpha}$$

— нормированная функция Бесселя, $0<q_{\alpha,1}<q_{\alpha,2}<\ldots$ — положительные нули $J_\alpha(t)$, $b_\alpha^{-1}=2^\alpha\Gamma(\alpha+1)$, $t\in\mathbb{R}_+$, $d\nu_\alpha(t)=b_\alpha t^{2\alpha+1}\,dt$, $L^1(\mathbb{R}_+,d\nu_\alpha)$ — пространство измеримых по Лебегу на $\mathbb{R}_+$ функций f с конечной нормой

$$\|f\|_{1,\lambda}=\int_0^\infty|f(t)|\,d\nu_\alpha(t),$$

$$\mathcal{H}_\alpha f(\lambda)=\int_0^\infty f(t)j_\alpha(\lambda t)\,d\nu_\alpha(t)$$

— преобразование Ганкеля (см. [23, гл. 1]). Отметим, что $\mathcal{H}_\alpha^{-1}=\mathcal{H}_\alpha$.

Вторая задача Логана для преобразования Ганкеля. Вычислить величину

$$L(\tau,(\mathbb{R}_+,d\nu_\alpha))=\inf\Lambda_+(g),$$

если

$$\begin{gathered}g\in L^1(\mathbb{R}_+,d\nu_\alpha)\cap C_b(\mathbb{R}_+),\quad g(\lambda)\not\equiv 0,\\ \mathcal{H}_\alpha^{-1}g(t)\geqslant 0,\quad \mathcal{H}_\alpha^{-1}g(0)=0,\quad \operatorname{supp}\mathcal{H}_\alpha^{-1}g\subset[0,\tau].\end{gathered}\tag{21}$$

По теореме Пэли–Винера [33] допустимые функции в задаче Логана являются четными целыми функциями экспоненциального типа не выше τ.

Из теоремы 4 вытекает утверждение.

Теорема 5. *Пусть $\tau>0$, $\alpha\geqslant -1/2$, $q_{\alpha,1}=q_1$, $q_{\alpha,2}=q_2$. Тогда во второй задаче Логана*

$$L(\tau,(\mathbb{R}_+,d\nu_\alpha))=\frac{2q_2}{\tau},$$

единственная с точностью до положительного множителя экстремальная функция имеет вид

$$g_{\tau,0}(\lambda)=\frac{j_\alpha^2(\tau\lambda/2)}{(q_1^2-\lambda^2)(q_2^2-\lambda^2)}.$$

Пусть $\alpha_k=d/2-1+\sum_{a\in R_+}k(a)$, $S^{d-1}=\{x\in\mathbb{R}^d\colon|x|=1\}$ — единичная евклидова сфера в $\mathbb{R}^d$, $x'\in S^{d-1}$,

$$a_k^{-1}=\int_{S^{d-1}}v_k(x')\,dx',\quad d\omega_k(x')=a_kv_k(x')\,dx',$$

где dx' — лебегова мера на сфере.

Применяя сферические координаты, получим

$$c_k^{-1} = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-|x|^2/2} v_k(x)\,dx = \int_0^\infty e^{-r^2/2} r^{d-1+2|k|}\,dr \int_{S^{d-1}} v_k(x')\,dx' = b_{\lambda_k}^{-1} a_k^{-1}. \tag{22}$$

Известно [34], что

$$\int_{S^{d-1}} e_k(x, ry')\,d\omega_k(y') = j_{\lambda_k}(r|x|), \quad x \in \mathbb{R}^d. \tag{23}$$

Если $g_0(\lambda)$ удовлетворяет условиям (21), радиальная функция $g(y) = g_0(|y|)$, $|y| = \lambda$, $|x| = t$, то согласно (22), (23) имеем

$$\mathcal{F}_k^{-1}(g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} g(y) e_k(x, y)\,d\mu_k(y) = \int_0^\infty g_0(\lambda) j_{\lambda_k}(\lambda t)\,d\nu_{\alpha_k}(\lambda) = \mathcal{H}_{\alpha_k} g_0(t),$$

и $g(y)$ удовлетворяет условиям (20), поэтому $L(\tau, (\mathbb{R}^d, d\mu_k)) \leqslant L(\tau, (\mathbb{R}_+, d\nu_{\alpha_k}))$. Обратно, если функция $g(y)$ удовлетворяет условиям (20), то функция

$$g_0(\lambda) = \int_{S^{d-1}} g(\lambda y')\,d\omega_k(y')$$

удовлетворяет условиям (21) и $L(\tau, (\mathbb{R}_+, d\nu_{\alpha_k})) \geqslant L(\tau, (\mathbb{R}^d, d\mu_k))$. Следовательно, $L(\tau, (\mathbb{R}^d, d\mu_k)) = L(\tau, (\mathbb{R}_+, d\nu_{\alpha_k}))$. Отсюда и из теоремы 5 вытекает теорема.

Теорема 6. *Пусть* $\tau > 0$, $\alpha_k = d/2 - 1 + \sum_{a \in R_+} k(a)$, $q_{\alpha_k,1} = q_1$, $q_{\alpha_k,2} = q_2$. *Тогда во второй задаче Логана*

$$L(\tau, (\mathbb{R}_+, (\mathbb{R}^d, d\mu_k)) = \frac{2q_2}{\tau},$$

единственная с точностью до положительного множителя экстремальная функция имеет вид

$$g_\tau(y) = g_{\tau,0}(|y|) = \frac{j_{\alpha_k}^2(\tau|y|/2)}{(q_1^2 - |y|^2)(q_2^2 - |y|^2)}.$$

5. Вторая задача Логана на гиперболоиде

Пусть $\mathbb{R}^{d,1}$ — $(d+1)$-мерное действительное псевдоеклидово пространство с билинейной формой $[x, y] = -x_1 y_1 - \ldots - x_d y_d + x_{d+1} y_{d+1}$,

$$\mathbb{H}^d = \{x \in \mathbb{R}^{d,1} \colon [x, x] = 1,\ x_{d+1} > 0\}$$

— верхняя пола двуполостного гиперболоида,

$$d(x, y) = \operatorname{arch}[x, y] = \ln([x, y] + \sqrt{[x, y]^2 - 1})$$

— расстояние между $x, y \in \mathbb{H}^d$. Пара $\left(\mathbb{H}^d, d(\cdot, \cdot)\right)$ известна как пространство Лобачевского.

Пусть $x_0 = (0, \ldots, 0, 1) \in \mathbb{H}^d$, $d(x, x_0) = d(x)$, $r > 0$, $B_\tau = \{x \in \mathbb{H}^d \colon d(x) \leq \tau\}$ — шар радиуса τ с центром в точке x_0 в пространстве Лобачевского.

Пусть $t > 0$, $\eta \in \mathbb{S}^{d-1}$, $x = (\operatorname{sh} t\,\eta, \operatorname{ch} t) \in \mathbb{H}^d$,

$$d\mu(t) = d\mu^{((d-2)/2, -1/2)}(t) = 2^{d-1} \operatorname{sh}^{d-1} t\,dt = w(t)\,dt,$$

$$d\omega(\eta) = \frac{1}{|\mathbb{S}^{d-1}|}\,d\eta, \quad d\nu(x) = d\mu(t) d\omega(\eta)$$

— лебеговы меры на $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{S}^{d-1}$ и $\mathbb{H}^d$, соответственно. Отметим, что $d\omega$ — вероятностная мера на сфере, инвариантная относительно группы вращений $SO(d)$, а мера $d\nu$ — инвариантна относительно группы гиперболических вращений $SO_0(d,1)$.

Пусть $\lambda \in \mathbb{R}_+ = [0,\infty)$, $\xi \in \mathbb{S}^{d-1}$, $y = (\lambda,\xi) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}^{d-1} = \Omega^d$,

$$d\sigma(\lambda) = d\sigma^{((d-2)/2,-1/2)}(\lambda) = 2^{3-2d}\Gamma^{-2}\Big(\frac{d}{2}\Big)\left|\frac{\Gamma\big(\frac{d-1}{2}+i\lambda\big)}{\Gamma(i\lambda)}\right|^2 d\lambda,$$

$$d\chi(y) = d\sigma(\lambda)d\omega(\xi)$$

— лебеговы меры на $\mathbb{R}_+$ и Ω^d.

Прямое и обратное преобразования Фурье определяются равенствами

$$\mathcal{F}f(y) = \int_{\mathbb{H}^d} f(x)[x,\xi']^{-\frac{d-1}{2}-i\lambda}\,d\nu(x), \quad \mathcal{F}^{-1}g(x) = \int_{\Omega^d} g(y)[x,\xi']^{-\frac{d-1}{2}+i\lambda}\,d\chi(y),$$

где $\xi' = (\xi,1)$, $\xi \in \mathbb{S}^{d-1}$. Для преобразований Фурье справедлива L^2-теория, в частности, равенства Планшереля. Но так как их ядра являются неограниченными, для них не выполняется L^1-теория. Основные факты гармонического анализа на гиперболоиде можно найти в [8, 9, 35].

Пусть $g(y)$ — действительная непрерывная на Ω^d функция, $y = (\lambda,\xi)$,

$$\Lambda_+(g,\mathbb{H}^d) = \sup\{\lambda > 0\colon g(y) = g(\lambda,\xi) < 0,\ \xi \in \mathbb{S}^{d-1}\}.$$

Вторая задача Логана для преобразования Фурье на гиперболоиде. Вычислить величину

$$L(\tau,\mathbb{H}^d) = \inf \Lambda_+(g,\mathbb{H}^d),$$

если

$$\begin{gathered} g \in L^1(\Omega^d,d\chi)\cap C_b(\Omega^d), \quad g(y) \not\equiv 0, \\ \mathcal{F}^{-1}g(x) \geqslant 0, \quad \int_{\Omega^d} g(y)\,d\chi(y) = 0, \quad \operatorname{supp}\mathcal{F}^{-1}g \subset B_\tau. \end{gathered} \tag{24}$$

Покажем, что в задаче Логана можно ограничиться сферическими функциями, зависящими только от λ.

Пусть $\alpha \geq \beta \geq -1/2$, $\alpha > -1/2$, $\rho = \lambda_0 = \alpha+\beta+1$, $t \in \mathbb{R}_+$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $w^{(\alpha,\beta)}(t) = (\operatorname{sh} t)^{2\alpha+1}(\operatorname{ch} t)^{2\beta+1}$ — гиперболический вес, $F(a,b;c;z)$ — гипергеометрическая функция Гаусса,

$$\varphi_\lambda^{(\alpha,\beta)}(t) = F\Big(\frac{\rho+i\lambda}{2},\frac{\rho-i\lambda}{2};\alpha+1;-(\operatorname{sh} t)^2\Big)$$

— функция Якоби (см. [27, 28]).

Функция Якоби является собственной функцией задачи Штурма–Лиувилля (1) для гиперболического веса. По t она четная аналитическая на $\mathbb{R}$, а по λ — четная целая функция экспоненциального типа $|t| > 0$ и для нее выполнены свойства **1**–**5**.

Пусть $0 < \lambda_1(t) < \cdots < \lambda_k(t) < \ldots$ — положительные нули $\varphi_\lambda^{(\alpha,\beta)}(t)$ по λ, $d\mu^{(\alpha,\beta)}(t) = w^{(\alpha,\beta)}(t)\,dt$, $L_1(\mathbb{R},d\mu^{(\alpha,\beta)})$ — пространство измеримых по Лебегу функций $f(t)$ на $\mathbb{R}_+$ с конечной нормой

$$\|f\|_{1,\mu^{(\alpha,\beta)}} = \int_{\mathbb{R}_+} |f(t)|\,d\mu^{(\alpha,\beta)}(t),$$

$L_1(\mathbb{R}_+,d\sigma^{(\alpha,\beta)})$ — пространство измеримых по Лебегу функций $g(\lambda)$ на $\mathbb{R}_+$ с конечной нормой

$$\|g\|_{1,\sigma^{(\alpha,\beta)}} = \int_{\mathbb{R}_+} |f(\lambda)|\,d\sigma^{(\alpha,\beta)}(\lambda),$$

где

$$d\sigma^{(\alpha,\beta)}(\lambda) = s(\lambda)d\lambda, \quad s(\lambda) = (2\pi)^{-1}|c(\lambda)|^{-2},$$

$$c(\lambda) = \frac{2^{\rho-i\lambda}\Gamma(\alpha+1)\Gamma(i\lambda)}{\Gamma((\rho+i\lambda)/2)\Gamma((\rho+i\lambda)/2-\beta)},$$

$$\mathcal{J}f(\lambda) = \int_0^\infty f(t)\varphi_\lambda^{(\alpha,\beta)}(t)\,d\mu(t), \quad \mathcal{J}^{-1}g(t) = \int_0^\infty g(\lambda)\varphi_\lambda^{(\alpha,\beta)}(t)\,d\sigma(\lambda)$$

— прямое и обратное преобразования Якоби.

Вторая задача Логана для преобразования Якоби. Вычислить величину

$$L(\tau, (\mathbb{R}_+, d\sigma^{(\alpha,\beta)})) = \inf \Lambda_+(g),$$

если

$$\begin{gathered} g \in L^1(\mathbb{R}_+, d\sigma^{(\alpha,\beta)}) \cap C_b(\mathbb{R}_+), \quad g(\lambda) \not\equiv 0, \\ \mathcal{J}^{-1}g(t) \geqslant 0, \quad \mathcal{J}^{-1}g(0) = 0, \quad \operatorname{supp}\mathcal{J}^{-1}g \subset [0,\tau]. \end{gathered} \tag{25}$$

По теореме Пэли–Винера [36] допустимые функции в задаче Логана являются четными целыми функциями экспоненциального типа не выше τ.

Из теоремы 4 вытекает утверждение.

Теорема 7. *Пусть $\tau > 0$, $\alpha \geqslant \beta \geqslant -1/2$, $\lambda_1(\tau/2) = \lambda_1$, $\lambda_2(\tau/2) = \lambda_2$. Тогда во второй задаче Логана*

$$L(\tau, (\mathbb{R}_+, d\sigma^{(\alpha,\beta)})) = \lambda_2,$$

единственная с точностью до положительного множителя экстремальная функция имеет вид

$$g_{\tau,0}(\lambda) = \frac{(\varphi^{(\alpha,\beta)}(\tau/2,\lambda))^2}{(\lambda_1^2-\lambda^2)(\lambda_2^2-\lambda^2)}.$$

Пусть $\varphi_\lambda(t) = \varphi_\lambda^{((d-2)/2,-1/2)}(t)$ — функция Якоби с параметрами $\alpha = (d-2)/2$, $\beta = -1/2$. Она получается усреднением по сфере ядер преобразований Фурье

$$\varphi_\lambda(t) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} [x,\xi']^{-\frac{d-1}{2}\pm i\lambda}\,d\omega(\xi),$$

где $x = (\operatorname{sh} t\,\eta, \operatorname{ch} t)$, $\eta \in \mathbb{S}^{d-1}$, $\xi' = (\xi, 1)$.

Оператор усреднения по сфере

$$Qg(\lambda) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} g(y)\,d\omega(\xi),\ y = (\lambda,\xi) \in \Omega^d$$

дает нам сферические функции на Ω^d. Если $g(y) = g_0(\lambda)$ — сферическая функция, то $\mathcal{F}^{-1}g(x) = \mathcal{J}^{-1}g_0(t)$.

Если $g_0(\lambda)$ удовлетворяет условиям (25), сферическая функция $g(y) = g_0(\lambda)$, $y = (\lambda,\xi)$, $x = (\operatorname{sh} t\,\eta, \operatorname{ch} t)$, то $\mathcal{F}^{-1}g(x) = \mathcal{J}^{-1}g_0(t)$ и $g(y)$ удовлетворяет условиям (24), поэтому $L(\tau,\mathbb{H}^d) \leqslant L(\tau,(\mathbb{R}_+, d\mu^{((d-2)/2,-1/2)}))$. Обратно, если функция $g(y)$ удовлетворяет условиям (24), то функция

$$g_0(\lambda) = Qg(\lambda) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} g(y)\,d\omega(\xi)$$

удовлетворяет условиям (25) и $L(\tau,\mathbb{H}^d) \geqslant L(\tau,(\mathbb{R}_+, d\mu^{((d-2)/2,-1/2)}))$. Следовательно, $L(\tau, \mathbb{H}^d) = L(\tau,(\mathbb{R}_+, d\mu^{((d-2)/2,-1/2)}))$. Отсюда и из теоремы 7 вытекает теорема.

Теорема 8. *Пусть* $\tau > 0$, $\alpha = (d-2)/2$, $\beta = -1/2$, $\lambda_1(\tau/2) = \lambda_1$, $\lambda_2(\tau/2) = \lambda_2$. *Тогда во второй задаче Логана*

$$L(\tau, \mathbb{H}^d) = \lambda_2,$$

единственная с точностью до положительного множителя экстремальная функция имеет вид

$$g_\tau(y) = g_{\tau,0}(\lambda) = \frac{(\varphi^{((d-2)/2,-1/2)}(\tau/2, \lambda))^2}{(\lambda_1^2 - \lambda^2)(\lambda_2^2 - \lambda^2)}, \quad y = (\lambda, \xi).$$

6. Заключение

В работе решена вторая задача Логана для преобразования Фурье по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля на полупрямой с достаточно общими весами, для преобразования Данкля на евклидовом пространстве с весом Данкля и преобразования Фурье на гиперболоиде.

Интересно было бы результаты работы распространить на случай многомерного преобразования Фурье по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля с весом $w(x) = \prod_{j=1}^d w_j(x_j)$, $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d_+$. Отметим, что для этого веса пока не решена и первая задача Логана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Logan B. F. Extremal problems for positive-definite bandlimited functions. I. Eventually positive functions with zero integral // SIAM J. Math. Anal. 1983. Vol. 14, № 2. P. 249–252.

2. Logan B. F. Extremal problems for positive-definite bandlimited functions. II. Eventually negative functions // SIAM J. Math. Anal. 1983. Vol. 14, № 2. P. 253–257.

3. Горбачев Д. В. Экстремальные задачи для целых функций экспоненциального сферического типа // Математические заметки. 2000. Т. 68, № 2. С. 179–187.

4. Черных Н. И. О неравенстве Джексона в L_2 // Труды МИАН. 1967. Т. 88. С. 71–74.

5. Юдин В. А. Многомерная теорема Джексона в L_2 // Математические заметки. 1981. Т. 29, № 2. С. 158–162.

6. Бердышева Е. Е. Две взаимосвязанные экстремальные задачи для целых функций многих переменных // Математические заметки. 1999. Т. 66, № 3. С. 336–350.

7. Иванов А. В. Некоторые экстремальные задачи для целых функций в весовых пространствах // Известия Тул. гос. ун-та. Сер.: Естественные науки. 2010. Вып. 1. С. 26–44.

8. Gorbachev D. V., Ivanov V. I. Some extremal problems for Fourier transform on hyperboloid // Math. Notes. 2017. Vol. 102, № 4. P. 480–491.

9. Некоторые экстремальные задачи гармонического анализа и теории приближений / Д. В. Горбачев [и др.]. // Чебышевский сборник. 2017. Т. 18, № 4. С. 139–166.

10. Frappier C., Olivier P. A quadrature formula involving zeros of Bessel functions // Math. Comp. 1993. Vol. 60. P. 303–316.

11. Grozev G. R., Rahman Q. I. A quadrature formula with zeros of Bessel functions as nodes // Math. Comp. 1995. Vol. 64. P. 715–725.

12. Горбачев Д. В., Иванов В. И. Квадратурные формулы Гаусса и Маркова по нулям собственных функций задачи Штурма–Лиувилля, точные для целых функций экспоненциального типа // Математический сб. 2015. Т. 206, № 8. С. 63–98.

13. Горбачев Д. В., Иванов В. И. Некоторые экстремальные задачи для преобразования Фурье по собственным функциям оператора Штурма–Лиувилля // Чебышевский сборник. 2017. Т. 18, № 2. С. 34–53.

14. Arestov V. V., Chernykh N. I. On the L_2-approximation of periodic functions by trigonometric polynomials // Approximation and functions spaces: Proc. intern. conf. (Gdansk, 1979). Amsterdam: North-Holland, 1981. P. 25—43.

15. Иванов А. В., Иванов В. И. Оптимальные аргументы в неравенстве Джексона в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$ со степенным весом // Математические заметки. 2013. Т. 94, № 3. С. 338—348.

16. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Veprintsev R. A. Optimal Argument in Sharp Jackson's inequality in the Space L_2 with the Hyperbolic Weight // Math. Notes. 2014. Vol. 96, № 6. P. 338–348.

17. Вепринцев Р.А. Приближение в L_2 частичными интегралами многомерного преобразования Якоби // Математические заметки. 2015. Т. 97, № 6. С. 815—831.

18. Горбачев Д. В., Иванов В. И. Приближение в L_2 частичными интегралами преобразования Фурье по собственным функциям оператора Штурма–Лиувилля // Математические заметки. 2016. Т. 100, № 4. С. 519–530.

19. Горбачев Д. В., Иванов В. И., Вепринцев Р.А. Приближение в L_2 частичными интегралами многомерного преобразования Фурье по собственным функциям оператора Штурма—Лиувилля // Труды ИММ УрО РАН. 2016. Т. 22, № 4. С. 136–152.

20. Горбачев Д. В., Странковский С. А. Одна экстремальная задача для четных положительно определенных целых функций экспоненциального типа // Математические заметки. 2006. Т. 80, № 5. С. 712–717.

21. Иванов В. И., Иванов А. В. Оптимальные аргументы в неравенстве Джексона–Стечкина в $L_2(\mathbb{R}^d)$ с весом Данкля // Математические заметки. 2014. Т. 96, № 5. С. 674–686.

22. Ivanov V., Ivanov A. Generalized Logan's Problem for Entire Functions of Exponential Type and Optimal Argument in Jackson's Inequality in $L_2(\mathbb{R}^3)$ // Acta. Math. Sin., English Ser. First Online: 28 April 2018.

23. Горбачев Д. В. Избранные задачи теории функций и теории приближений и их приложения. Тула: Гриф и К, 2005. 192 с.

24. Юдин В. А. Расположение точек на торе и экстремальные свойства полиномов // Труды МИАН. 1997. Т. 219. С. 453–463.

25. Левитан Б. М., Саргсян И. С. Введение в спектральную теорию. М.: Наука, 1970. 671 с.

26. Левитан Б. М., Саргсян И. С. Операторы Штурма–Лиувилля и Дирака. М.: Наука, 1988. 432 с.

27. Flensted-Jensen M., Koornwinder T. H. The convolution structure for Jacobi function expansions // Ark. Mat. 1973. Vol. 11. P. 245–262.

28. Flensted-Jensen M., Koornwinder T. H. Jacobi functions: The addition formula and the positivity of dual convolution structure // Ark. Mat. 1979. Vol. 17. P. 139–151.

29. Левитан Б. М. Теория операторов обобщенного сдвига. М.: Наука, 1973. 312 с.

30. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. М.: Гостехиздат, 1956. 632 с.

31. Rösler M. A positive radial product formula for the Dunkl kernel // Trans. Amer. Math. Soc. 2003. Vol. 355, № 6. P. 2413–2438.

32. Rösler M. Dunkl Operators: Theory and Applications // Lecture Notes in Math. Berlin: Springer, 2003. Vol. 1817. P. 93–135.

33. de Jeu M. Paley – Wiener theorems for the Dunkl transform // Trans. Amer. Math. Soc. 2006. Vol. 358, № 10. P. 4225–4250.

34. Xu Y. Dunkl operators: Funk-Hecke formula for orthogonal polynomials on spheres and on balls // Bull. London Math. Soc. 2000. Vol. 32. P. 447–457.

35. Виленкин Н. Я. Специальные функции и теория представлений групп. М.: Наука, 1991. 576 с.

36. Koornwinder T. H. A new proof of a Paley–Wiener type theorem for the Jacobi transform // Ark. Mat. 1979. Vol. 13. P. 145–159.

REFERENCES

1. Logan, B. F. 1983, “Extremal problems for positive-definite bandlimited functions. I. Eventually positive functions with zero integral”, *SIAM J. Math. Anal.*, vol. 14, no. 2, pp. 249–252.

2. Logan, B. F. 1983, “Extremal problems for positive-definite bandlimited functions. II. Eventually negative functions”, *SIAM J. Math. Anal.*, vol. 14, no. 2, pp. 253–257.

3. Gorbachev, D. V. 2000, “Extremum problems for entire functions of exponential spherical type”, *Math. Notes*, vol. 68, no. 2, pp. 159–166.

4. Chernykh, N. I. 1967, “On Jackson’s inequality in L_2”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 88, pp. 75–78.

5. Yudin, V. A. 1976 “The multidimensional Jackson theorem”, *Math. Notes*, vol. 20, no. 3, pp. 801–804.

6. Berdysheva, E. E. 1999, “Two related extremal problems for entire functions of several variables”, *Math. Notes*, vol. 66, no. 3, pp. 271–282.

7. Ivanov, A. V. 2010, “Some extremal problem for entire functions in weighted spaces”, *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no. 1, pp. 26–44. [in Russian]

8. Gorbachev, D. V., Ivanov, V. I. 2017, “Some extremal problems for Fourier transform on hyperboloid”, *Math. Notes*, vol. 102, no. 4, pp. 480–491.

9. Gorbachev, D. V., Ivanov, V. I., Ofitserov E.¶., Smirnov O. I. 2017, “Some extremal problems of harmonic analysis and approximation theory”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 18, no. 4, pp. 139–166. [in Russian]

10. Frappier, C., Olivier, P. 1993, "A quadrature formula involving zeros of Bessel functions", *Math. Comp.*, vol. 60, pp. 303–316.

11. Grozev, G. R., Rahman, Q. I. 1995, "A quadrature formula with zeros of Bessel functions as nodes", *Math. Comp.*, vol. 64, pp. 715–725.

12. Gorbachev, D. V., Ivanov, V. I. 2015, "Gauss and Markov quadrature formulae with nodes at zeros of eigenfunctions of a Sturm–Liouville problem, which are exact for entire functions of exponential type", *Sbornik: Math.*, vol. 206, no. 8, pp. 1087–1122.

13. Gorbachev, D. V., Ivanov, V. I. 2017, "Some extremal problems for the Fourier transform over eigenfunctions of the Sturm–Liouville operator", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 18, no. 4, pp. 139–166. [in Russian]

14. Arestov, V. V., Chernykh, N. I. 1981, "On the L_2-approximation of periodic functions by trigonometric polynomials", Approximation and functions spaces: Proc. intern. conf., Gdansk, 1979. Amsterdam: North-Holland, pp. 25—43.

15. Ivanov, A. V., Ivanov, V. I. 2013, "Optimal arguments in Jackson's inequality in the power-weighted space $L_2(\mathbb{R}^d)$", *Math. Notes*, vol. 94, no. 3, pp. 320–329.

16. Gorbachev, D. V., Ivanov, V. I., Veprintsev R. A. 2014, "Optimal Argument in Sharp Jackson's inequality in the Space L_2 with the Hyperbolic Weight", *Math. Notes*, vol. 96, no. 6, pp. 338–348.

17. Veprintsev, R. A. 2015, "Approximation in L_2 by partial integrals of the multidimensional Jacobi transform", *Math. Notes*, vol. 97, no. 6, pp. 815–831.

18. Gorbachev, D. V., Ivanov, V. I. 2016, "Approximation in L_2 by partial integrals of the Fourier transform over the eigenfunctions of the Sturm–Liouville operator", *Math. Notes*, vol. 100, no. 4, pp. 540–549.

19. Gorbachev, D. V., Ivanov, V. I., Veprintsev, R. A. 2016, "Approximation in L_2 by partial integrals of the multidimensional Fourier transform over the eigenfunctions of the Sturm–Liouville operator", *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, vol. 22, no. 4, pp. 136–152. [in Russian]

20. Gorbachev, D. V., Strankovskii, S. A. 2006, "An extremal problem for even positive definite entire functions of exponential type", *Math. Notes*, vol. 80, no. 5, pp. 673–678.

21. Ivanov, V. I., Ivanov, A. V. 2014, "Optimal arguments in the Jackson-Stechkin inequality in $L_2(\mathbb{R}^d)$ with Dunkl weight", *Math. Notes*, vol. 96, no. 5, pp. 666–677.

22. Ivanov, V., Ivanov, A. 2018, "Generalized Logan's Problem for Entire Functions of Exponential Type and Optimal Argument in Jackson's Inequality in $L_2(\mathbb{R}^3)$", *Acta. Math. Sin.-English Ser.*, First Online: 28 April 2018.

23. Gorbachev, D. V. 2005, "Selected Problems in the Theory of Functions and Approximation Theory: Their Applications", *Tula: Grif and K*, 192 p. [in Russian]

24. Yudin, V. A. 1997 "Disposition of Points on a Torus and Extremal Properties of Polynomials ", *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 219, pp. 447–457.

25. Levitan, B. M., Sargsyan, I. S. 1970, "Introduction to spectral theory", *Moscow, Nauka*, 671 p. [in Russian]

26. Levitan, B. M., Sargsyan, I. S. 1988, "Sturm–Liouville and Dirac Operators", *Moscow, Nauka*, 432 p. [in Russian]

27. Flensted-Jensen, M., Koornwinder, T. H. 1973, "The convolution structure for Jacobi function expansions", *Ark. Mat.*, vol. 11, pp. 245–262.

28. Flensted-Jensen, M., Koornwinder, T. H. 1979, "Jacobi functions: The addition formula and the positivity of dual convolution structure", *Ark. Mat.*, vol. 17, pp. 139–151.

29. Levitan, B. M. 1973, "Theory of generalized translation operators", *Moscow, Nauka*, 312 p. [in Russian]

30. Levin, B. Ya. 1956, "Distribution of Roots of Entire Functions", *Moscow, Gostekhizdat*, 632 p. [in Russian]

31. Rösler, M. 2003, "A positive radial product formula for the Dunkl kernel", *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 355, no. 6, pp. 2413–2438.

32. Rösler, M., 2003, "Dunkl Operators: Theory and Applications", *Lecture Notes in Math., Berlin: Springer*, vol. 1817, pp. 93–135.

33. de Jeu, M. 2006, "Paley – Wiener theorems for the Dunkl transform", *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 358, no. 10. pp. 4225–4250.

34. Xu, Y. 2000, "Dunkl operators: Funk-Hecke formula for orthogonal polynomials on spheres and on balls", *Bull. London Math. Soc.*, vol. 32, pp. 447–457.

35. Vilenkin, N. J. 1968, "Special Functions and the Theory of Group Representations", *Providence, RI: Amer. Math. Soc.*, Translations of mathematical monographs, vol. 22, 613 p.

36. Koornwinder, T. 1979, "A new proof of a Paley–Wiener type theorem for the Jacobi transform", *Ark. Mat.*, vol. 13, pp. 145–159.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 19. Выпуск 1

УДК 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-1-79-105

О моноидах натуральных чисел с однозначным разложением на простые элементы[1]

Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры прикладной математики и информатики, Тульский государственного университет.
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Аннотация

В работе продолжены исследования нового класса рядов Дирихле — дзета-функций моноидов натуральных чисел. Изучаются обратные ряды Дирихле для дзета-функций моноидов натуральных чисел с однозначным разложением на простые элементы и для дзета-функций множеств простых элементов моноидов с однозначным разложением на простые элементы.

Для любого $\beta > 1$ построены примеры рядов Дирихле, у которых абсцисса абсолютной сходимости $\sigma = \frac{1}{\beta}$. И для любого натурального $\beta > 1$ построены примеры пары дзета-функций $\zeta(B|\alpha)$ и $\zeta(A_{B,\beta}|\alpha)$ с равенством $\sigma_{A_{B,\beta}} = \frac{\sigma_B}{\beta}$.

Определено понятие сходимости последовательности множеств натуральных чисел. Доказано, что соответствующая последовательность дзета-функций этих множеств натуральных чисел будет равномерно сходиться в подходящей правой полуплоскости к дзета-функции предельного множества.

Рассматриваются различные примеры моноидов и соответствующих дзета-функций моноидов. Получены ряд свойств дзета-функций моноидов натуральных чисел с однозначным разложением на простые множители.

Найден явный вид обратного ряда к дзета-функции множества простых чисел, дополненного единицей. Найден явный вид отношения дзета-функции Римана к дзета-функции множества простых чисел, дополненного единицей.

Рассмотрены вложенные последовательности моноидов, порожденные простыми числами. Для дзета-функций этих моноидов сформулирован принцип вложенности, который позволяет переносить результаты о коэффициентах одних дзета-функций на коэффициенты других дзета-функций.

В работе удалось впервые описать общий вид всех моноидов натуральных чисел с однозначным разложением на простые множители.

В заключении рассмотрены актуальные задачи с дзета-функциями моноидов натуральных чисел, требующие дальнейшего исследования.

Ключевые слова: дзета-функция Римана, ряд Дирихле, дзета-функция моноида натуральных чисел, эйлерово произведение.

Библиография: 18 названий.

Для цитирования:
Н. Н. Добровольский. О моноидах натуральных чисел с однозначным разложением на простые элементы // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, вып. 1, С. 106–123.

[1]Работа подготовлена по гранту РФФИ №16-41-710194_р_центр_а

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 19. No. 1

UDC 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-1-79-105

On monoids of natural numbers with unique factorization into prime elements

Dobrovolsky Nikolai Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, assistant of the department of applied mathematics and computer science, Tula State University.
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Abstract

The paper continues research on a new class of Dirichlet series — zeta functions of monoids of natural numbers. The inverse Dirichlet series for zeta functions of monoids of natural numbers with unique factorization into prime elements and for zeta-functions of sets of prime elements of monoids with unique factorization into prime elements are studied.

For any $\beta > 1$ examples of Dirichlet series with an abscissa of absolute convergence $\sigma = \frac{1}{\beta}$ are constructed. For any natural $\beta > 1$ examples of a pair of zeta functions $\zeta(B|\alpha)$ and $\zeta(A_{B,\beta}|\alpha)$ with the equality $\sigma_{A_{B,\beta}} = \frac{\sigma_B}{\beta}$ are constructed.

Various examples of monoids and corresponding zeta functions of monoids are considered. A number of properties of the zeta functions of monoids of natural numbers with unique factorization into prime factors are obtained.

An explicit form of the inverse series to the zeta-function of the set of primes supplemented by one is found. An explicit form of the ratio of the Riemann zeta-function to the zeta-function of the set of primes supplemented by one is found.

Nested sequences of monoids generated by primes are considered. For the zeta-functions of these monoids the nesting principle is formulated, which allows to transfer the results about the coefficients of one zeta-functions to the coefficients of other zeta-functions.

In this paper the general form of all monoids of natural numbers with unique factorization into prime factors was described for the first time.

In conclusion, topical problems for zeta-functions of monoids of natural numbers that require further study are considered.

Keywords: Riemann zeta function, Dirichlet series, zeta function of monoid of natural numbers, Euler product.

Bibliography: 18 titles.

For citation:
N. N. Dobrovol'skii, 2018, "On monoids of natural numbers with unique factorization into prime elements" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 1, pp. 106–123.

1. Введение 81
2. Обращение дзета-функций произвольных множеств натуральных чисел 82
3. Дзета-функция множества простых чисел 86
4. Вложенные последовательности моноидов, порожденные простыми числами 89
5. Примеры моноидов с однозначным разложением на простые элементы 93
6. Дзета-функция множества простых элементов моноида 97
7. Общий вид моноида натуральных чисел с однозначным разложением на простые элементы 99
8. Заключение 103
Список цитированной литературы 103

1. Введение

В данной работе продолжаются исследования из работы [8] и сохраняются обозначения и определения из этой работы.

Будем через $\mathbb{P}_{3,1}$ и $\mathbb{P}_{3,2}$ обозначать множество всех простых чисел вида $3n+1$ и $3n+2$, соответственно. Таким образом, мы имеем:

$$\mathbb{P}_{3,1} = \{7, 13, 19, 31, 37, 43, 61, 67, 73, 79, 97, \ldots\},$$
$$\mathbb{P}_{3,2} = \{2, 5, 11, 17, 23, 29, 41, 47, 53, 59, 71, 83, 89, \ldots\}$$

и согласно теореме Дирихле о простых в арифметической прогрессии множества простых $\mathbb{P}_{3,1}$ и $\mathbb{P}_{3,2}$ — бесконечные множества.

Рассмотрим мультипликативные функции $\chi_{3,1}(n)$ и $\chi_{3,2}(n)$, заданные равенствами

$$\chi_{3,1}(n) = \begin{cases} 1, & \text{при } n = p^\alpha,\ p = 3m+1,\ \alpha \geqslant 0, \\ 0, & \text{при } n = p^\alpha,\ p = 3, 3m+2,\ \alpha \geqslant 1, \\ \prod_{p|n} \chi_{3,1}(p^{\alpha_p}), & \text{при } n = \prod_{p|n} p^{\alpha_p}; \end{cases}$$

.

$$\chi_{3,2}(n) = \begin{cases} 1, & \text{при } n = p^\alpha,\ p = 3m+2,\ \alpha \geqslant 0, \\ 0, & \text{при } n = p^\alpha,\ p = 3, 3m+1,\ \alpha \geqslant 1, \\ \prod_{p|n} \chi_{3,2}(p^{\alpha_p}), & \text{при } n = \prod_{p|n} p^{\alpha_p}. \end{cases}$$

.

Основными объектами исследования в данной работе будут моноиды $M_{3,1}$, $M_{3,1,1}$, $M_{3,1,2}$ и $M_{3,1,2,0}$, заданные равенствами

$$M_{3,1} = \{n = 3k+1 | k \geqslant 0\}, \quad M_{3,1,1} = \{n = 3k+1 | \chi_{3,1}(n) = 1\},$$
$$M_{3,1,2} = \{n = 3k+1 | \chi_{3,2}(n) = 1\}, \quad M_{3,1,2,0} = \{n \in M_{3,1,2} | n \neq p^\alpha\}.$$

Ясно, что $M_{3,1} = M_{3,1,1} \cdot M_{3,1,2}$, поэтому $\zeta(M_{3,1}|\alpha) = \zeta(M_{3,1,1}|\alpha) \cdot \zeta(M_{3,1,2}|\alpha)$.

Нетрудно описать $P(M)$ — множество простых элементов для этих моноидов.

$$P(M_{3,1,1}) = \mathbb{P}_{3,1}.$$

$P(M_{3,1,2}) = \mathbb{P}_{3,2} \cdot \mathbb{P}_{3,2}$ и состоит из псевдопростых чисел вида $p_1 p_2$, где p_1, p_2 — произвольные простые числа вида $3m+2$. В частности, в это множество псевдопростых чисел входят квадраты простых.

Множество простых элементов $P(M_{3,1,2,0})$ состоит из псевдопростых чисел вида $p_1 p_2$, где p_1, p_2 — произвольные различные простые числа вида $3m+2$.

Таким образом, $P(M_{3,1,2,0}) \subset P(M_{3,1,2})$ и в $P(M_{3,1,2,0})$ не входят квадраты простых.
Ясно, что $P(M_{3,1}) = \mathbb{P}_{3,1} \bigcup (\mathbb{P}_{3,2} \cdot \mathbb{P}_{3,2})$.
Обозначим через $P(M|\alpha)$ эйлерово произведение:

$$P(M|\alpha) = \prod_{r \in P(M)} \left(1 - \frac{1}{r^\alpha}\right)^{-1},$$

тогда для произвольного моноида M натуральных чисел с однозначным разложением на простые элементы справедливо равенство

$$\zeta(M|\alpha) = P(M|\alpha).$$

В частности,

$$\zeta(M_{3,1,1}|\alpha) = P(M_{3,1,1}|\alpha).$$

Будем называть каноническим разложением элемента x из мультипликативного моноида M натуральных чисел представление вида

$$x = r_1^{\alpha_1} \dots r_k^{\alpha_k}, \quad 1 < r_1 < \dots < r_k, \quad r_1, \dots, r_k \in P(M).$$

Через $k(x)$ будем обозначать количество различных канонических представлений числа x, тогда эйлерово произведение $P(M|\alpha)$ будет раскладываться в следующий ряд Дирихле

$$P(M|\alpha) = \sum_{x \in M} \frac{k(x)}{x^\alpha}.$$

Таким образом, равенство эйлерова произведения и дзета-функции моноида M равносильно однозначности разложения на простые элементы в этом моноиде.

Так как в моноиде $M_{3,1,2}$ нет однозначности разложения на простые элементы, то

$$\zeta(M_{3,1,2}|\alpha) \neq P(M_{3,1,2}|\alpha).$$

Цель данной статьи — описать моноиды натуральных чисел с однозначным разложением на простые элементы, изучить их свойства, дзета-функции этих моноидов натуральных чисел и найти их обратные ряды Дирихле.

2. Обращение дзета-функций произвольных множеств натуральных чисел

Для произвольного непустого множества A натуральных чисел рассмотрим дзета-функцию $\zeta(A|\alpha)$, заданную равенством

$$\zeta(A|\alpha) = \sum_{x \in A} \frac{1}{x^\alpha} \quad (\alpha = \sigma + it,\ \sigma > \sigma_A), \tag{1}$$

где $\sigma_A \leqslant 1$ — абсцисса сходимости дзета-ряда, и через $\zeta^*(A|\alpha)$ обозначается обратный ряд, то есть $\zeta^*(A|\alpha) = \zeta^{-1}(A|\alpha)$.

Если A — конечное множество натуральных чисел, то дзета-функция $\zeta(A|\alpha)$ задается конечной суммой, которая определяет аналитическую функцию на всей комплексной α-плоскости, поэтому $\sigma_A = -\infty$.

Если A — бесконечное множество натуральных чисел, то ряд для дзета-функция $\zeta(A|\alpha)$ при $\alpha = 0$ расходится, поэтому $\sigma_A \geqslant 0$. По теореме Ландау (см. [15], стр. 156) в точке $\alpha = \sigma_A$ будет особая точка дзета-функции $\zeta(A|\alpha)$.

Пусть $\beta > 1$ и множество натуральных чисел $A_{\mathbb{N},\beta}$ имеет вид

$$A_{\mathbb{N},\beta} = \left\{ \left[n^\beta\right] \middle| \, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Лемма 1. *Для любого натурального n справедливо неравенство $\left[n^\beta\right] < \left[(n+1)^\beta\right]$.*

Доказательство. Рассмотрим при $\beta \geqslant 1$ функцию $f(\beta) = (n+1)^\beta - n^\beta$. Так как $f'(\beta) = (n+1)^\beta \ln(n+1) - n^\beta \ln n > 0$, то при $\beta > 1$ имеем $f(\beta) > f(1) = 1$. Отсюда следует, что $\left[(n+1)^\beta\right] > n^\beta$ и, следовательно, $\left[n^\beta\right] < \left[(n+1)^\beta\right]$, что и требовалось доказать. □

Теорема 1. *Для $\beta > 1$ и дзета-функции $\zeta(A_{\mathbb{N},\beta}|\alpha)$ справедливо равенство $\sigma_{A_{\mathbb{N},\beta}} = \frac{1}{\beta}$.*

Доказательство. Из доказательства предыдущей леммы следует, что

$$\zeta(\beta\sigma) - \frac{1}{2^{\beta\sigma}} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{\beta\sigma}} < \zeta(A_{\mathbb{N},\beta}|\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{[n^\beta]^\sigma} < 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)^{\beta\sigma}} = 1 + \zeta(\beta\sigma).$$

Так как ряд для $\zeta(\beta\sigma)$ сходится при $\beta\sigma > 1$ и расходится при $\beta\sigma \leqslant 1$, то утверждение теоремы доказано. □

Доказанная теорема допускает следующее частичное обобщение. Пусть B — произвольное множество натуральных чисел с единицей и $\beta > 1$ — натуральное число. Определим множество натуральных чисел $A_{B,\beta}$ равенством

$$A_{B,\beta} = \left\{ n^\beta \middle| \, n \in B \right\}.$$

Теорема 2. *Для натурального $\beta > 1$ и дзета-функции $\zeta(A_{B,\beta}|\alpha)$ справедливо равенство $\sigma_{A_{B,\beta}} = \frac{\sigma_B}{\beta}$.*

Доказательство. Действительно,

$$\zeta(B|\beta\sigma) = \sum_{n \in B} \frac{1}{n^{\beta\sigma}} = \sum_{m \in A_{B,\beta}} \frac{1}{m^\sigma} = \zeta(A_{B,\beta}|\sigma).$$

Так как ряд для $\zeta(B|\beta\sigma)$ сходится при $\beta\sigma > \sigma_B$ и расходится при $\beta\sigma \leqslant \sigma_B$, то утверждение теоремы доказано. □

Нетрудно понять, что если $1 \in A$, то

$$\zeta^*(A|\alpha) = \sum_{n \in M(A)} \frac{x_A(n)}{n^\alpha}, \tag{2}$$

где коэффициенты $x_A(n)$ удовлетворяют соотношениям

$$x_A(1) = 1, \quad \sum_{m|n,\, m \in A} x_A\left(\frac{n}{m}\right) = 0 \quad (n \in M(A), n > 1) \tag{3}$$

и $M(A)$ — минимальный моноид, порожденный множеством A.

Обозначим через $\sigma_{A,1}$ число, такое что для $A^* = A \setminus \{1\}$ и

$$S(A,\alpha) = \sum_{n\in A^*} \frac{1}{n^\alpha}$$

выполнено $|S(A,\alpha)| < 1$ при $\sigma > \sigma_{A,1}$, тогда

$$\zeta^{-1}(A|\alpha) = \frac{1}{1+S(A,\alpha)} = \sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu S^\nu(A,\alpha) =$$

$$= 1 - \sum_{n\in A^*}\frac{1}{n^\alpha} + \sum_{\nu=2}^{\infty}(-1)^\nu \sum_{n_1,\ldots,n_\nu\in A^*}\frac{1}{(n_1\ldots n_\nu)^\alpha} = \sum_{n\in M(A)}\frac{x_A(n)}{n^\alpha}$$

и для $x_A(n)$ выполнены соотношения

$$x_A(1) = 1, \quad x_A(n) = \sum_{\nu\geqslant 1}(-1)^\nu y_\nu(n) \quad n \in M^*(A^*),$$

где $y_\nu(n)$ — количество решений уравнения $n = n_1\ldots n_\nu$ в натуральных $n_1,\ldots,n_\nu \in A^*$. Ясно, что $M(A) = M^*(A^*)\bigcup\{1\}$.

Таким образом, если σ_A^* определяет правую полуплоскость $\sigma > \sigma_A^*$ абсолютной сходимости обратного ряда $\zeta^*(A|\alpha)$, то $\sigma_A^* \leqslant \sigma_{A,1}$.

Определим последовательно следующие множества натуральных чисел:

$$\mathbb{N}_1(A^*) = A^*, \quad \mathbb{N}_{\nu+1}(A^*) = \mathbb{N}_\nu(A^*)\cdot A^* \quad (\nu \geqslant 1).$$

Моноид $M(A)$ называется свободным, если $\mathbb{N}_\nu(A^*)\bigcap\mathbb{N}_\mu(A^*) = \emptyset$ для любых $\nu \neq \mu$.

Лемма 2. *Если $M(A)$ — свободный моноид, то $P(M(A)) = A^*$.*

Доказательство. Действительно, если найдется элемент $a \in A^*$ такой, что

$$a = r_1\cdot r_2\cdot\ldots\cdot r_\nu \quad (\nu\geqslant 2),$$

то $a \in \mathbb{N}_\nu(A^*)$ и $\mathbb{N}_\nu(A^*)\bigcap\mathbb{N}_1(A^*) \neq \emptyset$, что доказывает утверждение леммы. □

Лемма 3. *Для любого множества A натуральных чисел, для которого $M(A)$ — свободный моноид, справедливы соотношения*

$$S(A,\sigma_{A,1}) = 1, \quad \sigma_A^* = \sigma_{A,1}.$$

Доказательство. Действительно, так как $S(A,\sigma)$ монотонно убывает при росте σ, то найдётся $\sigma_{A,1} \geqslant 0$ такое, что $S(A,\sigma_{A,1}) = 1$. Очевидно, что при $\sigma > \sigma_{A,1}$ будет выполнено неравенство $|S(A,\alpha)| < 1$. Тем самым доказано первое утверждение леммы.

Далее заметим, что при $\sigma > \sigma_{A,1}$ выполняется равенство

$$\frac{1}{1-S(A,\alpha)} = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} S^\nu(A,\alpha).$$

Так как $M(A)$ — свободный моноид, то

$$M(A) = \{1\}\bigcup\left(\bigcup_{\nu=1}^{\infty}\mathbb{N}_\nu(A^*)\right)$$

и

$$\frac{1}{1+S(A,\alpha)} = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu} \sum_{n\in\mathbb{N}_{\nu}(A^*)} \frac{y_{\nu}(n)}{n^{\alpha}},$$

$$\frac{1}{1-S(A,\alpha)} = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n\in\mathbb{N}_{\nu}(A^*)} \frac{y_{\nu}(n)}{n^{\alpha}}.$$

Отсюда следует, что если ряд для $\frac{1}{1+S(A,\sigma)}$ сходится абсолютно, то и ряд для $\frac{1}{1-S(A,\sigma)}$ сходится. Так как ряд для $\frac{1}{1-S(A,\sigma)}$ при $\sigma = \sigma_{A,1}$ расходится, то следовательно $\sigma_A^* = \sigma_{A,1}$ и лемма полностью доказана. □

Лемма 4. *Для любого множества A натуральных чисел справедливо неравенство*

$$\sigma_{A,1} < 2.$$

Доказательство. Действительно, для $\alpha = \sigma + it$ справедливы неравенства

$$|S(A,\alpha)| \leqslant S(A,\sigma) \leqslant S(\mathbb{N},\sigma).$$

Далее имеем

$$S(\mathbb{N},2) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \zeta(2) - 1 = \frac{\pi^2}{6} - 1 < 1,$$

что и доказывает утверждение леммы. □

Пусть имеется бесконечная вложенная последовательность множеств натуральных чисел с единицей:

$$\{1\} \subset A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots \subset A. \tag{4}$$

Определение 1. *Будем говорить, что бесконечная последовательность (4) сходится к A:*

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A,$$

если для любого натурального T найдется натуральное $n(T)$ такое, что для любого $n \geqslant n(T)$ выполняется равенство

$$[1;T] \bigcap A_n = [1;T] \bigcap A.$$

Теорема 3. *Для любой сходящейся последовательности (4) выполняются соотношения*

$$\sigma_{A_1} \leqslant \sigma_{A_2} \leqslant \ldots \leqslant \sigma_{A_n} \leqslant \ldots \leqslant \sigma_A \tag{5}$$

и

$$\lim_{n\to\infty} \zeta(A_n|\alpha) = \zeta(A|\alpha) \tag{6}$$

равномерно сходится в любой α-полуплоскости $\sigma \geqslant \sigma_0 > \sigma_A$.

Доказательство. Действительно, из определения сходимости следует, что для любого $\varepsilon > 0$ и $\sigma_0 > \sigma_A$ найдётся натуральное $T(\varepsilon,\sigma_0)$ такое, что для любого $T \geqslant T(\varepsilon,\sigma_0)$ выполняется

$$0 \leqslant \zeta(A,T|\sigma_0) = \sum_{n\in A, n>T} \frac{1}{n^{\sigma_0}} < \varepsilon.$$

Отсюда следует, что для любого натурального $n \geqslant n(T)$ выполняются неравенства

$$0 \leqslant \zeta(A|\sigma_0) - \zeta(A_n|\sigma_0) \leqslant \zeta(A,T|\sigma_0) < \varepsilon,$$

что доказывает равномерную сходимость предела (6). Соотношения (5) очевидны. □

3. Дзета-функция множества простых чисел

В работе [8] важную роль играл ряд Дирихле

$$L(\alpha)=\sum_p \frac{1}{p^\alpha},$$

через который выражается логарифм дзета-функции

$$\ln\zeta(\alpha)=L(\alpha)+\theta_1(\alpha)\quad(\sigma>1),\quad \theta_1(\alpha)=\sum_p\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{np^{n\alpha}}.$$

Если $\mathbb{P}$ — множество всех простых, то $L(\alpha)=\zeta(\mathbb{P}|\alpha)$.

Будем через $\mathbb{P}_0$ обозначать множество простых дополненное 1. Тогда $\zeta(\mathbb{P}_0|\alpha)=1+\zeta(\mathbb{P}|\alpha)$. Так как согласно лемме 4 $|\zeta(\mathbb{P}|\alpha)|<1$ при $\sigma\geqslant 2$, то справедливо равенство

$$\zeta^*(\mathbb{P}_0|\alpha)=1+\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^\nu\zeta^\nu(\mathbb{P}|\alpha)\quad(\sigma>\sigma^*_{\mathbb{P}_0}),\quad 1<\sigma^*_{\mathbb{P}_0}<2.$$

Пусть $\nu(n)$ — количество различных простых делителей числа n, а $V(n)$ — общее число простых делителей числа n с учётом их кратности. Таким образом, если $n=\prod\limits_{j=1}^{\nu(n)}p_j^{\alpha_j}$ — каноническое разложение числа n на простые множители $1<p_1<\ldots<p_{\nu(n)}$, то $V(n)=\sum\limits_{j=1}^{\nu(n)}\alpha_j$.

Функция $\nu(n)$ является аддитивной арифметической функцией, так как для любых взаимно простых n и m имеем $\nu(nm)=\nu(n)+\nu(m)$. Функция $V(n)$ является вполне аддитивной арифметической функцией, так как для любых натуральных n и m имеем $V(nm)=V(n)+V(m)$.

Обозначим через $\mathbb{N}_\nu$ $(\nu\geqslant 0)$ множество всех натуральных чисел n с $V(n)=\nu$. Ясно, что справедливо разбиение

$$\mathbb{N}=\bigcup_{\nu=0}^{\infty}\mathbb{N}_\nu,\quad \mathbb{N}_0=\{1\},\quad \mathbb{N}_\nu\bigcap\mathbb{N}_\mu=\emptyset\quad(\nu\neq\mu).\tag{7}$$

Нетрудно видеть, что

$$\mathbb{N}_1=\mathbb{P},\quad \mathbb{N}_\nu=\mathbb{N}_{\nu-1}\cdot\mathbb{P}\quad(\nu\geqslant 0).$$

Для дальнейшего нам потребуется ещё одна мультипликативная функция $\mathrm{rad}(n)$ — радикал натурального числа, которая определяется следующими условиями

$$\mathrm{rad}(n)|n,\quad \nu(n)=\nu(\mathrm{rad}(n)),\quad \nu(\mathrm{rad}(n))=V(\mathrm{rad}(n)).$$

Другими словами, если $n=\prod\limits_{p|n}p^{\alpha_p}$, то $\mathrm{rad}(n)=\prod\limits_{p|n}p$.

В силу разбиения (7) можно определить единую функцию $x(n)$ такую, что

$$\zeta^\nu(\mathbb{P}|\alpha)=\sum_{n\in\mathbb{N}_\nu}\frac{x(n)}{n^\alpha}\quad(\nu\geqslant 0).$$

Лемма 5. *Справедливы рекуррентные соотношения*

$$x(1)=1,\quad x(n)=\sum_{p|n}x\left(\frac{n}{p}\right)\quad(n>1).$$

Доказательство. Первое утверждение тривиально.

Пусть $\nu = 1$, тогда $\mathbb{N}_1 = \mathbb{P}$ и $x(p) = 1$ и утверждение леммы выполнено.

Пусть $\nu > 1$, тогда

$$\zeta^{\nu}(\mathbb{P}|\alpha) = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}_{\nu-1}} \frac{x(n)}{n^{\alpha}}\right) \sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p^{\alpha}} = \sum_{n\in\mathbb{N}_{\nu}} \frac{1}{n^{\alpha}} \sum_{p|n} x\left(\frac{n}{p}\right),$$

что и доказывает утверждение леммы. □

Лемма 6. *Справедливо равенство*

$$x(n) = \frac{(V(n))!}{\prod\limits_{p|n}(\alpha_p)!}.$$

Доказательство. Проведём индукцию по n.

При $n = 1$ утверждение леммы тривиально.

Пусть $n = m > 1$ и для всех $n < m$ утверждение леммы выполнено. Предположим, что $m = \prod\limits_{\nu=1}^{k} p_{\nu}^{\alpha_\nu}$, тогда по лемме 5 имеем:

$$x(n) = \sum_{\nu=1}^{k} x\left(\frac{n}{p_\nu}\right) = \sum_{\nu=1}^{k} \frac{(\alpha_1 + \ldots + \alpha_k - 1)!\alpha_\nu}{\prod\limits_{p|n}(\alpha_p)!} =$$

$$= \frac{(\alpha_1 + \ldots + \alpha_k - 1)!(\alpha_1 + \ldots + \alpha_k)}{\prod\limits_{p|n}(\alpha_p)!} = \frac{(V(n))!}{\prod\limits_{p|n}(\alpha_p)!},$$

что доказывает утверждение леммы. □

Теорема 4. *Справедливо равенство*

$$\zeta^{*}(\mathbb{P}_0|\alpha) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{V(n)} \frac{(V(n))!}{\prod\limits_{p|n}(\alpha_p)!}}{n^{\alpha}}.$$

Доказательство. Действительно,

$$\zeta^{*}(\mathbb{P}_0|\alpha) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu}\zeta^{\nu}(\mathbb{P}|\alpha) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu} \sum_{n\in\mathbb{N}_{\nu}} \frac{x(n)}{n^{\alpha}} =$$

$$= 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{V(n)}x(n)}{n^{\alpha}} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{V(n)} \frac{(V(n))!}{\prod\limits_{p|n}(\alpha_p)!} \cdot \frac{1}{n^{\alpha}},$$

что и доказывает утверждение теоремы. □

Обозначим через $\zeta(\mathbb{N}, \mathbb{P}_0|\alpha)$ отношение двух дзета-функций:

$$\zeta(\mathbb{N}, \mathbb{P}_0|\alpha) = \zeta(\alpha)\zeta^{-1}(\mathbb{P}_0|\alpha).$$

Обозначим коэффициенты соответствующего ряда Дирихле через $y(n)$:

$$\zeta(\mathbb{N}, \mathbb{P}_0|\alpha) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{y(n)}{n^{\alpha}}, \quad y(1) = 1. \tag{8}$$

Лемма 7. *Справедливо рекуррентное равенство*

$$y(n) = 1 - \sum_{p|n} y\left(\frac{n}{p}\right).$$

Доказательство. Действительно,

$$\zeta(\alpha) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n\in\mathbb{N}_\nu} \frac{1}{n^\alpha}, \quad \zeta(\mathbb{N},\mathbb{P}_0|\alpha) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n\in\mathbb{N}_\nu} \frac{y(n)}{n^\alpha}, \quad \zeta(\mathbb{P}_0|\alpha) = 1 + \sum_{n\in\mathbb{P}} \frac{1}{n^\alpha},$$

поэтому

$$\zeta(\mathbb{N}_\nu|\alpha) = \sum_{n\in\mathbb{N}_\nu} \frac{y(n)}{n^\alpha} + \left(\sum_{n\in\mathbb{N}_{\nu-1}} \frac{y(n)}{n^\alpha}\right) \zeta(\mathbb{P}|\alpha), \quad 1 = y(n) + \sum_{p|n} y\left(\frac{n}{p}\right),$$

что и доказывает утверждение леммы. □

Лемма 8. *Справедливо равенство*

$$y(p^\alpha) = \frac{1 + (-1)^\alpha}{2}.$$

Доказательство. Действительно,

$$y(p^\alpha) = 1 - y(p^{\alpha-1}),$$

поэтому

$$y(p) = 0, \quad y(p^2) = 1, \quad y(p^3) = 0, \ldots, y(p^\alpha) = \frac{1 + (-1)^\alpha}{2}, \ldots$$

что и доказывает утверждение леммы. □

Лемма 9. *Если $n = rad(n)$, то справедливы равенства*

$$y(n) = (-1)^{\nu(n)}(\nu(n))! \left(1 + \sum_{\mu=1}^{\nu(n)} \frac{(-1)^\mu}{\mu!}\right), \quad \lim_{\nu(n)\to\infty} \frac{y(n)(-1)^{\nu(n)}}{\nu(n)!} = \frac{1}{e}.$$

Доказательство. Действительно, если $n = \mathrm{rad}(n)$, то $n = p_1 p_2 \ldots p_{\nu(n)}$ и $p_\mu \neq p_\lambda$ при $\mu \neq \lambda$.

При $\nu(n) = 1$ имеем: $n = p$ и утверждение леммы справедливо в силу предыдущей леммы.

Далее проведём индукцию по величине $\nu(n)$, получим при $\nu(n) = m + 1$:

$$y(n) = 1 - (m+1)(-1)^m m! \left(1 + \sum_{\mu=1}^{m} \frac{(-1)^\mu}{\mu!}\right) = (-1)^{m+1}(m+1)! \left(1 + \sum_{\mu=1}^{m+1} \frac{(-1)^\mu}{\mu!}\right),$$

что и доказывает утверждение леммы. □

С помощью принципа вложенности, который будет разработан в следующем разделе, можно доказать общую теорему о величине $y(n)$.

Теорема 5. *Пусть $\nu(n) = k \geqslant 1$ и*

$$n = p_1^{n_1} \ldots p_k^{n_k}, \quad p_1 < \ldots < p_k, \quad n_1, \ldots, n_k \geqslant 1,$$

тогда справедливо равенство

$$y(n) = \sum_{\nu_1=0}^{n_1} \ldots \sum_{\nu_k=0}^{n_k} (-1)^{\nu_1+\ldots+\nu_k} \frac{(\nu_1 + \ldots + \nu_k)!}{\prod\limits_{i=1}^{k} (\nu_i)!}.$$

Доказательство. Действительно,

$$\zeta(\mathbb{N},\mathbb{P}_0|\alpha)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y(n)}{n^{\alpha}}=\zeta(\alpha)\zeta^*(\mathbb{P}_0|\alpha)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{V(n)}\frac{(V(n))!}{\prod\limits_{p|n}(\alpha_p)!}}{n^{\alpha}}\right)=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}\sum_{m|n}(-1)^{V(m)}\frac{(V(m))!}{\prod\limits_{p|m}(\alpha_p)!}.$$

Так как из $m|n$ следует, что $m=p_1^{\nu_1}\dots p_k^{\nu_k}$, то

$$\sum_{m|n}(-1)^{V(m)}\frac{(V(m))!}{\prod\limits_{p|m}(\alpha_p)!}=\sum_{\nu_1=0}^{n_1}\dots\sum_{\nu_k=0}^{n_k}(-1)^{\nu_1+\dots+\nu_k}\frac{(\nu_1+\dots+\nu_k)!}{\prod\limits_{i=1}^{k}(\nu_i)!}$$

и теорема доказана. □

4. Вложенные последовательности моноидов, порожденные простыми числами

Рассмотрим естественную нумерацию простых чисел

$$\mathbb{P}=\{2<3<5<7<11<\dots<p_n<\dots\},$$

где через p_n обозначается n-ое простое число в порядке их следования в множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$. Обозначим через P_n начальный отрезок последовательности простых чисел:

$$P_n=\{2<3<5<7<11<\dots<p_n\}\quad(n\geqslant 1).$$

Через $P_n^{(0)}$ будем обозначать последовательность простых чисел $p_1<\dots<p_n$ с добавленной единицей:

$$P_n^{(0)}=\{1\}\bigcup P_n=\{1<p_1<\dots<p_n\}.$$

Вложенная последовательность множеств простых чисел

$$P_1\subset P_2\subset\dots\subset P_n\subset\dots\subset\mathbb{P}\tag{9}$$

порождает вложенную последовательность моноидов с однозначным разложением на простые числа

$$\{1\}\subset M(P_1)\subset M(P_2)\subset\dots\subset M(P_n)\subset\dots\subset M(\mathbb{P})=\mathbb{N}.\tag{10}$$

Теперь рассмотрим свойства соответствующих последовательностей дзета-функций:

$$\zeta(P_1|\alpha),\ \zeta(P_2|\alpha),\ \dots,\ \zeta(P_n|\alpha),\ \dots,\ \zeta(\mathbb{P}|\alpha),\tag{11}$$

$$\zeta^*(P_1^{(0)}|\alpha),\ \zeta^*(P_2^{(0)}|\alpha),\ \dots,\ \zeta^*(P_n^{(0)}|\alpha),\ \dots,\ \zeta^*(\mathbb{P}_0|\alpha),\tag{12}$$

$$\zeta(\{1\}|\alpha),\ \zeta(M(P_1)|\alpha),\ \zeta(M(P_2)|\alpha),\ \dots,\ \zeta(M(P_n)|\alpha),\ \dots,\ \zeta(\mathbb{N}|\alpha)=\zeta(\alpha),\tag{13}$$

$$\zeta(M(P_1),P_1^{(0)}|\alpha),\ \zeta(M(P_2),P_2^{(0)}|\alpha),\ \dots,\ \zeta(M(P_n),P_n^{(0)}|\alpha),\ \dots,\ \zeta(\mathbb{N},\mathbb{P}_0|\alpha),\tag{14}$$

где $\zeta(M(P_n),P_n^{(0)}|\alpha)=\zeta(M(P_n)|\alpha)\zeta^*(P_n^{(0)}|\alpha)$.

Во-первых, мы имеем

$$\sigma_{\{1\}} = \sigma_{P_1} = \sigma_{P_2} = \ldots = \sigma_{P_n} = \ldots = -\infty, \quad \sigma_{\mathbb{P}} = 1, \tag{15}$$

так как $\zeta(\{1\}|\alpha) = 1$ и для любого n дзета-функция $\zeta(P_n|\alpha) = \sum\limits_{\nu=1}^{n} \frac{1}{p_\nu^\alpha}$ — аналитическая функция на всей комплексной α-плоскости. Последнее равенство в (15) хорошо известно (см. [14]).

Во-вторых, на обратные дзета-функции $\zeta^*(P_n^{(0)}|\alpha)$ удается перенести некоторые свойства обратной дзета-функции $\zeta^*(\mathbb{P}_0|\alpha)$, а именно, справедливы следующие утверждения.

Обозначим через $\mathbb{N}_\nu(P_n)$ $(\nu \geqslant 0)$ множество всех натуральных чисел n из $M(P_n)$ с $V(n) = \nu$. Ясно, что справедливо разбиение

$$M(P_n) = \bigcup_{\nu=0}^{\infty} \mathbb{N}_\nu(P_n), \quad \mathbb{N}_0(P_n) = \{1\}, \quad \mathbb{N}_\nu(P_n) \bigcap \mathbb{N}_\mu(P_n) = \emptyset \quad (\nu \neq \mu). \tag{16}$$

Нетрудно видеть, что

$$\mathbb{N}_1(P_n) = P_n, \quad \mathbb{N}_\nu(P_n) = \mathbb{N}_{\nu-1}(P_n) \cdot P_n \quad (\nu \geqslant 0)$$

и моноид $M(P_n)$ — свободный моноид, следовательно, к нему применимы леммы 2—4 и теорема 3, которые можно сформулировать следующим образом.

Лемма 10. *Для любого n и свободного моноида $M(P_n)$ выполняется равенство*

$$P(M(P_n)) = P_n.$$

Лемма 11. *Для любого n и свободного моноида $M(P_n)$ справедливы соотношения*

$$S(P_n, \sigma_{P_n,1}) = 1, \quad \sigma^*_{P_n^{(0)}} = \sigma_{P_n,1} < \sigma^*_{P_{n+1}^{(0)}}.$$

Таким образом, имеем цепочку неравенств:

$$0 = \sigma^*_{P_1^{(0)}} < \sigma^*_{P_2^{(0)}} < \ldots < \sigma^*_{P_n^{(0)}} < \ldots < \sigma^*_{\mathbb{P}_0}, \quad 1 < \sigma_{\mathbb{P}_0} < 2.$$

Теорема 6. *Последовательность множеств простых (9) сходится к $\mathbb{P} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} P_n$.*

Последовательность вложенных моноидов (10) сходится к $\mathbb{N} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} M(P_n)$.

Предел

$$\lim_{n\to\infty} \zeta(P_n|\alpha) = \zeta(\mathbb{P}|\alpha) \tag{17}$$

равномерно сходится в любой α-полуплоскости $\sigma \geqslant \sigma_0 > 1$.

Предел

$$\lim_{n\to\infty} \zeta^*(P_n^{(0)}|\alpha) = \zeta(\mathbb{P}_0|\alpha) \tag{18}$$

равномерно сходится в любой α-полуплоскости $\sigma \geqslant \sigma_0 > \sigma^*_{\mathbb{P}_0}$.

Предел

$$\lim_{n\to\infty} \zeta(M(P_n)|\alpha) = \zeta(\alpha) \tag{19}$$

равномерно сходится в любой α-полуплоскости $\sigma \geqslant \sigma_0 > 1$.

Предел

$$\lim_{n\to\infty} \zeta(M(P_n), P_n^{(0)}|\alpha) = \zeta(\mathbb{N}, \mathbb{P}_0|\alpha) \tag{20}$$

равномерно сходится в любой α-полуплоскости $\sigma \geqslant \sigma_0 > \sigma^*_{\mathbb{P}_0}$.

В-третьих, мы обнаруживаем важное свойство *вложенности* дзета-функций вложенных моноидов, которое заключается в том что каждая из четырех дзета-функций $\zeta(P_n|\alpha)$, $\zeta^*(P_n^{(0)}|\alpha)$, $\zeta(M(P_n)|\alpha)$ и $\zeta(M(P_n),P_n^{(0)}|\alpha)$ образуется из соответствующих дзета-функций с номером $n+1$ сужением области суммирования, а значения коэффициентов остается неизменным. Более того, это остается применительно и к предельным дзета-функциям. Тот факт, что $\zeta(P_n|\alpha)$ и $\zeta(M(P_n)|\alpha)$ получаются сужением области суммирования из $\zeta(\mathbb{P}|\alpha)$ и $\zeta(\alpha)$ тривиально следуют из определения этих дзета-функций.

Аналогичное утверждение для $\zeta^*(P_n^{(0)}|\alpha)$ и $\zeta(M(P_n),P_n^{(0)}|\alpha)$ можно обосновать на основании того факта, что количество решений уравнения $m=m_1\dots m_\nu$ в натуральных $m_1,\dots,m_\nu\in P_n$ и в натуральных $m_1,\dots,m_\nu\in\mathbb{P}$ одинаково для $m\in M(P_n)$. Из свойства вложенности сразу вытекают утверждения следующих теоремы и леммы.

Теорема 7. *Для любого натурального n справедливо равенство*

$$\zeta^*(P_n^{(0)}|\alpha)=\sum_{m\in M(P_n)}\frac{(-1)^{V(m)}\frac{(V(m))!}{\prod\limits_{p|m}(\alpha_p)!}}{m^\alpha}.$$

Лемма 12. *Для любого натурального n справедливо равенство*

$$\zeta(M(P_n),P_n^{(0)}|\alpha)=\sum_{m\in M(P_n)}\frac{y(m)}{m^\alpha},$$

где $y(m)$ определяются равенством (8).

Будем доказательство с помощью обобщенного свойства вложенности называть принципом вложенности. Покажем его применение. Пусть q — произвольное простое число, $A=\{q\}$ — одноэлементное множество, $A^{(0)}=\{1,q\}$ и $M(q)=\{q^\nu|\nu\geqslant 0\}$ — геометрическая прогрессия с единичным первым членом и знаменателем q тогда

$$\zeta(A|\alpha)=\frac{1}{q^\alpha}, \tag{21}$$

$$\zeta^*(A^{(0)}|\alpha)=\frac{1}{1+\frac{1}{q^\alpha}}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^\nu}{(q^\nu)^\alpha}=\sum_{m\in M(q)}\frac{(-1)^{V(m)}\frac{(V(m))!}{\prod\limits_{p|m}(\alpha_p)!}}{m^\alpha}\quad(\alpha=\sigma+it,\,\sigma>0), \tag{22}$$

$$\zeta(M(q)|\alpha)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(q^n)^\alpha}=\frac{1}{1-\frac{1}{q^\alpha}}\quad(\alpha=\sigma+it,\,\sigma>0), \tag{23}$$

$$\zeta(M(q),A^{(0)}|\alpha)=\frac{1}{1-\frac{1}{q^\alpha}}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{q^\alpha}}=\frac{1}{1-\frac{1}{q^{2\alpha}}}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(q^{2n})^\alpha}=\sum_{m\in M(q)}\frac{\frac{(-1)^{V(m)}+1}{2}}{m^\alpha}\quad(\alpha=\sigma+it,\,\sigma>0). \tag{24}$$

Из формулы (23) следует, что дзета-функция геометрической прогрессии аналитическая функция во всей α-плоскости кроме точек $\alpha_0=0$, где у неё простой полюс с вычетом

$$\mathrm{Res}_0\zeta(M(q)|\alpha)=\frac{1}{\ln q}.$$

и точек $\alpha_k = \frac{2ki\pi}{\ln q}$ $(k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$, в которых простые полюса с вычетами

$$\operatorname{Res}_{\frac{2ki\pi}{\ln q}} \zeta(M(q)|\alpha) = \frac{1}{\ln q}.$$

Можно показать, что для мероморфной функции $\zeta(M(q)|\alpha)$ справедливы следующие представления:

$$\zeta(M(q)|\alpha) = \frac{q^{\frac{\alpha}{2}}}{\alpha \ln q} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha^2 \ln^2 q}{4\pi^2 n^2}\right)^{-1} =$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha \ln q} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha \ln q}{\alpha^2 \ln^2 q + 4n^2\pi^2} =$$
$$= \frac{q^{\frac{\alpha}{2}} \alpha \ln q}{4\pi^2} \Gamma\left(\frac{\alpha i \ln q}{2\pi}\right) \Gamma\left(-\frac{\alpha i \ln q}{2\pi}\right),$$

которые справедливы во всей комплексной плоскости, за исключением простых полюсов.

Перейдем к более сложному случаю. Пусть $q < r$ — произвольные простые числа, $A = \{q, r\}$ — двухэлементное множество, $A^{(0)} = \{1, q, r\}$ и $M(q, r) = \{q^\nu r^\mu | \nu, \mu \geqslant 0\}$ — произведение двух геометрических прогрессий с единичными первыми членами и знаменателем q и r, соответственно, тогда

$$\zeta(A|\alpha) = \frac{1}{q^\alpha} + \frac{1}{r^\alpha}, \tag{25}$$

$$\zeta^*(A^{(0)}|\alpha) = \frac{1}{1 + \frac{1}{q^\alpha} + \frac{1}{r^\alpha}} = \sum_{\nu,\mu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu+\mu} \frac{(\nu+\mu)!}{\nu!\mu!}}{(q^\nu r^\mu)^\alpha} =$$
$$= \sum_{m \in M(q,r)} \frac{(-1)^{V(m)} \frac{(V(m))!}{\prod\limits_{p|m} (\alpha_p)!}}{m^\alpha} \quad (\alpha = \sigma + it,\ \sigma > \sigma_A > 0), \tag{26}$$

$$\zeta(M(q,r)|\alpha) = \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{1}{(q^n r^m)^\alpha} = \frac{1}{1 - \frac{1}{q^\alpha}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{r^\alpha}} \quad (\alpha = \sigma + it,\ \sigma > 0), \tag{27}$$

$$\zeta(M(q,r), A^{(0)}|\alpha) = \frac{1}{1 - \frac{1}{q^\alpha}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{r^\alpha}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{q^\alpha} + \frac{1}{r^\alpha}} =$$
$$= \left(\sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{1}{(q^n r^m)^\alpha}\right) \left(\sum_{\nu,\mu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu+\mu} \frac{(\nu+\mu)!}{\nu!\mu!}}{(q^\nu r^\mu)^\alpha}\right) = \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{1}{(q^n r^m)^\alpha} \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{\mu=0}^{m} (-1)^{\nu+\mu} \frac{(\nu+\mu)!}{\nu!\mu!} =$$
$$= \sum_{m \in M(P_n)} \frac{y(m)}{m^\alpha} \quad (\alpha = \sigma + it,\ \sigma > \sigma^*_{P_n^{(0)}}), \tag{28}$$

где

$$y(q^n r^m) = \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{\mu=0}^{m} (-1)^{\nu+\mu} \frac{(\nu+\mu)!}{\nu!\mu!}.$$

В общем случае, когда $q_1 < \ldots < q_k$ — произвольные простые числа, $n \in M(q_1, \ldots, q_k)$, то для

$$n = q_1^{n_1} \ldots q_k^{n_k}, \qquad n_1, \ldots, n_k \geqslant 1$$

имеем

$$y(n) = \sum_{\nu_1=0}^{n_1} \dots \sum_{\nu_k=0}^{n_k} (-1)^{\nu_1+\dots+\nu_k} \frac{(\nu_1+\dots+\nu_k)!}{\prod\limits_{i=1}^{k}(\nu_i)!}.$$

5. Примеры моноидов с однозначным разложением на простые элементы

Рассмотрим множество псевдопростых четных чисел

$$A_{3,1,2,2} = \{2p | p = 3n+2,\ n \geqslant 1\}$$

и минимальный моноид $M(A_{3,1,2,2})$, для которого выполнено соотношение

$$M(A_{3,1,2,2}) = \left\{ n = \prod_{p|n} (2p)^{\alpha_p} \,\middle|\, p \in \mathbb{P}_{3,2},\ p > 2 \right\}.$$

Нетрудно видеть, что $M(A_{3,1,2,2})$ — моноид с однозначным разложением на простые множители. Поэтому для дзета-функции этого моноида имеет место разложение в Эйлерово произведение

$$\zeta(M(A_{3,1,2,2})|\alpha) = P(M(A_{3,1,2,2})|\alpha) = \prod_{p\in\mathbb{P}_{3,2},\, p>2} \left(1 - \frac{1}{(2p)^\alpha}\right)^{-1}.$$

Для любого натурального числа n определим четную и нечетную части $n^{(1)}$, $n^{(2)}$ формулами

$$n = \prod_{p|n} p^{\alpha_p}, \quad n^{(1)} = \prod_{p|n,\, p>2} p^{\alpha_p}, \quad n^{(2)} = 2^{\alpha_2}.$$

Ясно, что если $2 \not| n$, то $n^{(2)} = 1$.

Лемма 13. *Справедливо равенство*

$$\zeta^*(M(A_{3,1,2,2})|\alpha) = \sum_{n\in M(A_{3,1,2,2})} \frac{\mu(n^{(1)})}{n^\alpha}.$$

Доказательство. Действительно, если $n \in M(A_{3,1,2,2})$, то $n = \prod\limits_{p|n,\, p>2} (2p)^{\alpha_p}$ и

$$n^{(1)} = \prod_{p|n,\, p>2} p^{\alpha_p}, \quad n^{(2)} = 2^{\alpha_2},$$

где $\alpha_2 = \sum\limits_{p|n,\, p>2} \alpha_p$.

Так как

$$\zeta^*(M(A_{3,1,2,2})|\alpha) = \frac{1}{P(M(A_{3,1,2,2})|\alpha)} = \prod_{p\in\mathbb{P}_{3,2},\, p>2} \left(1 - \frac{1}{(2p)^\alpha}\right) =$$

$$= 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu \sum_{2<p_1<\dots<p_\nu\in\mathbb{P}_{3,2}} \frac{1}{2^\nu p_1 \cdot \dots \cdot p_\nu} = \sum_{n\in M(A_{3,1,2,2})} \frac{\mu(n^{(1)})}{n^\alpha},$$

то утверждение леммы доказано. □

Доказанная лемма — частный случай следующего общего утверждения.

Теорема 8. *Если M — моноид с однозначным разложением на простые множители, то справедливо равенство*

$$\zeta^*(M|\alpha) = \prod_{r\in P(M)} \left(1 - \frac{1}{r^\alpha}\right) = \sum_{n\in M} \frac{\mu_M(n)}{n^\alpha},$$

где $\mu_M(n)$ — обобщённая функция Мёбиуса, заданная равенствами

$$\mu_M(n) = \begin{cases} 1, & \text{при } n = 1, \\ (-1)^\nu, & \text{при } n = r_1 \dots r_\nu,\ r_1 < \dots < r_\nu \in P(M), \\ 0, & \text{при } n = r^2 n_1,\ r, n_1 \in M,\ r > 1. \end{cases}$$

Доказательство.

Если M — моноид с однозначным разложением на простые множители, то существует эйлерово произведение и мы легко находим обратный ряд

$$\zeta(M|\alpha) = P(M|\alpha) = \prod_{r\in P(M)} \left(1 - \frac{1}{r^\alpha}\right)^{-1},$$

$$\zeta^*(M|\alpha) = \prod_{r\in P(M)} \left(1 - \frac{1}{r^\alpha}\right) = \sum_{n\in M} \frac{\mu_M(n)}{n^\alpha}$$

и теорема полностью доказана. □

Следующая конструкция даёт несчетное множество моноидов с однозначным разложением на простые множители.

Пусть P — произвольное непустое собственное подмножество множества $\mathbb{P}$ всех простых чисел. Через $\overline{P}$ обозначим его непустое дополнение: $\overline{P} = \mathbb{P} \setminus P$. Рассмотрим произвольную функцию $f : P \to M(\overline{P})$. Моноид $M(P, f)$ определим следующим равенством

$$M(P, f) = \left\{ n = \prod_{p\in P} (f(p)p)^{\alpha_p} \,\middle|\, \sum_{p\in P} \alpha_p < \infty \right\}.$$

Для любого натурального числа n из $M(P, f)$ определим два сомножителя $n^{(P)}$, $n^{(\overline{P})}$ формулами

$$n = \prod_{p\in P} (f(p)p)^{\alpha_p}, \quad n^{(P)} = \prod_{p\in P} p^{\alpha_p}, \quad n^{(\overline{P})} = \prod_{p\in P} (f(p))^{\alpha_p}.$$

Теорема 9. *Для любого множества простых P и любой функции $f : P \to M(\overline{P})$ моноид $M(P, f)$ имеет однозначное разложение на простые множители. Для дзета-функции $\zeta(M(P, f)|\alpha)$ имеется разложение в эйлерово произведение*

$$\zeta(M(P, f)|\alpha) = P(M(P, f)|\alpha) = \prod_{p\in P} \left(1 - \frac{1}{(f(p)p)^\alpha}\right)^{-1}.$$

Для множества $P(M(P, f))$ простых элементов моноида $M(P, f)$ выполняется равенство

$$P(M(P, f)) = \{f(p)p | p \in P\}.$$

Справедливо равенство

$$\zeta^*(M(P, f)|\alpha) = \prod_{r\in P(M(P,f))} \left(1 - \frac{1}{r^\alpha}\right) = \sum_{n\in M(P,f)} \frac{\mu_{M(P,f)}(n)}{n^\alpha},$$

где $\mu_{M(P,f)}(n)$ — обобщённая функция Мёбиуса, заданная равенствами

$$\mu_{M(P,f)}(n) = \begin{cases} 1, & \text{при } n = 1, \\ (-1)^{\nu}, & \text{при } n = r_1 \dots r_{\nu},\ r_1 < \dots < r_{\nu} \in P(M(P,f)), \\ 0, & \text{при } n = r^2 n_1,\ r, n_1 \in M(P,f),\ r > 1. \end{cases}$$

Доказательство. Действительно, пусть

$$\prod_{p \in P} (f(p)p)^{\alpha_p} = \prod_{p \in P} (f(p)p)^{\beta_p},$$

тогда в силу основной теоремы арифметики имеем

$$\prod_{p \in P} p^{\alpha_p} = \prod_{p \in P} p^{\beta_p}, \quad \prod_{p \in P} (f(p))^{\alpha_p} = \prod_{p \in P} (f(p))^{\beta_p}.$$

Из первого равенства следует, что для любого $p \in P$ выполняется равенство показателей степеней: $\alpha_p = \beta_p$. тем самым однозначность разложения на простые элементы доказана. Одновременно отсюда следует, что $P(M(P,f)) = \{f(p)p | p \in P\}$. Все остальные утверждения теоремы вытекают из однозначности разложения на простые элементы. □

Так как различных подмножеств счетного множества несчетное множество, то мы получаем несчетное множество различных моноидов $M(P,f)$ с однозначным разложением на простые элементы.

Рассмотренную конструкцию можно обобщить следующим образом. Прежде всего заметим, что моноиды $M(P)$ и $M(\overline{P})$ взаимно просты. Пусть r_i $(i \in I)$ — конечная или бесконечная последовательность попарно взаимно простых натуральных чисел больше 1 из моноида $M(P)$ и f — произвольная функция на последовательности r_i с $f(r_i) \in M(\overline{P})$. Моноид $M(r_i, I, f)$ определим следующим равенством

$$M(r_i, I, f) = \left\{ n = \prod_{i \in I} (f(r_i)r_i)^{\alpha_i} \,\middle|\, \sum_{i \in I} \alpha_i < \infty \right\}.$$

Для любого натурального числа n из $M(r_i, I, f)$ определим два сомножителя $n^{(I)}$, $n^{(f,I)}$ формулами

$$n = \prod_{i \in I} (f(r_i)r_i)^{\alpha_i}, \quad n^{(I)} = \prod_{i \in I} r_i^{\alpha_i}, \quad n^{(f,I)} = \prod_{i \in I} (f(r_i))^{\alpha_i}.$$

Теорема 10. *Для любой последовательности r_i $(i \in I)$ попарно взаимно простых натуральных чисел больше 1 из моноида $M(P)$ и любой функции f с $f(r_i) \in M(\overline{P})$ моноид $M(r_i, I, f)$ имеет однозначное разложение на простые множители. Для дзета-функции $\zeta(M(r_i, I, f)|\alpha)$ имеется разложение в эйлерово произведение*

$$\zeta(M(r_i, I, f)|\alpha) = P(M(r_i, I, f)|\alpha) = \prod_{i \in I} \left(1 - \frac{1}{(f(r_i)r_i)^{\alpha}}\right)^{-1}.$$

Для множества $P(M(r_i, I, f))$ простых элементов моноида $M(r_i, I, f)$ выполняется равенство

$$P(M(r_i, I, f)) = \{f(r_i)r_i | i \in I\}.$$

Справедливо равенство

$$\zeta^*(M(r_i, I, f)|\alpha) = \prod_{i \in I} \left(1 - \frac{1}{(f(r_i)r_i)^{\alpha}}\right) = \sum_{n \in M(r_i, I, f)} \frac{\mu_{M(r_i, I, f)}(n)}{n^{\alpha}},$$

где $\mu_{M(r_i,I,f)}(n)$ *— обобщённая функция Мёбиуса, заданная равенствами*

$$\mu_{M(r_i,I,f)}(n) = \begin{cases} 1, & \text{при } n = 1, \\ (-1)^{\nu}, & \text{при } n = (f(r_{i_1})r_{i_1})\dots(f(r_{i_\nu})r_{i_\nu}),\ r_{i_1} < \dots < r_{i_\nu}\ (i_\mu \in I,\ 1 \leqslant \mu \leqslant \nu), \\ 0, & \text{при } n = r^2 n_1,\ r, n_1 \in M(r_i, I, f),\ r > 1. \end{cases}$$

Доказательство. Действительно, пусть

$$\prod_{i\in I}(f(r_i)r_i)^{\alpha_i} = \prod_{i\in I}(f(r_i)r_i)^{\beta_i},$$

тогда в силу основной теоремы арифметики имеем

$$\prod_{i\in I} r_i^{\alpha_i} = \prod_{i\in I} r_i^{\beta_i}, \quad \prod_{i\in I}(f(r_i))^{\alpha_i} = \prod_{i\in I}(f(r_i))^{\beta_i}.$$

Из первого равенства следует, что для любого $i \in I$ выполняется равенство показателей степеней: $\alpha_i = \beta_i$. Тем самым однозначность разложения на простые элементы доказана. Одновременно отсюда следует, что $P(M(r_i, I, f)) = \{f(r_i)r_i | i \in I\}$. Все остальные утверждения теоремы вытекают из однозначности разложения на простые элементы. □

Остановимся на вопросе о количестве простых элементов в моноиде $M(A)$, не превосходящих x, которое будем обозначать через $\pi_{M(A)}(x)$. В общем случае это непростая задача, однако для случая любой экспоненциальной последовательности простых чисел $PE = \{p_1, p_2, \dots, p_n, \dots\}$ и моноида $M(PE)$ можно дать удовлетворительный ответ.

Теорема 11. *Для любого* $q \geqslant 2$ *и любой экспоненциальной последовательности простых чисел* $PE = \{p_1, p_2, \dots, p_n, \dots\}$ *для количества простых элементов в моноиде* $M(PE)$*, не превосходящих* x*, справедливо равенство*

$$\pi_{M(PE)}(x) = \pi_{PE}(x) = \frac{\ln x}{\ln q} - \theta_{PE}(x),$$

где $0 \leqslant \theta_{PE}(x) < 2$.

Доказательство. Действительно, по определению экспоненциальной последовательности простых чисел имеем: $q^\nu \leqslant p_\nu < q^{\nu+1}$ $(\nu \geqslant 1)$. Поэтому, если $q^n \leqslant x < q^{n+1}$, то $n - 1 \leqslant \pi_{PE}(x) \leqslant n$. Но $n \leqslant \frac{\ln x}{\ln q} < n + 1$. Отсюда следует утверждение теоремы. □

Лемма 14. *Для* $\theta_{PE}(x)$ *при* $q^n \leqslant x < q^{n+1}$ *справедливо равенство*

$$\theta_{PE}(x) = \left\{\frac{\ln x}{\ln q} - \frac{\ln p_n}{\ln q}\right\} + \left\{\frac{\ln p_n}{\ln q}\right\}.$$

Доказательство. Действительно,

$$\left\{\frac{\ln x}{\ln q} - \frac{\ln p_n}{\ln q}\right\} = \begin{cases} 1 + \left\{\frac{\ln x}{\ln q}\right\} - \left\{\frac{\ln p_n}{\ln q}\right\}, & \text{при } q^n \leqslant x < p_n, \\ \left\{\frac{\ln x}{\ln q}\right\} - \left\{\frac{\ln p_n}{\ln q}\right\}, & \text{при } p_n \leqslant x < q^{n+1} \end{cases},$$

что и доказывает утверждение леммы. □

6. Дзета-функция множества простых элементов моноида

Предыдущие утверждения переносятся со случая множества простых $\mathbb{P}$ на случай моноида $M(r_i, I, f)$ с однозначным разложением на простые элементы и множества его простых элементов $P(M(r_i, I, f))$. Будем для краткости считать, что $A = P(M(r_i, I, f))$, $M(A) = M(r_i, I, f)$. Через $q_i = f(r_i)r_i$ $(i \in I)$ будем обозначать простые элементы из A.

Пусть $\nu_A(n)$ — количество различных простых элементов моноида $M(A)$, делящих число $n \in M(A)$, а $V_A(n)$ — общее число простых элементов, на которые разлагается число n с учётом их кратности. Таким образом, если $n = \prod\limits_{j=1}^{\nu_A(n)} q_{i_j}^{\alpha_j}$ — каноническое разложение числа n на простые элементы моноида $M(A)$ $1 < i_1 < \ldots < i_{\nu_A(n)}$, то $V_A(n) = \sum\limits_{j=1}^{\nu(n)} \alpha_j$.

Функция $\nu_A(n)$ является аддитивной арифметической функцией на моноиде $M(A)$, так как для любых взаимно простых относительно делимости в $M(A)$ n и m имеем

$$\nu_A(nm) = \nu_A(n) + \nu_A(m).$$

Функция $V_A(n)$ является вполне аддитивной арифметической функцией на моноиде $M(A)$, так как для любых натуральных n и m из $M(A)$ имеем

$$V_A(nm) = V_A(n) + V_A(m).$$

Обозначим через $\mathbb{N}_\nu(A)$ $(\nu \geqslant 0)$ множество всех натуральных чисел n из $M(A)$ с $V_A(n) = \nu$. Ясно, что справедливо разбиение

$$M(A) = \bigcup_{\nu=0}^{\infty} \mathbb{N}_\nu(A), \quad \mathbb{N}_0(A) = \{1\}, \quad \mathbb{N}_\nu(A) \bigcap \mathbb{N}_\mu(A) = \emptyset \quad (\nu \neq \mu). \tag{29}$$

Нетрудно видеть, что

$$\mathbb{N}_1(A) = A, \quad \mathbb{N}_\nu(A) = \mathbb{N}_{\nu-1}(A) \cdot A \quad (\nu \geqslant 0).$$

Для дальнейшего нам потребуется ещё одна мультипликативная функция $\mathrm{rad}_A(n)$ — радикал натурального числа из $M(A)$, которая определяется следующими условиями

$$\mathrm{rad}_A(n) | n, \quad \nu_A(n) = \nu_A(\mathrm{rad}_A(n)), \quad \nu_A(\mathrm{rad}_A(n)) = V_A(\mathrm{rad}_A(n)).$$

Другими словами, если $n = \prod\limits_{j=1}^{\nu_A(n)} q_{i_j}^{\alpha_j}$, то $\mathrm{rad}_A(n) = \prod\limits_{j=1}^{\nu_A(n)} q_{i_j}$.

В силу разбиения (29) можно определить единую функцию $x_A(n)$ такую, что

$$\zeta^\nu(A|\alpha) = \sum_{n \in \mathbb{N}_\nu(A)} \frac{x_A(n)}{n^\alpha} \quad (\nu \geqslant 0).$$

Лемма 15. *Справедливы рекуррентные соотошения*

$$x_A(1) = 1, \quad x_A(n) = \sum_{r|n,\, r \in A} x_A\left(\frac{n}{p}\right) \quad (n > 1).$$

Доказательство. Первое утверждение тривиально.

Пусть $\nu = 1$, тогда $\mathbb{N}_1(A) = A$ и $x_A(r) = 1$ и утверждение леммы выполнено.

Пусть $\nu > 1$, тогда

$$\zeta^{\nu}(A|\alpha) = \left(\sum_{n \in \mathbb{N}_{\nu-1}(A)} \frac{x_A(n)}{n^{\alpha}} \right) \sum_{r \in A} \frac{1}{r^{\alpha}} = \sum_{n \in \mathbb{N}_{\nu}(A)} \frac{1}{n^{\alpha}} \sum_{r|n,\, r \in A} x_A\left(\frac{n}{p}\right),$$

что и доказывает утверждение леммы. □

Лемма 16. *Справедливо равенство*

$$x_A(n) = \frac{(V_A(n))!}{\prod\limits_{r|n,\, r \in A} (\alpha_r)!}.$$

Доказательство. Проведём индукцию по n.

При $n = 1$ утверждение леммы тривиально.

Пусть $n = m > 1$ и для всех $n < m$ утверждение леммы выполнено. Предположим, что $m = \prod\limits_{\nu=1}^{k} r_{\nu}^{\alpha_{r_\nu}}$, тогда по лемме 15 имеем:

$$x_A(n) = \sum_{\nu=1}^{k} x_A\left(\frac{n}{r_\nu}\right) = \sum_{\nu=1}^{k} \frac{(\alpha_{r_1} + \ldots + \alpha_{r_k} - 1)!\alpha_{r_\nu}}{\prod\limits_{r|n,\, r \in A} (\alpha_r)!} =$$

$$= \frac{(\alpha_{r_1} + \ldots + \alpha_{r_k} - 1)!(\alpha_{r_1} + \ldots + \alpha_{r_k})}{\prod\limits_{r|n,\, r \in A} (\alpha_r)!} = \frac{(V_A(n))!}{\prod\limits_{r|n,\, r \in A} (\alpha_r)!},$$

что доказывает утверждение леммы. □

Будем через A_0 обозначать объединение $A_0 = \{1\} \bigcup A$.

Теорема 12. *Справедливо равенство*

$$\zeta^*(A_0|\alpha) = 1 + \sum_{n \in M^*(A)} \frac{(-1)^{V_A(n)} \frac{(V_A(n))!}{\prod\limits_{r|n,\, r \in A} (\alpha_r)!}}{n^{\alpha}}.$$

Доказательство. Действительно,

$$\zeta^*(A_0|\alpha) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu} \zeta^{\nu}(A|\alpha) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu} \sum_{n \in \mathbb{N}_{\nu}(A)} \frac{x_A(n)}{n^{\alpha}} =$$

$$= 1 + \sum_{n \in M^*(A)} \frac{(-1)^{V_A(n)} x_A(n)}{n^{\alpha}} = 1 + \sum_{n \in M^*(A)} (-1)^{V_A(n)} \frac{(V_A(n))!}{\prod\limits_{r|n,\, r \in A} (\alpha_r)!} \cdot \frac{1}{n^{\alpha}},$$

что и доказывает утверждение теоремы. □

Обозначим через $\zeta(M(A), M_0|\alpha)$ отношение двух дзета-функций:

$$\zeta(M(A), A_0|\alpha) = \zeta(M(A)|\alpha)\zeta^{-1}(A_0|\alpha).$$

Обозначим коэффициенты соответствующего ряда Дирихле через $y_A(n)$:

$$\zeta(M(A), A_0|\alpha) = 1 + \sum_{n \in M^*(A)} \frac{y_A(n)}{n^{\alpha}}, \quad y_A(1) = 1.$$

Лемма 17. *Справедливо рекуррентное равенство*

$$y_A(n) = 1 - \sum_{r|n,\, r\in A} y_A\left(\frac{n}{r}\right).$$

Доказательство. Действительно,

$$\zeta(\alpha) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{n\in\mathbb{N}_\nu}\frac{1}{n^\alpha}, \quad \zeta(\mathbb{N},\mathbb{P}_0|\alpha) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{n\in\mathbb{N}_\nu}\frac{y(n)}{n^\alpha}, \quad \zeta(\mathbb{P}_0|\alpha) = 1 + \sum_{n\in\mathbb{P}}\frac{1}{n^\alpha},$$

поэтому

$$\zeta(\mathbb{N}_\nu|\alpha) = \sum_{n\in\mathbb{N}_\nu}\frac{y(n)}{n^\alpha} + \left(\sum_{n\in\mathbb{N}_{\nu-1}}\frac{y(n)}{n^\alpha}\right)\zeta(\mathbb{P}|\alpha), \quad 1 = y(n) + \sum_{p|n} y\left(\frac{n}{p}\right),$$

что и доказывает утверждение леммы. □

Лемма 18. *Справедливо равенство*

$$y(p^\alpha) = \frac{1+(-1)^\alpha}{2}.$$

Доказательство. Действительно,

$$y(p^\alpha) = 1 - y(p^{\alpha-1}),$$

поэтому

$$y(p) = 0, \quad y(p^2) = 1, \quad y(p^3) = 0, \ldots, y(p^\alpha) = \frac{1+(-1)^\alpha}{2}, \ldots$$

что и доказывает утверждение леммы. □

Лемма 19. *Если $n = rad(n)$, то справедливы равенства*

$$y(n) = (-1)^{\nu(n)}(\nu(n))!\left(1 + \sum_{\mu=1}^{\nu(n)}\frac{(-1)^\mu}{\mu!}\right), \quad \lim_{\nu(n)\to\infty}\frac{y(n)(-1)^{\nu(n)}}{\nu(n)!} = \frac{1}{e}.$$

Доказательство. Действительно, если $n = \mathrm{rad}(n)$, то $n = p_1p_2\ldots p_{\nu(n)}$ и $p_\mu \neq p_\lambda$ при $\mu \neq \lambda$.

При $\nu(n) = 1$ имеем: $n = p$ и утверждение леммы справедливо в силу предыдущей леммы.

Далее проведём индукцию по величине $\nu(n)$, получим при $\nu(n) = m+1$:

$$y(n) = 1 - (m+1)(-1)^m m!\left(1 + \sum_{\mu=1}^{m}\frac{(-1)^\mu}{\mu!}\right) = (-1)^{m+1}(m+1)!\left(1 + \sum_{\mu=1}^{m+1}\frac{(-1)^\mu}{\mu!}\right),$$

что и доказывает утверждение леммы. □

7. Общий вид моноида натуральных чисел с однозначным разложением на простые элементы

Из предыдущих рассмотрений возникает естественный вопрос об общем виде моноида натуральных чисел $M(A)$, где A — множество его простых элементов, с однозначным разложением на простые элементы. Будем элементы из A обозначать через q_n. Таким образом

$$A = \{q_1 < q_2 < \ldots < q_n < \ldots\}. \tag{30}$$

Допускается как конечное множество A, так и бесконечное. Определим конечную или бесконечную последовательность вложенных множеств A_n, где

$$A_n = \{q_1 < q_2 < \ldots < q_n\}. \tag{31}$$

Последовательность вложенных множеств вида (31) порождает последовательность вложенных моноидов

$$\{1\} \subset M(A_1) \subset M(A_2) \subset \ldots \subset M(A_n) \subset \ldots \subset M(A). \tag{32}$$

Лемма 20. *Если A — бесконечное множество простых элементов и $M(A)$ — моноид с однозначным разложением на простые элементы, то*

$$\sigma_A = \sigma_{M(A)}. \tag{33}$$

Доказательство. Действительно, из однозначности разложения на простые элементы следует, что дзета-функция моноида $M(A)$ равна эйлерову произведению $P(M(A)|\alpha)$:

$$\zeta\left(M(A)|\alpha\right) = \sum_{n\in M(A)} \frac{1}{n^\alpha} = \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{q_i^\alpha}\right)^{-1} = P(M(A)|\alpha).$$

Прологарифмируем эйлерово произведение в правой полуплоскости $\sigma > \sigma_{M(A)}$, получим

$$\ln\zeta\left(M(A)|\alpha\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{mq_n^{m\alpha}} = \zeta(A|\alpha) + \theta_A(\alpha),$$

где

$$\theta_A(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{mq_n^{m\alpha}}.$$

При $\sigma > \sigma_A$ имеем:

$$\frac{1}{2q_n^{2\sigma}} < \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{mq_n^{m\sigma}} = \left(1 - \frac{1}{q_n^\sigma}\right)^{-1} \left(\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{mq_n^{m\sigma}} - \sum_{m=3}^{\infty} \frac{1}{(m-1)q_n^{m\sigma}}\right) =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{q_n^\sigma}\right)^{-1} \left(\frac{1}{2q_n^{2\sigma}} - \sum_{m=3}^{\infty} \frac{1}{(m-1)mq_n^{m\sigma}}\right) \leqslant \frac{1}{2q_n^{2\sigma}} \frac{1 - \frac{1}{3q_n^\sigma}}{1 - \frac{1}{q_n^\sigma}} = \frac{1}{2q_n^{2\sigma}} \frac{3q_n^\sigma - 1}{3q_n^\sigma - 3} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2q_n^{2\sigma}} \left(1 + \frac{2}{3(2^\sigma - 1)}\right).$$

Отсюда вытекают неравенства

$$\frac{1}{2}\zeta(A|2\sigma) < \theta_A(\sigma) < \frac{1}{2}\zeta(A|2\sigma) \left(1 + \frac{2}{3(2^\sigma - 1)}\right).$$

Таким образом, ряд для $\theta_A(\alpha)$ сходится в полуплоскости $\sigma > \frac{\sigma_A}{2} > 0$ и логарифм эйлерова произведения существует при $\sigma > \sigma_A$. Отсюда следует утверждение леммы. □

Лемма 21. *Если A — бесконечное множество простых элементов и $M(A)$ — моноид с однозначным разложением на простые элементы, то для любого натурального n имеем $\sigma_{M(A_n)} = 0$ и в правой полуплоскости $\sigma > 0$ справедливо разложение в эйлерово произведение*

$$\zeta\left(M(A_n)|\alpha\right) = \sum_{n\in M(A_n)} \frac{1}{n^\alpha} = \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{q_i^\alpha}\right)^{-1} = P(M(A_n)|\alpha). \tag{34}$$

Кроме того, в любой полуплоскости $\sigma \geqslant \sigma_0 > \sigma_A$ равномерно сходится предел

$$\lim_{n\to\infty} \zeta\left(M(A_n)|\alpha\right) = \zeta\left(M(A)|\alpha\right). \tag{35}$$

Доказательство. Действительно, из однозначности разложения на простые элементы следует равенство (35). Более того, из равенства

$$\zeta\left(M(A_n)|\alpha\right) = \prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{q_i^{\alpha}}\right)^{-1}$$

вытекает, что $\zeta\left(M(A_n)|\alpha\right)$ — аналитическая функция на всей комплексной плоскости, кроме точки $\alpha = 0$, в которой у неё полюс порядка n. При этом в левой полуплоскости $\sigma < 0$ имеет место функциональное уравнение

$$\zeta\left(M(A_n)|\alpha\right) = (-1)(q_1 \dots q_n)^{\alpha}\zeta\left(M(A_n)|-\alpha\right).$$

Обозначим через $\chi_{M(A)}(m)$ характеристическую функцию моноида $M(A)$, а через — $\chi_{M(A_n)}(m)$ характеристическую функцию моноида $M(A_n)$:

$$\chi_{M(A)}(m) = \begin{cases} 1, & \text{при } m \in M(A), \\ 0, & \text{при } m \in \mathbb{N} \setminus M(A), \end{cases} \qquad \chi_{M(A_n)}(m) = \begin{cases} 1, & \text{при } m \in M(A_n), \\ 0, & \text{при } m \in \mathbb{N} \setminus M(A_n). \end{cases}$$

Ясно, что $0 \leqslant \chi_{M(A)}(m) - \chi_{M(A_n)}(m) \leqslant 1$ и $\chi_{M(A)}(m) - \chi_{M(A_n)}(m) = 0$ при $1 \leqslant m \leqslant q_n$. Пользуясь этими обозначениями, получим

$$\left|\zeta\left(M(A_n)|\alpha\right) - \zeta\left(M(A)|\alpha\right)\right| = \left|\sum_{m>q_n}\frac{\chi_{M(A)}(m)-\chi_{M(A_n)}(m)}{m^{\alpha}}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m\in M(A),\, m>q_n}\frac{1-\chi_{M(A_n)}(m)}{m^{\sigma_0}} \to 0 \text{ при } n\to\infty.$$

Отсюда следует утверждение леммы. □

Определим множество простых $P_n(A)$ равенством

$$P_n(A) = \{p \,|\, p|q_1 \dots q_n\}.$$

Количество элементов в $P_n(A)$ обозначим через K_n. Так как выполнена цепочка вложений

$$P_1(A) \subseteq P_2(A) \subseteq \dots \subseteq P_n(A) \subseteq \dots \subseteq P_{\infty}(A),$$

где $P_{\infty}(A) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} P_n(A)$, то определим единую нумерацию простых чисел из $P_{\infty}(A)$ следующим образом:

$$\left\{p_{K_n+1} < p_{K_n+1} < \dots < p_{K_{n+1}}\right\} = P_{n+1}(A) \setminus P_n(A).$$

Теперь каждому элементу q_i можно поставить в соответствие вектор показателей

$$\vec{\alpha_{n,i}} = (\alpha_{n,i,1}, \dots, \alpha_{n,i,K_n}),$$

исходя из равенства

$$q_i = \prod_{\nu=1}^{K_n} p_{\nu}^{\alpha_{n,i,\nu}} \quad (i \leqslant n).$$

Лемма 22. *Если справедливо неравенство*

$$K_n < n,$$

то в моноиде $M(A_n)$ отсутствует единственность разложения на простые множители.

Доказательство. Действительно, рассмотрим рациональное линейное арифметическое пространство $\mathbb{Q}^{K_n}$ размерности $K_n < n$. Отсюда следует, что n векторов $\vec{\alpha_{n,i}}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ будут линейно зависимы. Таким образом, найдутся n рациональных чисел λ_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, одновременно неравные нулю, такие что

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{\alpha_{n,i}} = \vec{0}.$$

Представив рациональные числа λ_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ в виде $\lambda_i = \frac{m_i}{M}$, где M — наименьший общий знаменатель, а m_i — целые числа, получим

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\alpha_{n,i}} = \vec{0}.$$

Отсюда следует, что

$$\prod_{m_i>0} q_i^{m_i} = \prod_{m_i<0} q_i^{-m_i}.$$

Следовательно, однозначность разложения на простые элементы нарушена и утверждение леммы доказано. □

Лемма 23. *Если справедливо равенство*

$$K_n = n,$$

то моноид $M(A_n)$ имеет единственность разложения на простые множители тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} \alpha_{n,1,1} & \dots & \alpha_{n,1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n,n,1} & \dots & \alpha_{n,n,n} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Доказательство. Действительно, из доказательства предыдущей леммы видно, что если вектора показателей линейно зависимые, то однозначность разложения на простые элементы отсутствует.

Если выполнено условие леммы, то вектора показателей будут линейно независимы.

С другой стороны, если однозначность разложения на простые элементы отсутствует, то вектора показателей будут линейно зависимые, отсюда следует утверждение леммы. □

Лемма 24. *Если справедливо неравенство*

$$K_n > n,$$

то моноид $M(A_n)$ имеет единственность разложения на простые множители тогда и только тогда, когда в матрице

$$\begin{pmatrix} \alpha_{n,1,1} & \dots & \alpha_{n,1,K_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n,n,1} & \dots & \alpha_{n,n,K_n} \end{pmatrix}$$

найдётся минор порядка n отличный от нуля.

Доказательство. Действительно, наличие такого минора является необходимым и достаточным условием линейной независимости векторов показателей, что, в свою очередь, является необходимым и достаточным условием однозначности разложения на простые множители. Отсюда следует утверждение леммы. □

Теорема 13. *Для бесконечного множества простых элементов A моноид $M(A)$ имеет единственность разложения на простые множители тогда и только тогда, когда для любого n в матрице*

$$\begin{pmatrix} \alpha_{n,1,1} & \dots & \alpha_{n,1,K_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n,n,1} & \dots & \alpha_{n,n,K_n} \end{pmatrix}$$

найдётся минор порядка n отличный от нуля.

Доказательство. Если условия теоремы выполнены, то любой моноид $M(A_n)$ имеет единственность разложения на простые множители. Так как

$$M(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} M(A_n),$$

то отсюда следует утверждение теоремы. □

8. Заключение

Данная тема продолжает исследования из работы [8].

В следующих работах мы планируем рассмотреть естественно возникающие в данной области проблемы, а именно:

- аналитическое продолжение для дзета-функции произвольного моноида натуральных чисел;
- получение функционального уравнения;
- обратные ряды для дзета-функции моноида натуральных чисел без однозначного разложения на простые множители.

Важным классом моноидов натуральных чисел без однозначного разложения на простые множители, на наш взгляд, являются моноиды соответствующие подгруппам мультипликативной группы классов вычетов по произвольному модулю.

На наш взгляд, актуальным является вопрос о справедливости аналога теоремы Дэвенпорта-Хельброна для случая дзета-функции произвольного моноида натуральных чисел с однозначным разложением на простые элементы.

В заключении автор выражает свою глубокую признательность профессорам В. И. Иванову и В. Н. Чубарикову за внимание к работе и полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. М. Айгнер Комбинаторная теория. — М.: Мир, 1982. 558 с.

2. Э. Бомбьери, А. Гош Вокруг функции Дэвенпорта–Хейльбронна // УМН, 2011. Т. 66, вып. 2(398). С. 15–66.

3. С. М. Воронин Избранные труды: Математика / Под ред. А. А. Карацубы. — М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана. 2006. — 480 с.

4. С. М. Воронин, А. А. Карацуба Дзета-функция Римана. — М.: Физ-матлит, 1994. — 376 с.

5. Добровольская Л. П., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н. Гиперболические дзета-функции сеток и решёток и вычисление оптимальных коэффициентов // Чебышевский сборник 2012 Т. 13. Вып. 4(44). Тула, Из-во ТГПУ им. Л.Н.Толстого. С. 4–107.

6. Добровольский М. Н. Функциональное уравнение для гиперболической дзета-функции целочисленных решёток // Доклады академии наук 2007. Т. 412, № 3. С. 302–304.

7. Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский, В. Н. Соболева, Д. К. Соболев, Л. П. Добровольская, О. Е. Бочарова О гиперболической дзета-функции Гурвица // Чебышевский сб. 2016. Т. 17, вып. 3. С. 72–105.

8. Н. Н. Добровольский Дзета-функция моноидов натуральных чисел с однозначным разложением на простые множители // Чебышевский сб. 2017. Т. 18, вып. 4. С. 187–207.

9. Г. Дэвенпорт Мультипликативная теория чисел. — М.: Наука, 1971. — 200 с.

10. А. Гурвиц, Р. Курант Теория функций. — М.: Наука, 1968. — 618 с.

11. Прахар К., Распределение простых чисел, пер. с нем. — М.: Мир, 1967. 511 с.

12. И. И. Привалов Введение в теорию функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1977. — 444 с.

13. Р. Стенли Перечислительная комбинаторика. — М.: Мир, 1990. — 440 с.

14. Е. К. Титчмарш Теория дзета-функции Римана. — М.: И-Л, 1952. — 407 с.

15. Чандрасекхаран К. Введение в аналитическую теорию чисел. — М.: Мир, 1974. 188 с.

16. Чандрасекхаран К. Арифметические функции, пер. с англ. — М.: Наука, 1975. 272 с.

17. H. Davenport, H. Heilbronn On the zeros of certain Dirichlet series // J. London Math. Soc. 1936. Vol. 11. P. 181–185.

18. L. P. Dobrovolskaya, M. N. Dobrovolsky, N. M. Dobrovol'skii, N. N. Dobrovolsky. On Hyperbolic Zeta Function of Lattices. In: Continuous and Distributed Systems. Solid Mechanics and Its Applications. Vol. 211. 2014. P. 23–62. DOI:10.1007/978-3-319-03146-0_2.

REFERENCES

1. Ajgner M., 1982, *Kombinatornaja teorija*, Izd-vo Mir, Moskva, 558 p.

2. Bombieria E., Ghoshb A., 2011, "Around the Davenport–Heilbronn function", *Uspekhi Mat. Nauk*, 66:2(398) pp. 15–66.

3. Voronin S. M., 2006, *Izbrannye trudy: Matematika. Pod red. A. A. Karacuby*, Izd-vo MGTU im. N. Je. Baumana, Moskva, 480 p.

4. Voronin S. M., Karacuba A. A., 1994, *Dzeta-funkcija Rimana*, Izd-vo Fiz-matlit, Moskva, 376 p.

5. Dobrovol'skaja L. P., Dobrovol'skij M. N., Dobrovol'skij N. M., Dobrovol'skij N. N., 2012, "Giperbolicheskie dzeta-funkcii setok i reshjotok i vychislenie optimal'nyh kojefficientov" *Chebyshevskii Sbornik* vol 13, №4(44) pp. 4–107.

6. Dobrovol'skij M. N., 2007, "Funkcional'noe uravnenie dlja giperbolicheskoj dzeta-funkcii celochislennyh reshetok", *Doklady akademii nauk*, vol 412, № 3, pp. 302–304.

7. Dobrovolsky N. M., Dobrovolsky N. N., Soboleva V. N., Sobolev D. K., Dobrovol'skaya L. P., Bocharova O. E., 2016, "On hyperbolic Hurwitz zeta function", *Chebyshevskii Sbornik*, vol 17, № 3 pp. 72–105.

8. Dobrovolsky N. N., 2017, "The zeta-function is the monoid of natural numbers with unique factorization", *Chebyshevskii Sbornik*, vol 18, № 4 pp. 187–207.

9. Davenport H., 1971, *Mul'tiplikativnaja teorija chisel*, Izd-vo Nauka, Moskva, 200 p.

10. Gurvic A., Kurant R., 1968, *Teorija funkcij*, Izd-vo Nauka, Moskva, 618 p.

11. Prahar K., 1967, *Raspredelenie prostyh chisel, per. s nem*, Izd-vo Mir, Moskva, 511 p.

12. Privalov I. I., 1977, *Vvedenie v teoriju funkcij kompleksnogo peremennogo*, Izd-vo Nauka, Moskva, 444 p.

13. Stenli R., 1990, *Perechislitel'naja kombinatorika*, Izd-vo Mir, Moskva, 440 p.

14. Titchmarsh E. K., 1952, *Teorija dzeta-funkcii Rimana* Izd-vo I-L, Moskva, 407 p.

15. Chandrasekharan K., 1974, *Vvedenie v analiticheskuju teoriju chisel*, Izd-vo Mir, Moskva, 188 p.

16. Chandrasekharan K., 1975, *Arifmeticheskie funkcii, per. s angl*, Izd-vo Nauka, Moskva, 272 p.

17. Davenport H., Heilbronn H., 1936, "On the zeros of certain Dirichlet series", *J. London Math. Soc.* Vol. 11. pp. 181–185.

18. Dobrovolskaya L. P., Dobrovolsky M. N., Dobrovol'skii N. M., Dobrovolsky N. N., 2014, "On Hyperbolic Zeta Function of Lattices", *In: Continuous and Distributed Systems. Solid Mechanics and Its Applications*, Vol. 211. pp. 23–62. DOI:10.1007/978-3-319-03146-0_2.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 19. Выпуск 1

УДК 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-1-106-123

Гипотеза о «заградительном ряде» для дзета-функций моноидов с экспоненциальной последовательностью простых[1]

Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры прикладной математики и информатики, Тульский государственного университет.
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com
Добровольский Михаил Николаевич — кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Геофизический центр РАН.
e-mail: m.dobrovolsky@gcras.ru
Добровольский Николай Михайлович — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой алгебры, математического анализа и геометрии, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого.
e-mail: dobrovol@tsput.ru
Балаба Ирина Николаевна — доцент, доктор физико-математических наук, профессор кафедры алгебры, математического анализа и геометрии, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого.
e-mail: ibalaba@mail.ru
Реброва Ирина Юрьевна — кандидат физико-математических наук, доцент, декан факультета математики, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого.
e-mail: i_rebrova@mail.ru

Аннотация

В работе продолжено изучение нового класса рядов Дирихле — дзета-функции моноидов натуральных чисел. Прежде всего детально изучена дзета функция $\zeta(M(q)|\alpha)$ геометрической прогресс $M(q)$ с первым членом равным 1 и произвольным натуральным знаменателем $q > 1$, которая является простейшем моноидом натуральных чисел с однозначным разложением на простые элементы моноида. Для мероморфной функции $\zeta(M(q)|\alpha) = \frac{q^\alpha}{q^\alpha - 1}$, имеющей множество полюсов

$$S(M(q)) = \left\{ \frac{2\pi i k}{\ln q} \middle| \, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

получены представления:

$$\zeta(M(q)|\alpha) = \frac{q^{\frac{\alpha}{2}}}{\alpha \ln q} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha^2 \ln^2 q}{4\pi^2 n^2}\right)^{-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha \ln q} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha \ln q}{\alpha^2 \ln^2 q + 4n^2\pi^2} =$$
$$= \frac{q^{\frac{\alpha}{2}} \alpha \ln q}{4\pi^2} \Gamma\left(\frac{\alpha i \ln q}{2\pi}\right) \Gamma\left(-\frac{\alpha i \ln q}{2\pi}\right).$$

Для дзета-функции $\zeta(M(\vec{p})|\alpha)$ моноида $M(\vec{p})$ с конечным числом простых чисел $\vec{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ получено разложение в бесконечное произведение

$$\zeta(M(\vec{p})|\alpha) = \frac{P(\vec{p})^{\frac{\alpha}{2}}}{\alpha^n Q(\vec{p})} \prod_{\nu=1}^{n} \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha^2 \ln^2 p_\nu}{4\pi^2 m^2}\right)^{-1},$$

[1]Работа подготовлена по гранту РФФИ №16-41-710194_р_центр_а

где $P(\vec{p}) = p_1 \dots p_n$, $Q(\vec{p}) = \ln p_1 \dots \ln p_n$, и найдено функциональное уравнение

$$\zeta(M(\vec{p})| - \alpha) = (-1)^n \frac{\zeta(M(\vec{p})|\alpha)}{P(\vec{p})^\alpha}.$$

Для моноида натуральных чисел $M^*(\vec{p}) = \mathbb{N} \cdot M^{-1}(\vec{p})$ с однозначным разложением на простые множители, состоящим из натуральных чисел n взаимно простых с $P(\vec{p}) = p_1 \dots p_n$, и для эйлерово произведение $P(M^*(\vec{p})|\alpha)$, состоящего из сомножителей по всем простым числам отличным от $p_1, \dots, p_n$, найдено функциональное уравнение

$$\zeta(M^*(\vec{p})|\alpha) = M(\vec{p}, \alpha)\zeta(M^*(\vec{p})|1 - \alpha),$$

где

$$M(\vec{p}, \alpha) = M(\alpha) \cdot \frac{M_1(\vec{p}, \alpha)}{M_1(\vec{p}, 1 - \alpha)}, \quad M_1(\vec{p}, \alpha) = \prod_{\nu=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_\nu^\alpha}\right).$$

Доказано, что для любого бесконечного множества простых $\mathbb{P}_1$ не существует аналитической функции равной

$$\lim_{n \to \infty} \zeta(M(\vec{p}_n)|\alpha)$$

на всей комплексной плоскости.

Сформулирована гипотеза о заградительном ряде для любого экспоненциального множества PE простых чисел.

В заключении рассмотрены актуальные задачи с дзета-функциями моноидов натуральных чисел, требующие дальнейшего исследования.

Ключевые слова: дзета-функция Римана, ряд Дирихле, дзета-функция моноида натуральных чисел, эйлерово произведение, логарифм эйлерова произведения.

Библиография: 17 названий.

Для цитирования:

Н. Н. Добровольский, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, И. Н. Балаба, И. Ю. Реброва. Гипотеза о «заградительном ряде» для дзета-функций моноидов с экспоненциальной последовательностью простых // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, вып. 1, С. 106–123.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 19. No. 1

UDC 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-1-106-123

About «zagrobelna the series» for the zeta function of monoids with exponential sequence of simple

Dobrovolsky Nikolai Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, assistant of the department of applied mathematics and computer science, Tula State University.
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com
Dobrovolsky Mikhail Nikolaevich — candidate of candidate of physical and mathematical sciences, senior researcher, Geophysical centre of RAS.
e-mail: m.dobrovolsky@gcras.ru
Dobrovolsky Nikolai Mihailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the department of algebra, mathematical analysis and geometry, Tula State L. N. Tolstoy Pedagogical University.
e-mail: dobrovol@tsput.ru
Balaba Irina Nikolaevna — doctor of physical and mathematical sciences, assistant professor, professor of the department of algebra, mathematical analysis and geometry, Tula State L. N. Tolstoy Pedagogical University.
e-mail: ibalaba@mail.ru
Rebrova Irina Yuryevna — candidate of physical and mathematical Sciences, associate professor, dean of the faculty of mathematics, physics and computer science, Tula State L. N. Tolstoy Pedagogical University.
e-mail: i_rebrova@mail.ru

Abstract

The work continues the study of a new class of Dirichlet series — Zeta function of monoids of natural numbers. First of all, we study in detail the Zeta function $\zeta(M(q)|\alpha)$ of geometric progress $M(q)$ with the first term equal to 1 and an arbitrary natural denominator $q > 1$, which is the simplest monoid of natural numbers with a unique decomposition into simple elements of the monoid. For a meromorphic function $\zeta(M(q)|\alpha) = \frac{q^\alpha}{q^\alpha - 1}$ with many poles

$$S(M(q)) = \left\{ \frac{2\pi i k}{\ln q} \middle| \, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

representations are received:

$$\zeta(M(q)|\alpha) = \frac{q^{\frac{\alpha}{2}}}{\alpha \ln q} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha^2 \ln^2 q}{4\pi^2 n^2}\right)^{-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha \ln q} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha \ln q}{\alpha^2 \ln^2 q + 4n^2\pi^2} =$$
$$= \frac{q^{\frac{\alpha}{2}} \alpha \ln q}{4\pi^2} \Gamma\left(\frac{\alpha i \ln q}{2\pi}\right) \Gamma\left(-\frac{\alpha i \ln q}{2\pi}\right).$$

For the Zeta function $\zeta(M(\vec{p})|\alpha)$ of the monoid $M(\vec{p})$ with a finite number of primes $\vec{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ the decomposition into an infinite product is obtained

$$\zeta(M(\vec{p})|\alpha) = \frac{P(\vec{p})^{\frac{\alpha}{2}}}{\alpha^n Q(\vec{p})} \prod_{\nu=1}^{n} \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha^2 \ln^2 p_\nu}{4\pi^2 m^2}\right)^{-1},$$

where $P(\vec{p}) = p_1 \dots p_n$, $Q(\vec{p}) = \ln p_1 \dots \ln p_n$, and a functional equation is found

$$\zeta(M(\vec{p})| - \alpha) = (-1)^n \frac{\zeta(M(\vec{p})|\alpha)}{P(\vec{p})^\alpha}.$$

For the monoid of positive integers $M^*(\vec{p}) = \mathbb{N} \cdot M^{-1}(\vec{p})$ with a unique Prime factorization consisting of positive integers n mutually Prime with $P(\vec{p}) = p_1 \dots p_n$, and for the Euler product $P(M^*(\vec{p})/\ alpha)$, consisting of factors for all primes other than $p_1, \dots, p_n$, a functional equation is found

$$\zeta(M^*(\vec{p})|\alpha) = M(\vec{p}, \alpha)\zeta(M^*(\vec{p})|1 - \alpha),$$

where

$$M(\vec{p}, \alpha) = M(\alpha) \cdot \frac{M_1(\vec{p}, \alpha)}{M_1(\vec{p}, 1 - \alpha)}, \quad M_1(\vec{p}, \alpha) = \prod_{\nu=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_\nu^\alpha}\right).$$

It is proved that for any infinite set of Prime $\mathbb{P}_1$ there is no analytic function equal to

$$\lim_{n \to \infty} \zeta(M(\vec{p}_n)|\alpha)$$

on the whole complex plane.

The protective series conjecture is formulated for any exponential set of PE primes.

In conclusion, topical problems with zeta-functions of monoids of natural numbers that require further investigation are considered.

Keywords: Riemann zeta function, Dirichlet series, zeta function of the monoid of natural numbers, Euler product, logarithm of the Euler product.

Bibliography: 17 titles.

For citation:
N. N. Dobrovol'skii, M. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, I. N. Balaba, I. Yu. Rebrova, 2018, "About «zagrobelna the series» for the zeta function of monoids with exponential sequence of simple" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 1, pp. 106–123.

1. Введение 110
2. Дзета-функция геометрической прогрессии и теоремы Вейерштрасса и Миттаг–Леффлера 111
3. Дзета-функция геометрической прогрессии и гамма-функция Эйлера 115
4. Дзета-функция моноида с конечным числом простых чисел 116
5. Множитель Римана и модифицированный множитель Римана 117
6. Экспоненциальная последовательность простых чисел 119
7. Заключение 120
Список цитированной литературы 121
REFERENCES 122

1. Введение

Гиперболическая дзета-функция решёток задаётся в правой полуплоскости $\alpha > 1$ дзета рядом[2]

$$\zeta(\Lambda|\alpha) = \sum_{\vec{x}\in\Lambda}{}' (\overline{x_1}\dots\overline{x_s})^{-\alpha}. \tag{1}$$

Очевидно, что при $s = 1$ гиперболическая дзета-функции решётки выражается через дзета-функцию Римана. В многомерном случае имеются свои существенно новые задачи, не имеющие аналогов в одномерном случае.

В работе [5] приводятся необходимые факты из истории создания и развития теории гиперболической дзета-функции решёток. Выделены основные направления современных исследований по развитию этой теории.

Не повторяясь в перечислении основных достижений в области развития теории гиперболической дзета-функции решёток, укажем на одно новое направление исследований. Проблема аналитического продолжения гиперболической дзета-функции решёток на всю комплексную плоскость в последнее время привела к необходимости сосредоточиться на одномерном случае, а именно, на гиперболической дзета-функции Гурвица.

В процессе анализа различных одномерных случаев неожиданно возник вопрос о дзета-функциях моноидов натуральных чисел. Среди всех моноидов натуральных чисел особое место занимают моноиды с однозначным разложением на простые элементы, так как именно для них имеет место разложение дзета-функциях моноида в эйлерово произведение. Здесь важно подчеркнуть, что среди простых элементов моноида встречаются как простые числа, так и псевдопростые числа. В работе [9] начаты эти исследования, а в [10] они продолжены.

Обратим внимание, что простейшем примером моноида с однозначным разложением на простые элементы является геометрическая прогрессия $M(q)$ с начальным членом равным единице и знаменателем $q > 1$ — произвольным натуральным числом. В следующем разделе мы более подробно обсудим этот случай и возникающие проблемы.

В работе [9] введено понятие экспоненциальной системы PE простых чисел и показано, что дзета-функция минмального моноида $M(PE)$ натуральных чисел, образованного произвольной экспоненциальной системой PE простых чисел, обладает эйлеровым произведением, сходящемся в правой полуплоскости $\alpha = \sigma + it$, $\sigma > 0$. Таким образом, голоморфная дзета-функция $\zeta(M(PE)|\alpha)$ принимает все значения, кроме 0.

Цель данной статьи сформулировать гипотезу, что не существует аналитического продолжения дзета-функции $\zeta(M(PE)|\alpha)$ в левую полуплоскость $\sigma \leqslant 0$ из-за наличия всюду

[2]Символ $\sum'$ означает, что из области суммирования исключается $\vec{x} = \vec{0}$, и для любого вещественного x величина $\overline{x}$ задается равенством $\overline{x} = \max(1, |x|)$.

плотного на мнимой оси заградительного ряда

$$S(M(PE)) = \left\{ \frac{2\pi i k}{\ln p_n} \middle| k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}, \quad PE = \{p_n | n \in \mathbb{N}\},$$

состоящего из объединения множеств полюсов дзета-функций $\zeta(M(\vec{p}_n)|\alpha)$.

2. Дзета-функция геометрической прогрессии и теоремы Вейерштрасса и Миттаг–Леффлера

Прежде всего, рассмотрим целую функцию $q^\alpha - 1$, которая имеет бесконечно много нулей, а, именно, $\alpha = 0$ и $\alpha_n = \frac{2\pi n i}{\ln q}$ $(n = \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Лемма 1. *Справедливо равенство*

$$e^\alpha - 1 = e^{\frac{\alpha}{2}} \alpha \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha^2}{4\pi^2 n^2}\right). \tag{2}$$

Доказательство. Хорошо известно разложение в бесконечное произведение (см. [14], стр. 235)

$$\sin \alpha = \alpha \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\alpha^2}{n^2 \pi^2}\right).$$

Применяя формулу Эйлера $\sin \alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$, получим

$$e^\alpha - 1 = e^{\frac{\alpha}{2}} \left(e^{\frac{\alpha}{2}} - e^{-\frac{\alpha}{2}}\right) = 2ie^{\frac{\alpha}{2}} \frac{e^{-i\frac{i\alpha}{2}} - e^{i\frac{i\alpha}{2}}}{2i} = -2ie^{\frac{\alpha}{2}} \sin\left(\frac{i\alpha}{2}\right).$$

Отсюда следует, что

$$e^\alpha - 1 = -2ie^{\frac{\alpha}{2}} \frac{i\alpha}{2} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\left(\frac{i\alpha}{2}\right)^2}{n^2\pi^2}\right) = e^{\frac{\alpha}{2}} \alpha \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha^2}{4\pi^2 n^2}\right)$$

и утверждение леммы доказано. □

Следствие 1. *Справедливо равенство*

$$q^\alpha - 1 = q^{\frac{\alpha}{2}} (\alpha \ln q) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha^2 \ln^2 q}{4\pi^2 n^2}\right). \tag{3}$$

Доказательство. Действительно,

$$q^\alpha - 1 = e^{\alpha \ln q} - 1 = e^{\frac{\alpha \ln q}{2}} (\alpha \ln q) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{(\alpha \ln q)^2}{4\pi^2 n^2}\right) =$$

$$= q^{\frac{\alpha}{2}} (\alpha \ln q) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha^2 \ln^2 q}{4\pi^2 n^2}\right).$$

□

Таким образом, для целой функции $q^\alpha - 1$ теорема Вейерштрасса имеет вид:

$$q^\alpha - 1 = q^{\frac{\alpha}{2}} (\alpha \ln q) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha^2 \ln^2 q}{4\pi^2 n^2}\right). \tag{4}$$

Дзета-функция геометрической прогрессии $M(q)$ задается формулой

$$\zeta(M(q)|\alpha)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(q^n)^\alpha}=\frac{1}{1-\frac{1}{q^\alpha}}\quad(\alpha=\sigma+it,\,\sigma>0). \tag{5}$$

Из формулы (5) следует, что дзета-функция геометрической прогрессии аналитическая функция во всей α-плоскости кроме точек $\alpha_0=0$, где у неё простой полюс с вычетом

$$\mathrm{Res}_0\zeta(M(q)|\alpha)=\frac{1}{\ln q}.$$

и точек $\alpha_k=\frac{2ki\pi}{\ln q}$ $(k=\pm1,\pm2,\ldots)$, в которых простые полюса с вычетами

$$\mathrm{Res}_{\frac{2ki\pi}{\ln q}}\zeta(M(q)|\alpha)=\frac{1}{\ln q}.$$

Действительно, применяя правило Лопиталя, получим

$$\mathrm{Res}_0\zeta(M(q)|\alpha)=\lim_{\alpha\to0}\frac{\alpha}{1-\frac{1}{q^\alpha}}=\lim_{\alpha\to0}\frac{\alpha}{q^\alpha-1}=\lim_{\alpha\to0}\frac{1}{\ln q q^\alpha}=\frac{1}{\ln q}.$$

Аналогично,

$$\mathrm{Res}_{\frac{2ki\pi}{\ln q}}\zeta(M(q)|\alpha)=\lim_{\alpha\to\frac{2ki\pi}{\ln q}}\frac{\alpha-\frac{2ki\pi}{\ln q}}{1-\frac{1}{q^\alpha}}=\lim_{\alpha\to\frac{2ki\pi}{\ln q}}\frac{\alpha-\frac{2ki\pi}{\ln q}}{q^\alpha-1}=\lim_{\alpha\to\frac{2ki\pi}{\ln q}}\frac{1}{q^\alpha\ln q}=\frac{1}{\ln q}.$$

Отсюда следует, что $\zeta(M(q)|\alpha)$ — мероморфная функция на комплексной α-плоскости, которая имеет следующее разложение в бесконечное произведение

$$\zeta(M(q)|\alpha)=\frac{q^{\frac{\alpha}{2}}}{\alpha\ln q}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{\alpha^2\ln^2 q}{4\pi^2n^2}\right)^{-1}. \tag{6}$$

А следовательно, к ней применима теорема Миттаг–Леффлера (см. [14], стр. 225). Таким образом, мы получаем, что для некоторой целой функции $h_q(\alpha)$ и некоторых многочленов $P_{n,q}(\alpha)$ для $\zeta(M(q)|\alpha)$ справедливо разложение в ряд

$$\zeta(M(q)|\alpha)=h_q(\alpha)+\frac{1}{\alpha\ln q}+$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\left(\alpha-\frac{2ni\pi}{\ln q}\right)\ln q}+P_{n,q}(\alpha)+\frac{1}{\left(\alpha+\frac{2ni\pi}{\ln q}\right)\ln q}+P_{-n,q}(\alpha)\right). \tag{7}$$

Теперь возникают два естественных вопроса: Как найти целую функцию $h_q(\alpha)$? И как найти многочлены $P_{n,q}(\alpha)$, которые обеспечат сходимость ряда?

На второй вопрос ответ несложно найти в книге Б. В. Шабата (см. [14], стр. 226). Надо положить $P_{n,q}(\alpha)=\frac{1}{2ni\pi}$.

Действительно,

$$\frac{1}{\left(\alpha-\frac{2ni\pi}{\ln q}\right)\ln q}+\frac{1}{2ni\pi}=\frac{\alpha\ln q}{(\alpha\ln q-2ni\pi)2ni\pi}.$$

Далее имеем:

$$\frac{\alpha\ln q}{(\alpha\ln q-2ni\pi)2ni\pi}+\frac{\alpha\ln q}{(\alpha\ln q+2ni\pi)(-2ni\pi)}=\frac{2\alpha\ln q}{\alpha^2\ln^2 q+4n^2\pi^2}.$$

Отсюда следует, что

$$\zeta(M(q)|\alpha) = h_q(\alpha) + \frac{1}{\alpha \ln q} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha \ln q}{\alpha^2 \ln^2 q + 4n^2\pi^2}.$$

Для дзета-функции геометрической прогрессии легко найти функциональное уравнение. Действительно,

$$\zeta(M(q)|-\alpha) = \frac{q^{-\alpha}}{q^{-\alpha}-1} = \frac{1}{1-q^{\alpha}} = -\frac{\zeta(M(q)|\alpha)}{q^{\alpha}}.$$

И так, целая функция $h_q(\alpha)$ задаётся равенством

$$h_q(\alpha) = 1 + \frac{1}{q^{\alpha}-1} - \frac{1}{\alpha \ln q} - 2\alpha \ln q \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 \ln^2 q + 4n^2\pi^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n,q}}{n!}\alpha^n,$$

где

$$a_{n,q} = h_q^{(n)}(\alpha)\Big|_{\alpha=0}.$$

Так как

$$h_q(-\alpha) = 1 + \frac{1}{q^{-\alpha}-1} + \frac{1}{\alpha \ln q} + 2\alpha \ln q \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 \ln^2 q + 4n^2\pi^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n,q}(-1)^n}{n!}\alpha^n,$$

то

$$h_q(\alpha) + h_q(-\alpha) = 2 + \frac{1}{q^{\alpha}-1} + \frac{1}{q^{-\alpha}-1} = 1 = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{2n,q}}{(2n)!}\alpha^{2n},$$

поэтому $a_{0,q} = \frac{1}{2}$ и $a_{2n,q} = 0$ $(n \geqslant 1)$,

$$h_q(\alpha) = \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{2n+1,q}}{(2n+1)!}\alpha^{2n+1}.$$

По правилу Лопиталя для $a_{0,q}$ находим аналогичный результат:

$$a_{0,q} = \lim_{\alpha\to 0}\left(1 + \frac{1}{q^{\alpha}-1} - \frac{1}{\alpha \ln q}\right) = 1 + \lim_{\alpha\to 0} \frac{\alpha \ln q - q^{\alpha} + 1}{(q^{\alpha}-1)\alpha \ln q} = 1 +$$
$$+ \lim_{\alpha\to 0} \frac{\ln q - \ln qq^{\alpha}}{\ln qq^{\alpha}\alpha \ln q + (q^{\alpha}-1)\ln q} = 1 + \lim_{\alpha\to 0} \frac{1-q^{\alpha}}{q^{\alpha}\alpha \ln q + q^{\alpha} - 1} =$$
$$= 1 - \lim_{\alpha\to 0} \frac{q^{\alpha} \ln q}{q^{\alpha}\alpha \ln^2 q + q^{\alpha} \ln q + q^{\alpha} \ln q} = \frac{1}{2}.$$

Рассмотрим геометрическую прогрессию $M(e) = \{e^n | n \geqslant 0\}$. Она не является моноидом натуральных чисел, но — моноид трансцендентных чисел. Нетрудно видеть, что дзета-функция $\zeta(M(q)|\alpha)$ моноида $M(q)$ для любого $q > 1$ легко выражается через дзета-функцию $\zeta(M(e)|\alpha)$: $\zeta(M(q)|\alpha) = \zeta(M(e)|\alpha \ln q)$.

Положим

$$h(\alpha) = 1 + \frac{1}{e^{\alpha}-1} - \frac{1}{\alpha} - 2\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 + 4n^2\pi^2} = \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{2n+1}}{(2n+1)!}\alpha^n,$$

тогда

$$\zeta(M(e)|\alpha) = h(\alpha) + \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 4n^2\pi^2}, \quad h_q(\alpha) = h(\alpha \ln q), \quad a_{n,q} = a_n \ln^n q.$$

Численные расчёты в Mathcad позволяют сделать предположение, что $h(\alpha) = \frac{1}{2}$.

Лемма 2. *Справедливо равенство* $h(\alpha) = \frac{1}{2}$.

Доказательство. Для доказательства этого факта достаточно показать, что целая функция $h(\alpha)$ ограничена по модулю на всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Для этого, прежде всего, установим, что $h(\alpha)$ периодична с периодом $2\pi i$.

Действительно,

$$h(\alpha) = \frac{e^\alpha}{e^\alpha - 1} - \frac{1}{\alpha} - 2\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 + 4n^2\pi^2} = \frac{e^\alpha}{e^\alpha - 1} - f(\alpha),$$

где

$$f(\alpha) = \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha - 2n\pi i} + \frac{1}{\alpha + 2n\pi i} \right) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{\alpha - 2n\pi i}.$$

Далее имеем:

$$f(\alpha + 2\pi i) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{\alpha + 2\pi i - 2n\pi i} =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{\alpha - 2n\pi i} - \frac{1}{\alpha - 2N\pi i} + \frac{1}{\alpha + 2(N+1)\pi i} \right) = f(\alpha).$$

И в силу периодичности e^α периодичность $h(\alpha)$ доказана.

Рассмотрим полосу $\alpha = \sigma + it$ с $-\infty < \sigma < \infty$, $-\pi \leqslant t \leqslant \pi$.

Положим $g(\alpha) = 1 + \frac{1}{e^\alpha - 1} - \frac{1}{\alpha}$ и

$$f_1(\alpha) = 2\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 + 4n^2\pi^2} = f(\alpha) - \frac{1}{\alpha},$$

тогда

$$h(\alpha) = g(\alpha) + f_1(\alpha), \quad h(0) = g(0) = \frac{1}{2}, \quad f_1(0) = 0.$$

В прямоугольнике $|\sigma| \leqslant 2\pi$, $-\pi \leqslant t \leqslant \pi$ функция $g(\alpha)$ непрерывна, следовательно ограниченна.

При $\sigma > 2\pi$ справедливы оценки

$$|g(\alpha)| = \left| 1 + \frac{1}{e^{\sigma+it} - 1} - \frac{1}{\sigma + it} \right| \leqslant \frac{e^\sigma}{e^\sigma - 1} + \frac{1}{\sigma} \to 1 \text{ при } \sigma \to \infty.$$

При $-\sigma < -2\pi$ справедливы оценки

$$|g(\alpha)| = \left| 1 + \frac{1}{e^{-\sigma+it} - 1} - \frac{1}{-\sigma + it} \right| \leqslant \frac{1}{e^\sigma - 1} + \frac{1}{\sigma} \to 0 \text{ при } \sigma \to \infty.$$

Отсюда следует, что $g(\alpha)$ ограниченно в рассматриваемой полосе.

Так как $f_1(-\alpha) = -f_1(\alpha)$, то достаточно рассмотреть полосу $\sigma \geqslant 0$, $-\pi \leqslant t \leqslant \pi$. Имеем при $\sigma > \pi$:

$$|f_1(\alpha)| \leqslant 2(\sigma + \pi) \int_{\sigma}^{\infty} \frac{dx}{\sigma^2 + 4\pi^2 x^2} = 2(\sigma + \pi) \left(\frac{\arctan\left(\frac{2\pi x}{\sigma}\right)}{2\pi\sigma} \Bigg|_0^\infty \right) = \frac{\sigma + \pi}{2\sigma} \leqslant 1.$$

При $0 \leqslant \sigma \leqslant \pi$ имеем:

$$|f_1(\alpha)| \leqslant 2(\sigma+\pi)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2\pi^2} = \frac{\sigma+\pi}{12} < 1.$$

Отсюда следует, что $f_1(\alpha)$ ограниченно в рассматриваемой полосе.

Таким образом, целая периодическая функция ограничена в полосе основного периода, следовательно, она ограничена на всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$, что доказывает, что она константа: $h(\alpha) = \frac{1}{2}$. $\square$

И так, теорема Миттаг–Леффлера для дзета-функции геометрической прогрессии записывается следующим образом:

$$\zeta(M(q)|\alpha) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha\ln q} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\alpha\ln q}{\alpha^2\ln^2 q + 4n^2\pi^2}.$$

3. Дзета-функция геометрической прогрессии и гамма-функция Эйлера

Хорошо известна формула (см. [3], стр. 326)

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} = \alpha e^{\gamma\alpha}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)e^{-\frac{\alpha}{n}}. \tag{8}$$

Из неё следует, что

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(-\alpha)} = -\alpha^2\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\alpha^2}{n^2}\right).$$

Отсюда вытекает, что

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{\alpha^2\ln^2 q}{4\pi^2 n^2}\right)^{-1} = -\left(\frac{\alpha i\ln q}{2\pi}\right)^2\Gamma\left(\frac{\alpha i\ln q}{2\pi}\right)\Gamma\left(-\frac{\alpha i\ln q}{2\pi}\right).$$

Но тогда из равенства (6) следует, что

$$\zeta(M(q)|\alpha) = \frac{q^{\frac{\alpha}{2}}\alpha\ln q}{4\pi^2}\Gamma\left(\frac{\alpha i\ln q}{2\pi}\right)\Gamma\left(-\frac{\alpha i\ln q}{2\pi}\right). \tag{9}$$

Из формулы (9) сразу следует, что дзета-функция геометрической прогрессии имеет полюса в точках $\alpha = \frac{2\pi n i}{\ln q}$, $(n \in \mathbb{Z})$, так как гамма функция имеет полюса в 0 и в отрицательных целых точках.

Также из формулы (9) сразу следует функциональное уравнение для дзета-функции геометрической прогрессии:

$$\zeta(M(q)|-\alpha) = \frac{q^{\frac{-\alpha}{2}}(-\alpha)\ln q}{4\pi^2}\Gamma\left(\frac{\alpha i\ln q}{2\pi}\right)\Gamma\left(-\frac{\alpha i\ln q}{2\pi}\right) = -\frac{\zeta(M(q)|\alpha)}{q^{\alpha}}. \tag{10}$$

Так как

$$\lim_{\sigma\to\infty}\zeta(M(q)|\alpha) = 1 \quad (\alpha = \sigma + it),$$

то

$$\lim_{\sigma\to\infty}\zeta(M(q)|-\alpha) = 0 \quad (\alpha = \sigma + it).$$

4. Дзета-функция моноида с конечным числом простых чисел

Пусть $\vec{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ — произвольный вектор с простыми $p_1 < p_2 < \ldots < p_n$. Через $M(\vec{p})$ обозначим минимальный моноид натуральных чисел, образованный простыми числами $p_1, \ldots, p_n$, тогда, очевидно, что для дзета-функции $\zeta(M(\vec{p})|\alpha)$ справедливо равенство

$$\zeta(M(\vec{p})|\alpha) = \prod_{\nu=1}^{n} \zeta(M(p_\nu)|\alpha) = \prod_{\nu=1}^{n} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_\nu^\alpha}}. \tag{11}$$

Из равенств (11) и (6) следует, что дзета-функция $\zeta(M(\vec{p})|\alpha)$ — мероморфная функция на комплексной α-плоскости, которая имеет следующее разложение в бесконечное произведение

$$\zeta(M(\vec{p})|\alpha) = \prod_{\nu=1}^{n} \left(\frac{p_\nu^{\frac{\alpha}{2}}}{\alpha \ln p_\nu} \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha^2 \ln^2 p_\nu}{4\pi^2 m^2} \right)^{-1} \right). \tag{12}$$

Если положить $P(\vec{p}) = p_1 \ldots p_n$, $Q(\vec{p}) = \ln p_1 \ldots \ln p_n$, то равенство (12) можно переписать в следующем виде:

$$\zeta(M(\vec{p})|\alpha) = \frac{P(\vec{p})^{\frac{\alpha}{2}}}{\alpha^n Q(\vec{p})} \prod_{\nu=1}^{n} \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha^2 \ln^2 p_\nu}{4\pi^2 m^2} \right)^{-1}. \tag{13}$$

Будем через $S(A)$ обозначать множество полюсов дзета-функции

$$\zeta(A|\alpha) = \sum_{n \in A} \frac{1}{n^\alpha} \quad (\alpha = \sigma + it, \sigma > 1)$$

произвольного множества натуральных чисел A. Если A — конечное множество, то $S(A) = \emptyset$.

Используя эти обозначения, получим равенство

$$S(M(\vec{p})) = \bigcup_{\nu=1}^{n} S(M(p_\nu)) = \left\{ \frac{2\pi k i}{\ln p_\nu} \middle| \, k \in \mathbb{Z},\, \nu = 1, 2, \ldots, n \right\}.$$

Для дзета-функции $\zeta(M(\vec{p})|\alpha)$ справедливо функциональное уравнение

$$\zeta(M(\vec{p})| - \alpha) = (-1)^n \frac{\zeta(M(\vec{p})|\alpha)}{P(\vec{p})^\alpha}. \tag{14}$$

Обозначим через $\zeta(A, B|\alpha)$ функцию отношения двух дзета-функций:

$$\zeta(A, B|\alpha) = \frac{\zeta(A|\alpha)}{\zeta(B|\alpha)}.$$

Рассмотрим $\zeta(\mathbb{N}, M(\vec{p})|\alpha)$. Эта функция в правой полуплоскости $\alpha = \sigma + it$, $\sigma > 1$ задается дзета-рядом

$$\zeta(\mathbb{N}, M(\vec{p})|\alpha) = \zeta(M^*(\vec{p})|\alpha) = \sum_{n \in \mathbb{N} \cdot M^{-1}(\vec{p})} \frac{1}{n^\alpha} = \prod_{p \in \mathbb{P} \setminus \vec{p}} \left(1 - \frac{1}{p^\alpha} \right)^{-1} = P(M^*(\vec{p})|\alpha),$$

где моноид натуральных чисел $M^*(\vec{p}) = \mathbb{N} \cdot M^{-1}(\vec{p})$ с однозначным разложением на простые множители состоит из натуральных чисел n взаимно простых с $P(\vec{p}) = p_1 \ldots p_n$, а эйлерово произведение $P(M^*(\vec{p})|\alpha)$ состоит из сомножителей по всем простым числам отличным от $p_1, \ldots, p_n$.

В следующих разделах мы изучим аналитическое продолжение дзета-функции

$$\zeta(M^*(\vec{p})|\alpha) = \zeta(\mathbb{N}, M(\vec{p})|\alpha).$$

Рассмотрим обратный ряд $\zeta^*(M(\vec{p})|\alpha)$ для дзета-функции $\zeta(M(\vec{p})|\alpha)$. По принципу вложенности из работы [10] получаем, что

$$\zeta^*(M(\vec{p})|\alpha) = \sum_{n\in M(\vec{p})} \frac{\mu(n)}{n^\alpha} = \prod_{\nu=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_\nu^\alpha}\right),$$
$$\zeta^*(M^*(\vec{p})|\alpha) = \sum_{n\in M^*(\vec{p})} \frac{\mu(n)}{n^\alpha} = \prod_{p\neq p_\nu(\nu=1,\ldots,n)} \left(1 - \frac{1}{p^\alpha}\right),$$

где $\mu(n)$ — обычная функция Мёбиуса.

Функция $\zeta^*(M(\vec{p})|\alpha)$ задается своим эйлеровым произведением на всей комплексной плоскости и является целой функцией, для которой множество нулей совпадает с множеством полюсов $S(M(\vec{p}))$ дзета-функции $\zeta(M(\vec{p})|\alpha)$. Для неё справедливо функциональное уравнение

$$\zeta^*(M(\vec{p})| - \alpha) = (-1)^n P(\vec{p})^\alpha \zeta^*(M(\vec{p})|\alpha).$$

5. Множитель Римана и модифицированный множитель Римана

Через

$$M(\alpha) = \frac{2\Gamma(1-\alpha)}{(2\pi)^{1-\alpha}} \sin\frac{\pi\alpha}{2} \tag{15}$$

будем обозначать множитель из функционального уравнения для дзета-функции Римана (См. [12], стр. 19)

$$\zeta(\alpha) = M(\alpha)\zeta(1-\alpha). \tag{16}$$

Легко проверить, что

$$M(\alpha)\cdot M(1-\alpha) = 1. \tag{17}$$

Действительно,

$$M(\alpha)\cdot M(1-\alpha) = \frac{2\Gamma(1-\alpha)}{(2\pi)^{1-\alpha}} \sin\frac{\pi\alpha}{2} \cdot \frac{2\Gamma(\alpha)}{(2\pi)^{\alpha}} \sin\frac{\pi(1-\alpha)}{2} =$$
$$= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}{\pi} \sin\pi\alpha = 1$$

согласно формулы дополнения для гамма-функции (см. [13], стр. 19).

Множитель $M(\alpha)$ будем называть *множителем Римана*, а формулу (17) — *формулой дополнения для множителя Римана.*

Из свойств гамма-функции, определения (15) и формулы дополнения (17) следует, что множитель Римана — аналитическая функция для любого комплексного α, кроме точек $\alpha = 1, 3, 5, \ldots$ — нечетных натуральных значений, где он имеет полюс первого порядка.

Действительно, при $\alpha = n \in \mathbb{N}$ имеется полюс первого порядка у гамма-функции $\Gamma(1-\alpha)$ и это все полюса, а множитель $\sin\frac{\pi\alpha}{2}$ имеет значения

$$\sin\frac{\pi n}{2} = \begin{cases} (-1)^m, & \text{при } n = 1+2m,\ m = 0,1,2,\ldots. \\ 0, & \text{при } n = 2m,\ m\in\mathbb{N}. \end{cases}$$

Поэтому при нечетных натуральных значениях $\alpha = 1, 3, 5, \ldots$ множитель Римана $M(\alpha)$ имеет полюса с вычетом

$$\mathrm{Res}_{\alpha=1+2n} M(\alpha) = \frac{2(-1)^n}{(2\pi)^{-2n}} \mathrm{Res}_{\alpha=-2n}\Gamma(\alpha) = \frac{2(-1)^n(2\pi)^{2n}}{(2n)!}. \tag{18}$$

При натуральных четных значений $\alpha = 2n$, $(n \in \mathbb{N})$ имеем:

$$M(\alpha) = \lim_{\alpha\to 2n} \frac{2\Gamma(1-\alpha)}{(2\pi)^{1-\alpha}} \sin\frac{\pi\alpha}{2} = \frac{2}{(2\pi)^{1-2n}} \lim_{\alpha\to 2n} \Gamma(1-\alpha)(1-\alpha-(1-2n))\cdot$$
$$\cdot \lim_{\alpha\to 2n} \frac{\sin\frac{\pi\alpha}{2}}{\pi(\frac{\alpha}{2}-n)} \lim_{\alpha\to 2n} \frac{\pi(\frac{\alpha}{2}-n)}{2n-\alpha} = \frac{2}{(2\pi)^{1-2n}} \cdot \frac{(-1)^{2n-1}}{(2n-1)!} \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{(2\pi)^{2n}}{2\cdot(2n-1)!}.$$

По свойствам гаммы функции $\Gamma(1+2n) = (2n)!$, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Поэтому в четных отрицательных значениях α множитель Римана имеет нули первого порядка

$$M(-2n) = \frac{2\Gamma(1+2n)}{(2\pi)^{1+2n}} \sin(-\pi n) = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N}\bigcup\{0\}. \tag{19}$$

Так как гамма-функция не имеет нулей на всей комплексной плоскости, то нули множителя Римана являются нулями функции $\sin\frac{\pi\alpha}{2}$ и формулой (19) исчерпываются все нули множителя Римана, которые являются тривиальными нулями дзета-функции Римана.

Наконец, в точках $\alpha = -1, -3, -5, \ldots$ имеем:

$$M(\alpha) = M(1-2n) = \frac{2\Gamma(2n)}{(2\pi)^{2n}} \sin\frac{\pi(1-2n)}{2} = \frac{2(2n-1)!(-1)^n}{(2\pi)^{2n}}, \quad (n \in \mathbb{N})$$

и

$$M\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \sin\frac{\pi}{4} = \frac{2\sqrt{\pi}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \frac{\sqrt{2}}{2} = 1.$$

Теорема 1. *Для дзета-функции моноида $M^*(\vec{p})$ справедливо функциональное уравнение*

$$\zeta(M^*(\vec{p})|\alpha) = M(\vec{p},\alpha)\zeta(M^*(\vec{p})|1-\alpha), \tag{20}$$

где

$$M(\vec{p},\alpha) = M(\alpha)\cdot\frac{M_1(\vec{p},\alpha)}{M_1(\vec{p},1-\alpha)}, \quad M_1(\vec{p},\alpha) = \prod_{\nu=1}^{n}\left(1-\frac{1}{p_\nu^\alpha}\right).$$

Доказательство. Действительно, при $\alpha = -\sigma + it$, $\sigma \geqslant 0$ имеем:

$$\zeta(M^*(\vec{p})|\alpha) = \frac{\zeta(\alpha)}{\zeta(M(\vec{p})|\alpha)} = \frac{M(\alpha)\zeta(1-\alpha)}{\zeta(M(\vec{p})|\alpha)} = \frac{M(\alpha)\zeta(M(\vec{p})|1-\alpha)}{\zeta(M(\vec{p})|\alpha)}\zeta(M^*(\vec{p})|1-\alpha).$$

Отсюда следует, что

$$M(\vec{p},\alpha) = M(\alpha)\cdot\prod_{\nu=1}^{n}\frac{1-\frac{1}{p_\nu^\alpha}}{1-\frac{1}{p_\nu^{1-\alpha}}} = M(\alpha)\cdot\frac{M_1(\vec{p},\alpha)}{M_1(\vec{p},1-\alpha)},$$

что и доказывает утверждение теоремы. □

Из утверждения теоремы сразу следует, что

$$M(\vec{p},\alpha)M(\vec{p},1-\alpha) = 1, \quad M\left(\vec{p},\frac{1}{2}\right) = 1.$$

Другое важное следствие доказанной теоремы состоит в том, что дзета-функция моноида $M^*(\vec{p})$ имеет эйлеровское произведение, модифицированное функциональное уравнение и дополнительное множество *"тривиальных нулей"*, которое совпадает с множеством полюсов $S(M(\vec{p}))$ дзета-функции $\zeta(M(\vec{p})|\alpha)$ моноида $M(\vec{p})$.

6. Экспоненциальная последовательность простых чисел

В работе [9] дано следующее определение экспоненциальной последовательности простых чисел и доказана теорема.

Пусть $q \geqslant 2$ — произвольное натуральное число, тогда бесконечную последовательность простых чисел $p_1 < p_2 < \ldots < p_n < \ldots$ будем называть экспоненциальной, если выполняются соотношения $q \leqslant p_1 < q^2$, $q^\nu < p_\nu < q^{\nu+1}$ $(\nu \geqslant 2)$.

В силу постулата Бертрана, доказанного П. Л. Чебышёвым, (см. [15]) для любого $q \geqslant 2$ существует бесконечно много экспоненциальных последовательностей простых чисел.

Теорема 2. *Для любого $q \geqslant 2$ и любой экспоненциальной последовательности простых чисел $PE = \{p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots\}$ дзета ряд для дзета-функции $\zeta(M(PE))|\alpha)$ абсолютно сходится для любого α в полуплоскости $\sigma > 0$ и равномерно в полуплоскости $\sigma \geqslant \sigma_0$ для любого $\sigma_0 > 0$.*

Естественно возникает вопрос о возможности аналитического продолжения дзета-функции $\zeta(M(PE))|\alpha)$. Как будет показано дальше, ответ на этот вопрос будет, скорее всего, отрицательный. Отсюда будет следовать и отрицательный ответ на вопрос об аналитическом продолжении дзета-функции $\zeta(M^*(PE))|\alpha) = \zeta(\mathbb{N}, M(PE))|\alpha)$ моноида $M^*(PE) = \mathbb{N} \cdot M^{-1}(PE)$ с однозначным разложением на простые множители, который состоит из натуральных чисел n взаимно простых с простыми из экспоненциального множества простых PE, а эйлерово произведение $P(M^*(PE)|\alpha)$ состоит из сомножителей по всем простым числам отличным от простых из PE.

Для решения поставленной задачи рассмотрим для любого моноида $M(\vec{p})$ две аналитические функции:

$$\zeta^-(M(\vec{p})|\alpha) = \zeta(M(\vec{p})|\alpha) \quad (\alpha = \sigma + it,\ \sigma \leqslant 0), \tag{21}$$

$$\zeta^+(M(\vec{p})|\alpha) = \zeta(M(\vec{p})|\alpha) \quad (\alpha = \sigma + it,\ \sigma \geqslant 0). \tag{22}$$

Пусть $\mathbb{P}_1$ — произвольное бесконечное подмножество множества простых чисел $\mathbb{P}$, $p_1 < p_2 < p_3 < \ldots$ — естественная нумерация всех простых чисел из $\mathbb{P}_1$ и $\vec{p}_n = (p_1, \ldots, p_n)$ для любого натурального n.

Теорема 3. *Для любого $\mathbb{P}_1$ справедливы предельные соотношения*

$$\lim_{n\to\infty} \zeta^-(M(\vec{p}_n)|\alpha) = 0 \quad \textit{при } \sigma < 0, \tag{23}$$

$$\lim_{n\to\infty} \zeta^+(M(\vec{p}_n)|\alpha) = \zeta(M(\mathbb{P}_1)|\alpha) \quad \textit{при } \sigma > \sigma_{\mathbb{P}_1}, \tag{24}$$

где $\sigma_{\mathbb{P}_1} \leqslant 1$ — абсцисса абсолютной сходимости дзета-ряда для дзета-функции $\zeta(M(\mathbb{P}_1))|\alpha)$.

При этом для любой полуплоскости с $\sigma \leqslant \sigma_0 < 0$ сходимость в (23) равномерная, а в (24) эта сходимость равномерная для любой полуплоскости с $\sigma \geqslant \sigma_0 > \sigma_{\mathbb{P}_1}$.

Доказательство. Действительно, предельное соотношение (24) и соответствующая равномерная сходимость доказывается аналогично случаю дзета-функции Римана (см. [12], стр. 7).

Для доказательства предельного соотношения (23) заметим, что согласно функциональному уравнению (14) при $\sigma < 0$ имеем:

$$|\zeta(M(\vec{p_n})|\alpha)| = \frac{|\zeta(M(\vec{p_n})| - \alpha)|}{|P(\vec{p_n})^{-\alpha}|} \leqslant \frac{\zeta(M(\vec{p_n})| - \sigma)}{P(\vec{p_n})^{-\sigma}} \leqslant \frac{\zeta(M(\vec{p_n})| - \sigma_0)}{P(\vec{p_n})^{-\sigma_0}} \to 0 \quad \text{при } n \to \infty,$$

так как $P(\vec{p_n}) \to \infty$ при $n \to \infty$, $\sigma_0 < 0$ и $\zeta(M(\vec{p_n})| - \sigma_0) \leqslant \zeta(-\sigma_0)$. Тем самым теорема полностью доказана. □

Следствие 2. *Для любого бесконечного множества простых $\mathbb{P}_1$ не существует аналитической функции равной*

$$\lim_{n\to\infty} \zeta(M(\vec{p}_n)|\alpha)$$

на всей комплексной плоскости.

Доказательство. Действительно, пусть такая функция $f(\alpha)$ существует, тогда $f(\alpha) \equiv 0$ при $\sigma < 0$, но тогда она тождественный ноль на всей плоскости, что противоречит тому, что при $\sigma > \sigma_{\mathbb{P}_1}$ она должна быть равна дзета-функции $\zeta(M(\mathbb{P}_1))|\alpha)$. □

Аналогичное утверждение справедливо для $\sigma > \sigma_{\mathbb{P}_1}$

$$\lim_{n\to\infty} \zeta^*(M(\vec{p}_n)|\alpha),$$

так как в правой полуплоскости предел равен $\zeta^*(M(\mathbb{P}_1))|\alpha)$, а в левой полуплоскости $\sigma < 0$ каждая точка будет особой точкой предельной функции.

Объяснением данного явления, по-видимому, следующее. Если рассмотреть последовательность дзета-функций $\zeta(M(\vec{p}_n)|\alpha)$ мероморфных функций на комплексной α-плоскости, то мы имеем вложенную последовательность множеств полюсов этих функций:

$$S(M(\vec{p}_1)) \subset S(M(\vec{p}_2)) \subset \ldots \subset S(M(\vec{p}_n)) \subset \ldots,$$

которая сходится к множеству $S(M(\mathbb{P}_1))$, заданному равенством

$$S(M(\mathbb{P}_1)) = \bigcup_{n=1}^{\infty} S(M(\vec{p}_n)).$$

Нетрудно видеть, что множество $S(M(\mathbb{P}_1))$ всюду плотно на мнимой оси, поэтому если доказать что $S(M(\mathbb{P}_1))$ является множеством особых точек, то оно будет выполнять функции заградительного ряда для аналитического продолжения дзета-функции $\zeta(M(\mathbb{P}_1))|\alpha)$, когда $\sigma_{\mathbb{P}_1} = 0$.

Для случая $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}$ это заведомо не так, так как $\sigma_{\mathbb{P}} = 1$ и на прямой $\sigma = 1$ имеется только один полюс дзета-функции Римана. Предыдущее обсуждение позволяет сформулировать следующую гипотезу.

Гипотеза. *Для любого экспоненциального множества PE простых чисел множество $S(M(PE))$ является множеством особых точек дзета-функции $\zeta(M(PE)|\alpha)$ моноида $M(PE)$ и образует заградительный ряд для существования аналитического продолжения дзета-функции $\zeta(M(PE)|\alpha)$ в левую полуплоскость $\sigma \leqslant 0$.*

Аналогично, $S(M(PE))$ является множеством нулей функции $\zeta^*(M(PE)|\alpha)$ и образует заградительный ряд для существования аналитического продолжения дзета-функции $\zeta^*(M(PE)|\alpha)$ в левую полуплоскость $\sigma \leqslant 0$.

7. Заключение

Авторы выражают свою благодарность профессорам В. И. Иванову и В. Н. Чубарикову за полезные обсуждения и постоянное внимание к работе.

В процессе этих обсуждений наметились следующие актуальные и перспективные направления исследований.

Во-первых, встает вопрос о существовании таких бесконечных последовательностей $\mathbb{P}_1$ простых чисел, для которых дзета-функция $\zeta(M(\mathbb{P}_1))|\alpha)$ моноида $M(\mathbb{P}_1)$ с однозначным разложением на простые числа и эйлеровым произведением имела бы $\sigma_{\mathbb{P}_1} \leqslant 1$ — абсциссу абсолютной сходимости дзета-ряда для дзета-функции $\zeta(M(\mathbb{P}_1))|\alpha)$ равной заданному числу β с $0 < \beta < 1$.

Особый интерес представляют те последовательности, для которых $\beta = \frac{1}{2}$, так как для таких последовательностей множество полюсов дзета-функции соответствующего минимального моноида будет входить в множество нетривиальных нулей дзета-функции Римана.

Во-вторых, встает вопрос о связи распределения простых чисел в произвольном моноиде с однозначным разложением на простые числа и нулями дзета-функции этого моноида.

В-третьих, в случае моноидов с однозначным разложением на простые элементы, среди которых не только простые числа, но и псевдо-простые числа, какие законы распределения существуют?

Ещё более сложный вопрос — это распределение простых элементов в моноидах без однозначности разложения на простые элементы моноида.

В-четвертых, когда множество натуральных чисел разбивается на классы вычетов по модулю $q > 2$, то соответствующие дзета-функции классов вычетов, которые выражаются через дзета-функцию Гурвица, по теореме Дэвенпорта — Хейльброна имеют нули при $\sigma > 1$. Возникает вопрос, а справедлив ли аналог теоремы Дэвенпорта — Хейльброна при разбиении произвольного моноида с однозначным разложением на простые множители на классы вычетов по модулю $q > 2$?

В-пятых, для каких дзета-функций моноидов натуральных чисел существуют заградительные ряды из полюсов, наличие которых запрещает существование аналитического продолжения.

Наконец, на наш взгляд, важным направлением исследований является вопрос о разложении дзета-функции Римана в произведение различных дзета-функций множеств натуральных чисел и рядов Дирихле и изучение множеств их полюсов и нулей.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Э. Бомбьери, А. Гош Вокруг функции Дэвенпорта–Хейльбронна // УМН, 2011. Т. 66, вып. 2(398). С. 15–66.

2. С. М. Воронин Избранные труды: Математика / Под ред. А. А. Карацубы. — М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана. 2006. — 480 с.

3. С. М. Воронин, А. А. Карацуба Дзета-функция Римана. — М.: Физ-матлит, 1994. — 376 с.

4. А. Гурвиц, Р. Курант Теория функций. — М.: Наука, 1968. — 618 с.

5. С. С. Демидов, Е. А. Морозова, В. Н. Чубариков, И. Ю. Реброва, И. Н. Балаба, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, Л. П. Добровольская, А. В. Родионов, О. А. Пихтилькова Теоретико-числовой метод в приближенном анализе // Чебышевский сб. 2017. Т. 18, вып. 4. С. 6–85.

6. Добровольская Л. П., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н. Гиперболические дзета-функции сеток и решёток и вычисление оптимальных коэффициентов // Чебышевский сборник 2012 Т. 13. Вып. 4(44). Тула, Из-во ТГПУ им. Л.Н.Толстого. С. 4–107.

7. Добровольский М. Н. Функциональное уравнение для гиперболической дзета-функции целочисленных решёток // Доклады академии наук 2007. Т. 412, № 3. С. 302–304.

8. Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский, В. Н. Соболева, Д. К. Соболев, Л. П. Добровольская, О. Е. Бочарова О гиперболической дзета-функции Гурвица // Чебышевский сб. 2016. Т. 17, вып. 3. С. 72–105.

9. Н. Н. Добровольский Дзета-функция моноидов натуральных чисел с однозначным разложением на простые множители // Чебышевский сб. 2017. Т. 18, вып. 4. С. 187–207.

10. Н. Н. Добровольский О моноидах натуральных чисел с однозначным разложением на простые элементы // Чебышевский сб. 2018. Т. 19, вып. 1. С.

11. Г. Дэвенпорт Мультипликативная теория чисел. — М.: Наука, 1971. — 200 с.

12. Е. К. Титчмарш Теория дзета-функции Римана. М.: ИЛ, 1953. 408 с.

13. Э. Т. Уиттекер, Д. Н. Ватсон Курс современного анализа. Часть вторая. Трансцендентные функции. — М.: Физматгиз, 1963. 516 с.

14. Б. В. Шабат Введение в комплексный анализ — М.: Наука, 1969. — 576 с.

15. Чандрасекхаран К. Введение в аналитическую теорию чисел. — М.: Мир, 1974. 188 с.

16. H. Davenport, H. Heilbronn On the zeros of certain Dirichlet series // J. London Math. Soc. 1936. Vol. 11. P. 181–185.

17. L. P. Dobrovolskaya, M. N. Dobrovolsky, N. M. Dobrovol'skii, N. N. Dobrovolsky. On Hyperbolic Zeta Function of Lattices. In: Continuous and Distributed Systems. Solid Mechanics and Its Applications. Vol. 211. 2014. P. 23–62. DOI:10.1007/978-3-319-03146-0_2.

REFERENCES

1. Bombieria E., Ghoshb A., 2011, "Around the Davenport–Heilbronn function", *Uspekhi Mat. Nauk*, 66:2(398) pp. 15–66.

2. Voronin S. M., 2006, *Izbrannye trudy: Matematika. Pod red. A. A. Karacuby*, Izd-vo MGTU im. N. Je. Baumana, Moskva, 480 p.

3. Voronin S. M., Karacuba A. A., 1994, *Dzeta-funkcija Rimana*, Izd-vo Fiz-matlit, Moskva, 376 p.

4. Gurvic A., Kurant R., 1968, *Teorija funkcij*, Izd-vo Nauka, Moskva, 618 p.

5. Demidov S. S., Morozova E. A., Chubarikov V. N., Rebrov I. Yu., Balaba I. N., Dobrovol'skii N. N., Dobrovol'skii N. M., Dobrovol'skaya L. P., Rodionov A. V., Pikhtil'kova O. A., 2017, "Number-theoretic method in approximate analysis" *Chebyshevskii Sbornik* vol. 18, № 4. pp. 6–85.

6. Dobrovol'skaja L. P., Dobrovol'skij M. N., Dobrovol'skij N. M., Dobrovol'skij N. N., 2012, "Giperbolicheskie dzeta-funkcii setok i reshjotok i vychislenie optimal'nyh kojefficientov" *Chebyshevskii Sbornik* vol 13, №4(44) pp. 4–107.

7. Dobrovol'skij M. N., 2007, "Funkcional'noe uravnenie dlja giperbolicheskoj dzeta-funkcii celochislennyh reshetok" , *Doklady akademii nauk*, vol 412, № 3, pp. 302–304.

8. Dobrovolsky N. M., Dobrovolsky N. N., Soboleva V. N., Sobolev D. K., Dobrovol'skaya L. P., Bocharova O. E., 2016, "On hyperbolic Hurwitz zeta function" , *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 17, № 3 pp. 72–105.

9. Dobrovolsky N. N., 2017, *The zeta-function is the monoid of natural numbers with unique factorization Chebyshevskii Sbornik*, vol. 18, № 4. P. 187–207.

10. Dobrovolsky N. N., 2018, "On monoids of natural numbers with unique factorization into prime elements", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 19, № 1. P.

11. Davenport H., 1971, *Mul'tiplikativnaja teorija chisel*, Izd-vo Nauka, Moskva, 200 p.

12. Titchmarsh E. K., 1952, *Teorija dzeta-funkcii Rimana* Izd-vo I-L, Moskva, 407 p.

13. Whittaker E. T., Watson D. N., 1963, *A Course in modern analysis. Part two. Transcendental function.* — Moscow: Fizmatgiz, 516 p.

14. Shabat B. V., 1969, *Introduction to complex analysis* — M.: Science, — 576 p.

15. Chandrasekharan K., 1974, *Vvedenie v analiticheskuju teoriju chisel*, Izd-vo Mir, Moskva, 188 p.

16. Davenport H., Heilbronn H., 1936, "On the zeros of certain Dirichlet series", *J. London Math. Soc.* Vol. 11. pp. 181–185.

17. Dobrovolskaya L. P., Dobrovolsky M. N., Dobrovol'skii N. M., Dobrovolsky N. N., 2014, "On Hyperbolic Zeta Function of Lattices", *In: Continuous and Distributed Systems. Solid Mechanics and Its Applications*, Vol. 211. pp. 23–62. DOI:10.1007/978-3-319-03146-0_2.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 19. Выпуск 1

УДК 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-1-124-137

Граничное поведение и задача аналитического продолжения одного класса рядов Дирихле с мультипликативными коэффициентами как целых функций на комплексную плоскость

Кузнецов Валентин Николаевич — доктор технических наук, профессор, профессор кафедры прикладной математики и системного анализа, Саратовский государственный технический университет им. Ю. А. Гагарина.
e-mail: KuznetsovVN@info.sgu.ru
Матвеева Ольга Андреевна — кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры алгебры и теории чисел, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского.
e-mail: olga.matveeva.0@gmail.com

Аннотация

Рассматривается класс рядов Дирихле с мультипликативными коэффициентами, определяющих функции, регулярные в правой полуплоскости комплексной плоскости и допускающие аппроксимацию полиномами Дирихле в критической полосе. Показано, что условие регулярности на мнимой оси позволяет аналитически продолжить такие ряды как целые функции на комплексную плоскость.

В основе доказательсва этого факта лежат свойства аппроцксимационных полиномов Дирихле и идеи Римана-Шварца, заложенные в принципе симметрии аналитического продолжения функций комплексного переменного. Указан класс рядов Дирихле, для которых выполняется условие аналитичности на мнимой оси.

Нужно отметить, что полученный в работе результат имеет непосредственное отношение к решению известной проблемы обобщенных характеров, поставленной Ю. В. Линником и Н. Г. Чудаковым в 1950м году.

Указанный в работе подход в задаче аналитического продолжения рядов Дирихле с числовыми характерами допускает обобщение на ряды Дирихле с характерами числовых полей. Это позвволяет получить аналитическое продолжение не используя функциональное уравнение L-функций Дирихле числовых полей на комплексную плоскость.

Отметим также, что изучаемому в работе классу рядов Дирихле принадлежат и ряды Дирихле, коэффициенты которых определяются неглавными обобщенными характерами. Можно показать, что для этих рядов выполняется условие аналитического продолжения. Еще в 1984 году В. Н. Кузнецов показал, что в случае аналитического продолжения таких рядов целым образом на комплексную плоскость с определенным порядком роста модуля, то будет иметь место гипотеза Н. Г. Чудакова о том, что обобщенный характер является характером Дирихле. Но окончательное решение проблемы обобщенных характеров, поставленной в 1950м году Ю. В. Линником и Н. Г. Чудаковым, будет приведено в следующих работах авторов.

Ключевые слова: аппроксимационные полиномы Дирихле, принцип симметрии Римана-Шварца, конформные отображения

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:
В. Н. Кузнецов, О. А. Матвеева. Граничное поведение и задача аналитического продолжения одного класса рядов Дирихле с мультипликативными коэффициентами как целых функций на комплексную плоскость // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, вып. 1, С. 124–137.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 19. No. 1

UDC 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-1-124-137

Boundary behavior and the problem of analytic continuation of a certain class of Dirichlet series with multiplicative coefficients as an integral functions on the complex plane

Kuznetsov Valentin Nikolaevich — doctor of technical sciences, professor, professor of the department of applied mathematics and systems analysis, Saratov State Technical University.
e-mail: KuznetsovVN@info.sgu.ru
Matveeva Olga Andreevna — candidate of physical and mathematical sciences, assistant of the department of computer algebra and number theory, Saratov State University.
e-mail: olga.matveeva.0@gmail.com

Abstract

The paper considers the class of Dirichlet series with multiplicative coefficients defining Functions regular in the right half-plane of the complex plane and admitting Approximation by Dirichlet polynomials in the critical strip. It is shown that the regularity condition on the imaginary axis allows one to analytically continue such series as entire functions on the complex plane.

The proof of this fact is based on the properties of approximation Dirichlet polynomials and the Riemann-Schwartz ideas, embedded in the symmetry principle of analytic continuation functions of a complex variable. The class of Dirichlet series for which Analyticity analysis on the imaginary axis.

It should be noted that the result obtained in the work has a direct relation to the solution of the well-known problem of generalized characters posed by Y. V. Linnik and N. G. Chudakov in the 1950s.

The approach indicated in the paper in the problem of analytic continuation of Dirichlet series with numerical properties admits a generalization to Dirichlet series with characters of numeric fields. This encourages credit continuation without using the functional equation of the Dirichlet L-functions of numeric fields on the complex plane.

We also note that the class of Dirichlet series studied in this paper belongs to the Dirichlet series whose coefficients are determined by non-principal generalized characters. It can be shown that for these series the condition of analytic continuation. As far back as 1984, V. N. Kuznetsov showed that in the case of an analytic continuation of such series in an integral way onto the complex plane determined by the order of growth of the module, then Chudakov's hypothesis that the generalized character is a Dirichlet character will take place. But the final solution of the problem of generalized characters, put in 1950 by Y. V. Linnik and N. G. Chudakov, will be given in the following papers of the authors.

Keywords: approximation Dirichlet polynomials, the Riemann-Schwarz symmetry principle, conformal mappings

Bibliography: 15 titles.

For citation:
V. N. Kuznetsov, O. A. Matveeva, 2018, "Boundary behavior and the problem of analytic continuation of a certain class of Dirichlet series with multiplicative coefficients as an integral functions on the complex plane" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 1, pp. 124–137.

1. Введение

В начале 80-х годов прошлого столетия В. Н. Кузнецов разработал основные положения так называемого метода редукции к степенным рядам, что позволило ему получить ряд новых результатов в задаче аналитического продолжения рядов Дирихле. Так в работе [1] было показано, что ряды Дирихле с конечнозначными коэффициентами тогда и только тогда определяют целые функции с определенным порядком роста модуля, когда коэффициенты таких рядов являются периодическими, начиная с некоторого номера. В работе [2] показано, что ряд Дирихле, определяющий целую функцию, характеризуется определенными граничными свойствами соответствующего (с теми же коэффициентами, что и у ряда Дирихле) степенного ряда.

В последние годы авторы получили ряд новых результатов в задаче аналитического продолжения рядов Дирихле с конечнозначными коэффициентами. Эти результаты были получены на основании нового подхода, разработанного в работах О. А. Матвеевой (см. [3]-[6]), основанного на построении последовательности полиномов Дирихле, сходящихся в правой полуплоскости комплексной плоскости к функции, определенной рядом Дирихле, и переносе отдельных свойств таких полиномов на ряды Дирихле. Результаты относительно аналитического продолжения рядов Дирихле, полученные в этом направлении, опубликованы в работах [7]-[11].

В работе [7] было получено необходимое и достаточное условие аналитического продолжения рядов Дирихле с конечнозначными коэффициентами целым образом на комплексную плоскость, выраженное в терминах поведения чазаровских средних коэффициентов таких рядов.

В работе [8] изучалось граничное поведение функции $f(s)$, определенной рядом Дирихле

$$f(s) = \sum_{1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s}, s = \sigma + it, \tag{1}$$

где $h(n)$ конечнозначный числовой характер, имеющий ограниченную сумматорную функцию

$$S(x) = \sum_{n \le x} h(n) = Q(s), \tag{2}$$

и для которого $h(p) \neq 0$ почти для всех простых p.

Было показано, что функция $f(s)$, определенная в этом случае рядом Дирихле (1), является непрерывной на мнимой оси.

В данной работе получено условие целостности ряда Дирихле (1), выраженное в терминах граничных свойств функции $f(s)$ на мнимой оси. Это условие получено на основании аналитических свойств аппроксимационных полиномов Дирихле, которые позволили при решении задачи аналитического продолжения воспользоваться идеями Римана — Шварца, лежащих в основе принципа симметрии при аналитическом продолжении функций комплексного переменного (см. примеры [12], [13])

2. Класс рядов Дирихле. Аппроксимационные полиномы, их свойства

В дальнейшем мы будем рассматривать класс рядов Дирихле (1), для которых выполняются следующие условия:

1. функция $f(s)$, определенная рядом Дирихле (1), регулярно в полуплоскости $\sigma > 0$ и ограничена в полосе: $0 < \sigma < \infty, |t| \le T$, константой, зависящей только от величины T;

2. степенной ряд

$$g(x) = \sum_{1}^{\infty} h(n)x^n, \tag{3}$$

соответствующий ряду Дирихле (1), имеет предел в точке единица

$$\lim_{x \to 1-0} g(x) = \alpha_0$$

Как показано в работах ([7]-[11]) для таких рядов Дирихле существует последовательность полиномов Дирихле $Q_x(s)$, удовлетворяющих условиям:

1. В любой полосе: $0 < \sigma_0 \leq \sigma < \infty, |t| \leq T$, последовательность полиномов $Q_n(s)$, равномерно сходится к функции $f(s)$;

2. Пусть $\varepsilon_n \to 0$. Тогда для любого ε_{n_0} существует n_0, что при $n \geq n_0$ в полосе: $0 < \sigma_0 \leq \sigma < \infty, |t| \leq T$, выполняется неравенство

$$|t(s) - Q_n(s)| < C \cdot \varepsilon_{n_0},$$

где константа C не зависит от n и σ_0.

3. Для любой полосы $0 < \sigma_0 \leq \sigma < \infty, |t| \leq T$, существует n_0, что при $n \geq n_0$ нормы полиномов $Q_n(s)$ ограничены константой, зависящей только от величины T.

Полиномы Дирихле, удовлетворяющие перечисленным выше условиям получили название аппроксимационных полиномов для соответствующего ряда Дирихле.

Известно (см. [7]-[11]), что аппроксимационные полиномы Дирихле определяются не единственным способом. Поэтому каждый раз встает задача указать такие полиномы наиболее простого вида.

В работе [7] было показано, что в качестве аппроксимационных полиномов Дирихле для рядов Дирихле из указанного класса можно рассматривать полиномы вида

$$Q_n(s) = \sum_{k=1}^{n} \frac{h(k) r_n^k}{k^s}, \tag{4}$$

где величина r_n удовлетворяет условию $0 < r_n < 1$ и своя для каждого полинома. При этом $r_n \to 1$ при $n \to \infty$.

В дальнейшем в качестве аппроксимационных полиномов будем рассматривать полиномы вида (4).

В работах авторов [7]-[11] рассматривались отдельные классы рядов Дирихле, допускающих аппроксимацию полиномов Дирихле. В этих работах изучались отдельные свойства аппроксимационных полиномов, которые позволяли решать ряд задач, связанных с аналитическими свойствами рядов Дирихле.

В данном случае мы исследуем те свойства полиномов $Q_n(s)$, которые связаны с задачей аналитического продолжения рядов Дирихле (1) целым образом на комплексную плоскость.

Остановимся на отдельных примерах рядов Дирихле с мультипликативными коэффициентами, принадлежащих рассматриваемому классу.

Пример 1. *Рассмотрим ряд Дирихле с конечнозначными мультипликативными коэффициентами*

$$f(s) = \sum_{1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s}$$

и соответствующий степенной ряд

$$g(x) = \sum_{1}^{\infty} h(n)x^k$$

Предположим, что существует конечный предел вида

$$\lim_{x \to 1-0} g(x) = \alpha_0,$$

и для величины наилучшего приближения $\varepsilon_n(g(x))$ функции $g(x)$ на отрезке $[0;1]$ алгебраическими полиномами степени n выполняется оценка

$$\varepsilon_k(g(x)) = O(\frac{1}{n^{\varepsilon}}), \text{ где } \varepsilon > 0.$$

Тогда (см. например, [14]) имеем

$$|g(x) - \alpha_0| = O((1-x)^{\varepsilon}) \text{при } x \to 1 - 0.$$

Отсюда следует, что

$$|g(\bar{e}^x) - \alpha_0| = O(x^{\varepsilon}) \text{при } x \to 0+$$

Рассмотрим равенство, полученное из известной формулы Меллина

$$f(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} (g(e^{-x}) - \alpha_0)x^{s-1}dx + \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \alpha_0 x^{s-1}dx, \sigma > 0,$$

Отсюда, в силу предыдущей оценки следует, что $f(s)$ регулярна в полуплоскости $\sigma > -\varepsilon$.

Тогда $f(s)$ ограничена в каждой полосе: $0 < \sigma_0 \le \sigma < \infty, |t| \le T$, константой, зависящей только от величины T, и, как показано в [8], допускает в полуплоскости $\sigma > 0$ аппроксимацию полиномами Дирихле, удовлетворяющих указанным выше свойствам.

Пример 2. *Пусть коэффициенты $h(n)$ ряда Дирихле определяются конечнозначным характером и удовлетворяют следующим условиям:*

1. *сумматорная функция ограничена, т. е.*

$$S(x) = \sum_{n \le x} h(n) = O(1);$$

2. *функция $S^{(2)}(x) = \sum\limits_{n \le x} S(n)$ имеет следующую асимптотику*

$$S^{(2)}(x) = \alpha x + O(1),$$

где α может принимать и нулевое значение.

В силу известной формулы

$$f(x) = S \cdot \int_1^{\infty} \frac{S(k)}{k^{s+1}}dk, \sigma > 1,$$

и в силу 1 функция $f(s)$ продолжена регулярным образом в полуплоскость $\sigma > 0$.

В силу условия 2 в результате вычисления последнего интеграла по формуле интегрирования по частям $f(s)$ допускает аналитическое продолжение в полуплоскость $\sigma > -1$.

Отсюда следует, что $f(s)$ ограничена в полосе: $0 < \sigma_0 \le \sigma < \infty, |t| \le T$ константой, зависящей только от T.

Покажем, что соответствующий степенной ряд

$$g(x) = \sum_1^\infty h(n)x^n$$

имеет конечный предел в точке $x = 1$.

Рассмотрим частичную сумму этого ряда $S_N(x)$ и применим к ней дважды преобразование Абеля. В итоге получаем

$$S_N(x) = S(N)x^N - S(N-1)x^{N-1}(1-x) + \sum_{n=1}^{N-2} S^2(n)x^{n-2}(1-x)^2 \tag{5}$$

В силу 2 имеем

$$\sum_{n=1}^{N-2} S^2(n)x^{n-1}(1-x^2) = (1-x^2)\sum_{n=1}^{N-2} \alpha n x^{n-2} + (1-x)^2 \sum_{n=1}^{N-2} \varphi(n)x^{n-2}, \tag{6}$$

где $\varphi(n)$ — ограниченная функция.

Далее, так как

$$\sum_{n=1}^{N-2} x^{n-2} \text{ стремится к } \frac{1}{x^{(1-x)}} \text{ при } N \to \infty$$

и

$$\sum_{n=1}^{N-2} n x^{n-2} \text{ стремится к } \frac{1}{x}\left(\frac{1}{1-x}\right)' \text{ при } N \to \infty,$$

то в силу (5) и (6) следует, что $g(x)$ имеет конечный предел в точке $x = 1$.

Пример 3. *В работе [8] авторами доказано, ряды Дирихле вида*

$$f(s) = \sum_1^\infty \frac{h(n)}{n^s},$$

где $h(n)$ — неглавный обобщенный характер, принадлежат рассматриваемому классу рядов Дирихле.

Остановимся на отдельных свойствах аппроксимационных полиномов Дирихле. В работе [10] были доказаны следующие утверждения относительно полиномов $Q_n(s)$ в полуплоскости $\sigma > 1$.

Лемма 1. *Для любой бесконечной последовательности аппроксимационных полиномов $\{Q_{n_k}(s)\}$ нормы этих полиномов не ограничены в совокупности единой константой в полосе: $1 < \sigma < 1 + \delta$, где $\delta > 0$.*

Замечание 1. *Утверждение леммы 1 было получено на основании того, что функция $f(s)$, определенная рядом Дирихле (1) не ограничена в полосе: $1 < \sigma < 1 + \delta$.*

Лемма 2. *Для любого числа $w \neq 0$, существует n_0, что для всех $n \geq n_0$ имеет место равенство*

$$w = Q_n(s_n),$$

где s_n некоторая точка, лежащая в полосе: $1 < \sigma < 1 + \delta$.

Докажем два утверждения относительно нулей аппроксимационных полиномов $Q_n(s)$ вида (4) и их производных в полуплоскости $\sigma > 1$.

Лемма 3. *Для любого $\sigma_0 > 1$ существует n_0, что для всех s, лежащих в полуплоскости $\sigma \geq \sigma_0$, и для любого $n \geq n_0$ для аппроксимационного полинома $Q_n(s)$ вида (4) имеет место оценка*

$$|Q_n(s)| > C,$$

где константа $C > 0$ зависит от σ_0.

Доказательство. Во-первых, отметим, что для функции $f(s)$, определенной рядом Дирихле (1) имеет место тот факт, что для всех s, лежащих в полуплоскости $\sigma \geq \sigma_0 > 1$ имеет место оценка

$$|f(s)| > C_1, \text{ где } C_1 > 0. \tag{7}$$

Эта оценка доказывается, так же как и в случае L — функций Дирихле.

Далее, ряд Дирихле (1) абсолютно сходится в полуплоскости $\sigma \geq \sigma_0$. Следовательно, для $\varepsilon > 0$ существует n_1, что для $n \geq n_1$ и всех s, $\sigma \geq \sigma_0$, имеет место оценка

$$|f(s) - S_n(s)| < \varepsilon,$$

где $S_n(s)$ — частичная сумма этого ряда. Отсюда в силу (7) получаем

$$|S_n(s)| > C_2, \tag{8}$$

где C_2 зависит от σ_0

В силу интегрального представления Меллина при $\sigma \geq \sigma_0$ имеем

$$|S_n(s) - Q_n(s)| \leq \frac{1}{|\Gamma(s)|} \int\limits_0^\infty \left| P_n(\bar{e}^x) - \hat{P}_n(\bar{e}^x) \right| x^{\sigma-1} dx,$$

где

$$P_n(k) = \sum_{k=1}^{n} h(k) x^k, \ \hat{P}_n(k) = \sum_{k=1}^{n} h(k) r_n^k x^k, \ 0 < r_n < 1.$$

Как показано в [7] при $n \geq n_2$ имеет место оценка

$$\left| \left| P_n(x) - \hat{P}_n(x) \right| \right|_{c[0,1]} < \varepsilon.$$

Отсюда следует оценка вида

$$|S_n(s) - Q_n(s)| < C_3 \cdot \varepsilon,$$

что в силу (8) доказывает утверждение леммы 3.

Лемма 4. *Для любого $\sigma_0 > 1$ существует n_0, что для любого $n \geq n_0$ производная $Q_n'(s)$ аппроксимационного полинома $Q_n(s)$ вида (4) не равна нулю во всех точках полуплоскости $\sigma \geq \sigma_0$.*

Доказательство. В силу леммы 3 существует n_1, что для любого $n \geq n_1$ для всех точек полуплоскости $\sigma \geq \sigma_0$

$$|Q_n(s)| > C_1, \tag{9}$$

где константа C_1 зависит только от величины σ_0.

Рассмотрим $Q_n^{'}(s)$:

$$Q_n^{'}(s) = \sum_1^n \frac{h(k) r_n^k \ln k}{k^s}.$$

Запишем $Q_n(s)$ в виде

$$Q_n(s) = \sum_1^n \frac{h(k) r_n^k \ln k}{k^s} \cdot \frac{1}{\ln k}.$$

Применим к последней сумме формулу суммирования Абеля. В итоге получим оценку вида

$$\left|Q_n^{'}(s)\right| \leq \frac{1}{\ln n}\left|Q_n^{'}(s)\right| + \left|\int_1^{n-1} S^*(n)(\frac{1}{\ln u})^{'} du\right| \leq \frac{1}{\ln n}\left|Q_n^{'}(s)\right| + \frac{1}{\ln n}\max_{k\leq n}|S^*(k)|, \tag{10}$$

где

$$S^*(k) = \sum_{e\leq n} \frac{h(e) r_n^e \ln e}{e^s}.$$

В результате частичного суммирования имеем

$$|S^*(k)| \leq \ln k \left|\sum_{e\leq n} \frac{h(e) r_n^e}{e^s}\right| + \left|\int_1^k \frac{S(u)}{u} du\right|,$$

где

$$|S(u)| = \left|\sum_{m\leq u} \frac{h(m) r_n^m}{m^s}\right| < \sum_1^\infty \frac{1}{m^{\sigma_0}} < C_2$$

Отсюда получаем оценку

$$\max_{k\leq n}|S^*(k)| \leq \ln n,$$

которая в силу (10) дает следующую оценку для $Q_n(s)$:

$$|Q_n(s)| \leq \frac{1}{\ln n}\left(\left|Q_n^{'}(s)\right| + C_3\right),$$

где константа C_3 зависит от σ_0.

Отсюда следует оценка вида

$$\left|Q_n^{'}(s)\right| \geq \ln n\,|Q_n(s)| - C_3.$$

которая в силу (9) доказывает утверждение леммы 4.

Замечание 2. *В работе* [15], *гл XI, раздел 5, показано, что* $\xi^{'}(s)$, *где* $\xi(s)$ — *дзета функция Римана, имеет бесконечно много нулей, лежащих в полосе:* $1 < \sigma < 1 + \delta$. *Подобный результат следует ожидать и для функции* $f(s)$, *определенной рядом Дирихле* (1). *Но как будет видно из дальнейших рассуждений это свойство не позволяет воспользоваться идеями Римана-Шварца для задачи аналитического продолжения рядов Дирихле* (1). *Этим объясняется привлечение аппроксимационных полиномов* $Q_n(s)$.

Остановимся на одном следствии леммы 4. Рассмотрим последовательность областей D_k, ограниченных контурами Γ_k, состоящих из участков: $\Gamma_{k,1} : \sigma = \sigma_k$, $|t| \le T_k$; $\Gamma_{k,2} : \sigma_k \le \sigma \le \sigma_{k_1}$, $t = T_k$; $\Gamma_{k,3} : \sigma = \sigma_{k_1}$, $|t| \le T_k$; $\Gamma_{k,4} : \sigma_k \le \sigma \le \sigma_{k_1}$, $t = -T_k$, где $\sigma_k \to 1$, $\sigma_{k_1} \to \infty$, $T_k \to \infty$ при $k \to \infty$.

Пусть $Q_{n_k}(s)$ — последовательность аппроксимационных полиномов Дирихле вида (4), производные которых $Q'_{n_k}(s)$ удовлетворяют условиям леммы 4, т.е. $Q'_{n_k}(s) \neq 0$ при $\sigma > \sigma_k$. В этом случае, как показано в [12], имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Отображение $W = Q_{n_k}(s)$ является однолистным комформным отображением области D_k на область $\hat{D}_k$. При этом контур Γ_k отображается в простой жордановый контур γ_k , который является границей области $\hat{D}_k$.*

3. Аппроксимационный подход в задаче аналитического продолжения рядов Дирихле с мультипликативными коэффициентами

В данном разделе для рядов Дирихле (1) получено условие на граничное поведение таких рядов, при котором ряды Дирихле определяют целые функции. В основе доказательства этого результата лежат свойства аппроксимации полиномов, позволившие воспользоваться идеями Римана — Шварца, заложенными в принципе симметрии аналитического продолжения функций комплексного переменного.

3.1. Об одном варианте реализации принципа симметрии в задаче аналитического продолжения рядов Дирихле

Рассмотрим цепочку конформных отображений, связанных с аппроксимационными полиномами $Q_n(s)$.

В силу теоремы 2 полином $Q_{n_k}(s)$ конформно отображает область D_k на область $\hat{D}_k$

$$Q_{n_k}(s) : D_k \to \hat{D}_k. \tag{11}$$

Пусть $Q_{n_k}(s_k) = w_k$, где s_k точка, лежащая в окрестности центра области D_k.

По теореме Римана о существовании конформного отображения области на круг с центром в начале координат (см. [12], стр. 32) существует конформное отображение $\Psi_k(s)$:

$$\Psi_k(s) : \hat{D}_k \to D_{R_k} \tag{12}$$

где $\Psi_k(w_k) = 0$, $\Psi'_k(W_k) > 0$, и где D_{R_k} — круг радиусом R_k, равного конформному радиусу области D_k относительно точки S_k.

Отображением (11) и (12) определяют конформное отображение Φ_k.

$$\Phi_k : D_k \to D_{R_k}, \tag{13}$$

где $\Phi_k(s_k) = 0$, $\Phi'_k(s_k) = 1$.

Существование такого отображения следует из условия (11) и доказательства теоремы Римана о существовании конформного отображения (см. еще раз [12] стр. 32-35)

Отметим, что в [12] на стр. 55 показано, что $R_k > d_{s_k}$, где d_{s_k} — расстояние от точки S_k до границы области D_k. Таким образом, в нашем случае выполняется условие

$$R_k \to \infty, \text{при } k \to \infty \tag{14}$$

Обозначим через φ_k отображение круга D_{R_k} на круг D_{R_1}, т.е. $\varphi_k : D_{R_k} \to D_{R_1}$. Тогда, учитывая (11), (12), (13), получим конформное отображение

$$\Psi_k : D_k \to D_{R_1}, \tag{15}$$

где $\Psi_k(s_k) = 0, \Psi_k'(s_k) > 0$.

В силу теоремы о непрерывной зависимости отображающий функции от области (см. [13], т. 1. на стр. 432) последовательность конформных отображений (15) равномерно сходится на любом замкнутом ограниченном подмножестве полуплоскости $D : \sigma > 1$, к функции $\Psi(s)$, конформно отображающий эту полуплоскость на единичной круг.

$$\Psi : D \to D_{R_1}, \tag{16}$$

При этом граница полуплоскости соответствует граничным точкам единичного круга.

Пусть s_0 — внутренняя точка полуплоскости D и s_0^* симметричная ей относительно прямой $\sigma = \frac{1}{2}$. Точка полуплоскости $\sigma < 0$. Обозначим $u_0 = \Psi(s_0)$ и v_0 — симметричной ей относительно единичной окружности. В силу (14) пусть k_0 наименьшее число такое, что v_0 — внутренняя точка круга $D_{R_{k_0}}$.

Пусть далее

$$w_1 = \Psi_{k_0}^{-s}(v_0)$$

В силу леммы 2 существует полином $Q_{n_k}(s)$ и также S_{n_k} $(1 < \sigma_{n_k} < \delta)$, что

$$w_1 = Q_{n_k}(s_{n_k}), \tag{17}$$

Рассмотрим функцию $F(s^*)$, заданной в левой полуплоскости $(\sigma^* < 0)$ — следующим образом

$$F(s_0^*) = Q_{n_k}(1 - \overline{s}_{n_k}), \tag{18}$$

где $Q_{n_k}(s_{n_k})$ определено по формуле (17), и где $\overline{s}_{n_k}$ — точка, сопряженная точке s_{n_k}.

Отметим, что сдвиг на единицу значения $Q_{n_k}(s_{n_k})$ в равенстве (18) определяется тем, что мы строим функцию, симметричную функции $f(s)$ не относительно $\sigma = 0$, а относительно $\sigma = \frac{1}{2}$.

Отметим так же, что в формуле (17) полином $Q_{n_k}(s)$ и точка s_{n_k} определяются не однозначно, но значение $F(s_0^*)$ не зависит от их выбора. Ниже будут рассматриваться различные способы выбора $Q_{n_k}(s)$ и s_{n_k}.

Функция $F(s^*)$, заданная по формуле (18), определена и регулярна в любой точке полуплоскости $\sigma < 0$. Она определена в точке S^*, для которой, согласно (11) $s \neq s_k$. Но в тоже время в качестве S_k можно взять другую точку, лежащую в окружности центра области D_k.

Регулярность функции $F(s^*)$ следует из регулярности отображения (18).

Ниже будут получены условия на граничное поведение ряда Дирихле (1), при котором функция $F(s^*)$, заданная по формуле (18), определяет аналитическое продолжение ряда Дирихле целым образом на конечную плоскость.

3.2. Граничное поведение функции $f(s)$ и условия аналитического продолжения ряда Дирихле (1) целым образом на комплексную плоскость

Изучим поведение функции $F(s^*)$ при подходе к мнимой оси. Рассмотрим точку s_0, лежащую на оси $\sigma = 1$ и некоторую последовательность точек $s_m \to s_0$, а также последовательность $s_m^* \to s_0^*$. Пусть соответственно $v_m \to v_0$, $v_m^* \to v_0$ и пусть точки $w_{m,1}$ определяются числами v_m^*, т.е.

$$w_{m,1} = Q_{n_m}(s_{n_m}). \tag{19}$$

Так как $w_{m,1} \to w_0$, где $w_0 = f(s_0)$, то существует последовательность $s_{m,1} \to s_0$, что

$$w_{m,1} = f(s_{m,1}) \tag{20}$$

и

$$w_{m,1} = Q_{n_m}(s_{m,1}) + \varepsilon_{n_m}, \tag{21}$$

где $\varepsilon_{n_m} \to 0$ при $n_m \to \infty$.

Предположим, что функция $f(s)$ регулярна на мнимой оси. Тогда в силу (20) и определения функции $F(s^*)$ при $m \geq m_0$ выполняется равенство

$$F(s^*_{m,1}) = f(1 - \bar{s}_{m_n}) = f(s^*_{m,1})$$

Таким образом функция $F(s^*)$ и $f(s)$ совпадают на бесконечном множестве точек, определяемых последовательностями $s_m \to s_0$, лежащих в окрестности точки s^*_0 (фактически, в некотором секторе этой окрестности). Следовательно в левой части этой окрестности

$$F(s^*) = f(s^*),$$

т. е. $F(s^*)$ определяет аналитическое продолжение функции $f(s)$.

Предположим теперь, что последовательность многочленов $Q_{n_m}(s)$ сходится равномерно в некоторой окрестности точки s^*_0. Тогда в силу (21)

$$F(s^*_{m,1}) = Q_{n_m}(1 - \bar{s}_{m,1}) + \varepsilon_{mn}.$$

Отсюда при $m > m_0$, где $n_m \to \infty$, имеют место равенства

$$F(s^*_{m,1}) = \hat{f}(s^*_{m,1}), \tag{22}$$

где $\hat{f}(s)$ — предел последовательности полиномов $Q_{n_m}(s)$ в окрестности точки s^*_0.

Так как в правой части окрестности точки s^*_0 имеет место равенство

$$f(s) = \hat{f}(s),$$

где $f(s)$ — функция, определяется рядом Дирихле (1), то $\hat{f}(s)$ — аналитическое продолжение функции $f(s)$ в окрестности точки S^*_0. Следовательно, в силу (18), функции $F(s^*)$ определяет аналитическое продолжение ряда Дирихле (1) целым образом на комплексную плоскость.

Таким образом, имеют место следующие утверждения.

Теорема 2. *Пусть функция $f(s)$, определенная рядом Дирихле* (1) *является регулярной на мнимой оси. Тогда ряд Дирихле* (1) *аналитически продолжим целым образом на комплексную плоскость.*

Теорема 3. *Пусть для любой точки мнимой оси существует последовательность аппроксимационных полиномов $Q_{n_k}(s)$, равномерно сходящихся в некоторой окрестности этой точки. Тогда ряд Дирихле* (1) *аналитически продолжим целым образом на комплексную плоскость.*

4. Примеры рядов Дирихле (1), определяющих целые функции

Рассмотрим класс рядов Дирихле (1), коэффициенты которых удовлетворяют условиям:

1. $S(x) = O(1)$, где $S(x) = \sum\limits_{n \le x} h(n)$;
2. $S^2(x) = \alpha x + O(1)$, где $S^2(x) = \sum\limits_{n \le x} S(n)$, и где α — некоторое число, которое может принимать и нулевое значение.

В разделе 2 показано, что такие ряды Дирихле определяют функции, регулярные на мнимой оси. В силу теоремы 3 такие ряды определяют целые функции.

Заметим, что в работе [7] показано, что коэффициенты таких рядов удовлетворяют условиям:

1. $S(x) = O(1)$;
2. для любого натурального m существует алгебраический полином $T_{m-1}(x)$ степени $m-1$ такой, что

$$S^{(m)}(x) = T_{m-1}(x) + O(1) \tag{23}$$

где $S^{(1)}(x) = \sum\limits_{n \le x} h(n)$, $S^{(m)}(x) = \sum\limits_{n \le x} S^{(m-1)}(n)$, $m \ge 2$ и где контакты, входящие в символ «O» не зависит от x.

Таким образом, в данном случае имеет место

Теорема 4. *Пусть $h(n)$ — конечнозначный числовой характер, удовлетворяющий условиям:*

1. $S(x) = O(1)$;
2. $S^{(2)} = \sum\limits_{n \le x} S(n) = \alpha x + O(1)$, *где α может ровняться нулю.*

Тогда для любого $m \ge 2$ существует полином $T_{m-1}(x)$ степени $m-1$, что для чезаровских средних $S^{(m)}(x)$ значений характера $h(n)$ выполняют равенства (23).

Далее, рассмотрим ряд Дирихле (1), для которого соответствующий степенной ряд

$$g(x) = \sum_{1}^{\infty} h(n) x^n \tag{24}$$

определяет функцию непрерывную на отрезке [0;1] и для величины $E_n(g(x))$ наилучшие приближения функции $g(x)$ на отрезке [0;1] алгебраическими полиномами степени n имеют место оценки вида

$$E_n(g(x)) = O(\frac{1}{n^\epsilon}), \text{где } \epsilon > 0. \tag{25}$$

В разделе 2 данной работы показано, что функция $f(s)$, определенная таким рядом Дирихле, является регулярной на мнимой оси. В силу теоремы 3 ряд Дирихле аналитически продолжен на комплексную плоскость как целая функция. Но в этом случае в работе [2], показано, что функция $g(x)$ (24) имеет в точке $x = 1$ конечное произведение вида.

$$\lim_{x \to 1-0} g^{(n)}(x) = \alpha_n, n = 0, 1, 2 \ldots . \tag{26}$$

Таким образом, имеет место

Теорема 5. *Пусть $h(n)$ — конечнозначный числовой характер, для которого степенной ряд* (20) *определяет функцию $g(x)$, непрерывную на отрезке [0,1], и для величин $\varepsilon_n(g(x))$ наилучшего приближения алгебраическими полиномами этой функции на отрезке [0;1] имеет место оценки* (25). *Тогда функция $g(x)$ имеет в точке $x = 1$ конечные производные любого порядка вида* (26).

Отметим, что теорема 3 утверждает, что, если ряд Дирихле (1) продолжается регулярным образом в полуплоскость $\sigma > -\varepsilon_0$, то он продолжается регулярным образом на комплексную плоскость, т. е. условие мультипликативности коэффициентов играет важную роль в задаче аналитического продолжения рядов Дирихле.

Приведенные выше примеры рядов Дирихле указывают на то, что условие мультипликативности коэффициентов играет важную роль и в подобных вопросах теоремы степенных рядов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кузнецов В. Н. Аналог теоремы Сеге для одного класса рядов Дирихле // Мат. заметки. 198. Т. 36, № 6. С. 805–812.

2. Кузнецов. В. Н. Об аналитическом продолжении одного класса рядов Дирихле // Вычислительные методы и программирование: межвуз. сб. науч. трудов. Саратов: Изд-во СГУ, 1987. С. 17—23.

3. Матвеева О. А. Аппроксимационные полиномы и поведение L-функций Дирихле в критической полосе // Известия Сарат. ун-та. Сер.: Математика. Механика. Информатика. Саратов: Изд-во СГУ, 2013. Вып. 4, ч. 2. С. 80 – 84.

4. Матвеева О. А. О нулях полиномов Дирихле, аппроксимирующих в критической полосе L-функции Дирихле // Чебышевский сборник. 2013. Т. 14, № 2. С. 117–121.

5. Матвеева. О. А. Аналитические свойства определенных классов рядов Дирихле и некоторые задачи теории L-функций Дирихле: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Ульяновск, 2014. 110 с.

6. Кузнецов В.Н., Матвеева О. А. Некоторые задачи, связанные с распределением нулей целых функций, определенных рядами Дирихле с конечнозначными коэффициентами // Чебышевский сборник. 2011. Т. 12, № 2. С. 54 – 60.

7. Кузнецов В.Н., Матвеева О. А. К задаче аналитического продолжения рядов Дирихле с конечнозначными коэффициентами как целых функций на комплексную плоскость // Чебышевский сборник. 2017. Т. 18, № 4. С. 285 – 295.

8. Кузнецов В.Н., Матвеева О. А. О граничном поведении одного класса рядов Дирихле с мультипликативными коэффициентами // Чебышевский сборник. 2016. Т. 17, № 3. С. 115 – 124.

9. Кузнецов В. Н., Матвеева О. А. О граничном поведении одного класса рядов Дирихле // Чебышевский сборник. 2016. Т. 17, № 2. С. 162 – 169.

10. Кузнецов В.Н., Матвеева О. А. Аппроксимационный подход в некоторых задачах теории рядов Дирихле с мультипликативными коэффициентами // Чебышевский сборник. 2016. Т. 17, № 4. С. 124 – 131.

11. Кузнецов В. Н., Матвеева О. А. Аппроксимационные полиномы Дирихле и некоторые свойства L-функций Дирихле // Чебышевский сборник. 2017. Т. 18, № 4. С. 296 – 304.

12. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. В 2 т. М.: Наука, 1967. Т. 2. 624 с.

13. Гурвиц А., Курант Р. Теория функций. М.: Наука, 1968. 648 с.

14. Даугавет И. К. Введение в теорию приближения функций. Л.: Изд-во ЛГУ, 1977. 184 с.

15. Титчмарш Е. К. Теория дзета-функции Римана. М.: Иностр. лит., 1953. 407 с.

REFERENCES

1. Kuznetsov, V. N. 1984, "Analog teoremy Sjoge dlja odnogo klassa rjadov Dirihle", *Mat. zametki*, vol. 38, iss. 6, pp. 805 – 813.

2. Kuznetsov, V. N. 1987, "On the analytic extension of a class of Dirichlet series" *Vychislitel'nye metody i programmirovanie: Mezhvuz. sb. nauch. tr.*, vol. 1, pp. 13–23

3. Matveeva, O. A. 2013, "Approksimacionnye polinomy i povedenie L-funkcij Dirihle v kriticheskoj polose", *Izvestija Sarat. un-ta. Matematika, Mehanika. Informatika*, iss. 4, vol. 2, pp. 80 – 84.

4. Matveeva, O. A. 2013, "On the zeros of Dirichlet polynomials that approximate Dirichlet L-functions in the critical band " *Chebyshevskij sbornik*, vol. 14, issue 2, pp. 117–121

5. Matveeva, O. A. 2014, "Analiticheskie svojstva opredelennyh klassov rjadov Dirihle i nekotorye zadachi teorii L-funkcij Dirihle", *Ulyanovsk: Thesis for the academic degree of the Ph.D.*, pp. 110.

6. Kuznetsov, V. N., Matveeva, O. A. 2011, "Nekotorye zadachi, svyazannye s raspredeleniem nulej celyh funkcij, opredelennyh ryadami Dirihle s konechnoznachnymi koehfficientami" *CHebyshevskij sbornik* , vol. 12, iss. 2, pp. 54 — 60.

7. Kuznetsov, V. N., Matveeva, O. A. 2017, "K zadache analiticheskogo prodolzheniya ryadov Dirihle s konechnoznachnymi koehfficientami kak celyh funkcij na kompleksnuyu ploskost'" *Chebyshevskij sbornik*, iss. 4, vol. 18, pp. 285 – 295.

8. Kuznetsov, V. N., Matveeva, O. A. 2016, "O granichnom povedenii odnogo klassa rjadov Dirihle s mul'tiplikativnymi kojefficientami", *Chebyshevskij sbornik*, iss. 4, vol. 17, pp. 115 – 124.

9. Kuznetsov, V. N., Matveeva, O. A. 2016, "O granichnom povedenii odnogo klassa rjadov Dirihle", *Chebyshevskij sbornik*, iss. 2, vol. 17, pp. 162 – 169.

10. Kuznetsov, V. N., Matveeva, O. A. 2016, "Approksimacionnyj podhod v nekotoryh zadachah teorii rjadov Dirihle s mul'tiplikativnymi kojefficientami ", *Chebyshevskij sbornik*, iss. 4, vol. 17, pp. 124 – 131.

11. Kuznetsov, V. N., Matveeva, O. A. 2017, "Approximation Dirichlet polynomials and some properties of Dirichlet L-functions" *Chebyshevskij sbornik*, iss. 4, vol. 18, pp. 296 - 304.

12. Markushevich, A. I. 1968, "Theory of analitical functions" *Nauka, Moscow*, vol. 2, pp. 624.

13. Gurvic, A., Nurant, R. 1968, "Teoriya funkcij" *Nauka, Moscow*, pp. 646.

14. Daugavet, I. K. 1977, "Vvedenie v teoriyu priblizheniya funkcij" *Leningrad, Izd-vo LGU* pp. 184.

15. Titchmarsh, E. K. 1953, "Teorija dzeta-funkcii Rimana" *Moscow, I. L.*, pp. 407.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 19. Выпуск 1

УДК 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-1-124-137

Совместная дискретная универсальность дзета-функций Лерха

Антанас Лауринчикас — доктор физико-математических наук, профессор, Действительный член АН Литвы, заведующий кафедрой теории вероятностей и теории чисел Вильнюсского университета.
e-mail: antanas.laurincikas@mif.vu.lt
Аста Минцевич — докторант кафедры теории вероятностей и теории чисел, Вильнюсский университет.

Аннотация

После 1975 г. работы Воронина известно, что некоторые дзета и L-функции универсальны в том смысле, что их сдвигами приближается широкий класс аналитических функций. Рассматриваются два типа сдвигов: непрерывный и дискретный.

В работе изучается универсальность дзета-функций Лерха $L(\lambda, \alpha, s)$, $s = \sigma + it$, которые в полуплоскости $\sigma > 1$ определяются рядами Дирихле с членами $e^{2\pi i\lambda m}(m + \alpha)^{-s}$ с фиксированными параметрами $\lambda \in \mathbb{R}$ и α, $0 < \alpha \leqslant 1$, и мероморфно продолжаются на всю комплексную плоскость. Получены совместные дискретные теоремы универсальности для дзета-функций Лерха. Именно, набор аналитических функций $f_1(s), \ldots, f_r(s)$ одновременно приближаются сдвигами $L(\lambda_1, \alpha_1, s + ikh), \ldots, L(\lambda_r, \alpha_r, s + ikh)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, где $h > 0$ - фиксированное число. При этом требуется линейная независимость над полем рациональных чисел множества $\left\{(\log(m + \alpha_j) : m \in \mathbb{N}_0,\ j = 1, \ldots, r), \frac{2\pi}{h}\right\}$. Доказательство теорем универсальности использует вероятностные предельные теоремы о слабой сходимости вероятностных мер в пространстве аналитических функций.

Ключевые слова: дзета-функция Лерха, пространство аналитических функций, слабая сходимость, теорема Мергеляна, универсальность.

Библиография: 18 названий.

Для цитирования:
А. Лауринчикас, А. Минцевич. Совместная дискретная универсальность дзета-функций Лерха // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, вып. 1, С. 138–151.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 19. No. 1

UDC 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-1-124-137

Joint discrete universality for Lerch zeta-functions[1]

Antanas Laurinčikas — doctor of physics-mathematical sciences, professor, Member of the Academy of Sciences of Lithuania, Head of the chair of probability theory and number theory, Vilnius university.
e-mail: antanas.laurincikas@mif.vu.lt
Asta Mincevič — doctoral student in the department of probability theory and number theory, Vilnius u niversity.

Abstract

After Voronin's work of 1975, it is known that some of zeta and L-functions are universal in the sense that their shifts approximate a wide class of analytic functions. Two cases of shifts, continuous and discrete, are considered.

The present paper is devoted to the universality of Lerch zeta-functions $L(\lambda, \alpha, s)$, $s = \sigma + it$, which are defined, for $\sigma > 1$, by the Dirichlet series with terms $e^{2\pi i\lambda m}(m+\alpha)^{-s}$ with parameters $\lambda \in \mathbb{R}$ and α, $0 < \alpha \leqslant 1$, and by analytic continuation elsewhere. We obtain joint discrete universality theorems for Lerch zeta-functions. More precisely, a collection of analytic functions $f_1(s), \ldots, f_r(s)$ simultaneously is approximated by shifts $L(\lambda_1, \alpha_1, s+ikh), \ldots, L(\lambda_r, \alpha_r, s+ikh)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, where $h > 0$ is a fixed number. For this, the linear independence over the field of rational numbers for the set $\left\{(\log(m + \alpha_j) : m \in \mathbb{N}_0,\ j = 1, \ldots, r), \frac{2\pi}{h}\right\}$ is required. For the proof, probabilistic limit theorems on the weak convergence of probability measures in the space of analytic function are applied.

Keywords: Lerch zeta-function, Mergelyan theorem, space of analytic functions, universality, weak convergence.

Bibliography: 18 titles.

For citation:
A. Laurinčikas, A. Mincevič, 2018, "Joint discrete universality for Lerch zeta-functions", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 1, pp. 138–151.

[1]The research of the first author is funded by the European Social Fund according to the activity "Improvement of researchers" qualification by implementing world-class R&D projects' of Measure No. 09.3.3-LMT-K-712-01-0037.

Dedicated to the 100th birthday of Nikolai Mikhailovich Korobov

1. Introduction

In [18], see also [4], S.M. Voronin discovered the universality of the Riemann zeta-function $\zeta(s)$, $s=\sigma+it$, that a wide class of analytic functions can be approximated by shifts $\zeta(s+i\tau)$, $\tau\in\mathbb{R}$. After Voronin's work, various authors extended his universality theorem for some other zeta- and L-functions, and classes of Dirichlet series. One of universal zeta-functions is the Lerch zeta-function $L(\lambda,\alpha,s)$ with parameters $\lambda\in\mathbb{R}$ and α, $0<\alpha\leqslant 1$, which is defined, for $\sigma>1$, by the Dirichlet series

$$L(\lambda,\alpha,s)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{e^{2\pi i\lambda m}}{(m+\alpha)^s}.$$

The function $L(\lambda,\alpha,s)$ was introduced and studied independently by R. Lipschitz [14] and M. Lerch [13]. The analytic properties of $L(\lambda,\alpha,s)$ depend on the parameters λ and α, and in particular case, this is true for the analytic continuation to the whole complex plane. If $\lambda\notin\mathbb{Z}$, then $L(\lambda,\alpha,s)$ is an entire function, while, for $\lambda\in\mathbb{Z}$, $L(\lambda,\alpha,s)$ reduces to the Hurwitz zeta-function

$$\zeta(s,\alpha)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(m+\alpha)^s},\quad \sigma>1,$$

which is analytically continued to the whole complex plane, except for a simple pole at the point $s=1$ with residue 1. In virtue of the periodicity of $e^{2\pi i\lambda m}$, it suffices to suppose that $0<\lambda\leqslant 1$. The theory of the Lerch zeta-function is given in [7].

The first universality result for the function $L(\lambda,\alpha,s)$ was obtained in [5]. Let

$$D=\left\{s\in\mathbb{C}:\frac{1}{2}<\sigma<1\right\},$$

$\mathcal{K}$ be the class of compact subsets of the strip D with connected complements, and let $H(K)$ with $K\in\mathcal{K}$ denote the class of continuous functions on K that are analytic in the interior of K. Let $\operatorname{meas}A$ denote the Lebesgue measure of a measurable set $A\subset\mathbb{R}$. Then it was obtained in [5] that if α is transcendental, then for $K\in\mathcal{K}$, $f(s)\in H(K)$, $0<\lambda\leqslant 1$ and every $\varepsilon>0$,

$$\liminf_{T\to\infty}\frac{1}{T}\operatorname{meas}\left\{\tau\in[0,T]:\sup_{s\in K}|L(\lambda,\alpha,s+i\tau)-f(s)|<\varepsilon\right\}>0.$$

The case of rational α is more complicated. Some conditional result in this direction has been obtained in [7]. If both α and λ are rational, then the function $L(\alpha,\lambda,s)$ becomes the periodic Hurwitz zeta-function, and, for it, an universality theorem of type of [9] is true. In this case, a certain condition connecting α and λ is involved.

The universality of $L(\alpha,\lambda,s)$ with algebraic irrational α is an open problem. The case of α with linearly independent set $L(\alpha)=\{\log(m+\alpha):m\in\mathbb{N}_0=\mathbb{N}\cup\{0\}\}$ over the field of rational numbers $\mathbb{Q}$ can be viewed as a certain approximation to that problem, see [17] and [6].

For the function $L(\alpha,\lambda,s)$, also a discrete universality when τ in $L(\alpha,\lambda,s+i\tau)$ takes values from a certain discrete set is considered. One of the simplest discrete sets is the arithmetic progression $\{kh:k\in\mathbb{N}_0\}$ with $h>0$. Denote by $\#A$ the cardinality of the set A. If α is transcendental and the number $\exp\{\frac{2\pi}{k}\}$ is rational, then it is known [3], [8] that, for $K\in\mathcal{K}$, $f(s)\in H(K)$, $0<\lambda\leqslant 1$ and every $\varepsilon>0$,

$$\liminf_{N\to\infty}\frac{1}{N+1}\#\left\{0\leqslant k\leqslant N:\sup_{s\in K}|L(\lambda,\alpha,s+ikh)-f(s)|<\varepsilon\right\}>0.$$

Let, for $h > 0$,

$$L(\alpha, h, \pi) = \left\{ (\log(m+\alpha) : m \in \mathbb{N}_0), \frac{2\pi}{h} \right\}.$$

Then, in [12], the transcendence of α and rationality of $\exp\{\frac{2\pi}{h}\}$ were replaced by the linear independence over $\mathbb{Q}$ of the set $L(\alpha, h, \pi)$.

The aim of this paper is joint discrete universality theorems for Lerch zeta-functions. We note that the joint universality for Lerch zeta-functions is an interesting problem connecting algebraic properties of the parameters $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ and $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ with analytic properties of a collection $L(\lambda_1, \alpha_1, s), \dots, L(\lambda_r, \alpha_r, s)$, therefore, there are many results of such a kind. The first joint universality theorem for Lerch zeta-functions was proved in [10], [11].

THEOREM 1. *Suppose that the parameters $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ are algebraically independent over $\mathbb{Q}$, $\lambda_1 = \frac{a_1}{q_1}, \dots, \lambda_r = \frac{a_r}{q_r}$, $(a_1, q_1) = 1, \dots, (a_r, q_r) = 1$, are rational numbers, k is the least common multiple of $q_1, \dots, q_r$, and that the rank of the matrix*

$$\begin{pmatrix} e^{2\pi i\lambda_1} & e^{2\pi i\lambda_2} & \dots & e^{2\pi i\lambda_r} \\ e^{4\pi i\lambda_1} & e^{4\pi i\lambda_2} & \dots & e^{4\pi i\lambda_r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e^{2k\pi i\lambda_1} & e^{2k\pi i\lambda_2} & \dots & e^{2k\pi i\lambda_r} \end{pmatrix}$$

is equal to r. For $j = 1, \dots, r$, let $K_j \in \mathcal{K}$ and $f_j \in H(K_j)$. Then, for every $\varepsilon > 0$,

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \operatorname{meas} \left\{ \tau \in [0, T] : \sup_{1\leqslant j\leqslant r} \sup_{s\in K_j} |L(\lambda_j, \alpha_j, s + i\tau) - f_j(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

Let

$$L(\alpha_1, \dots, \alpha_r) = \{ (\log(m+\alpha_1) : m \in \mathbb{N}_0), \dots, (\log(m+\alpha_r) : m \in \mathbb{N}_0) \}.$$

Then in [16], under the hypothesis that the set $L(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ is linearly independent over $\mathbb{Q}$, it was obtained that the inequality of Theorem 1 is true for all $0 < \lambda \leqslant 1$, $j = 1, \dots, r$.

We will focus on joint discrete analogues of the above results. For $h > 0$, define the set

$$L(\alpha_1, \dots, \alpha_r; h, \pi) = \left\{ (\log(m+\alpha_1) : m \in \mathbb{N}_0), \dots, (\log(m+\alpha_r) : m \in \mathbb{N}_0), \frac{2\pi}{h} \right\}.$$

Then we have

THEOREM 2. *Suppose that the set $L(\alpha_1, \dots, \alpha_r; h, \pi)$ is linearly independent over $\mathbb{Q}$. For $j = 1, \dots, r$, let $K_j \in \mathcal{K}$, $f_j \in H(K_j)$ and $0 < \lambda_j \leqslant 1$. Then, for every $\varepsilon > 0$,*

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \# \left\{ 0 \leqslant k \leqslant N : \sup_{1\leqslant j\leqslant r} \sup_{s\in K_j} |L(\lambda_j, \alpha_j, s + ikh) - f_j(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

Theorem 2 has the following modification.

THEOREM 3. *Suppose that the set $L(\alpha_1, \dots, \alpha_r; h, \pi)$ is linearly independent over $\mathbb{Q}$. For $j = 1, \dots, r$, let $K_j \in \mathcal{K}$, $f_j \in H(K_j)$ and $0 < \lambda_j \leqslant 1$. Then the limit*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \# \left\{ 0 \leqslant k \leqslant N : \sup_{1\leqslant j\leqslant r} \sup_{s\in K_j} |L(\lambda_j, \alpha_j, s + ikh) - f_j(s)| < \varepsilon \right\} > 0$$

exists for all but at most countably many $\varepsilon > 0$.

The proofs of Theorems 2 and 3 are based on statistical properties of Lerch zeta-functions, more precisely, on limit theorems of weakly convergent probability measures in the space of analytic functions.

2. Discrete limit theorems

Denote by $\mathcal{B}(X)$ the Borel σ-field of the space X. We recall that $D = \left\{s \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < \sigma < 1\right\}$. Denote by $H(D)$ the space of analytic functions on D endowed with the topology of uniform convergence on compacta. In this section, we consider the weak convergence of probability measures defined on $(H(D), \mathcal{B}(H(D)))$.

We use the notation $\gamma = \{s \in \mathbb{C} : |s| = 1\}$, and define

$$\Omega = \prod_{m=0}^{\infty} \gamma_m,$$

where $\gamma_m = \gamma$ for all $m \in \mathbb{N}_0$. Then, by the famous Tikhonov theorem, the torus Ω with the product topology and pointwise multiplication is a compact topological Abelian group. Putting

$$\Omega^r = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_r,$$

where $\Omega_j = \Omega$ for $j = 1, \ldots, r$, by the Tikhonov theorem again, we have that Ω^r is a compact topological Abelian group. Therefore, on $(\Omega^r, \mathcal{B}(\Omega^r))$, the probability Haar measure m_H can be defined. This gives the probability space $(\Omega^r, \mathcal{B}(\Omega^r), m_H)$. Denote by m_{jH} the probability Haar measure on $(\Omega^j, \mathcal{B}(\Omega^j))$, $j = 1, \ldots, r$. Then we have that

$$m_H = m_{1H} \times \cdots \times m_{rH}.$$

Let ω_j be the elements of Ω_j, $j = 1, \ldots, r$, and $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_r$ denote the elements of Ω^r. Moreover, denote by $\omega_j(m)$ the projection of an element $\omega_j \in \Omega_j$ to the circle γ_m, $m \in \mathbb{N}_0$, $j = 1, \ldots, r$. Now, on the probability space $(\Omega^r, \mathcal{B}(\Omega^r), m_H)$, define the $H^r(D)$-valued random element $L(\underline{\lambda}, \underline{\alpha}, s, \omega)$, where $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ and $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$, by

$$L(\underline{\lambda}, \underline{\alpha}, s, \omega) = (L_1(\lambda_1, \alpha_1, s, \omega_1), \ldots, L_r(\lambda_r, \alpha_r, s, \omega_r)),$$

where

$$L_j(\lambda_j, \alpha_j, s, \omega_j) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i \lambda_j m} \omega_j(m)}{(m + \alpha_j)^s}, \quad j = 1, \ldots, r.$$

We note that the latter series are uniformly convergent on compact subsets of the strip D [7], thus, they define the $H(D)$-valued random elements.

Having the above definitions, we state a joint discrete limit theorem for Lerch zeta-functions.

THEOREM 4. *Suppose that the set $L(\alpha_1, \ldots, \alpha_r; h, \pi)$ is linearly independent over $\mathbb{Q}$. Then*

$$P_N(A) \stackrel{def}{=} \frac{1}{N+1} \# \left\{0 \leqslant k \leqslant N : L(\underline{\lambda}, \underline{\alpha}, s + ikh) \in A\right\}, \quad A \in \mathcal{B}(H^r(D)),$$

converges weakly to the distribution P_L of the random element $L(\underline{\lambda}, \underline{\alpha}, s, \omega)$ as $N \to \infty$.

We remind that, for $A \in \mathcal{B}(H^r(D))$,

$$P_L(A) = m_H \left\{\omega \in \Omega^r : L(\underline{\lambda}, \underline{\alpha}, s, \omega) \in A\right\}.$$

We divide the proof of Theorem 4 into lemmas. The first of them deals with the weak convergence of probability measures on $(\Omega^r, \mathcal{B}(\Omega^r))$, and for that the linear independence of the set $L(\alpha_1, \ldots, \alpha_r; h, \pi)$ is essentially applied.

Let, for $A \in \mathcal{B}(\Omega^r)$,

$$Q_N(A) = \frac{1}{N+1} \# \left\{0 \leqslant k \leqslant N : ((m + \alpha_1)^{-ikh} : m \in \mathbb{N}_0), \ldots, ((m + \alpha_r)^{-ikh} : m \in \mathbb{N}_0)) \in A\right\}.$$

LEMMA 1. *Suppose that the set $L(\alpha_1,\dots,\alpha_r;h,\pi)$ is linearly independent over $\mathbb{Q}$. Then Q_N converges weakly to the Haar measure m_H as $N\to\infty$.*

Proof.

We consider the Fourier transform of Q_N. Since characters of the group Ω^r are of the form

$$\prod_{j=1}^{r}\prod_{m=0}^{\infty}\omega_j^{k_{jm}}(m),$$

where only a finite number of integers k_{jm} are distinct from zero, we have that the Fourier transform $g_N(\underline{k}_1,\dots,\underline{k}_r)$, $\underline{k}_j=(k_{jm}:k_{jm}\in\mathbb{Z},\ m\in\mathbb{N}_0)$, $j=1,\dots,r$, of Q_N is

$$\begin{aligned} g_N(\underline{k}_1,\dots,\underline{k}_r) &= \int_{\Omega^r}\prod_{j=1}^{r}\prod_{m=0}^{\infty}\omega_j^{k_{jm}}(m)\,\mathrm{d}\,Q_N = \frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N}\prod_{j=1}^{r}\prod_{m=0}^{\infty}(m+\alpha_j)^{-ikhk_{jm}} \\ &= \frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N}\exp\left\{-ikh\sum_{j=1}^{r}{\sum_{m=0}^{\infty}}'k_{jm}\log(m+\alpha_j)\right\}, \end{aligned} \tag{1}$$

where $\sum'$ means that only a finite number of integers k_{jm} are distinct from zero. Clearly,

$$g_N(\underline{0},\dots,\underline{0})=1. \tag{2}$$

Since the set $L(\alpha_1,\dots,\alpha_r;h,\pi)$ is linearly independent over $\mathbb{Q}$,

$$\exp\left\{-ih\sum_{j=1}^{r}{\sum_{m=0}^{\infty}}'k_{jm}\log(m+\alpha_j)\right\}\ne 1$$

for $(\underline{k}_1,\dots,\underline{k}_r)\ne(\underline{0},\dots,\underline{0})$. Actually, if this inequality is not true, the

$$h\sum_{j=1}^{r}{\sum_{m=0}^{\infty}}'k_{jm}\log(m+\alpha_j)-\frac{2\pi l}{h}=0$$

with $l\in\mathbb{Z}$, and this contradicts the linear independence of the set $L(\alpha_1,\dots,\alpha_r;h,\pi)$. Thus, in this case, we find by (1) that

$$g_N(\underline{k}_1,\dots,\underline{k}_r)=\frac{1-\exp\left\{-(N+1)ih\sum_{j=1}^{r}{\sum_{m=0}^{\infty}}'k_{jm}\log(m+\alpha_j)\right\}}{(N+1)\left(1-\exp\left\{-ih\sum_{j=1}^{r}{\sum_{m=0}^{\infty}}'k_{jm}\log(m+\alpha_j)\right\}\right)}.$$

This and (2) show that

$$\lim_{N\to\infty}g_N(\underline{k}_1,\dots,\underline{k}_r)=\begin{cases}1 & \text{if } (\underline{k}_1,\dots,\underline{k}_r)=(\underline{0},\dots,\underline{0}),\\ 0 & \text{if } (\underline{k}_1,\dots,\underline{k}_r)\ne(\underline{0},\dots,\underline{0}).\end{cases}$$

Since the right-hand side of the latter equality is the Fourier transform of the Haar measure m_H, the lemma is proved. □

Now, we will apply Lemma 1 to obtain a joint limit theorem in the space of analytic functions for functions given by absolutely convergent Dirichlet series connected to Lerch zeta-functions. Let $\hat{\sigma}>\frac{1}{2}$ be a fixed number, and, for $m\in\mathbb{N}_0$ and $n\in\mathbb{N}$,

$$v_n(m,\alpha_j)=\exp\left\{-\left(\frac{m+\alpha_j}{n+\alpha_j}\right)^{\hat{\sigma}}\right\},\quad j=1,\dots,r.$$

Define

$$L_n(\underline{\lambda}, \underline{\alpha}, s) = (L_n(\lambda_1, \alpha_1, s), \dots, L_n(\lambda_r, \alpha_r, s))$$

and

$$L_n(\underline{\lambda}, \underline{\alpha}, s, \omega) = (L_n(\lambda_1, \alpha_1, s, \omega_1), \dots, L_n(\lambda_r, \alpha_r, s, \omega_r)),$$

where

$$L_n(\lambda_j, \alpha_j, s) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i \lambda_j m} v_n(m, \alpha_j)}{(m+\alpha_j)^s}, \quad j = 1, \dots, r,$$

and

$$L_n(\lambda_j, \alpha_j, s, \omega) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i \lambda_j m} \omega_j(m) v_n(m, \alpha_j)}{(m+\alpha_j)^s}, \quad j = 1, \dots, r,$$

It is known [7] that the series for $L_n(\lambda_j, \alpha_j, s)$ and $L_n(\lambda_j, \alpha_j, s, \omega_j)$ are absolutely convergent for $\sigma > \frac{1}{2}$.

The next lemma deals with weak convergence for

$$P_{N,n}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{N+1} \# \left\{0 \leqslant k \leqslant N : L_n(\underline{\lambda}, \underline{\alpha}, s + ikh) \in A\right\}, \quad A \in \mathcal{B}(H^r(D)).$$

Define the function $u_n : \Omega^r \to H^r(D)$ by the formula

$$u_n(\omega) = L_n(\underline{\lambda}, \underline{\alpha}, s, \omega), \quad \omega \in \Omega.$$

Since the series for $L_n(\lambda_j, \alpha_j, s, \omega_j), \quad j = 1, \dots, r$, are absolutely convergent for $\sigma > \frac{1}{2}$, the function u_n is continuous, hence it is $(\mathcal{B}(\Omega^r), \mathcal{B}(H^r(D)))$-measurable. Therefore, the measure m_H induces [1] on $(H^r(D), \mathcal{B}(H^r(D)))$ the unique probability measure $\hat{P}_n \stackrel{\text{def}}{=} m_H u_n^{-1}$, where, for $A \in \mathcal{B}(H^r(D))$,

$$\hat{P}_n(A) = m_H u_n^{-1}(A) = m_H(u_n^{-1} A).$$

LEMMA 2. *Suppose that the set $L(\alpha_1, \dots, \alpha_r; h, \pi)$ is linearly independent over $\mathbb{Q}$. Then $P_{N,n}$ converges weakly to $\hat{P}_n$ as $N \to \infty$.*

Proof.

Let Q_N be defined in Lemma 1. Then the definitions of $P_{N,n}$, Q_N and u_n show that,for every $A \in \mathcal{B}(H^r(D))$,

$$P_{N,n}(A) = \frac{1}{N+1} \# \Big\{0 \leqslant k \leqslant N : \Big(((m+\alpha_1)^{-ikh} : m \in \mathbb{N}_0), \dots, ((m+\alpha_r)^{-ikh} : m \in \mathbb{N}_0)\Big) \in u_n^{-1} A\Big\} = Q_N(u_n^{-1} A),$$

i.e., $P_{N,n} = Q_N u_n^{-1}$. This, Lemma 1, the continuity of u_n and Theorem 5.1 from [1] show that $P_{N,n}$ converges weakly to the measure $m_H u_n^{-1}$ as $N \to \infty$.

Now, we will approximate $L(\underline{\lambda}, \underline{\alpha}, s)$ by $L_n(\underline{\lambda}, \underline{\alpha}, s)$. For $g_1, g_2 \in H(D)$, let

$$\rho(g_1, g_2) = \sum_{l=1}^{\infty} 2^{-l} \frac{\sup_{s \in K_l} |g_1(s) - g_2(s)|}{1 + \sup_{s \in K_l} |g_1(s) - g_2(s)}},$$

where $\{K_l : l \in \mathbb{N}\}$ is a sequence of compact subsets of the strip D such that

$$D = \bigcup_{l=1}^{\infty} K_l,$$

$K_l \subset K_{l+1}$ for all $l \in \mathbb{N}$, and if $K \subset D$ is a compact subset, then $K \subset K_l$ for some l. The proof of the existence of the sequence $\{K_l : l \in \mathbb{N}\}$ can be found, for example, in [2]. The metric ρ induces the topology of the space $H(D)$ of uniform convergence on compacta. The metric $\underline{\rho}$ in $H^r(D)$ inducing the product topology is defined by

$$\underline{\rho}(\underline{g}_1, \underline{g}_2) = \max_{1 \leqslant j \leqslant r} \rho(g_{1j}, g_{2,j}),$$

where $\underline{g}_1 = (g_{11}, \dots g_{1r}), \quad \underline{g}_2 = (g_{21}, \dots g_{2r}) \in H^r(D)$. □

LEMMA 3. *For all $\underline{\lambda}$, $\underline{\alpha}$ and $h > 0$,*

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{N} \underline{\rho}\left(L(\underline{\lambda}, \underline{\alpha}, s + ikh), L_n(\underline{\lambda}, \underline{\alpha}, s + ikh)\right) = 0.$$

Proof.

The definition of the metric $\underline{\rho}$ shows that the equality of the lemma follows from the equalities

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{N} \rho\left(L_j(\lambda_j, \alpha_j, s + ikh), L_n(\lambda_j, \alpha_j, s + ikh)\right) = 0,$$

$j = 1, \dots, r$, that were obtained in Lemma 3 of [12]. □

We recall that the measure $\hat{P}_n$ was defined in Lemma 2.

LEMMA 4. *Suppose that the set $L(\alpha_1, \dots, \alpha_r; h, \pi)$ is linearly independent over $\mathbb{Q}$. Then the sequence $\{\hat{P}_n : n \in \mathbb{N}\}$ is tight, i.e., for every $\varepsilon > 0$, there exists a compact subset $K = K(\varepsilon) \subset H^r(D)$ such that*

$$\hat{P}_n(K) > 1 - \varepsilon$$

for all $n \in \mathbb{N}$.

Proof.

Consider the marginal measures of $\hat{P}_n$, i.e., the measures

$$\hat{P}_{n,j}(A) = \hat{P}_n\left(\underbrace{H(D) \times \dots \times H(D)}_{j-1} \times A \times H(D) \times \dots \times H(D)\right), \quad A \in \mathcal{B}(H(D)),$$

where $j = 1, \dots, r$. The linear independence of the set $L(\alpha_1, \dots, \alpha_r; h, \pi)$ implies that for $L(\alpha_j, h, \pi)$, $j = 1, \dots, r$. Therefore, in view of the proof of Lemma 5 from [12], we have that $\hat{P}_{n,j}$ converges weakly to the distribution P_{L_j} of the random element $L_j(\lambda_j, \alpha_j, s, \omega_j)$ as $n \to \infty$, $j = 1, \dots, r$. Hence, the sequence $\{\hat{P}_{n,j} : n \in \mathbb{N}\}$ is relatively compact, $j = 1, \dots, r$. Since the set $H(D)$ is complete and separable, by the inverse Prokhorov Theorem [1, Theorem 6.2], the sequence $\{\hat{P}_{n,j} : n \in \mathbb{N}\}$ is tight, $j = 1, \dots, r$. Thus, for every $\varepsilon > 0$, there exists a compact subset $K_j \subset H(D)$ such that

$$\hat{P}_n(K_j) > 1 - \frac{\varepsilon}{r}, \quad j = 1, \dots, r,$$

for all $n \in \mathbb{N}$. The set $K = K_1 \times \dots \times K_r$ is compact in $H^r(D)$. Moreover,

$$\hat{P}_n(H^r(D) \setminus K) = \hat{P}_n\left(\bigcup_{j=1}^{r} (H(D) \setminus K_j)\right) \leqslant \sum_{j=1}^{r} \hat{P}_{n,j}(H(D) \setminus K_j) < \varepsilon$$

for all $n \in \mathbb{N}$, i.e.,the sequence $\{\hat{P}_n : n \in \mathbb{N}\}$ is tight. □

For convenience, we recall one result from [1]. Suppose that (S, ϱ)-valued random elements $Y_n, X_{1n}, X_{2n}, \dots$ are defined on the same probability space with measure $\mathbb{P}$, and that the space S is separable.

LEMMA 5. *Suppose that, for every k,*

$$X_{kn} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} X_k$$

and

$$X_k \xrightarrow[k\to\infty]{\mathcal{D}} X.$$

Moreover, for every $\varepsilon > 0$, let

$$\lim_{k\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}\{\rho(X_{kn}, Y_n) \geqslant \varepsilon\} = 0.$$

Then $Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} X$.

The lemma is Theorem 4.2 from [1].

Proof of Theorem 3. By Lemma 4 and the Prokhorov theorem [1, Theorem 6.1], the sequence $\{\hat{P}_n : n \in \mathbb{N}\}$ is relatively compact. Hence, every subsequence of $\hat{P}_n$ contains a subsequence $\{\hat{P}_{n_k}\}$ such that $\hat{P}_{n_k}$ converges weakly to a certain probability measure P on $(H^r(D), \mathcal{B}(H^r(D)))$ as $k \to \infty$. Therefore, denoting by $\hat{X}_n = \hat{X}_n(s)$ the $H^r(D)$-valued random element having the distribution $\hat{P}_n$, we have that

$$\hat{X}_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{\mathcal{D}} P. \tag{3}$$

Moreover, by Lemma 2,

$$X_{N,n} \xrightarrow[N\to\infty]{\mathcal{D}} \hat{X}_n, \tag{4}$$

where the $H^r(D)$-valued random element $X_{N,n} = X_{N,n}(s)$ is defined by

$$X_{N,n}(s) = L_n(\underline{\lambda}, \underline{\alpha}, s + i\theta_N),$$

and θ_N is a random variable defined on a certain probability space $(\hat{\Omega}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ by the formula

$$\mathbb{P}(\theta_N = kh) = \frac{1}{N+1}, \quad k = 0, 1, \ldots, N.$$

Define one more $H^r(D)$-valued random element

$$Y_N = Y_N(s) = L(\underline{\lambda}, \underline{\alpha}, s + i\theta_N).$$

Then, in view of Lemma 3, for every $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \limsup_{N\to\infty} \mathbb{P}(\underline{\varrho}(X_{N,n}, Y_N) \geqslant \varepsilon) \\
&\quad = \lim_{n\to\infty} \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \# \left\{0 \leqslant k \leqslant N : \underline{\rho}\left(L(\underline{\lambda}, \underline{\alpha}, s + ikh), L_n(\underline{\lambda}, \underline{\alpha}, s + ikh)\right) \geqslant \varepsilon\right\} \\
&\quad \leqslant \lim_{n\to\infty} \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{(N+1)\varepsilon} \sum_{k=0}^{N} \underline{\varrho}(L(\underline{\lambda}, \underline{\alpha}, s + ikh), L_n(\underline{\lambda}, \underline{\alpha}, s + ikh)) = 0.
\end{aligned}$$

This equality together with relations (3) and (4) shows that all hypotheses of Lemma 5 are satisfied. Therefore, we obtain the relation

$$Y_N \xrightarrow[N\to\infty]{\mathcal{D}} P. \tag{5}$$

Thus, we have that P_N converges weakly to P as $N \to \infty$. Moreover, the relation (5) shows that the measure P is independent of the choice of the subsequence $\hat{P}_{n_k}$. Since the sequence $\hat{P}_n$ is relatively compact, hence we obtain that

$$\hat{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} P.$$

This means that $\hat{X}_n$ converges weakly to P as $n \to \infty$. The latter remark allows easily to identify the measure P. Actually, in [16], it was obtained that, under hypothesis that the set $L(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ is linearly independent over $\mathbb{Q}$,

$$\frac{1}{T}\mathrm{meas}\left\{\tau \in [0,T] : L(\underline{\lambda}, \underline{\alpha}, s + i\tau) \in A\right\}, \quad A \in \mathcal{B}(H^r(D)), \tag{6}$$

also converges weakly to the limit measure P of $\hat{P}_n$ as $n \to \infty$, and that P coincides with P_L. Obviously,the linear independence of the set $L(\alpha_1, \dots, \alpha_r; h, \pi)$ implies that of the set $L(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$. Therefore, P_N also converges weakly to P_L which is the limit measure of $\hat{P}_n$. The theorem is proved. □

3. Proofs of universality

We remind the Mergelyan theorem on approximation of analytic functions by polynomials [15].

LEMMA 6. *Let K be a compact subset on the complex plane with connected complement, and let $f(s)$ be a function continuous on K and analytic in the interior of K. Then, for every $\varepsilon > 0$, there exists a polynomial $p(s)$ such that*

$$\sup_{s \in K} |f(s) - p(s)| < \varepsilon.$$

We also need the explicit form of the support of the measure P_L. We recall that the support of P_L is a closed minimal set S_L such that $P_L(S_L) = 1$. The set S_L consists of all $\underline{g} \in H^r(D)$ such that, for every open neighbourhood G of $\underline{g}$, the inequality $P_L(G) > 0$ is true.

LEMMA 7. *The support of the measure P_L is the whole of $H^r(D)$.*

Proof.

It was observed above that P_L is the limit measure of (6). Thus, the lemma follows from [16], see the proof of Theorem 2.1. □

We also recall two equivalents of the weak convergence of probability measures. Let P_n, $n \in \mathbb{N}$, and P be probability measures on $(X, \mathcal{B}(X))$. The set $A \in \mathcal{B}(X)$ is called a continuity set of P if $P(\partial A) = 0$, where ∂A is the boundary of A.

LEMMA 8. *The following statements are equivalent:*

1° *P_n converges weakly to P;*

2° *for every open set $G \subset X$,*

$$\liminf_{n \to \infty} P_n(G) \geqslant P(G),$$

3° *for every continuity set A of the measure P,*

$$\lim_{n \to \infty} P_n(A) = P(A).$$

The lemma is a part of Theorem 2.1 from [1].

Proof of Theorem 2.

In view of Lemma 6, there exist polynomials $p_1(s), \dots, p_r(s)$ such that

$$\sup_{1 \leqslant j \leqslant r} \sup_{s \in K_j} |f_j(s) - p_j(s)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{7}$$

Consider the set

$$G_\varepsilon = \left\{(g_1, \dots, g_r) \in H^r(D) : \sup_{1 \leqslant j \leqslant r} \sup_{s \in K_j} |g_j(s) - p_j(s)| < \frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

Then the set G_ε is open, and,by Lemma 7, is a neighborhood of the collection $(p_1(s),\dots,p_r(s))$ which is an element of the support of the measure P_L. Therefore, the inequality

$$P_L(G_\varepsilon) > 0 \tag{8}$$

is satisfied. Hence, by Theorem 4 and 2° of Lemma 8,

$$\liminf_{N\to\infty} P_N(G_\varepsilon) \geqslant P_L(G_\varepsilon) > 0. \tag{9}$$

This, and the definitions of P_N and G_ε show that

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N+1}\#\left\{0 \leqslant k \leqslant N : \sup_{1\leqslant j\leqslant r}\sup_{s\in K_j} |L(\lambda_j,\alpha_j,s+ikh)-p_j(s)| < \frac{\varepsilon}{2}\right\} > 0. \tag{10}$$

Let $k\in\mathbb{N}$ satisfy the inequality

$$\sup_{1\leqslant j\leqslant r}\sup_{s\in K_j} |L(\lambda_j,\alpha_j,s+ikh)-p_j(s)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Then, for such k, (7) implies the inequality

$$\sup_{1\leqslant j\leqslant r}\sup_{s\in K_j} |L(\lambda_j,\alpha_j,s+ikh)-f_j(s)| < \varepsilon.$$

Therefore, (10) gives the assertion of the theorem. □

Proof of Theorem 3.

Consider the set

$$\hat{G}_\varepsilon = \left\{(g_1,\dots,g_r)\in H^r(D) : \sup_{1\leqslant j\leqslant r}\sup_{s\in K_j} |g_j(s)-f_j(s)| < \varepsilon\right\}.$$

Then the set $\hat{G}_\varepsilon$ is open. Moreover, the boundary ∂G_ε lies in the set

$$\left\{(g_1,\dots,g_r)\in H^r(D) : \sup_{1\leqslant j\leqslant r}\sup_{s\in K_j} |g_j(s)-f_j(s)| = \varepsilon\right\}.$$

Therefore, $\partial\hat{G}_{\varepsilon_1}\cap\partial\hat{G}_{\varepsilon_2}=\varnothing$ for positive $\varepsilon_1\neq\varepsilon_2$. From this, it follows that $P_L(\hat{G}_\varepsilon)>0$ for at most countably many $\varepsilon>0$, i.e., the set $\hat{G}_\varepsilon$ is a continuity set of P_L for all but at most countably many $\varepsilon>0$. Hence, by Theorem 4, and 1° and 3° of Lemma 8, the limit

$$\lim_{N\to\infty} P_N(\hat{G}_\varepsilon) = P_L(\hat{G}_\varepsilon) \tag{11}$$

exists for all but at most countably many $\varepsilon>0$. Moreover, it is not difficult to see that if $(g_1,\dots,g_r)\in G_\varepsilon$, where G_ε is defined in the proof of Theorem 2, then, taking into account (7), we find that

$$\sup_{1\leqslant j\leqslant r}\sup_{s\in K_j} |g_j(s)-f_j(s)| \leqslant \sup_{1\leqslant j\leqslant r}\sup_{s\in K_j} |g_j(s)-p_j(s)| + \sup_{1\leqslant j\leqslant r}\sup_{s\in K_j} |f_j(s)-p_j(s)| < \varepsilon.$$

This shows that $G_\varepsilon\subset\hat{G}_\varepsilon$. Since, by (9), $P_L(G_\varepsilon)>0$, the monotonicity of the measure gives the inequality $P_L(\hat{G}_\varepsilon)>0$. This inequality and (11) prove the theorem. □

4. Conclusions

The Lerch zeta-function $L(\lambda,\alpha,s)$, $s=\sigma+it$, with parameters $\lambda\in\mathbb{R}$ and $0<\alpha\leqslant 1$ is defined, for $\sigma>1$, by the series

$$L(\lambda,\alpha,s)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{e^{2\pi i\lambda m}}{(m+\alpha)^s},$$

and by analytic continuation elsewhere. In the paper, it is obtained that a collection of Lerch zeta-functions $(L(\lambda_1,\alpha_1,s),\dots,L(\lambda_r,\alpha_r,s))$ has a discrete universality property, i.e., a wide class of analytic functions can be approximated by shifts $L(\lambda_1,\alpha_1,s+ikh),\dots,L(\lambda_r,\alpha_r,s+ikh)$, $h>0$, $k=0,1,2,\dots$. For this, the linear independence over $\mathbb{Q}$ of the set

$$\left\{(\log(m+\alpha_j):m\in\mathbb{N}_0,j=1,\dots,r),\frac{2\pi}{h}\right\}$$

is required. More precisely, if $K_1,\dots,K_r$ are compact subsets of the strip $\left\{s\in\mathbb{C}:\frac{1}{2}<\sigma<1\right\}$ with connected complements, and $f_1(s),\dots,f_r(s)$ are functions continuous on $K_1,\dots,K_r$ and analytic in the interior of $K_1,\dots,K_r$, respectively, then, for every $\varepsilon>0$,

$$\liminf_{N\to\infty}\frac{1}{N+1}\#\left\{0\leqslant k\leqslant N:\sup_{1\leqslant j\leqslant r}\sup_{s\in K_j}|L(\lambda_j,\alpha_j,s+ikh)-f_j(s)|<\varepsilon\right\}>0.$$

It is possible to consider a more general situation, i.e., to consider the approximation of $f_1(s),\dots,f_r(s)$ by different shifts $L(\lambda_1,\alpha_1,s+ikh_1),\dots,L(\lambda_r,\alpha_r,s+ikh_r)$ with $h_1>0,\dots,h_r>0$. For this case, a new more general method than that of the paper is required, and it will be developed in a subsequent paper.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Billingsley P. Convergence of Probability Measures. N. Y.: Wiley, 1968. 262 p.
2. Conway J. B. Functions of one complex variable. Berlin: Heidelberg; N. Y.: Springer, 1978. 167 p.
3. Ignatavičiūtė J. Discrete universality of the Lerch zeta-function // Abstracts 8th Vilnius Conference on Prob. Theory. Vilnius, Lithuania, 2002. P. 116–117.
4. Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. М.: Физматлит, 1994. 376 с.
5. Laurinčikas A. The universality of the Lerch zeta-function // Liet. Matem. Rink. 1997. Vol. 37. P. 275—280, 367–375
6. Laurinčikas A. On the joint universality of Hurwitz zeta-functions // Šiauliai Math. Semin. 2008. Vol. 3(11). P. 169–187.
7. Laurinčikas A., Garunkštis R. The Lerch Zeta-Function. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Academic Publishers, 2002. 189 p.
8. Laurinčikas A., Macaitienė R. The discrete universality of the periodic Hurwitz zeta-function // Integral Transforms. Spec. Funct. 2009. Vol. 20. P. 673–686.
9. Laurinčikas A., Macaitienė R., Mochov D., Šiaučiūnas D. Universality of the periodic Hurwitz zeta-function with rational parameter. 2017 (submitted).

10. Laurinčikas A., Matsumoto K. The joint universality and functional independence for Lerch zeta-functions // Nagoya Math. Journal. 2000. Vol. 157. P. 211–227.

11. Laurinčikas A., Matsumoto K. Joint value-distribution theorems on Lerch zeta-functions. II // Lith. Math. Journal. 2006. Vol. 46. P.332–350.

12. Laurinčikas A., Mincevič A. Discrete universality theorems for the Lerch zeta-function // Anal. Probab. Methods Number Theory. A. Dubickas et al. (Eds). P. 87–95.

13. Lerch M. Note sur la fonction $K(w,x,s)=\sum_{n\geqslant 0}\exp\{2\pi inx\}(n+w)^{-s}$ // Acta Math. 1887. Vol. 11. P. 19–24.

14. Lipschitz R. Untersuchung einer aus vier Elementen gebildeten Reihe // J. Reine Angew. Math. 1889. Vol. 105. P. 127–156.

15. Мергелян С. Н. Равномерные приближения функций комплексного переменного // Успехи мат. наук. 1952. Т. 7, № 2. С. 31—122.

16. Mincevič A., Šiaučiūnas D. Joint universality theorems for Lerch zeta-functions // Šiauliai Math. Semin. 2017. Vol. 12(20). P. 31–47.

17. Mincevič A., Vaiginytė A. Remarks on the Lerch zeta-function // Šiauliai Math. Semin. 2016. Vol. 11(19). P. 65–73.

18. Воронин С. М. Теорема об "универсальности" дзета-функции Римана // Изв. АН СССР. Сер.: Математика. 1975. Т. 39. С. 475–486 ≡ Math. USSR Izv. 1975. Vol. 9. P. 443–453.

REFERENCES

1. Billingsley, P. 1968, *Convergence of Probability Measures*, Wiley, New York.

2. Conway, J.B. 1978, *Functions of one complex variable.*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York.

3. Ignatavičiūtė, J. 2002, "Discrete universality of the Lerch zeta-function", *Abstracts 8th Vilnius Conference on Prob. Theory*, pp. 116–117.

4. Karatsuba, A. A., Voronin, S. M. 1992, *The Riemann zeta-function*, Walter de Gruyter, Berlin.

5. Laurinčikas, A. 1997, "The universality of the Lerch zeta-function", *Liet. Matem. Rink.*, vol. 37, pp. 367–375 (in Russian) ≡ Lith. Math. J., vol. 37, pp. 275–280.

6. Laurinčikas, A. 2008, "On the joint universality of Hurwitz zeta-functions", *Šiauliai Math. Semin.*, vol. 3(11), pp. 169–187.

7. Laurinčikas, A., Garunkštis, R. 2002, *The Lerch Zeta-Function*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London.

8. Laurinčikas, A., Macaitienė, R. 2009, "The discrete universality of the periodic Hurwitz zeta-function", *Integral Transforms. Spec. Funct.*, vol. 20, pp. 673–686.

9. Laurinčikas, A., Macaitienė, R., Mochov, D., Šiaučiūnas, D. 2017, "Universality of the periodic Hurwitz zeta-function with rational parameter", (submitted).

10. Laurinčikas, A., Matsumoto, K. 2000, "The joint universality and functional independence for Lerch zeta-functions", *Nagoya Math. J.*, vol. 157. pp. 211–227.

11. Laurinčikas, A., Matsumoto, K. 2006, "Joint value-distribution theorems on Lerch zeta-functions. II", *Lith. Math. J.*, vol 46, pp. 332–350.

12. Laurinčikas, A., Mincevič, A. 2017, "Discrete universality theorems for the Lerch zeta-function", *Anal. Probab. Methods Number Theory*, A. Dubickas et al. (Eds). pp. 87–95.

13. Lerch, M. 1887, "Note sur la fonction $K(w,x,s) = \sum_{n\geqslant 0} \exp\{2\pi inx\}(n+w)^{-s}$", *Acta Math.*, vol. 11, pp. 19–24.

14. Lipschitz, R. 1889, "Untersuchung einer aus vier Elementen gebildeten Reihe", *J. Reine Angew. Math.*, vol. 105, pp. 127–156.

15. Mergelyan, S. N. 1952, "Uniform approximations to functions of a complex variable", *Usp. Matem. Nauk*, vol.7 no 2, pp. 31–122(in Russian)≡ *Amer. Math. Trans.*, 1954, vol. 101.

16. Mincevič, A., Šiaučiūnas, D. 2017, "Joint universality theorems for Lerch zeta-functions", *Šiauliai Math. Semin.*, vol. 12(20), pp. 31–47.

17. Mincevič, A., Vaiginytė, A. 2016, "Remarks on the Lerch zeta-function", *Šiauliai Math. Semin.*, vol. 11(19), pp. 65–73.

18. Voronin, S. M. 1975, "Theorem on the "universality" of the Riemann zeta-function", *Izv. Akad. Nauk SSSR.*, vol. 39. pp. 475–486 (in Russian) ≡ *Math. USSR Izv.*, vol. 9, pp.443–453.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 19. Выпуск 1

УДК 539.52:669.11.018 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-1-152-166

Анализ уравнений теории пластичности порошковых металлических систем[1]

Макаров Эдуард Сергеевич — профессор, доктор технических наук, Тульский государственный университет.
Гвоздев Александр Евгеньевич — главный научный сотрудник кафедры технологии и сервиса, профессор, доктор технических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого.
e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru
Журавлев Геннадий Модестович — профессор, доктор технических наук, Тульский государственный университет.
e-mail: technology@tsput.ru
Сапожников Сергей Владимирович — главный специалист, ООО «Тулачермет-Сталь».
e-mail: sapozhnikov_sv@tula-steel.ru
Сергеев Александр Николаевич — заведующий кафедрой технологии и сервиса, старший научный сотрудник кафедры технологии и сервиса, профессор, доктор технических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого.
e-mail: technology@tsput.ru
Колмаков Алексей Георгиевич — член-корреспондент РАН, профессор, доктор технических наук, заместитель директора, Институт металлургии и материаловедения им. А. А. Байкова РАН.
e-mail: kolmalov@imet.ac.ru
Бреки Александр Джалюльевич — кандидат технических наук, доцент, заместитель заведующего кафедрой, Санкт-петербургский политехнический университет Петра Великого.
e-mail: albreki@yandex.ru
Малий Дмитрий Владимирович — ассистент кафедры технологии и сервиса, Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого.
e-mail: MaliyDmitriy@yandex.ru
Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет.
e-mail: nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Аннотация

В работе дан обзор методов расчета, основных параметров процессов пластического деформирования дилатирующих материалов, типичными представителями которых являются порошковые металлические системы различных химических составов. В их основу положены математические модели, использующие не только качественное объяснение, но и количественное описание эффекта дилатансии. Приведена полная система основных уравнений теории пластичности жесткопластических изотропных дилатирующих

[1]Работа выполнена по федеральной целевой программе «Исследование и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2014-2020 годы» (уникальный идентификатор проекта RFMEF 157717X0271).

сред. Рассмотрен пример расчета установившегося пластического течения в условиях осесимметричной деформации. Показано, что для осесимметричной деформации уравнения относительно проекций вектора скорости на характеристические направления, аналогичны уравнениям для плоской деформации. Установлено, что используемые в настоящее время условия текучести с различной степенью точности описывают виды дилатансии (разрыхление и уплотнение). Поэтому, для более точного решение некоторых задач необходимо уточнение математических моделей условия текучести. Для некоторых процессов, пластического формоизменения при решении системы уравнений дилатирующих сред целесообразно условия текучести представлять в виде отдельных областей: гиперболичной, параболичной и эллиптичной.

Ключевые слова: дилатирующая среда, осесимметричная деформация, полная система уравнений, условие текучести, характеристики кривой условия текучести, порошковая металлическая система.

Библиография: 28 названий.

Для цитирования:
Э. С. Макаров, А. Е. Гвоздев, Г. М. Журавлев, А. Г. Колмаков, А. Н. Сергеев, С. В. Сапожников, А. Д. Бреки, Д. В. Малий, Н. Н. Добровольский. Анализ уравнений теории пластичности порошковых металлических систем // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, вып. 1, С. 152–166.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 19. No. 1

UDC 539.52:669.11.018 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-1-152-166

Analysis of plasticity theory equations of powder metal systems

Makarov Eduard Sergeevich — professor, doctor of technical sciences, Tula State University.
Gvozdev Alexander Evgenievich — chief researcher of the department of technology and service, professor, doctor of technical sciences, Tula State L. N. Tolstoy Pedagogical University.
e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru
Zhuravlev Gennady Modestovich — professor, doctor of technical sciences, Tula State University.
e-mail: technology@tsput.ru
Sapozhnikov Sergey Vladimirovich — Chief specialist, LLC «Tulachermet-Steel».
e-mail: sapozhnikov_sv@tula-steel.ru
Sergeev Alexander Nikolaevich — head of the department of technology and service, senior researcher of the department of technology and service, professor, doctor of technical sciences, Tula L.N. Tolstoy State Pedagogical University.
e-mail: technology@tsput.ru
Kolmakov Aleksey Georgievich — corresponding member of RAS, professor, doctor of technical sciences, deputy director, Institute of Metallurgy and Materials Science A.A. Baikova of the Russian Academy of Sciences.
e-mail: kolmalov@imet.ac.ru
Breki Alexander Jalulievich — candidate of technical sciences, assistant professor, deputy head of the department, State Petersburg Polytechnic University of Peter the Great.
e-mail: albreki@yandex.ru
Maliy Dmitriy Vladimirovich — assistant of the department of technology and service, Tula State L.N. Tolstoy Pedagogical University.
e-mail: MaliyDmitriy@yandex.ru
Dobrovolsky Nikolai Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, assistant of the department of applied mathematics and computer science, Tula State University.
e-mail: nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Abstract

The paper provides the review of calculation method and basic parameters of moulding processes in dilatant materials which are typical representatives of powder metal systems of different chemical compositions. They are based on mathematical models that use not only qualitative explanation, but also quantitative description of the dilatancy effect. The work shows the complete system of basic plasticity theory equations of the rigid-plastic isotropic dilatant media. It considers an example of the steady-state plastic flow calculation under conditions of axisymmetric deformation. It is shown that for axisymmetric deformation the equations relative to velocity vector projection on the characteristic directions are similar to the equations for planar deformation. It is established that the current yield conditions with varying degrees of accuracy describe the types of dilatancy (loosening and compaction). Therefore, for a more precise solution of some problems, it is necessary to refine the mathematical models of the yield condition. For some processes of plastic shaping when solving the system of equations of dilatant media, it is expedient to represent the flow conditions in the form of separate regions: hyperbolic, parabolic and elliptic.

Keywords: dilatant medium, axisymmetric deformation, complete system of equations, condition of fluidity, characteristics of the yield curve, powder metal system.

Bibliography: 28 titles.

For citation:

E. S. Makarov, A. E. Gvozdev, G. M. Zhuravlev, A.G. Kolmakov, A. N. Sergeev, S. V. Sapozhnikov, A. D. Breki, D. V. Maliy, N. N. Dobrovolsky, 2018, "Analysis of plasticity theory equations of powder metal systems", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 1, pp. 152–166.

1. Введение

Современные возрастающие требования к качеству изделий требуют более полного подхода к анализу и проектированию процессов производства. Одной из основных тенденций современного машиностроения является повышение эффективности существующих и разработка новых технологических процессов, обеспечивающих повышение качества выпускаемых изделий при снижении себестоимости и трудоемкости их производства, экономии материальных и энергетических ресурсов. В связи с этим в различных отраслях промышленности в настоящее время возникает необходимость учета необратимого изменения объема материала при расчетах многих технологических процессов, например, формования порошковых материалов, обработки давлением и резанием пористых заготовок, уплотнения грунтов, закрытой прокладке трубопроводов способом прокола.

2. Подход к расчету основных параметров пластического деформирования дилатирующих материалов

В результате экспериментальных и теоретических исследований, выполненных в нашей стране и за рубежом, разработаны некоторые методы расчета основных параметров процессов пластического деформирования дилатирующих материалов. В основу, которых положены математические модели, использующие не только для качественного объяснения, но и количественного учета и описания эффекта дилатансии. Установлено, что наиболее плодотворным является использование континуальных моделей пластической дилатансии, в том числе и стохастических. Первый шаг на этом пути сделали в 1952 г. Д. Друккер и В. Прагер [1], которые подошли к этому с позиции теории пластического потенциала на основе линейного условия текучести.

$$\alpha J_1 + \sqrt{J_2'} = \Upsilon \tag{1}$$

где J_1 - сумма главный напряжений, J_2' - второй инвариант девиатора напряжений, α и Υ-положительные константы, получили для скорости объемной пластической деформации ε выражение

$$\varepsilon = 3\alpha\lambda \tag{2}$$

причем из определяющих соотношений, ассоциированных с условием (1), следует, что коэффициент пропорциональности λ между компонентой ε_{ij} тензора скоростей деформаций и частной производной пластического потенциала f по соответствующей компоненте тензора напряжений σ_{ij}равен интенсивности скоростей деформаций сдвига H.

Величина

$$\Lambda = \varepsilon/H, \tag{3}$$

определяемая отношением скорости объемной деформации к интенсивности скоростей деформаций сдвига, называется скоростью дилатансии [2].

В терминах среднего напряжения σ и интенсивности касательных напряжений T, связанных с инвариантами J_1 и J_2' соотношениями

$$J_1 = 3\sigma, \;\; J_2' = T^2, \tag{4}$$

условие Друккера – Прагера переписывается в виде

$$3\alpha\sigma + T = \Upsilon. \tag{5}$$

Полагая

$$f = 3\alpha\sigma + T - \Upsilon \tag{6}$$

согласно концепции пластического потенциала получаем

$$\varepsilon = \lambda\frac{\partial f}{\partial\sigma} = 3\alpha\lambda, \;\; H = \lambda\frac{\partial f}{\partial T} = \lambda, \tag{7}$$

откуда находим

$$\Lambda = 3\alpha > 0, \tag{8}$$

т.е. дилатирующая среда, поведение которой подчиняется условию текучести Друккера – Прагера и ассоциированному закону течения, в процессе деформирования - разрыхляется.

Кроме того, во многих случаях дилатирующие материалы подвергаются преимущественному уплотнению. Таковы, например, процессы прокатки, экструзии и прессования порошковых и пористых металлов [3-9].

Поэтому в связи с необходимостью учета уплотнения материала гипотеза о связно-сыпучей среде, соответствующей идеальной пластичности, встретила ряд возражений, опиравшихся на экспериментальные результаты.

Необходимые обобщения условия (1), обеспечивавшие в той или иной степени согласование теории дилатансии с экспериментами, выполнили в 1957г. Д. Друккер, Р. Гибсон и Д. Хенкель, в 1959г. – Э. Дженике и Р. Шилд, в 1969г. – Н. Су, Дж. Вейдлер и П. Пэсли, в 1970г. – Ф. Димаджио и И. Сандлер, - полученные ими результаты сводились в основном к построению замкнутых поверхностей текучести в пространстве напряжений.

Наибольшее распространение в расчетах технологических процессов порошковой металлургии получили квадратичное условие текучести Р. Грина и его различные модификации, охватываемые выражением

$$AJ_2' + BJ_1^2 = D\Upsilon_0^2, \tag{9}$$

где A, B, D - функции относительной плотности R (отношения плотностей пористого и компактного металлов) или, что то же, пористости $\Pi = 1 - R$, Υ_0 - предел текучести компактного металла.

В условии текучести Грина

$$A = 3, B = \frac{1}{4}\left[\frac{3(1-\Pi^{1/3})}{(3-2\Pi^{1/4})\ln\Pi}\right]^2, D = \left[\frac{3(1-\Pi^{1/3})}{3-2\Pi^{1/4}}\right]^2.$$

В рамках закона пластического течения, ассоциированного с условием текучести (9), для скорости дилатансии находим

$$\Lambda = 9B\sigma/(AT), \tag{10}$$

откуда следует, что знаки скорости дилатансии и среднего напряжения совпадают и что $\Lambda = 0$ при $\sigma = 0$.

Достоинством всех условий является то, что, во-первых, при $\Pi = 0$ ($R = 1$) они обращаются в классическое условие пластичности Мизеса, во-вторых, учитывают упрочнение и разупрочнение дилатирующего материала и, в-третьих, предусматривают изменение знака дилатансии с изменением знака нормального октаэдрического напряжения. Недостаток этих

условий заключается в том, что они предсказывают одинаковую сопротивляемость материала растяжению и сжатию, а также нулевую скорость дилатансии в отсутствие гидростатического давления. Последние замечания снимаются, если ввести еще одну материальную функцию $c \geqslant 0$ и записать условие текучести в виде

$$J_2' + B(J_1 + 3c)^2 = D\Upsilon_0^2. \tag{11}$$

При этом прочностные характеристики при сжатии будут выше, чем при растяжении, а скорость дилатансии составит

$$\Lambda = 9B(\sigma + c)/(AT) \tag{12}$$

и будет положительной при $\sigma = 0$, т.е. в отсутствие гидростатического давления дилатирующий материал разрыхляется.

Геометрическая интерпретация условий текучести даны на рис. 1 и рис. 2.

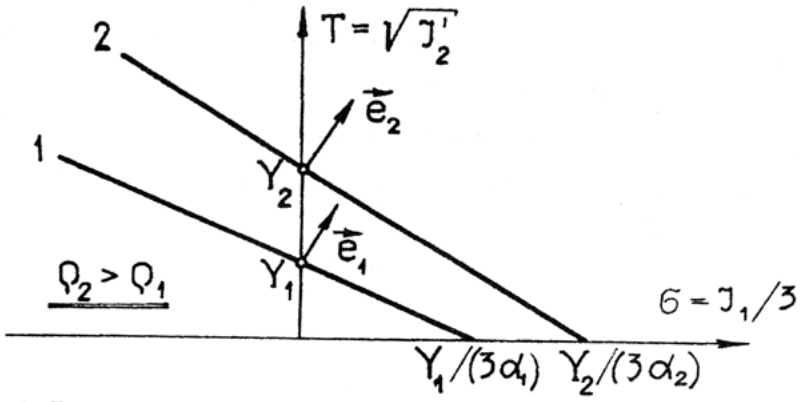

Рис. 1: Условие текучести Друккера-Прагера.

Однако дальнейшее развитие техники выдвигает все более сложные задачи, эффективное решение которых связано с уточнением математических моделей изучаемых процессов, когда при решении системы уравнений дилатирующих сред условия текучести представляется в виде отдельных участков условия текучести.

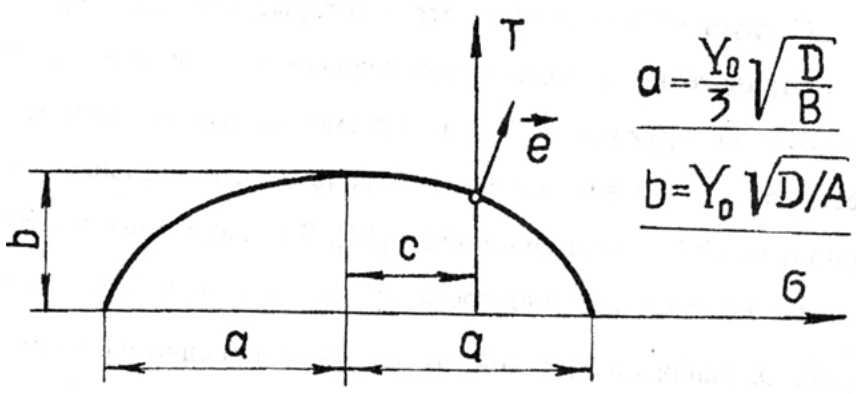

Рис. 2: Условие текучести Грина.

3. Полная система уравнений

Дилатирующая среда считается жесткопластической изотропной [10]. Массовыми силами пренебрегаем. Полная система уравнений теории течения такой среды содержит уравнения равновесия и неразрывности, условие пластичности, соотношения ассоциированного закона течения

$$\sigma_{ij,j} = 0, \dot{\rho} + \rho_{i,i} = 0 f = 0, v_{i,j} + v_{j,i} = 2\lambda\sigma_{ij}, \tag{13}$$

где ν_i– скорость течения, и дополняется краевыми условиями.

Рассмотрим установившиеся течения на примере осесимметричной деформации.

4. Осесимметричная деформация

Пусть в меридиональной плоскости течения, совпадающей с плоскостью z, r, p и τ – соответственно полусумма и полуразность главных напряжений, ψ- угол между осью r и первым главным направлением [11-13].

Тогда

$$\sigma_r = p + \tau\cos 2\psi, \;\; \sigma_z = p - \tau\cos 2\psi, \;\; \tau_{rz} = \tau\sin 2\psi \tag{14}$$

где τ является функцией p, σ, ρ:

$$\tau = \sqrt{k^2(\sigma,\rho) - 3(\rho-\sigma)^2} \tag{15}$$

Система уравнений осесимметричной деформации имеет вид

$$\begin{array}{l} p_{,r} + (\tau_p p_{,r} + \tau_\sigma \sigma_{,r} + \tau_p p_{,r})\cos 2\psi - 2\tau\sin 2\psi\psi_{,r} + \\ +(\tau_p p_{,z} + \tau_\sigma \sigma_{,z} + \tau_p p_{,z})\sin 2\psi + \\ +2\tau\cos 2\psi\psi_{,z} + \frac{1}{r}\left[3(p-\sigma) + \tau\cos 2\psi\right] = 0 \end{array} \tag{16}$$

$$\begin{array}{l} (\tau_p p_{,r} + \tau_\sigma \sigma_{,r} + \tau_p p_{,r})\sin 2\psi - 2\tau s\cos 2\psi\psi_{,r} + p_{,z} - \\ -(\tau_p p_{,z} + \tau_\sigma \sigma_{,z} + \tau_p p_{,z})\cos 2\psi + \\ +2\tau\sin 2\psi\psi_{,z} + \frac{\tau}{r}\sin 2\psi = 0 \end{array} \tag{17}$$

$$up_{,r} + wp_{,z} + p(u_{,r} + w_{,z} + \frac{u}{r}) = 0 \tag{18}$$

$$2\tau\sin 2\psi u_{,r} - \left(\tau\cos 2\psi + p - \sigma - \frac{2}{3}k{,}k\right)(u_{,z} + w_{,r}) = 0 \tag{19}$$

$$\left(\tau\cos 2\psi - p + \sigma + \frac{2}{3}k{,}k\right)(u_{,z} + w_{,r}) + 2\tau\sin 2\psi w_{,z} = 0, \tag{20}$$

$$\left(p - \sigma - \frac{1}{3}k{,}k\right)(u_{,z} + w_{,r}) - \frac{\tau}{r}u\sin 2\psi = 0. \tag{21}$$

Характеристические многообразия этой системы находим по общему правилу [14] из условия

$$Det\omega_{ij} = 0, \tag{22}$$

где $\omega = \omega(r,z)$ – уравнение поверхности слабого разрыва, а элементы детерминанта шестого порядка даются выражениями:

$$
\begin{aligned}
&\omega_{11}=0,\omega_{12}=0,\omega_{13}=u\omega_r+w\omega_z\\
&\omega_{14}=0,\omega_{15}=\rho\omega_r,\omega_{16}=\rho\omega_{,z}\\
&\omega_{21}=(1+\tau_\rho\cos 2\psi)\omega_r+\tau_\rho\sin 2\psi\omega_z\\
&\omega_{22}=\tau_\sigma\cos 2\psi\omega_r+\tau_\sigma\sin 2\psi\omega_z\\
&\omega_{23}=\tau_\rho\cos 2\psi\omega_r+\tau_\rho\sin 2\psi\omega_z\\
&\omega_{24}=-2\tau\sin 2\psi\omega_r+2\tau\cos 2\psi\omega_z\\
&\omega_{25}=0,\omega_{26}=0\\
&\omega_{31}=\tau_\rho\sin 2\psi\omega_r+(1-\tau_\rho\cos 2\psi)\omega_z\\
&\omega_{32}=\tau_\sigma\sin 2\psi\omega_r-\tau_\sigma\cos 2\psi\omega_z,\\
&\omega_{33}=\tau_\rho\sin 2\psi\omega_r-\tau_\rho\cos 2\psi\omega_z,\\
&\omega_{34}=\tau_\rho\cos 2\psi\omega_r+2\tau\sin 2\psi\omega_z,\\
&\omega_{35}=0,\omega_{36}=0;\\
&\omega_{41}=0,\omega_{42}=0,\omega_{43}=0,\omega_{44}=0,\\
&\omega_{45}=2\tau\sin 2\psi\omega_r-\left(\tau\cos 2\psi+p-\sigma-\tfrac{2}{3}k{,}k\right)\omega_z,\\
&\omega_{46}=-\left(\tau\cos 2\psi+p-\sigma-\tfrac{2}{3}k{,}k\right)\omega_r\\
&\omega_{51}=0,\omega_{52}=0,\omega_{53}=0,\omega_{54}=0,\\
&\omega_{55}=\left(\tau\cos 2\psi-p+\sigma+\tfrac{2}{3}k{,}k\right)\omega_z,\\
&\omega_{56}=\left(\tau\cos 2\psi-p+\sigma+\tfrac{2}{3}k{,}k\right)\omega_r+2\tau\sin 2\psi\omega_z;\\
&\omega_{61}=0,\omega_{62}=0,\omega_{63}=0,\omega_{64}=0,\\
&\omega_{65}=\left(p-\sigma-\tfrac{1}{3}k{,}k\right)\omega_z,\\
&\omega_{66}=\left(p-\sigma-\tfrac{1}{3}k{,}k\right)\omega_r,
\end{aligned}
$$

Внося значения элементов детерминанта в условие (22) и преобразуя последнее с помощью теоремы Лапласа, в конечном итоге придем к выводу, что характеристиками системы уравнений осесимметричной деформации являются линии тока

$$\frac{dz}{dr}=\frac{w}{u} \tag{23}$$

и две пары семейств кривых

$$\frac{dz}{dr}=\frac{\sin 2\psi\pm\sqrt{1-\tau_p^2}}{\cos 2\psi+\tau_p} \tag{24}$$

$$\frac{dz}{dr}=\frac{\sin 2\psi\pm\sqrt{1-\left(\tau_p+\frac{2}{3}\tau_\sigma\right)^2}}{\cos 2\psi+\tau_p} \tag{25}$$

Характеристики (24) и (25) действительны при $|k{,}| \leqslant \sqrt{3}/2$ и $|k{,}| \geqslant \sqrt{3}$, т.е. случай эллиптичности изображается на кривой $T=k(\sigma,\rho)$ (рис. 3) внутренними точками дуг MP и NQ. Точки M, N, P, Q изображают случаи параболичности. Внутренние точки дуг PQ, MR, NS, а также точки R и S представляют область гиперболичности.

Кривые различных семейств пар (24) и (25) пересекаются под углами

$$\chi_1=\arccos\tau_\rho,\chi_2=\arccos\left(\tau_\rho+\frac{2}{3}\tau_\sigma\right) \tag{26}$$

которые делятся пополам первым главным направлением.

Вдали от оси симметрии деформация приближается к плоской, поэтому

$$p\to\sigma-\frac{1}{3}k{,}k,\chi_2\to\chi_1$$

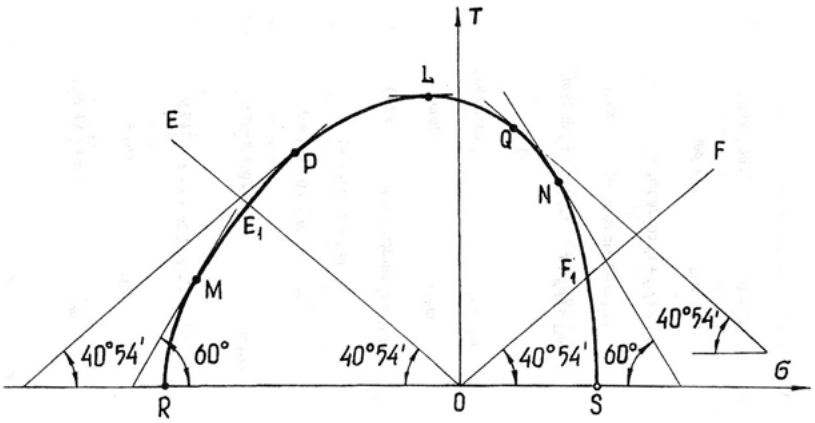

Рис. 3: Области гиперболичности, параболичности и эллиптичности полной системы уравнений для случая осесимметричной деформации

Пусть характеристические линии ζ, η, μ, ν составляют с осью r соответственно углы $\alpha_1 = \psi - \frac{1}{2}\chi_1$, $\beta_1 = \psi + \frac{1}{2}\chi_1, \alpha_2 = \psi - \frac{1}{2}\chi_2, \beta_1 = \psi + \frac{1}{2}\chi_2$. Тогда уравнения (16)-(17) и (19)-(20), отнесенные к сеткам характеристик (24) и (25), примут вид

$$\begin{gathered}\cos\chi_1 p,\zeta + p,_\eta + \tau_\sigma\sigma,_\zeta + \tau_\rho\rho,_\zeta + 2\tau ctg\chi_1\psi,_\zeta + \\ +2\tau\cos ec\chi_1\psi,_\eta + \tfrac{1}{r}\left[3(p-\sigma)\cos\beta_1 + \tau\cos\alpha_1\right] = 0,\end{gathered} \tag{27}$$

$$\begin{gathered}p,_\zeta + \cos\chi_1 p,_\eta + \tau_\sigma\sigma,_\eta + \tau_\rho\rho,_\eta - 2\tau\cos ec\chi_1\psi,_\zeta + \\ +2\tau ctg\chi_1\psi,_\eta + \tfrac{1}{r}\left[3(p-\sigma)\cos\alpha_1 + \tau\cos\beta_1\right] = 0\end{gathered} \tag{28}$$

$$u,_\mu\cos\alpha_2 - u,_v\cos\beta_2 + w,_\mu\sin\alpha_2 - w,_v\sin\beta_2 = 0 \tag{29}$$

$$\begin{gathered}u,_\mu\cos(k-\beta_{2)_-}u,_v\cos(k+\alpha_{2)} + w,_\mu\sin(k-\beta_2) - \\ -w,_v\sin(k-\beta_2) = 0\end{gathered} \tag{30}$$

где

$$k = arctg(\sin 2\psi\sec\chi_2).$$

Формы записи соотношений (29) - (30) показывают, что для осесимметричной деформации уравнения относительно проекций вектора скорости на характеристические направления, аналогичны уравнениям для плоской деформации (15).

5. Заключение

Проведенные исследования основных уравнений теории пластичности дилатирующих сред свидетельствуют о том, что используемые условия текучести Д. Друккера и В. Прагера, Р. Грина с различной степенью точности описывают виды дилатансии (разрыхление и уплотнение). Приведенные исследования целым рядом авторов, показали, что необходимо построение замкнутых поверхностей текучести в пространстве напряжений. Для определения независимых параметров поверхности текучести можно использовать результаты экспериментов по одноосному растяжению, одноосному сжатию и чистому сдвигу образцов. Однако, для эффективного решение некоторых задач, необходимо дальнейшее уточнение математических моделей условий текучести. В этом случае при решении системы уравнений дилатирующих сред

условия текучести целесообразно представляется в виде отдельных областей: гиперболичной, параболичной и эллиптичной.

Результаты исследования могут быть использованы при создании малопереходных и ресурсосберегающих процессов обработки конструкционных материалов в различных условиях и состояниях с использованием новых конструкционных смазок и покрытий [16-26] и в различных важнейших технологических приложениях [27-28].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Определяющие законы механики грунтов: Сб. статей / Под ред. В.Н. Николаевского. - М.: Мир, 1975. - 230 с.

2. Вялов С.С. Реологические основы механики грунтов. - М.: Высшая школа, 1978. - 448 с.

3. Виноградов Г.А., Каташинский В.П. Теория листовой прокатки металлических порошков и гранул. - М.: Металлургия, 1979. - 224 с.

4. Перельман В.Е. Формование порошковых материалов. - М.: Металлургия, 1979. - 232 с.

5. Макаров Э.С. К теории формования металлических порошков в условиях плоской деформации // Известия вузов, Машиностроение. - 1973. - № 10. - С. 158-162.

6. Павлов В.А., Кипарисов С.С., Щербина В.В. Обработка давлением порошков цветных металлов. - М.: Металлургия, 1977. - 176 с.

7. Новые процессы деформации металлов и сплавов / А.П. Коликов, П.И. Полухин, А.В. Крупин и др. - М.: Высшая школа, 1986. - 352 с.

8. Порошковая металлургия и напыленные покрытия / Под ред. Б.С. Митина. - М.: Металлургия, 1987. - 792 с.

9. Экономичные методы формообразования деталей / Под ред. К.Н. Богоявленского и В.В. Риса. - Л.: Лениздат, 1984. - 144 с.

10. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. - М.: Наука, 1969.- 420 с.

11. Макаров Э.С., Губанов А.В. Построение математических моделей процессов осесимметричной деформации дилатирующих сред // Математические методы в технике и технологиях. – Великий Новгород: изд. НГУ, 1999. – С. 127-128.

12. Журавлев Г.М., Чан Дык Хоан. Подход к решению задач пластического формоизменения деталей из дилатирующих материалов // Известия ТулГУ. Серия. Технические науки. Тула: Изд-во ТулГУ. 2011. – Вып. 6. часть 2 – С. 301-309.

13. Макаров Э.С., Толоконников Л. А. Вариант построения теории пластичности дилатирующей среды // Изв. АН СССР, Механика твердого тела. - 1979. - № 1. – С. 88-93.

14. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. - М., Л.: Гостехиздат, 1945. - 620 с.

15. Макаров Э.С. Теория пластичности дилатирующих сред: монография / Э.С. Макаров, А.Е. Гвоздев, Г.М. Журавлев; под. ред. А.Е. Гвоздева. – 2-е изд. перераб. и доп. – Тула: Издательство ТулГУ, 2015. – 337 с.

16. Расчет деформационной повреждаемости в процессах обратного выдавливания металлических изделий / А.Е. Гвоздев, Г.М. Журавлев,А.Г. Колмаков, Д.А. Провоторов, Н.Н. Сергеев // Технология металлов. – 2016. – № 1. – С. 23-32.

17. Вариант расчета максимального упрочнения малоуглеродистых сталей в процессах пластической деформации / Г.М. Журавлев, А.Е. Гвоздев, Н.Н. Сергеев, Д.А. Провоторов // Производство проката. – 2016. – № 7. – С. 9-13.

18. Вытяжка с утонением анизотропного упрочняющего материала / Г.М. Журавлев, А.Е. Гвоздев, В.И. Золотухин, Д.А. Провоторов // Производство проката. – 2016. – № 4. – С. 5-10.

19. Синтез и триботехнические свойства композиционного покрытия с матрицей из полиимида (Р-ООО)ФТ и наполнителем из наночастиц дисульфида вольфрама при сухом трении скольжения / А.Д. Бреки, А.Л. Диденко, В.В. Кудрявцев, Е.С. Васильева, О.В. Толочко, А.Г. Колмаков, А.Е. Гвоздев, Д.А. Провоторов, Н.Е. Стариков, Ю.А. Фадин // Материаловедение. – 2016. – № 4. – С. 44-48.

20. Композиционные покрытия на основе полиимида А-ООО и наночастиц WS2 с повышенными триботехническими характеристиками в условиях сухого трения скольжения / А.Д. Бреки, А.Л. Диденко, В.В. Кудрявцев, Е.С. Васильева, О.В. Толочко, А.Е. Гвоздев, Н.Н. Сергеев, Д.А. Провоторов, Н.Е. Стариков, Ю.А. Фадин, А.Г. Колмаков // Материаловедение. – 2016. – № 5. – С. 41-44.

21. Бреки А.Д. Использование обобщенного треугольника Паскаля для описания колебаний силы трения материалов / А.Д. Бреки, А.Е. Гвоздев, А.Г. Колмаков // Материаловедение. – 2016. – № 11. – С. 3-8.

22. Распределение температур и структура в зоне термического влияния для стальных листов после лазерной резки / А.Е. Гвоздев, Н.Н. Сергеев, И.В. Минаев, А.Г. Колмаков, И.В. Тихонова, А.Н. Сергеев, Д.А. Провоторов, Д.М. Хонелидзе, Д.В. Малий, И.В. Голышев // Материаловедение. – 2016. – № 9. – С. 3-7.

23. О фрикционном взаимодействии металлических материалов с учетом явления сверхпластичности / А.Д. Бреки, А.Е. Гвоздев, А.Г. Колмаков, Н.Е. Стариков, Д.А. Провоторов, Н.Н. Сергеев, Д.М. Хонелидзе // Материаловедение. – 2016. – № 8. – С. 21-25.

24. Maximum plastic strengthening in tool steels / G.M. Zhuravlev,A.E. Gvozdev, A.E. Cheglov, N.N. Sergeev, O.M. Gubanov // Steel in Translation. 2017. Vol. 47. № 6. P 399-411.

25. Сопряженные поля в упругих, пластических, сыпучих средах и металлических труднодеформируемых системах: монография / Э.С. Макаров, В.Э. Ульченкова, А.Е. Гвоздев, Н.Н. Сергеев, А.Н. Сергеев / под ред. А.Е. Гвоздева. Тула: Издательство ТулГУ, 2016. 526 с.

26. Гвоздев А.Е., Журавлев Г.М., Колмаков А.Г. Формирование механических свойств углеродистых сталей в процессах вытяжки с утонением // Технология металлов. 2015. № 11. С. 17 – 29.

27. Применение теории пластичности дилатирующих сред к процессам уплотнения порошков металлических систем / Э.С. Макаров, А.Е. Гвоздев, Г.М. Журавлев, А.Н. Сергеев, И.В. Минаев, А.Д. Бреки, А.Д. Малий//Чебышевский сборник. 2017. Т.18. Вып. 4. С. 1-17.

28. Гвоздев А.Е., Журавлев Г.М., Сапожников С.В. К теоретическому анализу процесса компактирования порошковых материалов прессованием//Известия Тульского государственного университета. Науки о земле. 2017. Вып. 4. С. 273-283.

REFERENCES

1. Nikolayevskiy V. N., 1975. *Opredelyayushchiye zakony mekhaniki gruntov [Defining laws of soil mechanics]: Collection of articles, Ed. by V.N. Nikolayevskiy.* Moscow: Mir, 230 P.

2. Vyalov S. S., 1978. *Reologicheskiye osnovy mekhaniki gruntov [Rheological basis of soil mechanics].* Moscow: Vysshaya shkola, 448 P.

3. Vinogradov G. A., Katashinskiy V.P., 1979. *Teoriya listovoy prokatki metallicheskikh poroshkov i granul [The theory of sheet rolling of metal powders and granules].* Moscow: Metallurgiya, 224 P.

4. Perel'man V.E., 1979. *Formovaniye poroshkovykh materialov [Molding of powder materials].* Moscow: Metallurgiya - 232 P.

5. Makarov E.S., 1973. "K teorii formovaniya metallicheskikh poroshkov v usloviyakh ploskoy deformatsii [On the theory of forming metallic powders under conditions of plane deformation]" *Izvestiya Vuzov, Mashinostroenie.* No. 10. P. 158-162.

6. Pavlov V.A., Kiparisov S.S., Shcherbina V.V., 1977. *Obrabotka davleniyem poroshkov tsvetnykh metallov [Pressure treatment of non-ferrous metal powders].* Moscow: Metallurgiya, 176 P.

7. Kolikov A.P., Polukhin P.I., Krupin A.V., 1986. *Novyye protsessy deformatsii metallov i splavov [New processes of deformation of metals and alloys]* Moscow: Vysshaya shkola, 352 P.

8. Mitin B.S., 1987. *Poroshkovaya metallurgiya i napylennyye pokrytiya [Powder metallurgy and sprayed coatings] Ed. by B.S. Mitin.* Moscow: Metallurgiya, 792 p.

9. Bogoyavlenskiy K.N., Ris V.V., 1984. *Ekonomichnyye metody formoobrazovaniya detaley [Economical methods for detail formation] Ed. by K.N. Bogoyavlenskiy and V.V. Ris.* Leningrad: Lenizdat, 44 P.

10. Kachanov L.M., 1969. *Osnovy teorii plastichnosti [Fundamentals of the plasticity theory].* Moscow: Nauka, 420 P.

11. Makarov E.S., Gubanov A.V., 1999. "Postroyeniye matematicheskikh modeley protsessov osesimmetrichnoy deformatsii dilatiruyushchikh sred [Construction of mathematical models of the axisymmetric deformation processes of dilating media]" *Matematicheskiye metody v tekhnike i tekhnologiyakh.* Veliky Novgorod: NSU Publishing house, P. 127-128.

12. Zhuravlev G.M., Chan Dyk Khoan, 2011. "Podkhod k resheniyu zadach plasticheskogo formoizmeneniya detaley iz dilatiruyushchikh materialov [Approach to the problem solution of plastic detail forming of dilatable materials]" *Izvestiya TulGU. Seriya. Tekhnicheskiye nauki.* Tula: Publishing house of Tula State University. Issue. 6. Part 2. P. 301-309.

13. Makarov E.S., Tolokonnikov L. A., 1979. "Variant postroyeniya teorii plastichnosti dilatiruyushchey sredy [Variant of constructing the plasticity theory of dilatating medium]" *Izvestiya AN SSSR, Mekhanika tverdogo tela.* No. 1. P. 88-93.

14. Kurant R., Gilbert D., 1945. *Metody matematicheskoy fiziki [Methods of mathematical physics].* Moscow, Leningrad: Gostekhizdat, 620 p.

15. Makarov E.S., E.S. Makarov, A.E. Gvozdev, G.M. Zhuravlev, 2015. *Teoriya plastichnosti dilatiruyushchikh sred [The plasticity theory of dilatant media]: monograph ; Ed. by A.E. Gvozdev. -2nd ed., revis. and addit.* Tula: Publishing House of Tula State University, 337 P.

16. A.E. Gvozdev, G.M. Zhuravlev, A.G. Kolmakov, D.A. Provotorov, N.N. Sergeev, 2016. "Raschet deformatsionnoy povrezhdayemosti v protsessakh obratnogo vydavlivaniya metallicheskikh izdeliy [Deformation damageability calculation in the processes of reverse extrusion of metal products]" *Tekhnologiya metallov.* No. 1. P. 23-32.

17. G.M. Zhuravlev, A.E. Gvozdev, N.N. Sergeev, D.A. Provotorov, 2016. "Variant rascheta maksimal'nogo uprochneniya malouglerodistykh staley v protsessakh plasticheskoy deformatsii [Variant of calculating the maximum hardening of low-carbon steels in plastic deformation processes]" *Proizvodstvo prokata.* No. 7. P. 9-13.

18. G.M. Zhuravlev, A.E. Gvozdev, V.I. Zolotukhin, D.A. Provotorov, 2016. "Vytyazhka s utoneniyem anizotropnogo uprochnyayushchego materiala [Extraction with thinning of anisotropic reinforcing material]" *Proizvodstvo prokata.* 2016. No. 4. P. 5-10.

19. A.D. Breki, A.L. Didenko, V.V. Kudryavtsev, E.S. Vasilyeva, O.V. Tolochko, A.G. Kolmakov, A.E. Gvozdev, D.A. Provotorov, N.E. Starikov, Yu.A. Fadin, 2016 "Sintez i tribotekhnicheskiye svoystva kompozitsionnogo pokrytiya s matritsey iz poliimida (R-OOO)FT i napolnitelem iz nanochastits disul'fida vol'frama pri sukhom trenii skol'zheniya [Synthesis and tribotechnical properties of a composite coating with a matrix of polyimide (P-OOO)FT and a filler made of nanoparticles of tungsten disulfide with dry sliding friction]" *Materialovedeniye.* No. 4. P. 44-48.

20. A.D. Breki, A.L. Didenko, V.V. Kudryavtsev, E.S. Vasilyeva, O.V. Tolochko, A.E. Gvozdev, N.N. Sergeev, D.A. Provotorov, N.E. Starikov, Yu.A. Fadin, A.G. Kolmakov, 2016. "Kompozitsionnyye pokrytiya na osnove poliimida A-OOO i nanochastits WS2 s povyshennymi tribotekhnicheskimi kharakteristikami v usloviyakh sukhogo treniya skol'zheniya [Composite coatings based on polyimide A-OOO and nanoparticles WS_2 with increased tribotechnical characteristics under conditions of dry sliding friction]" *Materialovedeniye.* No. 5. P. 41-44.

21. A.D. Breki, A.E. Gvozdev, A.G. Kolmakov, 2016. "Ispol'zovaniye obobshchennogo treugol'nika Paskalya dlya opisaniya kolebaniy sily treniya materialov [Use of the generalized Pascal triangle for describing the oscillations of frictional force of materials]" *Materialovedeniye.* No. 11. P. 3-8.

22. A.E. Gvozdev, N.N. Sergeev, I.V. Minaev, A.G. Kolmakov, I.V. Tikhonova, A.N. Sergeev, D.A. Provotorov, D.M. Khonilidze, D.V. Maliy, I.V. Golyshev, 2016 "Raspredeleniye temperatur i struktura v zone termicheskogo vliyaniya dlya stal'nykh listov posle lazernoy rezki [Temperature distribution and structure in the heat-affected zone for steel sheets after laser cutting]" *Materialovedeniye.* No. 9. P. 3-7.

23. A.D. Breki, A.E. Gvozdev, A.G. Kolmakov, N.E. Starikov, D.A. Provotorov, N.N. Sergeev, D.M. Khonelidze, 2016. "O friktsionnom vzaimodeystvii metallicheskikh materialov s uchetom yavleniya sverkhplastichnosti [On frictional interaction of metallic materials taking into account the superplasticity phenomenon]" *Materialovedeniye.* No. 8. P. 21-25.

24. G.M. Zhuravlev,A.E. Gvozdev, A.E. Cheglov, N.N. Sergeev, O.M. Gubanov, 2017. "Maximum plastic strengthening in tool steels" *Steel in Translation.* Vol. 47. № 6. P 399-411.

25. E.S. Makarov, V.E. Ulchenkova, A.E. Gvozdev, N.N. Sergeev, A.N. Sergeev, 2016. *Sopryazhennyye polya v uprugikh, plasticheskikh, sypuchikh sredakh i metallicheskikh trudnodeformiruyemykh sistemakh [Coupled fields in elastic, plastic, bulk media and metallic hard-deformed systems]: monograph ed. by A.E. Gvozdev.* Tula: Publishing House of Tula State University. 526 P.

26. Gvozdev A.Ye., Zhuravlev G.M., Kolmakov A.G., 2015. "Formirovaniye mekhanicheskikh svoystv uglerodistykh staley v protsessakh vytyazhki s utoneniyem [Formation of carbon steels mechanical properties in drawing processes with thinning]" *Tekhnologiya metallov.* No. 11. P. 17 - 29.

27. E.S. Makarov, A.E. Gvozdev, G.M. Zhuravlev, A.N. Sergeev, I.V. Minayev, A.D. Breki, A.D. Maliy, 2017. "Primeneniye teorii plastichnosti dilatiruyushchikh sred k protsessam uplotneniya poroshkov metallicheskikh sistem [Application of the plasticity theory of dilatation media to the processes of metallic systems powders compaction]" *Chebyshevskiy sbornik.* Vol.18. Issue 4. P. 268-284.

28. Gvozdev A.Ye., Zhuravlev G.M., Sapozhnikov S.V., 2017. "K teoreticheskomu analizu protsessa kompaktirovaniya poroshkovykh materialov pressovaniyem [To the theoretical analysis of the process of compacting powdered materials by pressing]" *Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Nauki o zemle.* Issue 4. P. 273-283.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 19. Выпуск 1

УДК 517 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-1-167-175

Развитие понятия «артиновость» для алгебр Ли

Мещерина Елена Владимировна — старший преподаватель, кандидат физико-математических наук, Оренбургский государственный университет.
e-mail: elena_lipilina@mail.ru
Пихтилькова Ольга Александровна — кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой алгебры и дискретной математики, Оренбургский государственный университет.
e-mail: opikhtilkova@mail.ru

Аннотация

В статье рассматривается развитие понятия "артиновость"для алгебр Ли. Понятие артиновости было введено для ассоциативных колец с условием минимальности. Одновременно с этим оно распространилось на модули и подалгебры. Чуть позже стали рассматривать артиновы йордановы алгебры. Для таких алгебр роль одностороннего идеала играет квадратичный идеал или, как назвал его Н.Джекобсон, вутренний идеал. Артиновость для алгебр Ли через идеалы определяли Ю.А. Бахтурин, С.А. Пихтильков и В.М. Поляков. Они рассматривали специальные артиновы алгебры Ли. С.А. Пихтильков применял артиновы алгебры Ли для построения структурной теории специальных алгебр Ли. Джорджия Бенкарт определила артиновость для алгебр Ли через внутренние идеалы. Ф. Лопес, Е. Гарсия, Г. Лозано исследовали понятие внутреннего идеала применительно к артиновости с помощью йордановых пар. Определение артиновости для алгебр Ли в данной статье представлено в трёх смыслах: через подалгебры, идеалы и внутренние идеалы. Представлена установленная авторами ранее связь между данными определениями. Рассмотрены примеры артиновых алгебр Ли. Описано применение артиновых алгебр Ли к решению проблемы Михалева: первичный радикал артиновой алгебры Ли является разрешимым.

Ключевые слова: алгебры Ли, подалгебра, артиновы алгебры Ли, внутренний идеал алгебры Ли, первичный радикал, конечномерные алгебры Ли, бесконечномерные алгебры Ли, ассоциативое кольцо, идеал кольца, условие минимальности.

Библиография: 23 названия.

Для цитирования:
Е. В. Мещерина, О. А. Пихтилькова. Развитие понятия «артиновость» для алгебр Ли // Чебышевский сборник, 2018, т. 19, вып. 1, с. 167–175.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 19. No. 1

UDC 517 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-1-167-175

The development of the concept of "artinian"for Lie algebras

Mescherina Elena Vladimirovna — senior lecturer, candidate of physical and mathematical sciences, Orenburg State University.
e-mail: elena_lipilina@mail.ru
Pikhtil'kova Ol'ga Aleksandrovna — candidate of physics-mathematical Sciences, associate Professor, head of chair of algebra and discrete mathematics, Orenburg State University.
e-mail: opikhtilkova@mail.ru

Abstract

In paper is considered the development of the concept of "artinian"for Lie algebras. The concept of artinian was introduced for associative rings with the minimality condition. At the same time, it extended to modules and subalgebras. A little later they began to consider Artinian Jordan algebras. For such algebras the role of a one-sided ideal is played by a quadratic ideal or, as N. Djecobson called it, the inner ideal. Artinian for Lie algebras through ideals determined Yu.A. Bakhturin, S.A. Pikhtilkov and V.M. Polyakov. They considered special Artinian Lie algebras. S.A. Pikhtilkov applied Artinian Lie algebras to construct the structural theory of special Lie algebras. Georgia Benkart defined the artinian for Lie algebras through inner ideals. F. Lopez, E. Garcia, G. Lozano explored the concept of the inner ideal applied to artinian with the help of Jordan pairs. The definition of artinian for Lie algebras in this paper is presented in three senses: via subalgebras, ideals, and inner ideals. The relationship established between these definitions is established by the authors earlier. Examples of Artinian Lie algebras are considered. The application of Artinian Lie algebras to the solution of the Mikhalev problem is described: the primary radical of the Artinian Lie algebra is solvable.

Keywords: Lie algebras, a subalgebra, Artinian Lie algebras, an inner ideal of a Lie algebra, a prime radical, finite-dimensional Lie algebras, infinite-dimensional Lie algebras, an associative ring, an ideal of a ring, and a minimality condition.

Bibliography: 23 titles.

For citation:
E. V. Mescherina, O. A. Pikhtilkova, 2018, "The development of the concept of «artinian» for Lie algebras" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 1, pp. 167–175.

1. Введение

В 20-30-х гг. XX в. стали изучать произвольные "ассоциативные кольца и алгебры". При этом большую роль начинают играть левые и правые идеалы колец.

В. Крулль и Э. Нётер в 1925-26 гг. ввели условие максимальности и минимальности для левых идеалов и начали систематически его использовать.

Примерно в то же время Э. Артин перенес результаты Дж. М. Веддерберна о разложении полупростых алгебр на все ассоциативные кольца и алгебры, левые идеалы которых одновременно удовлетворяют и условию максимальности, и условию минимальности.

В 1944 г. году Эмиль Артин совместно с Сесил Несбитт и Робертом Траллом опубликовал работу, в которой подробно рассматриваются кольца с условием минимальности. Такие кольца теперь называют Артиновыми.

2. Основной текст статьи

Определение. Ассоциативное кольцо R называется право (лево) артиновым, если любая убывающая цепочка его правых (левых) идеалов – стабилизируется.[1], [2]

Понятие артиновости играет важную роль в теории колец.

Известны примеры право, но не лево артиновых колец [1].

В 70-е годы понятие артиновости было введено для йордановых алгебр. Для таких алгебр роль одностороннего идеала играет квадратичный идеал или, как назвал его Н.Джекобсон, вутренний идеал. [3]

Кэвин Маккриммон в работе [4] составил характеристику всех внутренних идеалов полупростых йордановых алгебр с условием убывающей цепи. Он заметил, что «внутренние идеалы играют роль в квадратичных йордановых алгебрах, аналогичную роли односторонних идеалов в теории ассоциативных алгебр. В частности йордановы алгебры с условием убывающей цепи на внутренние идеалы тесно связаны с артиновыми ассоциативными алгебрами». [4, стр. 445]

Так же артиновы йордановы алгебры рассматривал Джером Кац.[5]

В дальнейшем, говоря артинова алгебра или артиново кольцо мы будем иметь в виду правую артиновость.

Понятие артиновости используется как одно из условий конечности (конечномерности).

Так, например, радикал Джекобсона артинова кольца является нильпотентным, полупростая артинова алгебра является прямой суммой простых артиновых подалгебр, артинова простая алгебра изоморфна алгебре матриц над телом [2].

Ситуация для алгебр Ли отличается. Любой идеал алгебры Ли является двусторонним.

Артиновость для алгебр Ли через идеалы определяли Ю.А. Бахтурин [6], С.А. Пихтильков [7] и В.М. Поляков [8]. Они рассматривали специальные артиновы алгебры Ли.

Ю.А. Бахтурин в 1982 году доказал, что артинова полупростая специальная алгебра Ли изоморфно вложима как кольцо Ли в алгебру Ли, конечнопорожденную как модуль над подходящим коммутативным кольцом.[6] Он так же доказал и обратное утверждение.

С.А. Пихтильков в 2001 году при построении структурной теории специальных алгебр Ли [9], заметил, что нельзя рассчитывать построить хорошую структурную теорию для произвольных специальных алгебр Ли, следует выделить классы алгебр, для которых такая теория существует. Для ассоциативных алгебр существует хорошая теория для артиновых и нетеровых алгебр. Поэтому он стал рассматривать артиновы специальные алгебры Ли.

Он доказал, что первичный радикал такой алгебры разрешим [7]. Это утверждение справедливо и для супералгебр Ли.[10]

Так же он доказал, что для артиновой и нетеровой одновременно специальной алгебры Ли L справедливы утверждения: 1)наибольший локально нильпотентный идеал N алгебры L является нильпотентным; 2) для каждого $a \in N$, $ad\ a$ нильпотентно; 3) если B - такой идеал алгебры L, что $ad\ b$ нильпотентно для всех $b \in B$, то $B \subseteq N$; 4) N - множество таких элементов $b \in L$, что $ad\ b$ принадлежит радикалу Джекобсона $J(Ad_uL)$ ассоциативной алгебры Ad_uL, полученной из алгебры $Ad\ L$ с помощью присоединения единицы из алгебры $End\ L$. Алгебра $J(Ad_uL)$ нильпотентна.

В.М. Поляков в 2005 году доказал, что локально нильпотентная артинова алгебра Ли разрешима.[8]

Возможно лучшим аналогом одностороннего идеала для алгебр Ли являются подалгебры или внутренние идеалы.

Понятие внутреннего идеала для алгебр Ли было введено Джоном Фолкнером в 1973 г. Систематическим изучением внутренних идеалов в алгебрах Ли впервые занялась Джорджия Бенкарт. [11] Она же и определила артиновость для алгебр Ли через внутренние идеалы в 1975 году.

Определение. Скажем, что подпространство B алгебры Ли L является внутренним идеалом, если $[B,[B,L]] \subseteq B$.

Бенкарт доказала теорему о структуре внутреннего идеала простых ассоциативных артиновых колец:

Теорема. Пусть R – простое ассоциативное артиново кольцо характеристики не 2 или 3. Каждый внутренний идеал алгебры Ли $[R,R]/Z \cap [R,R]$ имеет вид bRf где b и f – идемпотенты в R.[12, стр. 578]

И как следствие из теоремы получила, что алгебра Ли такого типа удовлетворяет условиям обрыва и убывающей, и возрастающей цепей внутренних идеалов.

Ф. Лопес, Е. Гарсия, Г. Лозано исследовали понятие внутреннего идеала применительно к артиновости с помощью йордановых пар.

В работе [13], опубликованной в 2006 г. они рассматривают внутренние идеалы бесконечномерных финитарных простых алгебр Ли над полем характеристики нуль с геометрической точки зрения. Они изучили, в каких случаях эти внутренние идеалы являются главными или минимальными и охарактеризовали регулярные элементы фон Неймана. Как следствие они доказывают, что любая финитарная центральная простая алгебра Ли над полем характеристики нуль удовлетворяет условию убывающей цепи на главные внутренние идеалы. Они также определяют условия, при выполнимости которых эти алгебры являются артиновыми, доказывая, в частности, что финитарная простая алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль артинова, если и только если она конечномерна [13, стр. 97].

В работе “Inner ideal structure of nearly Artinian Lie Algebras” [14], опубликованной в 2007 году, они изучают структуру внутренних идеалов непорожденных алгебр Ли с естественным цоколем и рассматривают случай, когда цоколь является артиновым. Они определили цоколь непорожденной алгебры Ли как сумму всех ее минимальных внутренних идеалов.

В 2008 году эти же ученые представили статью “An Artinian theory for Lie algebras” [15], в которой они классифицируют простые непорожденные артиновы алгебры Ли над полем характеристики нуль или больше чем 7 и описывают структуру внутреннего идеала Ли простой алгебры Ли, возникающей из простой ассоциативной алгебры с ненулевым цоколем.

Годом позже выходит совместная статья Джорджии Бенкарт и Антонио Фернандез Лопез под названием “The inner ideal structure of associative rings revisited” [16]. В ней они приводят полное описание структуры внутреннего идеала Ли простых артиновых колец с инволюцией и простых колец с инволюцией и минимальных односторонних идеалов.

В 2013 году Е.В. Мещерина и С.А. Пихтильков в работе [17] рассмотрели различные определения артиновости и установили связь между ними.

Рассмотрим определения артиновости в трех смыслах.

Пусть L – алгебра Ли.

а) Если убывающая цепочка идеалов стабилизируется, то алгебра называется i-артиновой;

б) если убывающая цепочка алгебр стабилизируется, то алгебра называется a-артиновой;

в) если убывающая цепочка внутренних идеалов стабилизируется, то алгебра называется inn-артиновой.

Доказано, что из inn-артиновости следует i-артиновость и из a-артиновости следует i-артиновость, но из i-артиновости может не следовать a-артиновость и inn-артиновость; из inn-артиновости может не следовать a-артиновость. Это значит, что свойства a-артиновости и inn-артиновости сильнее, чем свойство i-артиновости.

Рассмотрим примеры артиновых алгебр Ли из [17].

Пример 1. Пусть F – поле характеристики нуль,

$$K = F(x_1, x_2, ..., x_n, ...)-$$

поле рациональных функций от счетного числа коммутирующих переменных $x_1, x_2, ..., x_n, ...$

Обозначим через L алгебру Ли матриц порядка 2 над полем K со следом нуль $L = sl_2(K)$. Будем рассматривать L как алгебру Ли над полем F. Она является i-артиновой, но не является a-артиновой.

Пусть I – идеал алгебры Ли L, $a \in L, a \neq 0$. Из простоты L над полем K следует, что элемент a представим в виде

$$a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i [...[a, l_{i1}], l_{i2}], ...], l_{i,k_i}], \ \alpha_i \in K, \ l_{ij} \in L.$$

Пусть $\beta \in K$ – произвольный. Тогда элемент

$$\beta a = \sum_{i=1}^{n} [...[a, \beta\alpha_i l_{i1}], l_{i2}], ...], l_{i,k_i}], \ \alpha_i \in K, \ l_{ij} \in L.$$

принадлежит I. Следовательно, идеал I является векторным пространством над K.

Показано, что L, как алгебра над F – простая. В то же время, она содержит бесконечную убывающую цепочку подалгебр над F:

$$sl_2(F[x_1, x_2, ...]) \supseteq sl_2(F[x_{21}, x_3, ...]) \supseteq ... \supseteq sl_2(F[x_n, x_{n+1}, ...]) \supseteq ...$$

Пример 2. Пусть V векторное пространство над полем F и W – подпространство V с базисом $e_1, e_2, ..., e_n, ...$, где $\dim V/W = \infty$.

Обозначим через W_n подпространство, порожденное векторами $e_n, e_{n+1}, ...$. Получим $W = W_1$.

Пусть $L = L(V)^{(-)}$ алгебра Ли, полученная из полной алгебры линейных отображений V с помощью операции коммутирования $[x, y] = xy - yx$. Известно, что L – простая алгебра Ли. Она является i-артиновой, но не является inn-артиновой.

Обозначим через I_n множество линейных отображений $f : V \to V$ таких, что $f(V) \subseteq W_n$, $f(W) = 0$.

Проверим, что $I_n, n = 1, 2, ...$ – являются внутренними идеалами.

Рассмотрим $f, g \in I_n, h \in L, x \in V$. Тогда

$$[f, [g, h]](x) = f[g, h](x) - [g, h]f(x) =$$

$$= f(g(h(x))) - f(h(g(x))) - g(h(f(x))) + h(g(f(x))) =$$

$$= -f(h(g(x))) - g(h(f(x))) \subseteq W_n.$$

Использовано свойство отображений из $I_n : fg = gf = 0$.

Следовательно, $[f,[g,h]] \subseteq I_n$.

Это значит, что множество линейных отображений I_n является внутренним идеалом алгебры Ли L.

Цепочка внутренних идеалов $I_1 \supseteq I_2 \supseteq ... \supseteq I_n \supseteq ...$ простой алгебры Ли L является строго убывающей, бесконечной.

В той же работе приведен пример бесконечномерной inn-артиновой алгебры Ли. Рассмотрим его.

Пример 3. Пусть F – поле характеристики нуль, K - бесконечномерное алгебраически замкнутое расширение поля F. Алгебра Ли $L = sl_2K$, бесконечномерная над F, является inn-артиновой алгеброй Ли. Можно отметить, что алгебра L содержит бесконечномерную абелеву подалгебру. Следовательно, алгебра Ли L не является a-артиновой.

В качестве примера a-артиновой алгебры Ли может служить любая конечномерная алгебра Ли.

?Пример 4. Рассмотрим подалгебру B полной линейной алгебры Ли $gl(n,C)$, состоящую из всех верхнетреугольных матриц. B - разрешимая алгебра Ли, значит, она содержит конечную убывающую цепочку подалгебр. Следовательно, она является a-артиновой и i-артиновой.

Бесконечномерные a-артиновы алгебр Ли так же представляют интерес.

Как известно, многие результаты переносятся с групп на алгебры Ли.

Среди групп существуют даже квазициклические группы - абелевы бесконечные группы удовлетворяющие условию минимальности для подгрупп.

Примером такой группы является мультипликативная группа комплексных корней уравнений $x^{p^n} = 1, n = 1, 2, ...$ для простого числа p.

Все подгруппы квазициклических групп конечны. О.Ю. Шмидт сформулировал проблему о существовании бесконечных неабелевых групп все, подгруппы которых конечны.

Эта проблема была решена А.Ю. Ольшанским [18].

Однако, для алгебр Ли ситуация иная. Все абелевы a-артиновы алгебры Ли – конечны.

В работе [19] показано, что все специальные алгебры Ли с условием максимальности на абелевы подалгебры – конечномерны.

Условие максимальности на абелевы подалгебры означает отсутствие бесконечных абелевых подалгебр. Оно эквивалентно условию минимальности на абелевы подалгебры.

В работе [20] доказана эквивалентность вопроса о существовании бесконечномерных a-артиновых алгебр Ли вопросу о существовании первичных бесконечномерных a-артиновых алгебр Ли. Но ответить на данные вопросы до сих пор не удалось.

В 2001 году А.В. Михалев на семинаре механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова "Кольца и модули"поставил проблему: существует ли артинова алгебра Ли, первичный радикал которой не является разрешимым?

Выше уже было отмечено, что С.А. Пихтильков доказал разрешимость первичного радикала специальной i-артиновой алгебры Ли. [7].

Известно, что первичный радикал произвольной алгебры Ли является слабо разрешимым, может не быть разрешимым и даже локально разрешимым [21].

В работе [22], опубликованной в 2013 году, нами доказано, что если L – a-артинова или inn-артинова алгебра Ли, тогда первичный радикал $P(L)$ алгебры Ли L – разрешим.

В 2015 году С.А. Пихтильков и А.Н. Благовисная доказали, что первичный радикал слабоартиновой алгебры Ли разрешим. Под слабоартиновой алгеброй Ли авторы подразумевают i-артиновость.[23]

Так же для такой алгебры авторы доказали локальную нильпотентность первичного радикала.

3. Заключение

Как было отмечено выше, артиновость оказалась полезным условием для построения структурной теории специальных алгебр Ли.

При изучении артиновых алгебр Ли возникает множество новых вопросов, ответы на которые предстоит найти.

Известно, что алгебры Ли имеют приложения в теории кодирования, криптографии, физике и других науках. Надеемся, что в скором времени и артиновы алгебры Ли найдут приложение в различных областях науки.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ламбек И. Кольца и модули. М.: Мир, 1971. 279 с.
2. Херстейн И. Некоммутативные кольца. М.: Мир, 1972. 191 с.
3. Мещерина Е. В. История развития понятия "Внутренний идеал"// История науки и техники. 2015. № 9. С. 3-7.
4. McCrimmon K. Inner ideals in quadratic Jordan algebras // Trans. Amer. Math.Soc. 1971. Vol. 159. P. 445-468.
5. Katz J. Isomorphisms of the lattice of inner ideals of certain quadratic Jordan algebras // Trans. Amer. Math. Soc. 1973. Vol. 185. P. 309-329.
6. Бахтурин Ю. А. Артиновы специальные алгебры Ли // Алгебра. М.: Изд-во МГУ, 1982. С. 24-26.
7. Пихтильков С. А. Артиновые специальные алгебры Ли // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп: межвуз. сборник. Тула: Изд-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого, 2001. С. 189-194.
8. Пихтильков С. А., Поляков В. М. О локально нильпотентных артиновых алгебрах Ли // Чебышевский сборник. 2005. Т. 6, № 1. С. 163-169.
9. Пихтильков С. А. Структурная теория специальных алгебр Ли : монография. Тула: Изд-во ТГПУ им. Л.Н. Толстого, 2005. 130 с.
10. Pikhtilkov S. A., Polyakov V. M. Artinal special Lie superalgebras // Bull. Academie de stinte a republicii Moldova. Matematica. 2004. Vol. 44, № 1. P. 116-119.
11. Benkart G. On inner ideals and ad-nilpotent elements of Lie algebras // Transaction of the American Mathematical Society. 1977. Vol. 232. P. 61-81.
12. Benkart G. The Lie inner ideal structure of associative rings // J. of Algebra. 1976. Vol. 43. P. 561-584.

13. Fernandez Lopez A., Garcia E., Gomez Lozano M. Inner ideals of finitary simple Lie algebras // J. Lie Theory. 2006. Vol. 16. P. 97-114.

14. Fernandez Lopez A., Garcia E., Gomez Lozano M. Inner ideal structure of nearly artinian Lie algebras // Proc. Amer. Math. Soc. 2009. Vol. 137. P. 1-9.

15. Fernandez Lopez A., Garcia E., Gomez Lozano M. An artinian theory for Lie algebras // J. of Algebra. 2008. Vol. 319, № 3. P. 938-951.

16. Benkart G., Fernandez Lopez A. The inner ideal structure of associative rings revisited // Communications in Algebra. 2009. Vol. 37. P. 3833–3850.

17. Мещерина Е. В., Пихтильков С. А. О некоторых свойствах внутренних идеалов алгебры Ли // Вестник Оренбург. гос. ун-та. 2013. № 9 (158). С. 110-114.

18. Ольшанский А. Ю. Бесконечная группа с подгруппами простых порядков // Изв. АН СССР. Сер.: Математика. 1980. Т. 44, № 2. С. 309-321.

19. Бейдар К. И., Зайцев М. В., Пихтильков С. А. Алгебры Ли с условием максимальности на абелевы подалгебры // Вестник МГУ. Сер. 1.: Математика. Механика. 2002. № 5. С. 27-32.

20. Мещерина Е. В. О различных определениях артиновости для алгебр Ли // Чебышевский сборник. 2013. Т. 14. № 3 (47). С. 86-91; то же [Электронный ресурс] . URL: http://www.chebsbornik.ru/jour/article/view/107/103

21. Балаба И. Н., Михалев А. В., Пихтильков С. А. Первичный радикал градуированных Ω-групп // Фундамент. и приклад. математика. 2006. Т. 12, № 2. С. 159-174.

22. Мещерина Е. В., Пихтильков С. А., Пихтилькова О. А. О проблеме А.В. Михалева для алгебр Лиebreak // Изв. Саратов. ун-та. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика. 2013. Вып. 4, ч. 2. С. 84-89.

23. Благовисная А. Н., Пихтильков С. А., Пихтилькова О. А. О свойствах первичного радикала слабоартиновой алгебры Ли //Чебышевский сборник. 2017. Т. 18, № 1. С. 134-142. ; то же [Электронный ресурс] . URL: http://www.chebsbornik.ru/jour/article/view/309/282

REFERENCES

1. Lambek, I., 1971, *Kol'ca i moduli [Rings and modules]*, Mir, Moscow. 279p.

2. Herstein, I., 1972, *Nekommutativnye kol'ca [Noncommutative rings]*, Mir, Moscow. 191p.

3. Mescherina, E.V., 2015, *"History of the development of the concept of "inner ideal"."*, *History of Science and Engineering*, Moscow, no. 9, pp. 3-7.

4. McCrimmon, K., 1971, "*Inner ideals in quadratic Jordan algebras*", *Trans. Amer. Math.Soc*, USA, vol. 159, pp. 445-468.

5. Katz, J., 1973, "*Isomorphisms of the lattice of inner ideals of certain quadratic Jordan algebras*", *Trans. Amer. Math.Soc*, USA, vol. 185, pp. 309-329.

6. Bakhturin, Yu.A., 1982, "*Artinian special Lie algebras*", *Algebra*, Izd-vo MGU, Moscow, pp. 24-26.

7. Pikhtilkov, S.A., 2001, "*Artinian special Lie algebra*", *Algorithmic problems of the theory of groups and semigroups*, Izd-vo Tul. gos. ped. univ. im. L.N.Tolstogo, Tula, pp. 189-194.

8. Pikhtilkov, S.A., Polyakov, V.M., 2005, "*About locally nilpotent Artinian Lie algebras*", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 6, issue 1, pp. 163-169.

9. Pikhtilkov, S.A., 2005, "*Strukturnaya teoriya special'nyh algebr Li [The structural theory of special Lie algebras]*", Izd-vo TGPU im. L.N. Tolstogo, Tula, pp. 45-48.

10. Pikhtilkov, S.A, Polyakov, V.M., 2004, "*Artinian special Lie superalgebras*", *Bull. Academie de stinte a republicii Moldova. Matematica*, vol. 44, no. 1, pp. 116-119.

11. Benkart, G., 1977, "*On inner ideals and ad-nilpotent elements of Lie algebras*", *Transaction of the American Mathematical Society*, USA, vol. 232, pp. 61-81.

12. Benkart, G., 1976, "*The Lie inner ideal structure of associative rings*", *J. Algebra*, USA, vol. 43, pp. 561-584.

13. Fernandez Lopez A., Garcia E., Gomez Lozano M., 2006, "*Inner ideals of the finitary simple Lie algebras*", *J. Lie Theory*, USA, vol. 16, pp. 97-114.

14. Fernandez Lopez A., Garcia E., Gomez Lozano M., 2009, "*Inner ideal structure of almost artinian Lie algebras*, *Proc. Amer. Math. Soc*, USA, vol. 137, pp. 1-9.

15. Fernandez Lopez A., Garcia E., Gomez Lozano M., 2008, "*An artinian theory for Lie algebras*, *Journal of Algebra*, USA, vol. 319, no. 3, pp. 938-951.

16. Benkart, G., Fernandez Lopez A., 2009, "*The inner ideal structure of associative rings revisited*", *Communications in Algebra*, USA, vol. 37, pp. 3833-3850.

17. Meshcherina, E.V., Pichtilkov, S.A., 2013,"*On some properties of inner ideals of a Lie algebra*", *Vestnik OGU*, no. 9 (158), pp. 110-114.

18. Olshansky, A.Yu., 1980, "*Infinite group with subgroups of prime orders*", *Izv. AN SSSR. Ser. mat.*, part 44, no. 2, pp. 309-321.

19. Beidar, K.I., Zaytsev, M.V., Pikhtilkov, S.A., 2002, "*Lie algebras with the maximality condition on abelian subalgebras*", *Vestnik MGU, Ser. 1. Mat., Mekh.*, no. 5, pp. 27-32.

20. Meshcherina, E.V., 2013, "*On the different definitions of Artinian for Lie Algebras*", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 14, issue 3 (47), pp. 86-91.

    Available at: http://www.chebsbornik.ru/jour/article/view/107/103

21. Balaba, I.N., Mikhalev, A.V., Pikhtilkov, S.A., 2006, "*The primary radical of graded Ω -groups*", *Fundamentalnaya i prikladnaya matematika*, vol. 12, no. 2, pp. 159-174.

22. Meshcherina, E.V., Pikhtilkov, S.A., Pikhtilkova, O.A., 2013, "*On the problem of A. V. Mikhalev for Liealgebras*", *Izvestiya Saratovskogo Universiteta. Novaya seriya. Seriya Mathematika. Mechanika. Informatika*, vol. 4, part 2, pp. 84-89.

23. Blagovisnaya, A.N., Pikhtilkov, S.A., Pikhtilkova, O.A., 2017, "*On the properties of the primary radical of the weakly-Artinian Lie algebra*", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 18, issue 1, pp. 134-142. Available at: http://www.chebsbornik.ru/jour/article/view/309/282

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 19. Выпуск 1

УДК 512.5 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-1-176-186

Многообразия с дробным полиномиальным ростом и проблема Шпехта

Мищенко Сергей Петрович — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры прикладной математики, Ульяновский государственнчый университет.
e-mail: mishchenkosp@mail.ru
Шулежко Олеся Владимировна — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры, заместитель декана по воспитательной работе факультета ФМиТО, Ульяновский государственный педагогический университет имени И. Н. Ульянова.
e-mail: ol.shulezhko@gmail.com

Аннотация

Совокупность линейных алгебр, в которых выполняется фиксированный набор тождеств, следуя А.И. Мальцеву, называется многообразием. Используя язык теории алгебр Ли будем говорить, что алгебра метабелева, если она удовлетворяет тождеству $(xy)(zt) \equiv 0$. Многообразие называется шпехтовым, если оно само и любое его подмногообразие обладает конечным базисом тождеств. Рост многообразия определяется ростом последовательности размерностей полилинейных частей относительно свободной алгебры многообразия. Эту последовательность традиционно называют последовательностью коразмерностей, имея в виду полилинейные пространства идеала тождеств многообразия. В данной статье приведены результаты связанные с проблемой дробного полиномиального роста. Дается обзор новых примеров таких многообразий, а также приводятся новые примеры многообразий, которые не удовлетворяют свойству шпехтовости, то есть которые обладают бесконечно базируемыми подмногообразиями.

Ключевые слова: тождество, многообразие, рост коразмерностей, метабелевость, шпехтовость.

Библиография: 22 названия.

Для цитирования:
С. П. Мищенко, О. В. Шулежко. Многообразия с дробным полиномиальным ростом и проблема Шпехта // Чебышевский сборник, 2018, т. 19, вып. 1, с. 176–186.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 19. No. 1

UDC 512.5 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-1-176-186

Variety with fractional codimension growth and the Specht problem

Mishchenko Sergey Petrovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, professor of the department of applied mathematics, Ulyanovsk state University.
e-mail: mishchenkosp@mail.ru
Shulezhko Olesya Vladimirovna — candidate of physics-mathematical sciences, associate professor, deputy dean for educational work of the faculty Fmita; Ulyanovsk state pedagogical University named after I. N. Ulyanov.
e-mail: ol.shulezhko@gmail.com

Abstract

According to A.I. Maltsev, a set of linear algebras in which a fixed set of identities is called a variety. Using the language of the theory of Lie algebras, we say that the algebra is metabelian if it satisfies the identity $(xy)(zt) \equiv 0$. A variety is called Specht if it is such a variety and any of its subvariety has a finite basis of identities. Codimension growth is determined by sequence of dimensions multilinear parts of a relatively free algebra of a variety. This sequence is called a sequence codimensions, referring to the multilinear spaces of the ideal identities of the variety. This article presents the results related to the problem of fractional polynomial growth. The review gives new examples of such varieties, and also give a new example of a variety with an infinite basis of identities.

Keywords: identity, variety, codimension, metabelian, shpecht.

Bibliography: 22 titles.

For citation:
S. P. Mishchenko, O. V. Shulezhko, 2018, "Variety with fractional codimension growth and the Specht problem *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 1, pp. 176–186.

1. Введение

На протяжении всей работы характеристика основного поля F предполагается равной нулю. Мы рассматриваем линейные алгебры, то есть векторные пространства над полем F, на которых задана бинарная билинейная операция, и их тождества. Все неопределяемые понятия можно найти в книге А. Джамбруно и М.В. Зайцева [1].

Пусть $F\{X\}$ – свободная неассоциативная алгебра со счетным множеством свободных образующих X над полем F. Для линейной алгебры A обозначим $Id(A)$ идеал тождеств алгебры A. Так как при нулевой характеристики основного поля любое тождество эквивалентно системе полилинейных тождеств, то при изучении идеала $Id(A)$ существенную роль играет теория представлений симметрических групп.

Зафиксируем натуральное число $n \geqslant 1$. Пусть P_n пространство полилинейных элементов свободной алгебры $F\{X\}$ от первых n свободных образующих $x_1, \ldots, x_n$. Так как характеристика поля F равна нулю, то последовательность пространств $P_n \cap Id(A)$, $n = 1, 2, \ldots$, содержит всю информацию об идеале тождеств $Id(A)$. Симметрическая группа S_n действует на P_n перестановкой образующих: если $\sigma \in S_n$, $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_n$,

$$\sigma f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}).$$

Пространство $P_n \cap Id(A)$ является инвариантным относительно этого действия и мы можем изучать строение $P_n(A) = P_n/(P_n \cap Id(A))$ как модуля группы S_n. Характер этого модуля обозначим $\chi_n(A)$ и назовем n-ым кохарактером алгебры A. В силу полной приводимости

$$\chi_n(A) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda,$$

где χ_λ – неприводимый характер симметрической группы соответствующий разбиению λ числа n, а $m_\lambda \geqslant 0$ – соответствующая кратность. Степень n-ого кохарактера $\chi_n(A)$ совпадает с размерностью пространства полилинейных элементов $c_n(A) = \dim P_n(A)$ и называется n-ой коразмерностью алгебры A. Таким образом, $c_n(A) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda d_\lambda$, где $d_\lambda = \deg \chi_\lambda$ – степень неприводимого характера χ_λ.

В работе [2] А.И. Мальцев назвал совокупность линейных алгебр, в которых выполняется фиксированный набор тождеств, многообразием. На "языке" многообразий, если $\mathbf{V} = var(A)$ многообразие, порожденное алгеброй A, то мы пишем $Id(\mathbf{V}) = Id(A)$ и $c_n(\mathbf{V}) = c_n(A)$. Рост многообразия $\mathbf{V}$ определяется ростом последовательности коразмерностей алгебры A.

В этой статье мы рассматриваем многообразия полиномиального роста, то есть многообразия $\mathbf{V}$, для которых существует такие константы $\alpha, t > 0$, что для всех n выполняется неравенство $c_n(\mathcal{V}) \leqslant \alpha n^t$. В случае ассоциативных, лиевых или йордановых алгебр, как доказано В. Дренски [3], последовательность коразмерностей асимптотически ведет себя как многочлен. Более точно, он доказал, что для таких многообразий $\mathbf{V}$ существует натуральное k и число C, что выполняется равенство

$$c_n(\mathcal{V}) = Cn^k + O(n^{k-1}),$$

где $O(n^{k-1})$ есть многочлен степени $\leqslant k-1$.

В случае отсутствия тождества ассоциативности, исследование линейных алгебр является сложным в силу необходимости при вычислениях следить за расстановками скобок. Задача становится несколько проще, если мы имеем дело с метабелевыми алгебрами. Мы будем так называть алгебры, в которых выполняется тождество $(xy)(zt) \equiv 0$. Ситуация упрощается еще больше, если при этом дополнительно выполняется тождество коммутативности или антикоммутативности. Тогда, все мономы равны левонормированным мономам, то есть мономам,

в которых умножение происходит слева направо. Договоримся опускать скобки в случае их левонормированной расстановки, то есть $xyz = (xy)z$.

Простейшей ситуацией, в которой только левонормированные мономы могут быть отличны от нуля, является так называемое многообразие ${}_2\mathbf{N}$ левой нильпотентности ступени два. Это многообразие определяется тождеством $x(yz) \equiv 0$. Рассмотрим обобщение этого тождества, которое также позволяет все переписывать с левонормированными расстановками скобок, а именно

$$x(yz) \equiv \alpha(xy)z, \tag{1}$$

в котором α – некоторое число. Если $\alpha = 0$, то мы получаем многообразие ${}_2\mathbf{N}$. Выписанное тождество, вероятно, впервые было проанализировано в статье [4] (см. Замечание 1). Там изложен следующий результат.

Пусть $\mathbf{V}$ многообразие, задаваемое тождеством (1), в котором $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогда выполняется одно из следующих трех условий:

1. многообразие $\mathbf{V}$ нильпотентно ступени три, то есть любое произведение четырех элементов равно нулю;
2. $\mathbf{V}$ – многообразие всех ассоциативных алгебр;
3. $\mathbf{V} = {}_2\mathbf{N}$.

В силу простоты приведем доказательство этого факта. Если $\alpha = 1$, то мы получим многообразие ассоциативных алгебр, а если $\alpha = 0$, то мы получим многообразие ${}_2\mathbf{N}$. Предположим, что $\alpha \neq 0, 1$. Используя тождество $x(yz) \equiv \alpha(xy)z$, мы получаем

$$(xy)(zt) \equiv \alpha((xy)z)t \equiv (x(yz))t \equiv \frac{1}{\alpha}x((yz)t) \equiv \frac{1}{\alpha^2}x(y(zt)) \equiv \frac{1}{\alpha}(xy)(zt).$$

Следовательно, $(xy)(zt) \equiv 0$. Более того

$$((xy)z)t \equiv \frac{1}{\alpha}(xy)(zt) \equiv 0,$$

$$t((xy)z) \equiv \frac{1}{\alpha}t(x(yz)) \equiv (tx)(yz) \equiv 0,$$

Отсюда получаем еще два тождества

$$(z(xy))t \equiv \alpha((zx)y)t \equiv 0, \quad t(z(xy)) \equiv \alpha t((zx)y) \equiv 0.$$

Таким образом, мы получаем, что в многообразии $\mathbf{V}$ любое произведение четырех и более элементов равно нулю, то есть многообразие состоит из нильпотентных алгебр. Еще раз отметим, что для всех $n \geqslant 4$ выполняются равенства $c_n(\mathbf{V}) = 0$.

Одной из мотиваций популяризации многообразия ${}_2\mathbf{N}$ является тот факт, что в этом классе алгебр построено множество примеров с экзотическим поведением числовых характеристик.

Например, известно, что в ассоциативном случае или в случае алгебр Ли не существует многообразий промежуточного роста между полиномиальным и экспоненциальным. В то же время в статье [5] построена серия подмногообразий многообразия ${}_2\mathbf{N}$ промежуточного роста. Более точно, для любого действительного числа β, $0 < \beta < 1$, построено такое многообразие $\mathbf{V}_\beta \subseteq {}_2\mathbf{N}$, что выполняется условие

$$\lim_{n\to\infty} \log_n \log_n c_n(\mathbf{V}_\beta) = \beta,$$

то есть последовательность $c_n(\mathbf{V}_\beta)$ растет как n^{n^β}, $n = 1, 2, \ldots$.

Что касается поведения экспоненты многообразия, то известно, что в ассоциативном случае экспонента всегда существует и является целым числом. Дробная экспонента возможна уже для случая многообразий алгебр Ли. В случае алгебр Ли первый пример дробной экспоненты равной примерно 3.6 был построен в работе [6] и позже даже дискретная серия многообразий алгебр Ли, экспоненты которых являются дробными числами, большими трех, но меньшими четырех, с предельной точкой равной 4 (см. [7], [8]). Многообразие, порожденное алгеброй Ли векторных полей на плоскости имеет еще большую дробную экспоненту (см. [9]). Однако, во всех примерах дробная экспонента многообразия алгебр Ли всегда больше трех. В случае алгебр Ли доказано также, что экспонента не может быть между 1 и 2. Интересная и, вероятно, сложная гипотеза, которая остается недоказанной, что в случае алгебр Ли экспонента не может быть также между 2 и 3.

В статье [10] для любого действительного числа $\alpha > 1$ построена такая алгебра $A_\alpha \in {}_2\mathbf{N}$, что $\exp(A_\alpha) = \alpha$. А в статье [11] для любого действительного числа $\alpha > 1$ построена алгебра $A_\alpha \in {}_2\mathbf{N}$ экспоненциального роста коразмерностей, у которой нижняя PI экспонента равна 1, а верхняя равна α. То есть построена континуальная серия многообразий экспоненциального роста, для которых верхняя и нижняя экспоненты различны, а следовательно, сама экспонента не существует.

Вернемся к вопросу возможности дробного полиномиального роста. Первый пример многообразия с дробным полиномиальным ростом был построен в статье [12]. В ней построена алгебра $A \in {}_2\mathbf{N}$, для которой выполнено условие $c_n(A) \simeq n^{3,5}$. Кроме того анонсировано существование в случае нулевой характеристики основного поля для любого вещественного $3 < \alpha < 4$ линейной алгебры $A_\alpha \in {}_2\mathbf{N}$, что при достаточно больших n выполняется условие

$$C_1 n^\alpha < c_n(A_\alpha) < C_2 n^\alpha,$$

где C_1, C_2 – некоторые положительные константы.

На основе континуального семейства многообразий с дробным полиномиальным ростом в статье [14] построено не шпехтово коммутативное метабелево многообразия, коразмерность которого ограничена n^6. В этом разделе по аналогии мы построим антикоммутативный аналог.

Пусть $w = w_1 w_2 \cdots w_m$ – слово в алфавите $\{0, 1\}$. Обозначим через $A(w)$ алгебру над полем F с базисом $\{a, b, z_1, z_2, \ldots, z_{m+1}\}$ и таблицей умножения, заданной формулами

$$z_i a = -a z_i = (1 - w_i) z_{i+1},$$

$$z_i b = -b z_i = w_i z_{i+1},$$

для $i = 1, 2, \ldots, m$, а все остальные произведения равны нулю.

Зафиксируем произвольное действительное число α, $0 < \alpha < 1$, и для каждого $m \geqslant 1$ определим $a_m = [m^\alpha]$, где $[x]$ обозначает целую часть числа x. Заметим, что $a_m \neq m$, а также $a_m < m$ для всех $m \geqslant 2$.

Для заданных целых чисел $m \geqslant 2$ и $1 \leqslant s \leqslant a_m$, обозначим

$$w(m, s) = w_1 \cdots w_m,$$

слово в алфавите $\{0, 1\}$ такое, что $w_s = w_m = 1$ и $w_i = 0$ для всех остальных i. Тогда

$$A(\alpha, m) = A(w(m, 1)) \oplus A(w(m, 2)) \oplus \cdots \oplus A(w(m, a_m)).$$

Основные свойства алгебры $A(\alpha, m)$ приведены ниже.

Лемма 1. Для любого целого числа m алгебра $A(\alpha, m)$ является антикоммутативной метабелевой и нильпотентной ступени m.

Доказательство. Мы должны показать, что имеют место следующие тождества:

$$x_1x_2 \equiv x_2x_1,\ (x_1x_2)(x_3x_4) \equiv 0,\ x_1x_2\cdots x_{m+1} \equiv 0.$$

В последнем тождестве мы требуем, чтобы скобки были поставлены всеми возможными способами, то есть любое произведение $m+1$ элемента было равно нулю независимо от расположения скобок. Для этого достаточно проверить их на конкретном слагаемом, скажем, $A(w(m,i))$.

Так как $w(m,i) = w_1w_2\cdots w_m = 00\cdots 0\underset{i}{1}00\cdots 00\underset{m}{1}$, то единственными ненулевыми произведениями среди элементов базиса $A(w(m,i))$ являются

$$z_1a = -az_1 = z_2,\ z_2a = -az_2 = z_3,\ \ldots,\ z_ib = -bz_i = z_{i+1},\ z_{i+1}a = -az_{i+1} = z_{i+2},$$

$$\ldots,\ z_{m-1}a = -az_{m-1} = z_m,\ z_mb = -bz_m = z_{m+1},$$

и это говорит о том, что выполняются тождества $x_1x_2 \equiv x_2x_1$ и $(x_1x_2)(x_3x_4) \equiv 0$. В частности, мы можем рассматривать только левонормированные мономы. Отсюда следует, что

$$z_1\underbrace{aa\cdots a}_{i-1}b\underbrace{aa\cdots a}_{m-i-1}b$$

является единственным самым длинным ненулевым мономом. Следовательно, произведение любых $m+1$ элементов равно нулю. Доказательство леммы завершено.

В частности, из леммы 1 следует, что любой элемент из $F\{X\}/Id(A(\alpha,m))$, относительно свободной алгебры многообразия, порожденного $A(\alpha,m)$, записывается как линейная комбинация левонормированных мономов.

Нашим главным объектом исследования в этом разделе будет рост коразмерностей алгебры

$$A_\alpha = \bigoplus_{m>1} A(\alpha,m).$$

Ясно, что A_α удовлетворяет тождествам

$$x_1x_2 + x_2x_1 \equiv 0\ \ (x_1x_2)(x_3x_4) \equiv 0.$$

Асимптотическое поведение коразмерностей A_α описано в следующей теореме, которая полностью совпадает с теоремой из статьи [14](см. с. 426).

Теорема 1. Пусть α – действительное число, $0 < \alpha < 1$. Тогда для $a_n = [n^\alpha] \geqslant 5$ коразмерности A_α удовлетворяют следующим неравенствам

$$(a_n - 4)\frac{n(n-1)(n-5)}{6} \leqslant c_n(A_\alpha) \leqslant n^3a_n + n^2(2n+3a_n) + n^2.$$

В частности, $\lim_{n\to\infty}(\log_n c_n(A_\alpha)) = 3+\alpha$.

Доказательство этой теоремы может быть дословно изложено как доказательство аналогичной теоремы в коммутативном случае из статьи [14] (см. [14], леммы 2-6 и их доказательства на с. 426-433, а также доказательство теоремы на с. 434).

2. Пример нешпехтового антикоммутативного метабелева многообразия

Данный раздел написан также с использованием статьи [14], в которой речь идет о коммутативном случае. Некоторые фрагменты являются просто дословным переводом. Напомним,

что многообразие $\mathbf{V}$ является шпехтовым, если каждое подмногообразие, включая $\mathbf{V}$, имеет конечно порожденный T-идеал тождеств.

Рассмотрим алгебру

$$A = \bigcup_{0<\alpha<1} A_\alpha,$$

где A_α являются алгебрами, построенными в предыдущем разделе, и пусть $\mathbf{V} = var(A)$ – многообразие, порожденное A. Пусть

$$\chi_n(\mathbf{V}) = \chi_n(A) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda(\mathcal{V})\chi_\lambda \tag{2}$$

n-й кохарактер $\mathbf{V}$. Обратим внимание, что $m_\lambda(\mathbf{V}) = 0$, как только разбиение $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ удовлетворяет хотя бы одному из следующих условий: $\lambda_4 \neq 0$, $\lambda_3 > 1$ или $\lambda_2 + \lambda_3 > 3$. На самом деле это свойство выполняется для всех алгебр A_α, $0 < \alpha < 1$. Это говорит о том, что кратности в (2) могут быть отличными от нуля только для разбиений (n), $(n-1,1)$, $(n-2,2)$, $(n-2,1,1)$, $(n-3,3)$, $(n-3,2,1)$.

Так как мы можем рассматривать только левонормированные полиномы, то кратности $m_\lambda(A)$ ограничены размерностями соответсвующих неприводимых представлений d_λ, получаем, что

$$c_n(\mathcal{V}) \leqslant d^2_{(n)} + d^2_{(n-1,1)} + d^2_{(n-2,2)} + d^2_{(n-2,1,1)} + d^2_{(n-3,3)} + d^2_{(n-3,2,1)} \leqslant n^6,$$

и $\mathbf{V}$ – многообразие полиномиального роста не выше n^6.

Теперь мы готовы доказать следующий результат.

Теорема 2. Многообразие $\mathbf{V}$ является антикоммутативным метабелевым не шпехтовым многообразием полиномиального роста.

Доказательство. Предположим сначала, что $F = \mathbb{Q}$ – поле рациональных чисел. Если $\mathbf{V}$ является многообразием Шпехта, то есть T-идеал тождеств каждого подмногообразие конечно порожден, то из этого следует, что $\mathbf{V}$ имеет только счетное множество подмногообразий. Но для каждого $0 < \alpha < 1$, многообразия $\mathrm{var}(A_\alpha)$, содержится в $\mathbf{V}$. Следовательно, $\mathbf{V}$ содержит несчетное семейство подмногообразий и, следовательно, $\mathbf{V}$ не является шпехтовым.

В частности, существует бесконечная последовательность полилинейных многочленов с рациональными коэффициентами $f_1, f_2, \dots$ таких, что

$$f_{N+1} \notin \langle f_1, \dots, f_N \rangle^{\mathbb{Q}}_T$$

для любых $N \geqslant 1$, где $\langle f_1, \dots, f_N \rangle^{\mathbb{Q}}_T$ – T-идеал в $\mathbb{Q}(X, \mathbf{V}) \cong \mathbb{Q}\{X\}/Id(\mathbf{V})$ порожденных $f_1, \dots, f_N$.

Пусть теперь F – произвольное поле нулевой характеристики. Рассмотрим полиномы $f_1, f_2, \dots$ как F-полиномы, и пусть f_{N+1} является следствие $f_1, \dots, f_N$ в $F(X, \mathbf{V})$,, то есть

$$f_{N+1} \in \langle f_1, \dots, f_N \rangle^F_T.$$

Получаем

$$f_{N+1} = \beta_1 h_1 + \dots + \beta_t h_t \tag{3}$$

где $h_1, \dots, h_t$ – многочлены типа

$$p_i f_i(a_1, \dots, a_{n_i}) q_i,$$

$\beta_1, \dots, \beta_t \in F$ и $p_i, q_i, a_1, \dots, a_{n_i}$ являются одночленами на X с коэффициентом 1.

Зафиксируем базис B поля F над полем $\mathbb{Q}$, содержащий 1, и рассмотрим разложение

$$\beta_j = \mu^j_0 + \mu^j_1 b_1 + \dots + \mu^j_{k_j} b_{k_j}, \tag{4}$$

для всех $j = 1, \ldots, t$, где $\mu_0^j, \mu_1^j, \ldots, \mu_{k_j}^j \in \mathbb{Q}$ и $1 \neq b_1, \ldots, b_{k_j} \in B$. Теперь мы подставляем выражение (4) в (3). Учитывая, что f_{N+1} является многочленом с рациональным коэффициентами получаем, что

$$f_{N+1} = \mu_0^1 h_1 + \cdots + \mu_0^t h_t.$$

Отсюда следует, что $f_{N+1} \in \langle f_1, \ldots, f_N \rangle_T^{\mathbb{Q}}$, противоречие. Следовательно, $\langle f_1, \ldots, f_N \rangle_T^F$ – бесконечно порожденный T-идеал $F(X, \mathbf{V})$ и $\mathbf{V}$ – не шпехтовое многообразие F-алгебр. Доказательство завершено.

3. Не шпехтово метабелево многообразие роста близкого к квадратичному

Пусть A линейная алгебра с одним порождающим элементом a и следующими определяющими соотношениями: каждое слово содержащее более одного подслова равного a^2 должно быть равно 0. Пример этой алгебры приведен в работе [15], в ней же доказано, что разложение соответствующего кохарактера имеет вид

$$\chi_n(A) = m_{(n)}\chi_{(n)} + m_{(n-1,1)}\chi_{(n-1,1)},$$

причем $m_{(n)} = 2^{n-2}$. Отметим, что последняя формула для кратности обосновывается различными скобочными структурами на слове степени n. Пусть L_a и R_a – линейные операторы на алгебре A левого и правого умножения на элемент a соответственно. Договоримся результат применения оператора записывать таким образом: $xL_a = ax$, $xR_a = xa$. Если $w(L_a, R_a)$ некоторое слово длины $n-2$ в алфавите $\{L_a, R_a\}$, то $a^2 w(L_a, R_a)$ равен результату подстановки в вектор старшего веса неприводимого модуля симметрической группы, соответствующего разбиению $(n) \vdash n$. Так как существует 2^{n-2} различных линейно независимых таких слов, то мы получаем 2^{n-2} линейно независимых векторов старших весов.

Нам потребуется дополнительная информация о свойствах многообразия, порожденного алгеброй A.

Предложение 1. Пусть T некоторая расстановка скобок, при которой пространство $P_n^T(A) \neq 0$, тогда $\chi_n(A)^T = \chi_{(n)} + 2\chi_{(n-1,1)}$.

Доказательство см. [16].

Ниже изложен материал, существенно использующий статью [13]. Зафиксируем действительное число $\alpha, 0 < \alpha < 1$. Обозначим через $B = B_\alpha$ алгебру, которая является факторалгеброй алгебры A и порождается единственным элементом b, а также удовлетворяет следующим определяющим соотношениям. Во-первых, каждое слово, содержащее более одного подслова равного b^2, равно 0. Во-вторых, также равны нулю все слова вида $b^2 w(L_b, R_b)$, в которых степень монома $w(L_b, R_b)$ по переменной L_b больше или равна трем. А, в-третьих, равны нулю также слова, имеющие вид $b^2 w(L_b, R_b)$, в которых степень $w(L_b, R_b)$ по L_b равна двум, то есть слова вида

$$(b((b(b^2\underbrace{bb\ldots b}_{p}))\underbrace{bb\ldots b}_{q}))\underbrace{bb\ldots b}_{r},\ p = 0, 1, \ldots,\ q = 0, 1, \ldots,\ r = 0, 1, \ldots,$$

в которых $p < q^\alpha$.

Выпишем ненулевые линейно независимые элементы (слова) алгебры B :

$$b;\ b^2\underbrace{bb\ldots b}_{p},\ p = 0, 1, \ldots;\ (b(b^2\underbrace{bb\ldots b}_{p}))\underbrace{bb\ldots b}_{q},\ p = 0, 1, \ldots,\ q = 0, 1, \ldots,$$

$$(b((b(b^2\underbrace{bb\ldots b}_{p}))\underbrace{bb\ldots b}_{q}))\underbrace{bb\ldots b}_{r},\ p = 0, 1, \ldots,\ q = 0, 1, \ldots,\ r = 0, 1, \ldots,$$

в которых $p < q^\alpha$. При степени равной $n \geqslant 2$ соответствующие выписанным элементам расстановки скобок обозначим T_p, $p = n-2$; $T_{p,q}$, $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$, $p+q = n-3$; $T_{p,q,r}$, $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$, $r \geqslant 0$, $p+q+r = n-4$, $p < q^\alpha$, а их количество обозначим t_n.

Теорема 3. Пусть $\mathbf{V}_\alpha$ – многообразие линейных алгебр, порожденное алгеброй B_α. Тогда при $n \geqslant 1$ для многообразия $\mathbf{V}_\alpha$ выполняется условие

$$\frac{n^2 n^\alpha}{3 \cdot 3^\alpha} \leqslant c_n(\mathbf{V}_\alpha) < 2n^2(1+n^\alpha).$$

При доказательстве используется предложение 1 и несложные оценки для числа различных скобочных расположений t_n.

Заметим, что по определению при $\alpha < \beta$ выполняется строгое включение $\mathbf{V}_\alpha \subset \mathbf{V}_\beta$. Поэтому $\mathbf{V}_\beta$ для любого $0 < \beta < 1$ содержит континуум различных подмногообразий $\mathbf{V}_\alpha$, для которых $0 < \alpha \leqslant \beta$. Таким образом, рассуждения предыдущего раздела, проведенные в теореме 2, показывают, что многообразие $\mathbf{V}_\beta$ не является шпехтовым, но является метабелевым и имеет полиномиальный рост типа $n^{2+\beta}$. Так как число β может быть выбрано сколь угодно малым, то рост будет близок к квадратичному.

В заключение отметим, что В.Дренски в статье [17], вероятно впервые, построил не шпехтово многообразие квадратичного роста.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Giambruno A., Zaicev M. Polynomial Identities and Asymptotic Methods. Providence: American Mathematical Society,2005. 352 p. (Mathematical Surveys and Monographs. Vol. 122.)

2. Мальцев А. И. Об алгебрах с тождественными определяющими соотношениями // Математический сборник. 1950. Т. 26(68), № 1. С. 19–33.

3. Drensky V. Relations for the cocharacter sequences of T-ideals // Proc. of the International Conference on Algebra Honoring A. Malcev, Contemp. Math. 1992. Vol. 131, p. 2. P. 285–300.

4. Mishchenko S., Valenti A. Codimension and colength sequences of algebras and growth phenomena // Sao Paulo Journal of Mathematical Sciences. 2016. Vol. 10, is. 2. P. 263–272.

5. Giambruno A., Mishchenko S., Zaicev M. Algebras with intermediate growth of the codimensions // Adv. in Appl. Math. 2006. Vol. 37, № 3. P. 360–377.

6. Mishchenko S.P., Zaicev M.V. An example of a variety of Lie algebras with a fractional exponent // Journal of Mathematical Sciences. 1999. Vol. 93, № 6. P. 977–982.

7. Malyusheva O., Mishchenko S., Verevkin A. Series of varieties of Lie algebras of different fractional exponents // Compt. rend. Acad. Bulg. Sci. 2013. Vol. 66, № 3. P. 321–330.

8. Bogdanchuk O. A., Mishchenko S. P., Verëvkin A. B. On Lie algebras with exponential growth of the codimensions // Serdica Math. J. 2014. Vol. 40, № 3-4. P. 209–240.

9. Мищенко С. С. Новый пример многообразия алгебр Ли с дробной экспонентой // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1: Математика. Механика. 2011. № 6. С. 44–47.

10. Giambruno A., Mishchenko S., Zaicev M. Codimensions of Algebras and Growth Functions // Advances in Mathematics. 2008. Vol. 217, № 3. P. 1027–1052.

11. Zaicev M. On existence of PI-exponents of codimension growth // Electron. Res. Announc. Math. Sci. 2014. № 21. P. 113–119.

12. Зайцев М. В., Мищенко С. П. Пример многообразия линейных алгебр с дробным полиномиальным ростом // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1: Математика. Механика. 2008. № 1. С. 25–31.

13. Мищенко С. П. Пример многообразия линейных алгебр с дробным полиномиальным ростом меньшим трех // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1: Математика. Механика. 2013. № 3, С. 51–54.

14. Polynomial codimension growth and Specht problem / A. Giambruno [et al.]. // Journal of Algebra. 2017. № 469. P. 421-436.

15. Giambruno A., Mishchenko S. P. Polynomial growth of the codimensions: A characterization // Proc. Amer. Math. Soc. 2010. Vol. 138, No 3. P. 853–859.

16. Мищенко С. П., Верёвкин А. Б. О многообразиях с тождествами однопорожденной свободной метабелевой алгебры // Чебышевский сборник. 2016. Т. 17, № 2(58). С. 21–55.

17. Дренски В. С. Представления симметрической группы и многообразия линейных алгебр // Математический сборник. 1981. Т. 115 (157). С. 98-115.

REFERENCES

1. Giambruno, A., Zaicev, M. 2005, “Polynomial Identities and Asymptotic Methods”, Mathematical Surveys and Monographs, AMS, Providence, RI, vol. 122, 352 p.

2. Mal’tsev, A.I. 1950. “On algebras defined by identities,” Mat. Sb., vol. 26(68), issue 1, pp. 19–33. (in Russian)

3. Drensky, V. 1992, ”Relations for the cocharacter sequences of T-ideals”, Proc. of the International Conference on Algebra Honoring A. Malcev, Contemp. Math., vol.131, part 2, pp. 285–300.

4. Mishchenko, S., Valenti, A. 2016, ”Codimension and colength sequences of algebras and growth phenomena”,Sao Paulo Journal of Mathematical Sciences, vol. 10 , issue 2, pp. 263–272. Article First Online: 30 November 2015 DOI: 10.1007/s40863-015-0025-1

5. Giambruno, A., Mishchenko, S., Zaicev, M. 2006, ”Algebras with intermediate growth of the codimensions”, Adv. in Appl. Math. 37, no. 3, pp.360 – 377.

6. Mishchenko, S.P., Zaicev, M.V. 1999, ”An example of a variety of Lie algebras with a fractional exponent”, Journal of Mathematical Sciences (New York), vol. 93,no 6, pp. 977–982.

7. Malyusheva,O., Mishchenko, S., Verevkin, A. 2013, ”Series of varieties of Lie algebras of different fractional exponents”, Compt. rend. Acad. Bulg. Sci., 66, no 3, pp. 321–330.

8. Bogdanchuk, O.A., Mishchenko, S.P., Verëvkin,A.B. 2014, ”On Lie algebras with exponential growth of the codimensions”, Serdica Math. J., vol. 40, no 3-4, pp. 209–240.

9. Mishchenko, S.S., 2011, "New example of a variety of lie algebras with fractional exponent", *Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh.*, no 6, pp. 44–47; English translation in: *Moscow University Mathematics Bulletin*, vol. 66, no 6, pp. 264–266.

10. Giambruno, A., Mishchenko, S., Zaicev, M. 2008, ”Codimensions of Algebras and Growth Functions”, Advances in Mathematics, vol. 217, no 3, pp. 1027–1052.

11. Zaicev, M. 2014, "On existence of PI-exponents of codimension growth", Electron. Res. Announc. Math. Sci., vol.21, pp. 113–119.

12. Zaicev, M., Mishchenko, S. 2008, "The example of linear algebras variety with fractional polynomial growth", Vestn. Mosk. Univ., ser. I , vol.1, pp. 25–31. (in Russian)

13. Mishchenko, S.P. 2013,"The example of linear algebras variety with fractional polynomial growth less than 3", Vestn. Mosk. Univ., ser. I , no 3, pp. 51–54. (in Russian)

14. Giambruno, A., Mishchenko S., Valenti, A., Zaicev, M. 2017, "Polynomial codimension growth and Specht problem", Journal of Algebra, no. 469 , pp. 421-436.

15. Giambruno, A., Mishchenko, S.P. 2010, "Polynomial growth of the codimensions: A characOfitserovterization", Proc. Amer. Math. Soc., vol. 138, no 3, pp. 853–859.

16. Mishchenko, S.P., Verevkin, A.B. 2016, "On varieties with identities of one generated free metabelian algebra", Chebyshevskii sbornik, vol. 17, no. 2 (58), pp. 21–55. (in Russian)

17. Drenski, V.S. 1982, "Representations of the symmetric group and varieties of linear algebras", Math. USSR Sbornik, vol. 43, no. 1, pp. 85–101.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 19. Выпуск 1

УДК 004.032.26, 004.424.62 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-1-187-199

Классификация последовательностей на основе коротких мотивов

Офицеров Евгений Петрович — кафедра прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет.
e-mail: eofitserov@gmail.com

Аннотация

Задачи, связанные с классификацией последовательностей символов некоторого алфавита, часто возникают в таких областях, как биоинформатика и обработка естественного языка. Методы глубокого обучения, в особенности модели на основе рекуррентных нейронных сетей, в последние несколько лет зарекомендовали себя как наиболее эффективный способ решения подобных задач. Однако существующие подходы имеют серьезный недостаток — низкую интерпретируемость получаемых результатов. Крайне сложно установить какие именно свойства входной последовательности ответственны за её принадлежность к тому или иному классу. Упрощение же таких моделей с целью повышения их интерпретируемости, в свою очередь, приводит к снижению качества классификации. Такие недостатки ограничивают применение современных методов машинного обучения во многих предметных областях. В настоящей работе мы представляем принципиально новую, интерпретируемую архитектуру нейронных сетей, основанную на поиске набора коротких подпоследовательностей — мотивов, наличие которых влияет на принадлежность последовательности к определенному классу. Ключевой составляющей предлагаемого решения является разработанный нами алгоритм дифференцируемого выравнивания, являющийся дифференцируемым аналогом таких классических способов сравнения строк, как редакционное расстояние Левенштейна и алгоритм Смита–Ватермана. В отличие от предыдущих работ, посвященных классификации последовательностей на основе мотивов, новый метод позволяет не только выполнять поиск в произвольной части строки, но и учитывать возможные вставки.

Ключевые слова: классификация последовательностей, машинное обучение, нейронные сети, поиск мотивов.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:
Е. П. Офицеров. Классификация последовательностей на основе коротких мотивов // Чебышевский сборник, 2018, т. 19, вып. 1, с. 187–199.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 19. No. 1

UDC 004.032.26, 004.424.62 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-1-187-199

Motif based sequence classification

Ofitserov Evgeny Petrovich — department of applied mathematics and computer science, Tula State University,
e-mail: eofitserov@gmail.com

Abstract

Sequence classification problems often arise in such areas as bioinformatics and natural language processing. In the last few year best results in this field were achieved by the deep learning methods, especially by architectures based on recurrent neural networks (RNN). However, the common problem of such models is a lack of interpretability, i.e., extraction of key features from data that affect the most the model's decision. Meanwhile, using of less complicated neural network leads to decreasing predictive performance thus limiting usage of state-of-art machine learning methods in many subject areas. In this work we propose a novel interpretable deep learning architecture based on extraction of principal sets of short substrings — sequence motifs. The presence of extracted motif in the input sequence is a marker for a certain class. The key component of proposed solution is differential alignment algorithm developed by us, which provides a smooth analog of classical string comparison methods such as Levenshtein edit distance, and Smith–Waterman local alignment. Unlike previous works devoted to the motif based classification, which used CNN for shift-invariant searching, ours model provide a way to shift and gap invariant extraction of motifs.

Keywords: sequence classification, machine learning, neural network, motif extraction.

Bibliography: 15 titles.

For citation:
E. P. Ofitserov, 2018, "Motif based sequence classification" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 1, pp. 187–199.

1. Введение

Методы глубокого обучения показали свою эффективность в задачах, связанных с классификацией последовательностей. При этом наилучших результатов достигают архитектуры, в основе которых лежат рекуррентные нейронные сети такие LSTM (Long short–term memory) [1] и GRU (Gated recurrent unit) [2], [3]. Однако, не смотря на все достоинства, важный недостаток подобных архитектур — плохая интерпретируемость получаемой модели. Существующие способы визуализации процесса принятия решения [4], [5] не позволяют однозначно ответить на вопрос, какие особенности входной последовательности ответственны за принадлежность к определенному классу. Этот недостаток ограничивает использование глубокого обучения в задачах классификации биологических последовательностей, где важна не только точность получаемой модели, но и возможность проанализировать какие особенности входной строки влияют на решение классификатора.

Другим подходом, активно применяемым в биоинформатике, является классификация на основе мотивов. При построении классификаторов такого типа, предполагается, что ключевым признаком, влияющим на принадлежность последовательности к определенному классу, является наличие в ней некоторой короткой подстроки — мотива. При этом, сами мотивы являются неизвестными параметрами модели, определяемыми в процессе обучения. Данное предположение является оправданным для многих задач, связанных с классификацией биологических последовательностей, а также при обработке естественного языка.

Примером использования классификатора на основе мотивов является работа [6], в которой авторы используют сверточную нейронную сеть для предсказания ДНК-связывающих белков. В основе предложенного ими решения лежит использование одномерного сверточного слоя. Такой слой состоит из набора ядер — скользящих окон, которые «просматривают» исходную последовательность. Каждое ядро представляет собой матрицу из $4 \times K$ коэффициентов, которые могут быть интерпретированы как позиционно-весовые матрицы соответствующих мотивов. После применения такого слоя образуется карта признаков, содержащая информацию о наличии мотивов в различных участках входной последовательности. В свою очередь, полученная карта признаков классифицируется с помощью одного или нескольких полносвязных слоев.

Использование сверток позволяет сети выделять интересующие подстроки, независимого от того, в какой части входной последовательности они находятся. Однако, важным недостатком такого решения является неспособность предложенной архитектуры учитывать возможные разрывы в мотиве (таблица 1).

a.	A	C	**T**	**G**	**A**	C
b.	**T**	**G**	**A**	A	G	A
c.	G	**T**	C	**G**	**A**	T

Таблица 1: Полужирным шрифтом выделены возможные положения мотива (TGA) в последовательности. Сверточная сеть естественным образом инвариантна к сдвигу и может правильно классифицировать варианты a и b, но не учитывает возможные вставки — пример c

Одним из возможных решений проблемы разрывов является использование более глубоких архитектур, комбинирующих сверточные и рекуррентные слои [7]–[9]. Однако при таком подходе теряется возможность явно визуализировать найденные мотивы и однозначно установить их связь с конкретными классами.

Целью данной работы является разработка нейронной сети с принципиально новой архитектурой, позволяющей выполнять поиск с учетом возможных разрывов не прибегая к усложнению модели. Так же, как и в сверточной сети, мотивы кодируются в виде коэффициентов —

параметров модели, организованных в матрицы размера $G \times K$, где G — мощность алфавита, а K — длина мотива. Однако в отличие от предыдущих работ, поиск мотива в последовательности и формирование карты признаков выполняется не с помощью операции свертки, а с использованием алгоритма дифференцируемым выравнивания мотива, что позволяет естественным образом учитывать возможные разрывы.

2. Дифференцируемое выравнивание

Пусть $x = x_1 x_2 \dots x_L$, $x_i \in G$, $L > 1$, — входная последовательность символов из алфавита G, $|G| = N$. Мотив $m = m_1 m_2 \dots m_K$ — короткая последовательность символов того же алфавита длины $K \leq L$.

Классическими критерием, позволяющим сказать содержит ли последовательность x мотив m, является расстояние Левенштейна [10], которое определяет схожесть двух строк, как минимальное количество вставок, замен и удалений необходимых чтобы перевести одну строку в другую. Используя такую метрику, можно ввести меру сходства мотива m и последовательности x как $f_{\text{Levenstein}}(x, m) = L - \text{Edit}(x, m)$, где $\text{Edit}(x, m)$ — редакционное расстояние, L — длина последовательности. Однако метрика Левенштейна является дискретной функцией, а получаемый критерий соответствия — не дифференцируемым, что не позволяет использовать градиентные методы для обучения модели и поиска неизвестных параметров мотива.

В данном разделе предлагается способ построить гладкую меру соответствия мотива и последовательности $f(x, m)$, которая также позволяет сделать вывод о том, содержится ли m в x, но при этом может быть продифференцирована по параметрам мотива. В дальнейшем, такая функция может быть использована для построения нейронной сети, в которой символы мотивов являются неизвестными, обучаемыми параметрами, а значения $f(x, m)$ — признаками, используемыми для принятия решения о принадлежности x к определенному классу.

В основе предлагаемого решения лежит понятие выравнивания последовательностей. Выравниванием мотива по последовательности называется отображение символов мотива m на подпоследовательность x' последовательности x. Такое соответствие может быть записано с помощью бинарной матрицы: $T_{K \times L}$, где $T_{i,j} = 1$, если i-й элемент мотива соответствует j-му символу последовательности x.

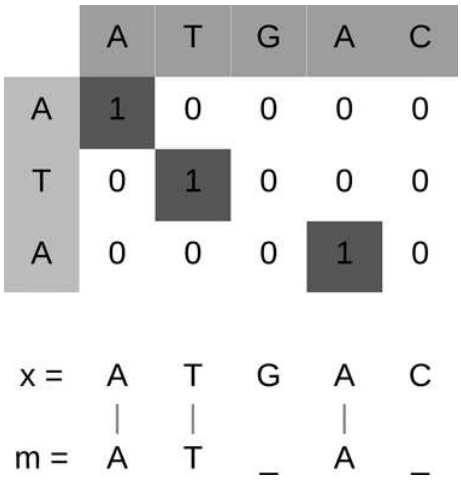

Рис. 1: Пример выравнивания мотива m по последовательности x и соответствующая ему матрица

Далее рассматриваются только те выравнивания, при которых мотив целиком содержится в последовательности x, то есть каждый элемент мотива соответствует какому-либо символу

последовательности. При таком предположении, в каждой строке матрицы T должна быть ровно одна единица: $\sum_{j=1}^{L} T_{i,j} = 1, \forall i$. Также, для элементов $T_{i,j}$ выполняется следующее условие: $T_{i,j} = 0,\ j < i \vee j \geq i + K$.

Для каждого T, отвечающего этим условиям, можно ввести следующую оценку, показывающую насколько хорошо мотив m соответствует $x' \subset x$:

$$S(X, \Theta, c_g, T) = n_g c_g + \sum_{i=1}^{K} \sum_{j=1}^{L} T_{i,j} C_{i,j}, \quad C = \Theta^T X. \tag{1}$$

В этой формуле T — матрица выравнивания, $\Theta_{N \times K}$ — позиционно весовая матрица мотива, i, j-й элемент которой равняется «штрафу» за замену j-го символа мотива на i-й символ алфавита, X — бинарная матрица входной последовательности, столбцы которой представляют собой унитарные коды символов исходной последовательности, n_g —- количество разрывов в выравнивании, $c_g \leq 0$ — штраф за разрыв. При таких обозначениях, значения коэффициентов $C_{i,j}$ показывают насколько хорошо j-й символ входной последовательности x соответствует i-му символу мотива.

Используя формулу (1), можно определить не зависящую от конкретного выравнивания меру сходства последовательности и мотива, как максимум $S(X, \Theta, c_g, T)$ по всем возможным T:

$$f\left(X, \Theta, c_g\right) = \max_{T} S\left(X, \Theta, c_g, T\right). \tag{2}$$

Рассчитанная таким образом мера сходства $f\left(X, \Theta, c_g\right)$ является аналогом расстояния Левенштейна, в котором штрафы за замены и вставки не являются постоянными, а задаются параметрами Θ и c_g. Классические алгоритмы выравнивания последовательностей, такие как алгоритм Смита–Ватермана [11]–[13], так же используют схожую меру соответствия последовательностей. При этом, для поиска максимальной оценки выравнивания в алгоритме Смита–Ватермана используется эффективный метод динамического программирования, позволяющий решить задачу оптимизации (2) за полиномиальное время.

Недостатком такого подхода является недифференцируемость получаемой функции f по параметрам Θ и c_g. Для того, чтобы добиться гладкости критерия соответствия мотива и последовательности, в работе предлагается заменить в выражении (2) поиск максимума $S\left(X, \Theta, c_g, T\right)$ на взвешенную сумму по всем возможным выравниваниям:

$$f\left(X, \Theta, c_g, \right) = \sum_{T \in D} S\left(X, \Theta, c_g, T\right) p\left(T \mid X, \Theta, c_g, \right). \tag{3}$$

В этой формуле D — множество всех возможных выравниваний, $p\left(T \mid X, \Theta, c_g\right)$ — вероятности соответствующих выравниваний, при условии входной последовательности X и мотива с параметрами Θ и c_g, для которых выполняется нормировочное условие $\sum_{T \in D} p\left(T \mid X, \Theta, c_g, \right) = 1$.

Используя теорему Байеса для $p\left(T \mid X, \Theta\right)$, можно переписать сумму в виде:

$$p\left(T \mid X, \Theta, c_g\right) = \frac{p\left(X \mid T, \Theta, c_g\right)}{\sum\limits_{u \in D} p(X \mid u, \Theta, c_g)},$$

$$f\left(X, \Theta, c_g, \right) = \frac{\sum\limits_{T \in D} S\left(X, \Theta, c_g, T\right) p\left(X \mid T, \Theta, c_g\right)}{\sum\limits_{T \in D} p(X \mid T, \Theta, c_g)},$$

где $p(X \mid T, \Theta, c_g)$ — представляет собой вероятность входной последовательности X, при условии того, что в ней содержится заданный мотив с заданным выравниванием. Эта вероятность может быть рассчитана по формуле:

$$p(X \mid T, \Theta) = \left(\prod_{i=1}^{K} \prod_{j=1}^{L} W_{i,j}^{T_{i,j}} \right) p_g^{n_g}, \quad W = P^T X. \tag{4}$$

В этом выражении P — позиционно-вероятностная матрица мотива, i,j-й элемент которой показывает вероятность встретить i-й символ алфавита на j-й позиции мотива, p_g — вероятность разрыва. По аналогии с формулой (1), коэффициенты $W_{i,j}$ выражают вероятность того, что j-й символ входной последовательности соответствует i-му элементу мотива. Позиционно-вероятностная матрица мотива P, а также вероятность разрыва p_g могут быть получены из позиционно-весовой матрицы мотива Θ и коэффициента c_g соответственно:

$$P = \begin{pmatrix} \dfrac{e^{\Theta_{1,1}}}{\sum\limits_{i=1}^{N} e^{\Theta_{i,1}}} & \dfrac{e^{\Theta_{1,2}}}{\sum\limits_{i=1}^{N} e^{\Theta_{i,2}}} & \cdots \\ \vdots & \ddots & \\ \dfrac{e^{\Theta_{N,1}}}{\sum\limits_{i=1}^{N} e^{\Theta_{i,1}}} & \cdots & \dfrac{e^{\Theta_{N,K}}}{\sum\limits_{i=1}^{N} e^{\Theta_{i,K}}} \end{pmatrix}, \quad p_g = e^{c_g}.$$

3. Прямой и обратный ход

Для расчета значений значений $f\,(X, \Theta, c_g,)$ по формуле (3) требуется выполнить суммирование по всем возможным выравниваниям мотива по последовательности. Классическим подходом для решения задачи такого перебора является использования методов динамического программирования, основанных на префиксном кодировании. В работе предлагается алгоритм, основанный на аналогичном подходе, который позволяет за полиномиальное время вычислить сумму из формулы (3), не выполняя явный перебор множества D.

Пусть

$$\alpha_{i,j} = \sum_{T \in D} p\left(X_{1:j} \mid T, \Theta_{1:i}\right),$$

$$\beta_{i,j} = \sum_{T \in D} S\left(X_{1:j}, \Theta_{1:i}, T\right) p\left(X_{1:j} \mid T, \Theta_{1:i}\right),$$

$$i = \overline{1, K},\ j = \overline{1, L}.$$

Здесь $p\left(X_{1:j} \mid T, \Theta_{1:i}\right) = p_g^{n_g(i,j)} \prod\limits_{k=1}^{i} \prod\limits_{l=1}^{j} W_{k,l}^{T_{k,l}}$, — вероятность первых j символов входной последовательности, при условии того, что они содержат первые i элементов мотива, $S\left(X_{1:j}, \Theta_{1:i}, T\right) = p_g n_g(i,j) + \sum\limits_{k=1}^{i} \sum\limits_{l=1}^{j} C_{k,l} T_{k,l}$ — оценка соответствующего выравнивания первых i элементов мотива по первым j символам последовательности. При таких обозначениях формула (3) может быть переписана в виде:

$$f\,(X, \Theta) = \frac{\beta_{K,L}}{\alpha_{K,L}}.$$

В свою очередь, с учетом предположения о том, что каждый символ мотива соответствует какому–либо символу входной последовательности, можно показать, что для $\alpha_{i,j}$ и $\beta_{i,j}$ справедливы следующие рекуррентные соотношения:

$$\alpha_{i,j} = \begin{cases} \alpha_{i-1,j-1} W_{i,j} + \alpha_{i,j-1} p_g, & i = \overline{2, K-1},\ j \geq i, \\ W_{i,j} + \alpha_{i,j-1} p_g, & i = 1, \\ \alpha_{i-1,j-1} W_{i,j} + \alpha_{i,j-1}, & i = K,\ j \geq i, \\ 0, & j < i, \end{cases} \tag{5}$$

$$\beta_{i,j} = \begin{cases} W_{i,j} \left(\beta_{i-1,j-1} + C_{i,j} \alpha_{i-1,j-1}\right) + p_g \left(\beta_{i,j-1} + c_g \alpha_{i,j-1}\right), & i = \overline{2, K-1},\ j \geq i, \\ W_{i,j} C_{i,j} + p_g \left(\beta_{i,j-1} + c_g \alpha_{i,j-1}\right), & i = 1, \\ W_{i,j} \left(\beta_{i-1,j-1} + C_{i,j} \alpha_{i-1,j-1}\right) + \beta_{i,j-1}, & i = K,\ j \geq i, \\ 0, & j < i. \end{cases} \tag{6}$$

Приведенные выше формулы предоставляют эффективный алгоритм для расчета всех коэффициентов $\alpha_{i,j}$ и $\beta_{i,j}$, что позволяет за $O(LK)$ операций вычислить меру соответствия мотива входной последовательности. При этом, получаемая функция $f\left(X, \Theta, c_g\right)$ является гладкой и может быть продифференцирована по параметрам мотива:

$$\frac{\partial f\left(X, \Theta\right)}{\partial \Theta} = \frac{\alpha_{K,L} \dfrac{\partial \beta_{K,L}}{\partial \Theta} - \beta_{K,L} \dfrac{\partial \alpha_{K,L}}{\partial \Theta}}{\alpha_{K,L}^2},$$

$$\frac{\partial \alpha_{K,L}}{\partial \Theta} = \sum_{i,j} \frac{\partial \alpha_{K,L}}{\partial C_{i,j}} \frac{\partial C_{i,j}}{\partial \Theta} + \frac{\partial \alpha_{K,L}}{\partial W_{i,j}} \frac{\partial W_{i,j}}{\partial \Theta},$$

$$\frac{\partial \beta_{K,L}}{\partial \Theta} = \sum_{i,j} \frac{\partial \beta_{K,L}}{\partial C_{i,j}} \frac{\partial C_{i,j}}{\partial \Theta} + \frac{\partial \beta_{K,L}}{\partial W_{i,j}} \frac{\partial W_{i,j}}{\partial \Theta}.$$

Для расчета производных $\frac{\partial \alpha_{K,L}}{\partial C_{i,j}}$, $\frac{\partial \alpha_{K,L}}{\partial W_{i,j}}$, $\frac{\partial \beta_{K,L}}{\partial C_{i,j}}$, $\frac{\partial \beta_{K,L}}{\partial W_{i,j}}$ также могут быть использованы рекуррентные соотношения (5),(6). Для этого требуется продифференцировать их по соответствующим параметрам:

$$\frac{\partial \alpha_{i,j}}{\partial W_{k,l}} = \begin{cases} \dfrac{\partial \alpha_{i-1,j-1}}{\partial W_{k,l}} W_{i,j} + \dfrac{\partial \alpha_{i,j-1}}{\partial W_{k,l}} p_g + \delta_{i,j=k,l} \alpha_{i-1,j-1}, & i = \overline{2, K-1},\ j \geq i, \\ \delta_{i,j=k,l} + \dfrac{\partial \alpha_{i,j-1}}{\partial W_{k,l}} p_g, & i = 1, \\ \dfrac{\partial \alpha_{i-1,j-1}}{\partial W_{k,l}} W_{i,j} + \dfrac{\partial \alpha_{i,j-1}}{\partial W_{k,l}} + \delta_{i,j=k,l} \alpha_{i-1,j-1}, & i = K,\ j \geq i, \\ 0, & j < i, \end{cases}$$

$$\frac{\partial \alpha_{i,j}}{\partial C_{k,l}} = 0,$$

$$\frac{\partial\beta_{i,j}}{\partial W_{k,l}} = \begin{cases} W_{i,j}\left(\dfrac{\partial\beta_{i-1,j-1}}{\partial W_{k,l}} + C_{i,j}\dfrac{\partial\alpha_{i-1,j-1}}{\partial W_{k,l}}\right) + \\ + p_g\left(\dfrac{\partial\beta_{i,j-1}}{\partial W_{k,l}} + c_g\dfrac{\partial\alpha_{i,j-1}}{\partial W_{k,l}}\right) + \\ + \delta_{i,j=k,l}\left(\beta_{i-1,j-1} + C_{i,j}\alpha_{i-1,j-1}\right), & i = \overline{2,K-1},\ j \geq i, \\ \delta_{i,j=k,l}C_{i,j} + p_g\left(\dfrac{\partial\beta_{i,j-1}}{\partial W_{k,l}} + c_g\dfrac{\partial\alpha_{i,j-1}}{\partial W_{k,l}}\right), & i = 1, \\ W_{i,j}\left(\dfrac{\partial\beta_{i-1,j-1}}{\partial W_{k,l}} + C_{i,j}\dfrac{\partial\alpha_{i-1,j-1}}{\partial W_{k,l}}\right) + \dfrac{\partial\beta_{i,j-1}}{\partial W_{k,l}} + \\ + \delta_{i,j=k,l}\left(\beta_{i-1,j-1} + C_{i,j}\alpha_{i-1,j-1}\right), & i = K,\ j \geq i, \\ 0, & j < i, \end{cases}$$

$$\frac{\partial\beta_{i,j}}{\partial C_{k,l}} = \begin{cases} W_{i,j}\dfrac{\partial\beta_{i-1,j-1}}{\partial C_{k,l}} + p_g\dfrac{\partial\beta_{i,j-1}}{\partial C_{k,l}} + \delta_{i,j=k,l}C_{i,j}\alpha_{i-1,j-1}, & i = \overline{2,K-1},\ j \geq i, \\ W_{i,j} + p_g\dfrac{\partial\beta_{i,j-1}}{\partial C_{k,l}}, & i = 1, \\ W_{i,j}\dfrac{\partial\beta_{i-1,j-1}}{\partial C_{k,l}} + \dfrac{\partial\beta_{i,j-1}}{\partial C_{k,l}} + \delta_{i,j=k,l}C_{i,j}\alpha_{i-1,j-1}, & i = K,\ j \geq i, \\ 0, & j < i. \end{cases}$$

Здесь $\delta_{i,j=k,l} = \begin{cases} 1, & i = k \wedge j = l, \\ 0, & i \neq k \vee j \neq l \end{cases}$ — символ Кронекера.

Аналогичным образом можно получить выражение для производных по p_g и c_g:

$$\frac{\partial\alpha_{i,j}}{\partial p_g} = \begin{cases} \dfrac{\partial\alpha_{i-1,j-1}}{\partial p_g}W_{i,j} + \dfrac{\partial\alpha_{i,j-1}}{\partial p_g}p_g + \alpha_{i,j-1}, & i = \overline{2,K-1},\ j \geq i, \\ \dfrac{\partial\alpha_{i,j-1}}{\partial p_g}p_g + \alpha_{i,j-1}, & i = 1, \\ \dfrac{\partial\alpha_{i-1,j-1}}{\partial p_g}W_{i,j} + \dfrac{\partial\alpha_{i,j-1}}{\partial p_g}, & i = K,\ j \geq i, \\ 0, & j < i, \end{cases}$$

$$\frac{\partial\alpha_{i,j}}{\partial c_g} = 0,$$

$$\frac{\partial\beta_{i,j}}{\partial p_g} = \begin{cases} W_{i,j}\left(\dfrac{\partial\beta_{i-1,j-1}}{\partial p_g} + C_{i,j}\dfrac{\partial\alpha_{i-1,j-1}}{\partial p_g}\right) + \\ + p_g\left(\dfrac{\partial\beta_{i,j-1}}{\partial p_g} + c_g\dfrac{\partial\alpha_{i,j-1}}{\partial p_g}\right) + \beta_{i,j-1} + c_g\alpha_{i,j-1}, & i = \overline{2,K-1},\ j \geq i, \\ p_g\left(\dfrac{\partial\beta_{i,j-1}}{\partial p_g} + c_g\dfrac{\partial\alpha_{i,j-1}}{\partial p_g}\right) + \beta_{i,j-1} + c_g\alpha_{i,j-1}, & i = 1, \\ W_{i,j}\left(\dfrac{\partial\beta_{i-1,j-1}}{\partial p_g} + C_{i,j}\dfrac{\partial\alpha_{i-1,j-1}}{\partial p_g}\right) + \dfrac{\partial\beta_{i,j-1}}{\partial p_g}, & i = K,\ j \geq i, \\ 0, & j < i. \end{cases}$$

$$\frac{\partial\beta_{i,j}}{\partial c_g} = \begin{cases} W_{i,j}\dfrac{\partial\beta_{i-1,j-1}}{\partial c_g} + p_g\left(\dfrac{\partial\beta_{i,j-1}}{\partial c_g} + c_g\alpha_{i,j-1}\right), & i = \overline{2,K-1},\ j \geq i, \\ p_g\left(\dfrac{\partial\beta_{i,j-1}}{\partial c_g} + c_g\alpha_{i,j-1}\right), & i = 1, \\ W_{i,j}\dfrac{\partial\beta_{i-1,j-1}}{\partial c_g} + \dfrac{\partial\beta_{i,j-1}}{\partial c_g}, & i = K,\ j \geq i, \\ 0, & j < i. \end{cases}$$

4. Архитектура классификатора

Приведенные выше формулы позволяют эффективно рассчитывать, насколько хорошо мотив с параметрами Θ и c_g соответствует последовательности x, а также дифференцировать его по соответствующим параметрам. Это позволяет использовать описанный алгоритм в задачах связанных с классификацией последовательностей. В работе предлагается архитектура нейронной сети, в основе которой лежит слой поиска мотивов, принимающий на вход последовательность символов некоторого алфавита и возвращающий n-мерный вектор признаков. Обучаемыми параметрами такого слоя являются n позиционно-весовых матриц мотивов Θ^i и соответствующие им c_g^i. Формируемый таким слоем вектор признаков содержит информацию о том, насколько i-ый мотив соответствует входной последовательности. Дифференцируемость алгоритма выравнивания позволяет оптимизировать параметры такого слоя с помощью стандартных градиентных методов.

Для построения итогового классификатора, такой слой используется в сочетании с обычной полносвязной нейронной сетью. При такой архитектуре к векторам признаков, полученным с помощью выравнивания мотивов, применяется активационная функция ReLU (Rectifier Linear Unit) [15] в сочетании с бетч–нормализацией [14]. После этого полносвязная нейронная сеть формирует финальные вероятности классов.

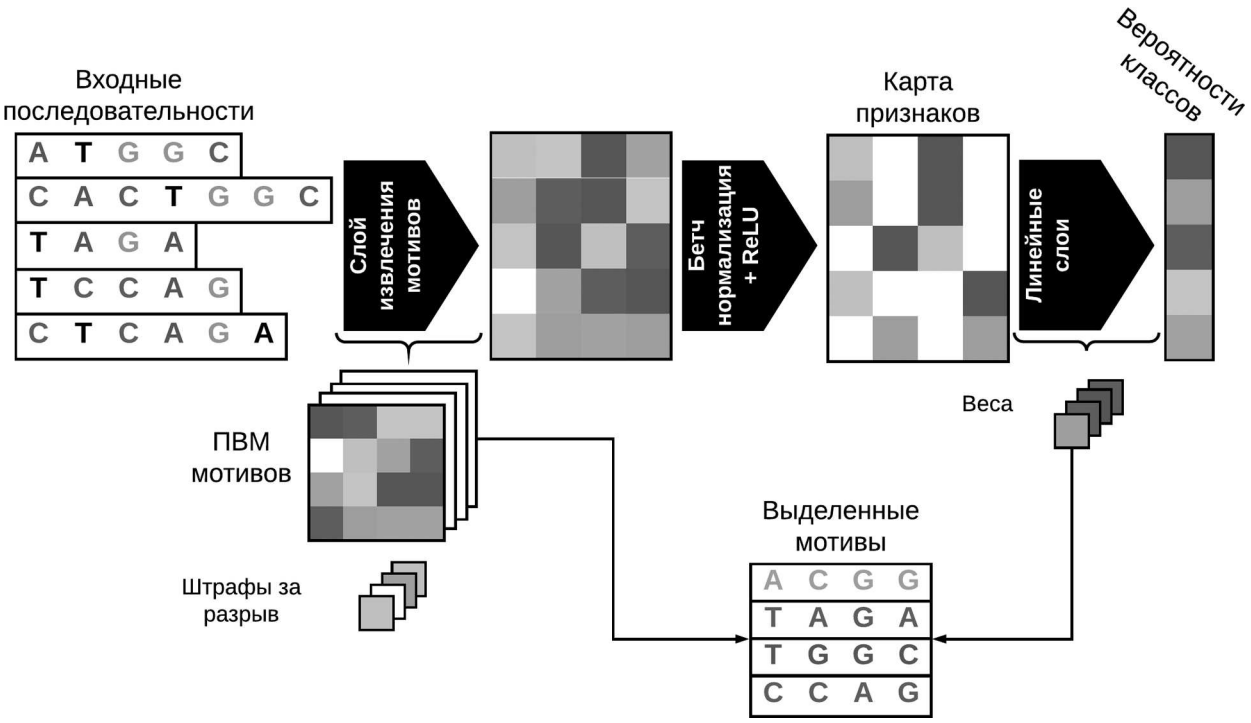

Рис. 2: Предлагаемая архитектура классификатора последовательностей

Преимуществом подобной архитектуры, по сравнению с рекуррентными нейронными сетями, является возможность визуализировать процесс принятия решения с помощью позиционно-вероятностных матриц мотивов.

Если в качестве финального классификатора используется один линейный слой, то его веса так же могут быть использованы для получения дополнительной информации о влиянии мотивов на принадлежность последовательности к определенному классу.

5. Классификация синтетических данных

Для тестирования описанного алгоритма была сгенерирована синтетическая обучающая выборка D_{train}, состоящая из 50000 последовательностей над алфавитом из 4 букв: A, T, G и C, длиной от 5 до 20 символов, разбитых на два класса. Последовательности первого класса были получена из мотива m_1 путем вставок случайных символов алфавита в различных местах мотивах. Количество вставляемых символов n выбиралось случайно в зависимости от позиции вставки — $n \in \overline{0,12}$, для вставок внутри мотива и $n \in \overline{0,15}$ вначале и в конце. По такому же принципу последовательности второго класса были получены из мотива m_2.

Аналогичным образом, используя те же мотивы m_1 и m_2, была сгенерирована тестовая выборка D_{test}.

Последовательности 1-го класса	Последовательности 2-го класса
AGCTcTtcaata	CcgATGC
AGCTTt	cCAggTcatGC
AttccGCTT	atcCATGaggCgc
gccAGCgTcT	CAcggaTGC

Таблица 2: Пример синтетических данных для $m_1 = \text{AGCTT}$, $m_2 = \text{CATGC}$

Выборка D_{train} была использована для обучения нейронной сети, предсказывающей к какому классу принадлежит последовательность. Эксперименты были проведены для различных мотивов m_1 и m_2. Для оценки качества мотивов, найденных нейронной сетью использовалось следующие соотношения:

$$\Delta_1 = \text{Edit}(\tilde{m}_1, m_1), \quad \tilde{m}_1 = \arg\max_i P^1_{i,j},$$

$$\Delta_2 = \text{Edit}(\tilde{m}_2, m_1), \quad \tilde{m}_2 = \arg\max_i P^2_{i,j}.$$

В этих соотношениях $\tilde{m}_1$ и $\tilde{m}_2$ — найденные мотивы, $P^1_{i,j}$ и $P^2_{i,j}$ — соответствующие им позиционно-вероятностные матрицы, Edit — редакционное расстояние.

m_1	m_2	точность на тесте	Δ_1	Δ_2
AGCTT	CATGC	0.98	0	0
ATACT	CTGAC	0.97	0	0
GTTCCA	CACGTG	0.99	0	0

Таблица 3: Результаты классификации для различных мотивов m_1 и m_2

6. Заключение

В работе разработан принципиально новая архитектура нейронная сети, основанная на извлечении мотивов, с использованием алгоритма дифференцируемого выравнивания. Численные эксперименты на синтетических данных подтвердили, что предложенная модель способна правильно находить мотивы с учетом вставок случайных символов и классифицировать последовательности на их основе. Описанные алгоритмы могут быть эффективно распараллелены для вычисления на графических процессорах.

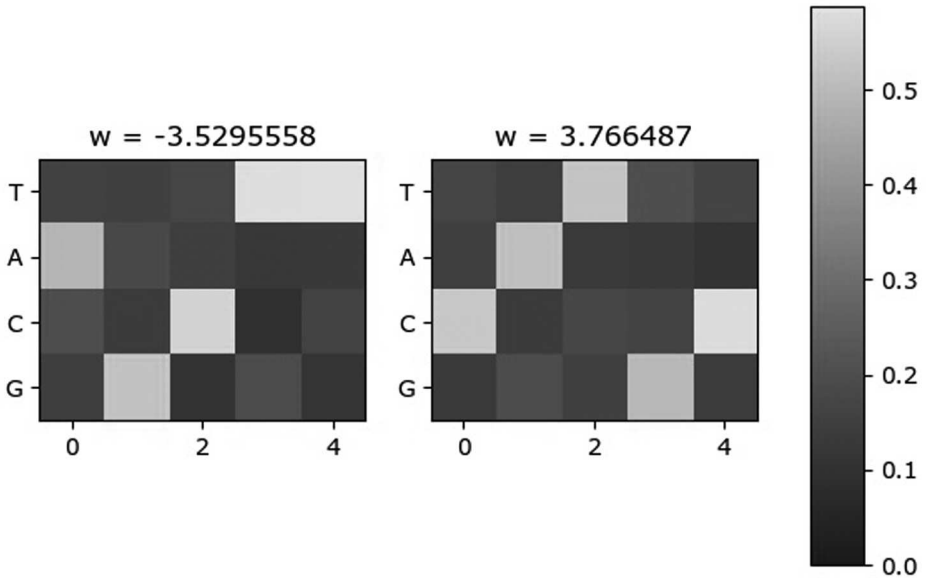

Рис. 3: Визуализация полученных позиционно-вероятностных матриц для m_1 = AGCTT, m_2 = CATGC, w — коэффициент финального линейного классификатора, соответствующий матрице

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hochreiter S., Schmidhuber J. Long short-term memory // Neural computation. 1997. Vol. 9, № 8. P. 1735–1780.

2. Learning phrase representations using RNN encoder-decoder for statistical machine translation / K. Cho [et al.]. // arXiv:1406.1078. 2014.

3. Empirical evaluation of gated recurrent neural networks on sequence modeling / J. Chung [et al.]. // arXiv:1412.3555. 2014.

4. Karpathy A., Johnson J., Fei-Fei L. Visualizing and understanding recurrent networks // arXiv:1506.02078. 2015.

5. Lstmvis: A tool for visual analysis of hidden state dynamics in recurrent neural networks / H. Strobelt [et al.]. // IEEE transactions on visualization and computer graphics. 2018. Vol. 24, № 1. P. 667–676.

6. Convolutional neural network architectures for predicting DNA–protein binding / H. Zeng et al. // Bioinformatics. 2016. Vol. 32, № 12. P. i121–i127.

7. Zhou J., Troyanskaya O. G. Predicting effects of noncoding variants with deep learning–based sequence model // Nature methods. 2015. Vol. 12, № 10. P. 931.

8. Deep motif: Visualizing genomic sequence classifications / J. Lanchantin [et al.]. // arXiv:1605.01133. 2016.

9. Quang D., Xie X. DanQ: a hybrid convolutional and recurrent deep neural network for quantifying the function of DNA sequences // Nucleic acids research. 2016. Vol. 44, № 11. P. e107–e107.

10. Левенштейн В. И. Двоичные коды с исправлением выпадений, вставок и замещений символов // Докл. АН СССР. 1965. Т. 163, № 4. С. 845–848.

11. Smith T. F., Waterman M. S. Comparison of biosequences // Advances in applied mathematics. 1981. Vol. 2, № 4. P. 482–489.

12. Gotoh O. An improved algorithm for matching biological sequences // Journal of molecular biology. 1982. Vol. 162, № 3. P. 705–708.

13. Manavski S. A., Valle G. CUDA compatible GPU cards as efficient hardware accelerators for Smith-Waterman sequence alignment // BMC bioinformatics. 2008. Vol. 9, № 2. P. S10.

14. Ioffe S., Szegedy C. Batch normalization: Accelerating deep network training by reducing internal covariate shift // arXiv:1502.03167. 2015.

15. Hahnloser R. H. R. et al. Digital selection and analogue amplification coexist in a cortex-inspired silicon circuit // Nature. 2000. Vol. 405, № 6789. P. 947.

REFERENCES

1. Hochreiter, S. & Schmidhuber, J. 1997, “Long short-term memory“, *Neural computation*, vol. 9, no. 8, pp. 1735–1780.

2. Cho K. et al. 2014, “Learning phrase representations using RNN encoder-decoder for statistical machine translation“, *arXiv:1406.1078*.

3. Chung J. et al. 2014, “Empirical evaluation of gated recurrent neural networks on sequence modeling“, *arXiv:1412.3555*.

4. Karpathy, A., Johnson, J. & Fei-Fei, L. 2015, “Visualizing and understanding recurrent networks“, *arXiv:1506.02078*.

5. Strobelt H. et al. 2018, “Lstmvis: A tool for visual analysis of hidden state dynamics in recurrent neural networks“, *IEEE transactions on visualization and computer graphics*, vol. 24, no. 1, pp. 667–676.

6. Zeng H. et al. 2016, “Convolutional neural network architectures for predicting DNA–protein binding“, *Bioinformatics*, vol. 32, no. 12, pp. i121–i127.

7. Zhou, J. & Troyanskaya, O. G. 2015, “Predicting effects of noncoding variants with deep learning–based sequence model“, *Nature methods*, vol. 12, no. 10, pp. 931.

8. Lanchantin J. et al. 2016, “Deep motif: Visualizing genomic sequence classifications“, *arXiv:1605.01133*.

9. Quang D. & Xie X. 2016, “DanQ: a hybrid convolutional and recurrent deep neural network for quantifying the function of DNA sequences“, *Nucleic acids research*, vol. 44, no. 11, pp. e107–e107.

10. Levenshtein, V. I. 1965, “Binary codes with correction of fallouts, inserts and notes“, *Reports of the Academy of Sciences* (in Russian), vol. 163, no. 4, pp. 845–848. [in Russian]

11. Smith T. F. & Waterman M. S. 1981, “Comparison of biosequences“, *Advances in applied mathematics*, vol. 2, no. 4, pp. 482–489.

12. Gotoh, O. 1982, "An improved algorithm for matching biological sequences", *Journal of molecular biology*, vol. 162, no. 3, pp. 705–708.

13. Manavski S. A., Valle G. 2008, "CUDA compatible GPU cards as efficient hardware accelerators for Smith-Waterman sequence alignment", *BMC bioinformatics*, vol. 9, no. 2, pp. S10.

14. Ioffe S. & Szegedy C. 2015, "Batch normalization: Accelerating deep network training by reducing internal covariate shift", *arXiv:1502.03167*.

15. Hahnloser R. H. R. et al. 2000, Digital selection and analogue amplification coexist in a cortex-inspired silicon circuit", *Nature*, vol. 405, no. 6789, pp. 947.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 19. Выпуск 1

УДК 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-1-200-219

О взвешенном числе точек алгебраической сетки[1]

Рарова Елена Михайловна — заместитель декана, Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. толстого.
e-mail: rarova82@mail.ru

Аннотация

Работа посвящена изучению тригонометрических сумм алгебраических сеток с весами, которые играют центральную роль в модификации метода К. К. Фролова, предложенной Н. М. Добровольским в 1984 году. Тригонометрическую сумму алгебраической сетки с весами для вектора $\vec{m} = \vec{0}$, естественно, назвать взвешенным числом точек алгебраической сетки.

Во введении данной работы предложено обоснование актуальности темы исследования, даются необходимые определения и факты из современной теории метода К. К. Фролова, доказывается важная теорема о разложении тригонометрической суммы алгебраической сетки с весами в ряд по точкам алгебраической сетки. В разделе «Вспомогательные леммы» приводятся без доказательства необходимые факты из теории весовых функций специального вида, которые играют принципиальную роль в модификации Н. М. Добровольского метода К. К. Фролова.

Используя теорему о разложении тригонометрической суммы алгебраической сетки с весами в ряд по точкам алгебраической сетки и лемму о значении тригонометрического интеграла от весовой функции, в работе выводится асимптотическая формула для взвешенного числа точек алгебраической сетки со специальной весовой функцией порядка 2, которая утверждает, что такое число стремится к единице.

Аналогично, показано, что при росте детерминанта алгебраической решётки для любого вектора $\vec{m} \neq \vec{0}$, тригонометрическая сумма алгебраических сеток с весами, заданной специальной весовой функцией, стремится к 0.

Для простоты изложения в основном тексте статьи рассматривается только случай простейшей весовой функции порядка 2.

В заключении сформулированы без доказательства аналогичные утверждения о значениях тригонометрических сумм алгебраических сеток со специальными весовыми функциями порядка $r + 1$ для произвольного натурального r.

А именно, утверждается, что для взвешенного числа точек алгебраической сетки со специальной весовой функцией порядка r справедливо стремление к 1 с остаточным членом порядка $s - 1$ логарифма детерминанта алгебраической решётки, делённого на $r + 1$ степень детерминанта алгебраической решётки. Аналогичное утверждение справедливо о стремлении к нулю тригонометрической суммы алгебраической сетки с весами, заданной специальной весовой функцией порядка $r + 1$.

Ключевые слова: алгебраические решётки, алгебраические сетки, тригонометрические суммы алгебраических сеток с весами, весовые функции.

Библиография: 30 названий.

Для цитирования:
Е. М. Рарова. О взвешенном числе точек алгебраической сетки // Чебышевский сборник, 2018, т. 19, вып. 1, с. 200–219.

[1]Исследование выполнено по гранту РФФИ №16-41-710194_р_центр_а

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 19. No. 1

UDC 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-1-200-219

Weighted number of points of algebraic net

Rarova Elena Mikhailovna — deputy dean, Tula State L.N. Tolstoy Pedagogical University.
e-mail: rarova82@mail.ru

Abstract

The paper is devoted to the study of trigonometric sums of algebraic grids with weights, which play a Central role in the modification of K. K. Frolov's method proposed by N. M. Dobrovolsky in 1984. The trigonometric sum of the algebraic grid with weights for the vector $\vec{m} = \vec{0}$ is naturally called the weighted number of points of the algebraic grid.

In the introduction of this paper, the justification of the relevance of the research topic is proposed, the necessary definitions and facts from the modern theory of K. K. Frolov's method are given, an important theorem on the decomposition of the trigonometric sum of an algebraic grid with weights in a row by points of an algebraic grid is proved. In the section "Auxiliary lemmas"the necessary facts from the theory of weight functions of a special kind which play a principal role in modification of H. M. Dobrovolsky are given without proof. method K. K. Frolov.

Using a theorem on the decomposition of the trigonometric sum of an algebraic grid with weights in a row by points of an algebraic grid and a Lemma on the value of a trigonometric integral of the weight function, we derive an asymptotic formula for the weighted number of points of an algebraic grid with a special weight function of order 2, which States that such a number tends to unity.

Similarly, it is shown that when the determinant of an algebraic lattice grows for any vector $\vec{m} \neq \vec{0}$, the trigonometric sum of algebraic grids with weights given by the special weight function tends to 0.

For simplicity, only the case of the simplest weight function of order 2 is considered in the main text of the article.

In conclusion, we formulate without proof similar statements about the values of trigonometric sums of algebraic grids with special weight functions of the order $r + 1$ for any natural R.

Namely, it is argued that for the weighted number of points of algebraic nets with a special weight function r is true desire-to-1 with the residual member of the order $s-1$ of the logarithm of the determinant is an algebraic lattice, divided by $r + 1$ the degree of the determinant is an algebraic lattice. A similar statement is true about the tendency to zero the trigonometric sum of an algebraic grid with weights given by a special weight function of the order $r + 1$.

Keywords: algebraic lattices, algebraic net, trigonometric sums of algebraic net with weights, weight functions.

Bibliography: 30 titles.

For citation:
E. M. Rarova, 2018, "Weighted number of points of algebraic net *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 1, pp. 200–219.

1. Введение

1.1. Актуальность и цель работы

В работе [9] следующим образом сформулирована **Проблема значений тригонометрических сумм сеток:**

"Нормированные тригонометрические суммы параллелепипедальных сеток имеют два значения: 0 и 1. Для нормированных тригонометрических сумм двумерных сеток Смоляка таких значений три: 0, 1 и -1. Для неравномерных сеток имеется или хорошая равномерная оценка $O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$, или они равны 1.

Очень важно получить оценки нормированных тригонометрических сумм для алгебраических сеток.

Если эти суммы имеют спектр значений не сосредоточенный около точек 0 и 1, то алгебраические сетки нельзя хорошо приблизить параллелепипедальными сетками, а алгебраические решётки нельзя хорошо приблизить целочисленными решётками."

Актуальность темы состоит в том, что взвешенное число точек алгебраической сетки является значением соответствующей тригонометрической суммы алгебраической сетки с весами при $\vec{m} = \vec{0}$, и, следовательно, значение этой суммы должно стремиться к 1 при росте количества точек алгебраической сетки.

Цель работы — получить асимптотическую формулу для взвешенного числа точек алгебраической сетки со специальной весовой функцией порядка 2.

1.2. Алгебраические сетки

В 1976 году вышла работа [28] К. К. Фролова, в которой впервые появились алгебраические сетки. Наиболее полно в авторском изложении метод Фролова представлен в его кандидатской диссертации [29]. Позднее в работах [11] — [16] Н. М. Добровольский предложил модификацию метода Фролова с использованием специальных весовых функций. Современное, полное изложение метода Фролова и его модификации по Н. М. Добровольскому дается в работах [4] — [7], [26].

Будем использовать следующие обозначения и определения из работ [21] и [26]. Рассматриваются:

единичные $s-$мерные кубы

$$\overline{G}_s = \{\vec{x} \,|\, 0 \leqslant x_\nu \leqslant 1,\ \nu = 1, 2, \ldots, s\},$$
$$G_s = \{\vec{x} \,|\, 0 \leqslant x_\nu < 1,\ \nu = 1, 2, \ldots, s\};$$

непрерывные периодические функции с периодом равным единице по каждой из переменных x_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, s)$, принадлежащие классу $E_s^\alpha(C)$, который состоит из периодических функций

$$f(\vec{x}) = \sum_{m_1, \ldots, m_s = -\infty}^{\infty} C(\vec{m}) e^{2\pi i (\vec{m}, \vec{x})},$$

для которых

$$|C(\vec{m})| \leqslant \frac{C}{(\overline{m_1} \ldots \overline{m_s})^\alpha}, \quad (\alpha > 1)$$

и $\overline{m} = \max(1, |m|)$ для любого вещественного m.

Для произвольного вектора $\vec{x}$ его дробной частью называется вектор $\{\vec{x}\} = (\{x_1\}, \ldots, \{x_s\})$. Отсюда следует, что всегда $\{\vec{x}\} \in G_s$. Целой частью вектора называется вектор $[\vec{x}] = \vec{x} - \{\vec{x}\}$.

Через $p(\vec{x}) = \left[\vec{x} + \left(\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}\right)\right]$ обозначим ближайший целый вектор в смысле нормы $\|\vec{x}\|_1 = \max(|x_1|, \ldots, |x_s|)$. Для нормы вектора отклонения от ближайшего целого $\delta(\vec{x})$, заданного равенством

$$\delta(\vec{x}) = p(\vec{x}) - \vec{x} = \left(\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}\right) - \left\{\vec{x} + \left(\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}\right)\right\},$$

справедливо неравенство $\|\delta(\vec{x})\|_1 \leqslant \frac{1}{2}$.

Далее везде под произвольной решеткой $\Lambda \subset \mathbb{R}^s$ мы будем понимать только полные решетки, то есть

$$\Lambda = \{m_1\vec{\lambda}_1 + \ldots + m_s\vec{\lambda}_s = \vec{m} \cdot A \,|\vec{m} = (m_1, \ldots, m_s) \in \mathbb{Z}^s\},$$

где $\vec{\lambda}_1 = (\lambda_{1\,1}, \ldots, \lambda_{1\,s}), \ldots, \vec{\lambda}_s = (\lambda_{s\,1}, \ldots, \lambda_{s\,s})$ — система линейно-независимых векторов в $\mathbb{R}^s$, а матрица решётки A задана соотношениями

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_{1\,1} & \ldots & \lambda_{1\,s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{s\,1} & \ldots & \lambda_{s\,s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\lambda}_1 \\ \vdots \\ \vec{\lambda}_s \end{pmatrix}.$$

Взаимная решетка $\Lambda^* = \{\vec{x} \,|\, \forall \vec{y} \in \Lambda \ (\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{Z}\}$. Непосредственно из определения следует равенство $(q\Lambda)^* = \dfrac{1}{q}\Lambda^*$.

Определение 1. *Для произвольной решетки Λ обобщенной параллелепипедальной сеткой $M(\Lambda)$ называется множество $M(\Lambda) = \Lambda^* \cap G_s$.*

Сетка $M_1(\Lambda) = \Lambda^* \cap [-1; 1)^s$.

Обобщенной параллелепипедальной сеткой II рода $M'(\Lambda)$ называется множество

$$M'(\Lambda) = \{\vec{x} \,|\, \vec{x} = \{\vec{y}\}, \vec{y} \in M_1(\Lambda)\}.$$

Определение 2. *Весовой функцией порядка r с константой B называется гладкая функция $\rho(\vec{x})$, удовлетворяющая условиям*

$$\sum_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s = -1}^{0} \rho(\vec{x} + (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s)) = 1 \ \textit{при} \ \vec{x} \in G_s, \tag{1}$$

$$\rho(\vec{x}) = 0 \quad \textit{при} \quad \vec{x} \notin (-1; 1)^s, \tag{2}$$

$$\left| \int_{-1}^{1} \ldots \int_{-1}^{1} \rho(\vec{x}) e^{2\pi i(\vec{\sigma}, \vec{x})} d\vec{x} \right| \leqslant B(\overline{\sigma}_1 \ldots \overline{\sigma}_s)^{-r} \quad \textit{для любого} \quad \vec{\sigma} \in \mathbb{R}^s. \tag{3}$$

Если выполнены условия (1) и (2), то говорим просто о весовой функции $\rho(\vec{x})$.

Определение 3. *Квадратурной формулой с обобщенной параллелепипедальной сеткой II типа и весовой функцией $\rho(\vec{x})$ называется формула вида*

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 f(\vec{x}) d\vec{x} = (\det \Lambda)^{-1} \sum_{\vec{x} \in M'(\Lambda)} \rho_{\vec{x}} f(\vec{x}) - R_{N'(\Lambda)}[f],$$

$$\textit{где} \quad \rho_{\vec{x}} = \sum_{\vec{y} \in M_1(\Lambda), \{\vec{y}\} = \vec{x}} \rho(\vec{y}), \quad N'(\Lambda) = |M'(\Lambda)|,$$

$R_{N'(\Lambda)}[f]$ — *погрешность квадратурной формулы.*

Для погрешности квадратурной формулы с обобщенной параллелепипедальной сеткой II рода на классе E_s^α справедлива оценка (см. [13], [21])

$$R_{N'(\Lambda)}[E_s^\alpha(C)] = \sup_{f\in E_s^\alpha(C)} |R_{N'(\Lambda)}[f]| \leqslant CB\cdot c_1(\alpha)^s \zeta_H(\Lambda|\alpha),$$

$$\text{где} \quad c_1(\alpha) = 2^{\alpha+1}\left(3+\frac{2}{\alpha-1}\right), \quad \zeta_H(\Lambda|\alpha) = \sum_{\vec{x}\in\Lambda}{}'(\overline{x}_1\dots\overline{x}_s)^{-\alpha}.$$

Отметим важное обстоятельство — квадратурные формулы с обобщенной параллелепипедальной сеткой II типа и весовой функцией $\rho(\vec{x})$, вообще говоря, задают насыщаемый алгоритм численного интегрирования, если весовая функция конечного порядка и решетка не является целочисленной.

Этот алгоритм будет ненасыщаемый для целочисленных решеток, то есть для параллелепипедальных сеток, или для весовых функций бесконечного порядка. Определение ненасыщаемых алгоритмов дано в монографиях [1], [22].

Вопросы построения численных алгоритмов с правилом остановки рассмотрены в работах [8], [10], [25] — [24], [30].

Параллелепипедальные сетки и метод оптимальных коэффициентов изучаются в работах [17] — [21], [2], [3], [9] и других.

Пусть $\vec{a} = (a_0, a_1, \dots, a_{s-1})$ — целочисленный вектор такой, что многочлен

$$P_{\vec{a}}(x) = \sum_{\nu=0}^{s-1} a_\nu x^\nu + x^s \tag{4}$$

неприводим над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$ и все корни $\Theta_\nu\,(\nu = 1,\dots,s)$ многочлена (4) действительные.

Обозначим через $T(\vec{a})$ матрицу степеней алгебраически сопряженных целых алгебраических чисел $\Theta_1,\dots,\Theta_s$ — корней многочлена $P_{\vec{a}}(x)$:

$$T(\vec{a}) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \Theta_1 & \dots & \Theta_s \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \Theta_1^{s-1} & \dots & \Theta_s^{s-1} \end{pmatrix}, \tag{5}$$

а через $\vec{\Theta} = (\Theta_1,\dots,\Theta_s)$ — вектор полного набора алгебраически сопряженных чисел — корней многочлена $P_{\vec{a}}(x)$.

Напомним, что

$$\lambda_1(\vec{a}) = \|T(\vec{a})\|_1 = \max_{0\leqslant k\leqslant s-1}\left(|\Theta_1|^k + \dots + |\Theta_s|^k\right),$$
$$\lambda_2(\vec{a}) = \|T(\vec{a})\|_2 = \max_{\nu=1,\dots,s}(1+|\Theta_\nu| + \dots + |\Theta_\nu^{s-1}|) = \|T^\top(\vec{a})\|_1,$$

где $T^\top$ — транспонированная матрица к матрице T.

Тогда параллелепипед

$$\Pi_s(T_1) = \left\{\vec{x}\,\middle|\, |t_{\nu 1}x_1 + \dots + t_{\nu s}x_s| \leqslant \frac{1}{2} \quad (\nu = 1,\dots,s)\right\} =$$
$$= \left\{\vec{x}\,\middle|\, \|\vec{x}\cdot T_1^\top\|_1 \leqslant \frac{1}{2}\right\},$$

задаваемый матрицей

$$T_1 = (t_{\nu\mu})_{1\leqslant\nu,\mu\leqslant s} = T_1(\vec{a}) = \frac{1}{2\|T(\vec{a})\|_1}\cdot T(\vec{a}), \tag{6}$$

содержит $s-$мерный куб

$$K_s = \{\vec{x}\,|\,|x_\nu|\leqslant 1,\quad \nu = 1,\ldots,s\} = \{\vec{x}\,|\,\|\vec{x}\|_1\leqslant 1\},$$

где $\|\vec{x}\|_1 = \max\limits_{\nu=1,\ldots,s}|x_\nu|$, поскольку $\|T(\vec{a})\cdot\vec{x}\|_1\leqslant\|T(\vec{a})\|_1\cdot\|\vec{x}\|_1$, то есть

$$\max_{\substack{|x_\nu|\leqslant 1\\ \nu=1,\ldots,s}}\left|\Theta_1^k x_1+\ldots+\Theta_s^k x_s\right|\leqslant|\Theta_1|^k+\ldots+|\Theta_s|^k,\ (k=0,1,\ldots,s-1).$$

Для любого $t>0$ решётка $\Lambda(t\cdot T(\vec{a}))$ называется алгебраической. Она имеет вид

$$\Lambda(t\cdot T(\vec{a}))=\left\{\vec{x}=\left(t\sum_{\nu=1}^{s}\Theta_1^{\nu-1}m_\nu,\ldots,t\sum_{\nu=1}^{s}\Theta_s^{\nu-1}m_\nu\right)=t\cdot\vec{m}\cdot T(\vec{a})\,\middle|\,\vec{m}\in\mathbb{Z}^s\right\}.$$

Таким образом, алгебраическая решётка $\Lambda(t\cdot T(\vec{a}))$ имеет базис $\vec{\lambda}_\nu = t\cdot(\Theta_1^{\nu-1},\ldots,\Theta_s^{\nu-1})$ $(\nu=1,\ldots,s)$.

Так как координаты любой ненулевой точки $\vec{x}\in\Lambda(T(\vec{a}))$ — алгебраически сопряженные целые алгебраические числа, то произведение $x_1\ldots x_s$ — ненулевое целое рациональное число.

Кроме этого, если T — произвольная невырожденная матрица и $T^* = (T^{-1})^\top$, то решётки $\Lambda(T)$ и $\Lambda(T^*)$ — взаимные решётки: $\Lambda^*(T) = \Lambda(T^*)$.

Для алгебраических решёток и сама решётка, и её взаимная решётка не имеют ненулевых точек с нулевым произведением координат. Для обоснования этого достаточно показать, что координаты любой ненулевой точки взаимной решётки для алгебраической решётки образуют полный набор алгебраически сопряженных чисел из одного и того же алгебраического чисто вещественного поля степени s над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$.

Обозначим через $\mathbb{F}_{\vec{a}}^{(\nu)} = \mathbb{Q}(\Theta_\nu)$ — алгебраическое расширение степени s поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$ $(\nu=1,\ldots,s)$. Так как все корни неприводимого многочлена $P_{\vec{a}}(x)$ — действительные числа, то мы имеем набор из s изоморфных чисто вещественных алгебраических полей степени s. Из предыдушего следует, что каждая строка матрицы $T(\vec{a})$ состоит из полного набора алгебраически сопряженных чисел, а все элементы ν-ого столбца матрицы принадлежат одному и тому же алгебраическому полю $\mathbb{F}_{\vec{a}}^{(\nu)}$ $(\nu=1,\ldots,s)$. Так как точки решётки $\Lambda(T(\vec{a}))$ — целочисленные линейные комбинации строк матрицы $T(\vec{a})$, то координаты каждой точки $\vec{x}\in\Lambda(T(\vec{a}))$ — полный набор алгебраически сопряженных чисел, а ν-ая координата для любой точки этой решётки принадлежат одному и тому же алгебраическому полю $\mathbb{F}_{\vec{a}}^{(\nu)}$ $(\nu=1,\ldots,s)$.

Покажем, что этим свойством обладает и взаимная решётка.

Как обычно,[2] $\sigma_j(\vec{\Theta}) = (-1)^j a_{s-j}$ — элементарные симметрические многочлены степени j от корней многочлена $P_{\vec{a}}(x)$ $(0\leqslant j\leqslant s)$.

Лемма 1. *Пусть* $S_j(\vec{\Theta}) = \sum\limits_{\nu=1}^{s}\Theta_\nu^j$, $j\geqslant 0$ *и симметрическая матрица* $Q(\vec{a})$ *задана равенством*

$$Q(\vec{a}) = \begin{pmatrix} S_0(\vec{\Theta}) & \ldots & S_{s-1}(\vec{\Theta})\\ S_1(\vec{\Theta}) & \ldots & S_s(\vec{\Theta})\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ S_{s-1}(\vec{\Theta}) & \ldots & S_{2s-2}(\vec{\Theta})\end{pmatrix},$$

тогда $Q(\vec{a})$ *— невырожденная симметрическая рациональная матрица и справедливо равенство* $Q(\vec{a}) = T(\vec{a})\cdot T(\vec{a})^\top$.

[2] здесь пользуемся естественным соглашение, что $a_s = 1$.

Доказательство. См. [26]. □

Обозначим через $U_{\nu\,j}(\vec{\Theta})$ элементы матрицы $Q(\vec{a})^{-1}$. Ясно, что из симметричности функций $S_j(\vec{\Theta})$ вытекает симметричность функций $U_{\nu\,j}(\vec{\Theta})$.

Лемма 2. *Справедливо равенство*

$$T^*(\vec{a}) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{s} U_{1\,k}(\vec{\Theta})\Theta_1^{k-1} & \dots & \sum\limits_{k=1}^{s} U_{1\,k}(\vec{\Theta})\Theta_s^{k-1} \\ \sum\limits_{k=1}^{s} U_{2\,k}(\vec{\Theta})\Theta_1^{k-1} & \dots & \sum\limits_{k=1}^{s} U_{2\,k}(\vec{\Theta})\Theta_s^{k-1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum\limits_{k=1}^{s} U_{s\,k}(\vec{\Theta})\Theta_1^{k-1} & \dots & \sum\limits_{k=1}^{s} U_{s\,k}(\vec{\Theta})\Theta_s^{k-1} \end{pmatrix}.$$

Доказательство. См. [26]. □

Лемма 3. *Произвольная точка $\vec{x}$ решетки $\Lambda(T^*(\vec{a}))$ имеет вид:*

$$\vec{x} = \left(\sum_{k=1}^{s} \left(\sum_{\nu=1}^{s} U_{\nu\,k}(\vec{\Theta}) m_\nu \right) \Theta_1^{k-1}, \dots, \sum_{k=1}^{s} \left(\sum_{\nu=1}^{s} U_{\nu\,k}(\vec{\Theta}) m_\nu \right) \Theta_s^{k-1} \right),$$

где $m_1, \dots, m_s$ — произвольные целые числа.

Доказательство. См. [26]. □

Лемма 4. *Пусть $t(\vec{\Theta})$ — наименьший общий знаменатель для рациональных чисел $S_0(\vec{\Theta}),\dots,S_{s-1}(\vec{\Theta})$, точка $\vec{x}$ решётки $\Lambda(T^*(\vec{a}))$ будет целочисленной тогда, и только тогда, когда $\vec{x}$ имеет вид: $\vec{x} = t(\vec{\Theta}) \cdot (m, \dots, m)$ и m — целое число.*

Других точек $\vec{x}$ решётки $\Lambda(T^*(\vec{a}))$, у которых хотя бы одна координата рациональная, не существует.

Доказательство. См. [26]. □

1.3. Тригонометрические суммы сетки с весами

Совокупность $M \subset G_s$ точек $M_k = (\xi_1(k), \dots, \xi_s(k)) \qquad (k = 1 \dots N)$ называется *сеткой* M из N узлов, а сами точки — *узлами квадратурной формулы*. Величины $\rho_k = \rho(M_k)$ называются весами квадратурной формулы. В этой работе будем везде предполагать, что все веса вещественнозначные и являются значениями специальной весовой функции.

Для произвольных целых $m_1,\dots,m_s$ суммы $S_{M,\vec{\rho}}(m_1,\dots,m_s)$, определённые равенством

$$S_{M,\vec{\rho}}(m_1,\dots,m_s) = \sum_{k=1}^{N} \rho_k e^{2\pi i[m_1\xi_1(k)+\dots+m_s\xi_s(k)]}, \tag{7}$$

называются *тригонометрическими суммами сетки с весами.*

Будем также рассматривать *нормированные тригонометрические суммы сетки с весами*

$$S^*_{M,\vec{\rho}}(m_1,\dots,m_s) = \frac{1}{N} S_{M,\vec{\rho}}(m_1,\dots,m_s).$$

Положим $\rho(M) = \sum\limits_{j=1}^{N} |\rho_j|$, тогда для всех нормированных тригонометрических сумм сетки с весами справедлива тривиальная оценка

$$|S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})| \leqslant \frac{1}{N}\rho(M). \tag{8}$$

Если все веса равны 1, то будем говорить просто тригонометрическая сумма сетки и писать $S_M(\vec{m})$ и нормированная тригонометрическая сумма сетки $S^*_M(\vec{m})$.

Пусть q — натуральное число больше 1 и $q_1 = \left[\frac{q-1}{2}\right]$, $q_2 = \left[\frac{q}{2}\right]$, тогда множество $\{-q_1, \dots, q_2\}$ является полной системой вычетов по модулю q.

Пусть матрица $T = T(\vec{a})$ и $t > 0$. Рассмотрим алгебраическую сетку $M(t) = M'(t \cdot \Lambda(T))$ из $N'(t \cdot \Lambda(T))$ узлов $\vec{x}_k$ $(k = 1, \dots, N'(t \cdot \Lambda(T)))$ с весами

$$\rho_k = \rho_{\vec{x}_k} = (\det(t \cdot \Lambda(T)))^{-1} \sum_{\{\vec{y}\}=\vec{x}_k,\, \vec{y} \in M_1(t\cdot\Lambda(T))} \rho(\vec{y})$$

и её тригонометрическую сумму с весами

$$S_{M(t),\vec{\rho}}(\vec{m}) = (\det(t \cdot \Lambda(T)))^{-1} \sum_{\vec{x} \in M(t)} \left(\sum_{\{\vec{y}\}=\vec{x},\, \vec{y} \in M_1(t\cdot\Lambda(T))} \rho(\vec{y}) \right) e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})}.$$

Теорема 1. *Для алгебраической решётки $\Lambda(t \cdot T(\vec{a}))$ и произвольной весовой функции $\rho(\vec{x})$ справедливо равенство*[3]

$$S_{M(t),\vec{\rho}}(\vec{m}) = \delta(\vec{m}) + \sum_{\vec{x} \in \Lambda(t\cdot T(\vec{a}))}{}' \int_{-1}^{1} \dots \int_{-1}^{1} \rho(\vec{y}) e^{2\pi i(\vec{y},\vec{m}-\vec{x})} d\vec{y}, \tag{9}$$

где

$$\delta(\vec{m}) = \begin{cases} 1, & \text{при } \vec{m} = \vec{0}; \\ 0, & \text{при } \vec{m} \neq \vec{0},\ \vec{m} \in \mathbb{Z}^s. \end{cases}$$

Доказательство. Рассмотрим для решётки $\Lambda = \Lambda(t \cdot T(\vec{a}))$ квадратурную формулу

$$\int_{-1}^{1} \dots \int_{-1}^{1} \rho(\vec{y}) e^{2\pi i(\vec{y},\vec{m})} d\vec{y} = (\det \Lambda)^{-1} \sum_{\vec{x} \in M'(\Lambda)} \rho_{\vec{x}} e^{2\pi i(\vec{x},\vec{m})} - R_{N'(\Lambda)} \left[\rho(\vec{y}) e^{2\pi i(\vec{y},\vec{m})} \right]. \tag{10}$$

Для интеграла в левой части равенства по свойствам весовой функции и периодичности экспоненты имеем:

$$\int_{-1}^{1} \dots \int_{-1}^{1} \rho(\vec{y}) e^{2\pi i(\vec{y},\vec{m})} d\vec{y} = \sum_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_s=-1}^{0} \int_{0}^{1} \dots \int_{0}^{1} \rho(\vec{y} + (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s)) e^{2\pi i(\vec{y},\vec{m})} d\vec{y} =$$

$$= \int_{0}^{1} \dots \int_{0}^{1} \left(\sum_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_s=-1}^{0} \rho(\vec{y} + (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s)) \right) e^{2\pi i(\vec{y},\vec{m})} d\vec{y} = \int_{0}^{1} \dots \int_{0}^{1} e^{2\pi i(\vec{y},\vec{m})} d\vec{y} = \delta(\vec{m}). \tag{11}$$

Сумма в правой части равенства (10) есть в точности тригонометрическая сумма сетки с весами $S_{M(t),\vec{\rho}}(\vec{m})$, которую можно записать следующим образом

$$S_{M(t),\vec{\rho}}(\vec{m}) = (\det(t \cdot \Lambda(T)))^{-1} \sum_{\vec{x} \in M(t)} \left(\sum_{\{\vec{y}\}=\vec{x},\, \vec{y} \in M_1(t\cdot\Lambda(T))} \rho(\vec{y}) \right) e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})} =$$

$$= (\det(t \cdot \Lambda(T)))^{-1} \sum_{\vec{x}^* \in K_s \bigcap (t\cdot\Lambda(T))^*} \rho(\vec{x}^*) e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x}^*)}. \tag{12}$$

[3]Здесь и далее символ $\sum'$ означает, что из области суммирования исключена нулевая точка.

Пусть $\vec{\lambda}_\nu = (\lambda_{\nu\,1}, \ldots, \lambda_{\nu\,s})$ $(\nu = 1, \ldots, s)$ — базис решетки Λ и $\vec{\lambda}^*_\nu = (\lambda^*_{\nu\,1}, \ldots, \lambda^*_{\nu\,s})$ $(\nu = 1, \ldots, s)$ — взаимный базис взаимной решетки Λ^*.

Пусть q натуральное число такое, что

$$\max_{\nu=1,\ldots,s} \left(\sum_{\mu=1}^{s} |\lambda_{\nu\,\mu}| \right) \leq q. \tag{13}$$

Через $K_s(q)$ обозначим s-мерный куб $K_s(q) = [-q, q]^s$, а через $\Pi_s(\Lambda, q)$ — s-мерный параллелепипед

$$\Pi_s(\Lambda, q) = \left\{ \vec{x} \,\middle|\, -q \leqslant \sum_{\mu=1}^{s} \lambda_{\nu\,\mu} x_\mu \leqslant q \quad (\nu = 1, \ldots, s) \right\}.$$

Из определения $K_s(q)$ и $\Pi_s(\Lambda, q)$ следует, что s-мерный куб $K_s \subset \Pi_s(\Lambda, q)$ и при линейном преобразовании

$$(y_1, \ldots, y_s) = (x_1, \ldots, x_s) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_{1\,1} & \ldots & \lambda_{s\,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{1\,s} & \ldots & \lambda_{s\,s} \end{pmatrix} = (x_1, \ldots, x_s) \cdot A,$$

$$y_\nu = \sum_{\mu=1}^{s} \lambda_{\nu\,\mu} x_\mu \quad (\nu = 1, \ldots, s)$$

s-мерный параллелепипед $\Pi_s(\Lambda, q)$ переходит в $K_s(q)$.

Действительно, пусть $\vec{x} \in K_s$, тогда

$$\left| \sum_{\mu=1}^{s} \lambda_{\nu\,\mu} x_\mu \right| \leqslant \sum_{\mu=1}^{s} |\lambda_{\nu\,\mu}| \leqslant q$$

и следовательно, $\vec{x} \in \Pi_s(\Lambda, \vec{q})$.

Рассмотрим функцию $g(\vec{x})$ на s-мерном кубе $K_s(q)$, определенную равенством

$$g(\vec{x}\,) = \rho(\vec{x}^{\,*}) e^{2\pi i (\vec{x}^{\,*}, \vec{m})},$$

где векторы $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_s)$ и $\vec{x}^{\,*} = (x^*_1, \ldots, x^*_s)$ связаны соотношением

$$(x^*_1, \ldots, x^*_s) = (x_1, \ldots, x_s) \cdot \begin{pmatrix} \lambda^*_{1\,1} & \ldots & \lambda^*_{s\,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda^*_{1\,s} & \ldots & \lambda^*_{s\,s} \end{pmatrix} = (x_1, \ldots, x_s) \cdot A^{-1},$$

$$x^*_\nu = \sum_{\mu=1}^{s} x_\mu \lambda^*_{\nu\mu} \quad (\nu = 1, \ldots, s),$$

то есть $\vec{x}^{\,*} = x_1 \vec{\lambda}^*_1 + \ldots + x_s \vec{\lambda}^*_s$.

Так как вне s-мерного куба K_s функция $\rho(\vec{x})$ обращается в нуль, то

$$\sum_{\vec{x}^{\,*} \in K_s \bigcap (t \cdot \Lambda(T))^*} \rho(\vec{x}^{\,*}) e^{2\pi i (\vec{m}, \vec{x}^{\,*})} = \sum_{\vec{x}^{\,*} \in \Lambda^* \bigcap \Pi_s(\Lambda, q)} \rho(\vec{x}^{\,*}) e^{2\pi i (\vec{x}^{\,*},\, \vec{m})} =$$

$$= \sum_{\vec{x}^{\,*} \in \Lambda^*} \rho(\vec{x}^{\,*}) e^{2\pi i (\vec{x}^{\,*},\, \vec{m})} = \sum_{x_1, \ldots, x_s = -q}^{q-1} \rho(\vec{x} \cdot A^{-1}) e^{2\pi i (\vec{x} \cdot A^{-1},\, \vec{m})} = \sum_{x_1, \ldots, x_s = -q}^{q-1} g(\vec{x}).$$

Гладкая функция $g(\vec{x})$ обращается в нуль на границе куба $K_s(q)$, поэтому ее можно разложить в абсолютно сходящийся кратный ряд Фурье на кубе $K_s(q)$:

$$g(\vec{x}) = \sum_{\vec{n}=-\infty}^{+\infty} c(\vec{n}) e^{2\pi i \frac{(\vec{n},\vec{x})}{2q}},$$

где

$$c(\vec{n}) = (2q)^{-s} \int\limits_{K_s(q)} \int g(\vec{x}) e^{-2\pi i \frac{(\vec{n},\,\vec{x})}{2q}} d\vec{x}. \tag{14}$$

Так как

$$\sum_{k=-q}^{q-1} e^{2\pi i \frac{nk}{2q}} = 2q\delta_{2q}(n),$$

где символ Коробова $\delta_a(b)$ задается равенством

$$\delta_a(b) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad b \equiv 0 \pmod a, \\ 0 & \text{при} \quad b \not\equiv 0 \pmod a, \end{cases}$$

то

$$\det(t\cdot\Lambda(T))\cdot S_{M(t),\vec{\rho}}(\vec{m}) = \sum_{x_1,\ldots,x_s=-q}^{q-1} g(\vec{x}) = \sum_{x_1,\ldots,x_s=-q}^{q-1} \sum_{\vec{n}=-\infty}^{+\infty} c(\vec{n}) e^{2\pi i \frac{(\vec{n},\vec{x})}{2q}} =$$

$$= \sum_{\vec{n}=-\infty}^{+\infty} c(\vec{n})(2q)^s \delta_{2q}(n_1)\ldots\delta_{2q}(n_s) = (2q)^s \sum_{\vec{n}=-\infty}^{+\infty} c(2q\vec{n}).$$

Из выражения (14) для коэффициентов Фурье находим

$$c(2q\vec{n}) = (2q)^{-s} \int\limits_{K_s(q)} \int \rho(\vec{x}\cdot A^{-1}) e^{2\pi i(\vec{x}\cdot A^{-1},\,\vec{m})} e^{-2\pi i(\vec{n},\vec{x})} d\vec{x} =$$

$$= (2q)^{-s} \int\limits_{K_s(q)} \int \rho(\vec{x}\cdot A^{-1}) e^{2\pi i(\vec{x}\cdot A^{-1},\,\vec{m})} e^{-2\pi i(n_1\vec{\lambda}_1+\ldots+n_s\vec{\lambda}_s,\,x_1\vec{\lambda}_1^*+\ldots+x_s\vec{\lambda}_s^*)} d\vec{x} =$$

$$= (2q)^{-s} \det\Lambda \int\limits_{\Pi_s(\Lambda,q)} \int \rho(\vec{y}) e^{2\pi i(\vec{y},\,\vec{m})} e^{-2\pi i(n_1\vec{\lambda}_1+\ldots+n_s\vec{\lambda}_s,\vec{y})} d\vec{y} =$$

$$= (2q)^{-s} \det\Lambda \int_{-1}^{1} \ldots \int_{-1}^{1} \rho(\vec{y}) e^{2\pi i(\vec{y},\,\vec{m})} e^{-2\pi i(n_1\vec{\lambda}_1+\ldots+n_s\vec{\lambda}_s,\vec{y})} d\vec{y}.$$

Отсюда и из равенства (11) следует, что

$$S_{M(t),\vec{\rho}}(\vec{m}) = \delta(\vec{m}) + \sum_{\vec{x}\in\Lambda}{}' \int_{-1}^{1} \ldots \int_{-1}^{1} \rho(\vec{y}) e^{2\pi i(\vec{y},\,\vec{m}-\vec{x})} d\vec{y}$$

и теорема полностью доказана.

□

2. Вспомогательные леммы

Как обычно, через $\zeta(\alpha) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} m^{-\alpha}$ обозначается дзета-функция Римана при $\alpha > 1$, для которой выполнены неравенства

$$\frac{1}{\alpha-1} = \int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} < \zeta(\alpha) < 1 + \int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} = 1 + \frac{1}{\alpha-1}.$$

Приведем необходимые леммы из работы [26].

Лемма 5. *Для любого действительного σ выполняется неравенство*

$$\left| \int\limits_{-1}^{1} (1-|x|) e^{2\pi i \sigma x} dx \right| \leqslant (\overline{\sigma})^{-2}, \tag{15}$$

где $\overline{\sigma} = \max(1, |\sigma|)$.

Доказательство. См. [26]. □

Лемма 6. *Пусть функция $\rho_r(x)$ определена равенствами*

$$\rho_r(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } |x| \geqslant 1, \\ 1 - (2r-1) C_{2r-2}^{r-1} \sum\limits_{\nu=0}^{r-1} C_{r-1}^{\nu} \dfrac{(-1)^{\nu}}{r+\nu} x^{r+\nu}, & \text{при } 0 \leqslant x < 1, \\ 1 - (-1)^r (2r-1) C_{2r-2}^{r-1} \sum\limits_{\nu=0}^{r-1} C_{r-1}^{\nu} \dfrac{1}{r+\nu} x^{r+\nu}, & \text{при } -1 < x < 0 \end{cases} . \tag{16}$$

Тогда для любого действительного числа σ и интеграла

$$I_r(\sigma) = \int\limits_{-1}^{1} \rho_r(x) e^{2\pi i \sigma x} dx$$

выполняется оценка

$$|I_r(\sigma)| \leqslant \frac{B(r)}{\overline{\sigma}^{r+1}} \tag{17}$$

и функция $\rho_r(x)$ — весовая функция порядка $r+1$ с константой $B(r)$, где

$$B(r) = \frac{(2r-1)C_{2r-2}^{r-1}}{\pi(2\pi)^r} \sup_{|\sigma|>1} \left| \left(P_{r-1}(1) e^{2\pi i \sigma} - P_{r-1}(0) \right) - \int\limits_0^1 P_{r-1,r}(x) e^{2\pi i \sigma x} dx \right|,$$

и при $0 \leqslant \nu \leqslant r-1$ имеем:

$$\left(((1-x)x)^{r-1} \right)^{(\nu)} = ((1-x)x)^{r-1-\nu} P_{\nu}(x),$$

где

$$P_0(x) = 1,$$
$$P_{\nu+1}(x) = \nu(1-2x)P_{\nu}(x) + x(1-x)P_{\nu}'(x) \quad (\nu = 0, \ldots, r-2),$$
$$P_{r-1}(x) = \sum_{\nu=0}^{r-1} (-1)^{\nu} C_{r-1}^{\nu} \prod_{k=0}^{r-2} (r-1+\nu-k) x^{\nu},$$

и при $r \leqslant \nu \leqslant 2r-2$ *имеем:*

$$\left(((1-x)x)^{r-1}\right)^{(\nu)} = P_{r-1,\nu}(x), \quad P_{r-1,r}(x) = P'_{r-1}(x),$$
$$P_{r-1,\nu}(x) = \sum_{\mu=\nu+1-r}^{r-1} (-1)^{\mu} C_{r-1}^{\mu} \prod_{k=0}^{\nu-1} (r-1+\mu-k) x^{r-1+\mu-\nu} =$$
$$= P'_{r-1,\nu-1}(x) = P_{r-1}^{(\nu-r+1)}(x),$$
$$P_{r-1,2r-2}(x) = (-1)^{r-1}(2r-2)!.$$

Доказательство. См. [26]. □

Заметим, что лемма 5 является уточнением леммы 6, так как $\rho_1(x) = 1-|x|$ при $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

Из доказанной леммы следует, что функция $\rho_r(\vec{x})$, заданная равенством

$$\rho_r(\vec{x}) = \prod_{j=1}^{s} \rho_r(x_j), \tag{18}$$

является весовой функцией порядка $r+1$.

Лемма 7. *Для любого действительного* σ *и* $\gamma > 1$ *для величины* $\psi_{\gamma,r}(\sigma)$*, заданной равенством*

$$\psi_{\gamma,r}(\sigma) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \overline{m}^{\,-\gamma} (\overline{m+\sigma})^{-r},$$

выполняется неравенство

$$\psi_{\gamma,r}(\sigma) \leqslant \begin{cases} \dfrac{2\,(1+\zeta(\gamma)) + (1+2\zeta(\gamma))\,2^{\gamma}}{(\overline{\sigma})^{\gamma}} & \text{при } 1 < \gamma \leqslant r, \\ \dfrac{2\,(1+\zeta(r)) + (1+2\zeta(r))\,2^{r}}{(\overline{\sigma})^{r}} & \text{при } \gamma > r. \end{cases} \tag{19}$$

Доказательство. См. [26]. □

Лемма 8. *Для любого абсолютно сходящегося ряда* $\sum\limits_{\nu=-\infty}^{\infty} |\,u_\nu\,|$ *при* $\alpha > 1$ *справедливо неравенство*

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} |\,u_\nu\,|^{\alpha} \leqslant \left(\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} |\,u_\nu\,| \right)^{\alpha}. \tag{20}$$

Доказательство. См. [26]. □

3. Ряд Фурье для специальной весовой функции порядка 2

Согласно теореме 1 (см. стр. 207) для вычисления величины $S_{M(t),\vec{\rho}}(\vec{0})$ со специальной весовой функцией $\rho_r(\vec{x})$ порядка $r+1 \geqslant 2$ достаточно вычислить

$$S_{M(t),\vec{\rho}_r}(\vec{0}) = 1 + \sum_{\vec{x} \in \Lambda(t\cdot T(\vec{a}))}{}' \int_{-1}^{1} \dots \int_{-1}^{1} \rho_r(\vec{y}) e^{-2\pi i(\vec{y},\vec{x})} d\vec{y}, \tag{21}$$

где

$$\rho_r(\vec{x}) = \rho_r(x_1) \cdot \ldots \cdot \rho_r(x_s),$$

$$\rho_r(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } |x| \geqslant 1, \\ 1 - (2r-1)C_{2r-2}^{r-1} \sum\limits_{\nu=0}^{r-1} C_{r-1}^{\nu} \dfrac{(-1)^\nu}{r+\nu} x^{r+\nu}, & \text{при } 0 \leqslant x < 1, \\ 1 - (-1)^r (2r-1)C_{2r-2}^{r-1} \sum\limits_{\nu=0}^{r-1} C_{r-1}^{\nu} \dfrac{1}{r+\nu} x^{r+\nu}, & \text{при } -1 < x < 0. \end{cases}$$

Кроме того из доказательства теоремы 1 вытекает, что важную роль в рассматриваемых вопросах играет кратный ряд Фурье для функции

$$g_r(\vec{x}) = \begin{cases} \rho_r(\vec{x}^*) e^{2\pi i(\vec{x}^*, \vec{m})}, & \text{при } \vec{x} \in K_s(q), \\ g_r(\vec{y}), & \text{при } \vec{x} = \vec{y} + q\vec{n},\ \vec{y} \in K_s(q),\ \vec{n} \in \mathbb{Z}^s, \end{cases}$$

который имеет вид

$$g_r(\vec{x}) = \sum_{\vec{n}=-\infty}^{+\infty} c_r(\vec{n}) e^{2\pi i \frac{(\vec{n}, \vec{x})}{2q}},$$

где

$$c_r(\vec{n}) = (2q)^{-s} \int\limits_{K_s(q)} \int g_r(\vec{x}) e^{-2\pi i \frac{(\vec{n}, \vec{x})}{2q}} d\vec{x}. \tag{22}$$

Начиная с этого места для упрощения исследования будем рассматривать только весовую функцию $\rho_1(y) = 1 - |y|$ при $|y| \leqslant 1$.

Лемма 9. *Для интеграла*

$$I_1(x) = \int\limits_{-1}^{1} \rho_1(y) e^{-2\pi i y x} dy$$

справедливы равенства:

$$I_1(x) = \begin{cases} 1, & \textit{при } x = 0, \\ \frac{\sin^2 \pi x}{\pi^2 x^2}, & \textit{при } x \neq 0. \end{cases} \tag{23}$$

Доказательство. Действительно, при $x = 0$ по свойствам весовой функции имеем:

$$I_1(0) = \int\limits_{-1}^{1} \rho_1(y) dy = \int\limits_{0}^{1} \left(\rho_1(y) + \rho_1(y-1)\right) dy = \int\limits_{0}^{1} dy = 1.$$

Пусть $x \neq 0$, тогда для интеграла $I_1(x)$ справедливы преобразования

$$I_1(x) = \int\limits_0^1 \rho_1(y) e^{-2\pi i x y} dy + \int\limits_0^1 \rho_1(y-1) e^{-2\pi i x(y-1)} dy =$$
$$= \int\limits_0^1 (1-y) e^{-2\pi i x y} dy + \int\limits_0^1 y e^{-2\pi i x(y-1)} dy =$$
$$= \int\limits_0^1 e^{-2\pi i x y} dy + \left(e^{2\pi i x} - 1\right) \int\limits_0^1 y e^{-2\pi i x y} dy =$$
$$= \frac{e^{-2\pi i x} - 1}{-2\pi i x} + \left(e^{2\pi i x} - 1\right) \left(\frac{y e^{-2\pi i x y}}{-2\pi i x} \Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \frac{e^{-2\pi i x y}}{-2\pi i x} dy \right) =$$
$$= \frac{e^{-2\pi i x} - 1}{-2\pi i x} + \frac{1 - e^{-2\pi i x}}{-2\pi i x} + \left(1 - e^{2\pi i x}\right) \frac{e^{-2\pi i x y}}{(-2\pi i x)^2} \Big|_0^1 =$$
$$= \frac{\left(1 - e^{2\pi i x}\right)\left(1 - e^{-2\pi i x}\right)}{4\pi^2 x^2} = \frac{1 - \cos 2\pi x}{2\pi^2 x^2} = \frac{\sin^2 \pi x}{\pi^2 x^2}$$

и лемма полностью доказана. □

Замечание 1. *Так как*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 \pi x}{\pi^2 x^2} = 1,$$

то можно писать $I_1(x) = \frac{\sin^2 \pi x}{\pi^2 x^2}$ *для любого* x.

4. Тригонометрическая сумма алгебраической сетки со специальной весовой функцией порядка 2

Так как $I_1(x)$ — чётная функция, то лемму 5 можно существенно уточнить:

$$\int\limits_{-1}^1 (1 - |x|) e^{2\pi i \sigma x} dx = \frac{\sin^2 \pi \sigma}{\pi^2 \sigma^2}.$$

Отсюда и из теоремы 1 следует, что справедливо равенство

$$S_{M(t),\vec{\rho}_1}(\vec{m}) = \delta(\vec{m}) + \sum_{\vec{x} \in \Lambda(t \cdot T(\vec{a}))}{}' \prod_{\nu=1}^{s} \frac{\sin^2 \pi (m_\nu - x_\nu)}{\pi^2 (m_\nu - x_\nu)^2}. \tag{24}$$

При $\vec{m} = \vec{0}$ мы получаем

$$S_{M(t),\vec{\rho}_1}(\vec{0}) = 1 + \sum_{\vec{x} \in \Lambda(t \cdot T(\vec{a}))}{}' \prod_{\nu=1}^{s} \frac{\sin^2 \pi x_\nu}{\pi^2 x_\nu^2}. \tag{25}$$

Теорема 2. *При* $t \to \infty$ *справедлива асимптотическая формула*

$$S_{M(t),\vec{\rho}_1}(\vec{0}) = 1 + O\left(\frac{\ln^{s-1} \det \Lambda(t)}{(\det \Lambda(t))^2} \right). \tag{26}$$

Доказательство. Действительно, согласно лемме 5 имеем:

$$\left|S_{M(t),\vec{\rho}_1}(\vec{0})-1\right| \leqslant \sum_{\vec{x}\in\Lambda(t\cdot T(\vec{a}))}{}' \frac{1}{(\overline{x_1}\dots\overline{x_s})^2} = \zeta(\Lambda(t\cdot T(\vec{a}))|2).$$

Согласно известной асимптотической формуле для гиперболической дзета-функции алгебраической решётки (см. [27]) имеем:

$$\zeta_H(\Lambda(t)|\alpha) = C(\Lambda,\alpha)\frac{\ln^{s-1}(\det\Lambda(t))}{(\det\Lambda(t))^{\alpha}} + O\left(\frac{\ln^{s-2}(\det\Lambda(t))}{(\det\Lambda(t))^{\alpha}}\right), \tag{27}$$

где

$$C(\Lambda,\alpha) = \frac{2(\det\Lambda)^{\alpha}}{R(s-1)!}\sum_{(\omega)}|N(\omega)|^{-\alpha}, \qquad R \text{ — регулятор поля.}$$

Отсюда при $\alpha = 2$ следует утверждение теоремы. □

Доказанную теорему можно перенести на случай тригонометрической суммы алгебраических сеток с весами для произвольного вектора $\vec{m}$.

Теорема 3. *При $t\to\infty$ для произвольного вектора $\vec{m}\neq\vec{0}$ справедлива асимптотическая формула*

$$S_{M(t),\vec{\rho}_1}(\vec{m}) = O\left(\frac{(\overline{m_1}\dots\overline{m_s})^2\ln^{s-1}\det\Lambda(t)}{(\det\Lambda(t))^2}\right). \tag{28}$$

Доказательство. Действительно, согласно теореме 1 и лемме 5 имеем:

$$\left|S_{M(t),\vec{\rho}_1}(\vec{m})\right| \leqslant \sum_{\vec{x}\in\Lambda(t\cdot T(\vec{a}))}{}' \frac{1}{(\overline{m_1-x_1}\dots\overline{m_s-x_s})^2}.$$

Воспользуемся неравенством

$$\frac{1}{\overline{m-x}} \leqslant \frac{2\overline{m}}{\overline{x}},$$

которое доказывается непосредственно, получим

$$\left|S_{M(t),\vec{\rho}_1}(\vec{m})\right| \leqslant \sum_{\vec{x}\in\Lambda(t\cdot T(\vec{a}))}{}' \frac{4^s(\overline{m_1}\dots\overline{m_s})^2}{(\overline{x_1}\dots\overline{x_s})^2} = 4^s(\overline{m_1}\dots\overline{m_s})^2\zeta(\Lambda(t\cdot T(\vec{a}))|2).$$

Повторяя рассуждения из доказательства предыдущей теоремы, получим доказываемое утверждение. □

5. Заключение

Из теоремы 1, используя лемму 6 вместо леммы 5, можно доказать следующие теоремы:

Теорема 4. *При $t\to\infty$ справедлива асимптотическая формула*

$$S_{M(t),\vec{\rho}_r}(\vec{0}) = 1 + O\left(\frac{\ln^{s-1}\det\Lambda(t)}{(\det\Lambda(t))^{r+1}}\right). \tag{29}$$

Теорема 5. *При $t\to\infty$ для произвольного вектора $\vec{m}\neq\vec{0}$ справедлива асимптотическая формула*

$$S_{M(t),\vec{\rho}_r}(\vec{m}) = O\left(\frac{(\overline{m_1}\dots\overline{m_s})^{r+1}\ln^{s-1}\det\Lambda(t)}{(\det\Lambda(t))^{r+1}}\right). \tag{30}$$

В заключение выражаю благодарность научному руководителю профессору Н. М. Добровольскому за постановку задачи, постоянное внимание и полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бабенко К. И. Основы численного анализа. М.: Наука, 1986.

2. Бахвалов Н. С. О приближенном вычислении кратных интегралов // Вестн. Моск. ун-та, 1959. № 4. С. 3–18.

3. Бочарова (Добровольская) Л. П. Алгоритмы поиска оптимальных коэффициентов // Чебышевский сборник 2007 Т. 8, вып. 1(21). Тула, Из-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого. С. 4 — 109.

4. А. С. Герцог, Е. Д. Ребров, Е. В. Триколич О методе К. К. Фролова в теории квадратурных формул // Чебышевский сб. — Т. X. Вып. 2(30). — Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2009. — С. 10–54.

5. А. С. Герцог Численное вычисление четырехкратных интегралов по методу Фролова с использованием алгебраических сеток биквадратичного поля Дирихле $\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. Вып. 3. — Тула: Изд-во ТулГУ, 2011. — С. 22–30.

6. А. С. Герцог Параметризация четырехмерной сетки биквадратичного поля Дирихле // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. №23(188). Вып. 5. Белгород: Изд-во БелГУ, 2011. С. 41–53.

7. А. С. Герцог ПОИВС ТМК: Биквадратичные поля и квадратурные формулы // Материалы международной научно-практической конференции "Многомасштабное моделирование структур и нанотехнологии" посвященной 190-летию со дня рождения академика Пафнутия Львовича Чебышёва, столетию со дня рождения академика Сергея Васильевича Вонсовского и 80-летию со дня рождения член-корреспондента Виктора Анатольевича Буравихина. Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2011. С. 242–247.

8. Добровольская Л. П., Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н., Огородничук Н. К., Ребров Е. Д., Реброва И. Ю. Некоторые вопросы теоретико-числового метода в приближенном анализе // Труды X международной конференции "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения" Ученые записки Орловского государственного университета. 2012. № 6. Часть 2. С. 90 — 98.

9. Добровольская Л. П., Добровольский М. Н. , Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н. Гиперболические дзета-функции сеток и решёток и вычисление оптимальных коэффициентов // Чебышевский сборник 2012 Т. 13. Вып. 4(44). Тула, Из-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого. С. 4 — 107.

10. Л. П. Добровольская, Н. М. Добровольский, А. С. Симонов О погрешности приближенного интегрирования по модифицированным сеткам // Чебышевский сборник 2008 Т. 9, вып. 1(25). Тула, Из-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого. С. 185 — 223.

11. Н. М. Добровольский Оценки отклонений обобщенных параллелепипедальных сеток. Деп. в ВИНИТИ 24.08.84. № 6089–84.

12. Н. М. Добровольский Гиперболическая дзета функция решёток. Деп. в ВИНИТИ 24.08.84. № 6090–84.

13. Н. М. Добровольский О квадратурных формулах на классах $E_s^\alpha(c)$ и $H_s^\alpha(c)$. Деп. в ВИНИТИ 24.08.84. № 6091–84.

14. Н. М. Добровольский Теоретико–числовые сетки и их приложения. Дис. ... канд. физ.–мат. наук. Тула, 1984.

15. Н. М. Добровольский Теоретико–числовые сетки и их приложения. Автореф. дис. ... канд. физ.–мат. наук. Москва, 1985.

16. Н. М. Добровольский Теоретико–числовые сетки и их приложения // Теория чисел и ее приложения: Тез. докл. Всесоюз. конф. Тбилиси, 1985. С. 67–70.

17. Коробов Н. М. Вычисление кратных интегралов методом оптимальных коэффициентов // Вестн. Моск. ун-та, 1959. № 4. С. 19 — 25.

18. Коробов Н. М. О приближенном вычислении кратных интегралов // ДАН СССР. 1959. Т. 124, № 6. С. 1207 — 1210.

19. Коробов Н. М. Свойства и вычисление оптимальных коэффициентов // ДАН СССР. 1960. Т. 132. № 5. С. 1009—1012.

20. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. М.: Физматгиз, 1963.

21. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. (второе издание) М.: МЦНМО, 2004.

22. Локуциевский О. В., Гавриков М. Б. Начала численного анализа. М.: ТОО Янус, 1995.

23. Огородничук Н. К, Ребров Е. Д. Об алгоритме численного интегрирования с правилом остановки // Материалы 7 международной конференции <Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения>. 2010. Тула, Из-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого. С. 153 — 158.

24. Огородничук Н. К, Ребров Е. Д. ПОИВС ТМК: Алгоритмы интегрирования с правилом остановки // Международной научно-практической конференции "Многомасштабное моделирование структур и нанотехнологии, посвященной 190-летию со дня рождения академика Пафнутия Львовича Чебышёва, столетию со дня рождения академика Сергея Васильевича Вонсовского и 80-летию со дня рождения член-корреспондента Виктора Анатольевича Буравихина" Тула, Из-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого. 2011. С. 153 — 158.

25. Ребров Е. Д. Алгоритм Добровольской и численное интегрирование с правилом остановки // Чебышевский сборник 2009 Т. 10, вып. 1(29). Тула, Из-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого. С. 65–77.

26. Ребров Е. Д. Квадратурные формулы с модифицированными алгебраическими сетками // Чебышевский сборник 2012 Т. 13, вып. 3(43). Тула, Из-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого. С. 53–90.

27. Реброва И. Ю., Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н., Балаба И. Н., Есаян А. Р., Басалов Ю. А. Теоретико-числовой метод в приближённом анализе и его реализация в ПОИВС «ТМК»: Моногр. В 2 ч. Под. ред. Н. М. Добровольского. — Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2016. – Ч. I. – 232 с.

28. Фролов К. К. Оценки сверху погрешности квадратурных формул на классах функций // ДАН СССР. 231. 1976. № 4. С. 818–821.

29. Фролов К. К. Квадратурные формулы на классах функций. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: ВЦ АН СССР. 1979.

30. Nikolay M. Dobrovolskiy, Larisa P. Dobrovolskaya, Nikolay N. Dobrovolskiy, Nadegda K. Ogorodnichuk, and Evgenii D. Rebrov Algorithms fot computing optimal coefficients // Book of abstracts of the International scientific conference "Computer Algebra and Information Technology" , Odessa, August 20—26, 2012. p. 22 — 24.

REFERENCES

1. Babenko, K.I. 1986, Osnovy chislennogo analiza [Fundamentals of numerical analysis], Nauka, Moscow, Russia.

2. Bakhvalov, N.S. 1959, “On approximate computation of multiple integrals”, Vestnik Moskovskogo universiteta, no. 4, pp. 3–18.

3. Bocharova (Dobrovol’skaya), L.P. 2007, “Algorithms for finding the optimal coefficients”, Chebyshevskij sbornik, vol. 8, no. 1(21), pp. 4–109.

4. Gertsog, A.S., Е. Д. Ребров, Е. В. Триколич О методе К. К. Фролова в теории квадратурных формул // Чебышевский сб. — Т. X. Вып. 2(30). — Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2009. — С. 10–54.

5. Gertsog, A.S. Численное вычисление четырехкратных интегралов по методу Фролова с использованием алгебраических сеток биквадратичного поля Дирихле $\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. Вып. 3. — Тула: Изд-во ТулГУ, 2011. — С. 22–30.

6. Gertsog, A.S. Параметризация четырехмерной сетки биквадратичного поля Дирихле // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. №23(188). Вып. 5. Белгород: Изд-во БелГУ, 2011. С. 41–53.

7. Gertsog, A.S. ПОИВС ТМК: Биквадратичные поля и квадратурные формулы // Материалы международной научно-практической конференции "Многомасштабное моделирование структур и нанотехнологии" посвященной 190-летию со дня рождения академика Пафнутия Львовича Чебышёва, столетию со дня рождения академика Сергея Васильевича Вонсовского и 80-летию со дня рождения член-корреспондента Виктора Анатольевича Буравихина. Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2011. С. 242–247.

8. Dobrovol’skaya, L. P., Dobrovol’skii, N. M., Dobrovol’skii, N. N., Ogorodnichuk, N. K., Rebrov, E. D. & Rebrova, I. YU. 2012, “Some questions of the number-theoretic method in the approximate analysis”, Trudy X mezhdunarodnoj konferentsii “Algebra i teoriya chisel: sovremennye problemy i prilozheniya” Uchenye zapiski Orlovskogo gosudarstvennogo universiteta [Proceedings of the X international conference "Algebra and number theory: modern problems and applications"scientific notes of Orel state University], no. 6, part 2, pp. 90-98.

9. Dobrovol’skaya, L. P., Dobrovol’skii, M. N., Dobrovol’skii, N. M. & Dobrovol’skii, N. N. 2012, “The hyperbolic Zeta function of grids and lattices, and calculation of optimal coefficients”, Chebyshevskij sbornik, vol. 13, no. 4(44), pp. 4–107.

10. Dobrovol’skaya, L. P., Dobrovol’skii, N. M. & Simonov, A.S. 2008, “On the error of approximate integration over modified grids”, Chebyshevskij sbornik, vol. 9, no. 1(25), pp. 185–223.

11. Dobrovol'skii, N. M. 1984, "Evaluation of generalized variance parallelepipedal grids", Dep. v VINITI, no. 6089–84.

12. Dobrovol'skii, N. M. 1984, "The hyperbolic Zeta function of lattices", Dep. v VINITI, no. 6090–84.

13. Dobrovol'skii, N. M. 1984, "On quadrature formulas in classes $E_s^\alpha(c)$ and $H_s^\alpha(c)$", Dep. v VINITI, no. 6091–84.

14. Dobrovol'skii, N. M. 1984, "Number-theoretic meshes and their applications", Ph.D. Thesis, Tula, Russia.

15. Dobrovol'skii, N. M. 1985, "Number-theoretic meshes and their applications", Abstract of Ph.D. dissertation, Moscow State Pedagogical University, Moscow, Russia.

16. Dobrovol'skii, N. M. 1985, "Number-theoretic meshes and their applications", Teoriya chisel i ee prilozheniya: Tezisy dokladov Vsesoyuznoj konferentsii, Tbilisi, USSR, pp. 67–70.

17. Korobov, N.M. 1959, "The evaluation of multiple integrals by method of optimal coefficients", Vestnik Moskovskogo universiteta, no. 4, pp. 19–25.

18. Korobov, N.M. 1959, "On approximate computation of multiple integrals", Doklady Akademii nauk SSSR, vol. 124, no. 6, pp. 1207–1210.

19. Korobov, N.M. 1960, "Properties and calculation of optimal coefficients", Doklady Akademii nauk SSSR, vol. 132, no. 5, pp. 1009–1012.

20. Korobov, N.M. 1963, Teoretiko-chislovye metody v priblizhennom analize [Number-theoretic methods in approximate analysis], Fizmat-giz, Moscow, Russia.

21. Korobov, N.M. 2004, Teoretiko-chislovye metody v priblizhennom analize [Number-theoretic methods in approximate analysis], 2nd ed, MTSNMO, Moscow, Russia.

22. Lokutsievskij, O. V. & Gavrikov, M. B. 1995, Nachala chislennogo analiza [The beginning of numerical analysis], TOO "Yanus", Moscow, Russia.

23. Огородничук Н. К, Ребров Е. Д. Об алгоритме численного интегрирования с правилом остановки // Материалы 7 международной конференции <Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения>. 2010. Тула, Из-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого. С. 153 — 158.

24. Огородничук Н. К, Ребров Е. Д. ПОИВС ТМК: Алгоритмы интегрирования с правилом остановки // Международной научно-практической конференции "Многомасштабное моделирование структур и нанотехнологии, посвященной 190-летию со дня рождения академика Пафнутия Львовича Чебышёва, столетию со дня рождения академика Сергея Васильевича Вонсовского и 80-летию со дня рождения член-корреспондента Виктора Анатольевича Буравихина" Тула, Из-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого. 2011. С. 153 — 158.

25. Ребров Е. Д. Алгоритм Добровольской и численное интегрирование с правилом остановки // Чебышевский сборник 2009 Т. 10, вып. 1(29). Тула, Из-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого. С. 65–77.

26. Ребров Е. Д. Квадратурные формулы с модифицированными алгебраическими сетками // Чебышевский сборник 2012 Т. 13, вып. 3(43). Тула, Из-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого. С. 53 — 90.

27. Реброва И. Ю., Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н., Балаба И. Н., Есаян А. Р., Басалов Ю. А. Теоретико-числовой метод в приближённом анализе и его реализация в ПОИВС «ТМК»: Моногр. В 2 ч. Под. ред. Н. М. Добровольского. — Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2016. – Ч. I. – 232 с.

28. Frolov, K.K. 1976, “Upper bounds on the error of quadrature formulas on classes of functions”, Doklady Akademii nauk SSSR, vol. 231, no.4, pp. 818–821.

29. Frolov, K.K. 1979, Quadrature formulas on classes of functions, Ph.D. Thesis, Vychislitel'nyj tsentr Akademii Nauk SSSR, Moscow, USSR.

30. Nikolay M. Dobrovolskiy, Larisa P. Dobrovolskaya, Nikolay N. Dobrovolskiy, Nadegda K. Ogorodnichuk, and Evgenii D. Rebrov Algorithms fot computing optimal coefficients // Book of abstracts of the International scientific conference "Computer Algebra and Information Technology" , Odessa, August 20—26, 2012. p. 22 — 24.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 19. Выпуск 1

УДК 539.3 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-1-220-237

Рассеяние звуковых волн упругим эллипсоидом с неоднородным покрытием в полупространстве с идеальной поверхностью [1]

Скобельцын Сергей Алексеевич — кандидат физико-математических наук, кафедра прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет.
e-mail: skbl@rambler.ru

Аннотация

Представлено решение задачи дифракции плоской звуковой волны на упругом эллипсоиде E с внешним слоисто-неоднородным слоем. Эллипсоид находится в полупространстве, заполненном идеальной жидкостью. Граница полупространства П является акустически жесткой или акустически мягкой поверхностью.

Для решения область, занятая жидкостью, расширена до полного пространства. Введено дополнительное препятствие, являющееся копией E, расположенное зеркально по отношению к плоскости П. Добавление второй падающей плоской волны обеспечивает выполнение того условия в точках плоскости П, которое соответствует типу границы полупространства в начальной постановке задачи. Таким образом, задача сводится к задаче о рассеянии двух плоских звуковых волн на двух эллипсоидах в неограниченном пространстве.

Решение проводится на основе линейной теории упругости и модели распространения малых возмущений в идеальной жидкости. Во внешней части окружающей среды решение ищется аналитически в форме разложения по сферическим гармоникам и функциям Бесселя. В шаровой области, включающей два эллипсоида и прилегающий слой жидкости, используется метод конечных элементов (МКЭ).

Представлены результаты расчета диаграмм направленности рассеянного звукового поля в дальней зоне, которые показывают влияние геометрических и материальных параметров эллипсоида на дифракцию звука.

Ключевые слова: рассеяние звуковых волн, полупространство, неоднородный упругий эллипсоид, метод конечных элементов.

Библиография: 32 названия.

Для цитирования:
С. А. Скобельцын. Рассеяние звуковых волн упругим эллипсоидом с неоднородным покрытием в полупространстве с идеальной поверхностью // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, вып. 1, С. 220–254.

[1] Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 18-11-00199).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 19. No. 1

UDC 539.3 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-1-220-237

Scattering of sound waves by an elastic ellipsoid with an inhomogeneous coating in the half-space with ideal surface

Skobel'tsyn Sergey Alekseevich — candidate of physical and mathematical sciences, department of applied mathematics and computer science, Tula State University.
e-mail: skbl@rambler.ru

Abstract

The solution of the diffraction problem for a plane sound wave on an elastic ellipsoid E with an outer inhomogeneous layer is presented. The ellipsoid is in a half-space filled with an ideal fluid. The boundary of a half-space Π is an acoustically rigid or acoustically soft surface.

To obtain a solution, the area occupied by the liquid is expanded to full space. An additional scattering obstacle is introduced. This obstacle is a copy of E, located mirror-wise with respect to the plane Π. A second incident plane wave is also added. This wave ensures the fulfillment of that condition at the points of the plane Π, which corresponds to the type of the half-space boundary in the initial formulation of the problem. Thus, the problem is transformed into the problem of scattering of two plane sound waves on two ellipsoids in unbounded space.

The solution is based on the linear theory of elasticity and the model of propagation of small vibrations in an ideal fluid. In the outer part of the environment, the solution is sought analytically in the form of an expansion in spherical harmonics and Bessel functions. In the spherical region, which includes two ellipsoids and an adjacent layer of liquid, the finite element method (FEM) is used.

The results of the calculation of the directivity patterns of the scattered sound field in the far zone are presented. These dependences show the influence of the geometric and material parameters of the ellipsoid on the diffraction of sound.

Keywords: scattering of sound waves, half-space, inhomogeneous elastic ellipsoid, finite element method.

Bibliography: 32 titles.

For citation:
S. A. Skobel'tsyn, 2018, "Scattering of sound waves by an elastic ellipsoid with an inhomogeneous coating in the half-space with ideal surface" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 1, pp. 220–237.

1. Введение

Решение задачи дифракции звуковых волн на упругом теле существенно зависит от формы тела и свойств его материала. Полученное решение задачи дифракции может быть использовано для идентификации параметров упругого тела. Такие решения могут быть использованы при разработке методов исследования в ультразвуковой диагностике, дефектоскопии и гидроакустике.

Известно немного эффективных решений для задачи рассеяния звуковых волн объектами в форме эллипсоида. В статье [1] предложено решение скалярного уравнения Гельмгольца на основе системы функций Ламе, которые возникают в результате применения метода разделения переменных в ортогональной эллипсоидальной системе координат. Однако аппарат функций Ламе [2] и алгоритмы их вычисления разработаны не так полно, как для многих других специальных функций, поэтому их применение для реальных расчетов до сих пор является проблематичным.

Много работ посвящено исследованию дифракции звука на эллипсоидах вращения – сфероидах. Дифракция звуковых волн на упругих однородных сфероидах изучалась в работах [3, 4, 5, 6, 7, 8]. В [9] рассматривался упругий неоднородный сфероидальный рассеиватель.

Большая часть задач о рассеянии звука трехосными эллипсоидальными объектами решена с помощью приближенных аналитических или численных методов. В работе [10] решается задача о рассеянии звуковых волн на эллипсоидальных полостях в жидкости с помощью метода T-матриц. Метод T-матриц, предложенный П. Уотерманом [11], широко используется для решения многих задач дифракции звуковых и упругих волн на объектах сложной формы [12, 4, 13]. Задача о рассеянии звука жидким сфероидом решается в работе [14]. В статьях [15, 16] рассматривается отражение звука многослойными эллипсоидами из акустического материала с жестким или мягким включением. Рассеяние сферической волны малым жестким сфероидом изучается в [17]. С использованием метода граничных интегральных уравнений в работе [18] решена задача о рассеянии звука эллипсоидом, заполненным акустической средой. В статье [19] рассматривается задача о рассеянии звуковых волн эллипсоидальной оболочкой.

Широкие возможности для исследования задач дифракции дает использование метода конечных элементов [20, 21, 22]. В монографии [22] подробно изложены различные аспекты применения МКЭ при решении задач о рассеянии звука объектами различного типа: жесткими, мягкими, упругими. В случае содержащей среды неограниченной из вне предлагается использовать искусственную внешнюю границу (artificial boundary), на которой формируются так называемые условия поглощения или “бесконечные” элементы, обеспечивающие выполнение условий излучения на бесконечности для потенциала скоростей в рассеянной волне. В работах автора [23, 24] используется подход, в котором во внешней области решение представляется в виде разложения по ортогональной системе волновых функций. Поэтому искусственная внешняя граница рассматривается как поверхность, на которой устанавливаются обычные граничные условия согласования звуковых колебаний в двух областях жидкости: внешней (с аналитическим представлением решения) и внутренней, в которой для решения используется МКЭ.

В данной работе представлено решение задачи об отражении плоской звуковой волны упругим эллипсоидом с внешним неоднородным слоем с использованием метода конечных элементов. Предполагается, что эллипсоид расположен вблизи плоской поверхности идеальной жидкости. Сама граница жидкости является жесткой или идеально мягкой. Такого рода задачи решались для однородных тел и тел, имеющих другую форму, [25, 26, 27, 28, 24]. Здесь, как и в указанных работах используется метод замены границы полупространства на симметрично расположенную копию препятствия и решения задачи с двумя телами в неограниченной области.

2. Постановка задачи

Пусть у границы полупространства П, заполненного идеальной жидкостью с плотностью ρ_0 и скоростью звука c_0 находится упругий объект E, внутренняя (основная) часть которого – упругий однородный эллипсоид с полуосями a, b, c, а внешняя – неоднородный упругий слой толщины h. Заметим, что в общем случае поверхность E не является эллипсоидальной, поскольку от поверхности эллипсоида основной части она отстоит на фиксированную величину h. Считается заданным d – расстояние от центра эллипсоида O_1 до П. Также известны модули упругости Ламе и плотности для однородной части тела – λ_1, μ_1, ρ_1, и для внешнего слоя – $\lambda(\mathbf{r})$, $\mu(\mathbf{r})$, $\rho(\mathbf{r})$, где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки пространства. Граница полупространства является идеально жесткой или идеально мягкой. На тело набегает гармоническая плоская звуковая волна с потенциалом смещения

$$\Psi_0 = \exp[i(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} - \omega t)], \tag{1}$$

где $\mathbf{k}_0$ — волновой вектор падающей волны ($|\mathbf{k}_0| = k_0 = \omega/c_0$); ω — круговая частота; t — время. Далее множители $\exp(-i\omega t)$ у величин, зависящих от времени будем опускать. Без ограничения общности полагается $|\Psi_0| = 1$.

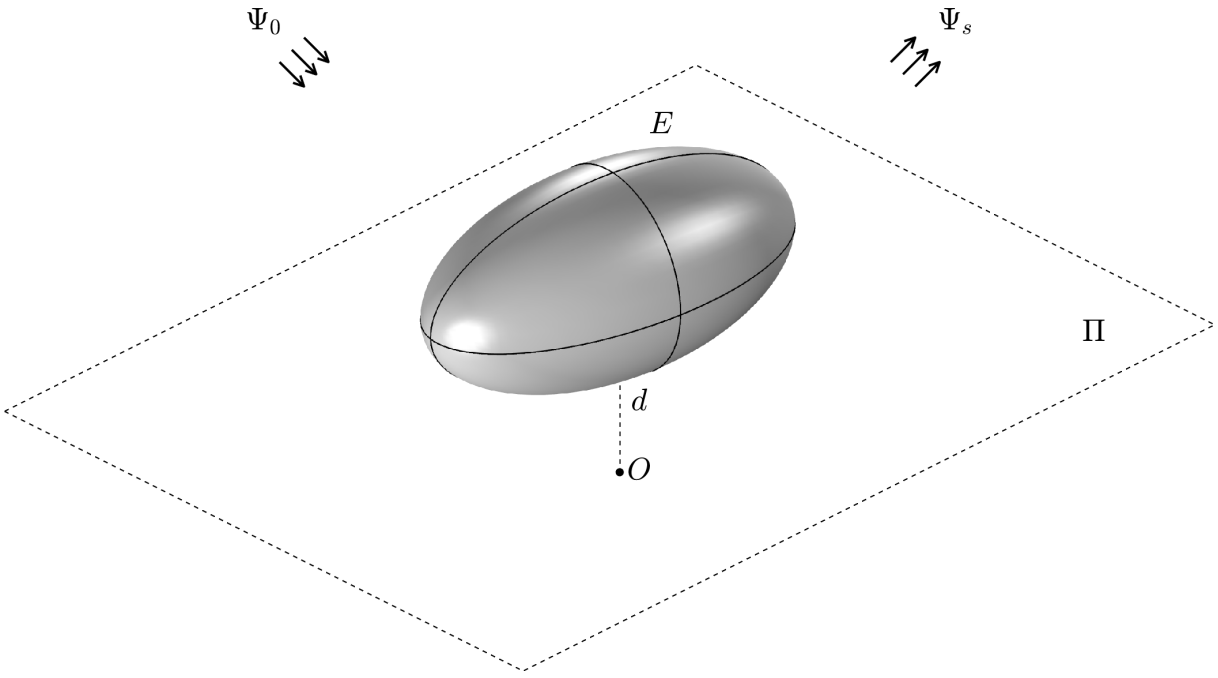

Рис. 1: Геометрия задачи

Геометрическая схема задачи представлена на рис. 1. Символом Ψ_s на нем условно показан потенциал смещений в рассеянной волне, который требует определения в задаче. Точка O на рисунке — проекция центра эллипсоида на плоскость П.

Введем глобальную ортогональную декартову систему координат x, y, z так, чтобы ее начало было в точке O, а плоскость П совпадала с координатной поверхностью $z = 0$. Будем считать, что направление вектора $\mathbf{k_0}$ в (1) задается углом θ_0 между осью z и $\mathbf{k_0}$, а также углом φ_0 между осью x и проекцией $\mathbf{k_0}$ на плоскость П. Тогда в системе x, y, z волновой вектор можно записать в виде $\mathbf{k}_0 = (k_0 \sin\theta_0 \cos\varphi_0, k_0 \sin\theta_0 \sin\varphi_0, k_0 \cos\theta_0)$. Центр эллипсоида O_1 будет иметь координаты $(0, 0, d)$. Также введем локальную систему координат x_1, y_1, z_1 с началом в точке O_1 так, чтобы уравнение поверхности Γ_1 однородной части рассеивателя

имело каноническую форму

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}+\frac{z_1^2}{c^2}=1. \tag{2}$$

Каждой точке $M(x_1,y_1,z_1)$ поверхности Γ_1 будет соответствовать точка внешней поверхности тела Γ_1' с локальными координатами

$$x_1'=x_1+hn_x,\quad y_1'=y_1+hn_y,\quad z_1'=z_1+hn_z, \tag{3}$$

где n_x,n_y,n_z — компоненты единичной внешней нормали $\mathbf{n}$ к поверхности Γ_1 в точке M в системе координат x_1, y_1, z_1. Значения n_x, n_y, n_z зависят от параметров a, b, c и координат (x_1,y_1,z_1) следующим образом:

$$n_x=x_1b^2c^2e,\quad n_y=y_1a^2c^2e,\quad n_z=z_1a^2b^2e,$$

где $e=(x_1^2b^4c^4+y_1^2a^4c^4+z_1^2a^4b^4)^{1/2}$.

Введем параметр q – расстояние от поверхности Γ_1 внутренних точек неоднородного упругого слоя тела E. Тогда любую точку $(x_1',\,y_1',\,z_1')$ внутри этого слоя по аналогии с (3) можно представить в виде

$$x_1'=x_1+qn_x,\quad y_1'=y_1+qn_y,\quad z_1'=z_1+qn_z, \tag{4}$$

где $0\leqslant q\leqslant h$.

Ориентацию осей локальной системы координат x_1, y_1, z_1 по отношению к глобальной x, y, z будем задавать углами Эйлера α, β, γ, схемы (3,2,3) так, что они связаны выражениями:

$$\begin{aligned}
x=&(\cos(\alpha)\cos(\beta)\cos(\gamma)-\sin(\alpha)\sin(\gamma))x_1-\\
&-(\cos(\alpha)\cos(\beta)\sin(\gamma)+\sin(\alpha)\cos(\gamma))y_1+\cos(\alpha)\sin(\beta)z_1,\\
y=&(\sin(\alpha)\cos(\beta)\cos(\gamma)+\cos(\alpha)\sin(\gamma))x_1+\\
&+(\sin(\alpha)\cos(\beta)\sin(\gamma)-\cos(\alpha)\cos(\gamma))y_1+\sin(\alpha)\sin(\beta)z_1,\\
z=&-\sin(\beta)\cos(\gamma)x_1+\sin(\beta)\sin(\gamma)y_1+\cos(\beta)z_1.
\end{aligned}$$

Эти углы Эйлера будем трактовать как углы поворота эллипсоида при задании его ориентации по отношению к поверхности Π, точнее, – по отношению к системе x, y, z.

Схематично, геометрия задачи после введения систем координат представлена на рис. 2. Упругое тело на нем представлено сечениями поверхности E координатными плоскостями системы координат x_1, y_1, z_1. На осях x_1, y_1, z_1 указаны точки $a'=a+h$, $b'=b+h$, $c'=c+h$.

Обозначим области, занимаемые различными средами так: Ω_0 — область полупространства $z>0$, занятая идеальной жидкостью; Ω_1 — область эллипсоида, занятая однородной упругой средой $(x_1^2/a^2+y_1^2/b^2+z_1^2/c^2\leqslant 1)$; Ω_1' — неоднородный слой упругого препятствия $(x_1'=x_1+qn_x,\,y_1'=y_1+qn_y,\,z_1'=z_1+qn_z,\quad (x_1,y_1,z_1)\in\Gamma_1,\quad 0\leqslant q\leqslant h)$.

В области Ω_0 движение частиц идеальной жидкости определяется потенциалами смещений в падающей Ψ_0 и рассеянной Ψ_s волнах. Смещение $\mathbf{u}_0$ и давление p_0 в области Ω_0 определяются через эти потенциалы так [30]:

$$\mathbf{u}_0=\operatorname{grad}(\Psi_0+\Psi_s),\qquad p_0=\rho_0\omega^2(\Psi_0+\Psi_s). \tag{5}$$

При этом потенциал Ψ_s должен удовлетворять уравнению Гельмгольца [30]

$$\Delta\Psi_s+k_0^2\Psi_s=0 \tag{6}$$

и условиям излучения на бесконечности:

$$\left(\frac{\partial\Psi_s}{\partial r}-ik_0\Psi_s\right)_{r\to\infty}=O\left(\frac{1}{r^2}\right),\qquad \Psi_s|_{r\to\infty}=O\left(\frac{1}{r}\right), \tag{7}$$

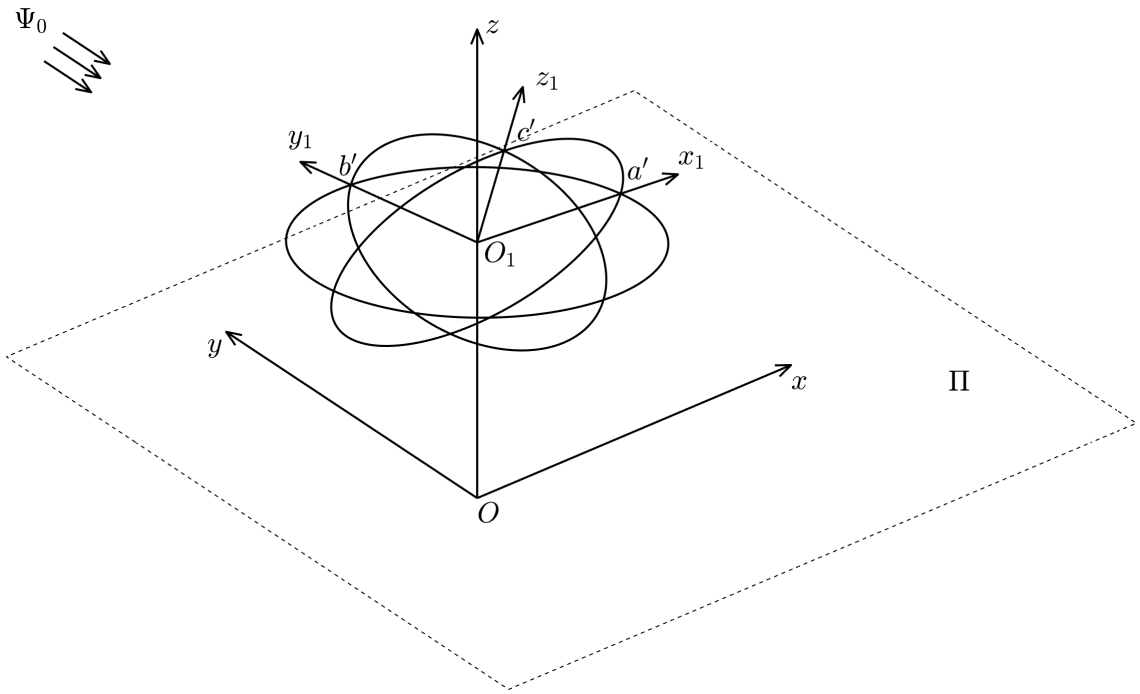

Рис. 2: Введение систем координат

где $r = |\mathbf{r}|$.

Предполагается, что движение частиц в препятствии подчиняется законам линейной теории упругости [31]. Обозначим вектор смещения и тензор напряжения в области однородного эллипсоида $\mathbf{u_1}$ и σ_1 соответственно. Тогда гармонические колебания частиц в однородной части тела E описываются уравнениями движения

$$\operatorname{Div}\sigma_1 = -\rho_1\omega^2\mathbf{u_1}, \tag{8}$$

где $\operatorname{Div}\sigma_1$ — первый инвариант ковариантной производной тензора напряжений.

Аналогично в неоднородном слое препятствия уравнения движения будут иметь вид

$$\operatorname{Div}\sigma = -\rho\omega^2\mathbf{u}, \tag{9}$$

где $\mathbf{u}$ и σ — вектор смещения и тензор напряжения в Ω_1'.

Тензор напряжения выражается через компоненты вектора смещения посредством закона Гука, так что уравнения (8), (9) можно рассматривать как системы дифференциальных уравнений второго порядка относительно компонент векторов смещения $\mathbf{u_1}$ и $\mathbf{u}$.

На поверхности Γ_1 соединения неоднородного слоя и однородного эллипсоида должны быть непрерывными смещения и вектор напряжений:

$$\mathbf{u}|_{\Gamma_1} = \mathbf{u_1}, \quad \sigma_{nn}|_{\Gamma_1} = \sigma_{1nn}, \quad \sigma_{n\tau}|_{\Gamma_1} = \sigma_{1n\tau} \quad (\tau = 1, 2), \tag{10}$$

где σ_{nj}, σ_{1nj} — компоненты скалярных произведений $\sigma \cdot \mathbf{n}$, $\sigma_1 \cdot \mathbf{n}$; индекс τ определяет два ортогональны касательных к Γ_1 направления.

На внешней поверхности тела – Γ_1' – поверхности соприкосновения жидкости и упругого материала должны быть непрерывными нормальная компонента вектора смещения и вектор напряжений:

$$u_n|_{\Gamma_1'} = u_{0n}, \quad \sigma_{nn}|_{\Gamma_1'} = p_0, \quad \sigma_{n\tau}|_{\Gamma_1'} = 0 \quad (\tau = 1, 2); \tag{11}$$

здесь индекс n соответствует проекции на нормаль (индекс τ на касательные) уже к поверхности Γ_1'; величины u_{0n}, p_0 выражаются через потенциалы Ψ_0, Ψ_s в соответствии с (5).

Наконец, на границе полупространства Π в зависимости от ее типа должно выполнятся условие

$$a) \quad u_{0z}|_{z=0} = 0, \quad \text{или} \quad b) \quad p_0|_{z=0} = 0, \tag{12}$$

где случай a) соответствует варианту жесткой поверхности Π, а b) – абсолютно мягкой.

Таким образом, требуется решить уравнения (6), (8), (9) с учетом граничных условий (10), (11), (12) и условий излучения (7).

3. Решение задачи

Для решения задачи применим подход, использованный в [29] при решении задачи о рассеянии звука сфероидом в присутствии подстилающей поверхности. Исключим из рассмотрения границу полупространства Π, расширив область Ω_0 до полного пространства, введя в рассмотрение второй рассеиватель E', являющийся зеркальным отражением исходного E относительно плоскости $z = 0$, и вторую падающую плоскую волну Ψ_1, распространяющуюся в направлении волнового вектора $\mathbf{k}_1 = (k_0 \sin\theta_0 \cos\varphi_0,\ k_0 \sin\theta_0 \sin\varphi_0,\ -k_0 \cos\theta_0)$ (см. рис. 3).

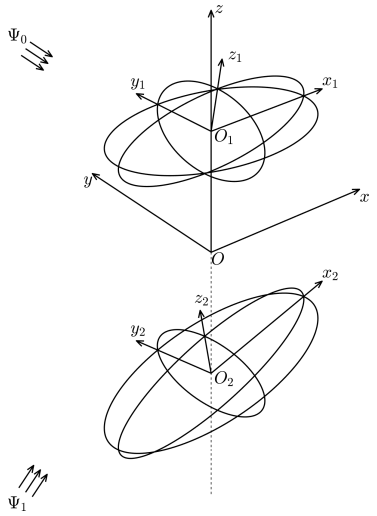

Рис. 3: Введение второго тела

На рисунке O_2 — центр тела E' (глобальные координаты – $(0, 0, -d)$), x_2, y_2, z_2 — локальная система координат с началом в точке O_2 в которой поверхность однородной части E' имеет вид, аналогичный (2). Эту поверхность будем обозначать Γ_2, область второго эллипсоида – Ω_2. Внешнюю поверхность тела E', которая определяется соотношениями, аналогичными (3), обозначим Γ_2', а область неоднородного слоя между Γ_2 и Γ_2' – Ω_2'.

В случае абсолютно жесткой плоскости Π потенциал смещений во второй падающей плоской волне должен быть равен [26]

$$\Psi_1 = \exp[i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r})].$$

В случае акустически мягкой плоскости потенциал Ψ_1 должен иметь вид

$$\Psi_1 = -\exp[i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r})].$$

Тогда граничные условия (12) на плоскости $z = 0$ будут выполнены автоматически.

Таким образом, исходная задача сводится к задаче дифракции двух плоских волн на двух идентичных телах, находящихся в безграничном пространстве Ω_0, заполненном однородной идеальной жидкостью.

В силу линейной постановки задачи следует найти решение задачи дифракции каждой из двух плоских волн на двух эллипсоидах, а затем полученные результаты просуммировать.

Рассмотрим корректировку математической постановки задачи о дифракции плоской звуковой волны Ψ_0 на двух упругих эллипсоидах с неоднородными внешними слоями. Уравнения (8), (9) должны быть продублированы для областей Ω_2 и Ω_2' соответственно. Будем обозначать векторы смещений и тензоры напряжений в областях Ω_2 и Ω_2' через $\mathbf{u}_2$, σ_2 и $\mathbf{u}'$, σ'.

На поверхностях Γ_2, Γ_2' должны быть введены граничные условия, подобные (10), (11):

$$\mathbf{u}'\big|_{\Gamma_2} = \mathbf{u_2}, \quad \sigma'_{nn}\big|_{\Gamma_2} = \sigma_{2nn}, \quad \sigma'_{n\tau}\big|_{\Gamma_2} = \sigma_{2n\tau}; \tag{13}$$

$$u'_n\big|_{\Gamma_2'} = u_{0n}, \quad \sigma'_{nn}\big|_{\Gamma_2'} = p_0, \quad \sigma'_{n\tau}\big|_{\Gamma_2'} = 0 \quad (\tau = 1, 2), \tag{14}$$

где индексы n и τ в (13) определяют нормаль и касательные к Γ_2, а в (14) – к Γ_2'.

В новой постановке условия (7) сохраняют свой вид, а условия (12) исключаются.

Заметим, что в общем случае зависимостей $\rho(\mathbf{r})$, $\lambda(\mathbf{r})$, $\mu(\mathbf{r})$ для неоднородного слоя рассеивателя аналитическое решение поставленной задачи невозможно. Значительно осложняется поиск аналитического решения и тем, что граничные поверхности Γ_1', Γ_2' не являются координатными поверхностями ортогональных систем координат.

Будем решать сформулированную задачу численно с использованием метода конечных элементов на основе подхода, предложенного в работах [23, 24, 29].

В соответствии с этим подходом в области жидкости, прилегающей к телам E и E', выделим сферическую поверхность Γ_0 радиуса R такого, чтобы внутри этой поверхности оказались оба препятствия и некоторая область жидкости Ω_0', содержащая упругие тела. При этом минимальное расстояние от упругих тел до поверхности Γ_0 должно иметь порядок характерного размера упругого тела.

Тогда совокупность областей жидкой и упругих сред $\Omega = \Omega_0' \cup \Omega_1 \cup \Omega_1' \cup \Omega_2 \cup \Omega_2'$ можно рассматривать как некоторое неоднородное сферическое препятствие для падающей волны Ψ_0 (см. рис. 4).

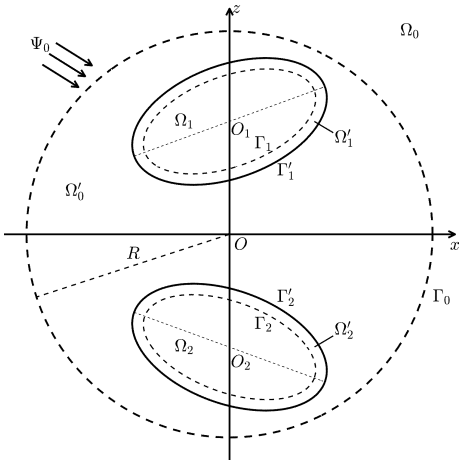

Рис. 4: Сечение области неоднородного шара Ω

Решение уравнений движения во всей области такого неоднородного препятствия будем выполнять с помощью МКЭ. Для этого, к уравнениям вида (8), (9) для упругих областей Ω_1, Ω_1', Ω_2 и Ω_2' надо добавить уравнения, описывающие колебания жидкости в Ω_0'. Введем новую

переменную – потенциал смещений в Ω_0' – Ψ. Поскольку в Ω_0' находится та же жидкость, что и в целом Ω_0, то Ψ должен удовлетворять волновому уравнению вида (6)

$$\Delta\Psi + k_0^2\Psi = 0. \tag{15}$$

Немного изменится вид граничных условий (11), (14) на поверхностях Γ_1', Γ_2'. В них надо заменить u_{0n} и p_0 на

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{n}} \qquad \text{и} \qquad p = \rho_0\omega^2\Psi,$$

соответственно.

На сферической внешней поверхности области Ω_0' надо ввести условия согласования параметров движения жидкости в Ω_0' и во внешней среде Ω_0

$$\left.\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right|_{r=R} = \frac{\partial(\Psi_0+\Psi_s)}{\partial r}, \qquad \Psi|_{r=R} = \Psi_0 + \Psi_s. \tag{16}$$

Здесь первое условие выражает требование равенства нормальных смещений в частицах, расположенных по обе стороны Γ_0, а второе – требование равенства давлений.

Разобъем все подобласти шара Ω на конечные элементы в форме тетраэдров. Двумерная иллюстрация этой процедуры представлена на рис. 5.

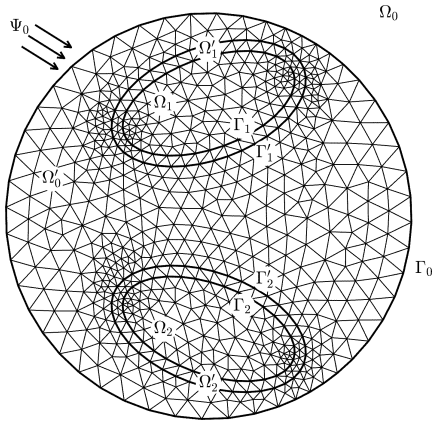

Рис. 5: Схема разбиения Ω на конечные элементы

Все неизвестные функции в Ω представляются в виде линейных комбинаций координатных функций узлов [22]. В частности для потенциала Ψ можно записать

$$\Psi(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^{K} \psi_k f_k(\mathbf{r}), \tag{17}$$

где ψ_k — узловые значения потенциала в области Ω; $f_k(\mathbf{r})$ — координатные функции конечно-элементной модели; K — количество узлов; будем считать, что множество значений $k = \overline{1...K}$ охватывает узлы всей КЭ-сетки области Ω, просто в узлах, не относящихся к Ω_0', положим $\psi_k \equiv 0$.

Во внешней области содержащей жидкости потенциал смещений Ψ_s в рассеянной волне будем искать в виде разложения по сферическим гармоникам с учетом условий излучения

$$\Psi_s = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} A_{nm} h_n(k_0 r) P_n^m(\cos\theta)\,\exp(im\varphi), \tag{18}$$

где $h_n(x)$ — сферическая функция Ханкеля первого рода порядка n; $P_n^m(x)$ — присоединенный многочлен Лежандра степени n порядка m; r, θ, φ — координаты сферической системы координат, связанной с системой x, y, z; A_{nm} — неизвестные коэффициенты подлежащие определению из граничных условий.

Разложим также по сферическим гармоникам и потенциал смещений в падающей плоской волне [32]

$$\Psi_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \gamma_{nm} j_n(k_0 r) P_n^m(\cos\theta)\, \exp(im\varphi), \tag{19}$$

где $\gamma_{nm} = \dfrac{i^n(2n+1)(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos\theta_0) \exp(-im\varphi_0)$; $j_n(x)$ — сферическая функция Бесселя первого рода порядка n.

Подставляя (17), (18), (19) во второе граничное условие (16) и, используя ортогональность сферических гармоник, получим выражения A_{nm} через узловые значения ψ_k на поверхности $r = R$

$$A_{nm} = -\gamma_{nm} \frac{j_n(k_0 r)}{h_n(k_0 r)} + \frac{1}{h_n(k_0 r) N_{nm}} \sum_{j=1}^{M} \psi_j\, (f_j, Y_{nm}), \tag{20}$$

где $N_{nm} = \dfrac{4\pi(n+m)!}{(2n+1)(n-m)!}$ — норма сферической гармоники $Y_{nm}(\theta,\varphi) = P_n^m(\cos\theta)\exp(im\varphi)$;

$(f_j, Y_{nm}) = \int\limits_0^{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f_j(R,\theta,\varphi) \bar{Y}_{nm}(\theta,\varphi) \sin\theta\, d\varphi d\theta$ — скалярное произведение на поверхности Γ_0 координатной функции $f_k(R,\theta,\varphi)$ и сферической гармоники $Y_{nm}(\theta,\varphi)$; здесь множество значений $j = \overline{1...M}$ соответствует множеству узлов, расположенных на поверхности Γ_0.

Затем подставим выражение (20) для A_{nm} в первое граничное условие (16).

В форме, аналогичной (17), будем искать и смещение в упругой части препятствия (в областях Ω_1, Ω_1', Ω_2, Ω_2')

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^{K} \mathbf{U}_k f_k(\mathbf{r}).$$

Здесь $\mathbf{u}$ рассматривается как общее обозначение для смещений $\mathbf{u}$, $\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u}'$, $\mathbf{u_2}$, введенных выше.

В результате граничные условия (10), (11), (13), (14) и первое из (16) будут содержать в качестве неизвестных только узловые значения функций Ψ, $\mathbf{u}$, $\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u}'$, $\mathbf{u_2}$ из ограниченной области Ω. Далее можно решать краевую задачу для уравнений (8), (9), аналогичных для E' и (15) с указанными граничными условиями стандартной технологией МКЭ [22]. В результате решения находим все узловые значения неизвестных функций ψ_k, U_k $(k = 1, 2, \dots K)$. Подставляя найденные значения ψ_j $(j = 1, 2, \dots M)$ в (20), найдем коэффициенты в разложении потенциала смещения в рассеянном поле (18).

Аналогично решим задачу о рассеянии второй падающей волны Ψ_1 и найдем коэффициенты A'_{nm} в разложении потенциала смещения в рассеянном поле, подобном (18). Тогда потенциал смещения в рассеянном поле, полученном от действия двух волн, можно представить в виде

$$\Psi_s(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} B_{nm} h_n(k_0 r) Y_{nm}(\theta,\varphi), \tag{21}$$

где $B_{nm} = A_{nm} + A'_{nm}$.

4. Численные исследования

Используя асимптотическое поведение сферической функции Ханкеля при больших значениях аргумента, представим $\Psi_s(r,\theta,\varphi)$ при $r\to\infty$ из (21) в виде

$$\Psi_s|_{r\to\infty}\approx\frac{R\exp(ik_0r)}{2r}\Phi(\theta,\varphi),$$

где $\Phi(\theta,\varphi)$ — нормированная форм-функция рассеянного поля в дальней зоне, определяющая распределение амплитуды и фазы отраженной волны вдали от препятствия,

$$\Phi(\theta,\varphi)=\frac{2}{k_0R}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}(-i)^{n+1}B_{nm}Y_{nm}(\theta,\varphi).$$

При проведении численных исследований решения анализировалось распределение по углам θ и φ амплитуды рассеянного поля, поэтому расчеты выполнялись для функции

$$F(\theta,\varphi)=\frac{1}{k_0R'}\left|\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}(-i)^{n+1}B_{nm}Y_{nm}(\theta,\varphi)\right|, \tag{22}$$

где коэффициент 2 заменен на 1, поскольку в конечном, счете нас интересует отражение одного тела (а не двух); $R'=(a+b+c)/3+h$ — характерный размер исходного упругого препятствия.

В качестве функциональных зависимостей переменных параметров упругой среды в неоднородном слое препятствия рассматривались две линейных зависимости, в которых функции зависят только от расстояния q от однородной части эллипсоида (см. (4))

$$f_1(q)=1.5-q/h,\qquad f_2(q)=0.5+q/h.$$

Обе функции принимают значения из интервала [0.5, 1.5], при этом $f_1(q)$ убывает с ростом q, а $f_1(q)$ – возрастает. При $q=0.5h$ (в середине слоя) $f_2(q)=f_1(q)=1$.

Зависимость параметров материала неоднородного слоя от координат представлялась в виде

$$\rho=\rho' f(q),\qquad \lambda=\lambda' f(q),\qquad \mu=\mu' f(q),$$

где ρ', λ', μ' — средние значения материального параметра по толщине слоя; $f(q)$ — одна из функций $f_1(q)$, $f_2(q)$, $f_0(q)\equiv 1$ (последняя предполагает постоянство значения параметра во всем слое).

Рассматривалось препятствие, однородная часть которого представляла собой эллипсоид с полуосями a, b, c такими, что $a/c=3$, $b/c=2$; толщина внешнего слоя h полагалась такой, что $h/c=0.5$. Если не оговорено другое, то в представленных далее расчетах расстояние d установлено таким, что $d/c=4$, а углы Эйлера поворотов E относительно осей системы координат x, y, z равны нулю.

Плотность и модули упругости в однородной эллипсоид части заданы так: $\rho_1=2700$ кг/м^3, $\lambda_1=5.3\cdot10^{10}$ Н/м^2, $\mu_1=2.6\cdot10^{10}$ Н/м^2. В большей части экспериментов материальные свойства для внешнего слоя полагались равными: $\rho'=\rho_1$, $\lambda'=\lambda_1$, $\mu'=\mu_1$.

В качестве идеальной среды, заполняющей полупространство, использовалась жидкость с плотностью $\rho_0=1000$ кг/м^3 и скоростью звука $c_0=1485$ м/с. Граница полупространства, занятого жидкостью полагалась абсолютно жесткой.

Частота падающей волны выбиралась такой, что $k_0R'=3$. В большей части, показанных далее расчетах, $\theta_0=135^\circ$, $\varphi_0=0$.

На рис. 6 показано влияние на форм-функцию $F(\theta,0)$ (см. (22)) изменения расстояния эллипсоида до жесткой границы полупространства (схематично контуры сечения эллипсоида и внешнего слоя показаны тонкими пунктирными линиями в виде эллипсов). Пунктирной

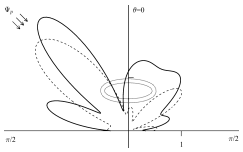

Рис. 6: Диаграмма $F(\theta, 0)$ при $d/c = 5$

линией изображена диаграмма для случая $d/c = 4$, а сплошной – для $d/c = 5$. Видно, что с изменением расстояния величина коэффициентов отражения в разных направлениях изменяется неодинаково. Это показывает существенное влияние на процесс рассеяния присутствие акустически жесткой поверхности.

Рис. 7 иллюстрирует влияние на процесс рассеяния поворота эллипсоидального тела относительно его центра. Пунктирной линией изображена диаграмма для случая $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$. Сплошная линия представляет диаграмму для случая $\alpha = 0$, $\beta = -20°$, $\gamma = 0$. Поворот тела приводит к тому, что ширина основных лепестков в теневой и освещенной областях увеличивается, но при этом максимальное значение коэффициента отражения в освещенной области возрастает, а в теневой – убывает.

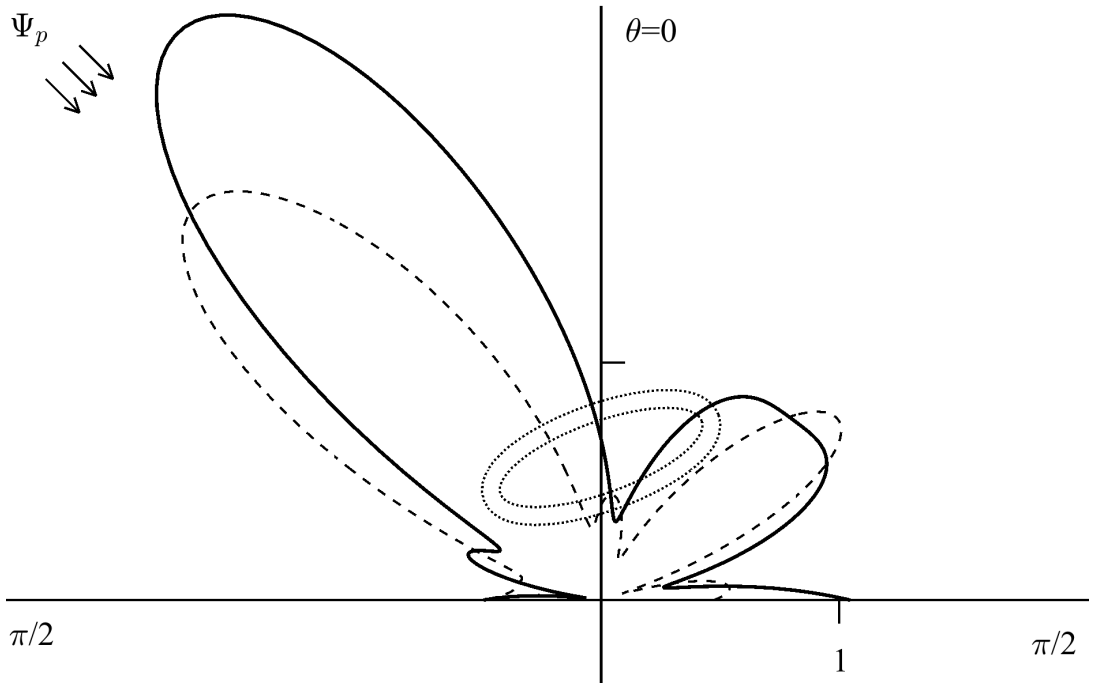

Рис. 7: Диаграмма $F(\theta, 0)$ при $\beta = -20°$

На рис. 8 показано влияние на форм-функцию $F(\theta, \varphi)$ ракурса наблюдения по углу φ. Пунктирной линией, как и выше, изображена диаграмма для случая $\varphi = 0$, а сплошной линией показана диаграмма $F(\theta, \pi/4)$. В сечении $\varphi = \pi/4$ возрастает коэффициент отражения в окрестности $\theta = \pi/2$ и в освещенной области, и в теневой. При остальных значениях θ коэффициент отражения уменьшается. В максимумах лепестков диаграммы уменьшение составляет 10-20%.

Изменение рассеивающих свойств объекта из-за изменения свойств внешнего слоя показано на рис. 9. Пунктирной линией изображена диаграмма для случая, когда все тело E является однородным с указанными выше материальными параметрами $\rho' = \rho_1$, $\lambda' = \lambda_1$, $\mu' = \mu_1$. плошной линией показана диаграмма рассеяния для варианта, когда $\rho' = 8960$ кг/м^3,

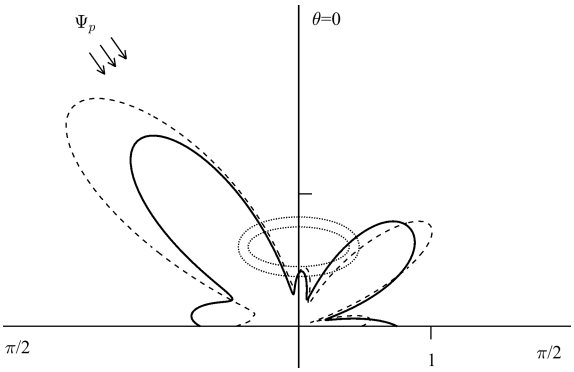

Рис. 8: Диаграмма $F(\theta, \pi/4)$

$\lambda' = 13.8 \cdot 10^{10}$ Н/м^2, $\mu' = 4.4 \cdot 10^{10}$ Н/м^2.

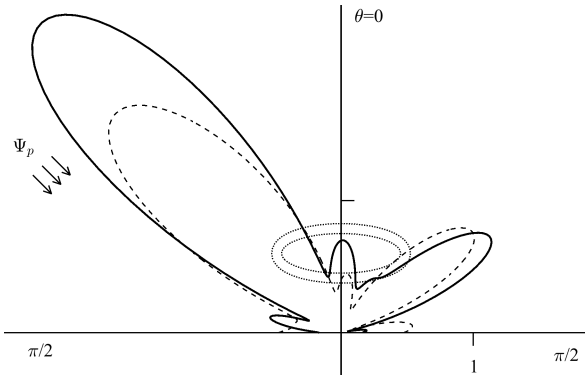

Рис. 9: Диаграмма $F(\theta, 0)$ для случая другого однородного материала внешнего слоя

При этом общая форма диаграммы изменилась несущественно, а максимальное значение в основном лепестке освещенной области увеличилось в 1.5 раза.

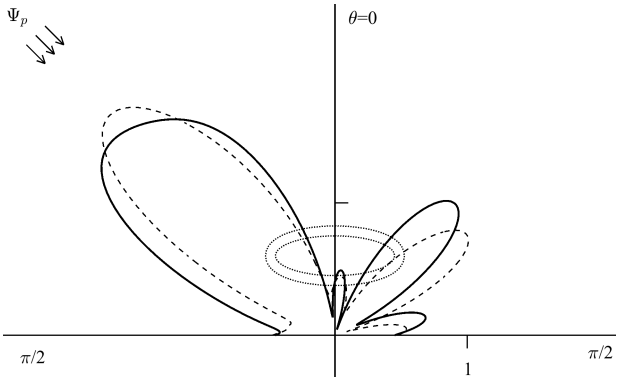

Рис. 10: Диаграмма $F(\theta, 0)$ для случая неоднородного материала внешнего слоя

На рис. 10 показано влияние на форм-функцию $F(\theta, 0)$ неоднородности материала внешнего слоя эллипсоида. Пунктирной линией изображена диаграмма для случая, когда тело E является однородным с параметрами $\rho' = \rho_1$, $\lambda' = \lambda_1$, $\mu' = \mu_1$. Сплошной линией изображена диаграмма $F(\theta, 0)$ для случая, когда все параметры внешнего слоя являются переменными: $\rho' = \rho_1 f_1(q)$, $\lambda' = \lambda_1 f_2(q)$, $\mu' = \mu_1 f_2(q)$. Такая неоднородность приводит к тому, что ширина основного лепестка в освещенной области увеличилась на 20%, а максимум в нем умень-

шился на 7%. В теневой области заметно изменилось угловое расположение двух основных лепестков и увеличилось значение максимального коэффициента отражения в них на 10-25%. Заметим, неоднородность одного параметра при постоянстве других приводит к существенно менее заметным изменениям в форм-функции. Форма диаграммы практически не изменяется, а максимальное увеличение или уменьшение коэффициента отражения не превышает 3-5%, что оказывается сравнимым с погрешностями вычислений при небольшом числе K.

5. Заключение

Представленное решение показывает эффективность использования метода конечных элементов для решения задач о рассеянии звука при достаточно сложных конфигураций упругих рассеивающих объектов. Он позволяет представить решение неким однотипным алгоритмом, который сохраняет свою структуру при широком диапазоне изменения параметров задачи.

Проведенные вычисления показывают возможность его использования для анализа трехмерных задач дифракции звука даже без использования специализированных вычислительных средств.

Полученные результаты показывают, что при рассмотренной частоте звука геометрические характеристики задачи оказывают значительно большее влияние на характер рассеянного поля, чем неоднородность материала препятствия. Но при определенных сочетаниях зависимостей в изменении параметров в диаграмме рассеяния есть заметные изменения. Следует ожидать, что повышение частоты падающей волны приведет к более выраженным изменениям форм-функции рассеяния при смене зависимостей в неоднородной части препятствия.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Федорюк М. В. Дифракция звуковых волн на трехосном эллипсоиде // Акустический журн. 1988. Т. 34, вып. 1. С. 160-164.

2. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции: Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье. М.: Наука, 1967. 300 с.

3. Silbiger A. Scattering of sound by an elastic prolate spheroid // J. Acoust. Soc. Amer. 1963. V. 35. № 4. P. 564-570.

4. Flax L. Dragonette L., Varadan V. K., Varadan V. V. Analisis and computation of the acoustic scattering by an elastic prolate spheroid obtained from the T-matrix formulation // J. Acoust. Soc. Amer. 1982. V. 71. № 5. P. 1077-1082.

5. Клещев А. А. Трехмерные и двумерные (осесимметричные) характеристики упругих сфероидальных рассеивателей // Акуст. журн. 1986. Т. 32. Вып. 2. С. 268-271.

6. Hackman R. H. Sammelmann G. S., Williams K. L., Trivett D. H. A reamalysis of the acoustic scattering from elastic spheroids // J. Acoust. Soc. Amer. 1988. V. 83. № 4. P. 1255-1266.

7. Рождественский К. Н., Толоконников Л. А. О рассеянии звуковых волн на упругом сфероиде // Акуст. журн. 1990. Т. 36. Вып. 5. С. 927-930.

8. Толоконников Л. А. Дифракция звуковых волн на упругом сфероиде с малым эксцентриситетом в вязкой среде // Изв. ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. 1997. Т. 3. Вып. 1. С. 152-157.

9. Толоконников Л. А., Лобанов А. В. Дифракция плоской звуковой волны на неоднородном упругом сфероиде // Изв. ТулГУ. Естественные науки. 2011. Вып. 2. С. 176-191.

10. Cooper G., Temple J. A. G. Calculations of acoustic scattering from ellipsoidal voids: bends, krill and fish // Ultrasonics. 1983. V. 21, № 4. C. 171-176.

11. Waterman P.C. Matrix formulation of electromagnetic scattering // Proc. IEEE. 1965. Vol. 53, P. 805-812.

12. Waterman P. C. T-matrix methods in acoustic scattering // Acoust. Soc. Amer. 2009. V. 125, № 1, P. 42-51.

13. Tsao S. J., Varadan V. V., Varadan V. K. T-Matrix Approach to Scattering of Elastic (SH-) Waves by an Inclined Surface Void // ASME. J. Appl. Mech. 1983. V. 50. № 1. P. 143-148.

14. Lavia E., Gonzalez J. D., Blanc S. A Computational Method to Calculate the Exact Solution for Acoustic Scattering by Liquid Spheroids // arXiv:1603.00499v2 [physics.comp-ph]. 2016. V. 3. P. 1-14.

15. Athanasiadis C. The hard-core multi-layered ellipsoid in a low-frequency acoustic field // Int. J. Eng. 1994. V. 32. P. 1352-1359.

16. Athanasiadis C. The multi-layered ellipsoid with a soft core in the presence of a low-frequency acoustic wave // Q. J. Mech. Appl. Math. 1994. V. 47. P. 441-159.

17. Charalambopoulos A., Dassios G. Scattering of a spherical wave by a small ellipsoid // IMA J. Appl. Math. 1999. V. 62. P. 117-136.

18. Ершов Н. Е., Илларионова Л. В., Смагин С. И. Численное решение трехмерной стационарной задачи дифракции акустических волн // Вычислительные технологии. 2010. Т. 15. № 1. С. 60-76.

19. Veksler N. D., Dubus B., Lavie A. Acoustic wave scattering by an ellipsoidal shell // Acoust. Phys. 1999. V. 45. P. 46-51.

20. Harari I., Hughes T.J.R. Finite element method for the Helmholtz equation in an exterior domain: model problems // Comp. Methods Appl. Mech. Eng. 1991. V. 87. P. 59-96.

21. Gan H., Levin P. L., Ludwig R. Finite element formulation of acoustic scattering phenomena with absorbing boundary condition in the frequency domain // J. Acoust. Soc. Am. 1993. V. 94. № 3, Pt. 1, P. 1651-1662.

22. Ihlenburg F. Finite element analysis of acoustic scattering. New York: Springer Publishing Company Inc., 2013. 226 p.

23. Скобельцын С.А. Подход к решению задач о рассеянии упругих волн с использованием МКЭ // Тез. докл. междунар. научн. конф. “Современные проблемы математики, механики, информатики” Тула: ТулГУ. 2004. С. 135–136.

24. Иванов В.И., Скобельцын С.А. Моделирование решений задач акустики с использованием МКЭ // Известия ТулГУ. Естественные науки. 2008. Вып. 2. С. 132-145.

25. Иванов Е. А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск: Наука и техника. 1968. 584 с.

26. Клещев А. А. Рассеяние звука сфероидальными телами, находящимися у границы раздела сред // Акуст. журн. 1977. Т. 23, Вып. 3. С. 404-410.

27. Gaunaurd J. C., Huang H. Acoustic scattering by a spherical body near a plane boundary // J. Acoust. Soc. Amer. 1994. V. 96, N 6. P. 2526-2536.

28. Толоконников Л. А, Логвинова А. Л. Дифракция плоской звуковой волны на двух неоднородных цилиндрах с жесткими включениями // Изв. ТулГУ. Естественные науки. 2015. Вып. 1. С. 54-66.

29. Скобельцын С.А., Толоконников Л.А. Дифракция плоской звуковой волны на упругом сфероиде с неоднородным покрытием в присутствии подстилающей поверхности // Изв. ТулГУ. Естественные науки. 2015. Вып. 2. С. 64-75.

30. Исакович М.А. Общая акустика. М.: Наука, 1973. 496 с.

31. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.

32. Скучик Е. Основы акустики. Т. 2. М.: Мир, 1976. 542 с.

REFERENCES

1. Fedoruk, M. V. 1988, "Diffraction of sound waves by a a triaxial ellipsoid *Acoustical Physics*, vol. 34, no 1, pp. 160-164.

2. Bateman, H. & Erdelyi, A. 1955, *"Higher transcendental functions"* vol. 3, McGraw-Hill., New York, 292 p.

3. Silbiger, A. 1963, "Scattering of sound by an elastic prolate spheroid *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 35, no 4, pp. 564-570.

4. Flax, L., Dragonette, L., Varadan, V. K. & Varadan V. V. 1982, "Analisis and computation of the acoustic scattering by an elastic prolate spheroid obtained from the T-matrix formulation *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 71, no 5, pp. 1077-1082.

5. Kleshchev, A. A. 1986. "Three-dimensional and two-dimensional (axisymmetric) characteristics of elastic spheroid scatterers *Akust. Zhurnal*, vol. 32, no 2, pp. 268-271.

6. Hackman, R. H., Sammelmann, G. S., Williams, K. L. & Trivett D. H. 1988, "A reamalysis of the acoustic scattering from elastic spheroids *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 83, no 4, pp. 1255-1266.

7. Rozhdestvenskij, K. N. & Tolokonnikov, L. A. 1990, "On the scattering of sound waves by an elastic spheroid *Akust. Zhurnal*, vol. 36, no 5, pp. 927-930.

8. Tolokonnikov, L. A. 1997, "Diffraction of sound waves by an elastic spheroid with a small eccentricity in a viscous medium *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Maths. Mech. Computer science*, vol. 3, no 1, pp. 152-157.

9. Tolokonnikov, L. A. & Lobanov, A. V. 2011, "Diffraction of a plane sound wave on an inhomogeneous elastic spheroid *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no 2, pp. 176-191.

10. Cooper, G. & Temple, J.A.G. 1983, "Calculations of acoustic scattering from ellipsoidal voids: bends, krill and fish *Ultrasonics*, vol. 21, no 4, pp. 171-176.

11. Waterman, P.C. 1965, "Matrix formulation of electromagnetic scattering *Proc. of the IEEE*, vol. 53, pp. 805-812.

12. Waterman, P.C. 2009, "T-matrix methods in acoustic scattering *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 125, no 1, pp. 42-51.

13. Tsao, S. J., Varadan, V. V. & Varadan, V. K. 1983, "T-Matrix Approach to Scattering of Elastic (SH-) Waves by an Inclined Surface Void *ASME. J. Appl. Mech.*, vol. 50, no 1, pp. 143-148.

14. Lavia, E., Gonzalez, J. D. & Blanc S. 2016, "A Computational Method to Calculate the Exact Solution for Acoustic Scattering by Liquid Spheroids *arXiv:1603.00499v2 [physics.comp-ph]*, vol. 3, pp. 1-14.

15. Athanasiadis, C. 1994, "The hard-core multi-layered ellipsoid in a low-frequency acoustic field *Int. J. Eng.*, vol. 32, pp. 1352-1359.

16. Athanasiadis, C. 1994, "The multi-layered ellipsoid with a soft core in the presence of a low-frequency acoustic wave"*Q. J. Mech. Appl. Math.*, vol. 47, pp. 441-159.

17. Charalambopoulos, A. & Dassios G. 1999, "Scattering of a spherical wave by a small ellipsoid *IMA J. Appl. Math.*, vol. 62, pp. 117-136.

18. Ershov, N. E., Illarionova, L. V. & Smagin S. I. 2010, "Numerical solution of three-dimensional stationary problem of acoustic waves diffraction *Vy'chislitel'ny'e tekhnologii*, vol. 15, no 1, pp. 60-76.

19. Veksler, N. D., Dubus, B. & Lavie, A. 1999, "Acoustic wave scattering by an ellipsoidal shell *Acoust. Phys.*, vol. 45, pp. 46-51.

20. Harari, I. & Hughes, T.J.R. 1991, "Finite element method for the Helmholtz equation in an exterior domain: model problems *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.* vol. 87, pp. 59-96.

21. Gan, H., Levin, P. L. & Ludwig, R. 1993, "Finite element formulation of acoustic scattering phenomena with absorbing boundary condition in the frequency domain"*J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 94, no 3, pt. 1, pp. 1651-1662.

22. Ihlenburg, F. 2013, *"Finite element analysis of acoustic scattering"*, Springer Publishing Company Inc., New York, 226 p.

23. Skobel'tsyn, S.A. 2004, "Approach to solving problems on the scattering of elastic waves using FEM *Tez. doc. Intern. scientific. Conf. "Modern problems of mathematics, mechanics, computer science" Tula: Tul. Gos. Univ.*, pp. 135-136.

24. Ivanov, V.I. & Skobel'tsyn, S.A. 2008, "Modeling solutions to acoustics using FEM"*Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no 2, pp. 132-145.

25. Ivanov, E. A. 1968, *"Diffraction of electromagnetic waves by two bodies"*, Nauka i tekhnika, Minsk, 584 p.

26. Kleshchev, A. A. 1977, "Scattering of sound by spheroidal bodies located at the interface between media"*Akust. Zhurnal*, vol. 23, no. 3, pp. 404-410.

27. Gaunaurd, J. C. & Huang, H. 1994, "Acoustic scattering by a spherical body near a plane boundary *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 96, no 6, pp. 2526-2536.

28. Tolokonnikov, L. A. & Logvinova, A. L. 2015, "Diffraction of a plane sound wave on two non-uniform cylinders with rigid inserts *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no 1, pp. 54-66.

29. Skobel'tsyn, S.A. & Tolokonnikov, L. A. 2015, "Diffraction of a plane sound wave on an elastic spheroid with an inhomogeneous coating in the presence of an underlying surface *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no 2, pp. 64-75.

30. Isakovich, M.A. 1973, *"General acoustics"*, Nauka, Moscow, 496 p.

31. Nowacki, W. 1975, *"Teoria sprezystosci"*, Mir, Moscow, 872 p.

32. Skudryzk, E.F. 1971, *"The Foundations Acoustic"*, Springer-Verlag, New York, 542 p.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 19. Выпуск 1

УДК 539.3:534.26 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-1-238-254

Дифракция плоской звуковой волны на двух упругих цилиндрах с неоднородными покрытиями[1]

Толоконников Лев Алексеевич — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет.
e-mail: tolokonnikovla@mail.ru

Аннотация

В статье получено аналитическое решение задачи дифракции плоской звуковой волны на двух однородных упругих цилиндрах с радиально-неоднородными покрытиями, находящимися в идеальной жидкости. Волновые поля в содержащей среде и однородных упругих телах находятся аналитически, а для нахождения полей смещений в неоднородных покрытиях построена краевая задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

С помощью непрерывно-неоднородных упругих покрытий можно эффективно изменять характеристики рассеяния тел в определенных направлениях, если подобрать соответствующие законы неоднородности для механических параметров покрытия. Задача представляет интерес для изучения дифракции звука на решетке цилиндрических тел, а также служит необходимым элементом решения методом мнимых источников задачи о дифракции звука на одиночном однородном упругом цилиндре с неоднородным покрытием, находящемся вблизи акустически мягкой или абсолютно жесткой плоской поверхности.

Ключевые слова: дифракция, звуковые волны, однородный упругий цилиндр, неоднородное покрытие.

Библиография: 31 названий.

Для цитирования:
Л. А. Толоконников. Дифракция плоской звуковой волны на двух упругих цилиндрах с неоднородными покрытиями // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, вып. 1, С. 238–254.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 18-11-00199).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 19. No. 1

UDC 539.3:534.26 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-1-238-254

Diffraction of a plane sound wave on two elastic cylinders with non-uniform coatings

Tolokonnikov Lev Alekseevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, department of applied mathematics and computer science, Tula State University.
e-mail: tolokonnikovla@mail.ru

Abstract

In paper the analytical solution of a problem about diffraction of a plane sound wave on two uniform elastic cylinders with radially non-uniform coatings is received. Analytic expressions are obtained which describe the wave fields in the containing medium and the homogeneous elastic bodies. The boundary-value problem for the system of ordinary differential equations of the second order is constructed for determination of the displacement fields in non-uniform coatings.

By means of an continuous-non-uniform elastic coatings it is possible to change effectively scattering performances of bodies in determinate directions if to pick up corresponding the inhomogeneity laws for mechanical parametres of a coating. The problem is of interest for analysis of sound diffraction on a lattice of cylindrical bodies and also serves as a necessary element of solution by a method of imaginary sources of a problem about sound diffraction on the single homogeneous elastic cylinder with the non-uniform covering which is close to acoustically soft or absolutely rigid flat surfaces.

Keywords: diffraction, sound waves, uniform elastic cylinder, non-uniform coating.

Bibliography: 31 titles.

For citation:
L. A. Tolokonnikov, 2018, "Diffraction of a plane sound wave on two elastic cylinders with non-uniform coatings" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 1, pp. 238–254.

1. Введение

Создание покрытий, обеспечивающих требуемые звукоотражающие свойства тел, является актуальной проблемой. Обычно покрытия применяются для повышения звукопоглощения и уменьшения отражения звука в определенном направлении. Существуют различные виды покрытий, наносимых на твердые тела. Изменение звукоотражающих свойств упругих тел можно осуществить с помощью непрерывно-неоднородных покрытий. С помощью непрерывно-неоднородного упругого покрытия можно эффективно изменять характеристики рассеяния тел в определенных направлениях, если подобрать соответствующие законы неоднородности для механических параметров покрытия. При этом непрерывно-неоднородные покрытия можно реализовать с помощью многослойной системы тонких однородных упругих слоев с различными значениями механических параметров. С математической точки зрения такое представление эквивалентно аппроксимации непрерывных функций, характеризующих переменные параметры непрерывно-неоднородного слоя, кусочно-постоянными функциями.

Значительный интерес представляют рассеиватели, имеющие форму кругового цилиндра, так как многие реальные объекты достаточно хорошо аппроксимируются телами цилиндрической формы. Задачи дифракции звуковых волн на одиночных упругих цилиндрах, находящихся в безграничной жидкости, рассматривались во многих работах. Дифракция звуковых волн на однородных изотропных упругих сплошных цилиндрах и цилиндрических оболочках исследовалась, например, в работах [1-4]. В [1-2] рассматривался случай нормального падения волны, а в [3-4] — случай наклонного падения. В работах [5, 6] решена задача о рассеянии плоских звуковых волн на неоднородном изотропном упругом цилиндре. Исследованию рассеяния звуковых волн трансверсально-изотропным неоднородным цилиндрическим слоем посвящена работа [7]. В [8] найдено решение задачи дифракции плоской звуковой волны на неоднородном анизотропном полом цилиндре в общем случае анизотропии. Решения задач о рассеянии плоской и цилиндрической звуковых волн неоднородными упругими полыми цилиндрами в вязкой жидкости получены в [9, 10]. В работе [11] изучена дифракция плоских звуковых волн на неоднородном изотропном термоупругом цилиндре, помещенном в невязкую теплопроводную жидкость. Исследованию дифракции цилиндрических волн на неоднородной трансверсально-изотропной цилиндрической оболочке произвольной толщины посвящена работа [12]. В [13] теория резонансного рассеяния использована для анализа рассеяния звука неоднородной трансверсально-изотропной цилиндрической оболочкой. В [14] определены линейные законы неоднородности цилиндрического упругого слоя, имеющего наименьшее отражение в заданном направлении при рассеянии звука.

Серия работ посвящена изучению влияния покрытий цилиндрических твердых тел на их звукоотражающие свойства. В [15] рассмотрены прямая и обратная задачи дифракции плоской звуковой волны на цилиндре с перфорированным покрытием. Выбраны параметры среды резонаторов перфорированного покрытия, обеспечивающие заданный уровень гашения поля дифракции на цилиндре. В [16, 17] обсуждается задача о нерассеивающем покрытии для цилиндра, делающее его акустически прозрачным. Для снижения рассеяния падающей на цилиндр звуковой волны применено тонкое покрытие с протяженной реакцией. Дифракции плоской звуковой волны на упругой цилиндрической оболочке с однородным упругим покрытием исследована в [18]. Выявлены условия, при которых совместный выбор импедансов покрытия и оболочки позволяет минимизировать рассеянное поле. Задачи о рассеянии плоских и цилиндрических звуковых волн жестким цилиндром с непрерывно-неоднородным упругим покрытием решены в [19, 20]. Рассеяние наклонно падающей плоской звуковой волны упругим цилиндром с непрерывно-неоднородным покрытием рассмотрено в [21], а с дискретно-слоистым покрытием — в [22]. Влияние термоупругости материалов цилиндра и его радиально-неоднородного покрытия на рассеяние звука изучено в работах [23, 24]. При этом в [23] рассмотрены как прямая задача дифракции, так и обратная задача об определении законов неод-

нородности материала покрытия, обеспечивающих наименьшее звукоотражение в определенном угловом секторе и в заданном диапазоне частот. Моделирование неоднородного покрытия упругого цилиндра с заданными звукоотражающими свойствами осуществлено в [25]. В [26] получено приближенное аналитическое решение задачи дифракции плоской звуковой волны на однородном упругом цилиндре, имеющем цилиндрическую полость и радиально-неоднородное покрытие. На основе решения прямой задачи рассмотрена обратная задача об определении законов неоднородности покрытия, обеспечивающих минимальное звукоотражение. В [27] решена задача дифракции плоской звуковой волны на двух неоднородных упругих цилиндрах с жесткими включениями.

В настоящей работе рассматривается задача дифракции плоской звуковой волны на двух однородных упругих цилиндрах с непрерывно-неоднородными упругими покрытиями, находящимися в идеальной жидкости.

2. Постановка задачи

Рассмотрим два одинаковых бесконечных однородных изотропных упругих цилиндра радиусом r_0, оси которых параллельны. Материал цилиндров характеризуется плотностью ρ_0 и упругими постоянными λ_0 и μ_0. Цилиндры имеют покрытия в виде неоднородного изотропного упругого слоя с внешним радиусом r_1. Окружающая цилиндры жидкость является идеальной. Ее плотность и скорость звука соответственно равны ρ_1 и c.

Введем основную (x, y, z) и локальные (x_{+1}, y_{+1}, z_{+1}), (x_{-1}, y_{-1}, z_{-1}) декартовы прямоугольные системы координат. Оси локальных координатных систем одинаково ориентированы с соответствующими осями основной системы координат. При этом центры локальных систем координат O_{+1} и O_{-1} находятся на оси y и на осях вращения цилиндров z_{+1} и z_{-1}, расположенных в верхней и нижней полуплоскостях (относительно оси x) соответственно (рис. 1).

Свяжем с основной и локальными прямоугольными системами координат цилиндрические системы координат (r, φ, z), $(r_{+1}, \varphi_{+1}, z_{+1})$, $(r_{-1}, \varphi_{-1}, z_{-1})$.

В локальных цилиндрических координатах уравнения внешних поверхностей l – го цилиндра и его покрытия имеют вид $r_l = r_0$ и $r_l = r_1$ соответственно $(l = \pm 1)$.

Полагаем, что модули упругости λ и μ материала покрытия l – го цилиндра описываются дифференцируемыми функциями цилиндрической радиальной координаты r_l, а плотность ρ — непрерывной функцией координаты r_l $\quad (l = \pm 1)$: $\lambda = \lambda(r_l)$, $\mu = \mu(r_l)$, $\rho = \rho(r_l)$.

Пусть из внешнего пространства на цилиндры падает плоская звуковая волна, распространяющаяся в направлении волнового вектора $\mathbf{k}$, который лежит в плоскости xy и образует угол φ_0 с положительным направлением оси x.

Потенциал скорости падающей волны в системе координат x, y, z равен

$$\Psi_0 = A \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) - \omega t)],$$

где $A-$ амплитуда волны; $\omega-$ круговая частота; $\mathbf{k} = \{k \cos\varphi_0;\ k \sin\varphi_0;\ 0\}$; $\quad \mathbf{r} = \{x, y, 0\}-$ радиус-вектор; $k = \omega/c-$ волновое число жидкости; t — время. В дальнейшем временной множитель $e^{-i\omega t}$ будем опускать.

Падающая плоская волна будет рассеиваться цилиндрами. При этом имеет место многократное переотражение между телами.

Определим акустическое поле, рассеянное цилиндрами.

В рассматриваемой постановке задача является двумерной. Все искомые величины не зависят от координаты z.

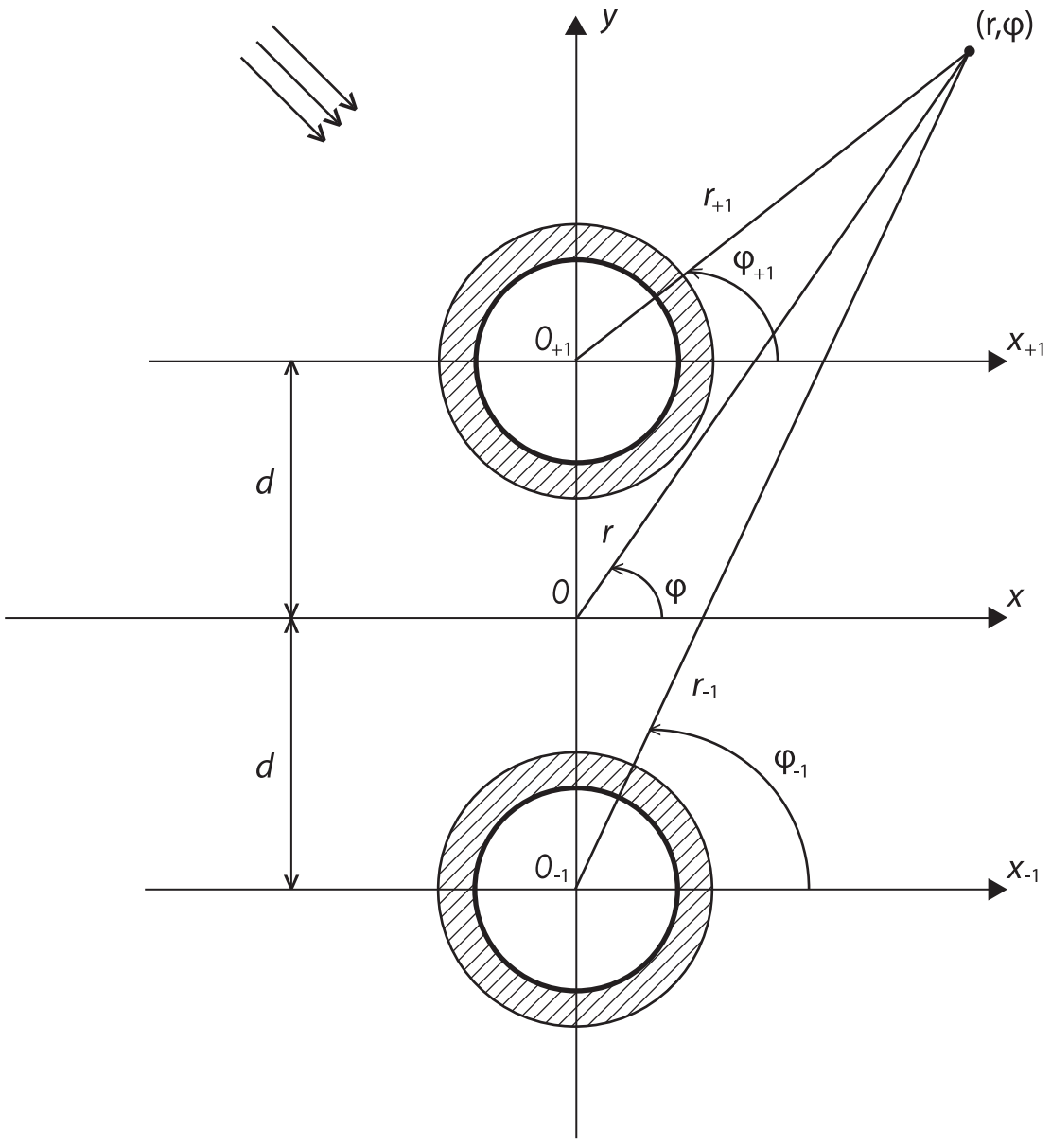

Рис. 1: Геометрия задачи

3. Аналитическое решение задачи

Распространение малых возмущений в идеальной жидкости в случае установившихся колебаний описывается уравнением Гельмгольца [28]

$$\Delta\Psi(r,\varphi) + k^2\Psi(r,\varphi) = 0,$$

где Ψ — потенциал скорости полного акустического поля.

При этом скорость частиц $\mathbf{v}$ и акустическое давление p в жидкости определяются по формулам

$$\mathbf{v} = \mathrm{grad}\Psi, \quad p = i\rho_1\omega\Psi.$$

В силу линейности рассматриваемой задачи потенциал Ψ представим в виде

$$\Psi = \Psi_0 + \Psi_s, \tag{1}$$

где Ψ_s — потенциал скорости волны, рассеянной двумя цилиндрами.

Потенциал скорости рассеянной волны является решением уравнения Гельмгольца и должен удовлетворять условиям излучения на бесконечности [28].

Учитывая, что

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_l + \mathbf{r}_{Ol} \quad (l = \pm 1),$$

падающую волну запишем в виде

$$\Psi_0 = A\exp[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_{Ol})]\exp[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_l)],$$

где $\mathbf{r}_{Ol} = \{0,\ ld\}$ — радиус-вектор, соединяющий точку O с точкой O_l $(l = \pm 1)$. При этом $\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_{Ol} = kdl\sin\varphi_0$.

Представим потенциал скорости падающей волны в локальных цилиндрических координатах в виде разложения [29]

$$\Psi_0(r_l,\varphi_l) = Ae^{ikdl\sin\varphi_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(kr_l)e^{in(\varphi_l-\varphi_0)} \quad (l = \pm 1), \tag{2}$$

где $J_n(x)$ — цилиндрическая функция Бесселя порядка n.

Потенциал Ψ_s будем искать в виде суммы двух слагаемых

$$\Psi_s = \sum_{l=\pm 1}\Psi_s^{(l)}, \tag{3}$$

каждое из которых представляет собой потенциал скорости волны, рассеянной l – ым цилиндром.

Функции $\Psi_s^{(l)}$ являются решениями уравнений Гельмгольца, которые в локальных цилиндрических координатах имеют вид:

$$\frac{\partial^2\Psi_s^{(l)}}{\partial r_l^2} + \frac{1}{r_l}\frac{\partial\Psi_s^{(l)}}{\partial r_l} + \frac{1}{r_l^2}\frac{\partial^2\Psi_s^{(l)}}{\partial\varphi_l^2} + k^2\Psi_s^{(l)} = 0, \quad l = \pm 1.$$

С учетом условий излучения на бесконечности функции $\Psi_s^{(l)}$ будем искать в виде

$$\Psi_s^{(l)}(r_l,\varphi_l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n^{(l)}H_n(kr_l)e^{in(\varphi_l-\varphi_0)}, \quad l = \pm 1, \tag{4}$$

где $H_n(x)$ — цилиндрическая функция Ганкеля первого рода порядка n; $A_n^{(l)}$ — коэффициенты, подлежащие определению из граничных условий.

Рассмотрим теперь уравнения, описывающие распространение малых возмущений в однородных упругих цилиндрах и их неоднородных упругих покрытиях.

Представим вектор смещения $\mathbf{u}_0^{(l)}$ частиц упругого изотропного однородного l – го цилиндра в виде

$$\mathbf{u}_0^{(l)} = \mathrm{grad} L^{(l)} + \mathrm{rot}\mathbf{\Phi}^{(l)}, \quad \mathrm{div}\mathbf{\Phi}^{(l)} = 0,$$

где $L^{(l)}$ и $\mathbf{\Phi}^{(l)}$ — скалярный и векторный потенциалы смещения.

Из уравнения Ламе получаем два волновых уравнения [30], которые для установившегося режима движения переходят в скалярное и векторное уравнения Гельмгольца

$$\Delta L^{(l)} + k_l^2 L^{(l)} = 0, \quad \Delta\mathbf{\Phi}^{(l)} + k_\tau^2 \mathbf{\Phi}^{(l)} = 0,$$

где $k_l = \omega/c_l$ и $k_\tau = \omega/c_\tau$ — волновые числа продольных и поперечных упругих волн; $c_l = \sqrt{(\lambda_0 + 2\mu_0)/\rho_0}$ и $c_\tau = \sqrt{\mu_0/\rho_0}$ — скорости продольных и поперечных волн.

Так как $\mathbf{\Phi}^{(l)} = \Phi^{(l)}(r,\varphi)\mathbf{e}_z$, где $\mathbf{e}_z$ — единичный вектор оси z, то от векторного уравнения Гельмгольца приходим к одному скалярному уравнению относительно функции $\Phi^{(l)}(r,\varphi)$

$$\Delta\Phi^{(l)} + k_\tau^2 \Phi^{(l)} = 0.$$

Компоненты вектора смещения $\mathbf{u}_0^{(l)}$ записываются через функции $L^{(l)}$ и $\Phi^{(l)}$ следующим образом:

$$u_{0r}^{(l)} = \frac{\partial L^{(l)}}{\partial r_l} + \frac{1}{r_l}\frac{\partial \Phi^{(l)}}{\partial \varphi_l}, \quad u_{0\varphi}^{(l)} = \frac{1}{r_l}\frac{\partial L^{(l)}}{\partial \varphi_l} - \frac{\partial \Phi^{(l)}}{\partial r_l}.$$

Соотношения между компонентами тензора напряжений $\sigma_{0rr}^{(l)}$, $\sigma_{0r\varphi}^{(l)}$ в однородной части l – го цилиндра и компонентами вектора смещения $\mathbf{u}_0^{(l)}$ имеют вид [32]

$$\sigma_{0rr}^{(l)} = (\lambda_0 + 2\mu_0)\frac{\partial u_{0r}^{(l)}}{\partial r_l} + \frac{\lambda_0}{r_l}\left(\frac{\partial u_{0\varphi}^{(l)}}{\partial \varphi_l} + u_{0r}^{(l)}\right), \quad \sigma_{0r\varphi}^{(l)} = \mu_0\left(\frac{1}{r_l}\frac{\partial u_{0r}^{(l)}}{\partial \varphi_l} + \frac{\partial u_{0\varphi}^{(l)}}{\partial r_l} - \frac{u_{0\varphi}^{(l)}}{r_l}\right).$$

Компоненты тензора напряжений $\sigma_{0rr}^{(l)}$ и $\sigma_{0r\varphi}^{(l)}$ выразим через функции $L^{(l)}$ и $\Phi^{(l)}$ с учетом того, что $\Delta L^{(l)} = -k_l^2 L^{(l)}$. Получим

$$\sigma_{0rr}^{(l)} = -\lambda_0 k_l^2 L^{(l)} + 2\mu_0\left[\frac{\partial^2 L^{(l)}}{\partial r_l^2} + \frac{1}{r_l}\frac{\partial}{\partial \varphi_l}\left(\frac{\partial \Phi^{(l)}}{\partial r_l} - \frac{1}{r_l}\Phi^{(l)}\right)\right],$$

$$\sigma_{0r\varphi}^{(l)} = \mu_0\left(\frac{2}{r_l}\frac{\partial^2 L^{(l)}}{\partial r_l \partial \varphi_l} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial L^{(l)}}{\partial \varphi_l} - \frac{\partial^2 \Phi^{(l)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Phi^{(l)}}{\partial \varphi_l^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi^{(l)}}{\partial r_l}\right).$$

С учетом условия ограниченности функции $L^{(l)}$ и $\Phi^{(l)}$ будем искать в виде

$$L^{(l)}(r_l,\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n^{(l)} J_n(k_l r_l) e^{in(\varphi-\varphi_0)}, \tag{5}$$

$$\Phi^{(l)}(r_l,\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^{(l)} J_n(k_\tau r_l) e^{in(\varphi-\varphi_0)}. \tag{6}$$

Волновые поля в неоднородных упругих покрытиях цилиндров описываются общими уравнениями движения упругой среды [30], которые в локальных цилиндрических координатах имеют вид

$$\begin{gathered}\frac{\partial\sigma_{rr}^{(l)}}{\partial r_l}+\frac{1}{r_l}\frac{\partial\sigma_{r\varphi}^{(l)}}{\partial\varphi_l}+\frac{\sigma_{rr}^{(l)}-\sigma_{\varphi\varphi}^{(l)}}{r_l}=-\omega^2\rho u_r^{(l)},\\ \frac{\partial\sigma_{r\varphi}^{(l)}}{\partial r_l}+\frac{1}{r_l}\frac{\partial\sigma_{\varphi\varphi}^{(l)}}{\partial\varphi_l}+\frac{2}{r_l}\sigma_{r\varphi}^{(l)}=-\omega^2\rho u_\varphi^{(l)};\quad l=\pm1,\end{gathered}\tag{7}$$

где $u_r^{(l)}, u_\varphi^{(l)}$ и $\sigma_{ij}^{(l)}$ — компоненты вектора смещения $\mathbf{u}^{(l)}$ и тензора напряжений в покрытии l – го цилиндра; $\rho=\rho(r_l)$.

Используя соотношения, связывающие компоненты тензора напряжений с компонентами тензора деформаций (обобщенный закон Гука) [31], а также соотношения, связывающие компонентов тензора деформаций с компонентами вектора смещения [31], из уравнений (7) получаем следующие уравнения движения, записанные через компоненты вектора смещения в локальных цилиндрических координатах:

$$\begin{gathered}(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2u_r^{(l)}}{\partial r_l^2}+\frac{\lambda+\mu}{r_l}\frac{\partial^2u_\varphi^{(l)}}{\partial r_l\partial\varphi_l}+\frac{\mu}{r_l^2}\frac{\partial^2u_r^{(l)}}{\partial\varphi_l^2}+\left(\lambda'+2\mu'+\frac{\lambda+2\mu}{r_l}\right)\frac{\partial u_r^{(l)}}{\partial r_l}+\\ +\frac{1}{r_l}\left(\lambda'-\frac{\lambda+3\mu}{r_l}\right)\frac{\partial u_\varphi^{(l)}}{\partial\varphi_l}+\left(\frac{\lambda'}{r_l}-\frac{\lambda+2\mu}{r_l^2}+\omega^2\rho\right)u_r^{(l)}=0,\\ \mu\frac{\partial^2u_\varphi^{(l)}}{\partial r_l^2}+\frac{\lambda+\mu}{r_l}\frac{\partial^2u_r^{(l)}}{\partial r_l\partial\varphi_l}+\frac{\lambda+2\mu}{r_l^2}\frac{\partial^2u_\varphi^{(l)}}{\partial\varphi_l^2}+\left(\mu'+\frac{\mu}{r_l}\right)\frac{\partial u_\varphi^{(l)}}{\partial r_l}+\\ +\frac{1}{r_l}\left(\mu'+\frac{\lambda+3\mu}{r_l}\right)\frac{\partial u_r^{(l)}}{\partial\varphi_l}+\left(-\frac{\mu'}{r_l}-\frac{\mu}{r_l^2}+\omega^2\rho\right)u_\varphi^{(l)}=0;\quad l=\pm1,\end{gathered}\tag{8}$$

где $\lambda=\lambda(r_l)$; $\mu=\mu(r_l)$; штрих означает дифференцирование по r_l.

Компоненты вектора смещения $\mathbf{u}^{(l)}$ в неоднородном упругом покрытии l – го цилиндра являются периодическими функциями координаты φ_l с периодом 2π. Поэтому функции $u_r^{(l)}(r_l,\varphi_l)$ и $u_\varphi^{(l)}(r_l,\varphi_l)$ $(l=\pm1)$, удовлетворяющие уравнениям (8), будем искать в виде рядов Фурье

$$u_r^{(l)}(r_l,\varphi_l)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}U_{1n}^{(l)}(r_l)e^{in(\varphi_l-\varphi_0)},\quad u_\varphi^{(l)}(r_l,\varphi_l)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}U_{2n}^{(l)}(r_l)e^{in(\varphi_l-\varphi_0)}.\tag{9}$$

Подставляя выражения (9) в уравнения (8), получим следующую систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных функций $U_{1n}^{(l)}(r_l)$ и $U_{2n}^{(l)}(r_l)$ для каждого n:

$$\tilde{\mathbf{A}}_n^{(l)}\mathbf{U}_n^{(l)''}+\tilde{\mathbf{B}}_n^{(l)}\mathbf{U}_n^{(l)'}+\tilde{\mathbf{C}}_n^{(l)}\mathbf{U}_n^{(l)}=0;\quad l=\pm1,\tag{10}$$

где $\mathbf{U}_n^{(l)}=\left(U_{1n}^{(l)}(r_l),U_{2n}^{(l)}(r_l)\right)^T$; $\tilde{\mathbf{A}}_n^{(l)},\tilde{\mathbf{B}}_n^{(l)},\tilde{\mathbf{C}}_n^{(l)}$ — матрицы второго порядка.

$$\tilde{\mathbf{A}}_n^{(l)}=\begin{pmatrix}\lambda+2\mu & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix};\quad \tilde{\mathbf{B}}_n^{(l)}=\begin{pmatrix}\lambda'+2\mu'+\dfrac{\lambda+2\mu}{r_l} & in\dfrac{\lambda+\mu}{r_l}\\ in\dfrac{\lambda+\mu}{r_l} & \mu'+\dfrac{\mu}{r_l}\end{pmatrix};$$

$$\tilde{\mathbf{C}}_n^{(l)} = \frac{1}{r_l}\begin{pmatrix} \lambda' - \dfrac{\lambda+(2+n^2)\mu}{r_l} + \omega^2\rho r_l & in\left(\lambda' - \dfrac{\lambda+3\mu}{r_l}\right) \\ in\left(\mu' + \dfrac{\lambda+3\mu}{r_l}\right) & -\mu' - \dfrac{n^2\lambda+(2n^2+1)\mu}{r_l} + \omega^2\rho r_l \end{pmatrix}.$$

Искомые функции $\Psi_s^{(l)}$, $L^{(l)}$, $\Phi^{(l)}$, $u_r^{(l)}$ и $u_\varphi^{(l)}$ $(l = \pm 1)$ должны удовлетворять граничным условиям.

Граничные условия на внешней поверхности неоднородного покрытия l – го цилиндра заключаются в равенстве нормальных скоростей частиц упругой неоднородной среды и жидкости, равенстве на ней нормального напряжения и акустического давления, отсутствии касательных напряжений:

$$\text{при } r_l = r_1 \qquad -i\omega u_r^{(l)} = v_r, \quad \sigma_{rr}^{(l)} = -p, \quad \sigma_{r\varphi}^{(l)} = 0; \quad l = \pm 1. \tag{11}$$

На внутренней поверхности покрытия l – го цилиндра при переходе через границу раздела упругих сред должны быть непрерывны составляющие вектора смещения частиц, а также нормальные и тангенциальные напряжения:

$$\text{при } r_l = r_0 \qquad u_r^{(l)} = u_{0r}^{(l)}, \quad u_\varphi^{(l)} = u_{0\varphi}^{(l)}, \quad \sigma_{rr}^{(l)} = \sigma_{0rr}^{(l)}, \quad \sigma_{r\varphi}^{(l)} = \sigma_{0r\varphi}^{(l)}; \quad l = \pm 1. \tag{12}$$

Соотношения между компонентами тензора напряжений $\sigma_{rr}^{(l)}$, $\sigma_{r\varphi}^{(l)}$ в неоднородном покрытии l – го цилиндра и компонентами вектора смещения $\mathbf{u}^{(l)}$ имеют тот же вид, что и для однородного упругого материала. Только в этих соотношениях упругие постоянные λ_0 и μ_0 следует заменить на модули упругости $\lambda(r_l)$ и $\mu(r_l)$.

Для нахождения коэффициентов $A_n^{(l)}$, $B_n^{(l)}$, $C_n^{(l)}$ разложений (4-6) и функций $U_{1n}^{(l)}(r_l)$, $U_{2n}^{(l)}(r_l)$ в разложениях (9) из граничных условий воспользуемся теоремой сложения для волновых цилиндрических функций, которая позволяет волновую функцию $H_n(kr_l)e^{in\varphi_l}$, записанную в l – ой локальной системе координат ($l = 1$ либо $l = -1$), выразить через волновые функции, но записанные уже в другой, $(-l)$ – ой системе координат.

Теорема сложения имеет вид [29]

$$H_n(kr_l)e^{in\varphi_l} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} H_{n-m}(2kd)J_m(kr_{-l})e^{i(n-m)\varphi_{l,-l}+im\varphi_{-l}}, \quad 2d > r_{-l}. \tag{13}$$

Здесь через $\varphi_{l,-l}$ обозначена полярная координата начала O_{-l} $(-l)$ – ой локальной системы координат в l – ой локальной системе координат с началом в O_l. При этом $\varphi_{l,-l} = \dfrac{2+l}{2}\pi$.

Подставляя соответствующие выражения в первое и второе граничные условия (11), получаем две бесконечные системы уравнений (при $j = 1$ и $j = 2$) для определения коэффициентов $A_n^{(l)}$

$$A_n^{(l)} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_{jnm}^{(-l,l)} A_m^{(-l)} = F_{jn}^{(l)} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots; \quad l = \pm 1), \tag{14}$$

где $\alpha_{1nm}^{(-l,l)} = \dfrac{J_n'(kr_1)}{H_n'(kr_1)} H_{m-n}(2kd)e^{i(m-n)(\varphi_{-l,l}-\varphi_0)}$; $\quad F_{1n}^{(l)} = -Ai^n \dfrac{J_n'(kr_1)}{H_n'(kr_1)} e^{ikdl\sin\varphi_0} - \dfrac{i\omega U_{1n}^{(l)}(r_1)}{kH_n'(kr_1)}$;

$\alpha_{2nm}^{(-l,l)} = \dfrac{J_n(kr_1)}{H_n(kr_1)} H_{m-n}(2kd)e^{i(m-n)(\varphi_{-l,l}-\varphi_0)}$; $\quad F_{2n}^{(l)} = -Ai^n \dfrac{J_n(kr_1)}{H_n(kr_1)} e^{ikdl\sin\varphi_0} +$

$$+\frac{i}{\rho_1\omega}\left[\left(\lambda(r_1)+2\mu(r_1)\right)U_{1n}^{(l)\prime}(r_1) + \frac{1}{r_1}\left(U_{1n}^{(l)}(r_1) + inU_{2n}^{(l)}(r_1)\right)\right].$$

Здесь штрихи означают дифференцирование по аргументу функций.

Решение бесконечной системы линейных уравнений может быть найдено методом усечения [30]. При этом приближенные значения неизвестных находятся с заданной точностью путем сопоставления последовательных решений конечных систем, получаемых из бесконечной системы ее усечением с различными возрастающими значениями порядка усечения N.

Для регуляризации систем (14) сделаем в них замену неизвестных $A_n^{(l)}$ новыми неизвестными $a_{jn}^{(l)}$ $(j = 1, 2)$, положив при $j = 1$ и $j = 2$ соответственно [29]

$$A_n^{(l)} = J_n'(kr_1)a_{1n}^{(l)} \quad l = \pm 1 \tag{15}$$

и

$$A_n^{(l)} = J_n(kr_1)a_{2n}^{(l)} \quad l = \pm 1. \tag{16}$$

В результате системы N – го порядка усечения (при $j = 1$ и $j = 2$) будут иметь вид

$$a_{jn}^{(l)} + \sum_{m=-N}^{N} \hat{\alpha}_{jnm}^{(-l,l)} a_{jm}^{(-l)} = f_{jn}^{(l)} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, N; \quad l = \pm 1), \tag{17}$$

где $\hat{\alpha}_{1nm}^{(-l,l)} = \dfrac{J_m'(kr_1)}{J_n'(kr_1)}\alpha_{1nm}^{(-l,l)}$; $\quad f_{1n}^{(l)} = \dfrac{F_{1n}^{(l)}}{J_n'(kr_1)}$; $\quad \hat{\alpha}_{2nm}^{(-l,l)} = \dfrac{J_m(kr_1)}{J_n(kr_1)}\alpha_{2nm}^{(-l,l)}$; $\quad f_{2n}^{(l)} = \dfrac{F_{2n}^{(l)}}{J_n(kr_1)}$.
Системы (17) является системами $(4N + 2)$ уравнений с $(4N + 2)$ неизвестными $a_{jn}^{(+1)}$ и $a_{jn}^{(-1)}$.

Проведем преобразования, позволяющие понизить вдвое порядок систем (17) (при неизменном значении порядка усечения N) без усложнения вычислений матричных элементов и правых частей систем.

Учитывая, что $\varphi_{+1,-1} = \dfrac{3}{2}\pi$; $\quad \varphi_{-1,+1} = \dfrac{\pi}{2}$, получаем

$$\hat{\alpha}_{jnm}^{(-1,+1)} = (-1)^{m-n}\hat{\alpha}_{jnm}^{(+1,-1)} = \alpha_{jnm} \quad (j = 1, 2).$$

Тогда система (17) принимает вид

$$a_{jn}^{(+1)} + \sum_{m=-N}^{N} \alpha_{jnm} a_{jm}^{(-1)} = f_{jn}^{(+1)},$$

$$a_{jn}^{(-1)} + \sum_{m=-N}^{N} (-1)^{m-n}\alpha_{jnm} a_{jm}^{(+1)} = f_{jn}^{(-1)}.$$

Умножим второе уравнение системы на $(-1)^n$, и осуществим почленное сложение и вычитание уравнений полученной системы. В результате приходим к двум независимым системам линейных уравнений порядка $(2N + 1)$

$$\begin{gathered} \sum_{m=-N}^{N} [\delta_{nm} + (-1)^m \alpha_{jnm}] x_{jm} = X_{jn}, \\ \sum_{m=-N}^{N} [(\delta_{nm} - (-1)^m \alpha_{jnm}] y_{jm} = Y_{jn} \end{gathered} \tag{18}$$

$$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm N; \quad j = 1, 2)$$

с неизвестными $x_{jn} = a_{jn}^{(+1)} + (-1)^n a_{jn}^{(-1)}$, $\quad y_{jn} = a_{jn}^{(+1)} - (-1)^n a_{jn}^{(-1)}$
и правыми частями $X_{jn} = f_{jn}^{(+1)} + (-1)^n f_{jn}^{(-1)}$, $\quad Y_{jn} = f_{jn}^{(+1)} - (-1)^n f_{jn}^{(-1)}$,
где δ_{nm} — символ Кронекера.

Тогда

$$a_{jn}^{(+1)} = (x_{jn} + y_{jn})/2, \quad a_{jn}^{(-1)} = (-1)^n (x_{jn} - y_{jn})/2 \quad (j = 1, 2). \tag{19}$$

В матричном виде системы (18) запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{jx}\mathbf{x}_j &= \mathbf{E}_j + \mathbf{g}_j\mathbf{U}_1^{(+1)} + +\mathbf{s}_j\mathbf{U}_2^{(+1)} + \mathbf{t}_j\mathbf{U}_1^{(+1)'} + \overline{\mathbf{g}}_j\mathbf{U}_1^{(-1)} + \overline{\mathbf{s}}_j\mathbf{U}_2^{(-1)} + \overline{\mathbf{t}}_j\mathbf{U}_1^{(-1)'}, \\ \mathbf{Q}_{jy}\mathbf{y}_j &= \overline{\mathbf{E}}_j + \mathbf{g}_j\mathbf{U}_1^{(+1)} + \mathbf{s}_j\mathbf{U}_2^{(+1)} + \mathbf{t}_j\mathbf{U}_1^{(+1)'} - \overline{\mathbf{g}}_j\mathbf{U}_1^{(-1)} - \overline{\mathbf{s}}_j\mathbf{U}_2^{(-1)} - \overline{\mathbf{t}}_j\mathbf{U}_1^{(-1)'}, \end{aligned} \tag{20}$$

где $\mathbf{Q}_{jx} = (\delta_{nm} + (-1)^m \alpha_{jnm})_{(2N+1)\times(2N+1)}$; $\mathbf{Q}_{jy} = (\delta_{nm} - (-1)^m \alpha_{jnm})_{(2N+1)\times(2N+1)}$;

$$\mathbf{x}_j = (x_{-jN}, x_{j(-N+1)}, \ldots, x_{j0}, x_{j1}, \ldots, x_{jN})^T; \quad \mathbf{y}_j = (y_{-jN}, y_{j(-N+1)}, \ldots, y_{j0}, y_{j1}, \ldots, y_{jN})^T;$$

$$\mathbf{E}_j = \left(E_{-jN}, E_{j(-N+1)}, \ldots, E_{j0}, \ldots, E_{jN}\right)^T; \ \overline{\mathbf{E}}_j = \left(\overline{E}_{-jN}, \overline{E}_{j(-N+1)}, \ldots, \overline{E}_{j0}, \ldots, \overline{E}_{jN}\right)^T;$$

$$\mathbf{g}_j\mathbf{U}_1^{(+1)} = \left(g_{-jN}U_{1,-N}^{(+1)}(r_1), \ldots, g_{j0}U_{10}^{(+1)}(r_1), \ldots, g_{jN}U_{1N}^{(+1)}(r_1)\right)^T;$$

$$\mathbf{s}_j\mathbf{U}_2^{(+1)} = \left(s_{-jN}U_{2,-N}^{(+1)}(r_1), \ldots, s_{j0}U_{20}^{(+1)}(r_1), \ldots, s_{jN}U_{2N}^{(+1)}(r_1)\right)^T;$$

$$\mathbf{t}_j\mathbf{U}_1^{(+1)'} = \left(t_{-jN}U_{1,-N}^{(+1)'}(r_1), \ldots, t_{j0}U_{20}^{(+1)}(r_1), \ldots, t_{jN}U_{1N}^{(+1)'}(r_1)\right)^T;$$

$$\overline{\mathbf{g}}_j\mathbf{U}_1^{(+1)} = \left(\overline{g}_{-jN}U_{1,-N}^{(+1)}(r_1), \ldots, \overline{g}_{j0}U_{10}^{(+1)}(r_1), \ldots, \overline{g}_{jN}U_{1N}^{(+1)}(r_1)\right)^T;$$

$$\overline{\mathbf{s}}_j\mathbf{U}_2^{(+1)} = \left(\overline{s}_{-jN}U_{2,-N}^{(+1)}(r_1), \ldots, \overline{s}_{j0}U_{20}^{(+1)}(r_1), \ldots, \overline{s}_{jN}U_{2N}^{(+1)}(r_1)\right)^T;$$

$$\overline{\mathbf{t}}_j\mathbf{U}_1^{(+1)'} = \left(\overline{t}_{-jN}U_{1,-N}^{(+1)'}(r_1), \ldots, \overline{t}_{j0}U_{20}^{(+1)}(r_1), \ldots, \overline{t}_{jN}U_{1N}^{(+1)'}(r_1)\right)^T;$$

$$E_{jn} = e_{jn}^{(+1)} + (-1)^n e_{jn}^{(-1)}; \quad \overline{E}_{jn} = e_{jn}^{(+1)} - (-1)^n e_{jn}^{(-1)};$$

$$e_{1n}^{(l)} = -A\frac{i^n}{H_n'(kr_1)}e^{ikdl\sin\varphi_0}; \quad e_{2n}^{(l)} = -A\frac{i^n}{H_n(kr_1)}e^{ikdl\sin\varphi_0} \quad (l = \pm 1);$$

$$\overline{g}_{jn} = (-1)^n g_{jn}; \quad \overline{s}_{jn} = (-1)^n s_{jn}; \quad \overline{t}_{jn} = (-1)^n t_{jn} \quad (j = 1, 2);$$

$$g_{1n} = -\frac{i\omega}{kH_n'(kr_1)J_n'(kr_1)}; \quad g_{2n} = \frac{i}{\rho_1\omega r_1 J_n(kr_1)}; \quad s_{1n} = 0; \quad s_{2n} = -\frac{n}{\rho_1\omega r_1 J_n(kr_1)};$$

$$t_{1n} = 0; \quad t_{2n} = \frac{i[\lambda(r_1) + 2\mu(r_1)]}{\rho_1\omega J_n(kr_1)} \quad (n = 0, \pm 1, \ldots, \pm N).$$

Методом обратной матрицы найдем решения систем (20)

$$\mathbf{x}_j = (\mathbf{Q}_{jx})^{-1}\left[\mathbf{E}_j + \mathbf{g}_j\mathbf{U}_1^{(+1)} + \mathbf{s}_j\mathbf{U}_2^{(+1)} + \mathbf{t}_j\mathbf{U}_1^{(+1)'} + \overline{\mathbf{g}}_j\mathbf{U}_1^{(-1)} + \overline{\mathbf{s}}_j\mathbf{U}_2^{(-1)} + \overline{\mathbf{t}}_j\mathbf{U}_1^{(-1)'}\right),$$

$$\mathbf{y}_j = [\mathbf{Q}_{jy}]^{-1}\left[\overline{\mathbf{E}}_j + \mathbf{g}_j\mathbf{U}_1^{(+1)} + \mathbf{s}_j\mathbf{U}_2^{(+1)} + \mathbf{t}_j\mathbf{U}_1^{(+1)'} - \overline{\mathbf{g}}_j\mathbf{U}_1^{(-1)} - \overline{\mathbf{s}}_j\mathbf{U}_2^{(-1)} - \overline{\mathbf{t}}_j\mathbf{U}_1^{(-1)'}\right).$$

Запишем в в координатной форме последние два выражения, обозначая через q_{jnm}^x и q_{jnm}^y элементы обратных матриц $(Q_{jx})^{-1}$ и $(Q_{jy})^{-1}$ соответственно.

На основании формул (15), (16) и (19) находим выражения для коэффициентов $A_n^{(l)}$.

При $j = 1$ получаем

$$A_n^{(l)} = \frac{l^n}{2}J_n'(kr_1)\sum_{m=-N}^{N}\Big[(q_{1nm}^x E_{1m} + lq_{1nm}^y\overline{E}_{1m}) + (q_{1nm}^x + lq_{1nm}^y)g_{1m}U_{1m}^{(+1)}(r_1) +$$

$$+(q^x_{1nm} - lq^y_{1nm})\overline{g}_{1m}U^{(-1)}_{1m}(r_1)\Big] \quad (l = \pm 1). \tag{21}$$

При $j = 2$ будем иметь

$$A^{(l)}_n = \frac{l^n}{2}J_n(kr_1)\sum_{m=-N}^{N}\big\{(q^x_{2nm}E_{2m} + lq^y_{2nm}\overline{E}_{2m}) +$$

$$+(q^x_{2nm} + lq^y_{2nm})\Big[g_{2m}U^{(+1)}_{1m}(r_1) + s_{2m}U^{(+1)}_{2m}(r_1) + t_{2m}U^{(+1)'}_{1m}(r_1)\Big] +$$

$$+(q^x_{2nm} - lq^y_{2nm})\Big[\overline{g}_{2m}U^{(-1)}_{1m}(r_1) + \overline{s}_{2m}U^{(-1)}_{2m}(r_1) + \overline{t}_{2m}U^{(-1)'}_{1m}(r_1)\Big]\big\} \quad (l = \pm 1). \tag{22}$$

Приравнивая правые части уравнений (21) и (22), получаем краевое условие для нахождения частного решения системы (10)

$$\sum_{m=-N}^{N}\Bigg\{\Bigg[\frac{J'_n(kr_1)}{J_n(kr_1)}(q^x_{1nm}E_{1m} + lq^y_{1nm}\overline{E}_{1m}) - (q^x_{2nm}E_{2m} + lq^y_{2nm}\overline{E}_{2m})\Bigg] +$$

$$+\Bigg[\frac{J'_n(kr_1)}{J_n(kr_1)}(q^x_{1nm} + lq^y_{1nm})g_{1m} - (q^x_{2nm} + lq^y_{2nm})g_{2m}\Bigg]U^{(+1)}_{1m} +$$

$$+\Bigg[\frac{J'_n(kr_1)}{J_n(kr_1)}(q^x_{1nm} - lq^y_{1nm})\overline{g}_{1m} - (q^x_{2nm} - lq^y_{2nm})\overline{g}_{2m}\Bigg]U^{(-1)}_{1m} +$$

$$+\Bigg[\frac{J'_n(kr_1)}{J_n(kr_1)}(q^x_{1nm} + lq^y_{1nm})s_{1m} - (q^x_{2nm} + lq^y_{2nm})s_{2m}\Bigg]U^{(+1)}_{2m} +$$

$$+\Bigg[\frac{J'_n(kr_1)}{J_n(kr_1)}(q^x_{1nm} - lq^y_{1nm})\overline{s}_{1m} - (q^x_{2nm} - lq^y_{2nm})\overline{s}_{2m}\Bigg]U^{(-1)}_{2m} +$$

$$+\Bigg[\frac{J'_n(kr_1)}{J_n(kr_1)}(q^x_{1nm} + lq^y_{1nm})t_{1m} - (q^x_{2nm} + lq^y_{2nm})t_{2m}\Bigg]U^{(+1)'}_{1m} +$$

$$+\Bigg[\frac{J'_n(kr_1)}{J_n(kr_1)}(q^x_{1nm} - lq^y_{1nm})\overline{t}_{1m} - (q^x_{2nm} - lq^y_{2nm})\overline{t}_{2m}\Bigg]U^{(-1)'}_{1m}\Bigg\}_{r_l=r_1} = 0 \quad (l = \pm 1). \tag{23}$$

Из первых двух граничных условий (12) находим выражения для коэффициентов $B^{(l)}_n$ и $C^{(l)}_n$

$$B^{(l)}_n = \gamma_{1n}U^{(l)}_{1n}(r_0) + \gamma_{2n}U^{(l)}_{2n}(r_0), \quad C^{(l)}_n = \gamma_{3n}U^{(l)}_{1n}(r_0) + \gamma_{4n}U^{(l)}_{2n}(r_0) \quad (l = \pm 1), \tag{24}$$

где $\gamma_{1n} = k_\tau r_0 J'_n(k_\tau r_0)/\Delta_n$; $\gamma_{2n} = inJ_n(k_\tau r_0)/\Delta_n$; $\gamma_{3n} = inJ_n(k_l r_0)/\Delta_n$;

$\gamma_{4n} = -k_l r_0 J'_n(k_l r_0)/\Delta_n$; $\Delta_n = [k_l r_0 J'_n(k_l r_0)k_\tau r_0 J'_n(k_\tau r_0) - n^2 J_n(k_l r_0)J_n(k_\tau r_0)]/r_0$.

Заметим, что неизвестные коэффициенты $A^{(l)}_n$, $B^{(l)}_n$ и $C^{(l)}_n$ разложений (4-6) можно найти лишь после определения полей смещений в неоднородных покрытиях.

Из третьего граничного условия (11) и двух последних граничных условий (12) с учетом выражений (24) получаем еще три краевых условия для нахождения частного решения системы (10)

$$\Big[r_l U^{(l)'}_{2n}(r_l) + inU^{(l)}_{1n}(r_l) - U^{(l)}_{2n}(r_l)\Big]_{r_l=r_1} = 0 \quad (l = \pm 1), \tag{25}$$

$$\big\{[\lambda(r_l) + 2\mu(r_l)]U'_{1n}(r_l) + [\gamma_{1n}d_{1n} + \gamma_{3n}d_{2n} + \lambda(r_l)/r_l]U_{1n}(r_l) +$$

$$+[\gamma_{2n}d_{1n} + \gamma_{4n}d_{2n} + in\lambda(r_l)/r_l]U_{2n}(r_l)\big\}_{r_l=r_0} = 0, \tag{26}$$

$$\big\{\mu(r_l)/\mu_0 U'_{2n}(r_l) + [\gamma_{1n}d_{3n} + \gamma_{3n}d_{4n} + in\mu(r_l)/(\mu_0 r_l)]U_{1n}(r_l) +$$

$$+[\gamma_{2n}d_{3n}+\gamma_{4n}d_{4n}-\mu(r_l)/(\mu_0 r_l)]U_{2n}(r_l)\}_{r_l=r_0}=0, \qquad (27)$$

где $d_{1n}=k_l^2[\lambda_0 J_n(k_l r_0)-2\mu_0 J_n''(k_l r_0)]$; $\quad d_{2n}=2\mu_0 in[J_n(k_\tau r_0)-k_\tau r_0 J_n'(k_\tau r_0)]/r_0^2$;
$d_{3n}=in[J_n(k_l r_0)-2k_l r_0 J_n'(k_l r_0)]/r_0^2$; $\quad d_{4n}=[k_\tau^2 r_0^2 J_n''(k_\tau r_0)-k_\tau r_0 J_n'(k_\tau r_0)+n^2 J_n(k_\tau r_0)]/r_0^2$.

Таким образом, для нахождения искомых функций $U_{1n}^{(l)}(r_l)$ и $U_{2n}^{(l)}(r_l)$ ($l=\pm 1$) при $n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots,\pm N$ необходимо найти решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений (10), удовлетворяющих краевым условиям (23), (25) – (27).

Построенная краевая задача решается каким-либо численным или аналитическим методом. Затем по формуле (21) вычисляются коэффициенты $A_n^{(l)}$ ($n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots,\pm N$; $l=\pm 1$). В результате на основании (3) и (4) получаем аналитическое описание акустического поля, рассеянного цилиндрами

$$\Psi_s=\sum_{l=\pm 1}\sum_{n=-N}^{N} A_n^{(l)} H_n(kr_l)e^{in(\varphi_l-\varphi_0)}.$$

4. Заключение

Задача дифракции плоской звуковой волны на двух однородных упругих цилиндрах с непрерывно-неоднородными упругими покрытиями, находящимися в идеальной жидкости, представляет интерес не только для изучения дифракции звука на решетке цилиндров, но также служит необходимым элементом решения методом мнимых источников задачи о дифракции звука на одиночном однородном упругом цилиндре с неоднородным покрытием, находящимся вблизи идеальной плоской поверхности (акустически мягкой или абсолютно жесткой).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Faran J. J. Sound scattering by solid cylinders and spheres // J. Acoust. Soc. Amer. 1951. Vol. 23, № 4. P. 405-418.

2. Doolittle R. D., Uberall H. Sound scattering by elastic cylindrical shells // J. Acoust. Soc. Amer. 1966. Vol. 39, № 2. P. 272-275.

3. Flax L., Varadan V. K., Varadan V. V. Scattering of an obliquely incident acoustic wave by an infinite cylinder // J. Acoust. Soc. Amer. 1980. Vol. 68, № 6. P. 1832-1835.

4. Векслер Н. Д., Корсунский В. М., Рыбак С. А. Рассеяния плоской наклонно падающей волны круговой цилиндрической оболочкой // Акустический журн. 1990. Т. 36, вып. 1. С. 12-16.

5. Безруков А. В., Приходько В. Ю., Тютекин В. В. Рассеяние звуко-вых волн упругими радиально-слоистыми цилиндрическими телами // Акустический журн. 1986. Т. 32, вып. 6. С. 762-766.

6. Коваленко Г. П. К задаче о дифракции акустической волны на неоднородном твердом теле // Акустический журн. 1987. Т. 33, вып. 6. С. 1060-1063.

7. Скобельцын С. А., Толоконников Л. А. Рассеяние звуковых волн трансверсально-изотропным неоднородным цилиндрическим слоем // Акустический журн. 1995. Т. 41, № 1. С. 134-138.

8. Толоконников Л. А. Дифракция звуковых волн на неоднородном анизотропном полом цилиндре // Оборонная техника. 1998. № 4-5. С. 11-14.

9. Романов А. Г., Толоконников Л. А. Рассеяние плоской звуковой волны неоднородным упругим полым цилиндром в вязкой жидкости // Известия Тульского гос. ун-та. Естественные науки. 2009. Вып. 1. С. 61-70.

10. Толоконников Л. А., Романов А. Г. Дифракция цилиндрических звуковых волн на неоднородном полом цилиндре в вязкой жидкости // Известия Тульского гос. ун-та. Естественные науки. 2008. Вып. 2. С. 151-160.

11. Ларин Н. В., Толоконников Л. А. Дифракция плоской звуковой волны на неоднородном термоупругом цилиндрическом слое, граничащем с невязкими теплопроводными жидкостями // Прикладная математика и механика. 2009. Т. 73, вып. 3. С. 474-483.

12. Толоконников Л. А. Дифракция цилиндрических волн на неоднородной трансверсально-изотропной цилиндрической оболочке // Оборонная техника. 1998. № 4-5. С. 9-11.

13. Толоконников Л. А. Резонансное рассеяние звука трансверсально-изотропной неоднородной цилиндрической оболочкой // Известия Туль-ского гос. ун-та. Серия Геодинамика, физика, математика, термодинами-ка, геоэкология. 2006. Вып. 3. С. 106-114.

14. Ларин Н. В., Скобельцын С. А., Толоконников Л. А. Об определении линейных законов неоднородности цилиндрического упругого слоя, имеющего наименьшее отражение в заданном направлении при рассеянии звука // Известия Тульского гос. ун-та. Естественные науки. 2014. Вып. 4. С. 54-62.

15. Иванов В. П. Анализ поля дифракции на цилиндре с перфорированным покрытием // Акустический журн. 2006. Т. 52, № 6. С. 791-798.

16. Бобровницкий Ю. И. Нерассеивающее покрытие для цилиндра // Акустический журн. 2008. Т. 54, № 6. С. 879-889.

17. Бобровницкий Ю. И., Морозов К. Д., Томилина Т. М. Периодическая поверхностная структура с экстремальными акустическими свойствами // Акустический журн. 2010. Т. 56, № 2. С. 147-151.

18. Косарев О. И. Дифракция звука на упругой цилиндрической оболочке с покрытием // Проблемы машиностроения и надежности ма-шин. 2012. Т. 46, № 1. С. 34-37.

19. Романов А. Г., Толоконников Л. А. Рассеяние звуковых волн цилиндром с неоднородным упругим покрытием // Прикладная математика и механика. 2011. Т. 75, вып. 5. С. 850-857.

20. Толоконников Л. А. Дифракция цилиндрических звуковых волн на цилиндре с неоднородным упругим покрытием // Известия Тульского гос. ун-та. Естественные науки. 2013. Вып. 3. С. 202-208.

21. Толоконников Л. А. Рассеяние наклонно падающей плоской звуковой волны упругим цилиндром с неоднородным покрытием // Известия Тульского гос. ун-та. Естественные науки. 2013. Вып. 2. Часть 2. С. 265-274.

22. Ларин Н. В., Толоконников Л. А. Рассеяние плоской звуковой волны упругим цилиндром с дискретно-слоистым покрытием // Прикладная математика и механика. 2015. Т. 79. Вып. 2. С. 242-250.

23. Ларин Н. В. Дифракция плоской звуковой волны на термоупругом цилиндре с непрерывно-неоднородным покрытием // Известия Тульского гос. ун-та. Технические науки. 2017. Вып. 6. С. 154-173.

24. Ларин Н. В. О влиянии непрерывно-неоднородного покрытия на звукоотражающие свойства термоупругого цилиндра // Известия Тульского гос. ун-та. Технические науки. 2017. Вып. 9. Часть 1. С. 395-403.

25. Толоконников Л. А., Ларин Н. В., Скобельцын С. А. Моделирование неоднородного покрытия упругого цилиндра с заданными звукоотражающими свойствами // Прикладная механика и техническая физика. 2017. № 4. С. 189-199.

26. Толоконников Л. А. Определение законов неоднородности покрытия упругого цилиндра с цилиндрической полостью, обеспечивающих минимальное звукоотражение // Известия Тульского гос. ун-та. Технические науки. 2017. Вып. 4. С. 67-81.

27. Толоконников Л. А, Логвинова А. Л. Дифракция плоской звуковой волны на двух неоднородных цилиндрах с жесткими включениями // Известия Тульского гос. ун-та. Естественные науки. 2015. Вып. 1. С. 54-66.

28. Шендеров Е. Л. Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 352 с.

29. Иванов Е. А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск: Наука и техника, 1968. 584 с.

30. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т.2. М.: Наука, 1994. 560 с.

31. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.

REFERENCES

1. Faran, J. J. 1951, “Sound scattering by solid cylinders and spheres”, *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 23, no 4, pp. 405-418.

2. Doolittle, R. D. & Uberall, H. 1966, “Sound scattering by elastic cylindrical shells”, *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 39, no 2, pp. 272-275.

3. Flax, L., Varadan, V. K. & Varadan, V. V. 1980, “Scattering of an obliquely incident acoustic wave by an infinite cylinder”, *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 68, no 6, pp. 1832-1835.

4. Vexler, N. D., Korsunskii, V. M. & Rybak, S. A. 1990, “Scattering of an sloping incident plane wave by a circular cylindrical shell”, *Akust. Zhurnal*, vol. 36, no. 1, pp. 12-16.

5. Bezrukov, A. V., Prihod’ko, V. Yu. & Tyutekin, V. V. 1986, “Scattering of sound waves by elastic radially-layered cylindrical bodies”, *Akust. Zhurnal*, vol. 32, no. 6, pp. 762-766.

6. Kovalenko, G. P. 1987, “About a problem of diffraction of acoustic wave by an inhomogeneous solid body”, *Akust. Zhurnal*, vol. 33, no. 6, pp. 1060-1063.

7. Skobel’tsyn, S. A. & Tolokonnikov, L. A. 1995, “Scattering of sound waves by a transversely isotropic inhomogeneous cylinder layer”, *Acoustical Physics*, vol. 41, no 1, pp. 114-117.

8. Tolokonnikov, L. A. 1998, “Diffraction of sound waves by an inhomogeneous non-isotropic hollow cylinder”, *Oboron. Tekh.*, no 4-5, pp. 11-14.

9. Romanov A. G. & Tolokonnikov, L. A. 2009, "Scattering of a plane sound wave by an inhomogeneous elastic hollow cylinder in a viscous fluid", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no. 1, pp. 61-70.

10. Tolokonnikov, L. A. & Romanov A. G. 2008, "Diffraction of cylindrical sound waves by an inhomogeneous hollow cylinder in a viscous fluid", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no 2, pp. 151-160.

11. Larin, N. V. & Tolokonnikov, L. A. 2009, "Diffraction of a plane acoustic wave by a non-uniform thermoelastic cylindrical layer bounded by inviscid heat-conducting fluids", *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 73, no. 3, pp. 336-343.

12. Tolokonnikov, L. A. 1998, "Diffraction of cylindrical waves by an inhomogeneous transversely-isotropic cylindrical shell", *Oboron. Tekh.*, no 4-5, pp. 9-11.

13. Tolokonnikov, L. A. 2006, "The resonant sound scattering by a transversely-isotropic inhomogeneous cylindrical shell", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Geodinam., Phiz., Matem., Termodinam., Geoekolog.*, pp. 3, pp. 106-114.

14. Larin, N. V., Skobel'tsyn, S. A. & Tolokonnikov, L. A. 2014, "About definition of linear laws of heterogeneity of the cylindrical elastic layer having the least reflexion in the set direction at sound scattering", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no. 4, pp. 54-62.

15. Ivanov, V. P. 2006, "Analysis of the field diffracted by a cylinder with a perforated coating", *Acoustical Physics* vol. 52, no 6, pp. 683-690.

16. Bobrovnitskii, Yu. I. 2008, "A nonscattering coating for a cylinder", *Acoustical Physics*, vol. 54, no 6, pp. 758-768.

17. Bobrovnitskii, Yu. I., Morozov, K. D. & Tomilina, T. M. 2010, "A periodic surface structure with extreme acoustic properties", *Acoustical Physics*, vol. 56, no 2, pp. 127-131.

18. Kosarev, O. I. 2012, "Diffraction of sound by an elastic cylindrical shell with a coating", *Probl. Mashinostr. Nadezh. Mashin*, vol. 46, no 1, pp. 34-37.

19. Romanov, A. G. & Tolokonnikov, L. A. 2011, "The scattering of acoustic waves by a cylinder with a non-uniform elastic coating", *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 75, no. 5, pp. 595-600.

20. Tolokonnikov, L. A. 2013, "Diffraction of cylindrical sound waves by an cylinder with a non-uniform elastic coating", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no. 3, pp. 202-208.

21. Tolokonnikov, L. A. 2013, "Scattering of an obliquely incident plane sound wave by an elastic cylinder with a non-uniform covering", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no. 2-2, pp. 265-274.

22. Larin, N. V. & Tolokonnikov, L. A. 2015, "The scattering of a plane sound wave by an elastic cylinder with a discrete-layered covering", *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 79. no 2, pp. 164-169.

23. Larin, N. V. 2017, "Diffraction of a plane acoustic wave on the thermoelastic cylinder with the continuously inhomogeneous covering", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki*, no 6, pp. 154-173.

24. Larin, N. V. 2017, "Influence of the continuously inhomogeneous coating jn the thermoelastic cylinder sound-reflecting properties", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki*, no. 9-1, pp. 395-403.

25. Tolokonnikov, L. A., Larin, N. V. & Skobel'tsyn, S. A. 2017, "Modeling of inhomogeneous coating of an elastic cylinder with given sound-reflecting properties", *J. Appl. Mech. and Techn. Physics*, no 4, pp. 733-742.

26. Tolokonnikov, L. A. 2017, "Determination of the inhomogeneity laws for an covering of an elastic cylinder with cylindrical cavity,providing minimum sound reflexion", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki* , no 4, pp. 67-81.

27. Tolokonnikov, L. A. & Logvinova, A. L. 2015, "Diffraction of a plane sound wave on two non-uniform cylinders with rigid inserts", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no 1, pp. 54-66.

28. Shenderov, E. L. 1972, *"Wave problems of underwater acoustics"*, Sudostroenie, Leningrad, 352 p.

29. Ivanov, E. A. 1968, *"Diffraction of electromagnetic waves by two bodies"*, Nauka i tekhnika, Minsk, 584 p.

30. Sedov, L. I. 1994, *"Mechanics of a continuous medium"*, vol. 2, Nauka, Moscow, 560 p.

31. Nowacki, W. 1975, *"Teoria sprezystosci"*, Mir, Moscow, 872 p.

РЕДКОЛЛЕГИЯ

Том 19 Выпуск 1

Главный редактор

Чубариков Владимир Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математических и компьютерных методов анализа, декан механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.
e-mail: chubarik2009@live.ru

Заместители главного редактора:

Добровольский Николай Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой алгебры, математического анализа и геометрии Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого.
e-mail: dobrovol@tsput.ru

Михалев Александр Васильевич — доктор физико-математических наук, профессор механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.
e-mail: mikhalev@shade.msu.ru

Нижников Александр Иванович — доктор педагогических наук, профессор, заведующий кафедрой математической физики Московского педагогического государственного университета, заслуженный работник высшей школы РФ.
e-mail: ainizhnikov@mail.ru, nizhnikov.ai@mail.ru

Ответственный секретарь

Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры прикладной математики и информатики Тульского государственного университета.
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Члены редколлегии:

Артамонов Вячеслав Александрович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой Высшей алгебры механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.
e-mail: viacheslav.artamonov@gmail.com

Быковский Виктор Алексеевич — доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, заместитель директора Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института прикладной математики Дальневосточного отделения Российской академии наук (ИПМ ДВО РАН) по научной работе, директор Хабаровского отделения ИПМ ДВО РАН.
e-mail: vab@iam.khv.ru

Востоков Сергей Владимирович — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры алгебры и теории чисел Санкт-Петербургского университета, президент фонда им. Л. Эйлера.
e-mail: sergei.vostokov@gmail.com

Гвоздев Александр Евгеньевич — доктор технических наук, профессор, профессор кафедры технологии и сервиса Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого.

e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru

Георгиевский Дмитрий Владимирович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теории упругости механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.
e-mail: georgiev@mech.math.msu.su

Глухов Михаил Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, академик-секретарь отделения математических проблем криптографии Академии криптографии Российской Федерации.
e-mail: glukhovmm@rambler.ru

Голод Евгений Соломонович — доктор физико-математических наук, профессор, профессор механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.
e-mail: golod@mech.math.msu.su

Гриценко Сергей Александрович — доктор физико-математических наук, профессор кафедры Математика 1 Финансового университета при Правительстве РФ, профессор механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова.
e-mail: s.gritsenko@gmail.com

Демидов Сергей Сергеевич — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры теории вероятностей механико-математического факультета МГУ, заведующий кабинетом истории и методологии математики и механики, зав. Отделом истории физико-математических наук Института истории естествознания и техники РАН, Главный редактор «Историко-математических исследований», Президент Международной Академии истории науки.
e-mail: serd42@mail.ru

Дурнев Валерий Георгиевич — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой Ярославского государственного университета
e-mail: durnev@univ.uniyar.ac.ru

Есаян Альберт Рубенович — доктор педагогических наук, профессор, Институт стратегии развития образования РАО
e-mail: esayanalbert@mail.ru

Зубков Андрей Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, заведующий Отделом дискретной математики Математического института им. В. А. Стеклова РАН
e-mail: zubkov@mi.ras.ru

Иванов Валерий Иванович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики и информатики института прикладной математики и компьютерных наук Тульского государственного университета
e-mail: ivaleryi@mail.ru

Карташов Владимир Константинович — кандидат физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой Волгоградского государственного социально-педагогического университета
e-mail: kartashovvk@yandex.ru

Королёв Максим Александрович — доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник Математического института им. В. А. Стеклова РАН
e-mail: korolevma@mi.ras.ru

Кузнецов Валентин Николаевич — доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой Саратовского государственного университета имени Н. Г. Чернышевского.
e-mail: kuznetsovvn@info.sgu.ru

Латышев Виктор Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры Высшей алгебры механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.
e-mail: latyshev@basis.math.msu.su

Матиясевич Юрий Владимирович — доктор физико-математических наук, профессор, академик Российской академии наук, советник РАН Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова РАН, президент Санкт-Петербургского математического общества.
e-mail: yumat@pdmi.ras.ru

Мищенко Сергей Петрович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой алгебро-геометрических вычислений Ульяновского государственного университета.
e-mail: mishchenkosp@mail.ru

Нестеренко Юрий Валентинович — доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН, заведующий кафедрой теории чисел механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.
e-mail: nester@mi.ras.ru

Панин Владимир Алексеевич — доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАЕН, действительный член академии информатизации образования, ректор Тульского государственного педагогического университета имени Л. Н. Толстого.
e-mail: tgpu@tula.net

Фомин Александр Александрович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой алгебры Московского педагогического государственного университета.
e-mail: alexander.fomin@mail.ru

Чирский Владимир Григорьевич — доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой теории чисел Московского педагогического государственного университета, профессор механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.
e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Белов Алексей Яковлевич — доктор физико-математических наук, федеральный профессор математики, профессор университета Бар Илана, Рамат Ган, Израиль.
e-mail: Kanelster@gmail.com

Берник Василий Иванович (Белоруссия) — доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Института математики НАН Белоруси.
e-mail: bernik@im.bas-net.by

Касьянов Павел Олегович (Украина) — доктор физико-математических наук, профессор, Учебно-научный комплекс «Институт прикладного системного анализа» НТУУ «КПИ» МОН и НАН Украины.
e-mail: kasyanov@i.ua

Лауринчикас Антанас (Литва) — доктор физико-математических наук, профессор, Действительный член АН Литвы, заведующий кафедрой теории вероятностей и теории чисел Вильнюсского университета.
e-mail: antanas.laurincikas@mif.vu.lt

Лю Юнпин (Китай) — доктор наук, профессор, руководитель Исследовательского центра современного математического анализа Пекинского педагогического университета.
e-mail: ypliu@bnu.edu.cn

Мисир Джумаил оглы Марданов (Азербайджан) — доктор физико-математических наук, профессор, директор Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

e-mail: rmi@lan.ab.az

Рахмонов Зарулло Хусейнович (Таджикистан) — доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент АН Республики Таджикистан, директор Института математики Таджикской АН.
e-mail: zarullo_ r@tajik.net, zarullo-r@rambler.ru

Салиба Холем Мансур (Ливан) — кандидат физико-математических наук, доцент факультета естественных и прикладных наук университета Нотр-Дам-Луэз.
e-mail: qwe123@rocketmail.com

Табари Абдулло Хабибулло (Таджикистан) — доктор физико-математических наук, профессор, член корреспондент Академии наук Таджикистана, ректор Кулябского государственного университета имени Абуабдуллаха Рудаки.
e-mail: rektor@kgu.tj

THE EDITORIAL BOARD

Volume 19, Issue 1

The main editor

Chubarikov Vladimir Nikolaevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the Department of mathematical and computer methods of analysis, dean of the mechanics and mathematics faculty of the M. V. Lomonosov Moscow State University.
e-mail: chubarik2009@live.ru

The assistants of the main editor:

Dobrovolsky Nikolai Mihailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the Department algebra, calculus and geometry of the Tula State L. N. Tolstoy Pedagogical University.
e-mail: dobrovol@tsput.ru

Mihalev Alexander Vasilyevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the chair of theoretical Informatics of the mechanics and mathematics faculty of the M. V. Lomonosov Moscow State University.
e-mail: mikhalev@shade.msu.ru

Nijnikov Alexander Ivanovich — doctor of pedagogical sciences, professor, head of chair of the mathematical physics of the Moscow Pedagogical State University, honored worker of the higher school of the Russian Federation.
e-mail: ainizhnikov@mail.ru, nizhnikov.ai@mail.ru

The executive secretary

Dobrovolsky Nikolai Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, assistant of the department of applied mathematics and computer science of the Tula State University.
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

The members of the editorial board:

Artamonov Vyacheslav Alexandrovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of Higher algebra's chair of the mechanics and mathematics faculty of the M. V. Lomonosov Moscow State University.
e-mail: viacheslav.artamonov@gmail.com

Bezverhny Vladimir Nikolaevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, professor of the Tula State L.N. Tolstoy Pedagogical University.
e-mail: Vnbezv@rambler.ru

Bykovsky Victor Alekseevich — doctor of physico-mathematical Sciences, correspondent member of RAS, Deputy Director of the Federal state institution of science, Institute of applied mathematics of the far Eastern branch of the Russian Academy of Sciences (IPM RAS) on scientific work, Director of the Khabarovsk branch of the IPM DVO RAS.
e-mail: vab@iam.khv.ru

Vostokov Sergey Vladimirovich — doctor of physical and mathematical Sciences, Professor, Professor of algebra and number theory Department of St. Petersburg University, President of the Foundation. L. Euler.
e-mail: sergei.vostokov@gmail.com

Gvozdev Alexander Evgenievich — doctor of technical sciences, professor, professor of Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University.

e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru

Georgievsky Dmitry Vladimirovich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of Chair of Elasticity at Mechanical and Mathematical Department of the M. V. Lomonosov Moscow State University.
e-mail: georgiev@mech.math.msu.su

Gluhov Mihail Mihailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, academician-secretary of the cryptography mathematical problems' department in the Academy of Cryptography of the Russian Federation.
e-mail: glukhovmm@rambler.ru

Golod Evgeny Solomonovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, professor of the mechanics and mathematics faculty of the M. V. Lomonosov Moscow State University.
e-mail: golod@mech.math.msu.su

Gritsenko Sergey Alexandrovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor of the chair Mathematics of the 1 Financial University under the Government of the Russian Federation, professor of the mechanics and mathematics faculty of the M. V. Lomonosov Moscow State University.
e-mail: s.gritsenko@gmail.com

Demidov Sergey Sergeyivich — doctor of physical and mathematical Sciences, Professor, Professor of the Department of probability theory of mechanics and mathematics of Moscow state University, head of the Cabinet of history and methodology of mathematics and mechanics, head. Department of history of physical and mathematical Sciences of the Institute of history of science and technology RAS, editor-in-chief of "Historical and mathematical research President of the International Academy of history of science.
e-mail: serd42@mail.ru

Durnev Valery Georgievich — doctor of physical and mathematical Sciences, Professor, head of the Department of computer security and mathematical methods of data processing of the Yaroslavl statea public University. P. G. Demidov.
e-mail: durnev@univ.uniyar.ac.ru

Esayan Albert Rubenovich — doctor of pedagogical sciences, professor, Institute of Educational Development Strategy RAO.
e-mail: esayanalbert@mail.ru

Zubkov Andrey Mihailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, full member of the Academy of cryptography of the Russian Federation, head of the chair of mathematical statistics and random processes mechanics and mathematics faculty Moscow state University of a name of M. of Century University, head of the Department of discrete mathematics Mathematical Institute. Century A. Steklov mathematical Institute RAS.
e-mail: zubkov@mi.ras.ru

Ivanov Valery Ivanovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the chair of applied mathematics and Informatics of Institute of Applied Mathematics and Computer Science of the Tula State University.
e-mail: ivaleryi@mail.ru

Kartashov Vladimir Konstantinovich — candidate of physical and mathematical sciences, professor, head of the Department of algebra, geometry and Informatics of the Volgograd State Social and Pedagogical University.
e-mail: kartashovvk@yandex.ru

Korolev Maxim Aleksandrovich — doctor of physical and mathematical sciences, the leading researcher of the Department of Algebra and Number Theory of Steklov Mathematical Institute of RAS.

e-mail: korolevma@mi.ras.ru

Kuznetsov Valentin Nikolaevich — doctor of technical sciences, professor, head of the Department of computer algebra and theory of numbers of the N. G. Chernyshevsky Saratov State University.
e-mail: kuznetsovvn@info.sgu.ru

Latyshev Viktor Nikolaevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, professor of the mechanics and mathematics faculty of the M. V. Lomonosov Moscow State University.
e-mail: latyshev@basis.math.msu.su

Matiyasevich Yuri Vladimirovich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Full Member of Russian Academy of Sciences, RAS Counselor of St. Petersburg Department of Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, President of the St. Petersburg Mathematical Society.
e-mail: yumat@pdmi.ras.ru

Mishchenko Sergey Petrovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Professor, Department of applied mathematics of the Ulyanovsk State University.
e-mail: mishchenkosp@mail.ru

Nesterenko Yury Valentinovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, corresponding member of RAS, head of number theory's chair of the mechanics and mathematics faculty of the M. V. Lomonosov Moscow State University.
e-mail: nester@mi.ras.ru

Panin Vladimir Alexeyevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, corresponding member Russian Academy of Natural Sciences, Rector of Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University.
e-mail: tgpu@tula.net

Fomin Aleksandr Aleksandrovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the Department of algebra of the Moscow Pedagogical State University.

Chirsky Vladimir Grigoryevich — doctor of physical and mathematical sciences, associate professor, head of number theory's chair of the Moscow Pedagogical State University, professor of the mechanics and mathematics faculty of the M. V. Lomonosov Moscow State University.
e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Belov Alexey Yakovlevich — doctor of physical and mathematical sciences, federal professor, professor Bar Ilan University, Ramat Gan, Israel.
e-mail: Kanelster@gmail.com

Bernik Vasily Ivanovich (Belorussia) — doctor of physical and mathematical sciences, professor, the main researcher of the Belorussia Institute of Mathematics of NAS.
e-mail: bernik@im.bas-net.by

Deza Michel (France) — doctor of physical and mathematical sciences, professor, director of scientific research in the French National Centre for Scientific Research.
e-mail: Michel.Deza@ens.fr

Kasyanov Pavel Olegovich (Ukraine) — doctor of physical and mathematical Sciences, head of the research department at Educational and Scientific Complex "Institute for Applied System Analysis"of the National Technical University of Ukraine "Kyiv Politechnic Institute"of the MES of Ukraine and NAS of Ukraine.
e-mail: kasyanov@i.ua

Laurinchikas Antanas (Lithuania) — Full member of the AS in Lithuania, doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of probability theory's and number theory's chair of the Vilnius University.
e-mail: antanas.laurincikas@mif.vu.lt

Liu Yongping (China) — Ph.D, professor, head of the Research Center for Modern Analysis of Mathematics of the Beijing Normal University.
e-mail: ypliu@bnu.edu.cn

Misir Jumayil oglu Mardanov (Azerbaijan) — doctor of physical and mathematical sciences, professor, director of the institute of Mathematics and Mechanics of the National Academy of Sciences of Azerbaijan.
e-mail: rmi@lan.ab.az

Rahmonov Zarullo Huseinovich (Tajikistan) — doctor of physical and mathematical sciences, professor, corresponding member of the Republic of Tajikistan AS, director of the Institute of Mathematics of tne Tajik AS.
e-mail: zarullo_r@tajik.net, zarullo-r@rambler.ru

Saliba Holem Mansour (Lebanon) — Ph.D. Assistant Professors of faculty of natural & applied sciences of Notre Dame University Louaize
e-mail: qwe123@rocketmail.com

Tabari Abdullo Habibullo (Tajikistan) — doctor of physical and mathematical sciences, professor, corresponding member of the Republic of Tajikistan AS, rector of the Kulob State University named after Abuabdulloh Rudaki.
e-mail: rektor@kgu.tj

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ РУКОПИСЕЙ

Журнал "Чебышевский сборник" является общематематическим. В журнале публикуются оригинальные и обзорные работы по всем разделам современной математики и информатики, а также некоторым разделам механики на русском или английском языке.

Журнал "Чебышевский сборник" выходит четыре раза в год в одном томе из четырех выпусков.

Редакция журнала "Чебышевский сборник" предлагает авторам ознакомиться с данными правилами и придерживаться их при подготовке рукописей, направляемых в журнал.

Правила для авторов

1.1. Рукопись сопровождается краткой аннотацией на русском и английском языках, которая должна содержать не менее 250 слов, как на русском, так и на английском языках. Ключевые слова входят в аннотацию, но отделяются одной строкой.

Все материалы представляются в редакцию в электронном виде.

1.2. Текст статьи начинается с шифра УДК, затем следуют заглавие статьи, информация об авторах, аннотация.

Затем идет перевод на английский язык заглавия статьи, информации об авторах, аннотации.

Статья должна иметь следующую структуру: Введение, Основная часть из одного или нескольких разделов, Заключение.

Статья должна быть тщательно выверена и подписана всеми авторами "в печать" (присылается скан распечатки статьи).

Все страницы рукописи, включая таблицы, список литературы, рисунки и подписи к рисункам, следует пронумеровать. После списка литературы приводятся названия учреждений, в которых выполнена работа.

1.3. В отдельном документе указываются сведения о каждом из авторов: фамилия, имя, отчество — полностью, ученая степень, звание, должность, полное название учреждения, полный почтовый адрес, номер телефона с кодом города, адрес электронной почты (e-mail). Обязательно следует указать автора, ответственного за переписку и переговоры с редакцией.

1.4. Российские авторы представляют в редакцию акт комиссии, о том что статья не содержит сведений, связанных с государственной тайной, и может публиковаться в открытой печати.

1.5. Отклонения в оформлении рукописи от приведенных правил позволяют редколлегии принять решение о снятии с публикации статьи в текущем томе журнала (статья может быть опубликована в следующем томе).

2. Требования к оформлению рукописей

2.1. Редакция принимает к публикации статьи, подготовленные только в системе LaTeX2$_\varepsilon$; при этом в редакцию одновременно со сканом распечатки статьи представляются также

соответствующие файлы. Статьи, подготовленные на компьютере в других текстовых редакторах, а также машинописный или рукописный варианты не принимаются.

2.2. При подготовке статьи в LaTeX2$_\varepsilon$ следует использовать шаблон журнала (см. сайт журнала www.chebsbornik.ru).

В статье запрещается переопределять стандартные команды и окружения. Пример подготовки статьи находится на сайте журнала
www.chebsbornik.ru

2.3. Нумеруемые формулы необходимо выделять в отдельную строку. Номер формулы ставится у правого края страницы. Нумерация только арабскими цифрами в порядке возрастания с единицы. Нумеровать следует только те формулы, на которые в тексте имеются ссылки. Запрещаются прямые ссылки по номеру на формулы из других работ. Запрещается использовать в формулах буквы русского алфавита.

2.4. Все рисунки и таблицы должны иметь подпись. Файлы с рисунками необходимо представить в формате *.png. Максимальный размер рисунка или таблицы вместе с подписью не должен превышать 80% размера А4. Не допускается заканчивать статью рисунком или таблицей.

2.5. Список цитированной литературы оформляется в соответствии с ГОСТ 7.0.5-2008. Сокращение слов и словосочетаний на русском языке оформляется в соответствии с ГОСТ Р 7.0.12-2011, сокращение слов и словосочетаний на иностранных европейских языках — ГОСТ 7.11-2004.

2.6. Раздел REFERENCES оформляется в соответствии с Гарвардским стандартом.

TABLE OF CONTENTS

Volume 19 Issue 1

V. I. Bernik, N. V. Budarina, A. V. Lunevich, H. O'Donnell. Distribution of zeros of nondegenerate functions on short cuttings 5

I. V. Bondareva, M. Y. Luchin, V. H. Salikhov. Symmetrized polynomials in a problem of estimating of the irrationality measure of number $\ln 3$ 15

D. A. Bredikhin. On bases of identities for varieties of groupoids of relations 26

R. B. Garibov, I. G. Ovchinnikov. Axisymmetric deformation of a reinforced shell in the conditions of radiation exposure 35

N. M. Glazunov. Duality in abelian varieties and formal groups over local fields. 44

D. V. Gorbachev, V. I. Ivanov, E. P. Ofitserov, O. I. Smirnov. BThe second Logan extremal problem for the fourier transform over the eigenfunctions of the Sturm–Liouville operator 57

N. N. Dobrovol'skii. On monoids of natural numbers with unique factorization into prime elements 79

N. N. Dobrovol'skii, M. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, I. N. Balaba, I. Yu. Rebrova. About «zagrobelna the series» for the zeta function of monoids with exponential sequence of simple 106

V. N. Kuznetsov, O. A. Matveeva. Boundary behavior and the problem of analytic continuation of a certain class of Dirichlet series with multiplicative coefficients as an integral functions on the complex plane 124

A. Laurinčikas, A. Mincevič. Joint discrete universality for Lerch zeta-functions 138

E. S. Makarov, A. E. Gvozdev, G. M. Zhuravlev, A.G. Kolmakov, A. N. Sergeev, S. V. Sapozhnikov, A. D. Breki, D. V. Maliy, N. N. Dobrovolsky. Analysis of plasticity theory equations of powder metal systems 152

E. V. Mescherina, O. A. Pikhtilkova. The development of the concept of «artinian» for Lie algebras 167

S. P. Mishchenko, O. V. Shulezhko. Variety with fractional codimension growth and the Specht problem 176

E. P. Ofitserov. Motif based sequence classification 187

E. M. Rarova. Weighted number of points of algebraic net 200

S. A. Skobel'tsyn. Scattering of sound waves by an elastic ellipsoid with an inhomogeneous coating in the half-space with ideal surface 220

L. A. Tolokonnikov. Diffraction of a plane sound wave on two elastic cylinders with non-uniform coatings 238

РЕДКОЛЛЕГИЯ 255

THE EDITORIAL BOARD 259

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ РУКОПИСЕЙ 263