

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Научно-теоретический журнал

Издается с 2001 года

Выходит 4 раза в год

Свидетельство о регистрации

СМИ: ПИ № ФС77-47855

ISSN 2226-8383

Том XVII

Выпуск 4 (60)

Тула
2016

Учредитель: ФГБОУ ВО
«ТГПУ им. Л. Н. Толстого»

Каталог «Пресса России»
Подписной индекс 10642

Адрес редакции: 300026,
г. Тула, пр. Ленина, 125,
каб. 310

Тел: +79156812638,
8(4872)374051

E-mail: cheb@tspu.ru

URL:
<http://www.chebsbornik.ru>

В журнале публикуются оригинальные статьи по направлениям современной математики: теория чисел, алгебра и математическая логика, теория функций вещественного и комплексного переменного, функциональный анализ, дифференциальные уравнения, математическая физика, геометрия и топология, теория вероятностей и математическая статистика, численные методы, теория оптимизации и др. Также публикуются статьи о памятных датах и юбилеях.

Журнал включен в перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание ученых степеней кандидата наук и доктора наук (перечень ВАК), индексируются и/или реферируются: MathSciNet, Zentralblatt MATH, Russian Science Citation Index (RSCI), РЖ «Математика», «Mathematical Reviews», РИНЦ, Google Scholar Metrics.

Выпуск осуществлен при финансовой поддержке РФФИ, грант 15-01-01540а.

Журнал выходит под эгидой Министерства образования и науки Российской Федерации, Российской академии наук, Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Московского педагогического университета, Тульского государственного университета.

Главный редактор

В. Н. Чубариков (Россия, г. Москва)

Ответственный секретарь

Н. Н. Добровольский (Россия, г. Тула)

Заместители главного редактора: Н. М. Добровольский (Россия, г. Тула),
А. В. Михалёв (Россия, г. Москва), А. И. Нижников (Россия, г. Москва)

Редакционная коллегия:

В. А. Артамонов (Россия, г. Москва)
В. Н. Безверхний (Россия, г. Тула)
В. А. Быковский (Россия, г. Хабаровск)
М. М. Глухов (Россия, г. Москва)
Е. С. Голод (Россия, г. Москва)
С. А. Гриценко (Россия, г. Москва)
В. Г. Дурнев (Россия, г. Ярославль)
А. Р. Есаян (Россия, г. Тула)
А. М. Зубков (Россия, г. Москва)
В. И. Иванов (Россия, г. Тула)
В. К. Карташов (Россия, г. Волгоград)
В. Н. Кузнецов (Россия, г. Саратов)
М. А. Королёв (Россия, г. Москва)

В. Н. Латышев (Россия, г. Москва)
С. П. Мищенко (Россия, г. Ульяновск)
Ю. В. Нестеренко (Россия, г. Москва)
В. А. Панин (Россия, г. Тула)
А. А. Фомин (Россия, г. Москва)
В. Г. Чирский (Россия, г. Москва)
А. Я. Белов (Израиль, г. Рамат Ган)
В. И. Берник (Беларусь, г. Минск)
М. Деза (Франция, г. Париж)
П. О. Касьянов (Украина, г. Киев)
А. Лауринчикас (Литва, г. Вильнюс)
М. Дж. Марданов (Азербайджан, г. Баку)
З. Рахмонов (Таджикистан, г. Душанбе)

СОДЕРЖАНИЕ

Том 17 Выпуск 4

В. Н. Чубариков, Н. М. Добровольский Юбилей Чебышёвского сборника	5
В. Б. Беднова Об одном методе приближенного решения нелинейного уравнения теплопроводности	11
В. Н. Безверхний, Н. Б. Безверхняя, И. В. Добрынина, О. В. Инченко, А. Е. Устьян Об алгоритмических проблемах в группах Кокстера	23
А. Н. Васильев О доказательстве Н. П. Романова его аддитивной теоремы и ее аналогах	51
Р. Качинскайте, С. Рапимбергйте Смешанная совместная функциональная независимость для дзета-функции Римана и периодических дзета-функций Гурвица	57
И. Б. Кожухов, А. О. Петриков Инъективные и проективные полигоны над вполне 0-простой полугруппой	65
М. А. Королёв Методы оценок коротких сумм Клоостермана	79
В. Н. Кузнецов, Т. А. Кузнецова, Л. В. Бессонов Ограниченные полугруппы операторов и вопросы сходимости метода Бубнова–Галёркина для одного класса нелинейных уравнений пологих оболочек	110
В. Н. Кузнецов, О. А. Матвеева Аппроксимационный подход в некоторых задачах теории рядов Дирихле с мультипликативными коэффициентами	124
В. И. Субботин Об одном классе сильно симметричных многогранников	132
К. Тухлиев Среднеквадратическое приближение функций рядами Фурье–Бесселя и значения поперечников некоторых функциональных классов	141
В. Л. Усольцев Алгебры Риса и конгруэнц-алгебры Риса в одном классе алгебр с оператором и основной операцией почти единогласия	157
О. В. Чермных О drl -полугруппах и drl -полукольцах	167
N. V. Budarina, H. O'Donnell Problem of Nesterenko and method of Bernik	180
N. M. Glazunov On A. V. Malyshev's approach to Minkowski's conjecture concerning the critical determinant of the region $ x ^p + y ^p < 1$ for $p > 1$	185

ЮБИЛЕИ

70 лет Вячеславу Александровичу Артамонову	194
Ю. В. Нестеренко, В. А. Быковский, В. М. Бухштабер, В. Г. Чирский, В. Н. Чубариков, А. Лауринчикас, Н. М. Добровольский, Н. В. Бударина, И. В. Гайшун, В. В. Бересневич, Д. В. Васильев Василий Иванович Берник (к семидесятилетию)	203

Н. М. Добровольский, В. Г. Чирский, А. В. Жмулёва, В. Н. Чубариков, В. Х. Салихов, А. И. Галочкин, В. А. Быковский, В. И. Берник Нестеренко Юрий Валентинович (к 70-летию со дня рождения)	211
СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ	222
INFORMATION ABOUT THE AUTHORS	224
РЕДКОЛЛЕГИЯ	226
THE EDITORIAL BOARD	229
ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ РУКОПИСЕЙ	232
TABLE OF CONTENTS	240

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 17 Выпуск 4

УДК 51(091)

DOI 10.22405/2226-8383-2016-17-4-5-10

ЮБИЛЕЙ ЧЕБЫШЁВСКОГО СБОРНИКА

В. Н. Чубариков (г. Москва), Н. М. Добровольский (г. Тула)

Аннотация

Данная работа посвящена пятидесятилетию издания Чебышёвского сборника и выходу 60-ого выпуска журнала.

В статье описаны вопросы истории создания журнала. Описаны этапы становления. Рассказано о вкладе различных ученых в работу журнала.

Приводятся некоторые наукометрические показатели.

Ключевые слова: Чебышёвский сборник.

Библиография: 25 названий.

ANNIVERSARY CHEBYSHEVSKII SBORNIK

V. N. Chubarikov (Moscow)

Abstract

This work is devoted to the fifteenth edition of Chebyshevskii sbornik and output of the 60th issue of the magazine.

The article questions sanctified history of the magazine. We describe the stages of formation. It talked about the contribution of various scientists in the journal work.

Provides some scientometric indicators.

Keywords: Chebyshevskii sbornik.

Bibliography: 25 titles.

1. Немного истории

В 1993 году в сентябре месяце в г. Туле на базе Тульского государственного педагогического института имени Л. Н. Толстого прошла 1-ая международная научная конференция "Современные проблемы теории чисел и её приложения". Это было непростое время для страны. Тем не менее конференция прошла успешно и заложила традицию проведения таких конференций в новой России. Успех конференции в значительной степени был обусловлен огромной организационной работой, которую провёл программный комитет под руководством своего председателя — доктора физико-математических наук, профессора Сергея Борисовича Стечкина. Сергей Борисович в то время был главным редактором журнала "Математические заметки" и избранные труды конференции были изданы в 1994 году во 2-ом выпуске 55 тома "Математических заметок" [1]– [19].

Вторая конференция прошла в 1995 году в городе Воронеж. Сергей Борисович по состоянию здоровья не смог присутствовать на конференции и его представлял доктор физико-математических наук, будущий академик РАН Сергей Владимирович Конягин. Вскоре С. Б. Стечкин скончался и труды конференции не были изданы, только небольшой сборник тезисов.

В 1996 году была снова проведена конференция в городе Туле, теперь уже III международная. Эстафету по руководству программным комитетом взял на себя доктор физико-математических наук, профессор В. Н. Чубариков, который был в это время заместителем декана механико-математического факультета по науке. Надо отметить, что хотя декан факультета доктор-физико-математических наук, профессор Олег Борисович Лупанов сам лично не принимал участия в конференциях по теории чисел, но он вникал во все вопросы по организации этих конференций и оказывал существенную помощь. Конференция прошла на хорошем научном и организационном уровне, был издан неплохой сборник тезисов, но сборника трудов конференции не издавали. В кулуарах конференции многие сетовали на отсутствие специализированного журнала по теории чисел в России, в котором, в частности, можно было бы печатать труды конференции.

Наступил 2001 год и снова в г. Туле на базе Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого собралась, теперь уже IV-ая, международная конференция по теории чисел. Во время работы конференции 11 сентября произошёл чудовищный террористический акт в США, который потряс всё человечество, но участники конференции смогли достойно завершить работу конференции и принять очень важное решение об издании трудов конференции. Именно с целью издания трудов IV-ой международной конференции "Современные проблемы теории чисел и её приложения", посвящённой 180-ой годовщине со дня рождения академика Пафнутия Львовича Чебышёва и 110-ой годовщине со дня рождения академика Ивана Матвеевича Виноградова, и был организован Чебышёвский сборник.

Названия будущего журнала родилось само собой, наверное, потому, что Пафнутий Львович Чебышёв был организатором первого в России математического журнала – «Математический сборник».

2. Этапы становления

Пятнадцать лет тому назад, в 2001 году вышли первые два тома Чебышёвского сборника, в которых были изданы труды конференции. В 2002 году третий том вышел в двух выпусках и была принята сквозная нумерация выпусков. Начиная с 2003 года журнал стал выходить в 4 выпусках в каждом томе. Всего вышло 17 томов в 60 выпусках.

В становлении журнала сыграли важную роль многие отечественные математики: во-первых, это академик О. Б. Лупанов, который своим авторитетом поддержал саму идею издания регулярного журнала по теории чисел. От бюро Математики Российской академии наук на первоначальном этапе становления журнала важную роль сыграл тогдашний ученый секретарь бюро — Игорь Андреевич Лавров. Неоценимую лепту в будущую судьбу журнала внёс Сергей Владимирович Конягин, который по своим научным связям обеспечил реферирование журнала в «Mathematical Reviews» (США, American Mathematical Society), что повлекло включение его в базу данных MathSciNet, а через десяток лет это стало автоматическим фактором внесения журнала в список ВАК.

Для становления журнала определяющей была роль Российского фонда фундаментальных исследований. Дело в том, что первые два тома журнала были изданы из средств гранта РФФИ на проведение конференции, а затем эта финансовая поддержка продолжалась на протяжении всех пятнадцати лет издания журнала. С 2002 года Тульская школа теории чисел постоянно выигрывала исследовательские гранты РФФИ и часть средств из этих грантов выделяла на издание результатов своих исследований. Из этих средств финансировалось издание всех номеров Чебышёвского сборника на протяжении четырнадцати лет. В последний год финансирования журнала взял на себя учредитель — Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого.

Практически сразу ответственный секретарь редколлегии журнала доктор физико-матема-

тических наук, профессор Пихтильков разработал сайт Журнала <http://cheb.tsput.ru/>, который он поддерживал вплоть до 2009 года, когда он переехал жить и работать в город Оренбург. В 2010 году заработала новая версия сайта Журнала, которая была разработана выпускницей факультета математики, физики и информатики ТГПУ им. Л. Н. Толстого. У Е. В. Зеленцовой это было темой её дипломной работы, но она и сама публиковалась в журнале [20], [21].

В настоящее время фирмой "Некоммерческое партнерство «Национальный Электронно-Информационный Консорциум» (НП «НЭИКОН»)" разработан новый сайт журнала <http://www.chebsbornik.ru/jour> в соответствии с международными требованиями. Эта работа выполнена в связи с предполагаемой в ближайшее время подачей заявки на включение в Scopus.

Необходимо отметить, что журнал достаточно хорошо представлен в отечественном Интернете: электронная версия журнала размещена в открытом доступе на Общероссийском портале (<http://www.mathnet.ru>) и в Научной электронной библиотеке (<http://elibrary.ru>). Журнал также представлен в научной библиотеке открытого доступа «КИБЕРЛЕНИНКА» <http://cyberleninka.ru/>.

Ещё одно новшество связано с организацией "Библиотеки Чебышёвского сборника", которая стала неотъемлемой частью журнала. В этом разделе, например, размещаются Труды и сборники материалов конференций по математике и физике, которые проводятся на базе Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого.

С самого начала функционирования первого сайта журнала на нём были организованы странички международных конференций по теории чисел, проводимых в ТГПУ им. Л. Н. Толстого. Это естественная организация работы, так как журнал первоначально организовывался по решению конференции с целью отражения научной жизни в области теории чисел.

Ещё одним начинанием, связанным с журналом, является направление ПОИВС. Более подробно об этом можно прочитать в [22]– [25].

3. Редколлегия журнала

Формирование редколлегии в 2001 году взял на себя будущий ответственный секретарь редколлегии Сергей Алексеевич Пихтильков. В неё вошли: В. А. Артамонов, Г. И. Архипов, В. Н. Безверхний, М. М. Глухов, Е. С. Голод, Н. М. Добровольский, А. М. Зубков, В. И. Иванов, В. Н. Латышев, Д. А. Митькин, Ю. В. Нестеренко, А. Л. Шмелькин. Ответственным редактором первого тома был В. Н. Чубариков. Редактором второго тома был В. Н. Безверхний. Первый том содержал 8 статей по теории чисел, а второй том — 5 по алгебре, одну по теории алгоритмов, три по теории чисел и одну по теории функций.

Первые два тома вышли как "научные труды по математике". Регулярный выпуск Чебышёвского сборника как научного журнала начался уже в 2002 году с выхода третьего тома в двух выпусках. Расширился состав редакционной коллегии. Появились должности — главный редактор (В. Н. Чубариков), заместители главного редактора (Н. М. Добровольский, А. В. Михалёв), ответственный секретарь (С. А. Пихтильков). В члены редколлегии от ТГПУ вошёл профессор А. Р. Есаян.

С 2003 года журнал стал выходить регулярно — один том в 4 выпусках.

В 2007 году редколлегия понесла первую тяжёлую утрату. После продолжительной, тяжёлой болезни скончался доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теории чисел МПГУ, председатель диссертационного совета Дмитрий Алексеевич Митькин. Он относился к числу активных организаторов науки, принимал активное участие в организации математических конференций, был активным автором Чебышёвского сборника.

В 2010 в редакционной коллегии был добавлен ещё один заместитель главного редактора, представитель МПГУ профессор Нижников А. И., который в то время являлся первым

проректором МПГУ. В конце 2012 года была проведена работа по расширению состава редколлегии и 1 выпуск 14 тома вышел с расширенным международным составом. Из России вошли профессора: В. А. Быковский, С. А. Гриценко, В. Г. Дурнев, В. К. Карташов, М. А. Королёв, В. Н. Кузнецов, С. П. Мищенко, А. А. Фомин, В. Г. Чирский; из Беларуси В. И. Берник, из Франции М. Деа, из Украины П. О. Касьянов, из Литвы А. Лауринчикас, из Таджикистана З. Рахмонов. В 2015 году в редколлегию вошли ректор ТГПУ им. Л. Н. Толстого профессор В. А. Панин, из Азербайджана М. Дж. Марданов. В 2016 году в редколлегию вошёл представитель Израиля А. Я. Белов.

К сожалению в последние годы редакционная коллегия понесла непоправимые утраты.

14 марта 2013 года не стало Геннадия Ивановича Архипова — доктора физико-математических наук, профессора, ведущего научного сотрудника Математического института РАН им. В. А. Стеклова, который стоял у истоков журнала и внёс неоценимый вклад в организацию традиционных международных конференций по теории чисел в России.

В конце 2015 года в декабре месяце ушли сразу два члена редколлегии: профессора А. Л. Шмелькин и С. А. Пихтильников. А через год трагически погиб в Париже профессор М. Деа.

Начиная с января 2016 года обязанности ответственного секретаря выполняет Н. Н. Добровольский. В настоящее время решается непростая задача приведения журнала к международным требованиям. Начиная с настоящего номера всем статья в журнале будут присваиваться номера DOI. Все выполняемые работы направлены на то, чтобы в ближайшее время подать заявку на включение журнала в Scopus.

4. Наукометрические показатели

«Чебышёвский сборник» включен в международные базы данных Американского математического общества MathSciNet (MSN), реферативную базу данных по математике Zentralblatt MATH (zbMATH) FIZ Карлсруэ Института информационной инфраструктуры Лейбница (FIZ Karlsruhe, дистрибьютер — компания Springer).

Полные тексты статей журнала представлены на Общероссийском математическом портале Math-Net.Ru и в Научной электронной библиотеке eLibrary.ru.

В 2015 году «Чебышёвский сборник» был включен в состав российской коллекции Russian Science Citation Index (RSCI) на платформе Web of Science.

Высокие наукометрические показатели журнала в Российском индексе научного цитирования свидетельствуют о его востребованности и авторитетности в научном сообществе. Журнал имеет двухлетний импакт-фактор равный 0,238 и занимает 59 место в рейтинге SCIENCE INDEX по тематике «Математика» из 103 изданий, представленных в РИНЦ.

5. Заключение

Анализируя краткую историю создания и развития журнала Чебышёвский сборник, можно констатировать, что журнал стал научным явлением в математической научной жизни России. Пройден достаточно непростой путь. Редколлегия с оптимизмом смотрит в будущее и уверена что вместе с корпусом авторов и научных рецензентов сможет и дальше вносить существенный вклад в развитие отечественной и мировой математики.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. В. С. Анашин. Равномерно распределенные последовательности целых p -адических чисел // Матем. заметки, 1994. Т. 55, №2. С. 3–46.

2. Д. Грейвс Представление числа суммой двух четвертых степеней // Матем. заметки, 1994. Т. 55, №2. С. 47–58.
3. С. А. Гриценко Уточнение одной константы в плотностной теореме // Матем. заметки, 1994. Т. 55, №2. С. 59–61.
4. В. В. Евликов Скорость сходимости к нормальному закону распределения // Матем. заметки, 1994. Т. 55, №2. С. 62–71.
5. С. Ш. Кожегельдинов Об основных героновых треугольниках // Матем. заметки, 1994. Т. 55, №2. С. 72–79.
6. В. А. Колывагин О модулярной гипотезе и последней теореме Ферма // Матем. заметки, 1994. Т. 55, №2. С. 80–82.
7. Н. М. Коробов Квадратурные формулы с комбинированными сетками // Матем. заметки, 1994. Т. 55, №2. С. 83–90.
8. В. И. Нечаев К вопросу о сложности детерминированного алгоритма для дискретного логарифма // Матем. заметки, 1994. Т. 55, №2. С. 91–101.
9. А. И. Павлов Арифметические проблемы комбинаторного анализа // Матем. заметки, 1994. Т. 55, №2. С. 102–108.
10. Е. И. Пантелеева О средних значениях некоторых арифметических функций // Матем. заметки, 1994. Т. 55, №2. С. 109–117.
11. У. М. Пачев О числе классов гауссова рода, арифметический минимум которых делится на квадрат заданного нечетного числа // Матем. заметки, 1994. Т. 55, №2. С. 118–127.
12. Э. Станкус Предельная теорема с весом для квадратичных LL-функций Дирихле // Матем. заметки, 1994. Т. 55, №2. С. 128–129.
13. С. Б. Стечкин Некоторые экстремальные свойства тригонометрических сумм // Матем. заметки, 1994. Т. 55, №2. С. 130–143.
14. Н. М. Тимофеев, М. Б. Хрипунова Распределение чисел с заданным числом простых делителей в прогрессиях // Матем. заметки, 1994. Т. 55, №2. С. 144–156.
15. Ш. Х. Тутушев О распределении чисел специального вида // Матем. заметки, 1994. Т. 55, №2. С. 157–161.
16. А. Л. Чекин О новом подходе в выборе параметров двумерного решета с весами // Матем. заметки, 1994. Т. 55, №2. С. 162–173.
17. А. Б. Шидловский О линейной независимости значений ЕЕ-функций в алгебраических точках // Матем. заметки, 1994. Т. 55, №2. С. 174–185.
18. С. Б. Стечкин Информация // Матем. заметки, 1994. Т. 55, №2. С. 186–187.
19. Решение Международной конференции “Современные проблемы теории чисел” // Матем. заметки, 1994. Т. 55, №2. С. 187.
20. А. С. Герцог, Е. Д. Ребров, Е. В. Триколич О методе К. К. Фролова в теории квадратурных формул // Чебышевский сб. 2009. Т. 10, вып. 2. С. 10–54.

21. Е. В. Триколич, Е. И. Юшина. Цепные дроби для квадратических иррациональностей из поля $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ // Чебышевский сб. 2009. Т. 10, вып. 1. С. 77–94.
22. Басалов Ю. А., Басалова А. Н. ПОИВС: Архитектура и этапы создания // Чебышевский сборник. 2013. Т. 14, вып. 4(48). С. 13–25.
23. Л. П. Добровольская, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский. Проблемно ориентированная информационно вычислительная система ТМК (теоретико-числовой метод Коробова) // Роль университетов в поддержке гуманитарных научных исследований: Материалы V Междунар. науч.-практ. конф.: В 2 т. / Отв. ред. О. Г. Вронский. Тула: Изд-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого. 2010. Доп. том. С. 16–28.
24. Добровольский Н. М. Проблемно ориентированная информационно вычислительная система (ПОИВС) как индикатор эффективности научной школы // Всероссийская научно-практическая конференция «Совершенствование системы взаимодействия Российского фонда фундаментальных исследований и субъектов Российской Федерации в вопросах проведения региональных и молодежных конкурсов» г. Уфа 2016. Издательство «Российский фонд фундаментальных исследований». 2016. С. 160–162.
25. Добровольский Н. М., Реброва И. Ю., «ПОИВС “ТМК” и информационно-математическая подготовка студентов и аспирантов в области теоретико-числовых методов приближенного анализа” // Роль университетов в поддержке гуманитарных научных исследований: Материалы V Междунар. науч.-практ. конф.: В 2 т. / Отв. ред. О. Г. Вронский. Тула: Изд-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого. 2010. Доп. том. С. 29–36.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Тульский государственный педагогический университет имени Л. Н. Толстого

Получено 4.12.2016 г.

Принято в печать 12.12.2016 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 17. Выпуск 4.

УДК 539.3

DOI 10.22405/2226-8383-2016-17-4-11-22

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ
НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

В. Б. Беднова (г. Москва)

Аннотация

В данной работе рассматривается одномерная нестационарная задача теплопроводности, моделирующая процесс быстрого локального нагрева образца балочного типа по боковой поверхности. При этом характер нагрева таков, что можно выделить единственное определенное направление, в котором распространяется тепло.

Температурные поля определяются приближенным методом, основанным на идее теплового фронта. Решение ищется в виде степенного ряда по координате с коэффициентами, зависящими от времени. Границы фронта распространения тепла как функции времени определяются из условия интегрального удовлетворения уравнению теплопроводности.

Рассматриваемые температурные поля возникают во многих технологических процессах, например, при лазерной обработке материалов, когда из-за больших градиентов температур могут возникать температурные напряжения, приводящие к микрорастрескиванию внутренних слоев или разрушению элементов конструкций. Аналитический вид решения задачи теплопроводности позволяет получить аналитические выражения для температурных напряжений и в дальнейшем облегчает анализ результатов.

В работе получены решения задач с граничными условиями первого и второго родов для двух монотонных и одной немонотонной зависимостей коэффициента теплопроводности от температуры. Проведено сравнение полученного решения нестационарной линейной задачи с точным и показана приемлемость метода для дальнейшего использования.

Ключевые слова: физическая нелинейность уравнения теплопроводности, приближенное решение уравнения теплопроводности, тепловой фронт.

Библиография: 16 названий.

ON A METHOD FOR APPROXIMATE SOLUTION
NONLINEAR HEAT CONDUCTION EQUATION

V. B. Bednova (Moscow)

Abstract

In this paper a one-dimensional non-stationary heat conduction problem, modeling the process of rapid local heating of the sample beam type on the lateral surface is considered. The character of heating is such that it is possible to allocate only a certain direction of the heat propagation.

Temperature fields are determined by an approximate method based on the idea of the thermal front. The solution is sought in the form of a power series in the coordinate with coefficients depending on time. The boundaries of the front heat distribution as a function of time are determined by the condition of the integral satisfaction of the heat conduction equation.

Considered temperature fields arise in many industrial processes, such as laser material processing, when due to large temperature gradients can arise thermal stresses, leading to microcracking inner layers or the destruction of structural elements. Analytical view of the heat conduction problem's solution allows to obtain analytical expressions for the thermal stresses and further facilitates the results analysis.

The paper presents the solution of problems with boundary conditions of the first and second kinds for two monotonic and one non-monotonic dependencies of the thermal conductivity coefficient on temperature. The approximate solution and the exact solution of the non-stationary linear problem are compared and shows the suitability of the method for future use.

Keywords: Physical non-linearity of the heat conduction equation, approximate solution of the heat conduction equation, thermal front.

Bibliography: 16 titles.

1. Введение

Известно, что классическое уравнение притока тепла при описании процессов теплопередачи механизмом теплопроводности дает не соответствующую действительности бесконечную скорость распространения возмущений. Кроме того, во многих прикладных задачах граничные условия невозможно задать с высокой степенью точности. Погрешность вполне может достигать 10 – 20%. Поэтому в реальных процессах актуальным может являться построение приближенных решений, удовлетворяющих некоторым интегральным энергетическим условиям.

В работе предлагается приближенный метод решения нелинейного уравнения теплопроводности с различными зависимостями коэффициента теплопроводности от температуры. Метод основывается на работах [1, 9, 14], развитых для линейного уравнения теплопроводности. В работе [15] с помощью приближенного решения уравнения теплопроводности показана возможность возникновения зон макроразрушения при локальном импульсном нагреве диска.

Рассматривается безразмерное уравнение теплопроводности

$$T_\tau = (K(T)T_x)_x,$$

где T , τ , x — соответственно безразмерные температура, время, координата, $K(T)$ — безразмерный коэффициент теплопроводности. Безразмеривание задачи теплопроводности проведено в работе [8], зависимость размерной температуры от безразмерной имеет вид $T = \frac{\theta - \theta_0}{\theta_m - \theta_0}$, где θ_0 — температура среды, θ_m — температура плавления материала. Во всех задачах начальная (лабораторная) температура $T|_{t=0}$ равна нулю. Также при решении используется понятие границы теплового фронта $l(\tau)$ [14, 15, 16], которую можно интерпретировать как линию уровня пренебрежимо малой температуры. Функция $l(\tau)$ определяется из условия интегрального удовлетворения уравнению теплопроводности.

2. Построение приближенных решений линейной задачи теплопроводности

Рассмотрим линейную задачу ($K(T) = 1$), моделирующую процесс нагрева балки по границе $x = 0$ с постоянной по времени температурой $T_0 = 1$, причем на границе теплового фронта $l(\tau)$ температура $T(\tau, x)$ и поток $T_x(\tau, x)$ считаются равными нулю:

$$\begin{cases} T_\tau = T_{xx} \\ T|_{x=0} = 1 \\ T|_{x=l(\tau)} = 0 \\ T_x|_{x=l(\tau)} = 0. \end{cases}$$

Перейдем от переменных (τ, x) к переменным (t, z) следующим образом:

$$\begin{cases} z &= x - l(\tau) \\ t &= \tau. \end{cases} \quad (1)$$

Преобразования производных в этом случае:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z}; \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial z^2}; \quad \frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial t} - l'(t) \frac{\partial}{\partial z}.$$

В новых переменных задача имеет вид

$$\begin{cases} T_t - l'(t)T_z &= T_{zz} \\ T|_{z=-l(t)} &= 1 \\ T|_{z=0} &= 0 \\ T_z|_{z=0} &= 0. \end{cases} \quad (2)$$

Точные решения уравнения теплопроводности хорошо аппроксимируются степенными функциями или многочленами, содержащими три-четыре слагаемых [5]. Поэтому приближенные решения будем искать в виде степенных рядов по координате z , ограниченных сначала до трех, потом — до четырех слагаемых.

Сначала возьмем

$$T(t, z) = \begin{cases} u_0(t) + u_1(t)z + u_2(t)\frac{z^2}{2}, & \text{если } -l(t) < z < 0; \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases} \quad (3)$$

Из граничных условий задачи (2) при учете (3) получаем $u_0 = 0$; $u_1 = 0$; $u_2 = \frac{2}{l^2(t)}$, откуда $T(t, z) = \frac{z^2}{l^2(t)}$ при $-l(t) < z < 0$.

Для нахождения $l(t)$ подставим данное решение в уравнение из (2), проинтегрируем полученное выражение в пределах от $-l(t)$ до 0 и приравняем к нулю:

$$\int_{-l(t)}^0 \left(-\frac{2l'(t)}{l^3(t)}z^2 - \frac{2l'(t)}{l^2(t)}z - \frac{2}{l^2(t)} \right) dz = -\frac{2l'(t)}{l^3(t)} \frac{l(t)^3}{3} + \frac{2l'(t)}{l^2(t)} \frac{l^2(t)}{2} - \frac{2}{l^2(t)} l(t) = 0.$$

Получим дифференциальное уравнение на $l(t)$: $ll' = 6$, откуда $\frac{l^2}{2} = 6t + c$. Так как $l(0) = 0$, то $c = 0$ и $l(t) = 2\sqrt{3t}$.

В итоге, когда ряд ограничен тремя членами, в прогретой зоне получаем $T(t, z) = \frac{z^2}{12t}$, или

$$T(\tau, x) = \frac{(x - 2\sqrt{3\tau})^2}{12\tau}.$$

Теперь будем искать решение в виде

$$T(t, z) = \begin{cases} u_0(t) + u_1(t)z + u_2(t)\frac{z^2}{2} + u_3(t)\frac{z^3}{6}, & \text{если } -l(t) < z < 0; \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases} \quad (4)$$

В данном случае у нас четыре неизвестных функции u_i , $i = 0, 1, 2, 3$.

При тех же граничных условиях получаем

$$u_0 = 0; \quad u_1 = 0; \quad u_2 \frac{l^2(t)}{2} - u_3 \frac{l^3(t)}{6} = 1. \quad (5)$$

Четвертое условие получим, продифференцировав уравнение теплопроводности задачи (2) по z и положив $z = 0$ [2]:

$$T_{tz} - l'(t)T_{zz} = T_{zzz},$$

откуда при учете (4) и (5) $-2l'(t)u_2 = 6u_3$.

Таким образом $u_0 = 0$, $u_1 = 0$, $u_2 = \frac{3}{l^2(3+ll')}$, $u_3 = -\frac{l'}{l^2(3+ll')}$ и решение (2) при $-l(t) < z < 0$ имеет вид

$$T(t, z) = \frac{3}{l^2(3+ll')}z^2 - \frac{l'}{l^2(3+ll')}z^3.$$

Аналогично предыдущему случаю получаем выражение для подынтегральной функции

$$L(T) = -\frac{6}{l^2(3+ll')} - \frac{3l'}{l^2(3+ll')}z + \frac{3l^2l'^3 - 18l' - 3l^2ll''}{l^3(3+ll')^2}z^2 - \frac{3ll'' - 3ll'^3 - 6l'^2}{l^3(3+ll')^2}z^3,$$

интегрируя которое по z от $-l(t)$ до 0 и приравнявая к 0 получаем уравнение на $l(t)$:

$$l^3l'^3 - l^3l'' - 30ll' - 72 = 0. \quad (6)$$

Данное дифференциальное уравнение можно решить, сначала понизив порядок дифференцирования с помощью замены $l' = p(l)$, $l'' = p'(l)p(l)$. Получим дифференциальное уравнение $l^3pp' - l^3p^3 + 30lp + 72 = 0$. Решение этого дифференциального уравнения получаем в неявном виде: $lnl - c_1 - \frac{1}{3}ln(pl + 3) - \frac{1}{15}ln(pl - 6) + \frac{2}{5}ln(pl + 4) = 0$. Данный вид позволяет получить достаточно точную зависимость функции теплового фронта от температуры.

Также для нахождения $l(t)$, удовлетворяющей (6), можно предположить, что $l(t) = k\sqrt{t}$. Тогда, подставив $l(t)$ в (6), получим уравнение на k : $k^6 + 2k^4 - 120k^2 - 576 = 0$, откуда $k = 2\sqrt{3}$ и $l(t) = 2\sqrt{3t}$.

Тогда

$$T(t, z) = \frac{1}{36t}z^2 - \frac{1}{36\sqrt{3t}^{\frac{3}{2}}}z^3,$$

или, перейдя к переменным (τ, x)

$$T(\tau, x) = \frac{1}{36\tau}(x - 2\sqrt{3\tau})^2 - \frac{1}{36\sqrt{3\tau}^{\frac{3}{2}}}(x - 2\sqrt{3\tau})^3. \quad (7)$$

Проведем сравнение полученных приближенных решений с точным решением аналогичной задачи для полуограниченного твердого тела [8]. Данное сравнение корректно, потому что нас интересуют промежутки времени, когда тело еще не прогрелось полностью и температура на второй границе практически не изменилась. В этом случае применимо решение для полуограниченного твердого тела:

$$T(\tau, x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{\tau}}} \exp(-\xi^2) d\xi. \quad (8)$$

Сравнение приближенных решений с точным показано на рис. 1. Из графика видно, что приближенные и точные решения отличаются незначительно.

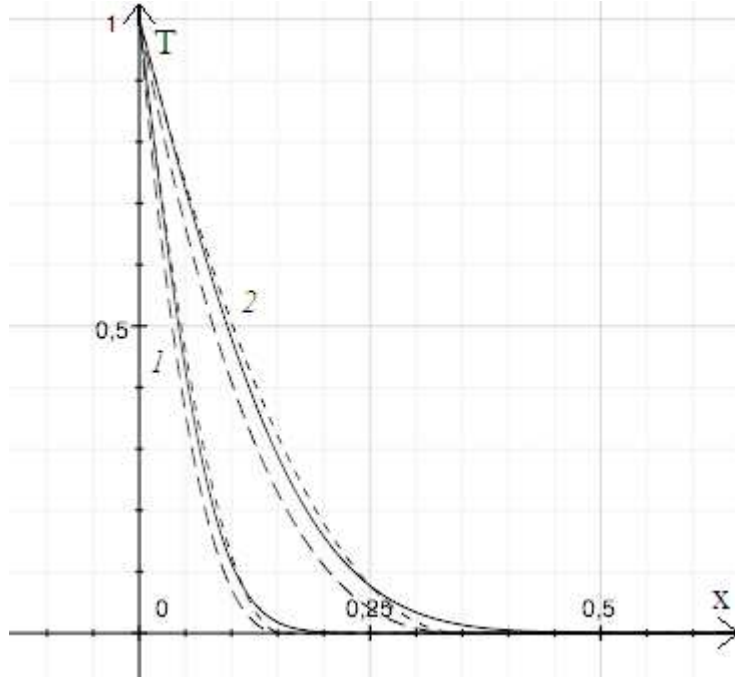


Рис. 1: Безразмерная температура в моменты безразмерного времени $\tau = \frac{1}{100} - 1$, $\tau = \frac{1}{10} - 2$. Сплошная линия — точное решение (8), короткий пунктир — приближенное решение (7), длинный пунктир — приближенное решение (6).

3. Построение приближенных решений задач теплопроводности с коэффициентом $K(T) = T$

1. В работе [2] доказывається существование и единственность аналитического решения задачи

$$\begin{cases} T_\tau = (K(T)T_x)_x \\ T|_{x=l(\tau)} = 0, \end{cases} \quad (9)$$

описывающего распространение тепловой волны по холодному фону. Коэффициент теплопроводности берется в виде $K(T) = \alpha T^\sigma$, α и σ — константы.

Решение задачи (9) строится в виде бесконечного ряда по координате.

Найдем первые четыре члена ряда по методу, предложенному в [2] в случае $K(T) = T$ при $\alpha = 1$ и $\sigma = 1$.

Задача теплопроводности (9) после замены переменных (1) будет иметь вид

$$\begin{cases} T_t - l'T_z = TT_{zz} + T_z^2 \\ T|_{z=0} = 0 \end{cases} \quad (10)$$

Температуру ищем в виде ряда (4). Из граничного условия следует, что $u_0 = 0$. Далее, уравнение задачи (10) при $z = 0$ и учете найденного $u_0 = 0$ переходит в соотношение $u_1 = -l'$. Для нахождения u_2 и u_3 уравнение задачи (10) дифференцируется соответственно один и два раза по z , полагается $z = 0$ и, при учете уже найденных u_i , получаем соотношения $u'_1 = (3u_1 + l')u_2$ и $u'_2 - l'u_3 = 4u_1u_3 + 3u_2^2$.

После преобразований получаем

$$u_1 = -l', \quad u_2 = \frac{l''}{2l'}, \quad u_3 = \frac{5l'''^2 - 2l'l'''}{12l'^3}.$$

Таким образом функция температуры по методу, описанному в работе [2] в зоне $-l(t) < z < 0$ имеет вид

$$T(t, z) = -l'z + \frac{l''}{2l'} \frac{z^2}{2} + \frac{l''^2 - 2l'l'''}{12l'^3} \frac{z^3}{3}. \quad (11)$$

Функцию $l(t)$ для (11) можно найти, как и в случае линейной задачи теплопроводности, решенной выше. Если оставить только первые два слагаемых в (11), то есть взять

$$T(t, z) = -l'z + \frac{l''}{2l'} \frac{z^2}{2}$$

и перейти к координатам (τ, x) , получим

$$T(\tau, x) = ll' + \frac{l^2 l''}{4l'} - l'x - \frac{ll''}{2l'} x + \frac{l''}{4l'} x^2.$$

Проинтегрировав выражение $L(T) = T_\tau - T_x^2 - TT_{xx}$ от 0 до $l(\tau)$ по координате x и приравняв результат к нулю, получим дифференциальное уравнение $2l'l''' - 5l''^2 = 0$. Если в него подставить функцию $l = k\tau^\alpha$, получим $\alpha = \frac{1}{3}$ и $l(\tau) = k\tau^{1/3}$, откуда

$$T(\tau, x) = \frac{k^2}{6\tau^{1/3}} - \frac{x^2}{6\tau}.$$

Такое решение может описать ситуацию с изначально неравномерно прогретым телом, когда процесс состоит только в выравнивании температуры по всему образцу.

2. Теперь рассмотрим задачу о нагреве с заданным постоянным тепловым потоком q_{00} на нагреваемой поверхности с предположением, что на границе теплового фронта температура равна нулю:

$$\begin{cases} T_\tau &= T_x^2 + TT_{xx} \\ T|_{x=l(\tau)} &= 0 \\ -TT_x|_{x=0} &= q_{00}. \end{cases}$$

Перейдя к координатам (t, z) , получим

$$\begin{cases} T_t - l'T_z &= TT_{zz} + T_z^2 \\ T|_{z=0} &= 0 \\ -TT_z|_{z=-l} &= q_{00} \end{cases} \quad (12)$$

Температуру будем искать в виде ряда (3). В качестве третьего условия берем выражение $T_t - l'T_z = TT_{zz} + T_z^2$ при $z = 0$. Получим:

$$\begin{cases} u_0 &= 0 \\ (u_1 l - u_2 \frac{l^2}{2})(u_1 - u_2 l) &= q_{00} \\ \begin{cases} u_1 &= 0 \\ u_1 &= -l' \end{cases} \end{cases}$$

При $u_1 = 0$ получим $T(t, z) = \sqrt{\frac{q_0}{2l^3}} z^2$, или $T(\tau, x) = \sqrt{\frac{q_{00}l}{2}} (1 - \frac{x}{l})^2$.

При $u_1 = -l'$ получаем

$$T(t, z) = -l'z + \frac{-3ll' + \sqrt{l^2 l'^2 + 8q_{00}l}}{2l^2} \frac{z^2}{2}.$$

Уравнение на функцию теплового фронта можно получить из условия

$$q_{00}t = \int_{-l(t)}^0 T dz,$$

откуда

$$8l^4l'^2 - 72q_{00}tl^2l' = 8q_{00}l^3 - 144q_{00}t^2.$$

Второй вариант для нахождения $l(t)$ — интегрально удовлетворить уравнению теплопроводности

$$\int_{-l(t)}^0 (T_t - l'T_z - T_z^2 - TT_{zz}) dz = 0.$$

В этом случае получаем

$$l^3l'l'' + 3l^2l''\sqrt{l^2l'^2 + 8q_{00}l} + 2l^2l'^3 + 6ll'^2\sqrt{l^2l'^2 + 8q_{00}l} + 12q_{00}ll' - \\ - 12q_{00}\sqrt{l^2l'^2 + 8q_{00}l} = 0.$$

4. Построение приближенных решений задач теплопроводности с коэффициентом $K(T) = 1 - T$

1. Рассматривается задача с коэффициентом теплопроводности $K(T) = 1 - T$. На нагреваемой поверхности температура считается равной единице, на границе теплового фронта — нулю:

$$\begin{cases} T_\tau = -T_x^2 + T_{xx} - TT_{xx} \\ T|_{x=l(\tau)} = 0 \\ T|_{x=0} = 1. \end{cases}$$

Сделаем замены переменных $u = 1 - T$ и (1), получим

$$\begin{cases} u_t - l'(t)u_z = uu_{zz} + u_z^2 \\ u(t, z)|_{z=0} = 1 \\ u|_{z=-l(t)} = 0. \end{cases} \quad (13)$$

Ищем решение в виде

$$u(z, t) = \begin{cases} u_0(t) + u_1(t)z + u_2(t)\frac{z^2}{2}, & \text{если } -l(t) < z < 0; \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

где необходимо определить три неизвестных функции времени. В качестве третьего условия будет уравнение системы (13), в котором положим $z = 0$.

Из граничных условий получаем

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = \frac{\sqrt{(2+l')^2 + 8 - l' - 2}}{2l} \\ u_2 = \frac{\sqrt{(2+l')^2 + 8 - l'}}{2l^2}. \end{cases}$$

Таким образом

$$T(t, z) = \begin{cases} -\frac{\sqrt{(2+ll')^2+8-ll'-2}}{2l}z - \frac{\sqrt{(2+ll')^2+8-ll'}}{2l^2}z^2, & \text{если } -l(t) < z < 0; \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

2. Теперь рассмотрим случай, когда на поверхности нагрева задан постоянный начальный поток q_{00} . Предполагается, что на границе теплового фронта температура и тепловой поток равны нулю. После замены переменных аналогично (12) получим

$$\begin{cases} u_t - l'(t)u_z &= uu_{zz} + u_z^2 \\ uu_z|_{z=-l} &= q_{00} \\ u_z|_{z=0} &= 0 \\ u|_{z=0} &= 1. \end{cases}$$

При данных граничных условиях получаем $u_0 = 1$, $u_1 = 0$, $u_2 = \frac{-1-\sqrt{1-2q_{00}l}}{l^2}$. Функция температуры после возврата к переменным (T, τ, x) будет иметь вид

$$T(\tau, x) = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{1-2q_{00}l}}{2l^2}(x-l)^2, & \text{если } 0 < x < l(\tau); \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Функция теплового фронта ищется из условия

$$\int_0^{l(\tau)} (T_\tau - T_x^2 + (1-T)T_{xx}) dx = 0,$$

откуда

$$(-9q_{00}l + 4)ll'^2 + 12(2q_{00}l - 1)l' + 36q_{00}(-2q_{00}l + 1) = 0. \quad (14)$$

Решение дифференциального уравнения (14) имеет вид

$$l^3 - 6\tau l + 18q_{00}\tau^2 = 0.$$

5. Построение приближенного решения нелинейного уравнения теплопроводности с коэффициентом $K(T) = \frac{2T}{1+T^2}$

1. Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} T_\tau &= (K(T)T_x)_x \\ T(t, x)|_{x=l(\tau)} &= 0 \end{cases} \quad (15)$$

с условием $K(T)|_{x=l(\tau)} = 0$.

После замены переменных (1) получаем

$$\begin{cases} T_t &= l'(t)T_z + K'(T)T_z^2 + K(T)T_{zz} \\ T(t, z)|_{z=0} &= 0. \end{cases} \quad (16)$$

Строим решение в виде ряда

$$T(t, z) = \begin{cases} T_0(t) + T_1(t)z + T_2(t)\frac{z^2}{2}, & \text{если } -l(t) < z < 0; \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases} \quad (17)$$

где по условию $T_0(t) = 0$, $T'_0(t) = 0$. В уравнение в системе (16) подставляем $z = 0$. Получаем

$$l'(t)T_1 + K'(T)T_1^2 = 0,$$

откуда

$$T_1(t) = -\frac{l'(t)}{K'(T_0)}, \quad T'_1(t) = \frac{K''(T_0)l'(t) - l''(t)K'(T_0)}{K'^2(T_0)}. \quad (18)$$

Дифференцируем уравнение в системе (16) по z :

$$T'_z = l'T_{zz} + 2K'T_zT_{zz} + K''T_z^3 + KT_{zzz} + K'T_zT_{zz}.$$

Подставляем $z = 0$ и (17):

$$T'_1 = l'T_2 + 3K'T_1T_2 + K''T_1^3. \quad (19)$$

Подставляем в (19) $T'_1(t)$ и $T_1(t)$ из (18). Получаем

$$T_2 = \frac{K'^2l'' - K''l'^3 - K'K''l'}{2l'K'^3}$$

и в итоге при $-l(t) < z < 0$

$$T(t, z) = -\frac{l'(t)}{K'(T_0)}z + \frac{K'^2l'' - K''l'^3 - K'K''l'}{2l'K'^3} \frac{z^2}{2}. \quad (20)$$

Выражение (20) дает общий вид зависимости температуры от времени и координаты для коэффициента теплопроводности, удовлетворяющего условию $K(T)|_{x=l(\tau)} = 0$.

2. Теперь решим задачу теплопроводности (15) с коэффициентом $K(T) = \frac{2T}{1+T^2}$, опираясь на (20). Поскольку $K'(T) = \frac{2(1-T^2)}{(1+T^2)^2}$, система (16) примет вид

$$\begin{cases} T_t &= l'(t)T_z + \frac{2(1-T^2)}{(1+T^2)^2}T_z^2 + \frac{2T}{1+T^2}T_{zz} \\ T(t, z)|_{z=0} &= 0. \end{cases}$$

В этом случае получаем $T_1 = -\frac{l'}{2}$, $T_2 = \frac{l''}{4l'}$, то есть $T = -\frac{l'}{2}z + \frac{l''}{4l'} \frac{z^2}{2}$.

Для нахождения $l(t)$ предположим, что на нагреваемой поверхности задана температура $T = 1$, то есть выполнено соотношение $T = \frac{l'}{2} + \frac{l^2l''}{8l'} = 1$, откуда получаем дифференциальное уравнение

$$4l'^2 - 8l' + l^2l'' = 0. \quad (21)$$

Получаем равенство на $l(t)$:

$$t - \frac{3}{16}l^2 - \frac{s^2}{8} \log(l + s) + \frac{s^2}{16} \log(l^2 - sl + s^2) + \frac{s^2\sqrt{3}}{8} \arctg\left(\frac{2}{s\sqrt{3}}l - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + C_1 = 0,$$

где $s = \frac{(3C)^{\frac{1}{3}}}{2}$, а константы C, C_1 связаны зависимостью из условия $l(0) = 0$.

Также можно найти вид функции границы теплового фронта, подставив в (21) $l(t) = k\sqrt{t}$. Тогда $k = \frac{4}{\sqrt{3}}$ и

$$T(t, z) = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{3}t}z - \frac{1}{16t}z^2, & \text{если } -\frac{4\sqrt{t}}{\sqrt{3}} < z < 0; \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

6. Заключение

В настоящей работе предложены приближенные решения одномерного уравнения теплопроводности с граничными условиями первого и второго родов. В нелинейном случае решения получены для двух монотонных зависимостей коэффициента теплопроводности от температуры и одной немонотонной. В линейном случае проведено сравнение построенного решения с точным, из которого видно, что точность приближенного метода не превышает точности задания физических констант и граничных условий в прикладных задачах. Аналитический вид полученных решений облегчает анализ результатов и позволяет получить аналитические выражения для температурных напряжений.

Автор приносит благодарность М. В. Юмашеву за постановку задачи и ценные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баренблатт Г. И. О некоторых приближенных методах в теории одномерной неустановившейся фильтрации жидкости при упругом режиме. Изв.АН СССР, ОТН. 1954. №9. С. 35–49.
2. Баутин С. П. Аналитическая тепловая волна. – М.: Физматлит, 2003. – 88 с.
3. Бахарев М. С., Миркин Л. И., Шестериков С. А., Юмашева М. А. Структура и прочность материалов при лазерных воздействиях. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988. – 224 с.
4. Беднова В. Б. Приближенный метод определения температурного поля при быстром локальном нагреве образца // Труды конференции-конкурса молодых ученых НИИ механики МГУ имени М. В. Ломоносова. 2013. С. 73–76.
5. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. – М.: Мир, 1964. – 517 с.
6. Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Самарский А. А. Локализация тепла в нелинейных средах // Дифференциальные уравнения. Октябрь 1981. Т. XVII. №10. С. 1826–1841.
7. Калашников А. С. Об уравнениях типа нестационарной фильтрации с бесконечной скоростью распространения возмущений // Вестник Московского университета. 1972. №6. С. 45–49.
8. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. – М.: Наука, 1964. – 488 с.
9. Локощенко А. М. Ползучесть и длительная прочность металлов в агрессивных средах. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 2000. – 178 с.
10. Лыков А. В. Теория теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1967. – 599 с.
11. Олейник О. А., Калашников А. С., Чжоу Юй-Линь Задача Коши и краевые задачи для уравнений типа нестационарной фильтрации // Известия АН СССР. Серия математическая. 1958. Т. 22. С. 667–704.
12. Паркус Г. Неустановившиеся температурные напряжения. – М.: Государственное изд-во физико-математической литературы, 1963. – 252с.
13. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. – М.: Наука, 1975. – 576 с.

14. Шестериков С. А., Юмашева М. А. Приближенный метод оценки нестационарных температурных полей // Институт механики МГУ. Научные труды. Деформирование и разрушение твердых тел. Вып. 23. – М.: Изд-во МГУ, 1973. С. 15–20.
15. Юмашев М. В., Беднова В. Б., Вергазов М. М., Юмашева М. А. Разрушение хрупких материалов в условиях локального воздействия на поверхность энергетическим потоком // Машиностроение и инженерное образование. 2014. №4. С. 52–58.
16. Юмашев М. В., Юмашева М. А., Краснова П. А. Моделирование процесса нагрева тела при интенсивном тепловом воздействии на поверхность // Вестник Московского университета. 2010. №4. С. 44–54.

REFERENCES

1. Barenblatt, G. I. 1954, "On some approximate methods in the theory of one-dimensional non-stationary filtration in the elastic drive regime", *Izv. AN SSSR, OTN*, no. 9, pp. 35–49.
2. Bautin, S. P. 2003, "Analiticheskaya teplovaya volna", [Analytical heat wave], Fizmatlit, Moscow, 88p.
3. Baharev, M. S., Mirkin, L. I., Shesterikov, S. A. & Yumasheva M. A. 1988, "Struktura i prochnost' materialov pri lazernyh vozdeystviyah", [Structure and strength of materials with the laser action], Izd-vo Mosk. un-ta, Moscow 224p.
4. Bednova, V. B. 2013, "An approximate method for determining the temperature field with rapid local heating of the sample", *Trudy konferencii-konkursa molodyh uchenykh NII mekhaniki MGU imeni M.V.Lomonosova*, pp. 73–76.
5. Boley, B. A. & Weiner J. H. 1964, "Teoriya temperaturnykh napryazhenij", [Theory of Thermal Stresses], Mir, Moscow, 517p.
6. Galaktionov, V. A., Kurdyumov, S. P., Mihajlov, A. P. & Samarskij, A. A. 1981, "Heat localization in nonlinear media", *Differencial'nye uravneniya*, Vol. XVII, no. 10, pp. 1826–1841.
7. Kalashnikov, A. S. 1972, "On the equations of non-stationary filtration type with infinite speed of propagation of disturbances", *Vestnik Moskovskogo universiteta*, no. 6, pp. 45–49.
8. Carslaw, H.S. & Jaeger, J. C. 1964, "Teploprovodnost' tverdyh tel", [Conduction of Heat in Solids], Nauka, Moscow, 488p.
9. Lokoshchenko, A. M. 2000, "Polzuchest' i dlitel'naya prochnost' metallov v agressivnykh sredah", [The creep and the long-term strength of metals in the aggressive media], Izd-vo Mosk. un-ta, Moscow, 178p.
10. Lykov, A. V. 1967, "Teoriya teploprovodnosti", [Theory of heat conduction], Vysshaya shkola, Moscow, 599p.
11. Olejnik, O. A., Kalashnikov, A. S. & Chzhou Yuj-Lin' 1958, "The Cauchy problem and boundary value problems for equations of non-stationary filtration", *Izv. AN SSSR, Seriya matematicheskaya*, Vol. 22, pp. 667–704.
12. Parcus, H. 1963, "Neustanovivshiesya temperaturnye napryazheniya", [Non-stationary thermal stresses], Gosudarstvennoe izd-vo fiziko-matematicheskoy literatury, Moscow, 252p.

13. Timoshenko, S. P. & Goodier, J. 1975, "Теория упругости", [Theory of Elasticity], Nauka, Moscow, 576p.
14. Shesterikov, S. A. & Yumasheva, M. A. 1973, "An approximate method for estimating non-stationary temperature fields", *Institut mekhaniki MGU. Nauchnye trudy. Deformirovanie i razrushenie tverdyh tel. no. 23, Izd-vo Mosk. un-ta, Moscow*, pp. 15—20.
15. Yumashev, M. V., Bednova, V. B., Vergazov, M. M. & Yumasheva, M. A. 2014, "The destruction of brittle materials under local effect on the surface energy flow", *Mashinostroenie i inzhenernoe obrazovanie*, no. 4, pp. 52—58.
16. Yumashev, M. V., Yumasheva, M. A. & Krasnova, P. A. 2010, "Modeling of the body heating process with intensive exposure to heat to the surface", *Vestnik Moskovskogo universiteta*, no. 4, pp. 44—54.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Получено 25.07.2016 г.

Принято в печать 13.12.2016 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 17 Выпуск 4

УДК 519.4

DOI 10.22405/2226-8383-2016-17-4-23-50

ОБ АЛГОРИТМИЧЕСКИХ ПРОБЛЕМАХ В ГРУППАХ
КОКСТЕРА¹

В. Н. Безверхний (г. Москва), Н. Б. Безверхняя (г. Москва),
И. В. Добрынина (г. Тула), О. В. Инченко (г. Тула), А. Е. Устьян (г. Тула)

Аннотация

Основными алгоритмическими проблемами в теории групп, поставленными М. Дэном, являются проблемы равенства, сопряженности слов в конечно определенных группах и проблема изоморфизма групп.

Среди работ, связанных с исследованием проблем М. Дэна, наиболее выдающимися являются работы П. С. Новикова, доказавшего неразрешимость проблем равенства, сопряженности слов в конечно определенных группах, а также неразрешимость проблемы изоморфизма групп. В связи с этим основные алгоритмические проблемы и их различные обобщения изучаются в определенных классах групп.

Группы Кокстера введены Х. С. М. Кокстером: всякая группа отражений является группой Кокстера, если в качестве образующих взять отражения относительно гиперплоскостей, ограничивающих ее фундаментальный многогранник. Х. Кокстер перечислил все группы отражений в трехмерном евклидовом пространстве и доказал, что все они являются группами Кокстера, а всякая конечная группа Кокстера изоморфна некоторой группе отражений в трехмерном евклидовом пространстве, элементы которой имеют общую неподвижную точку.

В алгебраическом аспекте группы Кокстера изучаются с работ Ж. Титса, которым решена проблема равенства слов в произвольных группах Кокстера.

В данной статье рассматриваются известные результаты, полученные в решении алгоритмических проблем в группах Кокстера, основной же целью работы является анализ результатов по решению алгоритмических проблем в группах Кокстера, полученных членами Тульской алгебраической школы "Алгоритмические проблемы теории групп и подгрупп" под руководством В. Н. Безверхнего. Дан обзор утверждений и теорем, доказанных авторами статьи для различных классов групп Кокстера: групп Кокстера большого и экстрабольшого типов, групп Кокстера с древесной структурой, групп Кокстера с n -угольной структурой.

Приводятся основные подходы и методы доказательства, среди которых метод диаграмм, введенный ван Кампеном, переоткрытый Р. Линдоном и усовершенствованный В. Н. Безверхним, в части, введения R -сокращений, специальных R -сокращений, специальных кольцевых сокращений, а также метод графов, метод типов, введенный В. Н. Безверхним, метод специального множества слов, разработанный В. Н. Безверхним на основе обобщения метода Нильсена на свободные конструкции групп.

Рассмотренные в статье классы групп включают все группы Кокстера, которые либо принадлежат данным классам групп, либо могут быть представлены как обобщенные древесные структуры групп Кокстера, образованные из групп Кокстера с древесной структурой заменой некоторых вершин соответствующего дерева-графа группами Кокстера большого или экстрабольшого типов, а также группами Кокстера с n -угольной структурой.

Ключевые слова: группа Кокстера, алгоритмические проблемы, диаграммы.

Библиография: 30 названий.

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского фонда фундаментальных исследований (проект 15-41-03222 р_центр_а).

ON ALGORITHMIC PROBLEMS IN COXETER GROUPS

V. N. Bezverkhniy (Moscow), N. B. Bezverkhnyaya (Moscow), I. V. Dobrynina (Tula),
O. V. Inchenko (Tula), A. E. Ustyan (Tula)

Abstract

The main algorithmic problems of group theory posed by M. Dehn are the problem of words, the problem of the conjugation of words for finitely presented groups, and the group's isomorphism problem.

Among the works related to the study of the M. Dehn's problems, the most outstanding ones are the work of P. S. Novikov who proved the undecidability of the problem of words and the conjugacy problem for finitely presented groups as well as the undecidability of the problem of isomorphism of groups. In this regard, the main algorithmic problems and their various generalizations are studied in certain classes of groups.

Coxeter groups were introduced by H. S. M. Coxeter: every reflection group is a Coxeter group if its generating elements are reflections with respect to hyperplanes limiting its fundamental polyhedron. H. S. M. Coxeter listed all the reflection groups in three-dimensional Euclidean space and proved that they are all Coxeter groups and every finite Coxeter group is isomorphic to some reflection group in the three-dimensional Euclidean space which elements have a common fixed point.

In an algebraic aspect Coxeter groups are studied starting with works by J. Tits who solved the problem of words in certain Coxeter groups.

The article describes the known results obtained in solving algorithmic problems in Coxeter groups; the main purpose of the paper is to analyze of the results of solving algorithmic problems in Coxeter groups that were obtained by members of the Tula algebraic school 'Algorithmic problems of theory of the groups and semigroups' under the supervision of V. N. Bezverkhniy.

It reviews assertions and theorems proved by the authors of the article for the various classes of Coxeter groups: Coxeter groups of large and extra-large types, Coxeter groups with a tree-structure, and Coxeter groups with n-angled structure.

The basic approaches and methods of evidence among which the method of diagrams worked out by van Kampen, reopened by R. Lindon and refined by V. N. Bezverkhniy concerning the introduction of R-cancellations, special R-cancellations, special ring cancellations as well as method of graphs, method of types worked out by V. N. Bezverkhniy, method of special set of words designed by V. N. Bezverkhniy on the basis of the generalization of Nielsen method for free construction of groups.

Classes of group considered in the article include all Coxeter groups which may be represented as generalized tree structures of Coxeter groups formed from Coxeter groups with tree structure with replacing some vertices of the corresponding tree-graph by Coxeter groups of large or extra-large types as well as Coxeter groups with n-angled structure.

Keywords: Coxeter group, algorithmic problems, diagrams.

Bibliography: 30 titles.

1. Введение 1

Основными алгоритмическими проблемами в теории групп, поставленными М. Дёном, являются проблемы равенства, сопряженности слов в конечно определенных группах и проблема изоморфизма групп.

Исследование этих проблем стимулировало развитие комбинаторных методов в теории групп, что явилось причиной возникновения одного из активно развивающихся направлений современной математики — комбинаторной теории групп. В настоящее время имеется целый ряд книг и статей, посвященных данной теме, достаточно назвать монографии В. Магнуса, А. Карраса и Д. Солитера, а также Р. Линдона и П. Шуппа.

Среди работ, связанных с исследованием проблем М. Дэна, наиболее выдающимися являются работы П. С. Новикова, доказавшего неразрешимость проблем равенства, сопряженности слов в конечно определенных группах, а также неразрешимость проблемы изоморфизма групп.

С. И. Адяном определено понятие наследственного нетривиального свойства группы и доказано, что не существует алгоритма, позволяющего для произвольной группы с конечным числом образующих и определяющих соотношений распознать выполнимость свойства β , представляющего собой объединение нетривиального наследственного и инвариантного свойства, если только существуют группы, обладающие свойством β . Из этого результата следует, что практически все проблемы, относящиеся к конечно определенным группам, в общем случае неразрешимы. Сюда относятся, в частности, такие проблемы, как распознавание нильпотентности, конечности, простоты, свободы или единичности группы, включая и основные проблемы комбинаторной теории групп.

Обобщением проблемы сопряженности слов являются проблемы сопряженности подгрупп и обобщенной сопряженности слов.

Впервые проблема сопряженности подгрупп рассматривалась В. Н. Ремесленниковым, доказавшим ее положительное решение в классе конечно порожденных нильпотентных групп.

Будем говорить, что в группе G разрешима проблема обобщенной сопряженности слов, если существует алгоритм, позволяющий для любых двух конечных множеств слов $\{w_i\}_{i=\overline{1,n}}$, $\{v_i\}_{i=\overline{1,n}}$ из G установить, существует ли такое $z \in G$, что $\&_{i=1}^n (z^{-1}w_i z = v_i)$.

Существование такого алгоритма для некоторого класса конечно определенных групп позволяет для любого автоморфизма $\varphi \in \text{Aut } G$ определить, является ли он внутренним. С описанием множества решений данной системы связана проблема построения централизатора конечно порожденной подгруппы. Проблемы сопряженности подгрупп и обобщенной сопряженности слов для различных групп рассматривались в работах М. Д. Гриндлингера, В. Н. Безверхнего и других.

К центральной теме комбинаторной теории групп относится также изучение различных свойств подгрупп данных групп.

Группа G , заданная системой образующих a_i , $i \in J$, и системой определяющих соотношений $(a_i a_j)^{m_{ij}} = 1$, $i, j \in J$, m_{ij} – элемент симметрической матрицы Кокстера (m_{ij}) , $i, j \in J$, соответствующей данной группе, то есть матрицы, в которой $m_{ii} = 1$, $m_{ij} = m_{ji} \geq 2$ для $i \neq j$, называется группой Кокстера. Из этого определения получаем $a_i^2 = 1$ для всех $i \in J$. В дальнейшем будем полагать $J = \{\overline{1,n}\}$.

Группы Кокстера введены Х. С. М. Кокстером [1]: всякая группа отражений является группой Кокстера, если в качестве образующих взять отражения относительно гиперплоскостей, ограничивающих ее фундаментальный многогранник. Х. Кокстер перечислил все группы отражений в трехмерном евклидовом пространстве и доказал, что все они являются группами Кокстера, а всякая конечная группа Кокстера изоморфна некоторой группе отражений в трехмерном евклидовом пространстве, элементы которой имеют общую неподвижную точку.

В алгебраическом аспекте группы Кокстера изучаются с работ Ж. Титса [2], которым решена проблема равенства слов в произвольных группах Кокстера.

П. Шуппом [3] показана неразрешимость проблемы вхождения в группах Кокстера.

К. Апеллем и П. Шуппом [4] определены классы групп Кокстера и Артина большого и экстрабольшого типов и в группах экстрабольшого типа решены проблемы равенства и сопряженности слов.

В группах Артина большого типа независимо К. Апеллем и В. Н. Безверхним [5] доказана разрешимость проблем равенства и сопряженности слов.

Так как группы Кокстера экстрабольшого типа являются гиперболическими, то из результатов И. Г. Лысенка следует разрешимость в них проблем вхождения в циклическую

подгруппу и извлечения корня.

Для групп Кокстера экстрабольшого типа с $m_{ij} \geq 3k + 1$ И. Каповичем и П. Шуппом [6] доказано, что всякая k -порожденная подгруппа без кручения является свободной.

В данной статье рассматриваются результаты по решению алгоритмических проблем в группах Кокстера, полученные членами Тульской алгебраической школы "Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп" под руководством В. Н. Безверхнего.

2. Группы Кокстера большого типа

Пусть G — группа Кокстера с копредставлением $G = \langle a_1, \dots, a_n; (a_i a_j)^{m_{ij}} = 1, i, j = \overline{1, n} \rangle$, где m_{ij} — элементы симметрической матрицы Кокстера: $\forall i, j \in \overline{1, n} \ m_{ii} = 1, m_{ij} \geq 2, i \neq j$.

Если $m_{ij} \geq 3, i \neq j$, то G называется группой Кокстера большого типа.

Если $m_{ij} > 3, i \neq j$, то G называется группой Кокстера экстрабольшого типа.

Как замечено выше, группы Кокстера экстрабольшого типа являются гиперболическими.

Покажем, что в общем случае группы Кокстера большого типа не являются гиперболическими группами. Рассмотрим группу $G = \langle a, b, c; aba = bab, aca = cac, bcb = cbc, a^2 = 1, b^2 = 1, c^2 = 1 \rangle$. Данная группа содержит свободную абелеву подгруппу $\langle (abc)^2, (bac)^2; (abc)^2(bac)^2 = (bac)^2(abc)^2 \rangle$, а потому не может быть гиперболической.

Будем рассматривать проблему сопряженности слов, следуя работе [7].

Для решения данной проблемы описываются диаграммы над группой Кокстера большого типа G , заданной системой образующих $a_1, \dots, a_n$ и системой определяющих соотношений $a_i^2 = 1$ для всех $i \in \overline{1, n}$, $(a_i a_j)^{m_{ij}} = 1, i, j \in \overline{1, n}, m_{ij}$ — элемент матрицы Кокстера (m_{ij}) , $i, j \in \overline{1, n}$, соответствующей данной группе, причем $m_{ij} \geq 3$ для $i \neq j$.

Пусть $F = \prod_{i=1}^n *(F_i = \langle a_i; a_i^2 \rangle)$ — свободное произведение циклических групп порядка 2, $R = \bigcup_{i,j \in J} R_{ij}$ — симметризованное подмножество свободного произведения F , R_{ij} — множество всех нетривиальных слов, циклически приведенных в свободном произведении $F_{ij} = F_i * F_j$ и равных 1 в двупорожденной группе Кокстера большого типа G_{ij} .

Пусть w — нетривиальное циклически приведенное в F слово, равное единице в группе Кокстера большого типа G , то есть $w \in \langle R \rangle^F$, где $\langle R \rangle^F$ — нормальное замыкание симметризованного множества R в свободном произведении F . Тогда из теоремы Ван-Кампена следует, что существует связная односвязная диаграмма M группы Кокстера с граничной меткой w , областями которой являются R_{ij} -диаграммы.

Подвергнем R -диаграмму M следующему преобразованию. Если две области D_1, D_2 являются одновременно R_{ij} -диаграммами, пересекаются по ребру, то, стирая это ребро, объединим D_1, D_2 в одну область D . При этом возможно, что метка границы полученной области равна единице в свободном произведении F . Тогда, удалив эту область, склеиваем её границу. Таким образом, через конечное число шагов мы получим приведенную в F связную односвязную R -диаграмму M , инвариантную относительно рассмотренного преобразования с граничной меткой, равной w , причем если две области D', D'' из M пересекаются по ребру, то длина метки этого ребра равна единице, и получаем, что каждая приведенная связная односвязная R -диаграмма M группы Кокстера большого типа удовлетворяет условию $C(6)$.

Обозначим через ∂M граничный цикл M .

Область $D \subset M$ назовем граничной, если $\partial M \cap \partial D \neq \emptyset$. Символом $i(D)$ будем обозначать число внутренних ребер в граничном цикле D , символом $d(D)$ — число всех ребер в граничном цикле D .

Будем говорить, что $\partial D \cap \partial M$ есть последовательная часть M , если $\partial D \cap \partial M$ — объединение последовательности $l_1, l_2, \dots, l_n$ замкнутых ребер, где $l_1, \dots, l_n$ встречаются в данном порядке в некотором граничном цикле для D и в некотором граничном цикле для M .

Граничную область D R -диаграммы M назовем простой, если $\partial D \cap \partial M$ есть последовательная часть M .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Простая область D диаграммы M называется деновской, если $i(D) < 3$.

Далее используем понятия и преобразования диаграмм, введенные В. Н. Безверхним.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть M — приведенная связная, односвязная R -диаграмма группы Кокстера большого типа. Тогда последовательность областей $D_1, D_2, \dots, D_n$, $n \geq 2$, образует полосу в M , если:

- 1) $\forall i, 1 \leq i \leq n$, $\partial D_i \cap \partial M$ — последовательная часть M ;
- 2) $\forall i, 1 \leq i < n$, границы областей D_i и D_{i+1} пересекаются по ребру;
- 3) $i(D_1) = i(D_n) = 3$ и $\forall j, 1 < j < n$, $i(D_j) = 4$.

ЛЕММА 1. Если M — связная односвязная диаграмма группы Кокстера большого типа, не содержащая деновской области, то она содержит по крайней мере три непересекающиеся полосы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Область D с граничным циклом $\partial D = e\gamma e^{-1}\delta$, расположенная по обе стороны относительно ребра e , в которой склеенные ребра e и e^{-1} пересекают граничный цикл D , называется $(s-i)$ -областью.

ЛЕММА 2. Пусть M — приведенная связная диаграмма M группы Кокстера большого типа, содержащая $(s-i)$ -области, тогда $\varphi(\gamma)$ и $\varphi(\delta)$ содержат одну букву.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Удаление деновской области диаграммы M , то есть удаление ее граничного пути, называется деновским сокращением диаграммы M или R -сокращением.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть Π — полоса диаграммы M , $\partial M = \gamma \cup (\partial \Pi \cap \partial M)$, а

$$\gamma_1 = \partial \Pi \setminus (\partial \Pi \cap \partial M).$$

Замену диаграммы M на диаграмму M_1 , полученную из M удалением полосы Π , в результате чего граничный цикл M преобразуется в граничный цикл $\partial M_1 = \gamma\gamma_1$, назовем специальным R -сокращением или $\bar{R}$ -сокращением. Если M не содержит полос, то назовем M специально R -приведенной или $\bar{R}$ -приведенной.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Слово $w \in G$, G — группа Кокстера большого типа, назовем R -приводимым, если w приведено в F и содержит подслово s , являющееся подсловом некоторого соотношения $r \in R$, $r = sb$, где $|b| \leq 2$.

Назовем w циклически R -приведенным, если все его циклические перестановки являются R -приведенными словами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. R -приведенное слово w группы Кокстера большого типа G назовем специально R -приводимым или $\bar{R}$ -приводимым, если в нем можно выделить подслово $s_1 s_2 \dots s_n$, где каждое s_i содержится в некоторой группе G_{ij} и является подсловом соотношения $s_t^{-1} d_t^{-1} b_t d_{t+1} \in R$, причем при $t = 1$ и $t = n$ $|d_1| = |b_1| = |d_2| = |d_n| = |b_n| = |d_{n+1}| = 1$ и для t , $1 < t < n$, $|d_t| = |d_{t+1}| = 1$, $|b_t| = 2$.

ЛЕММА 3. Существует алгоритм, позволяющий для любого циклически приведенного слова w группы Кокстера большого типа выяснить, является ли w R -приведенным.

ЛЕММА 4. Существует алгоритм, позволяющий для любого циклически R -приведенного слова w из группы Кокстера большого типа выяснить, является ли w специально R -приведенным.

Аналогично рассматриваются кольцевые диаграммы над группами Кокстера большого типа.

Рассмотрим кольцевые диаграммы над группами Кокстера большого типа, не содержащие $(s - i)$ -областей и, следовательно, удовлетворяющие условию $C(6)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Кольцевую связную приведенную однослойную R -диаграмму M с граничными циклами σ, τ группы Кокстера большого типа, метки которой $\varphi(\sigma), \varphi(\tau)$ приведены в F , $\varphi(\sigma)$ — R -приведено и специально R -приведено, назовем особо специальной R -диаграммой, если в M существует одна область D такая, что $|\varphi(\partial D \setminus (\partial D \cap \sigma))| = 3$, а для остальных областей D' $|\varphi(\partial D' \setminus (\partial D' \cap \sigma))| = 4$. Слово $\varphi(\tau)$ является циклически R -приведенным и циклически специально R -приведенным. Замену слова $\varphi(\sigma)$ словом $\varphi(\tau)$ назовем специальным кольцевым R -сокращением.

ЛЕММА 5. Существует алгоритм, позволяющий для любого циклически R -приведенного, циклически специально R -приведенного слова w из группы Кокстера большого типа установить, применимо ли к нему специальное кольцевое R -сокращение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Будем говорить, что циклически несократимое слово w группы Кокстера большого типа обладает свойством s , если w циклически R -несократимо, циклически специально R -несократимо и к нему неприменимо специальное кольцевое R -сокращение.

Кольцевую связную приведенную R -диаграмму M с граничными циклами σ, τ назовем простой, если $|M| \geq 1$ и $\sigma \cap \tau \neq \emptyset$; M назовем вырожденной, если $|M| = 0$, где $|M|$ — число областей диаграммы M .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Кольцевая связная приведенная R -диаграмма M с граничными циклами σ, τ называется n -слойной, $n \geq 1$, если после последовательного удаления граничных слоев получим вырожденную кольцевую R -диаграмму и называется $C - n$ -слойной, если в результате удаления указанных выше граничных слоев получим простую кольцевую R -диаграмму.

Далее рассматриваются кольцевые связные приведенные R -диаграммы M сопряженности слов групп Кокстера большого типа с граничными циклами σ, τ , у которых не каждая граничная область является простой. При этом кольцевая R -диаграмма M может быть одного из следующих видов:

1⁰. $\sigma \cap \tau = \emptyset$, каждая область $D \in M$ граничная, $\partial D \cap \partial M$ — несвязное множество, $i(D) = 2$.

2⁰. $\sigma \cap \tau \neq \emptyset$.

3⁰. $\sigma \cap \tau = \emptyset$, существует область D , $i(D) > 2$, $\partial D \cap \partial M$ — несвязное множество.

Следующие преобразования укорачивают длину циклического слова w :

π_1) циклическое сокращение w в свободном произведении F ;

π_2) циклическое R -сокращение в G ;

π_3) циклическое специальное R -сокращение в G ;

π_4) кольцевое специальное R -сокращение в G ;

π_5) переход от w к сопряженному слову u , $|u| < |w|$, с помощью кольцевой диаграммы вида 1⁰;

π_6) то же, что π_5), но с помощью кольцевой диаграммы вида 2⁰;

π_7) то же, что π_5), но с помощью кольцевой диаграммы вида 3⁰.

Слово w , полученное из v применением к нему преобразований π_1) — π_7) в G , назовем тупиковым для v , если оно инвариантно относительно этих преобразований.

ЛЕММА 6. Для любого слова $v \in G$ можно эффективно построить соответствующее ему тупиковое слово w .

ЛЕММА 7. Пусть $v \in G$, G — группа Кокстера большого типа, v обладает свойством s и w — тупиковое для v слово. Тогда никакое слово $u \in G$, $|u| < |w|$, не сопряжено с v .

ЛЕММА 8. Пусть M — связная приведенная минимальная R -диаграмма группы Кокстера большого типа с граничными циклами σ, τ ; $\varphi(\sigma), \varphi(\tau)$ удовлетворяют условию s . Тогда если $\varphi(\sigma) = x$, то $\varphi(\tau) = y$, где $x, y \in \{a_1, \dots, a_n\}$, $\{a_i\}_{i=1, \dots, n}$ — множество образующих группы G .

Кольцевую связную приведенную R -диаграмму M сопряженности слов $\varphi(\sigma), \varphi(\tau) \in G$, где σ, τ — соответственно внешний и внутренний граничный циклы M , назовем минимальной, если не существует кольцевой R -диаграммы M_0 с теми же граничными метками $\varphi(\sigma), \varphi(\tau)$, имеющей меньшее число областей.

ЛЕММА 9. Пусть M — кольцевая связная приведенная минимальная R -диаграмма группы G Кокстера большого типа с граничными циклами σ, τ . Пусть $\varphi(\sigma), \varphi(\tau)$ являются тупиковыми. Если M — n -слойная либо C — n -слойная диаграмма с $n > 1$, то для любой области $D \subset M$ выполняется $d(D) = 6$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. Пусть G — группа Кокстера большого типа с множеством образующих A , определяемая матрицей Кокстера M_A . Тогда подгруппа G_j , порожденная множеством $A_j \subset A$, есть группа Кокстера большого типа, определяемая матрицей Кокстера M_j , полученной из M_A удалением строк и столбцов, именованных образующими из $A \setminus A_j$. Данная подгруппа G_j является параболической.

ЛЕММА 10. Пусть M — кольцевая связная приведенная минимальная R -диаграмма вида $C(6)$ с граничными циклами σ, τ группы Кокстера большого типа G . Пусть $\varphi(\sigma), \varphi(\tau)$ обладают свойством s , $\varphi(\sigma)$ — слово из параболической подгруппы G_j на образующих A_j , $A_j \subset A$, A — множество образующих G , $\varphi(\sigma)$ не является образующим из A_j . Тогда $\varphi(\tau) \in G_j$ и слова $\varphi(\sigma)$ и $\varphi(\tau)$ сопряжены в G_j .

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $u, v \in G$, G — группа Кокстера большого типа, A — множество образующих G , u, v обладают свойством s и существует $z \in G$ такое, что $z^{-1}uz = v$. Тогда, если слово u есть слово из параболической подгруппы G_j на образующих A_j , $A_j \subset A$, и не является образующим из A_j , то $v \in G_j$ и существует $z' \in G_j$, $z' = z$ в G , такое, что $z'^{-1}uz' = v$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть G — группа Кокстера большого типа на образующих A , G_j — параболическая подгруппа G на множестве образующих $A_j \subset A$, слово u обладает свойством s , $u \in G_j$ и не является образующим из A_j , тогда $N_G(u) = N_{G_j}(u)$.

ЛЕММА 11. Пусть M — кольцевая связная приведенная минимальная R -диаграмма группы Кокстера большого типа G с граничными циклами σ, τ ; $\varphi(\sigma), \varphi(\tau)$ удовлетворяют условию s . Тогда если M содержит $(s-i)$ -область, то все области M являются $(s-i)$ -областями.

ЛЕММА 12. Пусть G — группа Кокстера большого типа с множеством образующих A . Если $v_0 \in G$, $v_0 \neq 1$ в G и v_0 — R -приведенное, специально R -приведенное слово, равное слову из параболической подгруппы G_j с образующими A_j , $A_j \subset A$, то v_0 — слово на образующих A_j .

ТЕОРЕМА 1. В группе Кокстера большого типа разрешима проблема вхождения в параболическую подгруппу.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. Будем говорить, что в группе G разрешима проблема сопряженности слов, если существует алгоритм, позволяющий для любых двух слов w_1, w_2 из G установить, существует ли такой элемент $h \in G$, что $h^{-1}w_1h = w_2$.

ТЕОРЕМА 2. В группе Кокстера большого типа разрешима проблема сопряженности слов.

Далее рассмотрим проблему обобщенной сопряженности слов, решение которой описано в работе [8].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13. В группе G разрешима проблема обобщенной сопряженности слов, если существует алгоритм, позволяющий для любых двух конечных множеств слов $\{w_i\}_{i=\overline{1,n}}$, $\{v_i\}_{i=\overline{1,n}}$ из G установить, существует ли такое $z \in G$, что $\&_{i=1}^n(z^{-1}w_iz = v_i)$.

ТЕОРЕМА 3. Централизатор конечно порожденной подгруппы H группы Кокстера большого типа G есть конечно порожденная подгруппа и существует алгоритм, выписывающий образующие централизатора.

Централизатор элемента в группах Кокстера большого типа, в общем случае, не является циклической подгруппой.

ТЕОРЕМА 4. В группе Кокстера большого типа разрешима проблема обобщенной сопряженности слов.

ТЕОРЕМА 5. Пусть G — группа Кокстера большого типа и $\{w_i\}_{i=\overline{1,m}}$, $\{v_i\}_{i=\overline{1,m}}$ — слова из G . Если F — какое-то решение системы $\&_{i=1}^n(z^{-1}w_iz = v_i)$, то множество слов $\mathbb{C}_G(H) \cdot F$, где $\mathbb{C}_G(H)$ — централизатор подгруппы H , порожденной словами $\{w_i\}_{i=\overline{1,m}}$, является множеством всех решений системы.

ТЕОРЕМА 6. Существует алгоритм, позволяющий для любого конечного множества слов из группы Кокстера большого типа G выписать образующие их нормализатора.

В следующей теореме описываются элементы конечного порядка в группах Кокстера большого типа.

ТЕОРЕМА 7. [9] Слово w группы Кокстера большого типа G имеет конечный порядок тогда и только тогда, когда оно сопряжено с некоторым словом

$$w' \in G_{ab} = \langle a, b; (ab)^{m_{ab}}, a^2, b^2 \rangle.$$

Рассмотрим алгоритмическую разрешимость проблем вхождения в циклическую подгруппу и извлечения корня в группах Кокстера большого типа, следуя [10].

ТЕОРЕМА 8. Пусть слово $w \in G$ имеет бесконечный порядок. Тогда любая степень слова, сопряженного w или w^2 в группе G , циклически R и специально R -несократима.

Пусть в группе Кокстера большого типа G $w^n = v$. Тогда $(w^2)^n = v^2$. Заменяем w^2 на сопряженное с ним циклически R -несократимое и специально R -несократимое слово w_0 . Получим $w_0^n = z^{-1}v^2z$. Заменяем $z^{-1}v^2z$ равным ему в группе G R -несократимым и специально R -несократимым словом v_0 . Тогда существует приведенная связная односвязная R -диаграмма M такая, что $\varphi(\partial M) = \varphi(\gamma)\varphi(\delta) = w_0^n v_0^{-1}$, где γ, δ гомеоморфны отрезку.

Связная односвязная диаграмма M называется диском, если ее граничный цикл ∂M — простая замкнутая кривая.

Будем считать, что M — диск, $\partial M = \gamma \cup \delta$, $\varphi(\gamma) = w_0^n$ и $\varphi(\delta) = v_0$, $\gamma \cap \delta = \{A, B\}$ — две вершины.

ТЕОРЕМА 9. Пусть M — приведенная диаграмма, являющаяся диском, $\partial M = \gamma \cup \delta$, где $\varphi(\gamma)$ и $\varphi(\delta)$ — R -несократимые и специально R -несократимые слова, $\gamma \cap \delta = \{A, B\}$. Тогда число областей, граничащих с γ и δ , одинаково.

Пусть M — связная односвязная приведенная диаграмма, $\partial M = \gamma \cup \delta$, пусть $\varphi(\gamma) = w_0^n$, $\varphi(\delta) = v_0$ и r_0 — самое длинное слово из R . Тогда $n < 4|v_0||r_0|$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14. Будем говорить, что в группе G разрешима проблема корня, если существует алгоритм, позволяющий для любого слова $w \in G$ установить, существуют ли $n \in \mathbb{N}$ и $x \in G$ такие, что $x^n = w$.

СЛЕДСТВИЕ 3. В группе Кокстера большого типа G разрешима проблема корня.

Кроме того, в [11] изучается проблема слабой степенной сопряженности слов в группах Кокстера большого типа.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15. Будем говорить, что в группе G разрешима проблема слабой степенной сопряженности слов, если существует алгоритм, позволяющий для любых слов $w, v \in G$ таких, что $w \notin \langle v \rangle$, установить, существует ли целое число n такое, что слова w^n, v сопряжены в группе G .

ТЕОРЕМА 10. В группе Кокстера большого типа G разрешима проблема слабой степенной сопряженности слов.

3. Группы Кокстера экстрабольшого типа

В этом разделе проанализируем работы [12]–[13].

Перейдем к рассмотрению диаграмм над группами Кокстера экстрабольшого типа, которые строятся так же, как и диаграммы над группами Кокстера большого типа. Каждая приведенная связная односвязная R -диаграмма M группы Кокстера экстрабольшого типа удовлетворяет условию $C(8)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 16. Простая область D диаграммы M называется деновской, если $i(D) < d(D)/2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 17. Пусть M_1 — приведенная связная, односвязная поддиаграмма R -диаграммы M группы Кокстера экстрабольшого типа с границей $\partial M_1 = e_1 \gamma e_2 \delta$, где e_1 — ребро AB , γ — путь BC , e_2 — ребро CD , δ — путь DA . Тогда последовательность областей $D_1, D_2, \dots, D_n$ из M_1 ($e_1 \in D_1, e_2 \in D_n$), $n \geq 2$, образует полосу в M , если:

- 1) $\forall i, 1 \leq i \leq n, \quad \partial D_i \cap \gamma, \partial D_i \cap \delta$ — последовательная часть M_1 ;
- 2) $\forall i, 1 \leq i < n$, границы областей D_i и D_{i+1} пересекаются по ребру;
- 3) $|\partial D_1 \cap \gamma| = |\partial D_1 \cap \delta| + 2, |\partial D_n \cap \gamma| = |\partial D_n \cap \delta| + 2$ и $|\partial D_j \cap \gamma| = |\partial D_j \cap \delta|, 2 \leq j < n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 18. Слово $w \in G$, G — группа Кокстера экстрабольшого типа, назовем R -приводимым, если w приведено в F и содержит подслово s , являющееся подсловом некоторого соотношения $r \in R$, $r = sb$, где $|b| < |s|$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 19. R -приведенное слово w группы Кокстера экстрабольшого типа G назовем специально R -приводимым или $\bar{R}$ -приводимым, если в нем можно выделить подслово $s_1 s_2 \dots$

s_n , где каждое s_t содержится в некоторой группе G_{ij} и является подсловом соотношения $s_t^{-1} d_t^{-1} b_t d_{t+1} \in R$, причем при $t = 1$ и $t = n$ $|d_t| = |d_{t+1}| = 1, |s_t| = |b_t| + 2$ и для $t, 1 < t < n$, $|d_t| = |d_{t+1}| = 1, |b_t| = |s_t|$.

ЛЕММА 13. Пусть M — приведенная связная односвязная R -диаграмма над группой Кокстера экстрабольшого типа; σ — граничный цикл M , слово $\varphi(\sigma)$ циклически R и $\bar{R}$ -несократимо. Тогда M является однослойной.

ЛЕММА 14. Пусть M — приведенная связная кольцевая диаграмма сопряженности слов $\varphi(\sigma)$, $\varphi(\tau) \in G$ над группой Кокстера экстрабольшого типа, не содержащая $(s-i)$ -областей; σ , τ — соответственно внешний и внутренний граничный циклы M , слова $\varphi(\sigma)$, $\varphi(\tau)$ циклически R и $\bar{R}$ -несократимы. Тогда M является однослойной.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 20. Будем говорить, что в группе G разрешима проблема степенной сопряженности слов, если существует алгоритм, позволяющий для любых слов $w, v \in G$ установить, существуют ли ненулевые целые числа n, m такие, что слова w^n, v^m сопряжены в группе G .

ТЕОРЕМА 11. В группе Кокстера экстрабольшого типа разрешима проблема степенной сопряженности слов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 21. Будем говорить, что в группе G разрешима проблема пересечения циклических подгрупп, если существует алгоритм, позволяющий для любых слов $w, v \in G$ установить, пусто или нет пересечение циклических подгрупп, порожденных в G данными словами.

ТЕОРЕМА 12. В группе Кокстера экстрабольшого типа разрешима проблема пересечения циклических подгрупп. Существует алгоритм, выписывающий образующие данного пересечения.

ТЕОРЕМА 13. Если E и C — элементы бесконечного порядка группы Кокстера экстрабольшого типа G , не являющиеся степенями одного и того же слова, то существует натуральное число γ такое, для E^γ и C не выполняется нетривиальное тождество.

4. Группы Кокстера с древесной структурой

Конечно порожденная группа Кокстера с копредставлением

$$G = \langle a_1, \dots, a_n; (a_i)^2, (a_i a_j)^{m_{ij}}, i, j = \overline{1, n} \rangle$$

имеет древесную структуру, если граф Γ группы G — дерево. В графе $\bar{\Gamma}$ конечно порожденной группы Кокстера всегда можно выделить максимальный дерево-граф T , который соответствует группе, имеющей древесную структуру, для которой группа Кокстера с графом $\bar{T}$ является гомоморфным образом. Поэтому естественно рассматривать решение основных алгоритмических проблем для групп этого класса.

Построение и преобразования диаграмм над группами Кокстера с древесной структурой, происходит также как и для групп Кокстера большого типа.

Диаграмму, полученную в результате преобразований, назовем *приведенной*. Областями диаграммы являются $2k$ -угольники с граничными метками из R_{ij} .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 22. Точку, разделяющую ребра области с разными метками и имеющую в диаграмме степень не менее 3 назовем *особой*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 23. Область D назовем *деновской*, если $i(D) < \frac{1}{2}d(D)$, где $i(D)$ — число внутренних ребер, $d(D)$ — число ребер в граничном цикле для D .

Понятие $(s-i)$ -области определяется также как и для групп Кокстера большого типа.

ЛЕММА 15. Пусть связная односвязная приведенная диаграмма M над R не содержит $(s-i)$ -областей, тогда особая точка не может быть внутренней точкой диаграммы M .

СЛЕДСТВИЕ 4. Связная односвязная диаграмма M является однослойной.

Далее рассмотрим кольцевые диаграммы сопряженности слов. Из леммы 15 получаем следствие.

СЛЕДСТВИЕ 5. Связная кольцевая приведенная диаграмма M , не содержащая $(s-i)$ -областей, над группой G является однослойной.

ЛЕММА 16. Если связная кольцевая диаграмма M над группой G с граничными циклами α и β , где $\phi(\alpha)$ и $\phi(\beta)$ циклически и R несократимые слова, тогда если M содержит хотя бы одну $(s-i)$ -область, то все области данной диаграммы будут являться $(s-i)$ -областями.

ЛЕММА 17. Пусть G — группа Кокстера с древесной структурой и пусть w — циклически R приведенное слово в G , $|w| > 1$, сопряженное в G с некоторым элементом $v \in G_{ij}$. Тогда $w \in G_{ij}$ и сопряжено с v в подгруппе G_{ij} .

ЛЕММА 18. Пусть слова v и w сопряжены в группе G . Тогда, если $|w| = 1$ и v циклически и R несократимо в G , то $|v| = 1$.

ТЕОРЕМА 14. Пусть G — группа Кокстера с древесной структурой. Слова v и w , длина каждого из которых равна единице в группе Кокстера G , сопряжены тогда и только тогда, когда существует ломанная, состоящая из ребер дерева-графа Γ , которая соединяет вершины соответствующие данным образующим группы, и каждому из ребер выделенного пути соответствует соотношение с нечетным числом Кокстера.

Из структуры кольцевых диаграмм следует

ТЕОРЕМА 15. В группе Кокстера с древесной структурой разрешима проблема сопряженности слов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 24. Поддиаграмма $\Pi = \bigcup_{i=1}^n D_i$ образует полосу в R -приведенной диаграмме M с граничным циклом $\partial M = \gamma \cup \delta$, где γ есть путь AB , δ — AA_1B_1B , если

1. $\forall i, i = \overline{1, n-1} \partial D_i \cap \partial D_{i+1} = e$, где e — ребро;
2. $\forall i, i = \overline{1, n} \partial D_i \cap \gamma = \gamma_i$, где γ_i — связный путь, причем $|\gamma_i| \geq 1$
3. $|\partial D_1 \cap \gamma| = |\partial D_1 \setminus (\partial D_1 \cap \gamma)|$ и $|\partial D_n \cap \gamma| = |\partial D_n \setminus (\partial D_n \cap \gamma)|$;
4. $\forall j, j = \overline{2, n-1} |\partial D_j \cap \gamma| + 2 = |\partial D_j \setminus (\partial D_j \cap \gamma)|$.

Пусть связная односвязная диаграмма M над R содержит полосу Π . Удаление из диаграммы M пути $\partial \Pi \cap \gamma$ назовем $\bar{R}$ -сокращением.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 25. Слово u называется R и $\bar{R}$ -несократимым, если любая его циклическая перестановка u^* не содержит R и $\bar{R}$ -сокращения.

ЛЕММА 19. Пусть M связная односвязная диаграмма над R и $\partial M = \gamma \cup \delta$. И пусть $\varphi(\gamma)$, $\varphi(\delta)$ — не являются R -сократимыми словами. Тогда существует алгоритм, позволяющий определить, является ли одно из этих слов $\bar{R}$ -сократимым.

ЛЕММА 20. Пусть w — циклически R и $\bar{R}$ -несократимое слово в группе Кокстера G ; $w^n \stackrel{G}{=} 1$ тогда и только тогда, когда $w \in G_{ij}$.

Таким образом, все элементы конечного порядка группы G принадлежат подгруппам вида $G_{ij} = \langle a_i, a_j; a_i^2, a_j^2, R_{ij} \rangle$, где R_{ij} — все циклически несократимые слова равные единице в G_{ij} .

Переход с помощью сопряжения от слова большей длины к слову меньшей длины назовем кольцевым сокращением.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 26. Циклически R и $\bar{R}$ - несократимое слово w назовем тупиковым, если к нему не применимо кольцевое сокращение.

ЛЕММА 21. Пусть w и v тупиковые слова из группы G и пусть w и v сопряжены в G . Тогда $|w| = |v|$ и никакое слово $u \in G$ такое, что $|u| < |w|$ не сопряжено с v .

Проблема вхождения в параболическую подгруппу является частным случаем проблемы вхождения, то есть существования алгоритма, позволяющего для данной конечно определенной группы G и данной в ней конечной системы элементов A решить, принадлежит ли произвольно выбранный элемент группы G к подгруппе, порожденной множеством A .

Используя метод диаграмм, получена

ЛЕММА 22. Пусть G — группа Кокстера с древесной структурой, с множеством образующих A , $|A| < \infty$. И пусть $w \in G$, w — R и $\bar{R}$ - несократимое слово не равное единице в G . Слово w равно некоторому слову $v \in G_j$, где G_j — параболическая подгруппа группы G с множеством образующих A_j , $A_j \subset A$. Тогда w — слово на образующих A_j

ЛЕММА 23. Пусть G — группа Кокстера с древесной структурой, с множеством образующих A , $|A| < \infty$. И пусть $w \in G$, w — циклически несократимое тупиковое слово не равное единице в G . Слово w сопряжено некоторому слову $v \in G_j$. Тогда w, z — слова на образующих A_j

В работе [14] дано описание структуры централизатора элементов конечного порядка группы Кокстера с древесной структурой:

ЛЕММА 24. Пусть G — группа Кокстера с древесной структурой, w циклически R - несократимое слово в G , $w \in G_{ij}$, $|w| > 1$, где $G_{ij} = \langle a_i, a_j; a_i^2, a_j^2, (a_i a_j)^{m_{ij}} \rangle$, $m_{ij} = 2$. Тогда централизатор элемента w есть группа G_{ij} .

ЛЕММА 25. Пусть G — группа Кокстера с древесной структурой, w циклически R - несократимое слово в G , $w \in G_{ij}$, $|w| > 1$, где $G_{ij} = \langle a_i, a_j; a_i^2, a_j^2, (a_i a_j)^{m_{ij}} \rangle$, $m_{ij} > 2$. Тогда централизатор элемента w есть циклическая группа конечного порядка, порожденная элементом длины два.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 27. Ребро e_i дерева-графа Γ назовем замыкающим ребром пути, если ему соответствует четное число Кокстера.

ТЕОРЕМА 16. Пусть G — группа Кокстера с древесной структурой, слово w такое, что $|w| = 1$. Тогда централизатор элемента w есть подгруппа вида

$$C(w) = \langle \tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \dots, \tilde{z}_s; \tilde{z}_r^2, w^2, r = \overline{1, s} \rangle,$$

где $\tilde{z}_r$ — циклически сократимое слово вида $\tilde{z}_r = z_1 z_2 \dots z_{t-1} z_0 z_{t-1}^{-1} \dots z_2^{-1} z_1^{-1}$, подслова z_l принадлежат подгруппам вида G_{ij} . Подслово z_0 соответствует замыкающему ребру и $|z_l| = m_{ij} - 1$, $l = \overline{0, t-1}$.

Обозначим через $C_w(w)$ подгруппу, полученную из $C(w)$ вычеркиванием из множества порождающих слов элемента w .

ЛЕММА 26. Пусть G — группа Кокстера с древесной структурой, слово w такое, что $|w| = 1$. $C(w)$ — централизатор элемента w . Тогда группа $C_w(w)$ является свободным произведением циклических групп порядка два и $C(w) = \langle w, w^2 \rangle \times C_w(w)$.

ТЕОРЕМА 17. Централизатор конечно порожденной подгруппы H группы Кокстера с древесной структурой G есть конечно порожденная подгруппа и существует алгоритм выписывающий образующие централизатора.

Далее рассмотрим проблему обобщенной сопряженности слов, решенную в [15].

ТЕОРЕМА 18. В конечно порожденной группе Кокстера с древесной структурой разрешима проблема обобщенной сопряженности слов.

ТЕОРЕМА 19. Пусть G — группа Кокстера с древесной структурой и $\{w_i\}_{i=\overline{1,n}}$, $\{v_i\}_{i=\overline{1,n}}$ — множества слов из G . Если F — какое-то решение системы $\&_{i=1}^n (z^{-1}w_i z = v_i)$, то множество слов $C_G(H) \cdot F$, где $C_G(H)$ — централизатор подгруппы H , порожденной словами $\{w_i\}_{i=\overline{1,n}}$ является множеством всех решений системы.

Представим группу Кокстера с древесной структурой G в виде древесного произведения двупорожденных групп Кокстера, объединенных по конечным циклическим подгруппам. Для этого от графа T группы G перейдем к графу $\tilde{T}$ следующим образом: вершинам некоторого ребра $\bar{e}$ графа $\tilde{T}$ поставим в соответствие группы Кокстера на двух образующих $G_{ij} = \langle a_i, a_j; a_i^2, a_j^2, (a_i a_j)^{m_{ij}} \rangle$ и $G_{jk} = \langle a_j, a_k; a_j^2, a_k^2, (a_j a_k)^{m_{jk}} \rangle$, а ребру $\bar{e}$ — циклическую подгруппу $\langle a_j; a_j^2 \rangle$.

Группа G удовлетворяет условию максимальности, если всякая возрастающая последовательность ее подгрупп $H_1 \leq H_2 \leq \dots$ стабилизируется, то есть существует натуральное число n такое, что для любого N , $N > n$, $H_N = H_{N+1} = \dots$

Будем говорить, что в группе G разрешима проблема пересечения классов смежности конечно порожденных подгрупп, если для любых двух конечно порожденных подгрупп H_1 и H_2 группы G и любых слов $w_1, w_2 \in G$ существует алгоритм, позволяющий установить пусто или нет пересечение $w_1 H_1 \cap w_2 H_2$.

В. Н. Безверхним в [16] был получен следующий результат

ТЕОРЕМА 20. Пусть G древесное произведение групп

$$G = \left\langle \prod_{s=1}^n *G_s; \text{rel } G_1, \dots, \text{rel } G_s; \varphi_{ji}(U_{ij}) = U_{ji} \right\rangle,$$

объединенных по изоморфным подгруппам $U_{ij} < G$ и $U_{ji} < G$ с помощью фиксированного набора конструктивных изоморфизмов $\varphi_{ij}: \varphi_{ji}(U_{ij}) = U_{ji}$. Тогда, если подгруппы U_{ij} и U_{ji} обладают условием максимальности и в сомножителях разрешимы проблемы:

1. проблема вхождения;
2. проблема пересечения классов смежности любой конечно порожденной подгруппы $H < G_i$ с подгруппой $U_{ij} < G_i$;
3. существует алгоритм, выписывающий образующие пересечения любой конечно порожденной подгруппы $H < G_i$ с подгруппой $U_{ij} < G_i$,

то в группе G разрешима проблема вхождения.

Группа Кокстера с древесной структурой, представленная в виде древесного произведения дупорожденных групп Кокстера, объединенных по конечным циклическим подгруппам удовлетворяет условиям данной теоремы. Таким образом, в данном классе групп разрешима проблема вхождения.

Будем говорить, что группа G обладает свойством Хаусона, если пересечение любых двух ее конечно порожденных подгрупп есть конечно порожденная подгруппа.

Рассмотрим группу $G^* = \langle G, t; \text{rel}G, t^{-1}U_1t = \varphi(U_1) \rangle$ являющуюся HNN -расширением группы G с помощью конечных изоморфных подгрупп U_1 и U_{-1} и фиксированного изоморфизма $\varphi: \varphi(U_1) = U_{-1}$, t — не принадлежащая G правильная проходная буква.

В. Н. Безверхним [17] был получен следующий результат:

ТЕОРЕМА 21. *Если в группе G^* ее основа G обладает свойством Хаусона, то и G^* обладает свойством Хаусона.*

Баумслагом была доказана:

ТЕОРЕМА 22. *Если в свободном произведении $G = G_1 * G_2$ групп G_i , $i = \overline{1, 2}$ каждый множитель обладает свойством Хаусона, то и G обладает свойством Хаусона.*

ТЕОРЕМА 23. (Миллер-Шупп). *Группа $\tilde{G} = \langle G_1 * G_2, U_1 = \varphi(U_1) \rangle$, являющаяся свободным произведением групп G_1 и G_2 с объединением по изоморфным подгруппам U_1 и U_{-1} с помощью фиксированного изоморфизма $\varphi: \varphi(U_1) = U_{-1}$, изоморфно вложима в группу $G^* = \langle G_1 * G_2, t; \text{rel}G_1, \text{rel}G_2, t^{-1}U_1t = \varphi(U_1) \rangle$.*

Рассмотрим свободное произведение $\bar{G}$ дупорожденных групп Кокстера

$$G_{ij} = \langle a_i, a_j; a_i^2, a_j^2, (a_i a_j)^{m_{ij}} \rangle$$

и $G_{ik} = \langle a_i, a_k; a_i^2, a_k^2, (a_i a_k)^{m_{ik}} \rangle$, объединенных по циклической подгруппе $\langle a_i; a_i^2 \rangle$:

$$\bar{G} = G_{ij} *_{\langle a_i; a_i^2 \rangle} G_{ik}.$$

По теореме 22 группа $\bar{G} = \langle G_{ij} * G_{ik}; \varphi(a_i) = a'_i \rangle$ изоморфно вложима в группу

$$G^* = \langle G_{ij} * G_{ik}, t; \text{rel}G_{ij}, \text{rel}G_{ik}, t^{-1}a_i t = \varphi(a_i) \rangle.$$

Из теорем 20 и 21 следует, что группа G^* обладает свойством Хаусона и, значит, группа $\bar{G}$ также обладает свойством Хаусона.

С помощью метода математической индукции получено обобщение этого результата:

ТЕОРЕМА 24. *Группа Кокстера с древесной структурой обладает свойством Хаусона.*

Вопрос о нахождении пересечения подалгебр данной алгебры был впервые сформулирован А. И. Мальцевым в 1958 году.

Далее проанализируем результаты работ [18]- [20], используя метод типов, введенный В. Н. Безверхним, и метод специального множества слов, разработанный В. Н. Безверхним [17], [21] на основе обобщения метода Нильсена на свободные конструкции групп.

Слово из группы $\bar{G}$ можно представить единственным образом в виде:

$$g = l_{1g} l_{2g} \dots l_{ng} K_g r_{ng} \dots r_{1g}, \quad (1)$$

где r_{tg} и l_{sg}^{-1} — представители правых классов смежности группы G_{ij} по $\langle a_i; a_i^2 \rangle$ и G_{ik} по $\langle a'_i; (a'_i)^2 \rangle$, причем r_{tg}, r_{t+1g} (аналогично l_{sg}, l_{s+1g}) принадлежат разным сомножителям группы $\bar{G}$. K_g — ядро слова g .

Если K_g не принадлежит объединяемой подгруппе, то слоги l_{ng} и r_{ng} принадлежат одному сомножителю группы $\bar{G}$, а K_g — другому. В этом случае слоговая длина слова (1) равна $L(g) = 2n + 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 28. Если в (1) $l_{1g}l_{2g}..l_{ng} = (r_{ng}..r_{1g})^{-1}$, то слово

$$g = r_{1g}^{-1}..r_{ng}^{-1}K_g r_{ng}..r_{1g} \quad (2)$$

называется трансформой.

Если K_g принадлежит объединяемой подгруппе, то в (1) слоги l_{ng} и r_{ng} принадлежат разным сомножителям группы $\bar{G}$. В этом случае слоговая длина слова

$$g = l_{1g}l_{2g}..l_{ng}h_g r_{ng}..r_{1g}, \quad (3)$$

где $h_g = K_g$, равна $L(g) = 2n$.

Слово вида (1) будем называть нетрансформой нечетной длины, слово вида (3) – нетрансформой четной длины.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 29. Подслово $l_{1g}l_{2g}..l_{ng}(r_{ng}..r_{1g})$ называется левой (правой) половиной слов (1), (3). Подслово $l_{1g}l_{2g}..l_{ng}K_g(K_g r_{ng}..r_{1g})$ – закрытым начальным (конечным) отрезком.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 30. Левая (правая) половина слова $w_i = l_{1w_i}l_{2w_i}..l_{mw_i}K_{w_i}r_{mw_i}..r_{1w_i}$ называется изолированной в множестве $\{w_j\}$, $j \in \overline{1, N}$, если ни у одного из слов w_j^ε , $\varepsilon = \pm 1$ множества $(\{w_j\} \setminus w_i) \cup (\{w_j^{-1}\} \setminus w_i^{-1})$ нельзя выделить $l_{1w_i}l_{2w_i}..l_{mw_i}$ ($r_{mw_i}..r_{1w_i}$) в качестве начального (конечного) подслова, то есть $w_j^\varepsilon \neq l_{1w_i}l_{2w_i}..l_{mw_i}l_{m+1w_j}w_{jn}^\varepsilon$ ($w_j^\varepsilon \neq w_{j1}^\varepsilon r_{m+1w_j}r_{mw_i}..r_{1w_i}$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 31. Конечное множество слов $W = \{w_i\}_{i \in \overline{1, N}}$ группы $\bar{G}$ назовем специальным, если оно удовлетворяет следующим условиям:

1. Левая половина нетрансформы множества W изолирована в нем. Если нетрансформы четной длины, то изолированы и левая и правая половины;
2. Длину нетрансформы w_{ic} нельзя уменьшить, умножая слева и справа на слова из подгруппы, порожденной множеством $(\{w_i\} \setminus w_{ic})$. Длину произвольного элемента множества нельзя уменьшить, умножая на слово w длины меньше $L(w_{ic})$, принадлежащее подгруппе $\langle \{w_i\}_{i \in \overline{1, N}} \rangle$;
3. Пусть $w_{i0}^\varepsilon = l_{1w_0}l_{2w_0}..l_{nw_0}K_{w_0}r_{nw_0}..r_{j+1w_0}r_{jw_0}..r_{1w_0}$, $\varepsilon = \pm 1$, $j < n$ нетрансформа из множества $\{w_i\}_{i \in \overline{1, N}}$ и $\{w_{\alpha_i}^\varepsilon = l_{1w_{\alpha_i}}l_{2w_{\alpha_i}}..l_{nw_{\alpha_i}}K_{w_{\alpha_i}}r_{nw_{\alpha_i}}..r_{jw_0}..r_{1w_0}\}_{i \in \overline{1, k}}$, $\varepsilon_i = \pm 1$ подмножество нетрансформ из множества $(\{w_i\} \setminus w_{i0}) \cup (\{w_i^{-1}\} \setminus w_{i0}^{-1})$, правые половины которых оканчиваются подсловом $r_{jw_0}..r_{1w_0}$, тогда, если подгруппа

$$\langle \{w_i\}_{i \in \overline{1, N}} \rangle \cap r_{1w_0}^{-1}..r_{jw_0}^{-1}Dr_{jw_0}..r_{1w_0} = B,$$

где

$$D = \begin{cases} G_{k-1}, & \text{если } r_{j+1w_0} \in G_{k-1}; \\ G_{xy}, & \text{если } r_{j+1w_0} \in G_{xy}. \end{cases}$$

не единична, то $L(w_{i0}u) \geq L(w_{i0})$, $L(w_{i0}uw_{\alpha_i}^\varepsilon) \geq L(w_{i0})$, где $u \in B$;

4. Пусть $w_i = l_{1w_i}..l_{sw_i}l_{s+1w_i}..l_{mw_i}K_{w_i}r_{mw_i}..r_{s+1w_i}r_{sw_i}..r_{1w_i}$ и

$$w_j = l_{1w_j}..l_{sw_j}l_{s+1w_j}..l_{mw_j}K_{w_j}r_{mw_j}..r_{s+1w_j}r_{sw_j}..r_{1w_j}$$

слова из $\{w_i\}_{i \in \overline{1, N}}$ не обязательно различны $m \leq n$, $s \leq t$, тогда существуют слова $g \neq 1$ длины меньше $2s$ из подгруппы $\langle \{w_i\}_{i \in \overline{1, N}} \rangle$ такие, что если $l_{1w_i} \dots l_{sw_i} \neq l_{1w_j} \dots l_{sw_j}$, то

$$gw_i = l_{1w_j} \dots l_{sw_j} l'_{s+1w_i} \dots l'_{nw_i} K'_{w_i} r_{nw_i} \dots r_{s+1w_i} r_{sw_i} \dots r_{1w_i},$$

либо если $r_{sw_i} \dots r_{1w_i} \neq r_{sw_j} \dots r_{1w_j}$, то

$$w_i g = l_{1w_i} \dots l_{sw_i} l'_{s+1w_i} \dots l'_{nw_i} K'_{w_i} r'_{nw_i} \dots r'_{s+1w_i} r_{sw_j} \dots r_{1w_j},$$

либо если $r_{1w_i}^{-1} \dots r_{sw_i}^{-1} \neq l_{1w_j} \dots l_{sw_j}$, то

$$gw_i^{-1} = l_{1w_j} \dots l_{sw_j} (r'_{s+1w_i})^{-1} \dots (r'_{nw_i})^{-1} (K'_{w_i})^{-1} l_{nw_i}^{-1} \dots l_{1w_i}^{-1},$$

либо если $l_{sw_i}^{-1} \dots l_{1w_i}^{-1} \neq r_{sw_j} \dots r_{1w_j}$, то

$$w_i^{-1} g = r_{1w_i}^{-1} \dots r_{nw_i}^{-1} (K'_{w_i})^{-1} (l'_{nw_i})^{-1} \dots (l'_{s+1, w_i})^{-1} r_{sw_j} \dots r_{1w_j}.$$

ЛЕММА 27. Всякое конечное множество слов $\{w_i\}_{i \in \overline{1, N}}$ группы $\overline{G} = G_{ij} \underset{\langle a_i | a_i^2 \rangle}{*} G_{ik}$ можно через конечное число шагов преобразовать в специальное.

Пусть W — специальное множество слов. Разобьем его на подмножества следующим образом: подмножеству M_0 принадлежат все нетрансформы, а подмножествам M_i трансформы с одинаковыми крыльями, принадлежащие одной подгруппе, сопряженной группе G_{ij} или G_{ik} . Каждое из этих подмножеств порождает подгруппу (M_i) , $i = \overline{0, k}$, имеющую вид: $(M_i) = r_{1i}^{-1} \dots r_{ni}^{-1} C_i r_{ni} \dots r_{1i}$. Здесь C_i — подгруппы из G_{ij} или G_{ik} , порожденные ядрами трансформ. Упорядочим подгруппы (M_i) по длинам крыльев трансформ. Получим ряд:

$$(M_1) \leq (M_2) \leq \dots \leq (M_k). \quad (4)$$

ЛЕММА 28. Ряд (4) можно преобразовать в ряд

$$(M'_1) \leq (M'_2) \leq \dots \leq (M'_k), \quad (4')$$

обладающий следующими свойствами:

1. $gr((M_0), (M_1), \dots, (M_k)) = gr((M'_0), (M'_1), \dots, (M'_k))$;
2. Если подгруппе $(M'_j) = r_{1x}^{-1} \dots r_{nx}^{-1} C'_j r_{nx} \dots r_{1x}$, $1 \leq j \leq k'$ принадлежит трансформ $u = r_{1x}^{-1} \dots r_{nx}^{-1} h r_{nx} \dots r_{1x}$, где h принадлежит объединяемой подгруппе, то среди подгрупп ряда (4') имеется подгруппа $(M'_l) = r_{1x}^{-1} \dots r_{n-1, x}^{-1} C'_l r_{n-1, x} \dots r_{1x}$ содержащая u ;
3. Если для некоторой трансформы $u = r_{1x}^{-1} \dots r_{nx}^{-1} K_x r_{nx} \dots r_{1x}$, принадлежащей подгруппе $(M'_j) = r_{1x}^{-1} \dots r_{nx}^{-1} C'_j r_{nx} \dots r_{1x}$, и нетрансформы $y = l_{1y}^{-1} \dots l_{n_1 y}^{-1} K_y l_{n_1 y} \dots l_{1y}$ из M_0 , $n_1 \geq n$, (левая половина y изолирована) выполняется соотношение $L(y^{-1} u y) \leq L(y)$, то существует подгруппа (M'_s) ряда (4'), содержащая трансформу $y^{-1} (r_{1x}^{-1} \dots r_{nx}^{-1} K_x r_{nx} \dots r_{1x}) y$, а если $L(y u y^{-1}) < L(y)$, то существует подгруппа (M'_s) ряда (4'), содержащая трансформу $y (r_{1x}^{-1} \dots r_{nx}^{-1} K_x r_{nx} \dots r_{1x}) y^{-1}$;

4. Если $(M'_j) = r_{1x}^{-1} \dots r_{n_1x}^{-1} C'_j r_{n_1x} \dots r_{1x}$, $(M'_s) = r_{1x}^{-1} \dots r_{n_1x}^{-1} r_{n_1+1,y}^{-1} \dots r_{n_2y}^{-1} C'_s r_{n_2y} \dots r_{1x}$ — подгруппы ряда (4'), $n_2 > n_1$, и подгруппа (M'_j) содержит трансформу $u = r_{1x}^{-1} \dots r_{n_1x}^{-1} h r_{n_1x} \dots r_{1x}$, либо $u' = r_{1x}^{-1} \dots r_{n_1x}^{-1} K r_{n_1x} \dots r_{1x}$, где $K = r_{n_1+1,y}^{-1} h r_{n_1+1,y}$, то существует подгруппа ряда (4') $(M'_k) = r_{1x}^{-1} \dots r_{n_1x}^{-1} r_{n_1+1,y}^{-1} C'_k r_{n_1+1,y} \dots r_{1x}$, содержащая в первом случае трансформу u , во втором u' ;
5. Если $(M'_s) = r_{1x}^{-1} \dots r_{n_1x}^{-1} C'_s r_{n_1x} \dots r_{1x}$ подгруппа из ряда (4') и $y^\varepsilon = l_{1y}^{-1} \dots l_{n_2y}^{-1} K r_{n_2y} \dots r_{n_1+1,y} r_{n_1x} \dots r_{1x}$, $\varepsilon = \pm 1$ — элемент специального множества, причем подслово $r_{1x}^{-1} \dots r_{n_1x}^{-1} r_{n_1+1,y}^{-1}$ не является изолированной левой половиной некоторой трансформы w^ε , $\varepsilon = \pm 1$ и если подгруппа (M'_s) содержит трансформу $r_{1x}^{-1} \dots r_{n_1x}^{-1} h r_{n_1x} \dots r_{1x}$ либо трансформу $r_{1x}^{-1} \dots r_{n_1x}^{-1} K r_{n_1x} \dots r_{1x}$, где $K = r_{n_1+1,y}^{-1} h r_{n_1+1,y}$, то существует подгруппа ряда (4') $(M'_j) = r_{1x}^{-1} \dots r_{n_1x}^{-1} r_{n_1+1,y}^{-1} C'_j r_{n_1+1,y} \dots r_{1x}$, содержащая эту трансформу.

ЛЕММА 29. Подгруппа (M_0) , порожденная нетрансформами специального множества, свободна и не содержит трансформ.

Подгруппу порожденную специальным множеством $\{w_i\}_{i \in \overline{1,N}}$ обозначим через $gr(M_0, S)$. Она представляет собой HNN — группу с основой S , являющуюся древесным произведением, правильной системой проходных букв которой служат элементы из M_0 . Подгруппы (M_0) и (M'_j) , $j = \overline{1,k}$ ряда (4') будем называть порождающими подгруппами $\langle w_1, \dots, w_n \rangle = gr(M_0, S)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 32. Произведение $u_1 \dots u_k$ назовем словом подгруппы $\langle w_1, \dots, w_n \rangle = gr(M_0, S)$ группы $\overline{G} = G_{ij} \underset{\langle a_i, a_i^2 \rangle}{*} G_{ik}$, если

1. $u_i \neq 1$;
2. $u_i \in \{M_0 \cup M_0^{-1}\}$ либо u_i принадлежат некоторой подгруппе из ряда (4');
3. $u_i \neq u_{i+1}^{-1}$;
4. u_i и u_{i+1} не содержатся в одной подгруппе ряда (4');
5. в $u_1 \dots u_k$ нет произведения $u_i u_{i+1} u_{i+2}$ ($i = \overline{1, k-2}$), где $u_i = u_{i+2}^{-1}$, $u_i \in \{M_0 \cup M_0^{-1}\}$, $u_{i+1} \in (M'_j)$ и $u_i u_{i+1} u_{i+2} \in (M'_s)$; (M'_j) , (M'_s) — из ряда (4').

ЛЕММА 30. Всякое произведение $w_{i_1}^{\varepsilon_1} w_{i_2}^{\varepsilon_2} \dots w_{i_n}^{\varepsilon_n}$, $\varepsilon_j = \pm 1$, где w_{i_j} — образующие подгруппы $\langle \{w_i\}_{i \in \overline{1,N}} \rangle$, через конечное число шагов можно привести к слову $u_{i_1} \dots u_{i_k}$, $k \leq n$ подгруппы $gr(M_0, S) = \langle \{w_i\}_{i \in \overline{1,N}} \rangle$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 33. Слово $u_1 \dots u_k$ называется простым, если

$$L(u_1 \dots u_k) = \max \{L(u_1), \dots, L(u_k)\}.$$

ЛЕММА 31. Если $u_1 \dots u_k$ — слово подгруппы $gr(M_0, S)$, то $L(u_1 \dots u_k) \geq L(u_i)$, $i = \overline{1, k}$.

Простое слово $u_1 \dots u_k$ подгруппы $gr(M_0, S)$ может быть одного из следующих видов:

- а) слово $u_1 \dots u_k$ содержит нетрансформу максимальной длины, то есть $L(u_i) > L(u_j)$, $1 \leq j \leq i-1$, $i+1 \leq j \leq k$, u_i — нетрансформа;
- б) слово $u_1 \dots u_k$ содержит нетрансформу u_i и трансформу u_{i+1} максимальной длины, то есть $L(u_i) = L(u_{i+1}) = L(u_i u_{i+1})$, $L(u_i) > L(u_j)$, $1 \leq j \leq i-1$, $i+2 \leq j \leq k$;

- с) слово $u_1 \dots u_k$ содержит нетрансформы u_i и u_{i+2} , и трансформу u_{i+1} со свойствами:
 $L(u_i) = L(u_{i+2})$, $L(u_i) = L(u_i u_{i+1}) = L(u_i u_{i+1} u_{i+2})$, $L(u_i) > L(u_j)$, $1 \leq j \leq i-1$,
 $i+3 \leq j \leq k$, причем длина слова u_{i+1} окажется меньше длины u_i , $0 \leq L(u_{i+1}) \leq L(u_i)$;
- д) слово $u_1 \dots u_k$ содержит трансформу u_i максимальной длины.

Пусть W некоторое множество элементов группы $\overline{G}$. Обозначим через $W_{v,i}$ $i = \overline{1, n}$, множество всех трансформ из W вида vKv^{-1} , где ядро K принадлежит одному из сомножителей G_{ij} или G_{ik} . Пару (v, i) назовем типом трансформы из $W_{v,i}$.

Пусть H — конечно порожденная подгруппа группы $\overline{G}$ порождена специальным множеством, то есть $H = gp(M_0, S)$. Каждый элемент $g \neq 1$ из H имеет несократимую запись в w -символах: $g = w_{i1}^{\varepsilon_1} w_{i2}^{\varepsilon_2} \dots w_{is}^{\varepsilon_s}$, $\varepsilon_i = \pm 1$. Перемножая рядом стоящие трансформы одного типа, получим запись слова g в u -символах: $g = u_1 \dots u_l$, где $u_i \neq 1$, $u_i \neq u_{i+1}^{-1}$, $i = \overline{1, k-1}$.

Проведем в слове $g = u_1 \dots u_l$ все сокращения в группе $\overline{G}$, получим слоговую запись этого элемента: $g = g_1 g_2 \dots g_k$, $k \geq 1$.

ЛЕММА 32. Каждый слог g_i слова $g = g_1 g_2 \dots g_k$ имеет вид:

$$g_i = a_i x_i y_i z_i a'_i, \quad (5)$$

$i = \overline{1, k}$, где x_i — центральный или правый слог u_{j-1} , y_i — центральный слог $u_j \in M_{v,j}$, $j = \overline{1, n}$, z_i — левый или центральный слог u_{j+1} , a_i и a'_i — элементы из объединяемой подгруппы.

Рассмотрим конечное множество конечно порожденных подгрупп $H_1, H_2, \dots, H_n$ группы G .

Обозначим специальные множества образующих подгрупп $H_1, H_2, \dots, H_n$ через

$$W^{(j)} = \{w_i\}_{i \in \overline{1, N_j}} \quad j = \overline{1, n}.$$

Если пересечение $H_1 \cap H_2 \cap \dots \cap H_n$ не тривиально, то найдутся такие $h_j \in H_j$, $j = \overline{1, n}$, что $h_1 = h_2 = \dots = h_n = v$. Перепишем слова h_j в u -символах соответствующей подгруппы:

$$\begin{aligned} v &= u^{(1)}(1)u^{(1)}(2) \dots u^{(1)}(r_1) = \\ &= u^{(2)}(1)u^{(2)}(2) \dots u^{(2)}(r_2) = \\ &= u^{(n)}(1)u^{(n)}(2) \dots u^{(n)}(r_n) = \\ &\dots\dots\dots \\ &= q(1) q(2) \dots q(r). \end{aligned} \quad (6)$$

Последняя строчка равенства (6) дает несократимую запись слова v в группе $\overline{G}$.

Будем называть $(v^{(j)})^{-1} \alpha_i^{(j)} v^{(j)}$ типом трансформ порождающей подгруппы

$$(M_i^{(j)}) = (v^{(j)})^{-1} A_i^{v^{(j)}}$$

подгруппы H_j , $\alpha_i^{(j)} \notin \overline{G}$ и обозначать его $(v^{(j)}, i)$. Символом $L((v^{(j)}, i)) = 2L(v^{(j)}) + 1$ будем обозначать длину типа $(v^{(j)}, i)$, а символом $T^{(j)}$ множество всех типов трансформ подгруппы H_j . Пополним $T^{(j)}$ символом $\beta^{(j)} \notin \overline{G}$, множество $\tilde{T}^{(j)}$. Обозначим через $R^{(j)}$ множество $M_0^{(j)} \cup (M_0^{(j)})^{-1} \cup \tilde{T}^{(j)}$, $j = \overline{1, n}$, соответствующее подгруппе H_j . Присоединим к множеству $R^{(j)}$ символ $\gamma^{(j)} \notin \overline{G}$, получим $\tilde{R}^{(j)}$. Соотношения (6) определяют следующее отображение:

$$\begin{aligned} \varphi_v(1, 2, \dots, r) = & (Z^+ \times (R^{(1)} \times Z^+) \times T^{(1)} \times (R^{(1)} \times Z^+) \times Z^+) \times \\ & \times (Z^+ \times (R^{(2)} \times Z^+) \times T^{(2)} \times (R^{(2)} \times Z^+) \times Z^+) \times \dots \\ & \dots \times (Z^+ \times (R^{(n)} \times Z^+) \times T^{(n)} \times (R^{(n)} \times Z^+) \times Z^+), \end{aligned} \quad (7)$$

где $Z^+ = \{0, 1, 2, \dots\}$.

По лемме 31 каждый слог из последней строчки равенства (6) образован элементами трех последних символов, то есть

$$q(k) = a_i x_k^{(1)} y_k^{(1)} z_k^{(1)} a'_i = a_i x_k^{(2)} y_k^{(2)} z_k^{(2)} a'_i = \dots = a_i x_k^{(n)} y_k^{(n)} z_k^{(n)} a'_i.$$

Тогда отображение (7) определяет функцию:

$$\begin{aligned} \varphi_v(k) = & \left(p_0^{(1)}(k), \left(r_1^{(1)}(k), p_1^{(1)}(k) \right), \tau^{(2)}(k), \left(r_2^{(2)}(k), p_2^{(2)}(k) \right), p_0'^{(1)}(k) \right), \\ & \left(p_0^{(2)}(k), \left(r_1^{(2)}(k), p_1^{(2)}(k) \right), \tau^{(2)}(k), \left(r_2^{(2)}(k), p_2^{(2)}(k) \right), p_0'^{(2)}(k) \right), \dots \\ & \dots, \\ & \left(p_0^{(n)}(k), \left(r_1^{(n)}(k), p_1^{(n)}(k) \right), \tau^{(n)}(k), \left(r_2^{(n)}(k), p_2^{(n)}(k) \right), p_0'^{(n)}(k) \right), \end{aligned}$$

где номер k соответствует слогу $q(k) = a_i x_k^{(j)} y_k^{(j)} z_k^{(j)} a'_i$ слова v , $p_0^{(j)}(k)$ — номер элемента a_i в ассоциированной подгруппе $\langle a_i; a_i^2 \rangle$, то есть принимает значения 0 или 1; аналогично $p_0'^{(j)}(k)$ принимает значения 0 или 1;

если $x_k^{(j)} = 1$, то есть $x_k^{(j)}$ не принимает участия в образовании слога $q(k)$, $r_1^{(j)}(k) = \gamma_k^{(j)}$, $p_1^{(j)}(k) = 0$;

$r_1^{(j)}(k) = w_1^{(j)}(k) \in \tilde{R}^{(j)} \setminus \{\gamma^{(j)}\}$, если $x_k^{(j)} \neq 1$ и $x_k^{(j)}$ есть $p_1^{(j)}(k)$ -ый слог $w_1^{(j)}(k)$

$\tau^{(j)}(k) = \beta^{(j)}$, если $y_k^{(j)} = 1$;

$\tau^{(j)}(k) = (v^{(j)}, i)$, если $y_k^{(j)}$ — слог трансформы типа $(v^{(j)}, i)$;

$r_2^{(j)}(k) = \gamma^{(j)}$, если $z_k^{(j)} = 1$;

$r_2^{(j)}(k) = w_2^{(j)}(k) \in \tilde{R}^{(j)} \setminus \{\gamma^{(j)}\}$, если $z_k^{(j)} \neq 1$ и $z_k^{(j)}$ есть $p_2^{(j)}(k)$ -ый слог слова $w_2^{(j)}(k)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 34. $\varphi_v(k)$ назовем *типом слога* $q(k)$ в слове v .

Мощность множества всех типов не превосходит числа

$$A = 4^n \prod_{j=1}^n \left(2 \sum_{w^{(j)} \in W^{(j)}} L(w^{(j)}) + 1 \right)^2 |\tilde{T}^{(j)}|,$$

где $|\tilde{T}^{(j)}|$ — мощность множества $\tilde{T}^{(j)}$, $j = \overline{1, n}$. Множитель 4 есть порядок ассоциированной подгруппы в квадрате.

Обозначим через F пересечение $H_1 \cap H_2 \cap \dots \cap H_n$.

ЛЕММА 33. Если $L(v) > A$, где v — слово из (6) и $v \in F$, $v \neq 1$, то существует слово $v' \in F$, $L(v') < L(v)$, удовлетворяющее равенствам (6).

ЛЕММА 34. Пусть Ω — совокупность всех слов $w \in F$, слоговая длина которых не превосходит A . Тогда существует конечное подмножество слов $\Omega' \subset \Omega$, $\Omega' = \{w_1, \dots, w_\gamma\}$ и γ конечных семейств трансформ $Z_i = \{\delta_{1i}, \dots, \delta_{p_i i}\}$, $1 \leq i \leq \gamma$, таких, что подгруппа, порожденная множеством Ω , совпадает с подгруппой порожденной множеством $\left\{ \Omega' \cup \left(\bigcup_{i=1}^{\gamma} Z_i \right) \right\}$.

ЛЕММА 35. Пусть Ω — совокупность всех слов $w \in F$, слоговая длина которых не превосходит A . Тогда существует конечное подмножество слов $\Omega' \subset \Omega$, $\Omega' = \{w_1, \dots, w_\gamma\}$ и γ конечных семейств трансформ $Z_i = \{\delta_{1i}, \dots, \delta_{pi}\}$, $1 \leq i \leq \gamma$.

$$\langle \Omega \rangle = \left\{ \Omega' \cup \left(\bigcup_{i=1}^{\gamma} Z_i \right) \right\} = H_1 \cap H_2 \cap \dots \cap H_n.$$

ТЕОРЕМА 25. В группе $\overline{G} = G_{ij} *_{\langle a_i; a_i^2 \rangle} G_{ik}$ пересечение конечного числа конечно порожденных подгрупп конечно порождено и существует алгоритм, выписывающий образующие этого пересечения.

ТЕОРЕМА 26. В группе $\overline{G} = G_{ij} *_{\langle a_i; a_i^2 \rangle} G_{ik}$ разрешима проблема пересечения классов смежности конечно порожденных подгрупп.

Для обобщения этого результата представим конечно порожденную группу Кокстера с древесной структурой G в виде свободного произведения двух сомножителей, объединенных по конечной циклической подгруппе следующим образом: Рассмотрим древесное произведение $k-1$ сомножителей, которому соответствует связный дерево-граф T_{k-1} , $T_{k-1} \subset T$. Группу, соответствующую графу T_{k-1} обозначим через G_{k-1} . Пусть k -ый сомножитель — подгруппа G_{xy} соответствует вершине дерева-графа T , которая связана с графом T_{k-1} ребром e_t . При этом ребру e_t соответствует циклическая подгруппа $\langle a_x; a_x^2 \rangle$. Так группа G представлена как свободное произведение двух подгрупп — G_{k-1} и G_{xy} , объединенных по циклической подгруппе порядка два $\langle a_x; a_x^2 \rangle$, то есть $G = G_{k-1} *_{\langle a_x; a_x^2 \rangle} G_{xy}$.

Таким образом, для доказательства разрешимости проблемы пересечения классов смежности конечного числа конечно порожденных подгрупп в группе G применимы рассуждения аналогичные рассуждениям, использованным при получении разрешимости данной проблемы в группе G .

ТЕОРЕМА 27. В группе Кокстера с древесной структурой G разрешима проблема пересечения классов смежности конечного числа конечно порожденных подгрупп порожденных подгрупп.

Будем говорить, что в группе G разрешима проблема сопряженности подгрупп, если существует алгоритм, позволяющий для любых подгрупп H_1 и H_2 группы G установить существует ли такое слово $z \in G$, что $z^{-1}H_1z = H_2$.

Используя метод специального множества и метод типов, в [20] получен следующий результат:

ТЕОРЕМА 28. В группе Кокстера с древесной структурой разрешима проблема сопряженности подгрупп.

ТЕОРЕМА 29. [22] Всякая конечно порожденная подгруппа без кручения группы Кокстера с древесной структурой свободна.

ТЕОРЕМА 30. [23] Нормализатор всякой конечно порожденной подгруппы H группы Кокстера с древесной структурой $\overline{G} = G_{ij} *_{\langle a_j; a_j^2 \rangle} G_{jk}$, где $G_{ij} = \langle a_i, a_j; a_i^2, a_j^2, (a_i a_j)^{m_{ij}} \rangle$ и $G_{jk} = \langle a_j, a_k; a_j^2, a_k^2, (a_j a_k)^{m_{jk}} \rangle$, конечно порожден и существует алгоритм, выписывающий его образующие.

ТЕОРЕМА 31. [24] Нормализатор произвольной конечно порожденной подгруппы группы Кокстера с древесной структурой конечно порожден. Существует алгоритм, выписывающий образующие данного нормализатора.

ТЕОРЕМА 32. [25] *Существует алгоритм, позволяющий установить для любых двух множеств конечно порожденных подгрупп $\{H_i\}$ и $\{H'_i\}$ группы G , имеется ли такое $z \in G$, что $\&_{i=1}^n z^{-1} H_i z = H'_i$.*

Далее для групп Кокстера с древесной структурой изучается вопрос построения изолятора конечно порожденной подгруппы.

Понятие изолятора в группах, которое мы будем использовать, определено П. Г. Конторовичем.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 35. *Подгруппа A группы G называется изолированной в G , если для любого элемента g из G из того, что g^k принадлежит A , $g^k \neq 1$, следует, что g принадлежит A .*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 36. *Подгруппа, равная пересечению всех изолированных в G подгрупп, содержащих подгруппу A , называется изолятором или корневым замыканием A в G .*

ТЕОРЕМА 33. [26] *В группах Кокстера с древесной структурой изолятор всякой конечно порожденной подгруппы конечно порожден. Существует алгоритм, выписывающий образующие данного изолятора.*

5. n -угольные группы Кокстера

В данном разделе анализируются результаты работ [27]- [28].

Как сказано выше, группам Кокстера с образующими $a_1, a_2, \dots, a_n$ можно поставить в соответствие конечный граф Γ , вершинам которого соответствуют образующие a_i , а каждому ребру, соединяющему a_i и a_j — соотношение $(a_i a_j)^{m_{ij}} = 1$, $i \neq j$, $i, j \in \overline{1, n}$, других ребер нет.

Рассмотрим группы Кокстера, соответствующий граф которых состоит из n -угольников, $n \geq 3$. Назовем такие группы группами Кокстера с n -угольной структурой. Элементы матрицы Кокстера таких групп удовлетворяют условиям: $m_{ij} \geq 2$, $i \neq j$.

Остановимся на группах Кокстера с n -угольной структурой для $n > 3$.

Каждую группу Кокстера G_{ij} можно задать копредставлением

$$G_{ij} = \langle a_i, a_j; R_{ij} \rangle,$$

где R_{ij} — множество всех нетривиальных циклически несократимых в свободной группе $\langle a_i, a_j \rangle$ слов равных единице в группе G_{ij} , копредставление группы G на образующих $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ можно записать

$$G = \langle A; R \rangle,$$

где $R = \bigcup_{1 \leq i < j} R_{ij}$.

Обозначим через $|w|$ длину слова в свободной группе $F = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$.

ЛЕММА 36. *Если $w \in G_{ij}$, w — нетривиальное слово в свободной группе и w равно единице в группе G_{ij} , то $|w| \geq 2m_{ij}$.*

Пусть w циклически приведенное слово не равное единице в группе $F = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ и $w \in \langle R \rangle^F$. Тогда из теоремы Ван-Кампена следует, что существует R -диаграмма M с граничным циклом $\gamma = \partial M$, меткой которого является слово w , а метками областей — слова из R_{ij} , $1 < i < j < n$.

Выполним следующие преобразования в M :

(а) если области $D^1, D^2 \in M$, $\varphi(D^1)$ и $\varphi(D^2)$ принадлежат одной подгруппе G_{ij} и $\|\varphi(\partial D^1 \cap \partial D^2)\| \geq 1$, то области D^1, D^2 объединяем в одну область D , произведя свободные сокращения в слове на границе области D , которая и будет новой меткой этой области;

(б) если метка области D равна единице в $F = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$, то область D вырезаем, а ее границу склеиваем.

Через конечное число шагов получим диаграмму, инвариантную относительно указанных преобразований, причем в полученной диаграмме, если две области D^1, D^2 пересекаются, то $|\varphi(\partial D^1 \cap \partial D^2)| = 1$. Такая R -диаграмма называется приведенной.

ЛЕММА 37. *Односвязная приведенная R -диаграмма M группы Кокстера с n -угольной структурой при $n > 3$ удовлетворяет условиям $C(4)$ & $T(4)$.*

Напомним, что граничная область D R -диаграммы M является простой, если $\partial M \cap \partial D$ есть правильная часть граничного цикла ∂M .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 37. *Простая область $D \subset M$ называется деновской, если $i(D) < 2$, ($i(D)$ — внутренняя часть области D).*

Как и ранее, деновским сокращением диаграммы M будем называть удаление граничного пути $\partial M \cap \partial D$ деновской области D .

Диаграмма M , не содержащая деновских областей, называется R -приведенной. Граничные области приведенной односвязной диаграммы M группы Кокстера с n -угольной структурой, $n > 3$, удовлетворяют неравенству $\sum^* (3 - i(D)) \geq 4$, где суммирование ведется по граничным областям.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 38. *Пусть M — приведенная односвязная R -диаграмма с n -угольной структурой, $n > 3$, тогда последовательность граничных областей $D_1, D_2, \dots, D_n, n \geq 2$ образуют полосу $\Pi = \bigcup_{i=1}^n D_i$, если:*

- 1) $\forall i, 1 \leq i \leq n, \partial D_i \cap \partial M$ — правильная часть M_i ;
- 2) $\forall i, 1 \leq i \leq n-1$ границы областей D_i, D_{i+1} пересекаются по ребру, а $D_n \cap D_1$ — пустое множество;
- 3) $i(D_1) = i(D_n) = 2, \forall j, 2 < j < n, i(D_j) = 3$.

Удаление границы полосы $\partial M \cap \partial \Pi$ является специальным R -сокращением или $\bar{R}$ -сокращением.

ЛЕММА 38. *Если M — приведенная односвязная R -диаграмма группы Кокстера с n -угольной структурой, не содержащая деновских областей, то M содержит минимум две непересекающиеся полосы.*

Пусть $G_{ab} = \langle a, b | (ab)^{m_{ab}}, a^2, b^2 \rangle$ — группа Кокстера; тогда, очевидно, в G_{ab} разрешимы следующие проблемы:

- 1) проблема равенства и сопряженности слов;
- 2) проблема вхождения;
- 3) проблема степенной сопряженности слов.

ТЕОРЕМА 34. *В группе Кокстера с n -угольной структурой, $n > 3$, разрешима проблема равенства слов.*

Действительно, выполняя R и $\bar{R}$ -сокращения, то есть, выделяя в граничном цикле $\varphi(\partial M)$ деновские области и полосы при R и $\bar{R}$ -сокращениях, слоговая длина $\varphi(\partial M)$ уменьшается и через некоторое конечное число шагов выясняем равно ли w единице.

ТЕОРЕМА 35. *В группах Кокстера с n -угольной структурой разрешима проблема сопряженности слов.*

При доказательстве используются кольцевые диаграммы.

Пусть M – диаграмма сопряжённости слов $w, v \in G$, γ и δ ее граничные циклы, где $\varphi(\gamma) = w, \varphi(\delta) = v$.

Устанавим структуру кольцевой диаграммы. Предполагаем, что $\varphi(\gamma), \varphi(\delta)R$ и $\overline{R}$ несократимы, M – приведённая диаграмма. Если M – k -слойная, то есть любые два соседних слоя имеют общий граничный цикл, то все внутренние области состоят из областей D с $d(D) = 4$. Внутренние граничные циклы имеют равную слоговую длину, и каждый из циклов является некоторой перестановкой фиксированного набора из N слогов.

ЛЕММА 39. *Если каждая граничная область D кольцевой диаграммы M имеет $i(D) = 3$, то M имеет число слоев ≤ 2 .*

ТЕОРЕМА 36. *В группах Кокстера с n -угольной структурой, $n > 3$, разрешимы проблемы равенства и сопряженности слов.*

Напомним, что группе G разрешима проблема обобщенной сопряженности слов, если существует алгоритм, позволяющий для любых двух наборов слов $\{w_i\}, \{v_i\}, i = \overline{1, n}$, установить существует ли $z \in G$, такой, что $\&_{i=1}^n (z^{-1}w_i z = v_i)$.

ТЕОРЕМА 37. *В группах Кокстера с n -угольной структурой, $n > 3$, разрешима проблема обобщенной сопряженности слов.*

ТЕОРЕМА 38. *Существует алгоритм, позволяющий в группах Кокстера с n -угольной структурой, $n > 3$, для любых слов w и v установить существуют ли $n, m \in N$ и $z \in G$ такие, что $z^{-1}w^n z = v^m$.*

Рассмотрим теперь случай $n = 3$.

ТЕОРЕМА 39. *В группах Кокстера*

$$\overline{G}_3 = \langle a_1, a_2, a_3 | (a_1 a_2)^{m_{12}}, (a_1 a_3)^{m_{13}}, (a_2 a_3)^{m_{23}} \rangle,$$

где $m_{ij} \geq 2$ разрешимы проблемы равенства и сопряженности слов.

ТЕОРЕМА 40. *В конечно порожденной группе Кокстера $\overline{G}$ с треугольной структурой разрешима проблема равенства слов.*

ТЕОРЕМА 41. *В конечно порожденной группе Кокстера $\overline{G}$ с треугольной структурой разрешима проблема сопряженности слов.*

6. Заключение

В современной комбинаторной теории групп наиболее трудным является доказательство алгоритмической разрешимости проблем равенства, сопряженности слов и их обобщений. Поэтому решение этих проблем является важным, сложным и актуальным направлением.

Результаты, изложенные в статье, направлены на решение алгоритмических проблем в конечно порожденных группах Кокстера.

Рассмотренные в статье классы групп включают все группы Кокстера, которые либо принадлежат данным классам групп, либо могут быть представлены как обобщенные древесные структуры групп Кокстера, образованные из групп Кокстера с древесной структурой заменой некоторых вершин соответствующего дерева-графа группами Кокстера большого или экстрабольшого типов, а также группами Кокстера с n -угольной структурой.

Исследования проводились под руководством д. ф.-м. н., профессора В. Н. Безверхнего, руководителя Тульской научной школы "Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп".

Для решения алгоритмических проблем в группах Кокстера применялись современные комбинаторные и геометрические методы исследования: метод диаграмм, введенный ван Кампеном, переоткрытый Р. Линдоном и усовершенствованный В. Н. Безверхним в части введения R -сокращений, специальных R -сокращений, специальных кольцевых сокращений, а также метод графов, метод специального множества слов, разработанный В. Н. Безверхним на основе обобщения метода Нильсена на свободные конструкции групп.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Coxeter H. S. M. Discrete groups generated by reflections // Ann. Math. 1934. Vol. 35. P. 588-621.
2. Tits J. Groupes simples et geometries associees // Proc. Int. Congress Math. Stocholm. 1962. P. 197-221.
3. Schupp P. Coxeter Groups, 2-Completion, Perimeter Reduction and Subgroup Separability // arXiv math. GR/0203020. 2002. Vol. 1. P. 1-21.
4. Appel K., Schupp P. Artins groups and infinite Coxter groups // Invent. Math. 1983. Vol. 72. P. 201-220.
5. Безверхний В. Н. Решение проблемы сопряженности слов в группах Артина и Кокстера большого типа // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. Тула, 1986. — С. 26-61.
6. Kapovich I., Schup P. Bounded rank subgroups of Coxeter groups, Artin groups and one-relator groups with torsion // London Math. Soc. 2004. Vol. 88. P. 89-113.
7. Безверхний В. Н., Добрынина И. В. Решение проблемы сопряженности слов в группах Кокстера большого типа // Чебышевский сборник. 2003. Т. 4, №1(5). С. 10-33.
8. Безверхний В. Н., Добрынина И. В. Решение проблемы обобщенной сопряженности слов в группах Кокстера большого типа // Дискретная математика. 2005. Т. 17, №3. С. 123-145.
9. Безверхний В. Н., Добрынина И. В. Об элементах конечного порядка в группах Кокстера большого типа // Известия Тульского государственного университета. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2003. Т. 9, №1. С. 13-22.
10. Безверхний В. Н., Добрынина И. В. Решение проблемы вхождения в циклическую подгруппу в группах Кокстера большого типа // Известия Тульского государственного университета. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2004. Т. 10, №1. С. 23-37.
11. Безверхний В. Н., Добрынина И. В. Решение проблемы слабой степенной сопряженности слов в группах Кокстера большого типа // Известия Тульского государственного университета. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2004. Т. 10, №1. С. 38-46.
12. Безверхний В. Н., Добрынина И. В. Решение проблемы степенной сопряженности слов в группах Кокстера экстрабольшого типа // Дискретная математика. 2008. Т. 20, №3. С. 101-110.

13. Добрынина И. В. О подгруппах в группах Кокстера экстрабольшого типа // Чебышевский сборник. 2008. Т. 9, № 1 (25). С. 9-15.
14. Безверхний В. Н., Инченко О. В. Централизатор элементов конечного порядка конечно порожденной группы Кокстера с древесной структурой // Чебышевский сборник. 2008. Т. 9, №1(25). С. 17-28.
15. Инченко О. В. Проблема обобщенной сопряженности слов в группах Кокстера с древесной структурой // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2008. Выпуск 2. С. 40-48.
16. Безверхний В. Н. Решение проблемы вхождения в некоторых классах групп с одним определяющим соотношением // Алгоритмические проблемы теории групп полугрупп и их приложение. Тула. ТГПИ. 1986. С. 3-22.
17. Безверхний В. Н. О пересечении подгрупп в HNN -группах // Фундамент. и прикл. матем., 1998. 4:1, С. 199–222.
18. Безверхний В. Н., Инченко О. В. Проблема пересечения конечно порожденных подгрупп в группах Кокстера с древесной структурой // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2009. Выпуск 2. С. 16-31.
19. Инченко О. В. О проблеме пересечения классов смежности конечно порожденных подгрупп в группе Кокстера с древесной структурой // Чебышевский сборник. 2016. Т. 17, №2(58). С. 146-162.
20. Безверхний В. Н., Инченко О. В. Проблема сопряженности подгрупп в конечно порожденных группах Кокстера с древесной структурой // Чебышевский сборник. 2010. Т. 11, №3. С. 32-56.
21. Безверхний В. Н. Решение проблемы вхождения в классе HNN -групп // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. Тула, 1981. С. 20-62.
22. Безверхний В. Н., Добрынина И. В. О проблеме свободы в группах Кокстера с древесной структурой // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2014. №1-1. С. 5-13.
23. Добрынина И. В. О нормализаторах в некоторых группах Кокстера // Чебышевский сборник. 2016. Т. 17. № 2 (58). С. 113-127.
24. Добрынина И. В. О построении нормализатора конечно порожденной подгруппы в группе Кокстера с древесной структурой // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам. 2016. №8. С. 26-28.
25. Добрынина И. В., Инченко О. В. О некоторой проблеме в группах Кокстера с древесной структурой // Алгоритмические проблемы в алгебре и теории вычислимости. Международная научная конференция, посвященная 75-летию Д.И. Молдаванского. Сборник трудов. Иваново: ИвГУ, 2015. С. 35-40.
26. Безверхний В. Н., Добрынина И. В. О построении изолятора подгруппы в некотором классе групп Кокстера // Материалы международной конференции по алгебре, анализу и геометрии. Казань: Казанский университет, 2016. С. 108-109.

27. Безверхний В. Н., Безверхняя Н. Б. Решение проблемы равенства и сопряженности слов в некотором классе групп Артина и Кокстера // Алгоритмические проблемы в алгебре и теории вычислимости. Международная научная конференция, посвященная 75-летию Д. И. Молдаванского. Сборник трудов. Иваново: ИвГУ, 2015. С. 11-16.
28. Безверхний В. Н., Безверхняя Н. Б. Проблемы равенства и сопряженности слов в группах Артина, Кокстера с n -угольной структурой // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам. 2016. № 8. С. 9-10.
29. Безверхний В. Н., Устьян А. Е. Проблема степенной сопряженности слов в моноидах Артина большого типа // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. 2001. С. 139-164.
30. Безверхний В. Н., Устьян А. Е. Обобщения теорем В. Магнуса и М. Д. Гриндлингера // Чебышевский сб. 2013. Т.14, №3. С. 20–33.

REFERENCES

1. Coxeter, H. S. M., 1934, "Discrete groups generated by reflections", *Ann. Math.*, vol. 35, pp. 588-621.
2. Tits, J., 1962, "Groupes simples et geometries associees", *Proc. Int. Congress Math. Stocholm*, pp. 197-221.
3. Schupp, P., 2002, "Coxeter Groups, 2-Completion, Perimeter Reduction and Subgroup Separability", *arXiv math. GR/0203020*, vol. 1, pp. 1–21.
4. Appel, K. & Schupp, P., 1983, "Artins groups and infinite Coxeter groups", *Invent. Math.*, , vol. 72, pp. 201-220.
5. Bezverkhonii, V. N. 1986, "Solution of the conjugacy problem for words in Artin groups and Coxeter groups of large type", *Algorithmic problems of theory of groups and semigroups*, Tula: TSPU, pp. 26-61.
6. Kapovich, I. & Schup, P., 2004, "Bounded rank subgroups of Coxeter groups, Artin groups and one-relator groups with torsion", *London Math. Soc.*, vol. 88, pp. 89-113.
7. Bezverkhonii, V. N. & Dobrynina, I. V., 2003, "Solution of the conjugacy problem for words in Coxeter groups of large type", *Chebyshevskii Sb.*, , vol. 4, no. 1, pp. 10–33.
8. Bezverkhonii, V. N. & Dobrynina, I. V., 2005, "Solution of the generalized conjugacy problem for words in Coxeter groups of large type", *Diskr. Mat.*, vol. 17, no. 3, pp. 123–145.
9. Bezverkhonii, V. N. & Dobrynina, I. V., 2003, "On elements of finite order in Coxeter groups of large type", *Izvestia of Tula state University. Ser. Math. Mechanics. Informatics*, vol. 9, no. 1, pp. 13-22.
10. Bezverkhonii, V. N. & Dobrynina, I. V., 2004, "Solution the problem of occurrence in a cyclic subgroup in the Coxeter groups of large type", *Izvestia of the Tula state University. Ser. Math. Mechanics. Informatics*, vol. 10, no. 1, pp. 23-37.
11. Bezverkhonii, V. N. & Dobrynina, I. V., 2004, "Solution of the power conjugacy search problem in a cyclic subgroup in in Coxeter groups of large type", *Izvestia of the Tula state University. Ser. Math. Mechanics. Informatics*, vol. 10, no. 1, pp. 38-46.

12. Bezverkhniĭ, V. N. & Dobrynina, I. V., 2008, “ A solution of the power conjugacy problem for words in the Coxeter groups of extra large type“, *Diskr. Mat.*, vol. 20, no. 3, pp. 101–110.
13. Dobrynina, I. V., 2008, “On subgroups in Coxeter groups of extra large type“, *Chebyshevskii Sb.*, vol. 9, no. 1, pp. 9-15.
14. Bezverkhniĭ, V. N. & Inchenko O. V., 2008, “ Centralizer of elements of finite order of a finitely generated Coxeter group with a tree-structure“ , *Chebyshevskii Sb.*, vol. 9, no. 1, pp. 17-28.
15. Inchenko O. V. 2008, “ Problem of generalized conjugacy of words in Coxeter’s groups with tree-structure“ , *Izvestia of Tula state University. Natural science*, no. 2, pp. 40-48.
16. Bezverkhniĭ, V. N., 1986, “ Solution of the problem of inclusion in some class of groups with one relation “ , *Algorithmic problems of theory of groups and semigroups*, Tula: TSPU, pp. 3-22.
17. Bezverkhniĭ, V. N., 1998, “ On the intersection subgroups *HNN*-groups “ , *Fundam. Prikl. Mat.*, vol. 4, no. 1, pp. 199-222.
18. Bezverkhniĭ, V. N. & Inchenko O. V., 2009, “ Problem of intersection of finite defined subgroups in Coxeter groups with tree-structure“ , *Izvestiya of Tula State University. Natural sciences*, no. 2, pp.16-31.
19. Inchenko O. V., 2016, “ On problem of intersection of the adjacency classes of finitely generated subgroups of Coxeter group with tree-structure “ , *Chebyshevskii Sb.*, pp. 146-162.
20. Bezverkhniĭ, V. N. & Inchenko O. V., 2010, “ Conjugacy problem of subgroups in finitely generated Coxeter groups with tree-structure “ , *Chebyshevskii Sb.*, vol. 11, no. 3, pp. 32-56.
21. Bezverkhniĭ, V. N. 1981, “Solution of the problem of inclusion of subgroups in one class *HNN*-groups “ *Algorithmic problems of theory of groups and semigroups*, Tula: TSPU, pp. 20-62.
22. Bezverkhniĭ, V. N. & Dobrynina, I. V., 2014, “On freedom problem in Coxeter groups with tree-structure“, *Izvestiya of Tula state University. Natural science*, no. 1-1, pp. 5-13.
23. Dobrynina, I. V., 2016, “On normalizers in some Coxeter groups“, *Chebyshevskii Sb.*, vol. 17, no. 2, pp. 113–127.
24. Dobrynina, I. V., 2016, “On construction of Normalizer of finitely generated subgroups in the Coxeter group with tree-structure“, *Research in algebra, number theory, functional analysis and related issues*, no. 8, pp. 26-28.
25. Dobrynina, I. V. & Inchenko, O. V., 2015, “On some problem in Coxeter groups with a tree structure“, *Algorithmic problems in algebra and the theory of computation. International scientific conference dedicated to 75-th anniversary of D. I. Moldavanskii*, Ivanovo: IVGU, pp. 35-40.
26. Bezverkhniĭ, V. N. & Dobrynina, I. V., 2016, “On construction of isolator of subgroup in some class of Coxeter groups“, *Proceedings of the international conference on algebra, analysis and geometry*, Kazan: Kazan University, pp. 108-109.
27. Bezverkhniĭ, V. N. & Bezverkhnyaya, N. B., 2015, “Problem of equality and conjugacy of words in a certain class of Artin groups and Coxeter“, *Algorithmic problems in algebra and the theory of computation. International scientific conference dedicated to 75-th anniversary of D. I. Moldavanskii*, Ivanovo: IVGU, pp. 11-16.

28. Bezverkhniĭ, V.N. & Bezverkhnyaya, N.B., 2016, "Problem of equality and conjugacy of words in Artin groups, Coxeter n -pointed structure", *Research in algebra, number theory, functional analysis and related issues*, no 8, pp. 9-10.
29. Bezverkhniĭ, V.N. & Ustyan, A.E., 2001, "Problem of power conjugation of the words in the Artin monoids of large type", *Algorithmic problems of theory of groups and semigroups*, Tula:TSPU, pp. 139-164.
30. Bezverkhniĭ, V.N. & Ustyan, A.E., 2013, "Generalizations of theorems of Magnus and Greendlinger", *Chebyshevskii Sb.*, vol. 14, no. 3, pp. 20–33.

Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого

Тульский государственный университет

Получено 14.09.2016 г.

Принято в печать 12.12.2016 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 17 Выпуск 4

УДК 511

DOI 10.22405/2226-8383-2016-17-4-51-56

О ДОКАЗАТЕЛЬСТВЕ Н. П. РОМАНОВА ЕГО
АДДИТИВНОЙ ТЕОРЕМЫ И ЕЕ АНАЛОГАХ¹

А. Н. Васильев (г. Астана)

Аннотация

В работе описывается техника, придуманная Н. П. Романовым для доказательства его теоремы о том, что нижняя асимптотическая плотность суммы множества простых и множества степеней фиксированного натурального числа положительна, которая также позволяет заменить в этой теореме второе множество другим — с похожим распределением и арифметикой. Описываются условия на второе множество, достаточные для получения аналога теоремы, и приводится пример множества с похожим распределением, но с другой арифметикой, для которого эти достаточные условия не выполняются. Доказывается, что для указанного множества аналог теоремы Романова неверен.

Ключевые слова: теорема Романова, сумма множеств, тригонометрические суммы.

Библиография: 9 названий.

ROMANOFF ADDITIVE THEOREM'S PROOF AND ITS
ANALOGUES

A. N. Vassilyev (Astana)

Abstract

In paper we describe the way N. P. Romanoff proved his additive theorem and sufficient conditions to obtain its analogues for sets with similar distribution and arithmetic. Also the example of set with similar distribution but with different arithmetic is given. We prove that the Romanoff theorem's analogue for this set is incorrect.

Keywords: Romanoff theorem, sumset, exponential sums.

Bibliography: 9 titles.

1. Введение

Рассмотрим возрастающую последовательность натуральных чисел $(u_m)_{m=1}^{\infty}$, у которой функция распределения $U(x) = \#\{m : u_m \leq x\}$ удовлетворяет условию

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{U(x)}{\log x} = A > 0. \quad (1)$$

Условие возрастания можно, без ущерба для дальнейших выкладок, заменить на более слабое, но для удобства изложения мы его оставим. Согласно асимптотическому закону, $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$ при $x \rightarrow \infty$. Через p будем обозначать произвольное простое число. Тогда

¹Работа автора поддержана грантом ГФ4-0816 Комитета науки МОН РК "Проблемы теории приближений и смежные вопросы".

$\#\{(p, u_m) : p \leq \frac{x}{2}, u_m \leq \frac{x}{2}\} \gg x$ (здесь и далее x — достаточно большое вещественное число), откуда для количества представлений $r(n) = r(n; (u_m)_{m=1}^\infty) = \#\{(p, u_m) : n = p + u_m\}$ следует соотношение

$$\sum_{n \leq x} r(n) \gg x. \quad (2)$$

В 1934 г. появилась статья Н. П. Романова [1], в которой была разработана техника, позволявшая для широкого класса последовательностей получить теоремы о положительной нижней асимптотической плотности суммы $\mathcal{P} + \mathcal{U}$, где $\mathcal{P}$ — множество простых чисел, а $\mathcal{U}$ — множество всех членов последовательности $(u_m)_{m=1}^\infty$, т. е. результаты типа

$$\sum_{n \leq x} \operatorname{sgn}(r(n)) \gg x. \quad (3)$$

Последовательностью, которую рассматривал сам Романов, была $u_m = a^m$, где $a \geq 2$ — фиксированное натуральное число. Ключевым моментом его доказательства было получение оценки

$$\sum_{n \leq x} r^2(n) \ll x, \quad (4)$$

откуда, согласно неравенству Коши–Буняковского–Шварца, с учетом (2) немедленно следует требуемое:

$$\sum_{n \leq x} \operatorname{sgn}(r(n)) \geq \left(\sum_{n \leq x} r(n) \right)^2 \left(\sum_{n \leq x} r^2(n) \right)^{-1} \gg x.$$

В свою очередь, оценка (4) в его подходе базируется на следующем результате, который доказывается методами решета [2]: для четного ненулевого числа b справедливо соотношение

$$\#\{p : p \leq x, |p + b| \in \mathcal{P}\} \ll \frac{x}{\log^2 x} \prod_{p|b} \left(1 + \frac{1}{p}\right).$$

Введем следующие обозначения:

$$\alpha_i(k; d) = \alpha_i(k; d; (u_m)_{m=1}^\infty) = \frac{1}{k} \#\{m : u_m \equiv i \pmod{d}, m \leq k\},$$

$$h(x) = h(x; (u_m)_{m=1}^\infty) = \sum_{d \leq x} \left(\frac{\mu^2(d)}{d} \sum_{i=0}^{d-1} (\alpha_i(U(x); d; (u_m)_{m=1}^\infty))^2 \right).$$

Сформулируем теперь утверждение (похожая теорема в явном виде имеется в [3]), следующее из выкладок доказательства Романова, которое позволяет получать аналоги его теоремы для различных последовательностей:

ТЕОРЕМА. Если для последовательности $(u_m)_{m=1}^\infty$ с функцией распределения, удовлетворяющей (1), справедливо соотношение

$$h(x; (u_m)_{m=1}^\infty) \ll 1, \quad (5)$$

то для нее выполняется аналог теоремы Романова, а именно, оценка (3).

В 1951 г. П. Эрдеш [4] заменил в теореме Романова $u_m = a^m$ на $u_m = f(a^m)$, где f — многочлен с целыми коэффициентами. Позже, уже в 2010 г. К. С. Э. Ли [5] был получен ее аналог для последовательности Фибоначчи (автором [6] было представлено другое доказательство этого факта), а в 2013 г. вышли статьи К. Балло и Ф. Лучи [7], а также А. Дубицкаса [3], содержащие ее обобщения для случая линейной рекурренты (в [3] порядок рекурренты был

равен двум). Все эти результаты опирались на описанный выше подход Романова. Создается впечатление, что условие (1) является определяющим. Однако, это не так. Источник таких аналогов — похожая арифметика указанных последовательностей, в частности, тот факт, что они периодичны по произвольному модулю (разумеется, одного этого наблюдения недостаточно). Благодаря этому для всех этих последовательностей справедливо условие (5).

2. Последовательность центральных биномиальных коэффициентов

Здесь будет приведен пример последовательности, для которой выполняется условие (1), но не выполняются условия (3) и (5). Действительно, рассмотрим последовательность центральных биномиальных коэффициентов:

$$u_m = \binom{2m}{m}.$$

По формуле Стирлинга имеем: $\binom{2m}{m} \sim \frac{4^m}{\sqrt{\pi m}}$ при $m \rightarrow \infty$, поэтому условие (1) выполнено. Но, как показывает следующая лемма (похожая на нее по содержанию имеется в [8]), эта последовательность непериодична по простому модулю, причем имеет место заметная асимметрия в распределении остатков ее членов по простому модулю.

ЛЕММА. Пусть p — нечетное простое число, $u_m = \binom{2m}{m}$ и $t = \lfloor \frac{\log k}{\log p} \rfloor$. Тогда

$$\alpha_0(k; p; (u_m)_{m=1}^\infty) \geq 1 - 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2p} \right)^t.$$

В частности, если $p \leq \sqrt{k}$, то

$$\alpha_0(k; p; (u_m)_{m=1}^\infty) \geq \frac{1}{9}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Из леммы вытекает оценка снизу для среднего квадратического тригонометрических сумм по центральным биномиальным коэффициентам при $p \leq \sqrt{k}$:

$$\sqrt{\frac{1}{p} \sum_{a=1}^p \left| \sum_{m=1}^k e^{2\pi i \frac{a u_m}{p}} \right|^2} \geq \frac{k}{9}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Любое натуральное число $1 \leq m \leq k$ имеет запись $\overline{a_t a_{t-1} \dots a_0}$ в p -ичной системе счисления (первые несколько цифр могут быть нулями). По теореме Куммера [9], показатель степени p в разложении $\binom{2m}{m}$ равен количеству переносов при сложении в p -ичной системе счисления числа m с самим собой. Поэтому $p \nmid \binom{2m}{m}$ тогда, и только тогда, когда все $a_i \leq \frac{p-1}{2}$. Также ясно, что $a_t \leq \frac{k}{p^t}$. Отсюда следует, что чисел $1 \leq m \leq k$, для которых $p \nmid \binom{2m}{m}$, не более

$$\left(1 + \frac{k}{p^t} \right) \left(\frac{p+1}{2} \right)^t \leq 2k \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2p} \right)^t.$$

Таким образом,

$$\alpha_0(k; p; (u_m)_{m=1}^\infty) \geq 1 - 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2p} \right)^t.$$

Лемма доказана.

Теперь сформулируем теорему о невыполнении достаточного условия (5) для нашей последовательности.

ТЕОРЕМА 1. Для последовательности центральных биномиальных коэффициентов $u_m = \binom{2m}{m}$ выполняется условие (1), но не выполняется условие (5), а именно,

$$h(x; (u_m)_{m=1}^\infty) \gg \log \log \log x.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя лемму, получаем:

$$\begin{aligned} h(x) &= \sum_{d \leq x} \left(\frac{\mu^2(d)}{d} \sum_{i=0}^{d-1} (\alpha_i(U(x); d))^2 \right) \geq \sum_{3 \leq p \leq \sqrt{U(x)}} \left(\frac{1}{p} \sum_{i=0}^{p-1} (\alpha_i(U(x); p))^2 \right) \\ &\geq \sum_{3 \leq p \leq \sqrt{U(x)}} \left(\frac{1}{p} (\alpha_0(U(x); p))^2 \right) \geq \frac{1}{81} \sum_{3 \leq p \leq \sqrt{U(x)}} \frac{1}{p} \gg \log \log \sqrt{U(x)} \gg \log \log \log x, \end{aligned}$$

что и требовалось.

В следующей теореме показывается, что для последовательности центральных биномиальных коэффициентов аналог теоремы Романова неверен.

ТЕОРЕМА 2. Для последовательности $u_m = \binom{2m}{m}$ при $x \rightarrow \infty$ справедливо соотношение

$$\sum_{n \leq x} \operatorname{sgn}(r(n; (u_m)_{m=1}^\infty)) = o(x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Пусть p_i — i -ое по счету простое число, s — некоторое натуральное число. Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \#\{n : n \leq x, n = p + u_m, p \leq p_s\}, \\ \nu_2 &= \#\{n : n \leq x, n = p + u_m, p > p_s, (p_1 p_2 \dots p_s) \mid u_m\}, \\ \nu_3 &= \#\{n : n \leq x, n = p + u_m, p > p_s, (p_1 p_2 \dots p_s) \nmid u_m\}. \end{aligned}$$

Легко видеть, что

$$\sum_{n \leq x} \operatorname{sgn}(r(n; (u_m)_{m=1}^\infty)) = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3.$$

Так как $u_m \geq 2^m$, то

$$\nu_1 \leq \frac{s}{\log 2} \log x.$$

Ясно, что среди любых $p_1 p_2 \dots p_s$ последовательных натуральных чисел существует не более $\varphi(p_1 p_2 \dots p_s)$ чисел n , представимых в виде $n = p + u_m$, где $p > p_s$ и $(p_1 p_2 \dots p_s) \mid u_m$, поскольку каждое такое n взаимно просто с $p_1 p_2 \dots p_s$. Отсюда

$$\nu_2 \leq x \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_s}\right) + p_1 p_2 \dots p_s.$$

Введем новое обозначение:

$$\nu_{3,i} = \#\{n : n \leq x, n = p + u_m, p > p_s, p_i \nmid u_m\}.$$

Тогда

$$\nu_3 \leq \sum_{i=1}^s \nu_{3,i}.$$

Все центральные биномиальные коэффициенты четны, поэтому $\nu_{3,1} = 0$. Для $2 \leq i \leq s$, согласно лемме, индексов $m \leq U(x)$, для которых $p_i \nmid u_m$, не более

$$\begin{aligned} 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2p_i} \right)^{\lfloor \frac{\log U(x)}{\log p_i} \rfloor} U(x) &\leq 2 \left(\frac{3}{4} \right)^{\frac{\log U(x)}{\log p_i} - 1} U(x) = \\ &= \frac{8}{3} (U(x))^{1 - \frac{\log \frac{4}{3}}{\log p_i}} \leq \frac{8}{3} (U(x))^{1 - \frac{\log \frac{4}{3}}{\log p_s}} \leq \frac{8}{3 \log 2} (\log x)^{1 - \frac{\log \frac{4}{3}}{\log p_s}}. \end{aligned}$$

Поскольку при достаточно больших x ($x \geq x_0$) справедлива оценка $\pi(x) \leq 2 \frac{x}{\log x}$, для $2 \leq i \leq s$ получаем: $\nu_{3,i} \leq \frac{16}{3 \log 2} x (\log x)^{-\frac{\log \frac{4}{3}}{\log p_s}}$. Отсюда

$$\nu_3 \leq \frac{16}{3 \log 2} (s-1) x (\log x)^{-\frac{\log \frac{4}{3}}{\log p_s}}.$$

Выберем теперь $s = s(\varepsilon)$ таким образом, чтобы

$$\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_s}\right) \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

Это можно сделать, поскольку соответствующее бесконечное произведение, как известно, расходится к нулю. Далее возьмем такое $X(\varepsilon) > x_0$, чтобы при $x > X(\varepsilon)$ одновременно выполнялись следующие неравенства:

$$\begin{aligned} \frac{s}{\log 2} \log x &\leq \frac{\varepsilon}{4} x, \\ p_1 p_2 \dots p_s &\leq \frac{\varepsilon}{4} x, \\ \frac{16}{3 \log 2} (s-1) (\log x)^{-\frac{\log \frac{4}{3}}{\log p_s}} &\leq \frac{\varepsilon}{4}. \end{aligned}$$

Тогда при $x > X(\varepsilon)$ справедлива оценка

$$\sum_{n \leq x} \operatorname{sgn}(r(n; (u_m)_{m=1}^\infty)) = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 \leq \varepsilon x.$$

Теорема доказана.

3. Заключение

Используя полученные в статье результаты, нетрудно показать, что последовательность, полученная объединением последовательности степеней двойки и последовательности центральных биномиальных коэффициентов в одну, удовлетворяет условию (3), но не удовлетворяет условию (5), что означает, что достаточное условие (5) не является необходимым.

В заключение, автор благодарит академика РАН Конягина С. В. за очень плодотворные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Романов Н. П. О двух теоремах аддитивной теории чисел // Матем. сб. Т.40 №4, 1933. С.514–520.
2. Brun, V. 'Le crible d'Eratosthene et le theoreme de Goldbach // C. R. Acad. Sci. Paris., Vol. 168, 1919 pp. 544–546.

3. Dubickas, A. Sums of Primes and Quadratic Linear Recurrence Sequences // *Acta Mathematica Sinica, English Series*, Vol. 29, pp. 2251–2260.
4. Erdos, P. On some problems of Bellman and a theorem of Romanoff // *J. Chinese Math* 1951 pp. 409–421.
5. Enoch Lee, K. S. On the sum of a prime and a Fibonacci number // *Int. J. Number Theory*, Vol. 6, 2010 pp. 1669–1676.
6. Vasil'ev A. N. Rational trigonometric sums for fibonacci sequences and an analogue of romanoff's theorem // *Doklady Mathematics*. 2014. Vol. 89, no. 3. P. 349–350.
7. Ballot, C., Luca, F. On the sumset of the primes and a linear recurrence // *Acta Arithmetica*, Vol. 161, 2013 pp. 33–46.
8. Pomerance, C. Divisors of the Middle Binomial Coefficient // *American Mathematical Monthly*, Vol. 122, 2015 pp. 636–644.
9. Kummer E. Über die Ergänzungssätze zu den allgemeinen Reciprocitätsgesetzen // *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Vol. 44, 1852 pp. 93–146.

REFERENCES

1. Romanoff, N. P. 1934, „Über einige Sätze der additiven Zahlentheorie“, *Math. Ann.*, Vol. 57, pp. 668–678.
2. Brun, V. 1919, „Le crible d’Eratosthene et le theoreme de Goldbach“ *C. R. Acad. Sci. Paris.*, Vol. 168, pp. 544–546.
3. Dubickas, A. 2013, „Sums of Primes and Quadratic Linear Recurrence Sequences“, *Acta Mathematica Sinica, English Series*, Vol. 29, pp. 2251–2260.
4. Erdős, P. 1951, „On some problems of Bellman and a theorem of Romanoff“, *J. Chinese Math. Soc.*, pp. 409–421.
5. Enoch Lee, K. S. 2010, „On the sum of a prime and a Fibonacci number“, *Int. J. Number Theory*, Vol. 6, pp. 1669–1676.
6. Vasil'ev, A. N. 2014, „Rational trigonometric sums for Fibonacci sequences and an analogue of Romanoff's theorem“, *Doklady Mathematics*, Vol. 89, pp. 349–350.
7. Ballot, C., Luca, F. 2013, „On the sumset of the primes and a linear recurrence“, *Acta Arithmetica*, Vol. 161, pp. 33–46.
8. Pomerance, C. 2015, „Divisors of the Middle Binomial Coefficient“, *American Mathematical Monthly*, Vol. 122, pp. 636–644.
9. Kummer E. 1852, „Über die Ergänzungssätze zu den allgemeinen Reciprocitätsgesetzen“, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Vol. 44, pp. 93–146.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Казахстанский филиал

Получено 15.05.2016 г.

Принято в печать 12.12.2016 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 17. Выпуск 4.

УДК 519.14

DOI 10.22405/2226-8383-2016-17-4-57-64

СМЕШАННАЯ СОВМЕСТНАЯ ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ
НЕЗАВИСИМОСТЬ ДЛЯ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ РИМАНА И
ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДЗЕТА-ФУНКЦИЙ ГУРВИЦА

Р. Качинскайте, С. Рапимбергайте (г. Шяуляй, Литва)

Аннотация

Функциональная независимость дзета-функций является интересной проблемой современности и восходит к Д. Гилберту. В 1990, выступая с докладом на Международном конгрессе математиков в Париже, он выдвинул гипотезу, что дзета-функция Римана не удовлетворяет никакому алгебраическому дифференциальному уравнению. Эта гипотеза была доказана А. Островским. В 1975 г. С.М. Воронин доказал функциональную независимость дзета-функции Римана. С тех пор многими авторами была получена функциональная независимость ряда дзета и L -функций.

В настоящей статье получена совместная функциональная независимость дзета-функции Римана и периодических дзета-функций Гурвица с параметрами, алгебраически независимыми над полем рациональных чисел. Такая функциональная независимость иногда называется смешанной, поскольку дзета-функция Римана имеет эйлеровое произведение по простым числам, а периодические дзета-функции Гурвица такого произведения не имеют.

Ключевые слова: дзета-функция Римана, дзета-функция Гурвица, периодические коэффициенты, функциональная независимость, универсальность.

Библиография: 17 названий.

THE MIXED JOINT FUNCTIONAL INDEPENDENCE
OF THE RIEMANN ZETA- AND PERIODIC HURWITZ
ZETA-FUNCTIONSR. Kačinskaitė, S. Rapimbergaitė
(Šiauliai, Lithuania)

Abstract

The functional independence of zeta-functions is an interesting nowadays problem. This problem comes back to D. Hilbert. In 1900, at the International Congress of Mathematicians in Paris, he conjectured that the Riemann zeta-function does not satisfy any algebraic-differential equation. This conjecture was solved by A. Ostrowski. In 1975, S.M. Voronin proved the functional independence of the Riemann zeta-function. After that many mathematicians obtained the functional independence of certain zeta- and L -functions.

In the present paper, the joint functional independence of a collection consisting of the Riemann zeta-function and several periodic Hurwitz zeta-functions with parameters algebraically independent over the field of rational numbers is obtained. Such type of functional independence is called as “mixed functional independence” since the Riemann zeta-function has Euler product expansion over primes while the periodic Hurwitz zeta-functions do not have Euler product.

Keywords: functional independence, Hurwitz zeta-function, periodic coefficients, Riemann zeta-function, universality.

Bibliography: 17 titles.

1. Introduction

The functional independence of certain functions has a long history and is relevant in nowadays. Let us recall some important facts.

Denote by $s = \sigma + it$ a complex variable, and by $\mathbb{N}, \mathbb{P}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ the sets of all positive integers, primes, rational numbers, real numbers and complex numbers, respectively.

In 1887, O. Hölder proved [1] the algebraic-differential independence for the gamma-function $\Gamma(s)$, i.e., that there exists no polynomial $P \not\equiv 0$ such that

$$P\left(s, \Gamma(s), \Gamma'(s), \dots, \Gamma^{(n-1)}(s)\right) = 0$$

for all $s \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$.

In 1900, D. Hilbert noted [2] that the Riemann zeta-function $\zeta(s)$ does not satisfy any algebraic differential equation, also. He proposed a more general problem, i.e., to prove that the function

$$\zeta(s, x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m^s}$$

does not satisfy any algebraic-differential equation. In 1920, this problem was solved by A. Ostrowski [3], and later generalized by A.G. Postnikov [5], [4].

In 1973, S.M. Voronin obtained [6] the functional independence of the Riemann zeta-function. He proved that the Riemann zeta-function $\zeta(s)$ does not satisfy any differential equation

$$\sum_{j=0}^n s^j F_j\left(\zeta(s), \zeta'(s), \dots, \zeta^{(N-1)}(s)\right) \equiv 0,$$

where F_j are continuous functions, not all identically zero.

The Voronin result was generalized by R. Garunkštis, A. Laurinčikas, K. Matsumoto, H. Mishou, J. Steuding and many other mathematicians (see, for example, [7], [8]).

The mixed joint functional independence of Riemann zeta-function and Hurwitz zeta-function was obtained by H. Mishou in 2007 [9]. Later, R. Kačinskaitė and A. Laurinčikas generalized Mishou's result for the periodic zeta- and periodic Hurwitz zeta-functions [10].

The aim of the paper is to prove the mixed joint functional independence of a collection consisting of the Riemann zeta-function and several periodic Hurwitz zeta-functions, i.e., to extend the collection of zeta-functions into more general case as in the above mentioned results.

Since one of functions under investigation is the Riemann zeta-function $\zeta(s)$, we recall its definition and main properties.

In 1859, B. Riemann introduced [11] the zeta-function $\zeta(s)$ as complex-variable function. For $\sigma > 1$, it is given by the Dirichlet series

$$\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s}.$$

The function $\zeta(s)$ can be written by Euler product over primes as

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}, \quad \sigma > 1,$$

The function $\zeta(s)$ is analytically continuable to the whole complex plane $\mathbb{C}$, except for a simple pole at the point $s = 1$ with residue 1.

The second zeta-function under our interest is the periodic Hurwitz zeta-function $\zeta(s, \alpha; \mathbf{a})$. In 2006, it was introduced by A. Javtokas and A. Laurinćikas [12]. Let $\mathbf{a} = \{a_m : a_m \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ be a periodic sequence of complex numbers with a minimal period $k \in \mathbb{N}$. The function $\zeta(s, \alpha; \mathbf{a})$ with a fixed parameter α , $0 < \alpha \leq 1$, is defined, for $\sigma > 1$, by the Dirichlet series

$$\zeta(s, \alpha; \mathbf{a}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m}{(m + \alpha)^s}.$$

If $a_m \equiv 1$, the function $\zeta(s, \alpha; \mathbf{a})$ reduces to the classical Hurwitz zeta-function

$$\zeta(s, \alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m + \alpha)^s}, \quad \sigma > 1.$$

From the periodicity of the sequence $\mathbf{a}$, we have that, for $\sigma > 1$,

$$\begin{aligned} \zeta(s, \alpha; \mathbf{a}) &= \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_r}{(mk + r + \alpha)^s} = \frac{1}{k^s} \sum_{r=0}^{k-1} a_r \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m + \frac{r+\alpha}{k})^s} \\ &= \frac{1}{k^s} \sum_{r=0}^{k-1} a_r \zeta\left(s; \frac{r+\alpha}{k}\right). \end{aligned} \quad (1)$$

It is known that the Hurwitz zeta-function $\zeta(s, \alpha)$ has an analytic continuation to the whole s -plane except for a simple pole at the point $s = 1$ with residue 1. Then the equality (1) gives an analytic continuation of the periodic Hurwitz zeta-function $\zeta(s, \alpha; \mathbf{a})$ to the whole s -plane, except, maybe, for a simple pole $s = 1$ with residue

$$a := \frac{1}{k} \sum_{r=0}^{k-1} a_r.$$

If $a = 0$, then $\zeta(s, \alpha; \mathbf{a})$ is an entire function.

The joint functional independence of a collection of periodic Hurwitz zeta-functions with parameters algebraically independent over the field of rational numbers $\mathbb{Q}$ was obtained by A. Laurinćikas in [13].

Suppose that $0 < \alpha_j \leq 1$ is a fixed parameter, $j = 1, \dots, r$. Let, for positive integer l_j , $\mathbf{a}_{jl} = \{a_{mjl} : m \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ be a periodic sequence of complex numbers a_{mjl} with a minimal period $k_{jl} \in \mathbb{N}$, and let $\zeta(s, \alpha_j; \mathbf{a}_{jl})$ denote the corresponding periodic Hurwitz zeta-function, $j = 1, \dots, r$, $l = 1, \dots, l_j$. Moreover, let k_j be the least multiple of the periods $k_{j1}, \dots, k_{jl_j}$, and

$$\mathfrak{A}_j = \begin{pmatrix} a_{1j1} & a_{1j2} & \dots & a_{1jl_j} \\ a_{2j1} & a_{2j2} & \dots & a_{2jl_j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k_j j1} & a_{k_j j2} & \dots & a_{k_j jl_j} \end{pmatrix}, \quad j = 1, \dots, r.$$

Denote $\kappa = l_1 + l_2 + \dots + l_r + 1$.

The main purpose of the paper is to prove the mixed joint functional independence of the functions $\zeta(s)$ and $\zeta(s, \alpha_j; \mathbf{a}_{jl})$, $j = 1, \dots, r$, $l = 1, \dots, l_j$.

For the statement of our result, we need a certain condition for the parameters in the definition of the functions $\zeta(s, \alpha_j; \mathbf{a}_{jl})$, $j = 1, \dots, r$, $l = 1, \dots, l_j$. Recall that the numbers $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ are algebraically independent over the field of rational numbers $\mathbb{Q}$, if there exists no polynomial $p(x_1, x_2, \dots, x_r) \not\equiv 0$ with rational coefficients such that $p(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r) = 0$.

The main result of the paper is the following theorem.

THEOREM 1. *Suppose that $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ are numbers algebraically independent over $\mathbb{Q}$, $\text{rank} \mathfrak{A}_j = l_j$, $j = 1, \dots, r$, and $F_g : \mathbb{C}^{\kappa N} \rightarrow \mathbb{C}$ is a continuous function for each $g = 0, 1, \dots, n$. If, for $N \in \mathbb{N}$, the function*

$$\sum_{g=0}^n s^g \cdot F_g \left(\begin{aligned} &\zeta(s), \zeta'(s), \dots, \zeta^{(N-1)}(s), \\ &\zeta(s, \alpha_1; \mathbf{a}_{11}), \zeta'(s, \alpha_1; \mathbf{a}_{11}), \dots, \zeta^{(N-1)}(s, \alpha_1; \mathbf{a}_{11}), \dots, \\ &\zeta(s, \alpha_1; \mathbf{a}_{1l_1}), \zeta'(s, \alpha_1; \mathbf{a}_{1l_1}), \dots, \zeta^{(N-1)}(s, \alpha_1; \mathbf{a}_{1l_1}), \dots, \\ &\zeta(s, \alpha_r; \mathbf{a}_{r1}), \zeta'(s, \alpha_r; \mathbf{a}_{r1}), \dots, \zeta^{(N-1)}(s, \alpha_r; \mathbf{a}_{r1}), \dots, \\ &\zeta(s, \alpha_r; \mathbf{a}_{rl_r}), \zeta'(s, \alpha_r; \mathbf{a}_{rl_r}), \dots, \zeta^{(N-1)}(s, \alpha_r; \mathbf{a}_{rl_r}) \end{aligned} \right)$$

is identically equal to zero, then $F_g \equiv 0$ for $g = 0, \dots, n$.

For the proof of the mixed joint functional independence for the functions $\zeta(s)$ and $\zeta(s, \alpha_j; \mathbf{a}_{jl})$, $j = 1, \dots, r$, $l = 1, \dots, l_j$, first of all, we need the joint universality theorem in the Voronin sense. We need a denseness lemma as well. Both of them in the next section are given.

2. Auxiliary results

For the statement of auxiliary results, we need some notation and definitions.

Let S be any space. Denote by $\mathcal{B}(S)$ the set of all Borel subset of S , and by $\text{meas} A$ denote the Lebesgue measure of the measurable set $A \subset \mathbb{R}$. Let $H(G)$ be the space of analytic on a certain region G functions. By D denote the strip $\{s \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < \sigma < 1\}$ of the complex plane $\mathbb{C}$.

2.1. The mixed joint universality theorem

Suppose that K is a compact subset of $\mathbb{C}$. Denote by $H^c(K)$ the set of all $\mathbb{C}$ -valued functions defined on K , continuous on K and analytic in the interior of K . Let $H_0^c(K)$ be the subset of $H^c(K)$, consisting of all elements of $H^c(K)$ which are non-vanishing on K . Then, for the functions $\zeta(s)$ and $\zeta(s, \alpha_j; \mathbf{a}_{jl})$, $j = 1, \dots, r$, $l = 1, \dots, l_j$, the following mixed joint universality property is true.

THEOREM 2. *Suppose that all hypotheses on α_j and $\text{rank} \mathfrak{A}_j$, $j = 1, \dots, r$, of Theorem 1 hold. Let K_1 and K_{jl} be a compact subsets of the strip D with connected complements, $j = 1, \dots, r$, $l = 1, \dots, l_j$, and that $f_1(s) \in H_0^c(K_1)$ or $f_{jl}(s) \in H^c(K_{jl})$, $j = 1, \dots, r$, $l = 1, \dots, l_j$. Then, for every $\varepsilon > 0$,*

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \text{meas} \left\{ \tau \in [0, T] : \begin{aligned} &\sup_{s \in K_1} |\zeta(s + i\tau) - f_1(s)| < \varepsilon, \\ &\sup_{1 \leq j \leq r} \sup_{1 \leq l \leq l_j} \sup_{s \in K_{jl}} |\zeta(s + i\tau, \alpha_j; \mathbf{a}_{jl}) - f_{jl}(s)| < \varepsilon \end{aligned} \right\} > 0.$$

This is Theorem 3 from [14].

2.2. A denseness lemma

We already mentioned that, for the proof of the mixed joint functional independence of the functions $\zeta(s)$ and $\zeta(s, \alpha_j; \mathbf{a}_{jl})$, $j = 1, \dots, r$, $l = 1, \dots, l_j$, we use a denseness lemma as well.

Define the function $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^{\kappa N}$ by the formula

$$u(t) = \left(\begin{aligned} &\zeta(\sigma + it), \zeta'(\sigma + it), \dots, \zeta^{(N-1)}(\sigma + it), \\ &\zeta(\sigma + it, \alpha_1; \mathbf{a}_{11}), \zeta'(\sigma + it, \alpha_1; \mathbf{a}_{11}), \dots, \zeta^{(N-1)}(\sigma + it, \alpha_1; \mathbf{a}_{11}), \dots, \\ &\zeta(\sigma + it, \alpha_1; \mathbf{a}_{1l_1}), \zeta'(\sigma + it, \alpha_1; \mathbf{a}_{1l_1}), \dots, \zeta^{(N-1)}(\sigma + it, \alpha_1; \mathbf{a}_{1l_1}), \dots, \end{aligned} \right)$$

$$\zeta(\sigma + it, \alpha_r; \mathbf{a}_{r1}), \zeta'(\sigma + it, \alpha_r; \mathbf{a}_{r1}), \dots, \zeta^{(N-1)}(\sigma + it, \alpha_r; \mathbf{a}_{r1}), \dots, \\ \zeta(\sigma + it, \alpha_r; \mathbf{a}_{rl_r}), \zeta'(\sigma + it, \alpha_r; \mathbf{a}_{rl_r}), \dots, \zeta^{(N-1)}(\sigma + it, \alpha_r; \mathbf{a}_{rl_r}),$$

where $\frac{1}{2} < \sigma < 1$.

LEMMA 1. Suppose that α_j and $\text{rank} \mathfrak{A}_j = l_j$, $j = 1, \dots, r$, are the same as in Theorem 1. Then the image of $\mathbb{R}$ by u is everywhere dense in $\mathbb{C}^{\kappa N}$.

PROOF. We will prove that, for any $\varepsilon > 0$, there exists a sequence $\{\tau_k : \tau_k \in \mathbb{R}\}$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k = +\infty$, such that

$$|u(\tau_k) - \underline{s}|_{\mathbb{C}^{\kappa N}} < \varepsilon,$$

where $\underline{s} = (s_{10}, \dots, s_{1N-1}, s_{111}, \dots, s_{1l_1 1}, \dots, s_{1l_1, N-1}, \dots, s_{rl_r 1}, \dots, s_{rl_r, N-1})$ is an arbitrary point on $\mathbb{C}^{\kappa N}$, and $|\cdot|_{\mathbb{C}^{\kappa N}}$ denotes the distance in the space $\mathbb{C}^{\kappa N}$. To show this, it is sufficient to prove that there exists a sequence $\{\tau_k : \tau_k \in \mathbb{R}\}$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k = +\infty$, such that, for $g = 0, \dots, N-1$ and every $\varepsilon > 0$, the inequalities

$$|\zeta^{(g)}(\sigma + i\tau_k) - s_{1g}| < \frac{\varepsilon}{N},$$

and

$$|\zeta^{(g)}(\sigma + i\tau_k, \alpha_j; \mathbf{a}_{jl}) - s_{dg}| < \frac{\varepsilon}{(\kappa - 1)N},$$

hold with $j = 1, \dots, r$, $l = 1, \dots, l_j$ and d (here and thereafter d means the pair of j and l).

Define a polynomial

$$p_{dN}(s) = \sum_{g=0}^{N-1} \frac{s_{dg} s^g}{g!},$$

where $d = 1$ for the function $\zeta(s)$, and d is in the above described sense for the function $\zeta(s, \alpha_j; \mathbf{a}_{jl})$, $j = 1, \dots, r$, $l = 1, \dots, l_j$. Then, for $g = 0, \dots, N-1$, we have that

$$p_{dN}^{(g)}(0) = s_{dg}.$$

Now we fix a number σ_0 , $\frac{1}{2} < \sigma_0 < 1$. Let K be a compact subset of the strip D such that σ_0 is an interior point of K . Then, by Theorem 2, there exists a sequence $\{\tau_k : \tau_k \in \mathbb{R}\}$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k = +\infty$, such that

$$\sup_{s \in K_1} |\zeta(s + i\tau_k) - p_{1N}(s - \sigma_0)| < \frac{\varepsilon \delta^N}{2^{N+1} N!}, \\ \sup_{1 \leq j \leq r} \sup_{1 \leq l \leq l_j} \sup_{s \in K_{jl}} |\zeta(s + i\tau_k, \alpha_j; \mathbf{a}_{jl}) - p_{dN}(s - \sigma_0)| < \frac{\varepsilon \delta^N}{2^N N! N(\kappa - 1)},$$

where $\delta = \min(\delta_1, \delta_{jl})$, $j = 1, \dots, r$, $l = 1, \dots, l_j$ (here δ_1 and δ_{jl} are the distances of σ_0 from the boundaries of the sets K_1 and K_{jl} , respectively). By the integral Cauchy formula, for $g = 0, 1, \dots, N-1$, we have that

$$|\zeta^{(g)}(\sigma_0 + i\tau_k) - s_{1g}| \\ = \left| \frac{g!}{2\pi i} \int_{|s - \sigma_0| = \frac{\delta}{2}} \frac{\zeta(s + i\tau_k) - p_{1N}(s - \sigma_0)}{(s - \sigma_0)^{g+1}} ds \right| < \frac{\varepsilon}{N}.$$

Similarly,

$$|\zeta^{(g)}(\sigma_0 + i\tau_k, \alpha_j; \mathbf{a}_{jl}) - s_{dg}| \\ = \left| \frac{g!}{2\pi i} \int_{|s - \sigma_0| = \frac{\delta}{2}} \frac{\zeta(s + i\tau_k, \alpha_j; \mathbf{a}_{jl}) - p_{dN}(s - \sigma_0)}{(s - \sigma_0)^{g+1}} ds \right| < \frac{\varepsilon}{N(\kappa - 1)}$$

for $j = 1, \dots, r$, $l = 1, \dots, l_j$. This proves the lemma.

3. Proof of Theorem 1

Now we are ready to complete the proof of Theorem 1. The proof uses Theorem 2 and Lemma 1. We first prove that in Theorem 1 the function $F_g \equiv 0$, $g = 1, \dots, n$.

Instead of the function F_g , we will investigate the general function F . Let $F : \mathbb{C}^{\kappa N} \rightarrow \mathbb{C}$ be a continuous function, and

$$F\left(\begin{array}{l} \zeta(s), \zeta'(s), \dots, \zeta^{(N-1)}(s), \\ \zeta(s, \alpha_1; \mathbf{a}_{11}), \zeta'(s, \alpha_1; \mathbf{a}_{11}), \dots, \zeta^{(N-1)}(s, \alpha_1; \mathbf{a}_{11}), \dots, \\ \zeta(s, \alpha_1; \mathbf{a}_{1l_1}), \zeta'(s, \alpha_1; \mathbf{a}_{1l_1}), \dots, \zeta^{(N-1)}(s, \alpha_1; \mathbf{a}_{1l_1}), \dots, \\ \zeta(s, \alpha_r; \mathbf{a}_{r1}), \zeta'(s, \alpha_r; \mathbf{a}_{r1}), \dots, \zeta^{(N-1)}(s, \alpha_r; \mathbf{a}_{r1}), \dots, \\ \zeta(s, \alpha_r; \mathbf{a}_{rl_r}), \zeta'(s, \alpha_r; \mathbf{a}_{rl_r}), \dots, \zeta^{(N-1)}(s, \alpha_r; \mathbf{a}_{rl_r}) \end{array}\right) \equiv 0.$$

We will prove that $F \equiv 0$. Let $\frac{1}{2} < \sigma < 1$. Suppose, on the contrary, that $F \not\equiv 0$. Then there exists a point $\underline{a} \in \mathbb{C}^{\kappa N}$ such that $F(\underline{a}) \neq 0$. Since the function F is continuous, we can find a bounded region $G \subset \mathbb{C}^{\kappa N}$, $\underline{a} \in G$, and such that, for all $\underline{s} \in G$, the inequality

$$|F(\underline{s})| \geq c > 0 \quad (2)$$

holds. Then, by Lemma 1, there exists a sequence $\{\tau_m : \tau_m \in \mathbb{R}\}$, $\lim_{m \rightarrow \infty} \tau_m = \infty$, such that

$$\left(\begin{array}{l} \zeta(\sigma + i\tau_k), \zeta'(\sigma + i\tau_k), \dots, \zeta^{(N-1)}(\sigma + i\tau_k), \\ \zeta(\sigma + i\tau_k, \alpha_1; \mathbf{a}_{11}), \zeta'(\sigma + i\tau_k, \alpha_1; \mathbf{a}_{11}), \dots, \zeta^{(N-1)}(\sigma + i\tau_k, \alpha_1; \mathbf{a}_{11}), \dots, \\ \zeta(\sigma + i\tau_k, \alpha_1; \mathbf{a}_{1l_1}), \zeta'(\sigma + i\tau_k, \alpha_1; \mathbf{a}_{1l_1}), \dots, \zeta^{(N-1)}(\sigma + i\tau_k, \alpha_1; \mathbf{a}_{1l_1}), \dots, \\ \zeta(\sigma + i\tau_k, \alpha_r; \mathbf{a}_{r1}), \zeta'(\sigma + i\tau_k, \alpha_r; \mathbf{a}_{r1}), \dots, \zeta^{(N-1)}(\sigma + i\tau_k, \alpha_r; \mathbf{a}_{r1}), \dots, \\ \zeta(\sigma + i\tau_k, \alpha_r; \mathbf{a}_{rl_r}), \zeta'(\sigma + i\tau_k, \alpha_r; \mathbf{a}_{rl_r}), \dots, \zeta^{(N-1)}(\sigma + i\tau_k, \alpha_r; \mathbf{a}_{rl_r}) \end{array}\right) \in G.$$

However, this together with inequality (2) contradicts the hypothesis that $F \not\equiv 0$.

Similarly, we can show that every continuous function $F_g \equiv 0$, $g = 1, \dots, n$.

The proof of Theorem 1 is complete.

4. Conclusions

Analogue results on the joint mixed functional independence of certain zeta-functions we may obtain in the same way as Theorem 1 if the function $\zeta(s)$ will be replaced by certain zeta-functions, namely by the zeta-functions of normalized Hecke cusp forms, the zeta-functions of newforms with a Dirichlet characters, the L -functions from the Selberg class, and etc. In the proof of the functional independence, the main role is played by the joint mixed universality for the collection consisting of one before mentioned zeta-function and several periodic Hurwitz zeta-functions like in Theorem 1. Such theorems are proved (or only stated) in [15], [16] and [17], respectively.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hölder O. Über die Eigenschaft der Gamafunktion keiner algebraischen Differentialgleichung zu genügen // Math. Ann.. 1887. Vol. 28. P. 1–13.
2. Hilbert D. Mathematische Probleme // Nachr. Konigl. Ges. Wiss. Gottingen, Math.-Phys. Kl.. 1900. P. 253–297.

3. Ostrowski A. Über Dirichletsche reihen und algebraische Differentialgleichungen // *Math. Z.*, 1920. Vol. 8. P. 241–298.
4. Postnikov A. G. On the differential independence of Dirichlet series // *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1949. Vol. 66, No. 4. P. 561–564 (in Russian).
5. Postnikov A. G. Generalization of one of Hilbert's problems // *Dokl. Akad. Nauk SSSR*. 1956. Vol. 107, No. 4. P. 512–515 (in Russian).
6. Voronin S. M. On the functional independence of Dirichlet L -functions // *Acta Arith.*, 1975. Vol. 27. P. 493–503 (in Russian).
7. Laurinćikas A. Limit Theorems for the Riemann Zeta-Function. Kluwer, Dordrecht, 1996.
8. Steuding J. Value-Distribution of L -functions. Lecture Notes in Math. Vol. 1877. Springer Verlag, Berlin etc., 2007.
9. Mishou H. The joint value-distribution of the Riemann zeta function and Hurwitz zeta functions // *Lith. Math. J.*, 2007. Vol. 47. P. 32–47.
10. Kaćinskaitė R. & Laurinćikas A. The joint distribution of periodic zeta-functions // *Stud. Scien. Math. Hungarica*. 2011. Vol. 48, No. 2. P. 257–279.
11. Riemann B. Über die Anzahl der Primzahlen unterhalb einer gegebenen Grösse // *Monatsber. Preuss Akad. Wiss. Berlin*. 1859. P. 671–680.
12. Javtokas A. & Laurinćikas A. On the periodic Hurwitz zeta-function // *Hardy-Ramanujan J.*, 2006. Vol. 29. P. 18–36.
13. Laurinćikas A. Functional independence of periodic Hurwitz zeta functions // *Math. Notes*. 2008. Vol. 83, No. 1. P. 65–71 = *Mat. Zametki*. 2008. Vol. 83, No. 1. P. 69–78 (in Russian).
14. Genys J., Macaitienė R., Raćkauskienė S. & Šiaućiūnas D. A mixed joint universality theorem for zeta-functions // *Math. Model. Anal.*, 2010. Vol. 15, No. 4. P. 431–446.
15. Laurinćikas A. & Šiaućiūnas D. A mixed joint universality theorem for zeta-functions. III. In: *Analytic Probab. Methods Number Theory, J. Kubilius Memorial Volume*, A. Laurinćikas et al. (eds.). TEV, Vilnius. 2012. P. 185–195.
16. Pocevičienė V. & Šiaućiūnas D. A mixed joint universality theorem for zeta-functions. II // *Math. Modell. and Analysis*. 2014. Vol. 19. P. 52–65.
17. Macaitienė R. Mixed joint universality for L -functions from Selberg's class and periodic Hurwitz zeta-functions // *Chebyshevskii Sb.*, 2015. Vol. 16, No. 1. P. 219–231.

REFERENCES

1. Hölder O., 1887, "Über die Eigenschaft der Gamafunktion keiner algebraischen Differentialgleichung zu genügen", *Math. Ann.*, Vol. 28, pp. 1–13.
2. Hilbert D., 1900, "Mathematische Probleme", *Nachr. Konigl. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl.*, pp. 253–297.
3. Ostrowski A., 1920, "Über Dirichletsche reihen und algebraische Differentialgleichungen", *Math. Z.*, Vol. 8, pp. 241–298.

4. Postnikov A. G., 1949, "On the differential independence of Dirichlet series", *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, Vol. 66, No. 4, pp. 561–564 (in Russian).
5. Postnikov A. G., 1956, "Generalization of one of Hilbert's problems", *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, Vol. 107 No. 4, pp. 512–515 (in Russian).
6. Voronin S. M., 1975, "On the functional independence of Dirichlet L -functions", *Acta Arith.*, Vol. 27, pp. 493–503 (in Russian).
7. Laurinćikas A., 1996, "Limit Theorems for the Riemann Zeta-Function", *Dordrecht: Kluwer*.
8. Steuding J., 2007, "Value-Distribution of L -functions", *Lecture Notes in Math*, Vol. 1877, *Berlin etc.: Springer Verlag*.
9. Mishou H., 2007, "The joint value-distribution of the Riemann zeta function and Hurwitz zeta functions", *Lith. Math. J.*, Vol. 47, pp. 32–47.
10. Kačinskaitė R. & Laurinćikas A., 2011, "The joint distribution of periodic zeta-functions", *Stud. Scien. Math. Hungarica*, Vol. 48, No. 2, pp. 257–279.
11. Riemann B., 1859, "Über die Anzahl der Primzahlen unterhalb einer gegebenen Grösse", *Monatsber. Preuss Akad. Wiss. Berlin*, pp. 671–680.
12. Javtokas A. & Laurinćikas A., 2006, "On the periodic Hurwitz zeta-function", *Hardy-Ramanujan J.*, Vol. 29, pp. 18–36.
13. Laurinćikas A., 2008, "Functional independence of periodic Hurwitz zeta functions", *Math. Notes*, Vol. 83, No. 1, pp. 65–71 $\equiv$ *Mat. Zametki*, Vol. 83, No. 1, pp. 69–78 (in Russian).
14. Genys J., Macaitienė R., Račkauskienė S. & Šiaučiūnas D., 2010, "A mixed joint universality theorem for zeta-functions", *Math. Model. Anal.*, Vol. 15, No. 4, pp. 431–446.
15. Laurinćikas A. & Šiaučiūnas D., 2012, "A mixed joint universality theorem for zeta-functions. III", in: *Analytic Probab. Methods Number Theory, J. Kubilius Memorial Volume, A. Laurinćikas et al. (eds.)*. Vilnius: TEV, pp. 185–195.
16. Pocevičienė V. & Šiaučiūnas D., 2014, "A mixed joint universality theorem for zeta-functions. II", *Math. Modell. and Analysis*, Vol. 19, pp. 52–65.
17. Macaitienė R., 2015, "Mixed joint universality for L -functions from Selberg's class and periodic Hurwitz zeta-functions", *Chebyshevskii Sb.*, Vol. 16, No. 1, pp. 219–231.

Šiauliai University

Получено 10.06.2016 г.

Принято в печать 12.12.2016 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 17. Выпуск 4.

УДК 512.533.52 + 512.579

DOI 10.22405/2226-8383-2016-17-4-65-78

ИНЪЕКТИВНЫЕ И ПРОЕКТИВНЫЕ ПОЛИГОНЫ
НАД ВПОЛНЕ 0-ПРОСТОЙ ПОЛУГРУППОЙ

И. Б. Кожухов (г. Москва), А. О. Петриков (г. Москва)

Аннотация

Гомологическая теория колец и модулей является одним из важных направлений алгебры. Она позволила ответить на многие вопросы теории колец. Наряду с этим и под большим влиянием теории колец стала развиваться гомологическая теория универсальных алгебр и, в частности, полугрупп и полигонов над ними. В этой теории исследуются понятия инъективного и проективного полигонов над полугруппами, понятия инъективной оболочки и проективного накрытия. Как и в случае колец и модулей, инъективная оболочка существует у всякого полигона, а проективное накрытие не у всякого. В 1967 году П. Бертьём доказано существование инъективных оболочек произвольного полигона над полугруппой (без предположения о наличии в полугруппе единицы). Моноиды (т.е. полугруппы с единицей), над которыми любой полигон имеет проективное накрытие, изучал Дж. Исбелл. Гомологическую теорию моноидов развивал Л. А. Скорняков. Многие результаты этой теории вошли в известную монографию М. Кильпа, У. Кнауэра и А. В. Михалёва.

Для полугрупп сравнительно простого строения результаты гомологической теории могут быть существенно уточнены. Так, в 2012 году Г. Могаддаси описал инъективные полигоны и построил инъективные накрытия полигонов над полугруппой левых нулей в предположении сепарабельности полигона. И. Б. Кожухов и А. Р. Халиуллина описали инъективные и проективные полигоны над группами и полугруппами правых нулей, построили инъективные оболочки и проективные накрытия полигонов над этими полугруппами. Для полигонов над полугруппой левых нулей было снято условие сепарабельности полигонов.

Важным классом полугрупп, включающим в себя группы, полугруппы левых и правых нулей, прямоугольные связки, является класс вполне простых полугрупп, а также ещё более широкий класс вполне 0-простых полугрупп. В 2000 году А. Ю. Авдеев и И. Б. Кожухов описали все полигоны над вполне простыми и полигоны с нулём над вполне 0-простыми полугруппами. Это дало возможность дальнейшего исследования полигонов над этими полугруппами. И. Б. Кожухов и А. О. Петриков описали инъективные и проективные полигоны над вполне простыми полугруппами, тем самым обобщив результаты работ И. Б. Кожухова и А. Р. Халиуллиной, а также работы Г. Могаддаси. Были построены также инъективные оболочки и проективные накрытия полигонов над этими полугруппами.

В данной работе вышеупомянутые результаты о полигонах над вполне простыми полугруппами обобщаются на полигоны с нулём над вполне 0-простыми полугруппами. А именно, находятся необходимые и достаточные условия инъективности и проективности полигона с нулём над произвольной вполне 0-простой полугруппой, строятся инъективные оболочки и проективные накрытия произвольных полигонов с нулём над этими полугруппами. В частности, оказывается, что проективный полигон над произвольной вполне 0-простой полугруппой – это в точности 0-копроизведение свободного полигона и полигонов, изоморфных 0-минимальному правому идеалу полугруппы (рассматриваемому как правый полигон).

Ключевые слова: полигон над полугруппой, инъективный полигон, проективный полигон, вполне 0-простая полугруппа, инъективная оболочка, проективное накрытие.

Библиография: 15 названий.

INJECTIVE AND PROJECTIVE ACTS OVER A COMPLETELY 0-SIMPLE SEMIGROUP

I. B. Kozhukhov (Moscow), A. O. Petrikov (Moscow)

Аннотация

The homological theory of rings and modules is an important branch of algebra. It provided answers to numerous questions of the theory of rings. Along with the homological theory, another theory started to develop, also under significant influence of the theory of rings, which is the homological theory of universal algebras, and, in particular, of semigroups and acts over them. This theory analyses such notions as injective and projective acts over semigroups, injective hulls and projective covers. As in the case of rings and modules, the injective hull exists for every act, while the projective cover sometimes does not. In 1967 P. Berthiaume proved the existence of injective hulls of an arbitrary act over a semigroup (without the assumption of the presence of an identity in the semigroup). J. Isbell studied monoids (i.e. semigroups with an identity) over which every act has a projective cover. L. A. Skornyakov developed a homological theory of monoids. Many results of that theory were mentioned in the known monograph by M. Kilp, U. Knauer, A. V. Mikhalev.

For semigroups of a relatively simple structure the results of the homological theory can be significantly refined. For example, in 2012 G. Moghaddasi described injective acts and built injective hulls of acts over a left zero semigroup assuming the separability of the act. I. B. Kozhukhov and A. P. Haliullina described injective and projective acts over groups and right zero semigroups, built injective hulls and projective covers of acts over such semigroups. For acts over a left zero semigroup the condition of separability of acts was removed.

An important class of semigroups containing groups, left and right zero semigroups, rectangular bands is the class of completely simple semigroups, as well as the broader class of completely 0-simple semigroups. In 2000 A. Yu. Avdeyev and I. B. Kozhukhov described all acts over completely simple semigroups and acts with zero over completely 0-simple semigroups. It triggered further research of acts over such semigroups. I. B. Kozhukhov and A. O. Petrikov described injective and projective acts over completely simple semigroups, thereby generalising the results of I. B. Kozhukhov and A. R. Khaliullina, and also the work of G. Moghaddasi. They built injective hulls and projective covers of acts over such semigroups.

In this paper the above-mentioned results concerning acts over completely simple semigroups were generalized to acts with zero over completely 0-simple semigroups. In particular, the necessary and sufficient conditions of injectivity and projectivity of an act with zero over an arbitrary completely 0-simple semigroup were found, injective hulls and projective covers of arbitrary acts with zero over such semigroups were built. It was established that a projective act over an arbitrary completely 0-simple semigroup is exactly a 0-coproduct of a free act and acts isomorphic to a 0-minimal right ideal of the semigroup (considered as a right act).

Key words: Act over semigroup, injective act, projective act, completely 0-simple semigroups, injective hull, projective cover.

Bibliography: 15 titles.

1. Введение

Гомологическая теория – важное направление общей алгебры, а в теории колец и модулей она занимает одно из центральных мест. Под большим влиянием теории колец и модулей создавалась гомологическая теория полугрупп и полигонов над ними. Целый спектр вопросов этой теории освещён в статье [1] и монографии [2].

Инъективности и проективности полигонов над полугруппами посвящены главы III и IV уже упоминавшейся монографии [2]. Бертьём в [3] доказал существование инъективных оболочек произвольного полигона над полугруппой (без предположения о наличии в полугруппе единицы). Проективное накрытие, как и в случае модулей над кольцами, существует не у

всякого полигона. Моноиды, над которыми любой полигон имеет проективное накрытие, изучал Исбелл (см. [2, гл. III, теорема 17.26]). Для полугрупп сравнительно простого строения могут быть описаны все инъективные и проективные полигоны над ними, а также построены инъективные оболочки и проективные накрытия полигонов. В работах [4] и [5] Могаддаси описал инъективные полигоны (в предположении сепарабельности полигона) и построил проективные накрытия полигонов над полугруппой левых нулей. В работе [6] были построены инъективные оболочки полигонов над полурешётками групп. В [7], [8], [9], [10] И. Б. Кожухов и А. Р. Халиуллина описали инъективные и проективные полигоны над группами и полугруппами правых нулей, построили инъективные оболочки и проективные накрытия полигонов над этими полугруппами. Для полигонов над полугруппой левых нулей было снято поставленное в [5] условие сепарабельности полигонов. Следует отметить, что основным средством для исследований в [9] послужило полученное в [11] описание полигонов над вполне простыми и вполне 0-простыми полугруппами. В работе [12] результаты из [9] были обобщены на полигоны над вполне простыми полугруппами.

Также отметим, что полигон над полугруппой является алгебраическим выражением автомата [13].

Для полугруппы S с нулём естественно рассматривать полигоны X с нулём такие, что $0s = x0 = 0$ при всех $s \in S$, $x \in X$. Цель настоящей работы — описать инъективные и проективные полигоны с нулём над вполне 0-простой полугруппой $\mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$, построить инъективные оболочки и проективные накрытия произвольных полигонов с нулём над этой полугруппой.

2. Основные понятия. Предварительные результаты

Полигоном над полугруппой S (или S -полигоном) называется множество X , на котором действует полугруппа S , т.е. определено отображение $X \times S \rightarrow X$, $(x, s) \mapsto xs$, удовлетворяющее условию $x(st) = (xs)t$ при $x \in X$, $s, t \in S$. Полигон над полугруппой является алгебраическим выражением понятия автомата (см. [14]). При этом X — множество состояний автомата, а S — полугруппа входных сигналов. Кроме того, полигон над полугруппой — это унарная алгебра; операциями являются умножения на элементы полугруппы. Понятие подполигона, гомоморфизма и другие понятия универсальной алгебра имеют в нашей работе обычный смысл.

Вполне 0-простая полугруппа S — это полугруппа с нулём, идеалами которой являются лишь $\{0\}$ и S , имеющая ненулевой примитивный идемпотент (т.е. минимальный относительно естественного порядка на множестве идемпотентов: $e \leq f \Leftrightarrow ef = fe = e$). Хорошо известная теорема Сушкевича — Риса утверждает (см. [15, теорема 3.5]), что вполне 0-простые полугруппы — это в точности рисовские матричные полугруппы $S = \mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$ над группой с нулём G^0 с сэндвич-матрицей $P = \|p_{\lambda i}\|_{\lambda \in \Lambda, i \in I}$, где $p_{\lambda i} \in G^0$, причём в каждой строке и в каждом столбце матрицы P обязаны присутствовать ненулевые элементы (см. [15, гл. 3]).

Полигон X над полугруппой S называется *инъективным*, если для любого инъективного гомоморфизма $\alpha : M \rightarrow N$ полигонов над S и любого гомоморфизма $\varphi : M \rightarrow X$ существует гомоморфизм ψ такой, что $\alpha\psi = \varphi$ (см. рис. 1; мы здесь и далее умножаем отображения слева направо).

Полигон X *проективен* (см. рис. 2), если для любого сюръективного гомоморфизма $\alpha : M \rightarrow N$ S -полигонов и гомоморфизма $\varphi : X \rightarrow N$, существует гомоморфизм $\psi : X \rightarrow M$ такой, что $\psi\alpha = \varphi$.

Инъективной оболочкой полигона X называется минимальный инъективный полигон, содержащий X . *Проективное накрытие* полигона X — это проективный полигон $P(X)$ такой, что существует сюръективный гомоморфизм $P(X) \xrightarrow{\beta} X$, но для любого собственного подпо-

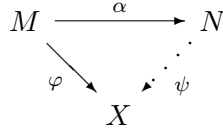


Рис. 1: Инъективный полигон

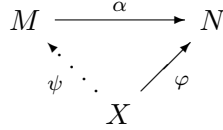


Рис. 2: Проективный полигон

лигона $P_1 \subset P(X)$ ограничение $\beta|_{P_1}$ не является сюръективным.

Отметим, что в данной работе рассматриваются лишь полигоны с нулём над полугруппой с нулём, поэтому в только что приведённых определениях все полигоны являются полигонами с нулём. Нетрудно видеть, что гомоморфизмы таких полигонов переводят ноль в ноль.

Пусть G — группа, H — её подгруппа, не обязательно нормальная. Через G/H мы будем обозначать множество правых смежных классов Hg , где $g \in G$. Нетрудно проверить, что Hg является полигоном над G относительно действия $Hg \cdot g' = Hgg'$. Оказывается, G/H — это общий вид любого унитарного циклического полигона над группой G . Впрочем, этот факт нам далее не понадобится.

Пусть S — полугруппа с нулём и X — полигон с нулём над S . Будем говорить, что X является 0-копроизведением своих подполигонов X_i ($i \in I$), если $X = \bigcup \{X_i | i \in I\}$, и $X_i \cap X_j = \{0\}$ при $i \neq j$. Этот факт мы будем записывать так: $X = \coprod_{i \in I}^0 X_i$.

Приведём теорему из [11], описывающую все полигоны с нулём над вполне 0-простой полугруппой $S = \mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$.

ТЕОРЕМА 1. [11, теорема 4]. Пусть $S = \mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$, — вполне 0-простая полугруппа, X — множество, содержащее элемент 0 , $Q^0 = \coprod_{\gamma \in \Gamma} (G/H_\gamma) \sqcup \{0\}$ (G — группа, $(H_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ — семейство её подгрупп). Пусть для каждого $i \in I$ задано отображение $\pi_i : X \rightarrow Q^0$, а для каждого $\lambda \in \Lambda$ — отображение $\kappa_\lambda : Q^0 \rightarrow X$, причём $0\pi_i = 0$, $0\kappa_\lambda = 0$, $q\kappa_\lambda\pi_i = q \cdot p_{\lambda i}$ при $q \in Q^0$, $i \in I$, $\lambda \in \Lambda$. Положим $x \cdot (g)_{i\lambda} = (x\pi_i \cdot g)\kappa_\lambda$, $x \cdot 0 = 0$ для всех $x \in X$. Тогда X будет являться полигоном с нулём над полугруппой S и наоборот, всякий полигон с нулём над S изоморфен полигону, построенному таким способом.

Рассмотрим произвольный полигон X с нулём над вполне 0-простой полугруппой $S = \mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$. Для $\gamma \in \Gamma$ положим $Q_\gamma = (G/H_\gamma) \cup \{0\}$. Тогда, очевидно, $Q^0 = \coprod_{\gamma \in \Gamma} Q_\gamma$. Для $q \in Q^0$ положим $X_q = \{q\kappa_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$, для $\gamma \in \Gamma$ полагаем $X^{(\gamma)} = \bigcup \{X_q | q \in Q_\gamma\}$.

ЛЕММА 1. $X^{(\gamma)}$ — подполигон полигона X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in X^{(\gamma)}$, $s \in S$. Если $s = 0$, то $xs = 0 \in X^{(\gamma)}$. Пусть $s = (g)_{i\lambda}$. Так как $x \in X^{(\gamma)}$, то $x = q\kappa_\mu$ при некоторых $q \in Q_\gamma$, $\mu \in \Lambda$. Имеем: $xs = q\kappa_\mu \cdot (g)_{i\lambda} = (q\kappa_\mu\pi_i \cdot g)\kappa_\lambda = (q \cdot p_{\mu i} \cdot g)\kappa_\lambda \subseteq Q_\gamma\kappa_\lambda \subseteq X^{(\gamma)}$. $\square$

ЛЕММА 2. $X^{(\alpha)} \cap X^{(\beta)} = \{0\}$ при $\alpha \neq \beta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in X^{(\alpha)} \cap X^{(\beta)}$. Тогда $x = q_1 \kappa_\mu = q_2 \kappa_\nu$ при некоторых $q_1 \in Q_\alpha$, $q_2 \in Q_\beta$, $\mu, \nu \in \Lambda$. Умножив на такое π_i , что $p_{\mu i} \neq 0$, получим: $q_1 \kappa_\mu \pi_i = q_2 \kappa_\nu \pi_i$, т.е. $q_1 \cdot p_{\mu i} = q_2 \cdot p_{\nu i}$. Отсюда $q_1 = q_2 p_{\nu i} p_{\mu i}^{-1} \in Q_\beta$. Следовательно, $q_1 \in Q_\alpha \cap Q_\beta = \{0\}$, а значит, $x = q_1 \kappa_\mu = 0$. $\square$

ЛЕММА 3. $XS = \coprod_{\gamma \in \Gamma}^0 X^{(\gamma)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду леммы 2 достаточно доказать, что $XS = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} X^{(\gamma)}$. Пусть $x \in XS$.

Если $x = 0$, то $x \in X^{(\gamma)}$ при всех γ . Пусть $x \neq 0$. Тогда $x = x' \cdot (g)_{i\lambda}$ при некоторых $x' \in X$, $(g)_{i\lambda} \in S \setminus \{0\}$. Имеем: $x = (x' \pi_i \cdot g) \kappa_\lambda \in Q^0 \kappa_\lambda \subseteq X^{(\gamma)}$, если $x' \pi_i \in Q_\gamma$. Наоборот, пусть $x \in X^{(\gamma)}$. Тогда $x = q \kappa_\lambda$ при некоторых $q \in Q^{(\gamma)}$, $\lambda \in \Lambda$. Найдём $i \in I$ такое, что $p_{\lambda i} \neq 0$. Тогда $x \cdot (p_{\lambda i}^{-1})_{i\lambda} = (x \pi_i \cdot p_{\lambda i}^{-1}) \kappa_\lambda = (q \kappa_\lambda \pi_i \cdot p_{\lambda i}^{-1}) \kappa_\lambda = (q \cdot p_{\lambda i} \cdot p_{\lambda i}^{-1}) \kappa_\lambda = q \kappa_\lambda = x$, т.е. $x \in XS$. $\square$

ЛЕММА 4. $zS = X^{(\gamma)}$ для всех $z \in X^{(\gamma)} \setminus \{0\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 1 следует, что $zS \subseteq X^{(\gamma)}$. Пусть $z' \in X^{(\gamma)}$. Если $z' = 0$, то $z' \in zS$. Пусть $z' \neq 0$. Имеем: $z = q_1 \kappa_\lambda$, $z' = q_2 \kappa_\mu$ при некоторых $q_1, q_2 \in Q_\gamma \setminus \{0\}$, $\lambda, \mu \in \Lambda$. Тогда $q_1 = q_2 \cdot g$ при некотором $g \in G$. Нам осталось доказать разрешимость уравнения $z' \cdot (h)_{j\nu} = z$ относительно h, j, ν . Преобразуем это уравнение: $q_2 \kappa_\mu \cdot (h)_{j\nu} = q_1 \kappa_\lambda$, или $(q_2 \kappa_\mu \pi_j \cdot h) \kappa_\nu = (q_2 \cdot g) \kappa_\lambda$, или $(q_2 \kappa_\mu \pi_j \cdot h) \kappa_\nu = (q_2 \cdot g) \kappa_\lambda$. Возьмём любое $j \in I$, для которого $p_{\mu j} \neq 0$, положим $\nu = \lambda$, $g = p_{\mu j} h$. Тогда требуемое равенство выполняется. $\square$

Из лемм 3 и 4 мы получаем следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть X — полигон с нулём над вполне 0-простой полугруппой $S = \mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$. Положим $A = X \setminus XS$. Тогда $X = A \cup \coprod_{\gamma \in \Gamma}^0 x_\gamma S$, причём $x_\gamma \in x_\gamma S$ при всех $\gamma \in \Gamma$ и $xS = x_\gamma S$ при $x \in x_\gamma S \setminus \{0\}$.

3. Инъективные полигоны над вполне 0-простой полугруппой

В дальнейшем всюду S будет обозначать вполне 0-простую полугруппу $S = \mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$, а X — полигон с нулём над S . Для элемента $x \in X$ определим отображение $\omega_x : I \rightarrow Q^0$ формулой $i\omega_x = x\pi_i$.

ТЕОРЕМА 2. Полигон X с нулём над вполне 0-простой полугруппой $S = \mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$ является инъективным в том и только том случае, если для любого отображения $\omega : I \rightarrow Q^0$ существует элемент $x \in X$ такой, что $\omega = \omega_x$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть $\omega : I \rightarrow Q^0$ — произвольное отображение. Добавим к полигону X элемент b и определим умножение его на элементы из S следующим образом: $b \cdot 0 = 0$, $b \cdot (g)_{i\lambda} = (i\omega \cdot g) \kappa_\lambda$. Проверим, что тогда множество $X \cup \{b\}$ будет S -полигоном. Действительно,

$$(b \cdot (g)_{i\lambda}) \cdot (h)_{j\mu} = (i\omega \cdot g) \kappa_\lambda \cdot (h)_{j\mu} = ((i\omega \cdot g) \kappa_\lambda \pi_j \cdot h) \kappa_\mu = (i\omega \cdot g \cdot p_{\lambda j} \cdot h) \kappa_\mu = b \cdot (gp_{\lambda j} h)_{i\mu} = b \cdot ((g)_{i\lambda} \cdot (h)_{j\mu}).$$

Естественное вложение $\alpha : X \rightarrow X \cup \{b\}$, очевидно, является инъективным гомоморфизмом полигонов. Так как X инъективен, то существует гомоморфизм $\varphi : X \cup \{b\} \rightarrow X$ такой, что $\alpha\psi = 1_X$. Пусть $x = b\psi$. Возьмём любое $i \in I$ и подберём $\lambda \in \Lambda$ так, чтобы $p_{\lambda i} \neq 0$. Тогда для любого $g \in G$ будем иметь $b \cdot (g)_{i\lambda} \in X$, поэтому $(b \cdot (g)_{i\lambda})\psi = b \cdot (g)_{i\lambda}$. Отсюда получаем: $(i\omega \cdot g) \kappa_\lambda = b \cdot (g)_{i\lambda} = (b \cdot (g)_{i\lambda})\psi = b\psi \cdot (g)_{i\lambda} = x \cdot (g)_{i\lambda} = (i\omega_x \cdot g) \kappa_\lambda$. Так как κ_λ инъективно, то $i\omega \cdot g = i\omega_x \cdot g$, а значит, $i\omega = i\omega_x$. Ввиду произвольности элемента i получаем: $\omega = \omega_x$.

Достаточность. Очевидно, достаточно доказать, что для любого полигона T' и его подполигона $T \subseteq T'$ всякий гомоморфизм $\varphi : T \rightarrow X$ продолжается до гомоморфизма $\varphi' : T' \rightarrow X$. Полигон T представим в виде $T' = B' \cup \coprod_{\delta \in \Delta} U^{(\delta)}$, где $B = T \setminus TS$, а T' в виде $T' = B' \cup \coprod_{\delta' \in \Delta'} U^{(\delta')}$, где $B' = T' \setminus T'S$. При этом $uS = U^{(\delta)}$ для любого $u \in U^{(\delta)} \setminus \{0\}$ и $u'S = U^{(\delta')}$ при $u' \in U^{(\delta')} \setminus \{0\}$. Кроме того, $u \in uS$, $u' \in u'S$. Если $U^{(\delta)} \cap U^{(\delta')} \neq 0$ для каких-либо $\delta \in \Delta$, $\delta' \in \Delta'$, то $U^{(\delta)} = U^{(\delta')}$, так как $U^{(\delta)} = uS = U^{(\delta')}$ для $u \in (U^{(\delta)} \cap U^{(\delta')}) \setminus \{0\}$. Следовательно, мы можем считать, что $\Delta \subseteq \Delta'$ и $T' = B' \cup (\coprod_{\delta \in \Delta} U^{(\delta)} \sqcup \coprod_{\delta' \in \Delta' \setminus \Delta} U^{(\delta')})$.

Напомним, что $\coprod_{\delta \in \Delta} U^{(\delta)} = TS$, $\coprod_{\delta' \in \Delta'} U^{(\delta')} = T'S$. Докажем, что $B \subseteq B'$. Пусть $b \in B$, но $b \notin B'$. Тогда $b \in T'S$. Следовательно, $b = \omega s$ при некоторых $\omega \in T'$, $s \in S$. Если $b \in TS$, то $b \notin B$ — противоречие. Следовательно, $b \in T'S \setminus TS$. Так как $0 \in TS$, то $b \neq 0$, поэтому $s \neq 0$. Это влечёт существование элемента $s' \in S$ такого, что $ss' = s$. Отсюда получаем: $b = \omega s = \omega ss' = bs' \in TS$ — противоречие.

Определим гомоморфизм $\varphi' : T' \rightarrow X$, продолжаящий φ . Пусть $y \in T'$. Если $y \in T$, то полагаем $y\varphi' = y\varphi$. Пусть $y \in T' \setminus T$. Если $y \in T'S \setminus TS$, то полагаем $y\varphi' = 0$. Таким образом, $y\varphi' = y\varphi$ при $y \in \coprod_{\delta \in \Delta} U^{(\delta)}$ и $y\varphi' = 0$ при $y \in \coprod_{\delta' \in \Delta' \setminus \Delta} U^{(\delta')}$. Осталось определить $y\varphi'$ для $y \in B' \setminus B$.

Зафиксируем элемент $y \in B' \setminus B$ и построим по нему отображение $\omega : I \rightarrow Q^0$. Возьмём $i \in I$. Найдём λ такое, что $p_{\lambda i} \neq 0$. Рассмотрим произведение $y \cdot (p_{\lambda i}^{-1})_{i\lambda}$. Если $y \cdot (p_{\lambda i}^{-1})_{i\lambda} \notin T$, то полагаем $i\omega = 0$. Если $y \cdot (p_{\lambda i}^{-1})_{i\lambda} = u \in T$, то положим $i\omega = u\varphi\pi_i$. Проверим корректность определения $i\omega$, т.е. независимость от выбора λ . Пусть $p_{\mu i} \neq 0$. Тогда $(p_{\lambda i}^{-1})_{i\lambda} \cdot (p_{\mu i}^{-1})_{i\mu} = (p_{\mu i}^{-1})_{i\mu}$ и $(p_{\mu i}^{-1})_{i\mu} \cdot (p_{\lambda i}^{-1})_{i\lambda} = (p_{\lambda i}^{-1})_{i\lambda}$, поэтому $y \cdot (p_{\lambda i}^{-1})_{i\lambda} \in T \Leftrightarrow y \cdot (p_{\mu i}^{-1})_{i\mu} \in T$. Пусть $y \cdot (p_{\lambda i}^{-1})_{i\lambda} = u \in T$, $y \cdot (p_{\mu i}^{-1})_{i\mu} = v \in T$. Тогда

$$\begin{aligned} v\varphi\pi_i &= (y \cdot (p_{\mu i}^{-1})_{i\mu})\varphi\pi_i = (y \cdot (p_{\lambda i}^{-1})_{i\lambda} \cdot (p_{\mu i}^{-1})_{i\mu})\varphi\pi_i = ((y \cdot (p_{\lambda i}^{-1})_{i\lambda})\varphi \cdot (p_{\mu i}^{-1})_{i\mu})\pi_i = \\ &= (u\varphi \cdot (p_{\mu i}^{-1})_{i\mu})\pi_i = (u\varphi\pi_i \cdot p_{\mu i}^{-1})\kappa_{\mu}\pi_i = u\varphi\pi_i \cdot p_{\mu i}^{-1} \cdot p_{\mu i} = u\varphi\pi_i. \end{aligned}$$

Отображение $\omega : I \rightarrow Q^0$ построено.

По условию для этого отображения ω найдется элемент $x \in X$ такой, что $\omega = \omega_x$. Положим $y\varphi' = x$.

Проверим, что $\varphi' : T' \rightarrow X$ — гомоморфизм. Пусть $y \in T'$, $s \in S$. Если $y \in T$, то также $ys \in T$, и мы получаем: $(ys)\varphi' = (ys)\varphi = y\varphi \cdot s = y'\varphi' \cdot s$. Пусть $y \in T' \setminus T$. При $s = 0$ равенство $(ys)\varphi' = y\varphi' \cdot s$ очевидно, поэтому будем считать, что $s = (g)_{i\lambda}$. Найдём μ , для которого $p_{\mu i} \neq 0$.

Рассмотрим вначале случай, когда $y \in T'S$. Так как $y \notin T$, то $y \notin TS$, поэтому $y \in U^{(\delta')}$ при некотором $\delta' \in \Delta' \setminus \Delta$. Но в этом случае также $ys \in U^{(\delta')}$, а значит, $y\varphi' = (ys)\varphi' = 0$. Отсюда $(ys)\varphi' = y\varphi' \cdot s$.

Осталось рассмотреть случай, когда $y \notin T'S$. Тогда $y \in B' \setminus B$. Ранее мы доказывали, что для этого y можно построить отображение $\omega : I \rightarrow Q^0$ и при некотором $x \in X$ мы будем иметь $\omega = \omega_x$; кроме того, $y\psi' = x$, $y \cdot (p_{\mu i}^{-1})_{i\mu} = u \in T$ и $u\varphi\pi_i = i\omega$.

Если $u \in T$, то также $y \cdot (g)_{i\lambda} = y \cdot (p_{\mu i}^{-1})_{i\mu} \cdot (g)_{i\lambda} \in T$. Отсюда получаем:

$$\begin{aligned} (y \cdot (g)_{i\lambda})\varphi' &= (y \cdot (p_{\mu i}^{-1})_{i\mu} \cdot (g)_{i\lambda})\varphi' = (y \cdot (p_{\mu i}^{-1})_{i\mu}) \cdot (g)_{i\lambda}\varphi = (y \cdot (p_{\mu i}^{-1})_{i\mu})\varphi \cdot (g)_{i\lambda} = u\varphi \cdot (g)_{i\lambda} = \\ &= (u\varphi\pi_i \cdot g)\kappa_{\lambda} = (i\omega \cdot g)\kappa_{\lambda} = (i\omega_x \cdot g)\kappa_{\lambda} = x \cdot (g)_{i\lambda} = y\varphi' \cdot (g)_{i\lambda}. \end{aligned}$$

Наконец, пусть $u \notin T$. Тогда $u \in T'S \setminus TS$, а значит, $u \in U^{(\delta')}$ при некотором $\delta' \in \Delta' \setminus \Delta$. Но в этом случае также $us \in U^{(\delta')}$. Следовательно, $u\varphi' = (us)\varphi' = 0$, откуда

$$(y \cdot (g)_{i\lambda})\varphi' = (y \cdot (p_{\mu i}^{-1})_{i\mu} \cdot (g)_{i\lambda})\varphi' = (us)\varphi' = 0$$

$$y\varphi' \cdot (g)_{i\lambda} = x \cdot (g)_{i\lambda} = x \cdot (g)_\lambda = (x\pi_i \cdot g)\kappa_\lambda = (i\omega_x \cdot g)\kappa_\lambda = (i\omega \cdot g)\kappa_\lambda = 0,$$

Теперь построим инъективную оболочку произвольного полигона с нулём над вполне 0-простой полугруппой.

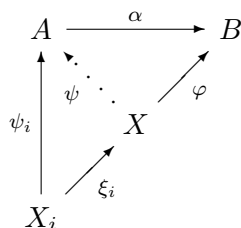
делим отображение $\omega_x : I \rightarrow Q^0$ по правилу $i\omega_x = x\pi_i$. Пусть Ω – множество отображений $\omega : I \rightarrow Q^0$ таких, что $\omega \neq \omega_x$ ни при каком $x \in X$. Для каждого $\omega \in \Omega$ добавим к полигону X элемент a_ω и определим действие на него элементов полугруппы S следующим образом: $a_\omega \cdot 0 = 0$, $a_\omega \cdot (g)_{i\lambda} = (i\omega \cdot g)_{\kappa\lambda}$. Тогда $E(X) = X \cup \{a_\omega | \omega \in \Omega\}$ является полигоном с нулём над полугруппой S и $E(X)$ – инъективная оболочка полигона X .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Теоремы 2 и 3 аналогичны теоремам 6 и 7 из [12], однако, для вполне θ -простых полугрупп рассуждения более сложные.

Следующее утверждение является аналогом предложения 17.1 из [2], фактически перенося утверждение с обычных полигонов на полигоны с нулём.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим отображения $\xi_i : X_i \rightarrow X$, $\eta_i : X \rightarrow X_i$, полагая $x\xi_i = x$, $x\eta_i = \begin{cases} x, & \text{если } x \in X_i \\ 0, & \text{если } x \notin X_i \end{cases}$. Очевидно, ξ_i и η_i — гомоморфизмы полигонов, причём $\xi_i\eta_i = 1_{X_i}$ при всех $i \in X$. Поэтому, если X проективен, то все X_i проективны.

Осталось доказать обратное утверждение: что если все X_i проективны, то X проективен. Пусть $\alpha : A \rightarrow B$ — сюръективный гомоморфизм полигонов с нулём A, B над полугруппой S и $\varphi : X \rightarrow B$ — произвольный гомоморфизм (см. рис. 3).



Требуется найти гомоморфизм $\psi : X \rightarrow A$ такой, что $\psi\alpha = \varphi$. Так как каждое X_i является проективным полигоном, то существует гомоморфизм $\psi_i : X_i \rightarrow A$ такой, что $\psi_i\alpha = \xi_i\varphi$. Положим теперь $x\psi = x\psi_i$ при $x \in X_i$. Так как $X = \bigcup_{i \in I} X_i$, то мы действительно получим отображение $\psi : X \rightarrow A$. Проверим, что ψ — гомоморфизм. Пусть $s \in S$, $x \in X$. Если $x = 0$,

то равенство $(xs)\psi = x\psi \cdot s$ очевидно. Пусть $x \neq 0$. Тогда $x \in X_i \setminus \{0\}$ при некотором $i \in I$. Кроме того, $xs \in X_i$, поэтому $(xs)\psi = (xs)\psi_i = x\psi_i = x\psi_i \cdot s = x\psi \cdot s$. Осталось проверить, что $\psi\alpha = \varphi$. Пусть $x \in X$. Тогда $x \in X_i$ при некотором $i \in I$, и мы имеем $x\psi\alpha = x\psi_i\alpha = x\xi_i\varphi = x\varphi$, то есть $\psi\alpha = \varphi$. $\square$

Для дальнейшего нам понадобится ещё одно представление произвольного полигона с нулём над полугруппой $S = \mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть X — полигон с нулём над вполне 0-простой полугруппой $S = \mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$, $A = X \setminus XS$, $Z = (XS \setminus AS) \cup \{0\}$. Тогда:

- (i) $A \cup AS$ — подполигон;
- (ii) Z — подполигон, причем $Z = \coprod_{\gamma \in \Gamma}^0 z_\gamma S$ для некоторых $z_\gamma \in Z \setminus \{0\}$;
- (iii) $X = (A \cup AS) \sqcup^0 \coprod_{\gamma \in \Gamma}^0 z_\gamma S$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение (i) очевидно. Пусть $z \in Z$, $s \in S$. Если $zs = 0$, то $zs \in Z$. Пусть теперь $zs \neq 0$. Тогда $z \neq 0$, поэтому $z \in XS \setminus AS$. Если $zs \in AS$, то $zs = at$ при некоторых $a \in A$, $t \in S$. Так как $z \in XS$, то $z = xu$, при некотором $u \in S$. Так как $xus = zs \neq 0$, то $us \neq 0$, поэтому u и us лежат в одном $\mathcal{R}$ -классе полугруппы S . Следовательно, $uss' = u$ при некотором $s' \in S$. Отсюда получаем: $z = xu = xuss' = zss' = ats' \in AS$, что противоречит выбору элемента z . Таким образом, $zs \in XS \setminus AS$, а значит, Z — подполигон.

Введём на множестве $Z \setminus \{0\} = XS \setminus AS$ отношение $\sim$, полагая $z \sim z' \Leftrightarrow z' \in zS$. Проверим, что $\sim$ — отношение эквивалентности. Пусть $z' = zs$. Так как $z \in XS$, то $z = xt$ при некоторых $x \in X$, $t \in S$. Имеем: $z' = zs = xts$, следовательно, $ts \neq 0$, а значит, $tss' = t$ при некотором $s' \in S$. Это влечет, что $z's' = zss' = xtss' = xt = z$. Тем самым доказана симметричность отношения $\sim$. Далее, так как $t \in S$, то $tt' = t$ при некотором $t' \in S$. Отсюда $zt' = xtt' = xt = z$, что доказывает рефлексивность отношения $\sim$. Транзитивность этого отношения очевидна. Таким образом, $\sim$ — отношение эквивалентности.

Так как $\sim$ — отношение эквивалентности на множестве $XS \setminus AS$, то это множество разбивается на классы эквивалентности: $XS \setminus AS = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} K_\gamma$. Выберем в каждом классе K_γ по одному

представителю z_γ . Тогда получим: $z_\gamma S = K_\gamma \cup \{0\}$. Отсюда видно, что $Z = \coprod_{\gamma \in \Gamma}^0 z_\gamma S$. Тем самым

доказано (ii). Наконец, так как $Z \cap (A \cup AS) = \{0\}$, то мы имеем разложение $X = (A \cup AS) \sqcup^0 Z$, откуда следует (iii). $\square$

Для полугруппы $S = \mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$ и $i \in I$ положим $R_i = \{0\} \cup \{(g)_{i\lambda} | g \in G, \lambda \in \Lambda\}$. Очевидно, R_i — правый идеал полугруппы S и одновременно правый S -модуль с нулём.

Напомним, что правый идеал R полугруппы S с нулём называется 0-простым, если он не содержит правых идеалов, отличных от 0 и R . Полигон Y с нулём над полугруппой S с нулём называется 0-простым, если он не содержит подполигонов, отличных от 0 и Y .

Очевидно, R_i — 0-простой правый идеал полугруппы $S = \mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$ и одновременно 0-простой подполигон полигона S_S . Кроме того, $rS = R_i$ для любого $r \in R_i \setminus \{0\}$. Также ясно, что имеет место разложение полигона S_S в 0-копроизведение полигонов: $S = \coprod_{i \in I}^0 R_i$.

ЛЕММА 6. Для полугруппы $S = \mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$ имеет место изоморфизм S -полигонов: $R_i \cong R_j$ при любых $i, j \in I$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем какое-либо $\lambda \in \Lambda$ и положим $u_i = (e)_{i\lambda}$, $u_j = (e)_{j\lambda}$. Тогда $u_i S = R_i$, $u_j S = R_j$. Определим отображение $\varphi : R_i \rightarrow R_j$ по формуле $(u_i s)\varphi = u_j s$ ($s \in S$). Докажем корректность этого определения. Очевидно, $(u_i, u_j) \in \mathcal{L}$, поэтому $u_i = t_1 u_j$, $u_j = t_2 u_i$

при некоторых $t_1, t_2 \in S$. Отсюда видно, что $u_i s = u_i t \Leftrightarrow u_j s = u_j t$ при всех $s, t \in S$. Это доказывает, что φ определено корректно и является взаимно однозначным отображением R_i на R_j . Нетрудно проверить, что φ — гомоморфизм S -полигонов. Следовательно, $R_i \cong R_j$. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Как полугруппы R_i и R_j могут не быть изоморфны. Необходимое и достаточное условие их изоморфизма даёт следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Полугруппы R_i и R_j изоморфны в том и только том случае, если выполнено условие $|\{\lambda | p_{\lambda i} \neq 0\}| = |\{\lambda | p_{\lambda j} \neq 0\}|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Хорошо известно, что идемпотенты полугруппы $S = \mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$ — это в точности элементы вида $(p_{\lambda i}^{-1})_{i\lambda}$ для $p_{\lambda i} \neq 0$. Таким образом, множество $\Lambda_i = \{\lambda | p_{\lambda i} \neq 0\}$ находится во взаимно однозначном соответствии с множеством идемпотентов полугруппы R_i .

Докажем *необходимость* условия предложения. Если полугруппы R_i и R_j изоморфны, то мощность множества идемпотентов у них одна и та же. Следовательно, $|\Lambda_i| = |\Lambda_j|$.

Теперь докажем *достаточность*. Пусть $|\Lambda_i| = |\Lambda_j|$. Тогда существует взаимно однозначное отображение $\varphi : \Lambda \rightarrow \Lambda$ такое, что $\Lambda_i \varphi = \Lambda_j$. Построим отображение $\Phi : R_i \rightarrow R_j$, полагая $0\Phi = 0$, $(g)_{i\lambda} \Phi = (gp_{\lambda i} p_{\lambda \varphi(j)}^{-1})_{j, \lambda \varphi}$ при $p_{\lambda i} \neq 0$, $(g)_{i\lambda} \Phi = (g)_{j, \lambda \varphi}$ при $p_{\lambda i} = 0$. Нетрудно проверить, что Φ — изоморфизм полугрупп R_i и R_j . $\square$

ЛЕММА 7. $R_i = \{0\} \cup \{(g)_{i\lambda} | g \in G, \lambda \in \Lambda\}$ — проективный полигон над полугруппой $S = \mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Найдём элемент $r \in R$ такой, что $r = r^2 \neq 0$. Тогда $R_i = rS$. Пусть $\alpha : M \rightarrow N$ — сюръективный гомоморфизм S -полигонов и $\varphi : R_i \rightarrow N$ — произвольный гомоморфизм. Пусть $r\varphi = n$. Так как α сюръективно, то $m\alpha = n$ при некотором $m \in M$. Определим отображение $\psi : R_i \rightarrow M$ по правилу $(rs)\psi = mrs$. Очевидно, ψ определено корректно и является гомоморфизмом. Имеем: $(rs)\psi\alpha = (mrs)\alpha = m\alpha \cdot rs = n \cdot rs = r\varphi \cdot rs = (r \cdot rs)\varphi = (rs)\varphi$. Следовательно, $\psi\alpha = \varphi$. Таким образом, R_i проективен. $\square$

ЛЕММА 8. Пусть X — полигон с нулём над вполне θ -простой полугруппой $S = \mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$, $A = X \setminus XS$ и $z \in XS \setminus AS$. Полигон zS проективен в том и только том случае, если для любых $i \in I$, $\lambda, \mu \in \Lambda$, $g, h \in G$ имеет место импликация $z \cdot (g)_{i\lambda} = z \cdot (h)_{i\mu} \neq 0 \Rightarrow g = h \wedge \lambda = \mu$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость.* Пусть zS проективен. Так как $z \in XS$, то $z = xt$ при некотором $t \in S$. Далее, существует $r \in S$ такое, что $tr = t$. Отсюда $zr = z$. Следовательно, $r \neq 0$. Очевидно, $r \in R_i \setminus \{0\}$ при некотором $i \in I$, а значит, $R_i = rS$. Построим отображение $\varphi : R_i \rightarrow zS$ по правилу $(rs)\varphi = zs$. Это правило корректно, так как, если $rs = r'$, то $zrs = zrs'$, т.е. $zs = zs'$. Очевидно, φ — гомоморфизм. Так как полигон zS проективен, то существует гомоморфизм ψ такой, что $\psi\varphi = 1_{zS}$. Отсюда видно, что ψ инъективен.

Пусть $z \cdot (g)_{i\lambda} = z \cdot (h)_{i\mu} \neq 0$. Так как ψ инъективен, то $(z \cdot (g)_{i\lambda})\psi = (z \cdot (h)_{i\mu})\psi \neq 0$. Если $z\psi = ru$, то мы имеем $ru \cdot (g)_{i\lambda} = ru \cdot (h)_{i\mu} \neq 0$. Так как $ru \neq 0$, то $ru = (c)_{k\nu}$ при некоторых $c \in G$, $k \in I$, $\nu \in \Lambda$. Но $(c)_{k\nu} \cdot (g)_{i\lambda} = (c)_{k\nu} \cdot (h)_{i\mu} \neq 0$ влечёт равенства $g = h$, $\lambda = \mu$.

Достаточность. Пусть выполнена импликация $z \cdot (g)_{i\lambda} = z \cdot (h)_{i\mu} \neq 0 \Rightarrow g = h \wedge \lambda = \mu$. Так как $z \in XS \setminus AS$, то $z = xt$ при некоторых $x \in X$, $t \in S$. Так как $z \notin AS$, то $z \neq 0$, а значит, $t \neq 0$. Поэтому $tt' = t$ при некотором $t' \in S \setminus \{0\}$. Имеем: $zt' = xtt' = xt = z$. Так как $t' \neq 0$, то $t' = (c)_{k\nu}$ при некоторых $c \in G$, $k \in I$, $\nu \in \Lambda$. Итак, $z \cdot (c)_{k\nu} = z$.

Построим отображение $\varphi : R_k \rightarrow zS$, полагая $((c)_{k\nu}s)\varphi = zs$ при $s \in S$. Если $(c)_{k\nu}s = (c)_{k\nu}t$ при каких-либо $s, t \in S$, то $(c)_{k\nu}s = (c)_{k\nu}t$, т.е. $zs = zt$, что доказывает корректность определения φ . То, что φ — гомоморфизм, очевидно. Докажем, что φ взаимно однозначно. Нам достаточно доказать лишь инъективность отображения φ . Пусть $zs = zt \neq 0$. Тогда $z(c)_{k\nu}s = z(c)_{k\nu}t \neq 0$. Это означает, что $(c)_{k\nu}s, (c)_{k\nu}t \in R_k \setminus \{0\}$. То есть $(c)_{k\nu}s = (g)_{k\lambda}$,

$(c)_{k\nu}t = (h)_{k\mu}$. Имеем: $z \cdot (g)_{k\lambda} = z \cdot (h)_{k\mu} \neq 0$. Отсюда по условию леммы $g = h$, $\lambda = \mu$. Таким образом, $(c)_{k\nu}s = (c)_{k\nu}t$. Пусть $zs = 0$. Если $(c)_{k\nu}s \neq 0$, то $(c)_{k\nu}s \in R_k \setminus \{0\}$. Тогда $(c)_{k\nu}ss' = (c)_{k\nu}$ при некотором $s' \in S$, и мы получим: $z = z(c)_{k\nu} = z(c)_{k\nu}ss' = zss' = 0$ — противоречие. Таким образом, $(c)_{k\nu}s \neq 0$. Мы доказали, что ψ инъективно. Следовательно, ψ — изоморфизм. Мы имеем: $zS \cong R_k$ (как S -полигоны). По лемме 7 R_k — проективный полигон. Следовательно, полигон zS также проективен. $\square$

Теперь мы можем доказать основной результат этого параграфа.

ТЕОРЕМА 4. Пусть X — полигон с нулём над вполне 0-простой полугруппой $S = \mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$, $A = X \setminus XS$, $Z = (XS \setminus AS) \cup \{0\}$. Полигон X проективен в том и только том случае, если выполняются условия:

(i) для любых $a, b \in A$ и $s, t \in S$ имеет место импликация

$$as = bt \Rightarrow ((s = t = 0) \vee (a = b) \wedge (s = t));$$

(ii) для любого $z \in Z \setminus \{0\}$ любых $i \in I$, $\lambda, \mu \in \Lambda$, $g, h \in G$ имеет место импликация

$$z \cdot (g)_{i\lambda} = z \cdot (h)_{i\mu} \neq 0 \Rightarrow ((g = h) \wedge (\lambda = \mu)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть X проективен. Тогда, согласно предложению 2 (iii) и лемме 5 полигон $A \cup AS$ также проективен. Возьмем какое-либо множество U , находящееся во взаимно однозначном соответствии с множеством A . Можно считать, что $U = \{u_a | a \in A\}$ и соответствие $a \mapsto u_a$ взаимно однозначно. Пусть $F(U)$ — свободный полигон с нулём с множеством свободных образующих U , т.е. $F(U)$ — множество формальных выражений вида u_a , $u_a s$, 0 (где $u_a \in U$, $s \in S \setminus \{0\}$). Отображение $u_a \mapsto a$ для $a \in A$ продолжается до гомоморфизма $\alpha : F(U) \rightarrow A \cup AS$. Так как $A \cup AS$ — проективный полигон и α — сюръективный гомоморфизм, то существует гомоморфизм $\psi : A \cup AS$ такой, что $\psi\alpha = 1_{A \cup AS}$ (см. рис. 4). Имеем: $a\psi\alpha = a$ для любого $a \in A$. Так как $a \notin XS$, то $a\psi \notin F(U)S$. Это означает, что $a\psi \in U$.

$$\begin{array}{ccc} F(U) & \xrightarrow{\alpha} & A \cup AS \\ & \searrow \psi & \nearrow 1_{A \cup AS} \\ & A \cup AS & \end{array}$$

Рис. 4: Проективный полигон $A \cup AS$

То есть $a\psi = u_a\xi$ для некоторого отображения $\xi : A \rightarrow A$. Так как отображение ψ инъективно, то ξ также инъективно. Пусть $as = bt$ для некоторых $a, b \in A$, $s, t \in S$. Тогда $(as)\psi = (bt)\psi$, а значит, $u_a\xi s = u_b\xi t$. Так как $F(U)$ — свободный полигон с нулём, то такое равенство возможно лишь в следующих случаях: а) $s = t = 0$, б) $s = t \neq 0$, $a\xi = b\xi$. В случае б) получаем ввиду инъективности ξ , что $a = b$. Тем самым доказано (i).

Лемма 5 и предложение 2 показывают, что Z — проективный модуль, а так как $Z = \prod_{\gamma \in \Gamma}^0 z_\gamma S$, то $z_\gamma S$ также проективны. Пусть $z \in Z \setminus \{0\}$. Тогда $z \in z_\gamma S \setminus \{0\}$ при некотором γ . Нетрудно видеть, что тогда $zS = z_\gamma S$. Таким образом, полигон zS — проективный. По лемме 8 мы получаем теперь условие (ii).

Достаточность. Пусть теперь выполнены условия (i) и (ii). Условие (i) показывает, что полигон $A \cup AS$ является свободным полигоном с нулём с множеством свободных образующих

А. Каждое $z_\gamma S$ является проективным S -полигоном ввиду (ii) и леммы 8. По лемме 5 мы получаем теперь, что X — проективный полигон. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 1. *Полигон с нулём X над вполне θ -простой полугруппой $S = \mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$ проективен в том и только том случае, если X изоморфен θ -копроизведению свободного полигона и полигонов R_i . (При этом количество свободных образующих и количество полигонов R_i в θ -копроизведении могут быть равны 0).*

Только что доказанная теорема 4 является обобщением теоремы 13 из [12], в которой описаны проективные полигоны (не обязательно имеющие нуль) над вполне простой полугруппой $S = \mathcal{M}(G, I, \Lambda, P)$. Вначале установим связь между проективностью полигонов над полугруппами и полигонов с нулём над полугруппами с нулём. Пусть X — полигон над полугруппой S . (Полугруппа S произвольная, необязательно вполне простая или вполне θ -простая). Положим $X^0 = X \cup \{0\}$, $S^0 = S \cup \{0\}$ и потребуем выполнения равенств $x \cdot 0 = 0 \cdot s = 0 \cdot 0 = 0$ ($x \in X$, $s \in S$). Тогда X^0 будет полигоном с нулём над полугруппой с нулём S^0 .

ЛЕММА 9. *Полигон X над полугруппой S проективен в том и только том случае, если полигон с нулём X^0 над полугруппой с нулём S^0 является проективным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость.* Предположим, что X проективен. Пусть M, N — полигоны с нулём над полугруппой S^0 , $\alpha : M \rightarrow N$ — сюръективный гомоморфизм и $\varphi : X^0 \rightarrow N$ — произвольный гомоморфизм (см. рис. 5).

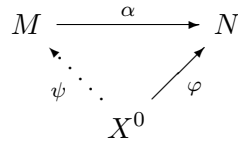


Рис. 5: Проективный полигон X^0

Надо найти $\psi : X^0 \rightarrow M$ такой, что $\psi\alpha = \varphi$. Пусть $\varphi' = \varphi|_X$. Полигоны с нулём M и N будем рассматривать как полигоны над S . Так как X проективен, то существует гомоморфизм $\psi' : X \rightarrow M$ такой, что $\psi'\alpha = \varphi'$. Продолжим гомоморфизм $\psi' : X \rightarrow M$ до гомоморфизма $\psi : X^0 \rightarrow M$, полагая $0\psi = 0$. Тогда получим, что ψ — гомоморфизм полигонов с нулём и $\psi\alpha = \varphi$. Следовательно, X^0 проективен.

Достаточность. Предположим, что X^0 проективен. Пусть M, N — полигоны над S , $\alpha : M \rightarrow N$ — сюръективный гомоморфизм и $\varphi : X \rightarrow N$ — произвольный гомоморфизм. Для полигонов с нулём рассмотрим сюръективный гомоморфизм $\alpha^0 : M^0 \rightarrow N^0$ и гомоморфизм $\varphi^0 : X^0 \rightarrow N^0$ (считаем, что $0\alpha^0 = 0\varphi^0 = 0$). Так как X^0 — проективный полигон с нулём, то существует гомоморфизм $\psi^0 : X^0 \rightarrow M^0$ полигонов с нулём такой, что $\psi^0\alpha^0 = \varphi^0$. Пусть $\psi = \psi^0|_X$ — ограничение ψ^0 на X . Проверим, что $X\psi$ не содержит 0 полигона M^0 . Действительно, если $x \neq 0$ и $x\psi^0 = 0$, то $x\varphi^0 = x\psi^0\alpha^0 = 0$, что невозможно. Таким образом, ψ является гомоморфизмом $X \rightarrow M$, и мы имеем $\psi\alpha = \varphi$. Это доказывает проективность полигона X . $\square$

Теперь теорема 13 из [12] может рассматриваться как следствие теоремы 4 и леммы 9 настоящей работы.

ТЕОРЕМА 5. ([12], теорема 13). *Пусть X — полигон над вполне простой полугруппой $S = \mathcal{M}(G, I, \Lambda, P)$, $A = X \setminus XS$, $Z = XS \setminus AS$. Полигон X проективен в том и только том случае, если выполняются условия:*

- (i) для любых $a, b \in A$ и $s, t \in S$ имеет место импликация $as = bt \Rightarrow a = b \wedge s = t$;

(ii) для любых $z \in Z$, $i \in I$, $g, h \in G$, $\lambda, \mu \in \Lambda$ имеет место импликация

$$z \cdot (g)_{i\lambda} = z \cdot (h)_{i\mu} \Rightarrow g = h \wedge \lambda = \mu.$$

В заключение построим проективное накрытие произвольного полигона X с нулём над вполне 0-простой полугруппой $S = \mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$. Пусть X — такой полигон. Ранее мы видели, что $X = (A \cup AS) \sqcup^0 \coprod_{\gamma \in \Gamma} z_\gamma S$, где $z_\gamma \in XS \setminus AS$. Пусть $U = \{u_a | a \in A\}$ — множество, находящееся во взаимно однозначном соответствии $a \mapsto u_a$ с множеством A . Обозначим через $F(U)$ свободный полигон с нулём над S , т.е. множество формальных выражений вида $u_a, u_a s$ ($a \in A, s \in S \setminus \{0\}$), 0. Напомним, что $R_i = \{(g)_{i\lambda} | g \in G, \lambda \in \Lambda\}$ для $i \in I$.

ТЕОРЕМА 6. Пусть X — произвольный полигон с нулём над вполне 0-простой полугруппой $S = \mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$. Тогда полигон $P(X) = F(U) \sqcup^0 \coprod_{\gamma \in \Gamma} R_i$ вместе с гомоморфизмом

$u_a s \mapsto as$ ($s \in S^1$, где $S^1 = S \cup \{1\}$), $r_\gamma s \mapsto z_\gamma s$ ($s \in S$, $r_\gamma \in R_i$ — такой элемент, что $z_\gamma r_\gamma = z_\gamma$) задают проективное накрытие полигона X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Тот факт, что полигон $P(X)$ проективен, показывает следствие из теоремы 4. Найдём элементы r_γ . Возьмём элемент z_γ . Используя условие $z_\gamma \in XS$, мы ранее показывали, что $z_\gamma \cdot s = z_\gamma$ при некотором $s \in S \setminus \{0\}$. Пусть $s = (g)_{j\lambda}$. Найдём такое $i \in I$, что $p_{\lambda i} \neq 0$. Тогда $(g)_{j\lambda} \cdot (p_{\lambda i}^{-1})_{i\lambda} = (g)_{j\lambda}$, поэтому $z_\gamma \cdot (p_{\lambda i}^{-1})_{i\lambda} = z_\gamma$. Полагаем $r_\gamma = (p_{\lambda i}^{-1})_{i\lambda}$. Отображение $\beta : P(X) \rightarrow X$ теперь выглядит так: $0\beta = 0$, $(u_a s)\beta = as$ ($s \in S^1$), $r_\gamma s = z_\gamma s$ ($s \in S$). Докажем корректность определения отображения β . Пусть $r_\gamma s = r_\gamma t$. Тогда $z_\gamma \cdot r_\gamma s = z_\gamma \cdot r_\gamma t$, а значит, $z_\gamma s = z_\gamma t$. Тот факт, что β — гомоморфизм, проверяется непосредственно. Осталось проверить, что β — минимальный сюръективный гомоморфизм. Пусть P_1 — подполигон полигона $P(X)$ и $P_1 \neq P(X)$. Если $U \not\subseteq P_1$, то при некотором $a \in A$ мы имеем $u_a \notin P_1$. Проверим, что тогда $a \notin P_1\beta$. Действительно, если $a = y\beta$ при некотором $y \in P_1$, то так как $a \notin XS$, то $y \notin P(X)S$, поэтому $y = u_b$ при некотором $b \in A$. Таким образом, $a = u_b\beta = b$. Следовательно, $y = u_a$, т.е. $u_a \in P_1$ — противоречие. Нами доказано, что $U \subseteq P_1$.

Возьмём любое $\gamma \in \Gamma$. Так как $\beta|_{P_1}$ сюръективно, то $z_\gamma = y\beta$ при некотором $y \in (R_i)_\gamma \cap P_1$; здесь $(R_i)_\gamma$ — экземпляр полигона R_i , который имеет номер γ ($\gamma \in \Gamma$). Имеем: $y = r_\gamma s$ при некотором $s \in S$. Так как $z_\gamma \neq 0$, то $y \neq 0$, поэтому $ys' = r_\gamma$ при подходящем $s' \in S$. Таким образом, $r_\gamma \in P_1 s' \subseteq P_1$. Итак, $r_\gamma S \subseteq P_1$ при всех $\gamma \in \Gamma$. Ранее мы видели, что $U \subseteq P_1$, а значит, $U \cup US \subseteq P_1$. В результате получаем $P(X) \subseteq P_1$. Это противоречит тому, что P_1 — собственный подполигон полигона $P(X)$. $\square$

5. Заключение

В данной работе получено полное описание инъективных и проективных полигонов с нулём над вполне 0-простой полугруппой, построены инъективные оболочки и проективные накрытия произвольных полигонов с нулём над вполне 0-простой полугруппой.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Скорняков Л. А. Гомологическая классификация моноидов // Сиб. мат. журн., 1969. Т. 10, No. 5. С. 1139–1143.
2. Kilp M., Knauer U., Mikhalev A.V. Monoids, acts and categories // Berlin: Walter de Gruyter, 2000. 529 p.
3. Berthiaume P. The injective envelope of S-sets // Canad. Math. Bull., 1967. Vol. 10. P. 261–273.

4. Ebrahimi M., Mahmoudi M., Moghaddasi Gh. Injective hulls of acts over left zero semigroups // *Semigroup Forum*, 2007. Vol. 75, No. 1. P. 212-220.
5. Moghaddasi Gh. On injective and subdirectly irreducible S-acts over left zero semigroups // *Turk J. Math.*, 2012. Vol. 36. P. 359-365.
6. Kim J. P. Injective hulls of S-systems over a Clifford semigroup / J. P. Kim, Y. S. Park // *Semigroup Forum*, 1991. Vol. 43. No. 1. P. 19–24.
7. Халиуллина А.Р. Конгруэнции полигонов над полугруппами правых нулей. // *Чебыш. сборник*, 2013. Т. 13., Вып. 4. С. 142-146.
8. Халиуллина А.Р. Условия модулярности решётки конгруэнций полигона над полугруппой правых и левых нулей // *Дальневост. матем. журн.*, 2015. Т. 15., No. 1. С. 102-120.
9. Кожухов И.Б., Халиуллина А.Р. Инъективность и проективность полигонов над сингулярными полугруппами // *Электронные информационные системы*, 2014. Т. 2., No. 2. С. 45-56.
10. Кожухов И. Б, Халиуллина А.Р. О решётках конгруэнций полигонов над прямоугольными связками // *Сб. научн. трудов МИЭТ, посв. 70-летию А.С. Поспелова. М., МИЭТ*, 2016. Т. 2., No. 2. С. 75-82.
11. Avdeyev A. Yu, Kozhukhov I.B. Acts over completely 0-simple semigroups // *Acta Cybernetica*, 2000. V. 14., No. 4. С. 523-531.
12. Кожухов И. Б Петриков А.О. Инъективность и проективность полигонов над вполне простыми полугруппами // *Фундаментальная и прикладная математика (в печати)*.
13. Лаллеман Ж. Полугруппы и комбинаторные приложения. // М.: Мир, 1985. 439 с.
14. Плоткин Б. И, Гринглаз Л.Я., Гварамия А.А. Элементы алгебраической теории автоматов // Москва: Высш. шк., 1994. 192 с.
15. Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп // Москва: Мир, 1972. Т. 1, 2.

REFERENCES

1. Skornyakov, L. A. 1969, "A homological classification of monoids" , *Syberian mat. zhurnal*, vol. 10, no. 5, pp. 1139–1143.
2. Kilp, M., Knauer, U. & Mikhalev, A. V. 2000, "Monoids, acts and categories" , Berlin, Walter de Gruyter, 529 pp.
3. Berthiaume, P. 1967, "The injective envelope of S-sets" , *Canad. Math. Bull.*, vol. 10, pp. 261-273.
4. Ebrahimi, M., Mahmoudi, M. M. & Moghaddasi A. Gh. 2007 "Injective hulls of acts over left zero semigroups" , *Semigroup Forum*, vol. 75, no. 1, pp. 212-220.
5. Moghaddasi, Gh. 2012, "On injective and subdirectly irreducible S-acts over left zero semigroups" , *Turk J. Math.*, vol. 36, pp. 359-365.
6. Kim, J. P. & Park, Y. S. 1991, "Injective Hulls of S-systems over a Clifford Semigroup" , *Semigroup Forum*, vol. 43, no. 1, pp. 19–24.

7. Haliullina, A. R. 2013, "Congruences of acts over right zero semigroups", Chebysh. sbornik, vol. 13, issue 4, pp. 142-146.
8. Khaliullina, A. R. 2015, "Conditions of the modularity of the lattice of a congruence act over a left and right zero semigroup", Dalnevostochniy mat. zhurnal, vol. 15, no. 1 pp. 102-120.
9. Kozhuhov, I.B. & Haliullina, A. R. 2014, "Injectivity and projectivity acts over singular semigroups", Elektronnye informatsionnye sistemy (Electronic Information Systems), vol. 2, no. 2, pp. 45-56.
10. Kozhukhov, I.B. & Haliullina, A. R. 2016, "Considering lattices of congruences of acts over rectangular bands", Sbornik naychnih trudov MIET, posvyashenniy 70-letiyu A. S. Pospelova, Moscow, vol. 2, no. 2, pp. 75-82.
11. Avdeyev, A. Yu. & Kozhukhov, I. B. 2000, "Acts over completely 0-simple semigroups", Acta Cybernetica, vol. 14, no. 4, pp. 523-531.
12. Kozhukhov, I.B. & Petrikov, A.O. 2016, "Injectivity and projectivity of acts over completely simple semigroups", Fundamentalnaya i prikladnaya matematika (Fundamental and Applied Mathematics), (in publishing).
13. Lalleman, G. 1985, "Semigroups and combinatorial applications", Moscow, Mir, pp. 439.
14. Plotkin, B. I., Gringlaz, L. Ya. & Gvaramiya, A. A. 1994, "Elements of an algebraic theory of automata", Moscow, Vysshaya shkola, 192 pp.
15. Clifford, A. & Preston, G. 1972, "The Algebraic Theory of Semigroups", Moscow, Mir, vol. 1, pp. 283.

Национальный исследовательский университет "МИЭТ"

Поступило 06.10.2016 г.

Принято в печать 12.12.2016 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 17 Выпуск 4

УДК 511.321

DOI 10.22405/2226-8383-2016-17-4-79-109

МЕТОДЫ ОЦЕНОК КОРОТКИХ СУММ КЛООСТЕРМАНА¹

М. А. Королёв (г. Москва)

Аннотация

Настоящий обзор представляет собой развёрнутое содержание мини-курса, прочитанного автором в ноябре 2015 г. во время “Китайско-Российского симпозиума по тригонометрическим суммам и суммам множеств”. Это мероприятие, проходившее в Академии математики и системных наук (Пекин), было организовано профессорами Чаохуа Жиа (Институт математики Китайской академии наук) и Ке Гонгом (Университет Хенань), которым автор приносит глубокую благодарность за всяческую поддержку и гостеприимство.

Обзор состоит из Введения, трёх частей и Заключения. Во Введении даются определения и приводятся основные факты, связанные с оценками полных сумм Клоостермана.

В первой части излагается метод оценки неполных сумм Клоостермана по специальному модулю, равному растущей степени фиксированного простого числа. Этот метод основан на идее А. Г. Постникова, которая сводит оценку таких сумм к оценкам тригонометрических сумм с многочленом в показателе экспоненты с помощью теоремы о среднем И. М. Виноградова.

Во второй части излагается метод А. А. Карацубы оценок неполных сумм Клоостермана по произвольному модулю, который основан на весьма точной оценке числа решений симметричного сравнения, содержащего обратные величины по заданному модулю. Эта оценка играет в рассматриваемых здесь вопросах ту же роль, что и теорема о среднем И. М. Виноградова при оценке соответствующих тригонометрических сумм.

В третьей части излагается метод Ж. Бургейна и М. З. Гараева, в основе которого лежит глубокая теорема об “оценке сумм-произведений”, а также уточнение оценки А. А. Карацубы числа решений симметричного сравнения.

В Заключении сформулирован ряд новых результатов об оценках коротких сумм Клоостермана, полученных в последние годы, доказательства которых не вошли в настоящий обзор.

Ключевые слова: обратные вычеты, неполные суммы Клоостермана, метод Постникова, метод Карацубы, метод Бургейна-Гараева, теорема Виноградова о среднем, оценка сумм-произведений.

Библиография: 57 названий.

METHODS OF ESTIMATING OF INCOMPLETE
KLOOSTERMAN SUMS

M. A. Korolev (Moscow)

Abstract

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-11-00433)

This survey contains enlarged version of a mini-course which was read by the author in November 2015 during “Chinese - Russian workshop of exponential sums and sumsets”. This workshop was organized by professors Chaohua Jia (Institute of Mathematics, Academia Sinica) and Ke Gong (Henan University) in Academy of Mathematics and System Science, CAS (Beijing). The author is warmly grateful to them for the support and hospitality.

The survey contains the Introduction, three parts and Conclusion. The basic definitions and results concerning the complete Kloosterman sums are given in the Introduction.

The method of estimating of incomplete Kloosterman sums to moduli equal to the raising power of a fixed prime is described in the first part. This method is based on one idea of A. G. Postnikov which reduces the estimate of such sums to the estimate of the exponential sums with polynomial by I. M. Vinogradov’s mean value theorem.

A. A. Karatsuba’s method of estimating of incomplete sums to an arbitrary moduli is described in the second part. This method is based on a very precise estimate of the number of solutions of one symmetric congruence involving inverse residues to a given modulus. This estimate plays the same role in this problems under considering as Vinogradov’s mean value theorem in the estimating of corresponding exponential sums.

The method of J. Bourgain and M. Z. Garaev is described in the third part. This method is based on very deep “sum-product estimate” and on the improvement of A. A. Karatsuba’s bound for the number of solutions of symmetric congruence.

The Conclusion contains a series of recent results concerning the estimates of short Kloosterman sums.

Keywords: inverse residues, incomplete Kloosterman sums, method of Postnikov, method of Karatsuba, method of Bourgain and Garaev, Vinogradov’s mean value theorem, sum-product estimate.

Bibliography: 57 titles.

Введение

Пусть $q \geq 2$ — целое число, и пусть $(m, q) = 1$. Всюду ниже через m^* , $\overline{m}$ и $1/m$ будем обозначать вычет, обратный к m по модулю q : $mm^* \equiv m\overline{m} \equiv 1 \pmod{q}$. Пусть, далее, $(a, q) = 1$. Выражение

$$S(q) = S(q; a, b) = \sum_{\substack{m=1 \\ (m, q)=1}}^q e_q(am^* + bm) = \sum_{m=1}^{q'} e_q(am^* + bm), \quad e_q(v) = e^{2\pi i v/q},$$

называется *полной* суммой Kloostermana по модулю q . Пусть $\mathcal{A}$ — подмножество приведённой системы вычетов $\mathbb{Z}_q^*$ по модулю q с числом элементов $|\mathcal{A}| < \varphi(q)$. Сумму вида

$$S(q; \mathcal{A}) = S(q; \mathcal{A}; a, b) = \sum_{m \in \mathcal{A}} e_q(am^* + bm)$$

будем называть *неполной* суммой Kloostermana. В случае, когда $|\mathcal{A}| < \sqrt{q}$, сумму $S(q; \mathcal{A})$ условимся называть *короткой*. Для решения многих задач теории чисел необходимы нетривиальные оценки коротких сумм $S(q; \mathcal{A})$ вида $|S(q; \mathcal{A})| < |\mathcal{A}|\Delta$, где $\Delta = \Delta(q) \rightarrow 0$. Прежде чем перейти к изложению методов оценок таких сумм, упомянем основные результаты, связанные с суммами Kloostermana $S(q; \mathcal{A})$, для которых $\sqrt{q} \ll |\mathcal{A}| \leq q$. В свою очередь, их оценка опирается на оценки полных сумм $S(q)$.

ТЕОРЕМА 1. *Полные суммы Kloostermana $S(q)$ мультипликативны по q .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, пусть $q = q_1 q_2$, где $(q_1, q_2) = 1$, и пусть y и z пробегают приведённые системы вычетов по модулям q_1 и q_2 соответственно. Тогда величина

$x = yq_2 + zq_1$ пробегает приведённую систему вычетов $\mathbb{Z}_q^*$ по модулю q . Определим величину w соотношением $w = \bar{y}\bar{q}_2^2q_2 + \bar{z}\bar{q}_1^2q_1$, в котором

$$y\bar{y} \equiv q_2\bar{q}_2 \equiv 1 \pmod{q_1}, \quad z\bar{z} \equiv q_1\bar{q}_1 \equiv 1 \pmod{q_2}.$$

Тогда

$$xw \equiv y\bar{y}(q_2\bar{q}_2)^2 \equiv 1 \pmod{q_1}, \quad xw \equiv z\bar{z}(q_1\bar{q}_1)^2 \equiv 1 \pmod{q_2},$$

так что $xw \equiv 1 \pmod{q}$. Следовательно, $w \equiv x^* \pmod{q}$. Таким образом,

$$\begin{aligned} S(q; a, b) &= \sum_{y=1}^{q_1'} \sum_{z=1}^{q_2'} e_{q_1q_2}(a(\bar{y}\bar{q}_2^2q_2 + \bar{z}\bar{q}_1^2q_1) + b(yq_2 + zq_1)) = \\ &= \sum_{y=1}^{q_1'} e_{q_1}(a_1\bar{y} + by) \sum_{z=1}^{q_2'} e_{q_2}(a_2\bar{z} + bz) = S(q_1; a_1, b)S(q_2; a_2, b), \end{aligned}$$

где $a_1 \equiv a\bar{q}_2^2 \pmod{q_1}$, $a_2 \equiv a\bar{q}_1^2 \pmod{q_2}$. $\square$

Итак, достаточно получить оценку $|S(q)|$ для случая, когда $q = p^n$, где p — простое, $n \geq 1$. Если $n \geq 2$, то суммы $S(p^n)$ вычисляются в явном виде (см. [1], а также [2], [3]). В этом можно убедиться, если представить переменную суммирования m в виде $k + pl$, где величины k и l независимо друг от друга пробегает промежутки $1 \leq k < p$, $0 \leq l < p^{n-1}$, после чего рассмотреть отдельно случаи чётных и нечётных n и p соответственно. При этом оказывается, что $|S(p^n)| \leq cp^{n/2}$ для некоторой постоянной c , такой, что $c \leq \tau(p^n)$ (здесь и далее через $\tau(q)$ обозначается функция делителей).

Наиболее сложным оказывается случай, когда $q = p$ — простое число. Первая нетривиальная оценка величины $S(p)$ была найдена Г. Д. Клоостерманом [4].

ТЕОРЕМА 2. Для простого p справедлива оценка $|S(p)| \leq 3^{1/4}p^{3/4}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(t, p) = 1$. Так как m и tm одновременно пробегает приведённую систему вычетов по модулю p , то

$$|S(p)|^2 = \left| \sum_{m=1}^{p-1} e_p(at^*m^* + btm) \right|^2.$$

Суммируя обе части по t , получим:

$$(p-1)|S(p)|^2 = \sum_{t=1}^{p-1} \left| \sum_{m=1}^{p-1} e_p(at^*m^* + btm) \right|^2.$$

Далее, применяя неравенство Коши, будем иметь:

$$\begin{aligned} (p-1)^2|S(p)|^4 &\leq (p-1) \sum_{t=1}^{p-1} \left| \sum_{m=1}^{p-1} e_p(at^*m^* + btm) \right|^4 \leq (p-1) \sum_{t_1, t_2=1}^p \left| \sum_{m=1}^{p-1} e_p(at_1m^* + bt_2m) \right|^4 = \\ &= (p-1) \sum_{t_1, t_2=1}^p \sum_{m_1, m_2, n_1, n_2=1}^{p-1} e_p(at_1(m_1^* + m_2^* - n_1^* - n_2^*) + bt_2(m_1 + m_2 - n_1 - n_2)) = \\ &= p^2(p-1)I(p), \end{aligned}$$

где $I(p)$ обозначает число решений системы сравнений

$$\begin{cases} m_1^* + m_2^* \equiv n_1^* + n_2^* \pmod{p}, \\ m_1 + m_2 \equiv n_1 + n_2 \pmod{p}. \end{cases}$$

Зафиксируем пару (m_1, m_2) . Тогда

$$\begin{cases} n_1^* + n_2^* \equiv \lambda \pmod{p}, \\ n_1 + n_2 \equiv \mu \pmod{p} \end{cases} \quad \text{или, что то же,} \quad \begin{cases} \lambda n_1 n_2 \equiv \mu \pmod{p}, \\ n_1 + n_2 \equiv \mu \pmod{p} \end{cases}$$

для соответствующих λ и μ . Если $\lambda \equiv 0 \pmod{p}$, то $\mu \equiv 0 \pmod{p}$, так что $m_2 \equiv -m_1 \pmod{p}$, $n_2 \equiv -n_1 \pmod{p}$. Вклад от таких решений в $I(p)$ равен $(p-1)^2$. Если же $\lambda \not\equiv 0 \pmod{p}$, то $\mu \not\equiv 0 \pmod{p}$ и $\lambda n_1^2 - \lambda \mu n_1 + \mu \equiv 0 \pmod{p}$. Последнее сравнение имеет не более двух решений, так что окончательно находим:

$$I(p) \leq (p-1)^2 + 2(p-1)(p-2) < 3p(p-1)$$

и, следовательно,

$$(p-1)^2 |S(p)|^4 \leq p^2(p-1) \cdot 3p(p-1), \quad |S(p)|^4 \leq 3p^3. \quad \square$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Различные варианты доказательства оценки $S(p) \ll p^{3/4}$ были предложены И. М. Виноградовым [5], [7], Д. Р. Хизбрауном [24], Д. И. Толевым [8].

Впоследствии показатель $3/4$ в теореме 2 был уменьшен Г. Салье [9] и независимо Г. Дэвенпортом [10] до $2/3$. В 1948 г. А. Вейль [11], используя методы алгебраической геометрии, получил наилучшую возможную оценку $|S(p)| \leq 2\sqrt{p}$. Элементарное (хотя всё ещё достаточно сложное) доказательство этого факта было найдено С. А. Степановым [12] (также см. [13]).

Из перечисленных выше результатов и теоремы 1 следует неравенство

$$|S(q; a, b)| \leq \tau(q)\sqrt{q}. \quad (1)$$

С его помощью можно оценить и неполную сумму Клоостермана в случае, когда переменная суммирования пробегает сплошной интервал. Имеет место

ТЕОРЕМА 3. Пусть $1 < x < q$. Тогда для суммы

$$S(x) = S(q; x) = \sum_{\substack{1 \leq m \leq x \\ (m, q) = 1}} e_q(am^* + bm).$$

из (1) следует оценка

$$|S(x)| \leq \tau(q)\sqrt{q}(\log q + 1). \quad (2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, полагая $N = [x]$, будем иметь:

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{m=1}^q \left(\sum_{\ell=1}^N \frac{1}{q} \sum_{|c| \leq q/2} e_q(c(m-\ell)) \right) e_q(am^* + bm) = \\ &= \frac{1}{q} \sum_{|c| \leq q/2} \left(\sum_{\ell=1}^N e_q(-c\ell) \right) \sum_{m=1}^q e_q(am^* + (b+c)m) = \\ &= \frac{N}{q} S(q; a, b) + \frac{1}{q} \sum_{1 \leq |c| \leq q/2} e_q(-c) \frac{e_q(-cN) - 1}{e_q(-c) - 1} S(q; a, b+c). \end{aligned}$$

Переходя к неравенствам, получим:

$$\begin{aligned} |S(x)| &\leq \left(\frac{N}{q} + \frac{1}{q} \sum_{1 \leq |c| \leq q/2} \left(\sin \frac{\pi |c|}{q} \right)^{-1} \right) \tau(q) \sqrt{q} \leq \\ &\leq \left(1 + \frac{2}{q} \sum_{1 \leq c \leq q/2} \frac{q}{2c} \right) \tau(q) \sqrt{q} \leq \tau(q) \sqrt{q} (\log q + 1). \quad \square \end{aligned}$$

Поскольку $\tau(q) \ll_{\varepsilon} q^{\varepsilon}$ для любого фиксированного $\varepsilon > 0$, то оценка (2) нетривиальна при $x \geq q^{0.5+\varepsilon}$.

В начале 1990-х гг. А. А. Карацуба [14] – [16] разработал новый метод, с помощью которого ему удалось получить первые нетривиальные оценки коротких сумм Клоостермана с числом слагаемых порядка q^{α} , где $0 < \alpha < 0.5$ (см. также [17] – [19]). Метод Карацубы излагается далее в §2.

А. А. Карацубе принадлежит и важное замечание, согласно которому в случае специального модуля вида $q = p^n$, где p – фиксированное простое число, а $n \rightarrow +\infty$, оценки неполных сумм Клоостермана могут быть получены с помощью метода А. Г. Постникова [20]. Число слагаемых в таких суммах может иметь порядок $e^{c(\log q)^{2/3}}$, где c – достаточно большая положительная постоянная. Этому методу посвящён §1.

Первые оценки сумм $S(x)$, полученные с помощью метода Карацубы, давали нетривиальное понижение при $x \geq q^{\varepsilon}$, где $\varepsilon > 0$ – произвольное фиксированное число (см. [17]). Нижняя граница этого диапазона была впоследствии снижена до такой: $x \geq e^{(\log q)^{4/5}(\log \log q)^5}$ (см. [22]). Однако А. А. Карацуба неоднократно высказывал предположение о том, что его метод позволяет получать нетривиальные оценки сумм $S(x)$ по сплошному промежутку вида $1 \leq n \leq x$ уже при $x \geq e^{(\log q)^{2/3+\varepsilon}}$. Первые оценки столь коротких сумм для простого модуля q были найдены Ж. Бургейном и М. З. Гараевым [23] (2012). Они опирались на очень глубокую и сложную теорему Бургейна об оценке полилинейной тригонометрической суммы достаточно общего вида, а также на некоторые факты из геометрии чисел. набросок метода Бургейна и Гараева излагается в §3.

По ряду причин мы практически не касаемся здесь приложений сумм Клоостермана к задачам теории чисел. Краткий обзор такого рода приложений можно найти в статье Д. Р. Хизбрауна [24] и монографии А. В. Устинова [25]. Также представляется уместным упомянуть серию незаслуженно забытых работ И. М. Виноградова [5] – [7], [26], [27], посвящённых оценкам сумм Клоостермана и некоторых их обобщений. Для простоты изложения в §§2,3 мы рассматриваем лишь случай простого модуля q . Это позволяет избежать ряда технических трудностей.

1. Метод Постникова

1.1. Предварительные замечания

В 1955 г. А. Г. Постников [20] обнаружил, что индекс числа $1 + pu$ по модулю $q = p^n$, где p – нечётное простое, представляется некоторым полиномом степени $(n-1)$ от переменной u :

$$\frac{\text{ind}(1 + pu)}{p-1} \equiv f(u) \pmod{p^{n-1}}, \quad f(u) = a_1 u + a_2 u^2 + \dots + a_{n-1} u^{n-1}. \quad (3)$$

Поскольку всякий неглавный характер χ по модулю q имеет вид

$$\chi(a) = \exp \left(\frac{2\pi i c \text{ind}(a)}{\varphi(p^n)} \right) = \exp \left(\frac{2\pi i c \text{ind}(a)}{p^{n-1}(p-1)} \right), \quad 1 \leq c < \varphi(p^n),$$

то соотношение (3) сводит многие задачи, связанные с оценками сумм характеров Дирихле к оценкам тригонометрических сумм с многочленом в экспоненте. К последним же можно применить всю мощь метода И. М. Виноградова. Это обстоятельство позволило, в частности, построить примеры сумм вида

$$W = W_q(\chi; N, M) = \sum_{a=M+1}^{M+N} \chi(a),$$

которые допускают нетривиальную оценку уже при очень малом числе N слагаемых. Так, теорема Постникова позволила получать такие оценки в случае, когда $N \geq e^{c(\log q)^{3/4}(\log \log q)^{3/4}}$, $q = p^n$, $p \rightarrow +\infty$ и показатель n должным образом зависит от p (см. [20], [21] а также работы [28], [29], в которых оценка Постникова распространялась на случай фиксированного простого $p \geq 3$ и $q = p^n$, $n \rightarrow +\infty$). Последующие работы А. А. Карацубы [30] и В. Н. Чубарикова [31] позволили заменить нижнюю границу N величиной $e^{c(\log q)^{2/3}(\log \log q)^{1/3}}$. Для сравнения: в случае, когда модуль q — простое число, наилучшей для $W_q(\chi; N, M)$ (в смысле длины промежутка суммирования) остаётся оценка Д. Берджесса вида $|W| \leq Nq^{-c\epsilon^2}$, справедливая при $N \geq q^{1/4+\epsilon}$ (см. [32]–[34]).

Ещё одним примером задачи, в которой специфика модуля позволяет получать очень точные результаты, является задача об оценке суммы значений неглавного характера Дирихле на последовательности “сдвинутых” простых чисел, т.е. суммы

$$V = V_q(\chi; N, a) = \sum_{p \leq N} \chi(p + a),$$

где $(a, q) = 1$. В случае простого модуля q наилучшей на сегодняшний день является оценка $V \ll Nq^{-c\epsilon^2}$, полученная А. А. Карацубой [35] в предположении $N \geq q^{1/2+\epsilon}$. В то же время в случае нечётного простого p и $q = p^n$ та сумма допускает нетривиальную оценку уже при $N \geq e^{c(\log q)^{2/3}}$ (см. работы [36], [37], в которых такие оценки получены при $N \geq q^\epsilon$).

Формула (3) является “конечным” аналогом разложения

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots, \quad |x| < 1.$$

“Конечный” аналог ряда

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots, \quad |x| < 1,$$

для величины $(1+pu)^*$ имеет более простой вид (лемма 1). Поэтому, применяя к неполным суммам Клоостермана по модулю $q = p^n$ технику всех перечисленных работ, можно получать их нетривиальные оценки в случаях, когда длина N суммы очень мала по сравнению с модулем.

Отметим, что сумма Клоостермана является простейшим примером тригонометрической суммы с рациональной функцией, т.е. суммы вида

$$\sum_{c < \nu \leq c+N} e_q\left(\frac{f(\nu)}{g(\nu)}\right),$$

где f, g — взаимно простые полиномы степеней $k \geq 1$, $\ell \geq 1$. Для таких сумм С.А. Степанов и И.Е. Шпарлинский в случае $q = p^n$ в работе [38] получили оценки, нетривиальные при $N \geq q^\epsilon$ (фактически — уже при $N \geq e^{(\log q)^{2/3+\epsilon}}$).

Ниже мы получим ряд оценок неполных сумм Клоостермана и их аналогов для случая, когда модуль $q = p^n$ является растущей степенью фиксированного нечётного простого числа

p . Отметим, что наряду с аналогом формулы (3) Постникова и теоремы “о среднем” И. М. Виноградова мы пользуемся т.н. “сдвигом” переменной суммирования. Этот приём восходит к И. М. Виноградову, но впервые был применён к задачам с характерами Дирихле по модулю p^n А. А. Карацубой.

1.2. Вспомогательные утверждения

ЛЕММА 1. Пусть p — простое число, $n \geq 2$, $q = p^n$, и пусть $1 \leq s \leq n$. Тогда

$$(1 + up^s)^* \equiv 1 - up^s + (up^s)^2 - \dots + (-1)^m (up^s)^m \pmod{q},$$

где m — наименьшее целое, удовлетворяющее неравенству $(m+1)s \geq n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение леммы следует из легко проверяемого соотношения

$$(1 + up^s)(1 - up^s + (up^s)^2 - \dots + (-1)^m (up^s)^m) \equiv 1 \pmod{q}.$$

ЛЕММА 2. Пусть a_n, b_n , $n = 1, 2, \dots, N$, — произвольные комплексные числа, $k \geq 2$. Тогда

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n=1}^N |a_n| \right)^k &\leq N^{k-1} \sum_{n=1}^N |a_n|^k; \\ \left(\sum_{n=1}^N |a_n b_n| \right)^k &\leq \left(\sum_{n=1}^N |a_n| \right)^{k-1} \sum_{n=1}^N |a_n| |b_n|^k; \\ \left(\sum_{n=1}^N |a_n b_n| \right)^2 &\leq \left(\sum_{n=1}^N |a_n|^2 \right) \left(\sum_{n=1}^N |b_n|^2 \right). \end{aligned}$$

ЛЕММА 3. Пусть $P \geq 1, \alpha$ — произвольные вещественные числа. Тогда

$$\left| \sum_{1 \leq n \leq P} e(\alpha n) \right| \leq \min \left(P, \frac{1}{2\|\alpha\|} \right),$$

где через $\|\alpha\|$ обозначено расстояние от α до ближайшего целого числа.

ЛЕММА 4. Пусть

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (a, q) = 1, \quad q \geq 1, \quad |\theta| \leq 1.$$

Тогда для любых вещественных чисел $\beta, U > 0, P \geq 1$ справедливо неравенство

$$\sum_{1 \leq n \leq P} \min(U, \|\alpha n + \beta\|^{-1}) \leq 6 \left(\frac{P}{q} + 1 \right) (U + q \log q).$$

Обозначим через $J_{k,n}(P)$ число решений системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + \dots + x_k = x_{k+1} + \dots + x_{2k}, \\ \dots \\ x_1^n + \dots + x_k^n = x_{k+1}^n + \dots + x_{2k}^n \end{cases}$$

в целых числах $1 \leq x_1, \dots, x_{2k} \leq P$.

ЛЕММА 5 (ТЕОРЕМА И.М. ВИНОГРАДОВА “О СРЕДНЕМ”). Пусть $\tau \geq 1$, $k \geq n\tau$, $P \geq 1$ — целые числа. Тогда

$$J_{k,n}(P) \leq D(n, \tau) P^{2k - \Delta(n; \tau)},$$

где

$$D(n, \tau) = (n\tau)^{6n\tau} (2n)^{4n(n+1)\tau}, \quad \Delta(n, \tau) = \frac{n(n+1)}{2} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n} \right)^\tau \right).$$

Доказательство лемм 2–5, см., например, в книге А. А. Карацубы [39].

1.3. Основная теорема

ТЕОРЕМА 4. Пусть $p \geq 2$ — фиксированное простое число, $(a, p) = 1$, $n \geq 72$, $q = p^n$, u пусть $N = q^{1/\varrho}$, где $3 \leq \varrho \leq n/24$. Тогда для суммы

$$S = \sum'_{\mu < \nu \leq \mu + N} e_q(a\nu^* + b\nu)$$

справедлива оценка $|S| \leq 6N^{1-c/\varrho^2}$, $c = 13^{-4}$, равномерная по параметру μ , $1 \leq \mu \leq q$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не ограничивая общности, можем считать, что $\mu \equiv 0 \pmod{p}$. Выполнения этого условия можно добиться сдвигом области суммирования на величину, не превосходящую $0.5p$. Далее, будем считать сперва, что $\mu + N < q$. Положим $h = [N^{0.25}]$, $s = [n/(4\varrho)] + 1$. Тогда

$$\begin{aligned} S &= \sum'_{1 \leq \nu + p^s xy \leq N} e_q(a(\nu + \mu + p^s xy)^* + b(\nu + \mu + p^s xy)) = \\ &= e_q(b(\nu + \mu)) \sum'_{1 \leq \nu \leq N} e_q(a(\nu + \mu + p^s xy)^* + bp^s xy) + 2\theta p^s xy \end{aligned}$$

для любых $1 \leq x, y \leq h$ и некоторого $|\theta| \leq 1$. Суммируя по x, y , будем иметь:

$$|S| \leq \frac{1}{h^2} \sum'_{1 \leq \nu \leq N} \left| \sum_{x, y=1}^h e_q(a(\nu + \mu + p^s xy)^* + bp^s xy) \right| + 2p^s h^2.$$

Далее, выберем и зафиксируем то значение ν , для которого модуль соответствующей суммы по x, y будет наибольшим, и положим $u = (\mu + \nu)^*$. Так как $p \nmid \mu$ и $(\nu, p) = 1$ то $(u, p) = 1$. Следовательно,

$$|S| \leq Nh^{-2} \left| \sum_{x, y=1}^h e_q(a(\bar{u} + p^s xy)^* + bp^s xy) \right| + 2p^s h^2.$$

Возьмём теперь $m = [4\varrho] + 1$. Тогда $(m+1)s \geq n$, так что в силу леммы 1 имеем

$$a(\bar{u} + p^s xy)^* \equiv au - au^2 p^s xy + au^3 p^{2s} (xy)^2 - \dots + (-1)^m au^{m+1} p^{ms} (xy)^m \pmod{q}.$$

Значит, $|S| \leq Nh^{-2}|W| + 2p^s h^2$, где

$$\begin{aligned} W &= \sum_{x, y=1}^h e(\alpha_1 xy + \alpha_2 (xy)^2 + \dots + \alpha_m (xy)^m), \\ \alpha_r &= \frac{a_r}{q_r}, \quad q_r = p^{n-rs}, \quad a_1 \equiv b - au^2 \pmod{q}, \quad a_r \equiv a(-u)^{r+1} \pmod{q}, \quad r \geq 2, \end{aligned}$$

причём $(a_r, q_r) = 1$ при $r \geq 2$. Возьмём некоторое целое $\tau \geq 1$ и обозначим $k = m\tau$. Согласно лемме 2,

$$\begin{aligned} |W|^{2k} &\leq h^{2k-1} \sum_{x=1}^h \left| \sum_{y=1}^h e(\alpha_1 xy + \alpha_2 (xy)^2 + \dots + \alpha_m (xy)^m) \right|^{2k} = \\ &= h^{2k-1} \sum_{x=1}^h \sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_m} J_{k,m}(\lambda_1, \dots, \lambda_m) e(\alpha_1 \lambda_1 x + \alpha_2 \lambda_2 x^2 + \dots + \alpha_m \lambda_m x^m), \end{aligned}$$

где $J_{k,m}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ — число решений системы уравнений

$$\begin{cases} y_1 + \dots + y_k = y_{k+1} + \dots + y_{2k} + \lambda_1, \\ \dots \\ y_1^m + \dots + y_k^m = y_{k+1}^m + \dots + y_{2k}^m + \lambda_m \end{cases} \quad (4)$$

в целых числах $1 \leq y_1, \dots, y_{2k} \leq h$. Возводя обе части неравенства

$$|W|^{2k} \leq h^{2k-1} \sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_m} J_{k,m}(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \left| \sum_{x=1}^h e(\alpha_1 \lambda_1 x + \alpha_2 \lambda_2 x^2 + \dots + \alpha_m \lambda_m x^m) \right|$$

в степень $2k$ и применяя лемму 2, будем иметь:

$$\begin{aligned} |W|^{4k^2} &\leq h^{2k(2k-1)} \left(\sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_m} J_{k,m}(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \right)^{2k-1} \times \\ &\times \sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_m} J_{k,m}(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \left| \sum_{x=1}^h e(\alpha_1 \lambda_1 x + \alpha_2 \lambda_2 x^2 + \dots + \alpha_m \lambda_m x^m) \right|^{2k}. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_m} J_{k,m}(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = h^{2k}, \quad J_{k,m}(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \leq J_{k,m}(h),$$

то

$$|W|^{4k^2} \leq h^{4k(2k-1)} J_{k,m}(h) \sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_m} \left| \sum_{x=1}^h e(\alpha_1 \lambda_1 x + \alpha_2 \lambda_2 x^2 + \dots + \alpha_m \lambda_m x^m) \right|^{2k}.$$

Из (4) следует, что $|\lambda_r| < \Lambda_r = kh^r$, $r = 1, \dots, m$. Суммируя теперь по сплошным интервалам вида $|\lambda_r| < \Lambda_r$ в последнем соотношении и пользуясь леммой 3, получим:

$$\begin{aligned} |W|^{4k^2} &\leq h^{4k(2k-1)} J_{k,m}(h) \sum_{\substack{|\lambda_r| < \Lambda_r \\ r=1, \dots, m}} \sum_{\mu_1, \dots, \mu_m} J_{k,m}(\mu_1, \dots, \mu_m) e(\alpha_1 \lambda_1 \mu_1 + \dots + \alpha_m \lambda_m \mu_m) \leq \\ &\leq h^{4k(2k-1)} J_{k,m}(h) \sum_{\mu_1, \dots, \mu_m} J_{k,m}(\mu_1, \dots, \mu_m) \prod_{r=1}^m \left| \sum_{|\lambda_r| < \Lambda_r} e(\alpha_r \lambda_r \mu_r) \right| \leq \\ &\leq h^{4k(2k-1)} J_{k,m}^2(h) \prod_{r=1}^m \sum_{|\mu_r| < \Lambda_r} \left| \sum_{|\lambda_r| < \Lambda_r} e(\alpha_r \lambda_r \mu_r) \right| \leq \\ &\leq h^{4k(2k-1)} J_{k,m}^2(h) \prod_{r=1}^m \sum_{|\mu_r| < \Lambda_r} \min \left(2\Lambda_r, \frac{1}{\|\alpha_r \mu_r\|} \right). \end{aligned}$$

В силу леммы 4, сумма по μ_r не превосходит

$$\begin{aligned} 6 \left(\frac{2\Lambda_r}{q_r} + 1 \right) (2\Lambda_r + q_r \log q_r) &< (2\Lambda_r)^2 \delta_r, \\ \delta_r &= 6(\log q) \left(\frac{1}{\Lambda_r} + \frac{1}{q_r} + \frac{q_r}{4\Lambda_r^2} \right) = 6(\log q) \left(\frac{1}{\sqrt{q_r}} + \frac{\sqrt{q_r}}{2\Lambda_r} \right)^2. \end{aligned}$$

Вместе с тем, эта сумма не превосходит, очевидно, $(2\Lambda_r)^2$. Поэтому

$$|W|^{4k^2} \leq h^{4k(2k-1)} J_{k,m}^2(h) \Delta \prod_{r=1}^m (2\Lambda_r)^2, \quad \Delta = \prod_{r=1}^m \Delta_r,$$

где $\Delta_r = \min(1, \delta_r)$.

Далее, полагая $k = m\tau$ в лемме 5, находим, что

$$J_{k,m}(h) \leq k^{6k}(2m)^{4k(m+1)}h^{2k - \frac{m(m+1)}{2}}\left(1 - \left(1 - \frac{1}{m}\right)^\tau\right).$$

Поскольку

$$\prod_{r=1}^m (2\Delta_r)^2 = (2k)^{2m}h^{m(m+1)},$$

то

$$|W|^{4k^2} \leq k^{12k}(2k)^{2m}(2m)^{8k(m+1)}h^{8k^2+m(m+1)}\left(1 - \frac{1}{m}\right)^\tau \Delta.$$

Пусть теперь $r_1 = [2\varrho], r_2 = [3\varrho]$, и пусть $r_1 < r \leq r_2$. Тогда

$$n \leq r \frac{n}{2\varrho} \leq r \left(s + \frac{n}{4\varrho}\right), \quad \text{откуда} \quad n - rs \leq \frac{rn}{4\varrho}, \quad q_r = p^{n-rs} \leq p^{\frac{rn}{4\varrho}} = N^{r/4} \leq h^r,$$

так что

$$q_r \leq 2\Delta_r \quad \text{и} \quad \frac{\sqrt{q_r}}{2\Delta_r} < \frac{1}{\sqrt{q_r}}.$$

Поэтому при любом r , $r_1 < r \leq r_2$, выполняется оценка:

$$\delta_r < 6(\log q) \left(\frac{1}{\sqrt{q_r}} + \frac{1}{\sqrt{q_r}} \right)^2 = 24(\log q)q_r^{-1} = 24(\log q)p^{rs-n}.$$

Так находим:

$$\Delta < \prod_{r=r_1+1}^{r_2} 24(\log q)p^{rs-n} = (24 \log q)^{r_2-r_1} p^{(r_2-r_1)v},$$

где

$$v = \frac{s}{2}(r_1 + r_2 + 1) - n \leq \frac{1}{2} \left(\frac{n}{4\varrho} + 1 \right) (5\varrho + 3) - n = -\frac{3n}{8} + \frac{3n}{8\varrho} + \frac{5\varrho}{2} + \frac{3}{2}.$$

По условию теоремы, $3 \leq \varrho n/24$. Поэтому

$$\frac{3n}{8\varrho} \leq \frac{n}{8}, \quad \frac{5\varrho}{2} + \frac{3}{2} \leq \frac{5n}{48} + \frac{3}{2} \leq \frac{n}{8}, \quad \text{так что} \quad v \leq -\frac{n}{8}.$$

Замечая, что

$$r_2 - r_1 \geq \varrho - 1 \geq \frac{2\varrho}{3}$$

будем иметь:

$$\Delta < (24(\log q)p^{-n/8})^{r_2-r_1} = (24(\log q)q^{-1/8})^{r_2-r_1} < q^{-\frac{1}{10}(r_2-r_1)} < q^{-\frac{\varrho}{15}}.$$

Положим теперь $\tau = \kappa m$, $\kappa = 8$. Тогда

$$m(m+1) \left(1 - \frac{1}{m}\right)^\tau < e^{-\kappa} m(m+1) < 2e^{-\kappa} m^2,$$

$$h^{m(m+1)} \left(1 - \frac{1}{m}\right)^\tau < (2N)^{0.5e^{-\kappa}m^2} \leq (2N)^{10e^{-\kappa}\varrho^2} < N^{\frac{\varrho^2}{240}} = q^{\frac{\varrho}{240}},$$

откуда

$$|W|^{4k^2} \leq k^{12k}(2k)^{2m}(2m)^{16km}h^{8k^2}q^{-\frac{\varrho}{16}}.$$

Поскольку $k = 8m^2$, $m \geq 4\varrho \geq 12$, то

$$|W| < 2.7h^2q^{-\frac{\varrho}{64k^2}} < 2.7h^2q^{-c/\varrho^3} = 2.7h^2N^{-c/\varrho^2},$$

где $c = 13^{-4}$. Наконец, замечая, что

$$p^sh^2 \leq p^{\frac{n}{4\varrho}+1}\sqrt{N} \leq N^{\frac{3}{4}+\frac{\varrho}{n}} \leq N^{\frac{3}{4}+\frac{1}{24}},$$

находим:

$$|S| \leq 2.7N^{1-c/\varrho^2} + 2N^{19/24} < 3N^{1-c/\varrho^2}.$$

Если μ таково, что $q < \mu + N < 2q$, то исходную сумму можно разбить на две, каждая из которых оценивается подобно тому, как это делалось выше. В этом случае приходим к оценке $|S| < 6N^{1-c/\varrho^2}$. $\square$

2. Метод Карацубы

2.1. Введение

В основе метода Карацубы лежит верхняя оценка $I_k(X)$ — числа решений сравнения

$$x_1^* + \dots + x_k^* \equiv x_{k+1}^* + \dots + x_{2k}^* \pmod{p},$$

где $X < x_1, \dots, x_{2k} \leq 2X$ и $k(2X)^{2k-1} < p$ (см. лемму 9). В свою очередь, оценка $I_k(X)$ используется для оценки коротких сумм Клоостермана, в которых множество $\mathcal{A}$, по которому ведётся суммирование, состоит из произведений вида $n = xy$, где $X < x \leq 2X$, $Y < y \leq 2Y$. При определённых соотношениях между X, Y и q такие суммы оказываются очень маленькими. (см. лемму 10).

Здесь приводится простейший вариант оценки $I_k(X)$, отвечающий случаю, когда переменные x_j являются простыми числами. С одной стороны, это позволяет избежать ряда некоторых технических трудностей, но, с другой стороны, получающиеся при этом результаты вполне достаточны для большинства приложений.

Оценка неполной суммы Клоостермана $S(p; x)$ по сплошному промежутку $1 \leq n \leq x$ проводится следующим образом. Все целые числа $n \leq x$ разбиваются на два множества. К первому относят все n , у которых есть по крайней мере одна пара простых делителей x, y , лежащих в интервалах $X < x \leq 2X$, $Y < y \leq 2Y$ с некоторыми специально подобранными X и Y . Оценка части исходной суммы по числам n из первого множества может быть сведена к оценке сумм из леммы 10. Числа n , принадлежащие ко второму множеству, простых делителей с указанными свойствами не имеют, но, как оказывается, мощность такого множества очень мала. Для доказательства последнего факта используются леммы 6 – 8.

2.2. Вспомогательные утверждения

ЛЕММА 6. Пусть $\log x < y \leq \sqrt{x}$ и пусть $N(x, y)$ — количество чисел $n \leq x$, все простые делители которых $\leq y$. Тогда

$$N(x, y) \ll x \exp \left(-\xi \left(\log \xi + \log \log \xi + 1 - \frac{2}{\log \xi} \right) \right), \quad \xi = \frac{\log x}{\log y}.$$

Доказательство см. в работе А. И. Виноградова [42].

ЛЕММА 7. Пусть $2 < y \leq x$ и пусть $\Phi(x, y)$ — количество чисел $n \leq x$, все простые делители которых $> y$. Тогда

$$\Phi(x, y) \leq \frac{x}{\log y} + \frac{13.5x}{(\log y)^2}.$$

Если $2 < y \leq 3$, то утверждение очевидно. В случае, когда $\sqrt{x} < y \leq x$, утверждение сразу получается из асимптотического закона распределения простых чисел. Если же $3 < y \leq \sqrt{x}$, то искомое неравенство получается стандартным применением метода решета А. Сельберга.

ЛЕММА 8. При $x \rightarrow +\infty$ справедливо асимптотическое равенство

$$\prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} = e^{\gamma(\log x)}(1 + O(e^{-c\sqrt{\log x}})),$$

в котором $\gamma = 0.57721 \dots$ — постоянная Эйлера.

Доказательство см. в [44, гл. III, §5].

2.3. Симметричное сравнение с обратными величинами

Следующие утверждения принадлежат А. А. Карацубе [15].

ЛЕММА 9. Пусть $k \geq 2$ — целое число и пусть $k < X < X_1 \leq 2X$, $k(2X)^{2k-1} < p$. Тогда число $I_k(X)$ решений сравнения

$$p_1^* + \dots + p_k^* \equiv p_{k+1}^* + \dots + p_{2k}^* \pmod{p}, \quad (5)$$

в простых числах $X < p_1, \dots, p_{2k} \leq X_1$ не превосходит $k!X^k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $p_1, \dots, p_{2k}$ — произвольное решение (5). Достаточно доказать, что p_1 совпадает с одним из чисел $p_{k+1}, \dots, p_{2k}$. Не ограничивая общности, будем считать, что $p_1, \dots, p_s$ — все различные числа набора $p_1, \dots, p_k$. Обозначим через α_j кратность вхождения в набор числа p_j , $1 \leq j \leq s$, так что $\alpha_1 + \dots + \alpha_s = k$.

Положим, далее, $P = p_1 \dots p_s p_{k+1} \dots p_{2k} = p_j P_j$ для $j = 1, \dots, s, k+1, \dots, 2k$. Тогда, домножая обе части (5) на P , получим

$$\alpha_1 P_1 + \dots + \alpha_s P_s \equiv P_{k+1} + \dots + P_{2k} \pmod{p}. \quad (6)$$

Поскольку $1 < P_j < (2X)^{2k-1}$, обе части (6) не превосходят $k(2X)^{2k-1} < p$. Следовательно, сравнение (6) в действительности оказывается уравнением

$$\alpha_1 P_1 + \dots + \alpha_s P_s = P_{k+1} + \dots + P_{2k}.$$

Так как $P_j \equiv 0 \pmod{p_1}$ при $2 \leq j \leq 2k$, то $\alpha_1 P_1 \equiv 0 \pmod{p_1}$. Из определения следует, что $\alpha_1 \leq k < X < p_1$. Таким образом, $P_1 \equiv 0 \pmod{p_1}$. Если $p_1 \neq p_{k+1}, \dots, p_{2k}$, мы приходим к противоречию. $\square$

ЛЕММА 10. Пусть $(ab, p) = 1$, $k, s \geq 2$, $k < X < X_1 \leq 2X$, $s < Y < Y_1 \leq 2Y$, $k(2X)^{2k-1} < p$, $s(2Y)^{2s-1} < p$. Тогда для сумм

$$S_1 = \sum'_{X < x \leq X_1} \sum'_{Y < y \leq Y_1} e_p(ax^* y^*), \quad S_2 = \sum'_{X < x \leq X_1} \sum'_{Y < y \leq Y_1} e_p(ax^* y^* + bxy),$$

в которых штрих означает суммирование по простым числам x, y , удовлетворяют неравенствам $|S_j| \leq XY \Delta_j$,

$$\Delta_1 = 2k^{\frac{1}{2s}} s^{\frac{1}{2k}} (pX^{-k}Y^{-s})^{\frac{1}{2ks}}, \quad \Delta_2 = 2k^{\frac{1}{2s}} s^{\frac{1}{2k}} (pX^{1-k}Y^{-s})^{\frac{1}{2ks}}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Утверждение леммы остаётся в силе и для сумм вида

$$S_1 = \sum'_{X < x \leq X_1} \sum'_{Y < y \leq Y_1} F(x)G(y)e_p(ax^*y^*), \quad S_2 = \sum'_{X < x \leq X_1} \sum'_{Y < y \leq Y_1} F(x)G(y)e_p(ax^*y^* + bxy),$$

где F, G — произвольные комплекснозначные функции, удовлетворяющие условиям $|F(x)| \leq 1$, $|G(y)| \leq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 2,

$$\begin{aligned} |S_1|^k &\leq Y^{k-1} \sum'_{Y < y \leq Y_1} \left| \sum'_{X < x \leq X_1} e_p(ax^*y^*) \right|^k = \\ &= Y^{k-1} \sum'_{Y < y \leq Y_1} \left| \sum'_{X < x_1, \dots, x_{2k} \leq X_1} e_p(ay^*(x_1^* + \dots + x_k^*)) \right|. \end{aligned}$$

Обозначим через $\theta(y)$ аргумент суммы по $x_1, \dots, x_{2k}$. Тогда

$$\begin{aligned} |S_1|^k &\leq Y^{k-1} \sum'_{Y < y \leq Y_1} e^{-i\theta(y)} \sum'_{X < x_1, \dots, x_k \leq X_1} e_p(ay^*(x_1^* + \dots + x_k^*)) = \\ &= Y^{k-1} \sum'_{Y < y \leq Y_1} e^{-i\theta(y)} \sum_{\lambda=0}^{p-1} j_k(\lambda) e_p(a\lambda y^*) \leq Y^{k-1} \sum_{\lambda=0}^{p-1} j_k(\lambda) \left| \sum'_{Y < y \leq Y_1} e^{-i\theta(y)} e_p(a\lambda y^*) \right|, \end{aligned}$$

где $j_k(\lambda)$ — число решений сравнения $x_1^* + \dots + x_k^* \equiv \lambda \pmod{p}$ в простых числах

$$X < x_1, \dots, x_k \leq X_1.$$

Далее, из леммы 2 получаем неравенство $|S_1|^{ks} \leq Y^{s(k-1)} T_1^{s-1} T_2$, в котором

$$T_1 = \sum_{\lambda=0}^{p-1} j_k(\lambda), \quad T_2 = \sum_{\lambda=0}^{p-1} j_k(\lambda) \left| \sum'_{Y < y \leq Y_1} e^{-i\theta(y)} e_p(a\lambda y^*) \right|^s.$$

Сумма T_1 совпадает с числом наборов $(x_1, \dots, x_k)$, $X < x_j \leq X_1$ и, таким образом, $T_1 \leq X^k$. Следовательно,

$$|S_1|^{2ks} \leq X^{2k(s-1)} Y^{2s(k-1)} T_2^2.$$

В силу неравенства Коши, $T_2^2 \leq T_3 T_4$, где

$$T_3 = \sum_{\lambda=0}^{p-1} j_k^2(\lambda), \quad T_4 = \sum_{\lambda=0}^{p-1} \left| \sum'_{Y < y \leq Y_1} e^{-i\theta(y)} e_p(a\lambda y^*) \right|^{2s}.$$

Сумма T_3 равна числу решений сравнения

$$x_1^* + \dots + x_k^* \equiv x_{k+1}^* + \dots + x_{2k}^* \pmod{p}$$

в простых числах $X < x_1, \dots, x_{2k} \leq X_1$. По лемме 9, $T_3 \leq k! X^k$. Поэтому

$$\begin{aligned} T_4 &= \sum_{\lambda=0}^{p-1} \sum'_{Y < y_1, \dots, y_{2s} \leq Y_1} e^{-i(\theta(y_1) + \dots + \theta(y_{2s}))} e_p(a\lambda(y_1^* + \dots + y_{2s}^*)) = \\ &= \sum_{\mu=0}^{p-1} \left(\sum'_{Y < y_1, \dots, y_{2s} \leq Y_1} e^{-i(\theta(y_1) + \dots + \theta(y_{2s}))} \right) \sum_{\lambda=0}^{p-1} e_p(a\lambda\mu), \end{aligned}$$

где двойной штрих в знаке суммы означает суммирование по наборам простых чисел

$$Y < y_1, \dots, y_{2s} \leq Y_1,$$

удовлетворяющих сравнению

$$y_1^* + \dots + y_s^* \equiv y_{s+1}^* + \dots + y_{2s}^* + \mu \pmod{p}.$$

Согласно лемме 9, число слагаемых в такой сумме не превышает $s!Y^s$. Таким образом,

$$T_4 \leq s!Y^s \sum_{\mu=0}^{p-1} \left| \sum_{\lambda=0}^{p-1} e_p(a\lambda\mu) \right| = s!Y^s p.$$

Следовательно,

$$T_2^2 \leq k!s!X^k Y^s p, \quad |S_1|^{2ks} \leq (XY)^{2ks} k!s!X^{-k} Y^{-s} p.$$

Рассуждая подобным образом, для суммы S_2 получаем цепочку соотношений

$$\begin{aligned} |S_2|^k &\leq Y^{k-1} \sum'_{Y < y \leq Y_1} \left| \sum_{\lambda=0}^{p-1} \sum_{kX < \sigma \leq kX_1} j_k(\lambda; \sigma) e_p(a\lambda y^* + b\sigma y) \right| \leq \\ &\leq Y^{k-1} \sum_{\lambda=0}^{p-1} \sum_{kX < \sigma \leq kX_1} j_k(\lambda; \sigma) \left| \sum'_{Y < y \leq Y_1} e^{-i\theta(y)} e_p(a\lambda y^* + b\sigma y) \right|, \end{aligned}$$

где $j_k(\lambda; \sigma)$ — число решений системы сравнений

$$\begin{cases} x_1^* + \dots + x_k^* \equiv \lambda \pmod{p}, \\ x_1 + \dots + x_k \equiv \sigma \pmod{p} \end{cases}$$

в простых числах $X < x_1, \dots, x_k < X_1$. По лемме 2, $|S_2|^{ks} \leq Y^{s(k-1)} T_1^{s-1} T_2$, где

$$T_1 = \sum_{\lambda=0}^{p-1} \sum_{kX < \sigma \leq kX_1} j_k(\lambda; \sigma), \quad T_2 = \sum_{\lambda=0}^{p-1} \sum_{kX < \sigma \leq kX_1} j_k(\lambda; \sigma) \left| \sum'_{Y < y \leq Y_1} e^{-i\theta(y)} e_p(a\lambda y^* + b\sigma y) \right|.$$

Так как $T_1 \leq X^k$, то из леммы 2 находим: $|S_2|^{2ks} \leq X^{2k(s-1)} Y^{2s(k-1)} T_3 T_4$, где

$$T_3 = \sum_{\lambda=0}^{p-1} \sum_{kX < \sigma \leq kX_1} j_k^2(\lambda; \sigma) \leq k!X^k, \quad T_4 = \sum_{\lambda=0}^{p-1} \sum_{kX < \sigma \leq kX_1} \left| \sum'_{Y < y \leq Y_1} e^{-i\theta(y)} e_p(a\lambda y^* + b\sigma y) \right|^{2s}.$$

Далее,

$$T_4 = \sum_{\mu=0}^{p-1} \sum_{|\tau| \leq sY_1} \left(\sum''_{Y < y_1, \dots, y_{2s} \leq Y_1} e^{-i(\theta(y_1) + \dots - \theta(y_{2s}))} \right) \sum_{\lambda=0}^{p-1} \sum_{kX < \sigma \leq kX_1} e_p(a\lambda\mu + b\sigma\tau),$$

где двойной штрих означает суммирование по всем решениям системы

$$\begin{cases} y_1^* + \dots + y_s^* \equiv y_{s+1}^* + \dots + y_{2s}^* + \mu \pmod{p}, \\ y_1 + \dots + y_s \equiv y_{s+1} + \dots + y_{2s} + \tau \pmod{p} \end{cases}$$

в простых числах $Y < y_1, \dots, y_{2s} \leq Y_1$. Количество слагаемых в кратной сумме по $|\tau| \leq sY_1$ и $y_1, \dots, y_{2s}$ не превосходит $s!Y^s$. Таким образом,

$$T_4 \leq \sum_{\mu=0}^{p-1} s!Y^s \cdot k(X_1 - X) \left| \sum_{\lambda=0}^{p-1} e_p(a\lambda\mu) \right| \leq sk!Y^s pX.$$

Окончательно находим: $|S_2|^{2ks} \leq (XY)^{2ks} k!s!spX \cdot Y^{-s} X^{-k}$. $\square$.

2.4. Основная теорема

ТЕОРЕМА 5. Пусть $(a, p) = 1$, и пусть $e^{(\log p)^{2/3}(\log \log p)^{4/3}} \leq x \leq \sqrt{p}$. Тогда имеет место следующее неравенство:

$$\sum_{\nu \leq x} e_p(a\nu^* + b\nu) \ll x \frac{(\log p)^{2/7}}{(\log x)^{3/7}} (\log \log p)^{4/7}. \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим лишь случай $(b, p) = 1$, поскольку при b , кратном p , рассуждения оказываются несколько проще и практически дословно повторяют приводимые ниже. Положим

$$Z = \exp\left(\frac{\log x}{\log \log x}\right), \quad Y_k = \frac{1}{4} p^{\frac{1}{2k-1}}$$

и определим целое число m из неравенств $Y_m \leq Z < Y_{m-1}$. Далее, пусть n, l — целые числа, удовлетворяющие следующим условиям: $2m \leq n < \frac{1}{4}\sqrt{\log p}$, $7n < l < \log p$. Положим также

$$\kappa = \frac{1}{4n}, \quad X_k = p^{\frac{1+\kappa}{2k}}, \quad X = X_n, \quad Y = Y_m, \quad U = Y_l, \quad V = Y_{4n}.$$

Тогда $Y_{k+1} < X_k < Y_k$ при любом k , $m \leq k \leq n$, и, кроме того, $U < V < X < Y \leq Z$.

Далее все числа $\nu \leq x$ разбиваются на два множества: A и B . Мощность множества A не будет превосходить по порядку правой части (7), так что сумму по $\nu \in A$ достаточно оценить тривиально. Слагаемые суммы по $\nu \in B$ можно распределить по сравнительно небольшому числу двойных сумм, к каждой из которых применима оценка леммы 10.

Итак, поместим сперва во множество A все числа $\nu \leq x$, которые не имеют простых делителей из объединения промежутков $(X_k, Y_k]$, $k = m, m+1, \dots, n$. Все эти числа представимы в виде $\nu = uv$ или $\nu = uvw$, где $u \geq 1$ не имеет простых делителей, больших X , все простые делители v , напротив, превосходят Y и, наконец, $w = w_m w_{m+1} \dots w_{n-1}$, где $w_k = 1$ либо все простые делители w_k принадлежат промежутку $(Y_{k+1}, X_k]$. Числа вида $\nu = uv$ не имеют простых делителей, больших Y . Согласно лемме 6, количество таких $\nu \leq x$ не превосходит

$$N(x; Y) \leq N(x; Z) \leq x \exp(-(\log \log p) \log \log \log p) < \frac{x}{(\log p)^2}$$

Далее, при фиксированных сомножителях u, w произведения $\nu = uvw$ имеется не более

$$\Phi\left(\frac{x}{uw}; Y\right) \leq \frac{2x}{\log Y} \frac{1}{uw}$$

возможностей для выбора сомножителя $v = \nu/(uw) \leq x/(uw)$. В силу леммы 7, количество таких $\nu \leq x$ не превосходит

$$\frac{2x}{\log Y} \sum_u \sum_w \frac{1}{uw} = \frac{2x}{\log Y} \sum_u \frac{1}{u} \sum_{w_m} \frac{1}{w_m} \dots \sum_{w_{n-1}} \frac{1}{w_{n-1}},$$

где величины u и w_k независимо друг от друга пробегают возрастающие последовательности чисел, чьи простые делители принадлежат соответствующим промежуткам. По лемме 8 имеем:

$$\begin{aligned} \sum_u \frac{1}{u} &\leq \prod_{q \leq X} \left(1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \dots\right) = \\ &= \prod_{q \leq X} \left(1 - \frac{1}{q}\right)^{-1} = e^{\gamma(\log X)} \left(1 + O\left(e^{-c_1 \sqrt{\log X}}\right)\right) < 1.5 \log X, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{w_k} \frac{1}{w_k} &\leq \prod_{Y_{k+1} < q \leq X_k} \left(1 - \frac{1}{q}\right)^{-1} = \frac{\log X_k}{\log Y_{k+1}} \left(1 + O\left(e^{-c_1 \sqrt{\log Y_{k+1}}}\right)\right) < \\
&< (1 + \kappa) \left(1 + \frac{1}{2k}\right) \left(1 - \frac{(2k+1) \log 4}{\log p}\right)^{-1} \left(1 + O\left(e^{-c_2 \sqrt{\log p}}\right)\right) < \\
&< (1 + 4\kappa) \left(1 + \frac{1}{2k}\right).
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
\sum_{u,w} \frac{1}{uw} &< 1.5(\log X)(1 + 4\kappa)^n \prod_{k=m}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{2k}\right) < 1.5e(\log X) \exp\left(\frac{1}{2} \log \frac{n}{m}\right), \\
\frac{2x}{\log Y} \sum_{u,w} \frac{1}{uw} &< 3ex \frac{\log X}{\log Y} \sqrt{\frac{n}{m}}.
\end{aligned}$$

Так как $8m < \sqrt{\log p}$, то

$$Y > p^{\frac{1}{2m-0.5}} \quad \text{и} \quad \frac{\log X}{\log Y} < (1 + \kappa) \frac{2m - 0.5}{2n} = \left(1 + \frac{1}{4n}\right) \left(\frac{m}{n} - \frac{1}{4n}\right) < \frac{m}{n},$$

откуда следует, что в A помещено не более

$$\frac{x}{(\log p)^2} + 3ex \frac{m}{n} \sqrt{\frac{n}{m}} < 9x \sqrt{\frac{m}{n}}$$

чисел.

Далее, отнесём ко множеству A все числа $\nu \leq x$, не делящиеся на простые из промежутка $\mathcal{J} = (U, V]$. Такие числа ν представляются в виде $\nu = u$ или $\nu = uv$, где $u \geq 1$ не имеет простых делителей $> U$, а v не имеет простых делителей $\leq V$. Количество чисел вида $\nu = u$ не превосходит $N(x; Z) < x/(\log p)^2$. Количество же чисел вида $\nu = uv$ ограничено сверху величиной

$$\frac{2x}{\log V} \sum_u \frac{1}{u} \leq \frac{2x}{\log V} \prod_{q \leq U} \left(1 - \frac{1}{q}\right)^{-1} < 3x \frac{\log U}{\log V} < 12x \frac{n}{l}.$$

Так находим:

$$|A| < 9x \sqrt{\frac{m}{n}} + \frac{2x}{(\log p)^2} + 12x \frac{n}{l} < 9x \sqrt{\frac{m}{n}} + 13x \frac{n}{l}.$$

Множество B разобьём на классы $B_{c,d}$, $c, d = 1, 2, \dots$, относя к $B_{c,d}$ числа $\nu \leq x$, имеющие ровно c простых делителей из $\mathcal{I}$ и ровно d простых делителей из $\mathcal{J}$. Тогда

$$\left| \sum_{\nu \in B} e_p(a\nu^* + b\nu) \right| \leq \sum_{c,d \geq 1} |S_{c,d}|, \quad \text{где} \quad S_{c,d} = \sum_{\nu \in B_{c,d}} e_p(a\nu^* + b\nu).$$

Сравним сумму $S_{c,d}$ ($c, d \geq 1$) с суммой

$$T_{c,d} = \frac{1}{cd} \sum_{q \in \mathcal{I}} \sum_{r \in \mathcal{J}} \sum_{h \leq x/(qr)} e_p(aq^* r^* h^* + bqrh), \quad (8)$$

где q и r независимо друг от друга пробегают множества простых из $\mathcal{I}$ и $\mathcal{J}$ соответственно, а h пробегает монотонно возрастающую последовательность чисел класса $B_{c-1,d-1}$, не зависящую от q и r (смысл обозначения $B_{c-1,d-1}$ при $c = 1$ или $d = 1$ очевиден). Несложно заметить,

что всякое число $\nu \in B_{c,d}$, не делящееся на квадрат простого из $\mathcal{I} \cup \mathcal{J}$, встретится среди произведений hqr в (8) ровно cd раз и потому войдёт в $T_{c,d}$ с коэффициентом 1. Следовательно, $S_{c,d} = T_{c,d} + 2\theta x U^{-1}$, где последнее слагаемое отвечает вкладу чисел ν , делящихся на квадраты простых из $\mathcal{I} \cup \mathcal{J}$.

Далее, разобьём теперь области изменения q, r на промежутки вида $Q < q \leq Q_1$, $R < r \leq R_1$, где $Q_1 \leq 2Q$, $R_1 \leq 2R$. Тогда

$$T_{c,d} = \frac{1}{cd} \sum_{Q,R} T_{c,d}(Q, R), \quad \text{где} \quad T_{c,d}(Q, R) = \sum_{Q < q \leq Q_1} \sum_{R < r \leq R_1} \sum_{h \leq x/(qr)} e_p(aq^*r^*h^* + bqrh).$$

Меняя порядок суммирования, будем иметь:

$$\begin{aligned} T_{c,d}(Q, R) &= \sum_{h \leq x/(QR)} T_{c,d}(Q, R; h), \quad \text{где} \\ T_{c,d}(Q, R; h) &= \sum_{Q < q \leq Q_2} \sum_{R < r \leq R_2} e_p(a_1q^*r^* + b_1qr), \\ a_1 &\equiv ah^* \pmod{p}, \quad b_1 \equiv bh \pmod{p}, \quad Q_2 = \min\left(Q_1, \frac{x}{hR}\right), \quad R_2 = \min\left(R_1, \frac{x}{hq}\right). \end{aligned}$$

Преобразуем последнюю сумму так, чтобы область изменения r не зависела от q . Получим:

$$\begin{aligned} T_{c,d}(Q, R; h) &= \sum_{Q < q \leq Q_1} \sum_{R < r \leq R_1} \frac{1}{p} \sum_{|f| < 0.5p} \sum_{R < \mu \leq R_2} e_p(f(r - \mu)) e_p(a_1q^*r^* + b_1qr) = \\ &= \sum_{|f| < 0.5p} \frac{T(f)}{|f| + 1}, \quad \text{где} \quad T(f) = \sum_{Q < q \leq Q_2} \sum_{R < r \leq R_1} F(q)G(r) e_p(a_1q^*r^* + b_1qr), \\ F(q) &= \frac{|f| + 1}{p} \sum_{R < \mu \leq R_2} e_p(-f\mu), \quad G(r) = e_p(fr). \end{aligned}$$

Заметим, что $|F(q)| \leq q$ при любых q и f . Кроме того, для всякой пары Q, R найдутся целые k, s такие, что $m \leq k \leq n$, $4n \leq s \leq l$ и

$$0.5X_k < Q \leq 2Y_k, \quad 0.5Y_{s+1} < R \leq 2Y_s. \quad (9)$$

Применяя к оценке $T(f)$ лемму 10, с учётом замечания к ней, будем иметь:

$$|T(f)| \leq QR\Delta, \quad \text{где} \quad \Delta = 2k^{\frac{1}{2s}} s^{\frac{1}{2k}} (pQ^{-k} R^{1-s})^{\frac{1}{2ks}}.$$

Несложно проверить, что

$$Q^k \geq 2^{-k} X_k^k = 2^{-k} p^{\frac{1+\kappa}{2}}, \quad R^{s-1} \geq 2^{1-s} Y_{s+1}^{s-1} \geq 2^{-s} p^{\frac{1}{2} - \frac{3}{2(2s+1)}}.$$

Так как $s \geq 7n > k \geq m \geq 2$, то

$$\Delta < 5(\log p)^{\frac{1}{2m}} p^{-\frac{1}{56nks}} \leq \Delta_0 = (\log p)^{1/2} p^{-\frac{1}{56n^2l}}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} |T_{c,d}(Q, R; h)| &\leq QR(\log p + 1)\Delta_0 \leq \frac{x}{h}(\log p + 1)\Delta_0, \\ |T_{c,d}(Q, R)| &\leq x(\log p + 1)^2\Delta_0, \quad |T_{c,d}| \leq \frac{2x}{cd}(\log p)^4\Delta_0, \quad |S_{c,d}| \leq \frac{3x}{cd}(\log p)^4\Delta_0. \end{aligned}$$

Суммируя по c, d , получим:

$$\sum_{c,d \geq 1} |S_{c,d}| < x(\log p)^5 p^{-\frac{1}{56n^2l}}, \quad \left| \sum_{\nu \leq x} e_p(a\nu^* + b\nu) \right| \leq 9x\sqrt{\frac{m}{n}} + 13x\frac{n}{l} + x(\log p)^5 p^{-\frac{1}{56n^2l}}.$$

Положим теперь

$$n = \left\lceil \frac{1}{22} \frac{(\log p)^{3/7}}{(\log x)^{1/7}} (\log \log p)^{-1/7} \right\rceil, \quad l = \lceil (\log p)^{1/7} (\log x)^{2/7} (\log \log p)^{-5/7} \rceil.$$

Тогда $m \leq 2n$, $4n < \sqrt{\log p}$, $l > 4n$, $p^{-\frac{1}{56n^2l}} < (\log p)^{-8}$ и, наконец,

$$\left| \sum_{\nu \leq x} e_p(a\nu^* + b\nu) \right| \leq 31x \frac{(\log p)^{2/7}}{(\log x)^{3/7}} (\log \log p)^{4/7}. \quad \square$$

3. Метод Бургейна и Гараева

3.1. Введение

Ещё один метод оценок коротких сумм Клоостермана, в которых переменная суммирования пробегает сплошной промежуток, был предложен в работах Ж. Бургейна и М. З. Гараева [23], [45]. Как и в методе Карацубы, оценка $S(x)$ начинается с разбиения промежутка $1 \leq \nu \leq x$ на два множества A и B . Мощность A оказывается достаточно малой, так что сумма по $\nu \in A$ оценивается тривиально. Для всякого же числа $\nu \in B$ имеет место представление $\nu = x y z h$, где простые сомножители x, y и z лежат в интервалах специального вида. Поэтому слагаемые, отвечающие $\nu \in B$, можно перераспределить по не очень большому числу “трилинейных” сумм

$$\sum_{x,y,z} e_p(a_1 x^* y^* z^*), \quad (a_1, p) = 1,$$

к каждой из которых после ряда преобразований применима фундаментальная лемма Бургейна (лемма 12). Наличие трёх (а не двух, как в методе Карацубы) независимых сомножителей x, y, z даёт больше свободы в обращении с ними. Например, каждый из сомножителей может теперь принимать значения, близкие к числам вида $p^{1/(2k)}$, $k = 1, 2, 3, \dots$. Напомним, что в методе Карацубы необходимо было тщательно следить за тем, чтобы соответствующие простые делители чисел $\nu \in B$ лежали в интервалах вида $p^{(1+\kappa)/(2k)} < q \leq p^{(1-\kappa)/(2k-2)}$, где $\kappa > 0$, и, таким образом, “избегали” малых окрестностей точек $p^{1/(2k)}$.

Вместе с тем, необходимо отметить, что при оценке сумм $S(x)$ по сплошному промежутку главной отличительной особенностью метода Бургейна-Гараева от метода Карацубы является не сколько лемма 12, сколько новая оценка числа решений сравнения (5) (лемма 13 настоящего обзора). Именно, эта оценка свободна от обременительного ограничения $k(2X)^{2k-1} < p$, которое присутствует в лемме 9.

3.2. Вспомогательные утверждения

ЛЕММА 11. Пусть $m \geq 2$, $(a, m) = 1$, $r \geq 1$, и пусть $A_1, \dots, A_r$ — произвольные подмножества $\mathbb{Z}_m$. Далее, пусть $k_1, \dots, k_r \geq 2$ — произвольные чётные числа, и пусть

$$W = \sum_{x_1 \in A_1} \cdots \sum_{x_r \in A_r} e_m(a x_1 \dots x_r).$$

Тогда

$$|W|^k \leq \left(\prod_{r=1}^r |A_j|^{k-k_j} \right) \sum_{h_1, \dots, h_r=0}^{m-1} \xi_1(h_1) \dots \xi_r(h_r) e_m(a h_1 \dots h_r),$$

где $k = k_1 \dots k_r$ и $\xi_j(h)$ обозначает число решений сравнения

$$y_1 + \dots + y_t \equiv y_{t+1} + \dots + y_{2t} + h \pmod{m}, \quad 2t = k_j,$$

с условиями $y_1, \dots, y_{2t} \in A_j$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Утверждение леммы 11 остаётся в силе и для “взвешенной” суммы

$$W = \sum_{x_1 \in A_1} \dots \sum_{x_r \in A_r} f_1(x_1) \dots f_r(x_r) e_m(a x_1 \dots x_r)$$

где $|f_s(x)| \leq 1$ при любых $x \in \mathbb{Z}_m$, $s = 1, \dots, r$. Разница состоит лишь в том, что в этом случае через $\xi_j(h)$ будут обозначаться некоторые функции, такие, что их абсолютные величины $|\xi_j(h)|$ не превосходят чисел решений соответствующих сравнений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (индукция по r). В случае $r = 1$ утверждение очевидно:

$$|W|^{k_1} = |W|^{2t} = \sum_{x_1^{(1)}, \dots, x_{2t}^{(1)}} e_m(a(x_1^{(1)} + \dots - x_{2t}^{(1)})) = \sum_{h=0}^{m-1} \xi_1(h) e_m(ah).$$

Предположим теперь, что утверждение леммы доказано для $1 \leq r \leq s-1$ и проверим его справедливость для $r = s$. Обозначим исходную сумму через W_s . Тогда, полагая $k_s = 2t$, из леммы 2 получим:

$$\begin{aligned} |W_s|^{k_s} &\leq (|A_1| \dots |A_{s-1}|)^{k_s-1} \sum_{x_1 \in A_1} \dots \sum_{x_{s-1} \in A_{s-1}} \left| \sum_{x_s \in A_s} e_m(a x_1 \dots x_s) \right|^{k_s} = \\ &= (|A_1| \dots |A_{s-1}|)^{k_s-1} \sum_{h_s=0}^{m-1} \xi_s(h_s) W_{s-1}, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$W_{s-1} = \sum_{x_1 \in A_1} \dots \sum_{x_{s-1} \in A_{s-1}} e_m(ah_s x_1 \dots x_{s-1}).$$

В силу предположения индукции,

$$\begin{aligned} |W_{s-1}|^\kappa &\leq \\ &\leq \left(\prod_{j=1}^{s-1} |A_j|^{\kappa-k_j} \right) \sum_{h_1, \dots, h_{s-1}=0}^{m-1} \xi_1(h_1) \dots \xi_{s-1}(h_{s-1}) e_m(a h_1 \dots h_{s-1}), \quad \kappa = k_1 \dots k_{s-1} = \frac{k}{k_s}. \end{aligned}$$

Вновь применяя лемму 2, будем иметь:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{h_s=0}^{m-1} \xi_s(h_s) |W_{s-1}| \right)^\kappa &\leq \left(\sum_{h_s=0}^{m-1} \xi_s(h_s) \right)^{\kappa-1} \sum_{h_s=0}^{m-1} \xi_s(h_s) |W_{s-1}|^\kappa \leq \\ &\leq |A_s|^{k_s(\kappa-1)} \left(\prod_{j=1}^{s-1} |A_j|^{\kappa-k_j} \right) \sum_{h_1, \dots, h_s=0}^{m-1} \xi_1(h_1) \dots \xi_s(h_s) e_m(a h_1 \dots h_s). \end{aligned} \quad (11)$$

Возводя обе части (10) в степень κ и пользуясь (11), приходим к искомому утверждению. $\square$

ЛЕММА 12. Пусть p — простое число, $(a, p) = 1$, и пусть $\alpha_j(x)$, $j = 1, 2, 3$ — произвольные комплекснозначные функции, такие, что $\|\alpha_j\|_1 < 1$ и $\|\alpha_1\|_2 \cdot \|\alpha_2\|_2 \cdot \|\alpha_3\|_2 < p^{-0.5-\varepsilon}$, где $\varepsilon > 0$ — постоянное число и

$$\|\alpha\|_r = \left(\sum_{x=1}^p |\alpha(x)|^r \right)^{1/r}, \quad r = 1, 2.$$

Тогда для суммы

$$W = \sum_{x,y,z=1}^p \alpha_1(x) \alpha_2(y) \alpha_3(z) e_p(axyz)$$

справедливо неравенство: $|W| < p^{-\delta}$, где $\delta = (0.1\varepsilon)^{10^4}$.

Доказательство этой леммы, принадлежащее Ж. Бургейну и М.З. Гараеву [23], опирается на утверждения из геометрии чисел и, в частности, на теорему о последовательных минимумах выпуклого компактного множества относительно решётки в $\mathbb{R}^n$.

3.3. Основная теорема

ТЕОРЕМА 6. Пусть p — простое число, $(a, p) = 1$, и пусть

$$e^{(\log p)^{2/3}(\log \log p)^{4/3}} \leq x \leq \sqrt{p}.$$

Тогда

$$\sum_{\nu \leq x} e_p(a\nu^*) \ll \frac{x}{D} \log D, \quad \text{где } D = \frac{(\log x)^{3/2}}{(\log p)(\log \log p)^2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $Q = \exp\left(\frac{\log x}{\log \log p}\right)$ и определим m неравенствами

$$p^{1/(2m)} \leq Q \leq p^{1/(2m-2)}.$$

Далее, зададимся целым числом n с условием $3m \leq n \leq \sqrt{\log p}$ и обозначим $X = p^{1/(2n)}$, $Y = p^{1/(2m)}$. Все числа $\nu \leq x$ разобьём на два множества: A и B .

Прежде всего, отнесём к A все числа $\nu \leq x$, не имеющие простых делителей $> Y$. Количество таких ν не превосходит $N(x; Y) \leq N(x; Q) < x(\log p)^{-10}$. Далее, отнесём к A все числа, не имеющие простых делителей из промежутка $(X, Y]$. Все такие ν представляются в виде uv , где u не имеет простых делителей $> X$, а v не имеет простых делителей $\leq Y$. Следовательно, количество таких чисел ν не превосходит

$$\sum_u \Phi\left(\frac{x}{u}; Y\right) \leq \frac{2x}{\log Y} \sum_u \frac{1}{u} \leq 3x \frac{\log X}{\log Y} = 3x \frac{m}{n}.$$

Наконец, отнесём к A те числа ν , которые имеют в точности один простой делитель $q \in (X, Y]$. Записывая такие ν в виде uvq , где обозначения u и v сохраняют тот же смысл, что и выше, заключаем, что их количество не превышает

$$\sum_{u,q} \Phi\left(\frac{x}{uq}; Y\right) \leq \frac{2x}{\log Y} \sum_u \frac{1}{u} \sum_q \frac{1}{q} < 3x \frac{m}{n} \log \frac{n}{m}.$$

Таким образом,

$$|A| \leq \frac{x}{(\log p)^{10}} + 3x \frac{m}{n} + 3x \frac{m}{n} \log \frac{n}{m} < 7x \frac{m}{n} \log \frac{n}{m}.$$

Обозначим через $S_{c,d}$ сумму по числам $\nu \in B$, имеющим ровно c простых делителей из промежутка $\mathcal{I} = (X, Y]$ и ровно d простых делителей из промежутка $\mathcal{J} = (Y, x]$ ($c \geq 2, d \geq 1$). Тогда

$$\left| \sum_{\nu \in B} e_p(a\nu^*) \right| \leq \sum_{c \geq 2, d \geq 1} |S_{c,d}|.$$

Применяя те же рассуждения, что и при доказательстве теоремы 5, получим:

$$S_{c,d} = \frac{1}{c(c-1)d} \sum_h \sum_{p_1 p_2 p_3 \leq xh^{-1}} e_p(ah^* p_1^* p_2^* p_3^*) + 2\theta x X^{-1}, \quad (12)$$

где h пробегает некоторую возрастающую последовательность, а простые p_1, p_2 и p_3 независимо друг от друга пробегают промежутки $\mathcal{I}, \mathcal{I}$ и $\mathcal{J}$ соответственно. Последнее слагаемое в (12) отвечает вкладу от чисел n , делящихся на q^2 при некотором $q \in \mathcal{I} \cup \mathcal{J}$. Фиксируя h , разобьём области изменения переменных p_j на промежутки вида $P_j < p_j \leq Q_j$, где

$$Q_1 = \min\left(2P_1, \frac{x}{hXY}\right), \quad Q_2 = \min\left(P_2(1 + (\log p)^{-4}), \frac{x}{hXY}\right), \\ Q_3 = \min\left(2P_3, \frac{x}{hX^2}\right). \quad (13)$$

Так получим

$$S_{c,d} = \frac{1}{cd(c-1)} \sum_h \sum_{P_1, P_2, P_3} T + 2\theta x X^{-1}, \\ T = T_{c,d}(h; P_1, P_2, P_3) = \sum_{P_1 < p_1 \leq Q_1} \sum_{P_2 < p_2 \leq R_2} \sum_{P_3 < p_3 \leq R_3} e_p(a_1 p_1^* p_2^* p_3^*),$$

где

$$a_1 \equiv ah^* \pmod{p}, \quad R_2 = \min(Q_2, y), \quad R_3 = \min(Q_3, t), \quad y = \left\lfloor \frac{x}{hYp_1} \right\rfloor, \quad t = \left\lfloor \frac{x}{hp_1 p_2} \right\rfloor.$$

Если $t < P_3$, то сумма по p_3 пуста; если $t \geq Q_3$, то область изменения p_3 в T имеет вид $P_3 < p_3 \leq Q_3$ и, следовательно, не зависит от p_2 . В случае, когда $P_3 \leq t < Q_3$, заменяя верхнюю границу изменения p_3 величиной $z = \lfloor x(hp_1 P_2)^{-1} \rfloor$. Ошибка от такой замены не превзойдет

$$\sum_{P_1 < p_1 \leq Q_1} \sum_{P_2 < p_2 \leq Q_2} \left(\frac{x}{hp_1 P_2} - \frac{x}{hp_1 p_2} + 1 \right) \leq \\ \leq \frac{x}{h} \sum_{P_1 < p_1 \leq Q_1} \frac{1}{p_1} \sum_{P_2 < p_2 \leq Q_2} \frac{Q_2 - P_2}{p_1 p_2 P_2} + (Q_1 - P_1)(Q_2 - P_2) \leq \\ \leq \frac{x}{h} (\log p)^{-4} \sum_{P_1 < p_1 \leq Q_1} \frac{1}{p_1} \sum_{P_2 < p_2 \leq Q_2} \frac{1}{p_2} + \frac{x}{hY} (\log p)^{-4} = s(h; P_1, P_2).$$

Так как вклад от величин $s(h; P_1, P_2)$ в $S_{c,d}$ не превосходит

$$\frac{x}{(\log p)^4} \sum_{h \leq x} \frac{1}{h} \sum_{X < p_1, p_2 \leq Y} \frac{1}{p_1 p_2} < \frac{x}{(\log p)^2},$$

то

$$S_{c,d} = \frac{1}{cd(c-1)} \sum_h \sum_{P_1, P_2, P_3} V + \theta \left(\frac{x(\log p)^{-2}}{cd(c-1)} + 2xX^{-1} \right),$$

где

$$V = V_{c,d}(h; P_1, P_2, P_3) = \sum_{P_1 < p_1 \leq Q_1} \sum_{P_2 < p_2 \leq R_2} \sum_{P_3 < p_3 \leq \min(Q_3, z)} e_p(a_1 p_1^* p_2^* p_3^*).$$

Преобразуем V так, чтобы границы области изменения p_2 и p_3 не зависели от p_1 . Имеем:

$$\begin{aligned} V &= \\ &= \sum_{\substack{P_j < p_j \leq Q_j \\ j=1,2,3}} \frac{1}{p} \left(\sum_{|f| < p/2} \sum_{1 \leq \lambda \leq y} e_p(f(p_2 - \lambda)) \right) \frac{1}{p} \left(\sum_{|g| < p/2} \sum_{1 \leq \mu \leq z} e_p(g(p_3 - \mu)) \right) e_p(a_1 p_1^* p_2^* p_3^*) = \\ &= \sum_{|f|, |g| < p/2} \frac{W}{(|f| + 1)(|g| + 1)}, \\ \text{где } W &= W(f, g) = \sum_{\substack{P_j < p_j \leq Q_j \\ j=1,2,3}} F(p_1) G(p_2) H(p_3) e_p(a_1 p_1^* p_2^* p_3^*), \\ F(p_1) &= \frac{|f| + 1}{p} \left(\sum_{1 \leq \lambda \leq y} e_p(-f\lambda) \right) \cdot \frac{|g| + 1}{p} \left(\sum_{1 \leq \mu \leq z} e_p(-g\mu) \right), \\ G(p_2) &= e_p(fp_2), \quad H(p_3) = e_p(gp_3), \end{aligned}$$

причем, как несложно видеть, каждая из величин $F(p_1), G(p_2), H(p_3)$ по модулю не превосходит единицы.

Определим теперь числа k_j из неравенств

$$p^{\frac{1}{2k_j}} \leq P_j \leq p^{\frac{1}{2(k_j-1)}}$$

и положим

$$l_j = 2n_j = \begin{cases} k_j, & \text{если } k_j \text{ чётное,} \\ k_j + 1, & \text{если } k_j \text{ нечётное.} \end{cases}$$

Тогда из леммы 11 и замечания к ней получаем:

$$|W|^k \leq (P_1 P_2 P_3)^k \sum_{h_1, h_2, h_3=0}^{p-1} \alpha_1(h_1) \alpha_2(h_2) \alpha_3(h_3) e_p(a_1 h_1 h_2 h_3),$$

где $k = l_1 l_2 l_3$, $\alpha_j(h) = P_j^{-l_j} \xi_j(h)$, а величина $|\xi_j(h)|$ не превосходит числа решений сравнения

$$x_1^* + \dots + x_{n_j}^* \equiv x_{n_j+1}^* + \dots + x_{2n_j}^* + h \pmod{p}$$

в простых числах x_s , $P_j < x_s \leq Q_j$, $s = 1, \dots, 2n_j$. Покажем, что весовые функции $\alpha_j(h)$ удовлетворяют условиям леммы 12. Действительно,

$$\|\alpha_j\|_1 = \sum_{h=0}^{p-1} |\alpha_j(h)| = P_j^{-l_j} \sum_{h=0}^{p-1} |\xi_j(h)| \leq P_j^{-l_j} \cdot P_j^{l_j} = 1.$$

Далее, предположим сперва, что k_j – чётное число. Тогда $l_j = k_j$, так что сумма величин $|\xi_j(h)|^2$ не превзойдёт числа решений сравнения

$$x_1^* + \dots + x_{k_j}^* \equiv x_{k_j+1}^* + \dots + x_{2k_j}^* \pmod{p}, \quad P_j < x_1, \dots, x_{2k_j} \leq Q_j.$$

В силу леммы 13,

$$\begin{aligned} \|\alpha_j\|_2^2 &\leq P_j^{-2l_j} k_j! P_j^{k_j} \left(\frac{2k_j(2P_j)^{2k_j-1}}{p} + 1 \right) < 2^{2k_j} (k_j+1)! \left(\frac{P_j^{k_j-1}}{p} + P_j^{-k_j} \right) \leq \\ &\leq (2k_j)^{k_j} p^{-0.5} \leq (2n)^n p^{-0.5} < e^{(\log p)^{1/2} \log \log p} p^{-0.5} < p^{-0.4}. \end{aligned}$$

Предположим теперь, что k_j нечётное. Тогда $l_j = k_j + 1$, а сумма величин $|\xi_j(h)|^2$ не превзойдёт числа решений сравнения

$$x_1^* + \dots + x_{k_j+1}^* \equiv x_{k_j+2}^* + \dots + x_{2k_j+2}^* \pmod{p}, \quad P_j < x_1, \dots, x_{2k_j+2} \leq Q_j.$$

Фиксируя переменные $x_{k_j+1}, x_{2(k_j+1)}$ (не более чем $\leq P_j^2$ способами), получим сравнение вида

$$x_1^* + \dots + x_{k_j}^* \equiv x_{k_j+1}^* + \dots + x_{2k_j}^* + h \pmod{p}, \quad P_j < x_1, \dots, x_{2k_j} \leq Q_j.$$

Оценивая число его решений с помощью леммы 13, будем иметь:

$$\|\alpha_j\|_2^2 = P_j^{-2l_j} \cdot P_j^2 k_j! P_j^{k_j} \left(\frac{2k_j(2P_j)^{2k_j-1}}{p} + 1 \right) < (2k_j)^{k_j} p^{-0.5} < p^{-0.4}.$$

Таким образом, в каждом из случаев $\|\alpha_j\|_2 < p^{-0.2}$. Следовательно, неравенство $\|\alpha_1\|_2 \cdot \|\alpha_2\|_2 \cdot \|\alpha_3\|_2 < p^{-0.5-c}$ выполняется с $c = 0.1$. Поэтому в силу леммы 12 имеем:

$$|W|^k \leq (P_1 P_2 P_3)^k p^{-c_1}, \quad c_1 = (0.1c)^{10^4} = 10^{-2 \cdot 10^4}.$$

Так как $k \leq (k_1 + 1)(k_2 + 1)(k_3 + 1) \leq 8mn^2$, то

$$|W| \leq P_1 P_2 P_3 p^{-\frac{c_1}{k}} \leq \frac{x}{h} p^{-\frac{c_1}{8mn^2}}.$$

Возвращаясь к оценке исходной суммы, находим:

$$\begin{aligned} |V| &\leq \frac{x}{h} (\log p + 1)^2 p^{-\frac{c_1}{8mn^2}}, \\ |S_{c,d}| &\leq \frac{2x}{cd(c-1)} (\log p + 1)^2 p^{-\frac{c_1}{8mn^2}} \sum_h \frac{1}{h} \sum_{P_1, P_2, P_3} 1 \leq \frac{2x}{cd(c-1)} (\log p + 1)^9 p^{-\frac{c_1}{8mn^2}}, \\ \left| \sum_{\nu \in B} e_p(a\nu^*) \right| &\leq x (\log p + 1)^{10} p^{-\frac{c_1}{8mn^2}}, \\ \left| \sum_{\nu \in B} e_p(a\nu^*) \right| &\leq 7x \frac{m}{n} \log \frac{n}{m} + x (\log p + 1)^{10} p^{-\frac{c_1}{8mn^2}}. \end{aligned}$$

Беря теперь

$$n = \left\lceil \frac{10^{-10^4} \sqrt{\log x}}{7 \log \log p} \right\rceil,$$

приходим к искомому утверждению. $\square$

Завершим настоящий обзор рядом замечаний.

1. Из теоремы 4 с помощью тождества И.М. Виноградова в форме Р. Вона (см., например, [47, гл. II, §6]) стандартным образом выводится оценка суммы Клоостермана по простым числам. Именно, справедлива

ТЕОРЕМА 7. Пусть выполнены условия теоремы 4. Тогда для суммы

$$S_1 = \sum_{\varpi \leq N} e_q(a\varpi^* + b\varpi),$$

где ϖ пробегает простые числа, справедлива оценка: $|S| < N^{1-c_1/\varrho^2}$, $c_1 = 2^{-11}c$.

2. Теорема 5 в случае $b \equiv 0 \pmod{p}$ значительно уступает по силе теореме 6. Так, в случае $x = p^\alpha$, где $0 < \alpha \leq 0.5$ - фиксированная постоянная эти теоремы приводят, соответственно, к оценкам

$$\sum_{\nu \leq x} e_p(a\nu^*) \ll \frac{x(\log \log p)^{4/7}}{(\log p)^{1/7}}, \quad \sum_{\nu \leq x} e_p(a\nu^*) \ll \frac{x(\log \log p)^3}{(\log p)^{1/2}}.$$

Однако соединение метода Карацубы с леммой 13 и разбиением промежутка $1 \leq \nu \leq x$ на множества A и B , которое применялось Ж. Бургейном и М.З. Гараевым в теореме 6, позволяет доказать следующие утверждения, несколько расширяющие диапазон нетривиальности оценок теорем 5 и 6 (см. [43]). Так, справедливы:

ТЕОРЕМА 8. Пусть $e^{(\log p)^{2/3}(\log \log p)^{4/3}} < x \leq \sqrt{p}$, $(a, p) = 1$. Тогда

$$\sum_{\nu \leq x} e_p(a\nu^*) \ll xD_1^{-1}, \quad D_1 = \frac{(\log x)^{3/2}}{(\log p)(\log \log p)^2}.$$

ТЕОРЕМА 9. Пусть $e^{(\log p)^{2/3}(\log \log p)^{1/3}} < x \leq \sqrt{p}$, $(ab, p) = 1$. Тогда

$$\sum_{\nu \leq x} e_p(a\nu^*) \ll xD_2^{-1}(\log D_2),$$

$$\sum_{\nu \leq x} e_p(a\nu^* + b\nu) \ll xD_2^{-3/4}, \quad D_2 = \frac{\log x}{(\log p)^{2/3}(\log \log p)^{1/3}}.$$

Эти утверждения представляются не лишёнными интереса потому, что их доказательство вполне элементарно и не опирается на лемму Бургейна. Отметим, что в доказательстве теоремы 6 оценка трилинейной суммы W из условия леммы 12 используется в случае, когда нормы $\|\alpha_j\|_2$ не превышают $p^{-1/4}\tau$, где величина τ растёт не быстрее сколь угодно малой степени p . Очень краткое и изящное доказательство оценки вида $W \ll \tau^{33/18}p^{-1/4} + \max_{j=1,2,3} |\alpha_j(0)|$ (где $\tau \geq 1$), отличное от доказательства Ж. Бургейна [46], было найдено И.Д. Шкредовым (частное сообщение от 28 июня 2016 г.). Оно опирается на оценку трилинейной суммы из недавней работы Г. Петридиса и И.Е. Шпарлинского [50].

3. В случае, когда $x \asymp p^\alpha$, где $0 < \alpha < 0.5$ - фиксированное число, отстоящее от значений вида $(2k)^{-1}$, $k = 1, 2, 3, \dots$, оценки сумм из п. 2 могут быть усилены (см. [51]). Именно, справедлива

ТЕОРЕМА 10. Пусть $k \geq 2$ - фиксированное целое число, c - абсолютная постоянная с условием $0 < c \leq 0.25$, $\varepsilon = c/(k^2 - k)$. Тогда при любых x , таких, что $p^{1/(2k)+\varepsilon} \leq x \leq p^{1/(2k-2)-\varepsilon}$ имеет место оценка

$$\sum_{\nu \leq x} e_p(a\nu^* + b\nu) \ll_{c,k} x \frac{\log \log p}{\log p}.$$

4. Утверждения, подобные теоремам 5, 6, справедливы для сумм вида

$$\sum_{\nu \leq x} f(\nu) e_p(a\nu^* + b\nu),$$

где $f(\nu)$ – любая из функций $\tau_k(\nu)$, $2^{\omega(\nu)}$, $\varphi(\nu)$, $r(\nu)$ (здесь $\tau_k(\nu)$ – многомерная функция делителей, $\omega(\nu)$ – число различных простых делителей ν , $r(\nu)$ – количество представлений ν суммой двух квадратов целых чисел). Более того, все утверждения теорем 5, 6 остаются в силе для случая, когда $f(\nu)$ – произвольная мультипликативная функция с условием $|f(\nu)| \leq 1$. Исследованию сумм такого типа в случае произвольного модуля q и $x \geq q^{0.5+\varepsilon}$ посвящены работы [52]–[55], в случае простого q – статьи [56], [57].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Salie H. Über die Kloostermanschen Summen $S(u, v; q)$ // *Math. Z.*, **34** (1931), 91–109.
2. Whiteman A.L. A note on Kloosterman sums // *Bull. Amer. Math. Soc.* **51**:6 (1945), 373–377.
3. Williams K.S. Note on the Kloosterman sum // *Proc. Amer. Math. Soc.* **30**:1 (1971), 61–62.
4. Kloosterman H.D. On the representation of numbers in the form $ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$ // *Acta Math.*, **49** (1926), 407–464.
5. Виноградов И.М. Об одной тригонометрической сумме и ее приложениях в теории чисел // *Доклады АН СССР. Нов. сер.*, **5** (1933), 195–204.
6. Виноградов И.М. О некоторых тригонометрических суммах и их приложениях, *Доклады АН СССР. Нов. сер.*, **6** (1933), 249–255.
7. Виноградов И.М. Тригонометрические суммы, зависящие от составного модуля // *Доклады АН СССР. Нов. сер.*, **5** (1934), 225–229.
8. Tolev D.I. An identity for the Kloosterman sum // [arXiv:1007.2054](https://arxiv.org/abs/1007.2054) [math.NT] (2010).
9. Salie H. Zur Abschätzung der Fourierkoeffizienten ganzer Modulformen // *Math. Z.*, **36** (1932), 263–278.
10. Davenport H. On certain exponential sums // *J. reine angew. Math.*, **169** (1933), 158–176.
11. Weil A. On some exponential sums // *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **34** (1948), 204–207.
12. Степанов С.А. Об оценке сумм Клоостермана // *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **35**:2 (1971), 308–323.
13. Королёв М.А. О нелинейной сумме Клоостермана // *Чебышевский сб.*, **17**:1 (2016), 140–147.
14. Карацуба А.А. Распределение обратных величин в кольце вычетов по заданному модулю // *Доклады АН*, **333**:2 (1993), 138–139.
15. Карацуба А.А. Дробные доли специального вида функций // *Изв. РАН. Сер. матем.*, **59**:4 (1995), 61–80.
16. Карацуба А.А. Аналоги сумм Клоостермана // *Изв. РАН. Сер. матем.*, **59**:5 (1995), 93–102.

17. Карацуба А.А. Суммы дробных долей специального вида функций // *Доклады АН*, **54**:1 (1996), 541.
18. Карацуба А.А. Аналогии неполных сумм Kloostermana и их приложения // *Tatra Mt. Math. Publ.*, **11** (1997), 89–120.
19. Карацуба А.А. Двойные суммы Kloostermana // *Матем. заметки*, **66**:5 (1999), 682–687.
20. Постников А.Г. О сумме характеров по модулю, равному степени простого числа // *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **19**:1 (1955), 11–16.
21. Postnikov A.G. On dirichlet L -series with the character modulus equal to the power of a prime number // *J. Indian Math. Soc. (N.S.)*, **20** (1956), 217–226.
22. Королёв М.А. Неполные суммы Kloostermana и их приложения // *Изв. РАН. Сер. матем.*, **64**:6 (2000), 41–64.
23. Бургейн Ж., Гараев М.З. Сумма множеств, образованных обратными элементами в полях простого порядка, и полилинейные суммы Kloostermana // *Изв. РАН. Сер. матем.*, **78**:4 (2014), 19–72.
24. Heath-Brown D.R. Arithmetic applications of Kloosterman sums // *Nieuw. Arch. Wiskd.*, **5**/1:4 (2000), 380–384.
25. Устинов А.В. Приложения сумм Kloostermana к арифметике и геометрии. Алгоритм Евклида, цепные дроби, решетки и числа Фробениуса. Lambert Academic Publishing, 2011.
26. Виноградов И.М. Новые приложения тригонометрических сумм // *Доклады АН СССР. Нов. сер.*, **1** (1934), 10–14.
27. Виноградов И.М. Новые асимптотические выражения // *Доклады АН СССР. Нов. сер.*, **1** (1934), 49–51.
28. Розин С.М. О нулях L -рядов Дирихле // *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **23**:4 (1959), 503–508.
29. Чудаков Н.Г. О нулях L -функций Дирихле для модулей, равных степеням нечётного простого // *Вестник ЛГУ. Сер. матем., мех. астрон.*, **1** (1966), 93–98.
30. Карацуба А.А. Тригонометрические суммы специального вида и их приложения // *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **28**:1 (1964), 237–248.
31. Чубариков В.Н. Уточнение границы нулей L -рядов Дирихле по модулю, равному степени простого числа // *Вестник МГУ. Сер. матем., мех.*, **2** (1973), 46–52.
32. Burgess D.A. The distribution of quadratic residues and non-residues // *Mathematika*, **4**:1 (1957), 106–112.
33. Burgess D.A. On character sums and primitive roots // *Proc. London Math. Soc.* (3), **12** (1962), 179–192.
34. Burgess D.A. On character sums and L -series // *Proc. London Math. Soc.* (3), **12** (1962), 193–206.
35. Карацуба А.А. Суммы характеров с простыми числами // *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **34**:2 (1970), 299–321.

-
36. Копанева А.А. Оценка коротких сумм характеров Дирихле по сдвинутым простым числам // *Чебышевский сб.*, **9**:1 (2008), 122–143.
37. Копанева А.А., Бурлакова Е.А. Оценка сумм характеров по сплошному промежутку суммирования // *Чебышевский сб.*, **14**:2 (2013), 118–122.
38. Степанов С.А., Шпарлинский И.Е. Об оценке тригонометрических сумм с рациональными и алгебраическими функциями. // В сб.: *Автоморфные функции и теория чисел*. Владивосток, 1989. С. 5–18.
39. Карацуба А.А. Основы аналитической теории чисел. 2-е изд. М., Наука, 1983.
40. Карацуба А.А. Оценки тригонометрических сумм особого вида и их приложения // *Докл. АН СССР*, **137** (1961), 513–514.
41. Карацуба А.А. Рациональные тригонометрические суммы специального вида и их приложения. *Автореферат дисс. на соискание уч. ст. к. ф.-м. н.* М., МГПИ им. В.И. Ленина, 1962.
42. Виноградов А.И. О числах с малыми простыми делителями // *Доклады АН СССР*, **109**:4 (1956), 683–686.
43. Королёв М.А. О методе Карацубы оценок сумм Клоостермана // *Мат. сборник*, **207**:8 (2016), 117–134.
44. Прахар К. Распределение простых чисел. М., Мир, 1967.
45. Bourgain J., Garaev M.Z. Kloosterman sums in residue rings // *Acta Arith.*, **164**:1 (2014), 43–64.
46. Bourgain J. Multilinear exponential sums in prime fields under optimal entropy condition on the sources // *Geom. Funct. Anal.*, **18**:5 (2009), 1477–1502.
47. Воронин С.М., Карацуба А.А. Дзета-функция Римана. М., Физматлит, 1994.
48. Iwaniec H. On zeros of Dirichlet L -series // *Invent. Math.* **23** (1974), 97–104.
49. Королев М.А. Короткие суммы Клоостермана по мощному модулю // *Доклады РАН*, **470**:5 (2016), 505–507
50. Petridis G., Shparlinski I.E. Bounds of trilinear and quadrilinear exponential sums // [arXiv:1604.08469v2 \[math.NT\]](https://arxiv.org/abs/1604.08469v2).
51. Королёв М.А. О коротких суммах Клоостермана по простому модулю // *Матем. заметки*, **100**:6 (2016), 843–851.
52. Hajela D., Pollington A., Smith B. On Kloosterman sums with oscillating coefficients // *Canad. Math. Bull.* **31**:1 (1988), 32–36.
53. Wang G., Zheng Z. Kloosterman sums with oscillating coefficients // *Chinese Ann. Math.*, **19** (1998), 237–242 (Chinese); English transl.: *Chinese J. Contemp. Math.* **19** (1998), 185–191.
54. Deng P. On Kloosterman sums with oscillating coefficients // *Canad. Math. Bull.* **42**:3 (1999), 285–290.
55. Gong K., Jia C. Kloosterman sums with multiplicative coefficients // *Sci. China Math.* **59**:4 (2016), 653–660.

56. Королёв М.А. Короткие суммы Kloostermana с весами // *Матем. заметки*, **88**:3 (2010), 415–427.
57. Korolev M.A., On Kloosterman sums with multiplicative coefficients // **arXiv: 1610.09171 [math.NT]**.

REFERENCES

1. Salie H. 1931, “Über die Kloostermanschen Summen $S(u, v; q)$ ”, *Math. Z.*, vol. 34, pp. 91–109.
2. Whiteman A.L. 1945, “A note on Kloosterman sums”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 51, no. 6, pp. 373–377.
3. Williams K.S. 1971, “Note on the Kloosterman sum”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 30, no. 1, pp. 61–62.
4. Kloosterman H.D. 1926, “On the representation of numbers in the form $ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$ ”, *Acta Math.*, vol. 49, pp. 407–464.
5. Vinogradov I.M. 1933, “On a certain trigonometrical expressions and its applications in the theory of numbers”, *Compt. Rend. Acad. Sci. URSS. N.S.*, vol. 5, pp. 195–204 (Russian; English summary).
6. Vinogradov I.M. 1933, “Some trigonometrical polynomes and their applications”, *Compt. Rend. Acad. Sci. URSS. N.S.*, vol. 6, pp. 249–255 (Russian; English summary).
7. Vinogradov I.M. 1934, “Trigonometrical polynomials for complicated moduli”, *Compt. Rend. Acad. Sci. URSS. N.S.*, vol. 5, pp. 225–229 (Russian; English summary).
8. Tolev D.I. 2010, “An identity for the Kloosterman sum”, **arXiv:1007.2054 [math.NT]**.
9. Salie H. 1932, “Zur Abschätzung der Fourierkoeffizienten ganzer Modulformen”, *Math. Z.*, vol. 36, pp. 263–278.
10. Davenport H. 1933, “On certain exponential sums”, *J. reine angew. Math.*, vol. 169, pp. 158–176.
11. Weil A. 1948, “On some exponential sums”, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, vol. 34, pp. 204–207.
12. Stepanov S.A. 1971, “An estimation of Kloosterman sums”, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, vol. 35, no. 2, pp. 308–323.
13. Korolev M.A. 2016, “On non-linear Kloosterman sum”, *Chebyshevsk. sb.*, vol. 17, no. 1, pp. 140–147.
14. A.A. Karatsuba. 1993, “Distribution of inverse values in a residue ring modulo a given number”, *Russian Acad. Sci. Dokl. Math.*, vol. 48, no. 3, pp. 452–454.
15. A.A. Karatsuba. 1995, “Fractional parts of functions of a special form”, *Izv. Math.*, vol. 59, no. 4, pp. 721–740.
16. A.A. Karatsuba. 1995, “Analogues of Kloosterman sums”, *Izv. Math.*, vol. 59, no. 5, pp. 971–981.
17. A.A. Karatsuba. 1996, “Sums of fractional parts of functions of a special form”, *Russian Acad. Sci. Dokl. Math.*, vol. 54, no. 1, p. 541.

18. A.A. Karatsuba. 1997, "Analogues of incomplete Kloosterman sums and their applications", Tatra Mt. Math. Publ., vol. 11, pp. 89–120.
19. A.A. Karatsuba. 1999, "Double Kloosterman sums", Math. Notes, vol. 66, no. 5, pp. 565–569.
20. A.G. Postnikov. 1955, "On the sum of characters with respect to a modulus equal to a power of a prime number", Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., vol. 19, no. 1, pp. 11–16.
21. A.G. Postnikov. 1956, "On dirichlet L -series with the character modulus equal to the power of a prime number", J. Indian Math. Soc. (N.S.), vol. 20, pp. 217–226.
22. M.A. Korolev. 2000, "Incomplete Kloosterman sums and their applications", Izv. Math., vol. 64, no. 6, pp. 1129–1152.
23. J. Bourgain, M.Z. Garaev. 2014, "Sumsets of reciprocals in prime fields and multilinear Kloosterman sums", Izv. RAN. Ser. Mat., vol. 78, no. 4, pp. 19–72.
24. Heath-Brown D.R. 2000, "Arithmetic applications of Kloosterman sums", Nieuw. Arch. Wiskd., vol. 5/1, no. 4, pp. 380–384.
25. A.V. Ustinov. 2011. Applications of Kloosterman Sums in Arithmetic and Geometry, Lambert Academic Publishing. (Russian).
26. I.M. Vinogradov. 1934, "New applications of trigonometrical polynomes", Compt. Rend. Acad. Sci. URSS. N.S., vol. 1, pp. 10–14 (Russian; English summary).
27. I.M. Vinogradov. 1934, "New asymptotic expressions", Compt. Rend. Acad. Sci. URSS. N.S., vol. 2, pp. 49–51 (Russian; English summary).
28. S.M. Rozin. 1959, "On null Dirichlet L -series", Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., vol. 23, no. 4, pp. 503–508.
29. N.G. Chudakov. 1966, "On the zeros of Dirichlet L -functions for moduli equal to the powers of an odd prime", Vestn. Leningr. State Univ. Ser. Mathem., mech. and astron., vol. 1, pp. 93–98 (Russian).
30. A.A. Karatsuba. 1964, "Trigonometric sums of a special type and their applications", Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat., vol. 28, no. 1, pp. 237–248.
31. V.N. Chubarikov. 1973, "More precise band for zeroes of Dirichlet L -series in modul equal to power of a prime number", Vestn. Moscow State Univ. Ser. Math. Mech., vol. 2, pp. 46–52 (Russian).
32. D.A. Burgess. 1957, "The distribution of quadratic residues and non-residues", Mathematika, vol. 4, no. 1, pp. 106–112.
33. D.A. Burgess. 1962, "On character sums and primitive roots", Proc. London Math. Soc. (3), vol. 12, pp. 179–192.
34. D.A. Burgess. 1962, "On character sums and L -series", Proc. London Math. Soc. (3), vol. 12, pp. 193–206.
35. A.A. Karatsuba. 1970, "Sums of characters over prime numbers", Math. USSR-Izv., vol. 4, no. 2, pp. 303–326.

36. A.A. Kopaneva. 2008, “An estimate for short sums of Dirichlet characters over shifted primes”, *Chebyshevsk. sb.*, vol. 9, no. 1, pp. 122–143.
37. A.A. Kopaneva, E.A. Burlakova. 2013, “Evaluation of character sums over the continuous interval of summation”, *Chebyshevsk. sb.*, vol. 14, no. 2, pp. 118–122.
38. Stepanov S.A., Shparlinski I.E. 1989, “On the estimate of exponential sums with rational and algebraic functions”, *Authomorphic functions and number theory*. pp. 5–18 (Russian).
39. A.A. Karatsuba. 1993, *Basics analytic number theory*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.
40. A.A. Karatsuba. 1961, “Estimates of trigonometric sums of a special form, and their applications”, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 137, pp. 513–514.
41. A.A. Karatsuba. 1962, *Rational trigonometric sums of a special form, and their applications. PhD Thesis*, Moscow, Moscow State Pedegogical Institute in the name of V.I. Lenin (Russian).
42. A.I. Vinogradov. 1956, “On the numbers with small prime factors”, *Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.)*, vol. 109, no. 4, pp. 683–686.
43. M.A. Korolev. 2016, “On Karatsuba’s method of estimating of Kloosterman sums”, *Math. Sb.*, vol. 207, no. 8, pp. 1142–1158.
44. K. Prachar. 1957, *Primzahlverteilung*. Springer-Verlag.
45. J. Bourgain, M.Z. Garaev. 2014, “Kloosterman sums in residue rings”, *Acta Arith.*, vol. 164, no. 1, pp. 43–64.
46. J. Bourgain. 2009, “Multilinear exponential sums in prime fields under optimal entropy condition on the sources”, *Geom. Funct. Anal.*, vol. 18, no. 5, pp. 1477–1502.
47. A.A. Karatsuba, S.M. Voronin. 1992, *The Riemann zeta function*, W. de Gruyter, Berlin New York.
48. H. Iwaniec. 1974, “On zeros of Dirichlet L -series”, *Invent. Math.*, vol. 23, pp. 97–104.
49. M.A. Korolev. 2016, “Short Kloosterman sums to powerful modulus”, *Doklady Mathematics*, vol. 94, no. 2, pp. 561–562.
50. Petridis G., Shparlinski I.E. Bounds of trilinear and quadrilinear exponential sums // [arXiv:1604.08469v2](https://arxiv.org/abs/1604.08469v2) [math.NT].
51. M.A. Korolev. 2016, “Short Kloosterman sums of modulo prime”, *Mat. Zametki*, vol. 100, no. 6, pp. 843–851.
52. D. Hajela, A. Pollington, B. Smith. 1988, “On Kloosterman sums with oscillating coefficients”, *Canad. Math. Bull.*, vol. 31, no. 1, pp. 32–36.
53. G. Wang, Z. Zheng. 1998, “Kloosterman sums with oscillating coefficients”, *Chinese Ann. Math.*, vol. 19, pp. 237–242 (Chinese); English transl.: *Chinese J. Contemp. Math.*, vol. 19, pp. 185–191.
54. P. Deng. 1999, “On Kloosterman sums with oscillating coefficients”, *Canad. Math. Bull.*, vol. 42, no. 3, pp. 285–290.
55. K. Gong, C. Jia. 2016, “Kloosterman sums with multiplicative coefficients”, *Sci. China Math.*, vol. 59, no. 4, pp. 653–660.

-
56. M.A. Korolev. 2010, “Short Kloosterman Sums with Weights”, Math. Notes, vol. 88, no. 3, pp. 374–385.
57. Korolev M.A., On Kloosterman sums with multiplicative coefficients // [arXiv: 1610.09171 \[math.NT\]](#).

Математический институт им. В. А. Стеклова.

Поступило 22.04.2016 г.

Принято в печать 12.12.2016 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 17 Выпуск 4

УДК 539.3+514.4

DOI 10.22405/2226-8383-2016-17-4-110-123

**ОГРАНИЧЕННЫЕ ПОЛУГРУППЫ ОПЕРАТОРОВ
И ВОПРОСЫ СХОДИМОСТИ МЕТОДА
БУБНОВА–ГАЛЁРКИНА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА
НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК**

В. Н. Кузнецов, Т. А. Кузнецова, Л. В. Бессонов (г. Саратов)

Аннотация

В работе рассматриваются вопросы, связанные со скоростью сходимости метода Бубнова–Галёркина при численном расчёте напряжённо-деформированного состояния геометрически нелинейных оболочек в динамическом случае. Для решения этих вопросов привлекается аппарат сильно непрерывных ограниченных полугрупп операторов. В теории краевых задач методы функциональных полугрупп операторов эффективно применяются с 60-х годов XX-века. Это работы Э. Хилля, Р. Филлипса, С. Г. Крейна, С. Мизохата и других авторов. Так, применяя аппарат сильно непрерывных полугрупп операторов, С. Г. Крейн в конце 60-х годов по-новому доказал теоремы существования и единственности решений линейных уравнений механики. В 2000 году В. Н. Кузнецов и Т. А. Кузнецова впервые применили аппарат ограниченных полугрупп операторов для исследования решений линейных уравнений пологих оболочек, что позволило решить задачу о гладкости решений систем линейных уравнений оболочек. В это же время В. Н. Кузнецов и Т. А. Кузнецова предложили так называемый метод линейной аппроксимации по отдельным параметрам, который позволил решить задачу о гладкости решения уже нелинейных уравнений пластин и оболочек. Это дало возможность определиться со скоростью сходимости метода Бубнова — Галёркина при численном решении нелинейных краевых задач для геометрически нелинейных оболочек в области устойчивости по параметрам. В данной работе приводится результат о скорости сходимости метода Бубнова–Галёркина в случае кусочно-гладкой границы нелинейной оболочки.

Ключевые слова: ограниченные полугруппы операторов, геометрически нелинейные оболочки, метод линейной аппроксимации по отдельным параметрам, порядок скорости сходимости метода Бубнова — Галёркина.

Библиография: 19 названий.

**LIMITED OPERATOR SEMIGROUPS AND ISSUES
OF THE CONVERGENCE OF THE BUBNOV–GALERKIN
METHOD FOR ONE CLASS OF SHALLOW SHELLS
NONLINEAR EQUATIONS**

V. N. Kuznetsov, T. A. Kuznetsova, L. V. Bessonov (Saratov)

Abstract

This paper discusses issues related to the rate of convergence of the Bubnov–Galerkin method in numerical calculation of stress-strain state of geometrically nonlinear shells in the dynamic case. To address these issues involved the unit strongly continuous semigroups of limited operators. Methods of functional semigroups of operators was applied effectively in the

theory of boundary value problems since the 60s XX-th century. It should be noted author E. Hill, R. Phillips, S. G. Krein, S. Mizohata and others. So, using the methods of strongly continuous semigroups of operators S. G. Krein proved a new theorem on the existence and uniqueness of solutions of linear equations of mechanics in late 60s. In 2000, V. N. Kuznetsov and T. A. Kuznetsova first used the methods limited semigroups of operators to solution of linear equations of shallow shells, which solved the problem of smoothness of solutions of linear systems of equations of shells. At the same time V. N. Kuznetsov and T. A. Kuznetsova have developed a method called a linear approximation in separated parameters, which allow to solve the problem of smoothness of solutions of nonlinear equations of the theory of plates and shells. This made it possible to determine the speed of convergence of the Bubnov–Galerkin method the numerical solution of nonlinear boundary value problems for the geometrically nonlinear shells in the area of sustainability in the parameters.

In this paper, we complete the proof of the result of the rate of convergence of the Bubnov–Galerkin method in the case of an arbitrary configuration shell borders.

Keywords: limited semigroup, geometrically nonlinear shell, the method of linear approximation on separated parameters, the order of convergence of the Bubnov — Galerkin method rate.

Bibliography: 19 titles.

1. Введение

Пусть $\{V(t), t \geq 0\}$ — сильно непрерывная ограниченная полугруппа операторов (С.Н.О.П.О.), действующая в банаховом пространстве, порождающий оператор которой A имеет полную систему собственных функций с собственными значениями λ_n . Известно [1-2], что в это случае имеют место прямые и обратные теоремы приближения по собственным подпространствам, аналогичные классическим теоремам, но выраженные в терминах порождающего оператора. Рассмотрим ещё одно приложение ограниченных полугрупп операторов, теперь в теории краевых задач.

Рассмотрим задачу Коши вида

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\alpha \Delta^2 w + \phi_1(x, y, t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \phi_2(x, y, t) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \\ \quad + 2\phi_3(x, y, t) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \phi_4(x, y, t) + q, t \in [0; T], \\ w(x, y, 0) = w_0, \frac{\partial w}{\partial t}(x, y, 0) = w_1, \\ w|_{\Gamma} = 0, \frac{\partial w}{\partial \bar{n}}|_{\Gamma} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

где Δ — оператор Лапласа, $\phi_i(x, y, t)$ — некоторые непрерывные в области $\Omega \times [0; T]$ функции, а Ω — ограниченная область с границей Γ , представляющей собою кусочно-гладкую кривую.

Под решением этой задачи понимается любая функция $w(x, y, t)$, удовлетворяющая уравнению, начальным и граничным условиям (1) из пространства $L^\infty((0; T), H^2(\Omega))$, где $H^2(\Omega)$ — пространство Соболева.

Рассмотрим операторы вида

$$A(t)w = \alpha \Delta^2 w - \phi_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \phi_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2\phi_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (2)$$

Пусть Γ — кусочно-гладкая граница. Известно [3], что оператор Δ^2 в случае наших граничных условий является положительно определённым самосопряжённым оператором. Известно также [4], что операторы $A(t)$ вида (2) будут положительно определёнными самосопряжёнными операторами при выполнении условий

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \phi_2}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial y} + \frac{\partial \phi_2}{\partial x} = 0, \\ |\phi_i(x, y, t)| < C, i = 1, 2, 3, \end{cases} \quad (3)$$

где C — некоторая положительная константа. Как показано в [2] операторы $i\Delta$ и $A^{1/2}(t)$ являются подобными, порождают эквивалентные ограниченные полугруппы операторов и константа эквивалентности не зависит от t . Этот факт позволяет доказать (см. [5]), что задача Коши (1) при сделанных выше предположениях имеет единственное решение $w(x, y, t)$, принадлежащее пространству $L^\infty((0; T), H^2(\Omega))$, где $H^2(\Omega)$ — пространство Соболева. Более того, если начальные функции $w_0 \in D(\Delta^{2k})$ и $w_1 \in D(\Delta^{2k-1})$, а функции $\phi_i(x, y, t) \in D(\Delta^{2k-1})$ при любом $t \in [0; T]$, то решение задачи Коши принадлежит области определения оператора Δ^{2k} при любом $t \in [0; T]$.

Отметим, что при доказательстве последнего утверждения, т.е. гладкости решения задачи Коши (1) существенную роль играет тот факт, что оператор $A(t)$ вида (2) порождает ограниченную полугруппу операторов.

Остановимся более подробно на результатах работы [5]. В [5] рассматривается класс нелинейных моделей оболочек, отражающих геометрическую нелинейность оболочек и удовлетворяющих следующим ограничениям:

- любая неизвестная функция, входящая в уравнения системы, однозначно выражается через функцию прогиба w ;
- область Ω , определяющая срединную поверхность оболочки, является ограниченной областью с кусочно гладкой границей;
- граничные условия рассматриваются в форме Неймана.

К этому классу относятся известные модели Кирхгофа и Тимошенко (как в смешанной форме, так и заданные в перемещениях) и некоторые другие модели. Для исследования решений моделей этого класса в работе [5] разработан так называемый метод линейной аппроксимации по отдельным параметрам, который позволяет строить последовательность функций $\{w_k\}$, являющихся решением линейных операторных уравнений вида:

$$\begin{cases} \alpha_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\alpha_1 A w + -L_k w + f_n, t \in [0; T], \\ w(x, y, 0) = w_0, \frac{\partial w}{\partial t}(x, y, 0) = w_1, \\ w|_\Gamma = 0, \frac{\partial w}{\partial \eta}|_\Gamma = 0, \end{cases} \quad (4)$$

где $A = \Delta^2$ либо $A = -\Delta$, и где

$$L_k w = \phi_{1,k}(x, y, t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \phi_{2,k}(x, y, t) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2\phi_{3,k}(x, y, t) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},$$

где последовательность непрерывных в области $\Omega \times [0; T]$ функций $\phi_{i,n}(x, y, t), i = 1, 2, 3, f_n$ получена в результате применения метода В. В. Петрова [6] — метода последовательного возмущения параметров — к соответствующей нелинейной модели.

Как показано в [5], последовательность функций $\{w_k\}$ сходится в пространстве

$$L^\infty((0; T), H^2(\Omega)),$$

где $H^2(\Omega)$ — пространство Соболева, к функции прогиба w исходной модели оболочки.

Более того, свойства единственности и гладкости решений операторных уравнений (4) переносится на решение соответствующей исходной задачи.

Таким образом, в случае, когда операторы вида

$$A_n = \alpha_1 A - L_n, \quad (5)$$

являются положительно определенными при любом $t \in [0; T]$, соответствующая нелинейная модель имеет решение того же порядка гладкости, что и начальные функции w_0 , w_1 и нагрузка q .

Гладкость решений модельной задачи гарантирует определённый порядок скорости сходимости метода Бубнова–Галёркина. Доказательства этого факта приведено в [5] на примере нелинейной модели Кармана для прямоугольной в плане оболочечной конструкции. В более поздних работах [6–10] также обсуждались вопросы гладкости решений нелинейных задач и вопросы сходимости метода Бубнова–Галёркина.

В данной работе на примере модели Кармана докажем результат о порядке скорости сходимости метода Бубнова–Галёркина в случае кусочно гладкой границы оболочки Ω .

2. Вопросы сходимости метода Бубнова–Галёркина при решении линейных операторных уравнений

Запишем последовательность операторных уравнений (4) в случае нелинейной модели Кармана.

$$\begin{cases} \frac{\gamma}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -D \Delta^2 w + L_n(w) + f_n + q, t \in [0; T], \\ w(x, y, 0) = w_0, \frac{\partial w}{\partial t}(x, y, 0) = w_1, \\ w|_{\Gamma} = 0, \frac{\partial w}{\partial \eta}|_{\Gamma} = 0, \end{cases} \quad (6)$$

где

$$L_n(w) = \frac{\partial^2 F_n}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_n}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 F_n}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},$$

$f_n = \Delta_k F_n + q$, и $\{F_n\}$ — последовательность функций, полученная каким-либо методом, сходящаяся в пространстве $L^\infty((0; T), H^2(\Omega))$ к функции усилий F .

Решение методом Бубнова–Галёркина уравнения (4) заключается в определении последовательности функций

$$w_{n,N}(t, x, y) = \sum_{k=1}^N \beta_{k,n}(t) \phi_k, \quad (7)$$

сходящейся к решению w_n , где $\{\phi_k\}$ — система собственных функций оператора Δ^2 , а коэффициенты $\beta_{k,n}(t)$ находятся из условий:

1. $\left(\frac{\gamma}{g} \frac{\partial^2 w_{n,N}}{\partial t^2}, \phi_r \right) + (D \Delta w_{n,N} + L_n(w_{n,N}), \phi_r) = (f_n, \phi_r), r = 1, \dots, N;$
2. $w_{n,N}(0, \bullet) = w_{0,N}, \frac{\partial w_{n,N}}{\partial t}(0, \bullet) = w_{1,N},$

где

$$w_{0,N} \rightarrow w_0, w_{1,N} \rightarrow w_1, \text{ при } N \rightarrow \infty.$$

Относительно гладкости функций w_n , полученных в результате решения линейных операторных уравнений (6) методом Бубнова—Галёркина, имеет место следующее утверждение, доказанное в [5].

ТЕОРЕМА 1. *Предположим, что*

1. *Функции $\frac{\partial^2 F_n}{\partial x_i \partial y_j}$ непрерывны во времени.*
2. *Оператор $A_n = D\Delta^2 - L_n$ является положительно определённым.*
3. *При любом $t \in [0; T]$ функции w_0, w_1, q принадлежат области определения оператора Δ^{2r} , где действие оператора Лапласа рассматривается в подпространстве $H_0^2(\Omega)$.*

Тогда для любого $t \in [0; T]$ решение w_n задачи (6) принадлежит области определения оператора Δ^{2r} .

Согласно [5], в случае, когда нагрузка q и начальные условия w_0, w_1 задачи (1) таковы, что при любом n для операторного уравнения (6) выполняются условия теоремы 1, решение (w, F) задачи (1) является гладким, т.е.

$$w \in L^\infty((0; T), D(\Delta^{2r})), F \in L^\infty((0; T), D(\Delta^{2r}))$$

Докажем следующее утверждением.

ЛЕММА 1. *Пусть линейный симметрический оператор A имеет полную ортонормированную систему $\{u_n\}$ собственных функций с собственными значениями $\{\lambda_n\}$:*

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$$

Тогда оператор A является положительно определённым тогда и только тогда, когда $\lambda_1 > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно [11], что положительно определённый симметрический оператор с дискретным спектром имеет в качестве системы собственных векторов ортонормированную систему функций с положительными собственными значениями.

Обратно, пусть $\lambda_1 > 0$. Рассмотрим

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} (u, u_k) u_k.$$

Тогда

$$Au = \sum_{k=1}^{\infty} (Au, u_k) u_k = \sum_{k=1}^{\infty} (u, Au_k) u_k = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (u, u_k) u_k.$$

Отсюда получим

$$(Au, u) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (u, u_k)^2 \geq \lambda_1 \sum_{k=1}^{\infty} (u, u_k)^2 = \lambda_1 \|u\|^2.$$

Лемма доказана.

Докажем теперь теорему относительно порядка скорости сходимости метода Бубнова—Галеркина при тех же предположениях, что и в теореме 1. Имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. *Скорость сходимости последовательности функций $\{w_{n,N}\}$ вида (7) к решению w_n операторного уравнения (6) в пространстве $L^\infty((0; T), H_0^2(\Omega))$ имеет порядок $O\left(\frac{1}{N^{2r-1}}\right)$.*

Доказательство. Обозначим через A_n линейный оператор вида

$$A_n = D\Delta^2 - L_n \quad (8)$$

Запишем систему обыкновенных дифференциальных уравнений для нахождения коэффициентов $\beta_{k,n}(t)$ в разложении (7)

$$\frac{\gamma}{g}\beta''_{n,s} + \sum_{k=1}^N a_{k,s}\beta_{k,n} = b_{n,s}, \quad s = 1, \dots, N, \quad (9)$$

где $a_{k,s} = (A_n\phi_k, \phi_s)$, A_n — оператор вида (8), $b_{n,s} = (f_n, \phi_s)$. При этом

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \beta_{k,n}(0)\phi_k &\rightarrow w_0, \quad N \rightarrow \infty, \\ \sum_{k=1}^N \beta'_{k,n}(0)\phi_k &\rightarrow w_1, \quad N \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (10)$$

Для решения уравнения (6) рассмотрим ряд Фурье

$$w_n = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{n,k}(t)\phi_k \quad (11)$$

и систему N уравнений

$$\left(\frac{\gamma}{g} \frac{\partial^2 w_n}{\partial t^2}, \phi_s \right) + (A_n w_n, \phi_s) = (f_n, \phi_s), \quad s = 1, \dots, N, \quad (12)$$

для нахождения коэффициентов $\alpha_{k,n}(t)$ разложения (11).

Запишем систему уравнений (12) в виде

$$\frac{\gamma}{g}\alpha''_{n,s} + \sum_{k=1}^N a_{k,s}\alpha_{k,n} + k, n = b_{n,s} - \left(A_n \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} \alpha_{k,n}\phi_k \right), \phi_s \right), \quad s = 1, \dots, N, \quad (13)$$

Вычтем из (9) систему уравнений (13) и обозначим

$$y_{n,s} = \beta_{n,s} - \alpha_{n,s}. \quad (14)$$

Тогда получим

$$\frac{\gamma}{g}y''_{n,s} + \sum_{k=1}^N a_{k,s}y_{k,n} = c_{n,N,s}, \quad s = 1, \dots, N, \quad (15)$$

где

$$c_{n,N,s} = \left(A_n \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} \alpha_{k,n}\phi_k \right), \phi_s \right).$$

Учитывая тот факт, что в пространстве функций $H_0^2(\Omega) \subset L_2(\Omega)$ нормы $\|A_n w\|_{L_2(\Omega)}$ и $\|\Delta^2 w\|_{L_2(\Omega)}$ эквивалентны и что при любом $t \in [0; T]$ по теореме 1

$$\left\| \sum_{k=N+1}^{\infty} \alpha_{k,n}\phi_k \right\|_{L_2(\Omega)} = O\left(\frac{1}{N^{2r}}\right)$$

получаем оценку

$$|c_{n,N,s}| = \left| \left(A_n \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} \alpha_{k,n}\phi_k \right), \phi_s \right) \right| \leq \frac{c_1}{N^{2r-2}}, \quad (16)$$

где константа c_1 зависит только от величины r .

В силу (10), (11), (14) начальные условия для системы (15) можно считать нулевыми, т.е.

$$y_{n,s}(0) = 0, \quad y'_{n,s}(0) = 0.$$

Запишем систему (14) в матричной форме:

$$\frac{\gamma}{g} Y_n'' + M Y_n = C_n, \quad (17)$$

где

$$Y_n'' = \begin{bmatrix} y''_{n,1} \\ y''_{n,2} \\ \dots \\ y''_{n,N} \end{bmatrix}, \quad C_n = \begin{bmatrix} c_{n,N,1} \\ c_{n,N,2} \\ \dots \\ c_{n,N,N} \end{bmatrix}, \quad Y_n = \begin{bmatrix} y_{n,1} \\ y_{n,2} \\ \dots \\ y_{n,N} \end{bmatrix}, \quad (18)$$

$$M = ((A_n \phi_k, \phi_s))_{k=1, \dots, N}^{s=1, \dots, N}.$$

Рассмотрим характеристическое уравнение матрицы M

$$\begin{vmatrix} (A_n \phi_1, \phi_1) - \lambda & (A_n \phi_2, \phi_1) & \dots & (A_n \phi_N, \phi_1) \\ (A_n \phi_1, \phi_2) & (A_n \phi_2, \phi_2) - \lambda & \dots & (A_n \phi_N, \phi_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (A_n \phi_1, \phi_N) & (A_n \phi_2, \phi_N) & \dots & (A_n \phi_N, \phi_N) - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (19)$$

Так как оператор A_n — положительно определённый, а $\{\phi_k\}$ образует ортогональный базис, то как показано в [11], все корни уравнения (19) являются положительными числами. Таким образом, при любом $t \in [0; T]$ все собственные числа матрицы M вида (18) являются положительными. Как показано в [11], в этом случае при любом $t \in [0; T]$ имеет место неравенство

$$(MX, X) \geq c \|X\|, \quad (20)$$

где константа c не зависит от N , а зависит только от минимального собственного значения оператора A_n .

Умножим скалярно уравнение (17) на столбец Y_n . Тогда с учётом того, что

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} Y_n, Y_n \right) = \left(\frac{dY_n}{dt}, \frac{dY_n}{dt} \right) = \|Y_n'\|^2,$$

получаем

$$\frac{\gamma}{g} \|Y_n'\|^2 + (MY_n, Y_n) = (C_n, Y_n),$$

Далее из условий (20) и (16) следует

$$\|Y_n'\|^2 \leq c \|C_n\| \leq \frac{c_1}{N^{2r-3}}.$$

Отсюда для всех $k = 1, \dots, N$ получаем оценки

$$\|Y_n\|_{L_2(\Omega)} \leq \frac{c_2}{N^{r-3/2}}, \quad (21)$$

где константа c_2 не зависит от N , а зависит только от величины r и минимального собственного значения оператора A_n .

Из оценок (21) следует, что для всех $k = 1, \dots, N$

$$\beta_{k,N}(t) \rightarrow \alpha_{n,k}(t) \text{ при } N \rightarrow \infty$$

и порядок скорости сходимости последовательности $\{\beta_{k,N}(t)\}$ равен $O\left(\frac{1}{N^{2r}}\right)$.

В силу (9) и (13) функции $\beta_{k,N}(t)$ и $\alpha_k(t)$ являются дважды дифференцируемы. Следовательно, сходимость $\beta_{k,N}(t) \rightarrow \alpha_k(t)$ является равномерной. Отсюда в силу равенства Парсеваля величина $\|w_{n,N} - S_n\|_{L^2(\Omega)}$, где S_n — частичная сумма ряда Фурье (11), имеет для всех $t \in [0; T]$ порядок скорости сходимости равный $O\left(\frac{1}{N^{2r}}\right)$.

Тем самым теорема доказана.

3. Вопросы скорости сходимости метода Бубнова–Галёркина при численном расчёте напряжённо-деформированного состояния нелинейной оболочки

Рассмотрим вопросы скорости сходимости метода Бубнова–Галёркина для нелинейных моделей оболочек. Приведём рассуждения для нелинейной модели Кармана. Отметим, что аналогичные рассуждения проходят для весьма широкого класса нелинейных уравнений. Запишем геометрически нелинейную модель оболочки с кусочно гладкой границей — модель Кармана, где функции прогиба и усилий удовлетворяют краевым условиям в форме Неймана.

$$\begin{cases} \gamma \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -D\Delta^2 w + L(w, F) + \Delta_k F + q, \\ \frac{1}{E}\Delta^2 F = -\frac{1}{2}L(w, w) - \Delta_k F, \end{cases} \quad (22)$$

где функции прогиба и усилий удовлетворяют краевым и начальным условия:

$$\begin{cases} w|_{\Gamma} = \frac{\partial w}{\partial \bar{\eta}}|_{\Gamma} = 0, \\ F|_{\Gamma} = \frac{\partial F}{\partial \bar{\eta}}|_{\Gamma} = 0, \\ w(x, y, t) = w_0, \\ \frac{\partial w}{\partial t}(x, y, 0) = w_1. \end{cases} \quad (23)$$

Будем предполагать, что решение задачи (22)–(23) рассматривается в области однозначности изменения параметров и на конечном временном интервале $t \in (0; T)$ в пространстве $L^\infty((0; T), H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\Omega))$.

В данном случае имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполняются условия теоремы 2. Тогда скорость сходимости последовательности функций $\{w_N^*, F_N^*\}$, полученных в результате применения метода Бубнова–Галёркина к системе нелинейных уравнений (1), к решению этой системы (w, F) в пространстве $L^\infty((0; T), H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\Omega))$ имеет порядок $O\left(\frac{1}{N^{2r}}\right)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем системы равенств для решения (w, F) задачи (22)–(23) и для приближённого решения $\{(w_N^*, F_N^*)\}$:

$$\begin{cases} \gamma \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -D\Delta^2 w + L(w, F) + \Delta_k F + q, \\ \frac{1}{E}\Delta^2 F = -\frac{1}{2}L(w, w) - \Delta_k w, \end{cases} \quad (24)$$

и

$$\begin{cases} \gamma \frac{\partial^2 w_N^*}{\partial t^2} = -D\Delta^2 w_N^* + L(w_N^*, F_N^*) + \Delta_k F_N^* + q + \sum_{n>N} \alpha_n(t) \phi_n, \\ \frac{1}{E}\Delta^2 F_N^* = -\frac{1}{2}L(w_N^*, w_N^*) - \Delta_k w_N^* + \sum_{n>N} \beta_n(t) \phi_n, \end{cases} \quad (25)$$

где $\sum_{n>N} \alpha_n(t) \phi_n$ — разложение в ряд Фурье функции

$$\frac{\gamma}{g} \frac{\partial^2 w_N^*}{\partial t^2} - (-D\Delta^2 w_N^* + L(w_N^*, F_N^*) + \Delta_k F_N^* + q).$$

Вычтем из системы (24) систему равенств (25), тогда получим

$$\begin{cases} \frac{\gamma}{g} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (w - w_N^*) = -D\Delta^2 (w - w_N^*) + (L(w, F) - L(w_N^*, F_N^*)) + \Delta_k (F - F_N^*) - \\ \quad - \sum_{n>N} \alpha_n(t) \phi_n, \\ \frac{1}{E} \Delta^2 (F - F_N^*) = -\frac{1}{2} (L(w, w) - L(w_N^*, w_N^*)) - \Delta_k (w - w_N^*) - \sum_{n>N} \beta_n(t) \phi_n, \end{cases} \quad (26)$$

Применим к системе (26) рассуждения, которые использовались в [5, гл. II, §2.2] при доказательстве сходимости метода последовательных нагружений в динамическом случае, а именно: умножим первое равенство системы (26) скалярно на функцию $\frac{\partial}{\partial t}(w - w_N^*)$, продифференцируем второе равенство по переменной t и умножим скалярно на функцию $(F - F_N^*)$. Далее сложим полученные равенства. В результате имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\gamma}{2g} \left\| \frac{\partial}{\partial t} (w - w_N^*) \right\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{D}{2} \left\| \Delta (w - w_N^*) \right\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2E} \left\| \Delta (F - F_N^*) \right\|_{L_2(\Omega)}^2 \right) = & (L(w, F) - L(w_N^*, F_N^*), \frac{\partial}{\partial t} (w - w_N^*)) - \\ & (L(w, \frac{\partial}{\partial t} w) - L(w_N^*, \frac{\partial}{\partial t} w_N^*), F - F_N^*) + \\ & + \left(\sum_{n>N} \gamma_n(t) \phi_n, F - F_N^* \right). \end{aligned} \quad (27)$$

Преобразуем равенство (27), воспользовавшись следующими тождествами:

$$\begin{aligned} L(w, F) &= L(w_N^*, F_N^*) = L(F, w - w_N^*) + L(F - F_N^*, w_N^*), \\ L(w, \frac{\partial w}{\partial t}) - L(w_N^*, \frac{\partial w_N^*}{\partial t}) &= L(w - w_N^*, \frac{\partial w}{\partial t}) - L(w_N^*, \frac{\partial}{\partial t} (w - w_N^*)), \\ (L(F, w - w_N^*), \frac{\partial}{\partial t} (w - w_N^*)) &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (L(F, w - w_N^*), w - w_N^*) - \\ &\quad - \frac{1}{2} (L(w - w_N^*, w - w_N^*), \frac{\partial}{\partial t} F). \end{aligned}$$

В результате приходим к следующему неравенству, имеющему место при любом $t \in [0; T]$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\gamma}{2g} \left\| \frac{\partial}{\partial t} (w - w_N^*) \right\|_{L_2(\Omega)}^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{D}{2} \left\| \Delta (w - w_N^*) \right\|_{L_2(\Omega)}^2 - \right. \right. \\ \left. \left. - |L(F, w - w_N^*), w - w_N^*| \right) + \frac{1}{2E} \left\| \Delta (F - F_N^*) \right\|_{L_2(\Omega)}^2 \right] \leq \\ \leq \frac{1}{2} \left| (L(w - w_N^*, w - w_N^*), \frac{\partial F}{\partial t}) \right| + \left| (L(w - w_N^*, F - F_N^*), \frac{\partial w}{\partial t}) \right| + \\ + \left| \left(\sum_{n>N} \gamma_n(t) \phi_n, F - F_N^* \right) \right|. \end{aligned}$$

Воспользуемся теперь известными фактами [12]:

$$|(f, \phi)| \leq \|f\|_{L_1(\Omega)} \cdot \|\phi\|_{L^\infty(\Omega)}$$

и

$$\|L(u, v)\|_{L_1(\Omega)} \leq c_1 \|u\|_{H^2(\Omega)} \cdot \|v\|_{H^2(\Omega)},$$

где $H^2(\Omega)$ — пространство Соболева.

На основании этих фактов из последнего неравенства следует:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\gamma}{2g} \left\| \frac{\partial}{\partial t} (w - w_N^*) \right\|_{L_2(\Omega)}^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{D}{2} \left\| \Delta (w - w_N^*) \right\|_{L_2(\Omega)}^2 - \right. \right. \\
& \left. \left. - |(L(F, w - w_N^*), w - w_N^*)| \right) + \frac{1}{2E} \left\| \Delta (F - F_N^*) \right\|_{L_2(\Omega)}^2 \right] \leq \\
& \leq c_1 \|w - w_N^*\|_{H^2(\Omega)}^2 \cdot \left\| \frac{\partial F}{\partial t} \right\|_{L^\infty(\Omega)} + c_2 \|w - w_N^*\|_{H^2(\Omega)}^2 \cdot \left\| \frac{\partial w}{\partial t} \right\|_{L^\infty(\Omega)} + \\
& + c_2 \|F - F_N^*\|_{H^2(\Omega)}^2 \cdot \left\| \frac{\partial w}{\partial t} \right\|_{L^\infty(\Omega)} + \left\| \sum_{n>N} \gamma_n(t) \phi_n \right\|_{L_2(\Omega)} \cdot \|F - F_N^*\|_{H^2(\Omega)}. \tag{28}
\end{aligned}$$

Далее, в силу того, что мы рассматриваем случай однозначности решения модельной задачи, оператор $D\Delta^2 \bullet - L(F, \bullet)$ является положительно определённым в пространстве $H_2^0(\Omega) \subset L_2(\Omega)$. Тогда [5, гл. II, §2.2] имеем:

$$\frac{D}{2} \left\| \Delta (w - w_N^*) \right\|_{L_2(\Omega)}^2 - |(L(F, w - w_N^*), w - w_N^*)| \geq c^3 \left\| \Delta (w - w_N^*) \right\|_{L_2(\Omega)}^2.$$

Известно, что для $V \in H_2^0(\Omega)$ нормы $\|\Delta V\|_{L_2(\Omega)}$ и $\|\Delta V\|_{H^2(\Omega)}$ эквивалентны, поэтому из неравенства (28) следует неравенство:

$$\begin{aligned}
& c_4 \left\| \Delta (w - w_N^*) \right\|_{H^2(\Omega)}^2 + c_5 \left\| \Delta (F - F_N^*) \right\|_{H^2(\Omega)}^2 \leq \\
& \leq c_1 \int_0^l \|w - w_N^*\|_{H^2(\Omega)}^2 \left\| \frac{\partial F}{\partial t} \right\|_{L^\infty(\Omega)} dS + \\
& + c_2 \int_0^l \|w - w_N^*\|_{H^2(\Omega)}^2 \left\| \frac{\partial w}{\partial t} \right\|_{L^\infty(\Omega)} dS + \\
& + c_2 \int_0^l \|F - F_N^*\|_{H^2(\Omega)}^2 \left\| \frac{\partial w}{\partial t} \right\|_{L^\infty(\Omega)} dS + \\
& + \int_0^l \left\| \sum_{n>N} \gamma_n(t) \phi_n \right\|_{L_2(\Omega)} \|F - F_N^*\|_{H^2(\Omega)}^2 dS + \dots \tag{29}
\end{aligned}$$

В силу теоремы 1 функции w_N^* , F_N^* принадлежат области определения оператора Δ^{2r+2} . Отсюда в силу теоремы 2 порядок сходимости частичных сумм рядов Фурье для функций

$$\frac{\gamma}{g} \frac{\partial^2 w_N^*}{\partial t^2} - (-D\Delta^2 w_N^* + L(w_N^*, F_N^*) + \Delta_k F_N^* + q),$$

и

$$\frac{1}{E} \Delta^2 F_N^* - \left(-\frac{1}{2} L(w_N^*, w_N^*) - \Delta_k F_N^* \right),$$

равен $O\left(\frac{1}{N^{2r}}\right)$. Следовательно,

$$\left\| \sum_{n>N} \gamma_n(t) \phi_n \right\| = O\left(\frac{1}{N^{2r}}\right), \text{ при } t \in [0; T]. \tag{30}$$

Из равенств (29) и (30) получаем, что при малых значениях t_1 для всех $t \in [0; t_1]$

$$\|w - w_N^*\|_{H^2(\Omega)} = O\left(\frac{1}{N^{2r}}\right), \quad \|F - F_N^*\|_{H^2(\Omega)} = O\left(\frac{1}{N^{2r}}\right). \tag{31}$$

Из равенства (29) следует, что неравенство (31) имеет место на интервале $(0; t_3)$, в случае малости величины $t_3 - t_2$. Таким образом (31) имеет место для всех $t \in [0; T]$.

Тем самым теорема доказана.

4. Замечание

В теореме 3 получена оценка скорости сходимости метода Бубнова–Галёркина в случае, когда в качестве ортонормированной системы функций рассматриваются собственные функции оператора Δ^2 . Можно показать, что аналогичные оценки имеют место в случае ортогональной

системы функций, удовлетворяющих граничным условиям модельной задачи. Такую систему функций можно построить, когда граница области Ω является кусочно-алгебраической, т.е. $\sigma\Omega = \Gamma = \bigcup_i \Gamma_i$, где Γ_i определена алгебраическими уравнениями $\mu_i(x, y) = 0$, $i = 1, \dots, L$. Введём вспомогательную функцию

$$\gamma(x, y) = \prod_{i=1}^L \mu_i(x, y).$$

Затем определим систему функций

$$\mathcal{P} = \{p_{i,j}(x, y) : p_{i,j}(x, y) = \gamma^2(x, y)x^i y^j\}, \quad i \in \mathbb{N}_+, \quad j \in \mathbb{N}_+.$$

Система $\mathcal{P}$ является полной системой функций [13]. Проведём ортогонализацию и нормирование построенной таким образом системы функций $\mathcal{P}$, используя процесс Гильберта–Шмидта. Таким образом, получим полную ортонормированную систему функций, которую будем использовать для поиска требуемого решения в виде разложения по этой системе методом Бубнова–Галёркина.

В работах [14–19] был разработан численный алгоритм построения ортогональной системы функций, удовлетворяющих граничным условиям, отвечающим жесткому закреплению краёв оболочки для оболочек с кусочно-алгебраическими границами, приведены примеры численного расчёта напряжённо-деформированного состояния оболочек методом Бубнова–Галёркина.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Терёхин А. П. Полгруппы операторов и смешанные свойства элементов банахова пространства, Мат. заметки, 16:1 (1974), С. 107–115
2. Кузнецова Т. А. Отыскание полгруппы операторов целого экспотенциального типа на заданных подпространствах : дис. ... к-та физ.-мат. наук. Саратов, 1980. 82 с.
3. Соболев В. И. О собственных элементах некоторых нелинейных операторов // ДАН, 1941, т.31, С. 734–736.
4. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. М. : Издательство технико-теоретической литературы, 1967.
5. Кузнецов В. Н. Метод последовательного возмущения параметров в приложении к расчету динамической устойчивости тонкостенных оболочечных конструкций : дис. ... д-ра техн. наук. Саратов, 2000.
6. Петров В. В. Метод последовательных нагружений в нелинейной теории пластин и оболочек. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 1975. 118 с.
7. Кузнецов В. Н., Кузнецова Т. А., Чумакова С. В. Операторные методы в нелинейной динамике // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам : межвуз. сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2003. Вып. 1. С. 70–80.
8. Кузнецов В. Н., Кузнецова Т. А., Чумакова С. В. и др. Операторный подход к задаче статической потери устойчивости оболочечных конструкций // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам : межвуз. сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2003. Вып. 1. С. 59–70.

9. Кузнецов Т. А., Баев К. А., Чумакова С. В. Метод фиктивных областей в теории оболочечных конструкций и его численная реализация // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам : межвуз. сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2007. Вып. 4. С. 55–59.
10. Кузнецов В. Н., Кузнецова Т. А., Чумакова С. В. О численной реализации метода последовательных нагружений при расчете геометрически нелинейных оболочек // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам : межвуз. сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2010. Вып. 6. С. 27–43.
11. Лионс Ж. Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М. : Мир, 1972. 104 с.
12. Михлин С. Г. Численная реализация вариационных методов. М. : Наука, 1966. — 280 с.
13. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближённые методы высшего анализа. М. : Физматлит, 1962. — 710 с.
14. Бессонов Л. В. Численная реализация алгоритма спектрального критерия локальной потери устойчивости оболочечной конструкции // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам : межвуз. сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2012. Вып. 7. С. 3–9.
15. Бессонов Л. В. Геометрические параметры и точки локальной потери устойчивости цилиндрической оболочки // Студенческая наука: перекрёстки теории и практики. Материалы I Внутривузовской научно-практической конференции студентов и аспирантов. Саратов. 2013. С. 20–23
16. Бессонов Л. В. Численная реализация метода последовательного возмущения параметров при расчете напряжённо-деформированного состояния оболочечной конструкции в случае жесткого закрепления краев оболочки // Изв. Саратов. ун-та Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т.15. вып.1. С. 74–79. DOI 10.18500/1816-9791-2015-15-1-74-79
17. Бессонов Л. В. Об операторном подходе при расчёте напряжённо-деформированного состояния оболочечных конструкций // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Казань. 2015. С. 467–469.
18. Бессонов Л. В. Численная реализация спектрального критерия определения точек локальной потери устойчивости оболочечной конструкции // Материалы XIX Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВСППС'2015), Москва, 2015. С. 223–225.
19. Bessonov L. V. Numerical Realization of The Method of Subsequent Parameters Perturbation for Calculating a Stress-Strain State of The Shell // Applied Mechanics and Materials. 2015. Т. 799–800. С. 656–659.

REFERENCES

1. Terekhin A. P. Polgruppy operatorov i smeshannye svoistva elementov banakhova prostranstva, Mat. zametki, 16:1 (1974), S. 107–115
2. Kuznetsova T. A. Otyskanie polgruppy operatorov tselogo eksponentsial'nogo tipa na zadannykh podprostranstvakh : dis. ... k-ta fiz.-mat. nauk. Saratov, 1980. 82 s.

3. Sobolev V. I. O sobstvennykh elementakh nekotorykh nelineinykh operatorov // DAN, 1941, t.31, S. 734–736.
4. Mikhlin S. G. Variatsionnye metody v matematicheskoi fizike. M. : Izdatel'stvo tekhniko-teoreticheskoi literatury, 1967.
5. Kuznetsov V. N. Metod posledovatel'nogo vozmushcheniia parametrov v prilozhenii k raschetu dinamicheskoi ustoichivosti tonkostennykh obolochecnykh konstruksii : dis. ...d-ra tekhn. nauk. Saratov, 2000.
6. Petrov V. V. Metod posledovatel'nykh nagruzhenii v nelineinoi teorii plastin i obolochek. Saratov : Izd-vo Sarat. un-ta, 1975. 118 s.
7. Kuznetsov V. N., Kuznetsova T. A., Chumakova S. V. Operatornye metody v nelineinoi dinamike // Issledovaniia po algebre, teorii chisel, funktsional'nomu analizu i smezhnym voprosam : mezhvuz. sb. nauch. tr. Saratov : Izd-vo Sarat. un-ta, 2003. Vyp. 1. S. 70–80.
8. Kuznetsov V. N., Kuznetsova T. A., Chumakova S. V. i dr. Operatornyi podkhod k zadache staticheskoi poteri ustoichivosti obolochecnykh konstruksii // Issledovaniia po algebre, teorii chisel, funktsional'nomu analizu i smezhnym voprosam : mezhvuz. sb. nauch. tr. Saratov : Izd-vo Sarat. un-ta, 2003. Vyp. 1. S. 59–70.
9. Kuznetsov T. A., Baev K. A., Chumakova S. V. Metod fiktivnykh oblastei v teorii obolochecnykh konstruksii i ego chislennaia realizatsiia // Issledovaniia po algebre, teorii chisel, funktsional'nomu analizu i smezhnym voprosam : mezhvuz. sb. nauch. tr. Saratov : Izd-vo Sarat. un-ta, 2007. Vyp. 4. S. 55–59.
10. Kuznetsov V. N., Kuznetsova T. A., Chumakova S. V. O chislennoi realizatsii metoda posledovatel'nykh nagruzhenii pri raschete geometricheski nelineinykh obolochek // Issledovaniia po algebre, teorii chisel, funktsional'nomu analizu i smezhnym voprosam : mezhvuz. sb. nauch. tr. Saratov : Izd-vo Sarat. un-ta, 2010. Vyp. 6. S. 27–43.
11. Lions Zh. L. Nekotorye metody resheniia nelineinykh kraevykh zadach. M. : Mir, 1972. 104 s.
12. Mikhlin S. G. Chislennaia realizatsiia variatsionnykh metodov. M. : Nauka, 1966. — 280 s.
13. Kantorovich L. V., Krylov V. I. Priblizhennye metody vysshego analiza. M. : Fizmatlit, 1962. — 710 s.
14. Bessonov L. V. Chislennaia realizatsiia algoritma spektral'nogo kriteriia lokal'noi poteri ustoichivosti obolochecnoi konstruksii // Issledovaniia po algebre, teorii chisel, funktsional'nomu analizu i smezhnym voprosam : mezhvuz. sb. nauch. tr. Saratov : Izd-vo Sarat. un-ta, 2012. Vyp. 7. S. 3–9.
15. Bessonov L. V. Geometricheskie parametry i tochki lokal'noi poteri ustoichivosti tsilindricheskoi obolochki // Studencheskaia nauka: perekrestki teorii i praktiki. Materialy I Vnutrivuzovskoi nauchno-prakticheskoi konferentsii studentov i aspirantov. Saratov. 2013. S. 20–23
16. Bessonov L. V. Chislennaia realizatsiia metoda posledovatel'nogo vozmushcheniia parametrov pri raschete napriazhenno-deformirovannogo sostoiianiia obolochecnoi konstruksii v sluchae zhestkogo zakreplenii kraev obolochki // Izv. Sarat. un-ta Nov. ser. Ser. Matematika. Mekhanika. Informatika. 2015. T.15. vyp.1. S. 74–79. DOI 10.18500/1816-9791-2015-15-1-74-79

17. Bessonov L. V. Ob operatornom podkhode pri raschete napriazhenno-deformirovannogo sostoiianiia obolochecnykh konstruksii // KhI Vserossiiskii s"ezd po fundamental'nyim problemam teoreticheskoi i prikladnoi mekhaniki. Kazan'. 2015. S. 467–469.
18. Bessonov L. V. Chislennaia realizatsiia spektral'nogo kriteriia opredeleniia toчек lokal'noi poteri ustoichivosti obolochecnoi konstruksii // Materialy XIX Mezhdunarodnoi konferentsii po vychislitel'noi mekhanike i sovremennym prikladnym programmnyim sistemam (VMSPPS'2015), Moskva, 2015. S. 223–225.
19. Bessonov L. V. Numerical Realization of The Method of Subsequent Parameters Perturbation for Calculating a Stress-Strain State of The Shell // Applied Mechanics and Materials. 2015. T. 799–800. S. 656–659.

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

Поступило 16.09.2016 г.

Принято в печать 12.12.2016 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 17. Выпуск 4.

УДК 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2016-17-4-124-131

АППРОКСИМАЦИОННЫЙ ПОДХОД В НЕКОТОРЫХ
ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ РЯДОВ ДИРИХЛЕ
С МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ¹

В. Н. Кузнецов, О. А. Матвеева (г. Саратов)

Аннотация

Рассматривается класс рядов Дирихле с мультипликативными коэффициентами, которые определяют функции, регулярные в правой полуплоскости комплексной плоскости, и для которых существует последовательность полиномов Дирихле, равномерно сходящаяся к таким функциям в любом прямоугольнике, лежащем в критической полосе. Такие полиномы Дирихле получили в работе название аппроксимационных полиномов Дирихле.

Изучаются свойства аппроксимационных полиномов, в частности, для рядов Дирихле, коэффициенты которых определяются неглавными обобщенными характерами, то есть конечнозначными числовыми характерами, отличными от нуля для почти всех простых чисел, сумматорная функция которых ограничена.

Эти исследования представляют интерес в связи с задачей аналитического продолжения таких рядов Дирихле на комплексную плоскость, что, в свою очередь, связано с решением известной гипотезы Н. Г. Чудакова о том, что любой обобщенный характер является характером Дирихле.

Ключевые слова: ряд Дирихле, сумматорная функция коэффициентов, обобщенный характер, характер Дирихле, аппроксимационные полиномы.

Библиография: 15 наименований.

APPROXIMATION APPROACH IN CERTAIN PROBLEMS
OF THE THEORY OF DIRICLET SERIES WITH
MULTIPLICATIVE COEFFICIENTS

V. N. Kuznetsov, O. A. Matveeva (Saratov)

Abstract

In this paper we consider a class of Dirichlet series with multiplicative coefficients which define functions holomorphic in the right half of the complex plane, and for which there are sequences of Dirichlet polynomials that converge uniformly to these functions in any rectangle within the critical strip. We call such polynomials approximating Dirichlet polynomials.

We study the properties of the approximating polynomials, in particular, for those Dirichlet series, whose coefficients are determined by nonprincipal generalized characters, i.e. finite-valued numerical characters which do not vanish on almost all prime numbers and whose summatory function is bounded.

These developments are interesting in connection with the problem of the analytical continuation of such Dirichlet series to the entire complex plane, which in turn is tied with the solution of a well-known Chudakov hypothesis about every generalized character being a Dirichlet character.

Key words: Dirichlet series, summatory function of coefficients, generalized character, Dirichlet character, approximating polynomials

Bibliography: 15 items.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №16-01-00399)

1. Введение

Рассмотрим ряд Дирихле с мультипликативными коэффициентами

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s}, \quad s = \sigma + it, \quad (1)$$

и соответствующий (с теми же коэффициентами, что и у ряда Дирихле) степенной ряд

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} h(n)x^n. \quad (2)$$

Как следует из работы [1], при выполнении следующих условий:

1. сумматорная функция коэффициентов ограничена:

$$S(x) = \sum_{n \leq x} h(n) = O(1);$$

2. существует односторонний предел вида

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} g(x) = \alpha_0$$

3. для любого натурального k существует x_0 , $0 < x_0 < 1$, такое, что для всех x , удовлетворяющих неравенству $0 < x_0 \leq x < 1$, имеет место оценка

$$|g(x) - \alpha_0| \leq \frac{C}{|\ln^k(1-x)|}, \quad (3)$$

где константа C не зависит от x ,

функция $f(s)$, определенная рядом Дирихле (1), аналитически продолжима регулярным образом в полуплоскость $\sigma > 0$ и является непрерывной в широком смысле во всех точках мнимой оси. Кроме того, существует последовательность полиномов Дирихле $Q_n(s)$, обладающих следующими свойствами:

1. в полосе: $0 < \sigma_0 \leq \sigma < \infty$, $|t| \leq T$, где T — некоторая положительная константа, последовательность полиномов равномерно сходится к функции $f(s)$, определенной рядом Дирихле (1);
2. для любого $\sigma_0 > 0$ существует n_0 , что в полосе $0 < \sigma_0 \leq \sigma < \infty$, $|t| \leq T$ для всех $n \geq n_0$ имеет место оценка

$$|f(s) - Q_n(s)| \leq \frac{C}{(n+1)} \sigma_0,$$

где константа C зависит только от величины T .

3. для любого $\sigma_0 \geq 0$ существует n_0 такое, что при $n \geq n_0$ нормы полиномов Дирихле $Q_n(s)$ ограничены в полосе $0 < \sigma_0 \leq \sigma < \infty$, $|t| \leq T$ константой, зависящей только от T .

В дальнейшем такие полиномы будем называть аппроксимационными полиномами Дирихле ряда Дирихле (1).

Как показано в [2], для рядов Дирихле (1), коэффициенты которых определяются неглавными обобщенными характерами, существует последовательность аппроксимационных полиномов Дирихле $Q_n(s)$ с указанными выше свойствами.

В данной работе изучаются свойства аппроксимационных полиномов Дирихле для рядов Дирихле (1), а также обсуждаются их возможные приложения к некоторым задачам теории L -функций Дирихле.

2. Явный вид аппроксимационных полиномов Дирихле для определенных классов рядов Дирихле

Отметим, что как следует из [1-2], существуют различные последовательности аппроксимационных полиномов ряда Дирихле (1), и каждый раз встает задача построения аппроксимационных полиномов наиболее "простого" вида.

Для рядов Дирихле (1), коэффициенты которых определяются неглавными обобщенными характеристиками, имеет место следующее утверждение:

ТЕОРЕМА 1. *Для рядов Дирихле (1), где $h(n)$ — неглавный обобщенный характер, последовательность частичных сумм этого ряда*

$$Q_n(s) = \sum_{k=1}^n \frac{h(k)}{k^s} \quad (4)$$

является последовательностью аппроксимационных полиномов Дирихле.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим известное интегральное представление функции $f(s)$ в полуплоскости $\sigma \geq \sigma_0 > 0$

$$f(s) = s \int_1^\infty \frac{S(u)}{u^{s+1}} du,$$

где $S(u) = \sum_{n \leq u} h(n)$, и соответствующее интегральное представление для полинома Дирихле (4)

$$Q_n(s) = s \int_1^\infty \frac{\hat{S}(u)}{u^{s+1}} du,$$

где $\hat{S}$ — сумматорная функция последовательности $h(1), h(2), \dots, h(n), 0, 0, \dots, 0, \dots$

При $\sigma \geq \sigma_0 > 0$ и $|t| \leq T$ имеет место оценка:

$$\begin{aligned} |f(s) - Q_n(s)| &= |s| \left| \int_1^\infty \frac{S(u) - \hat{S}(u)}{u^{s+1}} du \right| \leq C \int_{n+1}^\infty \frac{|S(u) - \hat{S}(u)|}{u^{\sigma+1}} du \leq \\ &\leq \frac{C_1}{\sigma(n+1)^{\sigma_0}} \leq C_2 \varepsilon_n, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\varepsilon_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

В силу ограниченности функции $f(s)$ в области $0 < \sigma < \infty$, $|t| \leq T$ константой, зависящей только от T , см. [1-2], и в силу оценки (5) нормы полиномов $Q_n(s)$ при $n \geq n_0$, где n_0 определяется величиной σ_0 , будут ограничены в совокупности в прямоугольнике $0 < \sigma_0 \leq \sigma < 1$, $|t| \leq T$ константой, зависящей только от величины T , что и завершает доказательство теоремы 1.

□

В случае, когда $h(n)$ — неглавный характер Дирихле, имеет место следующий результат:

ТЕОРЕМА 2. *Пусть дан ряд Дирихле (1), где $h(n)$ — неглавный характер Дирихле. Тогда для аппроксимационных полиномов Дирихле (4) имеют место оценки:*

1. *в любом прямоугольнике $0 < \sigma_0 \leq \sigma < 1$, $|t| \leq T$, для всех n*

$$|Q_n(s)| < C,$$

где константа C зависит только от T ;

2. в любом прямоугольнике $0 < \sigma_0 \leq \sigma < 1$, $|t| \leq T$ имеет место оценка

$$|f(s) - Q_n(s)| \leq \frac{C}{(n+1)^\sigma},$$

где константа C зависит только от T .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В [5] показано, что при любом t имеет место оценка

$$S_t(n) = \sum_{n \leq x} h(n)n^{-it} = O(1). \quad (6)$$

В работе [6] показано, что в оценке (6) для всех $|t| \leq T$ константа в символе " O " зависит только от величины T .

Пусть $s = \sigma + it$. Запишем полином вида (4) в интегральной форме.

$$Q_n(\sigma + it) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h(n)n^{-it}}{n^\sigma} = \sigma \int_1^{\infty} \frac{\hat{S}_t(u)}{u^{\sigma+1}} du,$$

где

$$\hat{S}_t(u) = \begin{cases} S_t(u), & u < n+1 \\ S_t(n), & u \geq n+1. \end{cases}$$

Отсюда, в силу (6), получаем оценку вида:

$$|Q_n(\sigma + it)| < C,$$

где константа C не зависит от σ .

Далее, для всех n :

$$|f(s) - Q_n(s)| = \sigma \left| \int_1^{\infty} \frac{S(u) - \hat{S}_t(u)}{u^{\sigma+1}} du \right| \leq \frac{C}{|n+1|^\sigma}, \quad (7)$$

где константа C не зависит от величины σ . $\square$

3. К задаче описания области значений ряда Дирихле и аппроксимационных полиномов Дирихле в полуплоскости $\sigma > 1$

Рассмотрим ряд Дирихле (1)

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s},$$

где $h(n)$ — неглавный обобщенный характер, и последовательность аппроксимационных полиномов Дирихле (4)

$$Q_n(s) = \sum_{k=1}^n \frac{h(k)}{k^s}.$$

Докажем ряд утверждений относительно значений ряда Дирихле (1) и полиномов Дирихле (4) в полуплоскости $\sigma > 1$, точнее, в окрестности прямой $\sigma = 1$: $1 < \sigma < 1 + \delta$.

ЛЕММА 1. Ряд Дирихле (1) не равен нулю ни в одной точке полосы $1 < \sigma < 1 + \delta$.

Доказательство леммы 1 проводится так же, как и в случае L -функций Дирихле (см. [7]). В результате при любом $\sigma_0 > 1$ получается оценка вида

$$\frac{1}{|f(\sigma + it)|} < C,$$

где константа C зависит только от величины σ_0 .

ЛЕММА 2. *Функция $f(s)$, определенная рядом Дирихле (1), не ограничена в полосе $1 < \sigma < 1 + \delta$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию вида

$$\ln f(s) = - \sum_p \ln \left(1 - \frac{h(p)}{p^s}\right), \quad \sigma > 1. \quad (8)$$

В силу леммы 1 функция (8) является аналитической в полуплоскости $\sigma > 1$.

Рассуждения, почти дословно повторяющие рассуждения, приведенные в [8] на стр. 296–297, основанные на одной теореме Бора о суммировании ряда выпуклых кривых, позволяют для значений функции (8) получить следующее утверждение: множество значений функции (8) в полосе $1 < \sigma < 1 + \delta$ содержит любую конечную область комплексной плоскости. Как следствие этого утверждения получаем, что множество значений ряда Дирихле (1) в полосе $1 < \sigma < 1 + \delta$ содержит круг любого радиуса (за исключением нуля), что и завершает доказательство леммы 2. $\square$

ЛЕММА 3. *Для любой последовательности различных аппроксимационных полиномов $Q_n(s)$ нормы этих полиномов не ограничены в совокупности единой константой в полосе $1 < \sigma < 1 + \delta$.*

Утверждение леммы 3 является следствием леммы 2.

ЛЕММА 4. *Для любого $\sigma_0 > 1$ найдется n_0 такое, что полиномы Дирихле $Q_n(s)$, $n \geq n_0$, не равны нулю в полуплоскости $\sigma \geq \sigma_0$.*

Утверждение леммы 4 является следствием леммы 1.

ТЕОРЕМА 3. *Для любого числа $w_0 \neq 0$ существует такое n_0 , что для всех $n \geq n_0$: $w_0 = Q_n(s_n)$, где $s_n = \sigma_n + it_n$, $1 < \sigma_n < 1 + \delta$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В основе доказательства теоремы лежит известный результат Пикара. Приведем здесь формулировку теоремы Пикара в том виде, в котором она приведена в [8] на стр. 288.

ТЕОРЕМА 4 (Пикара). *Если функция $f(s)$ регулярна в круге $|s - s_0| < r$ и не принимает там значений 0 и 1, а $|f(s_0)| \leq \alpha$, то $|f(s)| \leq A(\alpha, \theta)$ в круге $|s - s_0| \leq \theta r$, $0 < \theta < 1$.*

Нужно отметить, что константа $A(\alpha, \theta)$ определяется только параметрами α и θ для любой функции $f(s)$, удовлетворяющей условию теоремы.

Доказательство теоремы 3 будем проводить от противного. Предположим, что существует такая последовательность полиномов $Q_{n_k}(s)$, что $w_0 \neq Q_{n_k}(s)$ для всех s , лежащих в полосе $1 < \sigma_n < 1 + \delta$.

В силу леммы 4 многочлены Дирихле $Q_{n_k}(s)$ при $n_k \geq n_0$ не имеют нулей при $\sigma > \sigma_0 > 1$.

Рассмотрим функцию

$$g_{n_k}(s) = \frac{Q_{n_k}(s) - w_0}{w_0}$$

и окружности радиусов $\frac{\delta}{2}$ и $\frac{\delta}{4}$ с центрами в одной точке

$$s_0 = 1 + \frac{1}{4}\delta + \frac{\sigma_0}{2} + iT.$$

Тогда верно неравенство

$$|g_{n_k}(s_0)| \leq \frac{\zeta(1 + \frac{\delta}{4}) + |w_0|}{|w_0|},$$

где $\zeta(s)$ — дзета-функция Римана.

Обозначим правую часть последнего неравенства α .

Внутри кругов, ограниченных окружностями, рассмотренными выше, функция $g_{n_k}(s)$ не равна нулю и единице. Следовательно, по теореме Пикара

$$|g_{n_k}(s)| < A(\alpha).$$

Отсюда получаем

$$|Q_{n_k}(s)| \leq A(w_0, \alpha) \text{ для } 1 < \sigma < 1 + \frac{\delta}{2}, T > 1,$$

для всех полиномов Дирихле при $n \geq n_0$, где n_0 определяется величиной σ_0 , что противоречит лемме 3. Таким образом, теорема доказана. $\square$

Отметим, что полученные здесь результаты относительно свойств аппроксимационных полиномов Дирихле предполагается использовать в дальнейших работах авторов, посвященных задаче аналитического продолжения рядов Дирихле (1), где $h(n)$ — неглавный обобщенный характер, на комплексную плоскость.

С этой задачей связано окончательное решение гипотезы Н. Г. Чудакова о том, что любой обобщенный характер является характером Дирихле (см. [1-2]). Эта гипотеза решена только в случае главных обобщенных характеров (см. [9]). Для неглавных обобщенных характеров проблема остается открытой. На связь между решением задачи об аналитическом продолжении рядов Дирихле (1) в случае неглавных обобщенных характеров и окончательным решением гипотезы Н. Г. Чудакова указывает следующий результат, полученный в работе [10]: если ряд Дирихле (1), где $h(n)$ — неглавный обобщенный характер, аналитически продолжим на комплексную плоскость, и функция $f(s)$, определенная рядом Дирихле (1), удовлетворяет следующему условию роста модуля

$$|f(s)| \leq Ce^{|s| \ln |s| + A|s|},$$

где A — некоторая положительная константа, то $h(n)$ — неглавный характер Дирихле.

Отметим, что аппроксимационный подход использовался авторами и ранее при решении отдельных вопросов теории L-функций [11-15]. Но в этих работах, в отличие от данной статьи, аппроксимационные полиномы строились для рядов Дирихле, коэффициенты которых определялись характерами Дирихле.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кузнецов В. Н., Матвеева О. А. О граничном поведении одного класса рядов Дирихле // Чебышевский сборник — Тула: изд-во ТПГУ, 2016, Т. 17, вып. 2, С. 162–169.
2. Кузнецов В. Н., Матвеева О. А. О граничном поведении одного класса рядов Дирихле с мультипликативными коэффициентами // Чебышевский сборник — Тула: изд-во ТПГУ, 2016, Т. 17, вып. 3, С. 115–124.

3. Чудаков Н. Г., Линник Ю. В. Об одном классе вполне мультипликативных функций. — ДАН СССР, 1950, Т. 74, №2, С. 133–136.
4. Чудаков Н. Г., Родосский К. А. Об обобщенном характере. — ДАН СССР, 1950, Т. 74, №4, С. 1137–1138.
5. Чудаков Н. Г., Бредихин Б. М. Применение равенства Парсеваля для оценок сумматорных функций характеров числовых полугрупп. — УМН., 1956, Т. 9, №2, С. 347–360.
6. Матвеев В. А., Матвеева О. А. О поведении в критической полосе рядов Дирихле с конечными коэффициентами и с ограниченной сумматорной функцией // Чебышевский сборник — Тула: изд-во ТПГУ, 2012, Т. 13, вып. 2, С. 106–116.
7. Карацуба А. А. Основы аналитической теории чисел — М.: Наука, 1983.
8. Титчмарш Е. К. Теория дзета-функции Римана. — М.: И. Л., 1953.
9. Глазков В. В. Характеры мультипликативной полугруппы натуральных чисел // Исследования по теории чисел: Межвуз. сб. науч. тр. — Саратов: Изд-во СГУ, 1968, Т. 2, С. 3–40.
10. Кузнецов В. Н. Аналог теоремы Сеге для одного класса рядов Дирихле // Мат. заметки, 1984, Т. 36, №6, С. 805–812.
11. Кузнецов В. Н., Матвеева О. А. Расширенная гипотеза Римана и нули функций, заданных рядами Дирихле с периодическими коэффициентами // Чебышевский сборник — Тула: изд-во ТПГУ, 2010, Т. 11, вып. 1, С. 188–198.
12. Коротков А. Е., Матвеева О. А. Об одном численном алгоритме определения нулей целых функций, определяемых рядами Дирихле с периодическими коэффициентами // Научные ведомости Белгородского государственного университета — Белгород: изд-во БелГУ, 2011, вып. 24, С. 47–54.
13. Матвеева О. А. Аппроксимационные полиномы и поведение L-функций Дирихле в критической полосе // Известия Саратовского ун-та. Серия «Математика. Механика. Информатика» — Саратов: изд-во Саратовского ун-та, 2013. Т. 13, вып. 4, С. 80–84.
14. Матвеева О. А. О нулях полиномов Дирихле, аппроксимирующих в критической полосе L-функции Дирихле // Чебышевский сборник — Тула: изд-во ТПГУ, 2013, Т. 14, вып. 2, С. 117–121.
15. Матвеева О. А. Почти периодические функции и плотностные теоремы для рядов Дирихле с периодическими коэффициентами // Материалы XII Международной конференции "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения— Тула, 2014, С. 238–239.

REFERENCES

1. Kuznetsov V. N., Matveeva O. A. "On the boundary behavior of a class of Dirichlet series" *Chebyshevskij sbornik*, Tula, publ TPGU, 2016, vol. 17, issue 2, pp. 162–169
2. Kuznetsov V. N., Matveeva O. A. "On the boundary behavior of a class of Dirichlet series with multiplicative coefficients" *Chebyshevskij sbornik*, Tula, publ TPGU, 2016, vol. 17, issue 3, pp. 115–124
3. Chudakov N. G., Linnik U. V. "On a class of completely multiplicative functions" *DAN SSSR*, 1950, vol. 74, issue 2, pp. 133–136.

4. Chudakov N. G., Rodosskij K. A. "On a generalized character" *DAN SSSR*, 1950, vol.74, issue 4, pp. 1137–1138.
5. Chudakov N. G., Bredichin B. M. "Usage of Parseval's equation for estimating summation functions of characters of numerical semigroups" *UMN.*, 1956, vol.9, issue 2, pp. 347–360.
6. Matveev V. A., Matveeva O. A. "On a behavior of the Dirichlet series with finitely valued coefficients and bounded summatory function in the critical strip" *Chebyshevskij sbornik*, Tula, publ TPGU, 2016, vol. 13, issue 2, pp. 106–116
7. Karatsuba A. A. "Basics of analytic number theory". "Nauka Moscow, 1983
8. Titchmarsh E. K., "Riemann zeta-function theory" I.L. Moscow, 1953
9. Glazkov V. V. "Issledovanija po teorii chisel: Mezhdunar. sb. nauch. tr.", publ. SSU, 1968, vol. 2, pp. 3–40
10. Kuznetsov V. N. "Analogue of the Szego theorem for a class of Dirichlet series" *Math. issues*, 1984, vol. 36, № 16, pp. 805–812
11. Kuznetsov V. N., Matveeva O. A. "Extended Riemann Hypothesis and zeros of functions defined by Dirichlet series with periodic coefficients" *Chebyshevskij sbornik*, Tula, publ TPGU, 2010, vol. 11, issue 1, pp. 188–198
12. Korotkov A. E., Matveeva O. A. "On a numerical algorithm for determining zeros of entire functions defined by Dirichlet series with periodic coefficients" *Nauchnye vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta*, Belgorod, publ BelGU, 2011, issue 24, pp. 47–54
13. Matveeva O. A. "Approximation polynomials and the behavior of the Dirichlet L-functions on the critical band" *Izvestiia Saratovskogo un-ta. Seriya «Matematika. Informatika. Mekhanika.»*, 2013, vol. 13, issue 4, pp. 80–84
14. Matveeva O. A. "On the zeros of Dirichlet polynomials that approximate Dirichlet L-functions in the critical band" *Chebyshevskij sbornik*, Tula, publ TPGU, 2013, vol. 14, issue 2, pp. 117–121
15. Matveeva O. A. "Almost periodic functions and density theorems for Dirichlet series with periodic coefficients" *Materialy XII Mezhdunarodnoj konferencii "Algebra i teorija chisel: sovremennye problemy i prilozhenija"*, Tula, 2014, pp. 238–239

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

Поступило 20.09.2016 г.

Принято в печать 12.12.2016 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 17. Выпуск 4.

УДК 514.113.5

DOI 10.22405/2226-8383-2016-17-4-132-140

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ СИЛЬНО СИММЕТРИЧНЫХ
МНОГОГРАННИКОВ

В. И. Субботин (г. Новочеркасск)

Аннотация

В работе доказана полнота списка замкнутых выпуклых многогранников в E^3 , сильно симметричных относительно вращения граней.

Многогранник называется симметричным, если он имеет хотя бы одну нетривиальную ось вращения. Все оси пересекаются в одной точке, которая называется центром многогранника. Все рассматриваемые в работе многогранники являются симметричными многогранниками.

Выпуклый многогранник называется сильно симметричным относительно вращения граней, если у каждой его грани F имеется ось вращения L , пересекающая относительную внутренность F , и L является осью вращения многогранника.

Очевидно, что порядок оси вращения L не обязательно совпадает с порядком этой оси, если грань F рассматривать как фигуру, отделённую от многогранника.

Ранее автором было доказано, что требование глобальной симметрии многогранника относительно осей вращения граней можно заменить более слабым условием симметрии звезды каждой грани многогранника: для того, чтобы многогранник был сильно симметричным относительно вращения граней, необходимо и достаточно, чтобы некоторая нетривиальная ось вращения каждой грани, рассматриваемой как фигура, отделённая от многогранника, являлась осью вращения звезды этой грани.

Под звездой грани F понимается сама грань и все грани, имеющие хотя бы одну общую вершину с F .

Учитывая это условие, определение многогранника сильно симметричного относительно вращения граней эквивалентно следующему: многогранник называется сильно симметричным относительно вращения граней, если некоторая нетривиальная ось вращения каждой грани, рассматриваемой как фигура, отделённая от многогранника, является осью вращения звезды этой грани.

При доказательстве основной теоремы о полноте списка многогранников рассматриваемого класса используется результат о полном перечислении так называемых сильно симметричных многогранников 1-го и 2-го класса из [1].

В настоящей статье доказывается, что помимо многогранников 1-го и 2-го класса к многогранникам, сильно симметричным относительно вращения граней, принадлежат ещё только 8 типов многогранников. Из этих восьми типов 7 не являются даже комбинаторно эквивалентными равноугольно-полуправильным (архимедовым). Один тип из восьми является комбинаторно эквивалентным равноугольно-полуправильному многограннику, но не принадлежит многогранникам 1-го или 2-го класса.

Переходя к многогранникам, двойственным сильно симметричным относительно вращения граней, т.е. к многогранникам, сильно симметричным относительно вращения многогранных углов, получаем и их полное перечисление. Отсюда следует, что существует 7 типов многогранников, сильно симметричных относительно вращения многогранных углов, которые не являются комбинаторно эквивалентными телам Гесселя.

Класс многогранников, сильно симметричных относительно вращения граней в работе обозначается SF . Класс SF , а также и упомянутые многогранники 1-го и 2-го класса можно рассматривать как обобщение класса правильных (платоновых) многогранников. Другие обобщения правильных многогранников можно найти в работах [3],[4], [12]-[15].

Ключевые слова: сильно симметричные многогранники, главная ось вращения, комбинаторно-эквивалентные многогранники.

Библиография: 15 наименований.

Ob odnom klasse sil'no simmetrichnyh mnogogrannikov

V. I. Subbotin

Abstract

We prove the completeness of the list of closed convex polyhedra in E^3 , that are strongly symmetric with respect to the rotation of the faces .

Polyhedron is called symmetric if it has at least one non-trivial rotation axis. All axes intersect at a single point called the center of the polyhedron. All considered polyhedra are polyhedra with the center.

A convex polyhedron is called a strongly symmetrical with respect to the rotation of the faces, if each of its faces F has an rotation axis L , intersects the relative interior of F , and L is the rotation axis of the polyhedron.

It is obvious that the order of rotation axis of L does not necessarily coincide with the order of this axis, if the face of F regarded as a figure separated from the polyhedron.

It has previously been shown, that the requirement of global symmetry of the polyhedron faces the rotation axis can be replaced by the weaker condition of symmetry of the star of each face of the polyhedron: to polyhedron was symmetrical with respect to the rotation of the faces, it is necessary and sufficient that some nontrivial rotation axis of each face, regarded as a figure separated from the polyhedron, is the rotation axis of the star of face.

Under the star of face F is understood face itself and all faces have at least one common vertex with F .

Given this condition, the definition of the polyhedron strongly symmetric with respect to the rotation of the faces is equivalent to the following: the polyhedron is called a strongly symmetrical with respect to the rotation of the faces , if some non-trivial rotation axis of each face, regarded as a figure separated from the polyhedron, is the rotation axis of the star of face.

In the proof of the main theorem on the completeness of the list of this class of polyhedra using the result of the complete listing of the so-called polyhedra of 1st and 2nd class [1].

In this paper we show that in addition to the polyhedra of the 1st and 2nd class, listed in [1], only 8 types of polyhedra belongs to the class of polyhedra strongly symmetric with respect to the rotation of faces. Seven of this eighteen types are not combinatorially equivalent regular or semi-regular (Archimedean). One type of eight is combinatorially equivalent Archimedean polyhedra, but does not belong to polyhedra of 1st or 2nd class.

Turning to the polyhedra, dual strongly symmetrical about the rotation of faces, that is, to the polyhedra, strongly symmetric about the rotation of polyhedral angles, we get their complete listing. It follows that there are 7 types of polyhedra, highly symmetric with respect to the rotation of polyhedral angles which are not combinatorially equivalent to Gessel bodies.

Class of polyhedra strongly symmetric with respect to the rotation of faces, as well as polyhedra 1st and 2nd class mentioned above can be viewed as a generalization of the class of regular (Platonic) polyhedra. Other generalizations of regular polyhedra can be found in [3],[4],[12]-[15].

Keywords: strongly symmetrical polyhedra, principal rotation axis, combinatorial equivalent.

Bibliography: 15 title.

1. Введение

Мы будем рассматривать симметричные замкнутые выпуклые многогранники в трёхмерном евклидовом пространстве.

В [1] автором полностью перечислены так называемые сильно симметричные многогранники 1-го и 2-го класса. Напомним определения этих классов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Замкнутый выпуклый многогранник в E^3 называется многогранником 1-го класса, если для любых двух соседних вершин V_1, V_2 справедливо следующее: рёберные звёзды вершин V_1, V_2 симметричны относительно плоскости, проходящей через середину ребра V_1V_2 , соединяющего эти вершины.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Замкнутый выпуклый многогранник в E^3 называется многогранником 2-го класса, если для любого плоского угла V_1VV_2 каждой грани многогранника справедливо следующее: рёберные звёзды вершин V_1, V_2 симметричны относительно биссекторной плоскости угла V_1VV_2 , перпендикулярной плоскости этого угла.*

Все указанные плоскости симметрии, о которых говорится в обоих определениях, являются не только локальными плоскостями симметрии соответствующих рёберных звёзд вершин, но и плоскостями симметрии многогранников в целом.

Это следует из лемм об эквивалентности локальных и глобальных условий симметрии в определениях 1 и 2. Доказательство этих лемм приведено в [1].

В [1] доказано, что существуют 11 типов многогранников 1-го класса и только 9 многогранников 2-го класса. Причём 2-й класс многогранников замкнут относительно преобразования двойственности.

В настоящей статье доказана полнота списка класса сильно симметричных выпуклых многогранников в трёхмерном евклидовом пространстве, а именно, сильно симметричных многогранников относительно вращения граней, [6], [7].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Замкнутый выпуклый многогранник в E^3 называется сильно симметричным относительно вращения граней, если: 1) у каждой грани есть ось вращения, перпендикулярная ей и проходящая через её относительную внутренность; 2) эта ось является осью симметрии звезды этой грани.*

При этом ось вращения предполагается нетривиальной и порядок оси вращения не обязательно совпадает с порядком оси вращения грани, рассматриваемой как фигура, отделённая от многогранника.

Заметим также, что локальная ось вращения звезды грани, о которой говорится в определении 3, является осью вращения всего многогранника. Это следует из леммы, доказанной в [7].

В дальнейшем класс многогранников, сильно симметричных относительно вращения граней будем обозначать SF . Класс SF можно рассматривать как обобщение класса правильных (платоновых) многогранников, основанное на симметрии элементов многогранника. Другие обобщения правильных многогранников можно найти, например в работах [3]-[5], [13]-[15].

Под звездой грани F понимается совокупность грани F и всех граней, имеющих хотя бы одну общую вершину с F .

При доказательстве основной теоремы о перечислении многогранников класса SF будут использованы результаты перечисления многогранников 1-го и 2-го классов из [1].

Далее нам понадобится понятие главной оси симметрии многогранника.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. *Ось вращения L многогранника называется главной, если все другие оси вращения, если они существуют, перпендикулярны L и порядок L не меньше порядка других осей.*

Если существует не одна, а несколько осей вращения, удовлетворяющих приведённым условиям, то любую из них можно выбрать в качестве главной.

2. Основная теорема

Справедливо следующее утверждение:

ТЕОРЕМА 1. Следующие типы многогранников исчерпывают класс SF :

1. Бесконечные серии прямых призм с правильными, либо с равноугольно - полуправильными основаниями;
2. многогранники 1-го класса;
3. многогранники 2-го класса;
4. один тип многогранников, не принадлежащих ни 1-му, ни 2-му классу, но комбинаторно эквивалентных равноугольно - полуправильному многограннику, рис. 1, а);
5. 7 типов, не являющихся комбинаторно эквивалентными ни правильным, ни равноугольно-полуправильным, рис. 1, б)–з).

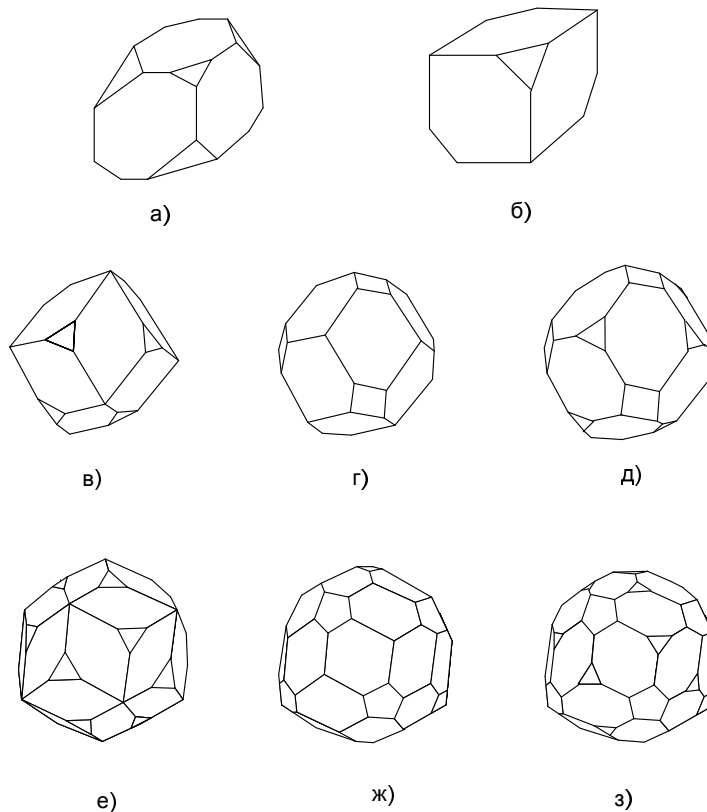


Рис. 1: Многогранники класса SF , не входящие в 1-й и 2-й класс: а) дважды усечённый куб, б) полуусечённый куб, в) 1-й полуусечённый ромбододекаэдр, г) 2-й полуусечённый ромбододекаэдр, д) усечённый ромбододекаэдр, е) 1-й полуусечённый ромботриаконтаэдр, ж) 2-й полуусечённый ромботриаконтаэдр, з) усечённый ромботриаконтаэдр

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Заметим, что все многогранники 1-го и 2-го класса принадлежат классу SF . Действительно, в силу определения многогранников 1-го и 2-го классов все их грани являются многоугольниками с центрами вращения. Через каждый из этих центров проходит ось вращения многогранника.

Для того, чтобы перечислить все многогранники класса SF будем перечислять отдельно многогранники без главной оси вращения и многогранники с главной осью вращения. Сначала найдём все многогранники класса SF без главной оси.

В согласии с теоремой Вейля-Минковского, будем рассматривать многогранники как пересечение замкнутых полупространств, содержащих фиксированную точку O — центр многогранника.

Через каждую возможную грань каждого многогранника класса SF должна проходить ось вращения, и эквивалентные грани должны находиться на одном расстоянии от центра O многогранника. При этом, не обязательно все оси вращения будут проходить через грани; некоторые оси могут проходить через вершины или рёбра многогранника.

Рассмотрим три системы плоскостей: $\mathcal{F}$ — плоскости, перпендикулярные осям вращения, проходящим через грани многогранника; $\mathcal{V}$ — плоскости, перпендикулярные осям вращения, проходящим через вершины; $\mathcal{E}$ — плоскости, перпендикулярные осям вращения, проходящим через рёбра.

Гранями многогранника класса SF могут быть грани, параллельные одной из трёх этих систем, либо двум системам, либо трём системам. Так как через любую возможную грань многогранника класса SF должна проходить ось вращения, то для нахождения всех многогранников этого класса, нужно рассмотреть все различные комбинации систем $\mathcal{F}$, $\mathcal{V}$, $\mathcal{E}$, содержащих возможные грани многогранника. При этом допускается параллельный сдвиг каждой из систем как целого. Очевидно, плоскости одной и той же системы должны находиться на одном расстоянии от центра O . Пересечение полупространств, ограниченных системами плоскостей $\mathcal{F}$, $\mathcal{V}$, $\mathcal{E}$ и содержащих центр O , и дадут искомые многогранники. Остается только выбрать из них те многогранники (если они имеются), которые не принадлежат ни первому, ни второму классу.

В дальнейшем, для простоты, будем говорить не о пересечениях полупространств, а о (равномерном) отсечении элементов многогранников, образованных системами $\mathcal{F}$, $\mathcal{V}$, $\mathcal{E}$.

Будем рассматривать последовательно перечисление многогранников класса SF , принадлежащих тетраэдральной, октаэдральной и икосаэдральной группе, но не принадлежащих ни 1-му, ни 2-му классу.

Рассмотрим куб, образованный системой $\mathcal{E}$ тетраэдральной группы. Отсечём плоскостями системы $\mathcal{V}$ его вершины. Получим многогранник рис. 1, б) — полуусечённый куб. Этот многогранник, очевидно, не является комбинаторно-эквивалентным ни правильному, ни равноугольно-полуправильному, и значит не является многогранником ни 1-го, ни 2-го класса. Если отсечь ещё другие четыре вершины куба системой плоскостей $\mathcal{F}$ так, чтобы четыре новых равносторонних треугольника не были равны треугольникам, полученным отсечением вершин плоскостями $\mathcal{V}$, то получится многогранник рис. 1, а), дважды усечённый куб, который не является многогранником ни 1-го, ни 2-го класса, но, очевидно, комбинаторно эквивалентен равноугольно-полуправильному — усечённому кубу.

Полуусечённый куб можно получить и при другой комбинации отсекающих плоскостей: отсечением рёбер тетраэдра системой $\mathcal{E}$. Отсекая вновь образовавшиеся вершины рёберно усечённого тетраэдра, получим дважды усечённый куб.

Все другие комбинации отсечений плоскостями систем $\mathcal{F}$, $\mathcal{V}$, $\mathcal{E}$, как легко проверить, дадут только многогранники, перечисленные в [1]. Например, фиксируя тетраэдр системы $\mathcal{F}$, отсечём системой плоскостей $\mathcal{V}$ его вершины. Получим усечённый тетраэдр. Если отсечение вершин провести так, чтобы система отсекающих плоскостей прошла через середины рёбер тетраэдра, то получим октаэдр, не принадлежащий тетраэдральной группе.

Переходя к октаэдральной группе, легко найти все многогранники этой группы класса SF , не принадлежащие ни 1-му, ни 2-му классу. Для этого будем рассматривать три системы плоскостей $\mathcal{F}$, $\mathcal{V}$, $\mathcal{E}$, аналогичных предыдущим. Пусть плоскости системы $\mathcal{E}$ параллельны

рёбрам октаэдра. Эти плоскости ограничат ромбический додекаэдр, гранями которого являются 12 равных ромбов. Отсекая вершины степени 3 ромбододекаэдра плоскостями системы $\mathcal{F}$, получим первый полуусечённый ромбододекаэдр, рис. 1, в). Отсекая вершины степени 4 додекаэдра плоскостями системы $\mathcal{V}$, получим второй полуусечённый ромбододекаэдр, рис. 1, г). При одновременном отсечении обоих типов вершин получим усечённый ромбододекаэдр, рис. 1, д). Только эти три типа многогранника, как нетрудно убедиться, являются многогранниками этой группы, не принадлежащими ни 1-му, ни 2-му классу многогранников. Кроме того, эти многогранники не являются комбинаторно-эквивалентными ни правильным, ни равноугольно полуправильным.

Первый полуусечённый ромбический додекаэдр может быть получен также рёберным усечением октаэдра. Второй — рёберным усечением куба. А усечённый ромбический додекаэдр может быть получен либо отсечением 4-гранных вершин рёберно усечённого октаэдра, либо отсечением 3-гранных вершин рёберно усечённого куба.

В случае икосаэдральной группы система $\mathcal{E}$ образует 30-гранник — ромботриаконтаэдр. Аналогично тому, как были найдены искомые многогранники в случае октаэдральной группы, здесь получим искомые многогранники: 1-й полуусечённый ромботриаконтаэдр, 2-й полуусечённый ромботриаконтаэдр, усечённый ромботриаконтаэдр, рис. 1, е)–з). И эти три многогранника могут быть получены рёберным усечением икосаэдра и додекаэдра с последующим отсечением плоскостями $\mathcal{F}$, $\mathcal{V}$ вновь образовавшихся вершин.

Покажем теперь, что среди многогранников с главной осью нет многогранников, отличных от многогранников 1-го класса. А именно, многогранники класса SF с главной осью представляют собой бесконечные серии прямых призм с правильными, либо равноугольно-полуправильными основаниями.

Пусть дан многогранник M класса SF с главной осью вращения. Гранями F_i , через которые не проходит главная ось многогранника M , могут быть прямоугольники или квадраты и, кроме того, эти грани перпендикулярны двум фиксированным граням. Действительно, рассмотрим грань F_1 , через которую проходит главная ось. Кроме грани F_1 эта ось может проходить только через некоторую грань F_2 , параллельную F_1 . В противном случае, если бы главная ось проходила через некоторую грань, не параллельную F_1 , или через вершину, или через ребро, то M будет иметь оси вращения, не перпендикулярные главной оси, что противоречит её определению.

Итак, главная ось проходит через грани F_1 и F_2 и перпендикулярна им. Другие грани M должны быть перпендикулярны плоскостям граней F_1 и F_2 и каждые две соседние из них имеют общие рёбра, перпендикулярные плоскостям граней F_1 и F_2 .

Таким образом, F_i являются или прямоугольниками, или квадратами и оси вращения, проходящие через них, есть оси 2-го порядка. Покажем, что грани F_1 и F_2 могут быть либо правильными, либо равноугольно-полуправильными многоугольниками.

Для этого рассмотрим трёхгранный угол A многогранника M , одним из плоских углов которого является внутренний угол грани F_1 . Углу A равен угол B , один из плоских углов которого есть угол грани F_2 . Угол B получается из угла A действием одной из осей 2-го порядка граней F_i . Угол B равен углу A_1 , вершина которого расположена на том же ребре, что и вершина угла B . Значит угол A равен углу A_1 , соседнему с A .

Рассуждая так же далее, получаем, что все плоские углы граней F_1 и F_2 равны между собой. При этом, углы A и A_1 имеют одно общее ребро AA_1 — сторону многоугольника F_1 . Стороны этого многоугольника, соседние с AA_1 , равны между собой и являются двумя другими рёбрами углов A и A_1 . Если эти стороны равны AA_1 , то многоугольники F_1 и F_2 правильные, в противном случае — равноугольно-полуправильные.

Терема 1 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Отметим, что из доказанной теоремы в частности следует, что класс

многогранников, через каждую вершину и через каждую грань которых проходит ось вращения многогранника, исчерпывается девятью многогранниками: пятью правильными и кубом, октаэдром, икосододекаэдром, ромбододекаэдром и ромбическим триаконтаэдром.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если перейти к многогранникам, двойственным классу SF , т.е. к многогранникам, сильно симметричным относительно вращения многогранных углов, получаем и их полное перечисление. Отсюда следует, что существует 7 типов многогранников, сильно симметричных относительно вращения многогранных углов, которые не являются комбинаторно эквивалентными телам Гесселя.

3. Заключение

Доказанная теорема даёт полное перечисление класса многогранников, сильно симметричных относительно вращения граней. Помимо многогранников 1-го и 2-го класса из [1] этот класс содержит семь многогранников, которые не являются комбинаторно эквивалентными ни правильным (платоновым), ни равноугольно-полуправильным (архимедовым). Один многогранник из этого класса хотя и не принадлежит 1-му и 2-му классу, но является комбинаторно эквивалентным равноугольно-полуправильному многограннику — усечённому кубу.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Субботин В.И. Сильно симметричные многогранники. // Геометрия и топология. 8. (Зап. научн. семин. ПОМИ, т.299), 2003. С.314-325.
2. Циглер Г.М. Теория многогранников. М., МЦНМО, 2014, 568 с.
3. Coxeter H. S.M. Regular polytopes, London-NY., 1963. 648p.
4. Залгаллер В.А. Выпуклые многогранники с правильными гранями, // Зап. научн. сем. ЛОМИ, 2, 1967, 220 с.
5. Субботин В.И. О вполне симметричных многогранниках. // Материалы Международной конференции по дискретной геометрии и её приложениям, посвящ.70-летию проф. С.С.Рышкова. М.: МГУ, 2001. С. 88-89.
6. Субботин В.И. Перечисление многогранников, сильно симметричных относительно вращения // Труды участников международной школы-семинара по геометрии и анализу памяти Н.В.Ефимова. Ростов-на-Дону, 2002. С.77-78.
7. Субботин В.И. О некоторых обобщениях сильно симметричных многогранников. // Чебышевский сборник. 2015. Т.16, №2. С. 222-230.
8. Subbotin V.I. Characterization of polyhedral partitioning a space. // Voronoy conference on analytic number theory and spatial tessellations. Kiev: September, 22-28, 2003. P.46.
9. Емеличев В.А., Ковалёв М.М., Кравцов М.К. Многогранники. Графы. Оптимизация. М.: Наука, 1981. 344 с.
10. Субботин В.И. Многогранники с максимальным числом несимметричных граней. // Метрическая геометрия поверхностей и многогранников. Материалы Международной конф., посвящ.100-летию Н.В.Ефимова. М.: Макс-Пресс, 2010. С.60-61.

11. Субботин В. И. О симметричных многогранниках с несимметричными гранями. // Материалы Международного семинара «Дискретная математика и её приложения», посвящ. 80-летию акад. О.Б.Лупанова. М.: МГУ, 2012. С.398-400.
12. Тимофеев А. В. О выпуклых многогранниках с равноугольными и паркетными гранями. // Чебышевский сборник. 2011. Т. 12, №2. С. 118–126.
13. Ефремович В. А. Трёхмерные правильные многогранники. // УМН, 2, вып.5. 1947. С.197.
14. Грек А. С. Правильные многогранники на замкнутой поверхности с эйлеровой характеристикой, равной -3 . // Известия высших учебных заведений, сер. Математика, 6, 1966, С.50-53.
15. Стрингхем В. И. Правильные фигуры в n -мерном пространстве. // УМН, 1944, № 10. С. 22–33.

REFERENCES

1. Subbotin V. I. 2003, "Strongly symmetric polyhedra", *Zapiski nauchnykh seminarov POMI*, vol.299, pp.314-325.
2. Ziegler G. M. 2014, *The theory of polyhedra*, MCNMO, Moscow.
3. Coxeter H. S. 1963, *Regular polytopes*, London-NY.
4. Zalgaller V. A. 1967, Convex polyhedra with regular faces, *Zapiski nauchnykh seminarov LOMI*, vol. 2, 220 p.
5. Subbotin V. I. "On Completely symmetrical polyhedra", *Materiali Megdunarudnoy konferencii po diskretnoy geometrii i eyo prilogeniyam, posviash. 70-letiju prof. S.S.Ryshkova (Proc. Int. Conf. on discrete geometry and its applications)*, Moscow, 2001, pp. 88-89.
6. Subbotin V. I. "The enumeration of polyhedra, strongly symmetrical with respect to rotation", *Trudy megdunarudnoy shkoly-seminara po geometrii i analizu pamyti N.V.Efimova (Proc. Int. School-Seminar on Geometry and Analysis)*, Rostov-on-Don, 2002, pp.77-78.
7. Subbotin V. I. 2015, "Some generalizations strongly symmetric polyhedra", *Chebyshevskiy sbornik*, vol.16, no.2. pp. 222-230.
8. Subbotin V. I. "Characterization of polyhedral partitioning a space", *Voronoy conference on analytic number theory and spatial tessellations*, Kiev, 2003, p.46.
9. Emelichev V. A., Kovalev M. M., Kravzov M. K. 1981, *Mnogogranniki. Grafi. Optimizacija. [Polyhedra. Graph. Optimization]* Nauka, Moscow.
10. Subbotin V. I. "Polyhedra with the maximum number of asymmetrical faces", *Materialy megdunarudnoy konferencii "Metriceskaya geometriya poverchnostey i mnogogrannikov", posvjachennoi 100-letiju N. V. Efimova (Proc. Int. Conf. "Metric geometry of surfaces and polyhedra")*, Moscow, 2010, pp.60-61.
11. Subbotin V. I. "On symmetric polyhedra with asymmetrical faces" *Materialy megdunarudnogo seminar "Diskretnaya matematika i ejo prilogeniya posvjachennogo 80-letiju O. B. Lupanova (Proc. Int. Seminar "Discrete Mathematics and Its Applications")*, Moscow, 2012, pp.398-400.

12. Timofeenko A. V. 2011, "On convex polyhedra with equiangular and parquet faces" , *Chebyshevskiy sbornik*, vol. 12, no.2, pp. 118–126.
13. Efremovich V. A. 1947, "Three-dimensional regular polyhedra" , *Uspechi matematicheskikh nauk*, vol.2, no. 5, p.197.
14. Grek A. S. 1966, "Regular polyhedra on a closed surface with the Euler characteristic equal to -3 " , *Izvestiya vischih uchebnyh zavedeniy, ser. Matematika*, vol.6, pp.50-53.
15. Stringham W. I. 1944, "Regular figures in n-dimensional space" , *Uspechi matematicheskikh nauk*, no.10, pp. 22–33.

ЮРГПУ(НПИ)

Поступило 1.09.2016 г.

Принято в печать 12.12.2016 г.

СРЕДНЕКВАДРАТИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ РЯДАМИ ФУРЬЕ–БЕССЕЛЯ И ЗНАЧЕНИЯ ПОПЕРЕЧНИКОВ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ КЛАССОВ

К. Тухлиев (г. Худжанд)

Аннотация

Известно, что многие задачи математической физики, сводящиеся к дифференциальным уравнениям с частными производными, записанные в цилиндрических и сферических координатах, применением метода разделения переменных, в частности, приводятся к дифференциальному уравнению Бесселя и к функциям Бесселя. На практике, особенно в задачах электродинамики, небесной механики и современной прикладной математики, чаще всего используются ряды Фурье по ортогональным системам специальных функций. При этом требуется выяснить условия разложения функций в ряды по указанным специальным функциям, образующим на заданном отрезке полную ортогональную систему.

Работа посвящена получению точных оценок скорости сходимости рядов Фурье по системе функций Бесселя для некоторых классов функций в гильбертовом пространстве $L_2 := L_2([0, 1], x dx)$ суммируемых с квадратом функций $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ с весом x .

Доказано точное неравенство типа Джексона–Стечкина на множестве $L_2^{(r)}(\mathcal{D})$, связывающее величину $E_{n-1}(f)_2$ наилучшего приближения функции f частными суммами порядка $n - 1$ ряда Фурье–Бесселя с усреднением с положительным весом обобщённого модуля непрерывности m -го порядка $\Omega_m(\mathcal{D}^r f; t)$, где $\mathcal{D} := \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{d}{dx} - \frac{\nu^2}{x^2}$ — дифференциальный оператор Бесселя второго порядка первого рода индекса ν . Аналогичные неравенства получены также через $\mathcal{K}$ -функционалы r -ых производных функций. Для классов функций, определённых при помощи указанных характеристик в L_2 , вычислены точные значения различных n -поперечников.

Ключевые слова: функция Бесселя, наилучшие приближения, $\mathcal{K}$ -функционал, обобщённый модуль непрерывности m -го порядка, ряд Фурье–Бесселя, n -поперечники.

Библиография: 13 названий.

MEAN-SQUARE APPROXIMATION OF FUNCTIONS BY FOURIER–BESSEL SERIES AND THE VALUES OF WIDTHS FOR SOME FUNCTIONAL CLASSES

K. Tukhliev (Khujand)

Abstract

It is known that many of the problems of mathematical physics, reduced to a differential equation with partial derivatives written in cylindrical and spherical coordinates, by using method of separation of variables, in particular, leads to the Bessel differential equation and Bessel functions. In practice, especially in problems of electrodynamics, celestial mechanics and modern applied mathematics most commonly used Fourier series in orthogonal systems of special functions. Given this, it is required to determine the conditions of expansion of functions in series into these special functions, forming in a given interval a complete orthogonal system.

The work is devoted to obtaining accurate estimates of convergence rate of Fourier series by Bessel system of functions for some classes of functions in a Hilbert space $L_2 := L_2([0, 1], x dx)$ of square summable functions $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ with the weight x .

The exact inequalities of Jackson–Stechkin type on the sets of $L_2^{(r)}(\mathcal{D})$, linking $E_{n-1}(f)_2$ — the best approximation of function f by partial sums of order $n-1$ of the Fourier–Bessel series with the averaged positive weight of generalized modulus of continuity of m order $\Omega_m(\mathcal{D}^r f; t)$, where $\mathcal{D} := \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{d}{dx} - \frac{\nu^2}{x^2}$ — is a Bessel differential operator of second-order of first kind index ν . Similar inequalities are also obtained through the $\mathcal{K}$ -functionals r -s derivatives of functions.

The exact value of the different n -widths for classes of functions defined by specified characteristics, in L_2 were calculated.

Keywords: Bessel function, best approximation, $\mathcal{K}$ -functional, generalized modulus of continuity of n th order, Fourier–Bessel series, n -widths.

Bibliography: 13 titles.

1. Введение

Пусть $J_\nu(x)$ — функция Бесселя первого рода индекса ν , а $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ — занумерованные в порядке возрастания положительные корни уравнения $J_\nu(x) = 0$. Функции $J_\nu(\lambda_k x)$ являются собственными функциями задачи Штурма–Лиувилля [1, с.345]

$$-\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(x \frac{du}{dx} \right) + \frac{\nu^2}{x^2} u = \lambda^2 u, \quad 0 < x < 1, \quad |u(0)| < +\infty, u(1) = 0,$$

отвечающими собственным значениям $\{\lambda_k^2\}_{k=1}^\infty$. При этом система функций

$$\{J_\nu(\lambda_k x)\}_{k=1}^\infty$$

является полной и ортогональной в пространстве суммируемых с квадратом функций f с весом x на отрезке $[0, 1]$.

В этой работе докажем ряд точных неравенств типа Джексона–Стечкина, используя которые вычислим значения различных n -поперечников некоторых классов функций. Сразу отметим, что различные аспекты приближения функций $f \in L_2$ рядами Фурье по системе функций $\{J_\nu(\lambda_k x)\}_{k=1}^\infty$ исследовались, например, в работах [2–4]. По характеру полученных результатов и по технике доказательств основных утверждений мы следуем работам [5, 6].

Приводим нужные нам для дальнейшего определения и известные факты. Всюду далее $L_2 := L_2([0, 1], x dx)$ — пространство суммируемых с квадратом функций f с весом x и конечной нормой

$$\|f\| = \left(\int_0^1 x f^2(x) dx \right)^{1/2}.$$

Наши дальнейшие исследования базируются на свойствах ортогональности системы $\{J_\nu(\lambda_k x)\}_{k=1}^\infty$ (см., например, [1, с.349]):

$$\int_0^1 x J_\nu(\lambda_k x) J_\nu(\lambda_m x) dx = 0, \quad k \neq m, \quad \int_0^1 x J_\nu^2(\lambda_k x) dx = \frac{1}{2} J_\nu'^2(\lambda_k),$$

откуда вытекает, что система функций $\{\sqrt{2} J_\nu(\lambda_k x) \cdot |J_\nu'(\lambda_k)|^{-1}\}$ образует полную ортонормированную систему в пространстве L_2 . Ради простоты, без умаления общности, не вводя новые

обозначения, через $\{J_\nu(\lambda_k x)\}_{k=1}^\infty$ обозначим полную ортонормированную систему функций в пространстве L_2 , для которой

$$\int_0^1 x J_\nu(\lambda_k x) J_\nu(\lambda_m x) dx = \begin{cases} 0, & \text{если } k \neq m, \\ 1, & \text{если } k = m. \end{cases}$$

Для произвольной функции $f \in L_2$ рассмотрим разложение в ряд Фурье–Бесселя следующего вида:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f) J_\nu(\lambda_k x), \quad (1)$$

где

$$c_k(f) = \int_0^1 x f(x) J_\nu(\lambda_k x) dx$$

— коэффициенты Фурье–Бесселя. Пусть

$$S_{n-1}(f, x) = \sum_{k=1}^{n-1} c_k(f) J_\nu(\lambda_k x)$$

— частичная сумма $(n-1)$ -го порядка ряда Фурье–Бесселя (1).

Через $\mathcal{P}_{n-1}$ — обозначим подпространство обобщенных полиномов вида

$$p_{n-1}(x) = \sum_{k=1}^{n-1} a_k J_\nu(\lambda_k x).$$

Тогда для величины наилучшего приближения $f \in L_2$ подпространством $\mathcal{P}_{n-1}$ справедливо равенство

$$E_{n-1}(f) = \inf\{\|f - p_{n-1}\| : p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}\} = \|f - S_{n-1}(f)\| = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f) \right\}^{1/2}. \quad (2)$$

Рассмотрим дифференциальный оператор Бесселя второго порядка первого рода индекса ν :

$$\mathcal{D} = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{d}{dx} - \frac{\nu^2}{x^2}, \quad (3)$$

и введём функцию $T(x, y; t)$ как сумму ряда

$$T(x, y; t) = \sum_{k=1}^{\infty} J_\nu(\lambda_k x) J_\nu(\lambda_k y) t^k, \quad 0 < t < 1, \quad (4)$$

где в последнем соотношении равенство понимается в смысле сходимости в пространстве $L_2([0, 1]^2; xy \, dx dy)$ (см., например, [2, с. 919]).

В L_2 рассмотрим оператор (см. [2])

$$F_h f(x) = \int_0^1 t f(t) T(x, t; 1-h) dt, \quad (5)$$

который называют оператором *обобщенного сдвига*.

Следующие свойства оператора (5) устанавливаются непосредственно:

1) оператор (5) является линейным:

$$F_h(f_1 + f_2) = F_h(f_1) + F_h(f_2);$$

2) однородным: $F_h(\lambda f) = \lambda F_h(f)$, $\lambda \in \mathbb{R}$;

3) ограниченным: $\|F_h f\| \leq \|f\|$ по норме L_2 ;

4) удовлетворяет свойству: $F_h J_p(\lambda_n x) = (1 - h)^n J_p(\lambda_n x)$;

5) $\|F_h f - f\| \rightarrow 0$, при $h \rightarrow +0$.

Для произвольной $f \in L_2$ определим конечные разности первого и высших порядков равенствами

$$\Delta_h f(x) = F_h f(x) - f(x) = (F_h - I)f(x),$$

$$\Delta_h^m f(x) = \Delta_h(\Delta_h^{m-1} f(x)) = (F_h - I)^m f(x) = \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \binom{m}{k} F_h^k f(x),$$

где

$$F_h^0 f(x) = f(x), F_h^k f(x) = F_h(F_h^{k-1} f(x)), k = 1, 2, \dots, m,$$

а символ I — единичный оператор в пространстве L_2 . Величину

$$\Omega_m(f; t) = \sup \{ \|\Delta_h^m f(\cdot)\| : 0 < h \leq t \} \quad (6)$$

назовём обобщённым модулем непрерывности m -го порядка функции $f \in L_2$.

Обозначим через $L_2(\mathcal{D})$, где оператор $\mathcal{D}$ определяется равенством (3), множество функций $f \in L_2$, имеющих абсолютно непрерывные производные первого порядка f' , и таких, что $\mathcal{D}f \in L_2$.

Полагаем, $\mathcal{D}^0 f \equiv f$, $\mathcal{D}^1 f := \mathcal{D}f$, $\mathcal{D}^r f := \mathcal{D}(\mathcal{D}^{r-1} f)$, $r \in \mathbb{N}$. Символом $L_2^{(r)}(\mathcal{D})$, $r = 2, 3, \dots$ обозначим множество функций $f \in L_2$, имеющих абсолютно непрерывные производные $(2r - 1)$ -го порядка и для которых $\mathcal{D}^r f \in L_2$.

Если $f \in L_2^{(r)}(\mathcal{D})$, $r \in \mathbb{N}$, то для её коэффициентов Фурье $c_k(f)$, $k \in \mathbb{N}$, справедлива формула [2]:

$$c_k(f) = (-1)^r \lambda_k^{-2r} c_k(\mathcal{D}^r f), \quad k, r \in \mathbb{N}. \quad (7)$$

Отметим, что для произвольной $f \in L_2$ с учётом равенства (4) оператор усреднения представим следующим образом:

$$\begin{aligned} F_h f(x) &= \int_0^1 t f(t) T(x, t, 1 - h) dt = \int_0^1 t f(t) \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} J_{\nu}(\lambda_k x) J_{\nu}(\lambda_k t) (1 - h)^k \right\} dt = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (1 - h)^k \left(\int_0^1 t f(t) J_{\nu}(\lambda_k t) dt \right) J_{\nu}(\lambda_k x) = \sum_{k=1}^{\infty} (1 - h)^k c_k(f) J_{\nu}(\lambda_k x), \end{aligned} \quad (8)$$

где равенство (8) понимается в смысле сходимости в норме пространства L_2 . Используя равенства (1) и (8), на основании метода математической индукции получаем

$$\Delta_h^m(f, x) = \sum_{k=1}^{\infty} ((1 - h)^k - 1)^m c_k(f) J_{\nu}(\lambda_k x),$$

откуда сразу следует равенство

$$\|\Delta_h^m(f, \cdot)\|_{L_2} := \sum_{k=1}^{\infty} (1 - (1 - h)^k)^{2m} c_k^2(f), \quad (9)$$

где $h \in (0, 1)$. Из равенств (6) и (9) для $t \in (0, 1)$ имеем

$$\Omega_m(f, t) = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (1 - (1-t)^k)^{2m} c_k^2(f) \right\}^{1/2}. \quad (10)$$

В [2] для любой функции $f \in L_2^{(r)}(\mathcal{D})$ при любом $t \in (0, 1)$ доказано точное неравенство типа Джексона–Стечкина

$$E_{n-1}(f) \leq (1 - (1-t)^n)^{-m} \lambda_n^{-2r} \Omega_m(\mathcal{D}^r f, t), \quad r \in \mathbb{Z}_+, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (11)$$

в котором при каждом фиксированном n константы в правой части (11) не могут быть уменьшены. Легко проверить, что равенство в (11) реализуется на функции

$$f_0(x) = J_\nu(\lambda_n x) \in L_2^{(r)}(\mathcal{D}).$$

Из (11) вытекает экстремальное равенство:

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}(\mathcal{D})} \frac{\lambda_n^{2r} E_{n-1}(f)}{\Omega_m(\mathcal{D}^r f, t)} = \frac{1}{(1 - (1-t)^n)^m}, \quad 0 < t < 1. \quad (12)$$

В свою очередь в (12), полагая $t = 1/n$, имеем:

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}(\mathcal{D})} \frac{\lambda_n^{2r} E_{n-1}(f)}{\Omega_m(\mathcal{D}^r f, 1/n)} = \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right)^{-m},$$

откуда сразу вытекает соотношение

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{f \in L_2^{(r)}(\mathcal{D})} \frac{\lambda_n^{2r} E_{n-1}(f)}{\Omega_m(\mathcal{D}^r f, 1/n)} = \left(1 - \frac{1}{e}\right)^{-m}.$$

2. Основной результат и некоторые следствия

Условимся, что всюду далее под весовой функцией на отрезке $[0, h]$ будем понимать неотрицательную измеримую и суммируемую на $[0, h]$ функцию, не эквивалентную нулевой. Имеет место следующее общее утверждение, доказательство которого основано на схеме рассуждений работы [5].

ТЕОРЕМА 1. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < p \leq 2$, $0 < h < 1$, φ — весовая функция на интервале $(0, h)$. Тогда справедливо равенство

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}(\mathcal{D})} \frac{\lambda_n^{2r} E_{n-1}(f)}{\left(\int_0^h \Omega_m^p(\mathcal{D}^r, t) \varphi(t) dt \right)^{1/p}} = \frac{1}{\left(\int_0^h (1 - (1-t)^n)^{mp} \varphi(t) dt \right)^{1/p}}. \quad (13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся одним вариантом неравенства Минковского из монографии [7, с.104]

$$\left(\int_0^h \left(\sum_{k=n}^{\infty} |\tilde{f}_k(t)|^2 \right)^{p/2} dt \right)^{1/p} \geq \left(\sum_{k=n}^{\infty} \left(\int_0^h |\tilde{f}_k(t)|^p dt \right)^{2/p} \right)^{1/2}, \quad (14)$$

верного при всех $0 < p \leq 2$ и $h \in \mathbb{R}_+$. Полагая в неравенстве (14) $\tilde{f}_k := f_k \varphi^{1/p}$, получаем

$$\left(\int_0^h \left(\sum_{k=n}^{\infty} |f_k(t)|^2 \right)^{p/2} \varphi(t) dt \right)^{1/p} \geq \left(\sum_{k=n}^{\infty} \left(\int_0^h |f_k(t)|^p \varphi(t) dt \right)^{2/p} \right)^{1/2}. \quad (15)$$

Для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}(\mathcal{D})$ в силу формулы (7) запишем разложение функции $\mathcal{D}^r f$ в ряд Фурье–Бесселя

$$\mathcal{D}^r f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(\mathcal{D}^r f) J_{\nu}(\lambda_k x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^r \lambda_k^{2r} c_k(f) J_{\nu}(\lambda_k x). \quad (16)$$

Из равенств (10) и (16) для всех $t \in (0, 1)$ имеем

$$\Omega_m^2(\mathcal{D}^r f, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (1 - (1 - t)^k)^{2m} \lambda_k^{4r} c_k^2(f). \quad (17)$$

Используя неравенство (15), равенства (17) и (2) и имея в виду, что последовательность $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ положительных чисел является монотонно возрастающей, с учётом очевидного соотношения

$$\inf_{k \geq n} \int_0^h (1 - (1 - t)^k)^{mp} \varphi(t) dt = \int_0^h (1 - (1 - t)^n)^{mp} \varphi(t) dt,$$

получаем

$$\begin{aligned} \left\{ \int_0^h \Omega_m^p(\mathcal{D}^r f, t) \varphi(t) dt \right\}^{1/p} &= \left\{ \int_0^h (\Omega_m^2(\mathcal{D}^r f, t))^{p/2} \varphi(t) dt \right\}^{1/p} \geq \\ &\geq \left\{ \int_0^h \left(\sum_{k=n}^{\infty} (1 - (1 - t)^k)^{2m} \lambda_k^{4r} c_k^2(f) \right)^{p/2} \varphi(t) dt \right\}^{1/p} \geq \\ &\geq \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k^{4r} c_k^2(f) \left(\int_0^h (1 - (1 - t)^k)^{mp} \varphi(t) dt \right)^{2/p} \right\}^{1/2} \geq \\ &\geq \lambda_n^{2r} \left(\int_0^h (1 - (1 - t)^n)^{mp} \varphi(t) dt \right)^{1/p} \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f) \right\}^{1/2} = \\ &= \lambda_n^{2r} \left(\int_0^h (1 - (1 - t)^n)^{mp} \varphi(t) dt \right)^{1/p} E_{n-1}(f). \end{aligned} \quad (18)$$

Из (18) получаем оценку сверху величины, стоящей в левой части (13):

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}(\mathcal{D})} \frac{\lambda_n^{2r} E_{n-1}(f)}{\left(\int_0^h \Omega_m^p(\mathcal{D}^r f, t) \varphi(t) dt \right)^{1/p}} \leq \frac{1}{\left(\int_0^h (1 - (1 - t)^n)^{mp} \varphi(t) dt \right)^{1/p}}. \quad (19)$$

Для получения оценки снизу той же величины в левой части равенства (13) по-прежнему полагаем $f_0(x) := J_\nu(\lambda_n x) \in L_2^{(r)}(\mathcal{D})$. В силу равенства (2) имеем $E_{n-1}(f_0) = 1$, а из равенства (17) следует, что

$$\Omega_m(\mathcal{D}^r f_0, t) = (1 - (1 - t)^n)^m \lambda_n^{2r}, \quad 0 < t < 1,$$

а потому имеем

$$\int_0^h \Omega_m^p(\mathcal{D}^r f_0, t) \varphi(t) dt = \lambda_n^{2rp} \int_0^h (1 - (1 - t)^n)^{mp} \varphi(t) dt.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \sup_{f \in L_2^{(r)}(\mathcal{D})} \frac{\lambda_n^{2r} E_{n-1}(f)}{\left(\int_0^h \Omega_m^p(\mathcal{D}^r f, t) \varphi(t) dt \right)^{1/p}} &\geq \frac{\lambda_n^{2r} E_{n-1}(f_0)}{\left(\int_0^h \Omega_m(\mathcal{D}^r f_0, t) \varphi(t) dt \right)^{1/p}} = \\ &= \frac{1}{\left(\int_0^h (1 - (1 - t)^n)^{mp} \varphi(t) dt \right)^{1/p}}. \end{aligned} \quad (20)$$

Требуемое равенство (13) получаем из сопоставления оценки сверху (19) и оценки снизу (20), чем и завершаем доказательство теоремы 1.

Из теоремы 1 в качестве следствия вытекают следующие утверждения.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $p = 1/m$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $h \in (0, 1)$, φ — весовая функция на интервале $(0, h)$. Тогда справедливо равенство

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}(\mathcal{D})} \frac{\lambda_n^{2r} E_{n-1}(f)}{\left(\int_0^h \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f, t) \varphi(t) dt \right)^m} = \frac{1}{\left(\int_0^h (1 - (1 - t)^n) \varphi(t) dt \right)^m}. \quad (21)$$

Из (21), в частности, при $\varphi \equiv 1$ следует равенство

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}(\mathcal{D})} \frac{\lambda_n^{2r} E_{n-1}(f)}{\left((n+1) \int_0^h \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f, t) dt \right)^m} = \frac{1}{\{(n+1)h - 1 + (1-h)^{n+1}\}^m}. \quad (22)$$

Полагая в (22), например, $h = 1/(n+1)$, получаем

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}(\mathcal{D})} \frac{\lambda_n^{2r} E_{n-1}(f)}{\left((n+1) \int_0^{1/(n+1)} \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f, t) dt \right)^m} = \left[\left(1 - \frac{1}{n+1} \right)^{n+1} \right]^{-m}, \quad (23)$$

из которого в свою очередь следует экстремальное равенство

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{f \in L_2^{(r)}(\mathcal{D})} \frac{E_{n-1}(f)}{\left((n+1) \int_0^{1/(n+1)} \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f, t) dt \right)^m} = e^m.$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть выполнены все условия теоремы 1. Положим $\varphi(t) = n(1-t)^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда при любом $h \in (0, 1)$ справедливо равенство

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}(\mathcal{D})} \frac{\lambda_n^{2r} E_{n-1}(f)}{\left(n \int_0^h \Omega_m^p(\mathcal{D}^r f, t)(1-t)^{n-1} dt \right)^{1/p}} = \left\{ \frac{mp+1}{[1-(1-h)^n]^{mp+1}} \right\}^{1/p}. \quad (24)$$

В частности, из (24) при $h = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$ получаем

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{f \in L_2^{(r)}(\mathcal{D})} \frac{\lambda_n^{2r} E_{n-1}(f)}{\left(n \int_0^{1/n} \Omega_m^p(\mathcal{D}^r f, t)(1-t)^{n-1} dt \right)^{1/p}} = \frac{(mp+1)^{1/p}}{(1-e^{-1})^{m+1/p}}. \quad (25)$$

В свою очередь из (25) при $p = 1/m$, $m \in \mathbb{N}$ следует равенство

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{f \in L_2^{(r)}(\mathcal{D})} \frac{\lambda_n^{2r} E_{n-1}(f)}{\left(n \int_0^{1/n} \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f, t)(1-t)^{n-1} dt \right)^{1/p}} = \frac{2^m}{(1-e^{-1})^{2m}}.$$

3. Оценка величины наилучших приближений посредством $\mathcal{K}$ -функционала Петре

Теория приближения функций основана на одной из фундаментальных идей математики — замене сложных математических выражений более простыми и удобными. Эта идея является определяющей в вопросах связи математики с практикой и стимулирует развитие математики в целом и теории приближения функций, в частности. В последнее время для реализации указанной идеи в теории приближения часто используют теорию $\mathcal{K}$ -функционалов Петре. В экстремальных задачах теории приближения в смысле слабой эквивалентности были установлены связи между $\mathcal{K}$ -функционалами и различными обобщенными модулями непрерывности (см., например, работы [8–10]).

Рассмотрим $\mathcal{K}$ -функционал следующего вида

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(f, t^m) &:= \mathcal{K}(f, t^m; L_2; L_2^{(m)}(\mathcal{D})) = \\ &= \inf \{ \|f - g\| + t^m \|\mathcal{D}^m g\| : g \in L_2^{(m)}(\mathcal{D}) \}, \end{aligned} \quad (26)$$

где $m \in \mathbb{N}$, $0 < t < 1$. Имеет место следующее утверждение:

ТЕОРЕМА 2. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$. Тогда справедливо равенство

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}(\mathcal{D})} \frac{\lambda_n^{2r} E_{n-1}(f)}{\mathcal{K}(\mathcal{D}^r f, \lambda_n^{-2m})} = 1. \quad (27)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пользуясь формулами (2), (7) и (17), и замечая, что последовательность собственных чисел $\{\lambda_k\}_{k=n}^\infty$ монотонно возрастающая, для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}(\mathcal{D})$ и произвольной функции $g \in L_2^{(m)}(\mathcal{D})$ получим

$$E_{n-1}(f) = \left\{ \sum_{k=n}^\infty c_k^2(f) \right\}^{1/2} = \left\{ \sum_{k=n}^\infty \lambda_k^{-4r} c_k^2(\mathcal{D}^r f) \right\}^{1/2} \leq$$

$$\leq \lambda_n^{-2r} \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(\mathcal{D}^r f) \right\}^{1/2} = \lambda_n^{-2r} E_{n-1}(\mathcal{D}^r f) \leq \lambda_n^{-2r} \|\mathcal{D}^r f - S_{n-1}(g)\|. \quad (28)$$

В силу равенства (2)

$$\|g - S_{n-1}(g)\| = E_{n-1}(g) \leq \lambda_n^{-2m} E_{n-1}(\mathcal{D}^m g). \quad (29)$$

Учитывая (29) и применяя неравенство треугольника к правой части неравенства (28), получаем

$$\begin{aligned} E_{n-1}(f) &\leq \lambda_n^{-2r} \|\mathcal{D}^r f - S_{n-1}(g)\| \leq \lambda_n^{-2r} \{\|\mathcal{D}^r f - g\| + \|g - S_{n-1}(g)\|\} \leq \\ &\leq \lambda_n^{-2r} \{\|\mathcal{D}^r f - g\| + \lambda_n^{-2m} E_{n-1}(\mathcal{D}^m g)\} \leq \lambda_n^{-2r} \{\|\mathcal{D}^r f - g\| + \lambda_n^{-2m} \|\mathcal{D}^m g\|\}. \end{aligned} \quad (30)$$

Переходя в обеих частях неравенства (30) к нижней грани по всем функциям $g \in L_2^{(m)}(\mathcal{D})$, с учетом определения $\mathcal{K}$ -функционала будем иметь

$$E_{n-1}(f) \leq \lambda_n^{-2r} \mathcal{K}(\mathcal{D}^r f, \lambda_n^{-2m}),$$

откуда сразу следует оценка сверху

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}(\mathcal{D})} \frac{\lambda_n^{2r} E_{n-1}(f)}{\mathcal{K}(\mathcal{D}^r f, \lambda_n^{-2m})} \leq 1. \quad (31)$$

Для получения оценки снизу величины, стоящей в левой части неравенства (31) для произвольного обобщенного полинома вида

$$q_n(x) = \sum_{k=1}^n c_k(q_n) J_\nu(\lambda_k x), \quad c_k(q_n) \in \mathbb{R}, \quad k = \overline{1, n},$$

учитывая равенство $\mathcal{D}^r J_\nu(\lambda_k x) = (-\lambda_k^2)^r J_\nu(\lambda_k x)$ (см. [2]), имеем

$$\mathcal{D}^r q_n(x) = \sum_{k=1}^n c_k(q_n) \mathcal{D}^r J_\nu(\lambda_k x) = \sum_{k=1}^n (-\lambda_k^2)^r c_k(q_n) J_\nu(\lambda_k x), \quad (32)$$

откуда с учётом равенства Парсеваля сразу вытекает соотношение

$$\|\mathcal{D}^r q_n\| = \left\{ \sum_{k=1}^n \lambda_k^{4r} c_k^2(q_n) \right\}^{1/2}. \quad (33)$$

В силу того, что последовательность собственных чисел $\{\lambda_k\}_{k=1}^n$ является монотонно возрастающей из (33) получаем

$$\|\mathcal{D}^r q_n\| \leq \lambda_n^{2r} \left\{ \sum_{k=1}^n c_k^2(q_n) \right\}^{1/2} = \lambda_n^{2r} \|q_n\|. \quad (34)$$

Полагая теперь в равенстве (26) сначала $g = 0, f = q_n$, а затем полагая в нём $f = q_n$, для $\mathcal{K}$ -функционала получаем неравенство

$$\mathcal{K}(q_n, t^m) \leq \begin{cases} \|q_n\|, \\ t^m \|\mathcal{D}^m q_n\|. \end{cases} \quad (35)$$

Полагаем, как и раньше $f_0(x) = J_\nu(\lambda_n x)$, и поскольку $f_0 \in L_2^r(\mathcal{D})$, то в силу равенства (32) запишем

$$\mathcal{D}^{r+m} f_0(x) = (-\lambda_n^2)^{r+m} J_\nu(\lambda_n x). \quad (36)$$

Из равенства (36) и второго неравенства в соотношении (35) получаем

$$\mathcal{K}(\mathcal{D}^r f_0, \lambda_n^{-2m}) \leq \lambda_n^{-2m} \|\mathcal{D}^{r+m} f_0\| = \lambda_n^{-2m} \lambda_n^{2(r+m)} = \lambda_n^{2r}. \quad (37)$$

Используя неравенство (37) и тот факт, что $E_{n-1}(f_0) = 1$, имеем оценку снизу

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}(\mathcal{D})} \frac{\lambda_n^{2r} E_{n-1}(f)}{\mathcal{K}(\mathcal{D}^r f, \lambda_n^{-2m})} \geq \frac{\lambda_n^{2r} E_{n-1}(f_0)}{\mathcal{K}(\mathcal{D}^r f_0, \lambda_n^{-2m})} \geq 1. \quad (38)$$

Сравнивая оценки сверху (31) и оценки снизу (38), получаем требуемое равенство (27). Теорема 2 полностью доказана.

4. Точные значения n -поперечников некоторых классов функций

Нам для изложения последующих результатов потребуются ряд определений и обозначений. Пусть S — единичный шар в пространстве L_2 ; $\Lambda_n \subset L_2$ — n -мерное подпространство; $\Lambda^n \subset L_2$ — подпространство коразмерности n ; $\mathcal{L} : L_2 \rightarrow \Lambda_n$ — линейный непрерывный оператор; $\mathcal{L}^\perp : L_2 \rightarrow \Lambda_n$ — непрерывный оператор линейного проектирования; $\mathfrak{M}$ — выпуклое центрально-симметричное подмножество из L_2 . Величины

$$\begin{aligned} b_n(\mathfrak{M}, L_2) &= \sup \{ \sup \{ \varepsilon > 0 : \varepsilon S \cap \Lambda_{n+1} \subset \mathfrak{M} \} : \Lambda_{n+1} \subset L_2 \}, \\ d_n(\mathfrak{M}, L_2) &= \inf \{ \sup \{ \inf \{ \|f - g\| : g \in \Lambda_n \} : f \in \mathfrak{M} \} : \Lambda_n \subset L_2 \}, \\ \delta_n(\mathfrak{M}, L_2) &= \inf \{ \inf \{ \sup \{ \|f - \mathcal{L}f\| : f \in \mathfrak{M} \} : \mathcal{L}L_2 \subset \Lambda_n \} : \Lambda_n \subset L_2 \}, \\ d^n(\mathfrak{M}, L_2) &= \inf \{ \inf \{ \|f\| : f \in \mathfrak{M} \cap \Lambda^n \} : \Lambda^n \subset L_2 \}, \\ \Pi_n(\mathfrak{M}, L_2) &= \inf \left\{ \inf \left\{ \sup \left\{ \|f - \mathcal{L}^\perp f\| : f \in \mathfrak{M} \right\} : \mathcal{L}^\perp L_2 \subset \Lambda_n \right\} : \Lambda_n \subset L_2 \right\} \end{aligned}$$

называют соответственно *бернштейновским*, *колмогоровским*, *линейным*, *гельфандовским*, *проекционным n -поперечниками* подмножества $\mathfrak{M}$ в пространстве L_2 . Указанные n -поперечники монотонны по n и между ними в L_2 выполняются соотношения [7, 11]:

$$b_n(\mathfrak{M}; L_2) \leq d^n(\mathfrak{M}; L_2) \leq d_n(\mathfrak{M}; L_2) = \delta_n(\mathfrak{M}; L_2) = \Pi_n(\mathfrak{M}; L_2). \quad (39)$$

Введём классы функций, естественно вытекающие из теорем, доказанных в предыдущих пунктах. Пусть $h \in (0, 1)$, $0 < p \leq 2$, $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, φ — весовая на интервале $(0, h)$ функция. Через $W_p^{(r)} L_2(\Omega_m; h, \varphi)$ обозначим класс, состоящий из функций $f \in L_2^{(r)}(\mathcal{D})$, у которых $\mathcal{D}^r f$ удовлетворяет условию

$$\int_0^h \Omega_m^p(\mathcal{D}^r f, t) \varphi(t) dt \leq 1.$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < p \leq 2$, $0 < h < 1$, $\varphi \geq 0$ — весовая функция на интервале $(0, h)$. Тогда для произвольного $n \in \mathbb{N}$ справедливы равенства

$$\gamma_n(W_p^{(r)} L_2(\Omega_m; h, \varphi), L_2) = E_{n-1}(W_p^{(r)} L_2(\Omega_m; h, \varphi))_{L_2} =$$

$$= \lambda_n^{-2r} \left(\int_0^h (1 - (1-t)^n)^{mp} \varphi(t) dt \right)^{-1/p}, \quad (40)$$

где $\gamma_n(\cdot)$ — любой из n -поперечников $b_n(\cdot), d_n(\cdot), \delta_n(\cdot), d^n(\cdot), \Pi_n(\cdot)$, а

$$E_n(W_p^{(r)} L_2(\Omega_m; h, \varphi))_{L_2} := \sup\{E_n(f)_2 : f \in W_p^{(r)} L_2(\Omega_m; h, \varphi)_{L_2}\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценку сверху всех перечисленных n -поперечников получаем из неравенства (19), соотношения (39) и определения класса функций $W_p^{(r)} L_2(\Omega_m; h, \varphi)$:

$$\begin{aligned} \gamma_n(W_p^{(r)} L_2(\Omega_m; h, \varphi), L_2) &\leq d_n(W_p^{(r)} L_2(\Omega_m; h, \varphi); L_2) \leq \\ &\leq E_{n-1}(W_p^{(r)} L_2(\Omega_m; h, \varphi))_{L_2} \leq \lambda_n^{-2r} \left(\int_0^h (1 - (1-t)^n)^{mp} \varphi(t) dt \right)^{-1/p}. \end{aligned} \quad (41)$$

Для получения оценок снизу на множестве $\mathcal{P}_n \cap L_2$ рассмотрим шар

$$S_{n+1} := \left\{ q_n \in \mathcal{P}_n : \|q_n\|_2 \leq \lambda_n^{-2r} \left(\int_0^h (1 - (1-t)^n)^{mp} \varphi(t) dt \right)^{-1/p} \right\}$$

и докажем включение $S_{n+1} \subset W_p^{(r)} L_2(\Omega_m; h, \varphi)$.

Для произвольного полинома

$$q_n(x) = \sum_{k=1}^n c_k(q_n) J_\nu(\lambda_k x) \subset S_{n+1}$$

на основании формул (16), (17) и монотонного возрастания элементов последовательности собственных чисел $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ имеем

$$\begin{aligned} \Omega_m(\mathcal{D}^r q_n, t) &= \left\{ \sum_{k=1}^n (1 - (1-t)^k)^{2m} \lambda_k^{4r} c_k^2(q_n) \right\}^{1/2} \leq \\ &\leq \lambda_n^{2r} (1 - (1-t)^n)^m \left\{ \sum_{k=1}^n c_k^2(q_n) \right\}^{1/2} = \lambda_n^{2r} (1 - (1-t)^n)^m \|q_n\|. \end{aligned} \quad (42)$$

Возведя левую и правую части неравенства (42) в степень p , умножая их на весовую функцию φ и интегрируя обе части полученного таким образом неравенства по переменной t в пределах от $t = 0$ до $t = h$, получаем

$$\begin{aligned} \int_0^h \Omega_m^p(\mathcal{D}^r q_n, t) \varphi(t) dt &\leq \lambda_n^{2rp} \|q_n\|^p \int_0^h (1 - (1-t)^n)^{mp} \varphi(t) dt \leq \\ &\leq \lambda_n^{2rp} \int_0^h (1 - (1-t)^n)^{mp} \varphi(t) dt \lambda_n^{-2rp} \left(\int_0^h (1 - (1-t)^n)^{mp} \varphi(t) dt \right)^{-1} = 1, \end{aligned}$$

и, следовательно, включение $S_{n+1} \subset W_p^{(r)} L_2(\Omega_m; h, \varphi)$ доказано. Но тогда на основании определения бернштейновского n -поперечника и соотношения (39) между n -поперечниками записываем

$$\begin{aligned} \gamma_n(W_p^{(r)} L_2(\Omega_m; h, \varphi), L_2) &\geq b_n(W_p^{(r)} L_2(\Omega_m; h, \varphi), L_2) \geq \\ &\geq b_n(S_{n+1}; L_2) \geq \lambda_n^{-2r} \left(\int_0^h (1 - (1-t)^n)^{mp} \varphi(t) dt \right)^{-1/p}. \end{aligned} \quad (43)$$

Сравнением оценки сверху (41) и оценки снизу (43) получаем равенства (40). Теорема 3 доказана. Из доказанной теоремы вытекает ряд утверждений.

СЛЕДСТВИЕ 3. В условиях теоремы 3 при $\varphi_*(t) := n(1-t)^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$ и любого $h \in (0, 1)$ имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \gamma_n(W_p^{(r)} L_2(\Omega_m; h, \varphi_*)) &= E_{n-1}(W_p^{(r)} L_2(\Omega_m; h, \varphi_*)) = \\ &= \left\{ \frac{mp+1}{[1-(1-h)^n]^{mp+1}} \right\}^{1/p} \lambda_n^{-2r}. \end{aligned} \quad (44)$$

В качестве второго следствия теоремы 3 рассмотрим экстремальную задачу вычисления точной верхней грани модулей коэффициентов Фурье–Бесселя $c_n(f)$. Эта задача для периодических классов функций рассмотрена, например, в работе [12], а для коэффициентов Фурье разложения функций по ортогональным с весом полиномам в работе [10]. Для рассматриваемых здесь классов функций эта задача также представляет определённый интерес.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть $0 < p \leq 2$. Тогда для произвольного $n \in \mathbb{N}$ имеет место равенство

$$\begin{aligned} \sup\{|c_n(f)| : f \in W_p^{(r)} L_2(\Omega_m; h, \varphi)\} &= \\ &= \lambda_n^{-2r} \left(\int_0^h (1 - (1-t)^n)^{mp} \varphi(t) dt \right)^{-1/p}. \end{aligned} \quad (45)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пользуясь свойством ортогональности частичных сумм Фурье–Бесселя для произвольной функции $f \in L_2$ запишем равенство

$$\begin{aligned} c_n(f) &= \int_0^1 x f(x) J_\nu(\lambda_n x) dx = \int_0^1 x (f(x) - S_{n-1}(f, x)) J_\nu(\lambda_n x) dx = \\ &= \int_0^1 \{\sqrt{x}(f(x) - S_{n-1}(f, x))\} \{\sqrt{x} J_\nu(\lambda_n x)\} dx. \end{aligned} \quad (46)$$

Оценив по модулю равенство (46) и применяя неравенство Коши–Буняковского, формулу (2), получаем соотношение

$$|c_n(f)| \leq \|f - S_{n-1}(f)\| \cdot \|J_\nu(\lambda_n \cdot)\| = \|f - S_{n-1}(f)\| = E_{n-1}(f). \quad (47)$$

Из формул (40) и (47) получаем оценку сверху модулей коэффициентов на всём классе функций:

$$\begin{aligned} \sup\{|c_n(f)| : f \in W_p^{(r)} L_2(\Omega_m; h, \varphi)\} &\leq E_{n-1}(W_p^{(r)} L_2(\Omega_m; h, \varphi)) = \\ &= \lambda_n^{-2r} \left(\int_0^h (1 - (1-t)^n)^{mp} \varphi(t) dt \right)^{-1/p}. \end{aligned} \quad (48)$$

Для получения оценки снизу величины, записанной в левой части неравенства (48), рассмотрим функцию

$$g_0(x) := \lambda_n^{-2r} \left(\int_0^h (1 - (1-t)^n)^{mp} \varphi(t) dt \right)^{-1/p} J_\nu(\lambda_n x),$$

которая, как легко проверить, содержится в шаре S_{n+1} , введенном при доказательстве теоремы 3. Но, так как $S_{n+1} \subset W_p^{(r)} L_2(\Omega_m; h, \varphi)$, то функция g_0 принадлежит этому же классу. Следовательно,

$$\begin{aligned} \sup\{|c_n(f)| : f \in W_p^{(r)} L_2(\Omega_m; h, \varphi)\} &\geq c_n(g_0) = \\ &= \lambda_n^{-2r} \left(\int_0^h (1 - (1-t)^n)^{mp} \varphi(t) dt \right)^{-1/p}. \end{aligned} \quad (49)$$

Из сравнения оценки сверху (48) и оценки снизу (49) следует утверждение следствия 4.

5. Значения n -поперечников классов функций, задаваемых посредством $\mathcal{K}$ -функционала

Неубывающую на $[0, \infty]$ функцию Φ называют k -мажорантой [13, с.25], если функция $\Phi(t)/t^k$, где $k \in \mathbb{N}$, не возрастает на $(0, \infty)$, $\Phi(0) = 0$ и при $t \rightarrow 0$, имеем $\Phi(t) \rightarrow 0$. Множество всех k -мажорант обозначаем символом $\mathcal{F}^{(k)}$.

Символом $W_{m,k}^{(r)}(\mathcal{K}; \Phi)$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \mathbb{N}$ обозначим класс функций $f \in L_2^{(r)}(\mathcal{D})$, для которых функция $\mathcal{D}^r f$ удовлетворяет условию

$$\mathcal{K}(\mathcal{D}^r f, t^m) \leq \Phi(t^m), \quad 0 < t \leq 1,$$

где Φ —произвольная функция из множества $\mathcal{F}^{(k)}$. В случае $k = 1$ вместо символа $W_{m,1}^{(r)}(\mathcal{K}; \Phi)$ будем писать просто $W_m^{(r)}(\mathcal{K}; \Phi)$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $r \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \mathbb{N}$. Тогда для произвольного $n \in \mathbb{N}$, имеют место равенства

$$\gamma_n(W_m^{(r)}(\mathcal{K}, \Phi), L_2) = E_n(W_m^{(r)}(\mathcal{K}, \Phi))_{L_2} = \lambda_n^{-2r} \Phi(\lambda_n^{-2m}), \quad (50)$$

где $\gamma_n(\cdot)$ — любой из вышеперечисленных n -поперечников.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя определения класса $W_m^{(r)}(\mathcal{K}, \Phi)$, из равенства (27) и неравенства (39) получаем оценку сверху:

$$\begin{aligned} \gamma_n(W_m^{(r)}(\mathcal{K}, \Phi), L_2) &\leq d_n(W_m^{(r)}(\mathcal{K}, \Phi)) \leq \\ &\leq E_{n-1}(W_m^{(r)}(\mathcal{K}, \Phi))_{L_2} = \sup\{E_{n-1}(f) : f \in W_m^{(r)}(\mathcal{K}, \Phi)\} \leq \lambda_n^{-2r} \Phi(\lambda_n^{-2m}). \end{aligned} \quad (51)$$

Для получения оценки снизу рассматриваемых n -поперечников нужно показать, что сфера обобщенных полиномов

$$\tilde{S}_{n+1} := \{q_n \in \mathcal{P}_n : \|q_n\| \leq \lambda_n^{-2r} \Phi(\lambda_n^{-2m})\}$$

содержится внутри класса $W_m^{(r)}(\mathcal{K}, \Phi)$, то есть имеет место включение $\tilde{S}_{n+1} \subset W_m^{(r)}(\mathcal{K}, \Phi)$. Но, так как в силу определения класса $W_m^{(r)}(\mathcal{K}, \Phi)$, функция $\Phi \in \mathcal{F}^{(1)}$, то для любых значений $0 < x_1 < x_2 \leq 1$ выполняется неравенство

$$\frac{\Phi(x_1)}{x_1} \geq \frac{\Phi(x_2)}{x_2}. \quad (52)$$

Полагая в неравенстве (52) $x_1 = t_1^{2m}$, $x_2 = t_2^{2m}$, где $0 < t_1 < t_2 \leq 1$, имеем

$$\frac{\Phi(t_1^{2m})}{\Phi(t_2^{2m})} \geq \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^{2m}. \quad (53)$$

Теперь заметим, что из (34) вытекает неравенство

$$\|\mathcal{D}^{r+m}(q_n)\| \leq \lambda_n^{2(r+m)} \|q_n\|, \quad q_n \in \mathcal{P}_n. \quad (54)$$

Пусть сперва $0 < t \leq 1/\lambda_n$. Используя неравенство (53), в котором полагаем $t_1 := t$, $t_2 := 1/\lambda_n$ и применяя второе неравенство из соотношения (35) и неравенство (54), для произвольного полинома $q_n \in \tilde{S}_{n+1}$ получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(\mathcal{D}^r q_n, t^{2m}) &\leq t^{2m} \|\mathcal{D}^{r+m} q_n\| \leq \\ &\leq t^{2m} \lambda_n^{2(r+m)} \|q_n\| \leq t^{2m} \lambda_n^{2m} \Phi(\lambda_n^{-2m}) \leq \Phi(t^{2m}). \end{aligned} \quad (55)$$

Если же $1/\lambda_n \leq t < 1$, то используя первое неравенство в соотношении (35) и неравенство (37), а также учитывая, что мажоранта $\Phi \in \mathcal{F}^{(1)}$ является неубывающей функцией, для произвольного полинома $q_n \in \mathcal{P}_n$ имеем:

$$\mathcal{K}(\mathcal{D}^r q_n, t^{2m}) \leq \|\mathcal{D}^r q_n\| \leq \lambda_n^r \|q_n\| \leq \Phi(\lambda_n^{-2m}) \leq \Phi(t^m). \quad (56)$$

Таким образом, из неравенств (55) и (56) следует включение $\tilde{S}_{n+1} \subset W_m^{(r)}(\mathcal{K}, \Phi)$ и, согласно определению бернштейновского n -поперечника и соотношению (39), запишем оценки снизу:

$$\gamma_n(W_m^{(r)}(\mathcal{K}, \Phi), L_2) \geq b_n(W^{(r)}(\mathcal{K}, \Phi), L_2) \geq b_n(\tilde{S}_{n+1}, L_2) \geq \lambda_n^{-2r} \Phi(\lambda_n^{-2m}). \quad (57)$$

Равенства (50) следуют из оценок (51) и (57), чем и завершаем доказательство теоремы 4.

СЛЕДСТВИЕ 5. При выполнении условий теоремы 4 при любом $n \in \mathbb{N}$ справедливы равенства

$$\sup\{|c_n(f)| : f \in W_m^{(r)}(\mathcal{K}, \Phi)\} = \lambda_n^{-2r} \Phi(\lambda_n^{-2m}).$$

Доказательство утверждения следствия 5 не приводится, поскольку оно повторяет схему доказательства следствия 4.

6. Заключение

В данной работе рассматривается экстремальная задача вычисления верхней грани наилучших приближений частичными суммами ряда Фурье–Бесселя квадратично суммируемых с весом x на отрезке $[0, 1]$ функций. Вычислены точные значения различных n -поперечников некоторых классов функций, естественно возникающих при решении указанной экстремальной задачи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М.: Наука. 1981. 512 с.
2. Абилов В. А., Абилова Ф. В., Керимов М. К. Точные оценки скорости сходимости рядов Фурье–Бесселя // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2015. Т.55. №6. С. 917-927.

3. Чертова Д. В. Теорема Джексона в пространстве L_2 на прямой со степенным весом // Материалы 8-й междунар. Казан. летн. научн. шк.-конф. Казань: Изд-во Казан. матем. о-ва. 2007. Т.35. С. 267-268.
4. Иванов В. И., Чертова Д. В., Лю Юнпин. Точное неравенство Джексона в пространстве L_2 на отрезке $[-1, 1]$ со степенным весом // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2008. Т.14. №3. С. 112-126.
5. Шабозов М. Ш., Юсупов Г. А. Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 некоторых классов 2π -периодических функций и точные значения их поперечников // Матем. заметки. 2011. Т.90. №5. С. 764-775.
6. Шабозов М. Ш., Тухлиев К. Неравенства Джексона–Стечкина с обобщёнными модулями непрерывности и поперечники некоторых классов функций // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2015. Т.21. №4. С. 292-308.
7. Pinkus A. n -Widths in Approximation Theory. Berlin: Springer-Verlag. Heidelberg. New York. Tokyo. 1985. 252 p.
8. Фёдоров В. М. Приближение алгебраическими многочленами с весом Чебышева–Эрмита // Известия вузов. Математика. 1984. №6. С. 55-63.
9. Алексеев Д. В. Приближение полиномами с весом Чебышева–Эрмита на действительной оси // Вестник МГУ. Математика. Механика. 1997. №6. С. 68-71.
10. Шабозов М. Ш., Тухлиев К. $\mathcal{K}$ -функционалы и точные значения n -поперечников некоторых классов из $L_2\left((\sqrt{1-x^2})^{-1}; [-1, 1]\right)$ // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2014. Вып. 1. Ч.1. С. 83-97.
11. Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений. М.:МГУ. 1976. 304 с.
12. Шабозов М. Ш., Вакарчук С. Б. О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами и точных значениях поперечников функциональных классов в L_2 // Analysis Mathematica. 2008. Т.38. №2. С. 147-159.
13. Шевчук А. И. Приближение многочленами и следы непрерывных на отрезке функций. Киев: Наукова думка. 1992. 255 с.

REFERENCES

1. Vladimirov V. S. 1981, “Equations of Mathematical Physics”, *Moscow: Science*, 512 p.
2. Abilov V. A., Abilova V. F., Kerimov M.K. 2015, “Sharp estimates for the convergence rate of Fourier–Bessel series”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, vol. 55, no 6, pp. 907–916.
3. Chertova D. V. 2007, “Jackson theorem in the space L_2 on the line with power weight”, *Material of 8th Intern. Kazan. Summer Science School-Conf.*, *Kazan: Math Soc. Press*, vol. 35, pp. 267-268.
4. Ivanov V. I., Chertova D. V., Liu Yongping. 2008, “The sharp Jackson inequality in the space L_2 on the segment $[-1, 1]$ with the power weight”, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, vol. 14, no 1, pp. 133–149.

5. Shabozov M. Sh., Yusupov G. A. 2011, “Best polynomial approximations in L_2 of classes of 2π -periodic functions and exact values of their widths”, *Mathematical Notes*, vol. 90, no 5, pp. 748–757.
6. Shabozov M. Sh., Tukhliev K. 2015, “Jackson-Stechkin inequality with generalized module of continuity and widths of some classes functions”, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, vol. 21, no 4, pp. 292–308.
7. Pinkus A. 1985, “ n -Widths in Approximation Theory”. Berlin: Springer-Verlag. Heidelberg. New York. Tokyo. 252 p.
8. Fedorov V. M. 1984, “Approximation by algebraic polynomials with Chebyshev–Hermitian weight”, *Izvestiya VUZ. Mathematica*, vol. 28, no 6, pp. 70–79.
9. Alexeev D. V. 1997, “Approximation by polynomial with Chebyshev–Hermitian weight on the real axis”, *Vestnik MGU. Mathematica. Mekhanica*, no 6, pp. 68–71.
10. Shabozov M. Sh., Tukhliev K. 2014, “ $\mathcal{K}$ functionals and the exact values of n -widths of some class of functions from $L_2\left((\sqrt{1-x^2})^{-1}; [-1, 1]\right)$ ”, *Izv. TSU. Natural Science*, no 1(1). pp. 83–97.
11. Tikhomirov V. M. 1976, “Some problems of theory of approximation”, *Moscow: MSU*, 304 p.
12. Shabozov M. Sh., Vakarchuk S. B. 2008, “On best approximation of periodic functions by trigonometric polynomials and the exact values of widths of functional classes in L_2 ”, *Analysis Mathematica*, vol. 38, no 2. pp. 147–159.
13. Shevchuk A. I. 1992. “Approximation by polynomials and tracks of continuous functions on the segment”, *Kiev: Naukova Dumka*, 255 p.

Худжандский государственный университет.

Поступило 12.09.2016 г.

Принято в печать 12.12.2016 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 17 Выпуск 4

УДК 512.579

DOI 10.22405/2226-8383-2016-17-4-157-166

АЛГЕБРЫ РИСА И КОНГРУЭНЦ-АЛГЕБРЫ РИСА В ОДНОМ КЛАССЕ АЛГЕБР С ОПЕРАТОРОМ И ОСНОВНОЙ ОПЕРАЦИЕЙ ПОЧТИ ЕДИНОГЛАСИЯ

В. Л. Усольцев (г. Волгоград)

Аннотация

Понятие конгруэнции Риса первоначально было введено для полугрупп. Р. Тихи обобщил его на произвольные универсальные алгебры. Обозначим через Δ нулевую конгруэнцию алгебры A . Конгруэнция θ алгебры A , представляющаяся как $\theta = B^2 \cup \Delta$ для некоторой подалгебры B алгебры A , называется конгруэнцией Риса. Подалгебра B алгебры A называется подалгеброй Риса, если $B^2 \cup \Delta$ есть конгруэнция алгебры A . Алгебра A называется алгеброй Риса, если любая ее подалгебра является подалгеброй Риса.

В работе вводятся понятия рисовски простой алгебры и конгруэнц-алгебры Риса. Неоднородная универсальная алгебра называется рисовски простой, если любая ее конгруэнция Риса является тривиальной. Конгруэнц-алгеброй Риса называется алгебра, в которой любая конгруэнция является конгруэнцией Риса.

Алгеброй с операторами называется универсальная алгебра с дополнительной системой операторов — унарных операций, действующих как эндоморфизмы относительно основных операций. Получены некоторые условия, при которых алгебра с одним оператором и произвольной основной сигнатурой является алгеброй Риса. Для алгебр из этого же класса найдено необходимое условие, при котором они являются конгруэнц-алгебрами Риса. Получено необходимое условие рисовской простоты для произвольной алгебры с оператором, унарный редукт которой является связным унаром с неподвижным элементом, не содержащим узловых элементов, кроме, может быть, неподвижного.

Операцией почти единогласия называется n -арная операция φ ($n \geq 3$), удовлетворяющая тождествам

$$\varphi(x, \dots, x, y) = \varphi(x, \dots, x, y, x) = \dots = \varphi(y, x, \dots, x) = x.$$

В тернарном случае φ называется операцией большинства. Полностью описаны алгебры Риса и конгруэнц-алгебры Риса в классе алгебр с одним оператором и основной операцией почти единогласия $g^{(n)}$, заданной следующим образом: $g^{(3)}(x_1, x_2, x_3) = t(x_1, x_2, x_3)$ и $g^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = t(g^{(n-1)}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), x_{n-1}, x_n)$ для $n > 3$. Через $t(x_1, x_2, x_3)$ здесь обозначается операция большинства, заданная автором на произвольном унаре в соответствии с подходом, предложенным В.К. Карташовым, и перестановочная с унарной.

Ключевые слова: алгебра Риса, конгруэнция Риса, рисовски простая алгебра, конгруэнц-алгебра Риса, алгебра с операторами, операция почти единогласия.

Библиография: 16 названий.

REES ALGEBRAS AND REES CONGRUENCE ALGEBRAS OF ONE CLASS OF ALGEBRAS WITH OPERATOR AND BASIC NEAR-UNANIMITY OPERATION

V. L. Usol'tsev (Volgograd)

Abstract

The concept of Rees congruence was originally introduced for semigroups. R. Tichy generalized this concept to universal algebras. Let A be an universal algebra. Denote by Δ the identity relation on A . Any congruence of the form $B^2 \cup \Delta$ on A for some subalgebra B of A is called a Rees congruence. Subalgebra B of A is called a Rees subalgebra whenever $B^2 \cup \Delta$ is a congruence on A . An algebra A is called a Rees algebra if its every subalgebra is a Rees one.

In this paper we introduce concepts of Rees simple algebra and Rees congruence algebra. A non-one-element universal algebra A is called Rees simple algebra if any Rees congruence on A is trivial. An universal algebra A is called Rees congruence algebra if any congruence on A is Rees congruence.

Universal algebra is called an algebra with operators if it has an additional set of unary operations acting as endomorphisms with respect to basic operations. For algebras with one operator and an arbitrary basic signature some conditions to be Rees algebra are obtained. Necessary condition under which algebra of the same class is Rees congruence algebra is given. For algebras with one operator and a connected unary reduct that has a loop element and does not contain the nodal elements, except, perhaps, the loop element necessary condition for their Rees simplicity are obtained.

A n -ary operation φ ($n \geq 3$) is called near-unanimity operation if it satisfies the identities $\varphi(x, \dots, x, y) = \varphi(x, \dots, x, y, x) = \dots = \varphi(y, x, \dots, x) = x$. If $n = 3$ then operation φ is called a majority operation. Rees algebras and Rees congruence algebras of class algebras with one operator and basic near-unanimity operation $g^{(n)}$ which defined as follows $g^{(3)}(x_1, x_2, x_3) = m(x_1, x_2, x_3)$, $g^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = m(g^{(n-1)}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), x_{n-1}, x_n)$ ($n > 3$) are fully described. Under $m(x_1, x_2, x_3)$ we mean here a majority operation which permutable with unary operation and which was defined by the author on arbitrary unar according to the approach offered by V.K. Kartashov.

Keywords: Rees algebra, Rees congruence, Rees simple algebra, Rees congruence algebra, algebra with operators, near-unanimity operation.

Bibliography: 16 titles.

1. Введение

Теория алгебр Риса имеет своими истоками теорию полугрупп. В работе [1] Д. Рисом было введено понятие конгруэнции Риса для полугрупп. В [2] оно обобщается на произвольные универсальные алгебры. Определения возникающих при этом понятий, приведенные ниже, даны в формулировках работы [3].

Обозначим через Δ нулевую конгруэнцию алгебры A . Конгруэнция θ алгебры A , представляющаяся как $\theta = B^2 \cup \Delta$ для некоторой подалгебры B алгебры A , называется *конгруэнцией Риса*. Подалгебра B алгебры A называется *подалгеброй Риса*, если $B^2 \cup \Delta$ есть конгруэнция алгебры A . Алгебра A называется *алгеброй Риса*, если любая ее подалгебра является подалгеброй Риса.

Характеризация алгебр Риса и рисовских многообразий алгебр дается в [4], [5]. В монографии [6] также уделяется значительное внимание алгебрам Риса и связанным с ними понятиям.

Обозначим через $SubA$ решетку подалгебр универсальной алгебры A , а через $ConA$ — решетку ее конгруэнций. Положим $\emptyset \in SubA$. При этом условии совокупность всех подалгебр

Риса алгебры A образует решетку $Sub_R A$ относительно включения [2]. Поскольку пустое множество считается подалгеброй в A , то легко показать, что и совокупность всех конгруэнций Риса алгебры A образует полную решетку $Con_R A$ относительно включения, нулем и единицей которой являются тривиальные конгруэнции $\nabla = A^2 \cup \Delta$ и $\Delta = \emptyset^2 \cup \Delta$. Это позволяет ставить для $Con_R A$ задачи, аналогичные тем, которые возникают при изучении решетки $Con A$. В частности, к задачам такого рода относится описание алгебр из заданного класса, решетка конгруэнций Риса которых является двухэлементной цепью. Будем называть такие алгебры *рисовски простыми*. Другими словами, неоднородная алгебра A рисовски проста, если любая ее конгруэнция Риса является тривиальной.

Естественный интерес вызывает также противоположная к рисовской простоте ситуация, когда любая конгруэнция алгебры является конгруэнцией Риса. Назовем алгебры с таким свойством *конгруэнц-алгебрами Риса*. Сходное понятие возникает в теории полугрупп: конгруэнц-полугруппой Риса называется такая полугруппа, в которой любая ненулевая конгруэнция является конгруэнцией Риса [7].

В настоящей работе изучаются алгебры Риса и конгруэнц-алгебры Риса в одном классе алгебр с оператором и основной операцией почти единогласия. Алгеброй с операторами называется универсальная алгебра с дополнительной системой операторов — унарных операций, действующих как эндоморфизмы относительно основных операций. Если f — унарная операция из сигнатуры Ω , то *унарным редуктом* алгебры $\langle A, \Omega \rangle$ называется унар $\langle A, f \rangle$.

Операцией почти единогласия (near-unanimity operation) (см., напр., [8]) называется n -арная операция φ , удовлетворяющая тождествам

$$\varphi(x, \dots, x, y) = \varphi(x, \dots, x, y, x) = \dots = \varphi(y, x, \dots, x) = x (n \geq 3).$$

В тернарном случае φ называют *операцией большинства*. Алгебрам с термальной операцией почти единогласия уделяется значительное внимание в современной универсальной алгебре (см., напр., [9]) и теоретической информатике (см., напр., [10]).

В [11] показано, что на любом унаре $\langle A, f \rangle$ можно так определить операцию большинства $m(x, y, z)$, что алгебра $\langle A, m, f \rangle$ становится алгеброй с оператором f . Предложенная конструкция восходит к [12]. Пусть $\langle A, f \rangle$ — произвольный унар и $x, y \in A$. Для любого элемента x унара $\langle A, f \rangle$ через $f^n(x)$ обозначается результат n -кратного применения операции f к элементу x ; $f^0(x) = x$. Положим $M_{x,y} = \{n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid f^n(x) = f^n(y)\}$, а также $k(x, y) = \min M_{x,y}$, если $M_{x,y} \neq \emptyset$ и $k(x, y) = \infty$, если $M_{x,y} = \emptyset$. Положим далее

$$m(x, y, z) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} z, & \text{если } k(x, y) \geq k(y, z); \\ x, & \text{если } k(x, y) < k(y, z). \end{cases}$$

В [11] описаны простые и строго простые алгебры в классе алгебр $\langle A, m, f \rangle$, в [13] — гамильтоновы алгебры данного класса.

В [14] показано, что используя произвольную операцию большинства на множестве A , на A можно определить операцию почти единогласия. Там же, на произвольном унаре $\langle A, f \rangle$ для $n \geq 3$ определяется n -арная операция почти единогласия $g^{(n)}$ по следующим правилам: $g^{(3)}(x_1, x_2, x_3) = m(x_1, x_2, x_3)$ и $g^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = m(g^{(n-1)}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), x_{n-1}, x_n)$ для $n > 3$, и доказывается, что алгебра $\langle A, g^{(n)}, f \rangle$ является алгеброй с оператором f .

В [14] были полностью описаны простые алгебры в классе алгебр $\langle A, g^{(n)}, f \rangle$, а также были получены необходимые и достаточные условия совпадения решеток конгруэнций алгебры из данного класса и унарного редукта этой алгебры.

2. Основные определения и конструкции

Класс конгруэнции θ , порожденный элементом x , обозначается через $[x]\theta$.

Конгруэнция $\bar{\alpha}$ произвольной алгебры $\langle A, \Omega \rangle$ называется *расширением* конгруэнции α подалгебры B в $\langle A, \Omega \rangle$, если условие $x\bar{\alpha}y$ для $x, y \in A$ выполняется тогда и только тогда, когда $x\alpha y$, либо $x = y$.

Через C_h^t ($h > 0$, $t \geq 0$) обозначается унар $\langle a | f^t(a) = f^{h+t}(a) \rangle$. Унар C_n^0 называется *циклом длины n* . Элемент a унара называется *циклическим*, если подунар, порожденный этим элементом, является циклом. Через C_n^∞ обозначается объединение возрастающей последовательности унаров $C_n^{t_1} \subseteq C_n^{t_2} \subseteq \dots$ ($t_i \geq 0$, $t_1 < t_2 < \dots$). Через F_1 обозначается свободный однопорожденный унар. *Цепью* C^∞ называется унар, изоморфный унару $\langle Z, f \rangle$, где Z — множество целых чисел и $f(n) = n + 1$ для любого $n \in Z$.

Элемент a унара называется *периодическим*, если $f^t(a) = f^{t+n}(a)$ для некоторых $t \geq 0$ и $n \geq 1$. Через $T(A)$ обозначается множество всех периодических элементов унара A . Если a — периодический элемент, то наименьшее из чисел t , для которых $f^t(a) = f^{t+n}(a)$ при некоторых $n \geq 1$, называется *глубиной элемента a* и обозначается через $t(a)$. *Глубиной $t(A)$ унара A* называется наибольшая из глубин его периодических элементов, если $T(A) \neq \emptyset$. Если множество $\{t(a) \mid a \in T(A)\}$ не ограничено, то говорят, что унар имеет бесконечную глубину.

Унар $\langle A, f \rangle$ называется *связным*, если для любых $x, y \in A$ выполняется условие

$$f^n(x) = f^m(y)$$

для некоторых $n, m \geq 0$. Максимальный по включению связный подунар унара A называется *компонентой связности* унара A . Объединение непересекающихся унаров называется их *суммой*. Элемент a унара $\langle A, f \rangle$ называется *неподвижным*, если $f(a) = a$. Элемент a унара называется *узловым*, если найдутся такие различные элементы b и c , отличные от a , что $f(b) = a = f(c)$. Связный унар с неподвижным элементом называется *корнем*. *Корнем специального вида* называется связный унар $\langle A, f \rangle$ с неподвижным элементом a , в котором не существует узловых элементов, отличных от a . Через $\langle a \rangle$ обозначается подунар унара $\langle A, f \rangle$, порожденный элементом a .

Пусть $\langle A, f \rangle$ — корень. Через D_k обозначается его подунар, состоящий из всех элементов с глубиной, не превосходящей k . Если $t(A)$ конечна, то $0 \leq k \leq t(A)$; в противном случае, $0 \leq k < t(A)$.

Пусть $k \in \mathbb{N}$. Через σ_k обозначается конгруэнция произвольной алгебры $\langle A, \Omega \rangle$ с оператором $f \in \Omega$, определенная как $\text{Ker } f^k$. Положим также $\sigma_0 = \Delta$. Через σ обозначается конгруэнция на $\langle A, \Omega \rangle$, определенная как $x\sigma y \Leftrightarrow \exists s > 0 (f^s(x) = f^s(y))$ [15].

Пусть v — узловой элемент унара $\langle A, f \rangle$. Через θ_v обозначается бинарное отношение на A , определенное по правилу: $x\theta_v y$, где $x, y \in A$, выполняется тогда и только тогда, когда либо $x = y$, либо $x, y \in f^{-1}(v)$.

Другие определения и обозначения из теории унаров можно найти в [15].

3. Основные результаты

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $\langle A, \Omega \rangle$ — произвольная алгебра с оператором $f \in \Omega$. Если ее унарный редукт $\langle A, f \rangle$ изоморфен либо C_h^0 , где $h \in \mathbb{N}$, либо C_1^t , где $t \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, либо $C_1^0 + C_1^0$, то алгебра $\langle A, \Omega \rangle$ является алгеброй Риса.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\langle A, f \rangle \cong C_h^0$ для некоторого $h > 0$. Тогда алгебра $\langle A, \Omega \rangle$ не содержит собственных нетривиальных подалгебр, и, следовательно, является алгеброй Риса.

Пусть теперь $\langle A, f \rangle \cong C_1^0 + C_1^0$. Если $\langle A, \Omega \rangle$ не содержит нетривиальных подалгебр, то, очевидно, она является алгеброй Риса. В противном случае любая нетривиальная подалгебра B алгебры $\langle A, \Omega \rangle$ одноэлементна. Тогда $B^2 \cup \Delta = \Delta$.

Наконец, пусть $\langle A, f \rangle \cong C_1^h$, где $h \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, и B — нетривиальная подалгебра алгебры $\langle A, \Omega \rangle$. Так как B замкнута относительно операции f , то $\langle B, f \rangle$ — подунар унара $\langle A, f \rangle$.

Отсюда, $\langle B, f \rangle \cong C_1^s$ для некоторого $s \in \mathbb{N}$, где $s \leq h$ в случае конечности h . Обозначим неподвижный элемент унара $\langle A, f \rangle$ через a , порождающий элемент подунара $\langle B, f \rangle$ — через b , и докажем, что $B = [a]\sigma_s$.

Пусть $x \in B$. Тогда $x = f^d(b)$ для некоторого $d \leq t(b)$. Поскольку $t(b) = s$, то $t(x) \leq s$, откуда $f^s(x) = a$. С другой стороны, $f^s(a) = a$. Отсюда, $f^s(x) = f^s(a)$, что влечет $x\sigma_s a$ и $x \in [a]\sigma_s$. Таким образом, $B \subseteq [a]\sigma_s$. Пусть теперь $x \in [a]\sigma_s$. Тогда $f^s(x) = f^s(a) = a$, и следовательно, $t(x) \leq s = t(b)$, откуда $x \in B$. Значит, $[a]\sigma_s \subseteq B$, и, окончательно, $B = [a]\sigma_s$.

Предположим, что найдется неодноэлементный класс K конгруэнции σ_s , не совпадающий с B . Отсюда, $c\sigma_s d$ для некоторых $c, d \in K$, $c \neq d$. Так как $\langle A, f \rangle \cong C_1^h$, то без ограничения общности можно положить $f^k(c) = d$ для некоторого $k > 0$. Поскольку $\langle B, f \rangle \cong C_1^s$ и $B \cap K = \emptyset$, то $t(c) > s$. Из условия $c\sigma_s d$ следует, что $f^s(c) = f^s(d) = f^s(f^k(c)) = f^k(f^s(c))$. Отсюда, элемент $f^s(c)$ — циклический, что противоречит условию $t(c) > s$. Таким образом, $B^2 \cup \Delta = \sigma_s \in \text{Con} A$. $\square$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $\langle A, \Omega \rangle$ — произвольная неодноэлементная алгебра с оператором $f \in \Omega$, а ее унарный редукт $\langle A, f \rangle$ является корнем специального вида. Если алгебра $\langle A, \Omega \rangle$ является рисовски простой, то глубина унара $\langle A, f \rangle$ равна единице.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\langle A, \Omega \rangle$ неодноэлементна, то глубина унара $\langle A, f \rangle$ не равна нулю.

Предположим, что $t(A) > 1$. По предложению 1 [16], подунар D_1 унара $\langle A, f \rangle$ является подалгеброй в $\langle A, \Omega \rangle$. Из определения конгруэнции $\sigma_1 \in \text{Con} \langle A, \Omega \rangle$ следует, что на $\langle A, f \rangle$ выполняется равенство $\sigma_1 = D_1^2 \cup \Delta$, то есть, σ_1 — конгруэнция Риса. Из предположения вытекает ее нетривиальность, что противоречит условию. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Необходимое условие рисовской простоты алгебры $\langle A, \Omega \rangle$, приведённое в предложении 2, не является достаточным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим алгебру $\langle A, d, f \rangle$ с тернарной операцией d и оператором f , заданными следующим образом: $A = \{a, b, c\}$, $f(a) = a$, $f(b) = a$, $f(c) = a$, $d(a, b, c) = d(c, b, a) = a$, $d(a, c, b) = d(b, a, c) = d(b, c, a) = d(c, a, b) = b$ и $d(x, y, y) = d(y, y, x) = d(x, y, x) = x$ для любых $x, y \in A$.

Из определений операций d и f следует, что для унара $\langle A, f \rangle$ выполняется условие $t(A) = 1$, а подмножество $\{a, c\}$ множества A является подалгеброй алгебры $\langle A, d, f \rangle$. Непосредственная проверка показывает, что отношение $\{a, c\}^2 \cup \Delta$ является конгруэнцией Риса на $\langle A, d, f \rangle$. Таким образом, алгебра $\langle A, d, f \rangle$ не является рисовски простой. $\square$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $\langle A, \Omega \rangle$ — произвольная алгебра с оператором $f \in \Omega$. Если $\langle A, \Omega \rangle$ является конгруэнц-алгеброй Риса, то унар $\langle A, f \rangle$ содержит не более одного узлового элемента.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что унар $\langle A, f \rangle$ имеет два несовпадающих узловых элемента a, b . Тогда найдутся такие элементы $a_1, a_2, b_1, b_2 \in A$, для которых $|\{a_1, a_2, a\}| = 3$, $|\{b_1, b_2, b\}| = 3$ и $f(a_1) = a = f(a_2)$, $f(b_1) = b = f(b_2)$. Отсюда, $a_1\sigma_1 a_2$, $b_1\sigma_1 b_2$, то есть, классы $[a_1]\sigma_1$ и $[b_1]\sigma_1$ конгруэнции $\sigma_1 \in \text{Con} \langle A, \Omega \rangle$ неодноэлементны. Поскольку $a \neq b$, то эти классы не совпадают, и следовательно, σ_1 не является конгруэнцией Риса на $\langle A, \Omega \rangle$. $\square$

Далее везде зафиксируем $n \geq 3$.

ТЕОРЕМА 1. Алгебра $\langle A, g^{(n)}, f \rangle$ с оператором f является алгеброй Риса тогда и только тогда, когда унар $\langle A, f \rangle$ изоморфен одному из следующих унаров: 1) C_h^0 , где $h \in \mathbb{N}$; 2) C_1^t , где $t \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$; 3) $C_1^0 + C_1^0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть унар $\langle A, f \rangle$ не удовлетворяет условиям леммы. Рассмотрим случай, когда $\langle A, f \rangle$ содержит подунар B , изоморфный F_1 . Из определения операции $g^{(n)}$ следует, что $B \in \text{Sub}\langle A, g^{(n)}, f \rangle$.

Пусть подунар B — собственный и $B = \langle b \rangle$. Предположим, что $B^2 \cup \Delta = \theta$ для некоторой $\theta \in \text{Con}A$. Тогда $(b, f(b)) \in \theta$ и $(a, b) \notin \theta$ для некоторого $a \in A \setminus B$. Так как операция f инъективна на B , то $k(b, f(b)) = \infty$, откуда по определению операции $g^{(n)}$ имеем $g^{(n)}(b, \dots, b, f(b), a) = m(g^{(n-1)}(b, \dots, b, f(b)), f(b), a) = m(b, f(b), a) = a$. С другой стороны, $g^{(n)}(b, \dots, b, a) = b$, то есть, отношение θ не стабильно относительно $g^{(n)}$, что противоречит выбору θ .

Если $B = A$, то $\langle A, f \rangle$ изоморфен F_1 . Тогда, по теореме 2 [14], алгебра $\langle A, g^{(n)}, f \rangle$ проста. Обозначим через a порождающий элемент унара $\langle A, f \rangle$. Тогда $\langle f(a) \rangle \in \text{Sub}\langle A, g^{(n)}, f \rangle$. Предполагая, что $\langle f(a) \rangle^2 \cup \Delta = \theta$ для некоторой $\theta \in \text{Con}A$, получаем противоречие с простотой алгебры $\langle A, g^{(n)}, f \rangle$.

Пусть теперь унар $\langle A, f \rangle$ не имеет подунаров, изоморфных F_1 . Тогда любая его компонента связности содержит подунар, изоморфный C_h^0 для некоторого $h \in \mathbb{N}$.

Положим сначала, что $h > 1$ для хотя бы одного подунара $B \cong C_h^0$. Тогда $b \neq c$ для некоторых $b, c \in B$. По условию, подунар B — собственный, то есть, найдется $a \in A \setminus B$. Предположим, что найдется $\theta \in \text{Con}A$, для которой $\theta = B^2 \cup \Delta$. Тогда $b\theta c$ и $(a, b) \notin \theta$. В силу инъективности операции f на B имеем $k(b, c) = \infty$, откуда

$$g^{(n)}(b, \dots, b, c, a) = m(g^{(n-1)}(b, \dots, b, c), c, a) = m(b, c, a) = a,$$

что ведет к противоречию, так как $g^{(n)}(b, \dots, b, a) = b$.

Пусть теперь циклические подунары во всех компонентах связности унара $\langle A, f \rangle$ имеют вид C_1^0 . Если $\langle A, f \rangle$ — связный, то, по условию, он содержит узловой элемент v . Тогда найдутся такие $b, c \in A$, что $f(b) = v = f(c)$ и $|\{v, b, c\}| = 3$. Из определения операции $g^{(n)}$ следует, что $\langle b \rangle \in \text{Sub}\langle A, g^{(n)}, f \rangle$. Предположим, что найдется $\theta \in \text{Con}A$, для которой $\theta = \langle b \rangle^2 \cup \Delta$. Так как $b, v \in \langle b \rangle$, то $v\theta b$; при этом $c \notin \langle b \rangle$, то есть, $(c, b) \notin \theta$. Поскольку $f(b) = v = f(c)$, то по лемме 10 [15], $k(b, v) = t(b)$ и $k(v, c) = t(c)$. Учитывая, что $t(b) = t(c)$, по определению операции $m(x, y, z)$ получаем $m(b, v, c) = c$. Тогда $g^{(n)}(b, \dots, b, v, c) = m(g^{(n-1)}(b, \dots, b, v), v, c) = m(b, v, c) = c$. С другой стороны, $g^{(n)}(b, \dots, b, c) = b$, что влечет нестабильность отношения θ относительно операции $g^{(n)}$, и тем самым, противоречит выбору θ .

Если унар $\langle A, f \rangle$ — несвязный, то зафиксируем циклические элементы b и c любых двух его компонент связности. Тогда $f(b) = b$, $f(c) = c$. Множество $B = \{b, c\}$ является подунаром в $\langle A, f \rangle$. Как следствие, $B \in \text{Sub}\langle A, g^{(n)}, f \rangle$. По условию, B — собственный подунар, то есть найдется элемент $a \in A \setminus B$. Поскольку b и c лежат в разных компонентах связности $\langle A, f \rangle$, то $k(b, c) = \infty$. Отсюда, $g^{(n)}(b, \dots, b, c, a) = m(g^{(n-1)}(b, \dots, b, c), c, a) = m(b, c, a) = a$, что снова ведет к нестабильности отношения θ относительно $g^{(n)}$, поскольку $g^{(n)}(b, \dots, b, a) = b$.

Достаточность. Следует из предложения 1. $\square$

ЛЕММА 1. Пусть v — узловой элемент унара $\langle A, f \rangle$. Тогда отношение θ_v является конгруэнцией алгебры $\langle A, g^{(n)}, f \rangle$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем индукцией по n , что для всех $n \geq 3$ выполняется

$$\theta_v \in \text{Con}\langle A, g^{(n)}, f \rangle.$$

Стабильность отношения θ_v относительно f очевидна. При $n = 3$, по определению, $g^{(3)} = m$. Пусть $x_1\theta_v y_1$, $x_2\theta_v y_2$, $x_3\theta_v y_3$ для $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \in A$. Обозначим $a_1 = m(x_1, x_2, x_3)$, $a_2 = m(y_1, y_2, y_3)$. Предположим, что $(a_1, a_2) \notin \theta_v$. Тогда $a_1 \neq a_2$, причем $a_1 \notin f^{-1}(v)$ или $a_2 \notin f^{-1}(v)$. Далее,

$$f(a_1) = f(m(x_1, x_2, x_3)) = m(f(x_1), f(x_2), f(x_3)) = m(f(y_1), f(y_2), f(y_3)) = f(m(y_1, y_2, y_3)) = f(a_2).$$

Отсюда $k(a_1, a_2) = 1$, и, следовательно, $a_1, a_2 \notin f^{-1}(v)$.

По определению операции m , достаточно рассмотреть только два случая:

- 1) $m(x_1, x_2, x_3) = x_1$, $m(y_1, y_2, y_3) = y_3$;
- 2) $m(x_1, x_2, x_3) = x_3$, $m(y_1, y_2, y_3) = y_1$.

Рассмотрим случай 1). Так как $m(x_1, x_2, x_3) = x_1$, то $k(x_1, x_2) < k(x_2, x_3)$, то есть, коэффициент $k(x_1, x_2)$ конечен и равен некоторому $s \in \mathbb{N}$. По предположению, $x_1 \neq y_3$ и, как показано выше, $x_1 \notin f^{-1}(v)$, $y_3 \notin f^{-1}(v)$. Последнее, по определению отношения θ_v , влечет $x_1 = y_1$, $x_3 = y_3$. При этом $x_2 \neq y_2$, так как $a_1 \neq a_2$. Тогда $x_2, y_2 \in f^{-1}(v)$ и, значит, $f(x_2) = v = f(y_2)$. Из условия $m(y_1, y_2, y_3) = y_3$ вытекает соотношение $k(y_1, y_2) \geq k(y_2, y_3)$. Таким образом, $k(x_1, x_2) < k(x_2, x_3)$, $k(x_1, y_2) \geq k(y_2, x_3)$ (*).

Докажем, что $k(x_1, x_2) = k(x_1, y_2)$. Так как $x_1 \notin f^{-1}(v)$, а $x_2, y_2 \in f^{-1}(v)$, то $x_1 \neq x_2$, $x_1 \neq y_2$, а значит, $k(x_1, x_2) = s \neq 0$, $k(x_1, y_2) \neq 0$. Пусть $k(x_1, y_2) = t$ для некоторого $t \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Тогда $f^s(x_1) = f^s(x_2) = f^{s-1}(v) = f^{s-1}(f(y_2)) = f^s(y_2)$, откуда $t \leq s$, то есть, $t < \infty$. Отсюда, $f^t(x_1) = f^t(y_2) = f^{t-1}(v) = f^{t-1}(f(x_2)) = f^t(x_2)$, и значит, $s \leq t$. Таким образом, $s = t$. Аналогично получаем, что $k(x_2, x_3) = k(y_2, x_3)$, а это противоречит условию (*). Случай 2) рассматривается аналогично. Отсюда, $\theta_v \in \text{Con}\langle A, m, f \rangle$.

Предположим, что если $x_i \theta_v y_i$ для $x_i, y_i \in A$, где $i = 1, \dots, n-1$, то выполнено условие $g^{(n-1)}(x_1, \dots, x_{n-1}) \theta_v g^{(n-1)}(y_1, \dots, y_{n-1})$. Пусть теперь $x_i \theta_v y_i$ для $x_i, y_i \in A$, где $i = 1, \dots, n$. По определению операции $g^{(n)}$, имеем $g^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = m(g^{(n-1)}(x_1, \dots, x_{n-1}), x_n)$ и $g^{(n)}(y_1, \dots, y_n) = m(g^{(n-1)}(y_1, \dots, y_{n-1}), y_n)$. Отсюда, учитывая индуктивное предположение и стабильность θ_v относительно операции m , получаем $g^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \theta_v g^{(n)}(y_1, \dots, y_n)$. Таким образом, $\theta_v \in \text{Con}\langle A, g^{(n)}, f \rangle$. $\square$

ЛЕММА 2. Пусть унар $\langle A, f \rangle$ содержит узловой элемент v , не являющийся неподвижным. Тогда алгебра $\langle A, g^{(n)}, f \rangle$ не является конгруэнц-алгеброй Риса.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию, найдутся $a, b \in A$, для которых $f(a) = v = f(b)$ и $| \{a, b, v\} | = 3$. По лемме 1, $\theta_v \in \text{Con}\langle A, g^{(n)}, f \rangle$. Предположим, что $\theta_v = B^2 \cup \Delta$ для некоторой $B \in \text{Sub}A$. Поскольку $a \theta_v b$, то $a, b \in B$. Так как B — подалгебра, то $f(a) = v \in B$. Отсюда, $a \theta_v v$, то есть, $f(a) = v = f(v)$, что противоречит условию. $\square$

ЛЕММА 3. Пусть унар $\langle A, f \rangle$ — связный, а алгебра $\langle A, g^{(n)}, f \rangle$ является конгруэнц-алгеброй Риса. Тогда $\langle A, f \rangle$ изоморфен либо F_1 , либо цепи, либо C_h^0 для некоторого $h \in \mathbb{N}$, либо корню специального вида.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\langle A, f \rangle$ имеет подунар, изоморфный F_1 . Из леммы 2 следует, что $\langle A, f \rangle$ не содержит узловых элементов. Тогда он изоморфен либо F_1 , либо цепи. Пусть теперь $\langle A, f \rangle$ имеет собственный подунар B , изоморфный C_h^0 для некоторого $h \in \mathbb{N}$. Случай, когда $h > 1$ противоречит лемме 2. Если же $h = 1$, то, снова по лемме 2, $\langle A, f \rangle$ не содержит узловых элементов, кроме, может быть, неподвижного, то есть, является корнем специального вида. $\square$

ЛЕММА 4. Пусть $\langle A, f \rangle$ — корень специального вида, $b, c \in A$, $b \neq c$, $\theta \in \text{Con}\langle A, g^{(n)}, f \rangle$, $b \theta c$ и $t(b) \leq t(c)$. Тогда для любых $x, y \in A$ из $t(x) \leq t(c)$ и $t(y) \leq t(c)$ следует, что $x \theta y$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x, y \in A$, $x \neq y$ и $t(x) \leq t(c)$, $t(y) \leq t(c)$. По следствию 2 из леммы 10 [15], $k(b, x) = \max\{t(b), t(x)\}$, и из $t(b) \leq t(c)$ вытекает $k(c, b) = t(c)$. Отсюда, $k(b, x) \leq t(c) = k(c, b)$. Тогда $m(c, b, x) = x$, откуда по определению операции $g^{(n)}$ имеем $g^{(n)}(c, \dots, c, b, x) = m(g^{(n-1)}(c, \dots, c, b), b, x) = m(c, b, x) = x$. С другой стороны, $g^{(n)}(c, \dots, c, x) = c$, что влечет $x \theta c$. Аналогично, $y \theta c$, и окончательно, $x \theta y$. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 1. Если $\langle A, f \rangle$ — корень специального вида, то любая неединичная конгруэнция алгебры $\langle A, g^{(n)}, f \rangle$ имеет вид σ_k для некоторого $k \geq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть θ — неединичная конгруэнция алгебры $\langle A, g^{(n)}, f \rangle$. Поскольку $\Delta = \sigma_0$, то рассмотрим $\theta \neq \Delta$. Допустим, что глубины всех элементов унара, входящих в нетривиальные пары конгруэнции θ , ограничены глубиной некоторого элемента c . Тогда $(b, c) \in \theta$ для некоторого $b \in A$, где $t(b) \leq t(c)$ и $b \neq c$. Поскольку для любых различных $x, y \in A$, таких, что $(x, y) \in \theta$, выполняются условия $t(x) \leq t(c)$ и $t(y) \leq t(c)$, то по следствию 3 [15] имеем, что $(x, y) \in \sigma_{t(c)}$. Отсюда, $\theta \leq \sigma_{t(c)}$.

Допустим, что $x \neq y$ и $(x, y) \in \sigma_{t(c)}$. Тогда, по следствию 3 [15], имеем $t(x) \leq t(c)$, $t(y) \leq t(c)$. Отсюда, по лемме 4, получаем $(x, y) \in \theta$. Таким образом, $\sigma_{t(c)} \leq \theta$ и, окончательно, $\theta = \sigma_{t(c)}$.

Предположим теперь, что глубины элементов, принадлежащих нетривиальным парам конгруэнции θ не ограничены в совокупности. Так как $\theta \neq \nabla$, то $(x, y) \notin \theta$ для некоторых $x, y \in A$. По предположению, найдется такой элемент c , входящий в некоторую пару $(b, c) \in \theta$, что $t(x) < t(c)$, $t(y) < t(c)$. В силу симметричности θ , можно считать, что $t(b) \leq t(c)$. Тогда, по лемме 4 имеем $x\theta y$, что противоречит выбору x, y . $\square$

ЛЕММА 5. Пусть $\theta \in \text{Con}\langle A, g^{(n)}, f \rangle$, $\theta \neq \nabla$. Тогда, для любых $a, b \in A$, из условия $a\theta b$ следует $k(a, b) < \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a\theta b$. Предположим, что $k(a, b) = \infty$. Так как $\theta \neq \nabla$, то $(b, c) \notin \theta$ для некоторого $c \in A$. Поскольку $k(b, a) = \infty \geq k(a, c)$, то $m(b, a, c) = c$. Таким образом, $g^{(n)}(b, \dots, b, a, c) = m(g^{(n-1)}(b, \dots, b, a), a, c) = m(b, a, c) = c$. При этом, $g^{(n)}(b, \dots, b, c) = b$, что противоречит выбору пары (b, c) . $\square$

ЛЕММА 6. Пусть унар $\langle A, f \rangle$ представляется в виде суммы подунаров B и C , где B — произвольная компонента связности, на которой операция f не инъективна, а C — подунар с инъективной операцией. Тогда любая нетривиальная конгруэнция θ алгебры $\langle A, g^{(n)}, f \rangle$ является расширением некоторой конгруэнции ее подалгебры $\langle B, g^{(n)}, f \rangle$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, что любой элемент из C порождает одноэлементный класс конгруэнции θ . Из леммы 1 [14] и леммы 5 следует, что $(x, y) \notin \theta$ для любых несовпадающих $x, y \in C$. Пусть $b \in B$, $c \in C$. Так как b и c лежат в разных компонентах связности, то $k(b, c) = \infty$. Тогда, по лемме 5, $(b, c) \notin \theta$. $\square$

ТЕОРЕМА 2. Алгебра $\langle A, g^{(n)}, f \rangle$ с оператором f является конгруэнц-алгеброй Риса тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий: 1) операция f инъективна; 2) унар $\langle A, f \rangle$ — неодноэлементный связный унар с неподвижным элементом a , в котором не существует таких элементов $x \neq a$, что $f(b) = x = f(c)$ для некоторых $b, c \in A$, где $|\{x, b, c\}| = 3$; 3) унар $\langle A, f \rangle$ изоморфен сумме унара из п. 2) и произвольного подунара с инъективной операцией.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Если унар $\langle A, f \rangle$ связный, то утверждение теоремы следует из леммы 3. Пусть теперь $\langle A, f \rangle$ несвязен. По лемме 2, любая его компонента связности либо имеет инъективную операцию, либо является корнем специального вида. Предположим, что $\langle A, f \rangle$ имеет более одной неодноэлементной компоненты связности, содержащей неподвижный элемент. Тогда конгруэнция σ алгебры $\langle A, g^{(n)}, f \rangle$ имеет более одного неодноэлементного класса, что противоречит условию. Таким образом, $\langle A, f \rangle$ содержит не более одной компоненты связности, которая является корнем специального вида.

Достаточность. Если операция f инъективна, то, по теореме 2 [14], неодноэлементная алгебра $\langle A, g^{(n)}, f \rangle$ является простой, а следовательно, она будет и конгруэнц-алгеброй Риса. Если же она одноэлементна, то утверждение очевидно.

Пусть унар $\langle A, f \rangle$ является неодноэлементным корнем специального вида. Тогда, по следствию 1 из леммы 4, любая нетривиальная конгруэнция алгебры $\langle A, g^{(n)}, f \rangle$ имеет вид σ_k для некоторого $k > 0$. Из определения конгруэнции σ_k следует, что она имеет единственный

неодноэлементный класс B , состоящий из всех $x \in A$, для которых $t(x) \leq n$. Из последнего условия следует, что B — подунар в $\langle A, f \rangle$, а значит, и подалгебра в $\langle A, g^{(n)}, f \rangle$. Тогда σ_k является конгруэнцией Риса.

Пусть теперь унар $\langle A, f \rangle$ является суммой неодноэлементного корня специального вида и произвольного подунара с инъективной операцией. Тогда он удовлетворяет условиям леммы 6, и, с учетом доказанного выше, любая его конгруэнция является конгруэнцией Риса. $\square$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rees D. On semigroups // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1940. V. 36. P. 387–400.
2. Tichy R. F. The Rees congruences in universal algebras // Publ. Inst. Math. (Beograd). 1981. V. 29. P. 229–239.
3. Chajda I. Rees ideal algebras // Math. Bohem. 1997. V. 122, No. 2. P. 125–130.
4. Chajda I., Duda J. Rees algebras and their varieties // Publ. Math. (Debrecen). 1985. V. 32. P. 17–22.
5. Šešelja B., Tepavčević A. On a characterization of Rees varieties // Tatra Mountains Math. Publ. 1995. V. 5. P. 61–69.
6. Chajda I., Eigenthaler G., Langer H. Congruence classes in universal algebra. Vienna: Heldermann-Verl., 2003. 192 p.
7. Lavers T., Solomon A. The endomorphisms of a finite chain form a Rees congruence semigroup // Semigroup Forum. 1999. V. 59, iss. 2, P. 167–170.
8. Baker K. A., Pixley A. Polynomial interpolation and the Chinese Remainder Theorem for algebraic systems // Math. Zeitschrift. 1975. V. 143. P. 165–174.
9. Marković P., McKenzie R. Few subpowers, congruence distributivity and near-unanimity terms // Algebra Universalis. 2008. Vol. 58. P. 119–128.
10. Jeavons P., Cohen D., Cooper M. Constraints, consistency and closure // Artificial Intelligence. 1998. Vol. 101. P. 251–265.
11. Усольцев В. Л. О строго простых тернарных алгебрах с операторами // Чебышевский сб. 2013. Т. 14. Вып. 4(48). С. 196–204.
12. Карташов В. К. Об унарах с мальцевской операцией // Унив. алгебра и ее приложения: Тез. докл. междунар. сем., посв. памяти проф. Моск. гос. ун-та Л. А. Скорнякова. Волгоград: Перемена, 1999. С. 31–32.
13. Усольцев В. Л. О гамильтоновых тернарных алгебрах с операторами // Чебышевский сб. 2014. Т. 15. Вып. 3(51). С. 100–113.
14. Усольцев В. Л. О решетках конгруэнций алгебр с одним оператором и основной операцией почти единогласия // Научно-техн. вестник Поволжья. 2016. Вып. 2. С. 28–30.
15. Усольцев В. Л. Простые и псевдопростые алгебры с операторами // Фунд. и прикл. матем. 2008. Т. 14. Вып. 7. С. 189–207.
16. Усольцев В. Л. О гамильтоновом замыкании на классе алгебр с одним оператором // Чебышевский сб. 2015. Т. 16. Вып. 4(56). С. 284–302.

REFERENCES

1. Rees, D. 1940, "On semigroups" , *Proc. of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 36, pp. 387–400.
2. Tichy, R. F. 1981, "The Rees congruences in universal algebras" , *Publications de l'Institut Mathematique (Beograd)*, vol. 29, pp. 229–239.
3. Chajda, I. 1997, "Rees ideal algebras" , *Mathematica Bohemica*, vol. 122, no. 2, pp. 125–130.
4. Chajda, I. & Duda, J. 1985, "Rees algebras and their varieties" , *Publicationes Mathematicae (Debrecen)*, vol. 32, pp. 17–22.
5. Šešelja, B. & Tepavčević, A. 1995, "On a characterization of Rees varieties" , *Tatra Mountains Mathematical Publications*, vol. 5, pp. 61–69.
6. Chajda, I., Eigenthaler, G. & Langer, H. 2003, "Congruence classes in universal algebra" , *Heldermann Verlag*, Vienna, 192 pp.
7. Lavers, T. & Solomon, A. 1999, "The endomorphisms of a finite chain form a Rees congruence semigroup" , *Semigroup Forum*, vol. 59, issue 2, pp. 167–170. DOI: 10.1007/PL00006004
8. Baker, K. A. & Pixley, A. 1975, "Polynomial interpolation and the Chinese Remainder Theorem for algebraic systems" , *Mathematische Zeitschrift*, vol. 143, pp. 165–174. DOI: 10.1007/BF01187059
9. Marković, P. & McKenzie, R. 2008, "Few subpowers, congruence distributivity and near-unanimity terms" , *Algebra Universalis*, vol. 58, pp. 119–128. DOI: 10.1007/s00012-008-2049-1
10. Jeavons, P., Cohen, D. & Cooper, M. 1998, "Constraints, consistency and closure" , *Artificial Intelligence*, vol. 101, pp. 251–265. DOI: 10.1016/S0004-3702(98)00022-8
11. Usol'tsev, V. L. 2013, "On strictly simple ternary algebras with operators" , *Chebyshevskiy sbornik*, vol. 14, issue 4(48), pp. 196–204. (Russian)
12. Kartashov, V. K. 1999, "On unars with Mal'tsev operation" , *Universal'naya algebra i ee prilozheniya: Tezisy soobshcheniy uchastnikov mezhdunarodnogo seminara, posvyashchennogo pamyati prof. Mosk. gos. un-ta L.A. Skornyakova (Universal algebra and application: theses of International workshop dedicated memory of prof. L.A. Skornyakov)*, Volgograd, pp. 31–32. (Russian)
13. Usol'tsev, V. L. 2014, "On Hamiltonian ternary algebras with operators" , *Chebyshevskiy sbornik*, vol. 15, issue 3(51), pp. 100–113. (Russian)
14. Usol'tsev, V. L. 2016, "On congruence lattices of algebras with one operator and basic near-unanimity operation" , *Nauchno-tekhn. vestnik Povolzhya*, issue 2, pp. 28–30. (Russian)
15. Usol'tsev, V. L. 2008, "Simple and pseudosimple algebras with operators" , *Fundamental'naya i prikladnaya matematika*, vol. 14, no. 7, pp. 189–207 (Russian); translated in *Journal of Mathematical Sciences*, 2010, vol. 164, no. 2, pp. 281–293. DOI: 10.1007/S1095800997306
16. Usol'tsev, V. L. 2015, "On hamiltonian closure on class of algebras with one operator" , *Chebyshevskiy sbornik*, vol. 16, issue 4(56), pp. 284–302. (Russian)

Волгоградский государственный социально-педагогический университет

Получено 18.10.2016 г.

Принято в печать 13.12.2016 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 17. Выпуск 4.

УДК 512.558

DOI 10.22405/2226-8383-2016-17-4-167-179

О *drl*-ПОЛУГРУППАХ И *drl*-ПОЛУКОЛЬЦАХ

О. В. Чермных (г. Киров)

Аннотация

В статье изучаются *drl*-полукольца. Полученные результаты верны также для *drl*-полугрупп, поскольку *drl*-полукольцом будет *drl*-полугруппа с нулевым умножением. Указанные алгебры имеют связь с двумя проблемами: 1) существует ли абстрактная конструкция, объединяющая как булевы алгебры, так и решеточно упорядоченные группы? (Г. Биркгоф); 2) рассмотреть решеточно упорядоченные полукольца (Л. Фукс). Одной из возможных конструкций, удовлетворяющей условиям первой проблемы, является *drl*-полугруппа, определенная К. Л. Н. Сваму в 1965 г. Как решение второй проблемы в 1981 г. Ранго Рао ввел в обиход *l*-полукольцо. Для последней алгебры мы используем название *drl*-полукольца.

В настоящей статье основным объектом исследования является *drl*-полукольцо. Нами обобщаются результаты Сваму, полученные им для *drl*-полугрупп, а в некоторых случаях уточняются. Известно, что любое *drl*-полукольцо раскладывается в прямую сумму $S = L(S) \oplus R(S)$ положительно упорядоченного *drl*-полукольца $L(S)$ и *l*-кольца $R(S)$. Указывается условие, при котором $L(S)$ обладает наименьшим и наибольшим элементами (теорема 2). В теореме 3 найдены необходимые и достаточные условия разложения *drl*-полукольца в прямую сумму *l*-кольца и брауэровой решетки, а в теореме 4 — *l*-кольца и булевой алгебры. Теоремы 5 и 6 характеризуют *l*-кольцо и аддитивно сократимое *drl*-полукольцо в терминах симметрической разности. Наконец, мы показываем, что произвольная конгруэнция на *drl*-полукольце является отношением Берна.

Ключевые слова: полукольцо, *drl*-полугруппа, *drl*-полукольцо, решеточно упорядоченное кольцо.

Библиография: 11 названий.

ON *drl*-SEMIGROUPS AND *drl*-SEMIRINGS

O. V. Chermnykh

Abstract

In the article *drl*-semirings are studied. The obtained results are true for *drl*-semigroups, because a *drl*-semigroup with zero multiplication is *drl*-semiring. This algebras are connected with the two problems: 1) there exists common abstraction which includes Boolean algebras and lattice ordered groups as special cases? (G. Birkhoff); 2) consider lattice ordered semirings (L. Fuchs). A possible construction obeying of the first problem is *drl*-semigroup, which was defined by K. L. N. Swamy in 1965. As a solution to the second problem, Rango Rao introduced the concept of *l*-semiring in 1981. We have proposed the name *drl*-semiring for this algebra.

In the present paper the *drl*-semiring is the main object. Results of K. L. N. Swamy for *drl*-semigroups are extended and are improved in some case. It is known that any *drl*-semiring is the direct sum $S = L(S) \oplus R(S)$ of the positive to *drl*-semiring $L(S)$ and *l*-ring $R(S)$. We show the condition in which $L(S)$ contains the least and greatest elements (theorem 2). The necessary and sufficient conditions of decomposition of *drl*-semiring to direct sum of *l*-ring and Brouwerian lattice (Boolean algebra) are founded at theorem 3 (resp. theorem 4). Theorems 5 and 6 characterize *l*-ring and cancellative *drl*-semiring by using symmetric difference. Finally, we proof that a congruence on *drl*-semiring is Bourne relation.

Keywords: semiring, *drl*-semigroup, *drl*-semiring, lattice ordered ring.

Bibliography: 11 titles.

1. Введение

Статья посвящена изучению *drl*-полуколец, а поскольку *drl*-полукольца с нулевым умножением суть *drl*-полугруппы, то результаты верны и для них. Появление этих алгебр тесно связана с двумя следующими проблемами.

1) Г. Биркгоф ([1], проблема 105): "Существует ли абстрактная конструкция, объединяющая булевы алгебры и решеточно упорядоченные группы?"

2) Л. Фукс ([2], проблема 37): "Рассмотреть решеточно упорядоченные полукольца".

Начнем с проблемы Фукса и кратко отметим некоторые подходы к ее решению. Во-первых, это исследования положительно упорядоченных полуколец, имеющих тесные связи с положительными конусами упорядоченных *l*-колец. Во-вторых, в монографии Дж. Голана [3] исследуются решеточно упорядоченные полукольца. Под решеточно упорядоченными полукольцами Голан понимает аддитивно идемпотентные полукольца, образующие важный, но не достаточно широкий класс.

В 1981 году о решении проблемы Фукса заявил Rango Rao [4]. Под названием *l*-полукольца им были рассмотрены алгебры, базирующиеся на *drl*-полугруппах, введенные в обиход К. L. N. Swamy в 1965 году [5]. Класс *drl*-полугрупп (*dually residuated lattice ordered semigroup*) дает примеры абстракций, включающих как булевы алгебры, так и *l*-группы, следовательно, мы получаем одно из решений проблемы Биркгофа (см. также [6], [7]). Особенностью *drl*-полугрупп является удачное определение бинарной операции разности. Идейные предпосылки, приведшие к *drl*-полугруппам, можно найти среди брауэровых алгебр и решетках с делением (*residuated lattice*); на последние [8] явно указывал Swamy.

В настоящей статье при исследовании *drl*-полуколец (*l*-полукольца в терминологии Rao) выделяются важные идеалы *drl*-полукольца S — множество всех аддитивно обратимых элементов $R(S)$ и положительно упорядоченное *drl*-полукольцо $L(S)$. Найдены условия, при которых $L(S)$ удовлетворяет дополнительным условиям, а также выясняется, когда *drl*-полукольцо является *l*-кольцом, брауэровой решеткой, булевой алгеброй, аддитивно сократимым полукольцом. Доказывается, что любая конгруэнция на *drl*-полукольце есть отношение Берна.

Свойства *drl*-полугрупп и *drl*-полуколец и их доказательства помимо пионерских работ Swamy можно найти в [9], [10].

2. Основные понятия

Под *полукольцом* будем понимать систему $(S, +, \cdot, 0)$, которая является коммутативной полугруппой с нулем относительно сложения, полугруппой относительно умножения и умножение дистрибутивно относительно сложения с обеих сторон. Такое определение является более общим, чем у Голана [3], не предполагается наличие единицы и мультипликативности нуля.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Алгебра $(S, +, \cdot, \vee, \wedge, -, 0)$ называется *drl-полукольцом*, если выполняются условия:

1. $(S, +, \cdot, 0)$ — полукольцо;
2. $(S, \vee, \wedge)$ — решетка (с порядком $\leq$);
3. сложение $+$ дистрибутивно относительно $\vee$ и $\wedge$;
4. для любых $a, b \in S$ $a - b$ — наименьший элемент $z \in S$ такой, что $b + z \geq a$;
5. $(a - b) \vee 0 + b \leq a \vee b$ для любых $a, b \in S$;
6. $a(b - c) = ab - ac$ и $(a - b)c = ac - bc$ для любых $a, b, c \in S$;

7. $ab \geq 0$ для любых $a, b \geq 0$ из S .

Данное определение принадлежит Р. Ranga Rao [4] и основывается на определении drl -полугруппы, введенной в обиход К. L. N. Swamy [5]. Определение drl -полугруппы (dually residuated lattice ordered semigroup) мы получим из определения drl -полукольца, если не будем учитывать аксиомы, в которых задействована мультипликативная операция. Отметим, что определение drl -полугруппы в [5] содержало условие $a - a \geq 0$, которое, как показал Т. Kovar [11], вытекает из остальных аксиом.

ПРИМЕРЫ.

1. Решеточно упорядоченное кольцо (l -кольцо) с обычной кольцевой разностью является drl -полукольцом.
2. Пусть $\mathbb{N}$ — полукольцо целых неотрицательных чисел с обычными сложением, умножением и отношением порядка. Определим $a - b = 0$, если $a \leq b$, и как обычную разность целых чисел в противном случае. Тогда $(\mathbb{N}, +, \cdot, -, \leq)$ — drl -полукольцо. Подобным образом получаем drl -полукольца на множестве $\mathbb{R}^+$ неотрицательных действительных чисел и его подполукольцах. Эти алгебры являются как положительно упорядоченными, так и линейно упорядоченными drl -полукольцами.
3. Любая drl -полугруппа с нулевым умножением является drl -полукольцом.
4. Пусть $(L, \vee, \wedge)$ — конечная дистрибутивная решетка; для произвольных $a, b \in L$ определим разность следующим образом: $a - b = \bigwedge \{r \in L : r \vee b \geq a\}$. Алгебра $(L, +, \cdot, \vee, \wedge, -, 0)$ становится drl -полукольцом, если в качестве сложения и умножения взять $\vee$ и $\wedge$ соответственно. Таким же образом мы получаем drl -полукольцо, отталкиваясь от полной дистрибутивной решетки с бесконечной $\vee$ -дистрибутивностью.
5. Пусть $(B, \vee, \wedge)$ — произвольная булева решетка. Алгебра $(B, +, \cdot, 0, \vee, \wedge, -)$ становится drl -полукольцом, если сложение и умножение совпадают соответственно с $\vee$ и $\wedge$, а разность определить как $a - b = a \wedge b^\perp$, где $b^\perp$ — дополнение к элементу b . Несложно показать, что такая разность в случае булевой решетки совпадает с разностью из предыдущего примера.
6. Пусть $L = \{0, a, i\}$ — трехэлементная цепь. Положим $a + a = i$, 0 — нейтральный, i — поглощающий элементы относительно $+$. Тогда однозначно определяется разность, и $(L, +, \leq, -, 0)$ становится drl -полугруппой. Для получения drl -полукольца возможно только нулевое умножение.
7. Решетка L называется *брауэровой*, если для любых ее элементов a, b множество всех таких $x \in L$, что $b \vee x \geq a$, имеет наименьший элемент $a - b$. Брауэрова решетка является дистрибутивной. Положив $x + y = x \vee y$ мы получим drl -полугруппу $(L, +, \vee, \wedge, -)$. Если умножение определить совпадающим с $\wedge$, то получим drl -полукольцо, обобщающее примеры 4) и 5). Отметим, что в [5, theorem 4] утверждается, что если drl -полугруппа $(L, +, \leq, -, 0)$ как решетка $(L, \leq, -)$ брауэрова, то $+$ необходимо совпадает с $\vee$. В условии этого утверждения требуется совпадение операций вычитания в брауэровой решетке и drl -полугруппе. Поскольку порядок в брауэровой решетке определяет операцию $-$, то естественно возникает вопрос: если drl -полугруппа $(S, +, \leq, -, 0)$ как решетка $(S, \leq)$ является брауэровой (без условия совпадения операций вычитания), то будет ли верно $a + b = a \vee b$ для произвольных $a, b \in S$? Отрицательный ответ дает предыдущий пример.

Операции взятия точных граней договоримся считать "более сильными" нежели сложение и вычитание, поэтому будем писать, к примеру, $c - a \vee b$ вместо $c - (a \vee b)$. В свою очередь $c \vee ab$ будет означать $c \vee (ab)$.

Поскольку [5, theorem 1] в коммутативной l -полугруппе аксиома 4) определения 2 равносильна системе трех условий (i) $x + (y - x) \geq y$; (ii) $x - y \leq x \vee z - y$; (iii) $(x + y) - y \leq x$, то класс всех drl -полуколец является многообразием.

Для удобства приведем простейшие свойства drl -полугрупп. Пусть S — drl -полугруппа, $a, b, c \in S$, тогда справедливы утверждения:

$a - a = 0, a - 0 = 0$	lemma 1
$a \leq b \Rightarrow a - c \leq b - c, c - b \leq c - a$	lemma 3
$a \leq b \Leftrightarrow a - b \leq 0 \Rightarrow b - a \geq 0$	lemma 7
$a \leq b \Rightarrow (b - a) + a = b$	lemma 8
$a + (b - c) \geq (a + b) - c$	
$a - (b - c) \leq (a - b) + c$	lemma 13
$a - (b + c) = (a - b) - c = (a - c) - b$	lemma 6
$a \vee b - c = (a - c) \vee (b - c)$	lemma 4
$a \wedge b - c \leq (a - c) \wedge (b - c)$	
$c - a \vee b \leq (c - a) \wedge (c - b)$	
$c - a \wedge b = (c - a) \vee (c - b)$	lemma 5
$a \vee b + a \wedge b = a + b$	lemma 9

Ссылки даны на утверждения из статьи Swamy [5]. При отсутствии ссылки утверждение и доказательство можно найти в [9].

Элементы $a^+ = a \vee 0$ и $a^- = a \wedge 0$ называются *положительной* и *отрицательной частями элемента* a . Введенная терминология оправдывается тем, что для любого элемента a drl -полукольца выполняется $a = a^+ + a^-$; кроме того, $a^+ \geq 0$ и $a^- \leq 0$, и равенства достигаются в точности тогда, когда $a \leq 0$ и $a \geq 0$ соответственно.

Важную роль при изучении drl -полуколец, в частности при факторизации, играет *симметрическая разность*, которую можно рассматривать как новую операцию: $a * b = (a - b) \vee (b - a)$.

Пусть $S = (S, +, \cdot, \vee, \wedge, -)$ — drl -полукольцо. Отображение $\varphi : S \rightarrow T$ в drl -полукольцо T , сохраняющее все пять бинарных операций, назовем *гомоморфизмом*. Множество $Ker \varphi$ всех элементов, отображающихся в ноль при гомоморфизме, называется *ядром* гомоморфизма φ . Отношение эквивалентности на drl -полукольце S , стабильное относительно всех бинарных операций, называется *конгруэнцией* на S .

Введенные определения являются стандартными понятиями для универсальных алгебр. Отметим, что произвольная конгруэнция ρ на drl -полукольце S определяет факторполукольцо S/ρ , являющееся drl -полукольцом. Легко показать, что любой гомоморфизм drl -полукольца является изотонным отображением, сохраняет симметрическую разность и ноль.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Непустое подмножество A drl -полукольца S называется *идеалом*, если выполняются условия:

1. если $a, b \in A$, то $a + b \in A$;
2. если $a \in A, s \in S$, то $as, sa \in A$;
3. если $b * 0 \leq a * 0, a \in A$, то $b \in A$.

Стандартно устанавливается замкнутость идеала относительно всех операций drl -полукольца. В отличие от произвольного полукольца, в частности, ограниченной дистрибутивной

решетки, конгруэнции на *drl*-полукольце характеризуются своими классами нуля, или равносильно, ядрами естественных гомоморфизмов [4, theorem 1.1]. Именно, каждой конгруэнции соответствует идеал, являющийся классом нуля, а каждый идеал A *drl*-полукольца S однозначно определяет конгруэнцию $a \equiv b(A) \iff a * b \in A$. Класс нуля при этом совпадает с A , а для совпадения двух конгруэнций на S достаточно совпадения их классов нуля.

*Суммой идеалов A и B *drl*-полукольца S называется множество*

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}.$$

Понятно, что пересечение идеалов *drl*-полукольца снова будет идеалом. Более сложным оказывается доказательство, что сумма двух идеалов является идеалом [4, remark 1.6]. Отметим, что сумма и пересечение идеалов являются точными гранями в решетке идеалов *drl*-полукольца, а сама решетка дистрибутивна [4, remark 1.8].

ЛЕММА 1. *В *drl*-полугруппе справедливо неравенство $c - a \vee b \leq (c - a) \wedge (c - b)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вытекает из определения разности и

$$\begin{aligned} a \vee b + (c - a) \wedge (c - b) &= (a \vee b + (c - a)) \wedge (a \vee b + (c - b)) = \\ &= ((a + (c - a)) \vee (b + (c - a))) \wedge ((a + (c - b)) \vee (b + (c - b))) \geq \\ &\geq (a + (c - a)) \wedge (b + (c - b)) \geq c \wedge c = c. \end{aligned}$$

□

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Множество $L(S) = \{a \in S : 0 - a = 0\}$ является идеалом *drl*-полукольца S , и $L(S)$ является положительно упорядоченным *drl*-полукольцом с наименьшим элементом 0.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем замкнутость $L(S)$ относительно сложения. Для элементов *drl*-полугруппы выполняется $x - (y + z) = (x - y) - z$ [5, lemma 6], поэтому для $a, b \in L(S)$

$$0 - (a + b) = (0 - a) - b = 0 - b = 0,$$

откуда $a + b \in L(S)$. Далее, используя $x - (y - z) \leq (x - y) + z$ [5, lemma 13], получаем $a \geq 0 - (0 - a) = 0$ для любого $a \in L(S)$, поэтому $a * 0 = (a - 0) \vee (0 - a) = a \vee 0 = a$. Пусть $t * 0 \leq a * 0$ для некоторого $a \in L(S)$. Поскольку $x \leq y$ влечет $z - x \geq z - y$ [5, lemma 3], то $0 - t * 0 \geq 0 - a * 0 = 0 - a = 0$. По предыдущей лемме и [5, lemma 13] $0 \leq 0 - t \vee (0 - t) \leq (0 - t) \wedge (0 - (0 - t)) \leq (0 - t) \wedge t$, откуда $0 - t \geq 0$ и $t \geq 0$. Второе неравенство дает нам $0 - t \leq 0$, следовательно $0 - t = 0$ и $t \in L(S)$. Наконец, $as, sa \in L(S)$ для любых $a \in L(S), s \in S$. □

Напомним, что подмножество A полугруппы называется *строгим (полустрогим)*, если из $a + b \in A$ ($a + b, a \in A$) следует $b \in A$. Очевидно, строгое подмножество является полустрогим.

Идеал $L(S)$ является полустрогим, но не строгим. Действительно, из $a, a + b \in L(S)$ вытекает $0 = 0 - (a + b) = (0 - a) - b = 0 - b$, следовательно, $b \in L(S)$. Ненулевой аддитивно обратимый элемент a не лежит в $L(S)$, хотя $a + (0 - a) = 0 \in L(S)$, поэтому $L(S)$ не является строгим.

Рассмотрим конструкцию еще одного важного идеала *drl*-полукольца.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *В *drl*-полукольце S справедливы утверждения:*

1. *множество $R(S) = \{0 - a : a \in S\}$ совпадает с множеством всех аддитивно обратимых элементов из S ;*

2. если $g \in R(S)$ и $a \leq g$, то $a \in R(S)$;
3. если $g, h \in R(S)$, то $g \vee h \in R(S)$; в частности, $g * 0 \in R(S)$;
4. $R(S)$ — идеал в S .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Пусть $a + b = 0$. Тогда $a = a - (a + b) = (a - a) - b = 0 - b$ и $a \in R(S)$. Обратно, покажем, что для любого $a \in S$ элемент $0 - a$ имеет противоположный. Заметим, что в силу [5, lemma 5] $0 - a^- = 0 - a \wedge 0 = (0 - a) \vee (0 - 0) = (0 - a)^+$. Поскольку $(x - y) + y = x$ для $x \geq y$ [5, lemma 8], и $a^- \leq 0$, то $(0 - a)^+ + a^- = (0 - a^-) + a^- = 0$. Таким же образом $(0 - (0 - a))^+ + (0 - a)^- = 0$, т.е. элементы $(0 - a)^+$ и $(0 - a)^-$ имеют противоположные. Следовательно, $0 - a = (0 - a)^+ + (0 - a)^-$ аддитивно обратим.

(2) Отметим, что из доказательства пункта 1) следует, что любой отрицательный элемент из S лежит в $R(S)$. Пусть $g \in R(S)$ и h — противоположный к нему элемент. Из $a \leq g$ следует $a + h \leq g + h = 0$, и в силу отрицательности элемент $a + h$ лежит в $R(S)$. Используя полустрогость множества $R(S)$, получаем $a \in G(S)$.

(3) Пусть $h + f = 0$, тогда $g \vee h + f = (g + f) \vee 0 = (g + f)^+$. Элемент $g + f$ лежит в $R(S)$, поэтому $(g + f)^+ \in G(S)$. Поскольку множество $R(S)$ строгое, то $g \vee h \in R(S)$.

(4) Пусть $0 \leq a * 0 \leq g * 0$ для некоторого $g \in R(S)$. Очевидно, $a^+ \leq a * 0$, поэтому $a^+ \leq g * 0$. По 3) $g * 0 \in R(S)$, поэтому $a^+ \in R(S)$. В силу отрицательности $a^- \in R(S)$ получаем $a = a^+ + a^- \in R(S)$. Наконец, если $a \in R(S), s \in S$, то очевидно $as, sa \in R(S)$. $\square$

3. Теоремы о разложении

Скажем, что полукольцо S является *прямой суммой* идеалов A и B , если $A + B = S$ и разложение $s = a + b, a \in A, b \in B$, однозначно для любого элемента $s \in S$. Обозначим прямую сумму как $S = A \oplus B$.

ТЕОРЕМА 1. [10] *Любое drl -полукольцо является прямой суммой drl -полукольца с наименьшим элементом и l -кольца.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть S — произвольное drl -полукольцо. Покажем, что $S = R(S) \oplus L(S)$. Пусть $s \in S$, и g — противоположный элемент к $0 - s$. Тогда $s = s + (0 - s) + g$ и элемент $l = s + (0 - s)$ лежит в $L(S)$. Действительно, $0 - (s + (0 - s)) = (0 - s) - (0 - s) = 0$ по предложению [5, lemma 6]. Получили, $s = g + l$ для $g \in R(S), l \in L(S)$. Пусть $s = g_1 + l_1$ для некоторых $g_1 \in R(S), l_1 \in L(S)$. Из $g + l = g_1 + l_1$ получаем $0 - (g + l) = 0 - (g_1 + l_1)$, откуда $(0 - l) - g = (0 - l_1) - g_1$ и, следовательно, $0 - g = 0 - g_1$. В силу аддитивной обратимости элементов g и g_1 получаем $g = g_1$, что влечет $l = l_1$. $\square$

Договоримся использовать обозначение $a = a_r + a_+$ для однозначно определенных $a_r \in R(S)$ и $a_+ \in L(S)$. В дальнейшем мы будем использовать такое свойство: *если A — идеал drl -полукольца и $a \in A$, то $a_r, a_+ \in A$* . Действительно, $a_r = 0 - (0 - a) \in A$ и $a_+ = a - a_r \in A$.

Поскольку теорема справедлива для drl -полуколец с нулевым умножением, мы получаем, что *любая drl -полугруппа есть прямая сумма drl -полугруппы с наименьшим элементом и абелевой l -группы*. Отметим, что для такого разложения drl -полугруппы в [5, theorem 8] используется равенство

$$0 - (x + y) = (0 - x) + (0 - y) \quad (S1)$$

в качестве необходимого и достаточного условия. В своей следующей статье [6, theorem 1.3] Swamy, возвращаясь к этой теореме, указывает еще одно условие, равносильное (S1): *для каждого элемента s drl -полугруппы элемент $0 - s$ аддитивно обратим*. Как было доказано выше,

указанные условия справедливы в любом *drl*-полукольце, следовательно, в произвольной *drl*-полугруппе.

Далее Swamy указывает критерий разложимости *drl*-полугруппы в прямую сумму абелевой *l*-группы и *drl*-полугруппы с наименьшим и наибольшим элементами [5, theorem 7]. В качестве необходимых и достаточных условий указываются:

$$(a + b) - (c + c) = (a - c) + (b - c), \quad (S2)$$

$$(\exists i)(\forall a)(a + (i - a) = i + i). \quad (S3)$$

Утверждение оказывается ошибочным, условие (S2) не будет выполняться в *drl*-полугруппе из примера 6: $0 = (i + 0) - (a + a) \neq (i - a) + (0 - a) = a$.

Докажем уточненный полукольцевой аналог утверждения.

ТЕОРЕМА 2. *drl-полукольцо S есть прямая сумма l -кольца и *drl*-полукольца с наименьшим и наибольшим элементами тогда и только тогда, когда выполняется условие*

$$(\exists i)(\forall a)(a + (i - a) = i + i). \quad (S3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть в *drl*-полукольце S выполнено условие (S3), которое влечет $i + i = i$. Применив свойство $a - (b + c) = (a - b) - c = (a - c) - b$ [5, lemma 6], получим:

$$\begin{aligned} 0 &= (0 - i) - (0 - i) = (0 - (i + i)) - (0 - i) = \\ &= ((0 - i) - i) - (0 - i) = ((0 - i) - (0 - i)) - i = 0 - i. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $i \in L(S)$, и для произвольного $a \in L(S)$ имеем $a - i \in L(S)$. Кроме того,

$$a - i = a - (i + i) = a - (a + (i - a)) = (a - a) - (i - a) = 0 - (i - a) \in R(S).$$

Значит, $a - i \in R(S) \cap L(S) = \{0\}$, откуда $i \geq a$. Получили, что i — наибольший элемент в $L(S)$. Обратно, пусть $S = L \oplus R$, и $i = i + i$ — наибольший элемент положительно упорядоченного *drl*-полукольца L . Тогда для любого $a \in L$ выполняется $a + (i - a) \geq 1$, поэтому $a + (i - a) = i$. Для произвольного аддитивно обратимого элемента $b \in R$ и любого элемента $x \in S$ верно $b + (x - b) = b + (x + (0 - b)) = x$, поэтому условие (S3) справедливо для i и любого элемента из S . $\square$

Элемент s *drl*-полукольца S назовем *поглощающим*, если $a + s = s$ для любого $a \in S$. Отметим, что элемент i , удовлетворяющий свойству (S3), является поглощающим элементом $L(S)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть S — *drl*-полукольцо.

1. Если $a + x = x$ для некоторого $x \in S$, то $a \in L(S)$;
2. s — поглощающий элемент в $S \Leftrightarrow s$ — наибольший элемент в S ;
3. если в S есть поглощающий элемент, то $S = L(S)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Пусть $a + x = x$, тогда $a + x_r + x_+ = x_r + x_+$, откуда $a + x_+ = x_+$. Поскольку $0 - a = (0 - x_+) - a = 0 - (x_+ + a) = 0 - x_+ = 0$, то $a \in L(S)$.

(2) Если $a + s = s$ для каждого $a \in S$, то по (1) $S = L(S)$. Тогда $a - s = a - (s + a) = 0 - s = 0$, откуда получаем $a \leq s$. Обратно, пусть $a \leq s$, тогда $0 - a \geq 0 - s = 0$. Следовательно, каждый аддитивно обратимый элемент отрицателен, что означает $R(S) = \{0\}$. Таким образом, $s \leq a + s \leq s$ и $a + s = s$.

(3) следует из (1). □

Условие (S2) в совокупности с

$$(ma + nb) - (a + b) = (ma - a) + (nb - b), m, n \in \mathbb{N}, \quad (*)$$

используется Swamy для характеристики разложимости *drl*-полугруппы в прямую сумму коммутативной *l*-группы и брауэровой решетки [5, theorem 6]. Покажем, что можно обойтись без условия (*).

ЛЕММА 2. Пусть S — *drl*-полукольцо. Равносильны условия:

1. S удовлетворяет (S2);
2. $L(S) = \{a \in S : (a + a) - a = 0\}$;
3. $L(S)$ — множество всех аддитивно идемпотентных элементов;
4. $a + b = a \vee b$ для любых $a, b \in L(S)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) $\Rightarrow$ (2). Если $a \in L(S)$, то $0 - a = 0$, поэтому

$$(a + a) - a = ((a + a) - a) + (0 - a) = (a + a + 0) - (a + a) = 0.$$

Если $(a + a) - a = 0$, то $0 - a = ((a + a) - a) - a = (a + a) - (a + a) = 0$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Пусть $a \in L(S)$, тогда $(a + a) - a = 0$, откуда $a + a \leq a$. Учитывая положительность элементов из $L(S)$, получаем $a + a = a$. Очевидно, любой аддитивно идемпотентный элемент из S лежит в $L(S)$.

(3) $\Rightarrow$ (4). Пусть $a, b \in L(S)$ — аддитивно идемпотентные элементы. Из $a \leq a + b, b \leq a + b$ следует $a + b \leq a \vee b + a \vee b = a \vee b$, а из положительности $a \leq a + b, b \leq a + b$, откуда получаем $a \vee b \leq a + b$.

(4) $\Rightarrow$ (1). Поскольку условие (S2) справедливо в любом *l*-кольце, то достаточно показать его справедливость для элементов a, b, c из $L(S)$. По предложению 1 и того факта, что идеал замкнут относительно разности, получаем $a - c, b - c \in L(S)$, следовательно, $(a + b) - (c + c) = a \vee b - c = (a - c) \vee (b - c) = (a - c) + (b - c)$. □

СЛЕДСТВИЕ 1. Если каждый элемент *drl*-полукольца S является аддитивно идемпотентным, то $(S, \leq)$ — брауэрова решетка.

ТЕОРЕМА 3. *drl*-полукольцо S есть прямая сумма *l*-кольца и брауэровой решетки в точности тогда, когда для любых $a, b, c \in S$ выполняется условие

$$(a + b) - (c + c) = (a - c) + (b - c). \quad (S2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполнено (S2). С учетом теоремы 1 достаточно показать, что $x + y = x \vee y$ для любых $x, y \in L(S)$. А это следует из леммы 2. Обратно, пусть $S = L \oplus R$ для *l*-кольца R и брауэровой решетки $(L, +, \wedge)$. Очевидно, условие (S2) выполняется в R . Для $a, b, c \in L$ имеем: $(a + b) - (c + c) = a \vee b - c = (a - c) \vee (b - c) = (a - c) + (b - c)$, поэтому (S2) выполнено в S . □

Пусть элемент $a \in S$ удовлетворяет свойству $(a + a) - a = 0$. Тогда $(a_r + a_r) - a_r = 0$, откуда $a_r = 0$ и $a \in L(S)$. Из положительности элемента a следует $a + a \geq a$, а из равенства $(a + a) - a = 0$ вытекает $a + 0 \geq a + a$. Поэтому a есть аддитивный идемпотент. Обозначим через

$$B(S) = \{a \in S : (a + a) - a = 0\}$$

множество всех аддитивных идемпотентов из S . Множество $B(S)$, как показано в лемме 2, не всегда совпадает с $L(S)$. Кроме того, оно не обязано быть выпуклым (пример 6), следовательно, $B(S)$ не всегда является идеалом.

ЛЕММА 3. Пусть $S = \{S, +, \cdot, 0, \vee, \wedge\}$ — *drl*-полукольцо, $B(S)$ — множество всех аддитивных идемпотентов из S .

1. $a + b = a \vee b$ для любых $a, b \in B(S)$.
2. $B(S)$ замкнуто относительно операций $+, \vee, \wedge$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Пусть $a, b \in B(S)$. Из аксиомы 5) определения *drl*-полукольца получаем $(a - b) + b = a \vee b$. Тогда $a + b = (a + b) \vee b = a \vee b + b = ((a - b) + b) + b = (a - b) + b = a \vee b$.

(2) Очевидна замкнутость операции сложения, а в силу (1) — и точной верхней грани. Для $a, b \in B(S)$ получаем $a \wedge b + a \wedge b = a \wedge b \wedge (a + b) = a \wedge b$. $\square$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть $B(S)$ — множество всех аддитивных идемпотентов *drl*-полукольца S .

1. $B(S)$ — брауэрова решетка $\Leftrightarrow (a + b) - c = (a - c) + (b - c)$ для любых $a, b, c \in B(S)$;
2. $B(S)$ — идеал *drl*-полукольца $S \Leftrightarrow b \wedge l \in B(S)$ для любых $b \in B(S), l \in L(S)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Импликация $\Rightarrow$ доказывается также как и в лемме 2. Обратно, с учетом леммы 3 достаточно показать замкнутость $B(S)$ относительно разности. А это вытекает из условия, если положить $a = b$: $a - c = (a + a) - c = (a - c) + (a - c)$.

(2) Импликация $\Rightarrow$ очевидна в силу выпуклости идеала. Пусть сейчас $0 * l \leq b$ для $b \in B(S), l \in S$. Тогда из $l \vee (0 - l) \leq b$ получаем $l_r \vee (0 - l_r) \leq b_r = 0$, откуда $l_r = 0$ и $l \in L(S)$. Имеем $l \leq b$, поэтому $l = l \wedge b \in B(S)$. Наконец, если $b \in B(S)$ и $s \in S$, то $sb, bs \in B(S)$. $\square$

ЛЕММА 4. Для произвольных элементов *drl*-полукольца $a \wedge b = 0$ влечет $a + b = a \vee b$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следует из равенства $a + b = a \vee b + a \wedge b$. $\square$

ТЕОРЕМА 4. Пусть S — *drl*-полукольцо, удовлетворяющее условиям (S2) и (S3). Тогда равносильны утверждения:

1. S есть прямая сумма l -кольца и булевой алгебры;
2. $i - (i - a) = a$ для любого $a \in S$;
3. $(i - a) \wedge a = ((i - a) \wedge a + (i - a) \wedge a) - (i - a) \wedge a$ для любого $a \in S$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (2) $\Rightarrow$ (1). По теоремам 2 и 3 $L(S)$ является ограниченной брауэровой решеткой и $x + y = x \vee y$ для любых $x, y \in L(S)$. Пусть $a \in L(S)$, тогда $i - a \wedge (i - a) = (i - a) \vee (i - (i - a)) = (i - a) \vee a = (i - a) + a = i$, откуда $0 = i - i = i - (i - a \wedge (i - a)) = a \wedge (i - a)$. Поскольку $a \vee (i - a) = a + (i - a) = i$, то $i - a$ является дополнением элемента a в решетке $L(S)$. Брауэрова решетка дистрибутивна, поэтому $L(S)$ — булева решетка.

(1) $\Rightarrow$ (2). Пусть $S = L \oplus R$ для булевой алгебры L и l -кольца R . Из

$$l + r = i = i + i = (l + l) + (r + r), l \in L, r \in R,$$

получаем $r = 0$, и следовательно $i \in L$. Тогда для $a \in L$ выполняется условие (2): $i - (i - a) = i - i \wedge a^\perp = i - a^\perp = i \wedge a^{\perp\perp} = a$. Условие (2) очевидным образом выполняется для произвольного $a \in R$, а значит и для любого элемента из S .

(3) $\Rightarrow$ (1). Условия (S2) и (S3) гарантируют, что в прямой сумме $S = L(S) \oplus R(S)$ слагаемое $L(S)$ является ограниченной брауэровой решеткой. Пусть $a \in L(S)$, тогда $(i - a) \wedge a \in L(S)$ и

поэтому правая часть равенства (3) равна нулю в силу совпадения операций $+$ и $\vee$ в $L(S)$. Из $(i - a) \wedge a = 0$ по лемме 4 получаем $(i - a) \vee a = (i - a) + a = i$. Следовательно, $i - a$ является дополнением элемента a . Брауэрова решетка дистрибутивна, поэтому $L(S)$ — булева алгебра.

(1) $\Rightarrow$ (3). Пусть $S = L \oplus R$ для булевой алгебры L и l -кольца R . Покажем, что для любого элемента $a \in R$ $(i - a) \wedge a$ оказывается аддитивно обратимым элементом. Действительно, $(i - a) \wedge a \leq a \in R \subseteq R(S)$, поэтому $(i - a) \wedge a \in R(S)$ по предложению 2. Отсюда получаем, что условие (3) верно для $a \in R$. Если $a \in L$, то $(i - a) \wedge a = (i \wedge a^\perp) \wedge a = 0$, что влечет справедливость условия (3) для $a \in L$ и следовательно для любого элемента из S . $\square$

СЛЕДСТВИЕ 2. *drl-полукольцо S является булевой алгеброй тогда и только тогда, когда S имеет наибольший элемент, $a + a = a$ и $i - (i - a) = a$ для любого $a \in S$.*

Известно, что симметрическая разность произвольного l -кольца инвариантна относительно сдвигов. Ниже мы рассмотрим два результата, описывающие сдвиги симметрической разности в *drl*-полукольцах.

ТЕОРЕМА 5. *Для drl-полукольца S равносильны условия:*

1. S — l -кольцо;
2. $a * b = (x - a) * (x - b)$ для любых $a, b, x \in S$;
3. $a * b = (a - x) * (b - x)$ для любых $a, b, x \in S$;
4. $a * b = (0 - a) * (0 - b)$ для любых $a, b \in S$;
5. $a * 0 = (0 - a) * 0$ для любого $a \in S$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликации (1) $\Rightarrow$ (2), (1) $\Rightarrow$ (3), (2) $\Rightarrow$ (4) очевидны.

(3) $\Rightarrow$ (4). $a * b = (a - (a + b)) * (b - (a + b)) = (0 - b) * (0 - a)$.

(4) $\Rightarrow$ (5). При $b = 0$ получаем $a * 0 = (0 - a) * (0 - 0) = (0 - a) * 0$.

(5) $\Rightarrow$ (1). Пусть $a \in L(S)$, тогда $a * 0 = (0 - a) * 0 = 0 * 0 = 0$, откуда получаем $a = 0$. Следовательно, S — l -кольцо. $\square$

Напомним, что полукольцо S называется *аддитивно сократимым*, если из $a + c = b + c$ следует $a = b$ для любых $a, b, c \in S$. Аддитивно сократимые полукольца, и только они, вложимы в кольца — свои кольца разностей. Легко понять, что аддитивная сократимость *drl*-полукольца S равносильна аддитивной сократимости $L(S)$ и влечет отсутствие ненулевых аддитивных идемпотентов.

Пусть R — кольцо разностей полукольца S . Напомним, что элементами кольца R являются классы упорядоченных пар $[a, b]$, $a, b \in S$, и $[a, b] = [c, d] \Leftrightarrow a + d = c + b$. Положим $[a, b] \leq_R [c, d] \Leftrightarrow a + d \leq c + b$. Стандартно проверяется, что R становится l -кольцом с порядком $\leq_R$ и точными гранями $[a, b] \vee_R [c, d] = [(a + d) \vee (c + b), b + d]$ и $[a, b] \wedge_R [c, d] = [(a + d) \wedge (c + b), b + d]$. Отметим, что при вложении *drl*-полукольца S в свое кольцо разностей порядок $\leq_R$ продолжает порядок $\leq$, но ограничение кольцевой разности в общем не совпадает с разностью на S .

ТЕОРЕМА 6. *drl-полукольцо S аддитивно сократимо тогда и только тогда, когда $a * b = (a + x) * (b + x)$ для любых $a, b, x \in S$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенство $a * b = (a + x) * (b + x)$ верно в произвольном l -кольце, поэтому достаточно его обосновать для элементов из $L(S)$. Пусть $a, b, x \in L(S)$. Из $a + x \geq x$ следует $((a + x) - x) + x = a + x$, поэтому $(a + x) - x = a$ в силу аддитивной сократимости. Аналогично, $(b + x) - x = b$. Тогда

$$\begin{aligned}(a+x) * (b+x) &= ((a+x) - (b+x)) \vee ((b+x) - (a+x)) = \\ &= (((a+x) - x) - b) \vee (((b+x) - x) - a) = (a-b) * (b-a) = a * b.\end{aligned}$$

Обратно, пусть $a+x = b+x$ для $a, b, x \in S$. Тогда $0 = (a+x) * (b+x) = a * b$, откуда получаем $a = b$, и S — аддитивно сократимо. $\square$

Как из теоремы 5, так и из теоремы 6, получается

СЛЕДСТВИЕ 3. [6, theorem 2.1] drl -полукольцо S с наибольшим элементом является l -кольцом тогда и только тогда, когда $a * b = (a+x) * (b+x)$ для любых $a, b, x \in S$.

Пусть S — произвольное полукольцо и A — его идеал. Отношение на S

$$a \equiv_A b \Leftrightarrow a + u = b + v \text{ для некоторых } u, v \in A$$

является конгруэнцией на S и называется *отношением Берна*. Значение отношения Берна при изучении полуколец заключается в следующем. Известно, что класс нуля любой конгруэнции на полукольце является полустрогим идеалом, и если A — полустрогий идеал полукольца S , то отношение Берна $\equiv_A$ является наименьшей среди конгруэнций с классом нуля, равным A . Следующее утверждение показывает, что произвольная конгруэнция на drl -полукольце есть отношение Берна.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть A — идеал drl -полукольца S . Тогда $a * b \in A$ тогда и только тогда, когда $a + u = b + v$ для некоторых $u, v \in A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть A — идеал и $a * b \in A$. Тогда $a \equiv b(A)$. Понятно, что $b \equiv b(A)$, поэтому $(a-b) \equiv (b-b)(A)$, откуда $a-b \in A$. Из $A \ni (a-b)_r = a_r - b_r = u$ следует $a_r = b_r + u$ для подходящего $u \in A$. Далее $(a-b)_+ = a_+ - b_+$. Из определения drl -полукольца вытекает $a_+ + (b_+ - a_+) \vee 0 = a_+ \vee b_+$. Так как $b_+ - a_+ \geq 0$, то $a_+ + (b_+ - a_+) = a_+ \vee b_+$. Таким же образом справедливо равенство $b_+ + (a_+ - b_+) = a_+ \vee b_+$. Следовательно, $a_+ + (b_+ - a_+) = b_+ + (a_+ - b_+)$. Окончательно, $a + (b_+ - a_+) = a_r + a_+ + (b_+ - a_+) = b_r + u + b_+ + (a_+ - b_+) = b + u + (a_+ - b_+)$. Учитывая $b_+ - a_+, u + (a_+ - b_+) \in A$, получаем $a \equiv_A b$.

Обратно, пусть $a + u = b + v$ для некоторых $u, v \in A$. Тогда $a_r + u_r = b_r + v_r$ и $a_+ + u_+ = b_+ + v_+$. Из первого равенства получаем $a_r - b_r \in A$ и $b_r - a_r \in A$, следовательно, $a_r * b_r \in A$. Из второго равенства вытекает $0 = a_+ - (a_+ + u_+) = a_+ - (b_+ + v_+) = (a_+ - b_+) - v_+$. Поэтому $v_+ = ((a_+ - b_+) - v_+) + v_+ \geq (a_+ - b_+) - (v_+ - v_+) = a_+ - b_+$. В силу выпуклости идеала имеем $a_+ - b_+ \in A$. Точно также $b_+ - a_+ \in A$, следовательно, $a_+ * b_+ \in A$. Отсюда $a * b = a_r * b_r + a_+ * b_+ \in A$. $\square$

Заключительное замечание сделаем относительно дистрибутивности произвольного drl -полукольца (или drl -полугруппы) как решетки. Утверждение об этом имеется еще в первой работе Swamy [5, theorem 2]. Однако вместо доказательства автор утверждает, что доказательство для drl -полугрупп такое же, как и для решеток с делением [8] с обращением отношения порядка. В последующих работах по нашей тематике другие авторы, ссылаясь на Swamy, соглашались с таким обоснованием дистрибутивности. В действительности, доказательство в [8, theorem 13.2] использует решеточную специфику и формально проходит только для положительно упорядоченных drl -полугрупп. Дадим сейчас свое доказательство, основывающееся на известном критерии: дистрибутивность решетки равносильна отсутствию в ней подрешеток изоморфных пентагону или алмазному.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Любое drl -полукольцо является дистрибутивной решеткой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что drl -полукольцо S содержит диамант или пентагон относительно $\leq$. В каждом из этих случаев найдутся такие $a, b, c \in S$, что a не сравним с элементом c , $b \wedge c \leq a$, и $a \not\leq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$. С последним неравенством получим противоречие. Действительно,

$$\begin{aligned} a - b \wedge c &\leq (a \vee b) \wedge (a \vee c) - b \wedge c = \\ &= ((a \vee b) \wedge (a \vee c) - b) \vee ((a \vee b) \wedge (a \vee c) - c) \leq \\ &\leq (a \vee b) - b \vee (a \vee c - c) = (a - b) \vee 0 \vee (a - c) \vee 0 = \\ &= (a - b \wedge c) \vee 0 = a - b \wedge c, \end{aligned}$$

откуда получаем

$$\begin{aligned} a &= (a - b \wedge c) + b \wedge c = \\ &= ((a \vee b) \wedge (a \vee c) - b \wedge c) + b \wedge c = \\ &= (a \vee b) \wedge (a \vee c). \end{aligned}$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Birkhoff G. Lattice theory. Am. Math. Colloquium Publications. 25. 1948.
2. Фукс Л. Частично упорядоченные алгебраические системы. — М.: "Мир" — 1965. — 342 с.
3. Golan J. S. The theory of semirings with applications in mathematics and theoretical computer science. Longman scientific and technical. Harlow, 1992.
4. Rao P. R. Lattice ordered semirings // Math. Sem. Notes, Kobe Univ. 1981. Vol. 9. P. 119–149.
5. Swamy K. L. N. Dually residuated lattice ordered semigroups // Math. Ann. 1965. Vol. 159. P. 105–114.
6. Swamy K. L. N. Dually residuated lattice ordered semigroups, II // Math. Ann. 1965. Vol. 160. P. 64–71.
7. Swamy K. L. N. Dually residuated lattice ordered semigroups, III // Math. Ann. 1966. Vol. 167. P. 71–74.
8. Ward M, Dilworth R. P. Residuated lattices // Trans. Am. Math. Soc., 45. 1939. P. 335–354.
9. Ворожцова Т. А., Чермных О. В. Арифметические свойства drl -полугрупп // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. Вып 16. — Киров: Изд-во ООО "Радуга-ПРЕСС" — 2014. — С.74–81.
10. Миклин А. В., Чермных В. В. О drl -полукольцах // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. Вып 16. — Киров: Изд-во ООО "Радуга-ПРЕСС" — 2014. — С.87–95.
11. Kovar T. Two remarks on dually residuated lattice ordered semigroups // Math. Slovaca, 49. 1999. no 1. P. 17–18.

REFERENCES

1. Birkhoff G. 1948 *Lattice theory*. Am. Math. Colloquium Publications.
2. L. Fuchs 1965, *Partially ordered algebraic systems*. М.: Mir — P. 342
3. Golan J. S. 1992, *The theory of semirings with applications in mathematics and theoretical computer science*. Longman scientific and technical. Harlow.
4. Rao P. R. 1981. "Lattice ordered semirings" *Math. Sem. Notes*, Kobe Univ. Vol. 9. pp. 119–149.
5. Swamy K. L. N. 1965, "Dually residuated lattice ordered semigroups", *Math. Ann.* Vol. 159. pp. 105–114.
6. Swamy K. L. N. 1965, "Dually residuated lattice ordered semigroups, II" *Math. Ann.* Vol. 160. pp. 64–71.
7. Swamy K. L. N. 1966, "Dually residuated lattice ordered semigroups, III" *Math. Ann.* Vol. 167. pp. 71–74.
8. Ward M, Dilworth R. P. 1939, "Residuated lattices" *Trans. Am. Math. Soc.*, 45. pp. 335–354.
9. Vorozhova T. A., Chermnyh O. V. 2014, "Arifmeticheskie svojstva *drl*-polugrupp" *Matematicheskij vestnik pedvuzov i universitetov Volgo-Vjatskogo regiona*. Vyp 16. Kirov: Izd-vo OOO "Raduga-PRESS" pp. 74–81.
10. Miklin A. V., Chermnyh V. V. 2014. "О *drl*-полукольцах" *Matematicheskij vestnik pedvuzov i universitetov Volgo-Vjatskogo regiona*. Vyp 16. Kirov: Izd-vo OOO "Raduga-PRESS" pp. 87–95.
11. Kovar T. 1999 "Two remarks on dually residuated lattice ordered semigroups" *Math. Slovaca* vol 49 no 1. pp. 17–18.

Вятский государственный университет

Получено 11.05.2016 г.

Принято в печать 13.12.2016 г.

УДК 511.42

DOI 10.22405/2226-8383-2016-17-4-180-184

PROBLEM OF NESTERENKO AND METHOD OF BERNIK

N. V. Budarina (Khabarovsk), H. O'Donnell (Dublin)

*Dedicated to Yuri Valentinovich Nesterenko and Vasilii Ivanovich Bernik on their 70th birthdays***Abstract**

In this article we prove that, if integer polynomial P satisfies $|P(\omega)|_p < H^{-w}$, then for $w > 2n - 2$ and sufficiently large H the root γ belongs to the field of p -adic numbers.

Keywords: integer polynomials, discriminants of polynomials.

Bibliography: 16 titles.

1. Introduction

Throughout this paper, p is a prime number, $\mathbb{Q}_p$ is the field of p -adic numbers,

$$P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$$

is an integer polynomial with degree $\deg P(x) = n$ and height $H(P) = \max_{0 \leq j \leq n} |a_j|$. We denote by $\mathcal{P}_n$ the set of integer polynomials of degree n . Let $\mathcal{P}_n(H) = \{P \in \mathcal{P}_n : H(P) = H\}$.

In this paper, a result originally considered by Y. V. Nesterenko is examined. In [1] Y.V. Nesterenko discussed the solvability of the equation $P(x) = 0$ in the ring of p -adic integers $\mathbb{Z}_p$ and proved the following result.

THEOREM 1. *Let x be an integer and $P \in \mathcal{P}_n(H)$. If*

$$|P(x)|_p \leq e^{-8n^2} H^{-4n},$$

then there exists a p -adic number γ such that

$$P(\gamma) = 0, \quad |x - \gamma|_p < 1.$$

Note that a similar problem was considered in [2] and there was given a criteria for when the closest root of a polynomial to a real point belongs to the field of real numbers. Knowledge of the nature of the roots is very important in the problems of Diophantine approximations for construction of regular systems [3, 4]. Numerous applications of this concept arose when obtaining estimates for the Hausdorff measure and Hausdorff dimension of Diophantine sets [5] and proving analogues of the Khintchine theorem [6, 7]. Using the regular systems, the exact theorems on approximation of real numbers by real algebraic [6], by algebraic integers [8], of complex numbers by complex algebraic [9] were obtained, and similar problems in the field of p -adic numbers [10] and in $\mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{Q}_p$ [7] were investigated.

The Theorem 1 can be improved for p -adic leading polynomials. Such a polynomial $P \in \mathcal{P}_n$ satisfies

$$|a_n|_p \gg 1. \tag{1}$$

THEOREM 2. *Let $\omega \in \mathbb{Z}_p$ and $P \in \mathcal{P}_n(H)$ be a p -adic leading polynomial. Then if*

$$|P(\omega)|_p < H^{-w} \tag{2}$$

for $w > 2n - 2$, and for sufficiently large $H > H_0(n)$, it follows that the root γ_1 of P belongs to $\mathbb{Q}_p$ and

$$|\omega - \gamma_1|_p < 1. \tag{3}$$

REMARK 1. *If $D(P) \neq 0$ then we have that the root γ_1 of P is closest to $\omega \in \mathbb{Z}_p$. The above theorem will be proved using a general method of V.I. Bernik which was developed in [11, 12].*

2. Preliminary setup and auxilliary Lemmas

Let $P \in \mathcal{P}_n$ have roots $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ in $\mathbb{Q}_p^*$, where $\mathbb{Q}_p^*$ is the smallest field containing $\mathbb{Q}_p$ and all algebraic numbers. Then, from (1) it follows that

$$|\gamma_i|_p \ll 1, \quad i = 1, \dots, n; \quad (4)$$

i.e. the roots are bounded. This follows from Lemma 4 in ([13], p.85).

Define the sets

$$T_p(\gamma_k) = \{\omega \in \mathbb{Z}_p : |\omega - \gamma_k|_p = \min_{1 \leq i \leq n} |\omega - \gamma_i|_p\}, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Consider the set $T_p(\gamma_k)$ for a fixed k and for ease of notation assume that $k = 1$. Next, reorder the other roots so that

$$|\gamma_1 - \gamma_2|_p \leq |\gamma_1 - \gamma_3|_p \leq \dots \leq |\gamma_1 - \gamma_n|_p.$$

Fix $\epsilon > 0$ where ϵ is sufficiently small and suppose that $\epsilon_1 = \epsilon N^{-1}$ where $N = N(n) > 0$ is sufficiently large. Let $T = [\epsilon_1^{-1}]$.

For a polynomial $P \in \mathcal{P}_n(H)$ define the real numbers ρ_j by

$$|\gamma_1 - \gamma_j|_p = H^{-\rho_j}, \quad 2 \leq j \leq n, \quad \rho_2 \geq \rho_3 \dots \geq \rho_n.$$

Define the integers m_j , $2 \leq j \leq n$, such that

$$\frac{m_j - 1}{T} \leq \rho_j < \frac{m_j}{T}, \quad m_2 \geq m_3 \geq \dots \geq m_n \geq 0.$$

Further define numbers s_i such that

$$s_i = \frac{m_{i+1} + \dots + m_n}{T}, \quad (1 \leq i \leq n-1), \quad s_n = 0.$$

The first Lemma is a p -adic analogue of the Lemma, which was proved by Bernik in [14] and is a generalisation of Sprindžuk's Lemma ([13], p.77).

LEMMA 1. [15] Let $\omega \in T_p(\gamma_1)$. Then

$$|\omega - \gamma_1|_p \leq \min_{1 \leq j \leq n} (|P(\omega)|_p |P'(\gamma_1)|_p^{-1} \prod_{k=2}^j |\gamma_1 - \gamma_k|_p)^{1/j}.$$

The following Lemma is often referred to as Gelfond's Lemma.

LEMMA 2 ([16], Lemma A.3). Let $P_1, P_2, \dots, P_k$ be polynomials of degree $n_1, \dots, n_k$ respectively, and let $P = P_1 P_2 \dots P_k$. Let $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$. Then

$$2^{-n} H(P_1) H(P_2) \dots H(P_k) \leq H(P) \leq 2^n H(P_1) H(P_2) \dots H(P_k).$$

In the proof of theorem we will refer to the following statement known as Hensel's Lemma.

LEMMA 3 ([4], p. 134). Let P be a polynomial with coefficients in $\mathbb{Z}_p$, let $\xi = \xi_0 \in \mathbb{Z}_p$ and $|P(\xi)|_p < |P'(\xi)|_p^2$. Then as $n \rightarrow \infty$ the sequence

$$\xi_{n+1} = \xi_n - \frac{P(\xi_n)}{P'(\xi_n)}$$

tends to some root $\beta \in \mathbb{Q}_p$ of the polynomial P and

$$|\beta - \xi|_p \leq |P(\xi)|_p / |P'(\xi)|_p^2 < 1.$$

3. Proof of Theorem 2

Two cases must be dealt with separately: $D(P) \neq 0$ and $D(P) = 0$.

3.1. Case I: $D(P) \neq 0$

First consider a polynomial $P \in \mathcal{P}_n(H)$ satisfying $D(P) \neq 0$ and (2), and assume that $|P'(\omega)|_p^2 \leq |P(\omega)|_p$. We will obtain a contradiction. Using (4), we get $|P'(\omega)|_p < H^{-w/2}$.

It is well known that $|D(P)| = \frac{|\Delta|}{|a_n|}$, where

$$\Delta = \begin{pmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & a_0 \\ na_n & (n-1)a_{n-1} & (n-2)a_{n-2} & \dots & a_1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & na_n & (n-1)a_{n-1} & (n-2)a_{n-2} & \dots & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & na_n & (n-1)a_{n-1} & (n-2)a_{n-2} & \dots & a_1 \end{pmatrix}.$$

Hence the determinant,

$$\begin{aligned} |\Delta| &\leq |a_n|((2n-2)!(nH)^{2n-2} + n(2n-2)!(nH)^{2n-2}) \\ &= |a_n|(2n-2)!(n+1)(nH)^{2n-2} \leq 2n^{2n-1}(2n-2)!H^{2n-2}|a_n|, \end{aligned}$$

using the fact that $|a_i| \leq H$, $i = 0, 1, \dots, n$. Thus, $|D(P)| \leq 2n^{2n-1}(2n-2)!H^{2n-2}$. This implies that

$$|D(P)|_p \geq 2^{-1}n^{1-2n}((2n-2)!)^{-1}H^{-2n+2}. \quad (5)$$

Using Lemma 1, $|a_n|_p \gg 1$ and (2),

$$\begin{aligned} |\omega - \gamma_1|_p &\leq \min_{1 \leq j \leq n} (|P(\omega)|_p |P'(\gamma_1)|_p^{-1} \prod_{k=2}^j |\gamma_1 - \gamma_k|_p)^{1/j} \\ &< \min_{1 \leq j \leq n} (H^{-w} |a_n|_p^{-1} \prod_{k=j+1}^n |\gamma_1 - \gamma_k|_p^{-1})^{1/j} \\ &\leq \min_{1 \leq j \leq n} (H^{-w} |a_n|_p^{-1} H^{s_j})^{1/j} \\ &\ll \min_{1 \leq j \leq n} H^{\frac{-w+s_j}{j}}. \end{aligned}$$

Define $\sigma(P)$ as the cylinder of points w satisfying

$$|\omega - \gamma_1|_p \ll \min_{1 \leq j \leq n} H^{\frac{-w+s_j}{j}}.$$

Let $\theta_j = \frac{w-s_j}{j}$ and denote by θ_0 the maximum value of θ_j , $j = 1, \dots, n$.

Now the polynomial P' is expanded as a Taylor series and each term is estimated on $\sigma(P)$. Thus

$$\begin{aligned} P'(\omega) &= P'(\gamma_1) + \sum_{j=2}^n ((j-1)!)^{-1} P^{(j)}(\gamma_1) (\omega - \gamma_1)^{j-1}, \\ |P^{(j)}(\gamma_1) (\omega - \gamma_1)^{j-1}|_p &\ll H^{-s_j + (n-j)\epsilon_1} H^{-\theta_0(j-1)}. \end{aligned}$$

As $\theta_0 \geq \theta_j$, this implies that

$$|P^{(j)}(\gamma_1) (\omega - \gamma_1)^{j-1}|_p \ll H^{-s_j + (n-j)\epsilon_1 + \frac{j-1}{j}(-w+s_j)} \leq H^{-w/2 + (n-2)\epsilon_1} \quad \text{for } 2 \leq j \leq n.$$

Thus,

$$|P'(\gamma_1)|_p \leq \max_{1 \leq j \leq n} \{|P^{(j)}(\gamma_1) (\omega - \gamma_1)^{j-1}|_p\} \ll H^{-w/2 + (n-2)\epsilon_1}$$

for $H > H_0(n)$.

Expressing the discriminant $D(P)$ in the form

$$|D(P)|_p = |a_n|_p^{2n-2} \prod_{1 \leq i < j \leq n} |\gamma_i - \gamma_j|_p^2 = |a_n|_p^{2n-4} |P'(\gamma_1)|_p^2 \prod_{2 \leq i < j \leq n} |\gamma_i - \gamma_j|_p^2$$

and using the facts that $|\gamma_i|_p \ll 1$ and $|a_n|_p \leq 1$, we obtain

$$|D(P)|_p \ll |P'(\gamma_1)|_p^2.$$

This contradicts (5) for $w > 2n-2+2(n-2)\epsilon_1$ and sufficiently large H . Therefore, $|P'(\omega)|_p^2 > |P(\omega)|_p$ holds for $w > 2n-2+2(n-2)\epsilon_1$, and case I follows immediately from Lemma 3. Hence, there exists a root $\gamma_1 \in \mathbb{Q}_p$ of P such that $|\omega - \gamma_1|_p \leq |P(\omega)|_p / |P'(\omega)|_p^2 < 1$.

3.2. Case II: $D(P) = 0$

Consider the polynomial $P \in \mathcal{P}_n$ satisfying $D(P) = 0$. First, P is decomposed into irreducible polynomials $T_i(\omega) \in \mathbb{Z}[\omega]$, i.e.

$$P(\omega) = \prod_{i=1}^k T_i^{s_i}(\omega).$$

It will be shown that for some index j , $1 \leq j \leq k$,

$$|T_j(\omega)|_p < 2^{nw/2} H^{-w} (T_j). \quad (6)$$

Assume the opposite, so that

$$|T_j(\omega)|_p \geq 2^{nw/2} H^{-w} (T_j) \text{ for all } j, 1 \leq j \leq k.$$

Then, by Lemma 2,

$$|P(\omega)|_p \geq \prod_{j=1}^k (2^{nw/2} H^{-w} (T_j))^{s_j} \geq 2^{nw(\sum_{j=1}^k s_j/2-1)} H(P)^{-w} \geq H(P)^{-w}$$

which contradicts (2). Thus (6) holds.

Hence, applying the same method as in Case I for T_j , $D(T_j) \neq 0$, which satisfies (6), it follows that there exists a p -adic number γ_1 such that $|\omega - \gamma_1|_p < 1$ and $T_j(\gamma_1) = 0$. This implies $P(\gamma_1) = 0$.

□

REFERENCES

1. Y. V. Nesterenko, *Roots of polynomials in p -adic fields*. Preprint.
2. N. Budarina, H. O'Donnell, *On a problem of Nesterenko: when is the closest root of a polynomial a real number?* International Journal of Number Theory, 8 (2012), no. 3, 801–811.
3. A. Baker and W.M. Schmidt, *Diophantine approximation and Hausdorff dimension*, Proc. Lond. Math. Soc. 21 (1970), 1–11.
4. V. I. Bernik, M. M. Dodson, *Metric Diophantine approximation on manifolds*, Cambridge Tracts in Math., vol. 137, Cambridge Univ. Press, 1999.
5. H. Dickinson and S. Velani, *Hausdorff measure and linear forms*, J. reine angew. Math., 490 (1997), 1–36.

6. V. Beresnevich, *On approximation of real numbers by real algebraic numbers*, Acta Arith. 90 (1999), 97–112.
7. V. Bernik, N. Budarina and D. Dickinson, *A divergent Khintchine theorem in the real, complex, and p -adic fields*, Lith. Math. J. 48 (2008), no. 2, 158–173.
8. Y. Bugeaud, *Approximation by algebraic integers and Hausdorff dimension*, J. Lond. Math. Soc., 65 (2002), pp. 547–559.
9. V. I. Bernik and D. Vasiliev, *Khintchine theorem for the integer polynomials of complex variable*, Tr. Inst. Mat. Nats. Akad. Navuk Belarusi, 3 (1999), 10–20.
10. V. V. Beresnevich, V. I. Bernik and E. I. Kovalevskaya, *On approximation of p -adic numbers by p -adic algebraic numbers*, J. Number Theory, 111 (2005), no. 1, 33–56.
11. V. Bernik, *An application of Hausdorff dimension in the theory of Diophantine approximation*, Acta Arith. 42 (1983), 219–253.
12. V. Bernik, *On the exact order of approximation of zero by values of integral polynomials*, Acta Arith. 53 (1989), 17–28.
13. V. Sprindžuk, *Mahler's problem in the metric theory of numbers*, vol. 25, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1969.
14. V. I. Bernik, *The metric theorem on the simultaneous approximation of zero by values of integer polynomials*, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat. 44 (1980), 24–45.
15. V. Bernik, D. Dickinson and J. Yuan, *Inhomogeneous diophantine approximation on polynomials in $\mathbb{Q}_p$* , Acta Arith., 90 (1999), no. 1, 37–48.
16. Y. Bugeaud, *Approximation by algebraic numbers*, Cambridge Tracts in Mathematics, Cambridge, 2004.

Khabarovsk Division of Institute for Applied Mathematics
Dublin Institute of Technology

Получено 28.11.2016 г.

Принято в печать 12.12.2016 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 17. Выпуск 4.

УДК 511.9

DOI 10.22405/2226-8383-2016-17-4-185-193

ON A. V. MALYSHEV'S APPROACH TO MINKOWSKI'S
CONJECTURE CONCERNING THE CRITICAL
DETERMINANT OF THE REGION $|x|^p + |y|^p < 1$ for $p > 1$

N. M. Glazunov (Kiev)

Аннотация

Целью статьи является представление подхода А. В. Малышева к исследованию и доказательству гипотезы Минковского (с уточнениями С. Дэвиса (C. Davis)) о критическом определителе области $|x|^p + |y|^p < 1$ для $p > 1$ и краткое изложение метода Малышева и полученных на его основе результатов.

Ключевые слова: критическая решетка; критический определитель области; Диофантово неравенство; Диофантовы приближения; лучевая функция; звездное тело; многообразие модулей;

Библиография: 21 название.

Abstract

We present A. V. Malyshev's approach to Minkowski's conjecture (in Davis's amendment) concerning the critical determinant of the region $|x|^p + |y|^p < 1$ for $p > 1$ and Malyshev's method. In the sequel of this article we use these approach and method to obtain the main result.

Keywords: critical lattice; critical determinant; Diophantine inequality; Diophantine approximation; distance function; star body; moduli space;

Bibliography: 21 titles.

1. Introduction

Let

$$|\alpha x + \beta y|^p + |\gamma x + \delta y|^p \leq c |\det(\alpha\delta - \beta\gamma)|^{p/2},$$

be a diophantine inequality defined for a given real $p > 1$; hear $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ are real numbers with $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

H. Minkowski in his monograph [2] raise the question about minimum constant c such that the inequality has integer solution other than origin. Minkowski with the help of his theorem on convex body has found a sufficient condition for the solvability of Diophantine inequalities in integers not both zero:

$$c = \kappa_p^p, \kappa_p = \frac{\Gamma(1 + \frac{2}{p})^{1/2}}{\Gamma(1 + \frac{1}{p})}.$$

But this result is not optimal, and Minkowski also raised the issue of not improving constant c . For this purpose Minkowski has proposed to use the critical determinant.

Given any set $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^n$, a lattice Λ is *admissible* for $\mathcal{R}$ (or is *$\mathcal{R}$ -admissible*) if $\mathcal{R} \cap \Lambda = \emptyset$ or $\{0\}$. The infimum $\Delta(\mathcal{R})$ of the determinants (the determinant of a lattice Λ is written $d(\Lambda)$) of all lattices admissible for $\mathcal{R}$ is called the *critical determinant* of $\mathcal{R}$. A lattice Λ is *critical* for $\mathcal{R}$ if $d(\Lambda) = \Delta(\mathcal{R})$.

Critical determinant is one of the main notion of the geometry of numbers [2, 3, 6]. It has been investigated in the framework of problem of Minkowski in papers by Mordell [4], by Davis [5], by Cohn [7], by Watson [8], by Malyshev [9] and by Malyshev with colleagues.

2. Minkowski's conjecture as a problem of Diophantine approximation theory

Diophantine approximations connect with critical determinants and with solutions in integer numbers $x_1, \dots, x_n$ (with some restrictions, for instance not all $x_1, \dots, x_n$ are equal to zero) of inequalities

$$F(x_1, \dots, x_n) < c,$$

or more generally

$$F(x) < c, \quad x \in \Lambda, x \neq 0.$$

Recall the definitions [6].

Let $\mathcal{R}$ be a set and Λ be a lattice with base $\{a_1, \dots, a_n\}$ in $\mathbf{R}^n$. A lattice Λ is *admissible* for body $\mathcal{R}$ ($\mathcal{R}$ -*admissible*) if $\mathcal{D} \cap \Lambda = \emptyset$ or 0 . Let $d(\Lambda)$ be the determinant of Λ . The infimum $\Delta(\mathcal{R})$ of determinants of all lattices admissible for $\mathcal{R}$ is called *the critical determinant* of $\mathcal{R}$; if there is no $\mathcal{R}$ -admissible lattices then puts $\Delta(\mathcal{R}) = \infty$. A lattice Λ is *critical* if $d(\Lambda) = \Delta(\mathcal{R})$.

Usually in the geometry of numbers the function $F(x)$ is a distance function. A real function $F(x)$ defined on $\mathbf{R}^n$ is *distance function* if

- (i) $F(x) \geq 0, x \in \mathbf{R}^n, F(0) = 0$;
- (ii) $F(x)$ is continuous;
- (iii) $F(x)$ is homogenous: $F(\lambda x) = \lambda F(x), \lambda > 0, \lambda \in \mathbf{R}$.

The problem of solving of diophantine inequality $F(x) < c$, with a distance function F has the next framework.

Let $\overline{M}$ be the closure of a set M and $\#P$ be the number of elements of a finite set P . An open set $S \subset \mathbf{R}^n$ is a *star body* if S includes the origin of $\mathbf{R}^n$ and for any ray r beginning in the origin $\#(r \cap (\overline{M} \setminus M)) \leq 1$. If $F(x)$ is a distance function then the set

$$M_F = \{x : F(x) < 1\}$$

is a star body.

One of the main particular case of a distance function is the case of convex symmetrical function $F(x)$ which with conditions (i) - (iii) satisfies the additional conditions

- (iv) $F(x + y) \leq F(x) + F(y)$;
- (v) $F(-x) = F(x)$.

The Minkowski's problem can be reformulated as a conjecture concerning the critical determinant of the region $|x|^p + |y|^p \leq 1, p > 1$. Recall once more that mentioned mathematical problems are closely connected with Diophantine Approximation.

For the given 2-dimension region $D_p \subset \mathbf{R}^2 = (x, y), p > 1$:

$$|x|^p + |y|^p < 1,$$

let $\Delta(D_p)$ be the critical determinant of the region.

Let $a \in \Lambda, a \neq 0$ and let

$$m(F, \Lambda) = \inf_a F(a).$$

The Hermite constant of the function F is defined as

$$\gamma(F) = \sup_{\Lambda} \frac{m(F, \Lambda)}{d(\Lambda)^{1/n}}.$$

3. Moduli Spaces

What is moduli? Classically Riemann claimed that $6g-6$ (real) parameters could be for Riemann surface of genus $g > 1$ which would determine its conformal structure (for elliptic curves, when $g = 1$, it needs one parameter). From algebraic point of view we have the following problem: given some kind of variety, classify the set of all varieties having something in common with the given one (same numerical invariants of some kind, belonging to a common algebraic family). For instance, for an elliptic curve the invariant is the modular invariant of the elliptic curve.

Let $\mathbf{B}$ be a class of objects. Let S be a scheme. A family of objects parametrized by the S is the set of objects $X_s : s \in S, X_s \in \mathbf{B}$ equipped with an additional structure compatible with the structure of the base S . Algebraic moduli spaces are defined in the papers by Mumford, Harris and Morrison [15, 16].

A possibility of the parameterization of all admissible lattices of regions $D_p = \{|x|^p + |y|^p < 1\}$, under varying $p > 1$, by some analytical manifolds was mentioned in the book by Minkowski in 1907 [2]. In 1950 H. Cohn published the paper on the Minkowski's conjecture [7]. The parameterization and the corresponding moduli space were one of the main tools of his approach to the investigation of the conjecture.

Recall some definitions. Let M be an arbitrary set in $\mathbf{R}^n$, $O = (0, \dots, 0) \in \mathbf{R}^n$. A lattice Λ is called admissible for M , or M -admissible, if it has no points $\neq O$ in the interior of M . It is called *strictly admissible* for M if it does not contain a point $\neq O$ of M .

The *critical determinant* of a set M is the quantity $\Delta(M)$ given by

$$\Delta(M) = \inf\{d(\Lambda) : \Lambda \text{ strictly admissible for } M\}$$

with the understanding that $\Delta(M) = \infty$ if there are no strictly admissible lattices. The set M is said to be of the finite or the infinity type according to whether $\Delta(M)$ is finite or infinite.

The moduli space is defined by the equation

$$\Delta(p, \sigma) = (\tau + \sigma)(1 + \tau^p)^{-\frac{1}{p}}(1 + \sigma^p)^{-\frac{1}{p}}, \quad (1)$$

in the domain

$$\mathcal{M} : \infty > p > 1, 1 \leq \sigma \leq \sigma_p = (2^p - 1)^{\frac{1}{p}},$$

of the $\{p, \sigma\}$ plane, where σ is some real parameter; here $\tau = \tau(p, \sigma)$ is the function uniquely determined by the conditions

$$A^p + B^p = 1, 0 \leq \tau \leq \tau_p,$$

where

$$A = A(p, \sigma) = (1 + \tau^p)^{-\frac{1}{p}} - (1 + \sigma^p)^{-\frac{1}{p}}, B = B(p, \sigma) = \sigma(1 + \sigma^p)^{-\frac{1}{p}} + \tau(1 + \tau^p)^{-\frac{1}{p}},$$

τ_p is defined by the equation $2(1 - \tau_p)^p = 1 + \tau_p^p$, $0 \leq \tau_p < 1$.

DEFINITION 1. In the notation above, the surface

$$\Delta - (\tau + \sigma)(1 + \tau^p)^{-1/p}(1 + \sigma^p)^{-1/p} = 0,$$

in $\mathbf{R}^3$ with coordinates (σ, p, Δ) we will call the Minkowski-Cohn moduli space.

4. Minkowski's analytic conjecture

In considering the question of the minimum value taken by the expression $|x|^p + |y|^p$, with $p \geq 1$, at points, other than the origin, of a lattice Λ of determinant $d(\Lambda)$, Minkowski [2] shows that the problem of determining the maximum value of the minimum for different lattices may be reduced to that of finding the minimum possible area of a parallelogram with one vertex at the origin and the three remaining vertices on the curve $|x|^p + |y|^p = 1$. The problem with $p = 1, 2$ and ∞ is trivial: in these cases the minimum areas are $1/2$, $\sqrt{3}/2$ and 1 respectively. Let $D_p \subset \mathbf{R}^2 = (x, y)$, $p > 1$ be the 2-dimension region:

$$|x|^p + |y|^p < 1.$$

Let $\Delta(D_p)$ be the critical determinant of the region. Recall considerations of the previous section. For $p > 1$, let

$$D_p = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid |x|^p + |y|^p < 1\}.$$

Minkowski [2] raised a question about critical determinants and critical lattices of regions D_p for varying $p > 1$. Let $\Lambda_p^{(0)}$ and $\Lambda_p^{(1)}$ be two D_p -admissible lattices each of which contains three pairs of points on the boundary of D_p and with the property that $(1, 0) \in \Lambda_p^{(0)}$, $(-2^{-1/p}, 2^{-1/p}) \in \Lambda_p^{(1)}$, (under these conditions the lattices are uniquely defined). Using analytic parameterization Cohn [7] gives analytic formulation of Minkowski's conjecture.

Let

$$\Delta(p, \sigma) = (\tau + \sigma)(1 + \tau^p)^{-\frac{1}{p}}(1 + \sigma^p)^{-\frac{1}{p}}, \quad (1)$$

be the function defined in the domain

$$\mathcal{M}: \infty > p > 1, 1 \leq \sigma \leq \sigma_p = (2^p - 1)^{\frac{1}{p}},$$

of the $\{p, \sigma\}$ plane, where σ is some real parameter; here $\tau = \tau(p, \sigma)$ is the function uniquely determined by the conditions

$$A^p + B^p = 1, 0 \leq \tau \leq \tau_p,$$

where

$$A = A(p, \sigma) = (1 + \tau^p)^{-\frac{1}{p}} - (1 + \sigma^p)^{-\frac{1}{p}}$$

$$B = B(p, \sigma) = \sigma(1 + \sigma^p)^{-\frac{1}{p}} + \tau(1 + \tau^p)^{-\frac{1}{p}},$$

τ_p is defined by the equation

$$2(1 - \tau_p)^p = 1 + \tau_p^p, 0 \leq \tau_p \leq 1.$$

In this case needs to extend the notion of parameter variety to parameter manifold. The function $\Delta(p, \sigma)$ in region $\mathcal{M}$ determines the parameter manifold.

Minkowski's analytic conjecture:

For any real p with conditions $p > 1$, $p \neq 2$, $1 < \sigma < \sigma_p$

$$\Delta(p, \sigma) > \min(\Delta(p, 1), \Delta(p, \sigma_p)).$$

In the vicinity of the point $p = 1$ and in the vicinity of the point $(2, \sigma_2)$ the (p, τ) variant of the Minkowski's analytic conjecture is used.

Minkowski's analytic (p, τ) -conjecture:

For any real p and τ with conditions $p > 1$, $p \neq 2$, $0 < \tau < \tau_p$

$$\Delta(p, \tau) > \min(\Delta(p, 1), \Delta(p, \tau_p)).$$

For investigation of properties of function $\Delta(p, \sigma)$ which are need for proof of Minkowski's conjecture [2, 7] we considered the value of $\Delta = \Delta(p, \sigma)$ and its derivatives

$$\Delta'_\sigma, \Delta''_{\sigma^2}, \Delta'_p, \Delta''_{\sigma p}, \Delta'''_{\sigma^2 p}$$

on some subdomains of the domain $\mathcal{M}$ [14].

5. Validated numerics

Validated numerics (sometimes called as interval computations) allow [17–21]

- (1) rigorous enclosure for roundoff error, truncation error, and error of data;
- (2) computation of rigorous bounds of the ranges of functions and maps.

A compact closed interval $I = [a, b]$ is the set of real numbers x such that (s.t.) $a \leq x \leq b$. Interval analysis with this type of intervals uses usually two sorts of intervals. Wide intervals are used for representing uncertainty of the real world or lack of information. Narrow intervals are used for rounding error bounds. In any of these two cases on each step of an interval computation we compute the interval I which contains an (ideal) solution of our problem. Some examples of implementations of the intervals are given in papers [21, 22].

There are many numerical algorithms for solving mathematical problems. The majority of these algorithms are iterative, so, since stopping the algorithms after a certain number of steps, we only get an approximation $\tilde{x}$ to the desired solution x . A perfect solution would if we could estimate the errors of the result not after the iteration process, but simultaneously with the iteration process. This is one of the main ideas of interval analysis [17–20].

6. Malyshev's method

At first expressing $\Delta'_\sigma, \Delta''_{\sigma^2}, \Delta'_p, \Delta''_{\sigma p}, \Delta'''_{\sigma^2 p}$ in terms of a sum of derivatives of "atoms" $s_i = \sigma^{p-i}, t_i = \tau^{p-i}, a_i = (1 + \sigma^p)^{-i-\frac{1}{p}}, b_i = (1 + \tau^p)^{-i-\frac{1}{p}}, A = b_0 - a_0, B = \tau b_0 + \sigma a_0, \alpha_i = A^{p-i}, \beta_i = B^{p-i} \ (i = 0, 1, 2, \dots)$.

Then by the implicit function theorem computing $\tau = \tau(p, \sigma)$ by means of the following iteration process:

$$\tau_{i+1} = (1 + \tau_i^p)^{\frac{1}{p}} ((1 - ((1 + \tau_i^p)^{-\frac{1}{p}} - (1 + \sigma^p)^{-\frac{1}{p}})^p)^{\frac{1}{p}} - \sigma(1 + \sigma^p)^{-\frac{1}{p}}),$$

For computation of the expression for τ_p we apply the following iteration:

$$(\tau_p)_{i+1} = 1 - (2^{-\frac{1}{p}})(1 + (\tau_p)_i^p)^{\frac{1}{p}}, \ p > 1, \ (\tau_p)_0 \in [0, 0.36].$$

So we really have represented the function Δ as the function $\Delta(p, \sigma)$ of two variables. The same fact is true for it's derivatives. A.V. Malyshev and the author have constructed algebraic expressions for $\Delta, \Delta'_\sigma, \Delta''_{\sigma^2}, \Delta'_p, \Delta''_{\sigma p}, \Delta'''_{\sigma^2 p}$ and at first compute their by fixed point and float point computations.

Let $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = ([x_1, \bar{x}_1], \dots, [x_n, \bar{x}_n])$ be the n -dimensional real interval vector with $\underline{x}_i \leq x_i \leq \bar{x}_i$ ("rectangle" or "box"). The *interval evaluation* of a function $G(x_1, \dots, x_n)$ on an interval $\mathbf{X}$ is the interval $[G, \bar{G}]$ such that for any $x \in \mathbf{X}$, $G(x) \in [G, \bar{G}]$. The interval evaluation is called *optimal* if $\underline{G} = \min G$, and $\bar{G} = \max G$ on the interval $\mathbf{X}$.

Let D be a subdomain of $\mathcal{M}$. Under evaluation in D a mentioned function the domain is covered by rectangles of the form

$$[\underline{p}, \bar{p}; \underline{\sigma}, \bar{\sigma}].$$

In the case of the formula that expressing Δ'_σ , Δ''_{σ^2} , Δ'_p , $\Delta''_{\sigma p}$, $\Delta'''_{\sigma^2 p}$

in terms of a sum of derivatives of "atoms" $s_i = \sigma^{p-i}$, $t_i = \tau^{p-i}$, $a_i = (1 + \sigma^p)^{-i-\frac{1}{p}}$, $b_i = (1 + \tau^p)^{-i-\frac{1}{p}}$, $A = b_0 - a_0$, $B = \tau b_0 + \sigma a_0$, $\alpha_i = A^{p-i}$, $\beta_i = B^{p-i}$ ($i = 0, 1, 2, \dots$) one applies the rational interval evaluation to construct formulas for lower bounds and upper bounds of the functions, which in the end can be expressed in terms of $\underline{p}$, $\bar{p}$, $\underline{\sigma}$, $\bar{\sigma}$, $\underline{\tau}$, $\bar{\tau}$; here the bounds $\underline{\tau}$, $\bar{\tau}$, are obtained with the help of the iteration process:

$$\underline{t}_{i+1} = (1 + \underline{t}_i^{\bar{p}})^{\frac{1}{\bar{p}}} ((1 - ((1 + \underline{t}_i^{\bar{p}})^{-\frac{1}{\bar{p}}} - (1 + \bar{\sigma}^{\bar{p}})^{-\frac{1}{\bar{p}}})^{\bar{p}})^{\frac{1}{\bar{p}}} - \bar{\sigma}(1 + \bar{\sigma}^{\bar{p}})^{-\frac{1}{\bar{p}}}),$$

$$\bar{t}_{i+1} = (1 + \bar{t}_i^{\underline{p}})^{\frac{1}{\underline{p}}} ((1 - ((1 + \bar{t}_i^{\underline{p}})^{-\frac{1}{\underline{p}}} - (1 + \underline{\sigma}^{\underline{p}})^{-\frac{1}{\underline{p}}})^{\underline{p}})^{\frac{1}{\underline{p}}} - \underline{\sigma}(1 + \underline{\sigma}^{\underline{p}})^{-\frac{1}{\underline{p}}}).$$

$$i = 0, 1, \dots$$

As interval computation is the enclosure method, we have to put:

$$[\underline{\tau}, \bar{\tau}] = [\underline{t}_N, \bar{t}_N] \bigcap [\underline{\tau}_0, \bar{\tau}_0].$$

N is computed on the last step of the iteration.

For initial values we may take : $[\underline{t}_0, \bar{t}_0] = [\underline{\tau}_0, \bar{\tau}_0] = [0, 0.36]$.

6.1. Algorithms

Here we give names, input and output of algorithms for interval evaluation only. All these algorithms are implemented, tested and applied under the computer-assisted proof of Minkowski's conjecture [9, 10, 12–14].

Algorithm *TPV*

Input: An implicitly defined function τ_p from Section 5.

Interval $[\underline{p}, \bar{p}; \underline{\sigma}, \bar{\sigma}]$.

Method: Iterative interval computation.

Output: The interval evaluation of τ_p .

Algorithm *TAUV*

Input: Implicitly defined function τ from this Section.

Interval $[\underline{p}, \bar{p}; \underline{\sigma}, \bar{\sigma}]$.

Method: Described in this Section.

Output: The interval evaluation of τ .

Algorithm *L0V*

Input: Function $l^0 = \Delta(p, \sigma) - \Delta_p^{(0)}$.

Interval $[\underline{p}, \bar{p}; \underline{\sigma}, \bar{\sigma}]$.

Method: Interval computations.

Output: The interval evaluation of l^0 .

Algorithm *L1V*

Input: Function $l^1 = \Delta(p, \sigma) - \Delta_p^{(1)}$.

Interval $[\underline{p}, \bar{p}; \underline{\sigma}, \bar{\sigma}]$.

Method: Interval computations.

Output: The interval evaluation of l^1 .

Algorithm *GV*

Input: A function $g(p, \sigma)$ which has the same sign as function Δ'_σ .

Interval $[\underline{p}, \bar{p}; \underline{\sigma}, \bar{\sigma}]$.

Method: Interval computations.

Output: The interval evaluation of $g(p, \sigma)$.

Algorithm HV

Input: A function $h(p, \sigma)$ which is the partial derivative by σ the function $g(p, \sigma)$.

Interval $[\underline{p}, \bar{p}; \underline{\sigma}, \bar{\sigma}]$.

Method: Interval computations.

Output: The interval evaluation of $h(p, \sigma)$.

Next two algorithms are described in [22].

Algorithm MonotoneFunction

Input: A real function $F(x, y)$ monotonous by x and by y .

Interval $[\underline{x}, \bar{x}; \underline{y}, \bar{y}]$.

Output: The interval evaluation of F .

Algorithm RationalFunction

Input: A rational function $R(x, y)$. Interval $[\underline{x}, \bar{x}; \underline{y}, \bar{y}]$.

Output: The interval evaluation of R .

7. Results

It is important to note that our method gives possibility to prove that a value of the target minimum is an analytic function but is not a point. Ordinary numerical methods do not allow to obtain results of the kind.

In notations [14] next result have proved:

THEOREM 1. [14]

$$\Delta(D_p) = \begin{cases} \Delta(p, 1), & 1 < p \leq 2, p \geq p_0, \\ \Delta(p, \sigma_p), & 2 \leq p \leq p_0; \end{cases}$$

here p_0 is a real number that is defined unique by conditions $\Delta(p_0, \sigma_p) = \Delta(p_0, 1)$, $2,57 \leq p_0 \leq 2,58$.

COROLLARY 1.

$$\kappa_p = \Delta(D_p)^{-\frac{p}{2}}.$$

8. Strong Minkowski's analytic conjecture

A.V. Malishev and the author on the base of some theoretical evidences and results of mentioned computation have proposed the strong Minkowski's analytic conjecture (MAS)

Strong Minkowski's analytic (MAS) conjecture:

For given $p > 1$ and increasing σ from 0 to σ_p the function $\Delta(p, \sigma)$

1) increase strictly monotonous if $1 < p < 2$ and $p \geq p^{(1)}$,

2) decrease strictly monotonous if $2 \leq p \leq p^{(2)}$,

3) has a unique maximum on the segment $(1, \sigma_p)$; until the maximum $\Delta(p, \sigma)$ increase strictly monotonous and then decrease strictly monotonous if $p^{(2)} < p < p^{(1)}$;

4) constant, if $p = 2$;

here

$p^{(1)} > 2$ is a root of the equation $\Delta''_{\sigma^2}|_{\sigma=\sigma_p} = 0$;

$p^{(2)} > 2$ is a root of the equation $\Delta''_{\sigma^2}|_{\sigma=1} = 0$.

It seems that the conjecture (MAS) has not been proved for any parameter except the trivial $p = 2$.

9. Conclusion

A.V. Malyshev's approach to Minkowski's conjecture (in Davis's amendment) concerning the critical determinant of the region $|x|^p + |y|^p < 1$ for $p > 1$ is proposed and A.V. Malyshev's method of its prove is given. Applications of the approach and of the method are presented.

REFERENCES

1. Korkin A., Zolotarev G. 1872, "Sur les formes quadratiques positives quaternaires", *Math. Ann.*, vol. 5, 581–583.
2. H. Minkowski, *Diophantische Approximationen*, Leipzig: Teubner (1907).
3. H. Minkowski, *Geometrie der Zahlen*, Berlin–Leipzig: Teubner (1910).
4. L. J. Mordell, Lattice points in the region $|Ax^4| + |By^4| \geq 1$, *J. London Math. Soc.* **16**, 152–156 (1941).
5. C. Davis, Note on a conjecture by Minkowski, *J. London Math. Soc.*, **23**, 172–175 (1948).
6. J. Cassels, *An Introduction to the Geometry of Numbers*, Berlin: Springer-Verlag (1971).
7. H. Cohn, Minkowski's conjectures on critical lattices in the metric $\{|\xi|^p + |\eta|^p\}^{1/p}$, *Annals of Math.*, **51**, (2), 734–738 (1950).
8. G. Watson, Minkowski's conjecture on the critical lattices of the region $|x|^p + |y|^p \leq 1$, (I), (II), *Jour. London Math. Soc.*, **28**, (3, 4), 305–309, 402–410 (1953).
9. A. Malyshev, Application of computers to the proof of a conjecture of Minkowski's from geometry of numbers. I, *Zap. Nauchn. Semin. LOMI*, **71**, 163–180 (1977).
10. A. Malyshev, Application of computers to the proof of a conjecture of Minkowski's from geometry of numbers. II, *Zap. Nauchn. Semin. LOMI*, **82**, 29–32 (1979).
11. A. Malyshev, A. Voronetsky, The proof of Minkowski's conjecture concerning the critical determinant of the region $|x|^p + |y|^p < 1$ for $p > 6$, *Acta arithm.*, v. **71**, 447–458 (1975).
12. N. Glazunov, A. V. Malyshev, On Minkowski's critical determinant conjecture, *Kibernetika*, No. 5, 10–14 (1985).
13. N. Glazunov, A. Malyshev. The proof of Minkowski's conjecture concerning the critical determinant of the region $|x|^p + |y|^p < 1$ near $p = 2$, (in Russian), *Doklady Akad. Nauk Ukr.SSR* ser.A, 7 .P.9–12 (1986).
14. N. Glazunov, A. Golovanov, A. Malyshev, Proof of Minkowski's hypothesis about the critical determinant of $|x|^p + |y|^p < 1$ domain, *Research in Number Theory 9*. Notes of scientific seminars of LOMI. **151** Leningrad: Nauka. 40–53 (1986).
15. Mumford D. Towards an Enumerative Geometry of the Moduli Space of Curves. *Arithmetic and Geometry. Vol. II. Progress in Math.*, pp.271 - 328, 1983.
16. Harris J., Morrison J., *Moduli of curves*. GTM 187, Springer, Berlin-N.Y, 1998.
17. R. E. Moore. Interval Analysis. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1966.
18. G. Alefeld, J. Herzberger. Introduction to Interval Computations. Academic Press, NY, 1983.

19. Yu. I. Shokin. Interval'niy Analiz. Nauka. Seb. District. Novosibirsk, 1981 (in Russian).
20. Applications of Interval Computations (R. Baker Kearfott and Vladik Kreinovich (Eds.) Kluwer Academic Publishers. 1996.
21. Scientific Computing, Validated Numerics, Interval Methods (Walter Krämer and Jürgen Wolff von Gudenberg (Eds.)) Kluwer Academic/Plenum Publishers. NY. 2001.
22. N. M. Glazunov. Interval arithmetics for evaluation of real functions and its implementation on vector-pipeline computers (in Russian), *Issues of Cybernetics (Voprosi Kibernetiki). Kernel Software for Supercomputers*, Moscow. Acad. of Sci. USSR, P.91-101 (1990).

National Aviation University

Получено 28.11.2016 г.

Принято в печать 12.12.2016 г.

70 ЛЕТ ВЯЧЕСЛАВУ АЛЕКСАНДРОВИЧУ АРТАМОНОВУ
70 anniversary of Vjacheslav Aleksandrovich Artamonov

DOI 10.22405/2226-8383-2016-17-4-194-202



2 октября 2016 года исполнилось 70 лет со дня рождения доктора физико-математических наук, заведующего кафедрой высшей алгебры механико-математического факультета Московского университета, профессора Вячеслава Александровича Артамонова.

Вячеслав Александрович родился 2 октября 1946 г. в г. Туле. Поступил на механико-математический факультет МГУ (1963) и окончил его в 1968 г. Обучался в аспирантуре механико-математического факультета (1968 – 1970) под научным руководством профессора А. Г. Куроша, защитил диссертации на соискание учёной степени кандидата (1971) и доктора (1990) физико-математических наук. Вся научно-педагогическая деятельность В. А. Артамонова связана с кафедрой высшей алгебры механико-математического факультета МГУ, доцентом которой он работал в 1976–1996 гг. и профессором — с 1996 г.

Научные интересы Вячеслава Александровича отличаются широтой и разнообразием. Он внёс значительный вклад в развитие таких областей современной алгебры, как универсальная алгебра (многообразия, квазимногообразия универсальных алгебр), производные структуры (коммутаторы конгруэнций, группы автоморфизмов и т.д.), теория колец и модулей (квантовые многочлены, квантовые аффинные пространства, квантовые группы, действия алгебр Хопфа на квантовых многочленах, квантовые тела, проективные модули над квантовыми многочленами, групповыми алгебрами и универсальными обёртывающими алгебрами алгебр Ли), теория квазигрупп, приложения алгебры к изучению квазикристаллов, алгебраические методы в теории кодирования и криптографии. Среди полученных В. А. Артамоновым результатов отметим следующие.

Получена классификация многообразий неассоциативных алгебр и групп, у которых решётка подмногообразий является цепью.

Доказана свобода проективных метабелевых групп и алгебр Ли.

Доказано наличие проективных несвободных объектов в произведении нильпотентного и локально конечного многообразий групп.

Доказана квантовая гипотеза Серра: проективные модули ранга не меньше 2 над квантовыми многочленами свободны.

Получена классификация разрешимых групп и алгебр Ли, для которых все проективные модули над групповым кольцом или универсальной обёртывающей алгеброй свободны.

Дана общая конструкция свободного абелевого расширения в конгруэнц-модулярных многообразиях универсальных алгебр. В частности, эта конструкция используется для изучения свободных разрешимых алгебр любого класса в данном конгруэнц-модулярном многообразии алгебр.

В терминах циклических разложений перестановок строк и столбцов латинских квадратов описаны простые и нелинейные квазигруппы порядка 4, изучены свойства полиномиальной полноты конечных квазигрупп.

Вячеслав Александрович ведёт большую педагогическую работу: читает курсы лекций по высшей алгебре на первом и втором курсах механико-математического факультета, курс линейной алгебры для математиков-экономистов третьего курса, спецкурс “Алгебра, логика и теория чисел” (по программе ВАК) для аспирантов и студентов 3-5 курсов механико-математического факультета, а также курсы “Линейная алгебра и аналитическая геометрия” на первом курсе и “Теория групп и ее приложения” для студентов старших курсов и аспирантов в Высшем колледже наук о материалах, руководит совместно с другими сотрудниками кафедры научными семинарами “Научно-исследовательский семинар кафедры высшей алгебры”, “Кольца, модули и матрицы”, “Компьютерная алгебра”. Под руководством Вячеслава Александровича подготовлены и защищены 15 кандидатских диссертаций.

Много внимания уделяет Вячеслав Александрович организации научно-исследовательских работ кафедры по совместным проектам с отечественными и зарубежными партнёрами.

В. А. Артамонов является членом Американского математического общества (1973), член редколлегий журналов “Фундаментальная и прикладная математика” (МГУ), “Communications in Algebra” (США), “Discussiones Mathematicae, General Algebra and Applications” (Польша), “Алгебра и дискретная математика” (Украина), “Quasigroups and related topics” (Молдова), “Абелевы группы и модули” (Томский государственный университет), “Чебышевский сборник” (Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого).

Редакция журнала "Чебышевский сборник", все друзья и коллеги сердечно поздравляют Вячеслава Александровича Артамонова с 70-летием и желают ему крепкого здоровья, успешного продолжения научной и педагогической деятельности, новых достижений, счастья и радости.

Список основных работ В. А. Артамонова.

Книги

1. В. А. Артамонов. Линейная алгебра и аналитическая геометрия (Курс лекций для экономических специальностей). М., 2012, 224 с.
2. В. А. Артамонов. Введение в высшую алгебру и аналитическую геометрию. М., 2007, 128 с.
3. В. А. Артамонов, Ю. Л. Словохотов. Группы и их приложения в физике, химии, кристаллографии., М., 2005, 513 с.
4. В. Н. Латышев, В. А. Артамонов. Линейная алгебра и выпуклая геометрия. М., 2004, 160 с.

5. В. А. Артамонов. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. Курс лекций. Издательство МГУ, 150 с.
6. В. А. Артамонов. Линейная алгебра для экономистов. Изд. мех-мат. факультета МГУ, 200 с.
7. В. А. Артамонов в соавторстве с коллективом кафедры высшей алгебры МГУ. Сборник задач по алгебре. Под ред. А. И. Кострикина. 352 с.

Статьи

1. В. А. Артамонов, А. В. Климаков, А. А. Михалев, А. В. Михалев. Прimitивные и почти примитивные элементы свободных алгебр шрайеровых многообразий. Фундам. и прикл. матем., 21 (2016), № 2, 1-24
2. V. A. Artamonov, S. Chakrabarti, S. K. Pal. Characterization of Polynomially Complete Quasigroups based on Latin Squares for Cryptographic Transformations, Discrete Applied Mathematics, 200 (2016), 5-17
3. V. A. Artamonov, O. Lezama, W. Fajardo, Extended modules and Ore extensions. Communications in Mathematics and Statistics, 4:2 (2016), 189–202
4. V. A. Artamonov. Derivations of Skew PBW-Extensions. Communications in Mathematics and Statistics, 3 (2015), с. 449-457
5. Н. В. Артамонов, Д. В. Артамонов, В. А. Артамонов. Кредитные циклы: эконометрический анализ и выводы для России Вестник МГИМО-Университета, 35 (2014), № 2, 113-122
6. В. А. Артамонов. Полупростые алгебры Хопфа с ограничениями на неприводимые неодномерные модули. Алгебра и анализ, 26:2 (2014), 21–44
7. В. А. Артамонов. Полупростые алгебры Хопфа. Чебышевский сб., 15:1 (2014), 19–31
8. В. А. Артамонов. Свойства полупростых алгебр Хопфа. Матем. заметки, 96:3 (2014), 325–332
9. V. A. Artamonov, S. Chakrabarti, G. Sugata, S. K. Pal. On Latin squares of polynomially complete quasigroups and quasigroups generated by shifts. Quasigroups and Related Systems, 21(2013), 201-214
10. V. A. Artamonov, R. B. Mukhatov, R. Wisbauer. On the category of modules over some semisimple bialgebras. Arabian Journal of Mathematics, 1:1(2012), 29-38
11. В. А. Артамонов. Полномиально полные алгебры. Ученые записки Орловского государственного университета 6 (2012), no. 2, 23–29
12. V. A. Artamonov. Universal enveloping algebras for n -ary algebras. В сб. Споменица академика Веселина Перића, Банья Лука: Академија наука и умјетности Републике Српске, 2011, 59-68
13. В. А. Артамонов, С. Санчес. О конечных группах симметрий некоторых моделей трехмерных квазикристаллов Сиб. матем. журн., 52:6 (2011), 1221–1233

14. В. А. Артамонов, С. Санчес. О группах симметрий квазикристаллов Матем. заметки, 87:3 (2010), 323–329
15. V. A. Artamonov. On semisimple Hopf algebras with few representations of dimension greater than one. Revista de la Unión Matemática Argentina, 51:2(2010), 91-105
16. V. A. Artamonov, B. Zekovic. The antiautomorphisms of simple finite-dimensional ternary algebras. Math. Maced, 8(2010), 61-68
17. Артамонов В.А., Михалев А.А., Михалев А.В. Автоморфизмы свободных алгебр шрайеровых многообразий. Современные проблемы математики и механики, 4:3(2009), 39-57
18. V. A. Artamonov, I. A. Chubarov. Properties of some semisimple Hopf algebras. Algebras, representations and applications, A conference in honour of Ivan Shestakov's 60th birthday, August 26 — September 1, 2007, Maresias, Brazil. Contemp. Math. 483(2009), 23-36
19. V. A. Artamonov. A family of extensions of semisimple Hopf algebras and their coactions. Arabian Journal for Science and Engineering, 33:2(2008), 41-52
20. В. А. Артамонов. О полупростых конечномерных алгебрах Хопфа. Матем. сб., 198:9 (2007), 3–28
21. V. A. Artamonov. Actions of Hopf algebras on general quantum Mal'tsev power series and quantum planes. Journal of Mathematical Sciences, 134:1(2006), 1773-1798
22. V. A. Artamonov V., S. Sanchez. A mathematical classification for symmetries in 2-dimensional quasicrystals. Lecture Series on Computer and Computational Sciences., 7(2006), 32-35
23. V. A. Artamonov. Actions of pointed Hopf algebras on quantum torus. Annali dell'universita di Ferrara, sez. VII, Scienze Matematiche, 51(2005), 29-60
24. В. А. Артамонов. Обобщенные дифференцирования квантовой плоскости. Journal of Mathematical Sciences, 131:5(2005), 5904-5918
25. В. А. Артамонов. Квазикристаллы и их симметрии. Фундамент. и прикл. матем., 10:3 (2004), 3–10
26. V. A. Artamonov. Cocommutative Hopf algebras acting on quantum polynomials and their invariants. В сб.: Polynomial identities and combinatorial methods, Lect. Notes in Pure and Appl. Math, 235 (2003), 27-45
27. V. A. Artamonov. On symmetries of quasicrystals. Contemporary Mathematics, 376 (2003), 20-26
28. V. A. Artamonov, A. A. Mikhalev, A. V. Mikhalev. Combinatorial properties of free algebras of Schreier varieties. В сб. Polynomial Identities and Combinatorial Methods, 2003, 47-99
29. V. A. Artamonov. Pointed Hopf algebras acting on quantum polynomials. Journal of Algebra, 259(2003), 323-352
30. В. А. Артамонов. Действия квантовых групп на квантовых пространствах. Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика, 3 (2003), 13-17
31. V. A. Artamonov. Automorphisms and Derivations of Quantum Polynomials. В сб. Recent Advances in Lie Theory, Research and Exposition in Mathematics, 25(2002), 109-120

32. В. А. Артамонов. Алгебры квантовых многочленов. Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз., 26 (2002), 5–34
33. V. A. Artamonov, R. Wisbauer. Homological Properties of Quantum Polynomials. Algebras and Representation Theory 4(2001), 219.
34. В. А. Артамонов. Универсальные коммутативные алгебры Хопфа, действующие на квантовых многочленах. Фундамент. и прикл. матем., 6:3 (2000), 637–642
35. В. А. Артамонов. Действия точечных алгебр Хопфа на квантовых многочленах. Успехи матем. наук, 55:6(336), (2000), 125–126
36. V. A. Artamonov. Valuations on quantum division rings. Communications in Algebra, 29:9(2001), 3889–3904
37. В. А. Артамонов. Автоморфизмы тела рациональных квантовых функций. Матем. сб., 191:12 (2000), 3–26
38. В. А. Артамонов. Действия точечных алгебр Хопфа на квантовых многочленах. Успехи матем. наук, 55:6(2000), 124–125
39. В. А. Артамонов. Универсальные коммутативные алгебры Хопфа, действующие на квантовых многочленах. Фундаментальная и прикладная математика, 6:3(2000), 637–642
40. V. A. Artamonov. General quantum polynomials. В сб. Algebra. Proceedings of the International algebraic conference on the occasion of the 90th birthday of A. G. Kurosh, 33–48
41. V. A. Artamonov. Quantum division ring. В сб. Formal Power Series and Algebraic Combinatorics, 2000, 402–413
42. V. A. Artamonov. Varieties of algebras. В сб. Handbook of Algebra, 2, 2000, 547–575
43. V. A. Artamonov. On projective modules over quantum polynomials. Journal of Mathematical Sciences, 93:2(1999), 135–148
44. V. A. Artamonov. P. M. Cohn The skew field of rational functions on the quantum plane. Journal of Mathematical Sciences, 93:6(1999), 824–829
45. В. А. Артамонов. Транзитивность действия на модулярных векторах. Фундамент. и прикл. матем., 5:3 (1999), 765–773
46. В. А. Артамонов. Общие квантовые многочлены: неприводимые модули и Морита-эквивалентность. Изв. РАН. Сер. матем., 63:5 (1999), 3–36
47. В. А. Артамонов. Тело квантовых рациональных функций. Успехи матем. наук, 54:4(328) (1999), 151–152
48. В. А. Артамонов. Квантовые многочлены и их тела частных. В сб. Универсальная алгебра и ее приложения. 6 (1999), 14–20
49. В. А. Артамонов. Квантовая проблема Серра. Успехи матем. наук, 53:4(322) (1998), 3–76
50. Quantum polynomial algebras. Journal of Mathematical Sciences, 87(1997), 3441–3462
51. В. А. Артамонов. Периодические модули над общими квантовыми лорановскими полиномами. Матем. заметки, 61:1 (1997), 10–17

-
51. В. А. Артамонов. Представление Магнуса в конгруэнц-модулярных многообразиях. Сиб. матем. журн., 38:5 (1997), 978–995
 52. В. А. Артамонов. Модули над квантовыми полиномами. Матем. заметки, 59:4 (1996), 497–503
 53. В. А. Артамонов. Неприводимые модули над квантовыми полиномами. Успехи матем. наук, 51:6(312), (1996), 189–190
 54. V. A. Artamonov. Algorithmic solution of quantum Serre conjecture. В сб. First International Tainan–Moscow Algebra Workshop, 1996, 123–137
 55. В. А. Артамонов. Автоморфизмы разложимых проективных модулей. Фундамент. и прикл. матем., 1:1 (1995), 63–69
 56. V. A. Artamonov, S. Chakrabarti. Free solvable algebra in a general congruence modular variety. Communications in Algebra, 24:5(1996), 1723–1735
 57. V. A. Artamonov. Hopf algebras with Engel condition. Contemporary Mathematics, 184 (1995), 184–33
 58. V. A. Artamonov. Projective modules over crossed products. Journal of Algebra, 173(1995), 696–714
 59. В. А. Артамонов. Автоморфизмы разложимых проективных модулей Фундамент. и прикл. математика, 1:1(1995), 45–51
 60. В. А. Артамонов, С. Чакрабартти. Свойства алгебр примарного порядка с одной тернарной мальцевской операцией Алгебра и логика, 34:2(1995), 132–144
 61. В. А. Артамонов. Строение модулей над квантовыми полиномами. Успехи матем. наук, 50:6(306) (1995), 167–168
 62. В. А. Артамонов, В. В. Ященко. Многоосновные алгебры в системах открытого шифрования. Успехи матем. наук, 49:4(298) (1994), 149–150
 63. V. A. Artamonov, A. A. Klyachko, V. M. Sidelnikov, V. V. Yashenko. Algebraic aspects of key generation systems. Lecture Notes in Computer Science, 829(1994), 1–5
 64. В. А. Артамонов. Проективные модули над квантовыми алгебрами полиномов Матем. сб., 185:7 (1994), 3–12
 65. В. А. Артамонов. Свободные алгебры мальцевских произведений многообразий. Успехи матем. наук, 48:2(290) (1993), 171–172
 66. В. А. Артамонов, В. В. Ященко. Многоосновные алгебры в системах открытого шифрования. Успехи матем. наук, 49:4(1993), 149–150
 67. V. A. Artamonov. Projective modules and groups of invertible matrices over crossed products. Contemporary Mathematics, 131:2(1992), 227–235
 68. V. A. Artamonov. Projective modules over group rings of nilpotent groups. Amer. Math. Soc. Transl, 154(1992), 11–20
 69. В. А. Артамонов. Энгелевы алгебры Хопфа и квантовый аналог гипотезы Серра. Успехи матем. наук, 47:5(287) (1992), 165–166

70. В. А. Артамонов. Структура алгебр Хопфа. Итоги науки и техн. Сер. Алгебра. Топол. Геом., 29 (1991), 3–63
71. В. А. Артамонов. Нильпотентность проективности, разложимость. Сиб. матем. журнал, 32:6(1991), 3–11.
72. В. А. Артамонов. Проективные метабелевы D -группы и супералгебры Ли. Труды семинара им. И.Г. Петровского, 15(1991), 189–195
73. В. А. Артамонов. Проективные модули и матрицы над модулярными алгебрами Ли. В сб. Абелевы группы и модули, Томск, 10 (1991), 5–8
74. В. А. Артамонов. Теорема Хоррокса для некоммутативных колец. Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика, 2(1989), 5–7
75. В. А. Артамонов. Универсальные алгебры. Итоги науки и техн. Сер. Алгебра. Топол. Геом., 27 (1989), 45–124
76. В. А. Артамонов, А. А. Бовди. Целочисленные групповые кольца: группы обратимых элементов и классическая K -теория. Итоги науки и техн. Сер. Алгебра. Топол. Геом., 27 (1989), 3–43
77. В. А. Артамонов. Проективные модули и элементарные матрицы над кольцами косых полиномов. Сборник работ по алгебре, издательство МГУ (Москва), 1989, 6–49
78. В. А. Артамонов. Проективні модулі над нільпотентними алгебрами Лі. Вісник Київ. ун-ту., мат. і мех, 27(1995), 3–4
79. В. А. Артамонов. Проективные модули над универсальными обертывающими алгебрами. Изв. АН СССР. Сер. матем., 48:6 (1984), 1123–1137
80. В. А. Артамонов. Проективные модули над универсальными обертывающими алгебрами. Известия АН СССР, сер. матем, 48:6(1984), 1123–1137
81. В. А. Артамонов. Проективно-свободные нильпотентные группы. Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика, 5(1983), 41–42
82. В. А. Артамонов. Теорема Квиллена для градуированных алгебр Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика, 3(1983), 59–61
83. В. А. Артамонов. Решетки подмногообразий. В сб. Упорядоченные множества и решетки, 1983, 69–97
84. В. А. Артамонов. Структура проективных групп в произведениях многообразий. Труды семинара им. И.Г. Петровского, 8(1982), 58–74
85. V. A. Artamonov. Non-free projectives in products of group varieties. В сб. Banach Center Publ, Warsaw, 7–13
86. В. А. Артамонов. Проективные модули над групповыми кольцами нильпотентных групп. В сб. “Алгебра.” Изд-во МГУ, 1982, 7–23
87. В. А. Артамонов. Проективные несвободные модули над групповыми кольцами разрешимых групп. Матем. сб., 116(158):2(10) (1981), 232–244

-
88. В. А. Артамонов. Минимальные многообразия обобщенных полугрупп, групп и колец. Сибирский математический журнал, 21:3 (1980), 6-22
 89. В. А. Артамонов. Проективные группы в произведениях многообразий. В сб. "Алгебра." Изд-во МГУ, 1980, 19-25
 90. В. А. Артамонов. О шрейеровых многообразия n -групп и n -полугрупп. Труды семинара им. И.Г. Петровского, 5(1979), 193-203
 91. В. А. Артамонов. Проективные метабелевы группы и алгебры Ли. Изв. АН СССР. Сер. матем., 42:2 (1978), 226-236
 92. В. А. Артамонов. Решетки многообразий линейных алгебр. Успехи матем. наук, 33:2(200) (1978), 135-167
 93. В. А. Артамонов. Проективные метабелевы группы и алгебры Ли. Успехи матем. наук, 32:3(195) (1977), 166
 94. V. A. Artamonov. The categories of free metabelian groups and Lie algebras. Comment. Math. Univ. Carolinae, 18:1(1977), 143-159
 95. В. А. Артамонов. Об алгебрах без собственных подалгебр. Матем. сб., 104(146):3(11) (1977), 428-459
 96. V. A. Artamonov. On finite algebras of prime dimension without subalgebras. Journal of Algebra, 42:1(1976), 247-260
 97. В. А. Артамонов. Универсальные алгебры. Итоги науки и техн. Сер. Алгебра. Топол. Геом., 14 (1976), 191-248
 98. V. A. Artamonov. Projective metabelian nonfree groups. Bulletin of the Australian Mathematical Society, 13:1(1975), 101-115
 99. В. А. Артамонов. О многообразиях ограниченных алгебр Ли. Сиб. матем. ж., 15:6(1974), 1197-1212
 100. В. А. Артамонов. Орбиты группы $\mathbf{GL}(r, k[X_1, \dots, X_n])$. Изв. АН СССР. Сер. матем., 38:3 (1974), 484-494
 101. В. А. Артамонов. Цепные многообразия линейных алгебр. Тр. ММО, 29 (1973), 51-78
 102. В. А. Артамонов. Проективные метабелевы алгебры Ли конечного ранга. Изв. АН СССР. Сер. матем., 36:3 (1972), 510-522
 103. М. С. Бургин, В. А. Артамонов. Некоторые свойства подалгебр в многообразиях линейных Ω -алгебр Матем. сб., 87(129):1 (1972), 67-82
 104. В. А. Артамонов. Полупростые многообразия мультиоператорных алгебр, II. Изв. вузов. Матем., 1971, № 12, 15-21
 105. В. А. Артамонов. Полупростые многообразия мультиоператорных алгебр, I. Изв. вузов. Матем., 1971, № 11, 3-10
 106. В. А. Артамонов. Свободные n -группы. Матем. заметки, 8:4 (1970), 499-507
 107. В. А. Артамонов. Допустимые подгруппы Γ -свободной группы. Сиб. матем. журнал, 11:6(1970), 1203-1214

108. В. А. Артамонов. Клоны полилинейных операций и мультиоператорные алгебры. Успехи матем. наук, 24:1(145) (1969), 47–59
109. В. А. Артамонов. Изоморфизмы свободных разложений Γ -операторных групп с регулярной группой операторов Γ . Матем. заметки, 4:3 (1968), 355–360
110. В. А. Артамонов. Допустимые подгруппы свободного произведения Γ -операторных групп с регулярной группой операторов Γ . Матем. сб., 76(118):4 (1968), 605–619

Получено 4.10.2016 г.

Принято в печать 12.12.2016 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 17 Выпуск 4

УДК 51(092)

DOI 10.22405/2226-8383-2016-17-4-203-210

ВАСИЛИЙ ИВАНОВИЧ БЕРНИК (К СЕМИДЕСЯТИЛЕТИЮ)

Ю. В. Нестеренко (г. Москва), В. А. Быковский (г. Хабаровск), В. М. Бухштабер,
В. Г. Чирский, В. Н. Чубариков (г. Москва), А. Лауринчикас (г. Вильнюс),
Н. М. Добровольский (г. Тула), Н. В. Бударина (г. Дублин),
И. В. Гайшун, В. В. Бересневич, Д. В. Васильев (г. Минск)

Аннотация

Данная работа посвящена семидесятилетию доктора физико-математических наук, профессора Василия Ивановича Берника. В ней приводятся биографические данные, краткий анализ его научных работ и педагогической и организационной деятельности. В работу включён список из 80 основных научных работ В. И. Берника.

Ключевые слова: слова

Библиография: 80 названий.

VASILY IVANOVICH BERNIK (ON HIS SEVENTIETH)

Yu. V. Nesterenko (Moscow), V. A. Bykovskii (Khabarovsk), V. M. Buchstaber,
V. G. Chirsky, V. N. Chubarikov (Moscow), A. Laurinchikas (Vilnius),
N. M. Dobrovolsky (Tula), N. V. Budarina (Dublin),
I. V. Gaishun, V. V. Beresnevich, D. V. Vasiliev (Minsk)

Abstract

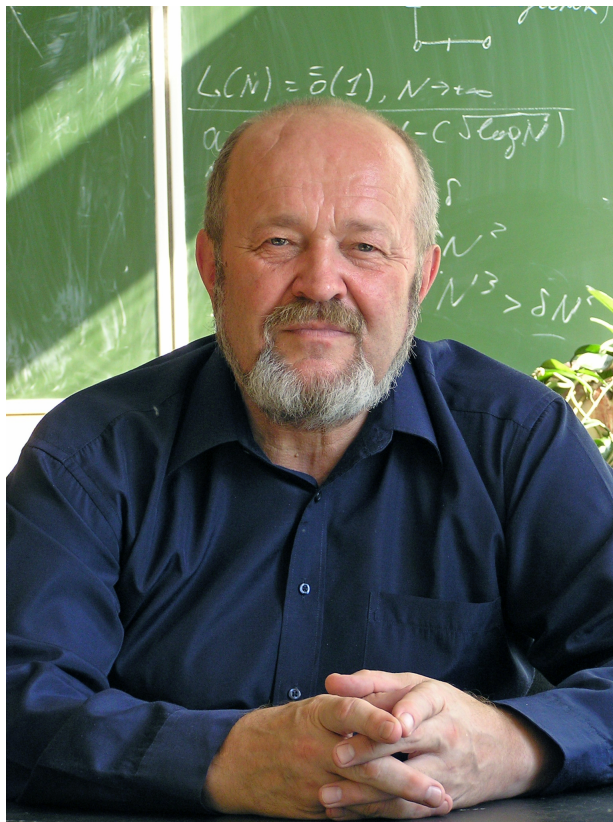
This work is devoted to the seventieth Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor Vasily Ivanovich Bernik. In her curriculum vitae, a brief analysis of his scientific work and educational and organizational activities. The work included a list of 80 major scientific works of V.I. Bernik.

Keywords: words

Bibliography: 80 titles.

Василий Иванович Берник родился 9 января 1947 года в деревне Слобода-Пырашевская Узденского района Минской области в семье учителей. В 1953 году семья переехала в город Узда, где он в 1965 году закончил с золотой медалью среднюю школу №2 имени А. С. Пушкина. В период с 1965 года по 1970 год учился на математическом факультете Белорусского государственного университета и закончил его с отличием. В школе играл в шашки и шахматы за команду Минской области и получал дипломы на республиканской олимпиаде школьников по математике.

В 1967 году, будучи студентом второго курса, начал посещать спецкурсы молодого доктора физико-математических наук Владимира Геннадьевича Спринджук. Дипломная работа В. И. Берника опубликована в двух журнальных публикациях [1, 2]. Защитил в 1973 году кандидатскую диссертацию „К метрической теории диофантовых приближений зависимых



величин“, а в 1986 году докторскую диссертацию „Метрическая теория диофантовых приближений зависимых величин и размерность Хаусдорфа“. В кандидатской диссертации доказал аналог теоремы А. Я. Хинчина в случае расходимости ряда, а в докторской диссертации решил проблему Бейкера-Шмидта, найдя точное значение размерности Хаусдорфа множества действительных чисел, для которых неравенство

$$|P(x)| < H^{-w}, \quad w > n$$

имеет бесконечное число решений в целочисленных многочленах степени n и высоты H .

С 1975 по 2005 годы был председателем жюри республиканской школьной олимпиады по математике, а с 1984 по 1992 год был членом жюри всесоюзной школьной олимпиады по математике (председателем жюри в те годы был Ю. В. Нестеренко). Член редколлегии журнала „Квант“.

В. И. Берник автор — более чем 120 журнальных статей по математике и школьному математическому образованию. Кратко остановимся на некоторых из них.

Обозначим через μA меру Лебега измеримого множества $A \subset \mathbb{R}$. Пусть $L_n(\psi)$ — множество точек x некоторого интервала $I \subset \mathbb{R}$, для которых неравенство

$$|P(x)| < H^{-n+1}\psi(H) \tag{1}$$

при монотонно убывающей функции $\psi(x)$ имеет бесконечное число решений в целочисленных многочленах P степени n и высоты H . Тогда

$$\mu L_n(\psi) = \begin{cases} 0, & \sum_{H=1}^{\infty} \psi(H) < \infty, \\ \mu I, & \sum_{H=1}^{\infty} \psi(H) = \infty. \end{cases} \tag{2}$$

утверждение о сходимости ряда в (2) доказано В. И. Берником, а о расходимости его учеником В. В. Бересневичем.

В 2000–2002 годах они вместе с Д. Клейнбоком и Г. Маргулисом обобщили результат (2), заменив многочлен на невырожденную кривую $G \in \mathbb{R}^n$, не лежащую целиком в $\mathbb{R}^l$, $1 \leq l < n$. В работе [39] В. И. Берник решил проблему В. Г. Спринджук, рассмотрев неравенство (1) в случае совместных приближений при $x = (x_1, \dots, x_k)$. Еще более общие задачи решены в работах [40], в которых рассмотрены совместные приближения в пространстве действительных, комплексных и p -адических чисел.

За последние 10 лет В. И. Берник вместе с соавторами решил несколько проблем, связанных с распределением алгебраических чисел [56], их дискриминантов и результатов, а также о величине расстояния между сопряженными алгебраическими числами [78]. С полученными результатами он выступал с пленарными докладами более, чем на 20 международных конференциях.

Многие статьи написаны В. И. Берником в соавторстве с учениками. Среди его учеников более 25 кандидатов наук и 3 доктора наук. В 2004 году он вместе с В. В. Бересневичем получил Государственную премию республики Беларусь в области науки и техники за цикл работ „Метрическая теория диофантовых приближений зависимых величин и ее применение“.

Отдел теории чисел Института математики НАН Беларуси, которым руководил В. И. Берник, одним из первых в республике начал работу в области криптографии.

В Минске в 1989, 1996, 2003, 2007 и 2011 годах проходили международные конференции по теории чисел, председателем Оргкомитета которых был В. И. Берник.

Берник — широкой души человек. Всем хорошо известна его забота и боль о научной молодежи. Он помогает не только научным советом, но и еще как хороший администратор, помогает и направляет по жизни.

Берник — большой любитель спорта, да и он сам имеет, по крайней мере, третий спортивный разряд в не менее 25 спортивных дисциплинах, от легкой атлетики до шахмат. Он полон историй о спорте, знает спортивные результаты нескольких десятилетий. Походы в горы — это отдельная, красивая страница его жизни.

Берник выступал с докладами в университетах более 20 стран.

Берник укрепил установившуюся связь между Минской и Вильнюсской школой теории чисел.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bernik, V. I. An analogue of Hincin's theorem in the metric theory of Diophantine approximations of dependent variables. I. (Russian) Vesci Akad. Navuk BSSR Ser. Fiz.-Mat. Navuk 1977, no. 6, 44–49, 141.
2. Bernik, V. I. Induced extremal surfaces. (Russian) Mat. Sb. (N.S.) 103(145) (1977), no. 4, 480–489, 630.
3. Bernik, V. I. The Baker-Schmidt conjecture. (Russian) Dokl. Akad. Nauk BSSR 23 (1979), no. 5, 392–395, 475.
4. Bernik, V. I. The exact order of approximation of almost all points of a parabola. (Russian) Mat. Zametki 26 (1979), no. 5, 657–665, 813.
5. Bernik, V. I. A metric theorem on the simultaneous approximation of zero by values of integer polynomials. (Russian) Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 44 (1980), no. 1, 24–45, 238.

6. Bernik, V. I., Ptasnik, B. I. A boundary value problem for a system of partial differential equations with constant coefficients. (Russian) *Differentsial'nye Uravneniya* 16 (1980), no. 2, 273–279, 381.
7. Bernik, V. I. Application of the Hausdorff dimension in the theory of Diophantine approximations. (Russian) *Acta Arith.* 42 (1983), no. 3, 219–253.
8. Bernik, V. I. A proof of Baker's conjecture in the metric theory of transcendental numbers. (Russian) *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 277 (1984), no. 5, 1036–1039.
9. Bernik, V. I. A property of integer polynomials that realize Minkowski's theorem on linear forms. (Russian) *Dokl. Akad. Nauk BSSR* 30 (1986), no. 5, 403–405, 477.
10. Bernik, V. I., Morotskaya, I. L. Diophantine approximations in $\mathbb{Q}_p$ and Hausdorff dimension. (Russian) *Vesti Akad. Navuk BSSR Ser. Fiz.-Mat. Navuk* 1986, no. 3, 3–9, 123.
11. MR0958341 Bernik, V. I., Mel'nychuk, Yu. V. *Diofantovy priblizheniya i razmernost' Khausdorfa*. (Russian) [Diophantine approximations and Hausdorff dimension] “Nauka i Tekhnika”, Minsk, 1988. 144 pp. ISBN: 5-343-00231-5
12. Bernik, V. I. Applications of measure theory and Hausdorff dimension to the theory of Diophantine approximation. New advances in transcendence theory (Durham, 1986), 25–36, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1988.
13. Bernik, V. I. Diophantine approximations on differentiable manifolds. (Russian) *Dokl. Akad. Nauk BSSR* 33 (1989), no. 8, 681–683, 762.
14. Bernik, V. I. The exact order of approximating zero by values of integral polynomials. (Russian) *Acta Arith.* 53 (1989), no. 1, 17–28.
15. Bernik, V. I., Kovalevskaya, E. I. Extremal two-dimensional surfaces in a four-dimensional Euclidean space. (Russian) *Acta Arith.* 53 (1990), no. 4, 333–349.
16. Bernik, V. I., Kovalevskaya, E. I. Two-dimensional extremal surfaces with simultaneously extremal partial derivatives. (Russian) *Mat. Zametki* 50 (1991), no. 2, 14–19, 160; translation in *Math. Notes* 50 (1991), no. 1-2, 779–783 (1992)
17. Bernik, V. I., Pereverseva, N. A. The method of trigonometric sums and lower estimates of Hausdorff dimension. New trends in probability and statistics, Vol. 2 (Palanga, 1991), 75–81, VSP, Utrecht, 1992.
18. Bernik, V. I., Dombrovskii, I. V. U_3 -numbers on curves in $\mathbb{R}^2$. (Russian) *Vesti Akad. Navuk Belarusi Ser. Fiz. Mat. Navuk* 1992, no. 3-4, 3–7, 123.
19. Bernik, V. I., Tishchenko, K. I. Integral polynomials with an overflow of the coefficient values and Wirsing's theorem. (Russian) *Dokl. Akad. Nauk Belarusi* 37 (1993), no. 5, 9–11, 121 (1994).
20. Bernik, V. I. Diophantine approximations and sets of divergence of some Fourier series. (Russian) *Dokl. Akad. Nauk* 336 (1994), no. 2, 151–153; translation in *Russian Acad. Sci. Dokl. Math.* 49 (1994), no. 3, 471–473
21. Beresnevich, V. V., Bernik, V. I. Extremal smooth curves in three-dimensional Euclidean space. (Russian) *Dokl. Akad. Nauk Belarusi* 38 (1994), no. 3, 9–12, 122.

22. Bernik, V. I., Dombrovskii, I. R. Effective estimates for the measure of sets defined by Diophantine conditions. (Russian) *Trudy Mat. Inst. Steklov.* 207 (1994), 35–41; translation in *Proc. Steklov Inst. Math.* 1995, no. 6 (207), 35–40
23. Beresnevich, V., Bernik, V. On a metrical theorem of W. Schmidt. *Acta Arith.* 75 (1996), no. 3, 219–233.
24. Bernik, V. I., Marozava, I. M. R. Baker's conjecture and regular sets of algebraic numbers with a restriction on the value of the derivative. (Belorussian) *Vestsi Akad. Navuk Belarusi Ser. Fiz.-Mat. Navuk* 1996, no. 3, 109–113, 133.
25. Bernik, V. I., Dodson, M. The exact order of zero approximation by values of integral polynomials of a complex variable. (Belorussian) *Dokl. Akad. Nauk Belarusi* 40 (1996), no. 3, 10–13, 122.
26. Bernik, V. I., Borbat, V. N. Joint approximation of zero by values of integer-valued polynomials. (Russian) *Tr. Mat. Inst. Steklova* 218 (1997), *Anal. Teor. Chisel i Prilozh.*, 58–73; translation in *Proc. Steklov Inst. Math.* 1997, no. 3 (218), 53–68
27. Bernik, V. I., Dickinson, H., Dodson, M. M. A Khintchine-type version of Schmidt's theorem for planar curves. *R. Soc. Lond. Proc. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.* 454 (1998), no. 1968, 179–185.
28. Bernik, V. I., Dykinsan, Kh., Dodson, M. Approximation of real numbers by values of integer polynomials. (Belorussian) *Dokl. Nats. Akad. Nauk Belarusi* 42 (1998), no. 4, 51–54, 123.
29. Bernik, V. I., Kovalevskaya, E. I. The distribution of rational points close to a smooth manifold and Hausdorff dimension. *Proceedings of the 13th Czech and Slovak International Conference on Number Theory (Ostravice, 1997)*. *Acta Math. Inform. Univ. Ostraviensis* 6 (1998), no. 1, 31–35.
30. Bernik, V., Dickinson, H., Yuan, J. Inhomogeneous Diophantine approximation on polynomials in $\mathbb{Q}_p$. *Acta Arith.* 90 (1999), no. 1, 37–48.
31. Bernik, V. I., Vasil'ev, D. V. A Khinchin-type theorem for integer-valued polynomials of a complex variable. (Russian) *Proceedings of the Institute of Mathematics*, Vol. 3 (Russian), 10–20, *Tr. Inst. Mat. (Minsk)*, 3, *Natl. Akad. Nauk Belarusi, Inst. Mat., Minsk*, 1999.
32. Bernik, V. I., Dodson, M. M. *Metric Diophantine approximation on manifolds*. *Cambridge Tracts in Mathematics*, 137. Cambridge University Press, Cambridge, 1999. xii+172 pp. ISBN: 0-521-43275-8
33. Bernik, V. I., Dodson, M. M. *Metric theory of Diophantine approximation in the field of complex numbers*. *Number theory and its applications (Kyoto, 1997)*, 51–58, *Dev. Math.*, 2, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1999.
34. Bernik, V. I. On the exact order of approximation of plane points by points with algebraic coordinates. (Russian) *Dokl. Nats. Akad. Nauk Belarusi* 43 (1999), no. 6, 22–25, 123–124.
35. Beresnevich, V. V., Bernik, V. I., Dickinson, H., Dodson, M. M. The Khintchine-Groshev theorem for planar curves. *R. Soc. Lond. Proc. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.* 455 (1999), no. 1988, 3053–3063.
36. Beresnevich, V., Bernik, V. A. Baker's conjecture and Hausdorff dimension. Dedicated to Professor Kalman Gyory on the occasion of his 60th birthday. *Publ. Math. Debrecen* 56 (2000), no. 3-4, 263–269.

37. Berasnevich, V. V., Bernik, V. I., Dykinsan, Kh., Dodsan, M. On linear manifolds for which the Khinchin approximation theorem holds. (Belorussian) *Vestsi Nats. Akad. Navuk Belarusi Ser. Fiz.-Mat. Navuk* 2000, no. 2, 14–17, 139.
38. Bernik, V., Kleinbock, D., Margulis, G. A. Khintchine-type theorems on manifolds: the convergence case for standard and multiplicative versions. *Internat. Math. Res. Notices* 2001, no. 9, 453–486.
39. Bernik, V. I. Upper bounds for the measure of real numbers with a given finite order of approximation. (Russian) *Dokl. Nats. Akad. Nauk Belarusi* 45 (2001), no. 3, 15–17, 123.
40. Beresnevich, V. V., Bernik, V. I., Kleinbock, D. Y., Margulis, G. A. Metric Diophantine approximation: the Khintchine-Groshev theorem for nondegenerate manifolds. Dedicated to Yuri I. Manin on the occasion of his 65th birthday. *Mosc. Math. J.* 2 (2002), no. 2, 203–225.
41. Beresnevich, V. V., Bernik, V. I. Diophantine approximation on classical curves and Hausdorff dimension. *Analytic and probabilistic methods in number theory* (Palanga, 2001), 20–27, TEV, Vilnius, 2002.
42. Beresnevich, V. V., Bernik, V. I., Dodson, M. M. Regular systems, ubiquity and Diophantine approximation. *A panorama of number theory or the view from Baker's garden* (Zurich, 1999), 260–279, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2002.
43. Beresnevich, V. V., Bernik, V. I., Dodson, M. M. On the Hausdorff dimension of sets of well-approximable points on nondegenerate curves. (Russian) *Dokl. Nats. Akad. Nauk Belarusi* 46 (2002), no. 6, 18–20, 124.
44. Bernik, V. I., Vasil'ev, D. V., Dolson, M. M. Metric theorems on the approximation of real numbers by algebraic numbers of a special type. (Russian) *Dokl. Nats. Akad. Nauk Belarusi* 46 (2002), no. 3, 60–63, 125.
45. Bernik, V. I. The Khinchin transference principle and lower bounds for the number of rational points near smooth manifolds. (Russian) *Dokl. Nats. Akad. Nauk Belarusi* 47 (2003), no. 2, 26–28.
46. Bernik, V. I., Kalosha, N. I. Approximation of zero by values of integral polynomials in the space $\mathbb{R}^n$. (Russian) *Vestsi Nats. Akad. Navuk Belarusi Ser. Fiz.-Mat. Navuk* 2004, no. 1, 121–123.
47. Beresnevich, V. V., Bernik, V. I., Kovalevskaya, E. I. On approximation of p -adic numbers by p -adic algebraic numbers. *J. Number Theory* 111 (2005), no. 1, 33–56.
48. Bernik, V. I., Kukso, O. S. Polynomials with small discriminants and regular systems of real algebraic numbers. (Russian) *Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI)* 322 (2005), *Trudy po Teorii Chisel*, 10–16, 251; translation in *J. Math. Sci. (N. Y.)* 137 (2006), no. 2, 4612–4616.
49. Lebedev, V. V., Bernik, V. I. Algebraic points on the plane. (Russian) *Fundam. Prikl. Mat.* 11 (2005), no. 6, 73–80; translation in *J. Math. Sci. (N. Y.)* 146 (2007), no. 2, 5680–5685.
50. Bernik, V. I., Vasil'ev, D. V. Diophantine approximations on complex manifolds in the case of convergence. (Russian) *Vestsi Nats. Akad. Navuk Belarusi Ser. Fiz.-Mat. Navuk* 2006, no. 1, 113–115, 128.

51. Shamukova, N. V., Bernik, V. I. Approximation of real numbers by integer algebraic numbers, and the Khinchin theorem. (Russian) *Dokl. Nats. Akad. Nauk Belarusi* 50 (2006), no. 3, 30–32, 125.
52. Kovalevskaya, Ella, Bernik, Vasily . Simultaneous inhomogeneous Diophantine approximation of the values of integral polynomials with respect to Archimedean and non-Archimedean valuations. *Acta Math. Univ. Ostrav.* 14 (2006), no. 1, 37–42.
53. Budarina, N. V., Dickinson, Kh., Bernik, V. I. Khinchin's theorem and simultaneous approximations of zero by values of integer polynomials in $\mathbb{R}^n/\mathbb{C}$. (Russian) *Vestsi Nats. Akad. Navuk Belarusi Ser. Fiz.-Mat. Navuk* 2007, no. 2, 48–52, 125.
54. Bernik, V. I., Kalosha, N. I. Benford's law and the approximation of logarithms of natural numbers by rational numbers. (Russian) *Vestsi Nats. Akad. Navuk Belarusi Ser. Fiz.-Mat. Navuk* 2007, no. 3, 68–73, 127.
55. Budarina, N. V., Dickinson, Kh., Bernik, V. I. Khinchin's theorem and the approximation of zero by values of integer polynomials in different metrics. (Russian) *Dokl. Akad. Nauk* 413 (2007), no. 2, 151–153; translation in *Dokl. Math.* 75 (2007), no. 2, 201–203.
56. Bernik, V., Gotze, F., Kukso, O. Bad-approximable points and distribution of discriminants of the product of linear integer polynomials. *Chebyshevskii Sb.* 8 (2007), no. 2, 140–147.
57. Bernik, V., Budarina, N., Dickinson, D. A divergent Khintchine theorem in the real, complex, and p -adic fields. *Lith. Math. J.* 48 (2008), no. 2, 158–173.
58. Bernik, Vasily, Gotze, Friedrich, Kukso, Olga . Lower bounds for the number of integral polynomials with given order of discriminants. *Acta Arith.* 133 (2008), no. 4, 375–390.
59. Bernik, V., Gotze, F., Kukso, O. On the divisibility of the discriminant of an integral polynomial by prime powers. *Lith. Math. J.* 48 (2008), no. 4, 380–396.
60. Kukso, O. S., Bernik, V. I. A connection between the value of a discriminant and the behavior of a polynomial in a neighborhood of a root. (Russian) *Dokl. Nats. Akad. Nauk Belarusi* 52 (2008), no. 2, 23–25, 124.
61. Beresnevich, Victor, Bernik, Vasily, Dodson, Maurice, Velani, Sanju. Classical metric Diophantine approximation revisited. *Analytic number theory*, 38–61, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2009.
62. Bernik, Vasilii, Kukso, Olga . On the relation between values of integer polynomials, their derivatives and metric theory of Diophantine approximations. *Siauliai Math. Semin.* 4(12) (2009), 7–19.
63. Kalugina, M. A., Bernik, V. I. Lower bounds for the number of rational points near plane curves. (Russian) *Dokl. Nats. Akad. Nauk Belarusi* 53 (2009), no. 5, 32–35, 124.
64. Piryutko, E. V., Bernik, V. I. The Hensel lemma and approximations of p -adic numbers by algebraic numbers. (Russian) *Vestsi Nats. Akad. Navuk Belarusi Ser. Fiz.-Mat. Navuk* 2009, no. 4, 50–53, 126.
65. Budarina, Natalia, Dickinson, Detta, Bernik, Vasily . Simultaneous Diophantine approximation in the real, complex and p -adic fields. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 149 (2010), no. 2, 193–216.

66. Beresnevich, Victor, Bernik, Vasili, Gotze, Friedrich . The distribution of close conjugate algebraic numbers. *Compos. Math.* 146 (2010), no. 5, 1165–1179.
67. Beresnevich, V. V., Bernik, V. I., Gettse, F. Simultaneous approximations of zero by an integral polynomial, its derivative, and small values of discriminants. (Russian) *Dokl. Nats. Akad. Nauk Belarusi* 54 (2010), no. 2, 26–28, 125.
68. Beresnevich, V. V., Bernik, V. I., Getse, F. On the distribution of the values of the resultants of integral polynomials. (Russian) *Dokl. Nats. Akad. Nauk Belarusi* 54 (2010), no. 5, 21–23, 125.
69. Budarina, N. V., Bernik, V. I., O'Donnel, Kh. Conditions under which the closest root to an argument of an integral polynomial is a real number. (Russian) *Vesti Nats. Akad. Navuk Belarusi Ser. Fiz.-Mat. Navuk* 2011, no. 1, 118–119, 128.
70. Bernik, V. I., Koleda, D. V. Dependence of the resultant value of integral polynomials on their derivatives. (Russian) *Vesti Nats. Akad. Navuk Belarusi Ser. Fiz.-Mat. Navuk* 2011, no. 3, 10–14, 125.
71. Budarina, N. V., Dickinson, D., Bernik, V. I. On real and complex roots of integer polynomials in a neighborhood of their small values. (Russian) *Dokl. Nats. Akad. Nauk Belarusi* 55 (2011), no. 5, 18–21, 123..
72. Bernik, Vasili, Gotze, Friedrich, Kukso, Olga . Regular systems of real algebraic numbers of third degree in small intervals. *Analytic and probabilistic methods in number theory*, 61–68, TEV, Vilnius, 2012.
73. Bernik, Vasili, Budarina, Natalia . On arithmetic properties of integral polynomials with small values on the interval. *Siauliai Math. Semin.* 8(16) (2013), 27–36.
74. Bernik, V., Beresnevich, V., Gotze, F., Kukso, O. Distribution of algebraic numbers and metric theory of Diophantine approximation. Limit theorems in probability, statistics and number theory, 23–48, *Springer Proc. Math. Stat.*, 42, Springer, Heidelberg, 2013.
75. Bernik, V. I., Budarina, N., O'Donnell, H. On regular systems of real algebraic numbers of third degree in short intervals. *Proc. Steklov Inst. Math.* 282 (2013), suppl. 1, S54–S66.
76. Bernik, Vasili, Gotze, Friedrich, Kukso, Olga . On algebraic points in the plane near smooth curves. *Lith. Math. J.* 54 (2014), no. 3, 231–251.
77. Bernik, V. I., Gettse, F. Distribution of real algebraic numbers of arbitrary degree in short intervals. (Russian) *Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat.* 79 (2015), no. 1, 21–42; translation in *Izv. Math.* 79 (2015), no. 1, 18–39.
78. Bernik, V., Gotze, F. A new connection between metric theory of Diophantine approximations and distribution of algebraic numbers. *Recent trends in ergodic theory and dynamical systems*, 33–45, *Contemp. Math.*, 631, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2015.
79. Budarina, N. V., Bernik, V. I., O'Donnell, Kh. How do the discriminants of integer polynomials depend on the mutual distribution of roots? (Russian) *Chebyshevskii Sb.* 16 (2015), no. 1(53), 153–162.
80. Budarina, N. V., Dickinson, D., Bernik, V. I. Upper bounds for the number of integer polynomials with given discriminants. (Russian) *Tr. Inst. Mat.* 23 (2015), no. 2, 29–36.

Получено 9.11.2016 г.

Принято в печать 12.12.2016 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 17. Выпуск 4.

DOI 10.22405/2226-8383-2016-17-4-211-221

**НЕСТЕРЕНКО ЮРИЙ ВАЛЕНТИНОВИЧ
(К 70-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ)
NESTERENKO YURI VALENTINOVICH
(70 ANNIVERSARY OF YU. V. NESTERENKO)**

В. И. Берник, В. А. Быковский, А. И. Галочкин, Н. М. Добровольский,
А. В. Жмулёва, В. Х. Салихов, В. Г. Чирский, В. Н. Чубариков



Заведующий кафедры теории чисел, механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова, г. Москва, с 2003 г., член-корреспондент РАН с 2000 г., доктор физико-математических наук с 1986 г. профессор с 1992 г., Заслуженный профессор МГУ с 2013 г., лауреат премии имени А. А. Маркова РАН 2006 г., международных премий А. Островского 1997 г., общества Харди-Рамануджана 1997 г., и Александра фон Гумбольдта 2003 г. Ю. В. Нестеренко родился 05.12.1946 г. в г. Харькове в семье служащих. Мать Меркулова Нина Григорьевна (1918–2000) и отчим Забуга Алексей Николаевич (1913–1974) — инженеры по образованию работали в промышленности. Отчим впоследствии преподавал в Харьковском станко-инструментальном техникуме. По окончании в 1964 г. школы с серебряной медалью, Ю. В. Нестеренко поступил учиться на механико-математический факультет МГУ. Закончив его в 1969 г. с отличием, поступает в аспирантуру к проф. А. Б. Шидловскому. В 1973 г. по окончании аспирантуры он защищает кандидатскую диссертацию на тему "О некоторых свойствах решений линейных дифференциальных уравнений и их приложениях в теории трансцендентных чисел". Ю. В. Нестеренко работает на механико-математическом факультете МГУ с 1972 года в должности ассистента, с 1976 года — в должности доцента, с

1992 года — в должности профессора. В 1986 году он защитил докторскую диссертацию "Об алгебраической независимости значений аналитических функций".

Ю. В. Нестеренко — известный специалист в области теории чисел, автор более 100 научных, научно-популярных и методических работ, в том числе 3 монографий и 3 учебников по различным разделам теории чисел, а также 5 книг по элементарной математике для школьников (в соавторстве).

В 1980-е годы Ю. В. Нестеренко разработал новый метод доказательства алгебраической независимости значений аналитических функций, основанный на использовании в теории трансцендентных чисел идей коммутативной алгебры. С помощью этого метода доказаны наилучшие в настоящее время оценки степени трансцендентности полей, порожденных значениями экспоненциальной и эллиптической функций, установлены неулучшаемые оценки меры алгебраической независимости значений эллиптических функций и функций, удовлетворяющих специальным функциональным уравнениям. Метод оказался применимым и в p -адической области, где Ю. В. Нестеренко также получил ряд наилучших в настоящее время результатов, например, об оценках степени трансцендентности полей, порожденных значениями p -адической экспоненциальной функции. Применение этих идей в работах ряда российских и зарубежных математиков определило существенный прогресс в развитии теории трансцендентных чисел в последние 30 лет.

В 1996 г. Ю. В. Нестеренко удалось доказать общую теорему о степени трансцендентности полей, порожденных значениями модулярных функций и с ее помощью существенно расширить наши знания об арифметической природе ряда классических постоянных. При этом получилось решение одной из старых и труднейших проблем теории трансцендентных чисел об алгебраической независимости чисел π и e^π . Последнее утверждение имело множество следствий. Например, так впервые была доказана иррациональность числа $\pi/\ln \pi$, а также трансцендентность суммы ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} = \frac{1}{2} \left(1 + \pi \cdot \frac{e^{2\pi}+1}{e^{2\pi}-1}\right)$. Еще одним следствием указанной теоремы является трансцендентность значений тета-функций Якоби в алгебраических точках. Этот вопрос оставался открытым с 1851 года, когда Лиувиль доказал иррациональность таких значений в рациональных точках специального вида.

Ю. В. Нестеренко обнаружил важность для исследования задач теории трансцендентных чисел оценок кратностей нулей полиномов от решений алгебраических дифференциальных уравнений. Им установлены неулучшаемые оценки такого рода, имевшие ряд важных теоретико-числовых приложений, в частности, для решения упомянутых выше проблем. Этими работами было сформировано новое направление исследований, получившее интенсивное развитие в работах ряда российских и зарубежных математиков.

Серия работ Ю. В. Нестеренко посвящена исследованиям арифметических свойств значений гипергеометрических функций, в частности, полилогарифмов и, как следствие, значений в целых точках дзета-функции Римана. Им предложен и исследован ряд общих конструкций совместных диофантовых приближений к таким значениям, обнаружена связь этих чисел со значениями квази-модулярных функций.

Известны результаты Ю. В. Нестеренко по дифференциальной алгебре (разработка методов доказательства алгебраической независимости решений дифференциальных уравнений), метрической теории чисел как в действительной, так и в p -адической областях, результаты в области теории диофантовых приближений. Ю. В. Нестеренко получены эффективные конструкции приближений Эрмита–Паде и разложения в многомерные непрерывные дроби обобщенных гипергеометрических функций, частными случаями которых являются классические конструкции Гаусса, Римана и Гейне.

Ю. В. Нестеренко много лет руководит научными исследованиями важных прикладных задач, связанных с алгоритмическими проблемами теории чисел и применением суперкомпьютерной техники.

Научные результаты Ю. В. Нестеренко получили широкое мировое признание. Они докладывались на многих Всесоюзных, Российских и Международных конференциях по теории чисел. Ю. В. Нестеренко был приглашенным докладчиком на Международном математическом конгрессе 1990 года в Японии. Он выступал с докладами о своих исследованиях на международных конференциях, в научных и учебных организациях России, Польши, Венгрии, Чехословакии, Австрии, Англии, Германии, Голландии, Индии, Испании, Канады, США, Финляндии, Франции, Швейцарии, Японии, бывших республиках СССР.

Ю. В. Нестеренко — опытный и высококвалифицированный преподаватель. В течение многих лет он читает на механико-математическом факультете МГУ основные и специальные курсы по теории чисел, руководит научно-исследовательскими и студенческими семинарами. Под его руководством 13 аспирантов подготовили и защитили кандидатские диссертации, один из них стал доктором наук.

Большое внимание Ю. В. Нестеренко уделяет математическому просвещению школьников. Много лет он руководил подготовкой и проведением Всероссийской и Всесоюзной олимпиад школьников по математике. В течение последних пяти лет он Председатель Ученого Совета СУНЦ МГУ — школы интерната им. А. Н. Колмогорова. Ю. В. Нестеренко входит в состав двух Диссертационных Советов на механико-математическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова и Диссертационного Совета в Математическом институте РАН им. В. А. Стеклова, он член Ученого Совета механико-математического факультета МГУ. Он входит в Редакционные коллегии журналов "Известия РАН, сер. математическая", "Математические вопросы криптографии", "Чебышевский сборник". Он также член Бюро Отделения математических наук РАН.

Список основных работ Ю. В. Нестеренко.

1. Ю. В. Нестеренко, "Об алгебраической независимости значений E -функций, удовлетворяющих линейным неоднородным дифференциальным уравнениям", Матем. заметки, 5:5 (1969), 587–598 Английская версия Yu. V. Nesterenko, "On the algebraic independence of the values of E -functions satisfying nonhomogeneous linear differential equations", Math. Notes, 5:5 (1969), 352–358
2. Ю. В. Нестеренко, "Оценка меры алгебраической независимости значений E -функций с растущими степенью и высотой", УМН, 27:4(166) (1972), 218 Перевод на английский язык Yu. V. Nesterenko, "An estimation of the measure of algebraic independence of the values of E -functions with increasing degree and height", Uspekhi Mat. Nauk, 27:4(166) (1972), 218
3. Ю. В. Нестеренко, "Оценки порядков нулей аналитических функций некоторого класса и их приложения в теории трансцендентных чисел", Доклады Академии наук, 205:2 (1972), 292–295, М., М. Английская версия Yu. V. Nesterenko, "Estimates of the orders of zeros of analytic functions of a certain class and their application to the theory of transcendental numbers", Doklady Mathematics, 13:205 (1972), 938–942, Russian Federation
4. Ю. В. Нестеренко, "Об алгебраической зависимости компонент решений системы линейных дифференциальных уравнений", Изв. АН СССР. Сер. матем., 38:3 (1974), 495–512 Английская версия Yu. V. Nesterenko, "On the algebraic dependence of the components of solutions of a system of linear differential equations", Math. USSR-Izv., 8:3 (1974), 501–518
5. Ю. В. Нестеренко, "Функция порядка для почти всех чисел", Матем. заметки, 15:3 (1974), 405–414 Английская версия Yu. V. Nesterenko, "Order function for almost all numbers", Math. Notes, 15:3 (1974), 234–240

6. А. М. Полосуев, Ю. В. Нестеренко, "Андрей Борисович Шидловский (к 60-летию со дня рождения)", Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика, 30:5 (1975), 114–116, М.
7. Ю. В. Нестеренко, "Оценки порядков нулей функций одного класса и их приложение в теории трансцендентных чисел", Изв. АН СССР. Сер. матем., 41:2 (1977), 253–284 Yu. V. Nesterenko, "Estimates for the orders of zeros of functions of a certain class and applications in the theory of transcendental numbers", Math. USSR-Izv., 11:2 (1977), 239–270
8. Yu. V. Nesterenko, "On the number π and Lindemann's theorem", Comment. Math. Univ. Carolinae, 20 (1979), 335–343
9. Ju. V. Nesterenko, "On the algebraical independence of algebraic numbers to algebraic powers", Diophantine approximations and transcendental numbers, Luminy, 1982, Progr. Math, 31, Birkhauser Boston, Mass, 1983, 199–220
10. Ю. В. Нестеренко, "Об одном достаточном признаке алгебраической независимости чисел", Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика, 1983, 4, 63–68, М.; Yu. V. Nesterenko, "On a sufficient criterion for algebraic independence of numbers", Univ. Math. Bull. Mosk. Univ., Ser. I, 38:4 (1983), 70–76
11. Ю. В. Нестеренко, "Оценки порядков нулей функций некоторого класса", Матем. заметки, 33:2 (1983), 195–205; Yu. V. Nesterenko, "Estimates of orders of zeros of functions of a certain class", Math. Notes, 33:2 (1983), 98–104
12. Ю. В. Нестеренко, Е. М. Никишин, "Очерк о цепных дробях", Квант, 1983, 5, 16–20, 6, 26–30, М.
13. А. И. Галочкин, Ю. В. Нестеренко, А. Б. Шидловский, Введение в теорию чисел, Изд-во МГУ, М., 1984, 147 с.
14. Ю. В. Нестеренко, "О диофантовых приближениях в поле p -адических чисел", Матем. заметки, 35:5 (1984), 653–662; Yu. V. Nesterenko, "Diophantine approximations in the field of pp -adic numbers", Math. Notes, 35:5 (1984), 342–347
15. Ю. В. Нестеренко, "О диофантовых приближениях в поле p -адических чисел", УМН, 39:1(235) (1984), 147–148; Yu. V. Nesterenko, "On diophantine approximations in a field of p -adic numbers", Russian Math. Surveys, 39:1 (1984), 173–174
16. Ю. В. Нестеренко, "О мере алгебраической независимости почти всех пар p -адических чисел", Матем. заметки, 36:3 (1984), 295–304; Yu. V. Nesterenko, "Measure of algebraic independence for almost all pairs of p -adic numbers", Math. Notes, 36:3 (1984), 642–647
17. Ю. В. Нестеренко, "Оценки характеристической функции простого идеала", Матем. сб., 123(165):1 (1984), 11–34; Yu. V. Nesterenko, "Estimates for the characteristic function of a prime ideal", Math. USSR-Sb., 51:1 (1985), 9–32
18. Ю. В. Нестеренко, "Об алгебраической независимости алгебраических степеней алгебраических чисел", Матем. сб., 123(165):4 (1984), 435–459; Yu. V. Nesterenko, "On algebraic independence of algebraic powers of algebraic numbers", Math. USSR-Sb., 51:2 (1985), 429–454
19. Ю. В. Нестеренко, "К теореме о среднем И.М. Виноградова", Тр. ММО, 48, Издательство Московского университета, М., 1985, 97–105; Yu. V. Nesterenko, "On I.M. Vinogradov's mean value theorem", Trans. Mosc. Math. Soc, 1986, 105–113

20. Ю. В. Нестеренко, "О мере алгебраической независимости значений некоторых функций", Матем. сб., 128(170):4(12) (1985), 545-568 ; Yu. V. Nesterenko, "On a measure of the algebraic independence of the values of certain functions", Math. USSR-Sb., 56:2 (1987), 545-567
21. Ю. В. Нестеренко, "О мере алгебраической независимости значений эллиптической функции в алгебраических точках", УМН, 40:4(244) (1985), 221-222 ; Yu. V. Nesterenko, "On the measure of algebraic independence of the values of an elliptic function at algebraic points", Russian Math. Surveys, 40:4 (1985), 237-238
22. Ю. В. Нестеренко, "О мере линейной независимости чисел", Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика, 1985, 1, 46-49 , М. ; Yu. V. Nesterenko, "On the linear independence of numbers", Moscow University Mathematics Bulletin, 40:1 (1985), 69-74
23. Ю. В. Нестеренко, "Об оценке меры алгебраической независимости чисел", Диофантовы приближения, т. 1, ред. П.Л. Ульянов, Издательство МГУ Москва, 1985, 65-77
24. В.В. Вавилов, Ю.В. Нестеренко, "Неравенства (ММО, тренинг)", Препринт МП СССР, 1986, 8, 2-10
25. Ю. В. Нестеренко, "О мере алгебраической независимости значений показательной функции", Доклады Академии наук, 286:4 (1986), 817-821 , М.; Yu. V. Nesterenko, "On a measure of the algebraic independence of the values of the exponential function", Doklady Mathematics, 33:286 (1986), 200-203 , Russian Federation
26. Yu. V. Nesterenko, "Measures of algebraic independence of numbers and functions", Journées arithmétiques de Besançon, Astérisque, 147, Société Mathématique de France Paris, 1987, 141-149
27. Ю. В. Нестеренко, "О числе π ", Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика, 1987, 3, 6-10 , М.
28. Yu. V. Nesterenko, "Effective estimates of the measure of algebraic independence of the values of E -functions", Univ. Math. Bull. Mosk. Univ., Ser. I, 43:1 (1988), 84-87
29. Yu. V. Nesterenko, "Estimates for the number of zeros of certain functions", New advances in transcendence theory, Durham, 1986, Cambridge, Univ. Press Cambridge, 1988, 263-269
30. Ю. В. Нестеренко, "О степени трансцендентности некоторых полей, порожденных значениями экспоненциальной функции", Матем. заметки, 46:3 (1989), 40-49 ; Yu. V. Nesterenko, "Transcendence degree of some fields generated by values of the exponential function", Math. Notes, 46:3 (1989), 706-712
31. С.Н. Олехник, Ю. В. Нестеренко, М.К. Потапов, Старинные занимательные задачи, Венгрия, Будапешт, 1990 , 169 с.
32. Ю. В. Нестеренко, "Оценки числа нулей функций некоторых классов", Acta Arithmetica, 51 (1990), 61-78 , Poland
33. В. И. Арнольд, А. Г. Витушкин, Е. А. Горин, В. Я. Лин, Ю. В. Нестеренко, В. М. Тихомиров, П. Л. Ульянов, А. Б. Шидловский, М. А. Шубин, "Олейников Вячеслав Алексеевич (некролог)", УМН, 45:1(271) (1990), 163-165 ; V. I. Arnol'd, A. G. Vitushkin, E. A. Gorin, V. Ya. Lin, Yu. V. Nesterenko, V. M. Tikhomirov, P. L. Ul'yanov, A. B. Shidlovskii, M. A.

- Shubin, "Vyacheslav Alekseevich Oleinikov (obituary)", Russian Math. Surveys, 45:1 (1990), 191-194
34. Yuri Nesterenko, "Algebraic independence of values of analytic functions", Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Kyoto, 1990), v. I, II, Math. Soc. Japan Tokyo, 1991, 447-457
 35. Yuri V. Nesterenko, "On a measure of algebraic independence of the values of elliptic functions", Diophantine Approximations and Transcendental Numbers (Proceedings of the Colloquim (1990, Luminy, France)), de Gruyter, Berlin, Germany, 1992, 239-248
 36. С.Н. Олехник, Ю.В. Нестеренко, М.К. Потапов, Старинные занимательные задачи, Испания, Бильбао, 1994 , 216 с.
 37. Yu. V. Nesterenko, "Hermite-Padé approximations of the generalized hypergeometric functions", Séminaire de théorie des nombres (Paris, France, 1991-92), Progress in Mathematics, 116, eds. David Sinnou, Birkhäuser Boston, MA, 1994, 191-216
 38. Ю. В. Нестеренко, "Приближения Эрмита-Паде обобщенных гипергеометрических функций", Матем. сб., 185:10 (1994), 39-72 ; Yu. V. Nesterenko, "Hermite-Padé approximants of generalized hypergeometric functions", Russian Acad. Sci. Sb. Math., 83:1 (1995), 189-219
 39. А. И. Галочкин, Ю. В. Нестеренко, А. Б. Шидловский, Введение в теорию чисел, 2-е изд., Издательство МГУ, 1995, ISBN: 5-211-03075-3 , 160 с.
 40. M. Laurent, M. Mignotte, Y. Nesterenko, "Linear forms in two logarithms and interpolation determinants", Journal of Number Theory, 55:2 (1995), 285-321 , United States
 41. Н. М. Коробов, Ю. В. Нестеренко, А. Б. Шидловский, "Наум Ильич Фельдман (некролог)", УМН, 50:6(306) (1995), 157-162 ; N. M. Korobov, Yu. V. Nesterenko, A. B. Shidlovskii, "Naum Il'ich Feld'man (obituary)", Russian Math. Surveys, 50:6 (1995), 1247-1252
 42. О. Б. Лупанов, Ю. В. Нестеренко, С. М. Никольский, М. К. Потапов, В. А. Садовнический, П. Л. Ульянов, "Андрей Борисович Шидловский (к восьмидесятилетию со дня рождения)", УМН, 50:6(306) (1995), 229-232 ; O. B. Lupanov, Yu. V. Nesterenko, S. M. Nikol'skii, M. K. Potapov, V. A. Sadovnichii, P. L. Ul'yanov, "Andrei Borisovich Shidlovskii (on his eightieth birthday)", Russian Math. Surveys, 50:6 (1995), 1329-1333
 43. Ю. В. Нестеренко, "О мере алгебраической независимости значений эллиптической функции", Изв. РАН. Сер. матем., 59:4 (1995), 155-178 ; Yu. V. Nesterenko, "On a measure of algebraic independence of values of an elliptic function", Izv. Math., 59:4 (1995), 815-838
 44. Ю. В. Нестеренко, А. Б. Шидловский, "Памяти Наума Ильича Фельдмана (1918-1994)", Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика, 6 (1995), 108-109 , М.
 45. Yu. V. Nesterenko, "Algebraic independence of π and e^π ", Number theory and its applications (Ankara, 1996), Lecture Notes in Pure and Appl. Math, 204, Dekker New York, United States, 1996, 121-149
 46. Yu. V. Nesterenko, "Modular functions and transcendence problems", Comptes rendus de l'Académie des sciences, Paris, Sér. I, 322 (1996), 909-914
 47. T.N. Shorey, Yu.V. Nesterenko, "Perfect powers in products of integers from a block of consecutive integers II", Acta Arithmetica, 76:2 (1996), 191-198 , Poland

48. С. П. Новиков, А. И. Аптекарев, Е. П. Долженко, В. А. Калягин, В. В. Козлов, Ю. В. Нестеренко, М. К. Потапов, В. Н. Сорокин, П. Л. Ульянов, "Евгений Михайлович Никишин (к пятидесятилетию со дня рождения)", УМН, 51:2(308) (1996), 181-182 ; S. P. Novikov, A. I. Aptekarev, E. P. Dolzhenko, V. A. Kalyagin, V. V. Kozlov, Yu. V. Nesterenko, M. K. Potapov, V. N. Sorokin, P. L. Ul'yanov, "Evgenii Mikhailovich Nikishin (on the fiftieth anniversary of his birth)", Russian Math. Surveys, 51:2 (1996), 361-362
49. Ю. В. Нестеренко, "Модулярные функции и вопросы трансцендентности", Матем. сб., 187:9 (1996), 65-96 ; Yu. V. Nesterenko, "Modular functions and transcendence questions", Sb. Math., 187:9 (1996), 1319-1348
50. Ю. В. Нестеренко, "Некоторые замечания о $\zeta(3)$ ", Матем. заметки, 59:6 (1996), 865-880 ; Yu. V. Nesterenko, "A few remarks on $\zeta(3)$ ", Math. Notes, 59:6 (1996), 625-636
51. Ю. В. Нестеренко, М. Waldschmidt, "О приближении алгебраическими числами значений экспоненциальной функции и логарифма", Диофантовы приближения, Математические записки, 2, Издательство МГУ Москва, 1996, 23-42
52. Ю. В. Нестеренко, А. Б. Шидловский, "О линейной независимости значений E -функций", Матем. сб., 187:8 (1996), 93-108 ; Yu. V. Nesterenko, A. B. Shidlovskii, "Linear independence of values of EE -functions", Sb. Math., 187:8 (1996), 1197-1211
53. Ю. В. Нестеренко, "О мере алгебраической независимости значений функций Рамануджана", Аналитическая теория чисел и приложения, Сборник статей. К 60-летию со дня рождения профессора Анатолия Алексеевича Карацубы, Тр. МИАН, 218, Наука, М., 1997, 299-334 ; Yu. V. Nesterenko, "On the measure of algebraic independence of the values of Ramanujan functions", Proc. Steklov Inst. Math., 218 (1997), 294-331
54. N.I. Feldman, Yu.V. Nesterenko, Transcendental numbers, т. IV, Encyclopaedia Math. Sci., 44, Number theory, Springer, Berlin, 1998, ISBN: 3-540-61467-2 , 345 с.
55. Yu.V. Nesterenko, T.N. Shorey, "On an equation of Goormaghtigh", Acta Arithmetica, 83:4 (1998), 381-389 , Poland
56. Ю. В. Нестеренко, "Алгоритмические проблемы теории чисел", Матем. просв., 2, МЦНМО, М., 1998, 87-114 ; Yu. V. Nesterenko, Mat. Pros., 2, MCCME, М., 1998, 87-114
57. Yu. Nesterenko, "Differential fields and complex differential equations", Function spaces and complex analysis, Joensuu 1997 (Ilomantsi), Univ. Joensuu Dept. Math. Rep., 2, Univ. Joensuu, Joensuu, 1999, 79-106
58. Ю. В. Нестеренко, "Оценки кратностей нулей для тэта-констант", Фундамент. и прикл. матем., 5:2 (1999), 557-562 ; Yu. V. Nesterenko, "Multiplicity estimates for theta constants", Fundam. Prikl. Mat., 5:2 (1999), 557-562
59. Ю. В. Нестеренко, "Об одном тождестве Гильберта", Матем. заметки, 66:4 (1999), 527-532 ; Yu. V. Nesterenko, "On a Hilbert identity", Math. Notes, 66:4 (1999), 431-435
60. Yuri Nesterenko, "Linear forms in logarithms of rational numbers", Diophantine approximation (Cetraro, 2000), Lecture Notes in Mathematics, 1819, Springer Berlin, 2000, 53-106
61. Ю. В. Нестеренко, "Об одном комбинаторном неравенстве", Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика, 2000, 6, 50-52 , М., М. ; Yu. V. Nesterenko, "One combinatorial inequality", Moscow University Mathematics Bulletin, 55:6 (2000), 31-33

62. М.К. Потапов, С.Н. Олехник, Ю.В. Нестеренко, Варианты экзаменационных задач по математике для поступающих в вузы, Дрофа, 2001 , 192 с.
63. Ю.В. Нестеренко, С.Н. Олехник, М.К. Потапов, Конкурсные задачи по математике, Москва, Москва, 2001
64. М.К. Потапов, С.Н. Олехник, Ю.В. Нестеренко, Математика для абитуриентов, Русское слово, 2001 , 350 с.
65. Yuri V. Nesterenko, "Algebraic independence for values of Ramanujan functions", Introduction to algebraic independence theory, Lecture Notes in Mathematics, 1752, Springer Berlin, 2001, 27-46
66. Yu. V. Nesterenko, "Algebraic independence of values of Ramanujan functions", Univ. Math. Bull. Mosk. Univ., Ser. I, 56:2 (2001), 5-9
67. Introduction to algebraic independence theory, Lecture Notes in Mathematics, 1752, eds. Yu. V. Nesterenko, P. Philippon, Springer Berlin, 2001 , 256 pp.
68. Yuri V. Nesterenko, "Multiplicity estimates for solutions of algebraic differential equations", Introduction to algebraic independence theory, Lecture Notes in Mathematics, 1752, Springer Berlin, 2001, 149-165
69. Yu. V. Nesterenko, "On the algebraic independence of numbers", A panorama in number theory or The view from Baker's garden. Based on a conference in honor of Alan Baker's 60th birthday, Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom, 2002, 148-167
70. Ю. В. Нестеренко, "Интегральные тождества и конструкции совместных приближений к значениям дзета-функции Римана", Современные проблемы теории чисел и ее приложения (Труды IV Международной конференции), г.Тула, 2001г., механико-математический факультет МГУ, М., 2002, 115-132
71. Ю. В. Нестеренко, "Частные Ферма и p -адические логарифмы", Тр. по дискр. матем., 5, Физматлит, М., 2002, 173-188 ; Yu. V. Nesterenko, "Fermat quotients and pp -adic logarithms", Tr. Diskr. Mat., 5, Fizmatlit, Moscow, 2002, 173-188
72. Ю. В. Нестеренко, "7-я проблема Гильберта", Математические события XX века, ФАЗИС, Москва, 2003, 335-348
73. Yu.V. Nesterenko, E.M. Nikishin, "Continued fractions", Math. Nachr., Wien, 192 (2003), 22-39
74. Yuri V. Nesterenko, "Integral identities and constructions of approximations to zeta-values", Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux, 15:2 (2003), 535-550
75. Ю. В. Нестеренко, "О доказательстве простоты чисел (следуя М. Агравалу, Н. Кайялу и Н. Саксене)", Развитие криптографии в России и Московский Университет (Труды конференции), МЦНМО Москва, 2003, 85-97
76. М.К. Потапов, С.Н. Олехник, Ю.В. Нестеренко, Математика для поступающих в вузы, АСТ-Астрель, 2004 , 183 с.
77. Ю. В. Нестеренко, "Проверка чисел на простоту", Вопросы кибернетики, 13 (2004), 41-58

78. Ю.В. Нестеренко, Я.Ю. Никитин, "Научная конференция памяти академика Ю.В. Линника", Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия, 2005, 4, 3-6
79. Ю. В. Нестеренко, "Об арифметических свойствах значений тета-констант", Фундамент. и прикл. матем., 11:6 (2005), 95-122 ; Yu. V. Nesterenko, "On arithmetic properties of values of theta-constants", J. Math. Sci., 146:2 (2007), 5697-5716
80. Ю. В. Нестеренко, "Трансцендентные числа", Наукові записки Міжнародного гуманітарного університету - Одесса, 3 (2005), 47-57
81. А.И. Виноградов, Ю.В. Нестеренко, редакторы, "Труды по теории чисел", Труды по теории чисел, Записки научных семинаров ПОМИ, 322, ПОМИ, СПб., 2005, 1-250 ; A. I. Vinogradov, Yu. V. Nesterenko (eds), "Works on number theory", Journal of Mathematical Sciences (New York), 137:2 (2006), 4609-4762
82. Ю. В. Нестеренко, "О проблеме Варинга (элементарные методы)", Труды по теории чисел, Зап. научн. сем. ПОМИ, 322, ПОМИ, СПб., 2005, 149-175 ; Yu. V. Nesterenko, "On Waring's problem (elementary methods)", J. Math. Sci. (N. Y.), 137:2 (2006), 4699-4715
83. М.К. Потапов, Ю.В. Нестеренко, С.Н. Олехник, Задачи на смекалку, Дрофа, М., 2006 , 236 с.
84. М.К. Потапов, Ю.В. Нестеренко, С.Н. Олехник, Старинные занимательные задачи, Дрофа, М., 2006 , 175 с.
85. Yu. V. Nesterenko, "A simple proof of the irrationality of $p\pi$ ", Russian Journal of Mathematical Physics, 13:4 (2006), 473-473 , Russian Federation
86. В. В. Козлов, О. Б. Лупанов, Ю. В. Нестеренко, М. К. Потапов, В. А. Садовничий, П. Л. Ульянов, "Андрей Борисович Шидловский (к 90-летию со дня рождения)", УМН, 61:2(368) (2006), 183-190 ; V. V. Kozlov, O. B. Lupanov, Yu. V. Nesterenko, M. K. Potapov, V. A. Sadovnichii, P. L. Ul'yanov, "Andrei Borisovich Shidlovskii (on his 90th birthday)", Russian Math. Surveys, 61:2 (2006), 379-386
87. Yu. V. Nesterenko, "Hilbert's seventh problem", Mathematical events of the twentieth century, Springer, Berlin, 2006, 269-282
88. Yu. V. Nesterenko, "On some identities for theta-constants", Proceedings of the conference Diophantine analysis and related fields, Seminar on Mathematical Sciences, 35, Keio University, Department of Mathematics Yokohama, Yokohama, Japan, 2006, 151-160
89. Г.И. Архипов, А.И. Галочкин, Г.Я. Галин, А.А. Карацуба, В.Н. Латышев, Т.П. Лукашенко, О.Б. Лупанов, Ю.Н. Макаров, Ю. В. Нестеренко, М.К. Потапов, В.Г. Чирский, В.Н. Чубариков, "Андрей Борисович Шидловский (по случаю 90-летия со дня рождения)", Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика, 2006, 3, 68-70 , М.
90. Ю. В. Нестеренко, "Об одном тождестве Малера", Матем. заметки, 79:1 (2006), 107-119 ; Yu. V. Nesterenko, "On an Identity of Mahler", Math. Notes, 79:1 (2006), 97-108
91. A. I. Galochkin, Yu. V. Nesterenko, V. G. Chirskii, "Andrey Borisovich Shidlovski. (Dedicated to professor Shidlovski on the occasion of his 90th birthday)", Journal of Mathematical Sciences (New York), 146:2 (2007), 5625-5628
92. Ю. В. Нестеренко, Теория чисел, Академия, М., 2008, ISBN: 978-5-7695-4646-4 , 272 с.

93. Yu. V. Nesterenko, "Algebraic independence in the p -adic domain", Diophantine equations, Tata Inst. Fund. Res. Stud. Math., 20, Tata Inst. Fund. Res. Stud. Math., Mumbai, 2008, 177-195
94. Yuri V. Nesterenko, "Construction of approximations to zeta-values", Diophantine approximation, Developments in Mathematics, 16, Wien, Austria, Wien, Austria, 2008, 275-293
95. Ю. В. Нестеренко, "Алгебраическая независимость p -адических чисел", Изв. РАН. Сер. матем., 72:3 (2008), 159-174 ; Yu. V. Nesterenko, "Algebraic independence of p -adic numbers", Izv. Math., 72:3 (2008), 565-579
96. Yu. V. Nesterenko, Algebraic independence, Narosa Publishing House New Delhi, 2009, ISBN: 978-81-7319-984-4 , 162 pp.
97. Ю. В. Нестеренко, "Некоторые замечания в связи с демонстрационной версией задания для ЕГЭ в 2010 году", Математика в школе, 2009, 10, 67-76 , М.
98. Ю. В. Нестеренко, "Церковные календари и пасхалия (математический подход)", Богословские труды, 42 (2009), 318-362 , изд. Московской патриархии
99. Ю. В. Нестеренко, "Диофантовы приближения, церковные календари и пасхалия", Историко-астрономические исследования, 35 (2010), 217-288
100. Ю. В. Нестеренко, "О показателе иррациональности числа $\ln 2$ ", Матем. заметки, 88:4 (2010), 549-564 ; Yu. V. Nesterenko, "On the Irrationality Exponent of the Number $\ln 2$ ", Math. Notes, 88:4 (2010), 530-543
101. Yuri Nesterenko, "Some identities of Ramanujan type", Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory, 1:2 (2011), 89-99
102. Е. А. Гречников, С. В. Михайлов, Ю. В. Нестеренко, И. А. Поповян, Вычислительно сложные задачи теории чисел, Издательство Московского университета Москва, 2012 , 312 с.
103. О. Н. Герман, Ю. В. Нестеренко, Теоретико-числовые методы в криптографии, Издательство Академия Москва, 2012, ISBN: 978-5-7695-6786-5 , 270 с.
104. Yu. V. Nesterenko, "On a criterion of linear independence of p -adic numbers", Manuscripta Mathematica, 139:3-4 (2012), 405-414 , Germany
105. Ф. С. Авдеев, Г. И. Архипов, С. Б. Гашков, Н. М. Добровольский, Б. С. Кашин, И. И. Мельников, М. П. Минеев, Ю. В. Нестеренко, С. М. Никольский, А. Н. Паршин, В. П. Платонов, Ю. В. Прохоров, В. А. Садовничий, А. Т. Фоменко, В. Г. Чирский, "Владимир Николаевич Чубариков (к 60-летию со дня рождения)", УМН, 67:1(403) (2012), 187-191 ; F. S. Avdeev, G. I. Arkhipov, S. B. Gashkov, N. M. Dobrovol'skii, B. S. Kashin, I. I. Mel'nikov, M. P. Mineev, Yu. V. Nesterenko, S. M. Nikol'skii, A. N. Parshin, V. P. Platonov, Yu. V. Prokhorov, V. A. Sadovnichii, A. T. Fomenko, V. G. Chirskii, "Vladimir Nikolaevich Chubarikov (on his 60th birthday)", Russian Math. Surveys, 67:1 (2012), 189-193
106. С. В. Востоков, С. О. Горчинский, А. Б. Жеглов, Ю. Г. Зархин, Ю. В. Нестеренко, Д. О. Орлов, Д. В. Осипов, В. Л. Попов, А. Г. Сергеев, И. Р. Шафаревич, "Алексей Николаевич Паршин (к семидесятилетию со дня рождения)", УМН, 68:1(409) (2013), 201-207 ; S. V. Vostokov, S. O. Gorchinskiy, A. B. Zheglov, Yu. G. Zarkhin, Yu. V. Nesterenko, D. O. Orlov, D. V. Osipov, V. L. Popov, A. G. Sergeev, I. R. Shafarevich, "Aleksi Nikolaevich Parshin (on his 70th birthday)", Russian Math. Surveys, 68:1 (2013), 189-197

107. C. Elsner, Yu. V. Nesterenko, I. Shiokawa, "Algebraic Independence of Values of Exponential Type Power Series," Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory, 3:1-2 (2013), 17-36
108. А. И. Аптекарев, П. А. Бородин, Б. С. Кашин, Ю. В. Нестеренко, П. В. Парамонов, А. В. Покровский, А. Г. Сергеев, А. Т. Фоменко, "Евгений Прокофьевич Долженко (к восьмидесятилетию со дня рождения)", УМН, 69:6(420) (2014), 192-196 ; A. I. Aptekarev, P. A. Borodin, B. S. Kashin, Yu. V. Nesterenko, P. V. Paramonov, A. V. Pokrovskii, A. G. Sergeev, A. T. Fomenko, "Evgenii Prokof'evich Dolzhenko (on his 80th birthday)", Russian Math. Surveys, 69:6 (2014), 1143-1148
109. Н. Н. Андреев, В. М. Бухштабер, А. И. Гарбер, В. В. Козлов, С. П. Коновалов, А. А. Мальцев, Ю. В. Нестеренко, С. П. Новиков, А. Н. Паршин, И. Х. Сабитов, А. Л. Семенов, А. Г. Сергеев, О. К. Шейнман, М. И. Штогрин, Е. В. Щепин, "Николай Петрович Долбиллин (к семидесятилетию со дня рождения)", УМН, 69:1(415) (2014), 187-188 ; N. N. Andreev, V. M. Buchstaber, A. I. Garber, V. V. Kozlov, S. P. Kononov, A. A. Mal'tsev, Yu. V. Nesterenko, S. P. Novikov, A. N. Parshin, I. Kh. Sabitov, A. L. Semenov, A. G. Sergeev, O. K. Sheinman, M. I. Shtogrin, E. V. Shchepin, "Nikolai Petrovich Dolbilin (on his 70th birthday)", Russian Math. Surveys, 69:1 (2014), 181-182
110. Ю. В. Нестеренко, "О вычислении сумм Эйлера", 50 лет школе имени А.Н. Колмогорова, Сборник статей: Математика, т. 1, Азбука-2000, М., 2014, 94-114
111. Ю. В. Нестеренко, "Юлианский календарь", Потенциал, 2015, 4, 25-31, 5, 34-45
112. А. И. Галочкин, Ю. В. Нестеренко, В. Г. Чирский, В. Х. Салихов, "Андрей Борисович Шидловский (13.8.1915-23.03.2007)", Чебышевский сб., 16:3 (2015), 6-34 ; A. I. Galochkin, Yu. V. Nesterenko, V. G. Chirskiy, V. Kh. Salikhov, "Andrei Borisovich Shidlovskii", Chebyshevskii Sb., 16:3 (2015), 6-34
113. Ю. В. Нестеренко, "О постоянной Каталана", Алгебра, геометрия и теория чисел, Сборник статей. К 75-летию со дня рождения академика Владимира Петровича Платонова, Тр. МИАН, 292, МАИК, М., 2016, 159-176 ; Yu. V. Nesterenko, "On Catalan's Constant", Proc. Steklov Inst. Math., 292 (2016), 153-170

Получено 6.11.2016 г.

Принято в печать 12.12.2016 г.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Том 17 Выпуск 4

Беднова Вероника Борисовна — методист первой категории механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова.

e-mail: msu.mmf.vb@gmail.com

Безверхний Владимир Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор, профессор Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого

e-mail: Vnbezv@rambler.ru

Берник Василий Иванович (Белоруссия) — доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Института математики НАН Белоруси

e-mail: bernik@im.bas-net.by

Бессонов Леонид Валентинович — старший преподаватель кафедры математической теории упругости и биомеханики, Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского.

e-mail: lexx@sgu.ru

Бухштабер Виктор Матвеевич — член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича Российской академии наук, Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, University of Manchester.

e-mail: buchstab@mi.ras.ru

Быковский Виктор Алексеевич — доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, заместитель директора Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института прикладной математики Дальневосточного отделения Российской академии наук (ИПМ ДВО РАН) по научной работе, директор Хабаровского отделения ИПМ ДВО РАН

e-mail: vab@iam.khv.ru

Глазунов Николай Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, Национальный Авиационный Университет, Украина.

e-mail: glanm@yahoo.com

Добровольский Николай Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого.

e-mail: dobrovol@tspu.ru

Жмулёва Алевтина Васильевна — кандидат педагогических наук, доцент, профессор Московского педагогического государственного университета.

e-mail: alevtin-z@yandex.ru

Инченко Оксана Владимировна — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа, Тульский государственный университет.

e-mail: inchenko_ov@mail.ru

Качинская Рома Алексовна — доктор физических наук (математика), профессор, факультет технологии, физических и биомедицинских наук, Шяуляйский университет.

e-mail: r.kacinskaite@fm.su.lt

Кожухов Игорь Борисович — доктор физико-математических наук, профессор, Московский институт электронной техники.

e-mail: kozhuhov_i_b@mail.ru

Кузнецов Валентин Николаевич — д.т.н., профессор, зав. кафедрой компьютерной алгебры и теории чисел Саратовского государственного университета им. Н. Г. Чернышевского.

e-mail: KuznetsovVN@info.sgu.ru

Кузнецова Татьяна Александровна — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры компьютерной алгебры и теории чисел, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского.

e-mail: mexmat_KA@info.sgu.ru

Матвеева Ольга Андреевна — к.ф.-м.н., ассистент кафедры компьютерной алгебры и теории чисел Саратовского государственного университета им. Н. Г. Чернышевского.

e-mail: olga.matveeva.0@gmail.com

Нестеренко Юрий Валентинович — доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН, заведующий кафедрой теории чисел механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

e-mail: nester@mi.ras.ru

Петриков Александр Олегович — аспирант, Национальный исследовательский университет «Московский институт электронной техники».

e-mail: masterpetr@mail.ru

Рапимбергйте Сандра Саулевна — магистр физических наук (математика), факультет технологии, физических и биомедицинских наук, Шяуляйский университет.

e-mail: violeta.rap@gmail.com

Усольцев Вадим Леонидович — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информатики и информатизации образования Волгоградского государственного социально-педагогического университета.

e-mail: usl2004@mail.ru

Чермных Оксана Владимировна — старший преподаватель кафедры фундаментальной и компьютерной математики, Вятский государственный университет.

e-mail: vv146@mail.ru

Чирский Владимир Григорьевич — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теории чисел Московского педагогического государственного университета.

e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Чубариков Владимир Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математических и компьютерных методов анализа, декан механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

e-mail: chubarik2009@live.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Volume 17 Issue 4

Bednova Veronika — методист первой категории механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова.
e-mail: msu.mmf.vb@gmail.com

Bezverhny Vladimir Nikolaevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, professor of the Tula State L. N. Tolstoy Pedagogical University.
e-mail: Vnbezv@rambler.ru

Bernik Vasily Ivanovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, the main researcher of the Belorussia Institute of Mathematics of NAS.
e-mail: bernik@im.bas-net.by

Bessonov Leonid Valentinovich — Saratov State University.
e-mail: lexx@sgu.ru

Buchstaber Viktor Matveyevich — corresponding member of the Russian Academy of Sciences, doctor of physical and mathematical Sciences, Professor, Institute of information transmission problems for them. A. A. Kharkevich of the Russian Academy of Sciences, The mathematical Institute. V. A. Steklov of the Russian Academy of Sciences, Moscow state University named after M. V. Lomonosov, faculty of mechanics and mathematics, The University of Manchester.
e-mail: buchstab@mi.ras.ru

Bykovsky Victor Alekseevich — doctor of physico-mathematical Sciences, correspondent member of RAS, Deputy Director of the Federal state institution of science, Institute of applied mathematics of the far Eastern branch of the Russian Academy of Sciences (IPM RAS) on scientific work, Director of the Khabarovsk branch of the IPM DVO RAS.
e-mail: vab@iam.khv.ru

Glazunov Nikolai Mikhailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, National Aviation University, Ukraine.
e-mail: glanm@yahoo.com

Dobrovolsky Nikolai Mihailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the Department algebra, calculus and geometry of the Tula State L. N. Tolstoy Pedagogical University
e-mail: dobrovol@tspu.tula.ru

Gmuleva Alevtina Vassil'evna — candidate of pedagogical science, associate professor, professor the Moscow pedagogical state University.
e-mail: alevtin-z@yandex.ru

Inchenko Oksana Vladimirovna — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, associate Professor, Department of Mathematical analysis, Tula State University.
e-mail: inchenko_ov@mail.ru

Kačinskaitė Roma — doctor of Physical Sciences (Mathematics), professor, Department of Mathematics, Faculty of Technology, Physical and Biomedical Sciences, Šiauliai University.
e-mail: r.kacinskaite@fm.su.lt

Кожухов Игорь Борисович — доктор физико-математических наук, профессор, Московский институт электронной техники.

e-mail: kozhuhov_i_b@mail.ru

Kuznetsov Valentin Nikolaevich — Dr. of technical science, Professor, Head of Department of Computer Algebra and Number Theory, Saratov State University.

e-mail: KuznetsovVN@info.sgu.ru

Kuznetsova Tatiana Alexandrovna — Saratov State University.

e-mail: mexmat_KA@info.sgu.ru

Matveeva Olga Andreevna — Ph.d. in Physical Mathematical Sciences, assistant at Department of Computer Algebra and Number Theory, Saratov State University.

e-mail: olga.matveeva.0@gmail.com

Nesterenko Yury Valentinovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, corresponding member of RAS, head of number theory's chair of the mechanics and mathematics faculty of the M. V. Lomonosov Moscow State University.

e-mail: nester@mi.ras.ru

Петриков Александр Олегович — аспирант, Национальный исследовательский университет «Московский институт электронной техники».

e-mail: masterpetr@mail.ru

Rapimbergaitė Sandra — master of Physical Sciences (Mathematics), Department of Mathematics, Faculty of Technology, Physical and Biomedical Sciences, Šiauliai University.

e-mail: violeta.rap@gmail.com

Usol'tsev Vadim Leonidovich — candidate of Physical and Mathematical Sciences, associate professor, Department of Computer Science and Informatization of Education, Volgograd State Social and Pedagogical University.

e-mail: usl2004@mail.ru

Chermnykh Oksana Vladimirovna — Leading teacher of the Chair of Fundamental and Computer Mathematics, Vyatka State University.

e-mail: vv146@mail.ru

Chirskii Vladimir Grigorievich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, head of chair of theory of numbers of the Moscow pedagogical state University.

e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Chubarikov Vladimir Nikolaevich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, head of the Department of mathematical and computer methods of analysis, dean of the mechanics and mathematics faculty of the M. V. Lomonosov Moscow State University

e-mail: chubarik2009@live.ru

РЕДКОЛЛЕГИЯ

Том 17 Выпуск 3

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Чубариков Владимир Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математических и компьютерных методов анализа, декан механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова

e-mail: chubarik2009@live.ru

ЗАМЕСТИТЕЛИ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА:

Добровольский Николай Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого

e-mail: dobrovol@tspu.ru

Михалев Александр Васильевич — доктор физико-математических наук, профессор механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова

e-mail: mikhalev@shade.msu.ru

Нижников Александр Иванович — доктор педагогических наук, профессор, заведующий кафедрой математической физики Московского педагогического государственного университета, заслуженный работник высшей школы РФ

e-mail: ainizhnikov@mail.ru, nizhnikov.ai@mail.ru

ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ

Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры прикладной математики и информатики Тульского государственного университета.

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

ЧЛЕНЫ РЕДКОЛЛЕГИИ:

Артамонов Вячеслав Александрович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой Высшей алгебры механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова

e-mail: viacheslav.artamonov@gmail.com

Безверхний Владимир Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор, профессор Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого

e-mail: Vnbezv@rambler.ru

Быковский Виктор Алексеевич — доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, заместитель директора Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института прикладной математики Дальневосточного отделения Российской академии наук (ИПМ ДВО РАН) по научной работе, директор Хабаровского отделения ИПМ ДВО РАН

e-mail: vab@iam.khv.ru

Глухов Михаил Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, академик-секретарь отделения математических проблем криптографии Академии криптографии Российской Федерации

e-mail: glukhovmm@rambler.ru

Голод Евгений Соломонович — доктор физико-математических наук, профессор, профессор механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова

e-mail: golod@mech.math.msu.su

Гриценко Сергей Александрович — доктор физико-математических наук, профессор кафедры Математика 1 Финансового университета при Правительстве РФ, профессор механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова.

e-mail: s.gritsenko@gmail.com

Дурнев Валерий Георгиевич — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой Ярославского государственного университета

e-mail: durnev@univ.uniyar.ac.ru

Есаян Альберт Рубенович — доктор педагогических наук, профессор, профессор Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого

e-mail: esayanalbert@mail.ru

Зубков Андрей Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, заведующий Отделом дискретной математики Математического института им. В. А. Стеклова РАН

e-mail: zubkov@mi.ras.ru

Иванов Валерий Иванович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики и информатики института прикладной математики и компьютерных наук Тульского государственного университета

e-mail: ivaleryi@mail.ru

Карташов Владимир Константинович — кандидат физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой Волгоградского государственного социально-педагогического университета

e-mail: kartashovvk@yandex.ru

Королёв Максим Александрович — доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник Математического института им. В. А. Стеклова РАН

e-mail: korolevma@mi.ras.ru

Кузнецов Валентин Николаевич — доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой Саратовского государственного университета имени Н. Г. Чернышевского

e-mail: kuznetsovvn@info.sgu.ru

Латышев Виктор Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры Высшей алгебры механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова

e-mail: latyshev@basis.math.msu.su

Мищенко Сергей Петрович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой алгебро-геометрических вычислений Ульяновского государственного университета

e-mail: mishchenkosp@mail.ru

Нестеренко Юрий Валентинович — доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН, заведующий кафедрой теории чисел механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова

e-mail: nester@mi.ras.ru

Панин Владимир Алексеевич — доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАЕН, действительный член академии информатизации образования, ректор Тульского государственного педагогического университета имени Л. Н. Толстого

e-mail: tgpu@tula.net

Фомин Александр Александрович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой алгебры Московского педагогического государственного университета
e-mail: alexander.fomin@mail.ru

Чирский Владимир Григорьевич — доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой теории чисел Московского педагогического государственного университета, профессор механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова
e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Белов Алексей Яковлевич — доктор физико-математических наук, федеральный профессор математики, профессор университета Бар Илана, Рамат Ган, Израиль
e-mail: Kanelster@gmail.com

Берник Василий Иванович (Белоруссия) — доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Института математики НАН Белоруси
e-mail: bernik@im.bas-net.by

Де́за Мишель (Франция) — доктор физико-математических наук, профессор, директор научных исследований в Национальном Центре научных исследований Франции
e-mail: Michel.Deza@ens.fr

Касьянов Павел Олегович (Украина) — доктор физико-математических наук, профессор, Учебно-научный комплекс «Институт прикладного системного анализа» НТУУ «КПИ» МОН и НАН Украины
e-mail: kasyanov@i.ua

Лауринчикас Антанас (Литва) — доктор физико-математических наук, профессор, Действительный член АН Литвы, заведующий кафедрой теории вероятностей и теории чисел Вильнюсского университета
e-mail: antanas.laurincikas@mif.vu.lt

Мисир Джумаил оглы Марданов (Азербайджан) — доктор физико-математических наук, профессор, директор Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.
e-mail: rmi@lan.ab.az

Рахмонов Зарулло Хусейнович (Таджикистан) — доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент АН Республики Таджикистан, директор Института математики Таджикской АН
e-mail: zarullo_r@tajik.net, zarullo-r@rambler.ru

THE EDITORIAL BOARD

Volume 17, Issue 3

THE MAIN EDITOR

Chubarikov Vladimir Nikolaevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the Department of mathematical and computer methods of analysis, dean of the mechanics and mathematics faculty of the M. V. Lomonosov Moscow State University.

e-mail: chubarik2009@live.ru

THE ASSISTANTS OF THE MAIN EDITOR:

Dobrovolsky Nikolai Mihailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the Department algebra, calculus and geometry of the Tula State L. N. Tolstoy Pedagogical University.

e-mail: dobrovol@tspu.ru

Mihalev Alexander Vasilyevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the chair of theoretical Informatics of the mechanics and mathematics faculty of the M. V. Lomonosov Moscow State University.

e-mail: mikhalev@shade.msu.ru

Nijnikov Alexander Ivanovich — doctor of pedagogical sciences, professor, head of chair of the mathematical physics of the Moscow Pedagogical State University, honored worker of the higher school of the Russian Federation.

e-mail: ainizhnikov@mail.ru, nizhnikov.ai@mail.ru

THE EXECUTIVE SECRETARY

Dobrovolsky Nikolai Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, assistant of the department of applied mathematics and computer science of the Tula State University.

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

THE MEMBERS OF THE EDITORIAL BOARD:

Artamonov Vyacheslav Alexandrovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of Higher algebra's chair of the mechanics and mathematics faculty of the M. V. Lomonosov Moscow State University.

e-mail: viacheslav.artamonov@gmail.com

Bezverhny Vladimir Nikolaevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, professor of the Tula State L.N. Tolstoy Pedagogical University.

e-mail: Vnbezv@rambler.ru

Bykovsky Victor Alekseevich — doctor of physico-mathematical Sciences, correspondent member of RAS, Deputy Director of the Federal state institution of science, Institute of applied mathematics of the far Eastern branch of the Russian Academy of Sciences (IPM RAS) on scientific work, Director of the Khabarovsk branch of the IPM DVO RAS.

e-mail: vab@iam.khv.ru

Gluhov Mihail Mihailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, academician-secretary of the cryptography mathematical problems' department in the Academy of Cryptography of the Russian Federation.

e-mail: glukhovmm@rambler.ru

Golod Evgeny Solomonovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, professor of the mechanics and mathematics faculty of the M. V. Lomonosov Moscow State University.

e-mail: golod@mech.math.msu.su

Gritsenko Sergey Alexandrovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor of the chair Mathematics of the 1 Financial University under the Government of the Russian Federation, professor of the mechanics and mathematics faculty of the M. V. Lomonosov Moscow State University.

e-mail: s.gritsenko@gmail.com

Durnev Valery Georgievich — doctor of physical and mathematical Sciences, Professor, head of the Department of computer security and mathematical methods of data processing of the Yaroslavl statea public University. P. G. Demidov.

e-mail: durnev@univ.uniya.ac.ru

Esayan Albert Rubenovich — doctor of pedagogical sciences, professor, professor of the Tula State L.N. Tolstoy Pedagogical University.

e-mail: esayanalbert@mail.ru

Zubkov Andrey Mihailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, full member of the Academy of cryptography of the Russian Federation, head of the chair of mathematical statistics and random processes mechanics and mathematics faculty Moscow state University of a name of M. of Century University, head of the Department of discrete mathematics Mathematical Institute. Century A. Steklov mathematical Institute RAS.

e-mail: zubkov@mi.ras.ru

Ivanov Valery Ivanovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the chair of applied mathematics and Informatics of Institute of Applied Mathematics and Computer Science of the Tula State University.

e-mail: ivaleryi@mail.ru

Kartashov Vladimir Konstantinovich — candidate of physical and mathematical sciences, professor, head of the Department of algebra, geometry and Informatics of the Volgograd State Social and Pedagogical University.

e-mail: kartashovvk@yandex.ru

Korolev Maxim Aleksandrovich — doctor of physical and mathematical sciences, the leading researcher of the Department of Algebra and Number Theory of Steklov Mathematical Institute of RAS.

e-mail: korolevma@mi.ras.ru

Kuznetsov Valentin Nikolaevich — doctor of technical sciences, professor, head of the Department of computer algebra and theory of numbers of the N. G. Chernyshevsky Saratov State University.

e-mail: kuznetsovvn@info.sgu.ru

Latyshev Viktor Nikolaevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, professor of the mechanics and mathematics faculty of the M. V. Lomonosov Moscow State University.

e-mail: latyshev@basis.math.msu.su

Mishchenko Sergey Petrovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Professor, Department of applied mathematics of the Ulyanovsk State University.

e-mail: mishchenkosp@mail.ru

Nesterenko Yury Valentinovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, corresponding member of RAS, head of number theory's chair of the mechanics and mathematics faculty of the M. V. Lomonosov Moscow State University.

e-mail: nester@mi.ras.ru

Panin Vladimir Alexeyevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, corresponding member Russian Academy of Natural Sciences, Rector of Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University.

e-mail: tgpu@tula.net

Fomin Aleksandr Aleksandrovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the Department of algebra of the Moscow Pedagogical State University.

Chirsky Vladimir Grigoryevich — doctor of physical and mathematical sciences, associate professor, head of number theory's chair of the Moscow Pedagogical State University, professor of the mechanics and mathematics faculty of the M. V. Lomonosov Moscow State University.

e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Belov Alexey Yakovlevich — doctor of physical and mathematical sciences, federal professor, professor Bar Ilan University, Ramat Gan, Israel.

e-mail: Kanelster@gmail.com

Bernik Vasily Ivanovich (Belorussia) — doctor of physical and mathematical sciences, professor, the main researcher of the Belorussia Institute of Mathematics of NAS.

e-mail: bernik@im.bas-net.by

Deza Michel (France) — doctor of physical and mathematical sciences, professor, director of scientific research in the French National Centre for Scientific Research.

e-mail: Michel.Deza@ens.fr

Kasyanov Pavel Olegovich (Ukraine) — doctor of physical and mathematical Sciences, head of the research department at Educational and Scientific Complex "Institute for Applied System Analysis" of the National Technical University of Ukraine "Kyiv Politechnic Institute" of the MES of Ukraine and NAS of Ukraine.

e-mail: kasyanov@i.ua

Laurinchikas Antanas (Lithuania) — Full member of the AS in Lithuania, doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of probability theory's and number theory's chair of the Vilnius University.

e-mail: antanas.laurincikas@mif.vu.lt

Misir Jumayil oglu Mardanov (Azerbaijan) — doctor of physical and mathematical sciences, professor, director of the institute of Mathematics and Mechanics of the National Academy of Sciences of Azerbaijan.

e-mail: rmi@lan.ab.az

Rahmonov Zarullo Huseinovich (Tajikistan) — doctor of physical and mathematical sciences, professor, corresponding member of the Republic of Tajikistan AS, director of the Institute of Mathematics of the Tajik AS.

e-mail: zarullo_r@tajik.net, zarullo-r@rambler.ru

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ РУКОПИСЕЙ

Журнал "Чебышевский сборник" является общематематическим. В журнале публикуются оригинальные и обзорные работы по всем разделам современной математики и информатики на русском или английском языке.

Журнал "Чебышевский сборник" выходит четыре раза в год в одном томе из четырех выпусков.

Редакция журнала "Чебышевский сборник" предлагает авторам ознакомиться с данными правилами и придерживаться их при подготовке рукописей, направляемых в журнал.

1. Общие положения

- 1.1. Рукопись сопровождается краткой аннотацией на русском и английском языках, которая должна содержать не менее 250 слов, как на русском, так и на английском языках. Ключевые слова входят в аннотацию, но отделяются одной строкой.

Все материалы представляются в редакцию в двух экземплярах.

- 1.2. Текст статьи начинается с шифра УДК, затем следуют заглавие статьи, инициалы и фамилии авторов, с указанием в скобках города проживания, аннотация.

Затем идет перевод на английский язык заглавия статьи, фамилия и инициалы авторов в латинской транскрипции, с указанием в скобках города проживания, аннотация.

Статья должна иметь следующую структуру: Введение, Основная часть из одного или нескольких разделов, Заключение.

Статья должна быть тщательно выверена и подписана всеми авторами "в печать".

Все страницы рукописи, включая таблицы, список литературы, рисунки и подписи к рисункам, следует пронумеровать. После списка литературы приводятся названия учреждений, в которых выполнена работа.

- 1.3. На отдельном листе указываются сведения о каждом из авторов: фамилия, имя, отчество — полностью, ученая степень, звание, должность, полное название учреждения, полный почтовый адрес, номер телефона с кодом города, адрес электронной почты (e-mail). Обязательно следует указать автора, ответственного за переписку и переговоры с редакцией.
- 1.4. Российские авторы представляют в редакцию акт комиссии, о том что статья не содержит сведений, связанных с государственной тайной, и может публиковаться в открытой печати.
- 1.5. Отклонения в оформлении рукописи от приведенных правил позволяют редколлегии принять решение о снятии с публикации статьи в текущем томе журнала (статья может быть опубликована в следующем томе).

2. Требования к оформлению рукописей

- 2.1. Редакция принимает к публикации статьи, подготовленные только в системе $\text{LaTeX}_2\epsilon$; при этом в редакцию одновременно с распечаткой статьи представляются также соответствующие файлы. Статьи, подготовленные на компьютере в других текстовых редакторах, а также машинописный или рукописный варианты не принимаются.

- 2.2. При подготовке статьи в LaTeX2_ϵ следует использовать класс *article* (см. пример в конце).

В статье запрещается переопределять стандартные команды и окружения. Пример подготовки статьи находится на Web-странице

<http://cheb.tsput.ru>

- 2.3. Нумеруемые формулы необходимо выделять в отдельную строку. Номер формулы ставится у правого края строки. Нумерация только арабскими цифрами в порядке возрастания с единицы. Нумеровать следует только те формулы, на которые в тексте имеются ссылки. Запрещаются прямые ссылки по номеру на формулы из других работ. Запрещается использовать в формулах буквы русского алфавита.
- 2.4. Все рисунки и таблицы должны иметь подпись. Файлы с рисунками необходимо представить в формате *.eps. Максимальный размер рисунка или таблицы вместе с подписью не должен превышать 80% размера A4. Не допускается заканчивать статью рисунком или таблицей.
- 2.5. Список цитированной литературы оформляется в соответствии с ГОСТ 7.0.5-2008. Сокращение слов и словосочетаний на русском языке оформляется в соответствии с ГОСТ Р 7.0.12-2011, сокращение слов и словосочетаний на иностранных европейских языках — ГОСТ 7.11-2004.
- 2.6. Раздел REFERENCES оформляется в соответствии с Гарвардским стандартом (см. раздел 4 данных правил).

3. Пример оформления списка цитированной литературы

1. Борович З. И., Шафаревич И. Р. Теория чисел. М.: Наука, 1985. 510 с.
2. Добровольский Н. М., Коробов Н. М. Оптимальные коэффициенты для комбинированных сеток // Чебышевский сборник. 2001. Т. 2, вып. 1. С. 41–53.
3. Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. М.: Физматлит, 1994. 376 с.
4. Архипов Г. И., Чубариков В. Н. Об аддитивной проблеме И. М. Виноградова // Мат. заметки. 2010. Т. 88, № 3. С. 325–339.
5. Archipov G. I., Buriev K., Chubarikov V. N. Exponential sums in some binary additive problems over prime parameters // Materials of international scientific workshop on analytic number theory and its applications. Moscow: MSU, 1997. P. 12–13.
6. Голод Е. С. Комплекс Шафаревича и его применения: дис. ... д-ра физ.-мат. наук. М.: МГУ, 1999. 68 с.

4. Список использованных источников (Reference) по Harvard Standard

Наиболее значимыми составляющими в библиографических ссылках являются фамилии авторов и названия журналов, поэтому

- в описание статьи вносят всех авторов, не сокращая их тремя, четырьмя и т.п.

- названия журналов приводят обязательно.

Ссылки на публикации оформляются по Harvard Citation Standard

Оформление ссылок на публикации на русском языке

- Запись всегда начинается с фамилии автора, затем инициалы, за которыми следует дата.
- Фамилии и инициалы авторов приводят в транслитерации (иностранных авторов — в оригинале).
- Если более чем одна запись одного и того же автора, сортировать по датам.
- Название публикации, книга или журнал, всегда выделяется курсивом.
- Выдержки из публикаций, то есть главы в книгах или журнальные статьи, всегда в английских "кавычках", начиная с первого слова.
- Имя издателя ставится перед местом издания (как это было бы в адресе). Место издания — город, страна. Сокращения для штатов США должны быть с большой буквы, и должны быть добавлены по мере необходимости.
- Ссылки на электронные ресурсы следуют тем же правилам, а в конце ставится "Available at:" и URL-адрес ресурса. Недопустимо указывать только URL-адрес.
- Название статьи переводят на английский язык.
- Название книги приводят в транслитерации и в квадратных скобках переводят на английский язык. У англоязычных книг приводят только оригинальное английское название.
- Название периодического издания приводят в транслитерации. Если издание имеет официальное англоязычное название, то это название приводят в круглых скобках.
- Название издательств и организаций приводят в транслитерации.
- Название города, названия конференций, пояснительные слова, словосочетания переводят на английский язык. Для международных конференций, имеющих второе англоязычное название, приводят это название.
- Сокращения заменяют англоязычными аналогами:
part 2; volume 3; Vol. 3; pp. 10–19; 323p.; no.1; issue;
Abstract of the dissertation;
International conference proceedings (Int. Conf. Proc.);
Scientific-and-technical (Sci.-Tech.) collected articles; dated 19 December 2013;
monograph; Annals — Ann.; Annual — Annu.; Colloquium — Colloq.;
Conference — Conf.; Congress — Congr.; Technical Paper — Tech. Paper;
First; Second; Third; Fourth/nth... -1st; 2nd; 3rd; 4th/nth...;
Convention — Conv.; Digest — Dig.; Exposition — Expo.;
International — Int.; National — Nat.; Proceedings — Proc.; Record — Rec.;
Symposium — Symp.; Technical Digest — Tech. Dig.

Базовая схема описания

Автор, А.А., Автор, В.В. & Автор, С.С. Год публикации, "Заглавие статьи в переводе", *Название журнала в транслитерации или перевод заглавия, если журнал переводной*, том., номер, страницы.

Примеры описания статей из журналов:

Polyanchikov, Yu. N., Bannikov, A. I. & Kurchenko, A. I. 2007, "Improved Performance of Thermofrictional Cutting Disks", *Vestnik Saratovskogo Gos. Tekhn. Univ.*, vol. 67, no. 1 (23), pp. 21–24.

Danilovich, A. S. & Koltyshev, S. M. 2009, "Setup for radiometric separation of contaminated soil", *Pribory*, no. 12, pp. 56–59.

Пример описания статьи из электронного журнала:

Swaminathan V., Lepkoswka-White E., Rao B. P. 1999, "Browsers or buyers in cyberspace? An investigation of electronic factors influencing electronic exchange", *Journal of ComputerMediated Communication*, vol. 5, no. 2, Available at:

www.ascusc.org/jcmc/vol5/issue2/.

при наличии в статье DOI, в списке литературы желательно указывать ее doi - идентификатор:

Zhang, Z & Zhu, D 2008, "Experimental research on the localized electrochemical micromachining", *Russian Journal of Electrochemistry*, no. 44 (8), pp. 926–930.

doi: 10.1134/S1023193508080077/.

Пример описания монографии:

Автор, А. А. Год, "Заглавие", Издание – если не первое, Издатель, Место публикации, страницы (pp.)

Jones, J. 2002, "Managing small teams", Penguin, Sydney.

Smith, P. & Benn, J. 2012, "Report of the University of Western Australia", Small Business Working group, University of Western Australia, W. A.

Пример описания материалов конференций

Usmanov T. S., Gusmanov A. A., Mullagalin I. Z., Muhametshina R. Ju., Chervyakova A. N., Svishnikov A. V. 2007, "Features of the design of field development with the use of hydraulic fracturing", *Trudy 6 Mezhdunarodnogo Simpoziuma "Novye resursoberegayushchie tekhnologii nedropol'zovaniya i povysheniya neftegazootdachi"*

(Proc. 6th Int. Technol. Symp. "New energy saving subsoil technologies and the increasing of the oil and gas impact"), Moscow, pp. 267–272.

Пример описания Интернет-ресурса:

"APA Style", 2011, Available at: <http://www.apastyle.org/apa-style-help.aspx> (accessed 5 February 2011).

5. Шаблон структуры статьи

Задание колонтитулов

`\levkolonttl{ И. О. ФАМИЛИЯ}`

`\prvkolonttl{НАЗВАНИЕ СТАТЬИ }`

`\thispagestyle{empty}`

`\input{shapka.tex}`

Заголовок на русском

```

УДК ?????
\begin{center}
{\Large\bf НАЗВАНИЕ СТАТЬИ }\footnote
{Работа выполнена по гранту РФФИ
.....}

\medskip
{\large
И. О. Фамилия (г. ????????) }
\end{center}

```

Аннотация на русском

```

\begin{abstract}
В данной работе .....

\medskip
{\it Ключевые слова:} .

\medskip
{\it Библиография:} ?? названий.
\end{abstract}

```

Заголовок на английском

```

\begin{center}
{\Large\bf ?????????}

\medskip
{\large
I. O. Family (???????????) }
\end{center}

```

Аннотация на английском

```

\begin{engabstract}
In~this paper .....

\medskip
{\it Keywords:} .....

\medskip
{\it Bibliography:} ?? titles.
\end{engabstract}

```

Текст статьи на русском или английском

```

\section{Введение}
\section{}

```



```

.....
\section{Заключение}
\begin{thebibliography}{19}
\bibitem{Gru1} Оформляется по ГОСТу.
\end{thebibliography}
\begin{engbibliography}{19}
\bibitem{eGru1} Оформляется по Гарвардскому стандарту.
\end{engbibliography}
\noindent Организация.

\noindent Поступило 30.04.2015

```

6. Пример оформления статьи

```

\levkolonttl{О. А. МАТВЕЕВА}
\prvkolonttl{О НУЛЯХ ПОЛИНОМОВ ДИРИХЛЕ, АППРОКСИМИРУЮЩИХ \ldots}
\thispagestyle{empty}
\input{shapka.tex}
%
УДК 511.3
\begin{center}
{\Large \bf О НУЛЯХ ПОЛИНОМОВ ДИРИХЛЕ, АППРОКСИМИРУЮЩИХ В КРИТИЧЕСКОЙ
% пустая строка перед \medskip обязательна
\medskip
ПОЛОСЕ L-ФУНКЦИИ ДИРИХЛЕ}
% пустая строка перед \medskip обязательна
\medskip
{\large О.~А.~Матвеева (г. Саратов)}
\end{center}
%
\begin{abstract}
Получены плотностные теоремы о нулях полиномов Дирихле,
аппроксимирующих L-функции Дирихле в критической области.
% пустая строка перед \medskip обязательна
\medskip
{\it Ключевые слова}: полиномы Дирихле, L-функции Дирихле, нули
полиномов Дирихле.
% пустая строка перед \medskip обязательна
\medskip
{\it Библиография:} 21 название.
\end{abstract}
%
\begin{center}
{\Large \bf ZEROS OF DIRICHLET POLYNOMIALS
% пустая строка перед \medskip обязательна
\medskip
APPROXIMATING DIRICHLET L-FUNCTIONS
% пустая строка перед \medskip обязательна
\medskip

```

```

IN THE CRITICAL STRIP}
% пустая строка перед \medskip обязательна
\medskip
{\large O.~A.~Matveeva}
\end{center}
%

\begin{engabstract}
Density theorems about zeros of dirichlet polynomials approximating
Dirichlet L-fuctions in the critical strip are obtained.
% пустая строка перед \medskip обязательна
\medskip
{\it Keywords}: Dirichlet polynomials, Dirichlet L-fuctions,
zeros of Dirichlet polynomials.
% пустая строка перед \medskip обязательна
\medskip
{\it Bibliography:} 21 titles.
\end{engabstract}
%
\section{Введение}
В работе \cite{KorotkovMatveeva} была приведена
вычислительная схема построения полиномов Дирихле
 $Q_n(s)$ ,  $s = \sigma + it$ , которые в прямоугольнике
 $0 < \sigma < 1$ ,  $0 < t < T$  аппроксимируют целые функции,
заданные рядами Дирихле с периодическими коэффициентами,
с показательной скоростью. В частности, эта схема позволяет
эффективно вычислять нули L-функций Дирихле, лежащие в критической
полосе. В данной работе показано, что, с одной стороны,
известные факты о нулях L-функций Дирихле дают возможность получить
результаты о нулях аппроксимирующих полиномов Дирихле; с другой
стороны, поведение в критической полосе аппроксимирующих полиномов
Дирихле определяет поведение L-функций Дирихле.
%
\section{Конструкция полиномов Дирихле, аппроксимирующих
в критической полосе L-функции Дирихле}
Рассмотрим L-функцию Дирихле
\begin{equation}
L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}, \quad \text{quad } s = \sigma + it,
\end{equation}
и соответствующий степенной ряд
\begin{equation} \label{powerseries}
g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) z^n.
\end{equation}
.....
Для оценки величины \eqref{Meq10} сверху необходимо применить
численную схему, которая связана с вычислением полиномов  $Q_n(s)$ .
.....
\section{Заключение}
В заключении отметим, что аналогичные факты будут иметь место
и в случае рядов Дирихле с периодическими коэффициентами.

```

.....

Оформление списка цитированной литературы по ГОСТу

```
\begin{thebibliography}{99}
\bibitem{KorotkovMatveeva} А. Е. Коротков, О. А. Матвеева \,
Об одном численном алгоритме определения нулей целых функций,
определяемых рядами Дирихле с периодическими коэффициентами //
Научные ведомости Белгородского государственного университета.
Сер. Математика. Физика. --- Белгород: Изд-во
НИУ "Белгу", 2011. Вып.24, № 17(112). С. 47--53.
.....
\bibitem{Prahar}
Прахар К. Распределение простых чисел / К. Прахар. --- М.:
Мир, 1967. --- 513 с.
.....
\end{thebibliography}
```

Оформление раздела REFERENCES по Гарвардскому стандарту

```
\begin{engbibliography}{99}
\bibitem{eKorotkovMatveeva} Korotkov, A. E. \& Matveeva, O. A.
2011, "On a numerical algorithm for determining zeros of
entire functions defined by series Dirichlet series with
periodic coefficients"\,, {\it Scientific statements
Belgorod State University. Ser. Mathematics. Physics.
--- Belgorod Univ. NIU "Belgu"\,, issue 24, № 17(112),
pp. 47--53.
.....
\bibitem{ePrahar}
Prahar, K. 1967, "{\cyr Raspredelenie prostykh chisel.}"\,,
(Russian) [Distribution of prime numbers]
Translated from the German by A. A. Karacuba.
Edited by A. I. Vinogradov.
With two supplements by M. B. Barban and A. I. Vinogradov,
and N. M. Korobov {\it Izdat. 'Mir', Moscow} 511 pp.
\end{engbibliography}
%
\noindent Саратовский государственный университет им.
Н. Г. Чернышевского.
% пустая строка здесь обязательна
\noindent Получено 10.03.2013
```

Адрес редакции: г. Тула, пр. Ленина, 125, учебный корпус № 4 ТГПУ им. Л. Н. Толстого, комна-
та 310, кафедра алгебры, математического анализа и геометрии.

Электронные адреса (e-mail): dobrovol@tspu.tula.ru, pikhtilov@mail.ru

TABLE OF CONTENTS

Volume 17 Issue 4

V. B. Bednova	On a method for approximate solution nonlinear heat conduction equation ...	11
V. N. Bezverkhniy, N. B. Bezverkhnyaya, I. V. Dobrynina, O. V. Inchenko, A. E. Ustyan	On algorithmic problems in Coxeter groups	23
A. N. Vassilyev	Romanoff additive theorem's proof and its analogues	51
R. Kačinskaitė, S. Rapimbergaitė	The mixed joint functional independence of the Riemann zeta- and periodic Hurwitz zeta-functions	57
I. B. Kozhukhov, A. O. Petrikov	Injective and projective acts over a completely 0-simple semigroup	65
M. A. Korolev	Methods of estimating of incomplete Kloosterman sums	79
V. N. Kuznetsov, T. A. Kuznetsova, L. V. Bessonov	Limited operator semigroups and issues of the convergence of the Bubnov–Galerkin method for one class of shallow shells nonlinear equations	110
V. N. Kuznetsov, O. A. Matveeva	Approximation approach in certain problems of the theory of Diriclet series with multiplicative coefficients	124
V. I. Subbotin	Ob odnom klasse sil'no simmetrichnyh mnogogrannikov	132
K. Tukhliev	Mean-square approximation of functions by Fourier–Bessel series and the values of widths for some functional classes	141
V. L. Usol'tsev	Rees algebras and Rees congruence algebras of one class of algebras with operator and basic near-unanimity operation	157
O. V. Chermnykh	On <i>drl</i> -semigroups and <i>drl</i> -semirings	167
	70 anniversary of Vjacheslav Aleksandrovich Artamonov	194
Yu. V. Nesterenko, V. A. Bykovskii, V. M. Buchstaber, V. G. Chirsky, V. N. Chubarikov, A. Laurinchikas, N. M. Dobrovolsky, N. V. Budarina, I. V. Gaishun, V. V. Beresnevich, D. V. Vasiliev	Vasily Ivanovich Bernik (on his seventieth)	203
N. V. Budarina, H. O'Donnell	Problem of Nesterenko and method of Bernik	180
N. M. Dobrovol'skij, V. G. Chirskij, A. V. Zhmuljova, V. N. Chubarikov, V. H. Salihov, A. I. Galochkin, V. A. Bykovskij, V. I. Bernik	Nesterenko Jurij Valentinovich (70 anniversary of Yu. V. Nesterenko)	211
	СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ	222
	INFORMATION ABOUT THE AUTHORS	224
	РЕДКОЛЛЕГИЯ	226
	THE EDITORIAL BOARD	229
	MANUSCRIPT FORMATTING GUIDELINES	232