ISSN 2226-8383

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Научно-теоретический математический журнал

www.chebsbornik.ru

XXVII

Выпуск 1 (102)

2026

ISSN 2226-8383

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Министерство просвещения Российской Федерации
Российская академия наук
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
Московский педагогический государственный университет
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
Тульский государственный университет

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Научно-теоретический журнал

ТОМ XXVII

ВЫПУСК 1 (102)

Тула
2026

Учредитель: ФГБОУ ВО
«ТГПУ им. Л. Н. Толстого»

Адрес редакции:
300026, г. Тула, пр. Ленина, 125.
Тел: +79065327314

E-mail: cheb@tsput.ru
URL: http://www.chebsbornik.ru

Издается с 2001 года.
Выходит 5 раз в год.
Регистрационный номер
СМИ: ПИ № ФС77-80049

В журнале публикуются оригинальные статьи по направлениям современной математики: теория чисел, алгебра и математическая логика, теория функций вещественного и комплексного переменного, функциональный анализ, дифференциальные уравнения, математическая физика, геометрия и топология, теория вероятностей и математическая статистика, численные методы, теория оптимизации и др. Также публикуются статьи о памятных датах и юбилеях.

Журнал включен в перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание ученых степеней кандидата наук и доктора наук (перечень ВАК), индексируется и/или реферируется: Scopus, MathSciNet, Zentralblatt MATH, Russian Science Citation Index (RSCI), РЖ Математика, Mathematical Reviews, РИНЦ, Google Scholar Metrics.

Журнал выходит под эгидой Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, Министерства просвещения Российской Федерации, Российской академии наук, Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Московского педагогического государственного университета, Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого, Тульского государственного университета.

12+

СОДЕРЖАНИЕ

Том 27 Выпуск 1

И. Аллаков, Б. Х. Эрдонов, О. Ш. Имамов. Об одновременном представлении чисел в виде суммы простых чисел . . . 4

С. А. Богатый, А. А. Тужилин. Основы теории непрерывного расстояния Громова – Хаусдорфа . . . 19

В. А. Горелик, Т. В. Золотова. Двухкритериальная задача оптимального управления с использованием свертки Гермейера . . . 51

А. П. Крылов, Н. М. Добровольский, И. Н. Балаба. О решётках совместных приближений Дирихле . . . 63

С. С. Николаенко, П. Е. Рябов, С. В. Соколов. Явное решение критических подсистем интегрируемого семейства Ковалевской – Чаплыгина . . . 77

В. И. Субботин. О свободных углах RR-многогранников . . . 97

А. Б. Яхшимуратов, М. М. Хасанов. Интегрирование модифицированного уравнения Кортевега – де Фриза с интегральным источником . . . 111

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

П. Бал. Некоторые независимые результаты в идеальных пространствах Ротбергера . . . 134

Е. М. Вечтомов, А. А. Петров. Ретрактные решетки . . . 139

И. Н. Сергеев. Исследование логической сущности смешного . . . 148

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ И ПРИЛОЖЕНИЯ

В. А. Левин, А. В. Вершинин, К. М. Зингерман, Е. М. Уханов. Анализ сходимости метода спектральных элементов на примере задачи Лэмба в сравнении с аналитическим решением . . . 153

Г. И. Синкевич. Научная школа Якоба и Иоганна Бернулли. Учителя и ученики . . . 166

ПАМЯТНЫЕ ДАТЫ

Василий Иванович Берник (9.01.1947 — 11.01.2026) . . . 199

Владимир Иванович Горбачёв (25.12.1948 — 28.01.2026) . . . 201

РЕДКОЛЛЕГИЯ . . . 204

THE EDITORIAL BOARD . . . 208

TABLE OF CONTENTS . . . 212

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 27. Выпуск 1.

УДК: 511.325 DOI: 10.22405/2226-8383-2026-27-1-4-18

Об одновременном представлении чисел в виде суммы простых чисел

И. Аллаков, Б. Х. Эрдонов, О. Ш. Имамов

Аллаков Исмаил — доктор физико-математических наук, профессор, Термезский государственный университет (г. Термез, Узбекистан).
e-mail: iallakov@mail.ru
Эрдонов Бекмурод Холбой угли — доктор философии (PhD) по физико-математическим наукам, Термезский университет экономики и сервиса (г. Термез, Узбекистан).
e-mail: bekmurod.erdonov@mail.ru
Имамов Ойбек Шаназарович — преподаватель, Термезский государственный университет (г. Термез, Узбекистан)
e-mail: oybekimamov000@gmail.com

Аннотация

В работе получены оценки: для количества натуральных чисел $1 \leqslant b_1, b_2, ..., b_s \leqslant X$, удовлетворяющих условиям конгруэнц-разрешимости и положительной разрешимости; для исключительного множества в задаче об одновременном представлении s чисел $b_1, b_2, ..., b_s$ в виде суммы m $(s < m \leqslant 2s)$ простых чисел, а также новая оценка снизу для чисел представлений $b_1, b_2, ..., b_s$ в указанном виде.

Ключевые слова: система линейных уравнений, асимптотическая формула, степенная оценка, конгруэнц-разрешимость, положительная разрешимость, характер Дирихле, главный характер Дирихле, $L-$функция Дирихле, исключительный характер, исключительный нуль, функция Мангольдта, малые дуги, большие дуги, сингулярный ряд, сингулярный интеграл.

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:
Аллаков И., Эрдонов Б. Х., Имамов О. Ш. Об одновременном представлении чисел в виде суммы простых чисел // Чебышевский сборник, 2026, т. 27, вып. 1, с. 4–18.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 27. No. 1.

UDC: 511.325 DOI: 10.22405/2226-8383-2026-27-1-4-18

On the simultaneous representation of numbers as a sum of prime numbers

I. Allakov, B. Kh. Erdonov, O. Sh. Imamov

Allakov Ismail —doctor of physical and mathematical sciences, professor, Termez State University (Termez, Uzbekistan).
e-mail: iallakov@mail.ru
Erdonov Bekmurod Kholboy ugli — doctor of philosophy (PhD) in physical and mathematical sciences, Termez University of Economics and Service (Termez, Uzbekistan).
e-mail: bekmurod.erdonov@mail.ru
Imamov Oybek Shanazarovich — lecturer, Termez State University (Termez, Uzbekistan).
e-mail: oybekimamov000@gmail.com

Abstract

In the paper, we estimate the cardinality of the set of positive integers $1 \leqslant b_1, b_2, \ldots, b_s \leqslant X$ satisfying to the conditions of congruent-solvability and positive solvability, and of the exceptional set in the problem of simultaneous representation of s numbers $b_1, b_2, \ldots, b_s$ the sums of $m(s < m < 2s)$ primes. We also obtain a new lower estimate for the number of such representations.

Keywords: system of linear equations, asymptotic formula, power estimate, congruent solvability, positive solvability, Dirichlet character, principal Dirichlet character, Dirichlet $L-$function, exceptional character, exceptional zero, Mangoldt function, minor arcs, major arcs,, singular series, singular integral.

Bibliography: 16 titles.

For citation:
Allakov, I., Erdonov, B. Kh., Imamov, O. Sh. 2026, “On the simultaneous representation of numbers as a sum of prime numbers” , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 27, no. 1, pp. 4–18.

1. Введение

Пусть $b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_s-$натуральные числа, $a_{i1},\ \ a_{i2},\ \ldots,\ a_{im}-$ целые числа, $p_1,\ p_2, \ldots,\ p_m-$ простые числа. Рассмотрим систему линейных уравнений

$$b_i = a_{i1}p_1 + a_{i2}p_2 + \cdots + a_{im}p_m, \quad (i = 1, 2, \ldots,\ s;\ m > s)\,. \tag{1}$$

Обозначим через $U_{s,m}(X)-$ множество наборов $(b_1, b_2, \ldots, b_s)$, $1 \leqslant b_1, b_2, \ldots, b_s \leqslant X$, для которых система (1) неразрешима в простых числах и пусть $E_{s,m}(X) = \text{card}\ U_{s,m}(X)$.

При $m \geqslant 2s+1$ В. Фанг [1], исследуя систему (1), в некоторых дополнительных условиях, получил асимптотическую формулу для числа решений системы (1).

Известно, что разрешимость системы (1) связана следующими двумя условиями (см. [2]):

а) для любого простого p существуют такие целые числа $l_1, \ldots, l_m$ с условиями $1 \leqslant l_1, \ldots, l_m \leqslant p-1$, которые удовлетворяют систему линейных сравнений:
$a_{i1}l_1 + a_{i2}l_2 + \ldots + a_{im}l_m \equiv b_i\,(mod p)\,,\ \ (i = 1, \ldots, s)$;

b) существуют действительные положительные числа $y_1, \ldots, y_m$ для которых выполняются равенства $a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \ldots + a_{im}y_m = b_i$, $(i = 1, ..., s)$.

Пусть $W_{s,m}(X)$–множество векторов $\vec{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_s)$, $1 \leqslant b_1, b_2, \ldots, b_s \leqslant X$, которые удовлетворяют условиям a), b) и $R(\vec{b})$–число решений системы (1) в простых числах, и $B = \max\limits_{\substack{1 \leq i \leq s \\ 1 \leq j \leq m}} \{3|a_{ij}|\}$.

Исследованию функций $E_{s,m}(X)$, $W_{s,m}(X)$ и $R(\vec{b})$, при различных значениях s и m посвящены работы М.Ч. Лю и К.М. Тсанг [2, 3], И. Аллакова [4, 5, 6], Хуа Ло-Кен (см. стр. 163, [7]), Б.Х.Абраева [8, 9], Б.Х.Эрдонова [10, 11] и других. Не смотря на это в случае $s < m \leqslant 2s$, $(s > 3)$ до сих пор не только не получена асимптотическая формула для $R(\vec{b})$, но в общем случае даже не установлено существование решений системы (1).

В настоящей работе рассмотрим именно этот общий случай. Положим $s = n$, $m = n + k$, $(1 < k \leqslant n)$, и рассмотрим следующую систему:

$$b_i = a_{i1}p_1 + a_{i2}p_2 + ... + a_{i,n+k}p_{n+k}, \quad \left(i = \overline{1, n}\right). \tag{2}$$

Как выше было подчеркнуто, разрешимость системы (2) зависит от условий a) и b). Легко увидеть, что $\mathrm{card}W_{n,n+1}(X) \leqslant \mathrm{card}W_{n,n+k}(X)$. Отсюда и из теоремы 3.1.1 работы [4] следует, что множество $W_{n,n+k}(X)$ содержит достаточно много элементов. Обозначим:

$$\Delta_{i_1 i_2 \ldots i_n} = det \begin{pmatrix} a_{1i_1} & a_{1i_2} & ... & a_{1i_n} \\ a_{2i_1} & a_{2i_2} & ... & a_{2i_n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{ni_n} & a_{ni_2} & ... & a_{ni_n} \end{pmatrix}, \ 1 \leqslant i_1, i_2, ..., i_n \leqslant n + k, \ i_1 \neq i_2 \neq ... \neq i_n.$$

Кроме того, для удобства используем обозначения $\Delta_{12\ldots n} = \Delta$, $\Delta_{k+1,\ldots,k+n} = \bar{\Delta}$ и $\Delta_{i,j}$ определитель, полученный из Δ, заменой элементов $i-$столбца с элементами $j-$ого столбца. Чтобы избежать тривиальности и вырожденности наложим на коэффициенты следующие условия: $\Delta_{i_1 \ldots i_n} \neq 0$, для всех $(1 \leqslant i_1 < ... < i_n \leqslant n + k)$ и взаимно простые.

Основным результатом работы является следующая теорема:

Теорема. *Если $\varepsilon > 0$ достаточно малое действительное число, тогда:*
a) существует достаточно большое число A, такое, что при $X \geqslant B^A$ справедлива оценка $E_{n,n+k}(X) \leqslant X^{n-\varepsilon}$;
b) если $R\left(\vec{b}\right)$ –количество решений системы (2) в простых числах $p_j \leqslant N$, тогда для $R(\vec{b})$ при заданном $\vec{b} = (b_1, ..., b_n)$, справедлива оценка $R\left(\vec{b}\right) \gg \mathcal{K}^{k-\varepsilon}(\ln \mathcal{K})^{-n-k}$, для всех $(b_1, ..., b_n)$, $1 \leqslant b_1, ..., b_n \leqslant X$ за исключением не более чем $X^{n-\varepsilon}$ из них, где $N = 3(n!)^2 B^{2n-1} X$, $\mathcal{K} = 3(n!)^2 B^{2n-1} |\vec{b}| (\sqrt{n})^{-1}$.

2. Обозначения и идея доказательства теоремы

Пусть a_{ij} $\left(i = \overline{1, n};\ j = \overline{1, n + k}\right)$ целые числа удовлетворяющие условию $a_{i1}y_1 + ... + a_{i,n+k}y_{n+k} > 0$, $\left(i = \overline{1, n}\right)$, $c_1, c_2, ...$–эффективно вычисляемые положительные константы и δ достаточно малое эффективно вычисляемое положительное число. $\mathbb{R}-$ множество действительных чисел и пусть $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}}_{n}$.

Для любого целого $q \geqslant 1$ через $\sum\limits_{(q)}$ обозначим суммирование по всем $l_1, ..., l_{n+k}$ удовлетворяющие условиям $1 \leqslant l_j \leqslant q$, $(l_j, q) = 1$, $\sum\limits_{j=1}^{n+k} a_{ij}l_j \equiv b_i \,(\mathrm{mod} q)$ и пусть $N(q) = \sum\limits_{(q)} 1$.

Пусть n фиксированное натуральное число и $X \geqslant B^{\exp(\delta^{-2})}$. Положим

$$N = 3(n!)^2 B^{2n-1} X, \quad Q := N^{\delta}, \quad L := NQ^{-\frac{1}{90}}, \quad T := Q^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}. \tag{3}$$

Из (3) следует, что

$$B \leqslant Q^{\delta}. \tag{4}$$

Через $\chi\,(\mathrm{mod} q)$ и $\chi_0\,(\mathrm{mod} q)$ обозначим характер Дирихле и главный характер Дирихле по модулю q соответственно. Для произвольного $y \in \mathbb{R}$ и положительного целого q определим $e\,(y) = e^{2\pi i y}$ и $e_q\,(y) = e\left(\frac{y}{q}\right)$,

$$\begin{cases} S\,(y) := \sum\limits_{L<n\leqslant N} \Lambda\,(n)\, e\,(ny)\,, \quad S_{\chi}\,(y) := \sum\limits_{L<n\leqslant N} \Lambda\,(n)\,\chi\,(n)\, e\,(ny)\,, \\ I\,(y) := \int\limits_{L}^{N} e\,(xy)\,dx, \quad \tilde{I}\,(y) := \int\limits_{L}^{N} x^{\tilde{\beta}-1} e\,(xy)\,dx, \quad I_{\chi}\,(y) := \int\limits_{L}^{N} e\,(xy) \sum\limits_{|\gamma|\leqslant T}{}' x^{\rho-1}dx, \end{cases} \tag{5}$$

где $\sum\limits_{|\gamma|\leqslant T}{}'$ – означает, что суммирование ведётся по всем нулям $\rho = \beta + i\gamma$ функции $L\,(s,\chi)$ в области $0,5 \leqslant \beta \leqslant 1 - c_1 \ln^{-1} T$, $|\gamma| \leqslant T$ (кроме исключительного нуля $\tilde{\beta}$)(см. [4]) и $\Lambda\,(n)$ –функция Мангольдта. Пусть $\tau = N^{-1}T^{1/2n}$. Для произвольных целых чисел h_1, h_2, h_3, q с условием

$$1 \leqslant h_1, ..., h_n \leqslant q \leqslant Q \text{ и } (h_1, ..., h_n, q) = 1, \tag{6}$$

определим

$$m\,(h_1, ..., h_n, q) := \left\{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : \ \left|x_i - \frac{h_i}{q}\right| \leqslant \frac{\tau}{q}, \ \ i = \overline{1, n}\right\}$$

а M_1 и M_2 определим равенством

$$M_1 = \cup m\,(h_1, ..., h_n, q)\,, \quad M_2 = [\tau, \ 1+\tau]^n \backslash M_1. \tag{7}$$

В равенстве (7) объединение берётся по всем $h_1, ..., h_n, q$, которые удовлетворяют условию (6). В дальнейшем M_1 будем называть большой дугой, а M_2 малой дугой.

Нетрудно видеть, что эти $n-$мерные кубы $m\,(h_1, ..., h_n, q)$ взаимно не пересекаются (см. [4]) и лежат в $[\tau, \ 1+\tau]^n$.

Для произвольного $\vec{b} = (b_1, ..., b_n) \in W_{n,n+k}\,(X)$ и $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ положим

$$\bar{x}_b = b_1 x_1 + ... + b_n x_n, \ \ \bar{x}_j = a_{1j} x_1 + ... + a_{nj} x_n, \quad \left(j = \overline{1, n+k}\right) \tag{8}$$

и

$$I\left(\vec{b}\right) = \sum \Lambda\,(m_1) \ldots \Lambda\,(m_{n+k}). \tag{9}$$

В равенстве (9) суммирование ведётся по всем m_j, которые удовлетворяют условиям $L < m_1, ..., m_{n+k} \leqslant N$ и $\sum\limits_{j=1}^{n+k} a_{ij} m_j = b_i, \quad \left(i = \overline{1, n}\right)$. Используя (5) и (7) $I(\vec{b})$ можем представить в виде:

$$I\left(\vec{b}\right) = \int\limits_{\tau}^{\tau+1} \ldots \int\limits_{\tau}^{\tau+1} e\,(-\bar{x}_b) \prod_{j=1}^{n+k} S\,(\bar{x}_j)\,dx_1 \ldots dx_n =$$

$$= \left(\int\limits_{M_1}\ldots\int \ \ + \int\limits_{M_2}\ldots\int \ \right) e\,(-\bar{x}_b) \prod_{j=1}^{n+k} S\,(\bar{x}_j)\,dx_1 \ldots dx_n = I_1\left(\vec{b}\right) + I_2\left(\vec{b}\right). \tag{10}$$

Теперь, если мы покажем, что $I\left(\vec{b}\right)>0$, то можно утверждать, что система (2) разрешима в простых числах. В силу $I\left(\vec{b}\right)>I_1\left(\vec{b}\right)-\left|I_2\left(\vec{b}\right)\right|$ теорема следует из следующих двух лемм.

Лемма 2.1. *Для всех наборов* $(b_1,...,b_n)$, $(1\leqslant b_1,...,b_n\leqslant X)$ *за исключением не более чем* $X^nQ^{-k/7(n-1)}$ *наборов из них, справедлива оценка* $|I_2(\vec{b})|<N^kQ^{-k/6(n-1)}$.

Лемма 2.2. *Для всех наборов* $(b_1,...,b_n)\in W_{n,n+k}(X)$, *за исключением не более чем* $X^nQ^{-\frac{k}{16n(n+2)}}$ *наборов, справедлива оценка* $I_1(\vec{b})\gg N^kQ^{-\left(\frac{k}{16n(n+1)}+\frac{k}{14(n-1)}\right)}$.

Доказательство леммы 2.1 мы привели в [12]. Ниже мы докажем лемму 2.2.

3. Упрощение интеграла по большой дуге

Для произвольного характера $\chi(\operatorname{mod} q)$ обозначим

$$C_\chi(m):=\sum_{1\leqslant l\leqslant q}\chi(l)e_q(ml)\ \text{и}\ C_q(m)=C_{\chi_0}(m).$$

По аналогии с (8) обозначим: $\bar{h}_j:=a_{1j}h_1+...+a_{nj}h_n$, $\bar{h}_b:=b_1h_1+...+b_nh_n$, $\bar{\eta}_j:=a_{1j}\eta_1+...+a_{nj}\eta_n$, $\bar{\eta}_b:=b_1\eta_1+...+b_n\eta_n$, $(j=\overline{1,n+k})$ тогда $\bar{x}_j=\frac{\bar{h}_j}{q}+\bar{\eta}_j$, $(j=\overline{1,n+k})$. Используя свойство ортогональности характеров [13, 14] и свойства сумм Рамануджана [15], сумму $S(\bar{x}_j)$ можем представить в следующем виде:

$$S(\bar{x}_j)=\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\chi(\bmod q)}C_{\bar{\chi}}\left(\bar{h}_j\right)S_\chi\left(\bar{\eta}_j\right)+O\left(\ln^2N\right).$$

Далее, при $1\leqslant j\leqslant n+k$ обозначим

$$\begin{cases} G_j\left(\bar{h},q,\bar{\eta}\right):=\sum\limits_{\chi(\bmod q)}C_{\bar{\chi}}\left(\bar{h}_j\right)I_\chi\left(\bar{\eta}_j\right)\quad\text{и}\\ H_j\left(\bar{h},q,\bar{\eta}\right):=C_q\left(\bar{h}_j\right)I\left(\bar{\eta}_j\right)-\delta_qC_{\tilde{\chi}\chi_0}\left(\bar{h}_j\right)\tilde{I}\left(\bar{\eta}_j\right)-G_j\left(\bar{h},q,\bar{\eta}\right)\end{cases}\tag{11}$$

здесь если $\tilde{r}|q$, то $\delta_q=1$ и если $\tilde{r}\nmid q$, то $\delta_q=0$, где $\tilde{r}-$модуль исключительного характера $\tilde{\chi}$.

Тогда для всех векторов $\vec{b}=(b_1,...,b_n)$ за исключением не более чем X^nQ^{-1} наборов из них $I_1\left(\vec{b}\right)$ можно представить в виде [12]

$$I_1\left(\vec{b}\right)=\sum_{q\leqslant Q}\frac{1}{\varphi^{n+k}(q)}\sum_{\bar{h}}{}'e_q\left(-\bar{h}_b\right)\int\limits_{\mathbb{R}^n}\!\!...\!\!\int e_q\left(-\bar{\eta}_b\right)\prod_{j=1}^{n+k}H_j\left(\bar{h},q,\bar{\eta}\right)d\eta_1...d\eta_n+O\left(N^kQ^{-1}\right),\tag{12}$$

где $\sum\limits_{\bar{h}}{}'-$ означает суммирование по всем $h_1,...,h_n$, удовлетворяющие условию (6).

4. Сингулярный ряд и сингулярный интеграл задачи

Для произвольного целого $q\geqslant1$ и для любого простого p обозначим

$$A(q):=\frac{1}{\varphi^{n+k}(q)}\sum_{\bar{h}}{}'e_q\left(-\bar{h}_b\right)\prod_{j=1}^{n+k}C_q\left(\bar{h}_j\right),\quad s(p):=1+A(p).\tag{13}$$

Пусть $\chi_j\,(\mathrm{mod} r_j)\,,\ \left(j=\overline{1,n+k}\right)$- примитивные характеры и $r=[r_1,...,r_{n+k}]$ наименьшее общее кратное чисел $r_1,...,r_{n+k}$. В дальнейшем нам необходима оценка суммы вида:

$$Z\,(q)=Z\,(q,\chi_1,...,\chi_{n+k})=\sum_{\bar h}{}'e_q\left(-\bar h_b\right)\prod_{j=1}^{n+k}C_{\chi_j\chi_0}\left(\bar h_j\right),$$

где число q кратно r и χ_0—главный характер по модулю q.

Сингулярный ряд задачи исследован в работе [12], а для сингулярного интеграла справедлива следующая лемма.

Лемма 4.1. *Если $\rho_j\ \left(j=\overline{1,n+k}\right)$, произвольные комплексные числа с условием $0<\mathrm{Re}\,\rho_j\leqslant 1$, то*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}...\int\left(\prod_{j=1}^{n+k}\int\limits_L^N x^{\rho_j-1}e\left(\bar\eta_j x\right)dx_j\right)e\left(-\bar\eta_b\right)d\eta_1...d\eta_n=\frac{N^k}{|\bar\Delta|}\int\limits_D...\int\prod_{j=1}^{n+k}(Nx_j)^{\rho_j-1}dx_1...dx_k,\ (14)$$

где $x_{k+1},...,x_{n+k}$ и область интегрирования D определяются следующими равенствами:

$$x_i=\bar\Delta^{-1}\left(\bar\Delta_{i,b}N^{-1}-\bar\Delta_{i,1}x_1-\bar\Delta_{i,2}x_2-...-\bar\Delta_{i,k}x_k\right),\quad\left(i=\overline{k+1,k+n}\right)\qquad(15)$$

и

$$D=\left\{x_1,...,x_k:\ LN^{-1}\leqslant x_{k+1},...,x_{k+n}\leqslant 1\right\}.\qquad(16)$$

Кроме того, если $(b_1,...,b_n)\in W_{n,n+k}\,(X)$, то

$$\int\limits_D...\int dx_1...dx_k\gg Q^{-\frac{k}{16n(n+1)}}.\qquad(17)$$

за исключением $X^nQ^{-\frac{k}{16n(n+2)}}$ наборов $(b_1,...,b_n)$ из $W_{n,n+k}\,(X)$.

Доказательство. Доказательство равенств (14), (15), (16) аналогично доказательству леммы 3.6.1 работы [4]. Поэтому опускаем их.

Докажем оценку (17). В зависимости от знака $\bar\Delta$ разобьем доказательство на два случая.

1-случай. Пусть $\bar\Delta>0$. Согласно (15) и (16) кратный интеграл в (17) равен сумме

$$\frac{LN^{-1}\bar\Delta-\bar\Delta_{i,b}N^{-1}+\sum\limits_{1\leqslant j\leqslant k}\bar\Delta_{i,j}x_j-\bar\Delta_{i,\xi}x_\xi}{-\bar\Delta_{i,\xi}}\leqslant x_\xi\leqslant\frac{\bar\Delta-\bar\Delta_{i,b}N^{-1}+\sum\limits_{1\leqslant j\leqslant k}\bar\Delta_{i,j}x_j-\bar\Delta_{i,\xi}x_\xi}{-\bar\Delta_{i,\xi}},$$

$\left(i=\overline{k+1,k+n},\ \xi=\overline{1,k}\right)$, k мерных кубов, принадлежащих $\left[LN^{-1},\ 1\right]^k$. Здесь мы считаем, что $-\bar\Delta_{i,\xi},\ \left(i=\overline{k+1,k+n},\ \xi=\overline{1,k}\right)$ положительны. Это всегда возможно, в противном случае мы можем переобозначить индексы коэффициентов a_{ij}. Поэтому оценим разницу между верхним и нижним пределами x_ξ, т.е.

$$\frac{\bar\Delta-\bar\Delta_{i,b}N^{-1}}{-\bar\Delta_{i,\xi}}-\frac{LN^{-1}\bar\Delta-\bar\Delta_{i,b}N^{-1}}{-\bar\Delta_{i,\xi}},\ \left(i=\overline{k+1,k+n},\ \xi=\overline{1,k}\right).\qquad(18)$$

Для $(b_1,...,b_n)\in W_{n,n+k}\,(X)$ выполняется $\left|\bar\Delta_{i,b}\right|\leqslant n!B^{n-1}X$ и для второго слагаемого в (18) согласно (3) и (4) выполняется

$$\leqslant\left(n!B^nQ^{-1/90}+n!B^{n-1}XN^{-1}\right)\left|\bar\Delta_{i,\xi}\right|^{-1}\leqslant\left(\left(3n!-1\right)B^n\right)^{-1},$$

и для первого слагаемого,

$$\geqslant \left(1-n!B^{n-1}XN^{-1}\right)\left|\bar{\Delta}_{i,\xi}\right|^{-1} \geqslant \frac{1}{n!B^n}-\frac{1}{3(n!)^2B^{2n}} \geqslant \geqslant \frac{1}{2n!B^n}\left(2-\frac{2}{3\cdot k\cdot n!B^n}\right) \geqslant (2n!B^n)^{-1}.$$

Таким образом, для каждой разности в (18) подходит оценка $\gg B^{-n}$. Если учесть, что таких разностей k, то для первой области имеет место оценка $\gg B^{-kn}$. Поэтому

$$\int\limits_D\!\!...\!\int dx_1...dx_k \gg B^{-kn} \gg Q^{-\frac{k}{16n(n+1)}}$$

выполняется для всех $(b_1,...,b_n)\in W_{n,n+k}(X)$ и $\delta<\frac{1}{16n^2(n+1)}$.

2-случай. Пусть $\bar{\Delta}<0$. В этом случае интеграл $\int\limits_D...\int dx_1...dx_k$ также равен сумме

$$\frac{\bar{\Delta}-\bar{\Delta}_{i,b}N^{-1}+\sum\limits_{1\leqslant j\leqslant k}\bar{\Delta}_{i,j}x_j-\bar{\Delta}_{i,\xi}x_\xi}{-\bar{\Delta}_{i,\xi}} \leqslant x_\xi \leqslant \frac{LN^{-1}\bar{\Delta}-\bar{\Delta}_{i,b}N^{-1}+\sum\limits_{1\leqslant j\leqslant k}\bar{\Delta}_{i,j}x_j-\bar{\Delta}_{i,\xi}x_\xi}{-\bar{\Delta}_{i,\xi}}, \tag{19}$$

$\left(i=\overline{k+1,k+n},\ \ \xi=\overline{1,k}\right)$, k мерных кубов, принадлежащих $\left[LN^{-1},\ 1\right]^k$. Поэтому, оценим разницу между верхней и нижней границами x_ξ в (19), т.е.

$$\frac{LN^{-1}\bar{\Delta}-\bar{\Delta}_{i,b}N^{-1}}{-\bar{\Delta}_{i,\xi}}-\frac{\bar{\Delta}-\bar{\Delta}_{i,b}N^{-1}}{-\bar{\Delta}_{i,\xi}},\ \ \left(i=\overline{k+1,k+n},\ \ \xi=\overline{1,k}\right). \tag{20}$$

Поскольку $(b_1,...,b_n)\in W_{n,n+k}(X)$, по определению $W_{n,n+k}(X)$ система линейных уравнений $\bar{\Delta}\,y_i=\bar{\Delta}_{i,b}-\bar{\Delta}_{i,1}y_1-...-\Delta_{i,k}y_k$, $\left(i=\overline{k+1,k+n}\right)$ имеет положительное вещественное решение. Отсюда следует, что $\bar{\Delta}_{i,b}<0$ для всех $i=\overline{k+1,k+n}$. Для каждого фиксированного целого числа $k\geqslant 1$ существует не более чем X^{n-1} значений $(b_1,...,b_n)$ удовлетворяющих условию $k=-\bar{\Delta}_{i,b}$, принадлежащем $[1;\ X]^n$. Следовательно, если $k=-\bar{\Delta}_{i,b}\leqslant\leqslant\bar{\Delta}_{i,\xi}NQ^{-1/16n(n+1)}$, то существует значение $(b_1,...,b_n)\in W_{n,n+k}(X)$, не превышающее $\leqslant\bar{\Delta}_{i,\xi}X^{n-1}NQ^{-1/16n(n+1)}$, $\left(\xi=\overline{1,k}\right)$, для которых справедливо соотношение $\bar{\Delta}_{i,b}\bar{\Delta}_{i,\xi}^{-1}\leqslant\leqslant NQ^{-1/16n(n+1)}$. Таким образом, для всех $(b_1,...,b_n)\in W_{n,n+k}(X)$, кроме $X^nQ^{-\frac{k}{16n(n+2)}}$ наборов из них, имеет место неравенство

$$\bar{\Delta}_{i,b}\big(N\bar{\Delta}_{i,\xi}\big)^{-1}>Q^{-1/16n(n+1)},\quad\left(i=\overline{k+1,k+n},\ \ \xi=\overline{1,k}\right). \tag{21}$$

Поскольку $\bar{\Delta}<0$, $\left|\Delta_{i,b}N^{-1}\right|\leqslant(3n!B^n)^{-1}$, имеем: $\bar{\Delta}-\bar{\Delta}_{i,b}N^{-1}<0$, $\left(i=\overline{k+1,k+n}\right)$. В то же время согласно (21) и (3) неравенство

$$\geqslant Q^{-1/16n(n+1)}-n!B^nQ^{-1/90}>\frac{1}{2}Q^{-1/16n(n+1)}$$

выполняется для первого слагаемого в (20). Таким образом, соотношение

$$\int\limits_D\!\!...\!\int dx_1...dx_k \geqslant \left(\frac{1}{2}Q^{-\frac{1}{16n(n+1)}}-LN^{-1}\right)^k \gg Q^{-\frac{k}{16n(n+1)}}$$

справедливо для всех $(b_1,...,b_n)\in W_{n,n+k}(X)$, кроме не более чем $X^nQ^{-\frac{k}{16n(n+2)}}$ наборов из них. □

5. Доказательство теоремы

В силу (11) при раскрытии произведения $\prod\limits_{j=1}^{n+k}H_j\left(\bar{h},q,\bar{\eta}\right)$ получается 3^{n+k} слагаемых. Их разделим на три группы следующим образом:

в группу T_1) включим только один член $\prod\limits_{j=1}^{n+k} C_q\left(\bar{h}_j\right) I\left(\bar{h}_j\right)$;

в группу T_2) включаем, те члены, которые содержат хотя бы один множитель $G_j\left(\bar{h}, q, \bar{\eta}\right)$(их количество равно $3^{n+k}-2^{n+k}$);

в группу T_3) включаем остальные слагаемые (их количество равно $2^{n+k}-1$).

При $i=1,2,3$ введем следующие обозначения:

$$M_i := \sum_{q\leqslant Q} \varphi^{-n-k}(q) \sum_{\bar{h}}{}' e_q\left(-\bar{h}_b\right) \int \underset{\mathbb{R}^n}{\dots} \int \ \{\text{сумма членов в } T_i\}\, e\left(-\bar{\eta}_b\right) d\eta_1 \dots d\eta_n. \tag{22}$$

В силу (22), для всех рассматриваемых наборов $(b_1,\dots,b_n) \in W_{n,n+k}(X)$ за исключением не более чем X^nQ^{-1} значений из них, равенство (12) можно переписать в виде:

$$I_1\left(\vec{b}\right) = M_1 + M_2 + M_3 + O\left(N^kQ^{-1}\right). \tag{23}$$

Пусть

$$M_0 = \frac{N^k}{|\bar{\Delta}|} \prod_p s(p) \int \underset{D}{\dots} \int \ dx_1 \dots dx_k. \tag{24}$$

Тогда в силу утверждения c) леммы 5.2 работы [12] и леммы 4.1 справедлива оценка

$$M_0 \gg N^k B^{-n} Q^{-\frac{k}{16n(n+1)}} \tag{25}$$

за исключением не более чем $X^nQ^{-\frac{k}{16n(n+2)}}$ наборов $(b_1,\dots,b_n) \in W_{n,n+k}(X)$.

Лемма 5.1. *Для всех* $\vec{b} \in W_{n,n+k}(X)$ *справедливо равенство* $M_1 = M_0 + O\left(N^kQ^{-4/5}\right)$.

Доказательство. Полагая в (14) $\rho_j = 1$ и используя лемму 5.2 d) работы [12] из (22) находим

$$M_1 = \sum_{q\leqslant Q} \frac{1}{\varphi^{n+k}(q)} \sum_{\bar{h}}{}' e_q\left(-\bar{h}_b\right) \prod_{j=1}^{n+k} C_q\left(\bar{h}_j\right) \int \underset{\mathbb{R}^n}{\dots} \int \ \left(\prod_{j=1}^{n+k} \int_L^N e\left(\bar{\eta}_j x\right) dx_j\right) e\left(-\bar{\eta}_b\right) d\eta_1 \dots d\eta_n =$$

$$= \frac{N^k}{|\bar{\Delta}|} \int \underset{D}{\dots} \int \ dx_1 \dots dx_k \left(\sum_{q\leqslant Q} A(q)\right) = \frac{N^k}{|\bar{\Delta}|} \int \underset{D}{\dots} \int \ dx_1 \dots dx_k \left(\sum_{q=1}^{\infty} A(q)\right) +$$

$$+ O\left(N^kQ^{-1}N^{c_2/\ln\ln N} \ln^{c_3} Q\right). \tag{26}$$

В силу леммы 5.2 b), c) работы [12] и (13) имеем $\sum\limits_{q=1}^{\infty} A(q) = \prod\limits_p (1 + A(p)) = \prod\limits_p s(p)$ и ясно, что $N^{c_2/\ln\ln N} \ln^{c_3} Q < Q^{1/5}$. Отсюда учитывая равенства (24), (26) получим лемму 5.1. □

Пусть $m_1, m_2, \dots$ различные целые числа из множества $\{1, \dots, n+k\}$ и

$$\mathcal{G}(m_1, m_2, \dots) := \sum_{(\tilde{r})} \tilde{\chi}\left(l_{m_1}\right) \tilde{\chi}\left(l_{m_2}\right) \dots, \tag{27}$$

$$\mathcal{P}(m_1, m_2, \dots) := \int \underset{D}{\dots} \int \ \left[(Nx_{m_1})^{\tilde{\beta}-1} (Nx_{m_2})^{\tilde{\beta}-1} \dots\right] dx_1 \dots dx_k,$$

где область D определена в (16). Очевидно,

$$|\mathcal{P}(m_1, m_2, \dots)| \leqslant 1. \tag{28}$$

Лемма 5.2. *Имеют место следующие оценки:*
a) $|\mathcal{G}(m_1, m_2, ...)| \leqslant N(\tilde{r}) \leqslant \varphi^k(\tilde{r})$;
b) $\mathcal{G}(m_1, m_2, ...) \ll B^{\frac{1}{2}nk\lambda_1}\tilde{r}^{\frac{nk+k}{2n}}$ *за исключением не более, чем* $X^n\tilde{r}^{-\frac{k}{n}}$ *наборов* $(b_1, ..., b_n) \in \in [1,\ X]^n$, *где* $\lambda_1 = \frac{(n+k)!}{n!k!}$.

Доказательство. Утверждение a) следует из утверждений a) и b) леммы 5.1 работы [12].
Доказательство утверждения b). Для удобства рассмотрим конкретное множество из $\{1, 2, ..., n+k\}$, например $1, 2, ..., n$, то есть $\mathcal{G}(1, ..., n)$. Согласно (27) $\mathcal{G}(1, ..., n)$ можно представить в виде (см. [4], стр. 101)

$$\mathcal{G}(1, ..., n) = \frac{1}{\tilde{r}^n} \sum_{1 \leqslant h_1, ..., h_n \leqslant \tilde{r}} e_{\tilde{r}}(-\bar{h}_b) C_{\tilde{\chi}}(\bar{h}_1) ... C_{\tilde{\chi}}(\bar{h}_n) C_{\tilde{r}}(\bar{h}_{n+1}) ... C_{\tilde{r}}(\bar{h}_{n+k}).$$

Используя тождество Парсеваля (см. [16], стр. 152), находим

$$\sum_{1 \leqslant b_1, ..., b_n \leqslant \tilde{r}} |\mathcal{G}(1, ..., n)|^2 = \frac{1}{\tilde{r}^n} \left| \sum_{1 \leqslant h_1, ..., h_n \leqslant \tilde{r}} C_{\tilde{\chi}}(\bar{h}_1) ... C_{\tilde{\chi}}(\bar{h}_n) C_{\tilde{r}}(\bar{h}_{n+1}) ... C_{\tilde{r}}(\bar{h}_{n+k}) \right|^2.$$

Так как $\tilde{\chi}-$является примитивным характером, то $C_{\tilde{\chi}}(m) = \tilde{\chi}(m) C_{\tilde{\chi}}(1)$ и $C_{\tilde{\chi}}(1) = \sqrt{\tilde{r}}$. Поэтому

$$\sum_{1 \leqslant b_1, ..., b_n \leqslant \tilde{r}} |\mathcal{G}(1, ..., n)|^2 \leqslant \sum_{\substack{1 \leqslant h_1, ..., h_n \leqslant \tilde{r} \\ (h_1, ..., h_n, \tilde{r}) = 1}} \left| C_{\tilde{r}}(\bar{h}_{n+1}) ... C_{\tilde{r}}(\bar{h}_{n+k}) \right|^2. \qquad (29)$$

Известно, что (см. стр. 35, [14]) модуль квадратичного характера $\tilde{\chi}$ должен иметь вид $\tilde{r} = \nu_1\nu_2...\nu_\kappa$ (здесь $\nu_1 = 2^t$, $t = \{0, 2, 3\}$ и $\nu_2 < \nu_3 < ... < \nu_\kappa$ нечетные простые числа). Пусть

$$U_1 = \left\{ \nu_j |\ \nu_j \nmid \prod_{1 \leqslant i_1 < ... < i_n < n+k} \Delta_{i_1 ... i_n},\ j \geqslant 2 \right\} \text{ и } U_2 = \{\nu_j |\ \nu_j \notin U_1\},$$

а также обозначим $u_i = \prod\limits_{\nu_j \in U_i} \nu_j$, $(i = 1, 2)$, из чего следует, что $\tilde{r} = u_1 u_2$ и

$$u_2 = \prod_{\nu_j \in U_2} \nu_j = \nu_1 \prod_{\nu_j \in U_2 \setminus \{\nu_1\}} \nu_j \leqslant 8 \left| \prod_{1 \leqslant i_1 < ... < i_n < n+k} \Delta_{i_1 ... i_n} \right| \ll B^{\lambda_1 n}, \text{ где } \lambda_1 = \frac{(n+k)!}{n!k!}.$$

Подобным способом, который был использован при доказательстве леммы 3.5.1 работы [4] нетрудно показать, что

$$\sum_{\substack{1 \leqslant h_1, ..., h_n \leqslant \tilde{r} \\ (h_1, ..., h_n, \tilde{r}) = 1}} \left| C_{\tilde{r}}(\bar{h}_{n+1}) ... C_{\tilde{r}}(\bar{h}_{n+k}) \right|^2 = \prod_{j=1}^{\kappa} \left\{ \sum_{\substack{1 \leqslant h_1, ..., h_n \leqslant \nu_j \\ (h_1, ..., h_n, \nu_j) = 1}} \left| C_{\nu_j}(\bar{h}_{n+1}) ... C_{\nu_j}(\bar{h}_{n+k}) \right|^2 \right\}. \qquad (30)$$

Фиксируем $\nu_j \in U_1$ и рассмотрим соответствующую сумму в правой части равенства (30)

$$C_{\nu_j}(\bar{h}_i) = \sum_{l \leqslant \nu_j}{}' e\left(\frac{l\bar{h}_i}{\nu_j}\right) = \begin{cases} \varphi(\nu_j), & \text{если } \nu_j | \bar{h}_i, \\ -1, & \text{если } \nu_j \nmid \bar{h}_i, \end{cases} \qquad (i = \overline{n+1, n+k}),$$

и существуют $(\nu_j-1)^{n-k}$ значений $(h_1,...,h_n)$, для которых $\nu_j|\bar{h}_i,\ \ (i=\overline{n+1,n+k})$. Поэтому из (30) находим

$$\sum_{\substack{1\leqslant h_1,...,h_n\leqslant \nu_j\\ (h_1,...,h_n,\nu_j)=1}} \left| \ C_{\nu_j}\left(\bar{h}_{n+1}\right)...C_{\nu_j}\left(\bar{h}_{n+k}\right)\right|^2 \leqslant \varphi^{n+k}\left(\nu_j\right) \tag{31}$$

для всех $\nu_j\in U_1$. Если $\nu_j\in U_2$, то очевидно, что сумма в левой части неравенства (31) не превосходит ν_j^{n+2k}.

Из (29)-(31) получим

$$\sum_{1\leqslant b_1,...,b_n\leqslant \tilde{r}} \left|\mathcal{G}\left(1,...,n\right)\right|^2 \ll \prod_{\nu_j\in U_1}\varphi^{n+k}\left(\nu_j\right)\prod_{\nu_j\in U_2}\nu_j^{n+2k}\leqslant \tilde{r}^{n+k}u_2^k\ll \tilde{r}^{n+k}B^{nk\lambda_1}.$$

Последняя оценка показывает, что количество наборов $(b_1,...,b_n)\in[1,\ \tilde{r}]^n$, для которых $\mathcal{G}\left(1,...,n\right)\gg \tilde{r}^{\frac{nk+k}{2n}}B^{\frac{1}{2}nk\lambda_1}$ не превосходит $\tilde{r}^{\frac{n^2-k}{n}}$. Ясно, что $\mathcal{G}\left(1,...,n\right)$ зависит от классов вычетов по модулю $\tilde{r}$. Таким образом исключая не более, чем $\left(\frac{X}{\tilde{r}}\right)^n\tilde{r}^{\frac{n^2-k}{n}}=X^n\tilde{r}^{-\frac{k}{n}}$ наборов $(b_1,...,b_n)\in[1,\ X]^n$, имеем

$$\mathcal{G}\left(1,...,n\right)\ll \tilde{r}^{\frac{nk+k}{2n}}B^{\frac{1}{2}nk\lambda_1}. \tag{32}$$

Для остальных наборов чисел $m_1,m_2,...$ из $\{1,2,...,n+k\}$ функция $\mathcal{G}\left(m_1,m_2,...\right)$ оценивается аналогично и (32) остается в силе. □

Лемма 5.3. *Для M_3 справедливо равенство*

$$M_3=\frac{N^k\tilde{r}^n}{\left|\bar{\Delta}\right|\varphi^{n+k}\left(\tilde{r}\right)}\left(\sum_{\substack{q\leqslant Q/\tilde{r}\\ (\tilde{r},q)=1}}A\left(q\right)\right)\left[-\sum_{1\leqslant j\leqslant n+k}\mathcal{G}\left(j\right)\mathcal{P}\left(j\right)+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n+k}\mathcal{G}\left(i,j\right)\mathcal{P}\left(i,j\right)-\right.$$

$$\left.-\sum_{1\leqslant i_1<i_2<i_3\leqslant n+k}\mathcal{G}\left(i_1,i_2,i_3\right)\mathcal{P}\left(i_1,i_2,i_3\right)+...+(-1)^{n+k}\mathcal{G}\left(1,...,n+k\right)\mathcal{P}\left(1,..,n+k\right)\right]. \tag{33}$$

Доказательство этой леммы аналогично лемме 3.7.3 работы [4].

Когда $Q/\tilde{r}-$ "большое" сумма $\sum\limits_{q\leqslant Q/\tilde{r},\ (\tilde{r},q)=1}A\left(q\right)$ в (33) является достаточно длинной и в силу леммы 5.2 d) работы [12] мы можем представить ее в виде:

$$\sum_{q\leqslant Q/\tilde{r},\ (\tilde{r},q)=1}A\left(q\right)=\prod_{p\nmid\tilde{r}}s\left(p\right)+O\left(\tilde{r}Q^{-9/10}\right). \tag{34}$$

Обозначая через $A\left(\mathcal{G},\mathcal{P}\right)$ выражение, стоящее в квадратной скобке в (33) и используя (34), находим $M_3=\frac{N^k\tilde{r}^n}{\left|\bar{\Delta}\right|\varphi^{n+k}\left(\tilde{r}\right)}\left(\prod\limits_{p\nmid\tilde{r}}s\left(p\right)+O\left(\tilde{r}Q^{-9/10}\right)\right)A\left(\mathcal{G},\mathcal{P}\right)$. В силу (28) из леммы 5.2 a) имеем

$$M_3=\frac{N^k\tilde{r}^n}{\left|\bar{\Delta}\right|\varphi^{n+k}\left(\tilde{r}\right)}\prod_{p\nmid\tilde{r}}s\left(p\right)A\left(\mathcal{G},\mathcal{P}\right)+O\left(N^k\tilde{r}Q^{-9/10}(\ln\ln Q)^n\right). \tag{35}$$

С другой стороны, согласно лемме 5.1 e) работы [12] имеет место равенство

$$\prod_{p|\tilde{r}}s\left(p\right)=\tilde{r}^n\varphi^{-n-k}\left(\tilde{r}\right)\sum_{(\tilde{r})}1. \tag{36}$$

Поэтому из леммы 5.1 и (24) получим

$$M_1 = \frac{N^k \tilde{r}^n}{|\bar{\Delta}|\, \varphi^{n+k}(\tilde{r})} \prod_{p \nmid \tilde{r}} s(p) \sum_{(\tilde{r})} \int \underset{D}{\dots} \int dx_1 \dots dx_k + O\left(N^k Q^{-4/5}\right). \tag{37}$$

Из (35) и (37) следует

$$M_1 + M_3 = \frac{N^k \tilde{r}^n}{|\bar{\Delta}|\, \varphi^{n+k}(\tilde{r})} \prod_{p \nmid \tilde{r}} s(p) \sum_{(\tilde{r})} \int \underset{D}{\dots} \int \prod_{j=1}^{n+k} \left(1 - \tilde{\chi}(l_j)(Nx_j)^{\tilde{\beta}-1}\right) dx_1 \dots dx_k + O\left(N^k \tilde{r} Q^{-\frac{4}{5}}\right). \tag{38}$$

В силу (16) $Nx_j > L$ так, что

$$\prod_{j=1}^{n+k} \left(1 - \tilde{\chi}(l_j)(Nx_j)^{\tilde{\beta}-1}\right) \geqslant \left(\left(1 - \tilde{\beta}\right) \ln T\right)^{n+k} = \omega^{n+k}, \tag{39}$$

где

$$\omega = \begin{cases} \left(1 - \tilde{\beta}\right) \ln T, & \text{если существует исключительный нуль } \tilde{\beta}, \\ 1, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Таким образом, из (39), (36) и (38) приходим к заключению

$$M_1 + M_3 \geqslant \omega^{n+k} M_0 - O\left(N^k \tilde{r} Q^{-4/5}\right). \tag{40}$$

В случае, когда $Q/\tilde{r}$ является “малым” для суммы $\sum\limits_{q \leqslant Q/\tilde{r},\ (\tilde{r},q)=1} A(q)$ мы не можем получить оценку, типа (34). В этом случае ограничимся для оценки этой суммы леммой 5.2 b) работы [12] и тогда для M_3 из (33) получим следующую оценку $M_3 \ll N^k \tilde{r}^n \varphi^{-n-k}(\tilde{r}) A(\mathcal{G}, \mathcal{P})$. В силу леммы 5.2 b) и (28) имеем оценку $A(\mathcal{G}, \mathcal{P}) \ll B^{\frac{1}{2} nk\lambda_1} \tilde{r}^{\frac{nk+k}{2n}}$, справедливую за исключением $X^n \tilde{r}^{-\frac{k}{n}}$ наборов $(b_1, \dots, b_n) \in [1,\ X]^n$. Поэтому

$$M_3 \ll \frac{N^k \tilde{r}^n}{\varphi^{n+k}(\tilde{r})} B^{\frac{1}{2} nk\lambda_1} \tilde{r}^{\frac{nk+k}{2n}} (\ln\ln N)^{c_4} \ll N^k \tilde{r}^{\frac{k-nk}{2n}} B^{\frac{1}{2} nk\lambda_1} (\ln\ln N)^{c_5}. \tag{41}$$

Лемма 5.4. *Для всех* $\vec{b} \in [1,\ X]^n$ *имеет место оценка* $M_2 \ll M_0 \omega^{n+k} \exp\left(-c_6 \delta^{-\frac{1}{2}}\right)$.

Доказательство. Члены, содержащиеся в T_2 имеют вид

$$(-1)^m \prod_{j=1}^{l} G_j\left(\bar{h}, q, \bar{\eta}\right) \prod_{j=l+1}^{m} \delta_q C_{\tilde{\chi}\chi_0}\left(\bar{h}_j\right) \tilde{I}\left(\bar{\eta}_j\right) \prod_{j=m+1}^{n+k} C_q\left(\bar{h}_j\right) I\left(\bar{\eta}_j\right)$$

или

$$(-1)^m \prod_{j=1}^{l} G_j\left(\bar{h}, q, \bar{\eta}\right) \prod_{j=l+1}^{m} C_q\left(\bar{h}_j\right) I\left(\bar{\eta}_j\right) \prod_{j=m+1}^{n+k} \delta_q C_{\tilde{\chi}\chi_0}\left(\bar{h}_j\right) \tilde{I}\left(\bar{\eta}_j\right),$$

где $1 \leqslant l \leqslant m \leqslant n + k$. Эти выражения оцениваются одинаково, поэтому ограничимся рассмотрением первого из них. Его вклад в M_2 обозначим через $M_2(m, l)$, тогда из (22) находим

$$M_2(m, l) = (-1)^m \sum_{\substack{q \leqslant Q, \\ \tilde{r} | q}} \frac{1}{\varphi^{n+k}(q)} \sum_{\bar{h}}{}' e_q\left(-\bar{h}_b\right) C_{\tilde{\chi}\chi_0}\left(\bar{h}_{l+1}\right) \dots C_{\tilde{\chi}\chi_0}\left(\bar{h}_m\right) C_q\left(\bar{h}_{m+1}\right) \dots C_q\left(\bar{h}_{n+k}\right) \times$$

$$\times \sum_{\chi_1} ... \sum_{\chi_l} C_{\tilde{\chi}_1}\left(\bar{h}_1\right) ... C_{\tilde{\chi}_l}\left(\bar{h}_l\right) \int_{\mathbb{R}^n} ... \int I_{\chi_1}\left(\bar{\eta}_1\right) ... I_{\chi_l}\left(\bar{\eta}_l\right) \tilde{I}_{\chi_l}\left(\bar{\eta}_{l+1}\right) ... \tilde{I}_{\chi_l}\left(\bar{\eta}_m\right) \times$$

$$\times I_{\chi_1}\left(\bar{\eta}_{m+1}\right) ... I_{\chi_l}\left(\bar{\eta}_{n+k}\right) d\eta_1 ... d\eta_n.$$

Интеграл по $\mathbb{R}^n$ обозначим через J , тогда в силу (5) и (14) имеем

$$J = \frac{N^k}{|\bar{\Delta}|} \sum_{|\gamma_1| \leqslant T}{}' ... \sum_{|\gamma_l| \leqslant T}{}' \int_D ... \int \prod_{j=1}^{l} (Nx_j)^{\rho_j - 1} \prod_{j=l+1}^{m} (Nx_j)^{\tilde{\beta} - 1} dx_1 ... dx_k.$$

Следовательно,

$$M_2(m,l) = -\frac{N^k}{|\bar{\Delta}|} \int_D ... \int \prod_{j=l+1}^{m} (Nx_j)^{\tilde{\beta}-1} \left(\prod_{j=l+1}^{m} \sum_{r_j \leqslant Q} \sum_{\chi_j (\bmod r_j)}{}^{*} \sum_{|\gamma_j| \leqslant T} (Nx_j)^{\rho_j - 1} \right) \times$$

$$\times \sum_{\substack{q \leqslant Q \\ [\tilde{r}, r_1, ..., r_l] | q}} \varphi^{-n-k}(q) Z\left(q; \bar{\chi}_1, ..., \bar{\chi}_l, \tilde{\chi}_{l+1}, ..., \tilde{\chi}_m, \chi^o_{m+1}, ..., \chi^o_{n+k}\right) dx_1 ... dx_k,$$

где $\tilde{\chi}_{l+1} = ... = \tilde{\chi}_m = \tilde{\chi}$ и $\chi^o_{m+1} = ... = \chi^o_{n+k} = \chi_0$.

Так как $Nx_j \geqslant L \geqslant \sqrt{N}$, то в лемме 4.2 работы [4] заменяя ω^{n+1} на ω^{n+k} можно вычислить тройную сумму в скобках, а лемму 5.3 с) работы [12] можно применить для оценки последней суммы по q и тогда получим

$$M_2(m,l) \ll M_0 \Big(\omega^{n+k} \exp\left(-c_6 \delta^{-1/2}\right)\Big)^l \ll M_0 \left(\omega^{n+k} \exp\left(-c_6 \delta^{-1/2}\right)\right).$$

Собирая вклад всех таких слагаемых, получим утверждение леммы. □

Теперь мы можем доказать лемму 2.2. Рассмотрим следующие три случая.

1-случай. Пусть не существует исключительный нуль $\tilde{\beta}$, тогда отсутствует M_3 и из (23) за исключением не более чем $\ll X^n Q^{-\frac{k}{16n(n+2)}}$ наборов $(b_1, ..., b_n) \in W_{n,n+k}(X)$ справедлива оценка

$$I_1\left(\vec{b}\right) = M_1 + M_2 + O\left(N^k Q^{-1}\right) \gg N^k B^{-n} Q^{-k/16n(n+1)}.$$

2-случай. Если существует исключительный нуль $\tilde{\beta}$ и $\tilde{r} \leqslant Q^{\lambda_2}, \lambda_2 = k(7(n-1)(n+k))^{-1}$. Тогда в силу леммы 5.4, (40) и из (23), (24) имеем

$$I_1\left(\vec{b}\right) \gg M_0 \left(1 - \exp\left(-c_6 \delta^{-1/2}\right)\right) \omega^{n+k} + O\left(N^k Q^{-\frac{4}{5} + \lambda_2}\right) \tag{42}$$

за исключением не более чем $\ll X^n Q^{-1}$ наборов $(b_1, ..., b_n) \in W_{n,n+k}(X)$ из них. Согласно неравенству (9) из работы [10], $\omega = \left(1 - \tilde{\beta}\right) \ln T \gg c_7 \Big(\sqrt{\delta} Q^{\lambda_2/2} \ln Q\Big)^{-1}$, поэтому, учитывая (25) из (42), при достаточно малом δ получим

$$I_1\left(\vec{b}\right) \gg N^k \Big(B^n Q^{\frac{k}{16n(n+1)} + \frac{k}{14(n-1)}} \ln^{n+k} Q\Big)^{-1} + O\left(N^k Q^{-\frac{4}{5} + \lambda_2}\right) \gg N^k Q^{-\left(\frac{k}{16n(n+1)} + \frac{k}{14(n-1)} + (n+k)\delta\right)}$$

за исключением не более чем $\ll X^n Q^{-k/16n(n+2)}$ наборов $(b_1, ..., b_n) \in W_{n,n+k}(X)$ из них.

3-случай. Существует исключительный ноль $\tilde{\beta}$ и пусть $\tilde{r} > Q^{\lambda_2}$. В этом случае применим лемму 5.1, (41) и лемму 5.4 в (23) имеем

$$I_1\left(\vec{b}\right) = M_0 \left(1 + O\left(\omega^{n+k} \exp\left(-c_6 \delta^{-1/2}\right)\right)\right) + O\left(N^k Q^{-\frac{k^2}{14n(n+k)}}\right)$$

за исключением не более чем $X^n \tilde{r}^{-\frac{k}{n}} \leqslant X^n Q^{-\lambda_3}$, $\lambda_3 = k^2(7n(n-1)(n+k))^{-1}$ наборов $(b_1, ..., b_n) \in [1, \ X]^n$ из них.

Как и в предыдущих двух случаях, требуемая нижняя оценка $I_1(\vec{b})$ следует из (25):

$$I_1\left(\vec{b}\right) \gg N^k B^{-n} Q^{-\frac{k}{16n(n+1)}} - c_7 N^k Q^{-\frac{k^2}{14n(n+k)}} \gg N^k Q^{-\left(\frac{k}{16n(n+1)} + \frac{k}{14(n-1)} + (n+k)\delta\right)}. \qquad (43)$$

Поэтому, на основании (43) и леммы 2.1 из (10) имеем следующую оценку:

$$I(\vec{b}) > I_1(\vec{b}) - |I_2(\vec{b})| > c_8 N^k Q^{-\left(\frac{k}{16n(n+1)} + \frac{k}{14(n-1)} + (n+k)\delta\right)} - N^k Q^{-\frac{k}{6(n-1)}} \gg N^k Q^{-\frac{k}{10(n-1)}}, \qquad (44)$$

то есть оценка $I\left(\vec{b}\right) > 0$ справедлива для всех $(b_1, ..., b_n) \in W_{n,n+k}(X)$ за исключением не более, чем $X^n Q^{-\frac{k}{7(n-1)}} + X^n Q^{-1} + X^n Q^{-\frac{k}{16n(n+1)}} + X^n Q^{-\lambda_3} \leqslant X^{n-\varepsilon}$ наборов из них.

Таким образом, мы доказали лемму 2.2 и утверждение a) теоремы.

Теперь оценим, количество решений $\vec{b} = (b_1, ..., b_n)$ системы (2). Известно, что в (9) суммирование ведётся по всем m_j для которых выполняются условия $L < m_1, ..., m_{n+k} \leqslant N$ и $\sum_{j=1}^{n+k} a_{ij} m_j = b_i \ \ (i = \overline{1, n})$. Тогда из (9) имеем

$$I\left(\vec{b}\right) \leqslant R\left(\vec{b}\right) \ln^{n+k} N + O\left(N^{\frac{k}{2}} \ln^n N\right).$$

Из этого неравенства и из неравенства (44) получим оценку $R\left(\vec{b}\right) \gg N^{k - \frac{k\delta}{10(n-1)}} \ln^{-n-k} N$ для всех $(b_1, ..., b_n)$ за исключением не более, чем $X^{n-\varepsilon}$ значений $1 \leqslant b_1, ..., b_n \leqslant X$ из них. Учитывая, что $\left|\vec{b}\right| = \sqrt{b_1^2 + ... + b_n^2} \leqslant \sqrt{n} X$ и $N = 3(n!)^2 B^{2n-1} X \geqslant \frac{3(n!)^2 B^{2n-1} \left|\vec{b}\right|}{\sqrt{n}}$, отсюда получим утверждение b) теоремы.

6. Заключение

Таким образом доказали что система линейных диофантовых уравнений с целыми коэффициентами состоящая из s уравнений с m $(s < m \leqslant 2s)$ неизвестными разрешима в простых числах с некоторыми исключениями. Получена оценка для исключительного множества и оценка снизу для числа решений рассматриваемой системы. Эта оценка не значительно отличается от предполагаемого главного члена при достаточно малом $\delta > 0$ и достаточно большом X. Полученные результаты дополняют соответствующие результаты Wu Fang [1], M.C.Liu, K.M.Tsang [2, 3] и И.Аллакова [4, 5].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Wu Fang. On the solutions of the systems of linear equations with prime variables. Acta Math.Sinica. 1957. № 7. pp. 102-121.

2. Liu M. C., Tsang K. M. On pairs of linear equations in three prime variables and an application to Goldbach's problem, J. reine angew. Math. 1989. vol. 399. pp. 109-136.

3. Liu M. C., Tsang K. M. Small prime solutions of linear equations. Proc. Intern. Number. Th. Conf. 1987. Laval University. Cand. Math. Soc. Berlin-New York. 1989. pp. 595-624.

4. Аллаков И. Оценка тригонометрических сумм и их приложения к решению некоторых аддитивных задач теории чисел. – Термез: Сурхон нашр. 2021. 160 с.

5. Аллаков И. Об условиях разрешимости системы линейных диофантовых уравнений в простых числах, Изв. вузов. Матем., 2006, № 9. с. 10-16.

6. Аллаков И., Исраилов М. И. О разрешимости системы линейных уравнений в простых числах. Докл. АН РУз. –Ташкент, 1992. - № 10-11. с. 12-15.

7. Хуа Ло-Кен. Аддитивная теория простых чисел, Тр. Матем. ин-та им. В.А.Стеклова, 1947, том 22, с. 3-179.

8. Abrayev B.Kh., Allakov I. On solvability conditions of a pair of linear equations with four unknowns in prime numbers. Uzbek Mathematical journal. Tashkent. 2020. № 3. pp. 16-24.

9. Аллаков И., Абраев Б.Х. Об исключительном множестве одной системы линейных уравнений с простыми числами. Чебышевский сборник т.24 №2. 2023. с.15-37.

10. Аллаков И., Эрдонов Б.Х. Об одновременном представлении чисел суммой пяти простых чисел. Чебышевский сборник т.25 №3. 2024. с.11-36.

11. Allakov I., Erdonov B. On the simultaneous representation of three natural numbers by the sum of prime numbers. Bull. Inst. Math. 2025. Vol.8. No 2. pp. 1-23.

12. Эрдонов Б.Х. О сходимости сингулярного ряда в задаче о представлении натуральных чисел в виде суммы простых чисел. Научный вестник СамГУ, 2024. №5. с. 42-51.

13. Карацуба А.А. Основы аналитической теории чисел. Москва, Наука, 1983. 240 с.

14. Davenport H. Multiplicative number theory. Third edition. Springer. 2000. 177 p.

15. Аллаков И., Музропова Н., Джураева З. Об оценке суммы Раманауджана. Материалы международной конференции «Современные проблемы математики» посвящённой 50-летию Института математики им. А.Джураева Национальной академии наук Таджикистана, Душанбе, 2023. с. 22-23.

16. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», М., 1976 г. 543 с.

REFERENCES

1. Wu Fang. 1957. “On the solutions of the systems of linear equations with prime variables”, *Acta Math.Sinica.*, № 7. pp. 102-121.

2. Liu M. C., Tsang K. M. 1989. “On pairs of linear equations in three prime variables and an application to Goldbach’s problem”, *J. reine angew. Math.*, vol. 399. pp. 109-136.

3. Liu M. C., Tsang K. M. 1989. “Small prime solutions of linear equations”, *Proc. Intern. Number. Th. Conf. 1987. Laval University. Cand. Math. Soc. Berlin-New York.*, pp. 595–624.

4. Allakov I. 2021. “Estimation of trigonometric sums and their applications to the solution of some additive problems in number theory”, *Termez, Surxon nashr.* 160 p.

5. Allakov I. 2006. “On conditions for the solvability of a system of linear Diophantine equations in prime numbers”, *Iz. VUZ. Mat.*, № 9. pp. 10–16.

6. Allakov I., Israilov M.I. 1992. “On the solvability of a system of linear equations in prime numbers”, *Dokl. AN RUz. Tashkent*, № 10-11. pp. 12–15.

7. Hua Lo-Ken. 1947. “Additive prime number theory”, *Tr. Math. Institute named after V.A. Steklova*, vol.22. pp. 3–179.

8. Abrayev B.Kh., Allakov I. 2020. “On solvability conditions of a pair of linear equations with four unknowns in prime numbers”, *Uzbek Mathematical journal. Tashkent*, № 3. pp. 16–24.

9. Allakov I., Abrayev B.Kh. 2023. “On the exceptional set of one system of linear equations with prime numbers”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol.24, № 2. pp. 15–37.

10. Allakov I., Erdonov B.Kh. 2024. “On the simultaneous representation of numbers by the sum of five prime numbers”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol.25, № 3. pp. 11–36.

11. Allakov, I., Erdonov, B. 2025, “On the simultaneous representation of three natural numbers by the sum of prime numbers”, *Bull. Inst. Math.*, Vol.8, № 2, pp. 1-23.

12. Erdonov B.Kh. 2024. “On the convergence of the singular series in the problem of representing natural numbers as a sum of prime numbers". *Scientific bulletin of SamSU*, № 5. pp. 42–51.

13. Karatsuba A.A. 1983. “Fundamentals of analytic number theory”, *Moscow, Nauka*. 240 p.

14. Davenport H. 2000. “Multiplicative number theory. Third edition”, *Springer*. 177 p.

15. Allakov I., Muzropova N., Juraeva Z. 2023. “On estimating the Ramanaujan sum”, *Proceedings of the international conference "Modern Problems of Mathematics"dedicated to the 50th anniversary of the A. Juraev Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Tajikistan, Dushanbe*. pp. 22-23.

16. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. 1976. “Elements of the theory of functions and functional analysis”, *Moscow, Nauka*. 543 p.

Получено: 14.10.2025
Принято в печать: 12.02.2026

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 27. Выпуск 1.

УДК: 515.124.4+515.124.55 DOI: 10.22405/2226-8383-2026-27-1-19-50

Основы теории непрерывного расстояния Громова – Хаусдорфа[1]

С. А. Богатый, А. А. Тужилин

Богатый Семеон Антонович — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: bogatyi@inbox.ru
Тужилин Алексей Августинович — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: tuz@mech.math.msu.su

Аннотация

Расстояние Громова – Хаусдорфа (в дальнейшем ГХ-расстояние) является мерой неизометричности метрических пространств. В настоящей работе изучается модификация этого расстояния, при которой также учитываются и топологические различия. Полученная функция пар метрических пространств была названа непрерывным ГХ-расстоянием. Мы показываем, что многие базовые свойства классического ГХ-расстояния также имеют место и в непрерывном случае. Тем не менее непрерывное ГХ-расстояние, различая топологии, может существенно отличаться от классического. Мы приведем многочисленные примеры отличия, покажем, какую роль здесь играет топологическая размерность. В частности, мы докажем, что непрерывное ГХ-расстояние, как и классическое, является внутренним, но, в отличие от классического, неполным. Так как мы имеем дело со всеми метрическими пространствами, мы в рамках теории фон Неймана – Бернайса – Гёделя, покажем, как можно перенести топологические понятия и на собственные классы.

Ключевые слова: метрическое пространство, расстояние Хаусдорфа, расстояние Громова – Хаусдорфа, топологическая размерность, малая и большая индуктивные размерности, гиперпространство, континуум.

Библиография: 27 названия.

Для цитирования:
Богатый С. А., Тужилин А. А. Основы теории непрерывного расстояния Громова – Хаусдорфа // Чебышевский сборник, 2026, т. 27, вып. 1, с. 19–50.

[1]Работа А.А.Тужилина выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект 25-21-00152) и при поддержке Китайско-Российского математического центра в Пекинском университете.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 27. No. 1.

UDC: 515.124.4+515.124.55 DOI: 10.22405/2226-8383-2026-27-1-19-50

Fundamentals of theory of continuous Gromov-Hausdorff distance

S. A. Bogatyi, A. A. Tuzhilin

Bogatyi Semeon Antonovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: bogatyi@inbox.ru
Tuzhilin Alexey Avgustinovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: tuz@mech.math.msu.su

Abstract

The Gromov–Hausdorff distance (hereinafter referred to as the GH-distance) is a measure of non-isometricity of metric spaces. In this paper, we study a modification of this distance that also takes topological differences into account. The resulting function of pairs of metric spaces is called the continuous GH-distance. We show that many basic properties of the classical GH-distance also hold in the continuous case. However, the continuous GH-distance, distinguishing between topologies, can differ significantly from the classical one. We will provide numerous examples of this distinction and demonstrate the role of topological dimension here. In particular, we will prove that the continuous GH-distance, like the classical one, is intrinsic, but, unlike the classical one, it is incomplete. Since we are dealing with all metric spaces, we will show, within the framework of the von Neumann-Bernays-Gödel theory, how topological concepts can be transferred to proper classes.

Keywords: metric space, Hausdorff distance, Gromov-Hausdorff distance, topological dimension, small and large inductive dimensions, hyperspace, continuum.

Bibliography: 27 titles.

For citation:
Bogatyi, S. A., Tuzhilin, A. A. 2026, "Fundamentals of Theory of Continuous Gromov–Hausdorff distance" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 27, no. 1, pp. 19–50.

1. Введение.

Настоящая статья посвящена изучению одной из ветвей общей теории расстояния типа Громова – Хаусдорфа. Это расстояние оценивает похожесть разных метрических пространств: если пространства изометричны, то они находятся на нулевом расстоянии друг от друга, и чем больше расстояние, тем сильнее их метрические различия. В классическом определении расстояния Громова – Хаусдорфа никак не учитываются дополнительные структуры, которыми могут быть наделены метрические пространства. Даже топология, порождаемая метрикой, игнорируется этим расстоянием. Эта особенность расстояния Громова – Хаусдорфа была исправлена, например, Риффелем [1], который предложил более тонкое сравнение так называемых квантовых метрических пространств. В работе [2] был предложен вариант модификации расстояния Громова – Хаусдорфа, учитывающий непрерывность. При этом было замечено, что если сравнивать сферы в евклидовом пространстве, наделенные стандартной внутренней метрикой, с помощью классического расстояния Громова – Хаусдорфа, то результат будет отличаться от сравнения с непрерывным аналогом этого расстояния. В работе [3] был предложен другой вариант непрерывного расстояния Громова – Хаусдорфа для сравнения динамических систем и решений уравнений в частных производных. Однако подход этих авторов приводит к существенному усложнению техники, так как их вариант расстояния не удовлетворяет неравенству треугольника. Мы решили воспользоваться определением из [2] и начать более фундаментальное изучение непрерывного расстояния Громова – Хаусдорфа. При этом мы не ограничиваемся компактными метрическими пространствами, составляющими традиционную область определения расстояния классического расстояния Громова – Хаусдорфа, а рассматриваем все пространства, что приводит нас также к некоторым сложностям, связанным с парадоксами теории множеств. Для полноты изложения мы приводим в дополнительном разделе 11 ряд технических результатов, позволяющих работать с такими “монстрами”, как собственные классы в смысле фон Неймана–Бернайса–Гёделя [4, 5].

Чтобы сформулировать основные результаты настоящей работы, начнем с напоминания необходимых определений. Пусть (X,ρ) — метрическое пространство, а x и y — его точки, тогда $|xy|=\rho(x,y)$ будет обозначать расстояние между этими точками, а если A и B — непустые подмножества X, то положим $|AB|=|BA|=\inf\big\{|ab|:a\in A,\,b\in B\big\}$. Если же $A=\{a\}$, то вместо $\big|\{a\}B\big|=\big|B\{a\}\big|$ будем писать $|aB|=|Ba|$. Для положительного вещественного s и неотрицательного вещественного r мы определяем

- *открытый шар с центром $a\in X$ и радиусом s* как
$$U_s(a)=\{x\in X:|xa|<s\};$$
- *открытую s-окрестность непустого $A\subset X$* как
$$U_s(A)=\{x\in X:|xA|<s\};$$
- *замкнутый шар с центром $a\in X$ и радиусом r* как
$$B_r(a)=\{x\in X:|xa|\leqslant r\};$$
- *замкнутая r-окрестность непустого $A\subset X$*, поскольку
$$B_r(A)=\{x\in X:|xA|\leqslant r\}.$$

Для непустых подмножеств $A,B\subset X$ величина
$$d_H(A,B)=\max\big\{\sup_{a\in A}|aB|,\,\sup_{b\in B}|Ab|\big\}$$
называется *расстоянием Хаусдорфа между A и B*. Эквивалентное определение:
$$d_H(A,B)=\inf\big\{r:A\subset B_r(B)\ \text{ и }\ B\subset B_r(A)\big\}.$$
Хорошо известно, что d_H является обобщенной псевдометрикой на множестве всех непустых подмножеств метрического пространства X. Здесь слово “обобщенный” означает, что d_H может равняться бесконечности на некоторых парах подмножеств (например, на ограниченном и неограниченном), а слово “псевдометрика” означает, что d_H может равняться нулю на некоторых парах различных подмножеств (например, на незамкнутом множестве и его замыкании).

М. Громов определил расстояние между двумя непустыми метрическими пространствами [6, 7, 8]. *Расстоянием Громова – Хаусдорфа* $d_{GH}(X,Y)$ называется точная нижняя грань расстояний Хаусдорфа между образами пространств X и Y при их изометричных вложениях во всевозможные метрические пространства.

В работе мы изучаем непрерывный аналог расстояния Громова – Хаусдорфа $d^c_{GH}(X,Y)$ (формула (7)). Мы показываем, что

- непрерывное расстояние Громова – Хаусдорфа $d^c_{GH}(X,Y)$ является обобщенной псевдометрикой[2] (предложение 5) и она мажорирует метрику Громова – Хаусдорфа $d_{GH}(X,Y) \leqslant d^c_{GH}(X,Y)$ (свойство (2) предложения 6);

- для нульмерных метрических пространств эти расстояния совпадают (следствие 3), а непрерывное расстояние от связного пространства X до любого нульмерного пространства не меньше диаметра этого связного пространства (предложение 12);

- хотя всякий континуум в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, находится на нулевом расстоянии от множества всех псевдодуг (теорема Бинга [9]), но его непрерывное расстояние Громова – Хаусдорфа до множества всех псевдодуг равно половине диаметра этого континуума (предложение 19);

- континуум Кука дает контрастный пример отличия метрик Хаусдорфа и Громова – Хаусдорфа от непрерывной метрики Громова – Хаусдорфа (следствие 10);

- метрическое пространство Y, находящееся на нулевом непрерывном расстоянии Громова–Хаусдорфа от сферы S^n, $n \geqslant 1$, с произвольной метрикой, изометрично этой сфере (следствие 4). Но для всякой метрики на сфере S^n, $n \geqslant 1$, имеется не менее континуума попарно неизометричных метрических пространств, находящихся на нулевом классическом расстоянии Громова – Хаусдорфа от этой сферы S^n (например, получающиеся из сферы выбрасыванием попарно неизометричных друг другу конечных наборов точек).

Мы также показываем, что непрерывное расстояние Громова – Хаусдорфа является внутренним (теорема 15), но, в отличие от классического расстояния Громова – Хаусдорфа [10, 11, 12], не является полным (теорема 16).

2. Определения.

Собственный класс всех метрических пространств, рассматриваемых с точностью до изометрии, обозначаем $\mathcal{GH}$, а подмножество в $\mathcal{GH}$, состоящее из всех компактных метрических пространств — через $\mathcal{M}$.

Обычно пользуются более техническим определением расстояния Громова – Хаусдорфа. Для непустых метрических пространств X и Y множество непустых отношений между X и Y, т.е. непустых подмножеств декартова произведения $X \times Y$, обозначим $\mathcal{P}_0(X \times Y)$. Для $\sigma \in \mathcal{P}_0(X \times Y)$ определим *искажение*, положив

$$\operatorname{dis}\sigma = \sup\Big\{\big||xx'| - |yy'|\big| : (x,y),\, (x',y') \in \sigma\Big\}. \tag{1}$$

В частности, если $f\colon X \to Y$ — произвольное отображение, то для него определим *искажение* $\operatorname{dis} f$ как искажение его графика

$$\operatorname{dis} f = \sup\Big\{\big||xx'| - |f(x)f(x')|\big| : x, x' \in X\Big\}. \tag{2}$$

Отметим хорошо известное свойство искажения композиции отношений.

Предложение 1. *Если $\sigma \in \mathcal{P}_0(X\times Y)$, $\tau \in \mathcal{P}_0(Y\times Z)$ и $\tau\circ\sigma \neq \emptyset$, то* $\operatorname{dis}(\tau\circ\sigma) \leqslant \operatorname{dis}\sigma + \operatorname{dis}\tau$.

[2] В [3] также рассматривается некоторый аналог непрерывного расстояния Громова – Хаусдорфа, однако там это расстояние не удовлетворяет неравенству треугольника, что приводит к многочисленным техническим сложностям. Мы же следуем подходу из [2].

Многозначное сюръективное отображение R из X на Y называется *соответствием между X и Y*. Множество всех соответствий между X и Y обозначим $\mathcal{R}(X,Y)$. Расстояние Громова – Хаусдорфа вычисляется [8, теорема 7.3.25] по формуле

$$d_{GH}(X,Y)=\frac{1}{2}\inf\bigl\{\operatorname{dis}R : R\in\mathcal{R}(X,Y)\bigr\}. \tag{3}$$

Частный случай соответствия можно построить по любой паре отображений $f\colon X\to Y$ и $g\colon Y\to X$, положив $R_{f,g}=f\cup g^{-1}$, где g^{-1} обозначает отношение, обратное к отношению g. С другой стороны, в каждом соответствии $R\in\mathcal{R}(X,Y)$ можно выделить подсоответствие $R_{f,g}$, если в качестве отображений $f\colon X\to Y$ и $g\colon Y\to X$ выбрать такие, что $f\subset R$ и $g\subset R^{-1}$. Легко видеть, что искажение каждого подсоответствия не превосходит искажения соответствия, в частности, $\operatorname{dis}R_{f,g}\leqslant\operatorname{dis}R$. Чтобы вычислить искажение соответствия $R_{f,g}$, нам понадобится *коискажение* $\operatorname{codis}(f,g)$, определяемое следующим образом:

$$\operatorname{codis}(f,g)=\sup\Bigl\{\bigl||x\,g(y)|-|f(x)\,y|\bigr| : x\in X,\ y\in Y\Bigr\}. \tag{4}$$

Предложение 2. *Для любых $X,Y\in\mathcal{GH}$, соответствия $R\in\mathcal{R}(X,Y)$ и произвольных двух отображений $f\colon X\to Y$ и $g\colon Y\to X$ таких, что $f\subset R$ и $g\subset R^{-1}$, выполняется*

$$\operatorname{dis}R_{f,g}=\max\bigl\{\operatorname{dis}f,\,\operatorname{dis}g,\,\operatorname{codis}(f,g)\bigr\}\leqslant\operatorname{dis}R. \tag{5}$$

Из равенства (3) и предложения 2 мгновенно получается следующий результат.

Следствие 1 (см. [2, p. 3]). *Для любых $X,Y\in\mathcal{GH}$ выполняется*

$$d_{GH}(X,Y)=\frac{1}{2}\inf_{\substack{f\colon X\to Y\\ g\colon Y\to X}}\max\bigl\{\operatorname{dis}f,\,\operatorname{dis}g,\,\operatorname{codis}(f,g)\bigr\}. \tag{6}$$

Из предложения 1 вытекает, что искажение композиции отображений не превосходит суммы искажений этих отображений.

Предложение 3. *Пусть даны три метрических пространства X, Y и Z, а также отображения $X\underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}}Y\underset{k}{\overset{h}{\rightleftarrows}}Z$. Тогда*

$$\operatorname{codis}(h\circ f,g\circ k)\leqslant\operatorname{codis}(f,g)+\operatorname{codis}(h,k).$$

Доказательство. Выберем произвольные $x\in X$, $z\in Z$ и положим $y_1=f(x)$, $y_2=k(z)$. Тогда

$$\begin{aligned}\Bigl|\bigl|x\,(g\circ k)(z)\bigr|-\bigl|(h\circ f)(x)\,z\bigr|\Bigr|&=\Bigl|\bigl|x\,g(y_2)\bigr|-\bigl|h(y_1)\,z\bigr|\Bigr|=\\&=\Bigl|\bigl|x\,g(y_2)\bigr|-\bigl|y_1y_2\bigr|+\bigl|y_1y_2\bigr|-\bigl|h(y_1)\,z\bigr|\Bigr|\leqslant\\&\leqslant\Bigl|\bigl|x\,g(y_2)\bigr|-\bigl|f(x)y_2\bigr|\Bigr|+\Bigl|\bigl|y_1k(z)\bigr|-\bigl|h(y_1)\,z\bigr|\Bigr|\leqslant\operatorname{codis}(f,g)+\operatorname{codis}(h,k).\end{aligned}$$

Результат вытекает из произвольности x и z. $\square$

Если в следствии 1 ограничиться непрерывными отображениями f и g, то получим определение *непрерывного расстояния Громова – Хаусдорфа*:

$$d_{GH}^c(X,Y)=\frac{1}{2}\inf_{\substack{f\in C(X,Y)\\ g\in C(Y,X)}}\operatorname{dis}R_{f,g}=\frac{1}{2}\inf_{\substack{f\in C(X,Y)\\ g\in C(Y,X)}}\max\bigl\{\operatorname{dis}f,\,\operatorname{dis}g,\,\operatorname{codis}(f,g)\bigr\}, \tag{7}$$

где $C(Z,W)$ обозначает множество всех непрерывных отображений из метрического пространства Z в метрическое пространство W. Это расстояние для краткости будем также называть *непрерывным GH-расстоянием.*

Для (неодноточечного) метрического пространства X и точки $x \in X$ определим описанный и вписанный радиусы (с центром в x) соответственно как $R_x = \sup\bigl\{|xx'| : x' \in X\bigr\}$ и $r_x = \inf\bigl\{|xx'| : x' \in X,\ x' \neq x\bigr\}$. Введем четыре величины

$$\begin{aligned} \operatorname{diam}(X) &= \sup\bigl\{R_x : x \in X\bigr\} = \sup\bigl\{|xx'| : x, x' \in X\bigr\} \text{ — \textit{диаметр}},\\ R(X) &= \inf\bigl\{R_x : x \in X\bigr\} \text{ — \textit{чебышевский радиус}},\\ d(X) &= \sup\bigl\{r_x : x \in X\bigr\},\\ s(X) &= \inf\bigl\{r_x : x \in X\bigr\} = \inf\bigl\{|xx'| : x, x' \in X,\ x' \neq x\bigr\}. \end{aligned}$$

Для одноточечного метрического пространства зарезервируем обозначение Δ_1. Естественно считать $\operatorname{diam}(\Delta_1) = R(\Delta_1) = d(\Delta_1) = s(\Delta_1) = 0$. Известно [8, p. 255], что $2d_{GH}(\Delta_1, X) = \operatorname{diam} X$. Отметим, что для неограниченного пространства $\operatorname{diam}(X) = R(X) = \infty$.

Ясно, что для неодноточечного метрического пространства $d(X) = 0$ тогда и только тогда, когда в X нет изолированных точек. Для неодноточечного конечного метрического пространства $s(X) > 0$. При $s(X) > 0$ говорят, что *метрика отделена от нуля.* Для стандартной сферы $S^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$, наделенной как индуцированной из $\mathbb{R}^{m+1}$ метрикой, так и внутренней метрикой, имеем $0 = s(S^m) = d(S^m) < R(S^m) = \operatorname{diam}(S^m)$; для шара $B^m \subset \mathbb{R}^m$ выполняется $0 = s(B^m) = d(B^m) < 2R(B^m) = \operatorname{diam}(B^m)$.

Следующее предложение очевидно.

Предложение 4. *Для произвольного метрического пространства X справедливы цепочки неравенств*

$$0 \leqslant s(X) \leqslant d(X) \leqslant \operatorname{diam}(X) \leqslant 2R(X) \quad \text{и} \quad s(X) \leqslant R(X) \leqslant \operatorname{diam}(X).$$

Для метрического пространства (X, ρ) и числа $\lambda \geqslant 0$ через λX будем обозначать множество X с (псевдо)метрикой $\lambda\rho$.

Напомним также элементы теории размерности топологических пространств, которые понадобятся нам в дальнейшем.

2.1. Размерности топологических пространств

Мы приведем три разных понятия размерности, которые совпадают в случае сепарабельных метрических пространств, и могут различаться для метрических и топологических пространств более общего вида. Начнем с размерности, которая в разных источниках называется или размерностью Лебега, или размерностью в смысле покрытий, или топологической размерностью. Именно ей мы будем в основном пользоваться. Мы приведем классическое определение из [18]. Напомним, что для покрытия $\mathcal{U}$ топологического пространства X его *кратностью* $\operatorname{ord}\mathcal{U}$ называется или наименьшее натуральное число n такое, что каждая точка из X содержится не более чем в n элементах покрытия $\mathcal{U}$, или, если такого n не существует, то символ бесконечность ∞. Семейство $\mathcal{A}$ подмножеств топологического пространства X называется *локально конечным*, если каждая точка из X обладает окрестностью, которая пересекается лишь с конечным числом элементов покрытия $\mathcal{A}$. Важным частным случаем таких семейств являются *локально конечные покрытия $\mathcal{U}$.*

Теорема 1 ([18, 1.1.12]). *Пусть $\mathcal{F}$ — локально конечное семейство замкнутых множеств топологического пространства X, тогда объединение элементов этого семейства — замкнутое подмножество X.*

Далее, говорят, что покрытие $\mathcal{V}$ пространства X *вписано* в покрытие $\mathcal{U}$ этого пространства, мы обозначим это свойство через $\mathcal{V} \succ \mathcal{U}$, если для каждого $V \in \mathcal{V}$ имеется $U \in \mathcal{U}$ такой, что $V \subset U$. Наиболее интересными будут для нас открытые покрытия топологического пространства X, так что множество таких покрытий обозначим $\operatorname{cov}(X)$. Подсемейство в $\operatorname{cov}(X)$, состоящее из конечных покрытий, обозначим $\operatorname{cov}_f(X)$.

Теорема 2 (Стоун [17], см. также [18, 4.4.1]). *В каждое открытое покрытие метрического пространства можно вписать локально конечное открытое покрытие.*

Топологическое пространство называется *паракомпактным*, если в любое его открытое покрытие можно вписать локально конечное покрытие. В этих терминах теорема 2 звучит так: *каждое метрическое пространство паракомпактно.*

Отметим, что каждая из трех размерностей определяется для своего класса метрических пространств (регулярных, нормальных, тихоновских). Мы же в дальнейшем будем применять соответствующие результаты исключительно к метрических пространствам, поэтому сразу предположим, что пространство X, для которого мы будем определять размерности, является хаусдорфовым и нормальным, как и каждое метрическое пространство: такое X всегда автоматически регулярное и тихоновское.

Определим сначала *размерность Лебега* $\dim X$, называемую также *размерностью в смысле покрытий* или *топологической размерностью*:

- если $X = \emptyset$, то $\dim X = -1$;
- если $X \neq \emptyset$, то положим

$$\dim X = -1 + \sup_{\mathcal{U} \in \operatorname{cov}_f(X)} \inf_{\substack{\mathcal{V} \in \operatorname{cov}(X) \\ \mathcal{V} \succ \mathcal{U}}} \operatorname{ord} \mathcal{V}.$$

Иными словами, для непустого пространства X мы рассматриваем такие $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, для которых в каждое конечное открытое покрытие $\mathcal{U}$ можно вписать открытое покрытие $\mathcal{V}$ кратности не больше $n+1$ и берем наименьшее из этих n.

Отметим, что $\dim X = 0$ равносильно возможности вписать в каждое конечное открытое покрытие открытое разбиение. Пространства X, для которых $\dim X = 0$, называются *нульмерными.*

Пример 1. *Пусть X — непустое дискретное топологическое пространство, тогда в каждое конечное открытое покрытие вписывается покрытие из одноточечных открытых множеств, так что* $\dim X = 0$.

Замечание 1. *В ряде монографий, например в* [19], *при определении* $\dim X$ *рассматриваются любые, не обязательно конечные покрытия $\mathcal{U}$. Мы же будем следовать более традиционному определению.*

Теорема 3 (Даукер [20], см. также [18, 7.2.4]). *Нормальное хаусдорфово пространство X удовлетворяет* $\dim X \leqslant n$*, если и только если в каждое его локально конечное открытое покрытие можно вписать покрытие кратности не больше n.*

Определим теперь две *индуктивных размерности* хаусдорфова нормального пространства X: *малую* $\operatorname{ind} X$ и *большую* $\operatorname{Ind} X$. Напомним, что каждое подпространство хаусдорфова пространства также хаусдорфово, а для нормальных пространств имеет место более тонкое утверждение: каждое замкнутое подпространство нормального пространства само нормально. В частности, так как граница произвольного подмножества топологического пространства замкнута, то границы в нормальных хаусдорфовых топологических пространств сами являются такими. Мы воспользуемся этим соображением при определении индуктивных размерностей.

Итак, пусть

- $\operatorname{ind} X = -1$ в точности тогда, когда $X = \emptyset$;
- если $X \neq \emptyset$ и для $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ мы уже определили, что означает $\operatorname{ind} Y \leqslant n-1$ для хаусдорфовых нормальных топологических пространств, то положим $\operatorname{ind} X \leqslant n$ тогда и только тогда, когда у каждой точки $x \in X$ и любой ее окрестности V существует открытая окрестность U, $x \in U \subset V$, удовлетворяющая $\operatorname{ind} \partial U \leqslant n-1$;
- положим $\operatorname{ind} X = n$, если и только если $\operatorname{ind} X \leqslant n$ и неверно, что $\operatorname{ind} X \leqslant n-1$;
- если описанного выше числа n не существует, то положим $\operatorname{ind} X = \infty$.

Пример 2. *Для непустого X условие* $\operatorname{ind} X = 0$ *означает, что у каждой точки $x \in X$ в каждой ее окрестности V имеется открытая окрестность U с пустой границей, т.е. U является открыто-замкнутым подмножеством X. Если такое U отлично от всего X, то $X \setminus U$ — также непустое открытое подмножество X. Таким образом, связными компонентами множества X являются лишь одноточечные подмножества. Действительно, если $Y \subset X$ состоит более чем из одной точки и $x \in Y$, для каждой отличной от x точки $y \in Y$ имеются, в силу хаусдорфовости, непересекающиеся окрестности V^x и V^y. Выбрав в V^x открытую в X окрестность U точки x, разобьем множество Y на два непустых открытых множества $Y \cap U$ и $Y \cap (X \setminus U)$, так что Y несвязно. Напомним, что топологическое пространство, в котором все связные компоненты — одноточечные подмножества, называется* вполне несвязным. *Тем самым, мы показали, что условие* $\operatorname{ind} X = 0$ *влечет полную несвязность X.*

Пример 3. *Извлечем теперь из примера 2 следствие для пространства X с* $\operatorname{ind} X > 0$. *Последнее условие означает, что для некоторой точки $x \in X$ не выполняется требование нульмерности. А это означает, что существует некоторая окрестность V точки x, для которой каждая окрестность $U \subset V$ этой точки не является открыто-замкнутой. Тем самым, каждая открыто-замкнутая окрестность точки x обязательно пересекает $F := X \setminus V$. Тем самым, мы приходим к следующей формулировке*: ***условие*** $\operatorname{ind} X > 0$ ***равносильно существованию точки*** $x \in X$ ***и не содержащего ее замкнутого множества*** F ***такого, что каждая открыто-замкнутая окрестность точки*** x ***пересекает*** F.

Определим теперь большую индуктивную размерность. Пусть

- $\operatorname{Ind} X = -1$ в точности тогда, когда $X = \emptyset$;
- если $X \neq \emptyset$ и для $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ мы уже определили, что означает $\operatorname{Ind} Y \leqslant n-1$ для хаусдорфовых нормальных топологических пространств, то положим $\operatorname{Ind} X \leqslant n$ тогда и только тогда, когда для каждого замкнутого $F \subset X$ и любого открытого $V \subset X$ такого, что $F \subset V$, существует открытое $U \subset X$, $F \subset U \subset V$, удовлетворяющее $\operatorname{Ind} \partial U \leqslant n-1$;
- положим $\operatorname{Ind} X = n$, если и только если $\operatorname{Ind} X \leqslant n$ и неверно, что $\operatorname{Ind} X \leqslant n-1$;
- если описанного выше числа n не существует, то положим $\operatorname{Ind} X = \infty$.

Пример 4. *Проведем рассуждения, аналогичные тем, что в примерах 2 и 3. Для непустого X условие* $\operatorname{Ind} X = 0$ *означает, что у каждого замкнутого множества $F \subset X$ в любом открытом $V \supset F$ содержится открытое $U \supset F$ с пустой границей, т.е. являющееся U открыто-замкнутым подмножеством X. В частности,* если X — непустое дискретное пространство, то $\operatorname{Ind} X = 0$.

Сформулируем теперь эквивалентную переформулировку: условие $\operatorname{Ind} X > 0$ *означает существование замкнутого множества $F \subset X$ и открытого $V \supset F$ такого, что каждое* *открыто-замкнутое множество* $U \supset F$ *пересекает замкнутое* $H := X \setminus V$. *Тем самым, мы приходим к следующей варианту:* условие $\operatorname{Ind} X > 0$ равносильно существованию непересекающихся замкнутых множеств $F, H \subset X$ таких, что каждое открыто-замкнутое множество $U \supset F$ пересекает H. *Если в предыдущем утверждении в качестве* X *взять метрическое пространство, а условие* $F \cap H = \emptyset$ *заменить на* $|FH| > 0$, *то получим теорему Нагами–Робертса [21]:* для метрического пространства X условие $\operatorname{Ind} X > 0$ равносильно существованию замкнутых множеств $F, H \subset X$ таких, что $|FH| > 0$ и каждое открыто-замкнутое множество $U \supset F$ пересекает H.

Замечание 2. *Так как все одноточечные подмножества в* X *замкнуты в силу хаусдорфовости, то* $\operatorname{ind} X \leqslant \operatorname{Ind} X$.

Теорема 4 ([18]). *Для любого сепарабельного метрического пространства* X *выполняется* $\dim X = \operatorname{ind} X = \operatorname{Ind} X$.

Напомним, что топологическое пространство называется *линделефовым*, если из любого его открытого покрытия можно выделить не более чем счетное подпокрытие. Примером линделефовых пространств могут служить как компакты, так и пространства, обладающие счетной базой.

Теорема 5 ([18]). *Для любого линделефова* X *условия* $\dim X = 0$, $\operatorname{ind} X = 0$ *и* $\operatorname{Ind} X = 0$ *эквивалентны.*

3. Общие свойства непрерывного расстояния Громова – Хаусдорфа

Предложение 5. *Расстояние* d_{GH}^c *удовлетворяет неравенству треугольника.*

Доказательство. Пусть X, Y и Z — произвольные метрические пространства. Покажем, что

$$d_{GH}^c(X,Z) \leqslant d_{GH}^c(X,Y) + d_{GH}^c(Y,Z).$$

Если одно из расстояний $d_{GH}^c(X,Y)$ или $d_{GH}^c(Y,Z)$ бесконечно, то неравенство имеет место. Пусть теперь оба этих расстояния конечны. Для любого $\varepsilon > 0$ выберем $f \in C(X,Y)$ и $g \in C(Y,X)$, а также $h \in C(Y,Z)$ и $k \in C(Z,Y)$, для которых $d_{GH}^c(X,Y) \geqslant \max\bigl\{\operatorname{dis} f,\, \operatorname{dis} g,\, \operatorname{codis}(f,g)\bigr\} - \varepsilon$ и $d_{GH}^c(Y,Z) \geqslant \max\bigl\{\operatorname{dis} h,\, \operatorname{dis} k,\, \operatorname{codis}(h,k)\bigr\} - \varepsilon$. Тогда

$$\begin{gathered}
\operatorname{dis}(h\circ f) \leqslant \operatorname{dis} f + \operatorname{dis} h \leqslant d_{GH}^c(X,Y) + d_{GH}^c(Y,Z) + 2\varepsilon,\\
\operatorname{dis}(g\circ k) \leqslant \operatorname{dis} g + \operatorname{dis} k \leqslant d_{GH}^c(X,Y) + d_{GH}^c(Y,Z) + 2\varepsilon,\\
\operatorname{codis}(h\circ f, g\circ k) \leqslant \operatorname{codis}(f,g) + \operatorname{codis}(h,k) \leqslant d_{GH}^c(X,Y) + d_{GH}^c(Y,Z) + 2\varepsilon,
\end{gathered}$$

откуда

$$d_{GH}^c(X,Z) \leqslant \max\bigl\{\operatorname{dis}(h\circ f),\, \operatorname{dis}(g\circ k),\, \operatorname{codis}(h\circ f, g\circ k)\bigr\} \leqslant d_{GH}^c(X,Y) + d_{GH}^c(Y,Z) + 2\varepsilon.$$

Осталось воспользоваться произвольностью ε. □

Собственный класс всех непустых метрических пространств, рассматриваемых с точностью до изометрии, наделенный непрерывным расстоянием Громова – Хаусдорфа обозначим $\mathcal{GH}^c$. Из сказанного выше вытекает, что d_{GH}^c является обобщенной псевдометрикой на $\mathcal{GH}^c$. Подмножество в $\mathcal{GH}^c$, состоящее из всех компактных метрических пространств, обозначим $\mathcal{M}^c$. Как и в случае обычного расстояния Громова – Хаусдорфа, ограничение d_{GH}^c на $\mathcal{M}^c$ является метрикой (теорема 6).

Основные свойства обычного расстояния Громова – Хаусдорфа также имеют место и в случае с его непрерывным аналогом.

Предложение 6. *Для любых $X, Y \in \mathcal{GH}^c$ выполняется*

1. *если метрические пространства X и Y изометричны, то $d^c_{GH}(X,Y) = 0$;*
2. $d_{GH}(X,Y) \leqslant d^c_{GH}(X,Y)$;
3. $2d^c_{GH}(\Delta_1, X) = \operatorname{diam} X$;
4. $2d^c_{GH}(X,Y) \leqslant \max\{\operatorname{diam} X, \operatorname{diam} Y\}$;
5. *если диаметр X или Y конечен, то $2d^c_{GH}(X,Y) \geqslant \bigl|\operatorname{diam} X - \operatorname{diam} Y\bigr|$;*
6. *если диаметр X конечен, то для любых $\lambda \geqslant 0$, $\mu \geqslant 0$ имеем $2d^c_{GH}(\lambda X, \mu X) = |\lambda - \mu| \operatorname{diam} X$, откуда мгновенно вытекает, что кривая $\gamma(t) := t\,X$ является кратчайшей между любыми своими точками, причем длина такого отрезка кривой равна расстоянию между его концами;*
7. *для любого $\lambda > 0$ имеем $d^c_{GH}(\lambda X, \lambda Y) = \lambda\, d^c_{GH}(X,Y)$, а если пространства X и Y ограничены, то равенство имеет место и для $\lambda = 0$;*
8. *если $X_1, X_2, \ldots$ — последовательность метрических пространств, сходящихся в метрике d^c_{GH}, то она также сходится и в метрике d_{GH}.*

Доказательство. (1) Изометрии $h\colon X \to Y$ и h^{-1} непрерывны и $\operatorname{dis} h = \operatorname{dis} h^{-1} = \operatorname{codis}(h, h^{-1}) = 0$.

(2) Неравенство имеет место, так как расстояние $d_{GH}(X,Y)$ есть инфимум по большему семейству отображений, чем для вычисления $d^c_{GH}(X,Y)$.

(3) Для любых непрерывных $\Delta_1 \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} X$ имеем $\operatorname{dis} f = 0$, $\operatorname{dis} g = \operatorname{diam} X$, и если $\Delta_1 = \{p\}$, то

$$\operatorname{codis}(f,g) = \sup_{x\in X}\Bigl|\bigl|p\,g(x)\bigr| - \bigl|f(p)\,x\bigr|\Bigr| = \sup_{x\in X}\bigl|f(p)\,x\bigr| \leqslant \operatorname{diam} X,$$

что и требовалось.

(4) Для любых непрерывных $X \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} Y$ имеем

$$\operatorname{dis} f \leqslant \max\{\operatorname{diam} X, \operatorname{diam} Y\}, \quad \operatorname{dis} g \leqslant \max\{\operatorname{diam} X, \operatorname{diam} Y\},$$
$$\operatorname{codis}(f,g) = \sup_{x\in X,\, y\in Y}\Bigl|\bigl|x\,g(y)\bigr| - \bigl|f(x)\,y\bigr|\Bigr| \leqslant \max\{\operatorname{diam} X, \operatorname{diam} Y\},$$

что и требовалось.

(5) Это вытекает из соответствующего неравенства для d_{GH} и того, что $d_{GH} \leqslant d^c_{GH}$.

(6) По свойству (5) имеем

$$2d^c_{GH}(\lambda X, \mu X) \geqslant \bigl|\operatorname{diam}(\lambda X) - \operatorname{diam}(\mu X)\bigr| = |\lambda - \mu| \operatorname{diam} X.$$

Чтобы доказать обратное неравенство, выберем в качестве непрерывных $X \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} X$ тождественное отображение, тогда если обозначить $\operatorname{dis}_{\lambda,\mu}$ и $\operatorname{codis}_{\lambda,\mu}$ соответственно искажение и коискажение отображений между пространствами λX и μX, то

$$\operatorname{dis}_{\lambda,\mu} f = \sup_{x,x'\in X}\Bigl|\lambda|xx'| - \mu|xx'|\Bigr| = |\lambda - \mu| \operatorname{diam} X,$$
$$\operatorname{codis}_{\lambda,\mu}(f,g) = \sup_{x,x'\in X}\Bigl|\lambda|xx'| - \mu|xx'|\Bigr| = |\lambda - \mu| \operatorname{diam} X,$$

откуда и вытекает требуемое.

(7) Выберем произвольные непрерывные $X \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} Y$ и обозначим $\operatorname{dis}_\lambda$ и $\operatorname{codis}_\lambda$ соответственно искажение и коискажение отображений между λX и λY. Тогда

$$\operatorname{dis}_\lambda f = \sup_{x,x' \in X} \Bigl| \lambda|xx'| - \lambda\bigl|f(x)f(x')\bigr| \Bigr| = \lambda \operatorname{dis}_\lambda f,$$

$$\operatorname{codis}_\lambda(f,g) = \sup_{x\in X,\, y\in Y} \Bigl| \lambda|x\,g(y)| - \lambda\bigl|f(x)y\bigr| \Bigr| = \lambda \operatorname{codis}(f,g),$$

откуда и вытекает декларируемое.

(8) Это следует из неравенства $d_{GH} \leqslant d^c_{GH}$. $\square$

4. Сравнение метрик (на нульмерных пространствах)

Предложение 7. *Если X и Y — дискретные метрические пространства, то $d^c_{GH}(X,Y) = d_{GH}(X,Y)$.*

Доказательство. Это вытекает из того, что все отображения между X и Y непрерывны. $\square$

Для доказательства следующего предложения нам понадобится достаточное условие непрерывности отображения метрических пространств.

Лемма 1. *Пусть $f\colon X \to Y$ — произвольное отображение метрических пространств, причем существует положительное число $\varepsilon \in \mathbb{R}$ такое, что для любых различных $y_1, y_2 \in Y$ с непустыми прообразами и любых $x_1 \in f^{-1}(y_1)$ и $x_2 \in f^{-1}(y_2)$ выполняется $|x_1x_2| > \varepsilon$. Тогда отображение f непрерывно.*

Доказательство. Действительно, пусть $y \in Y$ имеет непустой прообраз, тогда для любой точки $x \in f^{-1}(y)$ выполняется $U_\varepsilon(x) \subset f^{-1}(y)$, поэтому $f^{-1}(y)$ открыто и, значит, для любого открытого $V \subset Y$ множество $f^{-1}(V) = \cup_{y\in V} f^{-1}(y)$ также открыто в X. $\square$

Предложение 8. *Пусть X и Y — произвольные метрические пространства такие, что $2d_{GH}(X,Y) < s(X)$, тогда $d^c_{GH}(X,Y) = d_{GH}(X,Y)$.*

Доказательство. Положим $s := s(X)$ и пусть $\varepsilon > 0$ такое, что $2d_{GH}(X,Y) < s - \varepsilon$. Тогда существует соответствие $R \in \mathcal{R}(X,Y)$, у которого $\operatorname{dis} R < s - \varepsilon$. Множество всех таких соответствий обозначим $\mathcal{R}_\varepsilon(X,Y)$.

Согласно формуле (3) имеет место равенство $d_{GH}(X,Y) = \frac12 \inf\bigl\{\operatorname{dis} R : R \in \mathcal{R}_\varepsilon(X,Y)\bigr\}$. Выберем произвольное $R \in \mathcal{R}_\varepsilon(X,Y)$. Покажем, что $\bigl|R(x_1)R(x_2)\bigr| > \varepsilon$ при $x_1 \ne x_2$. Действительно, для любых $(x_1,y_1), (x_2,y_2) \in R$, $x_1 \ne x_2$, выполняется неравенство $|y_1y_2| \geqslant$ $\geqslant |x_1x_2| - \operatorname{dis} R > s - (s-\varepsilon) = \varepsilon > 0$. Поэтому множества $\{R(x) : x \in X\}$ образуют открытое разбиение пространства Y.

Построим отображения $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to X$ так: для каждого $x \in X$ точку $f(x)$ выберем произвольно в $R(x)$, а для каждого $y \in R(x)$ положим $g(y) = x$. Так как $s(X) > 0$, то X дискретно, поэтому f непрерывно. Непрерывность g вытекает из леммы 1. По предложению 2 имеем $\operatorname{dis} R_{f,g} \leqslant \operatorname{dis} R$. Таким образом, мы построили отображение $\mathcal{R}_\varepsilon(X,Y) \to \mathcal{R}_\varepsilon(X,Y)$, $R \mapsto R_{f,g}$, поэтому, в силу определения d^c_{GH},

$$d^c_{GH}(X,Y) \leqslant \frac12 \inf\bigl\{\operatorname{dis} R_{f,g} : R \in \mathcal{R}_\varepsilon(X,Y)\bigr\} \leqslant$$
$$\leqslant \frac12 \inf\bigl\{\operatorname{dis} R : R \in \mathcal{R}_\varepsilon(X,Y)\bigr\} = d_{GH}(X,Y).$$

Осталось воспользоваться неравенством (2) предложения 6. $\square$

Предложение 9. *Пусть X — метрическое пространство и* $\dim X = 0$. *Тогда для всякого подмножества $A \subset X$ справедливо неравенство $d^c_{GH}(A, X) \leqslant d_H(A, X)$.*

Доказательство. Для произвольного $\varepsilon > 0$ положим $r = d_H(A, X) + \varepsilon$, тогда, по определению расстояния Хаусдорфа, $\lambda = \bigl\{U_r(a) : a \in A\bigr\}$ — открытое покрытие пространства X. Так как $\dim X = 0$, то по теоремам Стоуна [17] (см. [18, теорема 4.4.1]) и Даукера [20] (см. [18, теорема 7.2.4]) существует вписанное в λ открытое покрытие $\mu = \{U_\beta\}$ кратности 1, т.е. μ — разбиение пространства X открытыми множествами. Следовательно, для всякого U_β существует такая точка $a_\beta \in A$, что $U_\beta \subset U_r(a_\beta)$.

Пусть $f\colon A \to X$ — включение, а отображение $g\colon X \to A$ задается формулой $g(U_\beta) = a_\beta$. Так как множества U_β открыты и попарно не пересекаются, то отображение g корректно определено и непрерывно, причем для всякой точки $x \in X$ имеет место неравенство $\bigl|x\,g(x)\bigr| < r$. Ясно, что $\operatorname{dis} f = 0$,

$$\operatorname{dis} g = \sup_{x,x' \in X} \Bigl| |xx'| - \bigl|g(x)g(x')\bigr| \Bigr| \leqslant \sup_{x,x' \in X} \Bigl(\bigl|x\,g(x)\bigr| + \bigl|x'\,g(x')\bigr| \Bigr) \leqslant 2r,$$

и, наконец,

$$\operatorname{codis}(f, g) = \sup_{x \in X,\, a \in A} \Bigl| \bigl|x\,f(a)\bigr| - \bigl|g(x)a\bigr| \Bigr| = \sup_{x \in X,\, a \in A} \Bigl| |xa| - \bigl|g(x)a\bigr| \Bigr| \leqslant \sup_{x \in X} |x\,g(x)| \leqslant r,$$

поэтому $\operatorname{dis} R_{f,g} \leqslant 2d_H(A, X) + 2\varepsilon$ и, в силу произвольности ε, имеем $\operatorname{dis} R_{f,g} \leqslant 2d_H(A, X)$, откуда $d^c_{GH}(A, X) \leqslant d_H(A, X)$, что и утверждалось. □

Следствие 2. *Для метрических пространств X, Y и любых их всюду плотных подмножеств $A \subset \overline{A} = X$, $B \subset \overline{B} = Y$ таких, что* $\dim A = \dim B = 0$, *справедливо равенство*

$$d^c_{GH}(A, B) = d_{GH}(X, Y).$$

Доказательство. Для данного $\varepsilon > 0$ выделим в множествах A и B дискретные ε-сети $A_\varepsilon \subset A$ и $B_\varepsilon \subset B$ соответственно. Согласно неравенству треугольника для расстояний d^c_{GH} и d_{GH}, а также предложениям 9 и 7 имеет место цепочка неравенств

$$\begin{aligned} d^c_{GH}(A, B) &\leqslant d^c_{GH}(A, A_\varepsilon) + d^c_{GH}(A_\varepsilon, B_\varepsilon) + d^c_{GH}(B_\varepsilon, B) \leqslant \\ &\leqslant 2\varepsilon + d^c_{GH}(A_\varepsilon, B_\varepsilon) = 2\varepsilon + d_{GH}(A_\varepsilon, B_\varepsilon) \leqslant \\ &\leqslant 2\varepsilon + d_{GH}(A_\varepsilon, A) + d_{GH}(A, X) + d_{GH}(X, Y) + d_{GH}(Y, B) + d_{GH}(B, B_\varepsilon) \leqslant \\ &\leqslant 2\varepsilon + \varepsilon + 0 + d_{GH}(X, Y) + 0 + \varepsilon = 4\varepsilon + d_{GH}(X, Y). \end{aligned}$$

Из произвольности числа ε и неравенства (2) предложения 6 следует цепочка неравенств $d^c_{GH}(A, B) \leqslant d_{GH}(X, Y) = d_{GH}(A, B) \leqslant d^c_{GH}(A, B)$, дающая требуемое равенство. □

Следствие 3. *Для любых нульмерных метрических пространств X и Y справедливо равенство $d^c_{GH}(X, Y) = d_{GH}(X, Y)$.*

Подчеркнем, что предложение 3 является обобщением предложения 7, которым, впрочем, мы пользовались в доказательстве этого более общего утверждения.

Предложение 10. *Пусть X — метрическое пространство и* $\operatorname{ind} X \neq 0$. *Тогда существует такое $r > 0$, что для всякого непрерывного отображения $f\colon X \to Y$ в метрическое пространство Y с* $\operatorname{ind} Y = 0$ *имеет место неравенство* $\operatorname{dis} f \geqslant r$. *В частности, справедливо неравенство $2d^c_{GH}(X, Y) \geqslant r$.*

Доказательство. В силу условия $\operatorname{ind} X \neq 0$ существуют такие замкнутое подмножество $F \subset X$ и точка $x \in X \setminus F$, что всякое открыто-замкнутое множество, содержащее точку x, пересекается с множеством F. Положим $r = |xF| > 0$. Для каждого отображения $f\colon X \to Y$ справедлива альтернатива: или $\bigl|f(x)f(F)\bigr| = 0$, или $\bigl|f(x)f(F)\bigr| > 0$.

В первом случае справедлива оценка $\operatorname{dis} f \geqslant |xF| = r$.

Во втором случае условие $\operatorname{ind} Y = 0$ влечет существование у точки $f(x)$ открыто-замкнутой окрестности $U^{f(x)}$, лежащей вне замыкания $\overline{f(F)}$ множества $f(F)$. Прообраз $U^x := f^{-1}\bigl(U^{f(x)}\bigr)$ является открыто-замкнутой окрестностью точки x, причем $U^x \cap F = \emptyset$, а это — противоречие с выбором точки x и замкнутого множества F. $\square$

Предложение 11. *Пусть X — метрическое пространство и $\operatorname{Ind} X \neq 0$. Тогда существует такое $r > 0$, что для всякого непрерывного отображения $f\colon X \to Y$ в метрическое пространство Y с $\operatorname{Ind} Y = 0$ имеет место неравенство $\operatorname{dis} f \geqslant r$. В частности, справедливо неравенство $2d^c_{GH}(X,Y) \geqslant r$.*

Доказательство. По теореме Нагами–Робертса [21, Theorem on p. 601] существуют такие замкнутые подмножества $F, H \subset X$, что $r = |FH| > 0$ и всякое открыто-замкнутое множество, содержащее множество F, пересекается с множеством H. Для каждого отображения $f\colon X \to Y$ справедлива альтернатива: или $\bigl|f(F)f(H)\bigr| = 0$, или $\bigl|f(F)f(H)\bigr| > 0$.

В первом случае имеет место оценка $\operatorname{dis} f \geqslant |FH| = r$.

Во втором случае условие $\operatorname{Ind} Y = 0$ влечет существование у замкнутого множества $\overline{f(F)}$ открыто-замкнутой окрестности $U^{f(F)}$, лежащей вне замыкания $\overline{f(H)}$ множества $f(H)$. Прообраз $U^F = f^{-1}\bigl(U^{f(F)}\bigr)$ является открыто-замкнутой окрестностью множества F и $U^F \cap H = \emptyset$, а это — противоречие с выбором замкнутых множеств F и H. $\square$

Напомним, что топологическое пространство называется *вполне несвязным*, если все его связные компоненты — одноточечны.

Предложение 12. *Пусть $K \subset X$ — связное подмножество метрического пространства X, и Y — вполне несвязное метрическое пространство. Тогда для каждого непрерывного отображения $f\colon X \to Y$ выполняется $\operatorname{dis} f \geqslant \operatorname{diam} K$ и, поэтому, $2d^c_{GH}(X,Y) \geqslant \operatorname{diam} K$. В частности, если X — связное метрическое пространство, а Y — вполне несвязное метрическое пространство, для которого $\operatorname{diam} X \geqslant \operatorname{diam} Y$, то $2d^c_{GH}(X,Y) = \operatorname{diam} X$. Например, это имеет место для любой дискретной ε-сети $Y \subset X$.*

Доказательство. Если $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение, то, в силу связности K, ограничение отображения f на K постоянно, так что $\operatorname{dis} f \geqslant \operatorname{diam} K$, поэтому $2d^c_{GH}(X,Y) \geqslant \operatorname{diam} X$ по определению непрерывного расстояния Хаусдорфа. Второе утверждение вытекает из пункта (2) предложения 6. $\square$

5. Нулевое расстояние

Мы уже указывали, что (непрерывное) расстояние Громова – Хаусдорфа является псевдометрикой, т.е. может равняться нулю между неизометричными пространствами. Поэтому важное значение имеет описание некоторых классов метрических пространств, находящихся на нулевом расстоянии друг от друга.

Теорема 6. *Для компактных метрических пространств X и Y следующие условия эквивалентны:*

1. $d^c_{GH}(X,Y) = 0$;
2. $d_{GH}(X,Y) = 0$;

3. *пространства X и Y изометричны.*

Доказательство. Импликации (3) ⇒ (1) ⇒ (2) следуют из свойств (1) и (2) соответственно предложения 6.

Импликации (2) ⇒ (3) — это известная глубокая теорема [8, теорема 7.3.30]. □

Нам для приложений понадобится следующий вариант этой теоремы, мгновенно вытекающий из [8, Exercise 7.3.31].

Теорема 7. *Если метрическое пространство X компактно, то для метрического пространства Y следующие условия эквивалентны*:

1. $d_{GH}(X,Y)=0$;

2. *пространство Y изометрично плотному подмножеству пространства X (например, в случае $X=S^n$ имеется не менее континуума попарно неизометричных Y, см. Введение).*

Ситуация с непрерывным расстоянием Громова – Хаусдорфа существенно иная.

Фиксируем на сфере S^n, $n\geqslant 1$, некоторую метрику ρ и некоторую непрерывную свободную инволюцию σ (например антиподальное отображение). Так как непрерывная функция на компакте достигает свой минимум, то

$$d(\rho,\sigma):=\inf\Big\{\rho\big(x,\sigma(x)\big):x\in S^n\Big\}=\min\Big\{\rho\big(x,\sigma(x)\big):x\in S^n\Big\}>0.$$

Рассмотрим также число

$$d(\rho):=\sup\big\{d(\rho,\sigma):\sigma \text{ — непрерывная свободная инволюция на } S^n\big\}>0.$$

Предложение 13. *Для произвольной метрики ρ на сфере S^n и произвольного метрического пространства Y, топологически вкладывающегося в $\mathbb{R}^n$, имеют место неравенства*

$$d(\rho)\leqslant 2d^c_{GH}(S^n,Y)\leqslant\max\{\operatorname{diam}S^n,\operatorname{diam}Y\}.$$

Доказательство. Пусть $\nu\colon Y\to\mathbb{R}^n$ — топологическое вложение, $f\colon S^n\to Y$ и $g\colon Y\to S^n$ — непрерывные отображения, и $h=\nu\circ f$. Рассмотрим на сфере произвольную непрерывную свободную инволюцию σ. Согласно обобщенной теореме Борсука–Улама [14, Теорема 5], существует такая точка $x\in S^n$, что $h(x)=h\big(\sigma(x)\big)$, поэтому, в силу инъективности ν, имеем $f(x)=f\big(\sigma(x)\big)$. Это означает, что $\operatorname{dis}f\geqslant d(\rho,\sigma)$. Следовательно, $d(\rho,\sigma)\leqslant 2d^c_{GH}(S^n,Y)$. Из произвольности рассмотренной инволюции следует левое неравенство.

Правое неравенство является свойством (4) предложения 6. □

Замечание 3. *Из предложения* 13 *вытекает, что для стандартной сферы единичного радиуса $S^n\subset\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 1$, наделенной геодезическим или индуцированным евклидовым расстоянием, для всякого $m>n$ имеет место равенство $2d^c_{GH}(S^n,S^m)=\operatorname{diam}S^n$. Отметим, что согласно* [2], *Theorem A, p.* 5, *имеет место $2d_{GH}(S^n,S^m)<\operatorname{diam}S^n$.*

Следствие 4. *Для произвольной метрики ρ на сфере S^n и произвольного метрического пространства Y следующие условия эквивалентны*:

1. $d^c_{GH}(S^n,Y)=0$, *и*

2. *пространство Y изометрично сфере (S^n,ρ).*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Так как $d_{GH}(S^n,Y)\leqslant d^c_{GH}(S^n,Y)=0$, то согласно теореме 7 можно считать, что пространство Y изометрично лежит в сфере (S^n,ρ). Если Y является собственным подмножеством сферы, то оно топологически вкладывается в пространство $\mathbb{R}^n$ и $2d^c_{GH}(S^n,Y)\geqslant d(\rho)>0$ согласно предложению 13.

Импликация (2) $\Rightarrow$ (1) очевидна. $\square$

Скажем, что метрическое пространство X *обладает свойством единственности в классе* $\mathcal{GH}$*,* $\mathcal{M}$*,* $\mathcal{GH}^c$*, или* $\mathcal{M}^c$, если для всякого метрического пространства Y в рассматриваемом классе из равенства $d_{GH}(X,Y)=0$ в первых двух классах и равенства $d^c_{GH}(X,Y)=0$ во вторых двух следует изометричность X и Y. Ясно, что теорема 6 и следствие 4 — это описание некоторых классов пространств со свойством единственности в классах $\mathcal{M}^c$, $\mathcal{M}$ и $\mathcal{GH}^c$ соответственно.

Предложение 14. *Если метрическое пространство X обладает свойством единственности в классе $\mathcal{GH}$, то оно является полным и дискретным.*

Доказательство. Пусть пространство X не является полным. Рассмотрим его пополнение Y. Так как пространство X можно изометрически отождествить с плотным подмножеством Y, то $d_{GH}(X,Y)\leqslant d_H(X,Y)=0$. Сами пространства X и Y не изометричны, так как первое не является полным, а второе полно.

Пусть полное пространство X не является дискретным. Возьмем в нем не изолированную точку $x_0\in X$. Тогда $d_{GH}(X,X\setminus x_0)=0$, но пространства X и $X\setminus x_0$ не изометричны, так как первое является полным, а второе не полно. $\square$

Пример 5. *В [12], пример 5.11, построен пример счетного полного ограниченного метрического пространства Y и его открыто-замкнутого подмножества X со следующими свойствами.*

1. *В пространстве Y ровно одна неизолированная точка.*
2. *Пространство X дискретно. Следовательно, пространство Y топологически (а, значит, и изометрически) не вкладывается в пространство X.*
3. *$d_{GH}(X,Y)=0$, а следовательно и $d^c_{GH}(X,Y)=0$ по следствию 3. Впрочем, для этих пространств соответствующие отображения $f_\varepsilon\colon X\to Y$ и $g_\varepsilon\colon Y\to X$ легко предъявить и конструктивно.*
4.
   - $0=s(Y)=s(X)<d(X)=d(Y)=3.5$,
   - $3=R(Y)=R(X)<\operatorname{diam}X=\operatorname{diam}Y=4$,
   - $d_H(X,Y\setminus X)=3$,
   - $\bigl|X(Y\setminus X)\bigr|=2$.
5. *Для всякого изометрического вложения $h\colon X\to Y$ имеют место следующие оценки: $d_H\bigl(h(X),Y\setminus h(X)\bigr)=3$ и $2\leqslant\bigl|h(X)\bigl(Y\setminus h(X)\bigr)\bigr|\leqslant 3$.*

Пространства X и Y показывают необратимость предложения 14.

Ясно, что из $s(X)>0$ следует, что пространство X является полным и дискретным. Обратное, вообще говоря не имеет место.

Пример 6. *На прямой $\mathbb{R}$ рассмотрим подмножество $X=\bigl\{n\pm\frac{1}{6n}:n\in\mathbb{N}\bigr\}$. Пространство X полно, дискретно и $s(X)=0$.*

Для метрического пространства X рассмотрим множество всех расстояний в нем

$$\operatorname{dist}X=\bigl\{|xx'|:x,x'\in X\bigr\}.$$

Легко проверяется, что

- $s(X)=\Big|0\,\big(\operatorname{dist}X\setminus\{0\}\big)\Big|$ и $\operatorname{diam}X=d_H\big(\{0\},\operatorname{dist}X\big)=\operatorname{diam}\operatorname{dist}X$;
- если пространства X и Y изометричны, то $\operatorname{dist}X=\operatorname{dist}Y$;
- если $d_{GH}(X,Y)=0$, то $d_H\big(\operatorname{dist}X,\operatorname{dist}Y\big)=0$, т.е. $\overline{\operatorname{dist}X}=\overline{\operatorname{dist}Y}$ (см. также [16, Lemma 5.1]).

Предложение 15. *Для любых $X,Y\in\mathcal{GH}$ выполняется*

1. $d_H\big(\operatorname{dist}X,\operatorname{dist}Y\big)\leqslant 2d_{GH}(X,Y)$;
2. $s(X)\leqslant 2d_{GH}(X,Y)$ *или* $s(Y)\leqslant s(X)+2d_{GH}(X,Y)$;
3. $2s(X)<s(Y)$ *или* $s(Y)-s(X)\leqslant d_H(\operatorname{dist}X,\operatorname{dist}Y)$.

Доказательство. Если $d_{GH}(X,Y)=\infty$, то утверждения (1) и (2) очевидны (в утверждение (3) расстояние $d_{GH}(X,Y)$ не входит). Поэтому будем сразу предполагать, что $d_{GH}(X,Y)<\infty$.

(1) Фиксируем число $\varepsilon>0$ и такое соответствие $R\in\mathcal{R}(X,Y)$, что $\operatorname{dis}R<2d_{GH}(X,Y)+\varepsilon$. Возьмем две произвольные точки $x,x'\in X$ и пусть $y,y'\in Y$ — это такие точки, что $(x,y),\ (x',y')\in R$. Тогда $\big||xx'|-|yy'|\big|\leqslant\operatorname{dis}R<2d_{GH}(X,Y)+\varepsilon$. Из полученного включения $\operatorname{dist}X\subset B_{2d_{GH}(X,Y)+\varepsilon}(\operatorname{dist}Y)$, произвольности числа $\varepsilon>0$ и симметричности рассматриваемого условия вытекает первое неравенство.

(2) Пусть $s(X)>2d_{GH}(X,Y)$. Так как при $s(Y)\leqslant s(X)$ второе неравенство автоматически выполняется, будем предполагать, что $s(Y)>s(X)$. Тогда

$$\begin{aligned}\big|s(X)\,0\big|>2d_{GH}(X,Y)\geqslant d_H(\operatorname{dist}X,\operatorname{dist}Y)\geqslant\big|s(X)\operatorname{dist}Y\big|=&\\ =\min\Big\{\big|s(X)\,0\big|,s(Y)-s(X)\Big\}=s(Y)-s(X),&\end{aligned}$$

что и требовалось.

(3) Если $s(Y)\leqslant s(X)$, то второе неравенство очевидно. Рассмотрим теперь оставшийся случай $s(X)<s(Y)\leqslant 2s(X)$. Тогда $\big|s(X)s(Y)\big|=s(Y)-s(X)\leqslant s(X)=\big|s(X)\,0\big|$, и учитывая $\big|s(X)\operatorname{dist}Y\big|\leqslant d_H(\operatorname{dist}X,\operatorname{dist}Y)$, получаем

$$\big|s(X)\operatorname{dist}Y\big|=\min\Big\{\big|s(X)\,0\big|,\ \big|s(X)s(Y)\big|\Big\}=\big|s(X)s(Y)\big|\leqslant d_H(\operatorname{dist}X,\operatorname{dist}Y),$$

что и утверждалось. $\square$

Если диаметр X или Y конечен, то $2d_H(X,Y)\geqslant\big|\operatorname{diam}X-\operatorname{diam}Y\big|$, потому неравенство (1) предложения 15 является усилением свойства (5) из предложения 6. Отметим также, что свойство (1) влечет

Следствие 5. *Для любых $X,Y\in\mathcal{GH}$ из $d_{GH}(X,Y)=0$ следует $s(X)=s(Y)$.*

Теорема 8. *Если $s(X)>0$ и $d_{GH}(X,Y)=0$, то для любого $\varepsilon>0$ существует такой гомеоморфизм $f_\varepsilon\colon X\to Y$, что $\big||f_\varepsilon(x)f_\varepsilon(x')|-|xx'|\big|\leqslant\varepsilon$ для любых точек $x,x'\in X$.*

Доказательство. Пусть $d_{GH}(X,Y)=0$. Согласно предложению 8, $d^c_{GH}(X,Y)=0$. Пусть $0<\varepsilon<s(X)$ и $f_\varepsilon\colon X\to Y$, $g_\varepsilon\colon Y\to X$ — такие отображения, что $\operatorname{dis}R_{f_\varepsilon,g_\varepsilon}\leqslant\varepsilon$.

Покажем, что $g_\varepsilon\circ f_\varepsilon\colon X\to X$ и $g_\varepsilon\circ f_\varepsilon\colon Y\to Y$ являются тождественными отображениями. Для произвольной точки $x\in X$ и точки $y=f_\varepsilon(x)\in Y$ запишем коискажение

$$\Big|x\,g_\varepsilon\big(f_\varepsilon(x)\big)\Big|=\Big|\big|x\,g_\varepsilon(y)\big|-\big|f_\varepsilon(x)\,y\big|\Big|\leqslant\varepsilon<s(X).$$

Следовательно, $x=g_\varepsilon\big(f_\varepsilon(x)\big)$.

Следствие 5 влечет $s(Y)=s(X)$. Поэтому аналогично доказывается и равенство $g_\varepsilon\circ f_\varepsilon=\mathrm{Id}_Y$.

Неравенство $\big||f_\varepsilon(x)f_\varepsilon(x')|-|xx'|\big|\leqslant\varepsilon$ — это в точности неравенство $\operatorname{dis}f_\varepsilon\leqslant\varepsilon$. $\square$

Предложение 16. *Пусть для* $X \in \mathcal{GH}$ *существует такое число* $r > 0$, *что* $s(\operatorname{dist} X) \geqslant r$ (*расстояние между различными точками множества* $\operatorname{dist} X$ *не менее* r). *Тогда* $s(X) \geqslant r$ *и при* $\varepsilon < r$ *всякое отображение* f_ε *из теоремы* 8 *является изометрией. В частности, это пространство* X *обладает свойством единственности в классе* $\mathcal{GH}$.

Доказательство. Ясно, что множество $\operatorname{dist} X \subset \mathbb{R}$ замкнуто и дискретно. Пусть $d_{GH}(X,Y) = 0$. Тогда из пункта (1) предложения 15 вытекает $d_H\bigl(\operatorname{dist} X, \operatorname{dist} Y\bigr) = 0$, откуда, в силу замкнутости $\operatorname{dist} X$, получаем $\operatorname{dist} X = \overline{\operatorname{dist} X} = \overline{\operatorname{dist} Y}$, поэтому $\operatorname{dist} Y \subset \operatorname{dist} X$. Так как $\operatorname{dist} X$ дискретно, то замыкание собственного подмножества не может равняться $\operatorname{dist} X$, откуда $\operatorname{dist} X = \operatorname{dist} Y$. Согласно выбору отображения $f_\varepsilon\colon X \to Y$, для любых точек $x, x' \in X$ справедливо неравенство $\bigl||f_\varepsilon(x)f_\varepsilon(x')| - |xx'|\bigr| \leqslant \varepsilon < r$, и если $\bigl|f_\varepsilon(x)f_\varepsilon(x')\bigr| \neq |xx'|$, то величины $\bigl|f_\varepsilon(x)f_\varepsilon(x')\bigr|$ и $|xx'|$ отличаются друг от друга не менее, чем на r. Последнее, вместе с предыдущим неравенством влечет $\bigl|f_\varepsilon(x)f_\varepsilon(x')\bigr| = |xx'|$. $\square$

Следствие 6. *Всякое метрическое пространство* X *с конечным множеством* $\operatorname{dist} X$ *обладает свойством единственности в классе* $\mathcal{GH}$.

Замечание 4. *Следствие* 6 *также может быть мгновенно получено из* [16], *леммы* 5.1 *и* 6.1.

Гипотеза. *Всякое метрическое пространство* X *с замкнутым и дискретным множеством* $\operatorname{dist} X$ *обладает свойством единственности в классе* $\mathcal{GH}$.

Пример 7. *На* $X = \{0\} \sqcup \mathbb{N} \sqcup \{\infty\}$ *зададим метрику*

$$|xx'| = \begin{cases} 2 & \text{при } 0 \neq x \neq x' \neq 0; \\ 1 + \frac{1}{2n} & \text{при } x = 0,\ x' \in \mathbb{N} \sqcup \{\infty\}. \end{cases}$$

Метрическое пространство X *и его открыто-замкнутое подмножество* $Y = \{0\} \sqcup \mathbb{N} \subset X$ *обладают следующими свойствами.*

1. $\operatorname{diam} X = 2 = \operatorname{diam} Y$ *и* $s(X) = s(Y) = 1$, *поэтому пространства* X *и* Y *полны и дискретны.*

2. $\operatorname{dist} X = \{0, 1, 1 + \frac{1}{2n}, 2 : n \in \mathbb{N}\} \neq \{0, 1 + \frac{1}{2n}, 2 : n \in \mathbb{N}\} = \operatorname{dist} Y$, *поэтому пространства* X *и* Y *не изометричны.*

3. $d^c_{GH}(X, Y) = 0$. *Отображение* $h_m\colon X \to Y$, *задаваемое формулой*

$$h_m(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x = 0; \\ x & \text{при } 1 \leqslant x < m; \\ x + 1 & \text{при } m \leqslant x < \infty; \\ m & \text{при } x = \infty, \end{cases}$$

   является $\frac{1}{2m}$-*изометрией.*

4. *Изометриями пространств* X *и* Y *являются только их тождественные отображения.*

5. $\bigl|Y\,(X \setminus Y)\bigr| = 1$ *и* $d_H(X, Y) = 1$.

6. Сравнение топологий

Обозначим $p_c\colon \mathcal{GH}^c \to \mathcal{GH}$ тождественное отображение. В силу свойства (1) предложения 6, отображение p_c является нерастягивающим, а значит и непрерывным. Напомним также, что непрерывное биективное отображение называется *уплотнением*. Это понятие также переносится на топологические классы, так что p_c — уплотнение. Напомним (предложение 12), что при этом два метрических пространства, находящихся на положительном расстоянии d^c_{GH} могут переходить в пространства с нулевым расстоянием d_{GH}.

Предложение 17. *Отображение p_c^{-1} разрывно во всякой точке $X \in \mathcal{GH}$ такой, что $\operatorname{Ind} X \ne 0$.*

Доказательство. Выберем произвольное непустое метрическое пространство X, для которого $\operatorname{Ind} X \ne 0$. В силу предложения 11 существует такое $r > 0$, что для всякого непустого метрического пространства Y с $\operatorname{Ind} Y = 0$ справедливо $d^c_{GH}(X, Y) \geqslant r$. Для каждого дискретного пространства Z выполняется $\operatorname{Ind} Z = 0$. С другой стороны, легко показать, что для каждого $\delta > 0$ существует дискретное $Y \subset X$, для которого $d_{GH}(X, Y) \leqslant d_H(X, Y) < \delta$. Последнее означает, что ни для одной окрестности $U_\delta(X)$ при $\delta < r$ не выполняется $p_c^{-1}\bigl(U_\delta(X)\bigr) \subset U_r(X)$, а это и есть разрывность p_c^{-1} в точке X. □

Замечание 5. *При доказательстве предложения* 17 *мы на самом деле показали большее, а именно, что p_c^{-1} разрывно в точке X,* $\operatorname{Ind} X \ne 0$ *на меньших множествах, например,*

- *на объединении $\{X\}$ с классом всех пространств с нулевой большой индуктивной размерностью;*
- *на объединении $\{X\}$ с классом всех дискретных пространств;*
- *для компактного X — на объединении $\{X\}$ с множеством всех конечных метрических пространств.*

Напомним, что отображение p_c является изометрией на подклассе всех нульмерных пространств в смысле Лебега (*следствие* 3)*. Однако, из сказанного выше заключаем, что добавление даже одной точки X может привести к появлению разрыва у p_c^{-1} и, значит, к нарушению изометричности.*

Ниже мы покажем, что отображение p_c^{-1} может быть разрывно и в точках, отвечающих дискретным пространствам, причем разрывность проявляется на достаточно тощем подмножестве в $\mathcal{GH}$. Тем не менее, на вполне дискретных пространств X, т.е. когда $s(X) > 0$, отображение p_c^{-1} непрерывно. Следующий результат мгновенно вытекает из предложения 8.

Следствие 7. *Если $s(X) > 0$, то отображение p_c^{-1} непрерывно в точке $X \in \mathcal{GH}$.*

Для компактных метрических пространств имеется естественный критерий непрерывности отображения p_c^{-1}.

Теорема 9. *Для компактного метрического пространства $X \in \mathcal{GH}$ следующие условия эквивалентны*

1. $\operatorname{Ind} X = 0$;
2. *отображение p_c^{-1} непрерывно в точке X.*

Доказательство. (2) $\Rightarrow$ (1). Предположим противное, т.е. что $\operatorname{Ind} X \ne 0$. По предложению 11, существует $r > 0$, зависящее только от X такое, что $2d^c_{GH}(X, Y) \geqslant r$. Но последнее противоречит непрерывности p_c^{-1} в точке X.

(1) $\Rightarrow$ (2). Нам надо доказать, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из $d_{GH}(X, Y) < \delta$ следует $d^c_{GH}(X, Y) < \varepsilon$. Для $0 < \varepsilon' < \varepsilon/4$ рассмотрим покрытие $\lambda = \bigl\{U_{\varepsilon'}(x)\bigr\}_{x\in X}$. Так как $\dim X = 0$, то существует открыто-замкнутое разбиение μ, вписанное в λ. Так как X компактно, что разбиение μ конечно. Пусть $\mu = \{U_1, \ldots, U_m\}$, тогда $r := \min\bigl\{|U_iU_j| : i \ne j\bigr\} > 0$ и $\operatorname{diam} U_i \leqslant 2\varepsilon' < \varepsilon/2$. Положим $\delta = \min\{r/2, \varepsilon'\} < \varepsilon/4$ и покажем, что δ — искомое.

Пусть $d_{GH}(X, Y) < \delta$, тогда существует $\alpha > 0$ такое, что $d_{GH}(X, Y) < \delta - \alpha$ и, значит, можно выбрать соответствие $R \in \mathcal{R}(X, Y)$, для которого $\operatorname{dis} R < 2\delta - 2\alpha \leqslant r - 2\alpha$. Положим $V_k = R(U_k)$, тогда при $i \ne j$ имеем $V_i \cap V_j = \emptyset$, так как для любых $y_k \in V_k$ и $x_k \in U_k$ таких, что $(x_k, y_k) \in R$, выполняется

$$|y_iy_j| \geqslant |x_ix_j| - \operatorname{dis} R > r - (r - 2\alpha) = 2\alpha.$$

Таким образом, $V_k = \cup_{y\in V_k} U_\alpha(y)$ — открытое множество для каждого k, поэтому $\{V_k\}_{k=1}^m$ — разбиение Y открыто-замкнутыми множествами. Заметим, что $\operatorname{diam} V_k \leqslant \operatorname{diam} U_k + \operatorname{dis} R \leqslant$ $\leqslant 2\varepsilon' + \varepsilon' < 3\varepsilon/4$.

Выберем теперь произвольные $x_k \in U_k$, $y_k \in V_k$, $(x_k, y_k) \in R$ и зададим отображения $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to X$ так: $f(U_k) = y_k$ и $g(V_k) = x_k$, тогда f и g — непрерывные отображения. Покажем, что $\operatorname{dis} R_{f,g} < 2\varepsilon$, откуда $d^c_{GH}(X, Y) \leqslant \frac12 \operatorname{dis} R_{f,g} < \varepsilon$, что мы и хотим.

Выберем произвольные $x \in U_i$ и $x' \in U_j$, тогда

$$\begin{aligned}\bigl||xx'| - |y_iy_j|\bigr| &= \bigl||xx'| - |x'x_i| + |x'x_i| - |x_ix_j| + |x_ix_j| - |y_iy_j|\bigr| \leqslant\\ &\leqslant \bigl||xx'| - |x'x_i|\bigr| + \bigl||x'x_i| - |x_ix_j|\bigr| + \bigl||x_ix_j| - |y_iy_j|\bigr| \leqslant\\ &\leqslant |xx_i| + |x'x_j| + \operatorname{dis} R \leqslant \operatorname{diam} U_i + \operatorname{diam} U_j + \operatorname{dis} R < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 + \varepsilon/4 < 2\varepsilon,\end{aligned}$$

поэтому $\operatorname{dis} f < 2\varepsilon$.

Выберем теперь произвольные $y \in V_i$ и $y' \in V_j$, тогда

$$\begin{aligned}\bigl||x_ix_j| - |yy'|\bigr| &= \bigl||x_ix_j| - |y_iy_j| + |y_iy_j| - |y_jy| + |y_jy| - |yy'|\bigr| \leqslant\\ &\leqslant \bigl||x_ix_j| - |y_iy_j|\bigr| + \bigl||y_iy_j| - |y_jy|\bigr| + \bigl||y_jy| - |yy'|\bigr| \leqslant\\ &\leqslant \operatorname{dis} R + |y_iy| + |y_jy'| \leqslant \operatorname{dis} R + \operatorname{diam} V_i + \operatorname{diam} V_j < \varepsilon/4 + 3\varepsilon/4 + 3\varepsilon/4 < 2\varepsilon,\end{aligned}$$

поэтому $\operatorname{dis} g < 2\varepsilon$.

Наконец, оценим коискажение $\operatorname{codis}(f, g)$. Для этого выберем произвольные $x \in U_i$ и $y \in V_j$, тогда

$$\begin{aligned}\bigl||x\,x_j| - |y_iy|\bigr| &= \bigl||x\,x_j| - |x_jx_i| + |x_jx_i| - |y_jy_i| + |y_jy_i| - |y_iy|\bigr| \leqslant\\ &\leqslant \bigl||x\,x_j| - |x_jx_i|\bigr| + \bigl||x_jx_i| - |y_jy_i|\bigr| + \bigl||y_jy_i| - |y_iy|\bigr| \leqslant\\ &\leqslant |xx_i| + \operatorname{dis} R + |y_jy| \leqslant \operatorname{diam} U_i + \operatorname{dis} R + \operatorname{diam} U_j < \varepsilon/2 + \varepsilon/4 + \varepsilon/2 < 2\varepsilon,\end{aligned}$$

откуда $\operatorname{codis}(f, g) < 2\varepsilon$ и, значит, $\operatorname{dis} R_{f,g} < 2\varepsilon$, что и завершает доказательство. □

Пример 8. *Теорема 9 утверждает, что в точке X, являющейся нульмерным компактным (полным и вполне ограниченным) пространством отображение p_c^{-1} непрерывно. Оказывается, если отказаться от условия полной ограниченности, то даже для счетных дискретных пространств непрерывность не гарантирована. Ниже дается пример такого счетного (а значит нульмерного) полного дискретного пространства X, что отображение p_c^{-1} разрывно в точке $X \in \mathcal{GH}$. Согласно следствию 7 для него $s(X) = 0$.*

Возьмем счетное число $Z = I \times \mathbb{N} = \sqcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ стандартных единичных отрезков. Расстояние между точками одного отрезка возьмем стандартным, а расстояние между точками разных отрезков положим равным 1. В отрезке I_n рассмотрим подмножество $S_n = \{i/2^n : i = 0, \dots, 2^n\}$. Положим

$$X_\infty = \sqcup_{k\in\mathbb{N}} S_k \subset Z \quad \text{и} \quad X_n = \bigl(\sqcup_{k<n} S_k\bigr) \sqcup \bigl(\sqcup_{k\geqslant n} I_k\bigr) \subset Z.$$

Отметим, что X_∞ — счетное дискретное пространство, поэтому оно полное. Легко видеть, что $d_H(X_\infty, X_n) = 2^{-(n+1)}$, поэтому $X_n \xrightarrow{d_{GH}} X_\infty$. Далее, так как X_∞ — вполне несвязное пространство, а максимальный диаметр связных компонент в X_n равен 1, то в силу предложения 12, имеем $2d^c_{GH}(X_\infty, X_n) \geqslant 1$, поэтому X_n не сходится к X_∞ относительно d^c_{GH} и, значит, отображение p_c^{-1} разрывно в точке X_∞.

7. Несравнимые пространства

Скажем, что топологическое пространство X *несравнимо с* Y, если всякое непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ тривиально, т.е. имеется такая точка $y_f \in Y$, что $f(X) = y_f$. Например, всякое связное пространство несравнимо со всяким вполне несвязным пространством. Отметим, что отношение несравнимости не симметрично, например, отрезок $X = [0, 1]$ несравним с множеством Y его рациональных точек, однако Y сравнимо с X (включение Y в X — нетривиальное непрерывное отображение).

Предложение 18. *Пусть метрическое пространство X несравнимо с метрическим пространством Y. Тогда*

1. *для всякого отображения $f\colon X \to Y$ справедливо равенство* $\operatorname{dis} f = \operatorname{diam} X$;
2. *для всяких отображений $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to X$ справедливо неравенство*

$$\operatorname{codis}(f, g) \geqslant \max\bigl\{R(X), R(Y)\bigr\}.$$

Доказательство. (1) Имеем

$$\operatorname{dis} f = \sup_{x,x'\in X} \bigl||xx'| - |f(x)f(x')|\bigr| = \sup_{x,x'\in X} |xx'| = \operatorname{diam}(X).$$

(2) Имеем

$$\operatorname{codis}(f, g) = \sup_{x\in X,\, y\in Y} \bigl||x\,g(y)| - |f(x)y|\bigr| \geqslant \sup_{x\in X} \bigl||x\,g(y_f)| - |f(x)y_f|\bigr| =$$
$$= \sup_{x\in X} |x\,g(y_f)| = R_{g(y_f)}(X) \geqslant R(X).$$

Аналогично,

$$\operatorname{codis}(f, g) = \sup_{x\in X, y\in Y} \Bigl|\bigl|x\,g(y)\bigr| - \bigl|f(x)y\bigr|\Bigr| \geqslant \sup_{y\in Y} \Bigl|\bigl|g(y)g(y)\bigr| - \bigl|f\bigl(g(y)\bigr)y\bigr|\Bigr| =$$
$$\sup_{y\in Y} \Bigl|\bigl|g(y)g(y)\bigr| - |y_f y|\Bigr| = \sup_{y\in Y} |y_f y| = R_{y_f}(Y) \geqslant R(Y).$$

Для завершения доказательства осталось собрать вместе два полученных неравенства. □

Следствие 8. *Пусть метрическое пространство X несравнимо с метрическим пространством Y. Тогда $2d^c_{GH}(X, Y) \geqslant \operatorname{diam}(X)$.*

Следствие 9. *Пусть пространства X и Y взаимно несравнимы. Тогда*

$$2d^c_{GH}(X,Y) = \max\bigl\{\operatorname{diam}(X), \operatorname{diam}(Y)\bigr\}.$$

Доказательство. Неравенство $2d^c_{GH}(X,Y) \geqslant \max\bigl\{\operatorname{diam}(X), \operatorname{diam}(Y)\bigr\}$ вытекает из следствия 8. Обратным неравенством является пункт (4) предложения 6. □

8. Гиперпространство континуума Кука

Напомним, что *континуумом* называется каждое связное компактное хаусдорфово топологическое пространство. Мы же ограничимся континуумами, являющимися метрическими пространствами. Таким образом, в дальнейшем под *континуумом* понимается метризуемый континуум.

Нас также будут интересовать различные *гиперпространства*. Если X — метрическое пространство, то через $\mathcal{H}(X)$ будем обозначать семейство всех непустых замкнутых ограниченных подмножеств X, наделенное расстоянием Хаусдорфа d_H. Хорошо известно [8], что d_H является метрикой на $\mathcal{H}(X)$. Это $\mathcal{H}(X)$ будет в нашем случае наиболее общим примером гиперпространств (более богатый список гиперпространств можно найти в [22]). Важным подпространством в $\mathcal{H}(X)$ является семейство $\mathcal{K}(X)$ всех непустых компактных подмножеств X. Если X компактно, что $\mathcal{K}(X) = \mathcal{H}(X)$. Еще одно "сужение" гиперпространства получается, если ограничиться подконтинуумами X. Семейство всех подконтинуумов в X обозначим $\mathcal{CK}(X)$. Так как каждая точка из X является вырожденным подконтинуумом, а расстояние Хаусдорфа d_H между одноточечными подпространствами X совпадает с расстоянием в X между соответствующими точками, имеется изометричное вложение $x \mapsto \{x\}$ из X в $\mathcal{CK}(X) \subset \mathcal{K}(X) \subset \mathcal{H}(X)$. В дальнейшем будем неформально писать $X \subset \mathcal{CK}(X)$, имея в виду это вложение.

Теорема 10. *Пространства X и $\mathcal{CK}(X)$ — замкнутые подмножества $\mathcal{K}(X)$.*

Теорема 11 ([8]). *Пространство $\mathcal{H}(X)$ полное (вполне ограниченное, компактное, ограниченно компактное), если и только если X — такое же.*

Если X — континуум, то, в силу теоремы 11 пространство $\mathcal{K}(X) = \mathcal{H}(X)$ также компактно. По теореме 10, $\mathcal{CK}(X)$ — замкнутое подмножество компакта $\mathcal{K}(X)$, а потому и само является компактном. Менее тривиальный факт состоит в том, что и связность X также наследуется. И еще интересней: $\mathcal{CK}(X)$ оказывается и линейно связным, а для невырожденного X можно оценить и размерность $\mathcal{CK}(X)$.

Теорема 12. *Для континуума X пространство $\mathcal{CK}(X)$ является линейно связным континуумом* ([22, Theorem 14.9])*, имеет тривиальный шейп* ([22, Theorem 19.10]) *и, в частности, ациклично во всех размерностях* ([22, Theorem 19.3])*.*

Для наследственно неразложимого или локально связного континуума X пространство $\mathcal{CK}(X)$ стягиваемо ([22, Theorem 20.3, 20.14])*.*

Если континуум X невырожден, то $\dim \mathcal{CK}(X) \geqslant 2$ ([22, Theorem 22.18])*.*

Пример 9. *1. Для стандартных отрезка I и окружности S^1 пространства $\mathcal{CK}(I)$ и $\mathcal{CK}(S^1)$ гомеоморфны двумерному диску B^2 ([22]), разделы* 5.1 *и* 5.2.

2. Пространства $\mathcal{CK}^c_{GH}(I)$, $\mathcal{CK}_{GH}(I^1)$ и $\mathcal{CK}_{GH}(S^1)$ гомеоморфны отрезку.

3. Пространство $\mathcal{CK}^c_{GH}(S^1)$ гомеоморфно объединению полуинтервала и изолированной точки. Отметим, что точка $\{S^1\}$, соответствующая всей окружности, находится на расстоянии 1 в метрике d^c_{GH} от всякого собственного подмножества окружности и поэтому изолирована в $\mathcal{CK}^c_{GH}(S^1)$.

Континуум X называется *наследственно неразложимым*, если каждый его подконтинуум Y нельзя представить в виде объединения двух собственных (непустых и отличных от Y) подконтинуумов.

Напомним, что мы называем топологическое пространство Y несравнимым с топологическим пространством X, если единственными непрерывными отображениями из X в Y являются отображения в точку.

Предложение 19. *Пусть X — линейно связное пространство, а Y — наследственно неразложимый континуум. Тогда X несравнимо с Y. В частности, $2d^c_{GH}(X,Y) \geqslant \operatorname{diam} X$.*

Доказательство. Пусть $f\colon X \to Y$ — это такие непрерывное отображение, что $f(X)$ содержит не менее двух различных точек $y_0 = f(x_0) \neq f(x_1) = y_1$. Согласно условию существует такое непрерывное отображение $\varphi\colon [0,1] \to X$, что $\varphi(0) = x_0$ и $\varphi(1) = x_1$. Положим $t_0 = \sup\bigl[(f\circ\varphi)^{-1}(x_0)\bigr] = \max\bigl[(f\circ\varphi)^{-1}(x_0)\bigr]$. Ясно, что $\varphi(t_0) = x_0$. Положим $t_1 = \inf\bigl[(f\circ\varphi)^{-1}(x_1)\bigr] \cap [t_0,1] = \min\bigl[(f\circ\varphi)^{-1}(x_1)\bigr] \cap [t_0,1]$. Для произвольного $t_0 < \tau < t_1$ континуум $K = (f\circ\varphi)\bigl([t_0,t_1]\bigr) \subset Y$ представим в виде объединения двух собственных подконтинуумов $y_0 \in K_0 = (f\circ\varphi)\bigl([t_0,\tau]\bigr) \not\ni y_1$ и $y_0 \notin K_1 = (f\circ\varphi)\bigl([\tau,t_1]\bigr) \ni y_1$. Полученное представление противоречит неразложимости Y, т.е. означает тривиальность любого непрерывного отображения $f\colon X\to Y$. $\square$

Цепью в топологическом пространстве называется такая конечная последовательность его подмножеств, в которой пересекаются только последовательные элемент (их называют *звеньями*). Если для некоторого $\varepsilon > 0$ каждое звено в цепи, лежащей в метрическом пространстве, имеет диаметр не больше ε, то такая цепь называется *ε-цепью.* Если для любого $\varepsilon > 0$ континуум покрывается ε-цепью, то такой континуум называется *дугообразным.* Наследственно неразложимый дугообразный континуум называется *псевдодугой.* Пример невырожденной псевдодуги, являющейся подмножеством плоскости, был приведен Кнастером в [23]. Мойз [24] показал, что каждый собственный подконтинуум псевдодуги гомеоморфен самой псевдодуге. Бинг [25] доказал, что все псевдодуги гомеоморфны друг другу. Также Бинг в [9] выяснил, что почти все континуумы в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$ — псевдодуги. Более формально, подмножество Y топологического пространства X называется *G_δ-множеством*, если Y равно не более чем счетному пересечению открытых подмножеств X. Говорят, что *большинство элементов полного метрического пространства X являются элементами* $Y \subset X$, если Y — всюду плотное G_δ-подмножество X. Напомним, что пространство $\mathcal{CK}(\mathbb{R}^n)$ всех континуумов в $\mathbb{R}^n$ снабжено метрикой Хаусдорфа и соответствующей метрической топологией.

Теорема 13 (Бинг [9]). *Большинство континуумов в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, т.е. большинство точек из $\mathcal{CK}(\mathbb{R}^n)$ — это псевдодуги.*

Отсюда следует, что расстояние Громова – Хаусдорфа от всякого подконтинуума в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, до множества всех псевдодуг равно нулю, но непрерывное расстояние Громова – Хаусдорфа от всякого линейно связного подконтинуума до множества всех псевдодуг равно диаметру этого подконтинуума.

Пусть X — континуум. Расстояния d^c_{GH} и d_{GH} являются псевдометриками на множестве $\mathcal{CK}(X)$. Факторпространства $\mathcal{CK}(X)$ по псевдометрикам d^c_{GH} и d_{GH} обозначим через $\mathcal{CK}^c_{GH}(X)$ и $\mathcal{CK}_{GH}(X)$ соответственно. Проекции $p^c_{GH}\colon \mathcal{CK}^c_{GH}(X)\to\mathcal{CK}_{GH}(X)$ и $p_H\colon \mathcal{CK}_H(X)\to\mathcal{CK}_{GH}(X)$ являются нерастягивающими отображениями, поэтому они непрерывны.

Предложение 20. *Пространство $\mathcal{CK}_{GH}(X)$ является линейно связным континуумом.*

Доказательство. По теореме 12 пространство $\mathcal{CK}(X)$ — линейно связный континуум. Теперь результат следует из того, что непрерывное отображение сохраняет как компактность, так и линейную связность. $\square$

H. Cook в [26] построил пример наследственно неразложимого континуума M_1 такого, что любые два разных его невырожденных подконтинуума несравнимы.

Теорема 14 ([26]). *Континуум M_1 одномерен в смысле размерности Лебега, поэтому M_1 вкладывается в $\mathbb{R}^3$, но никакой его невырожденный подконтинуум не вкладывается в плоскость.*

Применим следствие 9.

Следствие 10. *Пусть K и H — произвольные различные подконтинуумы в континууме Кука M_1, тогда $2d^c_{GH}(K,H) = \max\{\operatorname{diam} H, \operatorname{diam} K\}$. В частности, отображение p_c^{-1} разрывно на всем $\mathcal{CK}_{GH}(M_1)$, за исключением одноточечного пространства.*

Замечание 6. *Согласно пункту (4) предложения 6 величина $d^c_{GH}(K,H)$ — максимально возможное значение d^c_{GH}-расстояния между H и K.*

9. Непрерывное GH-расстояние — внутреннее

Пусть X и Y — произвольные метрические пространства, для которых $2d^c_{GH}(X,Y) < \infty$. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$, тогда существуют непрерывные $X \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} Y$, для которых $\operatorname{dis} R_{f,g} < 2d^c_{GH}(X,Y) + 2\varepsilon$. Для каждого $t \in (0,1)$ зададим на $R := R_{f,g}$ метрику d_t так:

$$d_t\big((x,y),(x',y')\big) = (1-t)|xx'| + t\,|yy'|$$

и полученное метрическое пространство обозначим R_t. Доопределим R_t, положив $R_0 = X$ и $R_1 = Y$.

Теорема 15. *Во введенных выше обозначениях, имеем $d^c_{GH}(R_t,R_s) \leqslant |t-s| \operatorname{dis} R$. В частности, отображение $\gamma\colon [0,1] \to \mathcal{GH}^c$ является непрерывной кривой, длина $|\gamma|$ которой удовлетворяет неравенству $|\gamma| < d^c_{GH}(X,Y) + \varepsilon$, а непрерывное расстояние Громова – Хаусдорфа — внутреннее.*

Доказательство. Пусть $0 < t,s < 1$, а $R' \in \mathcal{R}(R_t,R_s)$ — соответствие, порожденное тождественным отображением. Тогда

$$\operatorname{dis} R' = \sup_{(x,y),(x',y')\in R} \Big| d_t\big((x,y),(x',y')\big) - d_s\big((x,y),(x',y')\big)\Big| = \\ = \sup_{(x,y),(x',y')\in R} |t-s|\,\big||xx'| - |yy'|\big| = |t-s| \operatorname{dis} R.$$

Далее, для $t = 0$, $X = R_t$ и R_s, $0 < s < 1$ в качестве $R' \in \mathcal{R}(R_t,R_s)$ выберем соответствие $R_{f',g'}$, где $f'(x) = \big(x, f(x)\big)$ для всех $x \in X$, а $g'\big((x,y)\big) = x$. Отображение f' непрерывно, так как является ограничением на $X \times f(X)$ отображения $x \mapsto \big(x, f(x)\big)$ из X в $X \times Y$ с непрерывными координатными отображениями. Отображение g' также непрерывно как ограничение проекции $X \times Y \to X$. Далее,

$$\operatorname{dis} f' = \sup_{x,x'\in X} \Big| |xx'| - (1-s)|xx'| - s\,\big|f(x)f(x')\big| \Big| = \\ = \sup_{x,x'\in X} s\,\Big| |xx'| - \big|f(x)f(x')\big| \Big| = |t-s| \operatorname{dis} f \leqslant |t-s| \operatorname{dis} R;$$

$$\operatorname{dis} g' = \sup_{(x,y),(x',y')\in R} \Big| |xx'| - (1-s)|xx'| - s\,|yy'| \Big| = \\ = \sup_{(x,y),(x',y')\in R} s\,\big| |xx'| - |yy'| \big| = |t-s| \operatorname{dis} R;$$

$$\operatorname{codis}(f',g') = \sup_{x\in X,\,(x',y')\in R} \bigg| \Big| x\,g'\big((x',y')\big)\Big| - \big|(x',y')\,f'(x)\big| \bigg| = \\ = \sup_{x\in X,\,(x',y')\in R} \Big| |xx'| - (1-s)|xx'| - s\,\big|y'\,f(x)\big| \Big| = \\ = \sup_{(x,f(x)),\,(x',y')\in R} s\,\Big| |xx'| - \big|y'\,f(x)\big| \Big| \leqslant |t-s| \operatorname{dis} R.$$

Тем самым мы показали, что $\operatorname{dis} R' \leqslant |t-s| \operatorname{dis} R$ и в случае $t=0$ и $0<s<1$. Аналогично разбирается случай $0<t<1$ и $s=1$. Наконец, при $t=0$ и $s=1$ мы полагаем $R'=R$, так что здесь $\operatorname{dis} R' = |t-s| \operatorname{dis} R$. Таким образом, для всех $0 \leqslant t, s \leqslant 1$ имеем

$$d^c_{GH}(R_t, R_s) \leqslant \frac{1}{2}|t-s| \operatorname{dis} R,$$

откуда непосредственно вытекает, что отображение $\gamma\colon t \mapsto R_t$ непрерывно относительно d^c_{GH}, а длина $|\gamma|$ кривой γ не превосходит $\frac{1}{2}\operatorname{dis} R < d^c_{GH}(X,Y)+\varepsilon$. Так как $\varepsilon>0$ можно выбирать сколь угодно малым, приходим к выводу, что расстояние d^c_{GH} — внутреннее. $\square$

Как и в стандартной теории соответствие $R_{f,g} \in \mathcal{R}(X,Y)$ назовем *оптимальным*, если $2d^c(X,Y) = \operatorname{dis} R_{f,g}$.

Следствие 11. *Если соответствие $R = R_{f,g}$ — оптимальное, то построенная выше кривая R_t — кратчайшая геодезическая, длина которой равна расстоянию между ее концами.*

10. Неполнота

Предложение 21. *Непрерывное расстояние Громова – Хаусдорфа, ограниченное на пространство компактов $\mathcal{M}^c$, не является полным.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность $X_n = \{i/n\}_{i=0}^n$ подмножеств отрезка $[0,1]$ с индуцированным расстоянием. Так как на конечных метрических пространствах непрерывное и обычное GH-расстояния совпадают, эта последовательность фундаментальна в $\mathcal{M}^c$. Предположим, что $X_n \xrightarrow{d^c_{GH}} X$, тогда $X_n \xrightarrow{d_{GH}} X$, и так как $\mathcal{M}$ — метрическое пространство, предел определен однозначно, поэтому $X=[0,1]$. Но по предложению 12 имеем $d^c(X_n,X)=1/2$, так что последовательность X_n не сходится к X в $\mathcal{M}^c$. $\square$

Справедливость доказанного предложения обусловлена тем, что мы ограничили класс метрических пространств (компактами), в котором ищем предел заданной фундаментальной последовательности. Однако в классе всех метрических пространств эта последовательность имеет предел – любое нульмерное плотное подмножество отрезка. Построим фундаментальную последовательность, для которой никакое метрическое пространство не является её пределом в непрерывной метрике Громова – Хаусдорфа.

Нам понадобятся вспомогательные технические оценки.

Лемма 2. *Если для подмножества $A \subset X$ и отображения $f\colon X \to Y$ по крайней мере одно из множеств A или $f(A)$ имеет конечный диаметр, то справедливо неравенство $\operatorname{dis} f \geqslant \big|\operatorname{diam} f(A) - \operatorname{diam} A\big|$.*

Доказательство. Предположим, что только одно из множеств A и $f(A)$ имеет конечный диаметр. Тогда во множестве конечного диаметра каждая пара точек находится на ограниченном расстоянии, а во втором соответствующие точки (из образа или прообраза f) можно выбрать сколь угодно далекими, что доказывает $\operatorname{dis} f = \infty$, и неравенство имеет место.

Пусть теперь оба A и $f(A)$ имеют конечные диаметры. Фиксируем $\varepsilon > 0$.

Возьмем такие точки $a, a' \in A$, что $|aa'| > \operatorname{diam} A - \varepsilon$. Тогда

$$\operatorname{dis} f \geqslant |aa'| - \bigl|f(a)f(a')\bigr| > \operatorname{diam} A - \varepsilon - \bigl|f(a)f(a')\bigr| \geqslant \operatorname{diam} A - \varepsilon - \operatorname{diam} f(A).$$

В силу произвольности числа $\varepsilon > 0$ получаем $\operatorname{dis} f \geqslant \operatorname{diam} A - \operatorname{diam} f(A)$.

Далее, возьмем такие точки $a, a' \in A$, что $\bigl|f(a)f(a')\bigr| > \operatorname{diam} f(A) - \varepsilon$. Тогда

$$\operatorname{dis} f \geqslant \bigl|f(a)f(a')\bigr| - |aa'| > \operatorname{diam} f(A) - \varepsilon - |aa'| \geqslant \operatorname{diam} f(A) - \varepsilon - \operatorname{diam} A.$$

В силу произвольности числа $\varepsilon > 0$ получаем $\operatorname{dis} f \geqslant \operatorname{diam} f(A) - \operatorname{diam} A$, что и завершает доказательство. $\square$

Полученное неравенство является усилением свойства (5) предложения 6.

Лемма 3. *Для любых отображений $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to X$ и любой точки $y_0 \in Y$ справедливо неравенство* $\operatorname{codis}(f,g) \geqslant \bigl|y_0\, f(X)\bigr|$.

Доказательство. Возьмем точку $x = g(y_0) \in X$. Тогда

$$\operatorname{codis}(f,g) \geqslant \bigl|f(x)\, y_0\bigr| - \bigl|x\, g(y_0)\bigr| = \bigl|f(x)\, y_0\bigr| \geqslant \bigl|y_0\, f(X)\bigr|,$$

что и требовалось. $\square$

Пример 10. *Рассмотрим на плоскости отрезки $J = \{(0,y) : -1 \leqslant y \leqslant 1\}$, $I = \{(x,0) : 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ и $I_n = \{(x,0) : \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1\}$, $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим также триод $X = J \cup I$ и последовательность пространств $X_n = J \cup I_n$, $n \in \mathbb{N}$. Для простоты рассуждений на триоде $X = J \cup I$ возьмем внутреннюю метрику, а на его подмножествах — метрику, индуцированную этой внутренней метрикой триода.*

Теорема 16. *Последовательность пространств $X_n = J \cup I_n$, $n \in \mathbb{N}$ является фундаментальной в метрике d^c_{GH}, но никакое метрическое пространство не является её пределом в этой метрике.*

Доказательство. Легко видеть, что $d^c_{GH}(X_m, X_n) \leqslant \frac{m-n}{mn} < \frac{1}{n}$ при $m \geqslant n$. Следовательно последовательность компактных метрических пространств X_n является фундаментальной в метрике d^c_{GH}.

Также легко проверить, что $d_{GH}(X, X_n) \leqslant d_H(X, X_n) = \frac{1}{2n}$. Следовательно триод X является пределом последовательности X_n в метрике d_{GH}.

Пусть у этой последовательности имеется предел X_∞ в метрике d^c_{GH}.

Из неравенства $d_{GH} \leqslant d^c_{GH}$ следует, что пространство X_∞ также является пределом последовательности X_n в метрике d_{GH}. Поэтому $d_{GH}(X, X_\infty) = 0$.

Согласно теореме 7 можно считать, что пространство X_∞ изометрично лежит в триоде X (в виде плотного подмножества).

Покажем, что $\bigl\{(0,-1)\bigr\} \cup \bigl\{(0,1)\bigr\} \cup \bigl\{(1,0)\bigr\} \cup X_\infty = X$. Включение левого множества в правое очевидно.

Пусть $(x_0, y_0) \in X \setminus \Bigl(\bigl\{(0,-1)\bigr\} \cup \bigl\{(0,1)\bigr\} \cup \bigl\{(1,0)\bigr\} \cup X_\infty\Bigr)$.

а. Пусть $(x_0, y_0) \neq (0,0)$. Без ограничения общности можно считать, что $(x_0, y_0) = (r, 0)$, $r > 0$. Тогда одна из компонент связности K пространства $X \setminus \bigl\{(x_0, y_0)\bigr\}$ имеет диаметр $\operatorname{diam} K = 1 - r < 1$. Фиксируем такой индекс n, что $\operatorname{diam} I_n = 1 - 1/n > \operatorname{diam} K$.

Пусть $m \geqslant n$ и отображение $f\colon X_m \to X_\infty$ непрерывно. Точка $(r, 0)$ разбивает пространство X_∞, поэтому всякое связное множество, пересекающееся с K, целиком лежит в K.

Если $f(J) \cap K \neq \emptyset$, то $f(J) \subset K$ и $\operatorname{dis} f \geqslant 2 - (1 - r) = 1 + r$ согласно лемме 2.

Если $f(I_m) \cap K \neq \emptyset$, то $f(I_m) \subset K$ и $\operatorname{dis} f \geqslant 1 - \frac{1}{m} - (1 - r) = r - \frac{1}{m} > r - \frac{1}{n}$ согласно лемме 2.

Если $f(X_m) \cap K = \emptyset$, то $\operatorname{codis}(f, g) \geqslant 1 - r$ согласно лемме 3 для любого отображения $g\colon X_m \to X_\infty$.

b. Пусть $(x, y) = (0, 0)$. Тогда пространство $X \setminus \big\{(x, y)\big\} = K_1 \sqcup K_2 \sqcup K_3$ состоит из трех компонент связности диаметра 1. Следовательно для всякого непрерывного отображения $f\colon X_m \to X_\infty \subset X$ имеется такая компонента связности K_i, что $f(J) \subset K_i$. Поэтому $\operatorname{dis}(f) \geqslant \operatorname{diam} J - \operatorname{diam} K_i = 1$ согласно лемме 2.

Следовательно пространство X_∞ связно. Значит для всякого непрерывного отображения $g\colon X_\infty \to X_m$ связного пространства в пространство с двумя компонентами связности у последнего имеется такая компонента связности K, что $g(X_\infty) \cap K = \emptyset$. Согласно лемме 3, $\operatorname{codis}(f, g) \geqslant 1 - \frac{1}{m}$ для любого отображения $g\colon X_m \to X_\infty$.

Следовательно ни для какого метрического пространства X_∞ последовательность расстояний $d^c_{GH}(X_m, X_\infty)$ не может стремиться к нулю. □

11. Добавление: аналог топологии на собственных классах

Теория, которую мы развиваем в настоящей статье, имеет дело со всеми непустыми метрическими пространствами, рассматриваемыми с точностью до изометрии. Так как на каждом множестве можно ввести метрику, например, положив все расстояния между различными точками равными 1, семейство метрических пространств не является множеством. Для работы с такими семействами мы будем пользоваться теорией множеств фон Неймана–Бернайса–Гёделя [4, 5], причем всегда будем считать, что выполняется аксиома выбора. Эту теорию обычно для краткости обозначают NBGC. Напомним, что все объекты этой теории называются *классами* и бывают двух типов: *множества* — это классы, которые являются элементами других классов, и *собственные классы*, не являющиеся элементами никаких других классов. Приведем примеры важных для нас собственных классов:

- класс $\mathcal{V}$ всех множеств;
- класс ORD всех ординалов;
- класс CARD всех кардиналов;
- класс TOP всех топологий на всех множествах из $\mathcal{V}$;
- класс $\mathcal{GH}$ всех метрических пространств, рассматриваемых с точностью до изометрии.

Для классов определены многие стандартные операции, например, пересечение, дополнение, произведение, отображение и др.

Мы будем пользоваться следующей терминологией: *обобщенной полуметрикой на множестве* X называется каждое отображение $\rho\colon X \times X \to [0, \infty]$, удовлетворяющее условиям $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ для всех $x, y \in X$ (симметричность), $\rho(x, x) = 0$ для всех $x \in X$, и $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$ для всех $x, y, z \in X$ (неравенство треугольника). Если $\rho(x, y) = 0$ в точности тогда, когда $x = y$, то слово “полуметрика” заменяется на слово *метрика*. Если же $\rho(x, y) < \infty$ при всех $x, y \in X$, то слово “обобщенный” убирается. Так как произведение и отображение определены для всех классов, то описанные только-что понятия переносятся слов в слово и на произвольные классы. Ниже мы напомним определения расстояния Громова

– Хаусдорфа и непрерывного расстояния Громова – Хаусдорфа, которые, как будет отмечено, являются обобщенными псевдометриками на собственном классе $\mathcal{GH}$.

Интересной особенностью собственных классов является невозможность дословно перенести на них понятие топологии: действительно, все множество, на котором определяется топология, является элементом топологии, поэтому если вместо множества рассмотреть собственный класс, то он никак не может быть элементом топологии. Чтобы обойти эту проблему и ввести аналог топологии, в [27] было предложено рассматривать *классы $\mathfrak{C}$, фильтрующиеся множествами*. Последнее означает, что для каждого кардинального числа n подкласс $\mathfrak{C}_n = \{x \in \mathfrak{C} : \#x \leqslant n\}$, где $\#x$ обозначает мощность множества x, является множеством. Примером таких классов могут служить любые множества, а также собственные классы ORD, CARD и $\mathcal{GH}$. Классы $\mathcal{V}$ и TOP такими не являются.

Пусть $\mathfrak{C}$ — класс, фильтрующийся множествами. Отображение $\tau\colon \mathrm{CARD} \to \mathrm{TOP}$ такое, что

- $\tau_n := \tau(n)$ — топология на $\mathfrak{C}_n$ для каждого $n \in \mathrm{CARD}$,
- для каждых $m, n \in \mathrm{CARD}$, $m \leqslant n$ топология τ_m индуцирована из τ_n.

Отметим, что если $\mathfrak{C}$ — множество мощности n, то τ_n — обычная топология на $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_n$, и для всякого $m \geqslant n$ имеем $\mathfrak{C}_m = \mathfrak{C}_n$, а также $\tau_m = \tau_n$. При $m \leqslant n$ топология τ_m на $\mathfrak{C}_m$ обычным образом индуцируется из τ_n. Сказанное позволяет назвать отображение τ *топологией* даже в случае собственных классов. Фильтрующийся множествами класс $\mathfrak{C}$, для которого задана топология τ, будем называть *топологическим классом*.

Замечание 7. *Определить топологию в приведенном выше смысле можно и для любого собственного класса. Для этого достаточно изменить понятие фильтрации множествами, не привязывая ее к мощности элементов, входящих в класс. Хорошо известно, что в NBGC между любыми собственными классами существует биекция, поэтому если $\mathfrak{C}$ — топологический класс, а $\mathfrak{C}'$ — произвольный класс, скажем $\mathcal{V}$, то с помощью биекции $\varphi\colon \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}'$ можно перенести фильтрацию множествами $\mathfrak{C}_n$ на $\mathfrak{C}'$, положив $\mathfrak{C}'_n = \varphi(\mathfrak{C}_n)$ и проделать все приведенные выше построения топологии. Однако для наших целей вполне хватит фильтрации, заданной с помощью мощности.*

Ясно также, что если класс $\mathfrak{C}$ является множеством мощности n, то для всех $m > n$ с необходимостью выполняется $\mathfrak{C}_m = \mathfrak{C}$ и $\tau_m = \tau_n$, так что фактически у нас имеется стандартное топологическое пространство $(\mathfrak{C}, \tau_n)$, индуцирующее обычным образом топологии τ_k на всех подмножествах $\mathfrak{C}_k$, $k < n$.

Важным частным случаем является метрическая топология, определенная на классе $\mathfrak{C}$, фильтрующемся множествами. Пусть $\rho\colon \mathfrak{C} \times \mathfrak{C} \to [0, \infty]$ — обобщенная псевдометрика, тогда для каждого $n \in \mathrm{CARD}$ определена соответствующая метрическая топология τ_n на $\mathfrak{C}_n$. Соответствующее отображение $\tau\colon \mathrm{CARD} \to \mathrm{TOP}$, $\tau\colon n \mapsto \tau_n$ назовем *метрической топологией*, а пространство $\mathfrak{C}$, наделенное такой топологией, назовем *метрическим классом*.

Отметим, что для каждых $x \in \mathfrak{C}$ и $r \in (0, \infty]$ определен *открытый шар* $U_r(x) = \{y \in \mathfrak{C} : \rho(x, y) < r\}$, представляющий собой, вообще говоря, собственный подкласс в $\mathfrak{C}$. Легко видеть, что если $m \in \mathrm{CARD}$ не меньше $\#x$, то множество $U_r(x) \cap \mathfrak{C}_m$ является открытым шаром радиуса r в $\mathfrak{C}_m$.

Предложение 22. *Для любых $x \in \mathfrak{C}$, $r > 0$ и $m \in \mathrm{CARD}$ множество $U_r(x) \cap \mathfrak{C}_m$ открыто в топологии τ_m.*

Доказательство. Выберем произвольное $y \in U_r(x) \cap \mathfrak{C}_m$, тогда $|xy| < r$. Существует $\delta > 0$ такое, что $|xy| < r - \delta$, поэтому $U_\delta(y) \subset U_r(x)$, но $U_\delta(y) \cap \mathfrak{C}_m$ является открытым шаром радиуса δ в $\mathfrak{C}_m$, и $U_\delta(y) \cap \mathfrak{C}_m \subset U_r(x) \cap \mathfrak{C}_m$, следовательно, $U_r(x) \cap \mathfrak{C}_m \in \tau_m$. $\square$

Если $f\colon \mathfrak{A}\to\mathfrak{B}$ — отображение между двумя топологическими классами, то естественным образом определяется его непрерывность. А именно, известно, что образ каждого множества также является множеством, поэтому для каждого кардинального числа n существует такое кардинальное число m, что $f(\mathfrak{A}_n)\subset\mathfrak{B}_m$. Наименьшее из таких кардинальных чисел m обозначим n_f. Ограничивая f до отображения из $\mathfrak{A}_n$ в $\mathfrak{B}_{n_f}$, мы получаем обычное отображение топологических пространств. Легко видеть, что если вместо n_f взять кардинальное число $m\geqslant n_f$, то ограничение f на $\mathfrak{A}_n$ и $\mathfrak{B}_m$ будет непрерывным (в точке или в целом), если и только если его ограничение на $\mathfrak{A}_n$ и $\mathfrak{B}_{n_f}$ непрерывно. Таким образом, *непрерывность* отображения f в точке или в целом определим как непрерывность всех его ограничений $f\colon\mathfrak{A}_n\to\mathfrak{B}_{n_f}$ (мы и в дальнейшем будем обозначать ограничение той же буквой, что и исходное отображение).

Теорема 17. *Пусть $f\colon\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}$ — отображение метрических классов. Тогда f непрерывно в точке $x\in\mathfrak{A}$, если и только если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что $f\big(U_\delta(x)\big)\subset U_\varepsilon\big(f(x)\big)$. Отображение f непрерывно в целом, если и только если оно непрерывно в каждой точке.*

Доказательство. Пусть сначала для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что $f\big(U_\delta(x)\big)\subset U_\varepsilon\big(f(x)\big)$. Покажем, что f непрерывно в x. Выберем произвольное n, произвольное $\varepsilon>0$ и соответствующее $\delta>0$, отвечающее сформулированному выше свойству. Так как $U_\delta(x)\cap\mathfrak{A}_n$ и $U_\varepsilon\big(f(x)\big)\cap\mathfrak{B}_{n_f}$ — открытые шары соответственно в $\mathfrak{A}_n$ и $\mathfrak{B}_{n_f}$, причем в силу предположения образ первого из них содержится во втором, то ограничение $f\colon\mathfrak{A}_n\to\mathfrak{B}_{n_f}$ непрерывно в x.

Докажем теперь обратное утверждение методом от противного. А именно, предположим, что для некоторого f существуют такие $x\in\mathfrak{A}$ и $\varepsilon>0$, что ни для какого $\delta>0$ не выполняется $f\big(U_\delta(x)\big)\subset U_\varepsilon\big(f(x)\big)$. Последнее означает, что существует последовательность $y_k\in\mathfrak{A}$, для которой $|x\,y_k|<1/k$, но $\big|f(x)f(y_k)\big|\geqslant\varepsilon$. Пусть n — мощность x, а n_k — мощность y_k. Так как ограничение $f\colon\mathfrak{A}_n\to\mathfrak{B}_{n_f}$ непрерывно, то существует $s>0$, для которого $U_s(x)\cap\mathfrak{A}_n$ переводится отображением f в $U_\varepsilon\big(f(x)\big)\cap\mathfrak{B}_{n_f}\subset U_\varepsilon\big(f(x)\big)$. Таким образом, можно сразу предполагать, что все n_k не меньше n.

Так как счетное объединение множеств по-прежнему является множеством, существует $p\in\mathrm{CARD}$ такое, что $p\geqslant n_k$ для всех k. Отметим, что $x\in\mathfrak{A}_p$, $f(x)\in\mathfrak{B}_{p_f}$ и ограничение $f\colon\mathfrak{A}_p\to\mathfrak{B}_{p_f}$ непрерывно, поэтому существует $s>0$, для которого f-образ открытого в $\mathfrak{A}_p$ шара $U_s(x)\cap\mathfrak{A}_p$ радиуса s содержится в открытом в $\mathfrak{B}_{p_f}$ шаре $U_\varepsilon\big(f(x)\big)\cap\mathfrak{B}_{p_f}\subset U_\varepsilon\big(f(x)\big)$ радиуса ε. Но тогда при $1/k<s$ выполняется $y_k\in U_s(x)\cap\mathfrak{A}_p$ и, значит, $\big|f(x)f(y_k)\big|<\varepsilon$, противоречие. □

Следствие 12. *Пусть $f\colon\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}$ — липшицево отображение метрических классов, в частности, нерастягивающее, тогда f непрерывно.*

Отображение $f\colon\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}$ метрических классов называется *открытым в точке* $x\in\mathfrak{A}$, если для любого $r>0$ существует $s>0$ такое, что $f\big(U_r(x)\big)\supset U_s\big(f(x)\big)$. Из теоремы мгновенно получаем следующий результат.

Следствие 13. *Пусть $f\colon\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}$ — биективное отображение метрических классов, тогда f^{-1} непрерывно в точке $z=f(x)\in\mathfrak{B}$, если и только если f открыто в x.*

12. Заключение

В настоящей работе мы рассказали о начальных шагах построения теории непрерывного расстояний Громова – Хаусдорфа. В отличие от [3], приводимое нами понятие удовлетворяет неравенству треугольник, что существенно облегчает работу. Излагаемый в статье подход имеет естественные обобщения: заменяя общие соответствия теми, которые порождены прямым и обратным отображениями (сравните с функциями перехода между картами многообразий), мы приходим к естественной возможности изучения расстояния Громова – Хаусдорфа разной гладкости, когда рассматриваемые пространства, например, являются гладкими многообразиями. Как и в случае квантовых метрических пространств, для которых в [1] определяется такое расстояние Громова – Хаусдорфа, которое по мнению автора "уважает" структуру рассматриваемых пространств, непрерывное и гладкое расстояние Громова – Хаусдорфа возможно также "уважают" соответствующие дополнительные структуры. Кажется перспективным применение аналогов нашей теории к изучению, скажем, схожести дифференциальных уравнений, определенных даже на разных пространствах.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rieffel M. A. Gromov-Hausdorff Distance for Quantum Metric Spaces // ArXiv e-prints 2003. arXiv:math/0011063 [math.OA].
2. Lim S., Memoli F., Smith Z. The Gromov–Hausdorff distance between spheres // Geometry & Topology. 2023. Vol. 27, №9. P. 3733–3800.
3. Lee J., Morales C. A. Gromov-Hausdorff Stability of Dynamical Systems and Applications to PDEs. Birkhäuser/Springer, 2022.
4. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. М.: Наука, 1984.
5. Banach T. Classical set theory: theory of sets and classes // ArXiv e-prints 2023. arXiv:2006.01613v4[math.LO].
6. Gromov M. Structures métriques pour les variétés riemanniennes. Edited by Lafontaine and Pierre Pansu, 1981.
7. Gromov M. Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces. Birkhäuser, 1999.
8. Бураго Д. Ю., Бураго Ю. Д., Иванов С. В. Курс метрической геометрии. Москва-Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2004.
9. Bing R. H. A homogeneous indecomposable plane continuum // Duke Math. J. 1948. Vol. 15. P. 729–742.
10. Bogatyy S. A., Tuzhilin A. A. Gromov–Hausdorff class: its completeness and cloud geometry // ArXiv e-prints 2021. arXiv:2110.06101[math.MG].
11. Богатый С. А., Тужилин А. А. Действие преобразования подобия на семействах метрических пространств // Итоги науки и техн. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. 2023. Т. 223. P. 3–13.
12. Bogataya S. I., Bogatyy S. A., Redkozubov V. V., Tuzhilin A. A. Clouds in Gromov–Hausdorff Class: their completeness and centers // Topology and its Applications. 2023. Vol. 329.
13. Bogatyy S. A., Tuzhilin A. A. Continuous Gromov–Hausdorff class: its completeness and cloud geometry // ArXiv e-prints 2021. arXiv:2110.06101[math.MG].
14. Фет А. И. Обобщение теоремы Люстерника–Шнирельмана о покрытиях сфер и некоторых связанных с ней теорем // ДАН. 1954. Т. 95, №6. С. 1149–1151.

15. Вихров А. А. Проблема построения геодезических в классе Громова – Хаусдорфа: оптимальная хаусдорфова реализация не всегда существует // Чебышевский сборник. 2025. Т. 26, №2. С. 49–60.

16. Vikhrov A. Geometry of linear and nonlinear geodesics in the proper Gromov–Hausdorff class // Matematicki vesnik. 2025. P. 1–17.

17. Stone A. H. Paracompactness and product spaces // Bull. Amer. Math. Soc. 1948. Vol. 54. P. 977–982.

18. Engelking R. General Topology. Warszawa, 1985.

19. Munkres J. R. Topology. 2nd Edition, Prentice Hall, Upper Saddle River, 2000.

20. Dowker C. H. Mapping theorems for non-compact spaces // Amer. J. Math. 1947. Vol. 69. P. 200–242.

21. Nagami K., Roberts J. H. Metric-dependent dimension functions // Proc. Amer. Math. Soc. 1965. Vol. 16, №4. P. 601–604.

22. Illanes A., Nadler S. Jr. Hyperspaces // Marcel Dekker, New York, 1999.

23. Knaster B. Un continu dont tout sous-continu est indecomposable // Fund. Math. 1922. Vol. 3. P. 247–286.

24. Moise E. E. An indecomposable plane continuum which is homeomorphic to each of its nondegenerate subcontinua // Trans. Amer. Math. Soc. 1948. Vol. 63. P. 581–594.

25. Bing R. H. Concerning hereditarily indecomposable continua // Pacific J. Math. 1951. Vol. 1. P. 43–51.

26. Cook H. Continua which admit only the identity mapping onto non-degenerate subcontinua // Fundamenta Mathematicae 1967. Vol. 60. P. 241–249.

27. Borzov S. I., Ivanov A. O., Tuzhilin A. A. Extendability of Metric Segments in Gromov-Hausdorff Distance // ArXiv e-prints 2020. arXiv:2009.00458[math.MG].

REFERENCES

1. Rieffel, M. A. 2003, “Gromov-Hausdorff Distance for Quantum Metric Spaces”, *ArXiv e-prints*, arXiv:math/0011063[math.OA].

2. Lim, S., Memoli, F. & Smith, Z. 2023, “The Gromov–Hausdorff distance between spheres”, *Geometry & Topology*, vol. 27, no. 9, pp. 3733–3800.

3. Lee, J. & Morales, C. A. 2022, “Gromov-Hausdorff Stability of Dynamical Systems and Applications to PDEs”, Birkhäuser/Springer.

4. Mendelson, E. 1984, “Introduction to Mathematical Logic”, M.: Nauka.

5. Banach, T. 2023, “Classical set theory: theory of sets and classes”, *ArXiv e-prints*, arXiv:2006.01613v4[math.LO].

6. Gromov, M. 1981, “Structures métriques pour les variétés riemanniennes”, Edited by Lafontaine and Pierre Pansu.

7. Gromov, M. 1999, “Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces”, Birkhäuser.

8. Burago, D., Burago, Yu. & Ivanov, S. 2001, “A Course in Metric Geometry”, Providence.

9. Bing, R. H. 1948, “A homogeneous indecomposable plane continuum”, *Duke Math. J.*, vol. 15, pp. 729–742.

10. Bogatyy, S. A. & Tuzhilin, A. A. 2021, “Gromov–Hausdorff class: its completeness and cloud geometry”, *ArXiv e-prints*, arXiv:2110.06101[math.MG].

11. Bogatyy, S. A. & Tuzhilin, A. A. 2023, “Action of similarity transformation on families of metric spaces”, *Itogi Nauki i Tekhn.*, vol. 223, pp. 3–13.

12. Bogataya, S. I., Bogatyy, S. A., Redkozubov, V. V. & Tuzhilin, A. A. 2023, “Clouds in Gromov–Hausdorff Class: their completeness and centers”, *Topology and its Applications*, vol. 329.

13. Bogatyy, S. A. & Tuzhilin, A. A. 2021, “Continuous Gromov–Hausdorff class: its completeness and cloud geometry”, *ArXiv e-prints*, arXiv:2110.06101[math.MG].

14. Fet, A. I. 1954, “A generalization of the Lyusternik-Shnirelman theorem on coverings of spheres and some related theorems”, *DAN*, vol. 95, no. 6, pp. 1149–1151.

15. Vikhrov, A. A. 2025, “The problem of constructing geodesics in the Gromov–Hausdorff class: an optimal Hausdorff implementation does not always exist”, *Chebyshevski sb.*, vol. 26, no. 2, pp. 49–60.

16. Vikhrov, A. 2025, “Geometry of linear and nonlinear geodesics in the proper Gromov–Hausdorff class”, *Matematicki vesnik*, pp. 1–17.

17. Stone, A. H. 1948, “Paracompactness and product spaces”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 54, pp. 977–982.

18. Engelking, R. 1985, “General Topology”, Warszawa.

19. Munkres, J. R., 2000, “Topology”, 2nd Edition, Prentice Hall, Upper Saddle River.

20. Dowker, C. H. 1947, “Mapping theorems for non-compact spaces”, *Amer. J. Math.*, vol. 69, pp. 200–242.

21. Nagami, K. & Roberts, J. H. 1965, “Metric-dependent dimension functions”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 16, no. 4, pp. 601–604.

22. Illanes, A. & Nadler, S. Jr. 1999, “Hyperspaces”, Marcel Dekker, New York.

23. Knaster, B. 1922, “Un continu dont tout sous-continu est indecomposable”, *Fund. Math.*, vol. 3, pp. 247–286.

24. Moise, E. E. 1948, “An indecomposable plane continuum which is homeomorphic to each of its nondegenerate subcontinua”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 63, pp. 581–594.

25. Bing, R. H. 1951, “Concerning hereditarily indecomposable continua”, *Pacific J. Math.*, vol. 1, pp. 43–51.

26. Cook, H. 1967, “Continua which admit only the identity mapping onto non-degenerate subcontinua”, *Fundamenta Mathematicae*, vol. 60, pp. 241–249.

27. Borzov, S. I., Ivanov, A. O. & Tuzhilin, A. A. 2020, “Extendability of Metric Segments in Gromov-Hausdorff Distance”, *ArXiv e-prints*, arXiv:2009.00458[math.MG].

Получено: 27.11.2025
Принято в печать: 12.02.2026

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 27. Выпуск 1.

УДК: 517.977.5 DOI: 10.22405/2226-8383-2018-27-1-51-62

Двухкритериальная задача оптимального управления с использованием свертки Гермейера

В. А. Горелик, Т. В. Золотова

Горелик Виктор Александрович — доктор физико-математических наук, Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН; Московский педагогический государственный университет (г. Москва).
e-mail: vgor16@mail.ru
Золотова Татьяна Валерьяновна — доктор физико-математических наук, профессор, Финансовый университет при Правительстве РФ (г. Москва).
e-mail: tgold11@mail.ru

Аннотация

Современные математические модели, компьютерные технологии, финансовые инструменты и механизмы сформировали новое направление «финансовый инжиниринг». В рамках финансового инжиниринга представляет интерес формулировка новых математических задач управления финансовыми ресурсами, в том числе модификация целевых функционалов. В данной работе предлагается один из вариантов такой модификации, а именно для двухсекторной модели эконмической динамики рассматривается двухкритериальная задача, формализуемая в виде максиминной задачи управления. Проведено полное исследование зависимости вида оптимальной траектории от величины интервала управления.

Ключевые слова: максимин, оптимальное управление, функция Гамильтона, свертка Гермейера, магистральный эффект.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:
Горелик В. А., Золотова Т. В. Двухкритериальная задача оптимального управления с использованием свертки Гермейера // Чебышевский сборник, 2026, т. 27, вып. 1, с. 51–62.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 27. No. 1.

UDC: 517.977.5 DOI: 10.22405/2226-8383-2018-27-1-51-62

Two-criteria optimal control problem using Germeier convolution

V. A. Gorelik, T. V. Zolotova

Gorelik Victor Alexandrovich — doctor of physical and mathematical sciences, Federal Research Center “Computer Science and Control” of RAS; Moscow State Pedagogical University (Moscow).
e-mail: vgor16@mail.ru
Zolotova Tatiana Valerianovna — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Financial University under the Government of the Russian Federation (Moscow).
e-mail: tgold11@mail.ru

Abstract

Modern mathematical models, computer technologies, financial instruments and mechanisms have formed a new scientific sphere – "financial engineering". In the context of financial engineering, the formulation of new mathematical problems of financial resource management, including the modification of target functionals, is of interest. In this paper, one of the variants of such modification is proposed, namely, for a two-sector model of economic dynamics, a two-criteria problem is considered formalized as a maximin control problem. A complete study of the dependence of the type of optimal trajectory on the value of the control interval is carried out.

Keywords: maximin, optimal control, Hamilton function, Germeier convolution, turnpike effect.

Bibliography: 15 titles.

For citation:
Gorelik, V. A., Zolotova, T. V. 2026, “Two-criteria optimal control problem using Germeier convolution” , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 27, no. 1, pp. 51–62.

1. Введение

Современные математические модели и компьютерные технологии, финансовые инструменты и механизмы для решения актуальных финансовых вопросов, минимизации рисков и увеличения доходности сформировали новое направление «финансовый инжиниринг» [1-4].

В рамках финансового инжиниринга представляет интерес в теоретическом плане формулировка новых математических задач управления финансовыми ресурсами, в том числе модификация целевых функционалов. В данной работе предлагается один из вариантов такой модификации.

В экономических системах различного уровня очень распространенной является задача распределение ресурса или производимого продукта между производственной и непроизводственной сферами. Обе эти сферы можно описать размерами фондов, изменения которых связаны с вложением дополнительных ресурсов (продуктов) и амортизации. Величина вновь производимого продукта зависит непосредственно от размеров производственных фондов (определяется производственной функцией). Если при этом качество функционирования системы оценивается двумя критериями, отражающими соответственно достижения в производственной и непроизводственной сферах, то это стимулирует развитие и непроизводственных фондов. Такая ситуация имеет место при разработке программ экономического и социального развития, производства и охраны окружающей среды и т.д. [5].

При наличии нескольких (в данном случае двух) критериев понятие оптимальности неоднозначно. Тут возможны разные постановки задачи. Традиционной для теоретических исследований является задача о максимальном потреблении, один из вариантов которой изложен, например, в [6]. Она состоит в максимизации критерия, зависящего от размеров непроизводственных фондов, при ограничении снизу на критерий, оценивающий производственные фонды. Возможна в некотором смысле обратная задача: при ограничении снизу на допустимый уровень потребления максимизировать критерий, оценивающий производственные фонды.

Указанные задачи характеризуются неравноправным учетом критериев (и соответствующих сфер). Равноправное (симметричное) их рассмотрение естественно связать с паретооптимальностью. Для выделения конкретного решения из множества Парето можно использовать свертку Гермейера, а именно, ввести общий критерий, представляющий собой минимум из частных критериев, умноженных на весовые коэффициенты. Этот критерий имеет ясный содержательный смысл: соизмеряются достижения в обеих сферах, и ситуация оценивается по худшему результату («узкому месту»), причем в силу разнородности сфер результаты в них не являются взаимозамещающими. Весовые коэффициенты могут играть роль переводных, если достижения измеряются в разных единицах, оценивать приоритеты, отражать желаемый уровень в каждой сфере и т.п. По-видимому, указанные критерии в таких задачах хорошо описывают цель и поведение системы. Однако он имеет математический недостаток – является негладким функционалом, что усложняет анализ.

2. Формулировка задачи управления

Рассмотрим конкретную постановку задачи подобного типа. Пусть имеется непрерывный промежуток планирования $[0, T]$. Обозначим величины фондов в производственной и непроизводственной сферах в момент t соответственно $\tilde{x}(t)$ и $\tilde{y}(t)$. Будем считать их скалярными величинами (например, все в денежном выражении). В каждый момент времени t выпускаемый однородный продукт в количестве $\alpha\tilde{x}(t)$ (линейная производственная функция) распределяется в пропорции $u(t)$ и $1-u(t)$ между производственной и непроизводственной сферами. Управление $u(\cdot)$ в каждый момент удовлетворяет ограничениям $0 \leqslant u(t) \leqslant 1$. Заданы величины амортизации μ, δ и начальные условия $\tilde{x}_0,\ \tilde{y}_0$. В качестве критерия возьмем функционал интегрального типа, в котором подынтегральная функция, оценивающая эффективность в каждый момент времени t, имеет вид

$$f\left(\tilde{x}, \tilde{y}\right) = \min\left\{\lambda\tilde{x}, \tilde{y}\right\},$$

где λ – весовой коэффициент. В результате получается следующая задача оптимального управления с фиксированным временем: найти кусочно-непрерывную функцию $u(t)$ и кусочно-непрерывно-дифференцируемые функции $\tilde{x}(t)$ и $\tilde{y}(t)$, максимизирующие функционал

$$I = \int_0^T \min\{\lambda\tilde{x}, \tilde{y}\}dt \tag{1}$$

и удовлетворяющие системе ограничений

$$\dot{\tilde{x}} = \left(\alpha u - \mu\right)\tilde{x}, \quad \tilde{x}\left(0\right) = \tilde{x}_0, \quad \dot{\tilde{y}} = \alpha\left(1-u\right)\tilde{x} - \delta\tilde{y}, \quad \tilde{y}\left(0\right) = \tilde{y}_0. \tag{2}$$

Все переменные в (1), (2) являются скалярными, начальные условия $\tilde{x}_0,\ \tilde{y}_0$, а также константы $\lambda, \alpha, \mu, \delta$ – положительные числа, причем $\alpha > \mu$, $\alpha > \delta$.

В соотношениях (1), (2) сделаем замену переменных, упрощающее дальнейшие рассуждения:

$$x = \tilde{x}\exp\left(\mu t\right)\ ,\ z = \left(\tilde{x} + \tilde{y}\right)\exp\left(\mu t\right). \tag{3}$$

При этом задача (1), (2) преобразуется к виду

$$I = \int_0^T \min\{\lambda x, z - x\}\exp\left(-\mu t\right)\, dt, \tag{4}$$

$$\dot{x} = \alpha u x, \quad x\left(0\right) = x_0, \quad \dot{z} = \left(\alpha - \mu + \delta\right)x + \left(\mu - \delta\right)z, \quad z\left(0\right) = z_0. \tag{5}$$

Связь между начальными условиями в задачах (1), (2) и (4), (5) получается из соотношений (3) при $t = 0$.

3. Исследование качественного вида закона оптимального управления

Фазовую плоскость (x,z) задачи (4), (5) разобьем на три непересекающиеся части: область «влияния» функционала $\lambda\tilde{x}(t)$, область «влияния» функционала $\tilde{y}(t)$ и область одинакового «влияния» обоих функционалов. Обозначим эти области соответственно через

$$S^{-}=\left\{(x,z)\mid \lambda x<z-x\right\},$$

$$S^{+}=\left\{(x,z)\mid \lambda x>z-x\right\},$$

$$S=\left\{(x,y)\mid \lambda x=z-x\right\}.$$

Область S представляет собой прямую, разделяющую полуплоскости S^- и S^+, уравнение которой в исходных переменных есть $\lambda\tilde{x}=\tilde{y}$.

С помощью непрерывных на отрезке $[0,T]$ сопряженных переменных φ_1 и φ_2 необходимые условия оптимальности в задаче (4), (5) могут быть сформулированы в форме модифицированного принципа максимума [7, 8].

В данном случае функция Гамильтона имеет вид

$$H=p_1\lambda x\exp\left(-\mu t\right)+p_2\left(z-x\right)\exp\left(-\mu t\right)+\alpha u x\varphi_1+\left[\left(\alpha-\mu+\delta\right)x+\left(\mu-\delta\right)z\right]\varphi_2.$$

Здесь коэффициенты p_1 и p_2 неотрицательны, $p_1+p_2=1$ и каждый из данных коэффициентов не равен нулю только в том случае, когда минимум в (4) достигается на соответствующем ему частном критерии.

Из условия максимума функции Гамильтона по $u\in[0,1]$ получаем связь между оптимальным управлением и сопряженной переменной φ_1 на всей плоскости:

$$u=\begin{cases}1, \text{ если } \ \varphi_1>0,\\ 0, \text{ если } \ \varphi_1<0,\\ \text{любое, если } \ \varphi_1=0.\end{cases}$$

Для кусков оптимальной траектории задачи (4), (5), целиком лежащих в области S^-, сопряженная система и функция Гамильтона определяется обычной формой принципа максимума для задачи (5) с максимизируемым функционалом $\int_0^T\lambda x\exp\left(-\mu t\right)dt$, а для области S^+ - с функционалом $\int_0^T\left(z-x\right)\exp\left(-\mu t\right)dt$.

Таким образом, вид управления для кусков оптимальной траектории, целиком лежащих в области S^-, определяется задачей

$$\begin{gathered}\max\nolimits_{u\in[0,1]}[\lambda x\exp\left(-\mu t\right)\ +\alpha u x\varphi_1+\left[\left(\alpha-\mu+\delta\right)x+\left(\mu-\delta\right)z\right]\varphi_2],\\ \dot{\varphi}_1=-\lambda\exp\left(-\mu t\right)\ -\alpha u\varphi_1-\left(\alpha-\mu+\delta\right)\varphi_2,\quad \dot{\varphi}_2=\left(\delta-\mu\right)\varphi_2,\end{gathered}\tag{6}$$

дополненной уравнениями (5).

Вид управления для кусков оптимальной траектории, целиком лежащих в области S^+, определяется задачей

$$\begin{gathered}\max\nolimits_{u\in[0,1]}\left[(z-x)\exp\left(-\mu t\right)\ +\alpha u x\varphi_1+\left[\left(\alpha-\mu+\delta\right)x+\left(\mu-\delta\right)z\right]\varphi_2\right],\\ \dot{\varphi}_1=\exp\left(-\mu t\right)\ -\alpha u\varphi_1-\left(\alpha-\mu+\delta\right)\varphi_2,\\ \dot{\varphi}_2=-\exp\left(-\mu t\right)\ +\left(\delta-\mu\right)\varphi_2,\end{gathered}\tag{7}$$

дополненной уравнениями (5).

Куски оптимальных траекторий, целиком лежащих в S, определяется формой области S. Поэтому для нее не потребуется аналог задач (6), (7), который имеет более сложный вид (в этом случае коэффициенты p_1 и p_2 неизвестны). Покажем, что задачи (6), (7) всюду, за исключением конечного числа точек, однозначно определяют закон оптимального управления в областях S^- и S^+. В самом деле, вопрос об однозначности определения связан с нулями функции φ_1. Поскольку закон управления должен быть кусочно-непрерывным, нули функции φ_1 либо полностью заполняют некоторые интервалы, либо появляются в изолированных точках. Однако в условиях задачи обращение функции φ_1 в нуль на интервале невозможно. В самом деле, если $\varphi_1 \equiv 0$, $\dot{\varphi_1} \equiv 0$, то сопряженные системы (6), (7) преобразуются к следующим видам:

$$\varphi_2 = -\frac{\lambda}{\alpha - \mu + \delta} \exp\left(-\mu t\right), \quad \dot{\varphi_2} = \left(\delta - \mu\right) \varphi_2, \tag{8}$$

$$\varphi_2 = -\frac{\lambda}{\alpha - \mu + \delta} \exp\left(-\mu t\right), \quad \dot{\varphi_2} = -\exp\left(-\mu t\right) \ + \left(\delta - \mu\right) \varphi_2. \tag{9}$$

Уравнения (8) совместны только при $\delta = 0$; уравнения (9) совместны только при $\alpha = \mu$. По условия задачи оба эти условия не выполняются. Таким образом, доказано, что кускам оптимальной траектории, целиком лежащим в S^- или S^+, соответствуют кусочно-постоянные управления, принимающие значения 0 или 1.

Уточним характер закона управления на таких кусках траектории. Для этого заметим, что в предположении постоянства управления из систем (6), (7) следует, что для функции $v(u) = \frac{d}{dt}\left(\varphi_1 \exp\left(\alpha u t\right)\right)$ имеем

$$v(u) = \left\{ \begin{array}{c} -[\lambda \exp\left(-\delta t\right) + C(\alpha - \mu + \delta)] \exp\left(\alpha u - \mu + \delta\right) \ \text{ в } S^-, \\ -[\frac{\alpha - \mu}{\delta} \exp\left(-\delta t\right) + C(\alpha - \mu + \delta)] \exp\left(\alpha u - \mu + \delta\right) \text{ в } S^+. \end{array} \right. \tag{10}$$

Здесь константа С вследствие непрерывности φ_2 одна и та же для всего куска. Точкам переключения управления соответствуют нули функции $\varphi_1 \exp\left(\alpha u t\right)$, а каждой паре таких нулей по теореме Ролля о среднем соответствует нуль производной этой функции. Но из (10) следует, что таких нулей не более одного, т.е. при прохождении оптимальной траектории внутри S^- или S^+ не может быть более двух моментов переключения управления. Более того, из (10) следует, что на участках постоянства управления функция

$$\exp\left(-\alpha u + \mu - \delta\right) \frac{d}{dt}\left(\varphi_1 \exp\left(\alpha u t\right)\right)$$

монотонно возрастает, т.е. оптимальное управление на кусках траектории, целиком лежащих в S^- или S^+, задается отрезками последовательности $\{1, 0, 1\}$.

Если оптимальная траектория заканчивается внутри S^- или S^+, то с помощью естественных краевых условий для сопряженных переменных

$$\varphi_1\left(T\right) = \varphi_2\left(T\right) = 0 \tag{11}$$

закон управления может быть еще более уточнен для последнего куска траектории, целиком лежащего в S^- или S^+. После подстановки (11) в (10), получаем

$$\frac{d}{dt}\left(\varphi_1 \exp\left(\alpha u t\right) \ \right)\bigg|_{t=T} = \left\{ \begin{array}{c} -\lambda \exp(\,(\alpha u - \mu)\, T) \text{ в } S^-, \\ \exp(\,(\alpha u - \mu)\, T) \text{ в } S^+. \end{array} \right.$$

Это значит, что для $0 < \tau < \tau^0$

$$u(T - \tau) = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ в } S^-, \\ 0 \text{ в } S^+, \end{array} \right.$$

где τ^0 является единственным отличным от нуля корнем уравнения $\varphi_1\left(T - \tau^0\right) = 0$. Это уравнение, получаемое из (7), (11) имеет вид

$$\frac{\alpha-\mu+\delta}{\delta-\mu}\left[\exp\left((\mu-\delta)\,\tau^0\right)\,-1\right]+\frac{\alpha-\mu}{\mu}\left[\exp\left(\mu\tau^0\right)\,-1\right],\quad \delta\neq\mu, \tag{12}$$

или

$$\exp\left(\mu\tau^0\right)\,-\frac{\alpha}{\alpha-\mu}\mu\tau^0-1=0,\quad \delta=\mu. \tag{13}$$

С учетом доказанного ранее относительно последовательностей значений управления в областях S^- или S^+ получаем, что

1) если оптимальная траектория заканчивается в S^-, то на ее последнем куске, лежащем в S^-, обязательно $u\equiv 1$;

2) если оптимальная траектория заканчивается в S^+, то на ее последнем куске, лежащем в S^+, не более одного переключения управления и на конце такой траектории $u\equiv 1$.

Движение вдоль S возможно при выполнении равенства $\lambda x=z-x$. С учетом (5) отсюда следует, что при движении вдоль S обязательно

$$u=u_0=\frac{1}{1+\lambda}\left[1+\frac{\lambda(\mu-\delta)}{\alpha}\right]. \tag{14}$$

Это управление допустимо, если $u_0\in[0,1]$. В условиях задачи $0\leqslant u_0\leqslant 1$ при $\lambda(\mu-\delta)\leqslant\alpha$. При $u_0=0$ имеем $\dot x=\dot z=0$, т.е. движение вдоль S фактически невозможно.

Таким образом, при $\lambda(\mu-\delta)<\alpha$ на оптимальной траектории возможны участки, лежащие в S, а закон оптимального управления определяется кусочно-постоянной функцией, принимающей значения 0, u_0, 1. При $\lambda(\mu-\delta)\geqslant\alpha$ оптимальная траектория может лишь пересекать прямую S или отражаться от нее, а закон оптимального управления определяется кусочно-постоянной функцией, принимающей значения 0, 1.

Вследствие изложенного выше, среди траекторий системы (5) особое место отводится тем из них, которые соответствуют закону управления с $u=0$ или $u=1$. Рассмотрим более подробно эти траектории, уделяя главное внимание их пересечению с S.

Уравнения этих траекторий получаются в результате интегрирования системы (5) в предположении $u=const$:

$$\begin{gathered} x=x_0\exp\left(\alpha ut\right),\\ z=\begin{cases} x_0\frac{\alpha+\delta-\mu}{\alpha u+\delta-\mu}\exp\left(\alpha ut\right)+(z_0-x_0\frac{\alpha+\delta-\mu}{\alpha u+\delta-\mu}\exp((\mu-\delta)\,t\ ), & \alpha u+\delta-\mu\neq 0,\\ z_0+\alpha x_0 t, \quad u=0,\ \mu=\delta. \end{cases}\end{gathered} \tag{15}$$

В соответствии с характером особой траектории $\dot x=\dot z=0$ системы (5) при $u=0$ и ее расположением относительно S возможны следующие случаи:

1) у системы (5) нет особой траектории, когда $\mu=\delta$;

2) особая траектория расположена «выше» прямой S, когда $0<\lambda\,(\delta-\mu)<\alpha$;

3) особая траектория совпадает с прямой S, когда $\lambda\,(\delta-\mu)=\alpha$;

4) особая траектория расположена между прямыми S и $z=x$, когда $\lambda\,(\delta-\mu)>\alpha$;

5) особая траектория расположена «ниже» прямой $z=x$, когда $\mu>\delta$.

Рассмотрим при каких условиях возможны переходы оптимальных траекторий между областями S^-, S^+, S. При $u=1$ фазовые траектории пересекают S, выходя из области S^- и заходя в область S^+. При $\mu\geqslant\delta$ или $0<\lambda(\delta-\mu)<\alpha$ фазовые траектории с $u=0$ осуществляют обратный переход из области S^+ и заходя в область S^-. Из (14) следует, что в этих случаях возможно движение вдоль S. Из (15) следует, что при $\lambda(\delta-\mu)=\alpha$ фазовые траектории с $u=0$ не могут за конечный промежуток времени достигать S. Из (14) следует, что в этом случае движение вдоль S невозможно. При $\lambda(\delta-\mu)>\alpha$ фазовые траектории с $u=0$ пересекают S, выходя из области S^- и заходя в область S^+. Из (14) следует, что в этом случае движение вдоль S невозможно.

Так как движение вдоль S осуществляется при значении управления u_0, которое отлично от 0 и 1, то вдоль всего такого участка траектории $\varphi_1 \equiv 0$. Поскольку сопряженные переменные непрерывны, отсюда, в частности, следует, что в момент захода оптимальной траектории в область S переменная φ_1 должна обращаться в 0.

При постоянных управлениях сопряженные системы легко интегрируются с учетом краевых условий. Используя получающееся выражения для сопряженных переменных и учитывая их непрерывность при переходе через S, можно доказать, что если до момента перехода оптимальной траектории из S^- в S^+ были переключения управления, то на оставшейся части траектории их нет, т.е. $u \equiv 1$.

Остановимся кратко на предварительных результатах. Из системы сопряженных уравнений в (6) и (7) получен вывод о количестве точек переключения управлений в областях S^- и S^+ и о последовательности принимаемых им значений. Из естественных краевых условий получено заключение о характере управления на последних участках траектории, заканчивающихся в S^- или S^+. Из модифицированного принципа максимума и формы области S получен вывод о наличии одной из точек переключения управления при пересечении S, характере движения вдоль S и существовании управления, при котором движение вдоль нее возможно. Их уравнений траекторий динамической системы получен вывод о характере их пересечения области S.

Эти выводы позволяют качественно описать закон оптимального управления и форму оптимальной траектории задачи (4), (5), что в некотором смысле аналогично интегрированию задачи Коши для систем сопряженных уравнений с граничными условиями на правом конце интервала управления. При этом сам процесс интегрирования заменяется систематическими ссылками на допустимые последовательности значений управления в областях S^- и S^+, а также на связь между значениями функций φ_1 при пересечении траектории одной из областей S^-, S^+ или S. Покажем конкретно, как это делается. Если оптимальная траектория заканчивается участком, целиком лежащим в S, то заменим T на время, соответствующее началу этого участка. До момента времени T траектория некоторое время находилась в одной из областей S^- или S^+, поэтому ей соответствовала одна из систем сопряженных уравнений (6) или (7), причем в момент времени T переменная φ_1 обращается в нуль.

Пусть перед моментом времени T траектория находится в области S^-. Тогда, если траектория заканчивается на S и движение вдоль S возможно, т.е. $u_0 \in [0, 1]$, то на конце такой траектории $u = 1$, так как при $u = 0$ траектории удаляются от S. Если движение вдоль S невозможно или конец траектории лежит в S^-, то и в этом случае на конце траектории, как выяснилось при обсуждении краевых условий для сопряженных переменных, обязательно $u = 1$. Закон управления в S^- определяется отрезками последовательности $\{1, 0, 1\}$, и поскольку в момент времени T наблюдается переключение управления, то на всем куске оптимальной траектории, лежащем в S^- и предшествующем этому переключению, обязательно $u \equiv 1$. Поскольку такие траектории целиком лежат в S^-,то в этом случае управление на всем интервале $[0, T]$ равно 1.

Пусть перед моментом времени T траектория находилась в области S^+. Тогда, если траектория заканчивается на S, то на конце такой траектории $u = 0$, т.к. при $u = 1$ траектории в S^+ удаляются от S. Если же конец траектории лежит в S^+, то и в этом случае на конце траектории, как выяснилось при обсуждении краевых условий для сопряженных переменных, тоже $u = 0$. Закон управления в S^+ определяется отрезками последовательности $\{1, 0, 1\}$. Поэтому на последнем куске оптимальной траектории, целиком лежащем в S^+, либо только одно переключение управления, либо переключения нет. Рассмотрим эти случаи отдельно.

Если в области S^+ есть переключение управления, то участок траектории, соответствующий значению управления $u = 1$ может пересекать S, начиная в S^-. Вследствие непрерывности сопряженных переменных при переходе других переключений управления нет.

Если в области S^+ нет переключения управления, то при $\lambda(\delta - \mu) < \alpha$ (когда движение вдоль S возможно) участок траектории, соответствующий значению управления $u = 0$, может пересекать S начинаясь в S^-. Поскольку закон управления в S^- задается отрезком последовательности $\{1, 0, 1\}$, то в этом случае в области S^- может быть лишь один момент переключения. Из этих рассуждений следует вывод о том, то если на оптимальной траектории есть участок в области S, то от обязательно единственный и лежит на конце траектории.

В результате качественного описания оптимального закона управления удалось выделить конечное число семейств траекторий, каждая из которых характеризуется однозначно определенными последовательностями значений управления и также однозначно определенной очередностью прохождения траекторий областей S^-, S^+ и S. После этого переход к количественному описанию оптимальных законов управления и формы траектории задачи (4), (5) осуществляется с помощью единообразной параметризации конкретных траекторий каждого семейства моментами переключений управления и прохождения границ областей S^-, S^+ и S. Это позволяет свести задачу (4), (5) к ряду одномерных задач оптимизации, которые могут быть решены аналитически. Естественно, решения эти различных в зависимости от параметров задачи, начальных условий и протяженности интервала управления.

При $\lambda(\delta - \mu) \geqslant \alpha$ полученное качественное описание оптимального закона управления совместно с уравнением (12) дает полное решение задачи (4), (5). Поэтому осталось исследовать случай $\lambda(\delta - \mu) < \alpha$, когда движение вдоль S возможно.

Сначала рассмотрим траектории, начинающиеся в S, а затем с помощью переноса начала отсчета времени в положительном или отрицательном направлении сведем к этому и общий случай. Из предыдущих рассуждений следует, что закон оптимального управления при этом задается последовательностью $\{1, 0\}$, если траектория заканчивается в S^+, или последовательностью $\{1, 0, u_0\}$, если траектория заканчивается в S (в частности, возможно $u \equiv u_0$). Соответственно, если начальная точка оптимальной траектории находится в области S, то в зависимости от длинны интервала планирования она либо целиком лежит в S, либо переходит в область S^+ и там заканчивается, либо в некоторый момент возвращается на S и остается там до конца.

Рассмотрим, при каких условиях оптимум реализуется на каждой из этих последовательностей и как зависит время движения на участках с постоянным управлением от величины интервала T. В дальнейшем через t_i будет обозначаться i-й момент переключения управления. При этом, если переключений нет ($u \equiv u_0$), то момент окончания обозначим через t_1, для последовательности управления $\{1, 0\}$ – через t_2, для последовательности управления $\{1, 0, u_0\}$ – через t_3.

Обозначим начальную точку траектории, лежащую в S, через A; точку на траектории, соответствующую моменту t_1, через B; точку на траектории, соответствующую моменту t_2, через C; точку на траектории, соответствующую моменту t_3, через D. С помощью уравнений (15) находим условия, при которых точка C принадлежит области S:

$$\lambda \exp(\alpha t_1) = \begin{cases} \lambda + \alpha (t_2 - t_1) \exp(\alpha t_1), & \mu = \delta, \\ \frac{\alpha}{\delta-\mu} \exp(\alpha t_1) + \\ + \left[\lambda \exp((\mu - \delta) t_1) - \frac{\alpha}{\delta-\mu} \exp(\alpha t_1) \right] \exp((\mu - \delta)(t_2 - t_1)), \mu \neq \delta. \end{cases}$$

Разрешая эти соотношения относительно $t_2 - t_1$ получаем

$$\tau = t_2 - t_1 = \begin{cases} \frac{\lambda}{\alpha}(1 - \exp(-\alpha t_1)), & \mu = \delta, \\ \frac{1}{\delta-\mu} \ln \frac{\frac{\alpha}{\delta-\mu} - \lambda \exp((\mu-\alpha-\delta) t_1)}{\frac{\alpha}{\delta-\mu} - \lambda}, & \mu \neq \delta. \end{cases} \tag{16}$$

Исследование вида оптимальной траектории различается для случаев $\mu = \delta$ и $\mu \neq \delta$. Далее мы остановимся на случае $\mu = \delta$ и установим зависимость вида оптимальной траектории от величины параметра T. В случае $\mu \neq \delta$ эта зависимость несколько более сложная, соответствующие результаты мы предполагаем опубликовать в дальнейшем.

4. Исследование зависимости вида оптимальной траектории от величины планового периода

Исследуем зависимость траектории $ABCD$ от протяженности интервала управления T. С помощью формул (15) получаем значения целевого функционала

$$I = \frac{\lambda}{\mu} - \left[\frac{\lambda}{\mu} + \frac{\alpha}{\mu^2} + \frac{\lambda}{\alpha u_0 - \mu}\right] \exp\left(\alpha t_1 - \mu t_2\right) +$$

$$+\frac{\alpha}{\mu^2} \exp\left(\left(\alpha - \mu\right) t_1\right) \ + \frac{\lambda}{\alpha u_0 - \mu} \exp\left(\alpha t_1 - \alpha u_0 t_2 + \left(\alpha u_0 - \mu\right) t_3\right) \ .$$

Эта формула выведена в предположении $\alpha u_0 - \mu \neq 0$, т.к. с учетом непрерывности I по переменной u_0 все получаемые ниже результаты могут быть перенесены на случай $\alpha u_0 - \mu = 0$.

Исследуем функционал I на экстремум, вычисляя производную

$$\frac{\partial I}{\partial t_1} = \left(t_2 - t_1\right) \exp\left(\alpha t_1 - \mu t_2\right) [\frac{\alpha(\alpha - \mu)(\exp\left(\mu\left(t_2 - t_1\right)\right) - 1)}{\mu^2\left(t_2 - t_1\right)} +$$

$$+\frac{\lambda \alpha^2 u_0}{\alpha u_0 - \mu} \left[\exp((\alpha u_0 - \mu)(t_3 - t_2)) - \frac{\alpha - \mu}{\lambda \mu}\right]].$$

Условие обращения в нуль этой производной дает либо значение $\tau = t_2 - t_1 = 0$, либо уравнение

$$\tfrac{\alpha(\alpha-\mu)\exp\left(\mu(\tau)-1\right)}{\mu^2(t_2-t_1)} + \tfrac{\lambda\alpha^2 u_0}{\alpha u_0-\mu} \left[\exp((\alpha u_0 - \mu)(t_3 - t_2)) - \tfrac{\alpha-\mu}{\lambda\mu}\right] = 0, \tag{17}$$

откуда с помощью (16) можно получить зависимость $t_3 = t_3^*(t_1)$. Вследствие того, что при $\tau > 0$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial t_1 \partial t_3} = \left(t_2 - t_1\right) \exp\left(\alpha t_1 - \mu t_2\right) \lambda \alpha^2 u_0 \exp((\alpha u_0 - \mu)(t_3 - t_2)) > 0,$$

участки возрастания функции $t_3^*(t_1)$ соответствуют убыванию функционала I.

Дифференцируя уравнение (17) по переменной τ, получаем, что при $\tau > 0$

$$\frac{\partial(t_3 - t_2)}{\partial \tau} = -\frac{\exp((\mu - \alpha u_0)(t_3 - t_2))\alpha\left(\alpha - \mu\right)\left(\mu\tau\exp\left(\mu\left(\tau\right)\right) - \exp\left(\mu\left(\tau\right)\right) + 1\right)}{\lambda \alpha^2 \mu^2 \tau^2 u_0} < 0,$$

т.е. с ростом τ, а вместе с ним и t_1, время движения на участке CD монотонно убывает.

Дифференцируя уравнение (17) по t_1 и вводя обозначение $r = \mu\tau$, имеем

$$\frac{\partial t_3^*}{\partial t_1} = 1 + \lambda \exp\left(-\alpha t_1\right) \ \left[1 - \frac{\mu\left(r - 1\right)\exp r \ + \mu}{\alpha r u_0 + \left(\mu - \alpha u_0\right)\left(\exp r \ - 1\right) r}\right].$$

Положительность $\frac{\partial t_3^*}{\partial t_1}$ теперь следует из положительности значения функции

$$f(s) = 1 - \frac{s\left(r - 1\right)\exp r \ + s}{r + \left(s - 1\right)\left(\exp r \ - 1\right) r}$$

при $s = \frac{\mu}{\alpha u_0}$ (более того, эта функция положительна на $[0, \infty)$).

Таким образом, доказано, что функция $t_3^*(t_1)$, а значит, и обратная ей $t_1^*(t_3)$ монотонно возрастают. Остается исследовать предельные случаи вырождения в точку отрезков AB и BC. Из (17) имеем

$$t_3^* = \lim_{t_1 \to \infty} t_3^*(t_1) \ = \frac{1}{\alpha u_0 - \mu} \ln\left(\frac{\alpha - \mu}{\lambda \alpha u_0}\right).$$

Это значит, что при $t_3 \leqslant t_3^*$ на оптимальной траектории отсутствуют участки AB и BC.

Если $t_3 = t_2$, то уравнение (17) превращается в (13). Это значит, что при $\tau < \tau^0$ на оптимальной траектории обязательно содержится участок CD ненулевой длины, т.е. имеется движение вдоль S.

Проведенные рассуждения и расчеты позволяют сформулировать следующие выводы о форме оптимальной траектории и ее изменении при увеличении протяженности интервала управления для всевозможных значений параметров и начальных условий задачи (1), (2).

Пусть начальная точка траектории принадлежит S^-. Тогда полупрямую $[0, \infty)$ всевозможных значений T в общем случае можно разбить на четыре участка $[0, T_1] \cup [T_1, T_2] \cup [T_2, T_3] \cup \cup [T_3, \infty)$, на каждом из которых оптимальная траектория имеет свои особенности.

При $T \in [0, T_1]$ оптимальная траектория целиком лежит в S^- и управление на ней постоянно и равно 1. При увеличении T в этом интервале конец траектории приближается к области S и достигает ее при $T = T_1$.

При $T \in [T_1, T_2]$ на оптимальной траектории будут два участка: участок выхода на S при $u = 1$ и участок движение вдоль S при $u = u_0$. При увеличении T в этом интервале время движения на втором участке траектории возрастает до величины t_3^*, т.е. $T_2 = T_1 + t_3^*$.

При $T \in [T_2, T_3]$ на оптимальной траектории будет три участка: участок захода в S^+ при $u = 1$, участок выхода на S при $u = 0$ и участок движения вдоль S при $u = u_0$. При увеличении T в этом интервале длины первых двух участков возрастают, а длина последнего уменьшается. При $T \to T_3$ длина последнего участка стремиться к нулю, а время движения для предпоследнего – к значению τ^0.

При $T \in [T_3, \infty)$ на оптимальной траектории будет два участка: участок захода в S^+ при $u = 1$ и участок движения в сторону S при $u = 0$. При изменении T в этом интервале время движения на втором участке остается равным τ^0.

Если начальная точка траектории лежит в S, то всевозможные значения T в общем случая можно разбить на три подмножества $[T_1, T_2] \cup [T_2, T_3] \cup [T_3, \infty)$, где $T_1 = 0$. Форма оптимальной траектории при изменении T внутри каждого из этих интервалов полностью соответствует форме траектории рассмотренного выше случая с одноименным интервалом изменения T.

Если начальная точка траектории лежит в S^+,то возможны два случая: время движения из нее при $u = 0$ до области S меньше τ^0 или не меньше τ^0. В первом случае форма оптимальной траектории определяется тремя рассмотренными ранее интервалами $[T_1, T_2] \cup [T_2, T_3] \cup [T_3, \infty)$, где $T_1 = 0$. Во втором случае форма оптимальной траектории определяется лишь одним интервалом $[T_3, \infty)$.

5. Заключение

Исследованная задача с негладким интегральным критерием обладает интересной качественной особенностью, которую можно назвать «антимагистральным» эффектом. Ряд задач математической экономики, в частности, классическая задача о максимальном потреблении, весьма похожая на рассмотренную, характеризуются наличием магистрали. Это свойство означает, что при достаточно большом плановом периоде оптимальная траектория почти все время находится на некоторой магистральной прямой [9–11]. Принцип магистрали – фундаментальное понятие в теории оптимального управления, утверждающее, что для широкого класса задач оптимального управления с большим горизонтом прогнозирования оптимальная траектория большую часть времени находится вблизи стационарного решения («магистрали»), а не находится под влиянием начальных или конечных условий [12-15]. В рассмотренной задаче, наоборот, при небольшом плановом периоде движение происходит вдоль S, а при увеличении T время отрыва от нее все увеличивается и, наконец, движение вдоль S отсутствует вообще (возможен возврат на нее в конечный момент).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Damodaran A. Damodaran on Valuation: Security Analysis for Investment and Corporate Finance. — New Jersey: John Wiley and Sons, 2018. — 704 p.

2. Miller M. H. Financial Innovations and Market Volatility. — New Jersey: Blackwell, 1991. — 288 p.

3. Moyer R. Ch., McGuigan J. R., Kretlow W. J. Contemporary Financial Management. — Nashville: South-Western College Pub, 2008. — 880 p.

4. Merton R. C. Continuous-Time Finance. — New Jersey: Wiley-Blackwell, 1992. — 752 p.

5. Петров А. А., Поспелов И. Г., Шананин А. А. Опыт математического моделирования экономики. — М.: Энергоатомиздат, 1996. — 544 с.

6. Ашманов С. А. Математические модели и методы в экономике. — М.: Издательство Московского университета, 1980. — 199 с.

7. Горелик В. А. Максиминные задачи на связанных множествах в банаховых пространствах // Кибернетика. — 1983. — Т. 19, № 1. — С. 81–86.

8. Горелик В. А., Тараканов А. Ф. Метод штрафов и принцип максимума для негладких задач управления с переменной структурой // Кибернетика и системный анализ. — 1992. — Т. 28, № 3. — С. 432–437.

9. Дементьев Н. П. Магистральные свойства моделей экономической динамики с потреблением. — Новосибирск: Наука, 1991. — 167 с.

10. Лотов А. В. Введение в экономико-математическое моделирование. — 2-е изд. — М.: Наука, 2021. — 400 с.

11. Поспелов И. Г. Простота сложности экономики: сильный магистральный эффект // Социофизика и социоинженерия. — М.: МГУ им. М. В. Ломоносова, 2015. — С. 21–22.

12. Trusov N. V. Numerical solution of Mean Field Games problems with turnpike effect // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2020. — Vol. 41, No. 4. — P. 561–576.

13. Zaslavski A. Turnpike Properties in the Calculus of Variations and Optimal Control. — Springer Science and Business Media, 2005. — Vol. 80. — 300 p.

14. Gurman V. I. Turnpike solutions in the procedures seeking optimal controls // Automation and Remote Control. — 2003. — Vol. 64, No. 3. — P. 399–408.

15. Trélat E. Linear turnpike theorem // Mathematics of Control, Signals, and Systems. — 2023. — Vol. 35, No. 3. — P. 685–739.

REFERENCES

1. Damodaran, A. 2018, *Damodaran on valuation: security analysis for investment and corporate finance*, John Wiley and Sons, New Jersey, 704 p.

2. Miller, M.H. 1991, *Financial innovations and market volatility*, Blackwell, Cambridge, MA, 288 p.

3. Moyer, R.C., McGuigan, J.R. & Kretlow, W.J. 2008, *Contemporary financial management*, South-Western College Pub, Nashville, 880 p.

4. Merton, R.C. 1992, *Continuous-time finance*, Wiley-Blackwell, New Jersey, 752 p.

5. Petrov, A.A., Pospelov, I.G. & Shananin, A.A. 1992, *Experience of mathematical modeling of the economy*, Energoatomizdat, Moscow, 544 p.

6. Ashmanov, S.A. 1980, *Mathematical models and methods in economics*, Moscow University Press, Moscow, 199 p.

7. Gorelik, V.A. 1983, "Maximin problems on connected sets in Banach spaces", *Cybernetics*, vol. 19, no. 1, pp. 81–86.

8. Gorelik, V.A. & Tarakanov, A.F. 1992, "Penalty method and maximum principle for nonsmooth variable-structure control problems", *Cybernetics and Systems Analysis*, vol. 28, no. 3, pp. 432–437.

9. Dementyev, N.P. 1991, *Turnpike properties of models of economic dynamics with consumption*, Nauka, Novosibirsk, 167 p.

10. Lotov, A.V. 2021, *Introduction to economic and mathematical modeling*, 2nd edn, Nauka, Moscow, 400 p.

11. Pospelov, I.G. 2015, "Simplicity of economic complexity: strong main effect", in *Sociophysics and socioengineering: Proceedings of the Conference*, Lomonosov Moscow State University, Moscow, pp. 21–22.

12. Trusov, N.V. 2020, "Numerical solution of mean field games problems with turnpike effect", *Lobachevskii Journal of Mathematics*, vol. 41, no. 4, pp. 561–576.

13. Zaslavski, A. 2005, *Turnpike properties in the calculus of variations and optimal control*, Springer Science and Business Media, Berlin, vol. 80.

14. Gurman, V.I. 2003, "Turnpike solutions in the procedures seeking optimal controls", *Automation and Remote Control*, vol. 64, no. 3, pp. 399–408.

15. Trélat, E. 2023, "Linear turnpike theorem", *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, vol. 35, no. 3, pp. 685–739.

Получено: 02.09.2025
Принято в печать: 12.02.2026

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 27. Выпуск 1.

УДК: 511.3 DOI: 10.22405/2226-8383-2026-27-1-63-76

О решётках совместных приближений Дирихле

А. П. Крылов, Н. М. Добровольский, И. Н. Балаба

Крылов Александр Петрович — аспирант, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: alek.krylov@gmail.com
Добровольский Николай Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: dobrovol@tsput.ru
Балаба Ирина Николаевна — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: ibalaba@mail.ru

Аннотация

В работе изучаются свойства унимодулярных решёток совместных приближений Дирихле и взаимных решёток совместных приближений Дирихле. Доказывается теорема о равенстве расстояний между двумя решётками и между двумя соответствующими взаимными решётками. Доказывается полнота пространств решёток совместных приближений Дирихле и взаимных решёток совместных приближений Дирихле.

Ключевые слова: метрическое пространство решёток, унимодулярные решётки, решётки совместных приближений Дирихле, взаимные решетки совместных приближений Дирихле, фундаментальные решётки.

Библиография: 6 названий.

Для цитирования:
Крылов А. П., Добровольский Н. М., Балаба И. Н. О решётках совместных приближений Дирихле // Чебышевский сборник, 2026, т. 27, вып. 1, с. 63–76.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 27. No. 1.

UDC: 511.3 DOI: 10.22405/2226-8383-2026-27-1-63-76

On lattices of simultaneous Dirichlet approximations

A. P. Krylov, N. M. Dobrovol'skii, I. N. Balaba

Krylov Alexander Petrovich — postgraduate student, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: alek.krylov@gmail.com
Dobrovol'skii Nikolai Mikhailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: dobrovol@tsput.ru
Balaba Irina Nikolaevna — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: ibalaba@mail.ru

Abstract

This paper studies the properties of unimodular lattices of simultaneous Dirichlet approximations and reciprocal lattices of simultaneous Dirichlet approximations. A theorem is proved stating the equality of distances between two lattices and between two corresponding reciprocal lattices. The completeness of the spaces of lattices of simultaneous Dirichlet approximations and mutual lattices of simultaneous Dirichlet approximations is proved.

Keywords: metric space of lattices, unimodular lattices, lattices of simultaneous Dirichlet approximations, reciprocal lattices of simultaneous Dirichlet approximations, fundamental lattices.

Bibliography: 6 titles.

For citation:
Krylov, A. P., Dobrovolsky, N. M., Balaba, I. N. 2026, "On lattices of simultaneous Dirichlet approximations", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 27, no. 1, pp. 63–76.

1. Введение

Определение 1. *Решётка $\Lambda(\beta_1,\ldots,\beta_n)$, заданная равенством*

$$\Lambda(\beta_1,\ldots,\beta_n)=\{(q,q\beta_1-p_1,\ldots,q\beta_n-p_n)|q,p_1,\ldots,p_n\in\mathbb{Z}\}\subset\mathbb{R}^{n+1},$$

называется решёткой совместных приближений Дирихле.

Очевидно, что $\Lambda(0,\ldots,0)=\mathbb{Z}^{n+1}$.

Решётка $\Lambda(\beta_1,\ldots,\beta_n)$ имеет базис

$$\vec{\lambda}_0=(1,\beta_1,\ldots,\beta_n),\quad \vec{\lambda}_1=(0,-1,0,\ldots,0),\quad \ldots,\quad \vec{\lambda}_n=(0,\ldots,0,-1).$$

Базисная матрица $M(\beta_1,\ldots,\beta_n)$ решётки $\Lambda(\beta_1,\ldots,\beta_n)$ имеет вид

$$M(\beta_1,\ldots,\beta_n)=\begin{pmatrix}1&\beta_1&\ldots&\beta_n\\0&-1&\ldots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\ldots&-1\end{pmatrix}.$$

Ясно, что решётка $\Lambda(\beta_1,\ldots,\beta_n)=\mathbb{Z}^{n+1}\cdot M(\beta_1,\ldots,\beta_n)$ — образ фундаментальной решётки $\mathbb{Z}^{n+1}$ по действием линейного преобразования с матрицей $M(\beta_1,\ldots,\beta_n)$.

Через $\mathfrak{D}_n$ обозначим пространство решёток совместных приближений Дирихле.

Рассмотрим взаимную решётку $\Lambda^*(\beta_1,\ldots,\beta_n)$, заданную равенством

$$\Lambda^*(\beta_1,\ldots,\beta_n)=\{(m_1\beta_1+\ldots+m_n\beta_n-m,-m_1,-m_2,\ldots,-m_n)|m,m_1,\ldots,m_n\in\mathbb{Z}\}\subset\mathbb{R}^{n+1},$$

которую будем называть взаимной решёткой совместных приближений Дирихле.

Взаимная решётка $\Lambda^*(\beta_1,\ldots,\beta_n)$ имеет взаимный базис

$$\vec{\lambda}^*_0=(1,0,\ldots,0),\quad \vec{\lambda}^*_1=(\beta_1,-1,0,\ldots,0),\quad \ldots,\quad \vec{\lambda}^*_n=(\beta_n,0,\ldots,0,-1).$$

Базисная матрица $M^*(\beta_1,\ldots,\beta_n)$ взаимной решётки $\Lambda^*(\beta_1,\ldots,\beta_n)$ имеет вид

$$M^*(\beta_1,\ldots,\beta_n)=\begin{pmatrix}1&0&\ldots&0\\\beta_1&-1&\ldots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\beta_n&0&\ldots&-1\end{pmatrix}.$$

Ясно, что решётка $\Lambda^*(\beta_1,\ldots,\beta_n)=\mathbb{Z}^{n+1}\cdot M^*(\beta_1,\ldots,\beta_n)$ — образ фундаментальной решётки $\mathbb{Z}^{n+1}$ по действием линейного преобразования с матрицей $M^*(\beta_1,\ldots,\beta_n)$.

Через $\mathfrak{D}_n^*$ обозначим пространство взаимных решёток совместных приближений Дирихле.

Как обычно, через $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ будем обозначать кольцо квадратных целочисленных матриц порядка n. Через $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ — общую линейную группу над $\mathbb{Z}$. Таким образом, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ — это множество квадратных унимодулярных целочисленных матриц порядка n, которое является мультипликативной подгруппой кольца $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Множество всех базисных матриц произвольной решётки Λ получается из произвольной базисной матрицы решётки Λ умножением на произвольные матрицы из группы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$. Действительно, если $\vec{\lambda}_\nu=(\lambda_{\nu,1},\ldots,\lambda_{\nu,n})$ $(\nu=1,\ldots,n)$ – один базис решётки Λ, а $\vec{\lambda}'_\nu=(\lambda'_{\nu,1},\ldots,\lambda'_{\nu,n})$ $(\nu=1,\ldots,n)$ – другой базис решётки Λ, то

$$\begin{pmatrix} \lambda'_{1,1} & \lambda'_{1,2} & \ldots & \lambda'_{1,n}\\ \lambda'_{2,1} & \lambda'_{2,2} & \ldots & \lambda'_{2,n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \lambda'_{n,1} & \lambda'_{n,2} & \ldots & \lambda'_{n,n}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{1,1} & v_{1,2} & \ldots & v_{1,n}\\ v_{2,1} & v_{2,2} & \ldots & v_{2,n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ v_{n,1} & v_{n,2} & \ldots & v_{n,n}\end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{1,1} & \lambda_{1,2} & \ldots & \lambda_{1,n}\\ \lambda_{2,1} & \lambda_{2,2} & \ldots & \lambda_{2,n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \lambda_{n,1} & \lambda_{n,2} & \ldots & \lambda_{n,n}\end{pmatrix},$$

$$\vec{\lambda}'_\nu=\sum_{\mu=1}^{n} v_{\nu,\mu}\vec{\lambda}_\mu \quad (\nu=1,\ldots,n),$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_{1,1} & \lambda_{1,2} & \ldots & \lambda_{1,n}\\ \lambda_{2,1} & \lambda_{2,2} & \ldots & \lambda_{2,n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \lambda_{n,1} & \lambda_{n,2} & \ldots & \lambda_{n,n}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{1,1} & \omega_{1,2} & \ldots & \omega_{1,n}\\ \omega_{2,1} & \omega_{2,2} & \ldots & \omega_{2,n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \omega_{n,1} & \omega_{n,2} & \ldots & \omega_{n,n}\end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda'_{1,1} & \lambda'_{1,2} & \ldots & \lambda'_{1,n}\\ \lambda'_{2,1} & \lambda'_{2,2} & \ldots & \lambda'_{2,n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \lambda'_{n,1} & \lambda'_{n,2} & \ldots & \lambda'_{n,n}\end{pmatrix},$$

$$\vec{\lambda}_\nu=\sum_{\mu=1}^{n} \omega_{\nu,\mu}\vec{\lambda}'_\mu \quad (\nu=1,\ldots,n).$$

Отсюда следует, что

$$V=\begin{pmatrix} v_{1,1} & v_{1,2} & \ldots & v_{1,n}\\ v_{2,1} & v_{2,2} & \ldots & v_{2,n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ v_{n,1} & v_{n,2} & \ldots & v_{n,n}\end{pmatrix}, \quad \Omega=\begin{pmatrix} \omega_{1,1} & \omega_{1,2} & \ldots & \omega_{1,n}\\ \omega_{2,1} & \omega_{2,2} & \ldots & \omega_{2,n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \omega_{n,1} & \omega_{n,2} & \ldots & \omega_{n,n}\end{pmatrix} \quad \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$$

и

$$V\cdot\Omega=\begin{pmatrix} v_{1,1} & v_{1,2} & \ldots & v_{1,n}\\ v_{2,1} & v_{2,2} & \ldots & v_{2,n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ v_{n,1} & v_{n,2} & \ldots & v_{n,n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega_{1,1} & \omega_{1,2} & \ldots & \omega_{1,n}\\ \omega_{2,1} & \omega_{2,2} & \ldots & \omega_{2,n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \omega_{n,1} & \omega_{n,2} & \ldots & \omega_{n,n}\end{pmatrix}=$$

$$=\Omega\cdot V=\begin{pmatrix} \omega_{1,1} & \omega_{1,2} & \ldots & \omega_{1,n}\\ \omega_{2,1} & \omega_{2,2} & \ldots & \omega_{2,n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \omega_{n,1} & \omega_{n,2} & \ldots & \omega_{n,n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_{1,1} & v_{1,2} & \ldots & v_{1,n}\\ v_{2,1} & v_{2,2} & \ldots & v_{2,n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ v_{n,1} & v_{n,2} & \ldots & v_{n,n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \ldots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \ldots & 1\end{pmatrix}.$$

Отметим важное для дальнейшего обстоятельство: матрица перехода от одного базиса решётки Λ к другому базису той же решётки Λ задается умножением базисных матриц на матрицы перехода слева, а базисная матрица M_1 решётки $\Lambda_1=\Lambda\cdot T$ образа решётки Λ под действием линейного преобразования с матрицей T образуется из базисной матрицы M решётки Λ с помощью умножения справа на матрицу T: $M_1=M\cdot T$.

$$M_1 = \begin{pmatrix} \lambda'_{1,1} & \lambda'_{1,2} & \dots & \lambda'_{1,n} \\ \lambda'_{2,1} & \lambda'_{2,2} & \dots & \lambda'_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda'_{n,1} & \lambda'_{n,2} & \dots & \lambda'_{n,n} \end{pmatrix} = M \cdot T = \begin{pmatrix} \lambda_{1,1} & \lambda_{1,2} & \dots & \lambda_{1,n} \\ \lambda_{2,1} & \lambda_{2,2} & \dots & \lambda_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{n,1} & \lambda_{n,2} & \dots & \lambda_{n,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_{1,1} & \dots & t_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n,1} & \dots & t_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $\vec{\lambda}'_\nu = \vec{\lambda}_\nu \cdot T$ $(\nu = 1, \dots, n)$.

Цель данной работы — рассмотреть метрическое пространство $\mathfrak{D}_n$ унимодулярных решёток совместных приближений Дирихле, а также метрическое пространство $\mathfrak{D}^*_n$ взаимных унимодулярных решёток совместных приближений Дирихле.

2. Расстояние между решётками совместных приближений Дирихле

Рассмотрим две решётки совместных приближений Дирихле $\Lambda(\beta_1, \dots, \beta_n)$ и $\Lambda(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Как известно (см. [2], стр. 165), множество всех s-мерных решёток PR_s является полным метрическим пространством относительно метрики[1]

$$\rho(\Lambda, \Gamma) = \max(\ln(1+\mu), \ln(1+\nu)) = \ln(1+\max(\mu,\nu)), \tag{1}$$

где

$$\mu = \inf_{\Gamma=\Lambda\cdot A} \|A - I\|, \quad \nu = \inf_{\Lambda=\Gamma\cdot B} \|B - I\|$$

и I — s-мерная единичная матрица, а норма произвольной матрицы M задается равенством

$$\|M\| = s \cdot \max_{1\leqslant i,j\leqslant s} |m_{ij}|.$$

Рассмотрим вопрос о том какие линейные преобразования переводят решётку Λ в решётку Γ. Пусть M — произвольная базисная матрица решётки Λ и N — произвольная базисная матрица решётки Γ. Множество $\mathfrak{M}(\Lambda)$ всех базисных матриц решётки Λ задается равенством

$$\mathfrak{M}(\Lambda) = \{V \cdot M | V \in \mathrm{GL}_s(\mathbb{Z})\},$$

а множество $\mathfrak{M}(\Gamma)$ всех базисных матриц решётки Γ задается равенством

$$\mathfrak{M}(\Gamma) = \{W \cdot N | W \in \mathrm{GL}_s(\mathbb{Z})\}.$$

Если линейное преобразование с матрицей A переводит решётку Λ в решётку Γ, то оно переводит множество $\mathfrak{M}(\Lambda)$ во множество $\mathfrak{M}(\Gamma)$. Таким образом, если $W \cdot N = V \cdot M \cdot A$, то множество всех матриц $Hom(\Lambda, \Gamma)$ линейных преобразований, переводящих решётку Λ в решётку Γ задается равенством

$$Hom(\Lambda, \Gamma) = \left\{M^{-1} \cdot U \cdot N | U \in \mathrm{GL}_s(\mathbb{Z})\right\}, \quad Hom(\Gamma, \Lambda) = \left\{N^{-1} \cdot U \cdot M | U \in \mathrm{GL}_s(\mathbb{Z})\right\}.$$

Нетрудно видеть, что для матрицы $M(\vec{\beta}, \vec{\alpha})$ заданной равенством

$$M(\vec{\beta}, \vec{\alpha}) = M(\beta_1, \dots, \beta_n)^{-1} M(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in Hom(\Lambda(\vec{\beta}), \Lambda(\vec{\alpha}))$$

[1]Так как точки решётки и арифметического пространства $\mathbb{R}^n$ записываются вектор-строками, то действие линейного преобразования на решётку записывается умножением на матрицу линейного преобразования справа, как было отмечено выше.

справедливо соотношение

$$M(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=M(\beta_1,\ldots,\beta_n)\cdot M(\vec{\beta},\vec{\alpha}),\quad M(\beta_1,\ldots,\beta_n)=M(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\cdot M(\vec{\alpha},\vec{\beta}).$$

Справедливо равенство

$$M(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)^{-1}=M(\alpha_1,\ldots,\alpha_n).$$

Действительно,

$$\begin{pmatrix}1&\alpha_1&\ldots&\alpha_n\\0&-1&\ldots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\ldots&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&\alpha_1&\ldots&\alpha_n\\0&-1&\ldots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\ldots&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&\ldots&0\\0&1&\ldots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\ldots&1\end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что

$$M(\vec{\beta},\vec{\alpha})=\begin{pmatrix}1&\beta_1&\ldots&\beta_n\\0&-1&\ldots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\ldots&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&\alpha_1&\ldots&\alpha_n\\0&-1&\ldots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\ldots&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&\alpha_1-\beta_1&\ldots&\alpha_n-\beta_n\\0&1&\ldots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\ldots&1\end{pmatrix},$$

$$M(\vec{\alpha},\vec{\beta})=\begin{pmatrix}1&\alpha_1&\ldots&\alpha_n\\0&-1&\ldots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\ldots&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&\beta_1&\ldots&\beta_n\\0&-1&\ldots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\ldots&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&\beta_1-\alpha_1&\ldots&\beta_n-\alpha_n\\0&1&\ldots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\ldots&1\end{pmatrix}.$$

Для любого действительного числа β наряду с хорошо известной дробной частью $\{\beta\}$ определим абсолютно наименьшую дробную часть $\{\{\beta\}\}$ с помощью равенств

$$\{\{\beta\}\}=\begin{cases}\{\beta\}, & \text{если } 0\leqslant\{\beta\}\leqslant\frac{1}{2},\\ \{\beta\}-1, & \text{если } \frac{1}{2}<\{\beta\}<1.\end{cases}$$

Кроме этого, определим ближайшее целое $[[\beta]]$ с помощью равенства

$$[[\beta]]=\begin{cases}[\beta], & \text{если } 0\leqslant\{\beta\}\leqslant\frac{1}{2},\\ [\beta]+1, & \text{если } \frac{1}{2}<\{\beta\}<1.\end{cases}$$

Очевидно, что выполняется равенство $[[\beta]]+\{\{\beta\}\}=\beta$.

Напомним, что $\{\vec{\beta}\}=(\{\beta_1\},\ldots,\{\beta_n\})$, $[\vec{\beta}]=([\beta_1],\ldots,[\beta_n])$. Аналогично, $\{\{\vec{\beta}\}\}=(\{\{\beta_1\}\},\ldots,\{\{\beta_n\}\})$, $[[\vec{\beta}]]=([[\beta_1]],\ldots,[[\beta_n]])$.

Нетрудно видеть, что для любого вектора $\vec{\beta}$ базисной матрицей для решётки совместных приближений Дирихле $\Lambda(\vec{\beta})$ будет матрица

$$M_{asfp}(\beta_1,\ldots,\beta_n)=\begin{pmatrix}1&\{\{\beta_1\}\}&\ldots&\{\{\beta_n\}\}\\0&-1&\ldots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\ldots&-1\end{pmatrix}.$$

Действительно,

$$\begin{pmatrix}1&[[\beta_1]]&\ldots&[[\beta_n]]\\0&1&\ldots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\ldots&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&\beta_1&\ldots&\beta_n\\0&-1&\ldots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\ldots&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&\{\{\beta_1\}\}&\ldots&\{\{\beta_n\}\}\\0&-1&\ldots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\ldots&-1\end{pmatrix}.$$

Для произвольного вектора $(q, p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ имеем:

$$(q, p_1, \ldots, p_n) \cdot \begin{pmatrix} 1 & \{\{\beta_1\}\} & \ldots & \{\{\beta_n\}\} \\ 0 & -1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & -1 \end{pmatrix} = (q, q\{\{\beta_1\}\} - p_1, \ldots, q\{\{\beta_n\}\} - p_n) \in \Lambda(\vec{\beta}),$$

$$(q, q\{\{\beta_1\}\} - p_1, \ldots, q\{\{\beta_n\}\} - p_n) \cdot \begin{pmatrix} 1 & \{\{\beta_1\}\} & \ldots & \{\{\beta_n\}\} \\ 0 & -1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & -1 \end{pmatrix} = (q, p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}.$$

Отсюда следует, что $\rho(\mathbb{Z}^{n+1}, \Lambda(\vec{\beta})) = \ln\left(1 + (n+1)\max\limits_{1\leqslant\nu\leqslant n} |\{\{\beta_\nu\}\}|\right)$. Таким образом, множество всех решёток $\mathfrak{D}_n$ совместных приближений Дирихле образует ограниченное множество с центром в фундаментальной решётке $\mathbb{Z}^{n+1}$ радиуса $\ln\left(1 + \frac{n+1}{2}\right)$.

Лемма 1. *Если две решётки совместных приближений Дирихле $\Lambda(\vec{\beta})$ и $\Lambda(\vec{\alpha})$ совпадают, то справедливы соотношения $\alpha_\nu - \beta_\nu \in \mathbb{Z}$ $(\nu = 1, \ldots, n)$.*

Доказательство. Действительно, если

$$(q, q\beta_1 - p_1, \ldots, q\beta_n - p_n) = (q, q\alpha_1 - p'_1, \ldots, q\alpha_n - p'_n),$$

то $\alpha_\nu - \beta_\nu = \frac{p'_\nu - p_\nu}{q}$ $(\nu = 1, \ldots, n)$. Положим $a_\nu = \alpha_\nu - \beta_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, s)$, тогда $p'_\nu - p_\nu = a_\nu q \in \mathbb{Z}$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ для любого натурального q только при условии, что $\alpha_\nu - \beta_\nu \in \mathbb{Z}$ $(\nu = 1, \ldots, n)$. $\square$

Из доказанной леммы следуют равенства $\Lambda\left(\vec{\beta}\right) = \Lambda\left(\left\{\vec{\beta}\right\}\right) = \Lambda\left(\left\{\left\{\vec{\beta}\right\}\right\}\right)$.

Лемма 2. *Для множества базисных матриц решётки $\Lambda(\vec{\beta})$ справедливо равенство*

$$\mathfrak{M}(\Lambda(\vec{\beta})) = \left\{ \begin{pmatrix} v_{1,1} & v_{1,1}\beta_1 - v_{1,2} & \ldots & v_{1,1}\beta_n - v_{1,n+1} \\ v_{2,1} & v_{2,1}\beta_1 - v_{2,2} & \ldots & v_{2,1}\beta_n - v_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n+1,1} & v_{n+1,1}\beta_1 - v_{n+1,2} & \ldots & v_{n+1,1}\beta_n - v_{n+1,n+1} \end{pmatrix} \middle| V \in \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{Z}) \right\}.$$

Доказательство. Действительно, для любой матрицы $V \in \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{Z})$ имеем:

$$\begin{pmatrix} v_{1,1} & \ldots & v_{1,n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n+1,1} & \ldots & v_{n+1,n+1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \beta_1 & \ldots & \beta_n \\ 0 & -1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} v_{1,1} & v_{1,1}\beta_1 - v_{1,2} & \ldots & v_{1,1}\beta_n - v_{1,n+1} \\ v_{2,1} & v_{2,1}\beta_1 - v_{2,2} & \ldots & v_{2,1}\beta_n - v_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n+1,1} & v_{n+1,1}\beta_1 - v_{n+1,2} & \ldots & v_{n+1,1}\beta_n - v_{n+1,n+1} \end{pmatrix}.$$

$\square$

Лемма 3. *Для $Hom(\Lambda(\vec{\beta}), \Lambda(\vec{\alpha}))$ справедливо равенство*

$$Hom(\Lambda(\vec{\beta}), \Lambda(\vec{\alpha})) = \left\{ M(\vec{\beta}) \cdot V \cdot M(\vec{\alpha}) \middle| V \in \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{Z}) \right\}.$$

Доказательство. Действительно,

$$\begin{pmatrix} 1 & \beta_1 & \dots & \beta_n \\ 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_{1,1} & v_{1,1}\alpha_1 - v_{1,2} & \dots & v_{1,1}\alpha_n - v_{1,n+1} \\ v_{2,1} & v_{2,1}\alpha_1 - v_{2,2} & \dots & v_{2,1}\alpha_n - v_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n+1,1} & v_{n+1,1}\alpha_1 - v_{n+1,2} & \dots & v_{n+1,1}\alpha_n - v_{n+1,n+1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} m_{1,1}(\vec{\beta}, V, \vec{\alpha}) & \dots & m_{1,n+1}(\vec{\beta}, V, \vec{\alpha}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n+1,1}(\vec{\beta}, V, \vec{\alpha}) & \dots & m_{n+1,n+1}(\vec{\beta}, V, \vec{\alpha}) \end{pmatrix},$$

где

$$m_{1,1}(\vec{\beta}, V, \vec{\alpha}) = v_{1,1} + \sum_{\nu=1}^{n} v_{\nu+1,1}\beta_\nu, \quad m_{\nu+1,1}(\vec{\beta}, V, \vec{\alpha}) = -v_{\nu+1,1} \quad (\nu = 1, \dots, n),$$

$$m_{1,\mu+1}(\vec{\beta}, V, \vec{\alpha}) = v_{1,1}\alpha_\mu - v_{1,\mu+1} + \sum_{\nu=1}^{n} (v_{\nu+1,1}\alpha_\mu - v_{\nu+1,\mu+1})\beta_\nu \quad (\mu = 1, \dots, n),$$

$$m_{\nu+1,\mu+1}(\vec{\beta}, V, \vec{\alpha}) = v_{\nu+1,\mu+1} - v_{\nu+1,1}\alpha_\mu \quad (\mu, \nu = 1, \dots, n).$$

Таким образом,

$$Hom(\Lambda(\vec{\beta}), \Lambda(\vec{\alpha})) = \left\{ M(\vec{\beta}, V, \vec{\alpha}) = M(\vec{\beta}) \cdot V \cdot M(\vec{\alpha}) \middle| V \in \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{Z}) \right\},$$

$$M(\vec{\beta}, V, \vec{\alpha}) = \begin{pmatrix} m_{1,1}(\vec{\beta}, V, \vec{\alpha}) & m_{1,2}(\vec{\beta}, V, \vec{\alpha}) & \dots & m_{1,n+1}(\vec{\beta}, V, \vec{\alpha}) \\ -v_{2,1} & v_{2,2} - v_{2,1}\alpha_1 & \dots & v_{2,n+1} - v_{n+1,1}\alpha_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -v_{n+1,1} & v_{n+1,2} - v_{n+1,1}\alpha_1 & \dots & v_{n+1,n+1} - v_{n+1,1}\alpha_n \end{pmatrix}$$

□

Теорема 1. *Для произвольных двух решёток совместных приближений Дирихле $\Lambda(\vec{\beta})$ и $\Lambda(\vec{\alpha})$ справедливо равенство*

$$\rho(\Lambda(\vec{\beta}), \Lambda(\vec{\alpha})) = \ln\left(1 + (n+1)\max_{1 \leqslant \nu \leqslant n} |\{\{\alpha_\nu - \beta_\nu\}\}|\right).$$

Доказательство. Для базисных матриц $M(\vec{\beta})$ и $M(\vec{\alpha})$ решёток совместных приближений Дирихле $\Lambda(\vec{\beta})$ и $\Lambda(\vec{\alpha})$ без ограничения общности можно считать, что $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^n$.

Чтобы вычислить расстояние между двумя решётками совместных приближений Дирихле $\Lambda(\vec{\beta})$ и $\Lambda(\vec{\alpha})$ необходимо найти величины

$$\nu(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \inf_{A \in Hom(\Lambda(\vec{\beta}), \Lambda(\vec{\alpha}))} \|A - I\|, \quad \mu(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \inf_{A \in Hom(\Lambda(\vec{\alpha}), \Lambda(\vec{\beta}))} \|A - I\|.$$

Из предыдущего следует, что $\max(\nu(\vec{\alpha}, \vec{\beta}), \mu(\vec{\alpha}, \vec{\beta})) < n + 1$. Поэтому, пользуясь леммой 3, получим $v_{2,1} = \ldots = v_{n+1,1} = 0$, $v_{2,2} = v_{3,3} = \ldots = v_{n+1,n+1} = 1$, $v_{\nu,\mu} = 0$ $(2 \leqslant \nu \leqslant n+1, 2 \leqslant \mu \leqslant n+1, \nu \neq \mu)$.

Таким образом, матрица из леммы 3, на которой достигается $\nu(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ имеет вид

$$M(\vec{\beta}, V, \vec{\alpha}) = \begin{pmatrix} m_{1,1}(\vec{\beta}, V, \vec{\alpha}) & m_{1,2}(\vec{\beta}, V, \vec{\alpha}) & \dots & m_{1,n+1}(\vec{\beta}, V, \vec{\alpha}) \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

и $m_{1,1}(\vec{\beta}, V, \vec{\alpha}) = 1$, $m_{1,\mu+1}(\vec{\beta}, V, \vec{\alpha}) = \alpha_\mu - v_{1,\mu+1} - \beta_\mu \quad (\mu = 1, \dots, n)$. Ясно, что целые $v_{1,\mu+1}$ надо выбирать из условия $v_{1,\mu+1} = [[\alpha_\mu - \beta_\mu]]$ $(\mu = 1, \dots, n)$ и тогда

$$\nu(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = (n+1) \max_{\mu=1,\dots,n} |\{\{\alpha_\mu - \beta_\mu\}\}|.$$

Аналогично получается утверждение относительно $\mu(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$. $\square$

3. Полнота пространства решёток совместных приближений Дирихле

Для доказательства полноты метрического пространства $\mathfrak{D}_n$ унимодулярных решёток совместных приближений Дирихле необходимо доказать, что любая фундаментальная последовательность решёток совместных приближений Дирихле сходится к решётке Дирихле. Как было отмечено выше, метрическое пространство $\mathfrak{D}_n$ унимодулярных решёток совместных приближений Дирихле состоит из решёток $\Lambda(\vec{\beta})$, где $\vec{\beta} \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^n$.

Теорема 2. *Для любой фундаментальной последовательности унимодулярных решёток совместных приближений Дирихле $\Lambda(\vec{\beta}_\nu)$, $\vec{\beta}_\nu \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^n$ $(\nu = 1, 2, \dots)$ существует $\vec{\beta} = \lim\limits_{\nu\to\infty} \vec{\beta}\nu \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^n$ такой, что $\lim\limits_{\nu\to\infty} \Lambda(\vec{\beta}_\nu) = \Lambda(\vec{\beta})$.*

Доказательство. Пусть для любого $\varepsilon > 0$ при $\nu, \mu \geqslant N(\varepsilon)$ выполнено неравенство $\rho(\Lambda(\vec{\beta}_\nu), \Lambda(\vec{\beta}_\mu)) < \varepsilon$. Тогда выполняется неравенство

$$\ln\left(1 + (n+1) \max_{1\leqslant\lambda\leqslant n} |\{\{\beta_{\mu,\lambda} - \beta_{\nu,\lambda}\}\}|\right) < \varepsilon, \quad \max_{1\leqslant\lambda\leqslant n} |\{\{\beta_{\mu,\lambda} - \beta_{\nu,\lambda}\}\}| < \frac{e^\varepsilon - 1}{n+1}.$$

Отсюда следует, что последовательность векторов $\vec{\beta}_\nu \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^n$ является фундаментальной, а, значит, существует $\vec{\beta} = \lim\limits_{\nu\to\infty} \vec{\beta}\nu \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^n$ и $\lim\limits_{\nu\to\infty} \Lambda(\vec{\beta}_\nu) = \Lambda(\vec{\beta})$. $\square$

Замечание 1. *Условие $\vec{\beta}_\nu \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^n$ в формулировке теоремы является существенным, так как для любой последовательности целых векторов $\vec{m}_\nu \in \mathbb{Z}^n$ имеем: $\Lambda(\vec{\beta}) = \Lambda(\vec{\beta} + \vec{m}_\nu)$, но $\lim\limits_{\nu\to\infty} \vec{\beta} + \vec{m}_\nu$ существует только для стационарных последовательностей $\vec{m}_\nu$, начиная с некоторого места.*

Замечание 2. *Из предыдущего следует, что метрическое пространство $\mathfrak{D}_n$ унимодулярных решёток совместных приближений Дирихле является гладким многообразием, как образ $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^n$.*

4. Расстояние между взаимными решётками совместных приближений Дирихле

Пусть $M(\vec{\beta}) \cdot A = M^*(\vec{\beta})$, тогда $A = M^{-1}(\vec{\beta}) \cdot M^*(\vec{\beta}) = M(\vec{\beta}) \cdot M^*(\vec{\beta})$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \beta_1 & \dots & \beta_n \\ 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \beta_1 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_n & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \sum_{\nu=1}^n \beta_\nu^2 & -\beta_1 & \dots & -\beta_n \\ -\beta_1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\beta_n & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть $M^*(\vec{\beta}) \cdot B = M(\vec{\beta})$, тогда $B = (M^*(\vec{\beta}))^{-1} \cdot M(\vec{\beta}) = M^*(\vec{\beta}) \cdot M(\vec{\beta})$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \beta_1 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_n & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \beta_1 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_n & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \beta_1 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_n & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \beta_1 & \dots & \beta_n \\ 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_n \\ \beta_1 & \beta_1^2+1 & \beta_1\beta_2 & \dots & \beta_1\beta_n \\ \beta_2 & \beta_2\beta_1 & \beta_2^2+1 & \dots & \beta_2\beta_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_n & \beta_n\beta_1 & \beta_n\beta_2 & \dots & \beta_n^2+1 \end{pmatrix}.$$

Замечание 3. *Из предыдущего следует, что метрическое пространство $\mathfrak{D}_n^*$ взаимных унимодулярных решёток совместных приближений Дирихле является гладким многообразием, как образ $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^n$.*

Лемма 4. *Если две взаимные решётки совместных приближений Дирихле $\Lambda^*(\vec{\beta})$ и $\Lambda^*(\vec{\alpha})$ совпадают, то справедливы соотношения $\alpha_\nu - \beta_\nu \in \mathbb{Z}$ $(\nu = 1, \dots, n)$.*

Доказательство. Действительно, если для любых целых $m_1, \dots, m_n$ и m найдётся целое m' такое, что

$$(m_1\beta_1 + \ldots + m_n\beta_n - m, -m_1, -m_2, \ldots, -m_n) = (m_1\alpha_1 + \ldots + m_n\alpha_n - m', -m_1, -m_2, \ldots, -m_n),$$

то $\sum\limits_{\nu=1}^{n} (\alpha_\nu - \beta_\nu)m_\nu \in \mathbb{Z}$. Отсюда следует, что $\alpha_\nu - \beta_\nu \in \mathbb{Z}$ $(\nu = 1, \dots, n)$. $\square$

Из доказанной леммы следуют равенства $\Lambda^*\left(\vec{\beta}\right) = \Lambda^*\left(\left\{\vec{\beta}\right\}\right) = \Lambda^*\left(\left\{\left\{\vec{\beta}\right\}\right\}\right)$.

Нетрудно видеть, что для матрицы $M^*(\vec{\beta}, \vec{\alpha})$ заданной равенством

$$M^*(\vec{\beta}, \vec{\alpha}) = M^*(\beta_1, \dots, \beta_n)^{-1} M^*(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in Hom(\Lambda^*(\vec{\beta}), \Lambda^*(\vec{\alpha}))$$

справедливо соотношение

$$M^*(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = M^*(\beta_1, \dots, \beta_n) \cdot M^*(\vec{\beta}, \vec{\alpha}), \quad M^*(\beta_1, \dots, \beta_n) = M^*(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \cdot M^*(\vec{\alpha}, \vec{\beta}).$$

Справедливо равенство

$$M^*(\alpha_1, \dots, \alpha_n)^{-1} = M^*(\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

Действительно,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_1 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_1 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что

$$M^*(\vec{\beta}, \vec{\alpha}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \beta_1 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_n & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_1 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \beta_1 - \alpha_1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_n - \alpha_n & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

$$M^*(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_1 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \beta_1 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_n & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_1 - \beta_1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n - \beta_n & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Лемма 5. *Для множества базисных матриц решётки $\Lambda^*(\vec{\beta})$ справедливо равенство*

$$\mathfrak{M}(\Lambda^*(\vec{\beta})) = \left\{ \left(\begin{array}{cccc} v_{1,1} + \sum\limits_{\nu=1}^{n} v_{1,\nu+1}\beta_\nu & -v_{1,2} & \ldots & -v_{1,n+1} \\ v_{2,1} + \sum\limits_{\nu=1}^{n} v_{2,\nu+1}\beta_\nu & -v_{2,2} & \ldots & -v_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n+1,1} + \sum\limits_{\nu=1}^{n} v_{n+1,\nu+1}\beta_\nu & -v_{n+1,2} & \ldots & -v_{n+1,n+1} \end{array} \right) \middle| V \in \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{Z}) \right\}.$$

Доказательство. Действительно, для любой матрицы $V \in \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{Z})$ имеем:

$$\begin{pmatrix} v_{1,1} & \ldots & v_{1,n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n+1,1} & \ldots & v_{n+1,n+1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \beta_1 & -1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_n & 0 & \ldots & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} v_{1,1} + \sum\limits_{\nu=1}^{n} v_{1,\nu+1}\beta_\nu & -v_{1,2} & \ldots & -v_{1,n+1} \\ v_{2,1} + \sum\limits_{\nu=1}^{n} v_{2,\nu+1}\beta_\nu & -v_{2,2} & \ldots & -v_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n+1,1} + \sum\limits_{\nu=1}^{n} v_{n+1,\nu+1}\beta_\nu & -v_{n+1,2} & \ldots & -v_{n+1,n+1} \end{pmatrix}.$$

□

Лемма 6. *Для $Hom(\Lambda^*(\vec{\beta}), \Lambda^*(\vec{\alpha}))$ справедливо равенство*

$$Hom(\Lambda^*(\vec{\beta}), \Lambda^*(\vec{\alpha})) = \left\{ M^*(\vec{\beta}) \cdot V \cdot M^*(\vec{\alpha}) \middle| V \in \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{Z}) \right\}.$$

Доказательство. Действительно,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \beta_1 & -1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_n & 0 & \ldots & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_{1,1} + \sum\limits_{\nu=1}^{n} v_{1,\nu+1}\alpha_\nu & -v_{1,2} & \ldots & -v_{1,n+1} \\ v_{2,1} + \sum\limits_{\nu=1}^{n} v_{2,\nu+1}\alpha_\nu & -v_{2,2} & \ldots & -v_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n+1,1} + \sum\limits_{\nu=1}^{n} v_{n+1,\nu+1}\alpha_\nu & -v_{n+1,2} & \ldots & -v_{n+1,n+1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} m^*_{1,1}(\vec{\beta}, V, \vec{\alpha}) & \ldots & m^*_{1,n+1}(\vec{\beta}, V, \vec{\alpha}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m^*_{n+1,1}(\vec{\beta}, V, \vec{\alpha}) & \ldots & m^*_{n+1,n+1}(\vec{\beta}, V, \vec{\alpha}) \end{pmatrix},$$

где

$$m^*_{1,1}(\vec{\beta}, V, \vec{\alpha}) = v_{1,1} + \sum_{\nu=1}^{n} v_{1,\nu+1}\alpha_\nu, \quad m^*_{1,\nu+1}(\vec{\beta}, V, \vec{\alpha}) = -v_{1,\nu+1} \quad (\nu = 1, \ldots, n),$$

$$m^*_{\nu+1,1}(\vec{\beta},V,\vec{\alpha})=\beta_\nu\left(v_{1,1}+\sum_{\mu=1}^{n}v_{1,\mu+1}\alpha_\mu\right)-\left(v_{\nu+1,1}+\sum_{\mu=1}^{n}v_{\nu+1,\mu+1}\alpha_\mu\right)=$$

$$=\beta_\nu v_{1,1}-v_{\nu+1,1}+\sum_{\mu=1}^{n}(\beta_\nu v_{1,\mu+1}-v_{\nu+1,\mu+1})\alpha_\mu\quad(\nu=1,\ldots,n),$$

$$m^*_{\nu+1,\mu+1}(\vec{\beta},V,\vec{\alpha})=v_{\nu+1,\mu+1}-v_{1,\mu+1}\beta_\nu\quad(\mu,\nu=1,\ldots,n).$$

Таким образом,

$$Hom(\Lambda^*(\vec{\beta}),\Lambda^*(\vec{\alpha}))=\left\{M^*(\vec{\beta},V,\vec{\alpha})=M^*(\vec{\beta})\cdot V\cdot M^*(\vec{\alpha})\middle| V\in\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{Z})\right\},$$

$$M^*(\vec{\beta},V,\vec{\alpha})=\begin{pmatrix} m^*_{1,1}(\vec{\beta},V,\vec{\alpha}) & -v_{1,2} & \ldots & -v_{1,n+1}\\ m^*_{2,1}(\vec{\beta},V,\vec{\alpha}) & v_{2,2}-v_{1,2}\beta_1 & \ldots & v_{2,n+1}-v_{1,n+1}\beta_1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ m^*_{n+1,1}(\vec{\beta},V,\vec{\alpha}) & v_{n+1,2}-v_{1,2}\beta_n & \ldots & v_{n+1,n+1}-v_{1,n+1}\beta_n\end{pmatrix}.$$

□

Теорема 3. *Для произвольных двух взаимных решёток совместных приближений Дирихле $\Lambda^*(\vec{\beta})$ и $\Lambda^*(\vec{\alpha})$ справедливо равенство*

$$\rho(\Lambda^*(\vec{\beta}),\Lambda^*(\vec{\alpha}))=\ln\left(1+(n+1)\max_{1\leqslant\nu\leqslant n}|\{\{\alpha_\nu-\beta_\nu\}\}|\right).$$

Доказательство. Для базисных матриц $M^*(\vec{\beta})$ и $M^*(\vec{\alpha})$ взаимных решёток совместных приближений Дирихле $\Lambda^*(\vec{\beta})$ и $\Lambda^*(\vec{\alpha})$ без ограничения общности можно считать, что $\vec{\alpha},\vec{\beta}\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^n$.

Чтобы вычислить расстояние между двумя взаимными решётками совместных приближений Дирихле $\Lambda^*(\vec{\beta})$ и $\Lambda^*(\vec{\alpha})$ необходимо найти величины

$$\nu^*(\vec{\alpha},\vec{\beta})=\inf_{A\in Hom(\Lambda^*(\vec{\beta}),\Lambda^*(\vec{\alpha}))}\|A-I\|,\quad \mu^*(\vec{\alpha},\vec{\beta})=\inf_{A\in Hom(\Lambda^*(\vec{\alpha}),\Lambda^*(\vec{\beta}))}\|A-I\|.$$

Из предыдущего следует, что $\max(\nu^*(\vec{\alpha},\vec{\beta}),\mu^*(\vec{\alpha},\vec{\beta}))<n+1$. Поэтому, пользуясь леммой 6, получим $v_{1,2}=\ldots=v_{1,n+1}=0$, $v_{2,2}=v_{3,3}=\ldots=v_{n+1,n+1}=1$, $v_{\nu,\mu}=0$ $(2\leqslant\nu\leqslant n+1, 2\leqslant\mu\leqslant n+1,\nu\neq\mu)$.

Таким образом, матрица из леммы 6, на которой достигается $\nu^*(\vec{\alpha},\vec{\beta})$ имеет вид

$$M^*(\vec{\beta},V,\vec{\alpha})=\begin{pmatrix} m^*_{1,1}(\vec{\beta},V,\vec{\alpha}) & 0 & \ldots & 0\\ m^*_{2,1}(\vec{\beta},V,\vec{\alpha}) & 1 & \ldots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ m^*_{n+1,1}(\vec{\beta},V,\vec{\alpha}) & 0 & \ldots & 1\end{pmatrix}$$

и $m^*_{1,1}(\vec{\beta},V,\vec{\alpha})=1$, $m^*_{\nu+1,1}(\vec{\beta},V,\vec{\alpha})=\beta_\nu-\alpha_\nu-v_{\nu+1,1}\quad(\nu=1,\ldots,n)$. Ясно, что целые $v_{\nu+1,1}$ надо выбирать из условия $v_{\nu+1,1}=[[\beta_\nu-\alpha_\mu]]$ $(\nu=1,\ldots,n)$ и тогда

$$\nu^*(\vec{\alpha},\vec{\beta})=(n+1)\max_{\nu=1,\ldots,n}|\{\{\beta_\nu-\alpha_\nu\}\}|.$$

Аналогично получается утверждение относительно $\mu^*(\vec{\alpha},\vec{\beta})$. □

5. Полнота пространства взаимных решёток совместных приближений Дирихле

Для доказательства полноты метрического пространства $\mathfrak{D}_n^*$ взаимных унимодулярных решёток совместных приближений Дирихле необходимо доказать, что любая фундаментальная последовательность взаимных решёток совместных приближений Дирихле сходится к взаимной решётке Дирихле. Как было отмечено выше, метрическое пространство $\mathfrak{D}_n^*$ взаимных унимодулярных решёток совместных приближений Дирихле состоит из решёток $\Lambda^*(\vec{\beta})$, где $\vec{\beta} \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^n$.

Теорема 4. *Для любой фундаментальной последовательности взаимных унимодулярных решёток совместных приближений Дирихле $\Lambda^*(\vec{\beta}_\nu)$, $\vec{\beta}_\nu \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^n$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ существует $\vec{\beta} = \lim\limits_{\nu\to\infty} \vec{\beta}\nu \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^n$ такой, что $\lim\limits_{\nu\to\infty} \Lambda^*(\vec{\beta}_\nu) = \Lambda^*(\vec{\beta})$.*

Доказательство. Пусть для любого $\varepsilon > 0$ при $\nu, \mu \geqslant N(\varepsilon)$ выполнено неравенство $\rho(\Lambda^*(\vec{\beta}_\nu), \Lambda^*(\vec{\beta}_\mu)) < \varepsilon$. Тогда выполняется неравенство

$$\ln\left(1 + (n+1)\max_{1\leqslant\lambda\leqslant n} |\{\{\beta_{\mu,\lambda} - \beta_{\nu,\lambda}\}\}|\right) < \varepsilon, \quad \max_{1\leqslant\lambda\leqslant n} |\{\{\beta_{\mu,\lambda} - \beta_{\nu,\lambda}\}\}| < \frac{e^\varepsilon - 1}{n+1}.$$

Отсюда следует, что последовательность векторов $\vec{\beta}_\nu \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^n$ является фундаментальной, а, значит, существует $\vec{\beta} = \lim\limits_{\nu\to\infty} \vec{\beta}\nu \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^n$ и $\lim\limits_{\nu\to\infty} \Lambda^*(\vec{\beta}_\nu) = \Lambda^*(\vec{\beta})$. $\square$

Замечание 4. *Условие $\vec{\beta}_\nu \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^n$ в формулировке теоремы является существенным, так как для любой последовательности целых векторов $\vec{m}_\nu \in \mathbb{Z}^n$ имеем: $\Lambda^*(\vec{\beta}) = \Lambda^*(\vec{\beta} + \vec{m}_\nu)$, но $\lim\limits_{\nu\to\infty} \vec{\beta} + \vec{m}_\nu$ существует только для стационарных последовательностей $\vec{m}_\nu$, начиная с некоторого места.*

Замечание 5. *Из предыдущего следует, что метрическое пространство $\mathfrak{D}_n^*$ взаимных унимодулярных решёток совместных приближений Дирихле является гладким многообразием, как образ $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^n$.*

6. Сохранение расстояний при переходе к взаимным решёткам

Очевидный параллелизм между утверждениями о решётках совместных приближений Дирихле и о взаимных решётках совместных приближений Дирихле становится понятным, если рассмотреть вопрос о связи между расстояниями между двумя решётками и расстояниями между соответствующими взаимными решётками.

Теорема 5. *Расстояния между любыми двумя решётками Λ и Γ совпадает с расстоянием между соответствующими взаимными решётками Λ^* и Γ^*:*

$$\rho(\Lambda, \Gamma) = \rho(\Lambda^*, \Gamma^*).$$

Доказательство. Действительно, пусть M — базисная матрица решётки Λ, тогда матрица $(M^{-1})^T$ будет базисной матрицей взаимной решётки Λ^*. Так как множество $\mathfrak{M}(\Lambda)$ всех базисных матриц решётки Λ задается равенством

$$\mathfrak{M}(\Lambda) = \{V \cdot M | V \in \mathrm{GL}_s(\mathbb{Z})\},$$

то множество $\mathfrak{M}(\Lambda^*)$ всех базисных матриц взаимной решётки Λ^* задается равенством

$$\mathfrak{M}(\Lambda^*) = \left\{((V \cdot M)^{-1})^T | V \in \mathrm{GL}_s(\mathbb{Z})\right\}.$$

Расстояние $\rho(\Lambda, \Gamma)$ согласно (1) будет равно

$$\rho(\Lambda, \Gamma) = \max(\ln(1 + \mu), \ln(1 + \nu)) = \ln(1 + \max(\mu, \nu)), \tag{2}$$

где

$$\mu = \inf_{A \in Hom(\Lambda, \Gamma)} \|A - I\|, \quad \nu = \inf_{B \in Hom(\Gamma, \Lambda)} \|B - I\|.$$

Для расстояния $\rho(\Lambda^*, \Gamma^*)$ между взаимными решётками получим

$$\rho(\Lambda^*, \Gamma^*) = \max(\ln(1 + \mu^*), \ln(1 + \nu^*)) = \ln(1 + \max(\mu^*, \nu^*)), \tag{3}$$

где

$$\mu^* = \inf_{A \in Hom(\Lambda^*, \Gamma^*)} \|A_1 - I\|, \quad \nu = \inf_{B_1 \in Hom(\Gamma^*, \Lambda^*)} \|B_1 - I\|.$$

Если M — произвольная базисная матрица решётки Λ и N — произвольная базисная матрица решётки Γ, то как было показано раньше

$$Hom(\Lambda, \Gamma) = \left\{M^{-1} \cdot U \cdot N | U \in \mathrm{GL}_s(\mathbb{Z})\right\}, \quad Hom(\Gamma, \Lambda) = \left\{N^{-1} \cdot U \cdot M | U \in \mathrm{GL}_s(\mathbb{Z})\right\},$$

поэтому

$$\mu = \inf_{U \in \mathrm{GL}_s(\mathbb{Z})} \|M^{-1} \cdot U \cdot N - I\|, \quad \nu = \inf_{U \in \mathrm{GL}_s(\mathbb{Z})} \|N^{-1} \cdot U \cdot M - I\|.$$

Переходя к взаимным решёткам, получим

$$Hom(\Lambda^*, \Gamma^*) = \left\{((M^{-1})^T)^{-1} \cdot U \cdot (N^{-1})^T | U \in \mathrm{GL}_s(\mathbb{Z})\right\},$$
$$Hom(\Gamma, \Lambda) = \left\{((N^{-1})^T)^{-1} \cdot U \cdot (M^{-1})^T | U \in \mathrm{GL}_s(\mathbb{Z})\right\},$$

поэтому

$$\mu^* = \inf_{U \in \mathrm{GL}_s(\mathbb{Z})} \|((M^{-1})^T)^{-1} \cdot U \cdot (N^{-1})^T - I\|, \quad \nu^* = \inf_{U \in \mathrm{GL}_s(\mathbb{Z})} \|((N^{-1})^T)^{-1} \cdot U \cdot (M^{-1})^T - I\|.$$

Далее имеем:

$$((M^{-1})^T)^{-1} \cdot U \cdot (N^{-1})^T = M^T \cdot U \cdot (N^{-1})^T = (N^{-1} \cdot U^T \cdot M)^T,$$
$$((N^{-1})^T)^{-1} \cdot U \cdot (M^{-1})^T = N \cdot U \cdot (M^{-1})^T = (M^{-1} \cdot U^T \cdot N)^T.$$

Так как для любого $U \in \mathrm{GL}_s(\mathbb{Z})$ имеем $U^T \in \mathrm{GL}_s(\mathbb{Z})$ и $\|A - I\| = \|A^T - I\|$, то $\mu = \nu^*$, $\nu = \mu^*$ и утверждение теоремы доказано. □

Таким образом доказано, что отображение взаимности является изометрией на метрическом пространстве решёток. Отсюда следует, что если имеется произвольная фундаментальная последовательность решёток, которая в силу полноты метрического пространства решёток сходится к некоторой решётке, то соответствующая последовательность взаимных решёток также будет фундаментальной, которая сходится к соответствующей взаимной решётке.

7. Заключение

Из доказанных теорем возникает вопрос о дифференциальных свойствах диагональных унимодулярных решёток и решёток совместных приближений Дирихле, то есть речь идёт о соответствующих гладких многообразиях (см. [5]). Ответ на этот вопрос будет темой нашей следующей работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Л. П. Добровольская, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский Гиперболические дзета-функции сеток и решёток и вычисление оптимальных коэффициентов // Чебышевский сборник 2012. Т. 13, вып. 4(44). С. 4–107.

2. Касселс Д. Введение в геометрию чисел. М.: Мир, 1965. 422 с.

3. А. П. Крылов, Н. М. Добровольский. Метрическое пространство двумерных диагональных унимодулярных решёток // Записки научных семинаров Тульской школы теории чисел. 2022. Вып. 1, С. 37–41.

4. А. П. Крылов. Метрическое пространство диагональных унимодулярных решёток // Записки научных семинаров Тульской школы теории чисел. 2025-2026. Вып. 3, С. .

5. Е. Н. Смирнова, О. А. Пихтилькова, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский. Гладкое многообразие решёток // Чебышевский сборник, 2023. т. 24, вып. 4, С. 299–310.

6. Dobrovolskaya L. P., Dobrovolsky M. N., Dobrovol'skii N. M., Dobrovolsky N. N. On Hyperbolic Zeta Function of Lattices // Continuous and Distributed Systems. Solid Mechanics and Its Applications. Vol. 211. 2014. P. 23–62. doi: 10.1007/978-3-319-03146-0_2.

REFERENCES

1. Dobrovol'skaya, L. P., Dobrovol'skii, M. N., Dobrovol'skii, N. M. & Dobrovol'skii, N. N. 2012, "The hyperbolic Zeta function of grids and lattices, and calculation of optimal coefficients", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 13, no. 4(44), pp. 4-–107.

2. Kassels, D. 1965, Vvedenie v geometriyu chisel, [Introduction to the geometry of numbers], *Mir, Moscow*, (Russia).

3. Krylov, A. P., Dobrovolsky, N. M. 2022, "Metric space of two-dimensional diagonal unimodular lattices", *Notes of scientific seminars of the Tula School of Number Theory*, Iss. 1, pp. 37–41.

4. A. P. Krylov, 2025-2026, "The Metric Space of Diagonal Unimodular Lattices", *Notes of Scientific Seminars of the Tula School of Number Theory*, Iss. 3, pp.

5. E. N. Smirnova, O. A. Pikhtilkova, N. N. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, N. M. Dobrovol'skii, 2023, "Smooth variety of lattices", Chebyshevskii sbornik, vol. 24, no. 4, pp. 299–310.

6. Dobrovol'skaya, L. P., Dobrovol'skii, M. N., Dobrovol'skii, N. M. & Dobrovol'skii, N. N. 2014, "On Hyperbolic Zeta Function of Lattices", *Continuous and Distributed Systems. Solid Mechanics and Its Applications*, vol. 211, pp. 23–62.

Получено: 24.10.2025
Принято в печать: 12.02.2026

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 27. Выпуск 1.

УДК: 514.853+517.938.5 DOI: 10.22405/2226-8383-2026-27-1-77-96

Явное решение критических подсистем интегрируемого семейства Ковалевской – Чаплыгина[1]

С. С. Николаенко, П. Е. Рябов, С. В. Соколов

Николаенко Станислав Сергеевич — кандидат физико-математических наук, Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет) (г. Москва).
e-mail: nikolaenko.s@phystech.edu
Рябов Павел Евгеньевич — доктор физико-математических наук, Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет) (г. Москва).
e-mail: ryabov.pe@mipt.ru
Соколов Сергей Викторович — доктор физико-математических наук, Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет) (г. Москва).
e-mail: sokolov.sv@phystech.edu

Аннотация

Работа посвящена изучению фазовой топологии интегрируемого случая Ковалевской – Чаплыгина в динамике твёрдого тела. Этот случай, с одной стороны, является обобщением классических случаев Ковалевской и Чаплыгина, а с другой стороны, вписывается в 6-параметрическое семейство гамильтоновых систем с двумя степенями свободы, интегрируемых при нулевом значении интеграла площадей. Для рассматриваемой задачи детально изучены критические подсистемы — системы с одной степенью свободы, являющиеся ограничением исходной гамильтоновой системы на критическое множество отображения момента. Получена явная параметризация критического множества, что как следствие даёт бифуркационную диаграмму и образ отображения момента. Для всех пяти критических подсистем при каждом значении интеграла энергии и параметра задачи получено их явное решение в эллиптических квадратурах. Кроме того, для каждой критической подсистемы описаны бифуркации интегральных траекторий при изменении уровня энергии. Оказалось, что все нетривиальные бифуркации седлового типа исчерпываются 2-атомами B и C_2 (стандартные перестройки двух критических окружностей в одну и двух окружностей в две соответственно).

Ключевые слова: интегрируемая система, критическая подсистема, бифуркационная диаграмма, решение в квадратурах, 2-атом, молекула.

Библиография: 17 названий.

Для цитирования:
Николаенко С. С., Рябов П. Е., Соколов С. В. Явное решение критических подсистем интегрируемого семейства Ковалевской – Чаплыгина // Чебышевский сборник, 2026, т. 27, вып. 1, с. 77–96.

[1]Исследование поддержано Российским научным фондом (проект 25-21-00086) и выполнено в Московском физико-техническом институте (национальном исследовательском университете).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 27. No. 1.

UDC: 514.853+517.938.5 DOI: 10.22405/2226-8383-2026-27-1-77-96

Explicit solution of the critical subsystems for the Kovalevskaya-Chaplygin integrable family

S. S. Nikolaenko, P. E. Ryabov, S. V. Sokolov

Nikolaenko Stanislav Sergeevich — candidate of physical and mathematical sciences, Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University) (Moscow).
e-mail: nikolaenko.s@phystech.edu
Ryabov Pavel Evgenyevich — doctor of physical and mathematical sciences, Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University) (Moscow).
e-mail: ryabov.pe@mipt.ru
Sokolov Sergey Viktorovich — doctor of physical and mathematical sciences, Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University) (Moscow).
e-mail: sokolov.sv@phystech.edu

Abstract

In this paper we study the phase topology for the Kovalevskaya – Chaplygin integrable case in rigid body dynamics. On the one hand, it is the generalization of the classical Kovalevskaya and Chaplygin cases. On the other hand, it is inscribed in the 6-parameter family of partially integrable (under zero value of the area integral) Hamiltonian systems with two degrees of freedom. For the given problem, we study in details the critical subsystems — Hamiltonian systems with one degree of freedom which are restrictions of the initial system to the critical set of the momentum mapping. We obtain an explicit parametrization of the critical set which gives the bifurcation diagram and the image of the momentum mapping. For all five critical subsystems we provide their explicit solutions in elliptic quadratures under constant value of the energy integral and the parameter of the problem. Besides that, for each critical subsystem we describe the bifurcations of the integral trajectories under the change of the energy level. It turns out that all non-trivial bifurcations of the saddle type are 2-atoms B and C_2 (standard transformations of two critical circles into one or two circles respectively).

Keywords: integrable system, critical subsystem, bifurcation diagram, solution in quadratures, 2-atom, molecule.

Bibliography: 17 titles.

For citation:
Nikolaenko, S. S., Ryabov P. E., Sokolov S. V. 2026, “Explicit solution of the critical subsystems for the Kovalevskaya-Chaplygin integrable family” , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 27, no. 1, pp. 77–96.

1. Введение

В динамике твёрдого тела хорошо известен интегрируемый случай Ковалевской – Чаплыгина – Горячева – Яхья, представляющий собой семейство вполне интегрируемых по Лиувиллю гамильтоновых систем с двумя степенями свободы на двойственном пространстве $e(3)^*$ к алгебре Ли группы движений трёхмерного евклидова пространства. В естественных переменных $\boldsymbol{M} = (M_1, M_2, M_3)$, $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ гамильтониан этого семейства имеет вид

$$H = M_1^2 + M_2^2 + 2M_3^2 + 2\lambda M_3 + c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + 2c_4\alpha_1\alpha_2 + c_3(\alpha_1^2 - \alpha_2^2) + \delta\frac{\boldsymbol{\alpha}^2}{\alpha_3^2},$$

где $(c_1, c_2, c_3, c_4, \lambda, \delta)$ – набор параметров. Скобка Ли – Пуассона на $e(3)^*$ обладает двумя функциями Казимира $f_1 = \boldsymbol{\alpha}^2$, $f_2 = (\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\alpha})$. На симплектическом листе P^4, выделяемом в $e(3)^*$ условиями

$$f_1 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1, \tag{1}$$

$$f_2 = M_1\alpha_1 + M_2\alpha_2 + M_3\alpha_3 = 0, \tag{2}$$

данное семейство систем обладает дополнительным первым интегралом [1]:

$$\begin{aligned} K = &\left[M_1^2 - M_2^2 - c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3^2 - \delta\frac{(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)}{\alpha_3^2}\right]^2 + \\ &+ \left[2M_1M_2 - c_1\alpha_2 - c_2\alpha_1 + c_4\alpha_3^2 - \frac{2\delta\alpha_1\alpha_2}{\alpha_3^2}\right]^2 - \\ &- 4\lambda(M_3 + \lambda)\left[M_1^2 + M_2^2 + \left(1 + \frac{\boldsymbol{\alpha}^2}{\alpha_3^2}\right)\delta\right] + \\ &+ 4\lambda\alpha_3\big[(c_1 + c_3\alpha_1 + c_4\alpha_2)M_1 + (c_2 - c_3\alpha_2 + c_4\alpha_1)M_2\big]. \end{aligned} \tag{3}$$

В другом виде интеграл (3) приводится в работах [2, 3], а история его появления кратко изложена в [4]. В данной работе исследуется случай, когда $c_2 = c_4 = \lambda = \delta = 0$. При $c_3 = 0$ он сводится к классическому случаю Ковалевской [5, 6, 7, 8, 9], а при $c_1 = 0$ – к случаю Чаплыгина [10, 11, 12, 13, 14]. Поэтому данный случай естественно назвать случаем Ковалевской – Чаплыгина (более общий вариант возникает при ненулевых c_1, c_2, c_3). Далее мы полагаем $c_3 = 1$. Приняв также обозначение $c_1 = \gamma$, приведём окончательный вид гамильтониана и дополнительного интеграла:

$$H = M_1^2 + M_2^2 + 2M_3^2 + \gamma\alpha_1 + \alpha_1^2 - \alpha_2^2; \tag{4}$$

$$K = (M_1^2 - M_2^2 + \alpha_3^2 - \gamma\alpha_1)^2 + (2M_1M_2 - \gamma\alpha_2)^2. \tag{5}$$

На P^4 наряду с интегралом K можно также рассматривать интеграл

$$\widetilde{K} = \left(M_1^2 + M_2^2 - \alpha_3^2 + \gamma\alpha_1 + \frac{\gamma^2}{4}\right)^2 + (2M_1\alpha_3 + \gamma M_3)^2, \tag{6}$$

связанный с остальными интегралами соотношением

$$\widetilde{K} = K + \frac{\gamma^2}{2}(H - f_1) + 4\gamma M_1 f_2 + \frac{\gamma^4}{16}.$$

В работах [15, 16] было инициировано исследование фазовой топологии случая Ковалевской – Чаплыгина (а также некоторых других подслучаев упомянутого многопараметрического семейства). В частности, для случая Ковалевской – Чаплыгина был определён топологический тип изоэнергетических многообразий в зависимости от значения параметра γ. В настоящей работе мы фокусируемся на описании критических подсистем для данного случая. В разделе 2 приводится явное описание критического множества отображения момента, которое служит объединением фазовых пространств пяти критических подсистем. В разделе 3 приводится явное аналитическое решение всех критических подсистем, а также исследуется топология соответствующих слоений фазовых пространств. Наконец, в разделе 4 на основании результатов раздела 2 строятся бифуркационные диаграммы отображения момента при различных значениях параметра γ.

2. Описание критического множества отображения момента

Рассмотрим пять подмножеств фазового пространства P^4, выделяемых следующими системами уравнений:

- $\mathcal{C}_1: \quad M_1^2 - M_2^2 + \alpha_3^2 - \gamma\alpha_1 = 0, \quad 2M_1M_2 - \gamma\alpha_2 = 0;$
- $\mathcal{C}_2: \quad M_1^2 + M_2^2 - \alpha_3^2 + \gamma\alpha_1 + \dfrac{\gamma^2}{4} = 0, \quad 2M_1\alpha_3 + \gamma M_3 = 0;$
- $\mathcal{C}_3: \quad M_1 = M_2 = \alpha_3 = 0;$
- $\mathcal{C}_4: \quad M_1 = \alpha_2 = M_3 = 0;$
- $\mathcal{C}_5: \quad M_2 = 0, \quad 2M_1M_3 - (2\alpha_1 + \gamma)\alpha_3 = 0, \quad 2M_3^2 + (2\alpha_1 + \gamma)\alpha_1 = 0.$

Лемма 1. *Множества $\mathcal{C}_1$ – $\mathcal{C}_5$ инвариантны относительно гамильтоновой системы с гамильтонианом H.*

Доказательство. Нужно проверить инвариантность относительно гамильтонова потока уравнений, задающих множества $\mathcal{C}_1$ – $\mathcal{C}_5$. Учитывая вид скобки Ли – Пуассона на $e(3)^*$

$$\{M_i, M_j\} = \varepsilon_{ijk}M_k, \quad \{M_i, \alpha_j\} = \varepsilon_{ijk}\alpha_k, \quad \{\alpha_i, \alpha_j\} = 0, \qquad \varepsilon_{ijk} = \frac{1}{2}(i-j)(j-k)(k-i),$$

можем явно выписать гамильтоновы уравнения:

$$\begin{aligned} &\dot M_1 = -2M_2M_3 - 2\alpha_2\alpha_3, && \dot\alpha_1 = 2M_2\alpha_3 - 4M_3\alpha_2,\\ &\dot M_2 = 2M_1M_3 - (2\alpha_1+\gamma)\alpha_3, && \dot\alpha_2 = -2M_1\alpha_3 + 4M_3\alpha_1,\\ &\dot M_3 = 4\alpha_1\alpha_2 + \gamma\alpha_2, && \dot\alpha_3 = 2M_1\alpha_2 - 2M_2\alpha_1. \end{aligned} \tag{7}$$

Нужно показать, что производные в силу данной системы правых частей уравнений, задающих множества $\mathcal{C}_1$ – $\mathcal{C}_5$, равны нулю. Например, для множества $\mathcal{C}_1$ имеем:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}(M_1^2 - M_2^2 + \alpha_3^2 - \gamma\alpha_1) = 2M_1(-2M_2M_3 - 2\alpha_2\alpha_3) - 2M_2(2M_1M_3 - (2\alpha_1+\gamma)\alpha_3) +\\ &+ 2\alpha_3(2M_1\alpha_2 - 2M_2\alpha_1) - \gamma(2M_2\alpha_3 - 4M_3\alpha_2) = -4M_3(2M_1M_2 - \gamma\alpha_2) = 0;\\ &\frac{d}{dt}(2M_1M_2 - \gamma\alpha_2) = 2(-2M_2M_3 - 2\alpha_2\alpha_3)M_2 + 2M_1(2M_1M_3 - (2\alpha_1+\gamma)\alpha_3) -\\ &- \gamma(-2M_1\alpha_3 + 4M_3\alpha_1) = 4M_3(M_1^2 - M_2^2 - \gamma\alpha_1) - 4\alpha_3(M_1\alpha_1 + M_2\alpha_2) =\\ &= 4M_3(M_1^2 - M_2^2 - \gamma\alpha_1 + \alpha_3^2) = 0 \end{aligned}$$

(в предпоследнем равенстве воспользовались соотношением (2)).

Множества $\mathcal{C}_2$ – $\mathcal{C}_5$ рассматриваются аналогично. Лемма 1 доказана.

Теорема 1. *Множество критических точек отображения момента $H \times K\colon P^4 \to \mathbb{R}^2$ есть в точности объединение множеств $\mathcal{C}_1$ – $\mathcal{C}_5$. Таким образом, в интегрируемом случае Ковалевской – Чаплыгина имеется пять критических подсистем, фазовыми пространствами которых являются множества $\mathcal{C}_1$ – $\mathcal{C}_5$.*

Доказательство. Точка $x \in P^4$ является критической для отображения момента в точности тогда, когда в этой точке дифференциалы первых интегралов H, K, f_1, f_2 линейно зависимы в пространстве $\mathbb{R}^6(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\alpha})$. Пусть $\mathcal{M}$ — матрица Якоби отображения $H \times K \times f_1 \times f_2$:

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 2M_1 & 2M_2 & 4M_3 & 2\alpha_1+\gamma & -2\alpha_2 & 0\\ 4M_1\xi + 4M_2\eta & -4M_2\xi + 4M_1\eta & 0 & -2\gamma\xi & -2\gamma\eta & 4\alpha_3\xi\\ 0 & 0 & 0 & 2\alpha_1 & 2\alpha_2 & 2\alpha_3\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & M_1 & M_2 & M_3 \end{pmatrix},$$

где $\xi = M_1^2 - M_2^2 + \alpha_3^2 - \gamma\alpha_1$, $\eta = 2M_1M_2 - \gamma\alpha_2$.

Лемма 2. *Если в критической точке $K \neq 0$, то*

$$(M_1^2 + M_2^2)(2M_3(M_1\alpha_2 - M_2\alpha_1) - (2\alpha_1 + \gamma)\alpha_2\alpha_3) = \gamma M_2 M_3. \tag{8}$$

Доказательство. Элементарными преобразованиями строк и столбцов матрица $\mathcal{M}$ сводится к матрице

$$\mathcal{N} = \begin{pmatrix} 4(\gamma M_1 - 2M_2\alpha_2) & -8M_1\alpha_2 & 4M_3 & \gamma & -4\alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\gamma\xi & -2\gamma\eta & 0 \\ 4(M_1\alpha_1 + M_2\alpha_2) & 4(M_1\alpha_2 - M_2\alpha_1) & 0 & 2\alpha_1 & 2\alpha_2 & 2(2\alpha_1+\gamma)\alpha_3 \\ \gamma\alpha_1 + 2(M_1^2+M_2^2) & \gamma\alpha_2 & \alpha_3 & M_1 & M_2 & 2M_1\alpha_3 + \gamma M_3 \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $\mathcal{N}^{i_1\ldots i_k}_{j_1\ldots j_k}$ минор матрицы $\mathcal{N}$, образованный пересечением строк с номерами $i_1 \ldots i_k$ и столбцов с номерами $j_1 \ldots j_k$ (аналогично — для матрицы $\mathcal{M}$). В критической точке $\operatorname{rank}\mathcal{N} < 4$. Если $K \neq 0$, то $\xi \neq 0$ или $\eta \neq 0$, следовательно, вторая строка матрицы $\mathcal{N}$ ненулевая. Так как в критической точке $\operatorname{rank}\mathcal{N} < 4$, отсюда вытекает, что $\mathcal{N}^{134}_{123} = 0$. Итак,

$$\begin{aligned} 0 = \frac{1}{16}\mathcal{N}^{134}_{123} &= (M_1^2+M_2^2)(2\alpha_1\alpha_2\alpha_3 - 2M_3(M_1\alpha_2 - M_2\alpha_1)) + \\ &+ \gamma(M_2M_3(\alpha_1^2+\alpha_2^2) + M_1\alpha_3(M_1\alpha_2 - M_2\alpha_1)) = (M_1^2+M_2^2)(2\alpha_1\alpha_2\alpha_3 - 2M_3(M_1\alpha_2 - M_2\alpha_1)) + \\ &+ \gamma(M_2M_3 + M_1^2\alpha_2\alpha_3 - M_2\alpha_3(M_3\alpha_3 + M_1\alpha_1)), \end{aligned}$$

что с учётом равенства (2) равносильно (8). Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Если в критической точке $K \neq 0$, то*

$$M_2(2M_1\alpha_3 + \gamma M_3) = 0. \tag{9}$$

Доказательство. В силу (1) переменные $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ не могут обращаться в нуль одновременно. Следовательно, третья строка матрицы $\mathcal{M}$ ненулевая. Поскольку в критической точке $\operatorname{rank}\mathcal{M} < 4$, отсюда вытекает, что $\mathcal{M}^{124}_{123} = 0$. Таким образом, с учётом равенств (8), (1), (2), получаем

$$\begin{aligned} 0 = \frac{1}{8}\mathcal{N}^{124}_{123} &= (M_1^2+M_2^2)(M_2(M_1\alpha_3 - 2M_3\alpha_1) - M_1(M_2\alpha_3 - 2M_3\alpha_2)) - \\ &- \alpha_3^2(M_2(M_1\alpha_3 - 2M_3\alpha_1) + M_1(M_2\alpha_3 - 2M_3\alpha_2)) + \\ &+ \gamma((M_2\alpha_1 - M_1\alpha_2)(M_1\alpha_3 - 2M_3\alpha_1) + (M_1\alpha_1 + M_2\alpha_2)(M_2\alpha_3 - 2M_3\alpha_2)) = \\ &= 2(M_1^2+M_2^2)M_3(M_1\alpha_2 - M_2\alpha_1) - 2\alpha_3^2(M_1M_2\alpha_3 - M_3(M_1\alpha_2 + M_2\alpha_1)) + \\ &+ \gamma(2M_1M_2\alpha_1\alpha_3 + (M_2^2 - M_1^2)\alpha_2\alpha_3 - 2M_2M_3(\alpha_1^2+\alpha_2^2)) = \\ &= (M_1^2+M_2^2)(2\alpha_1+\gamma)\alpha_2\alpha_3 + \gamma M_2M_3 - 2\alpha_3(M_1M_2\alpha_3^2 + (M_1\alpha_1 + M_2\alpha_2)(M_1\alpha_2 + M_2\alpha_1)) + \\ &+ \gamma(2M_1M_2\alpha_1\alpha_3 + (M_2^2 - M_1^2)\alpha_2\alpha_3 + 2M_2M_3\alpha_3^2 - 2M_2M_3) = \\ &= -2\alpha_3M_1M_2(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2) + \gamma(2M_2\alpha_3(M_1\alpha_1 + M_2\alpha_2 + M_3\alpha_3) - M_2M_3) = \\ &= -M_2(2M_1\alpha_3 + \gamma M_3). \end{aligned}$$

Лемма 3 доказана.

Возвращаемся к доказательству теоремы 1. Если $K = 0$, то $\xi = \eta = 0$, $dK = 0$, и мы получаем множество $\mathcal{C}_1$. Аналогично, если $\widetilde{K} = 0$, то $M_1^2 + M_2^2 - \alpha_3^2 + \gamma\alpha_1 + \dfrac{\gamma^2}{4} = 0$, $2M_1\alpha_3 + \gamma M_3 = 0$, $d\widetilde{K} = 0$, и мы получаем множество $\mathcal{C}_2$. Поэтому далее будем считать, что в данной критической точке $K \neq 0$ и $\widetilde{K} \neq 0$. Из леммы 3 следует, что $M_2 = 0$ или $2M_1\alpha_3 + \gamma M_3 = 0$. Рассмотрим все возможные случаи.

1. $\boldsymbol{M_2 = 0}$. Лемма 2 в этом случае даёт $M_1\alpha_2(2M_1M_3 - (2\alpha_1+\gamma)\alpha_3) = 0$.

   (a) $\boldsymbol{M_1 = 0}$. Из (2) следует, что $\alpha_3 = 0$ или $M_3 = 0$.

   i. $\boldsymbol{\alpha_3 = 0}$. Получаем множество $\mathcal{C}_3$. Оно действительно критическое, так как вторая и третья строки матрицы $\mathcal{M}$ оказываются линейно зависимы.

   ii. $\boldsymbol{M_3 = 0,\ \alpha_3 \neq 0}$. В этом случае матрица $\mathcal{N}$ приобретает вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \gamma & -4\alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\gamma(\alpha_3^2-\gamma\alpha_1) & 2\gamma^2\alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\alpha_1 & 2\alpha_2 & 2(2\alpha_1+\gamma)\alpha_3 \\ \gamma\alpha_1 & \gamma\alpha_2 & \alpha_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Её ранг меньше четырёх в точности тогда, когда $\mathcal{N}^{123}_{456} = 0$, что влечёт равенство $\alpha_2(2\alpha_1+\gamma)\left(\alpha_3^2 - \gamma\alpha_1 - \gamma^2/4\right) = 0$.

   A. $\boldsymbol{\alpha_2 = 0}$. Получаем, что данная точка принадлежит множеству $\mathcal{C}_4$.

   B. $\boldsymbol{2\alpha_1 + \gamma = 0}$. В этом случае точка принадлежит множеству $\mathcal{C}_5$.

   C. $\boldsymbol{\alpha_3^2 - \gamma\alpha_1 - \gamma^2/4 = 0}$. Получаем $\widetilde{K} = 0$, что противоречит предположению.

   (b) $\boldsymbol{2M_1M_3 - (2\alpha_1+\gamma)\alpha_3 = 0,\ M_1 \neq 0}$. С учётом (1) имеем:

$$0 = M_3(2M_1M_3 - (2\alpha_1+\gamma)\alpha_3) = M_1(2M_3^2 + (2\alpha_1+\gamma)\alpha_1),$$

   что в силу $M_1 \neq 0$ даёт $2M_3^2 + (2\alpha_1+\gamma)\alpha_1 = 0$. Получаем множество $\mathcal{C}_5$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что в его точках $\operatorname{rank}\mathcal{N} < 4$.

   (c) $\boldsymbol{\alpha_2 = 0,\ M_1 \neq 0,\ 2M_1M_3 - (2\alpha_1+\gamma)\alpha_3 \neq 0}$. В этом случае матрица $\mathcal{N}$ приобретает вид

$$\begin{pmatrix} 4\gamma M_1 & 0 & 4M_3 & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\gamma\xi & 0 & 0 \\ 4M_1\alpha_1 & 0 & 0 & 2\alpha_1 & 0 & 2(2\alpha_1+\gamma)\alpha_3 \\ \gamma\alpha_1 + 2M_1^2 & 0 & \alpha_3 & M_1 & 0 & 2M_1\alpha_3 + \gamma M_3 \end{pmatrix}.$$

   Её ранг меньше четырёх в точности тогда, когда $\mathcal{N}^{1234}_{1346} = 0$. Отсюда получаем:

$$\begin{aligned} 0 = \mathcal{N}^{1234}_{1346} &= -16\gamma\xi(\gamma M_1(2\alpha_1+\gamma)\alpha_3^2 + \\ &+ M_3(2M_1\alpha_1(2M_1\alpha_3+\gamma M_3) - (\gamma\alpha_1+2M_1^2)(2\alpha_1+\gamma)\alpha_3)) = \\ &= -16\gamma\xi(\gamma M_1(2\alpha_1+\gamma)\alpha_3^2 + \gamma M_1(2\alpha_1+\gamma)\alpha_1^2 + \\ &+ 2M_1M_3\alpha_1(2M_1\alpha_3+\gamma M_3) - 2M_1^2M_3\alpha_3(2\alpha_1+\gamma)) = \\ &= -16\gamma^2\xi M_1(2\alpha_1+\gamma+2M_3(M_3\alpha_1 - M_1\alpha_3)). \end{aligned}$$

   Здесь мы снова пользовались равенствами (1) и (2). Так как по предположению $\xi \neq 0$ и $M_1 \neq 0$, то $2\alpha_1+\gamma+2M_3(M_3\alpha_1 - M_1\alpha_3) = 0$, следовательно, с учётом (1) и (2), имеем:

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_3(2\alpha_1+\gamma+2M_3(M_3\alpha_1 - M_1\alpha_3)) = (2\alpha_1+\gamma)\alpha_3 - 2M_1M_3(\alpha_1^2+\alpha_3^2) = \\ &= (2\alpha_1+\gamma)\alpha_3 - 2M_1M_3, \end{aligned}$$

   что противоречит предположению.

2. $\boldsymbol{2M_1\alpha_3 + \gamma M_3 = 0,\ M_2 \neq 0}$. Рассмотрим вместо функции K первый интеграл $\widetilde{K}$. Матрица Якоби соответствующего отображения $H \times \widetilde{K} \times f_1 \times f_2 \colon \mathbb{R}^6(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\alpha}) \to \mathbb{R}^4$ имеет

следующий вид:

$$\widetilde{\mathcal{M}} = \begin{pmatrix} 2M_1 & 2M_2 & 4M_3 & 2\alpha_1+\gamma & -2\alpha_2 & 0 \\ 4M_1\widetilde{\xi}+4\alpha_3\widetilde{\eta} & 4M_2\widetilde{\xi} & 2\gamma\widetilde{\eta} & 2\gamma\widetilde{\xi} & 0 & -4\alpha_3\widetilde{\xi}+4M_1\widetilde{\eta} \\ 0 & 0 & 0 & 2\alpha_1 & 2\alpha_2 & 2\alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & M_1 & M_2 & M_3 \end{pmatrix},$$

где $\widetilde{\xi} = M_1^2+M_2^2-\alpha_3^2+\gamma\alpha_1+\dfrac{\gamma^2}{4}$, $\widetilde{\eta} = 2M_1\alpha_3+\gamma M_3$. Элементарными преобразованиями строк и столбцов она приводится к матрице

$$\widetilde{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4M_3 & \gamma & -4\alpha_2 & 0 \\ 4\gamma\alpha_3\widetilde{\eta} & 0 & 2\gamma\widetilde{\eta} & 2\gamma\widetilde{\xi} & 0 & 4\gamma M_1\widetilde{\eta} \\ -4M_1\alpha_1 & -4M_2\alpha_1 & 0 & 2\alpha_1 & 2\alpha_2 & 2(2\alpha_1+\gamma)\alpha_3 \\ \gamma\alpha_1-2M_1^2 & \gamma\alpha_2-2M_1M_2 & \alpha_3 & M_1 & M_2 & \widetilde{\eta} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4M_3 & \gamma & -4\alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\gamma\widetilde{\xi} & 0 & 0 \\ -4M_1\alpha_1 & -4M_2\alpha_1 & 0 & 2\alpha_1 & 2\alpha_2 & 2(2\alpha_1+\gamma)\alpha_3 \\ \gamma\alpha_1-2M_1^2 & \gamma\alpha_2-2M_1M_2 & \alpha_3 & M_1 & M_2 & 0 \end{pmatrix}$$

(мы учли, что $\widetilde{\eta} = 0$). Из предположения $\widetilde{K} \neq 0$ следует $\widetilde{\xi} \neq 0$. Поэтому условия $\widetilde{\mathcal{N}}^{1234}_{1234} = \widetilde{\mathcal{N}}^{1234}_{1245} = 0$ влекут равенство

$$\alpha_1(M_1\alpha_2 - M_2\alpha_1)(M_3^2+\alpha_2^2) = 0, \tag{10}$$

а условия $\widetilde{\mathcal{N}}^{1234}_{1346} = \widetilde{\mathcal{N}}^{1234}_{1456} = \widetilde{\mathcal{N}}^{1234}_{2346} = \widetilde{\mathcal{N}}^{1234}_{2456} = 0$ — равенство

$$\alpha_3(2\alpha_1+\gamma)(M_3^2+\alpha_2^2)((\gamma\alpha_1-2M_1^2)^2+(\gamma\alpha_2-2M_1M_2)^2) = 0. \tag{11}$$

Рассмотрим все возможности для равенства (10).

(a) $\boldsymbol{M_3 = \alpha_2 = 0}$. В силу (2) имеем $M_1 = 0$ или $\alpha_1 = 0$.

i. $\boldsymbol{M_1 = 0}$. Получаем множество $\mathcal{C}_4$. Это множество действительно является критическим, так как в его точках первые две строки матрицы $\widetilde{\mathcal{N}}$ становятся линейно зависимы.

ii. $\boldsymbol{\alpha_1 = 0,\ M_1 \neq 0}$. Из условия $2M_1\alpha_3+\gamma M_3 = 0$ получаем $\alpha_3 = 0$, что противоречит (1).

(b) $\boldsymbol{\alpha_1 = 0,\ M_3^2+\alpha_2^2 \neq 0}$. Из (11) имеем $\alpha_3 = 0$ или $\gamma\alpha_1 - 2M_1^2 = \gamma\alpha_2 - 2M_1M_2 = 0$.

i. $\boldsymbol{\alpha_3 = 0}$. Из (1) и (2) получаем $M_2 = 0$, что противоречит предположению.

ii. $\boldsymbol{\gamma\alpha_1 - 2M_1^2 = \gamma\alpha_2 - 2M_1M_2 = 0}$. Так как $\alpha_1 = 0$, то $M_1 = \alpha_2 = 0$, а из условия $2M_1\alpha_3+\gamma M_3 = 0$ получаем $M_3 = 0$. Значит, данная точка принадлежит множеству $\mathcal{C}_4$.

(c) $\boldsymbol{M_1\alpha_2 - M_2\alpha_1 = 0,\ \alpha_1 \neq 0,\ M_3^2+\alpha_2^2 \neq 0}$. В силу (11) возможны два случая.

i. $\boldsymbol{\alpha_3(2\alpha_1+\gamma) = 0}$. Из равенства (8) следует $M_2M_3 = 0$. В силу предположения $M_2 \neq 0$ это даёт $M_3 = 0$. Тогда из (1) и (2) получаем противоречие:

$$0 = \alpha_1(M_1\alpha_2 - M_2\alpha_1) = -M_2\alpha_2^2 - M_2\alpha_1^2 = -M_2.$$

ii. $\boldsymbol{\gamma\alpha_1 - 2M_1^2 = \gamma\alpha_2 - 2M_1M_2 = 0}$. Учитывая, что $\gamma M_3 = -2M_1\alpha_3$, из (2) получаем

$$0 = \gamma\alpha_1\cdot M_1 + \gamma\alpha_2\cdot M_2 + \gamma M_3\cdot\alpha_3 = 2M_1(M_1^2+M_2^2-\alpha_3^2).$$

По предположению $\alpha_1 \neq 0$, следовательно $M_1 \neq 0$, и последнее равенство влечёт $M_1^2+M_2^2-\alpha_3^2 = 0$. Отсюда получаем $K = 0$, что противоречит предположению.

Теорема 1 полностью доказана.

3. Решение критических подсистем в квадратурах

Теперь мы готовы выписать явные решения пяти критических подсистем в эллиптических квадратурах. Каждое из них представляет собой однопараметрическое семейство (параметризованное значением h гамильтониана) замкнутых интегральных траекторий (критических окружностей), возможно, вырождающихся в точки. В приведенной ниже теореме для каждой интегральной траектории мы указываем её параметризацию вещественным параметром u, удовлетворяющим дифференциальному уравнению вида $\dot{u}^2 = P(u)$, где P — многочлен четвёртой степени.

Также для каждой из пяти критических подсистем мы приводим полное описание топологии слоения фазового пространства на интегральные траектории (одномерного слоения Лиувилля) в терминах молекулы (см. [17]) — графа, рёбрам которого отвечают однопараметрические семейства замкнутых траекторий, а вершинам — их бифуркации. Каждая бифуркация кодируется некоторой буквой (атомом). В нашем случае возникают бифуркации следующих четырёх типов.

1. Атом A — вырождение окружности в точку.
2. Атом A_μ — факторизация окружности по инволюции. Слоение в окрестности особого слоя устроено как расслоенная на окружности лента Мёбиуса. При этом неособые слои двулистно накрывают особый слой.
3. Атом B — перестройка двух окружностей в одну через “восьмёрку”.
4. Атом C_2 — перестройка двух окружностей в две (рис. 1).

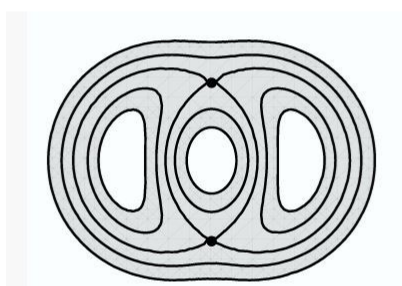


Рис. 1: Атом C_2

Теорема 2. *В интегрируемом случае Ковалевской – Чаплыгина явные решения критических подсистем с фазовыми пространствами $\mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_5$ имеют следующий вид.*

$$\boldsymbol{\mathcal{C}_1}: \quad M_1^2 = \frac{h-1}{2}A(u), \qquad \alpha_1 = \frac{1}{2\gamma}(h+1-2u^2)A(u),$$

$$M_2^2 = u^2A(u), \qquad \alpha_2^2 = \frac{2(h-1)}{\gamma^2}u^2(A(u))^2, \tag{12}$$

$$M_3^2 = \frac{h-1}{8\gamma^2}(h+1+2u^2)^2(A(u))^2, \qquad \alpha_3^2 = A(u),$$

$$\text{где } A(u) = \frac{2\gamma^2}{\sqrt{\gamma^4+\gamma^2((2u^2+h+1)^2-16u^2)}+\gamma^2}; \tag{13}$$

$$\dot{u}^2 = (2u^2+h+1)^2 - 16u^2 + \gamma^2, \qquad u \in [-\infty, +\infty]; \qquad h \geqslant 1. \tag{14}$$

При каждом $h > 1$ в фазовом пространстве имеем две замкнутые траектории, которые при $h = 1$ превращаются в одну траекторию. При этом соответствующее слоение фазового пространства тривиально (рис. 2).

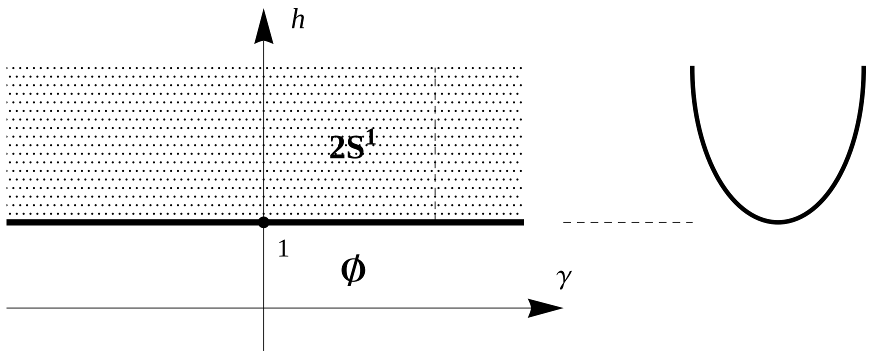


Рис. 2: Бифуркационная диаграмма на плоскости (γ, h) для критической подсистемы на $\mathcal{C}_1$

$$\boldsymbol{\mathcal{C}_2}: \quad M_1^2 = \frac{1-\kappa}{\kappa} u^2 B(u), \qquad \alpha_1 = -\frac{1}{\gamma}\left(\left(\frac{u^2}{\kappa} - 1\right) B(u) + \frac{\gamma^2}{4}\right),$$

$$M_2^2 = u^2 B(u), \qquad \alpha_2^2 = \frac{1-\kappa}{\gamma^2 \kappa}\left(\left(\frac{u^2}{\kappa} + 1\right) B(u) + \frac{\gamma^2}{4}\right), \tag{15}$$

$$M_3^2 = \frac{4(1-\kappa)}{\gamma^2 \kappa} u^2 (B(u))^2, \qquad \alpha_3^2 = B(u),$$

$$\text{где } B(u) = \frac{\gamma^2(16\kappa - \gamma^2)}{4\gamma^2\left(u^2/\kappa + 1\right) + 8\sqrt{\gamma^2\left(4\kappa\left(u^2/\kappa + 1\right)^2 + (\gamma^2 - 16\kappa)u^2\right)}}, \quad \kappa = \frac{h+1}{2} + \frac{\gamma^2}{8}; \tag{16}$$

$$\dot{u}^2 = \gamma^2 u^2 + 4\kappa\left(\left(u^2/\kappa + 1\right)^2 - 4u^2\right), \qquad u \in [-\infty, +\infty]; \tag{17}$$

$$h \in \left[-1 - \gamma^2/8, 1 - \gamma^2/4\right], \qquad |\gamma| \leqslant 4. \tag{18}$$

При каждом $h \in \left(-1 - \gamma^2/8, 1 - \gamma^2/4\right)$ в фазовом пространстве имеем две замкнутые траектории, которые при $h = 1 - \gamma^2/4$ превращаются в одну траекторию (без бифуркации), а при $h = -1 - \gamma^2/8$ вырождаются в две точки (рис. 3).

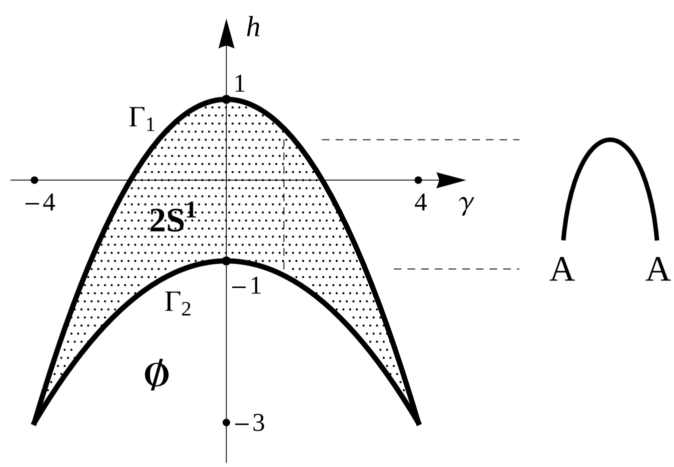


Рис. 3: Бифуркационная диаграмма на плоскости (γ, h) для критической подсистемы на $\mathcal{C}_2$

$$\boldsymbol{\mathcal{C}_3}: \quad \begin{aligned} &M_1 = 0, && \alpha_1 = u,\\ &M_2 = 0, && \alpha_2^2 = 1 - u^2,\\ &M_3^2 = \frac{h+1}{2} - \frac{\gamma}{2}u - u^2, && \alpha_3 = 0; \end{aligned} \tag{19}$$

$$\dot u^2 = 8(1-u^2)(h+1-\gamma u - 2u^2), \tag{20}$$

$$u \in [-1,1] \cap [\chi_-, \chi_+], \quad \text{где } \chi_\pm = -\frac{\gamma}{4} \pm \sqrt{\frac{h+1}{2} + \frac{\gamma^2}{16}}; \tag{21}$$

$$h \geqslant -1 - \gamma^2/8 \text{ при } |\gamma| \leqslant 4, \quad h \geqslant 1 - |\gamma| \text{ при } |\gamma| > 4. \tag{22}$$

Каждому h в фазовом пространстве при $|h-1| < |\gamma|$ отвечает одна замкнутая траектория, при $h \in (-1-\gamma^2/8, 1-|\gamma|)$, $|\gamma| < 4$, и при $h > 1 + |\gamma|$ — две замкнутые траектории. Прямым $h = 1+\gamma$ при $\gamma > -4$ и $h = 1-\gamma$ при $\gamma < 4$ соответствует перестройка двух траекторий в одну (бифуркация типа B); прямым $h = 1+\gamma$ при $\gamma < -4$, $h = 1-\gamma$ при $\gamma > 4$ и параболе $h = -1-\gamma^2/8$ при $|\gamma| < 4$ — вырождение траектории (двух траекторий) в точку (две точки) (рис. 4).

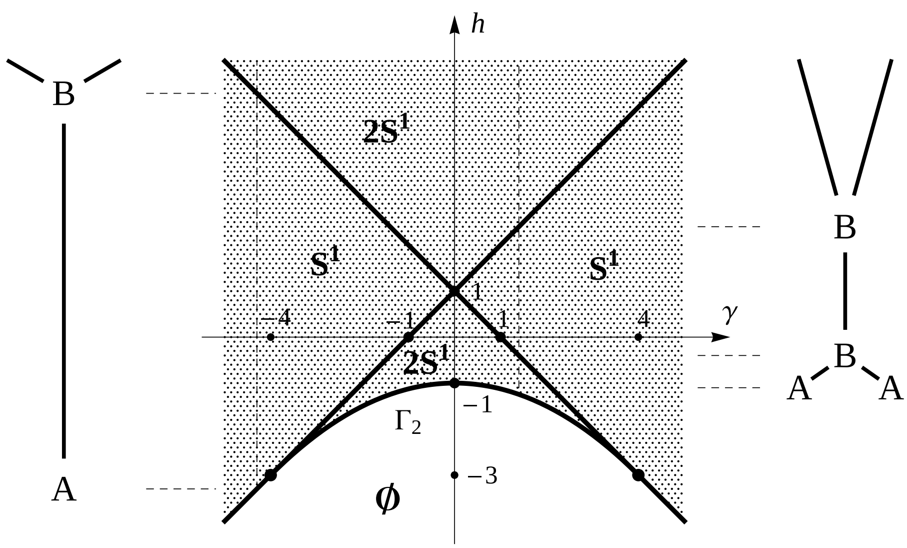


Рис. 4: Бифуркационная диаграмма на плоскости (γ, h) для критической подсистемы на $\mathcal{C}_3$

$$\boldsymbol{\mathcal{C}_4}: \quad \begin{aligned} &M_1 = 0, && \alpha_1 = u,\\ &M_2^2 = h - \gamma u - u^2, && \alpha_2 = 0,\\ &M_3 = 0, && \alpha_3^2 = 1 - u^2; \end{aligned}$$

$$\dot u^2 = 4(1-u^2)(h - u^2 - \gamma u), \quad u \in [-1,1] \cap [\nu_-, \nu_+], \quad \text{где } \nu_\pm = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{h + \frac{\gamma^2}{4}};$$

$$h \geqslant -\gamma^2/4 \text{ при } |\gamma| \leqslant 2, \quad h \geqslant 1 - |\gamma| \text{ при } |\gamma| > 2.$$

Каждому h в фазовом пространстве при $|h-1| < |\gamma|$ отвечает одна замкнутая траектория, при $h \in (-\gamma^2/4, 1-|\gamma|)$, $|\gamma| < 2$, и при $h > 1+|\gamma|$ — две замкнутые траектории. Прямым $h = 1+\gamma$ при $\gamma > -2$ и $h = 1-\gamma$ при $\gamma < 2$ соответствует перестройка двух траекторий в одну (бифуркация типа B); прямым $h = 1+\gamma$ при $\gamma < -2$, $h = 1-\gamma$ при $\gamma > 2$ и параболе $h = -\gamma^2/4$ при $|\gamma| < 2$ — вырождение траектории (двух траекторий) в точку (две точки) (рис. 5).

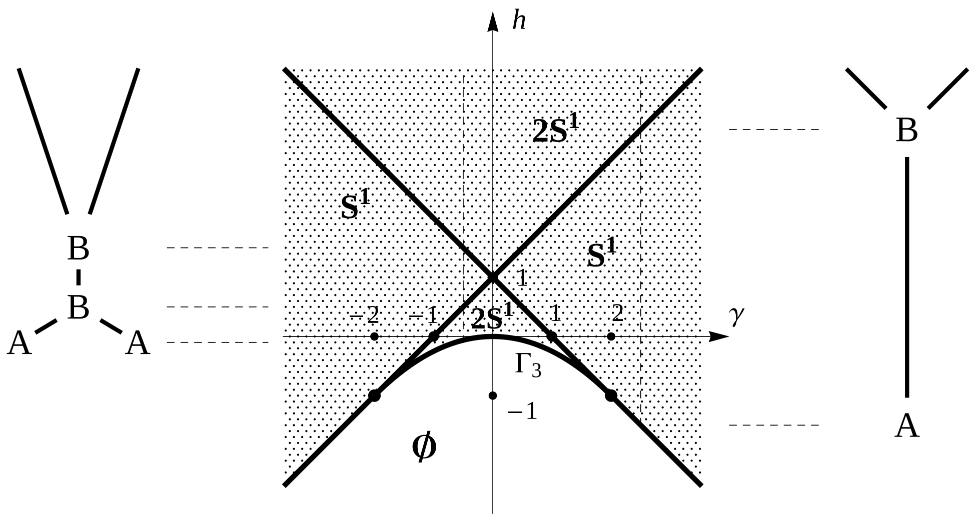


Рис. 5: Бифуркационная диаграмма на плоскости (γ, h) для критической подсистемы на $\mathcal{C}_4$

$$\boldsymbol{\mathcal{C}_5}: \quad M_1^2 = \frac{h+1}{\gamma}(2u+\gamma), \qquad \alpha_1 = u,$$
$$M_2 = 0, \qquad \alpha_2^2 = 1 + \frac{2(h+1)}{\gamma}u - u^2, \tag{23}$$
$$M_3^2 = -u^2 - \frac{\gamma}{2}u, \qquad \alpha_3^2 = -\frac{2(h+1)}{\gamma}u;$$

$$\dot{u}^2 = 8u(2u+\gamma)\left(u^2 - \frac{2(h+1)}{\gamma}u - 1\right), \tag{24}$$

$$u \in [0, \min\{|\gamma|/2, \tau\}] \text{ при } \gamma < 0, \qquad u \in [-\min\{|\gamma|/2, \tau\}, 0] \text{ при } \gamma > 0, \tag{25}$$

$$\text{где } \tau = -\frac{h+1}{|\gamma|} + \sqrt{\frac{(h+1)^2}{\gamma^2} + 1}; \qquad h \geqslant -1.$$

Каждому значению $h > -1$ при $h \neq -\gamma^2/4$ в фазовом пространстве отвечает две замкнутых траектории. Параболе $h = -\gamma^2/4$ соответствует перестройка двух траекторий в две (бифуркация типа C_2). Прямой $h = -1$ при $|\gamma| < 2$ соответствует бифуркация типа A_μ, а при $|\gamma| > 2$ — "склейка" двух окружностей в одну без бифуркации (рис. 6).

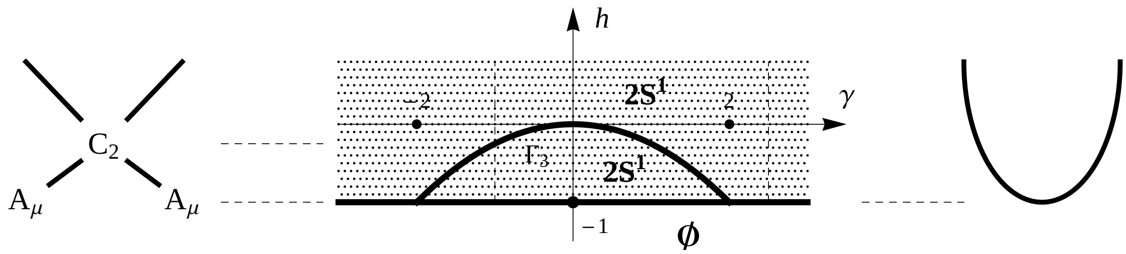


Рис. 6: Бифуркационная диаграмма на плоскости (γ, h) для критической подсистемы на $\mathcal{C}_5$

Замечание 8. *В приведенных выше формулах для множеств $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$ при бесконечных значениях параметра и соответствующие выражения понимаются как пределы.*

Замечание 9. *На рисунках 3 – 6 через Γ_1, Γ_2, Γ_3 обозначены соответственно части парабол $h = 1 - \gamma^2/4$, $h = -1 - \gamma^2/8$, $h = -\gamma^2/4$.*

Доказательство. Рассмотрим критическую подсистему на $\boldsymbol{\mathcal{C}_1}$. Из (4), (1) и определения множества $\mathcal{C}_1$ имеем:

$$M_1^2 + M_3^2 - \alpha_2^2 = \frac{h-1}{2}; \tag{26}$$

$$\gamma\alpha_1 = M_1^2 - M_2^2 + \alpha_3^2; \tag{27}$$

$$\gamma\alpha_2 = 2M_1M_2. \tag{28}$$

Подстановка (27) и (28) в (1) даёт

$$(M_1^2 + M_2^2 + \alpha_3^2)^2 = 4M_2^2\alpha_3^2 - \gamma^2\alpha_3^2 + \gamma^2, \tag{29}$$

а в (2) —

$$M_1(M_1^2 + M_2^2 + \alpha_3^2) = -\gamma M_3\alpha_3. \tag{30}$$

Подставляя (29) и выражение для M_3^2 из (26) в равенство (30), возведённое в квадрат, получим

$$M_1^2(4M_2^2\alpha_3^2 - \gamma^2\alpha_3^2 + \gamma^2) = \gamma^2\left(\frac{h-1}{2} - M_1^2 + \alpha_2^2\right)\alpha_3^2,$$

что с учётом (28) даёт

$$M_1^2 = \frac{h-1}{2}\alpha_3^2. \tag{31}$$

Отсюда, в частности, следует, что $h \geqslant 1$ (в случае $\alpha_3 = M_1 = 0$ это легко видеть из (28), (26)). Равенства (29) и (30) теперь приобретают вид

$$\left(M_2^2 + \frac{h+1}{2}\alpha_3^2\right)^2 = 4M_2^2\alpha_3^2 - \gamma^2\alpha_3^2 + \gamma^2; \tag{32}$$

$$M_3^2 = \frac{h-1}{2\gamma^2}\left(M_2^2 + \frac{h+1}{2}\alpha_3^2\right). \tag{33}$$

Из (30), (31), (27) и (28) находим:

$$M_1M_3 = -\frac{h-1}{2\gamma}(M_1^2 + M_2^2 + \alpha_3^2)\alpha_3 = -\frac{h-1}{2\gamma}\left(M_2^2 + \frac{h+1}{2}\alpha_3^2\right)\alpha_3; \tag{34}$$

$$\alpha_1\alpha_3 = \frac{1}{\gamma}\left(-M_2^2 + \frac{h+1}{2}\alpha_3^2\right)\alpha_3; \tag{35}$$

$$M_1\alpha_2 - M_2\alpha_1 = \frac{M_2}{\gamma}(M_1^2 + M_2^2 - \alpha_3^2) = \frac{M_2}{\gamma}\left(M_2^2 + \frac{h-3}{2}\alpha_3^2\right). \tag{36}$$

Положим $u = M_2/\alpha_3$. Из (34), (35), (36) в силу системы (7) имеем:

$$\dot{u} = \frac{1}{\alpha_3^2}\left((2M_1M_3 - (2\alpha_1+\gamma)\alpha_3)\alpha_3 - (2M_1\alpha_2 - 2M_2\alpha_1)M_2\right) =$$
$$= -\gamma - \frac{2}{\gamma\alpha_3^2}\left(\left(M_2^2 + \frac{h+1}{2}\alpha_3^2\right)^2 - 4M_2^2\alpha_3^2\right) = \gamma\left(1 - \frac{2}{\alpha_3^2}\right)$$

(в последнем равенстве мы использовали (32)). Возводя в квадрат и снова используя (32), получим:

$$\dot{u}^2 = \gamma^2 + \frac{4}{\alpha_3^4}\gamma^2(1-\alpha_3^2) = \gamma^2 + \frac{4}{\alpha_3^4}\left(\left(M_2^2 + \frac{h+1}{2}\alpha_3^2\right)^2 - 4M_2^2\alpha_3^2\right) = \gamma^2 + (2u^2+h+1)^2 - 16u^2.$$

Таким образом, получили уравнение (14). Также из последней цепочки равенств находим выражение (13) для α_3^2 через u. Параметризация фазовых переменных (12) теперь следует из равенств (27), (28), (31), (33).

Поскольку каждому значению u (в том числе $u = \infty$) отвечают ровно две пары значений (M_2, α_3) (отличающиеся знаком), заключаем, что уравнение (32) задаёт на плоскости $\mathbb{R}^2(M_2, \alpha_3)$ окружность, симметричную относительно начала координат. Этой окружности при $h > 1$ соответствуют две окружности в фазовом пространстве, различающиеся знаком переменной M_3 (знак M_1 определяется однозначно равенством (30)). При $h = 1$ эти две окружности превращаются в одну, образуя тривиальное слоение (без особенностей). В качестве параметра этого семейства окружностей можно взять $\sqrt{h-1}$ с учётом знака.

Критическая подсистема на $\boldsymbol{\mathcal{C}_2}$ рассматривется аналогично. Из (4), (1) и определения множества $\mathcal{C}_2$ имеем:

$$M_3^2 + \alpha_1^2 + \alpha_3^2 = \frac{h+1}{2} + \frac{\gamma^2}{8} = \kappa; \tag{37}$$
$$\gamma\alpha_1 = -\left(M_1^2 + M_2^2 - \alpha_3^2 + \frac{\gamma^2}{4}\right); \tag{38}$$
$$\gamma M_3 = -2M_1\alpha_3. \tag{39}$$

Из этих трёх равенств получаем:

$$\left(M_1^2 + M_2^2 + \alpha_3^2 + \frac{\gamma^2}{4}\right)^2 = \gamma^2(\alpha_1^2 + M_3^2) + \alpha_3^2(4M_2^2 + \gamma^2) = \gamma^2\kappa + 4M_2^2\alpha_3^2. \tag{40}$$

Подстановка (38) и (39) в (2) даёт

$$M_1\left(M_1^2 + M_2^2 + \alpha_3^2 + \frac{\gamma^2}{4}\right) = \gamma M_2\alpha_2. \tag{41}$$

Подставляя теперь (40) и выражение для α_2^2 из (1) в равенство (41), возведённое в квадрат, с учётом (37) получим

$$M_1^2(\gamma^2\kappa + 4M_2^2\alpha_3^2) = \gamma^2M_2^2(1 - \alpha_1^2 - \alpha_3^2) = \gamma^2M_2^2(1 + M_3^2 - \kappa).$$

Это равенство вместе с (39) влечёт

$$\kappa M_1^2 = (1-\kappa)M_2^2. \tag{42}$$

При $M_1^2 + M_2^2 \neq 0$ отсюда следует $\kappa \in [0,1]$. Если же $M_1 = M_2 = 0$, то из (39) $M_3 = 0$ и в силу (37) также имеем $\kappa = \alpha_1^2 + \alpha_3^2 \in [0,1]$.

Заметим, что из (38) следует $\kappa \neq 0$. Поэтому равенства (40) и (41) можно переписать в виде

$$\left(\frac{M_2^2}{\kappa} + \alpha_3^2 + \frac{\gamma^2}{4}\right)^2 = \gamma^2\kappa + 4M_2^2\alpha_3^2; \tag{43}$$

$$\alpha_2^2 = \frac{1-\kappa}{\gamma^2\kappa}\left(\frac{M_2^2}{\kappa} + \alpha_3^2 + \frac{\gamma^2}{4}\right). \tag{44}$$

Из (39), (38), (42) и (41) находим:

$$2M_1M_3\alpha_3 = -\frac{4}{\gamma}M_1^2\alpha_3^2 = -\frac{4(1-\kappa)}{\gamma\kappa}M_2^2\alpha_3^2; \tag{45}$$

$$-(2\alpha_1+\gamma)\alpha_3^2 = \frac{2}{\gamma}\left(M_1^2 + M_2^2 - \alpha_3^2 - \frac{\gamma^2}{4}\right)\alpha_3^2 = \frac{2}{\gamma}\left(\frac{M_2^2}{\kappa} - \alpha_3^2 - \frac{\gamma^2}{4}\right)\alpha_3^2; \tag{46}$$

$$2(M_1\alpha_2 - M_2\alpha_1)M_2 = \frac{2M_1^2}{\gamma}\left(M_1^2 + M_2^2 + \alpha_3^2 + \frac{\gamma^2}{4}\right) + \frac{2M_2^2}{\gamma}\left(M_1^2 + M_2^2 - \alpha_3^2 + \frac{\gamma^2}{4}\right) =$$
$$= \frac{2}{\gamma}\left(\frac{M_2^2}{\kappa}\left(\frac{M_2^2}{\kappa} + \frac{\gamma^2}{4}\right) + \left(\frac{1}{\kappa} - 2\right)M_2^2\alpha_3^2\right). \tag{47}$$

Снова положим $u = M_2/\alpha_3$. Из (45), (46), (47) в силу системы (7) имеем:

$$\begin{aligned}
\dot{u} &= \frac{1}{\alpha_3^2}\left((2M_1M_3 - (2\alpha_1+\gamma)\alpha_3)\alpha_3 - (2M_1\alpha_2 - 2M_2\alpha_1)M_2\right) = \\
&= -\frac{2}{\gamma\alpha_3^2}\left(\left(\frac{M_2^2}{\kappa} + \alpha_3^2\right)^2 - 4M_2^2\alpha_3^2 + \frac{\gamma^2}{4}\left(\frac{M_2^2}{\kappa} + \alpha_3^2\right)\right) = \\
&= -\frac{2}{\gamma\alpha_3^2}\left(\gamma^2\kappa - \frac{\gamma^4}{16} - \frac{\gamma^2}{4}\left(\frac{M_2^2}{\kappa} + \alpha_3^2\right)\right)
\end{aligned}$$

(в последнем равенстве мы использовали (43)). Возводя в квадрат и снова используя (43), получим:

$$\begin{aligned}
\dot{u}^2 &= \frac{4}{\gamma^2\alpha_3^4}\left(\left(\gamma^2\kappa - \frac{\gamma^4}{16}\right)^2 - \frac{\gamma^2}{2}\left(\gamma^2\kappa - \frac{\gamma^4}{16}\right)\left(\frac{M_2^2}{\kappa} + \alpha_3^2\right) + \frac{\gamma^4}{16}\left(\frac{M_2^2}{\kappa} + \alpha_3^2\right)^2\right) = \\
&= \frac{4}{\gamma^2\alpha_3^4}\left(\left(\gamma^2\kappa - \frac{\gamma^4}{16}\right)\left(\left(\frac{M_2^2}{\kappa} + \alpha_3^2\right)^2 - 4M_2^2\alpha_3^2\right)\right) = \\
&= \frac{1}{\alpha_3^4}\left(4\kappa\left(\frac{M_2^2}{\kappa} + \alpha_3^2\right)^2 + (\gamma^2 - 16\kappa)M_2^2\alpha_3^2\right) = 4\kappa\left(\frac{u^2}{\kappa} + 1\right)^2 + (\gamma^2 - 16\kappa)u^2.
\end{aligned}$$

Итак, мы получили уравнение (17). Из (43) получаем квадратное уравнение на α_3^2:

$$\left(\left(\frac{u^2}{\kappa} + 1\right)^2 - 4u^2\right)\alpha_3^4 + \frac{\gamma^2}{2}\left(\frac{u^2}{\kappa} + 1\right)\alpha_3^2 + \left(\frac{\gamma^4}{16} - \gamma^2\kappa\right) = 0,$$

откуда находим выражение (16) для α_3^2 через u. Это уравнение имеет неотрицательный корень в точности тогда, когда $\gamma^4/16 - \gamma^2\kappa \leqslant 0$, что вместе с условием $\kappa \in [0,1]$ даёт $\kappa \in [\gamma^2/16, 1]$. Отсюда находим промежуток (18) изменения h. Заметим, что при $|\gamma| > 4$ множество $\mathcal{C}_2$ оказывается пустым. Параметризация фазовых переменных (15) следует из равенств (38), (39), (42), (44).

Выясним структуру слоения множества $\mathcal{C}_2$ на интегральные траектории. Как и в случае множества $\mathcal{C}_1$, уравнение (43) задаёт на плоскости $\mathbb{R}^2(M_2, \alpha_3)$ окружность, симметричную относительно начала координат. Этой окружности при $h \in (-1 - \gamma^2/8, 1 - \gamma^2/4)$ отвечают две окружности в фазовом пространстве, различающиеся знаком переменной α_2 (знак M_1 определяется однозначно равенством (41)). При $h = 1 - \gamma^2/4$ эти две окружности превращаются в одну, образуя тривиальное слоение (в качестве параметра этого семейства окружностей можно взять $\sqrt{1-\kappa}$ с учётом знака). При $h = -1 - \gamma^2/8$ имеем $\kappa = \gamma^2/16$, $\alpha_3 = M_2 = 0$, следовательно, две окружности вырождаются в две точки.

Рассмотрим критическую подсистему на множестве $\boldsymbol{\mathcal{C}_3}$. Равенства (1) и (4) в этом случае задают окружности на плоскостях $\mathbb{R}^2(\alpha_1, \alpha_2)$ и $\mathbb{R}^2(\alpha_1, \alpha_2)$:

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1; \tag{48}$$

$$M_3^2 + \Big(\alpha_1 + \frac{\gamma}{4}\Big)^2 = \frac{h+1}{2} + \frac{\gamma^2}{16}. \tag{49}$$

Полагая $u = \alpha_1$, отсюда сразу получаем формулы (19) и промежуток (21) изменения u. Неравенства (22) на h — условия непустоты промежутка (21). Дифференциальное уравнение (20) на u получается непосредственно из уравнений (7).

Обратимся к фазовой топологии. Рассмотрим случай $\gamma > 0$ (случай $\gamma < 0$ аналогичен). При $-1 < \chi_- < \chi_+ < 1$ уравнения (48), (49) задают две окружности, различающиеся знаком переменной α_2. Каждая из этих окружностей двулистно накрывает отрезок $[\chi_-, \chi_+]$ (листы отличаются знаком переменной M_3). При $\chi_- < -1 < \chi_+ < 1$ уравнения (48), (49) задают одну окружность, четырёхлистно накрывающую отрезок $[-1, \chi_+]$ (листы отличаются знаками переменных M_3, α_2). Наконец, при $\chi_- < -1 < 1 < \chi_+$ уравнения (48), (49) задают две окружности, различающиеся знаком переменной M_3. Каждая из этих окружностей двулистно накрывает отрезок $[-1, 1]$ (листы отличаются знаком переменной α_2). При $-1 = \chi_- < \chi_+ < 1$ и при $\chi_- < -1 < 1 = \chi_+$ происходит перестройка двух окружностей в одну (бифуркация типа B). При $-1 < \chi_- = \chi_+ < 1$ и при $\chi_- < \chi_+ = -1 < 1$ происходит вырождение соответствующих окружностей в точки. Остаётся выразить все случаи взаимного расположения отрезков $[-1, 1]$ и $[\chi_-, \chi_+]$ в терминах переменных h, γ.

Критическая подсистема на множестве $\boldsymbol{\mathcal{C}_4}$ рассматривается точно так же, как и на $\mathcal{C}_3$.

Остаётся рассмотреть критическую подсистему на $\boldsymbol{\mathcal{C}_5}$. Из определения множества $\mathcal{C}_5$, а также равенств (2), (4) имеем:

$$M_3^2 + \Big(\alpha_1 + \frac{\gamma}{4}\Big)^2 = \frac{\gamma^2}{16}; \tag{50}$$

$$M_1\alpha_1 + M_3\alpha_3 = 0; \tag{51}$$

$$M_1^2 + \alpha_3^2 = h + 1. \tag{52}$$

Снова полагая $u = \alpha_1$, из (50) сразу получаем параметризацию для M_3. Затем из (51) и (52) находим выражения для M_1 и α_3 через u. Наконец, из (1) получаем выражение для α_2. Дифференциальное уравнение (24) на u находится из (7). Условие $h \geqslant -1$ следует из (52), а промежуток (25) изменения u определяется из условий неотрицательности правых частей выражений (23) для $M_1^2, M_3^2, \alpha_2^2, \alpha_3^2$.

Изучим теперь фазовую топологию для данного случая. Пусть $\gamma > 0$ (случай $\gamma < 0$ аналогичен). Анализируя формулы (23), заключаем, что каждому $h > -1$ при $\gamma/2 < \tau$ соответствует в фазовом пространстве две окружности, различающиеся знаком переменной α_2. Каждая из этих окружностей четырёхлистно накрывает отрезок $[-\gamma/2, 0]$ (листы отличаются знаками переменных M_1, α_3). Иначе можно сказать, что каждая из этих окружностей двулистно накрывает окружность (50), при этом листы отличаются знаком обеих переменных M_1, α_3. При

$h = -1$ имеем $M_1 = \alpha_3 = 0$, и происходит проективизация каждой из этих окружностей. Это соответствует бифуркации типа A_μ.

Каждому $h > -1$ при $\gamma/2 > \tau$ соответствует в фазовом пространстве две окружности, различающиеся знаком переменной M_1. Каждая из этих окружностей четырёхлистно накрывает отрезок $[-\tau, 0]$, при этом листы отличаются знаками переменных M_3 и α_2 (знак переменной α_3 будет определяться однозначно из (51)). При $h = -1$ получаем $M_1 = 0$, и эти две окружности "слипаются" в одну, образуя тривиальное слоение (в качестве параметра этого семейства окружностей можно взять $\sqrt{h+1}$ с учётом знака). При $\gamma/2 = \tau$ происходит перестройка двух окружностей в две (бифуркация типа C_2). Остаётся заметить, что равенство $\gamma/2 = \tau$ выполняется на параболе $h = -\gamma^2/4$.

Теорема 2 полностью доказана.

Замечание 10. *Появление неориентируемого атома A_μ объясняется тем, что фазовые пространства критических подсистем, — это, вообще говоря, симплектические многообразия с особенностями. В данном случае особая траектория атома A_μ — "место стыковки" множеств $\mathcal{C}_3$ и $\mathcal{C}_5$.*

4. Бифуркационная диаграмма отображения момента

Имея явное описание множества критических точек отображения момента, легко построить его бифуркационную диаграмму, т. е. образ этого множества на плоскости $\mathbb{R}^2(h,k)$ значений первых интегралов.

Теорема 3. *Бифуркационная диаграмма отображения момента $H \times K \colon P^4 \to \mathbb{R}^2$ в случае Ковалевской – Чаплыгина состоит из пяти кривых (частей трёх прямых и двух парабол):*

- $l_1: \qquad k = 0, \quad h \geqslant 1;$
- $l_2: \qquad k = \dfrac{\gamma^2}{2}\left(1 - \dfrac{\gamma^2}{8} - h\right), \quad h \in \left[-1 - \dfrac{\gamma^2}{8}, 1 - \dfrac{\gamma^2}{4}\right];$
- $l_3: \qquad k = \gamma^2, \quad h \geqslant \begin{cases} -1 - \gamma^2/8, & \text{если } |\gamma| \leqslant 4, \\ 1 - |\gamma|, & \text{если } |\gamma| > 4; \end{cases}$
- $l_4: \qquad k = (h-1)^2, \quad h \geqslant \begin{cases} -\gamma^2/4, & \text{если } |\gamma| \leqslant 2, \\ 1 - |\gamma|, & \text{если } |\gamma| > 2; \end{cases}$
- $l_5: \qquad k = (h+1)^2 + \gamma^2, \quad h \geqslant -1.$

Доказательство. Доказательство получается прямой подстановкой уравнений, задающих множества $\mathcal{C}_1$ – $\mathcal{C}_5$, в формулы для первых интегралов с учётом ограничений на промежутки изменения значения h гамильтониана, описанных в теореме 2.

Замечание 11. *Бифуркационная диаграмма вместе с условием компактности образа отображения момента при каждом фиксированном h позволяют определить образ отображения момента на всём фазовом пространстве P^4 (рис. 7, 8, 9). На этих рисунках показано три принципиально различных случая: $|\gamma| < 2$, $2 < |\gamma| < 4$, $|\gamma| > 4$. Видно, что при $|\gamma| > 4$ отрезок l_2 отсутствует. Характерные точки бифуркационной диаграммы таковы: $Q_1(1,0)$, $Q_2(-1,\gamma^2)$, $Q_3(1-|\gamma|,\gamma^2)$, $Q_4(1+|\gamma|,\gamma^2)$, $Q_5(-1-\gamma^2/8,\gamma^2)$, $Q_6(1-\gamma^2/4,\gamma^4/16)$, $Q_7(-\gamma^2/4,(1+\gamma^2/4)^2)$.*

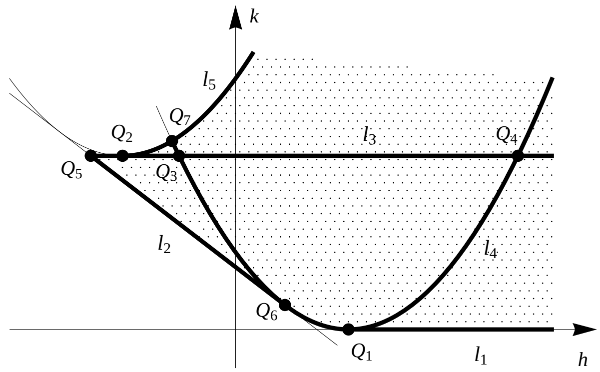


Рис. 7: Бифуркационная диаграмма и образ отображения момента для $|\gamma| < 2$

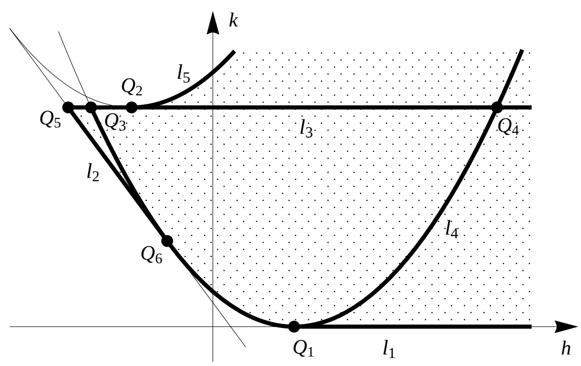


Рис. 8: Бифуркационная диаграмма и образ отображения момента для $2 < |\gamma| < 4$

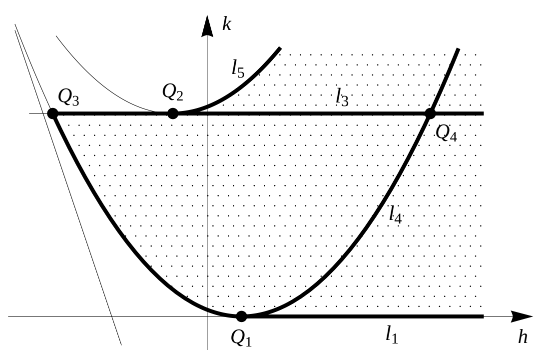


Рис. 9: Бифуркационная диаграмма и образ отображения момента для $|\gamma| > 4$

5. Заключение

В настоящей работе на основе анализа первого дополнительного интеграла K (см. формулу (5)) проведено полное описание критических подсистем для интегрируемого случая Ковалевской – Чаплыгина в динамике твёрдого тела. Получена также другая форма дополнительного интеграла $\widetilde{K}$ (см. формулу (6)), благодаря которой удалось найти аналитически одну из критических подсистем.

Для каждой из найденных критических подсистем при фиксированных значениях гамильтониана H и параметра γ явно построены алгебраические решения в эллиптических квадратурах. Это позволяет получить полную качественную картину динамики на изоэнергетических поверхностях. Кроме того, описаны бифуркации интегральных траекторий при изменении уровня энергии, что важно для понимания глобальной геометрии фазового потока.

Полученные результаты создают основу для детального исследования фазовой топологии и изоэнергетических поверхностей рассматриваемой интегрируемой системы. В частности, они позволяют в дальнейшем явно вычислить инварианты Фоменко – Цишанга (меченые молекулы) и построить полный топологический атлас не только случая Ковалевской – Чаплыгина, но и всего интегрируемого семейства Ковалевской – Чаплыгина – Горячева – Яхья.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Yehia H. M. New integrable problems in the dynamics of rigid bodies with the Kovalevskaya configuration: I. The case of axisymmetric forces // Mech. Res. Com. 1996. Vol. 23, №5. P. 423–427.

2. Tsiganov A. V. On the Kowalevski-Goryachev-Chaplygin gyrostat // J. Phys. A: Math. Gen. 2002. Vol. 35, №22. P. L309–L318.

3. Цыганов А. В. Разделение переменных в гиростате Ковалевской–Горячева–Чаплыгина // ТМФ. 2003. Том 135, №2. С. 240–247.

4. Yehia H. M. Comment on “On the Kowalevsky–Goryachev–Chaplygin gyrostat” // J. Phys. A: Math. Gen. 2002. Vol. 35, №49. P. 10669–10670.

5. Kowalevski S. Sur le probl‘eme de la rotation d’un corps solide autour d’un point fixe // Acta Math. 1889. Vol. 12. P. 177–232.

6. Харламов М. П. Бифуркации совместных уровней первых интегралов в случае Ковалевской // Прикл. матем. и механ. 1983. Том 47, №6. С. 922–930.

7. Харламов М. П. Топологический анализ интегрируемых задач динамики твердого тела. Л.: Изд-во ЛГУ, 1988. 200 с.

8. Болсинов А. В., Рихтер П., Фоменко А. Т. Метод круговых молекул и топология волчка Ковалевской // Матем. сб. 2000. Том 191, №2. С. 3–42.

9. Харламов М. П. Топологический анализ и булевы функции: I. Методы и приложения к классическим системам // Нелинейная динам. 2010. Том 6, №4. С. 769–805.

10. Чаплыгин С. А. Новое частное решение задачи о движении твёрдого тела в жидкости // Тр. отд. физ. наук общ-ва любителей естествознания. 1903. Том 11, №2. С. 7–10.

11. Ryabov P. E., Orel O. E. Bifurcation sets in a problem on motion of a rigid body in fluid and in the generalization of this problem // Regul. Chaotic Dyn. 1998. Vol. 3, №2. P. 82–91.

12. Рябов П. Е. Фазовая топология задачи Чаплыгина о движении твёрдого тела в жидкости // Механика твёрдого тела. 2000. №30. С. 140–150.

13. Николаенко С. С. Топологическая классификация систем Чаплыгина в динамике твердого тела в жидкости // Матем. сб. 2014. Том 205, №2. С. 75–122.

14. Fomenko A. T., Nikolaenko S. S. The Chaplygin case in dynamics of a rigid body in fluid is orbitally equivalent to the Euler case in rigid body dynamics and to the Jacobi problem about geodesics on the ellipsoid // J. Geom. Phys. 2015. Vol. 87. P. 115–133.

15. Ryabov P. E. Bifurcation sets in an integrable problem on motion of a rigid body in fluid // Regul. Chaotic Dyn. 1999. Vol. 4, №4. P. 59–76.

16. Ryabov P. E., Orel O. E. Topology, bifurcations and Liouville classification of Kirchhoff equations with an additional integral of fourth degree // J. Phys. A: Math. Gen. 2001. Vol. 34, №11. P. 2149–2163.

17. Болсинов А. В., Фоменко А. Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. В 2 т. Ижевск: Изд. дом "Удмуртский университет", 1999. 444 с., 447 с.

REFERENCES

1. Yehia, H. M. 1996, "New integrable problems in the dynamics of rigid bodies with the Kovalevskaya configuration: I. The case of axisymmetric forces", *Mech. Res. Com.*, vol. 23, no. 5, pp. 423–427.

2. Tsiganov, A. V. 2002, "On the Kowalevski-Goryachev-Chaplygin gyrostat", *J. Phys. A: Math. Gen.*, vol. 35, no. 22, pp. L309–L318.

3. Tsiganov, A. V. 2003, "Separation of Variables in the Kovalevskaya–Goryachev–Chaplygin Gyrostat", *Theoretical and Mathematical Physics*, vol. 135, no. 2, pp. 651–658.

4. Yehia, H. M. 2002, "Comment on 'On the Kowalevsky-Goryachev-Chaplygin gyrostat' ", *J. Phys. A: Math. Gen.*, vol. 35, no. 49, pp. 10669–10670.

5. Kowalevski, S. 1889, "Sur le probl'eme de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe", *Acta Math.*, vol. 12, pp. 177–232.

6. Kharlamov, M. P. 1983, "Bifurcation of common levels of first integrals of the Kovalevskaya problem", *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 47, no. 6, pp. 737–743.

7. Kharlamov, M. P. 1988, "Topological analysis of integrable problems of rigid body dynamics", *Leningrad. Univ., Leningrad*, 200 pp. (In Russian).

8. Bolsinov, A. V, Richter, P. H. & Fomenko, A. T. 2000, "The method of loop molecules and the topology of the Kovalevskaya top", *Sb. Math.*, vol. 191, no. 2, pp. 151–188.

9. Kharlamov, M. P. 2010, "Topological analysis and Boolean functions. I. Methods and applications to classical systems", *Nelin. Dinam.*, vol. 6, no. 4, pp. 769–805. (In Russian).

10. Chaplygin, S. A. 1903, "A new particular solution of the problem of motion of a rigid body in a fluid", *Tr. Otdel. Fiz. Nauk Obshch. Lubitelei Estestvozn.*, vol. 11, no. 2, pp. 7–10. (In Russian).

11. Ryabov, P. E. & Orel, O. E. 1998, "Bifurcation sets in a problem on motion of a rigid body in fluid and in the generalization of this problem", *Regul. Chaotic Dyn.*, vol. 3, no. 2, pp. 82–91.

12. Ryabov, P. E. 2000, "Phase topology of the Chaplygin problem on the motion of a rigid body in a fluid", *Mekh. Tverd. Tela*, no. 30, pp. 140–150. (In Russian).

13. Nikolaenko, S. S. 2014, "A topological classification of the Chaplygin systems in the dynamics of a rigid body in a fluid", *Sb. Math.*, vol. 205, no. 2, pp. 224–268.

14. Fomenko, A. T. & Nikolaenko, S. S. 2015, "The Chaplygin case in dynamics of a rigid body in fluid is orbitally equivalent to the Euler case in rigid body dynamics and to the Jacobi problem about geodesics on the ellipsoid", *J. Geom. Phys.*, vol. 87, pp. 115–133.

15. Ryabov, P. E. 1999, “Bifurcation sets in an integrable problem on motion of a rigid body in fluid”, *Regul. Chaotic Dyn.*, vol. 4, no. 4, pp. 59–76.

16. Ryabov, P. E. & Orel, O. E. 2001, “Topology, bifurcations and Liouville classification of Kirchhoff equations with an additional integral of fourth degree”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, vol. 34, no. 11, pp. 2149–2163.

17. Bolsinov, A. V. & Fomenko, A. T. 2004, “Integrable Hamiltonian systems. Geometry, topology, classification”, *Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL*, 730 pp.

Получено: 10.12.25
Принято в печать: 12.02.2026

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 27. Выпуск 1.

УДК: 514.172.45 DOI: 10.22405/2226-8383-2026-27-1-97-110

О свободных углах RR-многогранников

В. И. Субботин

Субботин Владимир Иванович — кандидат физико-математических наук, Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ) имени М.И.Платова; Донской государственный аграрный университет (г. Новочеркасск).
e-mail: geometry@mail.ru

Аннотация

В статье выведены формулы для свободных углов различного порядка RR-многогранников и приложения найденных соотношений к доказательству полноты списка несоставных RR-многогранников второго типа с остроугольными ромбическими вершинами. Свободные углы первого порядка — это плоские углы, вершины которых принадлежат ромбическим звёздам RR-многогранников. Стороны каждого свободного угла первого порядка являются двумя сторонами смежных ромбов ромбической звезды. Ранее автором была найдена связь острых углов ромбов ромбической вершины со свободными углами первого порядка. Здесь будут установлены связи плоских углов между двумя сторонами правильных многоугольников, подклеенных в свободные углы первого порядка, с острыми углами ромбов. Углы между сторонами правильных граней названы в работе свободными углами второго порядка. Аналогично стороны соседних правильных многоугольников, подклеенных в свободные углы второго порядка, образуют угол, названный свободным углом третьего порядка. Рассмотрены все возможные случаи подклеивания одного или двух одинаковых правильных многоугольников в свободные углы, что позволяет установить полноту списка несоставных RR-многогранников с остроугольными ромбическими вершинами и правильными гранями различного типа.

Ключевые слова: свободный угол, ромбические вершины, RR-многогранник, звезда ромбической вершины

Библиография: 28 названий.

Для цитирования:
Субботин В. И. О свободных углах RR-многогранников // Чебышевский сборник, 2026, т. 27, вып. 1, с. 97–110.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 27. No. 1.

UDC: 514.172.45 DOI: 10.22405/2226-8383-2026-27-1-97-110

On free angles of RR-polyhedra

V. I. Subbotin

Subbotin Vladimir Ivanovich — candidate of physical and mathematical sciences, Platov South Russian State polytechnic university (NPI); Don State Agrarian University (Novocherkassk).
e-mail: geometry@mail.ru

Abstract

This article derives formulas for free angles of various orders of RR-polytopes and applies the resulting relations to prove the completeness of the list of non-composite RR-polytopes of the second type with acute-angled rhombic vertices. Free angles of the first order are flat angles whose vertices belong to the rhombic stars of the RR-polytopes. The sides of each free angle of the first order are two sides of adjacent rhombi of the rhombic star. Previously, the author found a relationship between the acute angles of the rhombic vertex rhombi and free angles of the first order. Here, we will establish relationships between the flat angles between two sides of regular polygons glued into free angles of the first order and the acute angles of the rhombi. The angles between the sides of regular faces are called free angles of the second order in this article. Similarly, the sides of adjacent regular polygons glued into free angles of the second order form an angle called a free angle of the third order. All possible cases of gluing one or two identical regular polygons into free angles are considered, which makes it possible to establish the completeness of the list of non-composite RR-polyhedra with acute-angled rhombic vertices and regular faces of various types.

Keywords: free angle, rhombic vertices, RR-polyhedron, rhombic vertex star

Bibliography: 28 titles.

For citation:
Subbotin, V. I. 2026, “On free angles of RR-polyhedra”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 27, no. 1, pp. 97–110.

1. Введение

Задача доказательства полноты списка многогранников с условиями правильности граней является важной проблемой современной геометрии, [1]–[9]. Наряду с перечисленными работами отметим статью [10], в которой затронуты близкие вопросы к правильногранным многогранникам, имеющие практическое применение.

После доказательства в работе [12] полноты списка выпуклых правильногранных многогранников в E^3, первоначально описанных в [11], встал вопрос о перечислении многогранников, у которых могут быть условные рёбра. Условным ребром при этом был названа диагональ грани многогранника, разбивающая эту грань на два правильных многоугольника. Полный список таких правильногранных многогранников с условными рёбрами приведён в [13], а в [14] приводится список основных работ, относящихся к такому обобщению правильногранности.

Настоящая работа относится к задаче перечисления выпуклых RR-многогранников в E^3 — таких правильногранных многогранников, у которых имеются ромбические вершины. Вершина V многогранника названа N-ромбической, если её гранная звезда составлена из N равных ромбов, сходящихся в в V своими острыми или тупыми углами. Если — острыми, то вершина называется остроугольной, если тупыми — тупоугольной. Предполагается, что вершина V расположена на оси вращения порядка N её гранной, то есть ромбической, звезды. Таким образом, рассматриваются такие RR-многогранники, у которых ромбические звёзды симметричны. В дальнейшем будет предполагаться, что ромбические звёзды изолированы, то есть не имеют общих рёбер, но могут иметь общие вершины. Первоначально автором в [15] было доказано существование двух RR-многогранников, которые имеют по две ромбических вершины. Полный список всех двадцати четырёх RR-многогранников первого типа, то есть таких RR-многогранников, у которых все правильные грани одного типа, был завершён в [16].

После полного перечисления [16] всех составных RR-многогранников без условных рёбер, включая и RR-многогранники второго типа, то есть такие, у которых правильные грани различного типа, возникает вопрос о перечислении несоставных таких многогранников. При этом составным был назван такой RR-многогранник, который плоскостями, проходящими через его рёбра, может быть разбит на ромбические пирамиды и правильногранные части. Это определение отличается от определения, данного в [12], так как RR-многогранник имеет неправильные (ромбические) грани.

В настоящей работе перечисляются все несоставные остроугольные RR-многогранники *с правильными свободными углами.*

Определение 1. *Свободным углом β первого порядка, или просто — свободным углом RR-многогранника называется плоский угол, вершиной которого является вершина, общая для двух тупых углов двух соседних ромбов R_1 и R_2 ромбической звезды, а стороны угла β являются сторонами R_1 и R_2.*

После того, как в свободные углы подклеены правильные многоугольники, можно дать следующее определение.

Определение 2. *Свободным углом второго порядка называется плоский угол x, вершина которого совпадает с вершиной S острого угла ромба ромбической вершины и с вершинами двух соседних правильных многоугольников M_1 и M_2, помещённых в свободные углы β, а стороны угла x являются сторонами многоугольников M_1 и M_2, сходящихся в вершине S.*

Определение 3. *Поместим, если возможно, в свободные углы x правильные многоугольники и пусть два соседних из них будут P_1 и P_2. Если стороны P_1 и P_2 образуют угол в их общей вершине, то этот угол, y, называется свободным углом третьего порядка.*

Определение 4. *Свободный угол (любого порядка) называется правильным, если в него вставлен либо один правильный многоугольник, либо несколько одинаковых.*

2. Вспомогательные утверждения

В следующих вспомогательных утверждениях, представляющих и самостоятельный интерес, доказаны соотношения, которые будут использованы для доказательства основной теоремы статьи о перечислении несоставных RR-многогранников второго типа с остроугольными ромбическими вершинами и с правильными свободными углами. Так как речь идёт о несоставных RR-многогранниках, а все составные RR-многогранники перечислены, то случай, когда в свободные углы подклеивается по одному правильному треугольнику, не рассматривается.

Лемма 1. *Существует соотношение, связывающее между собой величину свободных углов (первого порядка) ромбической звезды с величиной новых свободных углов (второго порядка) при условии, что в углы первого порядка вставлены правильные многоугольники.*

Доказательство. Получим выражение, позволяющее находить величину новых свободных углов после того, как в свободные углы между ромбами подклеены правильные многоугольники, отличные от треугольников.

Острые углы ромбов n-ромбической звезды обозначим α, свободные углы ромбической звезды обозначим β. Равные двугранные углы при рёбрах, общих для ромбов и правильных многоугольных граней с внутренними углами β, обозначим $\widehat{\gamma}$. Обозначим γ равные плоские углы MSB и LSC, а также эквивалентные им, Рис. 1.

Для трёхгранного угла $SMLB$ имеем:

$$\cos\gamma = \cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha\cos\widehat{\gamma}. \quad (1)$$

С другой стороны, для трёхгранного угла $LVSP$ имеем:

$$-\cos\alpha = -\cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha\cos\widehat{\gamma}. \quad (2)$$

Из (1) и (2) получаем, что

$$\cos\gamma = 2\cos\alpha\cos\beta - \cos\alpha. \tag{3}$$

Пусть x — плоский угол BSC. Для трёхгранного угла $SBMC$, в котором двугранный угол с ребром MS обозначим $\widehat{\delta}$, имеем:

$$\cos x = \cos\gamma\cos\beta + \sin\gamma\sin\beta\cos\widehat{\delta}. \tag{4}$$

Так как $\widehat{\delta} = \widehat{\gamma} - \hat{\delta_1}$, где $\widehat{\delta_1}$ двугранный угол с ребром MS в трёхгранном угле $SBLM$, то, учитывая равенство

$$\cos\beta = \cos\gamma\cos\alpha + \sin\gamma\sin\alpha\cos\widehat{\delta_1} \tag{5}$$

и равенства (1) и (5), для угла $SBLM$, получим:

$$\widehat{\delta} = \arccos\left(\frac{-\cos\alpha + \cos\beta\cos\alpha}{\sin\beta\sin\alpha}\right) - \arccos\left(\frac{\cos\beta - \cos\gamma\cos\alpha}{\sin\gamma\sin\alpha}\right). \tag{6}$$

Учитывая (3) и (6), равенство (4) принимает вид:)

$$\cos x = (2\cos\alpha\cos\beta - \cos\alpha)\cos\beta + \sqrt{1 - (2\cos\alpha\cos\beta - \cos\alpha)^2}\sin\beta\cos\widehat{\delta}, \tag{7}$$

где

$$\widehat{\delta} = \arccos\left(\frac{-\cos\alpha + \cos\beta\cos\alpha}{\sin\beta\sin\alpha}\right) - \arccos\left(\frac{\cos\beta - (2\cos\alpha\cos\beta - \cos\alpha)\cos\alpha}{(\sqrt{1 - (2\cos\alpha\cos\beta - \cos\alpha)^2})\sin\alpha}\right). \tag{8}$$

Уравнения (7)–(8) позволяют определить угол x, если известен свободный угол β и степень n ромбической вершины.

Действительно, если известен угол β и n, то из формулы

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\dfrac{\beta}{2}}{2\sin\dfrac{\pi(n-2)}{2n}} \tag{9}$$

легко найти угол α. Подставляя затем углы α и β в (7) и (8), можно найти угол x.

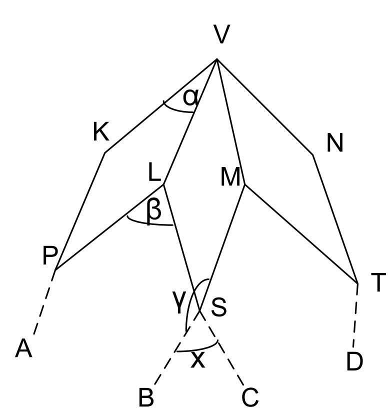


Рис. 1: К доказательству лемм 1 и 2

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Существует соотношение, связывающее между собой величину свободных углов (первого порядка) ромбической звезды с величиной новых свободных углов (второго порядка) при условии, что в углы первого порядка вставлены ромбы.*

Доказательство. Пусть теперь в свободный угол подклеен ромб тупым углом β. В этом случае $\gamma = \pi - \alpha$. Действительно, так как $SB \parallel LP$, то плоские углы равны: $PLV = MSB$, Рис. 1. Равенство (1) принимает вид:

$$-\cos\alpha = -\cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha\cos\widehat{\gamma}. \tag{10}$$

Отсюда получим:

$$\cos\widehat{\gamma} = \frac{-\cos\alpha + \cos\beta\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta}. \tag{11}$$

Равенство (5) принимает вид:

$$-\cos\beta = -\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\cos\widehat{\delta_1}, \tag{12}$$

откуда:

$$\cos\widehat{\delta_1} = \frac{-\cos\beta + \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}. \tag{13}$$

В случае ромбов равенство (4) принимает вид:

$$\cos x = -\cos\beta(-\cos\alpha) + \sin\alpha\sin\beta\cos\widehat{\delta}. \tag{14}$$

Учитывая (11) и (13), а также равенство $\widehat{\delta} = \widehat{\gamma} - \widehat{\delta_1}$, из (14) находим искомый плоский угол x:

$$x = \arccos(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos\widehat{\delta}), \tag{15}$$

где

$$\widehat{\delta} = \arccos\left(\frac{-\cos\alpha + \cos\beta\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta}\right) - \arccos\left(\frac{-\cos\beta + \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}\right). \tag{16}$$

При заданном β и фиксированном n из (9) найдём α. Подставляя найденное α в (15) и (16), найдём угол x как функцию угла β.

При $n = 5$ и при свободном угле $\beta = \dfrac{2}{3}\pi$ уравнения (15) и (16) дают угол между двумя ромбами $x = \dfrac{2}{3}\pi$.

Лемма 2 доказана

Лемма 3. *Существует соотношение, связывающее между собой величину свободных углов (первого порядка) ромбической звезды с величиной новых свободных углов (второго порядка) при условии, что в углы первого порядка вставлены по два правильных треугольника, имеющих общее нефиктивное ребро.*

Доказательство. Рассмотрим третий случай, когда в угол β вставлены две правильных треугольных грани с общим неусловным ребром. Снова рассмотрим трёхгранный угол $SMLB$ с вершиной S, Рис. 2, а). Так как в этом случае плоский угол $LSB = \dfrac{\pi}{3}$, то уравнение (1) принимает вид:

$$\cos\gamma = \cos\frac{\pi}{3}\cos\alpha + \sin\frac{\pi}{3}\sin\alpha\cos\widehat{\gamma}. \tag{17}$$

Двугранный угол $\widehat{\gamma}$ между ромбом и правильным треугольником представим как сумму двух углов: $\widehat{\gamma} = \widehat{\gamma_1} + \widehat{\gamma_2}$, где углы $\widehat{\gamma_1}$ и $\widehat{\gamma_2}$ являются двугранными углами в трёхгранных углах $LVSP$ и $LPBS$ соответственно. Рассматривая два последних трёхгранных угла, получаем для них следующие уравнения.

Для угла $LVSP$:

$$-\cos\alpha = -\cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha\cos\widehat{\gamma_1}; \tag{18}$$

Для угла $LPBS$:

$$\cos\frac{\pi}{3} = \cos\beta\cos\frac{\pi}{3} + \sin\beta\sin\frac{\pi}{3}\cos\widehat{\gamma_2}. \tag{19}$$

Из (18) и (19) получаем соответственно:

$$\cos\widehat{\gamma_1} = \frac{-\cos\alpha + \cos\beta\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta}, \tag{20}$$

$$\cos\widehat{\gamma_2} = \frac{1-\cos\beta}{\sqrt{3}\sin\beta}. \tag{21}$$

Так как

$$\widehat{\gamma} = \widehat{\gamma_1} + \widehat{\gamma_2}$$

, то из (20) и (21) получим:

$$\widehat{\gamma} = \arccos\left(\frac{-\cos\alpha + \cos\beta\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta}\right) + \arccos\left(\frac{1-\cos\beta}{\sqrt{3}\sin\beta}\right). \tag{22}$$

Пусть, как и ранее, x — плоский угол BSC. Для трёхгранного угла $SBMC$, в котором двугранный угол с ребром MS обозначим $\widehat{\delta}$, имеем:

$$\cos x = \cos\gamma\cos\frac{\pi}{3} + \sin\gamma\sin\frac{\pi}{3}\cos\widehat{\delta}. \tag{23}$$

Угол $\widehat{\delta}$ представим в виде разности: $\widehat{\delta} = \widehat{\gamma} - \widehat{\delta_1}$, где $\widehat{\delta_1}$ двугранный угол с ребром MS в трёхгранном угле $SBLM$, для которого справедливо равенство:

$$\cos\frac{\pi}{3} = \cos\gamma\cos\alpha + \sin\gamma\sin\alpha\cos\widehat{\delta_1},$$

то есть:

$$\widehat{\delta_1} = \arccos\left(\frac{\frac{1}{2} - \cos\gamma\cos\alpha}{\sin\gamma\sin\alpha}\right). \tag{24}$$

Уравнение (23) принимает вид

$$\cos x = \frac{1}{2}\cos\gamma + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\gamma\cos(\widehat{\gamma} - \widehat{\delta_1}), \tag{25}$$

где $\widehat{\gamma}$ находим из (22), $\widehat{\delta_1}$ — из (24), а $\cos\gamma$ и $\sin\gamma$ из (17).

Таким образом, правая часть уравнения для нового свободного угла x между парами треугольников будет зависеть только от углов α и β. Как и ранее, учитывая связь углов α и β (уравнение (9)) при известном n, получим правую часть уравнения (25) как функцию β.

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Существует соотношение, связывающее между собой величину свободных углов (первого порядка) с подклеенными в них парами правильных треугольников, имеющих обще нефиктивное ребро, с величиной новых свободных углов (третьего порядка) при условии, что в углы второго порядка вставлены правильные многоугольники.*

Доказательство. Теперь покажем, как вычислить свободный угол y *третьего порядка*, если в углы x второго порядка вставлены правильные многоугольники с углом x, в углы β — пара треугольников с общим нефиктивным ребром. Таким образом, y является углом *между двумя правильными многоугольниками*.

По предыдущему, плоский угол $BSM = \gamma$. Обозначим $\widehat{\Gamma}$ двугранный угол с ребром SK и равный ему угол с ребром KT, Рис. 2, a). Рассмотрим трёхгранный угол $SMKB$. Тогда получим:

$$\cos\gamma = \cos x \cos\frac{\pi}{3} + \sin x \sin\frac{\pi}{3}\cos\widehat{\Gamma}. \tag{26}$$

Уравнение (17) в нашем случае принимает вид:

$$\cos\gamma = \cos\alpha\frac{1}{2} + \sin\alpha\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\widehat{\gamma}.$$

Сравнивая (26) с (17), находим:

$$\widehat{\Gamma} = \arccos\left(\frac{\cos\alpha - \cos x + \sqrt{3}\sin\alpha\cos\widehat{\gamma}}{\sqrt{3}\sin x}\right). \tag{27}$$

Рассмотрим трёхгранный угол $KSMT$. Обозначая $\widehat{\kappa}$ двугранный угол, лежащий против равностороннего треугольника, получим:

$$\cos\frac{\pi}{3} = \cos\beta\cos\frac{\pi}{3} + \sin\beta\sin\frac{\pi}{3}\cos\widehat{\kappa},$$

откуда находим:

$$\widehat{\kappa} = \arccos\left(\frac{1-\cos\beta}{\sqrt{3}\sin\beta}\right). \tag{28}$$

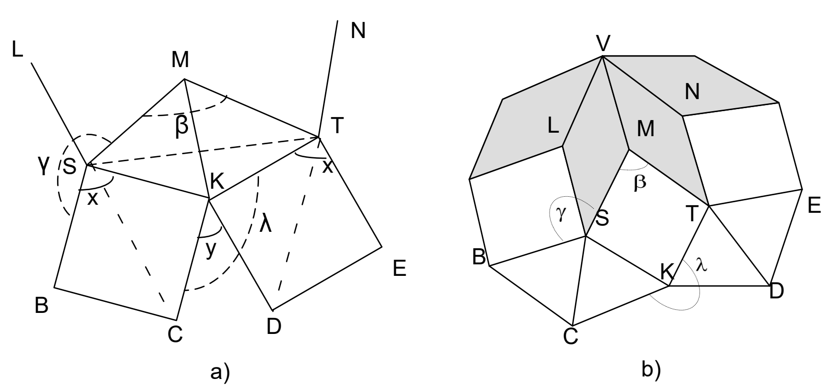


Рис. 2: К доказательству лемм: a)– к леммам 3 и 4; b)– к леммам 5 и 6

Обозначим λ плоский угол CKT. Из трёхгранного угла $KCTS$ находим:

$$\cos x = \cos\beta\cos\lambda + \sin\beta\sin\lambda\cos\widehat{\kappa'}, \tag{29}$$

где двугранный угол $\widehat{\kappa'}$ является частью угла $\widehat{\Gamma}$.

Из (29) находим:

$$\widehat{\kappa'} = \arccos\left(\frac{\cos x - \cos\beta\cos\lambda}{\sin\beta\sin\lambda}\right). \tag{30}$$

Для трёхгранного угла $KCTS$ имеем также:

$$\cos\lambda = \cos\beta\cos x + \sin\beta\sin x\cos(\widehat{\Gamma} - \widehat{\kappa}),$$

$$\lambda = \arccos\left(\cos\beta\cos x + \sin\beta\sin x\cos(\widehat{\Gamma} - \widehat{\kappa})\right). \tag{31}$$

Для трёхгранного угла $KCDT$ имеем равенство:

$$\cos y = \cos\lambda\cos x + \sin\lambda\sin x\cos(\widehat{\Gamma} - \widehat{\kappa} - \widehat{\kappa'}),$$

$$y = \arccos\left(\cos\lambda\cos x + \sin\lambda\sin x\cos(\widehat{\Gamma} - \widehat{\kappa} - \widehat{\kappa'})\right). \tag{32}$$

Из последнего уравнения находим y, если учесть следующие уравнения для $\lambda, \widehat{\Gamma}, \widehat{\kappa}, \widehat{\kappa'}$: (31), (30), (28),(27), а также уравнение (22) для $\widehat{\gamma}$. В результате правая часть уравнения (32) будет зависеть только от углов α и β.

Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Существует соотношение, связывающее между собой величину свободных углов (первого порядка) с подклеенными в них парами правильных треугольников, имеющих общее нефиктивное ребро, с величиной новых свободных углов (третьего порядка) при условии, что в углы второго порядка вставлены пары правильных треугольников.*

Доказательство. Найдём теперь свободный угол y третьего порядка, если в углы x второго порядка и в углы β подклеены пары правильных треугольников с общим нефиктивным ребром. Таким образом, y является углом между двумя правильными треугольниками, Рис. 2, b).

Покажем, какие изменения нужно внести по сравнению с предыдущим случаем. Равенство (26) здесь будет иметь вид:

$$\cos\gamma = \cos\frac{\pi}{3}\cos x + \sin\frac{\pi}{3}\sin x\cos\widehat{\Gamma}^0, \tag{33}$$

где $\widehat{\Gamma}^0 = \widehat{\Gamma} - \widehat{\sigma}$. Двугранный угол $\widehat{\sigma}$ как часть двугранного угла $\widehat{\Gamma}$ с ребром SK, учитывая, что треугольник SKC правильный, найдём из равенства $\cos\frac{\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{3}\cos x + \sin\frac{\pi}{3}\sin x\cos\widehat{\sigma}$:

$$\widehat{\sigma} = \arccos\left(\frac{1 - \cos x}{\sqrt{3}\sin x}\right). \tag{34}$$

Сравнивая уравнение (33) с (17), получим:

$$\widehat{\Gamma^0} = \arccos\left(\frac{\cos\alpha - \cos x + \sqrt{3}\sin\alpha\cos\widehat{\gamma}}{\sqrt{3}\sin x}\right). \tag{35}$$

Рассматривая трёхгранный угол $KCTS$ находим новый вид уравнения (29):

$$\cos\frac{\pi}{3} = \cos\beta\cos\lambda + \sin\beta\sin\lambda\cos\widehat{\kappa'}. \tag{36}$$

Из (36):

$$\widehat{\kappa'} = \arccos\left(\frac{\frac{1}{2} - \cos\beta\cos\lambda}{\sin\beta\sin\lambda}\right). \tag{37}$$

Для трёхгранного угла $KCTS$ имеем также:

$$\cos\lambda = \cos\beta\cos\frac{\pi}{3} + \sin\beta\sin\frac{\pi}{3}\cos(\widehat{\Gamma} - \widehat{\kappa}),$$

$$\lambda = \arccos\left(\frac{1}{2}\cos\beta + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\beta\cos(\widehat{\Gamma} - \widehat{\kappa})\right). \tag{38}$$

Из трёхгранного угла $KCDT$:

$$\cos y = \cos\lambda\cos\frac{\pi}{3} + \sin\lambda\sin\frac{\pi}{3}\cos(\widehat{\Gamma} - \widehat{\kappa} - \widehat{\kappa'}),$$

$$y = \arccos\left(\frac{1}{2}\cos\lambda + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\lambda\cos(\widehat{\Gamma} - \widehat{\kappa} - \widehat{\kappa'})\right). \tag{39}$$

Отметим, что в (38) и (39) $\widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma}^0 + \widehat{\sigma}$.

Из уравнения (39) можно выразить свободный угол третьего порядка y через углы α и β, если учесть выражения для $\widehat{\kappa}$, $\widehat{\kappa'}$, $\widehat{\Gamma}$, $\widehat{\sigma}$, $\widehat{\Gamma}^0$, выражение (22) для $\widehat{\gamma}$ и предварительно найти угол x через углы α или β. В результате угол y будет зависеть только от α (или β).

Лемма 5 доказана.

Лемма 6. *Существует соотношение, связывающее между собой величину свободных углов (первого порядка) с подклеенными в них правильными многоугольниками, с величиной новых свободных углов (третьего порядка) при условии, что в углы второго порядка вставлены пары правильных треугольников с нефиктивным ребром.*

Доказательство.

Равенство (33) будет иметь тот же самый вид и в этом случае:

$$\cos\gamma = \cos\frac{\pi}{3}\cos x + \sin\frac{\pi}{3}\sin x\cos\widehat{\Gamma}^0, \tag{40}$$

где $\widehat{\Gamma}^0 = \widehat{\Gamma} - \widehat{\sigma}$. Двугранный угол $\widehat{\sigma}$ как часть двугранного угла $\widehat{\Gamma}$ с ребром SK, (см. Рис. 2), b), учитывая, что треугольник SKC правильный, как и в предыдущей лемме, найдём из равенства $\cos\frac{\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{3}\cos x + \sin\frac{\pi}{3}\sin x\cos\widehat{\sigma}$:

$$\widehat{\sigma} = \arccos\left(\frac{1 - \cos x}{\sqrt{3}\sin x}\right). \tag{41}$$

Сравнивая (40) с уравнением (1), получим:

$$\widehat{\Gamma^0} = \arccos\left(\frac{\cos\alpha\cos\beta - \cos x\cos\beta + \sin\beta\sin\alpha\cos\widehat{\gamma}}{\sin\beta\sin x}\right), \tag{42}$$

где $\cos\widehat{\gamma}$ определяется из (1):

$$\cos\widehat{\gamma} = \frac{\cos\alpha\cos\beta - \alpha}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

Уравнения (36) и (37) для $\widehat{\kappa'}$ — части угла $\widehat{\Gamma^0}$ — сохраняют свой вид.

Для трёхгранного угла $KCTS$ имеем также:

$$\cos\lambda = \cos\beta\cos\frac{\pi}{3} + \sin\beta\sin\frac{\pi}{3}\cos\widehat{\Gamma},$$

$$\lambda = \arccos\left(\frac{1}{2}\cos\beta + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\beta\cos\widehat{\Gamma}\right). \tag{43}$$

Из трёхгранного угла $KCDT$:

$$\cos y = \cos\lambda\cos\frac{\pi}{3} + \sin\lambda\sin\frac{\pi}{3}\cos(\widehat{\Gamma} - \widehat{\kappa'}),$$

$$y = \arccos\left(\frac{1}{2}\cos\lambda + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\lambda\cos(\widehat{\Gamma} - \widehat{\kappa'})\right). \tag{44}$$

Заметим, что в (43) и (44) $\widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma}^0 + \widehat{\sigma}$, а $\cos x$ определяется по лемме 1. Используя это замечание, а также: (41)–(43), (36), (37) из уравнения (44) найдём угол третьего порядка y.

Лемма 6 доказана.

3. Основная теорема

В формулировке следующей теоремы не учитываются многогранники из известного списка [13] правильногранных многогранников с условными рёбрами.

Теорема 1. *Существует только один несоставной RR-многогранник второго типа с остроугольными ромбическими вершинами и правильными свободными углами.*

Доказательство.

Так как рассматривается класс несоставных RR-многогранников, то в свободных углах β не может находиться по одному правильному треугольнику. Поэтому рассмотрим следующие случаи, когда в свободных углах расположены: 1) квадраты, 2) правильные 5-угольники, 3) правильные 6-угольники, 4) пары правильных треугольников.

Если степень ромбической вершины $n = 3$, то в этом случае, очевидно, $\beta = \alpha$ и в случае 1) и следующих получим, что ромбическая вершина не является остроугольной.

Если $n = 4$, то в случае 1) получим два известных многогранника — дополненный кубооктаэдр и дважды дополненный кубооктаэдр, [13]. Действительно, при $\beta = \dfrac{\pi}{2}$ компьютерное вычисление по формулам (7)–(8) леммы 1 даёт, что свободный угол второго порядка $x = \dfrac{\pi}{3}$. Если теперь поместить в углы x по одному правильному треугольнику и подклеить квадрат к их свободным сторонам, то получим 13-гранник — дополненный кубооктаэдр. Если вместо правильных треугольников поместить в углы x ромбы с острым углом $\dfrac{\pi}{3}$, то получим 12-гранник — дважды дополненный кубооктаэдр.

В случае 2), когда $\beta = 108°$, по формуле (9) получаем, что $\alpha \approx 69.79°$, и по формулам (7)–(8) вычисляем угол $x \approx 25.24°$. Таким образом, в свободный угол второго порядка нельзя подклеить правильный многоугольник. В угол x нельзя также подклеить пару правильных треугольников, так как в этом случае общие вершины двух соседних 5-угольников будут иметь отрицательную кривизну: $360° - 69.79° + 216° + 120° < 0$.

Рассмотрим случай 3). Из формулы (9) следует, что с увеличением угла β угол α увеличивается и при $\beta = \dfrac{2\pi}{3}$ получим 4-ромбическую вершину с острым углом ромба $\alpha \approx 75.52°$. Формулы (7)–(8) при этом дают значение угла $x = 0$. Зеркально отражая полученную ромбическую звезду относительно плоскости, делящей пополам замкнутый пояс из четырёх правильных 6-угольников, получим RR-многогранник первого типа с двумя ромбическими вершинами.

Случай 4). Здесь в углы β помещены пары правильных треугольников. Рассмотрим сначала в этом случае возможность подклеивания правильных многоугольников в углы x. В этом случае не существует ромбической остроугольной вершины. Покажем сначала, что решение уравнения (25) при $x = \dfrac{\pi}{2}$ не существует. Действительно, при максимально возможном $\beta = \dfrac{2\pi}{3}$ из формулы (9) получаем максимальное значение $\alpha_{max} = 2arcsin\left(\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{3}}{\sqrt{2}}\right) \approx 75.52°$. Решим уравнение (25) относительно $\sin\alpha$ при $cosx = 0$.

Легко проверить, что данное уравнение не имеет решения в указанном интервале $(0, \sin\alpha_{max})$.

Это подтверждается также решением уравнений (15)–(16), когда в углы β вставлены ромбы. В этом случае компьютерные вычисления дают угол $x \approx 75.52°$. Отсюда следует, что в углы x в этом случае нельзя вставить квадраты.

Аналогично доказывается несуществование RR-многогранника, когда в углы x подклеены 5-угольники. Случай, когда в углах x 6-угольники, невозможен, так как общие вершины соседних 6-угольников будут иметь отрицательную кривизну.

Пусть в углы x, как и в углы β, подклеены пары треугольников.

Ранее нами было доказано существование в этом случае двух RR-многогранников: 21-гранника второго типа, связанного с плосконосой квадратной антипризмой и 24-гранника первого типа в [15]. Для 24-гранника $\alpha \approx 73.44°$, $\beta \approx 115.47°$. Для 21-гранника $\alpha \approx 73.10°$, $\beta \approx 114.75°$. Покажем, что помимо этих двух больше не существует RR-многогранников, когда в углы x и β помещены пары правильных треугольников. Если в свободные углы y третьего порядка вставлены правильные треугольники, то получим указанный выше 21-гранник. Вставить в углы y квадраты нельзя, так как в случае, если соседние квадраты имеют только одну общую вершину — — вершину, общую для двух треугольников в углах x, то между ними должен быть по крайней мере треугольник, но тогда кривизна в общей вершине будет отрицательной. Если два соседних квадрата будут иметь общую сторону, то четыре квадрата образуют четырёхугольную правильную призму и ромбическая звезда не будет существовать. Нельзя также 5-угольники поместить в углы y, так как по той же причине, что и в случае квадратов, соседние 5-угольники на могут иметь общей только одну вершину — вершину, общую для двух треугольников в углах x. Не могут иметь соседние 5-угольники и общую сторону, так как тогда угол $x = \dfrac{\pi}{2}$, а это невозможно для ромбической вершины. Очевидно, 6-угольники также не могут быть помещены в углы y, так как в общей вершине двух соседних 6-угольников получим отрицательную кривизну.

Пусть теперь $n = 5$.

В случае 1), когда в β вставлены квадраты, получим 20-гранный RR-многогранник первого типа, доказательство существования которого приведено во второй части работы [15]. Это можно проверить также и вычислениями по формулам (7)–(8).

В случае 2), т.е. при $\beta = \dfrac{3\pi}{5}$, получим удлинённую 5-скатную ротонду с углами $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$ — один из правильногранных многогранников с условными рёбрами из списка [13].

Если $\beta = \dfrac{2\pi}{3}$, то вычисления по формулам (7)–(8) даёт: $x \approx 38.63°$ и дальнейшее построение RR-многогранника невозможно.

В случае 4) в углы β вставлены пары правильных треугольников. Рассмотрим сначала возможность подклеивания правильных многоугольников в углы x. При максимальном $\beta = \dfrac{2\pi}{3}$, получим, как и выше, максимальное значение $\alpha \approx 64.72°$. Компьютерное решение уравнения

(25) даёт, что решений для случая квадратов, 5-угольников и 6-угольников не существует. Случай невозможности RR-многогранников для k-угольников при $k > 6$ очевиден.

Пусть теперь в углы x подклеены также пары правильных треугольников. При наибольшем $\beta = \dfrac{2\pi}{3}$, то есть когда в свободных углах размещены ромбы с острыми углами $\dfrac{\pi}{3}$, в свободных углах x второго порядка можно разместить такие же ромбы; это доказано в [18], в чём также можно убедиться с помощью уравнения Леммы 2.

При помощи формул (7)–(8) можно убедиться, что с уменьшением угла β и выполнением соотношения (9) угол x увеличивается, то есть ромбы становятся парами правильных треугольников, однако выпуклость нарушится. Таким образом, для 5-ромбической звезды RR-многогранник типа икосаэдра Е.С.Фёдорова (см. [18]) является «жёстким» отнсительно замены его ромбических граней, не входящих в ромбические звёзды, на пары правильных треугольников с общим ребром.

При $n = 6$ в случае квадратов в углах β для вычисления угла x применим формулы (7)–(8) Леммы 1. Компьютерные вычисления дают в этом случае: $x \approx 109.47°$. Подклеить в этот угол 5-угольник или 6-угольник нельзя. Покажем, что в угол x нельзя подклеить и пару треугольников. Для этого воспользуемся формулой (44) Леммы 6. Вычисления угла третьего порядка в этом случае дают: $y \approx 150.83°$. Таким образом, дальнейшее подклеивание правильных многоугольников невозможно.

При $n = 6$ в случае 5-угольников в углах β для вычисления угла x проведём аналогичные вычисления. Получим $x \approx 80.41°$ и дальнейшее подклеивание невозможно, так как в вершине, общей для двух соседних 5-угольников, кривизна будет отрицательной. Построение RR-многогранника в случае, когда в углах β 6-угольники, очевидно, невозможно.

Последний случай, когда при $n = 6$ в углы β подклеены пары треугольников, невозможен, так как кривизна вершины, которая является общей для двух тупых углов ромбов ромбической звезды, будет отрицательна.

Если $n = 7$, то вычисление по формулам (7)—(8) даёт $x \approx 123.71°$ и подклеивание многоугольников в угол x невозможно. Очевидно, что при условии правильности свободных углов дальнейшее увеличение n не приводит к новым RR многогранникам.

Теорема доказана.

4. Заключение

Таким образом, существует только один несоставной RR-многогранник с правильными гранями различного типа в классе многогранников с правильными свободными углами и остроугольными ромбическими вершинами. Этот многогранник может быть построен исходя из плосконосой квадратной антипризмы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Coxeter H. S. Regular polytopes. London-NY. 1963.
2. Деза М., Гришухин В. П., Штогрин М. И. Изометрические полиэдральные подграфы в гиперкубах и кубических решетках. М.: МЦНМО, 2007.
3. Емеличев В. А., Ковалёв М. М., Кравцов М. К. Многогранники. Графы. Оптимизация. М.: Наука, 1981.
4. Cromwell P. R. Polyhedra. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.
5. Grunbaum B. Regular polyhedra — old and new.// Aequationes mathematicae. 1977. Vol. 16, №1-2. P.1-20.

6. Berman M. Regular-faced Convex Polyhedra, // Journal of The Franklin Institute. 1971. Vol. 291, №5. P.329-352.

7. Coxeter H. S. Regular and semi-regular polytopes. II, // Mathematische Zeitschrift. 1985. Vol. 188, №4. P.559–591.

8. Coxeter H. S. Regular and semi-regular polytopes. III, // Mathematische Zeitschrift. 1988. Vol. 200, №1. P.3–45.

9. Jurij Kovic. Centrally symmetric convex polyhedra with regular polygonal faces // Math. Commun. 2013. Vol. 18. P. 429—440.

10. Piette B. M. A. G, Kowalczyk A, Heddle J. G. Characterization of near-miss connectivity-invariant homogeneous convex polyhedral cages // Proc. R. Soc., 2022, A 478:20210679.

11. Johnson N. W. Convex polyhedra with regular faces // Can. J. Math. 1966. Vol. 18, №1. P. 169—200.

12. Залгаллер В. А. Выпуклые многогранники с правильными гранями //Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1967. Т.2. С.1-220.

13. Tupelo-Schneck R. Convex regular-faced polyhedra with conditional edges [Electronic resource] // URL: http://tupelo-schneck.org/polyhedra (date of treatment: 29.12.2025).

14. Tupelo-Schneck R. Regular-faced polyhedra [Electronic resource] // URL: https://tupelo-schneck.org/polyhedra/background.html. (date of treatment: 29.12.2025).

15. Subbotin V. I. On Two Classes of Polyhedra with Rhombic Vertices. // J. Math. Sci., 2020, vol. 251, pp. 531—538.

16. Subbotin V. I. О перечислении выпуклых RR-многогранников // Чебышевский сборник, 2023, том 24, вып. 5, с.194–207.

17. Subbotin V. I. On the Composite RR-Polyhedra of the Second Type // Siberian Mathematical Journal, 2023, vol. 64, no. 2, pp. 500—506.

18. Субботин В. И. О О существовании и перечислении RR-многогранников // Материалы Омской Международной конференции по геометрии и её приложениям. Омск. 2025. С.153-155.

REFERENCES

1. Coxeter H. S. 1963, *Regular polytopes*, London-NY.

2. Deza M, Grishukhin V. P., Shtogrin M. I. 2008, *Isometricheskie poliedralnye podgrafy v gipercubach i cubicheskich reshetkach* [*Scale-Isometric Polytopal Graphs in Hypercubes and Cubic Lattices*], MCNMO, Moskow.

3. Emelichev V. A., Kovalev M. M., Kravzov M. K. 1981, *Mnogogranniki. Grafi. Optimizacija.* [*Polyhedra. Graph. Optimization*], Nauka, Moskow.

4. Cromwell P. R. 1997, *Polyhedra*, Cambridge University Press, Cambridge.

5. Grunbaum, B. 1977, “Regular polyhedra — old and new“, *Aequationes mathematicae*, vol. 16, no.1-2, pp.1-20.

6. Berman M. 1971, “Regular-faced Convex Polyhedra“, *Journal of The Franklin Institute* , vol. 291, no.5, pp.329-352.

7. Coxeter H. S. 1985, “Regular and semi-regular polytopes. II“, *Mathematische Zeitschrift*, vol. 188, no.4, pp.559–591.

8. Coxeter H. S. 1988, “Regular and semi-regular polytopes. III“, *Mathematische Zeitschrift*, vol. 200, no.1, pp.3–45.

9. Jurij Kovic. 2013, “Centrally symmetric convex polyhedra with regular polygonal faces“, *Math. Commun.*, vol. 18, pp. 429—440.

10. Piette B. M. A. G, Kowalczyk A, Heddle J. G. 2022,“Characterization of near-miss connectivity-invariant homogeneous convex polyhedral cages“, *Proc. R. Soc.*, A 478:20210679.

11. Johnson N. W. 1966, “Convex polyhedra with regular faces“, *Can. J. Math.*, vol. 18, №1, pp. 169—200.

12. Zalgaller V. A. 1967, “Convex polyhedra with regular faces“, *Zapiski nauchnych seminarov LOMI*, vol. 2, pp.1-220.

13. Tupelo-Schneck R. “Convex regular-faced polyhedra with conditional edges [Electronic resource]“, *http://tupelo-schneck.org/polyhedra (date of treatment: 29.12.2025).*

14. Tupelo-Schneck R. “Regular-faced polyhedra [Electronic resource]“, *https://tupelo-schneck.org/polyhedra/background.html. (date of treatment: 29.12.2025).*

15. Subbotin V. I. 2020, “On two classes of polyhedra with rhombic vertices“, *J. Math. Sci.,* vol. 251, pp. 531–538

16. Subbotin V. I. 2023, “On the enumeration of convex RR-polytopes“, *Chebyshevskiy sbornik,* vol.24, no.6, pp. 194–207.

17. Subbotin V. I. 2023, “On the Composite RR-Polyhedra of the Second Type“, *Siberian Mathematical Journal,* vol. 64, no. 2, pp. 500—506.

18. Subbotin V. I. 2025, “On the existence and enumeration of RR-polytopes“, *Materialy megdunarodnoy konferencii “Omsskaja konferenciya po geometrii i ejo prilogeniyam“,* Omsk, pp.153-155.

Получено: 15.11.2025
Принято в печать: 12.02.2026

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 27. Выпуск 1.

УДК: 517.957 DOI: 10.22405/2226-8383-2026-27-1-111-133

Интегрирование модифицированного уравнения Кортевега – де Фриза с интегральным источником

А. Б. Яхшимуратов, М. М. Хасанов

Яхшимуратов Алишер Бекчанович — доктор физико-математических наук, университет Мамуна (г. Хива, Узбекистан).
e-mail: alisher.yakhshi@gmail.com
Хасанов Музаффар Машарипович — доктор философии (PhD) по физико-математическим наукам, Ургенчский государственный университет (г. Ургенч).
e-mail: hmuzaffar@mail.ru

Аннотация

В данной работе рассматривается модифицированное уравнение Кортевега – де Фриза с интегральным источником. Показано, что метод обратной спектральной задачи может быть применен для интегрирования модифицированного уравнения Кортевега – де Фриза с интегральным источником. Определена эволюция спектральных данных оператора Дирака с периодическим потенциалом, связанным с решением модифицированного уравнения Кортевега – де Фриза с интегральным источником. Доказана разрешимость задачи Коши для бесконечной системы дифференциальных уравнений Дубровина — Трубовица в классе шесть раз непрерывно дифференцируемых периодических функций. Показано, что построенное решение действительно удовлетворяет рассматриваемому уравнению.

Ключевые слова: модифицированное уравнение Кортевега – де Фриза, самосогласованный источник, оператор Дирака, обратная спектральная задача, система уравнений Дубровина – Трубовица, формулы следов.

Библиография: 32 названий.

Для цитирования:
Яхшимуратов А. Б., Хасанов М. М. Интегрирование модифицированного уравнения Кортевега – де Фриза с интегральным источником // Чебышевский сборник, 2026, т. 27, вып. 1, с. 111–133.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 27. No. 1.

UDC: 517.957 DOI: 10.22405/2226-8383-2026-27-1-111-133

Integration of the modified Korteweg-de Vries equation with an integral source

A. B. Yakhshimuratov, M. M. Khasanov

Yaxshimuratov Alisher Bekchanovich — doctor of physical and mathematical sciences, Mamun University (Khiva, Uzbekistan).
e-mail: alisher.yakhshi@gmail.com
Khasanov Muzaffar Masharipovich — doctor of philosophy (PhD) in physical and mathematical sciences, Urgench State University (Urgench).
e-mail: hmuzaffar@mail.ru

Abstract

In this paper, we consider the modified Korteweg–de Vries equation with an integral source. It is shown that the inverse spectral problem method can be applied to integrate the modified Korteweg–de Vries equation with an integral source. The evolution of the spectral data of the Dirac operator with a periodic potential associated with the solution of the modified Korteweg–de Vries equation with an integral source is determined. The solvability of the Cauchy problem for the infinite system of Dubrovin–Trubowitz differential equations in the class of six times continuously differentiable periodic functions is proved. It is shown that the constructed solution, indeed, satisfies the equation under consideration.

Keywords: Modified Korteweg-de Vries equation, self-consistent source, Dirac operator, inverse spectral problem, Dubrovin-Trubowitz system of equations, trace formulas.

Bibliography: 32 titles.

For citation:
Yakhshimuratov, A. B., Khasanov, M. M. 2026, “Integration of the modified Korteweg-de Vries equation with an integral source” , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 27, no. 1, pp. 111–133.

1. Введение

Одним из представителей класса вполне интегрируемых нелинейных уравнений в частных производных, имеющий большое прикладное значение, является модифицированное уравнение Кортевега – де Фриза (мКдФ). Полная интегрируемость этого уравнения методом обратной задачи, в классе быстроубывающих функций, впервые было установлена в работе М.Вадати (см. [1]). Исследованию уравнения мКдФ в классе конечнозонных функций посвящены работы [2, 3, 4].

В работе [5] В.К.Мельникова с помощью метода обратной задачи рассеяния было проинтегрировано уравнение КдФ с самосогласованным источником, в классе быстроубывающих функций.

В работе J.Leon, A.Latifi [6] приводится физическая задача, описываемая с помощью уравнения с самосогласованным источником.

В работах [7, 8] изучены интегрируемые нелинейные эволюционные уравнения с нагруженным членом в классе периодических функций.

В работах [9, 10, 11, 12] использован метод (G'/G)-разложения для интегрирования нагруженного уравнения Кортевега – де Фриза (КдФ), нагруженного модифицированного уравнения Кортевега – де Фриза (мКдФ), нагруженного уравнения Бюргерса и нагруженного нелинейного уравнения Дегаспериса – Просеси.

В работах [13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 24, 25] рассмотрены различные нелинейные уравнения отрицательного порядка с самосогласованным источником.

Рассмотрим следующее уравнение мКдФ с интегральным источником

$$q_t = 6q^2 q_x - q_{xxx} + \int_{-\infty}^{\infty} \beta(\lambda,t) s_1(\pi,\lambda,t)(\psi_1^+\psi_1^- - \psi_2^+\psi_2^-)d\lambda, \ \ t>0\ , \ \ x\in R, \tag{1}$$

с начальным условием

$$q(x,t)|_{t=0} = q_0(x), \tag{2}$$

в классе действительнозначных π-периодических по x функций

$$q(x,t)\in C_x^3(t>0)\cap C_t^1(t>0)\cap C(t\geqslant 0). \tag{3}$$

Здесь $\beta(\lambda,t)$ заданная действительная, непрерывная функция, имеющая равномерную асимптотику

$$\beta(\lambda,t) = O\left(\lambda^{-2}\right), \ \ \lambda\to\pm\infty,$$

$\psi^\pm = (\psi_1^\pm(x,\lambda,t),\ \psi_2^\pm(x,\lambda,t))^T$ решения Флоке (нормированные условиями $\psi_1^\pm(0,\lambda,t) = 1$) следующего уравнения Дирака

$$L(t)y \equiv B\frac{dy}{dx} + \Omega(x,t)y = \lambda y, \ \ x\in R, \tag{4}$$

где

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \ \ \Omega(x,t) = \begin{pmatrix} 0 & q(x,t) \\ q(x,t) & 0 \end{pmatrix}, \ \ y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}.$$

Через $s(x,\lambda,t) = (s_1(x,\lambda,t),\ s_2(x,\lambda,t))^T$ обозначено решение уравнения (4), удовлетворяющее начальным условиям $s(0,\lambda,t) = (0,\ 1)^T$.

Цель данной работы дать процедуру построения решения $(q(x,t),\psi^+(x,\lambda,t),\psi^-(x,\lambda,t))$ задачи (1)-(2), в рамках обратной спектральной задачи для уравнения Дирака (4).

2. Спектральная теория для оператора Дирака с периодическим коэффициентом

В этом пункте, для полноты изложения, приведем некоторые основные сведения, касающиеся обратной спектральной задачи для оператора Дирака с периодическими коэффициентами (см. [26, 27, 28, 29, 30, 31, 32]).

Рассмотрим систему уравнений Дирака на всей прямой

$$Ly \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, x\in R, \tag{5}$$

где $p(x)$ и $q(x)$ действительные непрерывные функции из класса $C^1(R)$, имеющие период π, а λ комплексный параметр.

Обозначим через $c(x,\lambda) = (c_1(x,\lambda), c_2(x,\lambda))^T$ и $s(x,\lambda) = (s_1(x,\lambda), s_2(x,\lambda))^T$ решения уравнения (5) удовлетворяющие начальным условиям $c(0,\lambda) = (1,\ 0)^T$ и $s(0,\lambda) = (0,\ 1)^T$.

Функция $\Delta(\lambda) = c_1(\pi, \lambda) + s_2(\pi, \lambda)$ называется функцией Ляпунова или дискриминантом Хилла для оператора Дирака (5). Следующее утверждение составляет содержание теоремы Флоке: при $\Delta^2(\lambda) - 4 \neq 0$, уравнение (5) имеет два линейно независимых решения имеющие вид: $\psi^{\pm}(x,\lambda) = \rho_{\pm}^{\frac{x}{\pi}} \cdot p^{\pm}(x,\lambda)$, где $p^{\pm}(x,\lambda)$ – π-периодические вектор-функции по x, и $\rho_{\pm} = (\Delta(\lambda) \mp \sqrt{\Delta^2(\lambda) - 4})/2$; при $\Delta(\lambda) = 2$, уравнение (5) имеет решение с периодом π; при $\Delta(\lambda) = -2$, уравнение (5) имеет решение с антипериодом π. Если положить $\psi_1^{\pm}(0,\lambda) = 1$, то

$$\psi^{\pm}(x,\lambda) = c(x,\lambda) + \frac{s_2(\pi,\lambda) - c_1(\pi,\lambda) \mp \sqrt{\Delta^2(\lambda) - 4}}{2s_1(\pi,\lambda)} s(x,\lambda).$$

Эти решения принято называть решениями Флоке.

Спектр оператора (5) состоит из следующего множества

$$E = \{\lambda \in R: \ -2 \leqslant \Delta(\lambda) \leqslant 2\ \} = R \backslash \left\{ \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} (\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}) \right\}.$$

Интервалы $(\lambda_{2n-1},\ \lambda_{2n})$, $n \in Z$ называются лакунами.

Корни уравнения $s_1(\pi,\lambda) = 0$ обозначим через ξ_n, $n \in Z$. Числа ξ_n, $n \in Z$ совпадают с собственными значениями задачи Дирихле $y_1(0) = 0$, $y_1(\pi) = 0$ для системы (5) и выполняются соотношения $\xi_n \in [\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$, $n \in Z$.

Числа $\xi_n \in [\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$, $n \in Z$ и знаки $\sigma_n = sign\,\{s_2(\pi,\xi_n) - c_1(\pi,\xi_n)\}$, $n \in Z$ называются спектральными параметрами задачи (5). Спектральные параметры ξ_n, σ_n, $n \in Z$ и границы спектра λ_n, $n \in Z$ называются спектральными данными задачи (5). Нахождение спектральных данных задачи (5) называется прямой задачей, а восстановление коэффициентов $p(x)$ и $q(x)$ по спектральным данным называется обратной задачей.

Если в задаче (5), вместо $p(x)$ и $q(x)$ рассмотреть $p(x+\tau)$ и $q(x+\tau)$, то спектр полученной задачи не зависит от параметра τ: $\lambda_n(\tau) \equiv \lambda_n$, $n \in Z$, а спектральные параметры зависят от параметра τ: $\xi_n(\tau)$, $\sigma_n(\tau)$, $n \in Z$. Эти спектральные параметры удовлетворяют аналогу системы уравнений Дубровина-Трубовица:

$$\frac{d\xi_n}{d\tau} = (-1)^{n-1}\sigma_n(\tau)h_n(\xi)[2\xi_n + \sum_{k=-\infty}^{\infty}(\lambda_{2k-1} + \lambda_{2k} - 2\xi_k)], n \in Z,$$

где

$$h_n(\xi) = \sqrt{(\xi_n - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n)} \cdot \sqrt{\prod_{\substack{k=-\infty,\\ k\neq n}}^{\infty} \frac{(\lambda_{2k-1} - \xi_n)(\lambda_{2k} - \xi_n)}{(\xi_k - \xi_n)^2}}.$$

Знак $\sigma_n(\tau)$ – меняется на противоположный при каждом столкновении $\xi_n(\tau)$ с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$.

Система уравнений Дубровина-Трубовица, а также следующие формулы следов

$$p(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\lambda_{2k-1} + \lambda_{2k}}{2} - \xi_k(\tau) \right),$$

$$q(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n-1}\sigma_n(\tau)h_n(\xi(\tau))$$

дают метод решения обратной спектральной задачи.

Нетрудно доказываются следующие лемма и теоремы.

Лемма 1. *Выполняются следующие равенства*

$$\frac{\partial}{\partial\tau}s_1(\pi,\lambda,\tau)=2q(\tau)s_1(\pi,\lambda,\tau)-(\lambda+p(\tau))[s_2(\pi,\lambda,\tau)-c_1(\pi,\lambda,\tau)],$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}c_2(\pi,\lambda,\tau)=-(\lambda-p(\tau))[s_2(\pi,\lambda,\tau)-c_1(\pi,\lambda,\tau)]-2q(\tau)c_2(\pi,\lambda,\tau),$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}(s_2(\pi,\lambda,\tau)-c_1(\pi,\lambda,\tau))=2(\lambda-p(\tau))s_1(\pi,\lambda,\tau)+2(\lambda+p(\tau))c_2(\pi,\lambda,\tau).$$

Здесь через $c(x,\lambda,\tau)$ и $s(x,\lambda,\tau)$ обозначены решения системы Дирака с коэффициентами $p(x+\tau)$ и $q(x+\tau)$, удовлетворяющие начальным условиям $c(0,\lambda,\tau)=(1,\ 0)^T$ и $s(0,\lambda,\tau)=(0,\ 1)^T$.

Теорема 1. *Если число λ является собственным значением граничной задачи*

$$\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1'\\y_2'\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&q(x)\\q(x)&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix},\quad x\in(0,\ \pi), \tag{6}$$

$$y_1(0)=0,\quad y_1(\pi)=0, \tag{7}$$

где $q(x)$ действительная непрерывная функция, и ему соответствует собственная вектор-функция $\begin{pmatrix}y_1(x)\\y_2(x)\end{pmatrix}$, то $(-\lambda)$ тоже является собственным значением этой задачи, и ему соответствует собственная вектор-функция $\begin{pmatrix}y_1(x)\\-y_2(x)\end{pmatrix}$.

Замечание 1. Эта теорема верна и при других граничных условиях, например, при граничных условиях Неймана $y_2(0)=0,\quad y_2(\pi)=0$, при периодических граничных условиях $y_1(0)=y_1(\pi),\ y_2(0)=y_2(\pi)$, при антипериодических граничных условиях $y_1(0)=-y_1(\pi),\ y_2(0)=-y_2(\pi)$.

Обозначим через $c(x,\lambda)$ и $s(x,\lambda)$ решения уравнения (6), удовлетворяющие следующим начальным условиям $c(0,\lambda)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ и $s(0,\lambda)=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. Нетрудно видеть, что $\begin{pmatrix}c_1(x,-\lambda)\\-c_2(x,-\lambda)\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}-s_1(x,-\lambda)\\s_2(x,-\lambda)\end{pmatrix}$ также являются решениями уравнения (6). Так, как $\begin{pmatrix}c_1(0,-\lambda)\\-c_2(0,-\lambda)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}-s_1(0,-\lambda)\\s_2(0,-\lambda)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, из теоремы единственности решения задачи Коши, получим, что

$$\begin{pmatrix}c_1(x,-\lambda)\\-c_2(x,-\lambda)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_1(x,\lambda)\\c_2(x,\lambda)\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-s_1(x,-\lambda)\\s_2(x,-\lambda)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}s_1(x,\lambda)\\s_2(x,\lambda)\end{pmatrix},$$

в частности, $\Delta(-\lambda)=c_1(\pi,-\lambda)+s_2(\pi,-\lambda)=c_1(\pi,\lambda)+s_2(\pi,\lambda)=\Delta(\lambda)$.

Замечание 2. Обозначим через ξ_n, $n\in Z$ все собственные значения задачи (6)+(7). Так как они расположены симметрично относительно нуля, мы можем их нумеровать следующим образом $\xi_{-n}=-\xi_n$, $n\geqslant 0$. Кроме того, $\xi_0=0$ всегда является собственным значением и ему соответствует собственная вектор-функция $\begin{pmatrix}0\\\exp\{-\int_0^x q(t)dt\}\end{pmatrix}$. Кроме, этого выполняется следующее равенство

$$\sigma_{-n}=sign\{s_2(\pi,\xi_{-n})-c_1(\pi,\xi_{-n})\}=sign\{s_2(\pi,-\xi_n)-c_1(\pi,-\xi_n)\}=$$

$$=sign\{s_2(\pi,\xi_n)-c_1(\pi,\xi_n)\}=\sigma_n.$$

Теорема 2. *Если в уравнении (6), коэффициент $q(x)$ является действительной непрерывно-дифференцируемой функцией, то компоненты решения $\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$ этого уравнения удовлетворяют следующим уравнениям*

$$-y_1'' + [q^2(x) + q'(x)]y_1 = \lambda^2 y_1,$$

$$-y_2'' + [q^2(x) - q'(x)]y_2 = \lambda^2 y_2.$$

Следствие 1. Если $\begin{pmatrix} y_{n,1}(x) \\ y_{n,2}(x) \end{pmatrix}$ является собственной вектор-функцией задачи (6)+(7), соответствующей собственному значению ξ_n, и $\xi_n \neq 0$, то $y_{n,1}(x)$ является собственной функцией следующей граничной задачи

$$-y_1'' + [q^2(x) + q'(x)]y_1 = \mu y_1,$$

$$y_1(0) = 0, \quad y_1(\pi) = 0,$$

соответствующей собственному значению ξ_n^2.

Покажем равномерную сходимость интеграла участвующего в уравнении (1). Для этого воспользуемся тождеством

$$\begin{aligned} s_1(\pi,\lambda,t)[\psi_1^+(\tau,\lambda,t)\psi_1^-(\tau,\lambda,t) - \psi_2^-(\tau,\lambda,t)\psi_2^+(\tau,\lambda,t)] = \\ = s_1(\pi,\lambda,t,\tau) + c_2(\pi,\lambda,t,\tau), \end{aligned} \tag{8}$$

где $c(x,\lambda,t,\tau)$ и $s(x,\lambda,t,\tau)$ – решения системы Дирака с коэффициентами $p(x+\tau,t)$ и $q(x+\tau,t)$, удовлетворяющие начальным условиям $c(0,\lambda,t,\tau) = 1$, $c'(0,\lambda,t,\tau) = 0$ и $s(0,\lambda,t,\tau) = 0$, $s'(0,\lambda,t,\tau) = 1$.

Из асимптотических формул для решений $c(x,\lambda,t,\tau)$ и $s(x,\lambda,t,\tau)$ следует оценка
$s_1(\pi,\lambda,t,\tau) + c_2(\pi,\lambda,t,\tau) = O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$, при $\lambda \to \pm\infty$.
Эта оценка и равенство (8) обеспечивают равномерную сходимость интеграла участвующего в уравнении (1).

3. Эволюция спектральных параметров

Теорема 3. *Пусть $(q(x,t),\psi^+(x,\lambda,t),\psi^-(x,\lambda,t))$ является решением задачи (1)-(3). Тогда спектр оператора (4) не зависит от параметра t, а спектральные параметры $\xi_n(t)$, $n \in Z$ удовлетворяют аналогу системы уравнений Дубровина-Трубовица:*

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_n(t) = 2(-1)^n \sigma_n(t) h_n(\xi)\{-2\xi_n[q^2(0,t) + q_x(0,t)] - 4\xi_n^3 + \\ + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi_n \beta(\lambda,t) s_1(\pi,\lambda,t)}{\xi_n^2 - \lambda^2} d\lambda\},\ n \in Z. \end{aligned} \tag{9}$$

Знаки $\sigma_n(t) = \pm 1$ меняются при каждом столкновении точки $\xi_n(t)$ с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1},\ \lambda_{2n}]$. Кроме того, выполняются следующие начальные условия

$$\xi_n(t)|_{t=0} = \xi_n^0, \quad \sigma_n(t)|_{t=0} = \sigma_n^0, n \in Z, \tag{10}$$

где ξ_n^0, σ_n^0, $n \in Z$ – спектральные параметры оператора Дирака с коэффициентами $p_0(x) = 0$ и $q_0(x)$.

Следствие 2. Если мы вместо $q(x,t)$ рассмотрим $q(x+\tau,t)$, то собственные значения периодической и антипериодической задачи не зависят от параметров τ, t, а собственные значения ξ_n задачи Дирихле и знаки σ_n зависят от $\tau,\ t$: $\xi_n = \xi_n(\tau, t), \quad \sigma_n = \sigma_n(\tau, t) = \pm 1$, $n \in Z$. В этом случае, система (9) примет вид

$$\frac{\partial \xi_n}{\partial t} = 2(-1)^n \sigma_n(\tau, t) h_n(\xi)\{-2\xi_n[q^2(\tau, t) + q_x(\tau, t)] - 4\xi_n^3 + \\ + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi_n \beta(\lambda, t) s_1(\pi, \lambda, t, \tau)}{\xi_n^2 - \lambda^2} d\lambda\},\ n \in Z. \tag{11}$$

Здесь

$$s_1(\pi, \lambda, t, \tau) = \pi \prod_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\xi_k - \lambda}{a_k}, \quad a_k = \begin{cases} k, k \neq 0 \\ 1, k = 0 \end{cases} . \tag{12}$$

Учитывая формулы следов

$$q^2(\tau, t) + q_\tau(\tau, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\lambda_{2k-1}^2 + \lambda_{2k}^2}{2} - \xi_k^2(\tau, t) \right) \tag{13}$$

систему (11) можно переписать в замкнутой форме.

Следствие 3. Эта теорема дает метод решения задачи (1)-(3). Для этого, сначала найдем спектральные данные $\lambda_n,\ \xi_n^0(\tau),\ \ \sigma_n^0(\tau)\ ,\ n \in Z$, соответствующие коэффициенту $q_0(x + \tau)$. Далее, решаем задачу Коши

$$\xi_n(\tau, t)|_{t=0} = \xi_n^0(\tau), \quad \sigma_n(\tau, t)|_{t=0} = \sigma_n^0(\tau)\ , n \in Z$$

для системы уравнений Дубровина-Трубовица (11). После этого по формуле следов

$$q(\tau, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n-1} \sigma_n(\tau, t) h_n(\xi) \tag{14}$$

определяем $q(x, t)$.

Покажем, что функция $q(\tau, t)$, построенная с помощью системы уравнений Дубровина-Трубовица (11) и формулы следов (14), действительно удовлетворяет уравнению мКдФ с интегральным самосогласованным источником (1). При этом мы также будем использовать систему уравнений Дубровина-Трубовица

$$\frac{\partial \xi_n}{\partial \tau} = (-1)^{n-1} \sigma_n(\tau, t) \cdot 2\xi_n h_n(\xi) \tag{15}$$

и формулы следов (13) и

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\lambda_{2k-1} + \lambda_{2k}}{2} - \xi_k(\tau, t) \right) = p(\tau, t) \equiv 0. \tag{16}$$

Дифференцируя формулу следов (14) по t имеем

$$q_t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n-1} \sigma_n(\tau, t) \frac{\partial h_n(\xi)}{\partial t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n-1} \sigma_n(\tau, t) \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\partial h_n(\xi)}{\partial \xi_m} \cdot \frac{\partial \xi_m}{\partial t} \right). \tag{17}$$

Из равенств (11) и (15) находим, что

$$\frac{\partial \xi_n}{\partial t} = 2(q^2 + q_\tau) \cdot \frac{\partial \xi_n}{\partial \tau} + 4\xi_n^2 \cdot \frac{\partial \xi_n}{\partial \tau} - \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta(\lambda, t) s_1(\pi, \lambda, t, \tau)}{\xi_n^2 - \lambda^2} d\lambda \right\} \cdot \frac{\partial \xi_n}{\partial \tau}.$$

Подставляя это выражение в равенство (17) получим, что

$$q_t = 2(q^2+q_\tau)\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^{n-1}\sigma_n(\tau,t)\frac{\partial h_n(\xi)}{\partial\tau}+$$

$$+4\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^{n-1}\sigma_n(\tau,t)\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{\partial h_n(\xi)}{\partial\xi_m}\cdot\xi_m^2\cdot\frac{\partial\xi_m}{\partial\tau}\right)-$$

$$-\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^{n-1}\sigma_n(\tau,t)\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{\partial h_n(\xi)}{\partial\xi_m}\cdot\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\beta(\lambda,t)s_1(\pi,\lambda,t,\tau)}{\xi_m^2-\lambda^2}d\lambda\right\}\cdot\frac{\partial\xi_m}{\partial\tau}\right). \qquad (18)$$

Учитывая, равенство

$$q_\tau = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^{n-1}\sigma_n(\tau,t)\frac{\partial h_n(\xi)}{\partial\tau},$$

полученное дифференцированием формулы следов (14) по τ, равенство (18) перепишем в следующем виде

$$q_t = 2q^2q_\tau+2q_\tau^2+4\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^{n-1}\sigma_n(\tau,t)\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{\partial h_n(\xi)}{\partial\xi_m}\cdot\xi_m^2\cdot\frac{\partial\xi_m}{\partial\tau}\right)+$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}\beta(\lambda,t)\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^{n}\sigma_n(\tau,t)\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{\partial h_n(\xi)}{\partial\xi_m}\cdot\frac{s_1(\pi,\lambda,t,\tau)}{\xi_m^2-\lambda^2}\cdot\frac{\partial\xi_m}{\partial\tau}\right)\right\}d\lambda. \qquad (19)$$

Используя тождество $\frac{1}{\xi_m^2-\lambda^2}=\frac{1}{2\lambda}\left(\frac{1}{\xi_m-\lambda}-\frac{1}{\xi_m+\lambda}\right)$, из равенства (19) получим, что

$$q_t = 2q^2q_\tau+2q_\tau^2+4\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^{n-1}\sigma_n(\tau,t)\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{\partial h_n(\xi)}{\partial\xi_m}\cdot\xi_m^2\cdot\frac{\partial\xi_m}{\partial\tau}\right)+$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}\beta(\lambda,t)\frac{1}{2\lambda}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^{n}\sigma_n(\tau,t)\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{\partial h_n(\xi)}{\partial\xi_m}\cdot\frac{s_1(\pi,\lambda,t,\tau)}{\xi_m-\lambda}\cdot\frac{\partial\xi_m}{\partial\tau}\right)\right\}d\lambda-$$

$$-\int_{-\infty}^{\infty}\beta(\lambda,t)\frac{1}{2\lambda}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^{n}\sigma_n(\tau,t)\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{\partial h_n(\xi)}{\partial\xi_m}\cdot\frac{s_1(\pi,\lambda,t,\tau)}{\xi_m+\lambda}\cdot\frac{\partial\xi_m}{\partial\tau}\right)\right\}d\lambda.$$

В последнем равенстве сделаем замену $\lambda\mapsto-\lambda$. Учитывая $s_1(\pi,-\lambda,t,\tau)=-s_1(\pi,\lambda,t,\tau)$ имеем

$$q_t = 2q^2q_\tau+2q_\tau^2+4\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^{n-1}\sigma_n(\tau,t)\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{\partial h_n(\xi)}{\partial\xi_m}\cdot\xi_m^2\cdot\frac{\partial\xi_m}{\partial\tau}\right)+$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}\beta(\lambda,t)\frac{1}{2\lambda}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^{n}\sigma_n(\tau,t)\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{\partial h_n(\xi)}{\partial\xi_m}\cdot\frac{s_1(\pi,\lambda,t,\tau)}{\xi_m-\lambda}\cdot\frac{\partial\xi_m}{\partial\tau}\right)\right\}d\lambda-$$

$$-\int_{-\infty}^{\infty}\beta(-\lambda,t)\frac{1}{2\lambda}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^{n}\sigma_n(\tau,t)\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{\partial h_n(\xi)}{\partial\xi_m}\cdot\frac{s_1(\pi,\lambda,t,\tau)}{\xi_m-\lambda}\cdot\frac{\partial\xi_m}{\partial\tau}\right)\right\}d\lambda. \qquad (20)$$

Пользуясь теоремой Миттаг-Лефлера выводим, что

$$s_2(\pi,\lambda,t,\tau)-c_1(\pi,\lambda,t,\tau)=2\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\sigma_n s_1(\pi,\lambda,t,\tau)h_n(\xi)}{\lambda-\xi_n}. \qquad (21)$$

В силу третьего равенства леммы 1 имеем

$$2\lambda(s_1(\pi,\lambda,t,\tau)+c_2(\pi,\lambda,t,\tau))=\frac{\partial}{\partial\tau}(s_2(\pi,\lambda,t,\tau)-c_1(\pi,\lambda,t,\tau)). \tag{22}$$

Из (21) и (22) получим

$$2\lambda(s_1(\pi,\lambda,t,\tau)+c_2(\pi,\lambda,t,\tau))=2\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^{n-1}\sigma_n\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{s_1(\pi,\lambda,t,\tau)h_n(\xi)}{\lambda-\xi_n}\right)=$$

$$=2\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^{n-1}\sigma_n\left\{h_n(\xi)\frac{\dot{s}_1(\pi,\lambda,t,\tau)}{\lambda-\xi_n}+\frac{s_1(\pi,\lambda,t,\tau)}{\lambda-\xi_n}\cdot\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{\partial h_n(\xi)}{\partial\xi_m}\frac{d\xi_m}{d\tau}+\right.$$

$$\left.+\frac{s_1(\pi,\lambda,t,\tau)h_n(\xi)}{(\lambda-\xi_n)^2}\frac{d\xi_n}{d\tau}\right\}. \tag{23}$$

Из формулы (12) находим, что

$$\dot{s}_1(\pi,\lambda,t,\tau)=\pi\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{d\xi_m(\tau)}{d\tau}\frac{1}{a_m}\prod_{k=-\infty,k\neq m}^{\infty}\frac{\xi_k(\tau)-\lambda}{a_k}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{s_1(\pi,\lambda,t,\tau)}{\xi_m(\tau)-\lambda}\frac{d\xi_m(\tau)}{d\tau}.$$

Подставляя это выражение в равенство (23) получим следующее тождество

$$\lambda(s_1(\pi,\lambda,t,\tau)+c_2(\pi,\lambda,t,\tau))=$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^{n-1}\sigma_n\frac{s_1(\pi,\lambda,t,\tau)}{\lambda-\xi_n}\left\{\sum_{m=-\infty,m\neq n}^{\infty}\left(\frac{h_n(\xi)}{\xi_m-\lambda}+\frac{\partial h_n(\xi)}{\partial\xi_m}\right)\frac{d\xi_m}{d\tau}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{h_n(\xi)}{\xi_n-\lambda}+\frac{\partial h_n(\xi)}{\partial\xi_n}\right)\frac{d\xi_n}{d\tau}-\frac{h_n(\xi)}{\xi_n-\lambda}\frac{d\xi_n}{d\tau}\right\}.$$

Так как при $m\neq n$ имеем $h_n(\xi)=(\xi_n-\xi_m)\frac{\partial h_n(\xi)}{\partial\xi_m}$, отсюда выводим, что

$$\lambda(s_1(\pi,\lambda,t,\tau)+c_2(\pi,\lambda,t,\tau))=$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^{n}\sigma_n s_1(\pi,\lambda,t,\tau)\left\{\sum_{m=-\infty,m\neq n}^{\infty}\frac{1}{\xi_m-\lambda}\frac{\partial h_n(\xi)}{\partial\xi_m}\frac{d\xi_m}{d\tau}+\frac{1}{\xi_n-\lambda}\frac{\partial h_n(\xi)}{\partial\xi_n}\frac{d\xi_n}{d\tau}\right\}=$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^{n}\sigma_n s_1(\pi,\lambda,t,\tau)\left\{\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\xi_m-\lambda}\frac{\partial h_n(\xi)}{\partial\xi_m}\frac{d\xi_m}{d\tau}\right\}.$$

Значит,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^{n}\sigma_n s_1(\pi,\lambda,t,\tau)\left\{\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\xi_m-\lambda}\frac{\partial h_n(\xi)}{\partial\xi_m}\frac{d\xi_m}{d\tau}\right\}=\lambda(s_1(\pi,\lambda,t,\tau)+c_2(\pi,\lambda,t,\tau)). \tag{24}$$

Подставляя это выражение в равенство (20), сделав замену переменных $\lambda\mapsto-\lambda$ в последнем интеграле, учитывая $s_1(\pi,-\lambda,t,\tau)=-s_1(\pi,\lambda,t,\tau)$ и $c_2(\pi,-\lambda,t,\tau)=-c_2(\pi,\lambda,t,\tau)$ имеем

$$q_t-2q^2q_\tau-2q_\tau^2=4\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^{n-1}\sigma_n(\tau,t)\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{\partial h_n(\xi)}{\partial\xi_m}\cdot\xi_m^2\cdot\frac{\partial\xi_m}{\partial\tau}\right)+$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}\beta(\lambda,t)(s_1(\pi,\lambda,t,\tau)+c_2(\pi,\lambda,t,\tau))d\lambda. \tag{25}$$

Теперь дифференцируем по τ формулу следов (13):

$$2qq_\tau+q_{\tau\tau}=-2\sum_{n=-\infty}^{\infty}\xi_n\frac{\partial\xi_n}{\partial\tau}.$$

Если подставить сюда выражение (15), то это равенство примет вид

$$2qq_\tau+q_{\tau\tau}=-4\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^{n-1}\sigma_n(\tau,t)\cdot\xi_n^2h_n(\xi).$$

Дифференцируя ещё раз по τ это тождество, имеем

$$2q_\tau^2+2qq_{\tau\tau}+q_{\tau\tau\tau}=$$
$$=-4\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{4\xi_n^2h_n^2(\xi)+(-1)^{n-1}\sigma_n(\tau,t)\cdot\xi_n^2\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{\partial h_n(\xi)}{\partial\xi_m}\cdot\frac{\partial\xi_m}{\partial\tau}\right)\right\}. \tag{26}$$

Сложив равенства (25) и (26) находим, что

$$q_t-2q^2q_\tau+2qq_{\tau\tau}+q_{\tau\tau\tau}=$$
$$=4\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{-4\xi_n^2h_n^2(\xi)+(-1)^{n-1}\sigma_n(\tau,t)\left(\sum_{m=-\infty,\,m\neq n}^{\infty}\frac{\partial h_n(\xi)}{\partial\xi_m}\cdot(\xi_m^2-\xi_n^2)\cdot\frac{\partial\xi_m}{\partial\tau}\right)\right\}+$$
$$+\int_{-\infty}^{\infty}\beta(\lambda,t)(s_1(\pi,\lambda,t,\tau)+c_2(\pi,\lambda,t,\tau))d\lambda. \tag{27}$$

Подставляя выражение $\frac{\partial h_n(\xi)}{\partial\xi_m}=\frac{h_n(\xi)}{\xi_n-\xi_m}$, $(m\neq n)$ в равенство (27) выводим, что

$$q_t-2q^2q_\tau+2qq_{\tau\tau}+q_{\tau\tau\tau}=$$
$$=-4\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{4\xi_n^2h_n^2(\xi)+(-1)^{n-1}\sigma_n(\tau,t)\left(\sum_{m=-\infty,m\neq n}^{\infty}h_n(\xi)\cdot(\xi_m+\xi_n)\cdot\frac{\partial\xi_m}{\partial\tau}\right)\right\}+$$
$$+\int_{-\infty}^{\infty}\beta(\lambda,t)(s_1(\pi,\lambda,t,\tau)+c_2(\pi,\lambda,t,\tau))d\lambda.$$

Перепишем последнее равенство в следующем виде

$$q_t-2q^2q_\tau+2qq_{\tau\tau}+q_{\tau\tau\tau}=$$
$$=-4\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{4\xi_n^2h_n^2(\xi)+(-1)^{n-1}\sigma_n(\tau,t)h_n(\xi)\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty}\xi_m\frac{\partial\xi_m}{\partial\tau}-\xi_n\frac{\partial\xi_n}{\partial\tau}+\xi_n\sum_{m=-\infty,m\neq n}^{\infty}\frac{\partial\xi_m}{\partial\tau}\right)+\right.$$
$$\left.+\int_{-\infty}^{\infty}\beta(\lambda,t)(s_1(\pi,\lambda,t,\tau)+c_2(\pi,\lambda,t,\tau))d\lambda\right\}. \tag{28}$$

Используя формулы следов (13) и (16) выводим тождества

$$-2\sum_{n=-\infty}^{\infty}\xi_n\frac{\partial\xi_n}{\partial\tau}=2qq_\tau+q_{\tau\tau}, \tag{29}$$

$$\sum_{m=-\infty, m\neq n}^{\infty} \frac{\partial \xi_m}{\partial \tau} = -\frac{\partial \xi_n}{\partial \tau}. \tag{30}$$

Если учитывать формулы (29) и (30), то равенство (28) примет вид

$$q_t - 2q^2 q_\tau + 2q q_{\tau\tau} + q_{\tau\tau\tau} =$$

$$= 2(2q q_\tau + q_{\tau\tau}) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n-1} \sigma_n(\tau, t) h_n(\xi) +$$

$$+8 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ -2\xi_n^2 h_n^2(\xi) + (-1)^{n-1} \sigma_n(\tau, t) h_n(\xi) \xi_n \cdot \frac{\partial \xi_n}{\partial \tau} \right\} +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \beta(\lambda, t)(s_1(\pi, \lambda, t, \tau) + c_2(\pi, \lambda, t, \tau)) d\lambda.$$

Подставляя сюда выражения (14) и (15) находим, что

$$q_t - 2q^2 q_\tau + 2q q_{\tau\tau} + q_{\tau\tau\tau} = 2q(2q q_\tau + q_{\tau\tau}) +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \beta(\lambda, t)(s_1(\pi, \lambda, t, \tau) + c_2(\pi, \lambda, t, \tau)) d\lambda.$$

Значит, выполняется тождество

$$q_t = 6q^2 q_\tau - q_{\tau\tau\tau} + \int_{-\infty}^{\infty} \beta(\lambda, t)(s_1(\pi, \lambda, t, \tau) + c_2(\pi, \lambda, t, \tau)) d\lambda.$$

Учитывая равенство (8), и обозначив τ через x получим (1).

Исследуем существование и единственность решения задачи Коши (9), (10) для системы Дубровина-Трубовица в случае, когда $q_0(x) \in C^6(R)$ и $\beta(\lambda, t)$ не зависит от t.

Рассмотрим систему Дубровина-Трубовица

$$\dot{\xi}_n(t) = 2(-1)^n \sigma_n(t) \sqrt{(\xi_n - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n)} \cdot g_n(\xi) \cdot f_n(\xi), n \in Z \tag{31}$$

с начальными условиями

$$\xi_n(t)|_{t=0} = \xi_n^0, \quad \sigma_n(t)|_{t=0} = \sigma_n^0, n \in Z. \tag{32}$$

Здесь

$$g_n(\xi) = -\xi_n \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\lambda_{2k-1}^2 + \lambda_{2k}^2 - 2\xi_k^2) - 4\xi_n^3 + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi_n \beta(\lambda) s_1(\pi, \lambda, t)}{\xi_n^2 - \lambda^2} d\lambda,$$

$$f_n(\xi) = \sqrt{\prod_{\substack{k=-\infty, \\ k\neq n}}^{\infty} \frac{(\lambda_{2k-1} - \xi_n)(\lambda_{2k} - \xi_n)}{(\xi_n - \xi_k)^2}}.$$

В целях дальнейшего упрощения системы уравнений Дубровина-Трубовица (31) сделаем замену переменных

$$\xi_n = \lambda_{2n-1} + (\lambda_{2n} - \lambda_{2n-1}) \sin^2 x_n(t), n \in Z. \tag{33}$$

Используя это, получим равенства

$$\dot{\xi}_n = (\lambda_{2n} - \lambda_{2n-1}) \sin 2x_n \cdot \dot{x}_n,$$

$$\sqrt{(\xi_n-\lambda_{2n-1})(\lambda_{2n}-\xi_n)}=\frac{1}{2}(\lambda_{2n}-\lambda_{2n-1})\left|\sin 2x_n\right|.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (31) получим равенство

$$\dot{x}_n=(-1)^n\sigma_n(t)sign\{\sin x_n\cos x_n\}\cdot g_n(\xi)\cdot f_n(\xi),n\in Z. \tag{34}$$

Знак $\sigma_n(t)=\pm 1$ меняется на противоположный при каждом столкновении точки $\xi_n(t)$ с границами своей лакуны при этом выражение $\sin x_n(t)\cos x_n(t)$ так же меняет знак на противоположный. Учитывая это и выбирая начальные условия в виде:

$$x_n(0)=x_n^0=\arcsin\sqrt{\frac{\xi_n^0-\lambda_{2n-1}}{\lambda_{2n}-\lambda_{2n-1}}},n\in Z, \tag{35}$$

получим равенство $\sigma_n(t)sign\{\sin x_n(t)\cos x_n(t)\}=\sigma_n(0)$. Поэтому уравнение (34) примет следующий вид:

$$\dot{x}_n=(-1)^n\sigma_n(0)\cdot g_n(\xi)\cdot f_n(\xi),n\in Z.$$

Если подставить в правую часть этой системы выражения (33), то замена переменных полностью выполняется:

$$\frac{dx_n}{dt}=H_n(...,x_{-1},x_0,x_1,...),\quad n\in Z, \tag{36}$$
$$H_n(x)=(-1)^n\sigma_n(0)\cdot g_n(\xi)\cdot f_n(\xi).$$

В этом случае, для изучения задачи Коши (36), (35) введем банахово пространство:

$$K=\left\{x=(...,x_{-1},x_0,x_1,...):\ \|x\|=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(|n|+1)^5}\ |x_n|<\infty\right\},$$

и обозначим $H=(...,\ H_{-1},\ H_0,\ H_1,...)$. Напишем систему уравнений Дубровина-Трубовица (36) в виде одного уравнения в банаховом пространстве K:

$$\frac{dx}{dt}=H(x). \tag{37}$$

Начальные условия можно переписать в виде

$$x(t)\left|_{t=0}\right.=x^0\ ,x^0\in\mathrm{K}. \tag{38}$$

Известно, что ([31], стр. 181) для того чтобы задача Коши $y'=F(y)$, $y(0)=y^0$ в банаховом пространстве K имела единственное решение достаточно выполнение условия Липшица для функции $F(y)$, т.е.

$$\|F(x)-F(y)\|\leqslant const\,\|x-y\|\,,\forall\,x,y\in K.$$

Поэтому докажем, что функция $H(x)$ удовлетворяет условию Липшица в банаховом пространстве K.

Из условия $q_0(x)\in C^6(R)$ следует, что $q_0^2(x)+q_0'(x)\in C^5(R)$, в силу следствия 1 теоремы 2 и асимптотики (см. [32], стр.75) собственных значений оператора Штурма-Лиувилля получим следующие асимптотики

$$\lambda_{2n-1}=n+\sum_{p=1}^{5}\frac{c_p}{n^p}+\frac{\varepsilon_n^-}{n^6},\lambda_{2n}=n+\sum_{p=1}^{5}\frac{c_p}{n^p}+\frac{\varepsilon_n^+}{n^6}, \tag{39}$$

где $c_p,\ p=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ постоянные числа и $\{\varepsilon_n^{\pm}\}\in l_2$. Отсюда, учитывая $\xi_n\in[\lambda_{2n-1},\ \lambda_{2n}]$, получим, что $\inf\limits_{k\neq n}|\xi_n-\xi_k|\geqslant a>0$.

Теперь, пользуясь этим неравенством, оценим функции $|f_n(\xi)|$ и $\left|\frac{\partial f_n(\xi)}{\partial\xi_m}\right|$.

Лемма 2. *Справедлива оценка*

$$C_1 \leqslant |f_n(\xi)| \leqslant C_2, n \in Z,$$

где $C_1 > 0$ *и* $C_2 > 0$ *не зависят от* n.

Доказательство. Рассмотрим следующую последовательность

$$f_n^2 = \prod_{\substack{k=-\infty \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{(\lambda_{2k-1}-\xi_n)(\lambda_{2k}-\xi_n)}{(\xi_k-\xi_n)^2} = \prod_{\substack{k=-\infty \\ k \neq n}}^{\infty} \left(1+\frac{\lambda_{2k-1}-\xi_k}{\xi_k-\xi_n}\right)\left(1+\frac{\lambda_{2k}-\xi_k}{\xi_k-\xi_n}\right)$$

и оценим её сверху:

$$\begin{aligned} f_n^2 = \prod_{\substack{k=-\infty \\ k \neq n}}^{\infty} \left|1+\frac{\lambda_{2k-1}-\xi_k}{\xi_k-\xi_n}\right|\left|1+\frac{\lambda_{2k}-\xi_k}{\xi_k-\xi_n}\right| \leqslant \\ \leqslant \prod_{\substack{k=-\infty \\ k \neq n}}^{\infty} \left(1+\left|\frac{\lambda_{2k-1}-\xi_k}{\xi_k-\xi_n}\right|\right)\left(1+\left|\frac{\lambda_{2k}-\xi_k}{\xi_k-\xi_n}\right|\right) \leqslant \\ \leqslant \prod_{\substack{k=-\infty \\ k \neq n}}^{\infty} \left(1+\frac{\lambda_{2k}-\lambda_{2k-1}}{a}\right)^2 \leqslant \prod_{k=-\infty}^{\infty} \left(1+\frac{\lambda_{2k}-\lambda_{2k-1}}{a}\right)^2 = C_2^2, \end{aligned} \tag{40}$$

где константа $C_2 > 0$ не зависит от n.

Теперь оценим $|f_n(\xi)|$ снизу. Для этого введём множество индексов

$$M = \left\{k \in Z: \ \frac{\lambda_{2k}-\lambda_{2k-1}}{a} \geqslant 1\right\}.$$

Это множество имеет конечное число элементов. Рассмотрим бесконечные произведения

$$A_n = \prod_{\substack{k=-\infty \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{\lambda_{2k-1}-\xi_n}{\xi_k-\xi_n} \quad \text{и} \quad B_n = \prod_{\substack{k=-\infty \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{\lambda_{2k}-\xi_n}{\xi_k-\xi_n}.$$

Ясно, что $f_n^2 = A_n \cdot B_n$. Перепишем A_n в следующем виде $A_n = A_{n,1} \cdot A_{n,2} \cdot A_{n,3}$. Здесь

$$A_{n,1} = \prod_{\substack{k=-\infty, k \neq n \\ k \notin M}}^{\infty} \frac{\lambda_{2k-1}-\xi_n}{\xi_k-\xi_n}, A_{n,2} = \prod_{\substack{k=-\infty, \\ k \in M}}^{n-1} \frac{\lambda_{2k-1}-\xi_n}{\xi_k-\xi_n}, A_{n,3} =$$

$$= \prod_{\substack{k=n+1, \\ k \in M}}^{\infty} \frac{\lambda_{2k-1}-\xi_n}{\xi_k-\xi_n}.$$

Если $k \neq n$ и $k \notin M$, то имеем

$$1-\left|\frac{\lambda_{2k-1}-\xi_k}{\xi_k-\xi_n}\right| \geqslant 1-\frac{\lambda_{2k}-\lambda_{2k-1}}{a}>0.$$

Отсюда

$$|A_{n,1}| = \prod_{\substack{k=-\infty, k\neq n \\ k\notin M}}^{\infty} \left|\frac{\lambda_{2k-1}-\xi_n}{\xi_k-\xi_n}\right| = \prod_{\substack{k=-\infty, k\neq n \\ k\notin M}}^{\infty} \left|1+\frac{\lambda_{2k-1}-\xi_k}{\xi_k-\xi_n}\right| \geqslant$$

$$\geqslant \prod_{\substack{k=-\infty, k\neq n \\ k\notin M}}^{\infty} \left(1-\left|\frac{\lambda_{2k-1}-\xi_k}{\xi_k-\xi_n}\right|\right) \geqslant$$

$$\geqslant \prod_{\substack{k=-\infty, k\neq n \\ k\notin M}}^{\infty} \left(1-\frac{\lambda_{2k}-\lambda_{2k-1}}{a}\right) > \prod_{\substack{k=-\infty, \\ k\notin M}}^{\infty} \left(1-\frac{\lambda_{2k}-\lambda_{2k-1}}{a}\right) = C_1'.$$

Если $k \leqslant n-1$ и $k \in M$, то

$$|A_{n,2}| = \prod_{\substack{k=-\infty, \\ k\in M}}^{n-1} \left|\frac{\lambda_{2k-1}-\xi_n}{\xi_k-\xi_n}\right| = \prod_{\substack{k=-\infty, \\ k\in M}}^{n-1} \frac{\xi_n-\lambda_{2k-1}}{\xi_n-\xi_k} =$$

$$= \prod_{\substack{k=-\infty, \\ k\in M}}^{n-1} \left(1+\frac{\xi_k-\lambda_{2k-1}}{\xi_n-\xi_k}\right) > 1.$$

Теперь рассмотрим случай $k \geqslant n+1$ и $k \in M$. Введём обозначение $\Delta = \max\limits_{k\in Z}(\lambda_{2k}-\lambda_{2k-1})$, и рассмотрим два случая.

1-случай. Пусть $k \geqslant n+1$, $k \in M$, $|\xi_k-\xi_n| \leqslant 2\Delta$. Тогда

$$\prod_{\substack{k=n+1, \\ k\in M*}}^{\infty} \left|\frac{\lambda_{2k-1}-\xi_n}{\xi_k-\xi_n}\right| > \prod_{\substack{k=n+1, \\ k\in M*}}^{\infty} \frac{\lambda_{2k-1}-\lambda'_{2k-1}}{2\Delta} \geqslant \prod_{\substack{k=-\infty, \\ k\in M}}^{\infty} \frac{\lambda_{2k-1}-\lambda'_{2k-1}}{2\Delta}.$$

Здесь $M^* = \{k \in M : |\xi_k-\xi_n| < 2\Delta\}$, число λ'_{2k-1} выбирается из условий

$$\max\{\lambda_{2k-2},\ \lambda_{2k-1}-2\Delta\} < \lambda'_{2k-1} < \lambda_{2k-1}.$$

2-случай. Пусть $k \geqslant n+1$, $k \in M$, $|\xi_k-\xi_n| > 2\Delta$. Тогда из-за того, что

$$\frac{\xi_k-\lambda_{2k-1}}{\xi_k-\xi_n} < \frac{\xi_k-\lambda_{2k-1}}{2\Delta} < \frac{\lambda_{2k}-\lambda_{2k-1}}{2\Delta} < \frac{1}{2},$$

$$-\frac{\xi_k-\lambda_{2k-1}}{\xi_k-\xi_n} > -\frac{1}{2}, 1-\frac{\xi_k-\lambda_{2k-1}}{\xi_k-\xi_n} > \frac{1}{2}, \frac{\lambda_{2k-1}-\xi_n}{\xi_k-\xi_n} > \frac{1}{2},$$

получим оценку

$$\prod_{\substack{k=n+1,\\ k\in M**}}^{\infty}\left|\frac{\lambda_{2k-1}-\xi_n}{\xi_k-\xi_n}\right| > \prod_{\substack{k=n+1,\\ k\in M**}}^{\infty}\frac{1}{2} > \prod_{\substack{k=-\infty,\\ k\in M}}^{\infty}\frac{1}{2},$$

где $M^{**}=\{k\in M:|\xi_k-\xi_n|>2\Delta\}$.

Значит,

$$|A_{n,3}| = \prod_{\substack{k=n+1,\\ k\in M}}^{\infty}\left|\frac{\lambda_{2k-1}-\xi_n}{\xi_k-\xi_n}\right| > \prod_{\substack{k=-\infty,\\ k\in M}}^{\infty}\frac{\lambda_{2k-1}-\lambda'_{2k-1}}{4\Delta} = C_1''.$$

Используя полученные неравенства, выводим оценку

$$|A_n| = |A_{n,1}|\cdot|A_{n,2}|\cdot|A_{n,3}| > C_1'C_1'' = C_{1,1}. \tag{41}$$

Аналогичным образом, выводится следующая оценка:

$$|B_n| > C_{1,2}. \tag{42}$$

Умножая оценки (41) и (42), извлекая квадратный корень, получим неравенство $C_1 \leqslant |f_n(\xi)|$. Здесь $C_1=\sqrt{C_{1,1}\cdot C_{1,2}}>0$. $\square$

Лемма 3. *Справедлива оценка*

$$\left|\frac{\partial f_n(\xi)}{\partial \xi_m}\right| \leqslant C_3, \tag{43}$$

где константа $C_3>0$ не зависит от n и от m.

Доказательство. Если $m\neq n$, то

$$\frac{\partial f_n}{\partial \xi_m} = \frac{f_n}{\xi_n-\xi_m}.$$

Отсюда, в случае $m\neq n$ получим оценку:

$$\left|\frac{\partial f_n(\xi)}{\partial \xi_m}\right| = \frac{|f_n(\xi)|}{|\xi_n-\xi_m|} \leqslant \frac{C_2}{a}. \tag{44}$$

Теперь оценим функцию $\left|\frac{\partial f_n(\xi)}{\partial \xi_n}\right|$. Используем равенство $f_n^2 = A_n\cdot B_n$, где

$$A_n = \prod_{\substack{k=-\infty\\ k\neq n}}^{\infty}\frac{\xi_n-\lambda_{2k-1}}{\xi_n-\xi_k} \quad \text{и} \quad B_n = \prod_{\substack{k=-\infty\\ k\neq n}}^{\infty}\frac{\xi_n-\lambda_{2k}}{\xi_n-\xi_k}.$$

Дифференцируя тождество

$$\ln A_n = \ln \prod_{\substack{k=-\infty\\ k\neq n}}^{\infty}\left(1+\frac{\xi_k-\lambda_{2k-1}}{\xi_n-\xi_k}\right) = \sum_{\substack{k=-\infty,\\ k\neq n}}^{\infty}\ln\left(1+\frac{\xi_k-\lambda_{2k-1}}{\xi_n-\xi_k}\right),$$

получим равенство

$$\frac{\partial A_n}{\partial \xi_n} = A_n \sum_{\substack{k=-\infty,\\ k\neq n}}^{\infty} \frac{\lambda_{2k-1}-\xi_k}{(\xi_n-\lambda_{2k-1})(\xi_n-\xi_k)}.$$

Из этого равенства, учитывая неравенство $|A_n| \leqslant C_2$, выводим оценку:

$$\left|\frac{\partial A_n}{\partial \xi_n}\right| \leqslant |A_n| \sum_{\substack{k=-\infty,\\ k\neq n}}^{\infty} \frac{|\lambda_{2k-1}-\xi_k|}{|\xi_n-\lambda_{2k-1}|\,|\xi_n-\xi_k|} \leqslant C_2 \sum_{\substack{k=-\infty,\\ k\neq n}}^{\infty} \frac{\lambda_{2k}-\lambda_{2k-1}}{a^2} \leqslant \tilde{C}_1.$$

Аналогичным образом, используя неравенство $|B_n| \leqslant C_2$, получим

$$\left|\frac{\partial B_n}{\partial \xi_n}\right| \leqslant \tilde{C}_1.$$

Из полученных неравенств следует оценка

$$\left|\frac{\partial f_n^2}{\partial \xi_n}\right| \leqslant \left|\frac{\partial A_n}{\partial \xi_n}\right| |B_n| + \left|\frac{\partial B_n}{\partial \xi_n}\right| |A_n| \leqslant \tilde{C}_2.$$

Отсюда получим

$$|f_n(\xi)| \left|\frac{\partial f_n(\xi)}{\partial \xi_n}\right| \leqslant \tilde{C}_3.$$

Используя оценку $C_1 \leqslant |f_n(\xi)|$ из леммы 2, выводим неравенства

$$C_1 \cdot \left|\frac{\partial f_n(\xi)}{\partial \xi_n}\right| \leqslant |f_n(\xi)| \left|\frac{\partial f_n(\xi)}{\partial \xi_n}\right| \leqslant \tilde{C}_3,$$

т.е.

$$\left|\frac{\partial f_n(\xi)}{\partial \xi_n}\right| \leqslant \frac{\tilde{C}_3}{C_1}. \tag{45}$$

Наконец, из оценок (44) и (45) выводим (43). □

Лемма 4. *Имеет место оценка*

$$|g_n(\xi)| \leqslant C_4 \, |n|^3 \,, \tag{46}$$

где константа $C_4 > 0$ не зависит от n.

Доказательство. Используя асимптотики (39) и условие $\xi_n \in [\lambda_{2n-1},\ \lambda_{2n}]$, $n \in Z$, нетрудно получить следующие оценки

$$\left|\sum_{k=-\infty}^{\infty} (\lambda_{2k-1}^2 + \lambda_{2k}^2 - 2\xi_k^2)\right| = \left|\sum_{k=-\infty}^{\infty} [(\lambda_{2k}^2 - \xi_k^2) - (\xi_k^2 - \lambda_{2k-1}^2)]\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=-\infty}^{\infty} [(\lambda_{2k}^2 - \xi_k^2) + (\xi_k^2 - \lambda_{2k-1}^2)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\lambda_{2k}-\lambda_{2k-1})(\lambda_{2k}+\lambda_{2k-1}) \sim \tag{47}$$

$$\sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2(\varepsilon_n^+ - \varepsilon_n^-)}{n^2} < \tilde{C}_3,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi_n \beta(\lambda) s_1(\pi, \lambda, t)}{\xi_n^2 - \lambda^2} d\lambda = O\left(\frac{1}{n}\right), \tag{48}$$

$$\xi_n = n + \frac{c_1}{n} + \frac{c_2}{n^2} + \frac{c_3}{n^3} + \frac{\gamma_n}{n^3}, \{\gamma_n\} \in l_2. \tag{49}$$

Отсюда выводим оценку (46). □

Лемма 5. *Имеет место оценка*

$$\left| \frac{\partial g_n(\xi)}{\partial \xi_m} \right| \leqslant C_5 \left| m \right| \left| n \right|, \tag{50}$$

где константа $C_5 > 0$ не зависит от n и от m.

Доказательство. Если $m \neq n$, то

$$\frac{\partial g_n(\xi)}{\partial \xi_m} = 4\xi_n \xi_m,$$

поэтому используя асимптотику (48), получим, что

$$\left| \frac{\partial g_n(\xi)}{\partial \xi_m} \right| \leqslant C_5' \left| m \right| \left| n \right|, \tag{51}$$

где константа $C_5' > 0$ не зависит от n и от m.

Теперь оценим функцию $\left| \frac{\partial g_n(\xi)}{\partial \xi_n} \right|$. Легко видеть, что

$$\frac{\partial g_n(\xi)}{\partial \xi_n} = -\sum_{k=-\infty}^{\infty} (\lambda_{2k-1}^2 + \lambda_{2k}^2 - 2\xi_k^2) - 8\xi_n^2 + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi_n^2 + \lambda^2}{(\xi_n^2 - \lambda^2)^2} \beta(\lambda) s_1(\pi, \lambda, t) d\lambda.$$

Используя асимптотику (49), имеем

$$\left| \frac{\partial g_n(\xi)}{\partial \xi_n} \right| \leqslant C_5'' \left| n \right|^2, \tag{52}$$

где константа $C_5'' > 0$ не зависит от n.

Из оценок (51) и (52) выводим (50). □

Используя доказанные выше леммы, оценим производную функции $F_n(\xi) = g_n(\xi) f_n(\xi)$:

$$\left| \frac{\partial F_n(\xi)}{\partial \xi_m} \right| \leqslant \left| \frac{\partial g_n(\xi)}{\partial \xi_m} f_n(\xi) + \frac{\partial f_n(\xi)}{\partial \xi_m} g_n(\xi) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \frac{\partial g_n(\xi)}{\partial \xi_m} \right| \left| f_n(\xi) \right| + \left| \frac{\partial f_n(\xi)}{\partial \xi_m} \right| \left| g_n(\xi) \right| \leqslant$$

$$\leqslant C_2 C_5 \left| m \right| \left| n \right| + C_3 C_4 \left| n \right|^3 \leqslant C_6 (\left| m \right| + 1) \left| n \right|^3,$$

где постоянная $C_6 > 0$ не зависит от n и m.

Лемма 6. *Вектор-функция $H(x)$ удовлетворяет условие Липшица в банаховым пространстве K, т.е. существует константа $L = const > 0$, такая, что для произвольных элементов $x, y \in K$ выполняется следующее неравенство*

$$\left\| H(x) - H(y) \right\| \leqslant L \left\| x - y \right\|.$$

Доказательство. Используя выражение $H_n(x) = (-1)^n \sigma_n(0) F_n(\xi)$, получим равенство $|H_n(x) - H_n(y)| = |F_n(\xi) - F_n(\eta)|$. Теперь применим теорему Лагранжа о конечном приращении к функции $\varphi(t) = F_n(\xi + t(\eta - \xi))$ на отрезке $t \in [0, 1]$. Тогда получим равенство $\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(t*)$, т.е.

$$F_n(\xi) - F_n(\eta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\partial F_n(\theta)}{\partial \xi_m} \cdot (\xi_m - \eta_m),$$

где $\theta = \xi + t * (\eta - \xi)$. Отсюда следует, что

$$|H_n(x) - H_n(y)| = |F_n(\xi) - F_n(\eta)| \leqslant \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial F_n(\theta)}{\partial \xi_m} \right| |\xi_m - \eta_m| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_6(|m|+1)\,|n|^3\,|\lambda_{2m} - \lambda_{2m-1}|\,\left|\sin^2 x_m - \sin^2 y_m\right| \leqslant$$

$$\leqslant C_6\,|n|^3 \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} (|m|+1)\,|\lambda_{2m} - \lambda_{2m-1}| \cdot |x_m - y_m| \leqslant$$

$$\leqslant C_6\,|n|^3 \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} (|m|+1) \cdot \frac{C_6'}{(|m|+1)^6}\,|x_m - y_m| =$$

$$= C_6 C'\,|n|^3 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(|m|+1)^5}\,|x_m - y_m| = C_7\,|n|^3\,\|x - y\|\,.$$

Здесь использованы асимптотики (39) и равенства

$$\xi_k = \lambda_{2k-1} + (\lambda_{2k} - \lambda_{2k-1}) \sin^2 x_k \quad \text{и} \quad \eta_k = \lambda_{2k-1} + (\lambda_{2k} - \lambda_{2k-1}) \sin^2 y_k.$$

Теперь оценим норму $\|H(x) - H(y)\|$:

$$\|H(x) - H(y)\| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(|n|+1)^5}\,|H_n(x) - H_n(y)| \leqslant \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(|n|+1)^5} C_7\,|n|^3\,\|x - y\| =$$

$$= \{C_7 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{|n|^3}{(|n|+1)^5}\}\,\|x - y\| = L\,\|x - y\|\,,$$

где $L = C_7 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{|n|^3}{(|n|+1)^5}$, т.е. условие Липшица выполняется.

Значит, решение задачи Коши (37)+(38), следовательно, и задачи Коши (31)+(32), для всех $t > 0$ существует и единственно. □

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Wadati M. The exact solution of the modified Korteweg-de Vries equation // J. Phys. Soc. Japan. 1972. V. 32, P. 1681.

2. Итс А. Р. Точное интегрирование в римановых - функциях нелинейного уравнения Шредингера и модифицированного уравнения Кортевега – де Фриза // Дисс. канд. физ.-мат. наук, Л.: ЛГУ. 1977.

3. Итс А. Р., Матвеев В. Б. Операторы Шредингера с конечнозонным спектром и N-солитонные решения уравнения Кортевега – де Фриза // Теорет. мат. физ.. 1975. Т. 23, № 1. С. 51–68.

4. Смирнов А. О. Эллиптические решения нелинейного уравнения Шредингера и модифицированного уравнения Кортевега – де Фриза // Мат. сб.. 1994. Т. 185, № 8. С. 103–114.

5. Mel'nikov V. K. Exact solutions of the Kortewed-de Vries equation with a self-consistent source // Phys. Lett. A. 1988. V. 128. P. 488–492.

6. Leon J., Latifi A. Solution of an initial-boundary value problem for coupled nonlinear waves // J.Phys. A: Math. Gen. - Bristol (UK). 1990. V. 23. P. 1385–1403.

7. Матёкубов М. М. Интегрирование уравнения типа Кортевега–де Фриза с нагруженным членом в классе периодических функций // Изв. ИМИ УдГУ. 2024. Т. 64. С. 60–69. https://doi.org/10.35634/2226-3594-2024-64-05

8. Khasanov M. M. Modified Korteweg-de Vries equation with a self-consistent source // AIP Conference Proceedings. 2023. Vol. 2781, Issue 1. P. 020009,1-020009,5. https://doi.org/10.1063/5.0145265.

9. Уразбоев Г. У., Балтаева И. И., Рахимов И. Д. Обобщённый метод (G'/G) - расширения для нагруженного уравнения Кортевега — де Фриза // Сиб. журн. индустр. матем.. 2021. Т. 24, №. 4. P. 139–147. https://doi.org/10.33048/SIBJIM.2021.24.410.

10. Baltaeva I. I., Rakhimov I. D., Khasanov M. M. Exact Traveling Wave Solutions of the Loaded Modified Korteweg-de Vries Equation // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2022. Т. 41. С. 85–95. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2022.41.85.

11. Urazboev G. U., Khasanov M. M., Rakhimov I. D. Generalized (G'/G) - Expansion Method and Its Applications to the Loaded Burgers Equation // Azerbaijan Journal of Mathematics. 2023. Vol. 13, No 2. P. 248–257. https://doi.org/10.59849/2218-6816.2023.2.248

12. Xasanov M. M., Ganjaev O. Y. A Generalized Direct Methods for the Loaded Nonlinear Degasperis-Procesi Equation // AIP Conference Proceedings, (International Scientific and Practical Conference on Actual Problems of Mathematical Modeling and Information Technology). 2024. Vol. 3147, Issue 1. P. 030006,1-020006,6. https://doi.org/10.1063/5.0210105.

13. Уразбоев Г. У., Балтаева И. И., Исмоилов О. Б. Интегрирование уравнения Кортевега – де Фриза отрицательного порядка методом обратной задачи рассеяния // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2023. Т. 33. Вып. 3. С. 523–533. https://doi.10.35634/vm230309

14. Уразбоев Г. У., Хасанов М. М. Интегрирование уравнения Кортевега – де Фриза отрицательного порядка с самосогласованным источником в классе периодических функций // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2022. Т. 32. Вып. 2. С. 228–239. https://doi.org/10.35634/vm220205

15. Уразбоев Г. У., Хасанов М. М., Балтаева И. И. Интегрирование уравнения Кортевега – де Фриза отрицательного порядка с источником специального вида // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2023. Т. 44. С. 31–43. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2023.44.31

16. Хасанов М. М., Рахимов И. Д. Интегрирование уравнения КдФ отрицательного порядка со свободным членом в классе периодических функций // Чебышевский сборник. 2023. Т. 24, вып. 2. С. 266–275. https://doi 10.22405/2226-8383-2023-24-2-266-275.

17. Уразбоев Г. У., Яхшимуратов А. Б., Хасанов М. М. Интегрирование модифицированного уравнения Кортевега – де Фриза отрицательного порядка в классе периодических функций // Теорет. и матем. физика. 2023. Т. 217, №. 2. С. 317–328. https://doi.org/10.4213/tmf10580

18. Уразбоев Г. У., Хасанов М. М., Исмоилов О. Б. Интегрирование модифицированного уравнения Кортевега–де Фриза отрицательного порядка с нагруженным членом в классе периодических функций // Дифференциальные уравнения. 2024. Т. 60, № 12. С. 1703–1712. https://doi.org/ 10.31857/S0374064124120094

19. Хасанов М. М., Рахимов И. Д., Азимов Д. Б. Интегрирование нагруженного нелинейного уравнения Шредингера отрицательного порядка в классе периодических функций // Вестник Иркутского государственного университета. Серия «Математика». 2024. Т. 50. С. 51–65. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.50.51

20. Уразбоев Г. У., Хасанов М. М., Исмоилов О. Б. Интегрирование модифицированного уравнения Кортевега–де Фриза отрицательного порядка с интегральным источником // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2024. Т. 63. С. 80–90. https://doi.org/10.35634/2226-3594-2024-63-06

21. Urazboev G. U., Xasanov M. M., Ganjaev O. Y. Integration of the loaded negative order Korteweg-de Vries equation in the class of periodic functions // International Journal of Applied Mathematics. 2024. Vol. 37. P. 37–46. doi: http://dx.doi.org/10.12732/ijam.v37i1.4

22. Urazboev G. U., Baltaeva I. I., Atanazarova Sh. E. Soliton Solutions of the Negative Order Modified Korteweg – de Vries Equation // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2024. Т. 47. С. 63– 77. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.47.63.

23. Urazboev G. U., Baltaeva I. I., Babadjanova A. K. Soliton solutions of the negative-order nonlinear Schrödinger equation // Theor Math Phys. 2024. Vol. 219. P. 761–769. https://doi.org/10.1134/S0040577924050052

24. Уразбоев Г. У., Балтаева И. И., Исмоилов О. Б. Теория рассеяния для нагруженного уравнения Кортевега – де Фриза отрицательного порядка // Чебышевский сборник. 2024. Vol. 25. PP. 169–180. https://doi.org/10.22405/2226-8383-2024-25-2-169-180.

25. Urazboev G. U., Khasanov M. M., Babadjanova A. K. Integration of the Negative Order Nonlinear Schrödinger Equation in the Class of Periodic Functions // Lobachevskii J Math. 2024. Vol. 45. P. 5305–5312. https://doi.org/10.1134/S1995080224606106.

26. Левитан Б. М., Саргсян И. С. Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака. М.: Наука, 1988.

27. Мисюра Т. В. Характеристика спектров периодической и антипериодической краевых задач, порождаемых операцией Дирака I. // Теория функций, функц. анализ и их прил. 1978. Т. 30. С. 90–101.

28. Хасанов А. Б., Ибрагимов А. М. Об обратной задаче для оператора Дирака с периодическим потенциалом // Узб. мат. журнал. 2001. Т. 3. С. 48–55.

29. Djakov P. B., Mityagin B. S. Instability zones of periodic 1-dimensional Schrödinger and Dirac operators // Russian Math. Surveys. 2006. Vol. 61(4). P. 663–766.

30. Currie S., Roth T., Watson B. Borg's periodicity theorems for first-order self-adjoint systems with complex potentials // Proceedings of the Edinburgh mathematical society. 2017. V. 60. P. 615–633.

31. Левитан Б. М. Обратные задачи Штурма - Лиувилля. - М.: Наука, 1984. 240 с.

32. Марченко В. А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. -Киев: Наукова думка, 1977. - 332 с.

REFERENCES

1. Wadati, M. 1972, "The exact solution of the modified Korteweg-de Vries equation", *J. Phys. Soc. Japan*, vol. 32, pp. 1681.

2. Its, A.R. 1977, "Exact integration in Riemannian functions of the nonlinear Schrődinger equation and the modified Korteweg-de Vries equation, *Diss. Cand. of Phys. and Mathematics, L.: LSU.* (in Russian).

3. Smirnov, A.O. 1994, "Elliptic solutions of the nonlinear Schrődinger equation and the modified Korteweg-de Vries equation", *Mat. sb.*, vol. 185, pp. 103–114. (in Russian)

4. Mel'nikov, V.K. 1988, "Exact solutions of the Kortewed-de Vries equation with a self-consistent source", *Phys. Lett. A*, vol. 128, pp. 488-492.

5. Leon, J. & Latifi, A. 1990, "Solution of an initial-boundary value problem for coupled nonlinear waves", *J.Phys. A: Math. Gen. - Bristol (UK)*, vol. 23. pp. 1385–1403.

6. Its, A.R. & Matveev, V.B. 1975, "Finite-gap Schrődinger operators and N-soliton solutions of the Korteweg-de Vries equation", *Teoret. mat. Phys.*, vol. 23, no. 1, pp. 51–68.

7. Matyoqubov, M.M. 2024, "Integration of the Korteweg–de Vries type equations with a loaded term in the class of periodic functions", *Izv. IMI UdGU*, vol. 64, pp. 60–69. https://doi.org/10.35634/2226-3594-2024-64-05

8. Khasanov, M.M. 2023, "Modified Korteweg-de Vries equation with a self-consistent source", *AIP Conference Proceedings*, vol. 2781, Issue 1, pp. 020009,1-020009,5. https://doi.org/10.1063/5.0145265.

9. Urazboev, G.U., Baltaeva, I.I. & Rakhimov, I.D. 2021, "A generalized (G'/G) - expansion method for the loaded Korteweg—de Vries equation", *Sib. Zh. Ind. Mat.*, vol. 24:4, pp. 139–147, https://doi.org/10.33048/SIBJIM.2021.24.410.

10. Baltaeva, I.I., Rakhimov, I.D. & Khasanov, M.M. 2022, "Exact Traveling Wave Solutions of the Loaded Modified Korteweg-de Vries Equation", *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, vol. 41, pp. 85–95. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2022.41.85.

11. Urazboev,G.U., Khasanov, M.M. & Rakhimov, I.D. 2023, "Generalized (G'/G) - Expansion Method and Its Applications to the Loaded Burgers Equation", *Azerbaijan Journal of Mathematics*, vol. 13, No 2, pp. 248–257. https://doi.org/10.59849/2218-6816.2023.2.248

12. Xasanov, M.M. & Ganjaev, O.Y. 2024, "A Generalized Direct Methods for the Loaded Nonlinear Degasperis-Procesi Equation", *AIP Conference Proceedings, (International Scientific and Practical Conference on Actual Problems of Mathematical Modeling and Information Technology*, vol. 3147, Issue 1, pp. 030006,1-020006, 6. https://doi.org/10.1063/5.0210105.

13. Urazboev, G.U., Baltaeva, I.I. & Ismoilov, O.B. 2023, "Integration of the negative order Korteweg–de Vries equation by the inverse scattering method", *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, vol. 33:3, pp. 523–533. https://doi. 10.35634/vm230309

14. Urazboev, G.U. & Hasanov, M.M. 2022, "Integration of the negative order Korteweg-de Vries equation with a self-consistent source in the class of periodic functions", *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, vol. 32:2, pp. 228–239. https://doi.org/10.35634/vm220205

15. Urazboev, G.U., Khasanov, M.M. & Baltaeva, I.I. 2023, "Integration of the Negative Order Korteweg-de Vries Equation with a Special Source", *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, vol. 44, pp. 31–43. (in Russian). https://doi.org/10.26516/1997-7670.2023.44.31

16. Khasanov, M.M. & Rakhimov, I.D. 2023, "Integration of the KdV equation of negative order with a free term in the class of periodic functions", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, pp. 266–275. https://doi 10.22405/2226-8383-2023-24-2-266-275.

17. Urazboev, G.U., Yakhshimuratov, A.B. & Khasanov, M.M. 2023, "Integration of negative-order modified Korteweg–de Vries equation in a class of periodic functions", *Theoret. and Math. Phys.*, vol. 217:2, pp. 317–328. https://doi.org/10.4213/tmf10580

18. Urazboev, G.U., Khasanov, M.M. & Ismoilov, O.B. 2024, "Integration of the negative order modified Korteweg–de Vries equation with a loaded term in the class of periodic functions", *Differencial'nye uravneniya*, vol. 60, pp. 1703–1712. doi:10.1134/S1234567823601468

19. Khasanov, M.M., Rakhimov, I.D. & Azimov, D.B. 2024, "IIntegration of the Loaded Negative Order Nonlinear Schrodinger Equation in the Class of Periodic Functions", *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, vol. 50, pp. 51–65. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.50.51

20. Urazboev, G.U., Khasanov, M.M. & Ismoilov, O.B. 2024, "Integration of negative-order modified Korteweg–de Vries equation with an integral source", *Izv. IMI UdGU*, vol. 63, pp. 80–90. https://doi.org/10.35634/2226-3594-2024-63-06

21. Urazboev, G.U., Xasanov, M.M. & Ganjaev, O.Y. 2024, "Integration of the loaded negative order Korteweg-de Vries equation in the class of periodic functions", *International Journal of Applied Mathematics*, vol. 37, no. 1, pp. 37–46. doi: http://dx.doi.org/10.12732/ijam.v37i1.4

22. Urazboev, G.U., Baltaeva, I.I. & Atanazarova, Sh.E. 2024, "Soliton Solutions of the Negative Order Modified Korteweg – de Vries Equation",*The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, vol. 47, pp. 63–77. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.47.63.

23. Urazboev, G.U., Baltaeva, I.I. & Babadjanova, A.K. 2024, "Soliton solutions of the negative-order nonlinear Schrödinger equation", *Theor. Math. Phys.*, vol. 219, pp. 761–769. https://doi.org/10.1134/S0040577924050052

24. Urazboev, G.U., Baltaeva, I.I. & Ismoilov, O.B. 2024, "Scattering theory for the loaded negative order Korteweg–de Vries equation", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25:2, pp. 169–180. https://doi.org/10.22405/2226-8383-2024-25-2-169-180.

25. Urazboev, G.U., Khasanov, M.M. & Babadjanova, A.K. 2024, "Integration of the Negative Order Nonlinear Schrödinger Equation in the Class of Periodic Functions", *Lobachevskii J Math*, vol. 45, pp. 5305–5312. https://doi.org/10.1134/S1995080224606106.

26. Levitan, B.M. & Sargsyan, I.S. 1988, “Sturm-Liouville and Dirac operators“, *M.: Nauka.* (in Russian)

27. Misjura, T.V. 1978, “Theory of Functions, Functional Analysis and Their Applications (V. A. Marchenko, ed.)”, *Publishing House of Kharkiv State University named after A. M. Gorky, Kharkiv*, pp. 90–101.

28. Khasanov, A.B. & Ibragimov, A.M. 2001, “On the inverse problem for the Dirac operator with periodic potential”, *Uzbek Mat. J.*, pp. 48–55. (in Russian)

29. Djakov, P.B. & Mityagin, B.S. 2006, “Instability zones of periodic 1-dimensional Schrödinger and Dirac operators”, *Russian Math. Surveys*, vol. 61:4, pp. 663–766.

30. Currie, S., Roth, T. & Watson, B. 2017, “Borg’s periodicity theorems for first-order self-adjoint systems with complex potentials”, *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, vol. 60, pp. 615–633.

31. Levitan, B.M. 1984. “Inverse Sturm-Liouville problems”, *M.: Nauka*, p. 240 (in Russian)

32. Marchenko, V.A. 1977, “Sturm-Liouville operators and their applications”, *Kiev: Naukova Dumka*, p. 332. (in Russian)

Получено: 24.07.2025
Принято в печать: 12.02.2026

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 27. Выпуск 1.

УДК: 517 DOI: 10.22405/2226-8383-2026-27-1-134-138

Некоторые независимые результаты в идеальных пространствах Ротбергера

П. Бал

Прасенджит Бал — доктор математики, Институт дипломированных финансовых аналитиков Индийского университета Трипура (г. Камалгхат, Индия).
e-mail: balprasenjit177@gmail.com

Аннотация

В этой статье мы покажем, что в обычном p-пространстве для каждой пары непересекающихся идеального множества Ротбергера и замкнутого множества существует пара непересекающихся открытых множеств, таких, что одно содержит замкнутое множество, а дополнение другого по отношению к идеальному множеству Ротбергера находится в соответствующем подидеале. Более того, мы демонстрируем, как семейства замкнутых множеств могут быть использованы для описания идеальных пространств Ротбергера.

Ключевые слова: идеал по модулю Ротбергера, свойство конечного пересечения, p-пространство.

Библиография: 12 названий.

Для цитирования:
Бал П. Некоторые независимые результаты в идеальных пространствах Ротбергера // Чебышевский сборник, 2026, т. 27, вып. 1, с. 134–138.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 27. No. 1.

UDC: 517 DOI: 10.22405/2226-8383-2026-27-1-134-138

Some independent results on Ideal-Rothberger spaces

P. Bal

Prasenjit Bal — Ph.D. in Mathematics, The Institute of Chartered Financial Analysts of India University Tripura (Kamalghat, India).
e-mail: balprasenjit177@gmail.com

Abstract

In this article we show that in a regular p-space, for every pair of disjoint ideal Rothberger set and closed set there is a pair of disjoint open sets such that one contains the closed set and other one's complement with respect to the ideal rothberger set is in the corresponding sub ideal. Moreover, we demonstrate how families of closed sets can be used to describe the ideal Rothberger spaces.

Keywords: Rothberger modulo an Ideal, Finite intersection property, p-space.

Bibliography: 12 titles.

For citation:
Bal, P. 2026, "Some independent results on Ideal-Rothberger spaces" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 27, no. 1, pp. 134–138.

1. Introduction

An Ideal Rothberger Space is a concept within the realm of topology, representing a specialized class of topological spaces with distinctive covering properties. In topology, the study of sequential covering plays a crucial role in understanding the structure and behavior of topological spaces. Some covering properties of recent interest can be found in [2, 3, 4, 5, 6]. Ideal Rothberger Spaces offer a nuanced perspective on sequential covering through the integration of ideals where an ideal is a collocation of subsets of a space which is closed under union and taking subsets. This means that if a set A belongs to an ideal I, then any superset or union of sets in I also belongs to I.

Although Güldürdek [10] first proposed the ideal Rothberger space in 2018, Bhardwaj [7] and Güldürdek [11] have thoroughly investigated its unique features. In a topological space, every pair of compact subset and closed subset can be strongly separated by open sets. In this paper, we investigate whether analogous separation of ideal Rothberger subset and closed set is possible or not. More over a compact space is characterized by means of family of closed sets using finite intersection properties. Similarly for Lindelöf space we have countable intersection property, for Star-compact space we have modified non-finite intersection property [1], for Star-Lindelöf space we have modified non-countable intersection property [1]. Neither Bhardwaj [7] nor Güldürdek [11] has emphasized the use of a family of closed sets to depict the ideal Rothberger space. So we introduce a sequential version of finite intersection property to represent ideal Rothberger space by means of family of closed sets.

2. Preliminaries

In this work, we refer to a topological space X equipped with the topology τ as simply 'a space'. Unless explicitly stated otherwise, separation axioms are not included. Our use of standard concepts, symbols, and nomenclature follows [8]. In this section, we state several fundamental concepts to aid the readers' understanding and convenience.

In a space X, a subset $\mathcal{U} \subset \tau$ is called an open cover of X if $\bigcup \mathcal{U} = X$. If every open cover of a space has a finite sub cover then the space is called a compact space. A topological space is called a regular space in which for every $a \in X$ and closed set B such that $a \notin B$ there exists $U, V \in \tau$ such that $x \in U$, $B \subseteq V$ and $U \cap V = \emptyset$. A p-space is a topological space in which countable intersection of open set is also open [9].

Теорема 1. *[8] If A is a compact subset and B is closed in a regular space X such that $A \cap B = \emptyset$, then A and B are strongly separated.*

Definition 1. *[10] An ideal I in a topological space (X, τ) is a non empty family of subsets of X which satisfies the following properties :*
(i) $X \notin I$,
(ii) $A, B \in I \Rightarrow A \cup B \in I$,
(iii) $A \in I$ and $B \subseteq A \Rightarrow B \in I$.

Proposition 1. *[12] If I is an ideal of subsets of X and $Y \subseteq X$, then $I_Y = \{Y \cap I_1 : I_1 \in I\}$ is an ideal of subsets of Y.*

We call I_Y a sub-ideal of X with respect to Y

Definition 2. *[10] A subset A of an ideal space (X, τ, I) is said to be Rothberger modulo I or I-Rothberger subset, if for every sequence of τ-open covers $\{\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N}\}$ of A there exists a sequence of open sets $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ such that $U_n \in \mathcal{U}_n$ for each $n \in \mathbb{N}$ and $A \setminus \bigcup_{i=1}^{k} U_{\alpha_i} \in I_A$. If X itself is a I-Rothberger subset, then (X, τ, I) is called an I-Rothberger space.*

Definition 3. *[8] A family $\mathcal{F} = \{F_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ (where Λ is an index set) is said to have the finite intersection property if for every finite subset $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n\}$ of Λ, $\bigcap_{i=1}^{n} F_{\alpha_i} \neq \emptyset$.*

Proposition 2. *[8] A topological space is a compact space if and only if every family of closed sets having finite intersection property have non empty intersection.*

Two general question raises that whether a I-Rothberger subset and and a closed subset in a regular space can be strongly separated, can I-Rothberger space be represented by families of closed sets. We will investigate for the answer of these questions in the next section.

3. Main Results

Теорема 2. *In a regular p-space X, for every pair A, B of disjoint subsets of X where A is an ideal Rothberger subset and B is a closed subset of X, there exists open sets U and V such that $A \setminus U \in I_A$, $B \subseteq V$ and $U \cap V = \emptyset$.*

Доказательство. Let (X, τ) be a regular p-space. Suppose, A is an ideal Rothberger subset and B is a closed subset of X such that $A \cap B = \emptyset$. Since X is a regular space, for every $a \in A$, we can find open sets G_a and H_a such that $a \in G_a$ and $B \subseteq H_a$ where $G_a \cap H_a \neq \emptyset$. Thus $\mathcal{G} = \{G_a : a \in A\}$ is an open cover for A by the elements of τ.

If we take $\mathcal{G}_n = \mathcal{G}$ for each $n \in \mathbb{N}$, than $\{\mathcal{G}_n : n \in \mathbb{N}\}$ is a sequence of open covers for A. But A is an ideal Rothberger subset of X. So, there exists a sequence $\{G_n : n \in \mathbb{N}\}$ where $G_n \in \mathcal{G}_n = \mathcal{G}$ for each $n \in \mathbb{N}$ and $A \setminus (\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n) \in I_A$.

Now, $G_n = G_a \in \tau$ for some $a \in A$ and for all $n \in \mathbb{N}$. And for each $n \in \mathbb{N}$, there exists a H_a such that $B \subseteq H_a \in \tau$ and $G_a \cap H_a = \emptyset$. Let $H_n = H_a$ for that specific a and specific $n \in \mathbb{N}$. Thus $G_n \cap H_n = \emptyset$ for each $n \in N$. Suppose $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ and $V = \bigcap_{n=1}^{\infty} H_n$. Obviously, $U \in \tau$ and since X is a p-space, $V \in \tau$. Here, $A \setminus U \in I_A$, $B \subset V$ and $U \cap V = \emptyset$. $\square$

Следствие 1. *In a Hausdörff p-space X, for every ideal Rothberger subset A and $b \in X$such that $b \notin A$, there exists open sets U and V such that $A \setminus U \in I_A$, $b \in V$ and $U \cap V = \emptyset$.*

Доказательство. In a Hausdörff space, every single ton set is a closed set. So the corollary follows directly from Theorem 2. $\square$

Definition 4. **Sequential Singletonic Intersection Module Ideal Property (SSI^{I}P):** *In an ideal space (X, τ, I), a sequence $\{\mathcal{F}_n : n \in \mathbb{N}\}$ of families of subsets is said to have SSI^I property if for every sequence $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ such that $F_n \in \mathcal{F}_n$ for all $n \in \mathbb{N}$ we get $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \notin I$.*

Теорема 3. *Following statements are equivalent :*

(1) X is an ideal Rothberger space.

(2) For every sequence $\{\mathcal{F}_n : n \in \mathbb{N}\}$ of families of closed sets having SSI^I property, there exists a $n_0 \in \mathbb{N}$ such that $\cap \mathcal{F}_{n_0} \neq \emptyset$.

Доказательство.
(1) $\Rightarrow$ (2)
Let (X, τ, I) be an ideal Rothberger space and $\{\mathcal{F}_n : n \in \mathbb{N}\}$ be a sequence of families of closed sets having SSI^I property. We also assume that $\cap \mathcal{F}_n = \emptyset$ for all $n \in \mathbb{N}$.

Therefore, $X \setminus (\cap \mathcal{F}_n) = X$ for all $n \in \mathbb{N}$.
$\Longrightarrow$ $\cup\{X \setminus F : F \in \mathcal{F}_n\} = X$ for all $n \in \mathbb{N}$.
$\Longrightarrow$ $\mathcal{U}_n = \{U = X \setminus F : F \in \mathcal{F}_n\}$ is an open cover of X for all $n \in \mathbb{N}$.
$\Longrightarrow$ $\{\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N}\}$ is a sequence of open covers of X. But X is an ideal Rothberger space. So there exists a sequence $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ such that $U_n \in \mathcal{U}_n$ for all $n \in \mathbb{N}$ and $X \setminus (\cup_{n \in \mathbb{N}} U_n) \in I$.

But $U_n = X \setminus F_n$ where $F_n \in \mathcal{F}_n$ for all $n \in \mathbb{N}$. Thus $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ is a sequence such that $F_n \in \mathcal{F}_n$ for all $n \in \mathbb{N}$ and $\cap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \cap_{n\in\mathbb{N}}(X \setminus U_n) = X \setminus (\cup_{n\in\mathbb{N}} U_n) \in I$, which contradicts the fact that $\{\mathcal{F}_n : n \in \mathbb{N}\}$ have the SSI^I property. So $\cap\mathcal{F}_n$ can not be $\emptyset$ for all $n \in \mathbb{N}$. i.e. there exists atleast one $n_0 \in \mathbb{N}$ such that $\cap\mathcal{F}_{n_0} \neq \emptyset$.

(2) $\Rightarrow$ (1)
Let condition (2) holds and $\{\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N}\}$ be a sequence of open covers of the space X. We take $\mathcal{F}_n = \{F = X \setminus U : U \in \mathcal{U}_n\}$ for all $n \in \mathbb{N}$. So $\{\mathcal{F}_n : n \in \mathbb{N}\}$ is a sequence of families of closed sets such that $\cap\mathcal{F}_n = \emptyset$ for all $n \in \mathbb{N}$.
By contra positivity of (2), the sequence $\{\mathcal{F}_n : n \in \mathbb{N}\}$ must not have SSI^I property. i.e. there exists a sequence $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ where $F_n \in \mathcal{F}_n$ for all $n \in \mathbb{N}$, $\cap_{n\in\mathbb{N}} F_n \in I$. But $F_n = X \setminus U_n$ where $U_n \in \mathcal{U}_n$ and for all $n \in \mathbb{N}$.
So, $\cap_{n\in\mathbb{N}} F_n \in I \implies \cap_{n\in\mathbb{N}}(X \setminus U_n) \in I$.
$\implies X \setminus (\cup_{n\in\mathbb{N}} U_n) \in I$.
Hence X is an ideal Rothberger space. □

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bal P. A Countable intersection like characterization of Star-Lindelöf spaces // Researches in Mathematics. — 2023. — Vol. 31, No. 2. — P. 3–7.

2. Bal P., Bhowmik S. On R-Star-Lindelöf Spaces // Palestine Journal of Mathematics. — 2017. — Vol. 6, No. 2. — P. 480–186.

3. Bal P., Bhowmik S., Gauld D. On Selectively Star-Lindelöf Properties // Journal of the Indian Mathematical Society. — 2018. — Vol. 85, No. 3–4. — P. 291–304.

4. Bal P., Kočinac L. D. R. On Selectively Star-ccc Spaces // Topology and its Applications. — 2020. — Vol. 281. — Art. 107181.

5. Bal P., De R. On strongly star semi-compactness of topological spaces // Khayyam Journal of Mathematics. — 2023. — Vol. 9, No. 1. — P. 54–60.

6. Bal P. On the class of I-γ-open cover and I-St-γ-open cover // Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics. — 2023. — Vol. 52, No. 3. — P. 630–639.

7. Bhardwaj M. Addendum to "Ideal Rothberger spaces"// Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics. — 2018. — Vol. 47, No. 1. — P. 69–75.

8. Engelking R. General topology. — Revised and complete ed. — Berlin: Heldermann, 1989. — 529 p. — (Sigma Series in Pure Mathematics).

9. Gillman L., Henriksen M. Concerning rings of continuous functions // Transactions of the American Mathematical Society. — 1954. — Vol. 77. — P. 340–362.

10. Güldürdek A. Ideal Rothberger spaces // Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics. — 2018. — Vol. 47, No. 1. — P. 69–75.

11. Güldürdek A. More on Ideal Rothberger spaces // European Journal of Pure and Applied Mathematics. — 2023. — Vol. 16, No. 1. — P. 1–4.

12. Newcomb R. L. Topologies which are compact modulo an ideal: Ph.D. Thesis. — Santa Barbara: University of California, 1967. — 120 p.

REFERENCES

1. Bal, P. 2023, “A countable intersection like characterization of star-Lindelöf spaces”, *Researches in Mathematics*, vol. 31, no. 2, pp. 3–7.

2. Bal, P. & Bhowmik, S. 2017, “On R-star-Lindelöf spaces”, *Palestine Journal of Mathematics*, vol. 6, no. 2, pp. 480–486.

3. Bal, P., Bhowmik, S. & Gauld, D. 2018, “On selectively star-Lindelöf properties”, *Journal of the Indian Mathematical Society*, vol. 85, no. 3-4, pp. 291–304.

4. Bal, P. & Kočinac, L.D.R. 2020, “On selectively star-ccc spaces”, *Topology and its Applications*, vol. 281, art. id. 107181, doi: 10.1016/j.topol.2020.107181.

5. Bal, P. & De, R. 2023, “On strongly star semi-compactness of topological spaces”, *Khayyam Journal of Mathematics*, vol. 9, no. 1, pp. 54–60.

6. Bal, P. 2023, “On the class of I-γ-open cover and I-St-γ-open cover”, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, vol. 52, no. 3, pp. 630–639.

7. Bhardwaj, M. 2018, “Addendum to ’Ideal Rothberger spaces”’, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, vol. 47, no. 1, pp. 69–75.

8. Engelking, R. 1989, *General topology*, Sigma Series in Pure Mathematics, Revised and complete edn, Heldermann Verlag, Berlin.

9. Gillman, L. & Henriksen, M. 1954, “Concerning rings of continuous functions”, *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 77, no. 2, pp. 340–362.

10. Güldürdek, A. 2018, “Ideal Rothberger spaces”, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, vol. 47, no. 1, pp. 69–75.

11. Güldürdek, A. 2023, “More on ideal Rothberger spaces”, *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, vol. 16, no. 1, pp. 1–4.

12. Newcomb, R.L. 1967, “Topologies which are compact modulo an ideal”, PhD thesis, University of California at Santa Barbara.

Получено: 15.08.2025
Принято в печать: 12.02.2026

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 27. Выпуск 1.

УДК: 512.558 DOI: 10.22405/2226-8383-2026-27-1-139-147

Ретрактные решетки[1]

Е. М. Вечтомов, А. А. Петров

Вечтомов Евгений Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, Вятский государственный университет (г. Киров).
e-mail: vecht@mail.ru
Петров Андрей Александрович — кандидат физико-математических наук, Вятский государственный университет (г. Киров).
e-mail: andreipetrow@mail.ru

Аннотация

Изучаются ретрактные и слабо ретрактные решетки — решетки, все конгруэнции на которых порождаются ретракциями или слабыми ретракциями соответственно. Ретракцией (слабой ретракцией) решетки называется любой ее идемпотентный решеточный (полурешеточный) эндоморфизм.

Получены структурные свойства ретрактных и слабо ретрактных решеток (параграф 2).

Доказано, что класс всех ретрактных решеток замкнут относительно гомоморфных образов (теорема 1), конечных прямых произведений (теорема 2), прямых сумм (теорема 4) и перехода к двойственным решеткам (замечание 13), но не замкнут относительно взятия подрешеток (предложение 1) и ординальных сумм (пример 12). Пример 11 показывает, что конечные произведения цепей суть ретрактные решетки. А более широкий класс слабо ретрактных решеток замкнут относительно гомоморфных образов, конечных прямых произведений, прямых сумм и ординальных сумм (теорема 3).

В параграфе 3 рассмотрены предварительные результаты о ретракциях прямого произведения m-элементной и n-элементной цепей (предложение 2, примеры 13 и 14). Поставлена проблема нахождения числа ретракций такого произведения.

Параграф 4 содержит формулировки результатов первого автора о строении ретрактных полурешеток, дополняющих полученные утверждения о ретрактных и слабо ретрактных решетках.

Сделаны поясняющие замечания.

Ключевые слова: решетка, ретракция, ретрактная решетка, слабо ретрактная решетка.

Библиография: 6 названий.

Для цитирования:

Вечтомов Е. М., Петров А. А. Ретрактные решетки // Чебышевский сборник, 2026, т. 27, вып. 1, с. 139–147.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 24-21-00117).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 27. No. 1.

UDC: 512.558 DOI: 10.22405/2226-8383-2026-27-1-139-147

Retract lattices

E. M. Vechtomov, A. A. Petrov

Vechtomov Evgenii Mikhailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Vyatka State University (Kirov).
e-mail: vecht@mail.ru
Petrov Andrey Aleksandrovich — candidate of physical and mathematical sciences, Vyatka State University (Kirov).
e-mail: andreipetro@mail.ru

Abstract

In this article we study retract and weakly retract lattices — lattices whose congruences are generated by retractions or weakly retractions, respectively. A retraction (weak retraction) of a lattice is any idempotent lattice (semilattice) endomorphism.

We have obtained the structural properties of retract and weakly retract lattices (section 2).

It is proved that the class of all retract lattices is closed under homomorphic images (Theorem 1), finite direct products (Theorem 2), direct sums (Theorem 4), and passage to dual lattices (Remark 13), but not under taking sublattices (Proposition 1) and ordinal sums (Example 12). Example 11 shows that the finite products of chains are retract lattices. A wider class of weakly retract lattices is closed under homomorphic images, finite direct products, direct sums, and ordinal sums (Theorem 3).

In section 3, preliminary results are presented on the retractions of the direct product of an m-element and an n-element chain (Proposition 2, Examples 13 and 14). The problem of finding the number of retractions of such a product is posed.

Section 4 contains the first author's results on the structure of retract semilattices, which complement the results on retract and weakly retract lattices.

Explanatory notes are made.

Keywords: lattice, retraction, retract lattice, weakly retract lattice.

Bibliography: 6 titles.

For citation:
Vechtomov, E. M., Petrov, A. A. 2026, "Retract lattices", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 27, no. 1, pp. 139–147.

1. Введение. Предварительные сведения

Статья посвящена теории решеток, точнее, исследованию двух классов решеток — ретрактных решеток и слабо ретрактных решеток, определяемых в терминах ретракций. Ретракция e полурешетки X — это произвольный идемпотентный полурешеточный гомоморфизм $X \to X$. Заметим, что полурешетку X вместе с ретракцией e можно отождествить с полумодулем X над одноэлементным полукольцом $\{e\}$ [2].

Основные результаты статьи были анонсированы в докладе авторов «О ретрактных решетках» на XXIV Международной конференции «Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории», посвященной 110-летию со дня рождения академика Юрия Владимировича Линника и

110-летиюсо дня рождения профессора Андрея Борисовича Шидловского и 80-летию со дня рождения профессора Геннадия Ивановича Архипова, состоявшейся в Туле 14–17 мая 2025 года.

Введем необходимые понятия.

Полурешеткой называется идемпотентная коммутативная полугруппа. Если в полурешетке $\langle X, +\rangle$ задать бинарное отношение $\leqslant$ формулой: $a \leqslant b \Leftrightarrow a + b = b$ для любых $a, b \in X$, то получим упорядоченное множество $\langle X, \leqslant\rangle$,в котором $a + b = \sup\{a, b\}$ для всех $a, b \in X$, называемое *верхней полурешеткой.*

Решеткой называется алгебраическая структура $\langle X, +, \cdot\rangle$, для которой $\langle X, +\rangle$ и $\langle X, \cdot\rangle$ — полурешетки и операции сложения $+$ и умножения $\cdot$ связаны законами поглощения $x+xy = x$ и $x(x + y) = x$. При этом соответствующая полурешетке $\langle X, +\rangle$ верхняя полурешетка $\langle X, \leqslant\rangle$ удовлетворяет равенству $a \cdot b = \inf\{a, b\}$ для любых $a, b \in X$. Решетка называется *решеткой с нулем*, если она обладает аддитивно нейтральным (равносильно, мультипликативно поглощающим, наименьшим) элементом 0.

Напомним, что подмножество Y упорядоченного множества $\langle X, \leqslant\rangle$ называется *выпуклым*, если $z \in Y$ для любых $x, y \in B$ и $z \in X$, таких, что $x \leqslant z \leqslant y$. Элементы x и y из $\langle X, \leqslant\rangle$ называются *сравнимыми*, если $x \leqslant y$ или $y \leqslant x$, в противном случае — *несравнимыми. Цепь* — это упорядоченное множество, любые два элемента которого сравнимые. Выпуклые подмножества цепи называются ее *промежутками.*

Отношение эквивалентности ρ на решетке (полурешетке) X называется *конгруэнцией* на X, если $a\rho b$ и $c\rho d$ влекут $(a + c)\rho(b + d)$ и $(ac)\rho(bd)$ (только $(a + c)\rho(b + d)$) для любых $a, b, c, d \in X$ (достаточно считать $c = d$). Классы $a/\rho = \{x \in X : x\rho a\}$, $a \in X$, конгруэнции ρ на решетке X образуют *фактор-решетку* X/ρ. Ясно также, что каждый класс a/ρ является выпуклой подрешеткой решетки X.

Сведения по теории решеток содержатся в доступных книгах [3, 4].

Замечание 12. Когда мы говорим о решетке $\langle X, +, \cdot\rangle$ как полурешетке, то имеем в виду ее аддитивную полурешетку $\langle X, +\rangle$.

Ретракцией (*слабой ретракцией*) решетки X назовем любой решеточный (полурешеточный) гомоморфизм $e : X \to X$, такой, что $e(e(x)) = e(x)$ для всех $x \in X$. Каждая ретракция (слабая ретракция) e решетки X порождает конгруэнцию $\rho(e)$ на решетке (полурешетке) X по правилу

$$x\rho(e)y \text{ означает } ex = ey \text{ при любых } x, y \in X.$$

Следующее утверждение очевидно.

Лемма 1. *Пусть e — ретракция (слабая ретракция) решетки X. Тогда отношение $\rho(e)$ будет конгруэнцией на решетке (полурешетке) X, каждый класс которой $a/\rho(e)$, $a \in X$, представляет собой выпуклую подрешетку (подполурешетку) решетки X и $(a/\rho(e)) \cap eX = \{ea\}$.*

Конгруэнция ρ на решетке X называется *ретрактной* (*слабо ретрактной*), если $\rho = \rho(e)$ для некоторой ретракции (слабой ретракции) e решетки X, в противном случае — *неретрактной.* Саму решетку назовем *ретрактной* (*слабо ретрактной*), если все конгруэнции на ней ретрактные (слабо ретрактные), в противном случае — *неретрактной* (*слабо неретрактной*). Ясно, что ретрактные решетки являются слабо ретрактными.

Лемма 2. *Конгруэнция ρ на решетке X является ретрактной (слабо ретрактной) тогда и только тогда, когда существует подрешетка (подполурешетка) Y в X, пресекающаяся с каждым классом a/ρ ровно по одному элементу, то есть $|Y \cap (a/\rho)| = 1$ для любого элемента $a \in X$.*

Доказательство. Если $\rho = \rho(e)$ для ретракции (слабой ретракции) e решетки X, то можно взять $Y = eX$ в силу леммы 1. Если Y удовлетворяет достаточному условию леммы, то $Y = eX$ для ретракции (слабой ретракции) e решетки X, такой, что $ea \in Y \cap (a/\rho)$ для всех $a \in X$. Имеем $\rho = \rho(e)$, при этом $Y \cong X/\rho$.

Рассмотрим прямое произведение $A \times B$ решеток A и B. Пусть e_1 и e_2 — ретракции (слабые ретракции) решеток A и B, соответственно. Тогда отображение $e_1 \times e_2 : A \times B \to A \times B$, определенное формулой

$$(e_1 \times e_2)((a, b)) = (e_1 a, e_2 b) \text{ при } a \in A \text{ и } b \in B,$$

является ретракцией (слабой ретракцией) решетки $A \times B$.

Лемма 3. [3, с. 43, теорема 13] *Произвольная конгруэнция ρ на решетке $A \times B$ имеет вид $\rho = \rho_1 \times \rho_2$, где ρ_1 (ρ_2) — конгруэнция на решетке A (B) и $(a_1, b_1)(\rho_1 \times \rho_2)(a_2, b_2)$ означает $a_1 \rho_1 a_2$ и $b_1 \rho_2 b_2$ для любых $a_1, a_2 \in A$ и $b_1, b_2 \in B$.*

2. Основные результаты

Теорема 1. *Гомоморфные образы, равносильно, фактор-решетки, ретрактных (слабо ретрактных) решеток являются ретрактными (слабо ретрактными) решетками.*

Доказательство. Пусть даны ретрактная решетка A, гомоморфизм $\alpha : A \to B$ решетки A на решетку B и конгруэнция ρ на решетке B. Для произвольных элементов $x, y \in A$ положим: $x\sigma y \Leftrightarrow \alpha(x)\rho\alpha(y)$. Получаем конгруэнцию σ на полурешетке A. Согласно лемме 2 в каждом классе конгруэнции σ можно взять по одному элементу так, чтобы они составили подрешетку Y решетки A. Тогда, снова в силу леммы 2, подрешетка $\alpha(Y)$ решетки B обосновывает ретрактность конгруэнции ρ.

Теорема 2. *Прямое произведение конечного числа решеток будет ретрактной (слабо ретрактной) решеткой тогда и только тогда, когда все сомножители являются ретрактными (слабо ретрактными) решетками.*

Доказательство. Необходимость следует из теоремы 1.

Доказательство обратного утверждения проведем для ретрактных решеток; для слабо ретрактных решеток доказательство аналогично. В силу индукции по числу сомножителей достаточно рассмотреть прямое произведение $A = A_1 \times A_2$ двух ретрактных решеток A_1 и A_2. Возьмем произвольную конгруэнцию ρ на решетке A. По лемме 3 $\rho = \rho_1 \times \rho_2$. Для номера $i = 1, 2$ на ретрактной решетке A_i существует такая ретракция e_i, что $\rho_i = \rho(e_i)$. Тогда, очевидно, отображение $e = e_1 \times e_2 : A \to A$, $e((a_1, a_2)) = (e_1 a_1, e_2 a_2)$ для любых $a_i \in A_i$ при $i = 1, 2$, будет ретракцией решетки A, порождающей конгруэнцию $\rho : \rho = \rho(e)$.

Пример 11. Прямое произведение конечного числа произвольных цепей является ретрактной решеткой. В силу теоремы 2 достаточно показать, что всякая цепь A будет ретрактной решеткой. Возьмем любую конгруэнцию ρ на A. Классы конгруэнции ρ являются промежутками цепи A. В теореме 1 [2] указаны все ретракции, порождающие конгруэнцию ρ, что влечет ретрактность конгруэнции ρ. Значит, A— ретрактная решетка.

Пусть I — цепь и $(A_i)_{i \in I}$ — семейство решеток. Рассмотрим дизъюнктное объединение $\Sigma(A_i)_{i \in I}$ семейства $(A_i)_{i \in I}$ со следующей операцией сложения $+$ и умножения $\cdot$. Для любых элементов $a \in A_i$ и $b \in A_j$ положим: $a + b$ и $a \cdot b$ — сумма и произведение этих элементов в решетке A_i при $i = j$ и $a + b = b + a = b$ и $a \cdot b = b \cdot a = a$ при $i < j$. Получаем решетку $A \equiv \langle \Sigma(A_i)_{i \in I}, +, \cdot \rangle$, называемую *ординальной суммой* решеток A_i ($i \in I$) [4, с. 15].

Теорема 3. *Для того чтобы ординальная сумма произвольного семейства решеток являлась слабо ретрактной решеткой, необходимо и достаточно, чтобы все ее слагаемые были слабо ретрактными решетками.*

Доказательство. Пусть $X = \Sigma(A_i)_{i \in I}$ — ординальная сумма решеток.

Необходимость. Предположим, что X — слабо ретрактная решетка и σ — конгруэнция на решетке A_i ($i \in I$). Расширим конгруэнцию σ до конгруэнции ρ на решетке X, полагая:

$a/\rho = a/\sigma$, если $a \in A_i$;

$a/\rho = \cup A_j$ по всем индексам $j < i$, если $a \in A_k$ при $k < i$;

$a/\rho = \cup A_j$ по всем индексам $j > i$, если $a \in A_k$ при $k > i$.

Возьмем подполурешетку Y решетки X из формулировки леммы 2. Подполурешетка $Y \cap A_i$ решетки A_i удовлетворяет достаточному условию леммы 2 (при A_i вместо X). Поэтому решетка A_i будет слабо ретрактной.

Достаточность. Допустим, что все решетки A_i ($i \in I$) слабо ретрактные и ρ — конгруэнция на решетке X. Согласно лемме 2 каждая решетка A_i ($i \in I$) имеет подполурешетку Y_i, соответствующую конгруэнции $\rho \cap (A_i \times A_i)$ на A_i. Рассмотрим произвольный класс K конгруэнции ρ. По лемме 1 K является выпуклой подполурешеткой в X.

Возможны следующие взаимоисключающие случаи:

1) $\exists i \in I\ K \subset A_i$;

2) $\exists i \in I\ (K \cap A_i \neq \varnothing\ \&\ A_i \setminus K \neq \varnothing\ \&\ \exists j \in I\ (j > i\ \&\ K \setminus A_j \neq \varnothing))$;

3) $\exists i \in I\ (K \cap A_i \neq \varnothing\ \&\ A_i \setminus K \neq \varnothing\ \&\ \exists j \in I\ (j < i\ \&\ K \setminus A_j \neq \varnothing))$;

4) $\forall i \in I\ (K \cap A_i = \varnothing \vee A_i \subseteq K)$.

В случаях 1)–3) берем единственный элемент $a_K \in K \cap Y_i$.

В случае 4) берем произвольный элемент $a_K \in K$.

В результате получаем подполурешетку $Y = \{a_K : K \in X/\rho\}$ решетки X, порождающую конгруэнцию ρ.

Пример 12. Пусть $A = B$ — прямое произведение двух двухэлементных цепей и C — их ординальная сумма при условии $A < B$. Допустим, что a — наибольший элемент решетки A, b — наименьший элемент решетки B. На 8-элементной дистрибутивной решетке C рассмотрим конгруэнцию ρ с 7 классами $\{a, b\}$, $\{x\}$ при $x \in C \setminus \{a, b\}$. Поскольку 7-элементные подмножества $C \setminus \{a\}$ и $C \setminus \{b\}$ не являются подрешетками решетки C, то решеточная конгруэнция ρ неретрактная. Но конгруэнция ρ будет ретрактной конгруэнцией (верхней) полурешетки C, так как $C \setminus \{b\}$ есть подполурешетка полурешетки C. Легко видеть, что неретрактная решетка C является слабо ретрактной решеткой.

Пример 12 доказывает существование слабо ретрактных конечных дистрибутивных решеток, не являющихся ретрактными решетками. Он показывает, что ординальная сумма двух ретрактных решеток может не являться ретрактной решеткой.

Предложение 1. *Подрешетки ретрактных решеток не обязаны быть ретрактными решетками.*

Доказательство. Пусть A — прямое произведение n экземпляров двухэлементной цепи при натуральном числе $n \geqslant 5$. По теореме 2 решетка A является ретрактной. Легко видеть, что A содержит подрешетку, изоморфную неретрактной решетке из примера 12.

Пусть $(A_i)_{i \in I}$ — непустое семейство решеток A_i с нулем 0. Выделим в прямом произведении $\Pi(A_i)_{i \in I}$ подрешетку $\oplus(A_i)_{i \in I}$, состоящую в точности из тех элементов-функций $f \in \Pi(A_i)_{i \in I}$, которые имеют конечное множество ненулевых координат. То есть $\oplus(A_i)_{i \in I} = \{f \in \Pi(A_i)_{i \in I} : \operatorname{supp} f$ — конечное множество$\}$, где $\operatorname{supp} f = \{i \in I : f(i) \neq 0\}$. Множество $\operatorname{supp} f$ называется *носителем* $f : I \to \cup(A_i)_{i \in I}$, $f(i) \in A_i$ для всех индексов $i \in I$. Решетка $\oplus(A_i)_{i \in I}$ называется *прямой суммой* (семейства) решеток с нулем A_i ($i \in I$).

Предположим, что ρ_i — конгруэнция на решетке A_i для любого $i \in I$. Обозначим через $\times(\rho_i)_{i\in I}$ бинарное отношение на $\oplus(A_i)_{i\in I}$, означающее:

$$\forall f, g \in \oplus(A_i)_{i\in I}\,(f(\times(\rho_i)_{i\in I})g \Leftrightarrow \forall i \in I\, f(i)\rho_i g(i)).$$

Легко видеть, что бинарное отношение $\times(\rho_i)_{i\in I}$ на прямой сумме $\oplus(A_i)_{i\in I}$ будет конгруэнцией на решетке $\oplus(A_i)_{i\in I}$.

Лемма 4. *Конгруэнции на прямой сумме $\oplus(A_i)_{i\in I}$ решеток с нулем A_i суть в точности конгруэнции вида $\times(\rho_i)_{i\in I}$ по всевозможным конгруэнциям ρ_i на A_i при $i \in I$.*

Доказательство. Мы уже знаем, что $\times(\rho_i)_{i\in I}$ являются конгруэнциями на прямой сумме $\oplus(A_i)_{i\in I}$.

Возьмем произвольную конгруэнцию ρ на решетке $\oplus(A_i)_{i\in I}$ и некоторый индекс $j \in I$. Для любых $a, b \in A_j$ положим

$$a\rho_j b \Leftrightarrow \exists f, g \in \oplus(A_i)_{i\in I}\,(f\rho g \,\&\, f(j) = a \,\&\, g(j) = b).$$

Очевидно, бинарное отношение ρ_j на решетке A_j является конгруэнцией на ней. При этом $\rho \subseteq \times(\rho_i)_{i\in I}$. Обратно, пусть $f(\times(\rho_i)_{i\in I})g$ для $f, g \in \oplus(A_i)_{i\in I}$. Множество $K = \operatorname{supp} f \cup \operatorname{supp} g$ конечно и $f = g = 0$ на множестве $I \setminus K$. Фиксируем индекс $j \in K$. Имеем $f(j)\rho_j g(j)$, то есть $f_j \rho g_j$ для некоторых $f_j, g_j \in \oplus(A_i)_{i\in I}$, таких, что $f_j(j) = f(j)$ и $g_j(j) = g(j)$. Возьмем функцию $h_j \in \oplus(A_i)_{i\in I}$, равную 0 на $I \setminus \{j\}$ и $h_j(j) = f(j) + g(j)$.Тогда $(fh_j)\rho(gh_j)$. Суммируя эти соотношения по всем индексам $j \in K$, получаем $f\rho g$.

Теорема 4. *Прямая сумма решеток с нулем является ретрактной* (*слабо ретрактной*) *решеткой тогда и только тогда, когда все ее слагаемые будут ретрактными* (*слабо ретрактными*) *решетками.*

Доказательство. Пусть дана прямая сумма $A = \oplus(A_i)_{i\in I}$ решеток A_i с нулем. Каждая решетка A_i $(i \in I)$ является гомоморфным образом решетки A при проектировании $A \to A_i$, $f \mapsto f(i)$ для всех $f \in A$. Поэтому по предложению 1 если решетка A ретрактная (слабо ретрактная), то такими же будут решетки A_i для всех $i \in I$.

Обратно, допустим, что все решетки A_i $(i \in I)$ ретрактные (слабо ретрактные). Рассмотрим произвольную конгруэнцию ρ на решетке A. По лемме 4 $\rho = \times(\rho_i)_{i\in I}$ для подходящих конгруэнций ρ_i на решетках A_i по всем индексам $i \in I$. Имеем $\rho_i = \rho(e_i)$ для ретракции (слабой ретракции) e_i решетки A_i для любого $i \in I$. Зададим $e = \times(e_i)_{i\in I}$ формулой: $e(f)(i) = e_i(f(i))$ для всех $f \in A$ и $i \in I$. В результате, как легко видеть, получаем ретракцию (слабую ретракцию) e решетки A, причем такую, что $\rho = \rho(e)$.

Замечание 13. Поскольку любая решетка и двойственная к ней решетка имеют одни и те же конгруэнции и ретракции, то ретрактность произвольной решетки равносильна ретрактности двойственной решетки.

Замечание 14. Итак, класс всех ретрактных решеток замкнут относительно гомоморфных образов, конечных прямых произведений, прямых сумм и перехода к двойственным решеткам, но не замкнут относительно взятия подрешеток и ординальных сумм. А более широкий класс слабо ретрактных решеток замкнут относительно гомоморфных образов, конечных прямых произведений, прямых сумм и ординальных сумм.

3. О ретракциях прямого произведения двух конечных цепей

Предположим, что конгруэнция ρ_1 (ρ_2) на решетке A (B) индуцируется некоторой ретракцией e_1 (e_2) решетки A (B): $\rho_1 = \rho(e_1)$ и $\rho_2 = \rho(e_2)$. Легко видеть, что ретракция $e_1 \times e_2$ порождает исходную конгруэнцию ρ, то есть $\rho = \rho(e_1 \times e_2)$. Заметим, что конгруэнция ρ может индуцироваться ретракцией решетки $A \times B$, отличной от ретракций вида $e_1 \times e_2$. Ретракции вида $e_1 \times e_2$ будем называть *каноническими ретракциями*, в противном случае — *неканоническими.*

Итак, для ретрактных решеток A и B и любой ретракции e решетки $A \times B$ имеем $\rho(e) = \rho(e_1 \times e_2)$ для подходящих ретракций e_1 и e_2 решеток A и B, соответственно.

Предложение 2. *Пусть A, B — произвольные решетки. Для того чтобы ретракция e решетки $A \times B$ была канонической, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее утверждение: если $\rho(e) = \rho_1 \times \rho_2$, $a_1, a_2 \in A$, $b_1, b_2 \in B$, $e((a_1, b_1)) = (a_1, b_1)$ и $e((a_2, b_2)) = (a_2, b_2)$, то $a_1\rho_1 a_2 \Rightarrow a_1 = a_2$ и $b_1\rho_2 b_2 \Rightarrow b_1 = b_2$.*

Доказательство. *Необходимость.* Допустим, что $e = e_1 \times e_2$ для ретракции e_1 на решетке A и ретракции e_2 на решетке B и выполняется условие из указанного в формулировке утверждения. Тогда $\rho_1 = \rho(e_1)$, $a_1 = e_1(a_1)$, $a_2 = e_1(a_2)$, стало быть, $a_1\rho_1 a_2 \Leftrightarrow e_1(a_1) = e_1(a_2)$. Аналогично, $b_1\rho_2 b_2 \Rightarrow b_1 = b_2$.

Достаточность. Пусть верно утверждение из формулировки данного предложения. Для любых $a \in A$ и $b \in B$ положим $e_1(a) = p_1(e((a, b)))$ и $e_2(b) = p_2(e((a, b)))$, где $p_1((x, y)) = x$ и $p_2((x, y)) = y$ для всех $x \in A$ и $y \in B$. Покажем, что значение $e_1(a)$ не зависит от второй координаты b пары (a, b). Возьмем пару (a, c), где $c \in B$. Поскольку $e((a, b))\rho(a, b)$ и $e((a, c))\rho(a, c)$, то $p_1(e((a, b)))\rho_1 a\rho_1 p_1(e((a, c)))$. Поэтому $p_1(e((a, b))) = p_1(e((a, c)))$. Аналогично доказывается, что значение $e_2(b)$ не зависит от первой координаты пары (a, b). Легко видеть, что отображения e_1 и e_2 служат ретракциями решеток A и B, соответственно. Равенство $e = e_1 \times e_2$ очевидно.

Пусть C_n есть n-элементная цепь для натурального числа n.

Пример 13. Найдем все ретракции решетки $C_2 \times C_2 = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$, где $C_2 = \{0, 1\}$ при $0 < 1$. Цепь C_2 имеет 3 ретракции: константные $A \to \{0\}$, $A \to \{1\}$ и тождественную, и 2 конгруэнции: отношение равенства и одноклассовую. Поэтому решетка $C_2 \times C_2$ обладает 9 каноническими ретракциями и 4 конгруэнциями. Одноклассовая конгруэнция на решетке $C_2 \times C_2$ порождается 4 ретракциями, отношение равенства — только тождественной ретракцией, каждая из 2 двухклассовых конгруэнций — 2 каноническими ретракциями. Возьмем на решетке $C_2 \times C_2$ конгруэнцию ρ с двумя классами $\{0, 1\} \times \{0\}$ и $\{0, 1\} \times \{1\}$. И рассмотрим отображение $e : C_2 \times C_2 \to C_2 \times C_2$, переводящее класс $C_2 \times \{0\}$ в элемент $(0, 0)$, а класс $C_2 \times \{1\}$ — в элемент $(1, 1)$. По предложению 2 e будет неканонической ретракцией решетки $C_2 \times C_2$, порождающей конгруэнцию ρ. Аналогично, двойственная к e неканоническая ретракция порождает конгруэнцию с двумя классами $\{0\} \times C_2$ и $\{1\} \times C_2$. Таким образом, решетка $C_2 \times C_2$ имеет 11 ретракций, включая 2 неканонические ретракции.

Пример 14. В статье [5] получена формула для числа всех ретрактов прямого произведения $C_m \times C_n$ при любых натуральных числах m и n. В частности, число (непустых) ретрактов решетки $C_2 \times C_2$ равно 10, в то время как число ее ретракций равно 11. Отметим, что ретракт решетки может быть образом ее различных ретракций. Число ретрактов решетки $C_3 \times C_3$ равно 71 (см. [5]). Опираясь на предложение 2, нами найдены 34 неканонические ретракции этой решетки. Учитывая 64 канонические ретракции, всего получаем 98 ретракций решетки $C_3 \times C_3$.

Задача 1. Найти число всех ретракций решетки $C_m \times C_n$. Отметим, что число ретракций n-элементной цепи равно числу Фибоначчи F_{2n} с номером $2n$ [6, p. 228]. Поэтому число всех канонических ретракций решетки $C_m \times C_n$ равно $F_{2m} \cdot F_{2n}$.

4. Добавление

В докладе [1] описаны все ретрактные полурешетки. Полурешетка названа нами *ретрактной*, если все конгруэнции на ней порождаются ее ретракциями. Заметим, что решетки, являющиеся ретрактными полурешетками, будут слабо ретрактными решетками, но не наоборот.

Элемент m полурешетки A называется *разложимым*, если $m = x+y$ для некоторых несравнимых элементов x, y из A. Полурешетка A обладает свойством $(*)$, если A имеет наибольший элемент m, такой, что m разложимый и $x+y = m$ для любых несравнимых элементов $x, y \in A$.

Теорема 5. [1, теорема 1] *Для того чтобы полурешетка была ретрактной, необходимо и достаточно, чтобы она была изоморфна ординальной сумме полурешеток со свойством* $(*)$ *и цепей.*

Кроме того, в указанной работе [1] отмечены следующие свойства класса ретрактных полурешеток.

(1) *Прямое произведение $A \times B$ двух неодноэлементных полурешеток A и B является ретрактной полурешеткой тогда и только тогда, когда A и B — двухэлементные цепи.*

(2) *Гомоморфные образы ретрактных полурешеток являются ретрактными полурешетками.*

(3) *Всякая полурешетка (конечная полурешетка) изоморфно вкладывается в некоторую неретрактную полурешетку (конечную неретрактную полурешетку).*

(4) *Подполурешетки ретрактных полурешеток являются ретрактными полурешетками.*

(5) *Для того чтобы ординальная сумма семейства полурешеток являлась ретрактной полурешеткой, необходимо и достаточно, чтобы все ее слагаемые были ретрактными полурешетками.*

Теорема 5 и утверждения (1), (4) и (5) показывают, что свойства ретрактных полурешеток кардинально отличаются от свойств ретрактных решеток.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вечтомов Е. М. Ретрактные полурешетки // Алгебра и динамические системы: тезисы докладов Международной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения В. А. Белоногова. Нальчик: Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова, 2025. С. 18–21.

2. Вечтомов Е. М., Петров А. А. О полумодулях над тривиальным полукольцом // Чебышевский сборник. 2025. Т. 26. Вып. 3. С. 85–94.

3. Гретцер Г. Общая теория решеток. М.: Мир, 1982. 456 с.

4. Скорняков Л. А. Элементы теории структур. 2-е изд. М.: Наука, 1982. 160 с.

5. Czédli G. Lattices of retracts of direct products of two finite chains and notes on retracts of lattices // Algebra Universalis. 2022. V. 83, Issue 3. №34.

6. Howie J. M. Products of idempotents in certain semigroups of transformations // Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society. 1971. V. 17. Issue 3. P. 223–236.

REFERENCES

1. Vechtomov E. M. 2025, "Retract semilattices", *Algebra and Dynamic Systems: abstracts of the international conference dedicated to the 90th anniversary of V. A. Belonogov*, Nalchik: Kabardino-Balkarian State University named after Kh. M. Berbekov, pp. 18–21.

2. Vechtomov E. M., Petrov A. A. 2025, "About semimodules over the trivial semiring", *Chebyshevskii Sbornik*, V. 26, Issue 3, pp. 85–94.

3. Grätzer G. "General Lattice Theory", *Moscow: Mir*, 1982. 456 p.

4. Skornyakov L A. "Elements of theory of structures. 2nd ed.", *Moscow: Nauka*, 1982. 160 p.

5. Czédli G. 2022, "Lattices of retracts of direct products of two finite chains and notes on retracts of lattices", *Algebra Universalis*, V. 83, Issue 3, №34.

6. Howie J.M. 1971, "Products of idempotents in certain semigroups of transformations", *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, V. 17, Issue 3, pp. 223–236.

Получено: 25.11.2025
Принято в печать: 12.02.2026

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 27. Выпуск 1.

УДК: 510.65 DOI: 10.22405/2226-8383-2026-27-1-148-152

Исследование логической сущности смешного

И. Н. Сергеев

Сергеев Игорь Николаевич — доктор физико-математических наук, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: igniserg@gmail.com

Аннотация

В работе логически анализируется стандартная жизненная (или литературная) картина, когда все слушатели (или, соответственно, читатели) вдруг дружно смеются после некоторой фразы рассказчика (или автора текста). Оказывается, с точки зрения математической логики это происходит, когда в создавшейся несколько проблемной ситуации произносится (или пишется) нечто совершенно неожиданное для слушателя (или читателя), но в определенной степени обоснованное, хотя возможно, логически и не достаточно корректное. Приводится пара примеров подробного разбора смешных ситуаций с целью демонстративного доказательства сформулированного утверждения, а также еще несколько аналогичных примеров таких ситуаций для их самостоятельного восприятия и анализа понятия смешного.

Ключевые слова: логика, проблемная ситуация, неожиданное утверждение, некорректная логика, математическое понятие смешного.

Библиография: 9 названий.

Для цитирования:
Сергеев И. Н. Исследование логической сущности смешного // Чебышевский сборник, 2026, т. 27, вып. 1, с. 148–152.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 27. No. 1.

UDC: 510.65 DOI: 10.22405/2226-8383-2026-27-1-148-152

A study of the logical essence of the funny

I. N. Sergeev

Sergeev Igor Nikolaevich — doctor of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: igniserg@gmail.com

Abstract

This paper logically analyzes a common real-life (or literary) scenario in which all listeners (or, accordingly, readers) suddenly burst into laughter after a certain phrase spoken by the narrator (or author). It turns out that, from a mathematical logic perspective, this occurs when, in a somewhat challenging situation, something is said (or written) that is completely unexpected for the listener (or reader), but to a certain extent justified, although perhaps not logically correct. A couple of detailed examples of humorous situations are provided to demonstrate the stated assertion, as well as several other similar examples for independent perception and analysis of the concept of humor.

Keywords: logic, problematic situation, unexpected statement, incorrect logic, mathematical concept of funny.

Bibliography: 9 titles.

For citation:
Sergeev, I. N. 2026, "A study of the logical essence of the funny", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 27, no. 1, pp. 148–152.

1. Введение

Каждый из читателей наверняка неоднократно бывал свидетелем следующей ситуации: в компании один из участников рассказывает что-то остальным, а они его внимательно слушают и вдруг после некоторой его фразы почему-то все одновременно начинают смеяться. В связи с этим возникает естественный вопрос: что же такое рассказчик мог сообщить слушателям, что вызвало у них дружный и даже синхронный смех?

Разумеется, в реальной жизни шутки бывают довольно разные: затрагивающие самые разные жизненные темы, имеющие разную доступность для понимания и вызывающие смех у разных слушателей в разной степени. Тем не менее, как оказывается, с математической точки зрения во всех шутках есть нечто общее: они обладают вполне определенной логической структурой с некоторой юмористической подоплекой. О таких содержательных шутках и пойдет речь ниже.

Заметим, что элементы смешного содержатся даже во многих художественных литературных произведениях: романах, повестях, рассказах, анекдотах и т. д. (см. [1–9]).

2. Основная версия

Полный смысл логической сущности смешного определяет следующая

Теорема. *Смешной момент наступает, когда:*

0) *в некоторой описанной или возникшей проблемной ситуации —*
вдруг сообщается или предлагается нечто:

1) *логически совершенно неожиданное;*

2) *по-своему логичное, истолкованное необычно или даже не совсем корректно.*

Доказательство. Для обоснования справедливости этой теоремы рассмотрим следующую конкретную ситуацию, довольно точно и красноречиво демонстрирующую логическую сущность смешного.

Анекдот 1. *Один посетитель пришел вечером в кафе и, заказав 3 рюмки водки, сразу их выпил. На следующий день он пришел снова и опять выпил 3 рюмки. Это продолжалось целую неделю. В результате бармен не удержался и спросил:*

— Почему вы каждый раз заказываете по 3 рюмки?

— Просто нас 3 друга, — ответил посетитель, — и мы договорились, что когда кто-то из нас выпивает, он делает это за всех троих.

Так продолжалось целый месяц. И вот, однажды этот посетитель пришел и заказал только 2 рюмки. Бармен достал платок:

— Что друг умер? — спросил он, вытерев слезы.

— Нет, просто я пить бросил.

Подробно разберем описанную в анекдоте ситуацию в строгом соответствии с пунктами доказываемой теоремы.

0. Описанная в анекдоте проблема возникла из-за того, что посетитель изменил стандартное число заказываемых им рюмок, а именно: вместо своих обычных 3 рюмок (рассчитанных на 3 друзей) он заказал почему-то только 2 рюмки.

1. Этому факту бармен нашел естественное и логичное объяснение, состоящее в предположении, что один из друзей умер. Однако посетитель дал другое, совершенно неожиданное объяснение, а именно: оказывается, он сам бросил пить.

2. Заметим, что объяснение посетителя обладает логической неувязкой: если он бросил пить, то почему тогда он пьет за своих друзей? Однако эта неувязка оказывается логически разрешимой (пусть и с некоторой натяжкой): они-то пить не бросили, поэтому за них-то можно (или даже ему нужно) выпить, в чем как раз и состоит своеобразность логики посетителя!

Когда слушатель или читатель самостоятельно осознает все перечисленные хитрые идеи, это вызывает у него интеллектуальное удовольствие и порождает естественный смех. Заметим, что основой смешного здесь служит именно своеобразность логики посетителя, которую трудно было заранее предвидеть: если бы он ответил попросту, что друг умер, это было бы не смешно, поскольку это логически совершенно корректно, причем естественно и предвидимо.

Для полноты доказательства теоремы рассмотрим еще одну конкретную ситуацию, также демонстрирующую логическую сущность смешного.

Анекдот 2. *В школу пришел прошлогодний выпускник, поступивший в институт. Его попросили выступить перед будущими выпускниками этой школы. В процессе своего выступления он рассказал им, что организовал со студентами своего института целую группу так называемых наплевателей, которым наплевать на все, что угодно.*

— И что: даже на учебу наплевать? — спросил его один из школьников.

— Да, нам даже на учебу наплевать!

— И на будущую профессию?

— Наплевать!

— И на стипендию?

— Нет, вот на стипендию нам не наплевать!

— Как же так, неувязочка получается: на учебу вам наплевать, а на стипендию нет!

— А нам наплевать на ваши неувязочки!

В этой ситуации также можно все разобрать строго по пунктам из формулировки теоремы.

0. Итак, организована группа наплевателей, которым наплевать на все, что угодно. Но слушатель указал на неувязочку: на учебу им наплевать, а на стипендию нет!

1. Реакция студента на указанную неувязочку оказалась совершенно неожиданной: нам наплевать на ваши неувязочки!

2. Оказывается, им наплевать не на все вообще, а на все, что угодно — точнее, на все, что *им угодно*: например, им угодно наплевать и на эту неувязочку, и на учебу, зато на свою стипендию наплевать уже не угодно.

Осознание всей этой несуразной логики опять же вызывает у читателя или слушателя смех. Более того, если бы студент в сложившейся ситуации взял бы и согласился с указанной ему неувязочкой, наплевав заодно и на стипендию или, наоборот, отказавшись наплевать также и на учебу, то это было бы логически более естественно, но уже не так смешно.

Теорема доказана.

3. Дополнительные примеры

Приведем еще 5 анекдотов для их самостоятельного осмысления читателем с точки зрения сформулированной выше теоремы.

Анекдот 3. *Звонок по телефону:*

— Алло! Я ваш сосед сверху. Ну сколько можно пиликать на скрипке? Немедленно прекратите это пиликанье! Если это и дальше будет продолжаться, у меня крыша съедет!

— Уже съехала: мы продали скрипку неделю назад.

Анекдот 4. *Подружка говорит своему другу:*

— Какой ты, оказывается, хамовитый: себе взял большой кусок мяса, а мне дал маленький!

— А ты бы как сделала?

— Я бы, конечно, себе взяла маленький кусочек, а...

— Ну, и чем же ты тогда недовольна: я тебе как раз такой кусочек и дал!

Анекдот 5. *Одна блондинка спрашивает у другой:*

— А ты не знаешь, зачем у вертолета такой большой пропеллер сверху?

— Знаю, это же вентилятор, чтобы пилот не потел!

— Да ладно, ты, наверно, шутишь.

— Какие там шутки! Мы как-то летели, и вертолет перестал крутиться: ты бы видела, как сильно пилот сразу вспотел!

Анекдот 6. *Учитель предупреждает учеников:*

— Никогда нельзя целовать животных. Это грозит различными заболеваниями. Кто может привести пример из жизни?

— Я могу, — встал мальчик, — моя тетя все время целовала своего попугая.

— Ну и...?

— А в результате попугай сошел с ума.

Анекдот 7. *Прохожий подошел к ларьку:*

— У вас есть что-нибудь выпить?

— Да, вода.

— А что-нибудь покрепче есть?

— Да, лед.

4. Заключение

Какой же теперь вывод можно сделать о качествах тех людей, которые способны адекватно воспринимать смешное? Оказывается, они должны обладать достаточно высоким интеллектом, поскольку для осознания смешного им нужно, для начала, понять исходную суть описанной проблемы, далее, осознать логическую несуразность предложенного способа ее разрешения и, наконец, согласиться с его относительной приемлемостью, пусть и хотя бы с некоторыми логическими послаблениями (требующими дополнительных интеллектуальных усилий).

Заключительный вывод таков: люди, активно воспринимающие юмор, заведомо являются достаточно умными.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Джером К. Дж. Трое в лодке, не считая собаки. — СПб.: Азбука, 2025. — 864 с.

2. Ильф И., Петров Е. Двенадцать стульев. — М.: АСТ, 2020. — 448 с.

3. Гашек Я. Похождения бравого солдата Швейка. — М.: Эксмо, 2024 — 640 с.

4. Филатов Л. Про Федота-стрельца, удалого молодца. — М.: АСТ, 2025 — 288 с.
5. Носов Н. Н. Все-все-все весёлые повести. — М.: Махаон, 2022. — 440 с.
6. Чехов А. П. Юмористические рассказы. — М.: Эксмо, 2025. — 384 с.
7. Зощенко М. Юмористические рассказы. — М.: Омега, 2020. — 112 с.
8. Анекдоты от академика / Составитель А. М. Новиков. — М.: Эгвес, 2001 — 142 с.
9. Анекдоты каждый день для хорошего настроения. — М.: АСТ, 2025. — 320 с.

REFERENCES

1. Jerome, K. J. 2025, *Three Men in a Boat*, St. Petersburg: Azbuka.
2. Ilf I., Petrov E. 2020, *The Twelve Chairs*, M.: AST.
3. Hasek J. 2024, *The Good Soldier Schweik*, M.: Eksmo.
4. Filatov L. 2025, *About Fedot the Archer, a Daring Fellow*, M.: AST.
5. Nosov N. N. 2022, *All-all-all funny stories*, M.: Makhaon.
6. Chekhov A. P. 2025, *Humorous stories*, M.: Eksmo.
7. Zoshchenko M. 2020, *Humorous stories*, M.: Omega.
8. *Anecdotes from an academician* / Compiled by A. M. Novikov. 2001, M.: Egves.
9. *Anecdotes every day for a good mood.* 2025, M.: AST.

Получено: 16.11.2025
Принято в печать: 12.02.2026

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 27. Выпуск 1.

УДК: 539.3 DOI: 10.22405/2226-8383-2026-27-1-153-165

Анализ сходимости метода спектральных элементов на примере задачи Лэмба в сравнении с аналитическим решением [1]

В. А. Левин, А. В. Вершинин, К. М. Зингерман, Е. М. Уханов

Левин Владимир Анатольевич — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: v.a.levin@mail.ru
Вершинин Анатолий Викторович — доктор физико-математических наук, научный сотрудник, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: versh1984@mail.ru
Зингерман Константин Моисеевич — доктор физико-математических наук, профессор, Тверской государственный университет (г. Тверь).
e-mail: zingerman@rambler.ru
Уханов Евгений Михайлович — студент, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: evgenii.ukhanov@math.msu.ru

Аннотация

Выполнен анализ сходимости метода спектральных элементов (одной из современных модификаций метода конечных элементов) для динамической задачи теории упругости посредством сравнения численного решения с аналитическим решением задачи Лэмба — задачи о динамическом воздействии на границу полуплоскости или полупространства сосредоточенной или распределенной нагрузкой, меняющейся по некоторому временному закону. В статье рассматривается воздействие на границу нагрузкой, меняющейся по временному закону Берлаге. Расчеты выполнены с использованием отечественного прочностного программного пакета «Фидесис». Приводятся графики распределения напряжений для исследуемого материала. Исследована зависимость погрешности численного решения от порядка элементов при фиксированном количестве точек на длину волны Рэлея.

Ключевые слова: задача Лэмба, закон Берлаге, метод конечных элементов, метод спектральных элементов, погрешность численного решения.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:
Левин В. А., Вершинин А. В., Зингерман К. М., Уханов Е. М. Анализ сходимости метода спектральных элементов на примере задачи Лэмба в сравнении с аналитическим решением // Чебышевский сборник, 2026, т. 27, вып. 1, с. 153–165.

[1]Работа выполнена в Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова при поддержке Российского научного фонда (проект 22-11-00110).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 27. No. 1.

UDC: 539.3 DOI: 10.22405/2226-8383-2026-27-1-153-165

Convergence analysis of the spectral element method on the example of the Lamb problem in comparison with the analytical solution

V. A. Levin, A. V. Vershinin, K. M. Zingerman, E. M. Ukhanov

Levin Vladimir Anatol'evich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: v.a.levin@mail.ru
Vershinin Anatoliy Victorovich — doctor of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: versh1984@mail.ru
Zingerman Konstantin Moiseevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tver State University (Tver).
e-mail: Zingerman@rambler.ru
Ukhanov Evgeny Mikhailovich — student, Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: evgenii.ukhanov@math.msu.ru

Abstract

The convergence analysis of the spectral element method (one of the modern modifications of the finite element method) for the dynamic problem of elasticity theory is performed by comparing the numerical solution with the analytical solution of the Lamb problem — the problem of dynamic action on the boundary of a half-plane or half-space by a concentrated or distributed load changing according to some time law. The article considers the effect on the boundary of a load changing according to the Berlage time law. The calculations are performed using the domestic strength software package "Fidesys". Stress distribution graphs for the material under study are given. The dependence of the error of the numerical solution on the order of elements for a fixed number of points per Rayleigh wavelength is investigated.

Keywords: Lamb's problem, Berlage's law, finite element method, spectral element method, numerical solution error.

Bibliography: 15 titles.

For citation:
Levin, V. A., Vershinin, A. V., Zingerman, K. M., Ukhanov, E. M. 2026, "Convergence analysis of the spectral element method on the example of the Lamb problem in comparison with the analytical solution" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 27, no. 1, pp. 153–165.

1. Введение

Задача Лэмба — это задача о динамическом воздействии сосредоточенной силы на границу полупространства или полуплоскости, меняющейся по времени (**внешняя задача Лэмба**), и аналогичная задача с силой, меняющейся во времени и приложенной внутри упругого полупространства или полуплоскости (**внутренняя задача Лэмба**). Внутренняя и внешняя задачи Лэмба представляют огромный интерес для геофизики. Причиной этого стало то, что данная задача широко используется при моделировании различных волновых процессов, сопровождающих, например, взрывы или землетрясения.

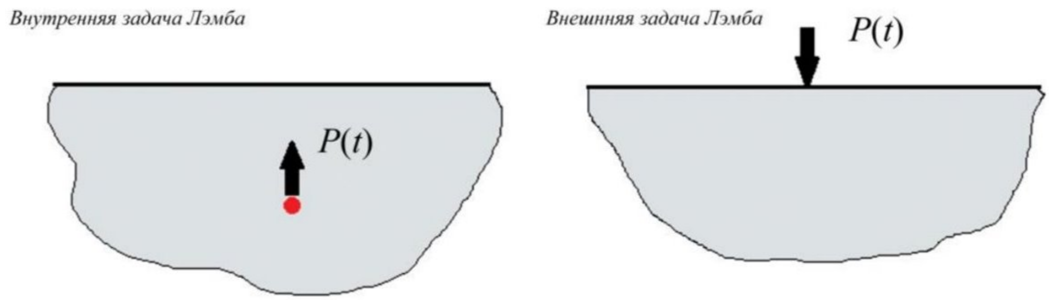


Рис. 1: Внутренняя и внешняя задачи Лэмба

Теория, необходимая для объяснения сейсмических данных, принадлежит одной из двух категорий: изучаются либо асимптотические приближения для волн, распространяющихся в реалистических моделях Земли, либо точные решения для крайне идеализированных сред. В 1904 г. **У. Ю. Лэмб (Lamb W.E., 1904)** [1, 2] дал точное решение задачи второго типа. Работы Лэмба [1, 2] содержали большинство важных для моделирования распространения сейсмических волн в упругой среде элементов.

В данной задаче источник действует как импульс, приложенный в точке свободной поверхности твердого полупространства по нормали к ней. При таком воздействии будут наблюдаться три волновых фронта — **это волна Рэлея**, а также **продольная** и **поперечная** волны [3].

Волны Рэлея образуются при динамическом воздействии на поверхности упругих тел [4].

В [5] показано, что можно вычислять интегральные представления, полученные Лэмбом, считая, что частота не действительная величина, а комплексная. Ранее с использованеим этой теории был решён ряд задач данного класса, а в 1984 году с помощью похожей техники В.Б. Поручиков [6] получил формулы для определения смещения на расстоянии x от точки приложения силы, если сила является дельта-импульсом по времени [7,8].

Аналитическое решение задачи Лэмба может быть полезно для верификации программного обеспечения для решения динамических задач теории упругости с помощью численных методов.

В данной статье выполнен анализ сходимости метода спектральных элементов (одной из современных модификаций метода конечных элементов) для динамической задачи теории упругости посредством сравнения численного решения с аналитическим решением задачи Лэмба. В статье рассматривается воздействие на границу нагрузкой, меняющейся по временному закону Берлаге. Расчеты выполнены с использованием отечественного прочностного программного пакета «Фидесис». Приводятся графики распределения напряжений для исследуемого материала. Исследована зависимость погрешности численного решения от порядка элементов при фиксированном количестве точек на длину волны Рэлея.

2. Математическая постановка задачи

Рассматривается упругая изотропная полуплоскость со свободной границей. Изучается решение внешней задачи Лэмба.

Постановка задачи: необходимо найти поле перемещений $u(x, y, t)$ на некотором расстоянии от источника сейсмической нагрузки — силы P. Сосредоточенная сила P приложена в центре свободной полуплоскости. Поле перемещений в полуплоскости удовлетворяет уравнению движения

$$(\lambda + \mu)\, \nabla divu + \mu \Delta u + P\,(x, y, t) = \rho \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

где ρ — это плотность, t — время, x и y — осевая и радиальная цилиндрические координаты частицы, λ и μ — параметры Ламе (модули упругости), $P\,(x, y, t)$ — нагрузка (рис. 2).

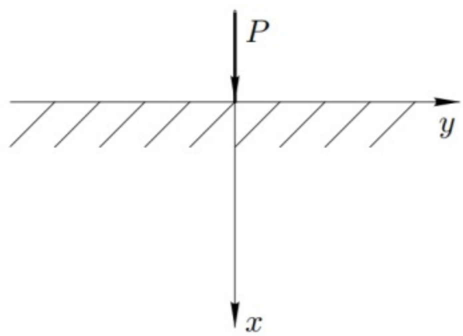


Рис. 2: Постановка задачи

Поле перемещений удовлетворяет однородным начальным условиям

$$u\,(x, y, t) = 0 \text{ и } \frac{\partial u\,(x, y, t)}{\partial t} = 0 \text{ при } t = t_0$$

и граничным условиям на границе полуплоскости:

$$\sigma \cdot \nu = (\lambda\,(divu)\, v + 2\mu sym\,(\nabla u) \cdot v) = P,$$

где v — нормаль к границе полуплоскости, совпадающая по направлению с осью x.

Динамическое воздействие на границу упругой полуплоскости или полупространства сосредоточенной или распределенной нагрузкой, меняющееся по временному закону Берлаге:

$$f\,(t) = A \cdot \frac{\omega_1^2 \cdot e^{-\omega_1 t}}{4} \left(\sin(\omega_0 t) \left(\frac{-t^2}{\omega_1} + \frac{t}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_1^3} \right) - \cos(\omega_0 t) \sqrt{3} \left(\frac{t^2}{\omega_1} + \frac{t}{\omega_1^2} \right) \right)$$

Где: $\omega_1 = \frac{\omega_0}{\sqrt{3}}$ и $\omega_0 = 2\pi\omega$, A — амплитуда, ω — частота, $f(t)$ - модуль вектора силы P.

На рис. 3 приведена зависимость силы от времени для случая $A = 10^8$, $\omega = 10$.

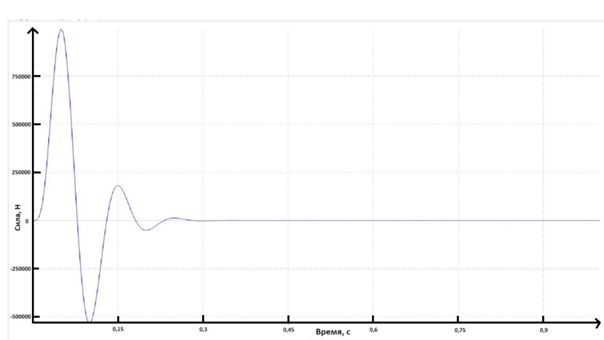


Рис. 3: График зависимости от времени силы, меняющейся по закону Берлаге

3. Аналитическое решение

Согласно [3] перемещение может быть представлено в виде

$$u = \nabla\varphi + \nabla \times \nabla \times (0, 0, \psi)$$

с потенциалами φ и ψ, удовлетворяющими уравнениям

$$\ddot{\varphi} = \frac{\Phi}{\rho} + \alpha^2\nabla^2\varphi \text{ и } \ddot{\psi} = \frac{\Psi}{\rho} + \beta^2\nabla^2\psi, \tag{1}$$

где α и β — скорости объемных волн, ρ — плотность, φ — потенциал P-волн, ψ — потенциал SV-волн, Φ и Ψ — потенциалы объемной силы f.

Компоненты вектора перемещений:

$$u_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{\psi}{y}, \quad u_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{2}$$

Согласно [8], [10] аналитическое решение задачи Лэмба на границе полуплоскости в асимптотической форме имеет следующий вид:

$$u_x \sim \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} -2iQ\cdot e^{\frac{i\pi}{4}}\left(\frac{2}{C_R}\left(\frac{1}{C_R^2} - \frac{1}{\beta^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)e^{i\omega\left(\frac{y}{C_R} - t\right)}e^{-\omega\left(\frac{1}{C_R^2} - \frac{1}{\alpha^2}\right)^{\frac{1}{2}}}e^{i\omega t}d\omega \tag{3}$$

$$u_y \sim \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} -2iQ\cdot e^{\frac{i\pi}{4}}\left(\frac{2}{C_R^2} - \frac{1}{\beta^2}\right)e^{i\omega\left(\frac{y}{C_R} - t\right)}e^{-\omega\left(\frac{1}{C_R^2} - \frac{1}{\alpha^2}\right)^{\frac{1}{2}}}e^{i\omega t}d\omega$$

Здесь $Q = A\left(\frac{2\pi\omega}{yC_R}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{\omega}{\beta^2 R\left(\frac{1}{C_R}\right)}$, $R\left(\frac{1}{C_R}\right) = \frac{4(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{C_R^2})^{1/2}(\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{C_R^2})^{1/2}}{C_R^2} + (\frac{1}{\beta^2} - \frac{2}{C_R^2})^2$.

В математическом пакете PTC Mathcad Prime 3.1 получены графики компонент векторов перемещения и скорости. Расчеты выполнены для материала со следующими свойствами: модуль Юнга $E = 2{\cdot}10^8$ (Па), коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$, плотность $\rho = 1900\left(\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}\right)$.

На рис. 4 и 5 приведены графики для горизонтальных компонент векторов перемещения и скорости в точке $(-96.6451, 0, 0)$. Из графиков видно, что перемещения и скорости равны нулю до момента прихода продольной волны, которая вызывает скачкообразные перемещения. Далее прибывает поперечная волна. Пересечение продольной волны со свободной поверхностью полуплоскости вызывает волну Рэлея, которая оказывает наибольшее влияние. После прохождения рэлеевской волны устанавливается статическое распределение перемещений поверхности.

Из графиков можно видеть, что сначала в данной точке возникают колебания, связанные с распространением **объемных волн** (P- и S-волны) а затем — колебания, связанные с распространением **волны Рэлея**.

4. Численное решение задачи и сравнение с аналитическим решением

Результаты численного решения получены с помощью программного обеспечения CAE Fidesys. Расчет распространения волн в программе происходил на основе метода спектральных элементов, который дает более быструю сходимость и высокую точность по сравнению с методом конечных элементов [11, 12, 13]. Сетка для геометрической модели, характеристики

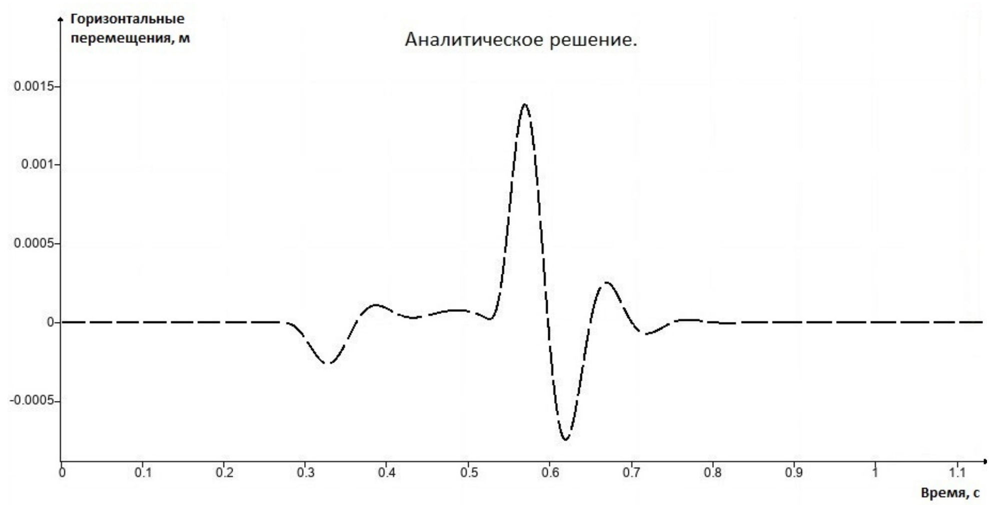


Рис. 4: График изменения горизонтальной компоненты перемещения на поверхности полуплоскости от времени t.

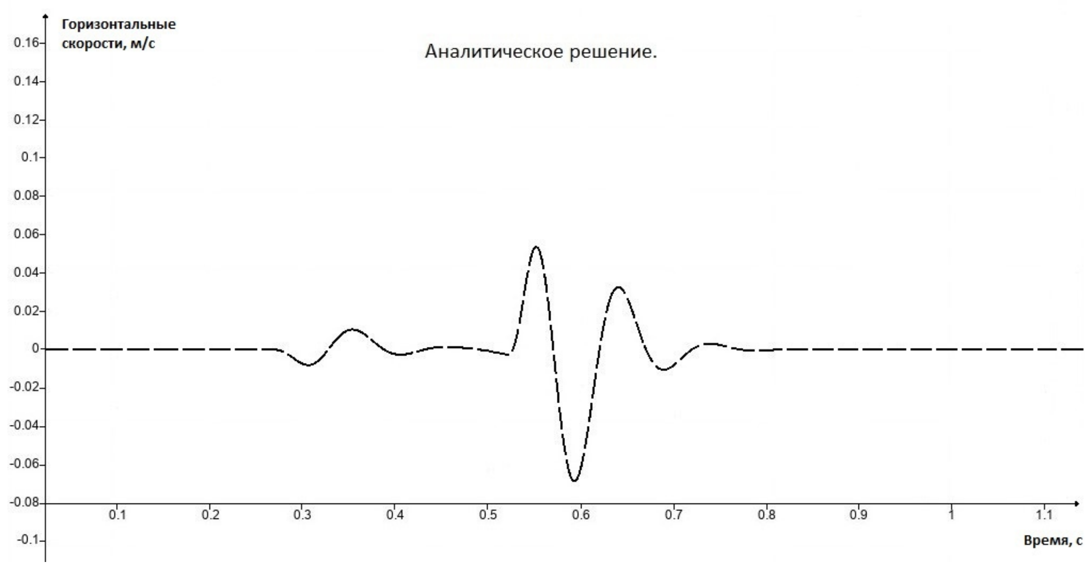


Рис. 5: График изменения горизонтальной компоненты скорости на поверхности полуплоскости от времени t.

которой представлены ниже, строилась на основе метода конечных элементов, а далее при помощи алгоритма, реализованного в CAE Fidesys [14, 15], преобразовывалась в сетку спектральных элементов необходимого порядка.

Свойства материала те же, которые использовались в предыдущем параграфе при расчетах для аналитического решения. Линейные размеры модели: ширина 1000 м, высота — опционально.

Максимальное время наблюдения — 3 секунды. Максимальное число шагов — 15000. Расчёты, как и вычисления для аналитического решения, приведенные выше, выполнены для точки (-96.6451, 0, 0).

Ниже, на рисунке 7 представлен результат распределения напряжений в модели (в момент времени $t = 1.7$ с):

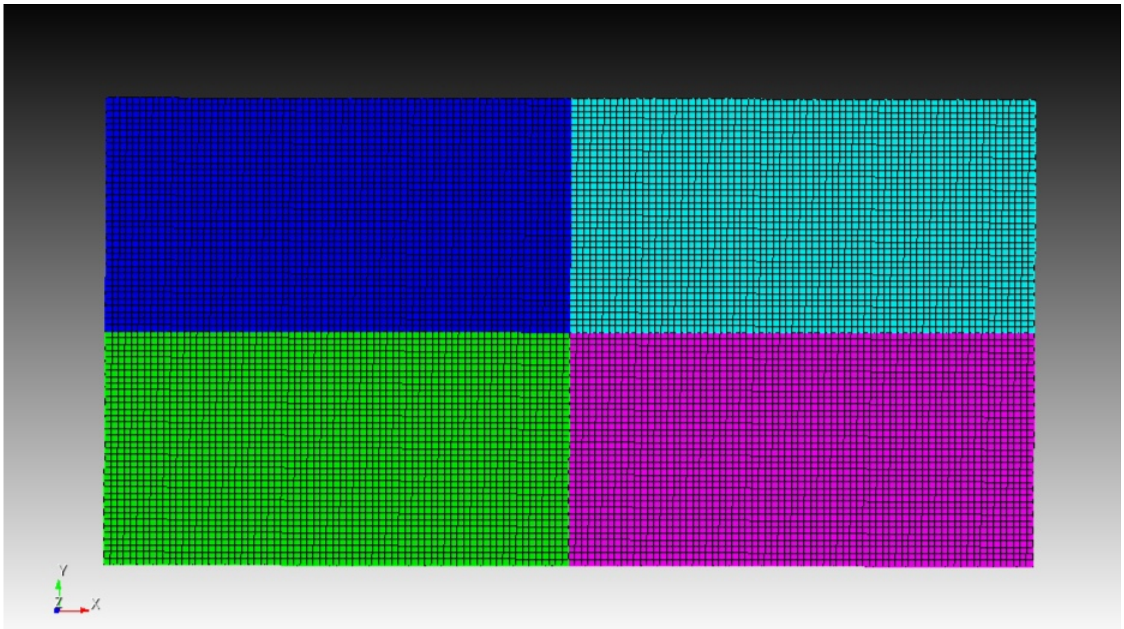


Рис. 6: Сетка модели

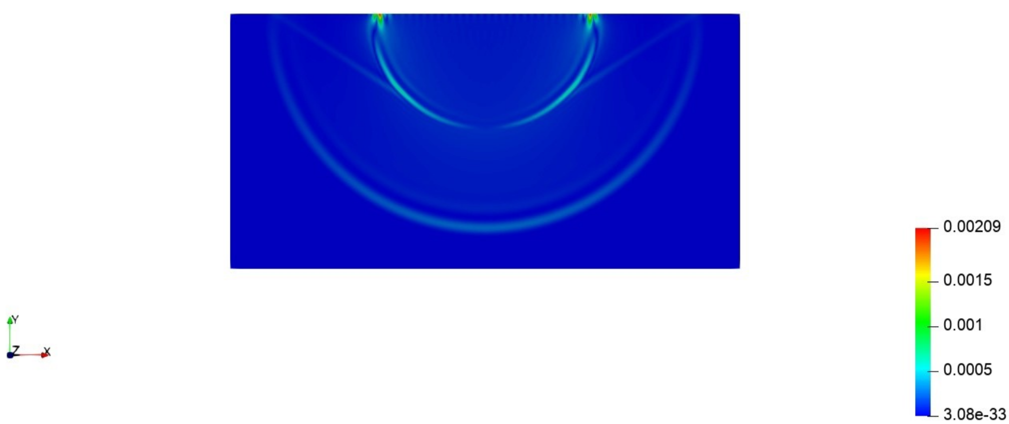


Рис. 7: Распределение напряжений в модели в вертикальном сечении

На рисунке 7 видно, что продольная волна распространяется быстрее поперечной волны. На границе полуплоскости распространяется волна Рэлея.

На рисунке 8 изображена поверхность, в которую переходит граница упругого полупространства при распространении волны, в момент времени $t = 1.7$ с.

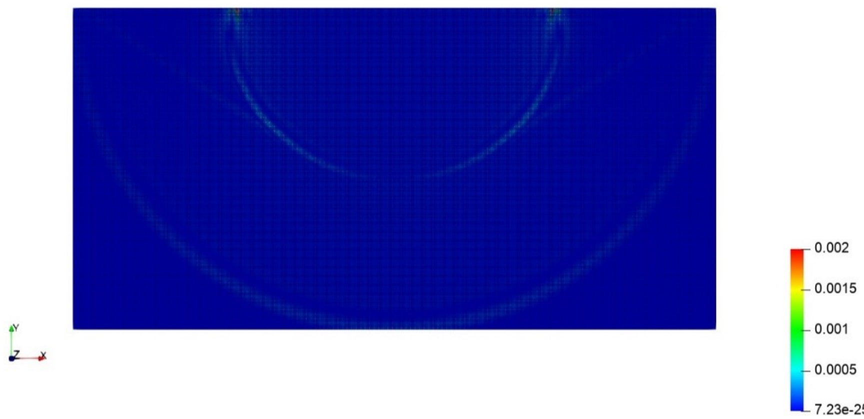


Рис. 8: Поверхность модели

Далее приведены результаты сравнения численного и аналитического решения задачи Лэмба.

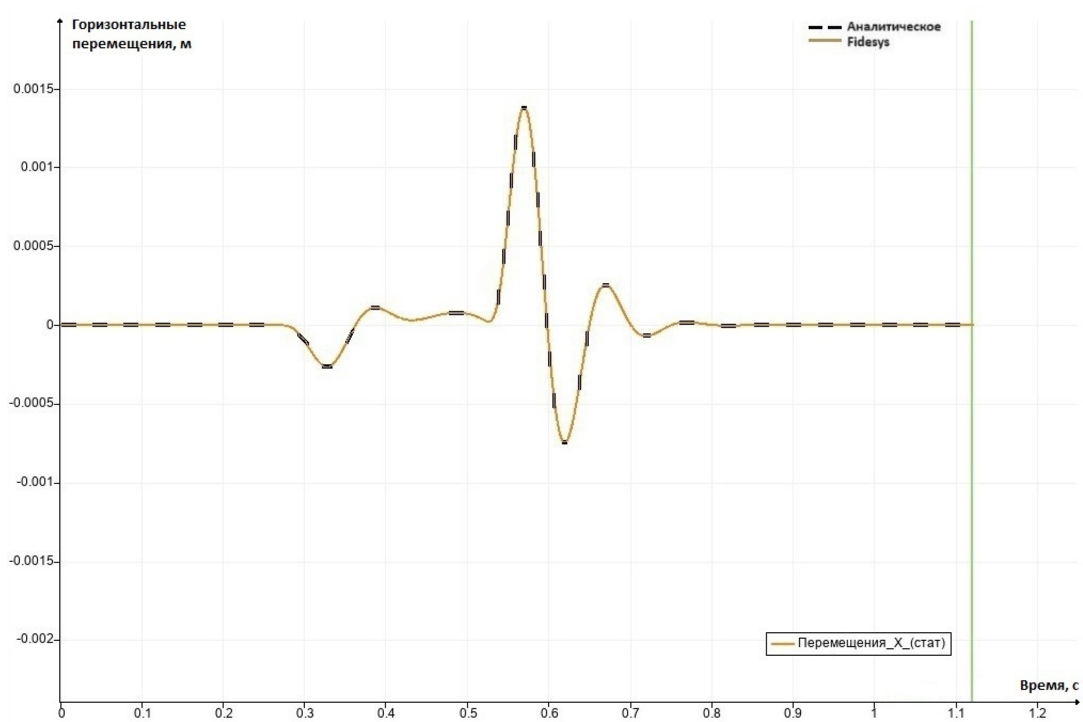


Рис. 9: Зависимость горизонтальной компоненты вектора перемещения от времени. Сплошная линия — численное решение, штриховая — аналитическое решение

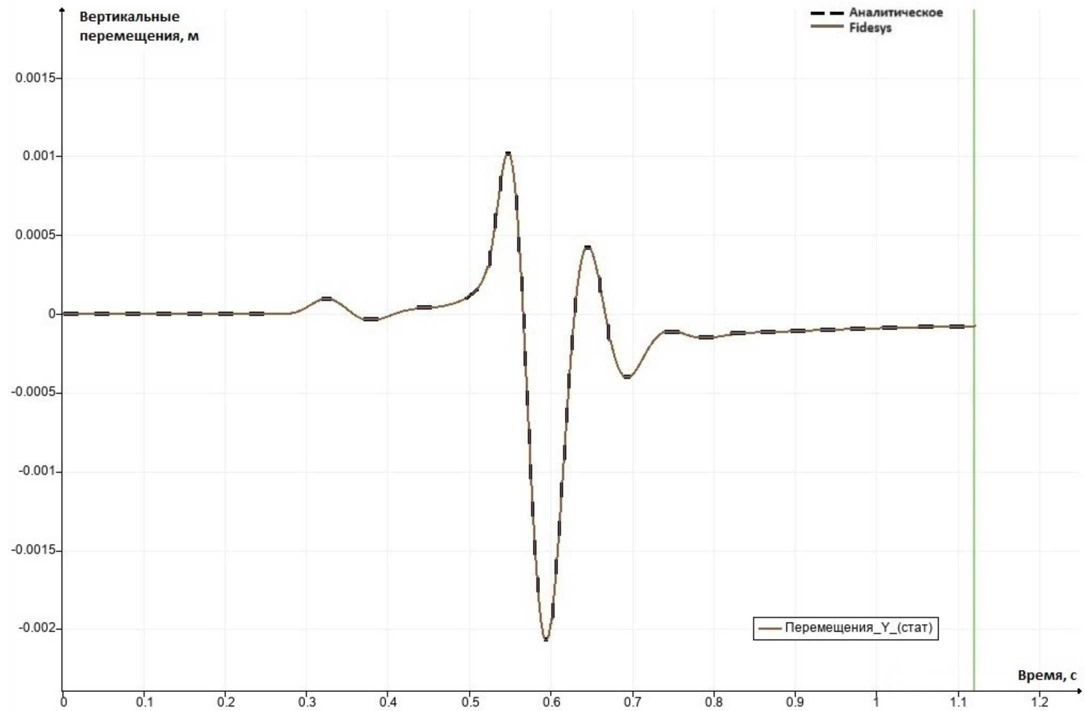


Рис. 10: Зависимость вертикальной компоненты вектора перемещения от времени. Сплошная линия — численное решение, штриховая — аналитическое решение

Проведено сравнение графиков перемещений и скоростей, полученных в математическом пакете PTC Mathcad 3.1 с помощью аналитической формулы, с результатами расчета в программном комплексе Fidesys. Наблюдается практически полное совпадение аналитического решения и конечноэлементного решения во всем исследовавшемся временном диапазоне. Для оценки сходимости решения, реализованного МСЭ в CAE Fidesys, проведено сравнение результатов, полученных на 3, 6 и 9 порядках. Все расчеты проводились на одинаковых параметрах разбиения сетки.

С повышением порядка элемента решение сходится к аналитическому. На рисунке выделяется решение задачи Лэмба в CAE Fidesys методом конечных элементов (3 порядок), для которого используемое разбиение сетки недостаточно: требуется измельчить сетку, что потребует, в свою очередь, больше расчетного времени. Следовательно, удобнее и выгоднее применять МСЭ как достаточно точный, современный и менее загруженный по вычислительному времени численный метод.

Отметим, что на основе разработанного алгоритма (скрипта) для программы CAE Fidesys становится возможным провести численные расчеты для многослойных сред, для которых построение аналитического решения затруднительно.

Количественные оценки разницы аналитического и численного решений выполнены по формуле

$$\text{Ошибка} = \frac{max\,|V_{\text{числ.}}(t) - V_{\text{анал.}}(t)|}{max\,|V_{\text{анал.}}(t)|} \cdot 100\%.$$

Для элементов третьего порядка погрешность составила 47 %, для элементов шестого порядка — 0.43 %, для элементов десятого порядка — 0.3 %.

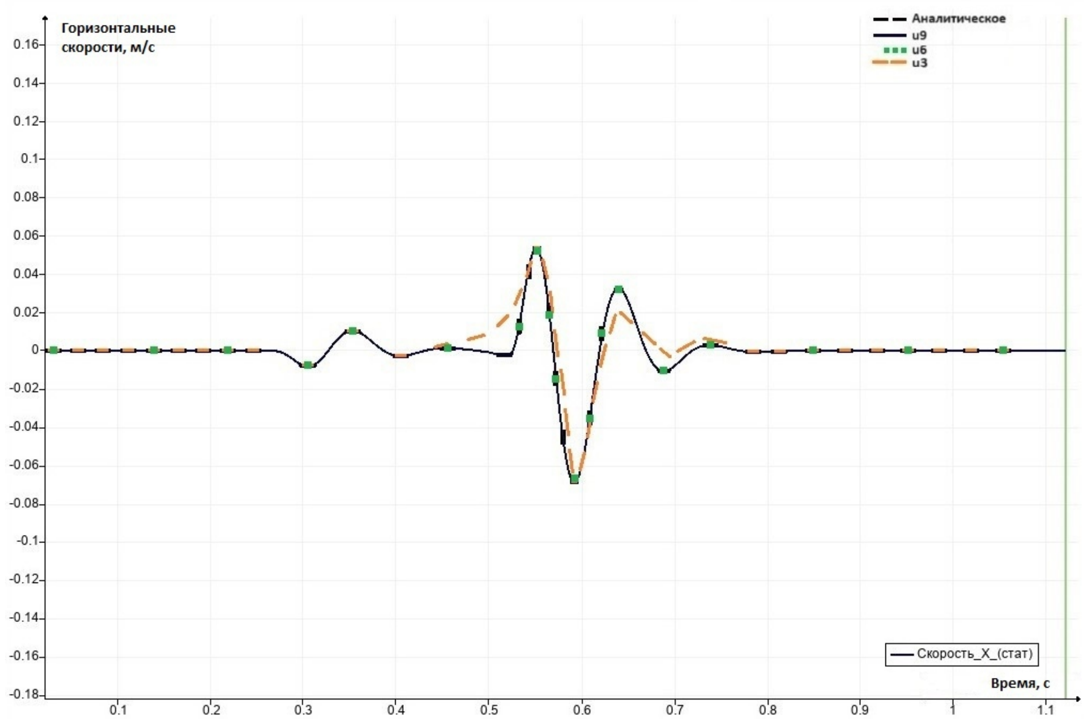


Рис. 11: Оценка сходимости метода спектральных элементов в системе CAE Fidesys для горизонтальной компоненты скорости.

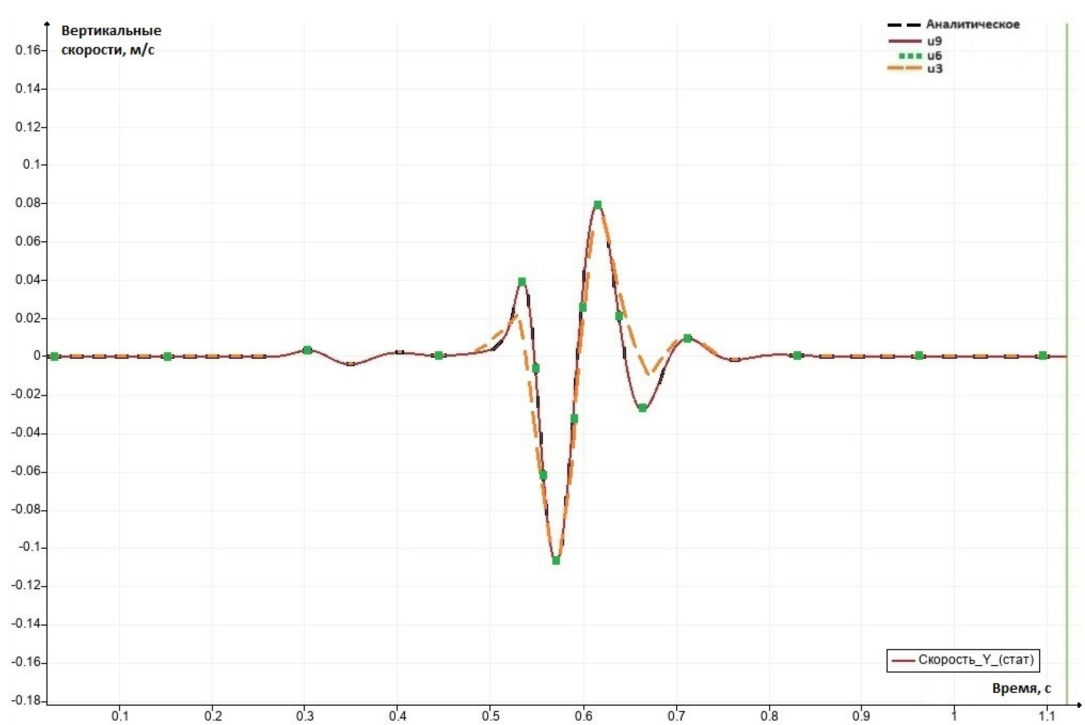


Рис. 12: Оценка сходимости метода спектральных элементов в системе CAE Fidesys для вертикальной компоненты скорости.

Далее была исследована **зависимость числа узлов (элементов), необходимых для достижения заданной точности, от порядка элементов**. Результаты расчетов содержатся в таблице 1. Приведена зависимость числа узлов/элементов на длину волны, необходимых для достижения погрешности в 1%, от порядка МСЭ и от размера элемента.

Таблица 1. Зависимость числа узлов/элементов на длину волны, необходимых для достижения погрешности в 1%, от порядка МСЭ и от размера элемента

Порядок	Размер элемента	Число элементов на длину волны (EPW)	Число точек на длину волны (PPW)	Погрешность (%)
1	0,35	51,4	51,4	0.97
2	1	18	36	0.96
3	2,1	8,5	26	0.95
4	4	4,5	18	0.95
5	9	2	10	0.93
6	15	1,2	7,2	0.93
7	24	0,75	5,2	0.92
8	36	0,5	4	0.9
9	54	0,33	3	0.9

Вывод: с увеличением порядка уменьшается число узлов в сетке, необходимых для достижения погрешности в 1%.

5. Заключение

Выполнен численный анализ сходимости метода спектральных элементов для задачи Лэмба — динамической задачи теории упругости о колебаниях упругого полупространства под действием точечной силы. Проведено сравнение решения этой задачи методом спектральных элементов с аналитическим решением. Результаты расчетов показали, что разность между численным и аналитическим решением достаточно мала во всем исследовавшемся временном диапазоне.

Проведено детальное сравнение аналитического решения задачи Лэмба с численным решением, полученным с использованием спектральных элементов различного порядка (вплоть до девятого). При численном решении задачи Лэмба с использованием элементов различного порядка удалось получить результаты, погрешность которых не превышает 1%. Проведен анализ зависимости числа точек (узлов сетки) на длину волны Рэлея (points per wavelength — PPW) для различных порядков спектральных элементов на примере задачи Лэмба для достижения погрешности не более 1% в сравнении с аналитическим решением. Показано, что с увеличением порядка элементов это число (PPW) резко уменьшается, что свидетельствует о преимуществе использования спектральных элементов высоких порядков в задачах полноволнового моделирования.

Результаты статьи могут быть обобщены на случай упругопластических материалов и наложения больших деформаций.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lamb H. On the Propagation of Tremors over the Surface of an Elastic Solid. Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Ser. A. 1904, vol. 203, pp. 1—42.

2. Lamb H. On waves due to a travelling disturbance, with an application to waves in superposed fluids. Philosophical Magazine, 1916, vol. 13, pp. 386—399, 539—548.

3. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т.2 М.: Наука, 1970г стр. 404-409

4. Аки К., Ричардс П. Количественная сейсмология: Теория и методы: Том.1 — М.: Мир, 1983. — 520 с.

5. Перегудов Д.В. Двумерная задача Лэмба. Метод Каньяра // Вычислительная сейсмология. 2000. Вып. 31. С. 120–137.

6.順 Поручиков В.Б. Методы динамической теории упругости. М. : Наука, 1986. П. МИР, Москва, 1983 г., 360 стр., УДК: 53+55

7. Братов В. А., Кузнецов С. В., Морозов Н. Ф.. Задачи Лэмба и родственные проблемы динамики // Прикладная математика и механика. 2022. Том 86, номер 4, страницы 451–469. doi: 10.31857/S003282352204004X

8. Kausel, E. 2012 “Lamb’s Problem at Its Simplest.” Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences 469 (2149): 20120462–20120462. doi: 10.1098/rspa.2012.0462

9. Strutt J.W. (Lord Rayleigh), On wave propagating along the plane surface of an elastic solid. Proc. London Math. Soc., 1885, vol. 17, pp. 4—11.

10. Gulizzi, Vincenzo; Saye, Robert. ≪ Modeling wave propagation in elastic solids via high-order accurate implicit-mesh discontinuous Galerkin methods≫ // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 395 (2022) 114971. DOI:10.1016/j.cma.2022.114971.

11. Левин В.А., Вершинин А.В. Нелинейная вычислительная механика прочности. Том 2. Численные методы. Параллельные вычисления на ЭВМ. Под общ. ред. В.А. Левина. М.: Физматлит, 2015. 544 с.

12. Lee E. H. Elastic-Plastic Deformation at Finite Strains. Journal of Applied Mechanics. 1969. Vol. 36. Issue 1. P. 1-6.

13. Levin, V.A., Zingerman, K.M., Krapivin, K.Y., 2023. "Numerical solution of stress concentration problems in elastic-plastic bodies under the superposition of finite deformations". *Advanced Structured Materials*. V. 198. P. 305–323. doi: 10.1007/978-3-031-43210-1_18.

14. Komatitsch D., Vilotte J. P. The spectral element method: An efficient tool to simulate the seismic response of 2D and 3D geological structures // Bull. Seismol. Soc. Am. 88:2 (1998), 368–392.

15. Konovalov D. Vershinin A., Zingerman K., Levin V. The implementation of spectral element method in a CAE system for the solution of elasticity problems on hybrid curvilinear meshes // Modeling and Simulation in Engineering. 2017 (2017), art. id. 1797561.

REFERENCES

1. Lamb, H. 1904, “On the propagation of Tremors over the Surface of an Elastic Solid”, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A*, vol. 203, pp. 1–42.

2. Lamb, H. 1916, “On Waves due to a Travelling Disturbance, with an Application to Waves in Super-posed Fluids”, *Philosophical Magazine*, vol. 31, pp. 386–399, 539–548.

3. Sedov, L.I. 1970, *Continuum Mechanics, Vol. 2*, Nauka, Moscow, pp. 404-409.

4. Aki, K. & Richards, P.G. 1983, *Quantitative Seismology: Theory and Methods, Vol. 1*, Mir Publ., Moscow, 520 p.

5. Peregudov, D.V. 2000, “The two-dimensional Lamb problem. Kanyar’s method”, *Computational Seismology*, no. 31, pp. 120–137.

6. Poruchikov, V.B. 1986, *Metody dinamicheskoy teorii uprugosti* [Methods of the Dynamic Theory of Elasticity], Nauka Publ., Moscow.

7. Bratov, V.A., Kuznetsov, S.V. & Morozov, N.F. 2022, "Lamb's problems and related problems of dynamics", *Applied Mathematics and Mechanics*, vol. 86, no. 4, pp. 451–469. doi: 10.31857/S003282352204004X.

8. Kausel, E. 2012, "Lamb's Problem at Its Simplest", *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 469, no. 2149, doi: 10.1098/rspa.2012.0462.

9. Strutt, J.W. (Lord Rayleigh) 1885, "On wave propagating along the plane surface of an elastic solid", *Proceedings of the London Mathematical Society*, vol. 17, pp. 4–11.

10. Gulizzi, V. & Saye, R. 2022, "Modeling wave propagation in elastic solids via high-order accurate implicit-mesh discontinuous Galerkin methods", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 395, art. id. 114971, doi: 10.1016/j.cma.2022.114971.

11. Levin, V.A. & Vershinin, A.V. (eds.) 2015, *Nonlinear Computational Strength Mechanics. Vol. 2. Numerical Methods. Parallel computing* [Nelinejnaya vy'chislitel'naya mekhanika prochnosti. Tom 2. Chislenny'e metody'. Parallel'ny'e vy'chisleniya na E'VM.], Fizmatlit, Moscow, 544 p.

12. Lee, E.H. 1969, "Elastic-Plastic Deformation at Finite Strains", *Journal of Applied Mechanics*, vol. 36, no. 1, pp. 1–6.

13. Levin, V.A., Zingerman, K.M. & Krapivin, K.Y. 2023, "Numerical solution of stress concentration problems in elastic-plastic bodies under the superposition of finite deformations", *Advanced Structured Materials*, vol. 198, pp. 305–323, doi: 10.1007/978-3-031-43210-1_18.

14. Komatitsch, D. & Vilotte, J.P. 1998, "The spectral element method: An efficient tool to simulate the seismic response of 2D and 3D geological structures", *Bulletin of the Seismological Society of America*, vol. 88, no. 2, pp. 368–392, doi: 10.1785/BSSA0880020368.

15. Konovalov, D., Vershinin, A., Zingerman, K. & Levin, V. 2017, "The implementation of spectral element method in a CAE system for the solution of elasticity problems on hybrid curvilinear meshes", *Modeling and Simulation in Engineering*, vol. 2017, art. id. 1797561, doi: 10.1155/2017/1797561.

Получено: 09.07.2025
Принято в печать: 12.02.2026

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 27. Выпуск 1.

УДК: 51(091) DOI: 10.22405/2226-8383-2026-27-1-166-198

Научная школа Якоба и Иоганна Бернулли. Учителя и ученики

Г. И. Синкевич

Синкевич Галина Ивановна — доктор физико-математических наук, Санкт-Петеррбургский государственный архитектурно-строительный университет (г. Санкт-Петербург).
e-mail: galina.sinkevich@gmail.com

Аннотация

В течение XVII в. в работах европейских ученых формировались аналитические методы, приходящие на смену геометрическим и синтетическим, где для каждой задачи создавался собственный уникальный конкретный метод, не допускающий обобщения на широкий класс задач. На базе обобщения аналитических методов создавали свои теории И. Ньютон и Г.В. Лейбниц. Их изложение было затруднительно для освоения. Прямых учеников не было ни у Ньютона, ни у Лейбница. В Англии пропаганду учения Ньютона взяли на себя К. Маклорен, Э. Галлей, А. де Муавр и Д. Стирлинг. В Европе распространением учения Лейбница занялись братья Бернулли. Рассматриваемый этап представляет собой переходный период от эпохи классических геометрических методов к универсальным аналитическим. Якоб и Иоганн Бернулли были лучшими учителями математики в Европе, такого объема знаний не давал ни один университет. Как в Базеле, так и в Париже у них было много учеников и последователей. Благодаря их педагогической деятельности сформировалась сильнейшая в Европе базельская математическая школа. Выделены группы ученых, обучавшихся либо консультировавшихся у Якоба Бернулли и Иоганна Бернулли как лично, так и в переписке, как регулярно, так и эпизодически, охарактеризована их научная деятельность. Это поколение в свою очередь создало потенциал для следующего поколения и дальнейшего развития аналитических методов, благодаря обобщению и классификации проблем анализа и аналитической механики уже к середине XVIII в. изменилась архитектура математики и расширились ее области.

Ключевые слова: математический анализ, Якоб Бернулли, Иоганн Бернулли, научно-педагогическая деятельность.

Библиография: 31 названий.

Для цитирования:
Синкевич Г. И. Научная школа Якоба и Иоганна Бернулли. Учителя и ученики // Чебышевский сборник, 2026, т. 27, вып. 1, с. 166–198.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 27. No. 1.

UDC: 51(091) DOI: 10.22405/2226-8383-2026-27-1-166-198

Jacob and Johann Bernoulli scientific school. Teachers and disciples

G. I. Sinkevich

Sinkevich Galina Ivanovna — doctor of physical and mathematical sciences, Saint Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering (Saint Petersburg).
e-mail: galina.sinkevich@gmail.com

Abstract

During the 17-th century, analytical methods were formed in the works of European scientists, replacing geometric and synthetic ones, where for each problem their own unique specific method was created, which did not allow generalization to a wide class of problems. Based on the generalization of analytical methods, I. Newton and G.W. Leibniz created their theories. Their presentation was difficult to master. Neither Newton nor Leibniz had direct students. In England, C. Maclaurin, E. Halley, A. de Moivre and D. Stirling took on the propaganda of Newton's doctrine. In Europe, the Bernoulli brothers took up the dissemination of Leibniz's doctrine. The period under consideration is a transitional period from the era of classical geometric methods to universal analytical ones. Jacob and Johann Bernoulli were the best teachers of mathematics in Europe; no university gave such a volume of knowledge. Both in Basel and in Paris, they had many students and followers. Thanks to their teaching activities, the Basel mathematical school, the strongest in Europe, was formed. Groups of scientists who studied or consulted with Jacob Bernoulli and Johann Bernoulli, both personally and in correspondence, both regularly and occasionally, are identified, and their scientific activities are characterized. This generation, in turn, created the potential for the next generation and the further development of analytical methods, thanks to the generalization and classification of problems of analysis and analytical mechanics, by the middle of the 18-th century the architecture of mathematics had changed and its areas had expanded.

Keywords: mathematical analysis, Jacob Bernoulli, Johann Bernoulli, scientific and pedagogical activity.

Bibliography: 31 titles.

For citation:
Sinkevich, I. I. 2026, “Jacob and Johann Bernoulli scientific school. Teachers and disciples”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 27, no. 1, pp. 166–198.

1. Введение

В XVII в. в работах европейских ученых П. Ферма, Р. Декарта, Б. Кавальери, Дж. Валлиса, Дж. Грегори, И. Барроу и многих других формировались аналитические методы, приходившие на смену геометрическим. Особенностью классических методов было создание уникального для каждой задачи конкретного способа, не допускающего обобщения на широкий класс задач. Трудные задачи поддавались лишь математикам-одиночкам, а не широкому кругу образованных людей. Такие разобщенные приемы с трудом адаптировались к методике обучения.

Европейские университеты не являлись научными центрами, в них господствовали схоластические приемы обучения. "Высшими" считались богословский, юридический и медицинский факультеты. Философский факультет (куда входила математика) был подготовительным и считался второстепенным. В школах учителя математики не входили в коллегию преподавателей, их статус отражала поговорка "mathematicus non est collega" (математик – не коллега).

Но жизнь ставила перед математикой новые задачи. Они формировались в промышленности, строительстве, транспорте, артиллерии, навигации, приборостроении, физиологии. Это проблемы гидротехники (давление воды на плотины и шлюзы, работа насосов; движение воды в каналах, кровообращение), кораблестроения и навигации (устойчивость плавающих тел, движение твердого тела в жидкости, картография, определение долготы корабля в открытом море), артиллерии (движение брошенного тела в пустоте и в сопротивляющейся среде), оптики (свойства линз и их систем), точного приборостроения (часы и колебания маятника) ([1], с. 10).

Математики нуждались в среде общения, эпистолярные пути уже не выдерживали потока научной информации. Возникают первые научные журналы: в Париже *Journal des sçavans* (1665 г., на латыни), в Лондоне *Philosophical Transactions of the Royal Society* (1665 г., на латыни), в Лейпциге *Acta Eruditorum* (1682 г., на латыни), в Риме *Giornale de' Letterati* (1668 г., на итальянском), уделявшие немало страниц математическим статьям.

Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646–1716), мечтавший об универсальном математическом языке, понятном широкому кругу математиков, использовавший алгебраический подход, и Исаак Ньютон (1642–1727), один из творцов классической физики, использовавший кинематический подход, создали гениальную теорию – дифференциальное и интегральное исчисление. К сожалению, они не были преподавателями и не имели непосредственных учеников.

В 1684 г. в *Acta Eruditorum* была опубликована фундаментальная статья Лейбница "Новый метод максимумов и минимумов, для которого не служат препятствием ни дробные, ни иррациональные величины, и особый для этого род исчисления" [24][1]. Этот метод был изложен на шести с половиной страничках плюс страничка чертежей. В статье вводятся основные правила и формулы дифференцирования, геометрический смысл производной и его применение к исследованию кривых – хорошо знакомый всем нам материал, но изложен он весьма схематично, невнятно и не строго. Якоб Бернулли (1654–1705), тогда еще не знакомый с Лейбницем, написал ему письмо с просьбой о разъяснении неясных мест, но Лейбниц был в длительном отъезде и ответил лишь через три года[2]. Якоб Бернулли привлек к изучению метода Лейбница своего младшего брата Иоганна (1667–1748), математический талант которого расцвел к 1687 г. Братьям удалось разгадать основы метода, воссоздать то, что было опущено Лейбницем в его сжатой публикации, и значительно развить новое исчисление. Не случайно Лейбниц высоко ценил их достижения и писал, например, в письме от 21.09.1694 г.: "Эта метода не менее Ваша, чем моя". Якоб совместно с Иоганном овладели дифференциальным и интегральным исчислениями настолько, что вскоре смогли приступить к систематическому развитию метода.

Триумвират – Лейбниц, Якоб и Иоганн Бернулли – менее чем за 20 лет чрезвычайно обогатил анализ бесконечно малых. В отличие от замкнутого И. Ньютона, неохотно публиковавшего свои открытия, общительный и приветливый Г. Лейбниц широко пропагандировал новый метод во всех странах, где он бывал. Благодаря семье математиков Бернулли и их ученикам сформировалась сильная базельская школа математики с европейской известностью. Якоб и Иоганн Бернулли были лучшими учителями математики в Европе, объем преподаваемых ими

[1]В 1948 г. ее перевел на русский язык А.П. Юшкевич [10].

[2]С 1676 г. Лейбниц служил историографом при дворе герцога, его работа требовала разъездов по всей Европе. В 1691 г. Иоганн Бернулли был в путешествии по Германии и намеренно заехал в Ганновер, где познакомился с Лейбницем, что подтверждено их перепиской. Когда Лейбниц познакомился с Якобом Бернулли, точно неизвестно, вероятно, около 1695 г. В дальнейшем встречи Лейбница с братьями Бернулли повторялись и поддерживались оживленной перепиской.

знаний значительно превосходил университетские курсы. Как в Базеле, так и в Париже, у них было много учеников и последователей, учившихся регулярно и очно, как в университете, так и частным образом, либо консультировавшихся эпизодически и по переписке. Так, у Якоба учились его брат Иоганн, племянник Николай I, Пауль Эйлер (отец Леонарда), Якоб Герман; у Иоганна – его сыновья Николай II и Даниил, Гийом Франсуа де Лопиталь, Габриэль Крамер, Леонард Эйлер, Пьер Луи де Мопертюи, Никола де Бегелен. В Париже И. Бернулли обучил методу Лейбница членов кружка Николя Мальбранша: священника Луи Бизанса, математиков Шарля Рене Рейно, Пьера де Монмора, маркиза Лопиталя и Пьера Вариньона, астронома Алекси Клеро. Все они имели своих учеников, таким образом, учение Лейбница распространялось по всей Европе. Самую сильную опору учение обрело во Франции, охватило Швейцарию, Италию и Россию.

Братьями Бернулли была выработана подача материала в виде легко остающихся в памяти формул, что давало точки роста для новых преобразований; благодаря существованию общего метода решались и возникающие попутно проблемы. Использовавшиеся методы базировались на классической геометрии и механике, но привлекалась и геометрия неделимых, и модельный анализ, и кинематический метод, и использование рядов, и инфинитезимальные методы, апеллирующие к сложным пропорциям, использованию первой и второй производной для определения участков монотонности, экстремумов, направления выпуклости и точек перегиба, построению касательных и их связи с квадратурами. Понятия неопределенного интеграла в XVII в. еще не было, но создавались обширные таблицы дифференциалов для конкретных задач. Наряду с алгебраическими кривыми из задач физики и механики в XVII в. появились и заинтересовали математиков новые кривые: брахистохрона, трактриса, циклоида, многолепестковые розы, спирали, цепная линия; эволюты и эвольвенты, конхоиды, верзьера, строфоида и мн. др. В XVII–XVIII в. свойства трансцендентных кривых выражались в алгебраической форме на основе зависимостей между специально подобранными отрезками. Далеко не всегда их можно было построить классическими методами циркуля и линейки. Приходилось использовать кинематический метод (представление кривой как траектории движения точки, полученного в результате сложения простых движений), модельный анализ, допускающий физический эксперимент по измерению длины кривой с помощью нитки и определению площади между кривой и ее асимптотой, центра тяжести с помощью подвешивания грузиков на модель кривой, и проч.

Я. Герман говорил: “при исследовании провисания ткани (навеса, Веларии) и рисунка полотна я помещал перед глазами эти фигуры такими, какими они должны быть: я получил кривые; разделив кривые на элементы, я исследовал, на что должны влиять механические принципы в каждом, и так я спускался шаг за шагом к простейшим принципам, из композиции которых впоследствии получил построение кривой; и это действительно оказалась Велария (навес) или цепная линия” ([7], с. 4).

Особенностями научной школы Лейбница–братьев Бернулли были общность разрабатываемых проблем, интенсивное коллегиальное общение в ежемесячном журнале *Acta eruditorum*. Обсуждались и предлагались задачи, назначались призы за решения, рецензировались, критиковались и оценивались методы, исправлялись ошибки, ради сохранения приоритета публиковались или рассылались надежным людям анаграммы и логогрифы – зашифрованные решения, авторы соревновались в получении наиболее изящного либо наиболее общего способа решения. Чтение этого журнала показывает, как развивался и укреплялся метод дифференциального и интегрального исчисления. Так, например, Якоб Бернулли в 1690 г. предложил задачу: найти форму струны (или каната, или цепи), совершенно гибкой во всех своих частях, но неспособной к растяжению, свободно подвешенной между двумя неподвижными точками. Решение этой проблемы предложили Иоганн Бернулли, Лейбниц и Гюйгенс, а кривая получила название фуникулярия (веревочная) и/или катеноида (цепная). В 1696 г. Иоганн Бернулли поставил задачу о брахистохроне: опубликовал ее без решения, приглашая лучших математиков заняться ею. Четверо ученых решили эту задачу: Лейбниц, Ньютон, де-Лопиталь и Якоб Бернулли. Решение Якоба Бернулли было наиболее общим и сыграло выдающуюся роль в истории математики. Искали также формы и уравнения пространственных кривых и поверхностей: паруса; ткани, плавающей в воде; вуали, развеваемой ветром; стержня под нагрузкой и многие другие. Как говорил Якоб Герман в 1726 г. в Санкт-Петербурге, "Та высокая эффективность, которой постепенно достигло дифференциальное исчисление, должна быть отнесена по большей части к [Якобу] Бернулли, поскольку он, в своих проблемах, на решение которых едва ли можно было надеяться другими методами, дал чудесные результаты в удивительном количестве; иначе этим исчислением бы долго пренебрегали и мало использовали" ([6], с. 14).

Более всего приверженцев нового учения привлекала возможность по геометрическим или механическим свойствам кривых создавать их уравнения, а также возможность вычислять квадратуры[3] кривых (длину, площадь и проч.). Тому немало примеров, о которых мы надеемся в будущем рассказать читателю.

Я. Герман дал прекрасную оценку новому исчислению: "Новый метод дифференциального исчисления в стиле Лейбница, или ньютоновский метод флюксий прекрасен, как жизнь, поскольку он приводит к недоступным для предыдущих методов истинам, и даже к таким, истинность которых устанавливалась из других источников, это дало бы подтверждения, которые он должен был бы предоставить, однако у него не было недостатка в противниках и критиках, и даже по сию пору у него нет в них недостатка, хотя их теперь меньше, чем раньше. Ибо этот метод, как и искусство фокусников, показался противникам скорее чудесным, чем надёжным, на который можно уверенно положиться и пользоваться" ([6], с. 13).

2. Основные члены школы-сообщества

2.1. Якоб Бернулли (Jakob Bernoulli, 1654–1705)

Рис. 1: Якоб Бернулли. Портрет работы художника Никлауса Бернулли, брата Якоба. 1687.

[3]Квадратурой называли любое вычисление с помощью интеграла.

Старший из братьев и первый математик в семье. Учился в Базельском университете. Вопреки воле отца начал заниматься математикой, получил степень магистра философии в 1671 г., после чего совершил путешествие по Европе. В Нидерландах познакомился с Христианом Гюйгенсом (1629–1695). Вернувшись в Базель, стал читать в университете курс экспериментальной физики, с 1686 г. занял кафедру математики. Научные интересы Якоба были сосредоточены на развитии и применениях математического анализа. Освоив алгоритм Лейбница, приложил его к исследованию кривых. Совместно с братом Иоганном заложил основы вариационного исчисления. Важную роль здесь сыграло решение задачи о брахистохроне и изопериметрической задачи, состоящей в отыскании фигуры, ограниченной линией определенной длины и имеющей наибольшую площадь. При отыскании сумм одинаковых степеней натуральных чисел Якоб открыл встречающиеся в различных разделах математики числа, названные впоследствии его именем. Он выполнил значительные исследования в области числовых рядов.

Основополагающий вклад внес Якоб в теорию вероятностей. Этими исследованиями он занимался в последние 20 лет жизни. Итогом стало выпущенное его племянником Николаем Бернулли в 1713 г., через семь лет после смерти Якоба, “Искусство предположений”, содержащее его закон больших чисел. В области научных интересов Я. Бернулли находились и проблемы механики, гидравлики, сопротивления материалов.

2.2. Иоганн Бернулли (Johann Bernoulli,1667–1748) – младший брат и ученик Якоба Бернулли

Рис. 2: Иоганн Бернулли. Портрет работы И. Р. Хубера, 1740 г.

Якоб привлек к занятиям математикой своего младшего брата Иоганна. Иоганн продолжал по настоянию отца занятий медициной, в 1690 г. защитил диссертацию на звание лиценциата, дающую право читать лекции в университете. Затем отправился в длительное путешествие, около года жил в Женеве, переехал в Париж (1692 г.). Приезд Иоганна в столицу Франции сыграл решающую роль в приобщении французских математиков к школе Лейбница. В Париже Иоганн познакомился с астрономом Д.Д. Кассини, математиком Ф. де ла Гиром (ст.). Дружба и переписка Иоганна с П. Вариньоном продолжалась до самой смерти последнего в 1722 г.

В литературно-философском салоне Николя Мальбранша Иоганн познакомился с механиком П. Вариньоном и маркизом Г. де Лопиталем, имевшим репутацию одного из крупнейших французских математиков. Легкость, с которой И. Бернулли решал трудные, с точки зрения Г. Лопиталя, задачи, поразила его, Лопиталь начал брать у И. Бернулли уроки, а затем, после отъезда И. Бернулли в Базель, получал его лекции в письменном виде. Их переписка продолжалась более 10 лет, до самой смерти Лопиталя. В 1696 г. Лопиталь издал свой учебник "Анализ бесконечно малых" [25], [3]. Курс, читаный Бернулли и посылаемый в письмах Лопиталю, разошелся в копиях по рукам. Такая копия была у Я. Германа, Ш. Рейно, Л. Бизанса, П. де Монмора, Н. Мальбранша. Опубликован этот курс И. Бернулли был уже после смерти Г. Лопиталя, в третьем томе сочинений И. Бернулли в 1742 г.: "Математические лекции о методе интегралов и других вопросах, написанные для маркиза Лопиталя" [13], а "Лекции по исчислению дифференциалов" [14] были обнаружены в рукописях библиотеки Базельского университета в 1922 г. и изданы в 1924 г. Несмотря на то, что курс И. Бернулли был прочитан одному слушателю, он сыграл большую роль в становлении анализа.

В ноябре 1692 г. по настоянию родных Иоганн возвратился домой и продолжал изучать медицину. В 1694 г. он получил степень доктора медицины, защитив диссертацию "О движении мускулов", в которой задачи о форме и движении мускулов решались с помощью анализа бесконечно малых. Т.к. в Базельском университете кафедра математики была занята его старшим братом, И. Бернулли принял предложение Гронингенского университета (Голландия), где преподавал с 1695 по 1705 г. После смерти Якоба Иоганн вернулся в Базель и в течение 42 лет занимал кафедру математики в университете.

Первая его лекция "О новых фактах анализа и высшей геометрии" собрала огромную аудиторию. Его лекции слушали студенты и ученые из Англии, Италии, Франции, Швеции и других стран. Он вел чрезвычайно деятельную жизнь: руководил кафедрой, факультетом и университетом (был восемь раз деканом философского факультета и два раза ректором университета), председательствовал и выступал на диспутах, переписывался с математиками, физиками, Академиями, членом которых состоял, никогда не прекращал научную работу. Регулярно проводил "приватные коллегии", то есть читал лекции у себя на дому. На эти лекции собирались близкие ему люди: сыновья Николай, Даниил, Иоганн, Й. Гесснер со своим другом А. фон Халлером, П. де Мопертюи и другие. При всей своей занятости Иоганн находил время для выполнения поручений магистрата: в течение года ежедневно проводил несколько часов в школах города.

Иоганн был счастлив в учениках. В молодости он обучал Гийома де Лопиталя, Пьера Вариньона, в университете его студентами были трое его сыновей (Николай, Даниил и Иоганн), Г. Крамер, Й. С. Кениг и другие выдающиеся математики. Особое внимание Иоганн уделял будущему великому математику Леонарду Эйлеру, с ним он встречался и проводил занятия отдельно, каждую субботу. Многогранная педагогическая деятельность И. Бернулли привела к созданию школы, которой суждено было в следующих поколениях еще более развить новую математику.

Иоганн Бернулли дал первое систематическое изложение дифференциального и интегрального исчислений, нашел новые методы решения дифференциальных уравнений, впервые поставил и решил задачи о геодезических линиях. Он успешно решал механические задачи: в теории колебаний маятника, теории удара, гидравлике. Одна из наиболее значительных заслуг И. Бернулли перед наукой состоит в том, что он поставил и решил задачу о брахистохроне, тем самым положив начало вариационному исчислению. В исследованиях по механике применял закон сохранения энергии (живой силы, как тогда говорили).

2.3. Пауль Эйлер (Paulus III Euler, 1670–1745), ученик Якоба Бернулли

Отец Леонарда, пастор Реформатской церкви. Из автобиографии Леонарда Эйлера: "Мой отец был Паулюс Эйлер, тогда назначенный пастором в деревню Риен, в часе езды от Базеля, а имя моей матери было Маргарета Брукер. Мои родители переехали в Риен, где в свое время я получил от отца свое первое обучение; и поскольку он был одним из учеников всемирно известного Якоба Бернулли, он попытался передать мне первые принципы математики, и для этой цели использовал "Косс" Кристофа Рудольфа с аннотациями Михаэля Штифеля[4]", по которому я усердно практиковался в течение нескольких лет." ([4], с. 248–249).

2.4. Якоб Герман (Jakob Hermann, 1678–1733), ученик Якоба Бернулли

Рис. 3: Якоб Герман. Автор портрета и дата написания неизвестны

Швейцарский математик и механик, любимый ученик Якоба Бернулли, родственник (троюродный дядя по матери) Леонарда Эйлера, стал первым профессором высшей математики Петербургской академии наук. Его отец был директором гимназии Базеля (Gymnasialrektor).

[4]Михаэль Штифель (Michael Stifel, ок.1487–1567) – немецкий математик, один из изобретателей логарифмов, автор книги "Die Coss Christoffs Rudolffs", Königsberg, 1553 г. Коссисты – немецкие алгебраисты XIV–XV веков. Неизвестное в уравнениях они, следуя Л. Пачоли, называли *cosa, Coß* – вещь. Кристоф Рудольф (Christoph Rudolff, 1499–1545) – немецкий математик, автор первого немецкого учебника алгебры «Быстрый и красивый счёт при помощи искусных правил алгебры, обычно называемых „Косс"»(Behend und hübsch Rechnung durch die kunstreichen regeln Algebre, so gemeinicklich die Coß genennt werden, 1525). Заметим, что у П.П. Пекарского, а вслед за ним и у В.Е. Прудникова имя автора этого учебника расшифровывается как Рудольф Лос (Rudolff Losz), видимо, по прочтении рукописной автобиографии Л. Эйлера и неразборчивости его почерка.

Якоб Герман изучал философию в Базельском университете и много внимания уделял математике и механике, занимаясь с профессором Я. Бернулли, а затем защитив диссертацию по данной им теме (ряды) и под его руководством. Блестящая полемическая статья (1700 г.) Германа в защиту учения Лейбница обеспечила ему уважение и покровительство последнего. Лейбниц способствовал его избранию иностранным членов Берлинской академии наук (1701 г.). Именно Герману Лейбниц поручил в 1705 г. написать некролог на смерть Я. Бернулли для *Acta eruditorum*.

В 1707–1713 гг. Герман был профессором математики в Падуе (Италия), где, помимо преподавания, основным его научным интересом оставалось распространение, разработка и применение дифференциального исчисления. У него сложился круг научного общения, в который входили многие крупные математики Италии, в том числе Я. Риккати и Г. Гранди. В 1708 г. Герман был избран членом Академии в Болонье. С 1714 по 1725 г. Герман преподавал в университете Виадрина во Франкфурте-на-Одере. В 1716 г. издал свой труд по механике "Форономия" [23].

С 1725 по 1731 г. Герман был *Первым профессором высшей математики* (professor primarius et Matheseos sublimioris) в Санкт-Петербурге, в созданной указом Петра I Академии наук. Как старший из профессоров выступал перед императрицей на ежегодных открытых заседаниях Академии, всячески пропагандируя учение Лейбница.

Основные работы Германа относятся к дифференциальному исчислению, небесной механике, геометрии, сферической геометрии, тригонометрии, оптике, вариационному исчислению, акустике. Его труды по механике характеризуют переход от геометрических представлений Ньютона к аналитическим методам исчисления бесконечно малых.

2.5. Пьер Вариньон (Pierre Varignon, 1654–1722), ученик Иоганна Бернулли

Рис. 4: Пьер Вариньон. Работа неизвестного автора. Ок. 1719 г.

Французский математик и механик. Изучал богословие в иезуитском колледже в Кане (Caen), но затем увлекся математикой и механикой, в 1687 г. опубликовал "Проект новой механики" [31], где сформулировал понятие параллелограмма сил, момента сил и геометрических операций сложения и вычитания сил. Учился у И. Бернулли, поддерживал переписку с обоими братьями Бернулли, Лейбницем и Ньютоном. С 1688 г. – профессор математики колледжа Мазарини, с 1704 г. – профессор Коллеж де Франс. Член Парижской академии наук (1688 г.), Лондонского королевского общества (1714 г.). Сферой его интересов были статика и механика, инфинитезимальный анализ, геометрия, гидромеханика. Активно пропагандировал дифференциальное исчисление. Формализовал понятия мгновенной скорости и ускорения и связи между ними на основе дифференциального исчисления.

С 1700 г. в Парижской академии наук нарастало активное противодействие новому исчислению. Еще в 1697 г. Пьер Вариньон столкнулся с первой критикой со стороны Академии. Так, он писал Иоганну Бернулли: "Маркиз де Лопиталь все еще в деревне, так что я оказался здесь один, на меня пала обязанность защищать бесконечно малые величины, истинным мучеником которых я являюсь, выдержав уже столько нападок за них со стороны некоторых математиков старого стиля, огорченных тем, что молодые люди догоняют и даже превосходят их в этом исчислении, делают все возможное, чтобы порицать их; хотя с тех пор, как маркиз де Лопиталь дал решение Вашей проблемы *linea celerrimi descensus* (линии скорейшего спуска), они уже не говорят так громко, как прежде" ([15], с. 26).

2.6. Шарль Рене Рейно (Charles René Reyneau, 1656–1728), ученик Иоганна Бернулли

Французский математик, аббат, свободный академик Парижской академии наук (т.е. член-корреспондент, 1716 г.)[5]. С 1683 г. в течение 22 лет преподавал математику в колледже в Анжере. С целью обоснования алгебраических и аналитических методов по примеру классического обоснования геометрии и уступая настоятельной просьбе Мальбранша, Ш.Р. Рейно на основе работ Декарта, Лейбница, Ньютона и братьев Бернулли, переписки и рукописей, издал в 1798 г. ставший популярным двухтомник "Доказательный анализ, или метод решения математических задач" [29]. Первый том содержал теорию нового исчисления, в том числе доказательства многих методов[6], оставленные авторами без внимания, второй том – приложения. Некоторые ошибки были исправлены А. Клеро во втором издании 1736 г. В 1714 г. издал первый том вводного учебника "Наука об исчислении величин вообще, или Элементы математики" [30], оба тома вышли посмертно в 1739 г.

2.7. Луи Бизанс (Louis De Byzance, ?–1722), ученик Иоганна Бернулли

Священник Луи Бизанс (при рождении – Рафаил Леви) из Константинополя. Проявлял большой интерес к восточным рукописям Нового Завета, был способным математиком. Член парижского кружка Мальбранша, где стал учеником Иоганна Бернулли. В 1705 г. аббат Рейно среди других рукописей получил от Бизанса "Leçons" – рукопись лекций Иоганна Бернулли, подготовленных для Лопиталя[7].

[5] https://bookofproofs.github.io/history/17th-century/reyneau.html

[6] Заметим, что в то время доказательства были приняты только в геометрии; в алгебре удовлетворялись "демонстрациями", т.е. примерами и/или контрпримерами. Вопрос об обосновании математического анализа был открыт.

[7] https://bookofproofs.github.io/history/17th-century/reyneau.html

2.8. Гийом Франсуа маркиз де Лопиталь (Guillaume François Antoine, marquis de L'Hôpital,1661–1704), ученик Иоганна Бернулли

Рис. 5: Гийом Франсуа Антуан, маркиз де Лопиталь. Гравюра резцом Жерара Эделинка (Gerard Edelinck) по картине Николя Фуше (Nicolas Fouché). Не позже 1707 г.

Происходил из знатной семьи, был в военной службе[8], но по слабости зрения оставил службу и посвятил себя наукам. Участник учёного кружка Мальбранша. Под глубоким впечатлением от математического искусства молодого[9] Иоганна Бернулли, Лопиталь начал брать у него уроки зимой 1691–1692 г. (4 месяца) в поместье Лопиталя в Ук (Oucques), близ Блуа. В 1693 г., благодаря частным урокам Бернулли, маркиз Лопиталь решил задачу, поставленную в сочинении Иоганна Бернулли, и 17 июня 1693 г. стал почетным членом Парижской академии наук. Дальнейшая переписка с Иоганном Бернулли позволила ему разнообразить свои решения. Он заинтересовался задачей равновесия подъемного моста – решением была эпициклоида – и опубликовал свои результаты в *Acta eruditorum*. В 1697 г. маркиз под влиянием Иоганна Бернулли опубликовал там же статью о брахистохроне. В письме от 17 марта 1694 г. Лопиталь предложил Бернулли ежегодную пенсию в 300 ливров с обещанием повысить ее, лишь бы Иоганн сообщал только ему свои открытия, согласился бы разрабатывать

[8]Chevalier, marquis de Saint Mesme, comte d'Autremont, seigneur d'Oucques et des maréchaux de France, Guillaume-François de l'Hospital était aussi juge de point d'honneur, grand bailly, gouverneur et capitaine des chasses de la généralité de Dourdan. Рыцарь, маркиз Сен-Мем, граф Отремон, сеньор Ук и маршал Франции, Гийом-Франсуа де Л'Опиталь был также судьей чести, великим приставом, губернатором и капитаном охоты генералитета Дурдана.

[9]Лопиталю было 30 лет, И. Бернулли – 24 года.

интересующие его вопросы и не давал никому копии читанных ему лекций. Этот договор выполнялся вплоть до выхода в свет “Анализа бесконечно малых величин для изучения кривых линий” [25] Лопиталя (1696 г.). После этого, сначала в письмах, а после смерти маркиза в 1704 г. и в печати, Иоганн настоятельно высказывал свои права на авторство “Анализа". Как писал И. Бернулли в письме Лейбницу от 8 февраля 1698 г.: “За исключением немногих страниц (скажу на ухо), все остальное он частью получил от меня в письменном виде, – частью написал под мою диктовку, часть же, после того как я покинул Париж, получил в письмах, многочисленные свидетельства чего я сохранил и смог бы в подходящий момент опубликовать (...), кроме того, я располагаю письмами Лопиталя ко мне, показывающими, сколь многим он мне обязан. Главная заслуга его состоит в том, что он все привел в порядок и отделал по-французски аккуратно то, что я беспорядочно изложил ему частью по-французски, частью по-латыни. Как я сказал, собственно своего он добавил не более чем на 3 или 4 страницы”. Бернулли совершенно справедливо отметил, что Лопиталь в сочинении “Анализ бесконечно малых ” [25] дал первое систематическое изложение математического анализа. В этой книге собраны и приведены в стройное целое отдельные вопросы, разбросанные до того в переписке и различных статьях.

В 1935 г. “Анализ бесконечно малых” Лопиталя вышел в русском переводе Н.В. Леви под редакцией и с примечаниями А.П. Юшкевича [3].

Якоб Герман в своей петербургской речи “Об истории геометрии” 1726 г. говорит: “В 1696 г. появилось сочинение *Анализ бесконечно малых* Прославленного Маркиза Лопиталя, очень изящный труд, который, помимо ясно объясненных правил дифференциального исчисления, содержит все основные понятия, а именно касательные, максимумы и минимумы, перегибы направления кривизны, радиусы кривизны, оптические линии или Каустики при Отражении и Преломлении, которые касаются Кривых в данном положении, чьи величины дробны, причем числитель и знаменатель в определенных случаях исчезающе малы, и многое другое” ([6], с. 15).

В “Анализе бесконечно малых”, в предисловии, Лопиталь пишет: “Я намеревался прибавить к книге еще одну главу, чтобы показать также удивительную пользу этого исчисления в физике, показать, до какой степени точности оно может довести ее и насколько от него может выиграть механика. Но болезнь помешала моему намерению; однако читатели от этого ничего не потеряют, и когда-нибудь они будут за это возмещены даже с избытком.

Во всем этом речь идет лишь о первой части исчисления г. Лейбница, заключающейся в том, чтобы переходить от конечных величин к их бесконечно малым разностям и сравнивать между собой эти бесконечно малые любого рода: эту часть называют *дифференциальным исчислением.* Я также намеревался составить другую часть, которую называют *интегральным исчислением*, и которая заключается в том, чтобы переходить от этих бесконечно малых к конечным величинам или целым, бесконечно малые разности которых они составляют, т.е. в том, чтобы находить суммы этих разностей. Но когда Г. Лейбниц мне написал, что он работает над этим для трактата, который он называет *De scientia infiniti* (О познании бесконечного), то я отказался от мысли лишить читающую публику столь прекрасного труда, долженствующего заключать все наиболее любопытное в обратном методе касательных, в вопросах о спрямлении кривых, о квадратуре заключаемых ими площадей, о квадратурах поверхностей тел, об определении центров тяжести и т.д. Даже это сочинение я публикую лишь потому, что он просил меня об этом в своих письмах и что я считаю это необходимым для подготовки умов к пониманию всего того, что удастся открыть в дальнейшем по этим вопросам.

Под конец я должен признать, что я многим обязан знаниям гг. Бернулли, особенно младшему из них, состоящим в настоящее время профессором в Гронингене. Я без всякого стеснения пользовался их открытиями и открытиями г. Лейбница. Поэтому я не имею ничего против того, чтобы они предъявили свои авторские права на все, что им угодно, сам довольствуясь тем, что они соблаговолят мне оставить” ([3], с. 58-59).

Заметим, что вошедшее во все учебники анализа “правило Лопиталя” следует называть правилом Бернулли – Лопиталя.

Лопиталь умер в Париже 2 февраля 1704 г. в возрасте 43 лет, оставив сына и четырех дочерей. Его “Трактат о конических сечениях и их использовании для решения уравнений в определенных и неопределенных задачах” [26] был впервые опубликован в 1707 г.

2.9. Пьер Ремон де Монмор (Pierre Rémond de Montmort, 1678–1719), ученик Иоганна Бернулли

Рис. 6: Пьер де Монмор. Портрет работы Алекси-Симона Белля (Alexis-Simon Belle). 1715 г.

Французский математик, член Лондонского королевского общества (1715), Французской академии наук (1716), внёсший вклад в становление теории вероятностей, член кружка Н. Мальбранша. Поддерживал отношения с А. де Муавром, Ф. Николем, Б. Тейлором, Г. Лейбницем, Николаем I Бернулли. Его исследования по теории вероятностей изложены в особом составленном им сочинении, вышедшем в свет в 1708 г. под заглавием “Опыт исследования азартных игр” [27], но без имени автора. Во втором издании 1713 г. развил теорию сочетаний и анализ выигрыша на ее основе. Ему принадлежит первая постановка Петербургской задачи (Петербургского парадокса), которой также занимались Г. Крамер и Д. Бернулли. Последняя часть сочинения Монмора содержала переписку автора с Иоганном и Николаем I Бернулли.

2.10. Джулио Фаньяно (Giulio Carlo, Count Fagnano, Marquis de Toschi, 1682–1766), состоял в переписке с Иоганном Бернулли

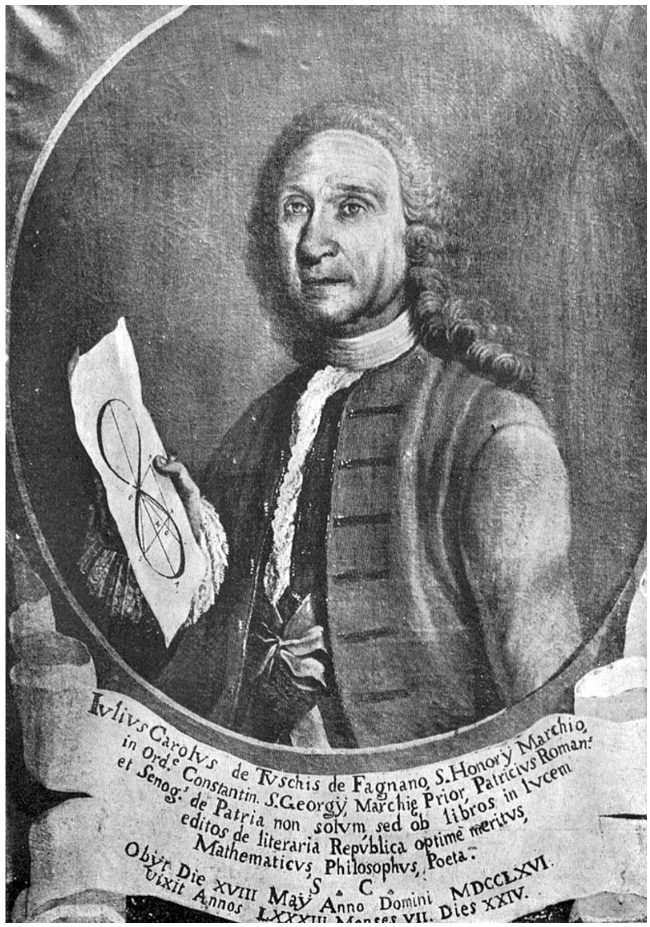


Рис. 7: Джулио Карло, граф Фаньяно, маркиз де Тоски. Гравюра из его книги Opere Matematiche Volume Primo, 1911 (стр. 3)

Итальянский математик, член Лондонского королевского общества и Берлинской академии (1751 г.). Владелец огромного майората, занимался математикой в свое удовольствие и ради ее красоты. Публиковал свои работы в *Giornale de' letterati d'Italia*, в 1750 г. выпустил двухтомник своих сочинений “Produzioni matematiche” [22].

Католическая Италия неохотно принимала идеи протестантских ученых. Журнал *Acta eruditorum*, содержавший статьи не только по математике, но и по теологии, морали и праву, был запрещен. Достать журнал было нелегко, но возможно, а вот читать его католикам было нельзя. Как пишет маркиз Д. Фаньяно в письме к Гвидо Гранди 19.10.1715, для чтения только математических статей этого журнала необходимо было получить разрешение (лицензию) у своего аббата ([28], с. 7). Самому Фаньяно это разрешение доставалось без труда, так как его аббатом был математик Гвидо Гранди.

Основные исследования Фаньяно относятся к теории дифференциальных уравнений, теории функций и алгебре. Особого внимания заслуживают общая теория геометрических пропорций, некоторые новые методы решения алгебраических уравнений до четвертой степени, теорема о спрямлении разностей бесконечных пар дуг, выбранных на эллипсе и гиперболе, что заложило основу теории эллиптических интегралов. Изучал (1718 г.) свойства лемнискаты. Первым применил мнимые степени в биноме Ньютона. Его исследования высоко оценил

Л. Эйлер, благодаря рекомендации которого Фаньяно был избран в Берлинскую академию (1751 г.).

2.11. Николай II Бернулли (Nikolaus (Niklaus) II Bernoulli, 1695–1726), сын и ученик Иоганна Бернулли, старший брат Даниила и Иоганна II Бернулли

Рис. 8: Николай II Бернулли, портрет работы Иоганна Рудольфа Хубера (J. R. Huber). 1723 г.

Математик и механик. Николай II Бернулли родился в Базеле (Швейцария) в семье Иоганна Бернулли. Был очень одарен: в возрасте 8 лет говорил на 4 языках, в 16 лет окончил университет, получив степень магистра философии, в 19 лет защитил диссертацию по правоведению на степень лиценциата. При этом он занимался математикой под руководством отца, помогал ему вести научную переписку и занимался математикой с младшим братом Даниилом. В 1716 г. Н. Бернулли решил предложенную Лейбницем задачу об ортогональных траекториях, благодаря чему стал известен среди математиков. В 1723 г., после путешествия по Италии и Франции, Н. Бернулли был назначен профессором права в Базеле, а через год получил кафедру права в Берне. Когда в 1824 г. Л. Блюментрост, организатор и будущий первый президент Петербургской академии, написал Иоганну Бернулли о желании пригласить одного из его сыновей, было решено, что поедет Даниил. Но Николай, нежно любя брата, выразил желание поехать с ним, несмотря на то, что занимал кафедру в Берне. Вопрос был урегулирован, и в октябре 1725 г. братья прибыли в Петербург. Даниил получил кафедру физиологии, Николай – должность профессора кафедры математики с окладом 1000 рублей (самым высоким из всех платившихся академикам). Братья сразу же включились в работу Академии наук.

К сожалению, деятельность Н. Бернулли в Петербурге продолжалась всего около 8 месяцев. Он умер от обострения язвы желудка.

Николай Бернулли оставил после себя сочинения, которые относятся к теории дифференциальных уравнений и их применению в механике. Посмертно в академическом журнале *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae* T.1, 1728. были опубликованы две его статьи: одна – по теории дифференциальных уравнений (уравнение, позже названное именем итальянского математика Я.Ф. Риккати, и линейные уравнения первого порядка), другая – о движении тел под действием удара.

2.12. Пьер Луи де Мопертюи (Pierre-Louis Moreau de Maupertuis, 1698–1759), ученик Иоганна Бернулли

Рис. 9: Пьер Луи де Мопертюи. Гравюра Ж. Долле (J. Daullé, 1741) по рис. Р. Турньера (R. Levrac-Tournières, 1737 г.).

Пьер де Мопертюи – французский математик, естествоиспытатель, механик, астроном, физик и геодезист. В 1718 г. зачислен в мушкетёры и служил в кавалерии. Однако природные наклонности к точным наукам побудили его в 1722 г. выйти в отставку и поселиться в Париже, усиленно занимаясь математикой. Начиная с 1724 г. Мопертюи публикует ряд научных работ, занимался задачами на максимумы и минимумы, изучал свойства циклоиды и других плоских кривых. В 1728 г. побывал в Лондоне, где был избран членом Лондонского Королевского общества. В 1729–1730 гг. в Базеле под руководством И. Бернулли изучал дифференциальное и интегральное исчисление. Вернулся во Францию поборником нового исчисления. В 1731 г. избран членом Парижской академии наук и затем назначен главой геодезической экспедиции, посланной в Лапландию для измерения длины земного меридиана. По приглашению короля Фридриха II в 1740 г. переселился в Пруссию, в 1745–1753 гг. был президентом Физико-математического класса Берлинской академии наук. Работы Мопертюи посвящены механике, математическому анализу и геометрии, а также геодезии, астрономии и биологии. Наиболее известным научным вкладом Мопертюи стал предложенный им принцип наименьшего действия, обобщение которого впоследствии дал Л. Эйлер (1744 г.).

2.13. Даниил Бернулли (Daniel Bernoulli, 1700–1782), сын и ученик Иоганна Бернулли, ученик своего старшего брата Николая

Рис. 10: Даниил Бернулли. Неизвестный художник. Венецианская школа. 1720-1723 гг.

Д. Бернулли родился в Гронингене (Голландия) в семье Иоганна Бернулли. С 1705 г. семья жила в Базеле, где отцу предложили место профессора математики в университете. Детство Даниила протекало в спокойной обстановке, типичной для семьи успешного ученого. И. Бернулли много времени уделял обучению математике своих сыновей. По настоянию отца Даниил изучал медицину в Базеле, Гейдельберге и Венеции, но уже в 1724 г. публикует свою первую математическую работу, за которую Академия Болоньи сделала его своим членом. Вскоре Д. Бернулли получил премию Парижской академии наук, а всего с 1724 по 1757 г. он удостаивался премий 10 раз, уступая лишь Эйлеру.

С октября 1725 г. братья Николай и Даниил Бернулли поселились в Петербурге. Даниил получил кафедру физиологии, а Николай – кафедру математики.

Деятельность Д. Бернулли в Петербурге была необычайно продуктивна. В течение первого года своей работы в академии он сделал более 10 сообщений, посвященных решению проблем математики и механики, являющихся основой для решения задач физиологии. Первые тома *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae* содержат целый ряд его исследований. В 1729 г. Д. Бернулли приступил к работе над "Гидродинамикой", в основном закончив ее в 1733 г. Он провел многочисленные опыты для проверки выдвинутых им гипотез. В 1738 г. Бернулли издал "Гидродинамику" [12] в Страсбурге, этот труд принес ему мировую славу. В 1950 г. вышел русский перевод [2].

В 1733 г. он обратился к руководству академии с просьбой об отставке, объясняя это сырым климатом Петербурга. Вернулся в Базель, где занял кафедру анатомии и ботаники. В 1750 г. получил в Базельском университете кафедру физики и занимал ее до последних лет жизни.

Связь Даниила с Петербургской академией не прекращалась после его отъезда. Многие его работы публиковались в изданиях Петербургской академии. Они относятся к гидродинамике, кинетической теории газов, теории колебаний. Д. Бернулли, наряду с Даламбером и Эйлером, заложил основы теории уравнений в частных производных. Большое место в его исследованиях занимала теория вероятностей. В его известной работе "Попытка новой теории вычисления вероятностей случайных величин" (1738 г.), опубликованной в Петербурге, Д. Бернулли ввел понятие "морального ожидания". Это понятие он применил к задаче, которая получила название "Петербургская игра", или "Петербургский парадокс".

Научные заслуги Д. Бернулли были высоко оценены современниками. На родине он дважды избирался ректором Базельского университета; был членом многих иностранных Академий и научных обществ.

Все труды Д. Бернулли написаны в изысканной классической манере. Введенные им научные термины отличались четкостью. Его термины "гидродинамика", "установившееся состояние" стали общепринятыми и используются до сих пор.

Даниил Бернулли прожил долгую жизнь, никогда не был женат. Он был скромным, уравновешенным человеком. На склоне лет Д. Бернулли занялся благотворительностью. На свои средства он построил небольшой отель для путешествующих студентов и ученых, в котором они могли найти приют и пропитание. Даниил Бернулли скончался в возрасте 82 лет в Базеле. Научная общественность отметила кончину великого ученого глубоким трауром.

2.14. Габриэль Крамер (Gabriel Cramer, 1704–1752), ученик Иоганна Бернулли

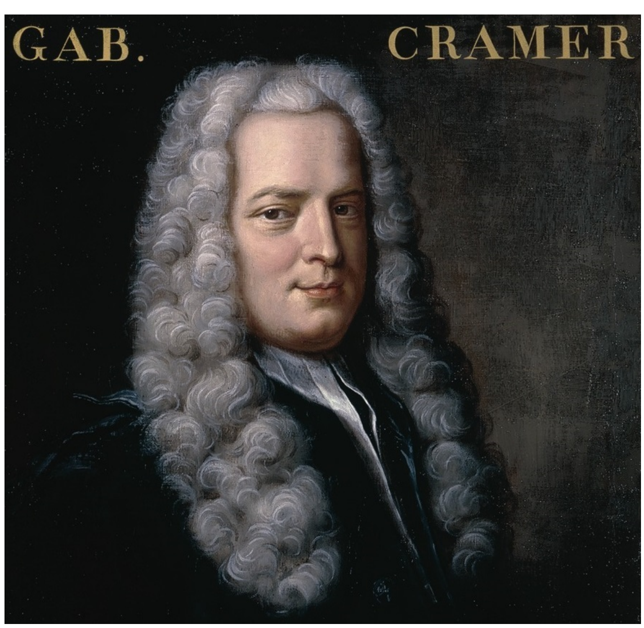


Рис. 11: Габриэль Крамер. Портрет работы Роберта Гарделя (R. Gardelle)

Швейцарский математик из Женевы, ученик и друг Иоганна Бернулли, один из создателей линейной алгебры. Помимо занятий с И. Бернулли, учился у Э. Галлея и А. де Муавра в Лондоне, П. Мопертюи и А. Клеро в Париже. По возвращении поддерживал с ними переписку. В 1728 г. предложил свое решение Петербургского парадокса. В 1729 г. вернулся в Женеву и возобновил преподавательскую работу. Участвовал в конкурсе, объявленном Парижской академией, задание в котором: есть ли связь между эллипсоидной формой большинства планет и смещением их афелиев? Работа Крамера занимает второе место (первый приз получил Иоганн Бернулли). Исследования Г. Крамера посвящены геометрии, астрономии, теории вероятностей, философии и истории математики. Крамер также опубликовал труд по небесной механике (1730 г.) и комментарий к ньютоновской классификации кривых третьего порядка (1746 г.). В 1747 г. Г. Крамер второй раз посетил Париж, где познакомился с Ж.Л. Даламбером.

Около 1740 г. Иоганн Бернулли поручил Крамеру хлопоты по изданию сборника собрания своих трудов. В 1742 г. Крамер публикует сборник в 4 томах, а вскоре (1744 г.) выпускает аналогичный (посмертный) сборник работ Якоба Бернулли и двухтомник переписки Лейбница с И. Бернулли. Эти издания имели огромный резонанс в научном мире.

2.15. Леонард Эйлер (Leonhard Euler, 1707–1783), ученик Иоганна Бернулли

Рис. 12: Леонард Эйлер. Портрет работы Якоба Эммануэля Хандмана (Handmann), 1753 г.

Леонард Эйлер родился в Базеле в семье протестантского священника Пауля Эйлера, учившегося математике у Якоба Бернулли. Пауль Эйлер стал первым учителем сына. Л. Эйлер пишет: “В последующие годы я жил у бабушки в Базеле, чтобы изучить основы гуманитарных наук, частично в местной Гимназии, частично через частных репетиторов, и в то же время добиться прогресса в математике. В 1720 году я был принят в университет в качестве государственного студента, где вскоре нашел возможность познакомиться со знаменитым профессором Иоганном Бернулли, который с особым удовольствием помогал мне в математических науках. Частные уроки, однако, он категорически исключил из-за своего плотного графика: Однако он дал мне гораздо более полезный совет, который состоял в том, чтобы я посмотрел некоторые из наиболее трудных математических книг и проработал их с большим усердием, и если я столкнусь с какими-либо возражениями или трудностями, он предоставил мне свободный доступ к нему каждую субботу днем, и он был достаточно любезен, чтобы прокомментировать собранные трудности, что было сделано с таким желаемым преимуществом, что, когда он разрешил одно из моих возражений, десять других сразу исчезли, что, безусловно, является лучшим методом для достижения благоприятного прогресса в математических науках". ([4], с. 248–249).

По примеру своего учителя, Эйлер всю жизнь вел математические записи. Таких "Записных книжек" за всю жизнь у него было двенадцать[10], первые две (первая и половина второй) из них относятся к базельскому периоду и заполнены записями занятий с И. Бернулли.

В 1727 г. Л. Эйлер благодаря протекции Даниила Бернулли отправился в Петербург. Ему было двадцать лет. Здесь Эйлер сформировался как ученый, жил до 1741 г., затем 25 лет прожил в Германии, в 1766 г. вернулся в Россию, где и жил до конца жизни.

Уникальность Петербургской академии состояла в том, что она не была связана схоластическими традициями и над нею не довлело картезианство. Приехавшие из разных стран ученые были по большей части молодыми; математики, физики и механики, преимущественно из Швейцарии и Германии, смело приветствовали и развивали новое исчисление Лейбница. Ученики братьев Бернулли Я. Герман, Н. и Д. Бернулли, Л. Эйлер составляли научно продуктивное большинство. Дважды в неделю в Конференции Академии читались доклады, которые затем публиковались в *Комментариях академии наук*. Профессора, в том числе Л. Эйлер, несколько раз в неделю читали лекции по математике, физике и механике, составляли учебники. В газете *Приложения к Ведомостям* Эйлер с молодыми коллегами публиковал научно-популярные статьи.

Эйлер написал несколько вводных учебников по элементарной математике: "Руководство к арифметике"[11], "Элементы алгебры", "Полное введение в алгебру"[12], "Планиметрия", "Стереометрия". На базе нового исчисления Эйлер предопределил единство и общность методов, сведя всю высшую математику в целостную теорию, опубликовав ясные и строгие изложения ее разделов в следующих сочинениях: "Аналитическая механика" (1732 г.), "Морская наука" (1749 г.), "Теория движения Луны" (1753 г.), "Введение в анализ бесконечно малых" (2 тома, 1748, 1749 гг., русский перевод 1936 г.), "Дифференциальное исчисление" (1755 г., русский перевод 1949 г.), "Интегральное исчисление" в трех томах[13] (первое издание Петерб. АН 1768–1770 гг., русский перевод 1956–1958 гг.), "Диоптрика" (1769–1771 гг.), "Новая теория движения Луны" (1772 г.).

Как и И. Бернулли, Эйлер занимался математикой со своими сыновьями, а затем с внуками, терпеливо добиваясь понимания. В годы его пребывания в Берлинской академии наук у него в доме жили русские ученики-пансионеры. В Петербурге и Берлине у него было немало учеников: В.Е. Адодуров, С.К. Котельников, С.Я. Румовский. По возвращении в Россию Эйлер обучал своих молодых помощников Н. Фусса, М.Е. Головина, Л.Ю. Крафта-мл., А. Лекселя. Вместе со старшим сыном, Альбрехтом Иоганном, они организовали научный се-

[10]Санкт-Петербургский филиал Архива РАН. Фонд 136, опись 1.

[11]1738–1740 гг. на нем. яз., рус. перевод В.Е. Адодурова 1740 г., [9].

[12]1770 г., в русском переводе "Универсальная арифметика".

[13]Том первый – основные начала метода интегрирования вплоть до интегрирования дифференциальных уравнений первого порядка. Том второй – теория обыкновенных дифференциальных уравнений второго или высшего порядка. Том третий – дифференциальные уравнения в частных производных, вариационное исчисление.

минар, проводимый на дому у Л. Эйлера, где ставили, обсуждали и решали разнообразные математические проблемы от теории чисел до теории Луны. Протоколы этих обсуждений были опубликованы в 1862 г. в “Opera postuma” [19].

Отметим педагогические черты Эйлера. Он учит читателя технике исследования и доказательства. В отличие от предшествующих ученых (Ферма, Декарт, Ньютон, Лейбниц, Гаусс), приводящих свои результаты в готовом виде без указания способов их получения, Эйлер всегда дает возможность читателю проследить ход своих рассуждений. В его текстах звучит разговорная речь неторопливого и доброжелательного наставника, подробно и доходчиво раскрывающего ход и мотивацию своей мысли, объясняющего, как ему удалось найти более простой способ. Он хорошо умеет встать в положение ученика. Эйлер не одобрял форму старых учебников, приводящих правила и по нескольку примеров к ним. Необходимым Эйлер считал изложение тех идей, которые привели к правильному результату.

Значительность результатов Эйлера была столь велика, что даже Иоганн Бернулли почтительно обращался к нему в письмах: “Более того, мне было весьма приятно, что то, что я написал о вертикальных соприкосновениях, понравилось Вам до восхищения из-за простоты выражения и замечательной пользы, которую они могут принести для объяснения веса кораблей; но я бы предпочел, чтобы Вы сами также произвели расчеты, используя Вашу изобретательность, как это было возможно, чтобы я не ошибся в рассуждениях”[14]. Тем не менее, зная тяжелый характер Иоганна Бернулли, свою статью о логарифме отрицательного числа, который Бернулли считал вещественным, Эйлер опубликовал лишь после смерти Бернулли[15]. В начале своей статьи Эйлер подробно комментирует дискуссию Лейбница и И. Бернулли и анализирует ошибку последнего.

Широк спектр его работ: от элементарных учебников до специальных прикладных и теоретических работ, включающих столь различные области, как алгебра, теория чисел, комбинаторика, анализ, теория рядов и дифференциальные уравнения, теория функций комплексной переменной, вариационное исчисление, классическая и дифференциальная геометрия, топология и теория графов, математическая физика, статистика, механика, гидродинамика, оптика, астрономия, картография, теория приближенных вычислений, теория корабля, баллистика и артиллерия. Исследования Эйлера определили пути мировой математики и стали основой Петербургской математической школы.

[14]De caetero gratissimum mihi fuit, quod ad admirationem usque Tihi plaquerint, quae scripsi de oscullationibus verticalibus, propter simplicitatem expressionis et insignem usum, quem praestare possunt in explicandis navium ponderibus; maluissem autem, ut ipse quoque calculum fecisses ex Tue ingenio, quo mihi potuisset, anon in ratiocinando erraverim.

[15]В 1712 г. И. Бернулли и Лейбниц спорили о значении логарифма отрицательного числа. Лейбниц полагал, что он должен быть комплексным (мнимым), но и этот термин у него не имел чёткого определения. Бернулли, а потом и Даламбер, считали, что логарифм отрицательного числа должен быть вещественным. Позже Эйлер доказал, что логарифм отрицательного числа будет комплексным, добавив, что логарифм многозначен [5].

2.16. Йоханнес Гесснер (Johannes Gessner, 1709–1790), ученик Иоганна Бернулли

Рис. 13: Йоханнес Гесснер. Портрет работы Иоганна Рудольфа Делликера (J. R. Dälliker), ок. 1749 г.

Швейцарский математик из Цюриха, физик, ботаник, минералог и врач. Переехал в Базель, чтобы изучать медицину, затем продолжил обучение в Лейденском университете. В 1728 г. вместе со своим другом, медиком Альбрехтом фон Халлером (1708–1777) изучал математику у Иоганна Бернулли. Гесснер стал врачом в Базеле в 1730 г., но вскоре перешел на научную работу. В 1733 г. он стал профессором математики, а в 1738 г. начал преподавать физику в Цюрихе. В 1752 г. написал сочинение “Физическая диссертация о различиях и различном происхождении окаменелостей, с Божьей помощью” [20].

2.17. Иоганн Самуэль Кёниг (Johann Samuel König, 1712–1757), ученик Иоганна Бернулли

Рис. 14: Иоганн Самуэль Кёниг. Неизвестный художник. Возможно, Роберт Гардель (R. Gardelle).

Швейцарский математик и механик. Занимался математикой под руководством своего отца. С 1729 г. учился в Лозанне, с 1730 г. – в Базельском университете (в 1730–1733 гг. у Иоганна Бернулли, в 1733–1735 гг. – у Даниила Бернулли), где его однокурсниками были П. Л. Мопертюи и А. К. Клеро; вместе с Клеро и Мопертюи изучал "Principia" Ньютона. в 1735–1737 гг. изучал в Марбургском университете у Христиана Вольфа философию Лейбница. Кёниг преподавал математику и философию Лейбница маркизе дю Шатле. По инициативе Р.А. Реомюра написал работу о математической конструкции пчелиных сот[16], за что в 1740 г. был избран член-корреспондентом Парижской академии наук. В 1747 г. написал работу о форме Земли. С 1747 г. стал профессором математики университета в городе Франекер (Нидерланды). Оспаривал приоритет Мопертюи в формулировке принципа наименьшего действия. Основное направление исследований – динамика. Состоял также иностранным членом Берлинской

[16]Реомюр показывал своим гостям эксперименты, которые он проводил, чтобы получить представление о структуре пчелиных ячеек, и поставил перед Кёнигом задачу доказать, были ли пчелиные ячейки построены наиболее геометрически совершенным образом и выбрали ли пчелы из всех возможных форм ту, в которой будет создано наибольшее пространство с наименьшими затратами материала. Красота задачи привлекла Кёнига, и он обнаружил, что пирамидальное основание шестигранных ячеек, образованное тремя ромбами с определенными углами, было построено точно по законам максимума и минимума. Кёниг провозгласил: «Природа достигает всего самым коротким или наиболее выгодным путем» и доказал это, вычислив ромбический угол базальных поверхностей пчелиных ячеек. Заметим, что этой задачей занимались многие ученые. Благодаря своему исследованию по рекомендации Реомюра Кёниг был избран членом-корреспондентом Парижской академии. Эта его четвертая научная работа никогда не была опубликована под его именем; Реомюр счел целесообразным присвоить часть ее себе [21].

академии (1749 г.), Лондонского Королевского общества в Геттингене (1750 г.). Сформулированный Кёнигом в 1751 г. закон кинетической энергии движения точечной системы масс относительно ее центра тяжести носит его имя (теорема Кёнига).

2.18. Никлаус Блаунер (Niklaus Blauner, 1713–1791), ученик Иоганна Бернулли

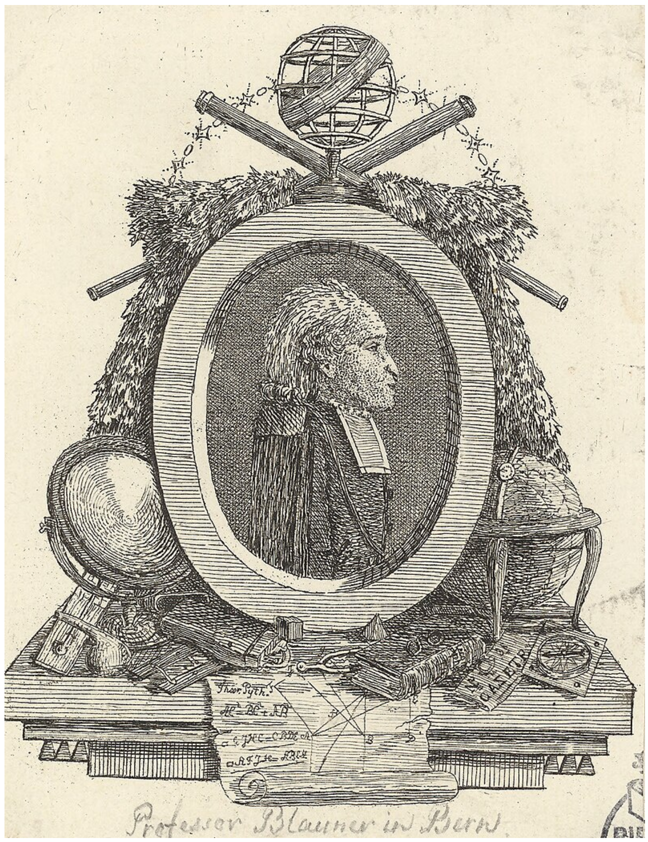


Рис. 15: Никлаус Блаунер. Офорт. Неизвестный художник. Подпись гравера: Mss.Mül.Gr.

Швейцарский профессор физики и географии из Берна. После изучения теологии в Берне и математики у Жана-Пьера де Круза[17] в Лозанне и Иоганна Бернулли в Базеле, был рукоположен в сан реформатского пастора в 1741 г. и в 1749 г. избран профессором математики в *Hochschule*, предшественнице Бернского университета, сменив Самуэля Кёнига. Был ректором *Hochschule* с 1759 по 1762 г.

[17]Jean-Pierre de Crousaz, 1663–1750.

2.19. Алекси Клеро (Alexis Claude Clairaut, 1713–1765), ученик Иоганна Бернулли

Рис. 16: Алекси Клод Клеро. Гравюра Луи-Жака Катлена (L.-J. Cathelin) с оригинала художника Шарля-Николя Кошена II (Ch.-N. Cochin II). 1790 г.

Французский математик, механик и астроном. Родился в семье парижского преподавателя математики, учился математике у отца. В семье был 21 ребенок, Алекси был вторым.

Как пишет Л.С. Фрейман, “То, что глава семьи был математиком, наложило оригинальный отпечаток на развитие ребенка. Отец знакомил его с алфавитом по буквам на чертежах Евклидовых “Начал”. Мальчик хорошо усвоил уроки и к четырем годам уже свободно читал и писал, рано пристрастился к чтению книг по математике. Маленькому Клеро еще не было десяти лет, когда он овладел элементами высшей математики. Клеро изучил книги Лопиталя, читал их по нескольку раз, пока не убеждался, что полностью их усвоил (...). В 12-летнем возрасте Алекси написал работу о кривых 4-го порядка, которую признали парижские академики. По окончании доклада в Академии А. Клеро был подвергнут обстоятельному допросу по теме с целью установить, действительно ли он является автором этого замечательного труда. Ответы А. Клеро не оставили на этот счет никаких сомнений. Аудитория была поражена, а присутствовавший на заседании член Академии аббат Рейно не смог сдержать слез радости и умиления при виде мальчика, достойного занять место среди лучших ученых Франции. Работа была опубликована в *Известиях Берлинской академии наук*” ([8], с. 200–202).

В 16-летнем возрасте А. Клеро представил в Академию трактат “Исследования о кривых двоякой кривизны”, в котором заложены основы аналитической геометрии в пространстве, дифференциальной геометрии и начертательной геометрии. По специальному разрешению Людовика XV 18-летний Клеро был избран членом (адъюнктом) Парижской академии. В 1734 г. Пьер Луи де Мопертюи отвез А. Клеро в Базель слушать лекции Иоганна Бернулли[18].

[18]Клеро поступил в Базельский университет 4 октября 1734 г., а в середине декабря 1734 г. они с Мопертюи

Член Лондонского королевского общества (1737 г.), иностранный член Берлинской академии наук (1744), иностранный почётный член Петербургской академии наук (1753). Принимал участие в экспедициях (1736 г., 1741 г.) по измерению градуса меридиана. По возвращении Клеро написал классическую монографию “Теория фигуры Земли, извлечённая из принципов гидростатики” (1743 г.).

В математическом анализе Клеро ввёл понятия криволинейного интеграла (1743 г.), полного дифференциала, а также общего и особого решения дифференциальных уравнений первого порядка (1736), интегрирующего множителя. Огромны заслуги Клеро в механике и особенно в утверждении системы Ньютона. Клеро доказал ряд фундаментальных для высшей геодезии теорем, нашёл остроумный способ приближённого решения “задачи трёх тел”.

Клеро написал замечательные учебники с картинками по элементарной математике “Элементы алгебры” (1731 г.) [17] и “Элементы геометрии ” (1741 г.) [18]. Они впервые ориентированы на детское восприятие, содержат наглядные и понятные детям рисунки – здания, реки, деревья. Трехмерные объекты изображены с применением светотени. В “Элементах алгебры” впервые приводится уравнение плоскости.

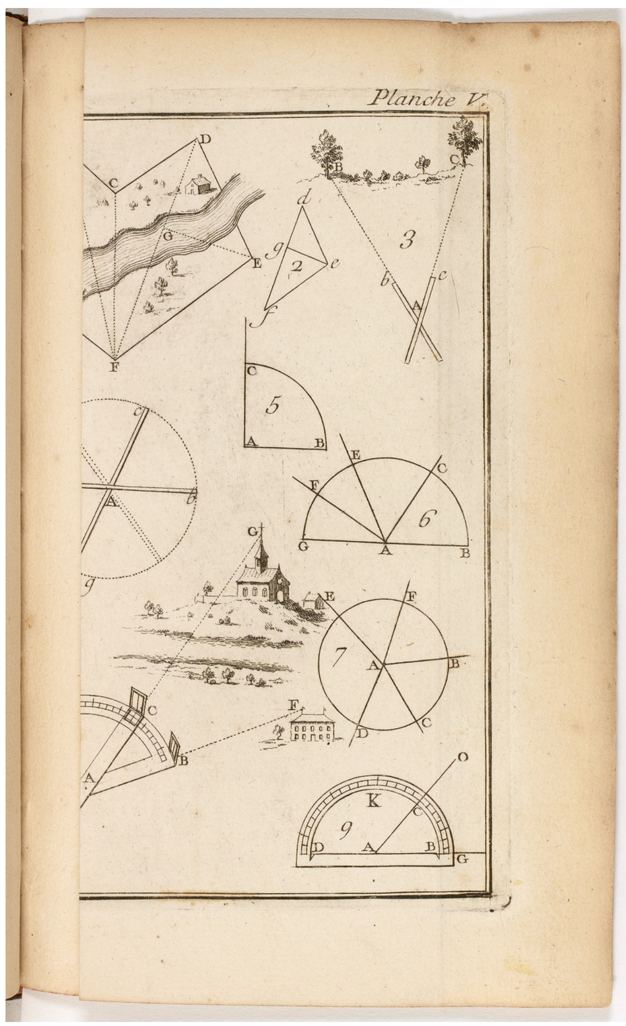


Рис. 17: Алекси Клод Клеро. Чертеж из учебника “Élémens d’algèbre”

12 августа 1731 г. И. Бернулли писал Мопертюи о Клеро: “on a bien fait de rendre justice à son talent” (хорошо, что мы отдали должное его таланту) [16].

уехали, поблагодарив Иоганна Бернулли за гостеприимство [16].

2.20. Никола де Бегелен (Бегелин, Nicolas de Béguelin, 1714–1789), ученик Иоганна Бернулли

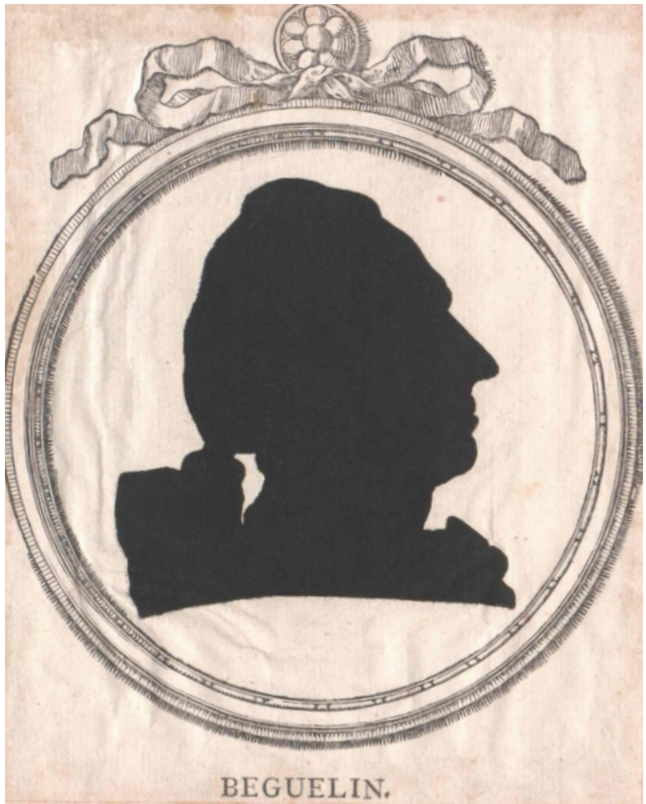


Рис. 18: Николас де Бегелина (1714–1789). Художник Иоганн Фридрих Готлиб Унгер, 1779 г.

Швейцарский физик, математик, философ, писатель, педагог, академик. Доктор права, философии и математики. С 1729 г. изучал право и математику в Базельском университете, ученик Иоганна Бернулли. В 1735 г. после окончания университета, отправился в Вецлар (Wetzlar) для продолжения изучения прусского права. Защитил диссертации по юриспруденции, математике и философии. В записках Берлинской академии опубликовал несколько работ по теории вероятностей, в т.ч. о генуэзском лото, а в 1768 г. опубликовал труд под названием "Об использовании при вычислении вероятностей принципа достаточного основания" [11], в котором он изложил шесть разных решений Петербургского парадокса. Занимался исследованиями в области алгебраического анализа; в области физики – оптикой и метеорологией. Наставник будущего короля Пруссии Фридриха Вильгельма II, директор философского класса Академии наук в Берлине.

2.21. Жан Лерон Д'Аламбер (д'Аламбер, Даламбер; Jean Le Rond D'Alembert, d'Alembert, 1717–1783)

Рис. 19: Ж.Л. Даламбер. Портрет работы М. К. де Латура, 1753 г.

Французский учёный-энциклопедист Жан Лерон Д'Аламбер, известен своим вкладом в математику и механику. Лично Даламбер не общался с Иоганном Бернулли, но они знали о трудах друг друга по переписке и научным публикациям. Даламбер говорил, что если он и знает что-либо из области математики, то этим он обязан И. Бернулли.

3. Заключение

На этом мы заканчиваем обзор первого поколения учеников Якоба и Иоганна Бернулли. Их деятельность протекала в переходный период от эпохи классических геометрических методов к универсальным аналитическим. С конца XVII и до конца XVIII в. были выделены основные типы задач математического анализа и аналитической механики, развивался метод, появились новые разделы математики. Плодотворная работа нескольких поколений представителей базельской школы распространила математический анализ по европейским странам, внедрила его в теоретические и прикладные научные исследования. С годами потенциал аналитических методов только усиливался. Как говорил И.П. Павлов, "наука развивается толчками в зависимости от успехов методики". Среди представителей базельской школы были не только крупные ученые, но и талантливые преподаватели, методисты, создавшие хорошие передовые учебники. Многие, как например, Л. Эйлер и А. Клеро, сочетали в себе талант ученого и преподавателя. Если ранее изучать математический анализ приходилось либо от учителя к ученику, либо по оригинальным трудам ученых, то уже в конце XVIII в. появились прогрессивные учебники А.Г. Кёстнера и С.Ф. Лакруа. В работах математиков XIX в. Б. Больцано, О.

Коши, К. Вейерштрасса эвристическая составляющая дополнилась логической строгостью; Г. Кантор создал теорию множеств, которая впоследствии стала фундаментом математического анализа. Известная истина, что традиция тогда сильна, когда ученики превосходят своих учителей, нашла свое подтверждение.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. История математики. Т. 2: Математика XVII столетия / под ред. А. П. Юшкевича. — М.: Наука, 1970. — 302 с.

2. Бернулли Д. Гидродинамика, или записки о силах и движениях жидкостей / пер. В. С. Гохмана; коммент. и ред. А. И. Некрасова и К. К. Баумгарта; ст. В. И. Смирнова. — Л.: Изд-во АН СССР, 1950. — 216 с.

3. Л'Опиталь Г. Ф., де. Анализ бесконечно малых / пер. с фр. Н. В. Леви; под ред. и со вступ. ст. А. П. Юшкевича. — М.; Л.: Гос. техн.-теоретич. изд-во, 1935. — 429 с. — URL: https://rusneb.ru/catalog/000199_000009_005289961/ (дата обращения: 01.01.2024).

4. Пекарский П. П. История Императорской академии наук в Петербурге. — СПб.: изд. Отд-ния рус. яз. и словесности Императорской акад. наук, 1870–1873. — Т. 1. — 1870. — LXVIII, 774 с. — URL: https://rusneb.ru/catalog/000199_000009_003859364/ (дата обращения: 01.01.2024). — Также см.: Записки Императорской академии наук. — Т. 6. — С. 59–92.

5. Синкевич Г. И. История самой красивой формулы математики. Тождество Эйлера // История науки и техники. — 2023. — № 3. — С. 3–25.

6. [Синкевич Г. И.] Вторая часть речи Якоба Германа «О возникновении и развитии геометрии» на заседании Петербургской академии наук 1 августа 1726 г. / пер. с латыни и примеч. Г. И. Синкевич // История науки и техники. — 2024. — № 11. — С. 3–19.

7. [Синкевич Г. И.] Третья часть речи Якоба Германа «О возникновении и развитии геометрии» на заседании Петербургской академии наук 1 августа 1726 г. / пер. с латыни и примеч. Г. И. Синкевич // История науки и техники. — 2024. — № 12. — С. 3–11.

8. Фрейман Л. С. Творцы высшей математики. — М.: Наука, 1968. — 216 с. — URL: https://www.mathedu.ru/text/freyman_tvortsy_vyshey_matematiki_1968/p0/ (дата обращения: 01.01.2024).

9. Эйлер Л. Руководство к арифметике для употребления Гимназии при Императорской академии наук. Ч. 1. — СПб.: тип. Акад. наук, 1740. — URL: https://rusneb.ru/catalog/000207_000017_RU_RGDB_BIBL_0000353513/ (дата обращения: 01.01.2024).

10. [Юшкевич А. П.] Избранные отрывки из математических сочинений Лейбница / сост. и пер. А. П. Юшкевич // Успехи математических наук. — 1948. — Т. 3, вып. 1. — С. 165–204. — URL: https://www.mathnet.ru/links/ba1a3dd73bc0d48edebb1ae8d1ecd2f8/rm8687.pdf (дата обращения: 01.01.2024).

11. Béguelin N. de. Sur l'usage du principe de la raison suffisante dans le calcul des probabilités // Mémoires de l'Académie de Berlin. — 1769. — P. 382–412.

12. Bernoulli D. Hydrodynamica, sive de Viribus et Motibus Fluidorum Commentarii. — Strasbourg: Johann Reinhold Dulsecker, 1738. — 325 p. — URL: https://archive.org/details/bub_gb_3yRVAAAAcAAJ (дата обращения: 01.01.2024).

13. Bernoulli Johannis. Opera Omnia. Vol. III. — Lausannae & Genevae: Sumtibus Marci-Michaelis Bousquet & Sociorum, 1742. — 563 p. — URL: https://preserver.beic.it/delivery/DeliveryManagerServlet?dps_pid=IE6962604 (дата обращения: 01.01.2024).

14. Bernoulli Johann. Die Differentialrechnung von Johann Bernoulli aus dem Jahre 1691/92 / hrsg. P. Schafheitlin. — Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft, 1924. — (Oswalds Klassiker der exakten Wissenschaft).

15. Borowczyk J. Doit-on réhabiliter l'identité numérique du marquis de l'Hospital? // APMEP – PLOT. — 2009. — N° 26. — P. 24–28. — URL: https://www.apmep.fr/IMG/pdf/l_Hospital_Borowczyk.pdf (дата обращения: 01.01.2024).

16. Chronologie de la vie de Clairaut (1713–1765) [Электронный ресурс]. — URL: http://www.clairaut.com/jeanibernoulli.html (дата обращения: 01.01.2024).

17. Clairaut A. C. Élémens d'algèbre. — Paris: David fils, 1731. — URL: https://archive.org/details/chepfl-lipr-AXA20 (дата обращения: 01.01.2024).

18. Clairaut A. C. Élémens de Géométrie. — Paris: David fils, 1741. — 321 p. — URL: https://archive.org/details/elemensdegeomet00claigoog (дата обращения: 01.01.2024).

19. Euler L. Leonardi Euleri Opera postuma mathematica et physica anno MDCCCXLIV detecta, quae Academiae scientiarum Petropolitanae obtulerunt ejusque auspiciis ediderunt auctoris pronepotes Paulus Henricus Fuss et Nicolaus Fuss. Vol. 1. — Petropoli: Typis Academiae Imperialis Scientiarum Petropolitanae, 1862. — X, 588 p. — URL: http://heritage.jscc.ru/Book/10091678 (дата обращения: 01.01.2024).

20. Gessner J. Dissertatio physica de petrificatorum differentiis et varia origine quam Auxiliante Deo. — Zürich: Tigvri, Ex officina Gessneriana, 1752. — URL: https://www.biodiversitylibrary.org/bibliography/150146 (дата обращения: 01.01.2024).

21. Graf J. H. Der Mathematiker Johann Samuel König und das Princip der kleinsten Aktion. — Bern: Buchdruckerei K. J. Wyss, 1889. — URL: https://www.math.rug.nl/bernoulli/uploads/Geschiedenis/konigraf.pdf (дата обращения: 01.01.2024).

22. Fagnano dei Toschi G. C. Produzioni matematiche. In 2 vol. — Pesaro: Stamperia Gavelliana, 1750. — Vol. 1. — URL: https://preserver.beic.it/delivery/DeliveryManagerServlet?dps_pid=IE6962477 (дата обращения: 01.01.2024). — Vol. 2. — URL: https://preserver.beic.it/delivery/DeliveryManagerServlet?dps_pid=IE7059372 (дата обращения: 01.01.2024).

23. Herman J. Phoronomia, sive De viribus et motibus corporum solidorum et fluidorum libri duo. — Amsterdam: Rudolf Wetstein & Gerard Wetstein, 1716. — URL: https://preserver.beic.it/delivery/DeliveryManagerServlet?dps_pid=IE7570777 (дата обращения: 01.01.2024). – English translation: Hermann's Phoronomia / transl. and annotated by I. Bruce, 2016. — URL: https://www.17centurymaths.com/contents/hermanphoronomia.htm (дата обращения: 01.01.2024).

24. Leibniz G. W. Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus // Acta eruditorum. — 1684. — Octobris. — P. 467–473. — URL: https://archive.org/details/s1id13206500/page/472/mode/2up (дата обращения: 01.01.2024).

25. L'Hospital G.-F.-A. Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes. — A Paris: de l'Imprimerie royale, 1696. — 266 p. — URL: https://archive.org/details/libria_353620 (дата обращения: 01.01.2024).

26. L'Hospital G.-F.-A. Traité analytique des sections coniques et de leur usage pour la résolution des équations dans les problêmes tant déterminés qu'indéterminés. — A Paris: Chez Moutard..., de Madame, & de Madame la Comtesse d'Artois chez Montalant, Paris et Montpellier, 1776. — URL: https://archive.org/details/traitanalytiqu00lhos (дата обращения: 01.01.2024).

27. Montmort P. R. de. Essay d'analyse sur les jeux de hazard. — Paris: Chez J. Quillau, 1708. — URL: https://archive.org/details/ldpd_6444894_000 (дата обращения: 01.01.2024).

28. Pepe L. La formazione filosofica e scientifica di Giulio Carlo de' Toschi di Fagnano [Электронный ресурс]. — 2023. — URL: http://dm.unife.it/comunicare-la-matematica/filemat/pdf/FAGNANO.pdf (дата обращения: 01.01.2024).

29. Reynaud Ch.-R. Analyse démontrée, ou la Méthode de résoudre les problèmes de mathématiques. En 2 t. — Paris: Quillau, imprimeur-juré-libraire de l'Université, 1708.

30. Reynaud Ch.-R. La science du calcul des grandeurs en général, ou Les Élémens Des Mathématiques. — Paris: Quillau, imprimeur-juré-libraire de l'Université, 1739. — 440 p.

31. Varignon P. Projet d'une nouvelle mécanique. — Paris: Edme Martin, veuve, 1687. — URL: https://preserver.beic.it/delivery/DeliveryManagerServlet?dps_pid=IE6566991 (дата обращения: 01.01.2024).

REFERENCES

1. Yushkevich, A.P. (ed.) 1970, *Istoriya matematiki. Tom 2. Matematika XVII stoletiya* [History of mathematics. Vol. 2. Mathematics of the 17th century], Nauka, Moscow.

2. Bernoulli, D. 1950, *Gidrodinamika (Hydrodynamica)*, Izdatel'stvo Akademii Nauk SSSR, Leningrad.

3. L'Hospital, G.-F.-A. 1935, *Analiz beskonechno malykh* [Analysis of the infinitely small], translated from French by N.V. Levi, edited by A.P. Yushkevich, Gosudarstvennoe tekhniko-teoreticheskoe izdatel'stvo, Moscow-Leningrad, Available at: https://rusneb.ru/catalog/000199_000009_005289961/ [Accessed 18 February 2026].

4. Pekarskii, P.P. 1870, *Istoriya Imperatorskoi akademii nauk v Peterburge* [History of the Imperial Academy of Sciences in St. Petersburg], Vol. 1, Izdanie Otdeleniya russkogo yazyka i slovesnosti Imperatorskoi akademii nauk, St. Petersburg, Available at: https://rusneb.ru/catalog/000199_000009_003859364/ [Accessed 18 February 2026].

5. Sinkevich, G.I. 2023, "Istoriya samoi krasivoi formuly matematiki. Tozhdestvo Eilera" [History of the most beautiful formula of mathematics. Euler's identity], *Istoriya nauki i tekhniki*, no. 3, pp. 3–25.

6. Sinkevich, G.I. 2024, "Vtoraya chast' rechi Yakoba Germana 'O vozniknovenii i razvitii geometrii' na zasedanii Peterburgskoi Akademii nauk 1 avgusta 1726 g. Perevod s latyni i primechaniya G.I. Sinkevich. Prodolzhenie. Nachalo v predydushchem nomere" [The second part of Jakob Hermann's speech 'On the origin and development of geometry' at the meeting of the St. Petersburg Academy of Sciences on August 1, 1726. Translation from Latin and notes by G.I. Sinkevich. Continuation. Beginning in the previous issue], *Istoriya nauki i tekhniki*, no. 11, pp. 3–19.

7. Sinkevich, G.I. 2024, "Tret'ya chast' rechi Yakoba Germana 'O vozniknovenii i razvitii geometrii' na zasedanii Peterburgskoi Akademii nauk 1 avgusta 1726 g. Perevod s latyni i primechaniya G.I. Sinkevich" [The third part of Jakob Hermann's speech 'On the origin and development of geometry' at the meeting of the St. Petersburg Academy of Sciences on August 1, 1726. Translation from Latin and notes by G.I. Sinkevich], *Istoriya nauki i tekhniki*, no. 12, pp. 3–11.

8. Freiman, L.S. 1968, *Tvortsy vysshei matematiki* [Creators of higher mathematics], Nauka, Moscow.

9. Euler, L. 1740, *Rukovodstvo k arifmetike dlya upotrebleniya Gimnazii pri Imperatorskoi Akademii nauk* [Guide to arithmetic for the use of the Gymnasium at the Imperial Academy of Sciences], Part 1, Tipografiya Akademii nauk, St. Petersburg, Available at: https://rusneb.ru/catalog/000207_000017_RU_RGDB_BIBL_0000353513/ [Accessed 18 February 2026].

10. Yushkevich, A.P. 1948, "Izbrannye otryvki iz matematicheskikh sochinenii Leibnitsa. Sostavil i perevel A.P. Yushkevich" [Selected passages from Leibniz's mathematical works. Compiled and translated by A.P. Yushkevich], *Uspekhi matematicheskikh nauk*, vol. 3, no. 1, pp. 165–204.

11. Béguelin, N. de 1769, "Sur l'usage du principe de la raison suffisante dans le calcul des probabilités", *Mémoires de l'Académie de Berlin*, pp. 382–412.

12. Bernoulli, D. 1738, *Hydrodynamica, sive de Viribus et Motibus Fluidorum Commentarii*, Johann Reinhold Dulsecker, Strasbourg.

13. Bernoulli, Johannis 1742, *Opera Omnia*, Vol. III, Sumtibus Marci-Michaelis Bousquet & Sociorum, Lausanne & Geneva, Available at: https://preserver.beic.it/delivery/DeliveryManagerServlet?dps_pid=IE6962604 [Accessed 18 February 2026].

14. Bernoulli, Johann 1924, *Die Differentialrechnung von Johann Bernoulli aus dem Jahre 1691/92*, edited by P. Schafheitlin, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, Oswalds Klassiker der exakten Wissenschaft.

15. Borowczyk, J. 2009, "Doit-on réhabiliter l'identité numérique du marquis de l'Hospital?", *APMEP – PLOT*, no. 26, pp. 24–28, Available at: https://www.apmep.fr/IMG/pdf/l_Hospital_Borowczyk.pdf [Accessed 18 February 2026].

16. Clairaut, A.C. n.d., *Chronologie de la vie de Clairaut (1713–1765)*, Available at: http://www.clairaut.com/jeanibernoulli.html [Accessed 18 February 2026].

17. Clairaut, A.C. 1731, *Élémens d'algèbre*, David fils, Paris, Available at: https://archive.org/details/chepfl-lipr-AXA20 [Accessed 18 February 2026].

18. Clairaut, A.C. 1741, *Élémens de Géométrie*, David fils, Paris.

19. Euler, L. 1862, *Leonhardi Euleri Opera postuma mathematica et physica anno MDCCCXLIV detecta*, Vol. 1, edited by P.H. Fuss & N. Fuss, Typis Academiae Imperialis Scientiarum Petropolitanae, St. Petersburg.

20. Gessner, J. 1752, *Dissertatio physica de petrificatorum differentiis et varia origine*, Ex officina Gessneriana, Zurich, Available at: https://www.biodiversitylibrary.org/bibliography/150146 [Accessed 18 February 2026].

21. Graf, J.H. 1889, *Der Mathematiker Johann Samuel König und das Princip der kleinsten Aktion*, Buchdruckerei K. J. Wyss, Bern, Available at: https://www.math.rug.nl/bernoulli/uploads/Geschiedenis/konigraf.pdf [Accessed 18 February 2026].

22. Fagnano dei Toschi, G.C. 1750, *Produzioni matematiche*, 2 vols, Stamperia Gavelliana, Pesaro, Vol. 1 Available at: https://preserver.beic.it/delivery/DeliveryManagerServlet?dps_pid=IE6962477, Vol. 2 Available at: https://preserver.beic.it/delivery/DeliveryManagerServlet?dps_pid=IE7059372 [Accessed 18 February 2026].

23. Hermann, J. 1716, *Phoronomia, sive De viribus et motibus corporum solidorum et fluidorum libri duo*, Rudolf & Gerard Wetstein, Amsterdam, Available at: https://preserver.beic.it/delivery/DeliveryManagerServlet?dps_pid=IE7570777 [Accessed 18 February 2026]; English translation: Bruce, I. (trans.) 2016, *Hermann's Phoronomia*, Available at: https://www.17centurymaths.com/contents/hermanphoronomia.htm [Accessed 18 February 2026].

24. Leibniz, G.W. 1684, "Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus", *Acta Eruditorum*, October, pp. 467–473, Available at: https://archive.org/details/s1id13206500/page/472/mode/2up [Accessed 18 February 2026].

25. L'Hospital, G.-F.-A. 1696, *Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes*, Imprimerie royale, Paris, Available at: https://archive.org/details/libria_353620 [Accessed 18 February 2026].

26. L'Hospital, G.-F.-A. 1776 (1707), *Traité analytique des sections coniques et de leur usage pour la résolution des équations dans les problêmes tant déterminés qu'indéterminés*, Chez Moutard, Paris, Available at: https://archive.org/details/traitanalytiqu00lhos [Accessed 18 February 2026].

27. Montmort, P.R. de 1708, *Essay d'analyse sur les jeux de hazard*, Chez J. Quillau, Paris, Available at: https://archive.org/details/ldpd_6444894_000 [Accessed 18 February 2026].

28. Pepe, L. 2023, "La formazione filosofica e scientifica di Giulio Carlo de' Toschi di Fagnano", Preprint, Available at: http://dm.unife.it/comunicare-la-matematica/filemat/pdf/FAGNANO.pdf [Accessed 18 February 2026].

29. Reynaud, C.-R. 1708, *Analyse démontrée, ou la Méthode de résoudre les problèmes de mathématiques*, 2 vols, Quillau, Paris.

30. Reynaud, C.-R. 1739, *La science du calcul des grandeurs en général, ou Les Élémens Des Mathématiques*, Quillau, Paris.

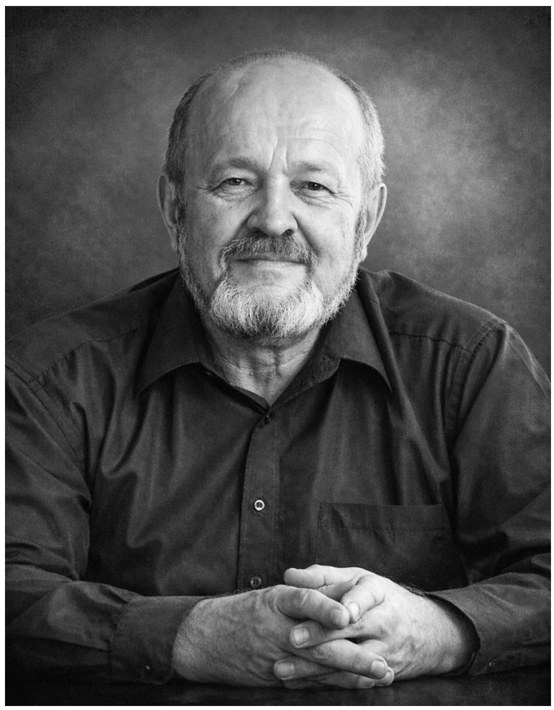
31. Varignon, P. 1687, *Projet d'une nouvelle mécanique*, Edme Martin, veuve, Paris, Available at: https://preserver.beic.it/delivery/DeliveryManagerServlet?dps_pid=IE6566991 [Accessed 18 February 2026].

Получено: 01.09.2025
Принято в печать: 12.02.2026

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 27. Выпуск 1.

DOI 10.22405/2226-8383-2026-27-1-199-200

Василий Иванович Берник (9.01.1947 — 11.01.2026)



11 января 2026 года после тяжелой болезни скончался Василий Иванович Берник, выдающийся советский и белорусский математик, доктор физико-математических наук, профессор, лауреат Государственной премии Республики Беларусь.

Василий Иванович родился 9 января 1947 года в деревне Слобода-Пырашевская Узденского района Минской области в семье учителей. В 1953 году семья переехала в город Узда, где он в 1965 году закончил с золотой медалью среднюю школу №2 имени А. С. Пушкина. В школе играл в шашки и шахматы за команду Минской области и получал дипломы на республиканской олимпиаде школьников по математике. Шахматы стали его главным хобби на всю жизнь. Василий Иванович прекрасно знал историю древней игры — от великих побед до драматичных поражений в битвах за шахматную корону.

В период с 1965 года по 1970 год учился на математическом факультете Белорусского государственного университета и закончил его с отличием. В 1967 году, будучи студентом второго курса, начал посещать спецкурсы молодого доктора физико-математических наук Владимира Геннадьевича Спринджука. Результаты дипломной работы В. И. Берника были опубликованы в журналах Известия АН БССР и Математические заметки.

В 1973 году он защитил кандидатскую диссертацию "К метрической теории диофантовых приближений зависимых величин" под руководством В. Г. Сприджука, а в 1986 году – докторскую диссертацию "Метрическая теория диофантовых приближений зависимых величин и размерность Хаусдорфа". В кандидатской диссертации Василий Иванович доказал аналог теоремы А. Я. Хинчина в случае расходимости ряда, а в докторской диссертации решил проблему Бейкера-Шмидта, найдя точное значение размерности Хаусдорфа множества действительных чисел, для которых неравенство

$$|P(x)| < H^{-w}, \quad w > n$$

имеет бесконечное число решений в целочисленных многочленах P степени n и высоты H.

Под руководством Василия Ивановича более 30 человек стали кандидатами физико-математических наук, а трое защитили докторские диссертации.

С 1975 года по 2005 год Василий Иванович был председателем жюри республиканской школьной олимпиады по математике, а с 1984 года по 1992 год – членом жюри всесоюзной школьной олимпиады по математике (председателем жюри в те годы был Ю. В. Нестеренко). Он был членом редколлегии журнала "Квант".

В. И. Берник — автор 6 книг и более чем 200 журнальных статей по математике и школьному математическому образованию. Василий Иванович был ученым международного уровня. Его доклады звучали на крупнейших конференциях и в ведущих научных центрах мира — от Европы до Азии. География его научных связей поистине охватывала весь мир: от знаменитого Беркли в США, Марселя во Франции и Обервольфаха в Германии до престижного Института Тата в Индии. Его имя было известно и уважаемо в математическом сообществе на разных континентах.

Особое место в научном наследии Василия Ивановича занимают организованные им в Минске международные конференции по теории чисел. Он умел создавать уникальную атмосферу, где высокий научный уровень сочетался с искренним человеческим теплом и душевностью.

Василий Иванович уделял огромное внимание развитию белорусской школы теории чисел и белорусской математики в целом. Под его редакцией была подготовлена "Матэматычная энцыклапедыя" ("Математическая энциклопедия") на белорусском языке.

Василий Иванович был активным автором и членом редакционной коллегии журнала Чебышевский сборник. Он принимал активное участие в организации и проведении международных конференций по теории чисел в Москве, Хабаровске и Туле.

Василий Иванович был человеком разносторонних дарований. Наряду с математикой его страстью были спорт и горные походы. Он имел как минимум третий взрослый разряд более чем по двадцати спортивным дисциплинам.

И, наконец, Василий Иванович был яркой, харизматической личностью, оставившей незабываемый след в жизни большинства знавших его людей. Мы искренне скорбим...

Он навсегда останется в нашей памяти не только как выдающийся математик, но и как замечательный друг, приятный собеседник и неординарный человек.

В. П. Платонов, Ю. В. Нестеренко, В. А. Быковский, В. М. Бухштабер, М. А. Королёв, В. Г. Чирский, В. Н. Чубариков, А. Лауринчикас, З. Х. Рахмонов, Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. В. Бударина, В. В. Бересневич, Д. В. Васильев, Н. И. Калоша, Е. И. Ковалевская, В. В. Беняш-Кривец, Ю. С. Харин, В. А. Шлык, А. А. Ядченко, В. Г. Сафонов, А. Ф. Васильев, А. Н. Скиба, В. С. Монахов, В. В. Гороховик.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 27. Выпуск 1.

DOI 10.22405/2226-8383-2026-27-1-201-203

Владимир Иванович Горбачёв (25.12.1948 — 28.01.2026)

28 января 2026 года скончался Владимир Иванович Горбачев — заведующий кафедрой механики композитов механико-математического факультета МГУ, заведующий лабораторией прочности и ползучести при высоких температурах Института механики МГУ, доктор физико-математических наук, профессор, автор более 175 научных публикаций и патентов, под руководством которого выполнено и защищено 50 дипломных работ и 4 кандидатских диссертаций.

Горбачев Владимир Иванович родился 25 декабря 1948 года в селе Кабаличи Брянского района Брянской области в крестьянской семье. Мама была единственным в селе ветеринаром и воспитывала одна трех сыновей, средним из которых был Владимир Иванович. Его трудовая деятельность связана с механико-математическим факультетом МГУ имени М. В. Ломоносова, на отделение механики которого он поступил в 1966 году. В 1972 году окончил специалитет, в 1978 году на кафедре теории упругости защитил диссертацию кандидата физико-математических наук по теме «Некоторые статические задачи теории упругости для слоистых композитов», а в 1991 году – докторскую диссертацию «Вариант метода осреднения для решения краевых задач неоднородной упругости» под руководством своего учителя Б. Е. Победри, основателя кафедры механики композитов — первой на тот момент в стране кафедрой с таким названием. Примечательно, что Владимир Иванович являлся сотрудником кафедры механики композитов со дня ее основания и активно участвовал в её развитии, общественно-научной деятельности факультета.

Будучи выпускником механико-математического факультета МГУ, Владимир Иванович являлся активным представителем школы Бориса Ефимовича Победри и развивал его идеи в области механики деформируемых твердых тел, механики композитов, концентрации напряжений, критериев прочности, технических теорий балок и оболочек, технологии обработки металлов и связанных с ними приложений в современной технике. Его работы определили развитие нового метода осреднения неоднородной упругой среды. Им поставлен и решен ряд новых краевых задач механики неоднородных тел для слоистых композитов. Получены интегральные формулы представления решений линейных дифференциальных уравнений в частных производных с переменными коэффициентами, зависящими от координат и времени, через решения уравнений того же типа, но с постоянными коэффициентами. Разработанные им методы интегральных формул и структурных функций были успешно обобщены на широкий спектр задач механики сплошных сред: вязкоупругости, электромагнитоупругости, теории концентрации напряжений и сопротивление материалов.

Им показано, что решение начально-краевой задачи для линейного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами связано с решением такой же задачи для уравнения с постоянными коэффициентами с помощью интегрального соотношения. На основе этого соотношения разработан метод осреднения задач для неоднородных упругих тел, а также теория концентрации напряжений в композитах с глобальным концентратором. Найдены тензоры концентрации напряжений для n-мерной упругой среды с n-мерным сферическим концентратором, для плоской слоистой среды с включением эллиптической формы. Найдены аналитические решения нескольких новых задач теории упругости о равновесии неоднородной анизотропной полосы и плиты. Им показано, что решение задачи для упругой балки, пластинки или оболочки с интегральными условиями на торцевых поверхностях можно свести к связанной задаче классической технической теории с одним интегро-дифференциальным уравнением в случае балки, и с системой из трех интегро-дифференциальных уравнений в случае пластины или оболочки.

Безусловно, общественно-научная и педагогическая деятельность Владимира Ивановича оставит след в летописях университета. Он являлся Членом Специализированного учёного совета Д 501.001.91 по специальности 01.02.04 на механико-математическом факультете (1996) и Членом редколлегии журнала «Чебышевский сборник» (2013). За время работы в Московском университете им были прочитаны курсы лекций «Классическая механика», «Механика сплошных сред», «Механика деформируемого твёрдого тела», «Механика композитов», «Математическая теория оболочек», «Теория концентрации напряжений и деформаций», «Плоская задачи механики композитов», «Сопротивление материалов», «Сопротивление композиционных материалов», «Температурные напряжения в твердых телах», «Основы механики разрушения», «Строительная механика стержневых конструкций», «Строительная механика пластинок и оболочек», «Основы теории дислокаций» «Динамические задачи механики композитов». Руководил аспирантским и кафедральным семинаром «Прикладные методы расчёта конструкций и сооружений».

Вызовы новой индустриальной эпохи XXI века поставили актуальные задачи перед учеными-механиками по "аналитическому созданию" новых сверхлёгких и прочных материалов, изучению их свойств и предоставлению рекомендаций по их синтезу в лабораторных и промышленных масштабах. К числу таких материалов относятся композиты, характерные размеры компонентов которых отличаются друг от друга на много порядков – от макро – до наноуровня. Развитие механики нанокомпозиционных структур и материалов, включая пленочные системы и покрытия, нанотрубки и фуллерены, потребовало от механиков создания феноменологического подхода, где сочетались бы идеология и методы классической механики сплошной среды, молекулярной динамики и квантовой механики. Эти и многие другие вопросы В. И. Горбачёв вместе с коллективом: сотрудниками, аспирантами и студентами кафедры механики композитов МГУ активно, с присущей ему энергией, решал в последние годы.

Редколлегия скорбит в связи с кончиной Владимира Ивановича Горбачёва — талантливого ученого, внимательного и чуткого педагога, посвятившего большую часть своей активной жизни науке, образованию и воспитанию подрастающего поколения. Память о нем останется в сердцах друзей, коллег, учеников.

В. Б. Беднова, А. А. Бобылев, В. В. Вакулюк, Д. В. Георгиевский, П. Н. Демидович, Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский, В. П. Карликов, С. С. Лемак, С. А. Лурье, И. Н. Молодцов, М. У. Никабадзе, А. В. Романов, В. Н. Чубариков, А. И. Шафаревич, В. Я. Шкадов.

РЕДКОЛЛЕГИЯ

Том 27 Выпуск 1

THE EDITORIAL BOARD

Volume 27 Issue 1

TABLE OF CONTENTS

Volume 27 Issue 1

I. Allakov, B. Kh. Erdonov, O. Sh. Imamov. On the simultaneous representation of numbers as a sum of prime numbers 4

S. A. Bogatyi, A. A. Tuzhilin. Fundamentals of theory of continuous Gromov-Hausdorff distance 19

V. A. Gorelik, T. V. Zolotova. Two-criteria optimal control problem using Germeier convolution 51

A. P. Krylov, N. M. Dobrovol'skii, I. N. Balaba. On lattices of simultaneous Dirichlet approximations 63

S. S. Nikolaenko, P. E. Ryabov, S. V. Sokolov. Explicit solution of the critical subsystems for the Kovalevskaya-Chaplygin integrable family 77

V. I. Subbotin. On free angles of RR-polyhedra 97

A. B. Yakhshimuratov, M. M. Khasanov. Integration of the modified Korteweg-de Vries equation with an integral source 111

BRIEF MESSAGE

P. Bal. Some independent results on Ideal-Rothberger spaces 134

E. M. Vechtomov, A. A. Petrov. Retract lattices 139

I. N. Sergeev. A study of the logical essence of the funny 148

HISTORY OF MATHEMATICS AND APPLICATIONS

V. A. Levin, A. V. Vershinin, K. M. Zingerman, E. M. Ukhanov. Convergence analysis of the spectral element method on the example of the Lamb problem in comparison with the analytical solution 153

G. I. Sinkevich. Jacob and Johann Bernoulli scientific school. Teachers and disciples 166

MEMORIAL DATES

Vasily Ivanovich Bernik (9.01.1947 — 11.01.2026) 199

Vladimir Ivanovich Gorbachev (25.12.1948 — 28.01.2026) 201

РЕДКОЛЛЕГИЯ 204

THE EDITORIAL BOARD 208

TABLE OF CONTENTS 212

Научное издание

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Научно-теоретический журнал

Том XXVII. Выпуск 1 (102)

Подготовка оригинал-макета –
А. В. Родионов, А. П. Крылов.
Корректура – Е. В. Мельникова.

Регистрационный номер средства массовой информации ПИ № ФС77-80049
от 31 декабря 2020 г. выдан Федеральной службой
по надзору в сфере связи, информационных технологий
и массовых коммуникаций.

Подписано в печать 20.03.2026. Формат 60×84/8.
Бумага офсетная. Печать трафаретная. Усл. печ. л. 24,64.
Тираж 150 экз. (первый завод – 25 экз.). Заказ 26/02.
Цена свободная. Дата выхода в свет 06.04.2026.

Издатель – Тульский государственный педагогический
университет им. Л. Н. Толстого. 300026, Тула, просп. Ленина, 125.

Отпечатано в ТГПУ им. Л. Н. Толстого.
300026, Тула, просп. Ленина, 125.