ISSN 2226-8383

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Научно-теоретический математический журнал

www.chebsbornik.ru

XXVI
Выпуск 5 (101)
2025

ISSN 2226-8383

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Министерство просвещения Российской Федерации
Российская академия наук
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
Московский педагогический государственный университет
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
Тульский государственный университет

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Научно-теоретический журнал

ТОМ XXVI

ВЫПУСК 5 (101)

Тула
2025

Учредитель: ФГБОУ ВО
«ТГПУ им. Л. Н. Толстого»

Адрес редакции:
300026, г. Тула, пр. Ленина, 125.
Тел: +79065327314

E-mail: cheb@tsput.ru
URL: http://www.chebsbornik.ru

Издается с 2001 года.
Выходит 5 раз в год.
Регистрационный номер
СМИ: ПИ № ФС77-80049

В журнале публикуются оригинальные статьи по направлениям современной математики: теория чисел, алгебра и математическая логика, теория функций вещественного и комплексного переменного, функциональный анализ, дифференциальные уравнения, математическая физика, геометрия и топология, теория вероятностей и математическая статистика, численные методы, теория оптимизации и др. Также публикуются статьи о памятных датах и юбилеях.

Журнал включен в перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание ученых степеней кандидата наук и доктора наук (перечень ВАК), индексируется и/или реферируется: Scopus, MathSciNet, Zentralblatt MATH, Russian Science Citation Index (RSCI), РЖ Математика, Mathematical Reviews, РИНЦ, Google Scholar Metrics.

Журнал выходит под эгидой Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, Министерства просвещения Российской Федерации, Российской академии наук, Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Московского педагогического государственного университета, Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого, Тульского государственного университета.

12+

СОДЕРЖАНИЕ

Том 26 Выпуск 5

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Данный выпуск Чебышевского сборника посвящен 80-летию со дня рождения выдающегося советского и российского математика и педагога, доктора физико-математических наук, профессора, лауреата премии имени А. А. Маркова Геннадия Ивановича Архипова.

Г. И. Архипов (12.12.1945 — 14.03.2013)

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 26. Выпуск 5.

УДК: 519.6 DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-5-6-16

К вопросу о дискретной гладкости[1]

С. М. Агаян, Ш. Р. Богоутдинов, М. Н. Добровольский, Д. А. Камаев

Агаян Сергей Мартикович — доктор физико-математических наук, Геофизический центр РАН (г. Москва).
e-mail: s.agayan@gcras.ru
Богоутдинов Шамиль Рафекович — кандидат физико-математических наук, Геофизический центр РАН; Институт физики Земли им. О. Ю. Шмидта РАН (г. Москва).
e-mail: shm@gcras.ru
Добровольский Михаил Николаевич — кандидат физико-математических наук, Геофизический центр РАН (г. Москва).
e-mail: m.dobrovolsky@gcras.ru
Камаев Дмитрий Альфредович — доктор технических наук, ФГБУ «Научно-производственное объединение "Тайфун"» (г. Обнинск).
e-mail: post@typhoon.obninsk.ru

Аннотация

Дискретный математический анализ (ДМА) — новый подход к анализу данных, ориентированный на исследователя и занимающий промежуточное положение между жесткими математическими методами и мягкими нечеткими.

Важную роль в ДМА играют нечеткие множества (НМ), часть из которых является моделями дискретных аналогов фундаментальных математических свойств (близости, предельности, тренда, связности, ...), а также нечеткая логика (НЛ), позволяющая соединить нечеткие модели в алгоритмы анализа данных, в частности, по сценариям классической математики.

В ДМА принят регрессионный подход к пределу и производной: они являются соответственно значением и угловым коэффициентом линейной регрессии, построенной по функции и нечеткой структуре на исходном конечном пространстве, моделирующей предельный переход в его точке. Таким образом, регрессионный предел и регрессионная производная существуют всегда. Возникает вопрос об их качестве, в частности, о способности увидеть дискретную гладкость. Это требует более глубокого, чем традиционный, анализа регрессии, чему и посвящена настоящая работа.

Ключевые слова: ДМА, дискретная гладкость, регрессионное дифференцирование, Ф-параметр.

Библиография: 5 названий.

Для цитирования:
Агаян С. М., Богоутдинов Ш. Р., Добровольский М. Н., Камаев Д. А. К вопросу о дискретной гладкости // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 5, с. 6–16.

[1]Работа выполнена в рамках государственного задания Геофизического центра РАН, утвержденного Минобрнауки России.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 26. No. 5.

UDC: 519.6 DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-5-6-16

On the issue of discrete smoothness

S. M. Agayan, Sh. R. Bogoutdinov, M. N. Dobrovolsky, D. A. Kamaev

Agayan Sergey Martikovich — doctor of physical and mathematical sciences, The Geophysical Center of the Russian Academy of Sciences (Moscow).
e-mail: s.agayan@gcras.ru
Bogoutdinov Shamil Rafekovich — candidate of physical and mathematical sciences, The Geophysical Center of the Russian Academy of Sciences; Schmidt Institute of Physics of the Earth of the Russian Academy of Sciences (Moscow).
e-mail: shm@gcras.ru
Dobrovolsky Mikhail Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, The Geophysical Center of the Russian Academy of Sciences (Moscow).
e-mail: m.dobrovolsky@gcras.ru
Kamaev Dmitry Alfredovich — doctor of technical sciences, Research and Production Association "Typhoon" (Obninsk).
e-mail: post@typhoon.obninsk.ru

Abstract

Discrete Mathematical Analysis (DMA) is a new approach to data analysis, focused on the researcher and occupying an intermediate position between hard mathematical methods and soft fuzzy methods.

Fuzzy Sets (FS) play an important role in DMA, some of which are models of discrete analogs of fundamental mathematical properties (proximity, limit, trend, connectivity, ...), as well as Fuzzy Logic (FL), which allows combining fuzzy models into data analysis algorithms, in particular, according to classical mathematical scenarios.

In DMA, a regression approach to the limit and derivative is adopted: they are, respectively, the value and slope of a linear regression, constructed based on a function and fuzzy structure on the initial finite space, modeling the limit transition at its point.

Thus, the regression limit and regression derivative always exist. The question arises about their quality, in particular, the ability to detect discrete smoothness. This requires a more in-depth regression analysis than traditional methods, which is the focus of this paper.

Keywords: DMA, discrete smoothness, regression differentiation, Φ-parameter.

Bibliography: 5 titles.

For citation:
Agayan, S. M., Bogoutdinov, Sh. R., Dobrovolsky, M. N., Kamaev, D. A. 2025, "On the issue of discrete smoothness", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 5, pp. 6–16.

1. Введение

В «Дискретном Математическом Анализе (ДМА)» [1]–[3] принят регрессионный подход к пределу и производной функции на конечном пространстве. Сначала в каждой точке пространства с помощью нормированной системы весов (нечеткой меры) на нем моделируется предельный переход в точке. Далее функция и мера соединяются для построения линейной регрессии. Ее значение считается пределом функции в точке, а угловой коэффициент — производной.

Таким образом, регрессионный предел и регрессионная производная существуют всегда. Исследование показывает, что они очень эффективны в анализе данных. Тем не менее, более глубокий анализ функций на конечных пространствах, в частности, временных рядов требует дополнительного изучения этих понятий. Именно этому посвящена настоящая работа.

2. Φ-параметр конечного неотрицательного ряда

Через $\mathbb{R}(h) = \{ih, i \in \mathbb{Z}\}$ обозначим дискретную прямую с шагом h. Предполагается, что на отрезке $T(N) \subset \mathbb{R}(h)$

$$T(N) = \{t\} = \{t_1 = h, \ldots, t_N = Nh\} \tag{1}$$

задан неотрицательный ряд $x = \{x_t\} = \{x_i = x(t_i) \geqslant 0\}$ и взгляд на $T(N)$ из нуля в виде весов $\delta = \{\delta_t\} = \{\delta_i = \delta(t_i)\}$.

Положим

$$\begin{gathered}\sum \delta = \sum \delta_t : t \in T(N) \\ a_t = \delta_t / \sum \delta, t \in T(N), a_i = a_{t_i} \\ M(x) = \sum a_t x_t \leftrightarrow \delta\text{-среднее } x \text{ на } T(N)\end{gathered} \tag{2}$$

Определение 1. *Отношение $M(tx)$ к $M(x)$ называется Φ-параметром ряда x и обозначается через $\Phi(x)$:*

$$\Phi(x) = \sum a_i t_i x_i / \sum a_i x_i \tag{3}$$

Благодаря неотрицательности x_i параметр $\Phi(x)$ допускает прозрачную интерпретацию: положим $A_i = a_i x_i / M(x)$, тогда

$$\Phi(x) = \sum A_i t_i, A_i \geqslant 0 \text{ и} \sum A_i = 1$$

Вывод: параметр $\Phi(x)$ лежит в классическом отрезке $[t_1, t_2]$ и может считаться «горизонтальным центром тяжести ряда x» (вертикальным является $M(x)$).

Из однородности и аддитивности усреднения $x \to M(x)$ следует инвариантность относительно растяжения параметра $\Phi(x)$ и его квазилинейность:

- для $\lambda > 0 \to \Phi(\lambda x) = \Phi(x)$
- если $x \geqslant 0, y \geqslant 0$, то

$$\Phi(x+y) = \frac{M(x)}{M(x)+M(y)}\Phi(x) + \frac{M(y)}{M(x)+M(y)}\Phi(y)$$

Переходим к основному свойству параметра $\Phi(x)$, а именно к его монотонности.

Утверждение 1. *Отношение*

$$\Phi(x)(\alpha) = \Phi(xt^\alpha) = M(xt^{\alpha+1})/M(xt^\alpha) \tag{4}$$

возрастает по α.

Доказательство. С помощью дифференцирования по α путем анализа числителя $M(xt^{\alpha+1})'M(xt^{\alpha})-M(xt^{\alpha+1})M(xt^{\alpha})'$ производной $\Phi(xt^{\alpha})'$:

первое слагаемое:

$$M(xt^{\alpha+1})'M(xt^{\alpha})=\left(\sum a_ix_it_i^{\alpha+1}\ln t_i\right)\left(\sum a_{\bar{i}}x_{\bar{i}}t_{\bar{i}}^{\alpha}\right)=\sum_{(i,\bar{i})}a_ix_it_i^{\alpha+1}\ln t_i a_{\bar{i}}x_{\bar{i}}t_{\bar{i}}^{\alpha}=$$
$$=\sum_{(i,\bar{i})+(\bar{i},i):i\neq\bar{i}}\left(a_ix_it_i^{\alpha+1}\ln t_i a_{\bar{i}}x_{\bar{i}}t_{\bar{i}}^{\alpha}+a_{\bar{i}}x_{\bar{i}}t_{\bar{i}}^{\alpha+1}\ln t_{\bar{i}}a_ix_it_i^{\alpha}\right)+\sum_{(i,i)}a_i^2x_i^2t_i^{2\alpha+1}\ln t_i=$$
$$=\sum_{(i,\bar{i})+(\bar{i},i):i\neq\bar{i}}a_ia_{\bar{i}}x_ix_{\bar{i}}t_i^{\alpha}t_{\bar{i}}^{\alpha}(t_i\ln t_i+t_{\bar{i}}\ln t_{\bar{i}})+\sum_{(i,i)}a_i^2x_i^2t_i^{2\alpha+1}\ln t_i$$

второе слагаемое:

$$M(xt^{\alpha+1})M(xt^{\alpha})'=\left(\sum a_ix_it_i^{\alpha+1}\right)\left(\sum a_{\bar{i}}x_{\bar{i}}t_{\bar{i}}^{\alpha}\ln t_{\bar{i}}\right)=\sum_{(i,\bar{i})}a_ix_it_i^{\alpha+1}a_{\bar{i}}x_{\bar{i}}t_{\bar{i}}^{\alpha}\ln t_{\bar{i}}=$$
$$=\sum_{(i,\bar{i})+(\bar{i},i):i\neq\bar{i}}\left(a_ix_it_i^{\alpha+1}a_{\bar{i}}x_{\bar{i}}t_{\bar{i}}^{\alpha}\ln t_{\bar{i}}+a_{\bar{i}}x_{\bar{i}}t_{\bar{i}}^{\alpha+1}a_ix_it_i^{\alpha}\ln t_i\right)+\sum_{(i,i)}a_i^2x_i^2t_i^{2\alpha+1}\ln t_i=$$
$$=\sum_{(i,\bar{i})+(\bar{i},i):i\neq\bar{i}}a_ia_{\bar{i}}x_ix_{\bar{i}}t_i^{\alpha}t_{\bar{i}}^{\alpha}(t_i\ln t_{\bar{i}}+t_{\bar{i}}\ln t_i)+\sum_{(i,i)}a_i^2x_i^2t_i^{2\alpha+1}\ln t_i$$

разность:

$$M(xt^{\alpha+1})'M(xt^{\alpha})-M(xt^{\alpha+1})M(xt^{\alpha})'=\sum_{(i,\bar{i})+(\bar{i},i):i\neq\bar{i}}a_ia_{\bar{i}}x_ix_{\bar{i}}t_i^{\alpha}t_{\bar{i}}^{\alpha}(t_i\ln t_i+t_{\bar{i}}\ln t_{\bar{i}}-t_i\ln t_{\bar{i}}-t_{\bar{i}}\ln t_i)$$

отдельно:

$$t_i\ln t_i+t_{\bar{i}}\ln t_{\bar{i}}-t_i\ln t_{\bar{i}}-t_{\bar{i}}\ln t_i=t_i(\ln t_i-\ln t_{\bar{i}})-t_{\bar{i}}(\ln t_i-\ln t_{\bar{i}})=(t_i-t_{\bar{i}})(\ln t_i-\ln t_{\bar{i}})>0$$

в силу положительной монотонности логарифма $\ln t$.

Числитель производной, а потому и сама производная дроби $M(t^{\alpha+1}x)/M(t^{\alpha}x)$ положительна. Следовательно функция $\Phi(x)(\alpha)$ всегда возрастает на прямой $\mathbb{R}(\alpha)$. Доказательство окончено. □

Определим носитель $\operatorname{Supp}x$ ряда x: он поможет понять поведение $\Phi(x)(\alpha)$ при $\alpha=\pm\infty$:

$$\operatorname{Supp}x=\{t_i:x_i>0\}=\{t^*(x)=t_{i^*}<\ldots<t_{i^{**}}=t^{**}(x)\} \tag{5}$$

В этих обозначениях

$$\Phi(x)(\alpha)=\frac{a_{i^*}x_{i^*}t_{i^*}^{\alpha+1}+\ldots+a_{i^{**}}x_{i^{**}}t_{i^{**}}^{\alpha+1}}{a_{i^*}x_{i^*}t_{i^*}^{\alpha}+\ldots+a_{i^{**}}x_{i^{**}}t_{i^{**}}^{\alpha}} \tag{6}$$

Это рациональное представление дает возможность понять поведение функции $\Phi(x)(\alpha)$ на бесконечностях:

$$\lim_{\alpha\to-\infty}\Phi(x)(\alpha)=\frac{t_{i^*}^{\alpha+1}(a_{i^*}x_{i^*}+\ldots+a_{i^{**}}x_{i^{**}}(t_{i^{**}}/t_{i^*})^{\alpha+1})}{t_{i^*}^{\alpha}(a_{i^*}x_{i^*}+\ldots+a_{i^{**}}x_{i^{**}}(t_{i^{**}}/t_{i^*})^{\alpha})}=\frac{t_{i^*}^{\alpha+1}(a_{i^*}x_{i^*}+o(\alpha))}{t_{i^*}^{\alpha}(a_{i^*}x_{i^*}+o(\alpha))}=t_{i^*}=t^*(x)$$

Аналогично

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\Phi(x)(\alpha)=\frac{t_{i^{**}}^{\alpha+1}(a_{i^{**}}x_{i^{**}}+\ldots+a_{i^*}x_{i^*}(t_{i^*}/t_{i^{**}})^{\alpha+1})}{t_{i^{**}}^{\alpha}(a_{i^{**}}x_{i^{**}}+\ldots+a_{i^*}x_{i^*}(t_{i^*}/t_{i^{**}})^{\alpha})}=\frac{t_{i^{**}}^{\alpha+1}(a_{i^{**}}x_{i^{**}}+o(\alpha))}{t_{i^{**}}^{\alpha}(a_{i^{**}}x_{i^{**}}+o(\alpha))}=t_{i^{**}}=t^{**}(x)$$

Вывод: $\Phi(x)(\alpha)$ — непрерывная, возрастающая на $\mathbb{R}(\alpha)$ функция с образом $[t^*(x),t^{**}(x)]$.

Дальнейшее тесно связано с примером, в котором функция x является тождественной единицей.

Пример 1. $x \equiv 1$. *В этом случае все действующие лица выглядят так:*

$$\Phi(1)(\alpha) = M(t^{\alpha+1})/M(t^{\alpha}); t^*(1) = t_1, t^{**}(1) = t_N$$

Поскольку $\Phi(1)(\alpha) = \Phi(t^{\alpha})$, то функция $\Phi(1)(\alpha)$ является Φ-параметризацией на $T(N)$ важнейшего степенного семейства $\mathscr{T} = \{t^{\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}\}$. Это обстоятельство вместе с установленной монотонностью $\Phi(1)(\alpha)$ дает возможность определить для любого неотрицательного на $T(N)$ ряда его порядок в нуле.

Действительно, параметр $\Phi(x)$, являясь «горизонтальным центром тяжести» для x, лежит в $[t_1, t_N]$, а образ функций $\Phi(1)(\alpha)$ совпадает с отрезком $[t_1, t_N]$. Поэтому в силу монотонности $\Phi(1)(\alpha)$ существует единственный показатель $\alpha(x)$, для которого $\Phi(t^{\alpha(x)}) = \Phi(x)$. Его будем считать порядком x и обозначать через $\operatorname{ord} x$. Порядком ряда, тождественно равного нулю, будем считать бесконечность: $\operatorname{ord} 0 = \infty$.

Если $C(x) = M(x)/M(t^{\operatorname{ord} x})$, то функция $C(x)t^{\operatorname{ord} x}$ имеет одинаковые с x параметры $M(x)$ и $\Phi(x)$. Этого оказывается достаточно для регрессионного равенства x и $C(x)t^{\operatorname{ord} x}$ на $T(N)$ в нуле. Неформально последнее означает, что у них одна δ-регрессия на $T(N)$, вокруг которой они, колеблясь, приближаются к нулю по горизонтали (рис. 1).

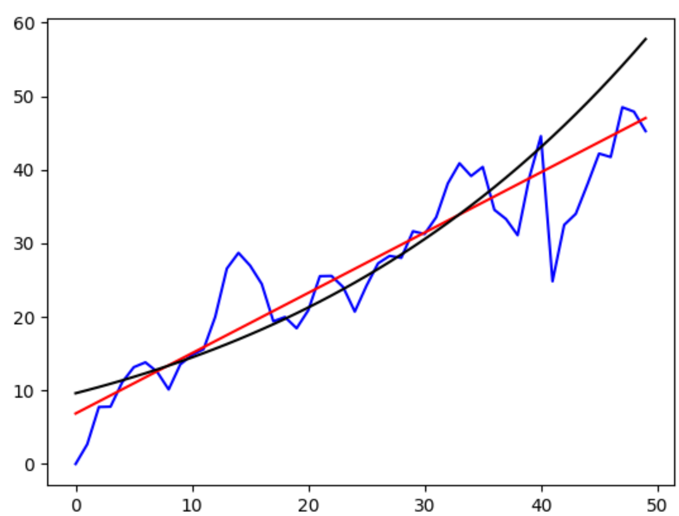


Рис. 1: Синий ряд — x, черный — $C(x)t^{\operatorname{ord} x}$, красный — их общая δ-регрессия.

Теорема 1. *Для любого неотрицательного на $T(N)$ ряда x существует единственная степенная модель $C(x)t^{\operatorname{ord} x}$, имеющая одинаковую с x линейную δ-регрессию на $T(N)$.*

Доказательство. Осталась только регрессионная часть. Обозначим через $l_{\delta}x$ линейную регрессию для x на $T(N)$ относительно весов δ:

$$l_{\delta}x \leftrightarrow l_{\delta}x(t) = a(x)t + b(x) \tag{7}$$

По модулю стандартных рассуждений, касающихся регрессии, коэффициенты $a(x)$ и $b(x)$ определяются из системы

$$\begin{cases} M(t^2)a(x) + M(t)b(x) = M(tx) \\ M(t)a(x) + b(x) = M(x) \end{cases}$$

Из нее

$$\begin{cases} a(x) = \dfrac{M(tx) - M(t)M(x)}{M(t^2) - M^2(t)} = M(x)\left(\dfrac{\Phi(x) - M(t)}{M(t^2) - M^2(t)}\right) \\ b(x) = M(x) - M(t)a(x) \end{cases}$$

Таким образом, пара $(M(x), \Phi(x))$ однозначно определяет регрессию $l_\delta x$. Доказательство окончено. □

Замечание 1. *Стандартная степенная модель для x в анализе данных основана на регрессии x в двойном логарифмическом масштабе [4]. Степенная модель для x, построенная по параметру $\Phi(x)$, связана с x непосредственно. Их сравнение приведено на рис. 2.*

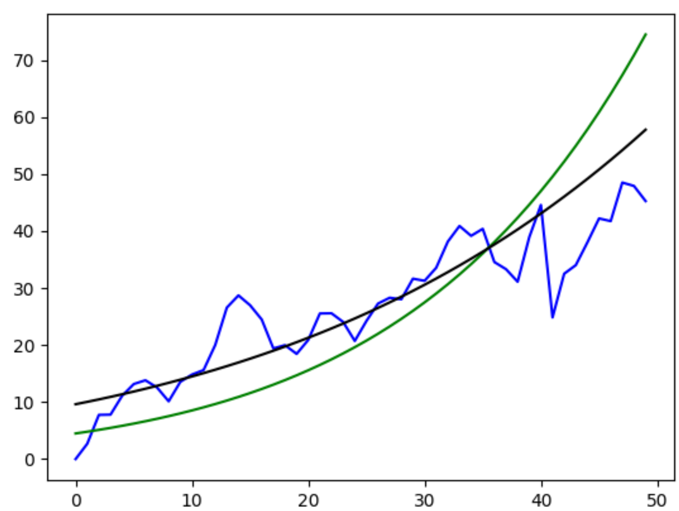


Рис. 2: Синий — исходный ряд x, зеленый — стандартная степенная модель для x, черный — степенная модель для x, построенная по параметру $\Phi(x)$.

3. Приложение к произвольным рядам

В дальнейшем T произвольный отрезок на дискретной прямой $\mathbb{R}(h)$ с концами a и b, f ряд на T, $R = Nh \ll b - a$ радиус локального обзора f в узле $t \in T$ с весом δ.

Обозначим через $x_f^+(t)$ и $x_f^-(t)$ неотрицательные ряды на $T(N)$:

$$\begin{matrix} x_f^+(t)(ih) = |f(t+ih) - f(t)| \\ x_f^-(t)(ih) = |f(t-ih) - f(t)| \end{matrix} ; i = 1, \ldots, N \tag{8}$$

Определение 2. *Ряд f в узле t будем считать справа (слева):*

- *гладким, если* $\operatorname{ord} x_f^+(t) \geqslant 1 (\operatorname{ord} x_f^-(t) \geqslant 1)$
- *липшицевым, если* $\operatorname{ord} x_f^+(t) \in (0,1) (\operatorname{ord} x_f^-(t) \in (0,1))$
- *разрывным, если* $\operatorname{ord} x_f^+(t) \leqslant 0 (\operatorname{ord} x_f^-(t) \leqslant 0)$

Механизм $\operatorname{ord} x_f^{\pm}(t)$ инвариантен. С одной стороны, это, безусловно, достоинство, поскольку дает возможность проникать глубоко во внутрь устройства f около t. С другой стороны, в анализе данных решающее слово за исследователем и такая строгость часто обременительна: на рис. 3 механизм $\operatorname{ord} x_f^{+}(t)$ выделяет три аномалии, в то время как для исследователя есть только одна — правая. Таким образом, нужным является более мягкое отношение к механизму $\operatorname{ord} x_f^{\pm}(t)$, обратно зависящее от средних $M(x_f^{\pm}(t))$: чем они меньше, тем отношение мягче.

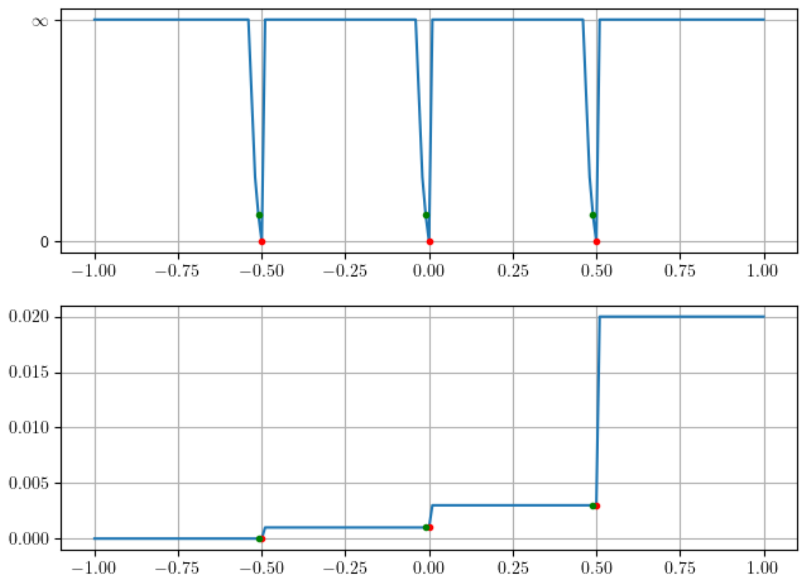


Рис. 3: Вверху — порядок $\operatorname{ord} x_f^{+}(t)$, внизу — ряд f.

Авторы строят его в рамках ДМА, используя нечеткую логику. Сначала определяются нечеткие меры $\mu_M(x)$ и $\mu_\Phi(x)$, выражающие восприятие исследователем параметров $M(x)$ и $\Phi(x)$. Далее меры $\mu_M(x)$ и $\mu_\Phi(x)$ соединяются в рамках нечеткой логики в меру $\mu(x)$, представляющую собой итоговое понимание исследователем свойств гладкости, липшицевости и разрывности, причем в разных, зависящих от исследователя, пропорциях. Вариантов много, поскольку в их создании активное участие должен принимать исследователь. Эффективность таких конструкций нужно оценивать в рамках анализа данных, т.е. с практической точки зрения. Вариант, принятый в статье, представлен ниже формулами (10). Общая мера $\mu_f(t)$ получается из меры $\mu(x)$ и механизма $x_f^{\pm}(t)$ с помощью нечеткой конъюнкции min:

$$\mu_f(t) = \min\Big(\mu(x_f^{+}(t)), \mu(x_f^{-}(t))\Big) \tag{9}$$

На рис. 4 мера $\mu_f(t)$ решает вопрос разрывности для лестницы f (рис. 3) в пользу исследователя. Далее: на рис. 5 приведен дискретный след кусочно-гладкой функции. При его анализе на первый план выходит свойство гладкости, требующее более пристального к ней внимания. Соответствующий вариант меры $\mu_f(t)$ учитывает это, деля липшицевость на сильную и слабую. Первая трактуется как переход от гладкости к негладкости (зеленое), а вторая как негладкость (красное).

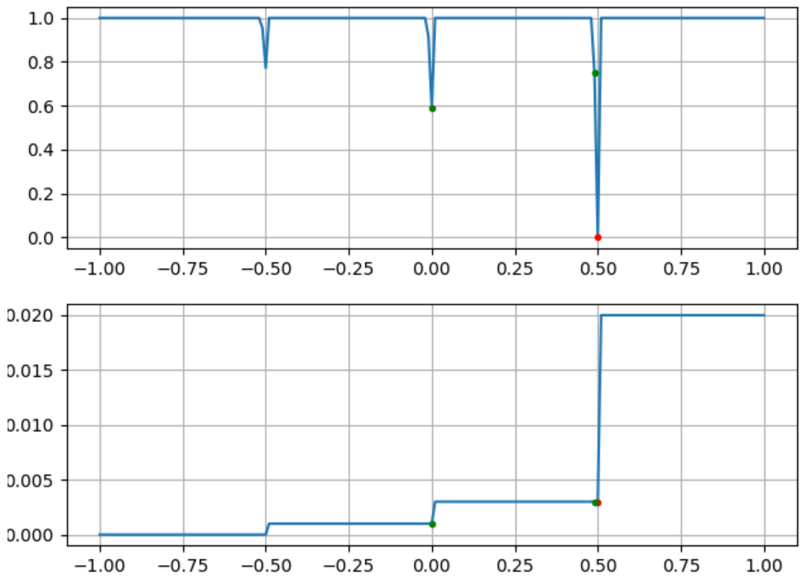


Рис. 4: Вверху — мера гладкости $\mu_f(t)$, внизу — классификация точек ряда $f(t)$ относительно меры $\mu_f(t)$ (непрерывные — синие, промежуточные — зеленые, разрывные — красные).

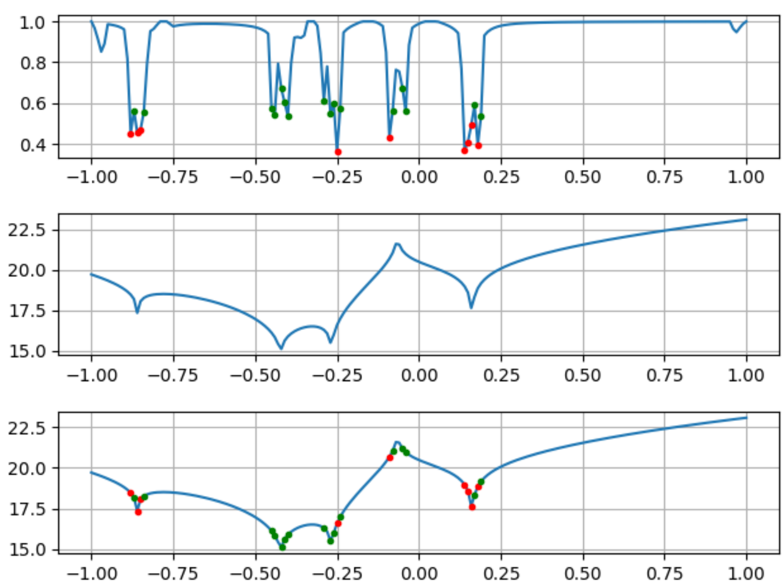


Рис. 5: Вверху — мера гладкости $\mu_f(t)$, посередине — ряд $f(t)$, внизу — классификация точек ряда $f(t)$ относительно меры $\mu_f(t)$ (гладкие — синие, промежуточные — зеленые, негладкие — красные).

В заключение возвратимся к мере $\mu(x)$ и приведем ее вариант, участвующий в работе:

$$\mu(x) = (1 - \mu_\Phi(x))\mu_M(x) + \mu_\Phi(x),$$

где

$$\mu_\Phi(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } \operatorname{ord} x > 1 \\ \operatorname{ord} x, \text{ если } \operatorname{ord} x \in [0,1] \\ 0, \text{ если } \operatorname{ord} x < 0 \end{cases} \tag{10}$$

$$\mu_M(x) = \left(1 - \frac{\min(M(x), B)}{B}\right)^p$$

Параметр p определяется работой на степенном семействе $\mathscr{T} = \{t^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}\}$. В настоящей работе $p = 6.75$ и выбирается из соображения гладкости в нуле $|t^\alpha|$ при $\alpha \geqslant 1$, переходной гладкости при $\alpha \in [0.5, 1)$ и ее отсутствия при $\alpha < 0.5$ (рис. 6–8).

Параметр B является нижней гранью больших, по мнению исследователя, чисел. В настоящей работе:

$$B = B(f) = \frac{\sum f(t) : t \in T}{|T|} - \min_{t \in T} f(t).$$

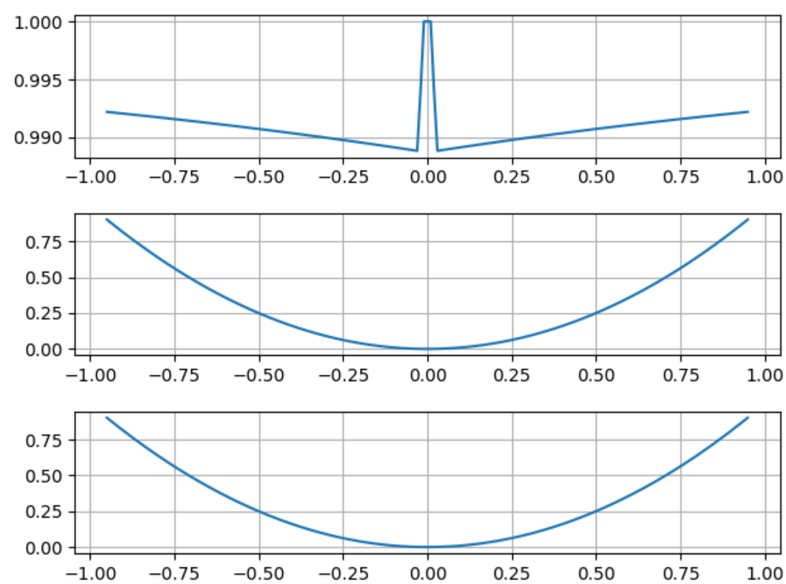


Рис. 6: Пример $f = |t^2|$, вверху — мера гладкости $\mu_f(t)$, посередине — ряд $f(t)$, внизу — классификация точек ряда $f(t)$ относительно меры $\mu_f(t)$ (гладкие — синие, промежуточные — зеленые, негладкие — красные).

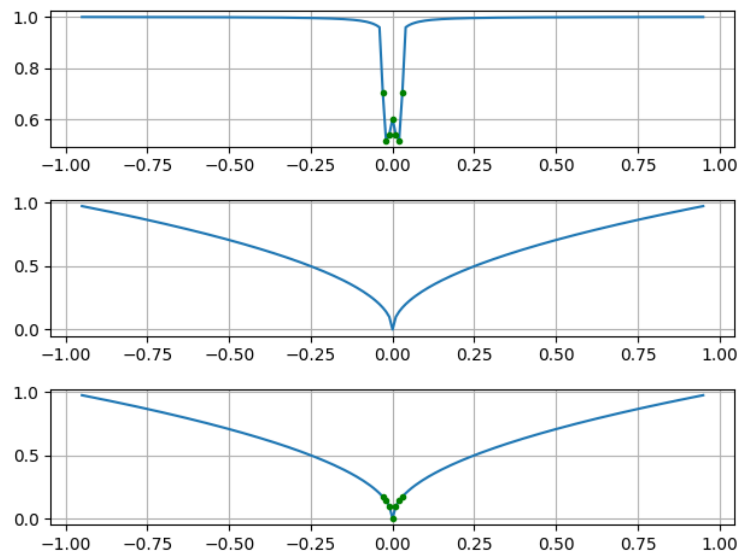


Рис. 7: Пример $f = |t^{0.5}|$, вверху — мера гладкости $\mu_f(t)$, посередине — ряд $f(t)$, внизу — классификация точек ряда $f(t)$ относительно меры $\mu_f(t)$ (гладкие — синие, промежуточные — зеленые, негладкие — красные).

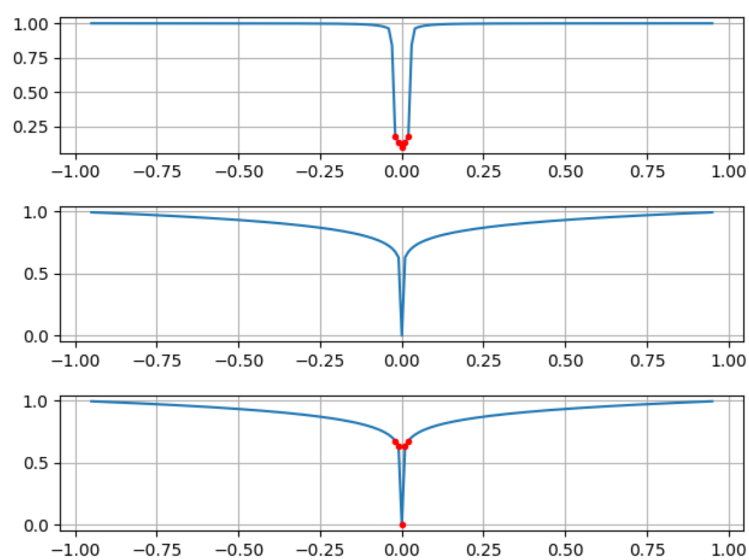


Рис. 8: Пример $f = |t^{0.1}|$, вверху — мера гладкости $\mu_f(t)$, посередине — ряд $f(t)$, внизу — классификация точек ряда $f(t)$ относительно меры $\mu_f(t)$ (гладкие — синие, промежуточные — зеленые, негладкие — красные).

4. Заключение

В классическом анализе равномерные показатели Липшица дают глобальное измерение гладкости: если функция f удовлетворяет равномерному показателю Липшица $\alpha > m$ в окрестности $[t-h, t+h]$ с многочленом p_t, то, во-первых, функция f обязательно m раз непрерывно дифференцируема в $[t-h, t+h]$, а, во-вторых, p_t есть многочлен Тейлора порядка

m для f в t [5].

Отсюда подход к m-гладкости в дискретном случае: регрессионные производные существуют всегда [1]–[3], поэтому у любого ряда f в любом узле t существует многочлен Тейлора p_t^m любого порядка m. Дальше поступаем как выше в механизме $x_f^{\pm}(t)$.

Обозначим через $x_f^{+,m}(t)$ и $x_f^{-,m}(t)$ неотрицательные ряды на $T(N)$, подобно (8) представляющие отклонение f от p_t^m соответственно справа и слева. И назовем f m-гладкой в t справа (слева), если $\mathrm{ord}_f^{+,m}(t) > m$ ($\mathrm{ord}_f^{-,m}(t) > m$).

Эффективность механизма $\mathrm{ord}_f^{\pm,m}(t)$ предполагается изучить в будущем.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Агаян С. М., Богоутдинов Ш. Р., Добровольский М. Н., Иванченко О. В., Камаев Д. А. Регрессионное дифференцирование и регрессионное интегрирование конечных рядов // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22, вып. 2. С. 27–47. doi: 10.22405/2226-8383-2021-22-2-27-47

2. Агаян С. М., Богоутдинов Ш. Р., Камаев Д. А., Дзебоев Б. А., Добровольский М. Н. Распознавание аномалий на записях с помощью нечеткой логики // Чебышевский сборник. 2025. Т. 26, вып. 3. С. 6–43. doi: 10.22405/2226-8383-2025-26-3-6-43

3. Agayan S., Bogoutdinov Sh., Kamaev D., Dzeboev B., Dobrovolsky M. Trends and Extremes in Time Series Based on Fuzzy Logic // Mathematics. 2024. Vol. 12, no. 2. P. 284–316. doi: 10.3390/math12020284

4. Божокин С. В., Паршин Д. А. Фракталы и мультифракталы. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 128 с.

5. Малла С. Вейвлеты в обработке сигналов. М.: Мир, 2005. 671 с.

REFERENCES

1. Agayan, S. M., Bogoutdinov, Sh. R., Dobrovolskiy, M. N., Ivanchenko, O. V., Kamaev, D. A. 2021, “Regression differentiation and regression integration of finite series”, *Chebyshevsky Sbornik*, vol. 22, no. 2, pp. 27–47. doi: 10.22405/2226-8383-2021-22-2-27-47

2. Agayan, S. M., Bogoutdinov, Sh. R., Kamaev, D. A., Dzeboev, B. A., Dobrovolsky, M. N. 2025, “Anomaly recognition in recordings using fuzzy logic” // *Chebyshevsky Sbornik*, vol. 26, no. 3, pp. 6–43. doi: 10.22405/2226-8383-2025-26-3-6-43

3. Agayan, S., Bogoutdinov, Sh., Kamaev, D., Dzeboev, B., Dobrovolsky, M. 2024, “Trends and Extremes in Time Series Based on Fuzzy Logic” // *Mathematics*, vol. 12, no. 2, pp. 284–316. doi: 10.3390/math12020284

4. Bozhokin, S.V. & Parshin, D.A. 2001, *Fractals and Multifractals*, Research Center “Regular and Chaotic Dynamics”, Izhevsk.

5. Malla, S. 2005, *Wavelets in Signal Processing*, Mir, Moscow.

Получено: 18.07.2025
Принято в печать: 08.12.2025

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 26. Выпуск 5.

УДК: 519.6 DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-5-17-41

Нечеткие линейные системы[1]

С. М. Агаян, Ш. Р. Богоутдинов, А. А. Соловьев

Агаян Сергей Мартикович — доктор физико-математических наук, Геофизический центр РАН (г. Москва).
e-mail: s.agayan@gcras.ru
Богоутдинов Шамиль Рафекович — кандидат физико-математических наук, Геофизический центр РАН; Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН (г. Москва).
e-mail: shm@gcras.ru
Соловьев Анатолий Александрович — доктор физико-математических наук, Геофизический центр РАН; Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН (г. Москва).
e-mail: a.soloviev@gcras.ru

Аннотация

Для системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) $Ax = b$ в конечномерном евклидовом пространстве E с помощью ортогонализации Грама-Шмидта получено конструктивное описание многообразия ее решений $\Phi(A, b)$, состоящее в ее безусловной линейной параметризации.

Это обстоятельство открывает совершенно новые возможности в использовании СЛАУ, поскольку позволяет теоретически учесть априорную информацию о свойствах истинного решения $x^{\text{и}}$ в его поиске на многообразии $\Phi(A, b)$. Технически это выглядит так: экспертная точка зрения на решение $x^{\text{и}}$ формализуется неотрицательным функционалом F на $\Phi(A, b)$, а решение $x^{\text{и}}$ его минимизирует. Благодаря линейной параметризации $\Phi(A, b)$ минимизация F является безусловной.

Особое внимание в работе уделено случаю, когда экспертная информация о решении $x^{\text{и}}$ формально предстает нечеткой структурой μ весов координат пространства E, выражающих их роль в СЛАУ $Ax = b$. Пару $(Ax = b, \mu)$ мы называем нечеткой СЛАУ. Формирование ее решений $\Phi(A, b, \mu) \subseteq \Phi(A, b)$ связано с нелинейной оптимизацией, для которой в работе разработаны алгоритмы полиномиального спуска.

Результаты исследований иллюстрируются примерами.

Ключевые слова: проекционный метод, пространство решений, полиномиальный спуск, нечеткие линейные системы.

Библиография: 10 названий.

Для цитирования:
Агаян С. М., Богоутдинов Ш. Р., Соловьев А. А. Нечеткие линейные системы // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 5, с. 17–41.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 24-17-00346).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 26. No. 5.

UDC: 519.6 DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-5-17-41

Fuzzy linear systems

S. M. Agayan, Sh. R. Bogoutdinov, A. A. Soloviev

Agayan Sergey Martikovich — doctor of physical and mathematical sciences, The Geophysical Center of the Russian Academy of Sciences (Moscow).
e-mail: s.agayan@gcras.ru
Bogoutdinov Shamil Rafekovich — candidate of physical and mathematical sciences, The Geophysical Center of the Russian Academy of Sciences; Schmidt Institute of Physics of the Earth of the Russian Academy of Sciences (Moscow).
e-mail: shm@gcras.ru
Soloviev Anatoly Alexandrovich — doctor of physical and mathematical sciences, The Geophysical Center of the Russian Academy of Sciences; Schmidt Institute of Physics of the Earth of the Russian Academy of Sciences (Moscow).
e-mail: a.soloviev@gcras.ru

Abstract

For a system of linear algebraic equations (SLAE) $Ax = b$ in a finite-dimensional Euclidean space E, a constructive description of the manifold of its solutions $\Phi(A, b)$ is obtained using the Gram-Schmidt orthogonalization. This description consists of an unconditional linear parameterization.

This circumstance opens up entirely new possibilities for using SLAEs, as it allows one to theoretically take into account a priori information about the properties of the true solution $x^{и}$ in its search on the manifold $\Phi(A, b)$. Technically, this looks like this: the expert opinion on the solution $x^{и}$ is formalized by a non-negative functional F on $\Phi(A, b)$, and the solution $x^{и}$ minimizes it. Thanks to the linear parameterization of $\Phi(A, b)$, the minimization of F is unconditional.

The paper pays special attention to the case where expert information about the solution $x^{и}$ is formally represented by a fuzzy structure μ of coordinate weights in the space E, expressing their role in the SLAE $Ax = b$. We call the pair $(Ax = b, \mu)$ a fuzzy SLAE. The formation of its solutions $\Phi(A, b, \mu) \subseteq \Phi(A, b)$ is associated with nonlinear optimization, for which polynomial descent algorithms are developed in the paper.

The research results are illustrated with examples.

Keywords: projection method, solution space, polynomial descent, fuzzy linear systems.

Bibliography: 10 titles.

For citation:
Agayan, S. M., Bogoutdinov, Sh. R., Soloviev, A. A. 2025, “Fuzzy linear systems”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 5, pp. 17–41.

1. Введение

Конструктивное описание многообразия решений $\Phi(A, b)$ линейной системы (СЛАУ) $Ax = b$ в конечномерном евклидовом пространстве E позволяет учесть априорную информацию о свойствах нужного (истинного) решения $x^{и}$ путем его поиска на многообразии $\Phi(A, b)$.

Технически это выглядит так: экспертная точка зрения на решение $x^{\text{и}}$ формализуется неотрицательным функционалом F на $\Phi(A,b)$, а решение $x^{\text{и}}$ его минимизирует. Если точек зрения на $x^{\text{и}}$ несколько и за них отвечает система функционалов $\mathcal{F}=(F_1,\ldots,F_k)$, то поиск $x^{\text{и}}$ сводится к многокритериальному выбору $B(\Phi(A,b),\mathcal{F})$ относительно $\mathcal{F}$ на $\Phi(A,b)$.

Сказанное выше графически передает схема

$$Ax=b\to\Phi(A,b)\to\mathcal{F}\to B(\mathcal{F},\Phi(A,b))\to x^{\text{и}} \tag{1}$$

Первый переход в (1) полностью относится к линейной алгебре и в настоящей работе будет выполнен с помощью ортогонализации Грама-Шмидта.

Второй переход в (1) формализует априорную информацию об истинном решении $x^{\text{и}}$ в систему функционалов $\mathcal{F}$ на многообразии $\Phi(A,b)$ и потому требует широкого спектра методов. Мы будем иметь дело с высказываниями двух типов E_y и E_μ:

E_y: решение $x^{\text{и}}$ похоже на известный вектор $y\in E$

E_μ: μ – неотрицательный вектор весов координат пространства E, выражающих их роль в СЛАУ $Ax=b$. Модули координат решения $x^{\text{и}}$ похожи на веса μ.

При условии нечеткости μ ($\|\mu\|_\infty=1$) пару $(Ax=b,\mu)$ считаем нечеткой СЛАУ, так что высказывание E_μ связано с формированием ее решения $\Phi(A,b,\mu)\subseteq\Phi(A,b)$. Будут рассмотрены и проанализированы три варианта E_y и два варианта E_μ.

Третий переход в (1) представляет собой оптимизацию функционалов из $\mathcal{F}$ на многообразии $\Phi(A,b)$ в широком смысле. В работе она выполнена как аналитическими методами (явное определение экстремальных точек через градиенты), так и новыми, полиномиальными версиями градиентного и покоординатного спусков. Их результатом будут те или иные версии истинного решения $x^{\text{и}}$. Изложение иллюстрируется примерами из магнитометрии, поскольку настоящая работы выполнена в рамках связанного с ней гранта РНФ.

2. Проекционный метод

Исходное пространство E предполагается n-мерным Евклидовым относительно скалярного произведения $(\,,)$. В линейной системе

$$Ax=b=(a_i,x)=b_i;\ i=1,\ldots,m;\ x\in E \tag{2}$$

под A одновременно понимается как совокупность векторов a_i из E, так и матрица $m\times n$ с векторами a_i в качестве строк, $b=(b_i|_1^m)$.

Проекционный метод (ПМ) применительно к системе (2) состоит в эффективном построении многообразия ее решений $\Phi(A,b)$. Эта задача была решена авторами в работах [1, 2, 3] на основе систематического использования ортопроектора $H(a)$ перпендикулярно к $a\in E$: $H(a)=1-\frac{aa^\top}{a^\top a}$, если $a\neq 0$ и $H(0)=1$.

В настоящей работе в изложении ПМ главную роль будет играть ортогонализация Грама-Шмидта (ГШ) [4] в E.

Однородные системы. Для однородной системы $Ax=0$ пространство решений $\Phi(A,0)$ в точности совпадает с ортогональным дополнением в E к подпространству $L(A)$, порожденному A: $\Phi(A,0)=L(A)^\top$. Поэтому для решения системы $Ax=0$ нужно построить ортопроектор

$$H=H(A):\ E\longrightarrow L(A)^\top.$$

Сделаем это с помощью ортогонализации ГШ: если $\mathcal{G} = \{g_i|_1^N\}$, $N = \operatorname{rang} A$ результат ее применения к совокупности A: $\mathcal{G} = \text{ГШ}(A)$, то

$$Hx = x - \sum_{i=1}^{N} \frac{(x, g_i)}{(g_i, g_i)} g_i \quad \forall x \in E. \tag{3}$$

Неоднородные системы. Произвольное решение неоднородной системы $Ax = b$ есть сумма частного x^* и однородного, так что $\Phi(A, b) = x^* + \Phi(A, 0)$. Воспользуемся в поиске x^* приводимой ниже эквивалентностью и реализацией ее правой части с помощью ортогонализации ГШ:

$$x \in \Phi(A, b) \equiv \begin{array}{l} x \text{ вектор в } E, \text{ чей образ } Ax \text{ является} \\ \text{проекцией } b \text{ на образ } \operatorname{Im} A \text{ в } \mathbb{R}^m \end{array}.$$

Если $\{e_j|_1^n\}$ базис E, то система $P = \{Ae_j|_1^n\}$ порождает образ $\operatorname{Im} A$ в $\mathbb{R}^m$. Применим к P ортоганилизацию ГШ и получим ортогональную систему $G = \text{ГШ}(P)$ в $\mathbb{R}^m$: $G = \{g_i\,|_1^N\}$, $N = \operatorname{rang} P$.

Нам нужны прообразы y_i векторов g_i при отображении A: $Ay_i = g_i$. Если они известны, то

$$b = \sum_{i=1}^{N} \frac{(b, g_i)}{(g_i, g_i)} g_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{(b, g_i)}{(g_i, g_i)} Ay_i = A\left(\sum_{i=1}^{N} \frac{(b, g_i)}{(g_i, g_i)} y_i\right)$$

Таким образом, вектор

$$x^* = \sum_{i=1}^{N} \frac{(b, g_i)}{(g_i, g_i)} y_i \tag{4}$$

является частным решением системы $Ax = b$.

Вектора g_i и y_i строим итеративно. Сначала рассуждения относительно g_i: если известны вектора $g_1, \ldots, g_{i-1}$, $i \geqslant 2$, то согласно ГШ

$$g_i = Ae_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{(Ae_i, g_k)}{(g_k, g_k)} g_k. \tag{5}$$

Начало: $g_1 = Ae_1$. Теперь рассуждения для y_i: если известны вектора $y_1, \ldots, y_{i-1}$, $i \geqslant 2$, то с учетом (5)

$$g_i = Ae_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{(Ae_i, g_k)}{(g_k, g_k)} Ay_k = A\left(e_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{(Ae_i, g_k)}{(g_k, g_k)} y_k\right).$$

Таким образом,

$$y_i = e_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{(Ae_i, g_k)}{(g_k, g_k)} y_k.$$

Начало: $y_1 = e_1$.

Подведем итог: эффективная параметризация многообразия решений $\Phi(A, b)$ СЛАУ $Ax = b$ с помощью ортогонализации ГШ представляет собой зависимость

$$x = x^* + Hs, \quad s \in E \tag{6}$$

где H и x^* определяются формулами (3) и (4).

3. Суждение E_y

Многообразие $\Phi(A,b)$ служит областью определения произвольного суждения об истинном решении $x^{\text{и}}$. Обратимся к одному из самых естественных из них, а именно: к суждению E_y о схожести $x^{\text{и}}$ с известным вектором $y \in E$. В работах [1, 2, 3] разобраны две его трактовки. Приведем их.

Трактовка первая E_y^1. Схожесть $x^{\text{и}}$ и y понимается метрически, как близость в E: «$x^{\text{и}} = x_1^{\text{и}}$ ближайшая к y точка на многообразии $\Phi(A,b)$». Поиск варианта $x_1^{\text{и}} = x^* + Hs_1^{\text{и}}$ истинного решения согласно E_y^1 сводится к безусловной минимизации по s на E первой версии функционала F_y^1:

$$F_y^1(s) = ||x^* + Hs - y||^2, \quad \operatorname{grad} F_y^1(s) = H^\top Hs - H^\top(y - x^*), \tag{7}$$

что приводит к СЛАУ на параметр $s_1^{\text{и}}$

$$H^\top Hs_1^{\text{и}} = H^\top(y - x^*), \tag{7$'$}$$

которую можно решить ПМ.

Трактовка вторая E_y^2. Сходство $x^{\text{и}}$ и y более инвариантно относительно y и, в известном смысле, полукорреляционно: «$x_2^{\text{и}}$ ближайшая точка на $\Phi(A,b)$ к прямой $L(y) = yt$, порожденной вектором y». В этом случае поиск $x_2^{\text{и}} = x^* + Hs_2^{\text{и}}$ связан с безусловной минимизацией по s и t на произведении $E(s) \times \mathbb{R}(t)$ второй версии функционала F_y^2:

$$F_y^2(s) = ||x^* + Hs - yt||^2. \tag{8}$$

Нужная пара параметров (s_2^*, t^*) получается, как решение СЛАУ

$$\begin{pmatrix} H^\top H & -H^\top y \\ -y^\top H & ||y||^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_2^* \\ t^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -H^\top x^* \\ (x^*, y) \end{pmatrix}. \tag{8$'$}$$

Полиномиальный спуск. В (7$'$) и (8$'$) функционалы F_y^1 и F_y^2 зависят от s квадратично, поэтому оптимизация для них на пространстве $E(s)$ сводится к решению СЛАУ (7$'$) и (8$'$), порожденных их градиентами. В оставшихся случаях E_y^3 и E_μ^i $(i = 1, 2)$ функционалы $F(s)$ алгебраические, но не квадратичные, поэтому для их оптимизации нужны нелинейные методы.

В работе предлагается глобальный вариант оптимизации по направлениям, который называется Полиномиальным Спуском (ПС). Опишем общую ситуация для его работы: пусть $F(x)$ – функционал на многообразии решений $\Phi(A,b)$ СЛАУ $Ax = b$. Благодаря параметризации (6), он становится функционалом $F(s)$ на всем пространстве параметров $E(s)$.

Скажем, что к F применим ПС, если критические точки ограничения $F_{s^*,d^*}(t) = F(s^* + td^*)$ на любую прямую $s(t) = s^* + td^*$ в $E(s)$ можно найти с помощью решения полиномиальных уравнений в радикалах.

Применительно к F алгоритм ПС действует итеративно: находясь в точке s^*, он анализирует поведение $F_{s^*,d^*}(t)$ вдоль «правильных» направлений d, выходящих из s^*, и выбирает в этом множестве $D(s^*)$ направление d^*, вдоль которого минимизация $F_{s^*,d}(t)$ наилучшая. Если t^* ее результат, то следующей за s^* будет точка $s^* + t^*d^*$. Начинается алгоритм ПС в нуле $s = 0$, поскольку в начале на многообразии $\Phi(A,b)$ нам известна только одна точка x^*.

Варианты $D(s^*)$ определяют варианты ПС. Их будет два – Полиномиальный Градиентный Спуск (ПГС) и Полиномиальный Покоординатный Спуск (ППС):

$$\begin{aligned} &\text{ПГС} \leftrightarrow D(s^*) = \operatorname{grad} F(s^*) \\ &\text{ППС} \leftrightarrow D(s^*) = \left\{ \begin{array}{c} \text{Координатные оси} \\ e_k \text{ в } E(s);\; k = 1, \ldots, n \end{array} \right\} \end{aligned} \tag{9}$$

С учетом сказанного изложение оставшихся суждений E будет носить технический характер и состоять в вычислении $\operatorname{grad} F(s^*)$ и $F'_{s^*,d}$ для соответствующего E функционала F.

Трактовка третья E^3_y. Сходство $x^{\text{и}}$ и y состоит в их полной cos-корреляции: «$x^{\text{и}}_3$ точка на $\Phi(A, b)$ с максимальной корреляцией $\cos(x^{\text{и}}_3, y)$». С учетом параметризации (6) поиск $x^{\text{и}}_3$ сводится к безусловной максимизации по s функционала F^3_y

$$J(s) = F^3_y(s) = \frac{(x^* + Hs, y)}{\|x^* + Hs\|\,\|y\|}. \tag{10}$$

Покажем, что ее можно выполнить с помощью ПС. Для этого найдем градиент $\operatorname{grad} J(s)$ с помощью представления $J(s)$ как суперпозиции $\cos(x, y)$ и параметризации $x = x^* + Hs$:

$$J'(s) = \cos(x, y)_x (x^* + Hs)_s.$$

Прямые вычисления дадут равенства

$$\cos(x, y)_x = \left(\frac{\|x\|^2 y - (x, y)x}{\|x\|^3\|y\|}\right)^{\top},$$
$$(x^* + Hs)_s = H,$$

так что

$$J'(s) = \left(\frac{\|x^* + Hs\|^2 y - (x^* + Hs, y)(x^* + Hs)}{\|x^* + Hs\|^3\|y\|}\right)^{\top} H$$

и

$$\operatorname{grad} J(s) = H^{\top}\left(\frac{\|x^* + Hs\|^2 y - (x^* + Hs, y)(x^* + Hs)}{\|x^* + Hs\|^3\|y\|}\right). \tag{11}$$

Для ПС нужно изучить ограничение функции $J(s)$ на любую прямую $s(t) = ct + d$ в пространстве параметров $E(s)$. Положим $J(t) = J_{c,d}(t) = J(ct + d)$ и найдем $J'(t)$:

$$\begin{aligned} J'(t) &= J'_{c,d}(t) = (\operatorname{grad} J(ct + d), c) = \\ &= \left(H^{\top}\frac{\|x^* + H(ct+d)\|^2 y - (x^* + H(ct+d), y)(x^* + H(ct+d))}{\|x^* + H(ct+d)\|^3\|y\|}, c\right) = \\ &= \left(\frac{\|x^* + H(ct+d)\|^2 y - (x^* + H(ct+d), y)(x^* + H(ct+d))}{\|x^* + H(ct+d)\|^3\|y\|}, Hc\right). \end{aligned}$$

Положим $C = Hc$, $D = x^* + Hd$ и запишем в этих обозначениях $J(t)$ и $J'(t)$:

$$\begin{aligned} J(t) &= \frac{(Ct + D, y)}{\|Ct + D\|\|y\|}, \\ J'(s) &= \frac{\|Ct + D\|^2(y, C) - (Ct + D, y)(Ct + D, C)}{\|Ct + D\|^3\|y\|}. \end{aligned} \tag{12}$$

Проанализируем $J(t)$. Во-первых, она ограничена: $J(t) \leqslant 1$, во-вторых, имеет пределы на бесконечности

$$\begin{aligned} \lim_{t \to \pm\infty} J(t) &= \frac{t(C, y) + (D, y)}{\|Ct + D\|\|y\|} = \frac{t}{|t|}\,\frac{(C, y) + t^{-1}(D, y)}{\|C + t^{-1}D\|\|y\|} = \\ &= \begin{cases} \pm\cos(C, y), & \text{если } C \neq 0, \\ \cos(D, y), & \text{если } C = 0. \end{cases} \end{aligned} \tag{13}$$

Следствие 1. *Если $C \neq 0$, то $J(-\infty) = -J(\infty)$. Если $C = 0$, то $J(t) \equiv \cos(D, \mu)$.*

Далее: преобразуем производную $J'(t)$ с помощью замены $\|D+tC\|^2 = (D+tC, D+tC)$

$$\begin{aligned}
J'(t) &= \frac{(D+tC,D+tC)(y,C)-(D+tC,y)(D+tC,C)}{\|D+tC\|^3\|y\|} = \\
&= \frac{t^2(C,C)(y,C)+2t(D,C)(y,C)+(D,D)(y,C)}{\|D+tC\|^3\|y\|} - \\
&\quad - \frac{(t(y,C)+(\mu,D))(t(C,C)+(D,C))}{\|D+tC\|^3\|y\|} = \\
&= \frac{2t(D,C)(y,C)+(D,D)(y,C)-t(D,C)(y,C)-t(C,C)(y,D)-(y,D)(D,C)}{\|D+tC\|^3\|y\|} = \\
&= \frac{-t((D,C)(y,C)-(C,C)(y,D))+(D,D)(y,C)-(D,C)(y,D)}{\|D+tC\|^3\|y\|}
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$(F_y^3)'(t) = \frac{Pt+Q}{\|D+tC\|^3\|y\|}, \tag{14}$$

где

$$\begin{array}{l} P = (D,C)(y,C)-(C,C)(y,D) \\ Q = (D,D)(y,C)-(D,C)(y,D) \end{array}.$$

Приведенные вычисления вместе с классическим одномерным математическим анализом дают возможность полностью понять устройство ограничения функционала F_y^3 на прямые в $E(s)$ и, как следствие, обосновать ПС для оптимизации F_y^3: попадая в точку с направлением, можно сделать нужный шаг вдоль всей прямой, через неё проходящую.

Устройство $F_y^3(t)$ через C, D, P, Q, y:

- Если $P = 0$ и $C \neq 0$, то ограничение $F_y^3(t)$ монотонно, причем $F_y^3(t)$ строго возрастает (убывает), если $\cos(C,y) > 0$ ($\cos(C,y) < 0$).

  Доказательство. Монотонность следует из (14), а ее характер определяется поведением на бесконечности (13).

- Если $P = 0$ и $C = 0$, то $F_y^3(t) \equiv \cos(D,\mu)$.

- Если $P \neq 0$, то у $F_y^3(t)$ есть одна критическая точка $t^* = -Q/P$ (14), причем

$$t^* = -\frac{Q}{P} \;-\; \begin{array}{ll} \text{максимум,} & \text{если } P<0 \\ \text{минимум,} & \text{если } P>0 \end{array}. \tag{15}$$

  Доказательство. Знак производной $(F_y^3)'(t)$ совпадает со знаком ее числителя $Pt+Q$ (14): при $P<0$ переход через ноль в t^* будет сверху вниз (максимум), при $P>0$ – наоборот, снизу вверх (минимум).

Помощь в оптимизации F_y^3. Аналитическое выражение (11) для $\operatorname{grad} F_y^3$ нелинейно в отличие от выражений ($7'$) и ($8'$) для $\operatorname{grad} F_y^1$ и $\operatorname{grad} F_y^2$. Поэтому прямое определение экстремумов F_y^3, подобно F_y^1 и F_y^2, невозможно: необходима итеративная численная оптимизация. Если в ее процессе в какой-то момент мы находимся в точке d пространства параметров $E(s)$, и алгоритм оптимизации принимает решение о направлении движения по вектору c, то такое движение, благодаря проделанному выше анализу, возможно глобальное, а следующая точка в такой оптимизации будет глобальным максимумом F_y^3 на $s(t) = ct+d$ или порогом движения к бесконечности в «правильном направлении».

Графическая иллюстрация сказанного поможет сформулировать окончательную версию поиска. Двумерного случая для этого будет достаточно: положим $C = (a, 1)$, $D = (1, 0)$, $y = (y_1, y_2)$ и за счет выбора a, y_1, y_2 добьемся нужного результата

- Если $P = 0$, $C \neq 0$ и $F_y^3(\infty) = \cos(C, y) \gtrless 0$, то движение к $F_y^3(\infty)$ $(F_y^3(-\infty))$, то есть к модулю $|\cos(C, y)|$. В параметрах примера $P = 0 \longleftrightarrow ay_2 = y_1$, $\cos(C, y) = ay_1 + y_2 = (a^2+1)y_2$. Нужные примеры получаются при $a = 1$; $y_2 = \pm 1$. Ими будут функции на рисунках 1 и 2

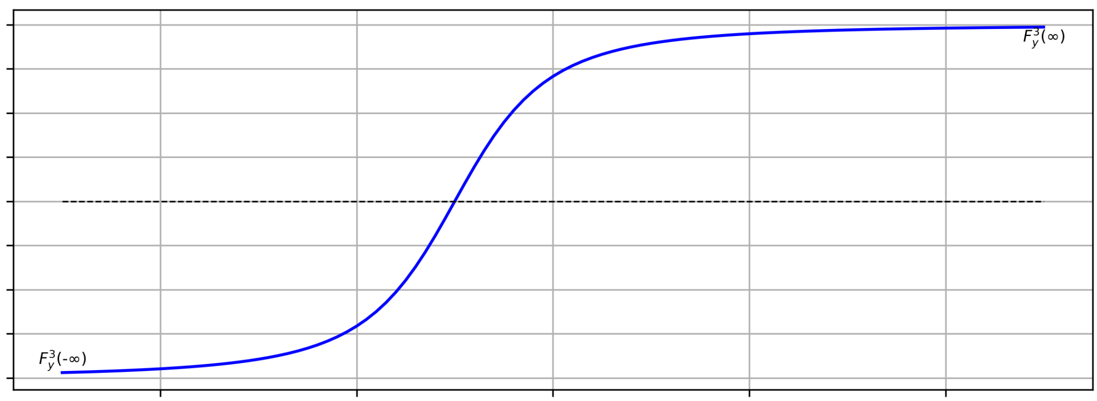


Рис. 1: $F_y^3(t) = \frac{(2t+1)}{\sqrt{(t+1)^2+t^2}\sqrt{2}}$

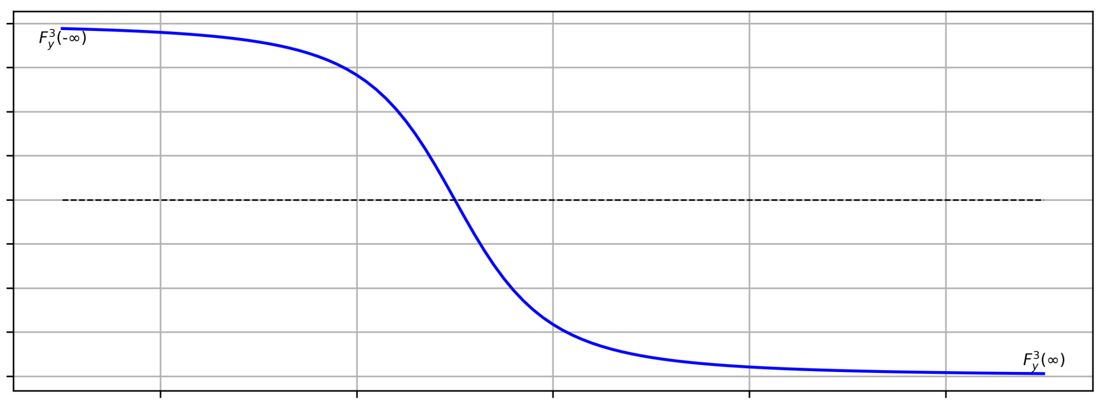


Рис. 2: $F_y^3(t) = \frac{-(2t+1)}{\sqrt{(t+1)^2+t^2}\sqrt{2}}$

- Если $P = 0$, $C = 0$ и $F_y^3 \equiv \cos(D, y)$ и никакого движения нет

- Если $P > 0$, то существенно все также, как при $P = 0$: движение к модулю $|\cos(C, y)|$. Сказанное иллюстрируют функции на рисунках 3 и 4

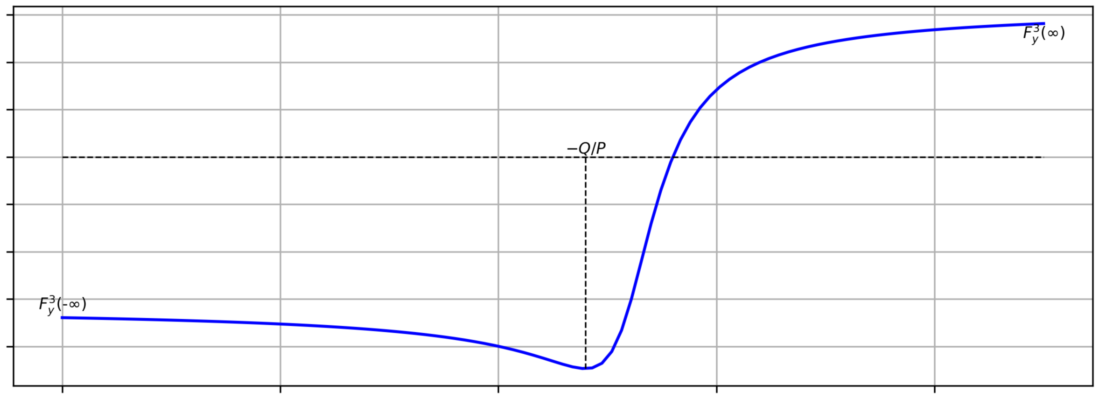


Рис. 3: $F_y^3(t) = \frac{5t+1}{\sqrt{(2t+1)^2+t^2}\sqrt{2}}$

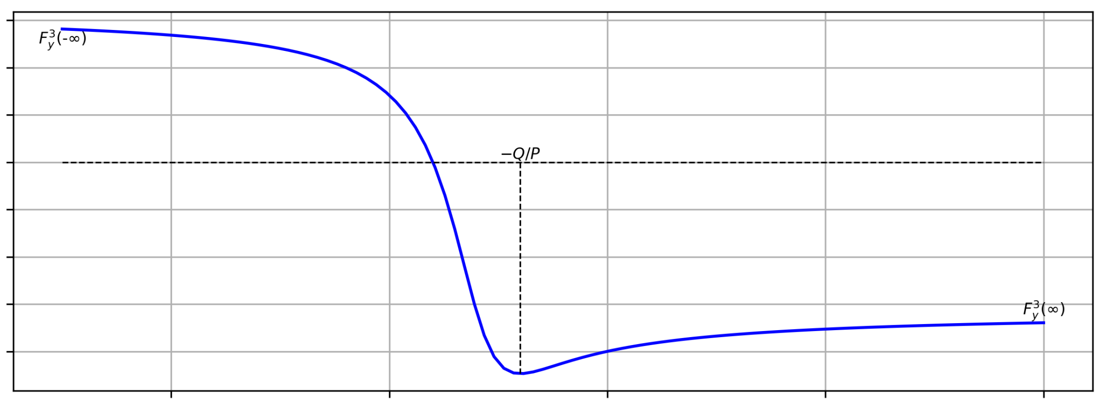


Рис. 4: $F_y^3(t) = \frac{-5t+1}{\sqrt{(-2t+1)^2+t^2}\sqrt{2}}$

- Если $P < 0$, то движение к модулю $F_y(-Q/P)$. Сказанное иллюстрируют функции на рисунках 5 и 6

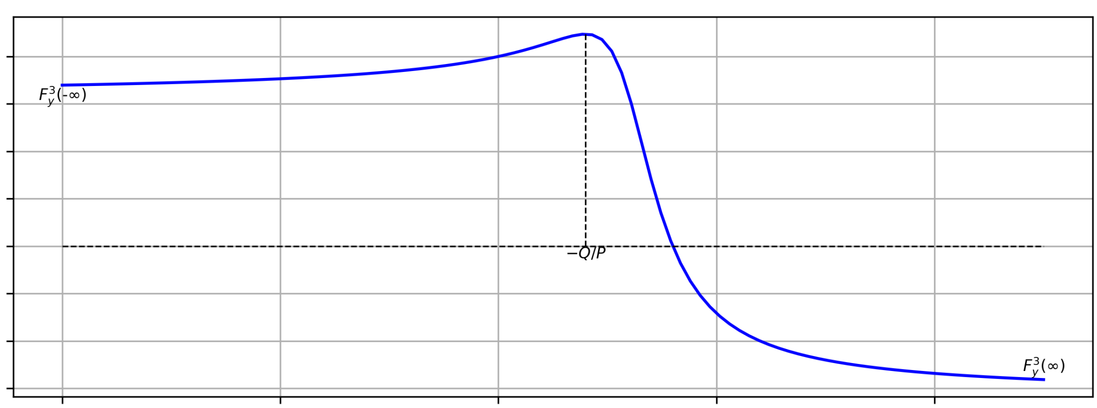


Рис. 5: $F_y^3(t) = -\frac{5t+1}{\sqrt{(2t+1)^2+t^2}\sqrt{2}}$

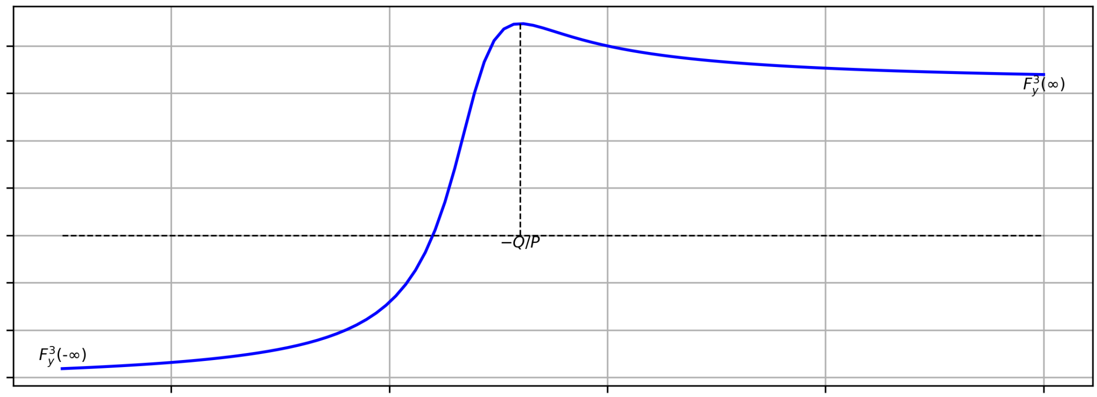


Рис. 6: $F_y^3(t) = -\frac{-5t+1}{\sqrt{(-2t+1)^2+t^2}\sqrt{2}}$

Следующая точка в оптимизации F_y^3. Мы находимся в точке d пространства параметров $E(s)$ и двигаемся в нем вдоль прямой $s(t) = d + ct$, оптимизируя ограничение $F_y^3(s(t))$. Оно полностью описывается параметрами C, D, P, Q и y. Следующая за d точка d^+ ясна только в случае $P < 0$: $d^+ = -Q/P$. В остальных случаях при формировании d^+ участвует «правильная бесконечность», в которой функционал F_y^3 равен $|\cos(C, y)|$. Поступаем следующим образом: обозначим через γ полусумму $F_y^3(d)$ и $|\cos(C, y)|$. Точкой d^+ будем считать прообраз γ на прямой $s(t)$: $d^+ = d + t^+c$, где t^+ – правильное решение квадратного уравнения

$$(Ct^+ + D, y)^2 = \gamma^2 \|y\|^2 \left\|Ct^+ + D\right\|^2.$$

Проделанный выше анализ точно определит t^+ из двух корней этого уравнения.

Подведем итог: относительная простота нелинейности в конструкции E_y^3 (первая степень по t в числителе производной (14)) позволила подробно разобрать оптимизацию алгоритма ПС соответствующего функционала F_y^3. В изложенных ниже конструкциях E_μ такая степень по t будет уже четвертой.

4. Нечеткие СЛАУ

Мотивация дальнейших исследований связана со следующей трактовкой СЛАУ: система $Ax = b$ выражает одно из свойств объекта изучения O. Нужное решение $x^{\text{и}} = \{x_j^{\text{и}}, j \in J\}$ представляет собой распределение проявлений свойства A на O через «внутреннем» узлы j, образующие «внутренний» для O остов J. Вектор $x^{\text{и}}$ неизвестен, его нужно определить по измерениям $b = \{b_j, i \in I\}$ проявления A на O во «внешних» узлах i, образующих «внешний» для O остов I.

Проекционный метод (ПМ) конструктивно описывает многообразие $\Phi(A, b)$ всех возможных проявлений x свойства A на объекте O (кандидатов на роль $x^{\text{и}}$). Вобщем случае для определения $x^{\text{и}}$ среди $\Phi(A, b)$ нужна дополнительная информация об $x^{\text{и}}$, в частности, в виде экспертных суждений. В рамках ДМА разработаны методы ее формализации. Они активно используют нечеткую логику, так что окончательным результатом будет нечеткая структура $\mu = \{\mu_j, j \in J\}$ на «внутреннем» остове J для O.

Возникает нечеткая СЛАУ $(Ax = b, \mu)$ и задача ее решить, т.е. сформировать внутри $\Phi(A, b)$ подмножество решений $\Phi(A, b, \mu)$, согласованных с μ. В настоящей работе такая согласованность E_μ понимается как корреляция модуля $|x^{\text{и}}|$ решения $x^{\text{и}}$: $|x^{\text{и}}| = \{|x_j|, j \in J\}$ с μ и приводит к двум вариантам E_μ, из соображения гладкости выражающих согласованность квадратов $|x^{\text{и}}|^2 = \{|x_j|^2, j \in J\}$ с $\mu^2 = \{\mu_j^2, j \in J\}$.

Необходимые технические вещи для вычислений:

$$\begin{aligned}&\text{проекционный оператор } H = (h_{jk})\\ &\text{зависимость } x_j(s) = x_j^* + \sum h_{jk}s_k = x_j^* + H_j(s)\\ &\frac{\partial x_j}{\partial s_k} = h_{jk}; \quad \frac{\partial x_j^2}{\partial s_k} = 2x_j(s)h_{jk}\end{aligned} \tag{16}$$

Трактовка первая E_μ^1 аналогична E_y^3. Согласованность $x^{\text{и}}$ и μ состоит в полной cos-корреляции: «$x^{\text{и}}$ – точка на $\Phi(A,b)$ с максимальной корреляцией $\cos\big(|x^{\text{и}}|^2, \mu^2\big)$». С учетом параметризации (6) и соотношений (16) поиск $x^{\text{и}}$ сводится к безусловной максимизации по s функционала F_μ^1

$$J(s) = F_\mu^1(s) = \frac{\sum x_j^2(s)\mu_j^2}{\sqrt{\sum x_j^4(s)}\sqrt{\sum \mu_j^4}}. \tag{17}$$

Частная производная $\frac{\partial J}{\partial s_k}$. Выразим ее через $x_j^2(s)$ и $\frac{\partial x_j^2}{\partial s_k}$. Учитывая (16), этого будет достаточно. Ввиду сложности производной сделаем ее вычисление поэтапным с «умным» опусканием двоек:

первое слагаемое числителя $\frac{\partial J}{\partial s_k}$

$$\left(\sum x_j^2\mu_j^2\right)\Big|_{s_k}' \sqrt{\sum x_j^4} = \left(\sum \mu_j^2 \frac{\partial x_j^2}{\partial s_k}\right)\sqrt{\sum x_j^4}$$

второе слагаемое числителя $\frac{\partial J}{\partial s_k}$

$$\begin{aligned}\left(\sum x_j^2\mu_j^2\right)\left(\sqrt{\sum x_j^4}\right)\Big|_{s_k}' &= \left(\sum x_j^2\mu_j^2\right)\left(\sqrt{\sum (x_j^2)^2}\right)\Big|_{s_k}' =\\ = \left(\sum x_j^2\mu_j^2\right)\frac{2\sum x_j^2\frac{\partial x_j^2}{\partial s_k}}{2\sqrt{\sum x_j^4}} &= \frac{\left(\sum x_j^2\mu_j^2\right)\sum x_j^2\frac{\partial x_j^2}{\partial s_k}}{\sqrt{\sum x_j^4}}\end{aligned}$$

числитель их разности

$$\left(\sum \mu_j^2\frac{\partial x_j^2}{\partial s_k}\right)\left(\sum x_j^4\right) - \left(\sum x_j^2\mu_j^2\right)\left(\sum x_j^2\frac{\partial x_j^2}{\partial s_k}\right)$$

отдельно члены $(j,\bar{j}) + (\bar{j}, j)$

$$\begin{gathered}\mu_j^2\frac{\partial x_j^2}{\partial s_k}x_{\bar{j}}^4 - x_j^2\mu_j^2x_{\bar{j}}^2\frac{\partial x_{\bar{j}}^2}{\partial s_k} + \mu_{\bar{j}}^2\frac{\partial x_{\bar{j}}^2}{\partial s_k}x_j^4 - x_{\bar{j}}^2\mu_{\bar{j}}^2x_j^2\frac{\partial x_j^2}{\partial s_k} =\\ \mu_j^2x_{\bar{j}}^2\left(x_{\bar{j}}^2\frac{\partial x_j^2}{\partial s_k} - x_j^2\frac{\partial x_{\bar{j}}^2}{\partial s_k}\right) - \mu_{\bar{j}}^2x_j^2\left(x_{\bar{j}}^2\frac{\partial x_j^2}{\partial s_k} - x_j^2\frac{\partial x_{\bar{j}}^2}{\partial s_k}\right) =\\ = \left(\mu_j^2x_{\bar{j}}^2 - \mu_{\bar{j}}^2x_j^2\right)\left(x_{\bar{j}}^2\frac{\partial x_j^2}{\partial s_k} - x_j^2\frac{\partial x_{\bar{j}}^2}{\partial s_k}\right)\end{gathered}$$

Окончательная формула для производной

$$\frac{\partial J}{\partial s_k} = \sum_{(j,\bar{j}):j\neq\bar{j}} \frac{\left(\mu_j^2x_{\bar{j}}^2 - \mu_{\bar{j}}^2x_j^2\right)\left(x_{\bar{j}}^2\frac{\partial x_j^2}{\partial s_k} - x_j^2\frac{\partial x_{\bar{j}}^2}{\partial s_k}\right)}{\sqrt{\sum \mu_j^4}\left(\sum x_j^4\right)^{3/2}}. \tag{18}$$

Ограничение $J(s)$ на прямую. Понимание устройства $J(t) = J_{c,d}(t) = J(s(t))$ на прямой $s(t) = ct + d$ в пространстве параметров $E(s)$ позволит использовать полиномиальный спуск (ПС) во всем объеме. Положим с учетом (16)

$$x_j(t) = x_j(s(t)) = x_j^* + H_j(s(t)) = x_j^* + H_j(d) + tH_j(c).$$

Тогда

$$\begin{aligned} x_j^2(t) &= (x_j^* + H_j(d))^2 + 2(x_j^* + H_j(d))H_j(c)t + (H_j(c))^2t^2 = \\ &= A_jt^2 + 2B_jt + C_j, \end{aligned} \tag{19}$$

где

$$A_j = (H_j(c))^2; \quad B_j = (x_j^* + H_j(d))H_j(c); \quad C_j = (x_j^* + H_j(d))^2.$$

Без двойки $\frac{\partial x_j^2}{\partial t} = A_jt + B_j$. Формула для $\frac{\partial J}{\partial t}$ аналогична (18):

$$\frac{\partial J}{\partial t} = \sum_{(j,\bar{j}):j\neq\bar{j}} \frac{\left(\mu_j^2 x_{\bar{j}}^2 - \mu_{\bar{j}}^2 x_j^2\right)\left(\frac{\partial x_j^2}{\partial t}x_{\bar{j}}^2 - \frac{\partial x_{\bar{j}}^2}{\partial t}x_j^2\right)}{\sqrt{\sum \mu_j^4}\left(\sum x_j^4\right)^{3/2}}. \tag{20}$$

Первый член числителя в множителе $(j,\bar{j})$:

$$\begin{aligned} \mu_j^2 x_{\bar{j}}^2 &= \mu_j^2(A_{\bar{j}}t^2 + 2B_{\bar{j}}t + C_{\bar{j}}) = \mu_j^2 A_{\bar{j}}t^2 + 2\mu_j^2 B_{\bar{j}}t + \mu_j^2 C_{\bar{j}} \\ \mu_{\bar{j}}^2 x_j^2 &= \mu_{\bar{j}}^2(A_jt^2 + 2B_jt + C_j) = \mu_{\bar{j}}^2 A_jt^2 + 2\mu_{\bar{j}}^2 B_jt + \mu_{\bar{j}}^2 C_j \end{aligned}$$

разность

$$\underbrace{(\mu_j^2 A_{\bar{j}} - \mu_{\bar{j}}^2 A_j)}_{D_{j\bar{j}}}t^2 + 2\underbrace{(\mu_j^2 B_{\bar{j}} - \mu_{\bar{j}}^2 B_j)}_{E_{j\bar{j}}}t + \underbrace{(\mu_j^2 C_{\bar{j}} - \mu_{\bar{j}}^2 C_j)}_{F_{j\bar{j}}}t^2.$$

Таким образом, первый член в числителе (20) есть квадратный трехчлен

$$\mu_j^2 x_{\bar{j}}^2 - \mu_{\bar{j}}^2 x_j^2 = D_{j\bar{j}}t^2 + E_{j\bar{j}}t + F_{j\bar{j}}.$$

Второй член числителя в множителе $(j,\bar{j})$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_j^2}{\partial t}x_{\bar{j}}^2 &= (A_jt + B_j)(A_{\bar{j}}t^2 + 2B_{\bar{j}}t + C_{\bar{j}}) = \\ &= A_jA_{\bar{j}}t^3 + (2A_jB_{\bar{j}} + B_jA_{\bar{j}})t^2 + (A_jC_{\bar{j}} + 2C_jA_{\bar{j}})t + B_jC_{\bar{j}} \\ \frac{\partial x_{\bar{j}}^2}{\partial t}x_j^2 &= (A_{\bar{j}}t + B_{\bar{j}})(A_jt^2 + 2B_jt + C_j) = \\ &= A_{\bar{j}}A_jt^3 + (2A_{\bar{j}}B_j + B_{\bar{j}}A_j)t^2 + (A_{\bar{j}}C_j + 2C_{\bar{j}}A_j)t + B_{\bar{j}}C_j, \end{aligned}$$

разность

$$\frac{\partial x_j^2}{\partial t}x_{\bar{j}}^2 - \frac{\partial x_{\bar{j}}^2}{\partial t}x_j^2 = \underbrace{(A_jB_{\bar{j}} - B_jA_{\bar{j}})}_{K_{j\bar{j}}}t^2 + \underbrace{(A_jC_{\bar{j}} - C_jA_{\bar{j}})}_{L_{j\bar{j}}}t + \underbrace{(B_jC_{\bar{j}} - C_jB_{\bar{j}})}_{M_{j\bar{j}}}.$$

Таким образом, и второй член в числителе (20) квадратичен:

$$\frac{\partial x_j^2}{\partial t}x_{\bar{j}}^2 - \frac{\partial x_{\bar{j}}^2}{\partial t}x_j^2 = K_{j\bar{j}}t^2 + L_{j\bar{j}}t + M_{j\bar{j}}.$$

Окончательная формула для числителя производной $\frac{\partial J}{\partial t}$:

$$\sum_{(j,\bar{j}):j\neq\bar{j}} \left(\mu_j^2 x_{\bar{j}}^2 - \mu_{\bar{j}}^2 x_j^2\right) \left(\frac{\partial x_j^2}{\partial t} x_{\bar{j}}^2 - \frac{\partial x_{\bar{j}}^2}{\partial t} x_j^2\right) =$$

$$= \sum_{(j,\bar{j}):j\neq\bar{j}} \left(D_{j\bar{j}} t^2 + 2E_{j\bar{j}} t + F_{j\bar{j}}\right) \left(K_{j\bar{j}} t^2 + L_{j\bar{j}} t + M_{j\bar{j}}\right) =$$

$$= t^4 \left(\sum D_{j\bar{j}} K_{j\bar{j}}\right) + t^3 \left(2\sum E_{j\bar{j}} K_{j\bar{j}} + \sum D_{j\bar{j}} L_{j\bar{j}}\right) +$$

$$+ t^2 \left(\sum D_{j\bar{j}} M_{j\bar{j}} + 2\sum E_{j\bar{j}} L_{j\bar{j}} + \sum F_{j\bar{j}} K_{j\bar{j}}\right) +$$

$$+ t \left(2\sum E_{j\bar{j}} M_{j\bar{j}} + \sum F_{j\bar{j}} L_{j\bar{j}}\right) + \left(\sum F_{j\bar{j}} M_{j\bar{j}}\right).$$

Трактовка вторая E_μ^2 состоит в квадратичной близости l^1-нормирований векторов $|x^{\text{и}}|^2$ и $|\mu|^2$ и сводится к минимизации по s функционала $F_\mu^2(s)$:

$$J(s) = F_\mu^2(s) = \sum \left(\frac{x_j^2(s)}{\sum x_{\bar{j}}^2(s)} - \frac{\mu_j^2(s)}{\sum \mu_{\bar{j}}^2(s)}\right)^2 \longrightarrow \min. \tag{21}$$

Положим

$$\begin{aligned} \nu_j &= \mu_j \left(\sum \mu_{\bar{j}}^2\right)^{-1} \\ \varphi(s) &= \sum x_{\bar{j}}^2(s) \\ \varphi_j(s) &= x_j^2(s) - \nu_j \varphi(s) \\ \text{так что}\ \ J(s) &= \sum \left(\frac{\varphi_J(s)}{\varphi(s)}\right)^2. \end{aligned} \tag{22}$$

Воспользуемся этим представлением $J(s)$ для нахождения его частных производных, опуская двойки:

$$\frac{\partial J}{\partial s_k} = \sum \frac{\partial}{\partial s_k} \left(\frac{\varphi_j}{\varphi}\right)^2$$

$$\frac{\partial}{\partial s_k} \left(\frac{\varphi_j}{\varphi}\right)^2 = \frac{\varphi_j}{\varphi} \frac{\partial}{\partial s_k} \left(\frac{\varphi_j}{\varphi}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial s_k} \left(\frac{\varphi_j}{\varphi}\right) = \frac{\varphi \frac{\partial \varphi_j}{\partial s_k} - \varphi_j \frac{\partial \varphi}{\partial s_k}}{\varphi^2}.$$

Преобразуем числитель:

$$\varphi \left(\frac{\partial}{\partial s_k} \varphi_j\right) - \varphi_j \left(\frac{\partial}{\partial s_k} \varphi\right) = \varphi \left(\frac{\partial}{\partial s_k} (x_j^2 - \nu_j \varphi)\right) - (x_j^2 - \nu_j \varphi) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s_k}\right) =$$

$$= \varphi \frac{\partial x_j^2}{\partial s_k} - \nu_j \frac{\partial \varphi}{\partial s_k} \varphi - x_j^2 \frac{\partial \varphi}{\partial s_k} + \nu_j \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial s_k} = \varphi \frac{\partial x_j^2}{\partial s_k} - x_j^2 \frac{\partial \varphi}{\partial s_k}.$$

Окончательная формула для $\frac{\partial J}{\partial s_k}$ через φ_j и φ:

$$\frac{\partial J}{\partial s_k} = \frac{\sum \varphi_j \left(\varphi \frac{\partial x_j^2}{\partial s_k} - x_j^2 \frac{\partial \varphi}{\partial s_k}\right)}{\varphi^3}. \tag{23}$$

От этой формулы с учетом (22) недалеко и до аналога (A) для $\frac{\partial J}{\partial s_k}$ в конструкции E_μ^2.

Ограничение $J(s)$ на прямую. В обозначениях разговора об этом в рамках конструкции E^1_μ (19) и с дополнительными обозначениями

$$A = \sum A_{\bar{j}}; \quad B = \sum B_{\bar{j}}; \quad C = \sum C_{\bar{j}}$$

имеем (без двойки):

$$\begin{aligned}\varphi_j(t) &= (A_j - \nu_j A)t^2 + (B_j - \nu_j B)t + (C_j - \nu_j C)\\ \varphi(t)\frac{\partial}{\partial t}x_j^2 - x_j^2(t)\frac{\partial \varphi}{\partial t} &= (At^2 + 2Bt + C)(A_j t + B_j) - (A_j t^2 + 2B_j t + C_j)(At + B) =\\ &= (A_j B - AB_j)t^2 + (A_j C - AC_j)t + (B_j C - BC_j)\end{aligned}$$

Окончательно производная $\frac{\partial J}{\partial t}$ аналогична (23)

$$\frac{\partial J}{\partial t} = \frac{\sum \varphi_j \left(\varphi \frac{\partial x_j^2}{\partial t} - x_j^2 \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)}{\varphi^3}, \tag{24}$$

а потому ее числитель, подобно конструкции E^1_μ, имеет четвертую степень по t.

5. Примеры работы

Теоретические исследования, представленные в работе, выполнены в рамках проекта РНФ, связанного с магнитометрией, поэтому их прикладную часть мы предваряем магнитным дайджестом.

Магнитный дайджест. Встанем на дипольную точку зрения, считая, что истинное распределение магнитных диполей $D^{\text{и}}_J = \left\{D^{\text{и}}_j, j \in J\right\}$ сосредоточено в узлах j некоторой трехмерной сетки J, состоящей из n узлов, где $D^{\text{и}}_j$ – магнитный диполь с центром в j, а выход $U(I) = \{U(i), i \in I\}$ распределения $D^{\text{и}}_J$ на поверхность измерен в узлах i двумерной сетки I, состоящей из m узлов.

Потенциал диполя $D^{\text{и}}_j$ в узле i определяется его магнитным вектором $(x^{\text{и}}_j, y^{\text{и}}_j, z^{\text{и}}_j)$ и обозначается через $D^{\text{и}}_j(i)$. Потенциал распределения $D^{\text{и}}_J(i)$ складывается из потенциалов $D^{\text{и}}_j(i)$

$$D^{\text{и}}_j(i) = \frac{(D^{\text{и}}_j, i - j)}{\|i - j\|^3} \text{ и } D^{\text{и}}_J(i) = \sum\nolimits_j D^{\text{и}}_j(i).$$

Поиск распределения $D^{\text{и}}_j$ приводит к СЛАУ $D^{\text{и}}_J(I) = U(I)$ из m уравнений с $3n$ неизвестными

$$\begin{gathered}\sum\nolimits_j \frac{x_j(i-j)_x + y_j(i-j)_y + z_j(i-j)_z}{\|i - j\|^3} = U(i),\\ j = 1, \ldots, n; \quad i = 1, \ldots, m.\end{gathered} \tag{25}$$

Все примеры связаны с такой системой и иллюстрируют последовательно проекционный метод, конструкции E^1_y, E^3_y и E^1_μ, а также алгоритмов полиномиальный градиентный спуск (ПГС) и полиномиальный покоординатный спуск (ППС) на них.

Для этого мы задали аномалеобразующее тело, состоящее из 7×9 диполей, расположенных равномерно в прямоугольнике размером 450×900 м. При этом только в центральном прямоугольнике заданы магнитные диполи (рис. 7). Вне этого прямоугольника значения магнитных диполей равны 0. В дальнейшем это распределение диполей (рис. 7) будем считать истинным и обозначать через $x^{\text{и}}$, а произвольное распределение через x.

На рисунке 8 показан отклик от этого тела на профиле, представляющего собой 25 точек, расположенных в интервале от -450 до 450 м на высоте 100 м.

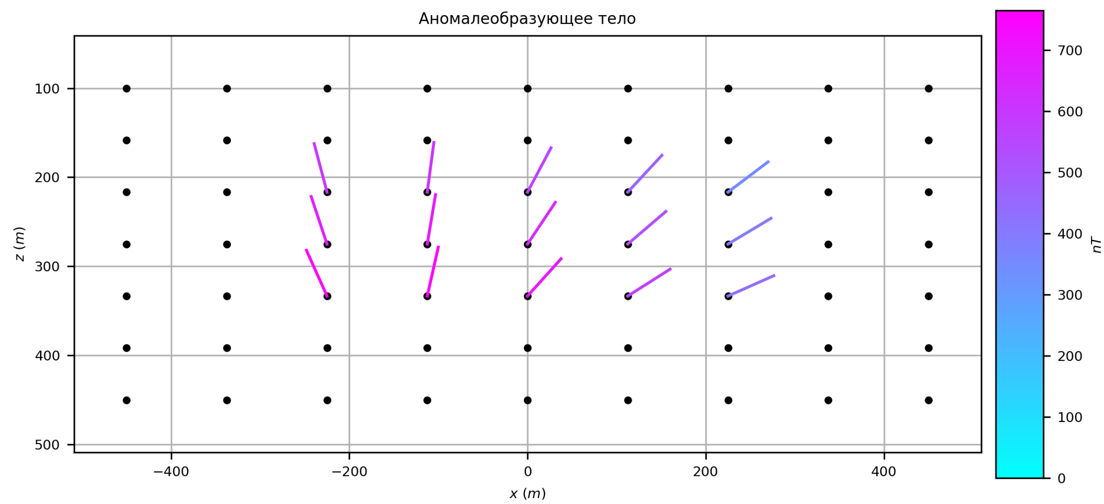


Рис. 7: Истинное распределение $x^{\text{и}}$

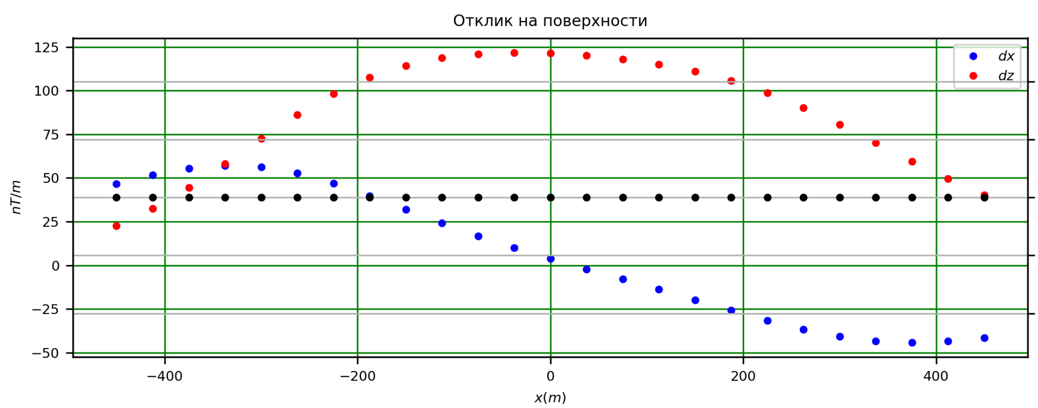


Рис. 8: Отклик на поверхности. Черными точками отмечены координаты профиля, на котором задан отклик аномалеобразующего тела. Красными точками обозначена горизонтальная составляющая, синими – вертикальная

Пример 2 посвящен ПМ и показывает, как выглядит параметризация $x = x^* + Hs$ при разных s.

Примеры 3 и 4 посвящены конструкции E_y^1: в первом случае $y = 0$, а результат – решение, минимальное по норме; во втором случае $y = x^{\text{и}}$ и интерес представляет переход от частного решения x^* к истинному $x^{\text{и}}$ с помощью последовательной оптимизации F_y^3.

У каждого диполя $D_j = (x_j, y_j, z_j)$ есть две характеристики: масса $m(D_j) = \|D_j\| = = \sqrt{x_j^2 + y_j^2 + z_j^2}$ и ориентация $e(D_j) = \frac{D_j}{\|D_j\|}$. С ними связаны примеры 5 и 6, в которых с помощью конструкций E_y^3 и E_μ^1 мы пытаемся восстановить решение $x^{\text{и}}$ по его ориентации $e(x^{\text{и}}) = (e(D_j^{\text{и}}), j \in J)$ и массе $m(x^{\text{и}}) = (m(D_j^{\text{и}}), j \in J)$.

Пример 2 (Проекционный метод). *В этом примере показано, что множество $x = x^* + Hs$ описывает многообразие решений системы* (25). *На рисунке 9 – частное решение, полученное методом наименьших квадратов. На рисунках 10-12 – решения при различных s.*

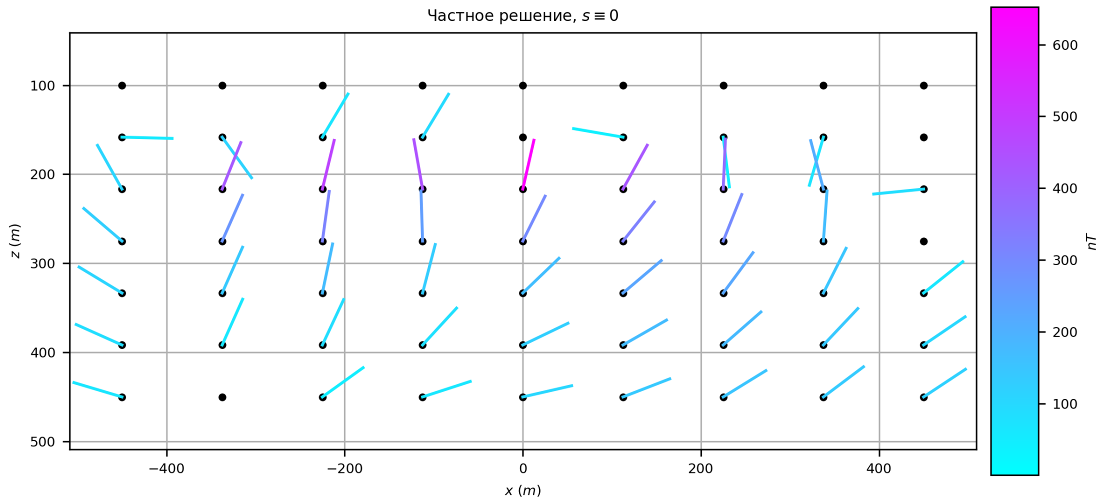


Рис. 9: Частное решение x^*, полученное, методом наименьших квадратов. Вектор s равен 0. $\|Ax^* - b\| = 5.734342e^{-13}$

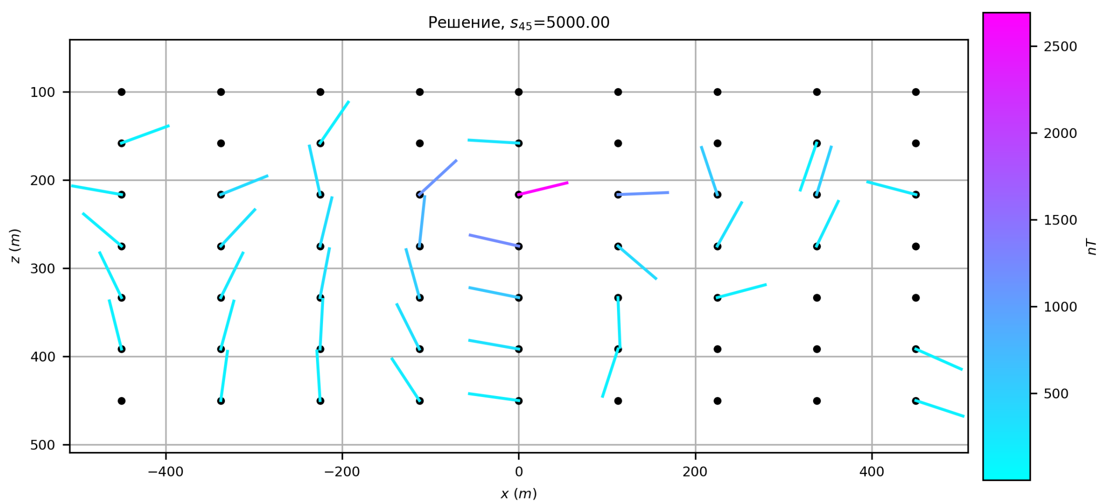


Рис. 10: Решение, полученное при помощи вектора s равному нулю везде, кроме 45-ой координаты. $\|Ax - b\| = 9.265617e^{-13}$

Видно, что все решения на рисунках 9-12 имеют точность одного порядка.

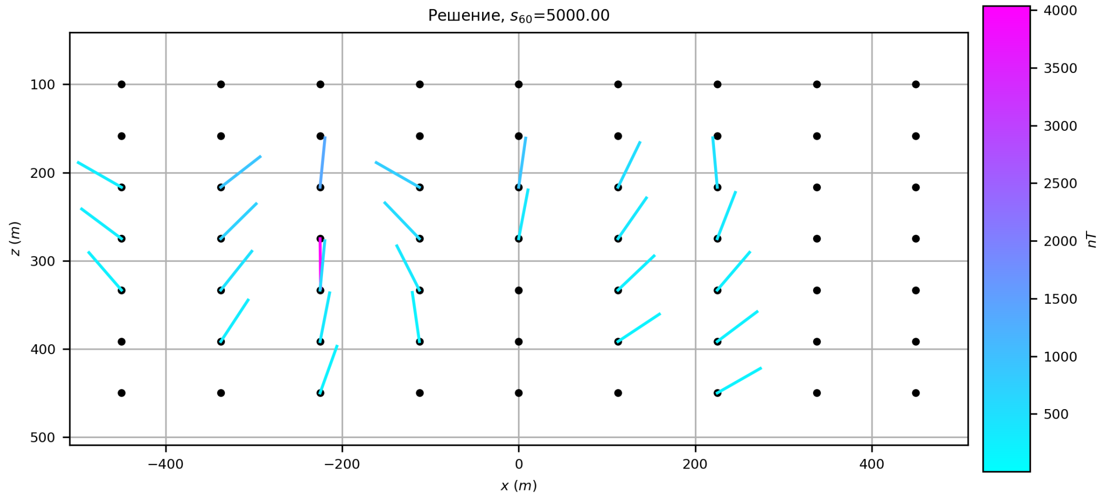


Рис. 11: Решение, полученное при помощи вектора s равному нулю везде, кроме 60-ой координаты. $\|Ax - b\| = 5.900362e^{-13}$

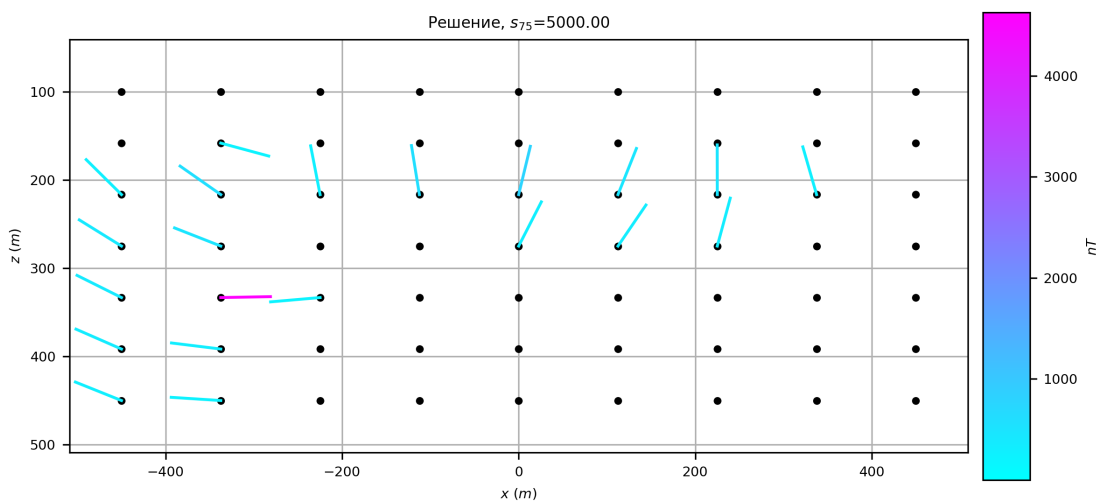


Рис. 12: Решение, полученное при помощи вектора s равному нулю везде, кроме 75-ой координаты. $\|Ax - b\| = 6.359316e^{-13}$

Пример 3 (F_y^1). *Поиск решения с наименьшей нормой. На рисунке 13 показано частное решение x^* (4).*

Для получения решения задачи в данной постановке использовался алгоритм ПГС, потребовалось 82 итерации. На рисунке 14 показано итоговое решение данного примера

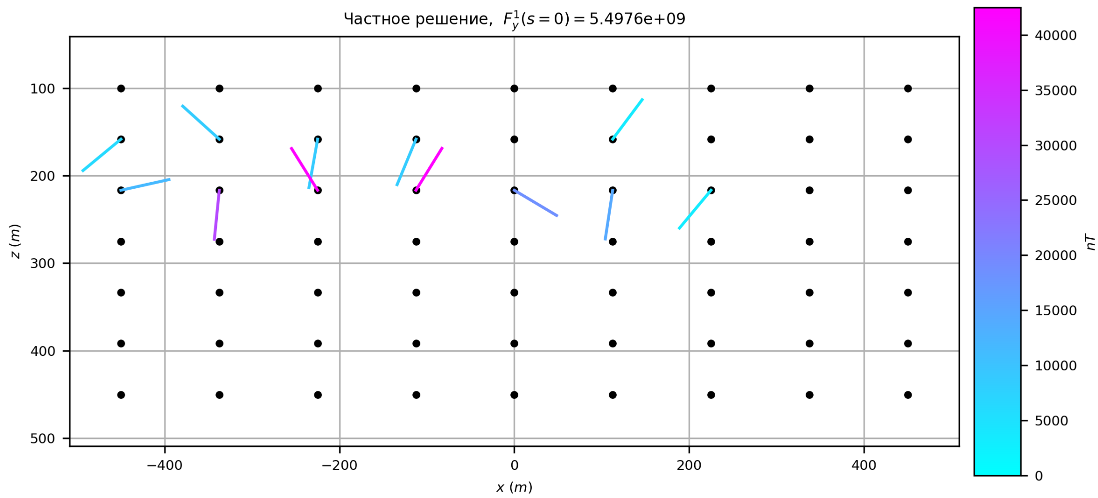


Рис. 13: Частное решение. $\|x^*\| = 7.414610e^4$

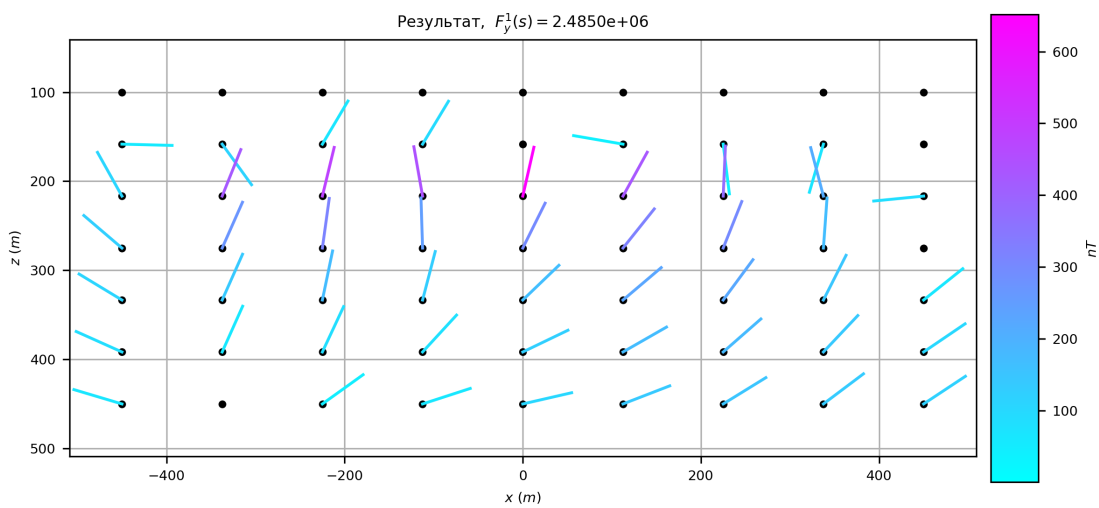


Рис. 14: Итоговое решение. $\|x\| = 1.5763745e^3$

Пример 4 (F_y^1). *Поиск решения, наиболее похожего на x^u. На рисунке 15 показано частное решение x^* (4).*

Для получения решения задачи в данной постановке использовался алгоритм ПГС, потребовалось 126 итераций. На рисунке 16 показано итоговое решение данного примера

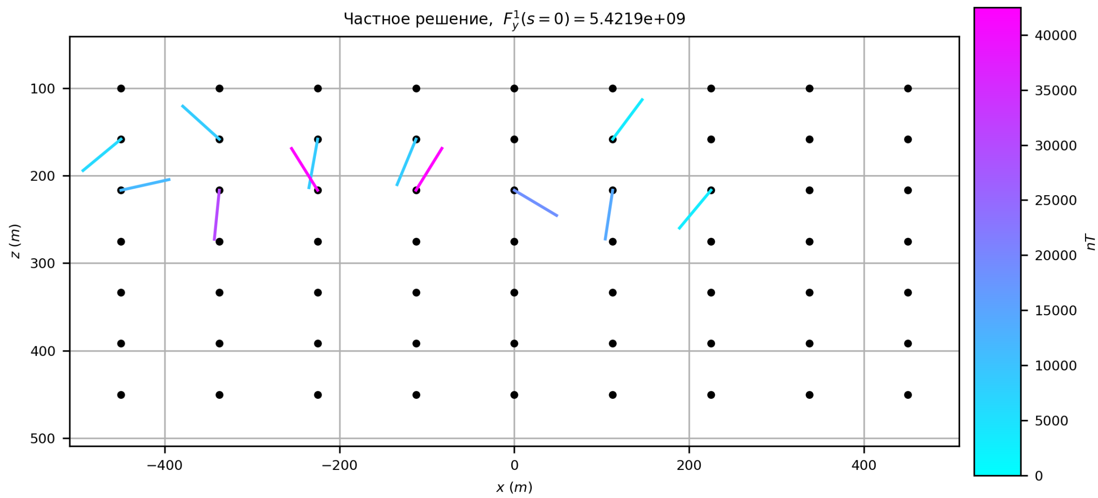


Рис. 15: Частное решение. $\|x^* - x^{\text{и}}\| = 7.363328e^4$

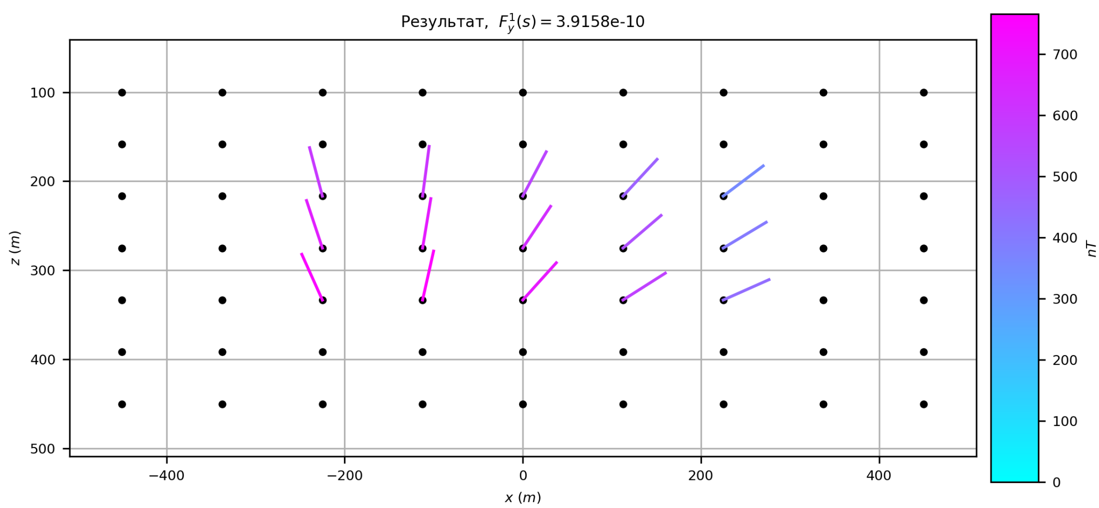


Рис. 16: Итоговое решение. $\|x - x^{\text{и}}\| = 1.978827e^{-5}$

Пример 5 (F_y^3). *В данном примере в качестве вектора y будем использовать вектор* $\left\{\frac{|D_j|}{\|D_j\|},\ j = 1, \ldots, n\right\}$ *(рис. 17)*

Для получения решения использовался алгоритм ПГС, потребовалось 12 итераций. На рисунке 19 показано итоговое решение данного примера. Голубые вектора имеют очень маленькую норму.

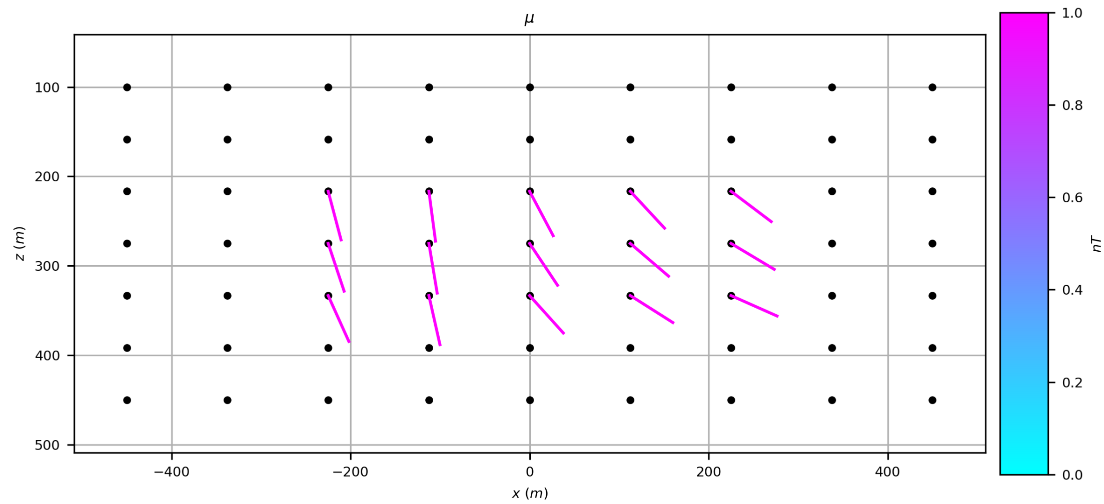


Рис. 17: Целевой вектор y данного примера

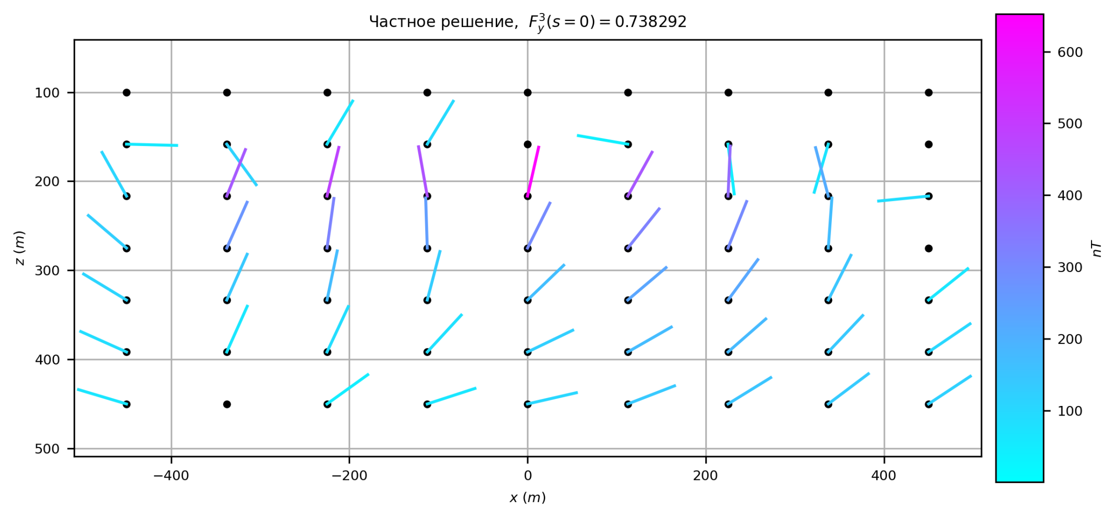


Рис. 18: Частное решение исходной задачи

Пример 6 (F_μ^1). *В данном примере показано применение трактовки E_μ^1 к исходной задаче (рис. 7 и 8). Поскольку в данной постановке ищется корреляция модулей на рисунке 20 показано целевые значения. В качестве вектора y используем нормированное к единице исходное распределение масс $\left\{\frac{mD_j}{\sum mD_j},\ j = 1, \ldots, n\right\}$ (рис. 21). Частное решение показано на рис. 22.*

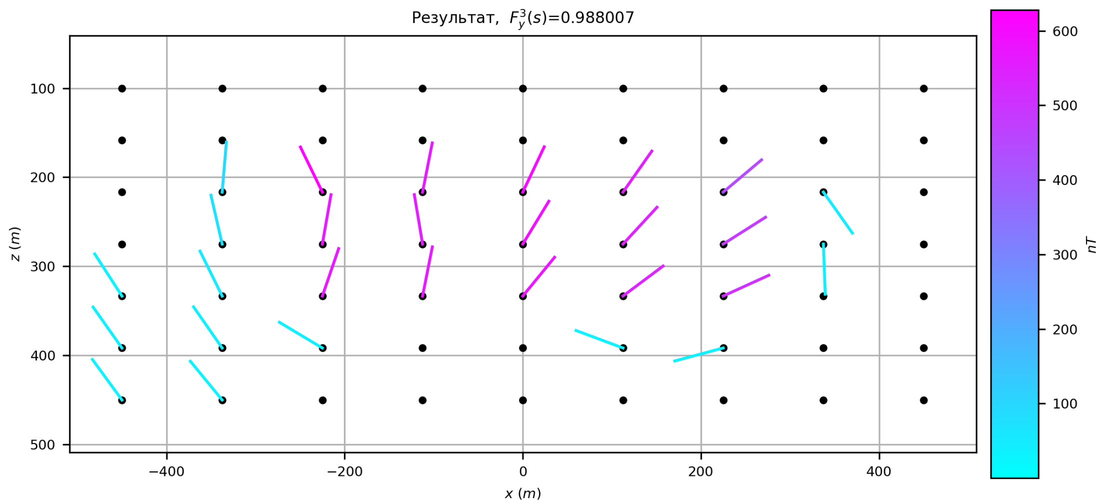


Рис. 19: Итоговое решение

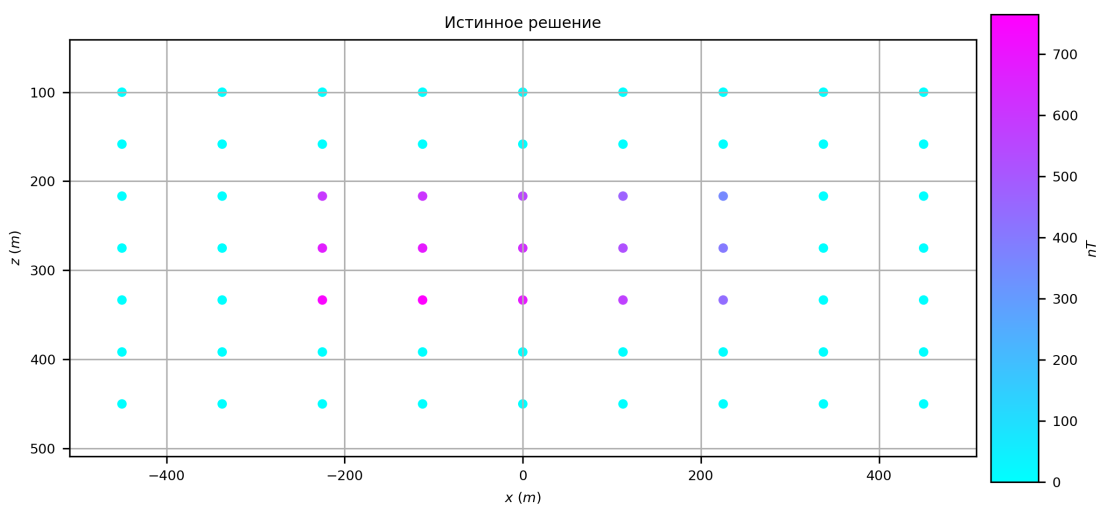


Рис. 20: Распределение модулей исходного магнитного поля (рис. 7)

Для получения решения использовался алгоритм ППС, потребовалось 64 итерации. На рисунке 23 показано итоговое решение данного примера

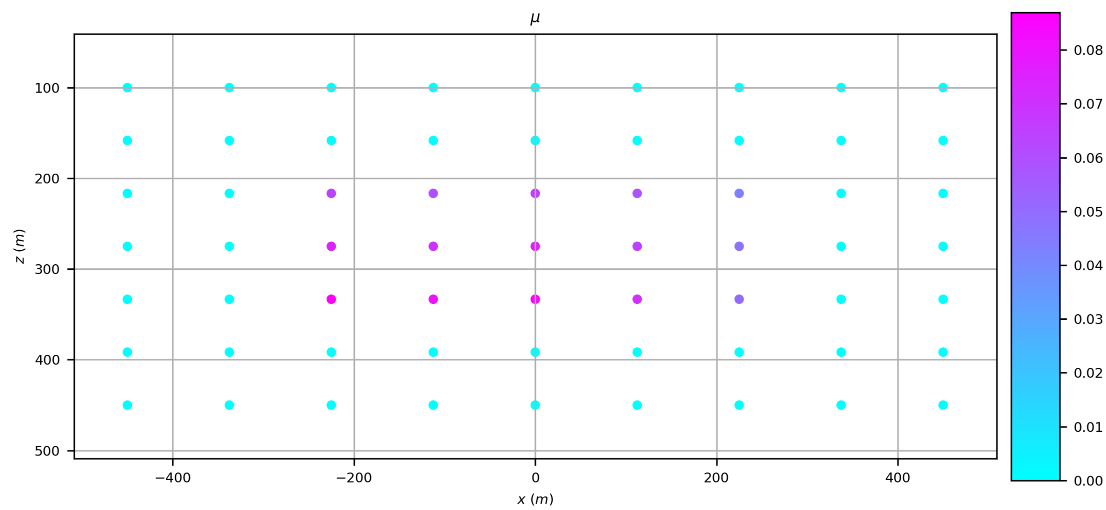


Рис. 21: Вектор y, с которым мы будем искать корреляцию целевого решения

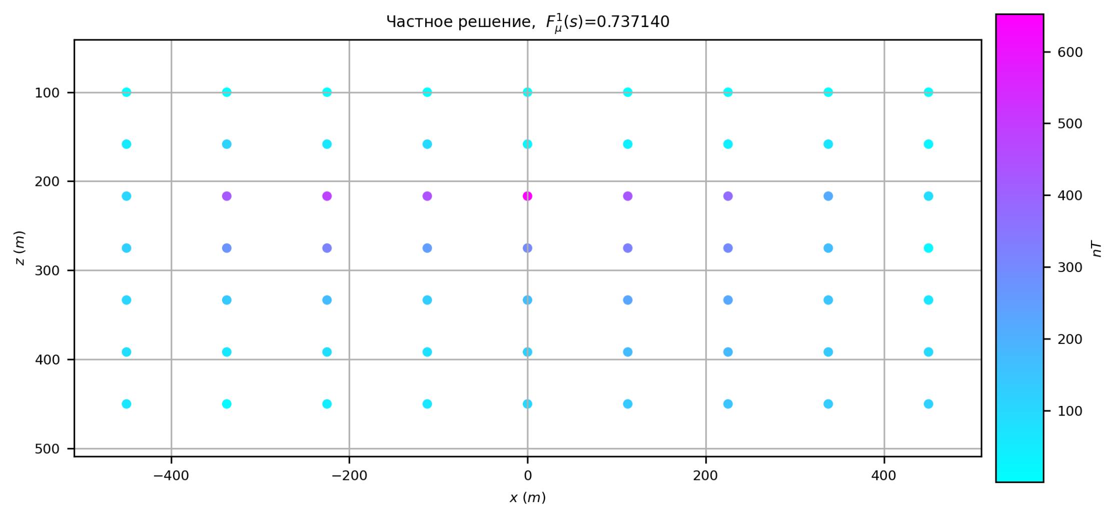


Рис. 22: Распределение модулей частного решения (рис. 18)

6. Заключение

Проекционный метод (ПМ) и его параметризация (6) Открывают совершенно новые возможности в использовании СЛАУ. В разговоре об этом воспользуемся аналогией с космосом.

ПМ выполняет три функции:

- телескопа $\equiv$ крупно, но конструктивно, описывая многообразие (планету) $\Phi(A, b)$ решений СЛАУ $Ax = b$;
- космического корабля $\equiv$ доставляя исследователя в точку частного решения x^* на $\Phi(A, b)$;
- планетохода $\equiv$ средства передвижения по $\Phi(A, b)$ из x^*, благодаря конструктивности (6), согласно той или иной стратегии на параметр параметризации s.

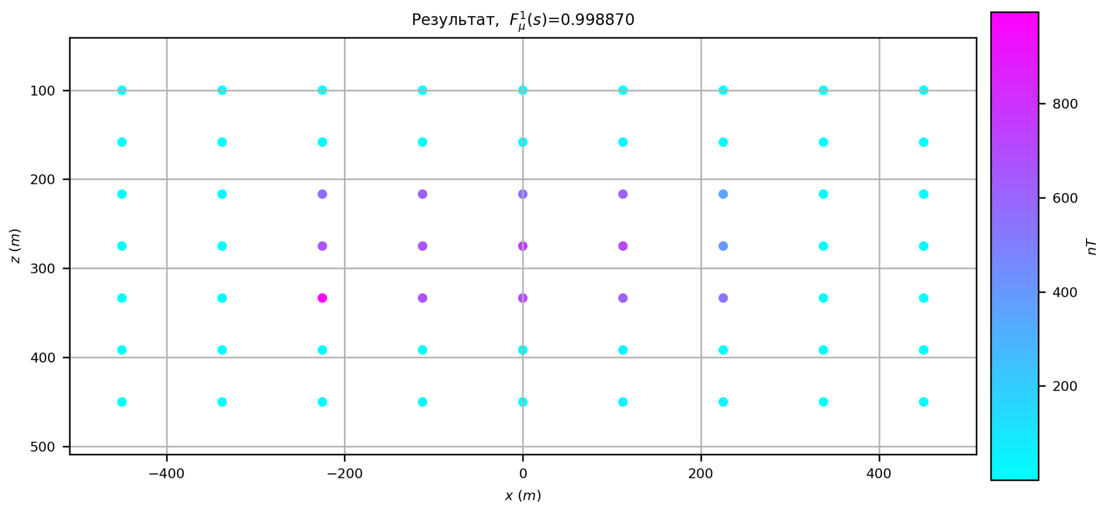


Рис. 23: Итоговое решение

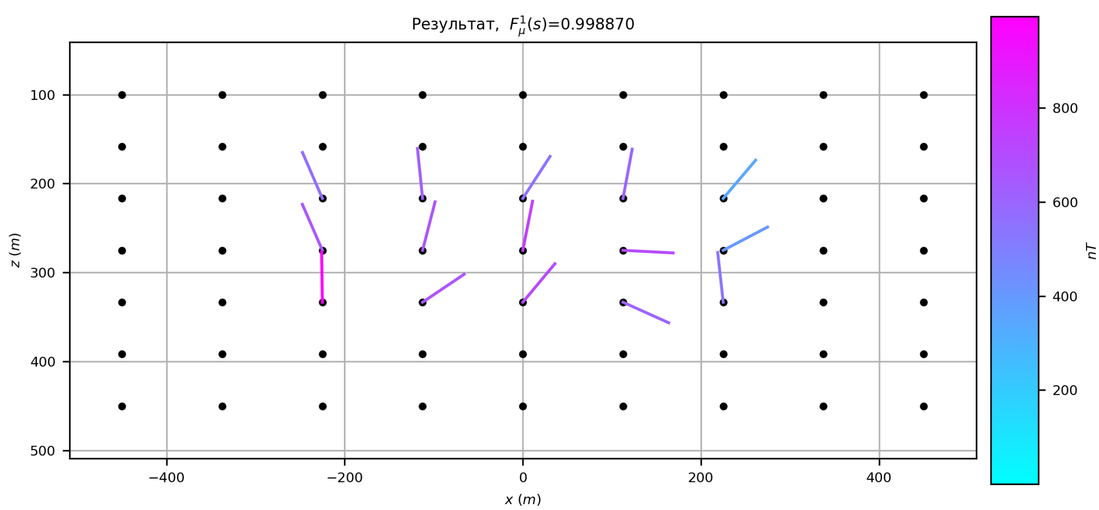


Рис. 24: Итоговое решение

Последняя зависит от цели путешествия. В нашем случае это конструкции E_y и E_μ, а их техническое выражение – Полиномиальный Спуск (ПС) в виде алгоритмов ПГС и ППС.

Приведенные в работе сценарии изучения $\Phi(A, b)$ фундаментальны, но просты. Из них должны складываться путешествия с более сложными целями. Технически они должны представлять собой соединение функционалов F_y и F_μ с помощью тех или иных операций (разного рода усреднений, операторов нечеткой логики и так далее [5]). Это представляется авторам первым направлением дальнейших исследований.

Второе направление связано с решением важных, но более проблемно ориентированных задач. Так, в магнитном случае значительный интерес представляют обратные задачи с измерениями на поверхности I не самого поля U, а его модуля $|U(I)|$. Исследования авторов показывают, что эта задача может быть решена полиномиальным спуском 3-ей степени.

Третье направление возможных исследований связано с предположением о наличии топологической структуры на множестве индексов J переменной $x = (x_j, j \in J)$ СЛАУ $\Phi(A, b)$. В этом случае исследование ДМА по дискретным функциям [6, 8, 7, 9, 10] позволяет построить новые суждения $E(x^{\text{и}})$ относительно истинного решения $x^{\text{и}}$.

Работа выполнена в рамках гранта РНФ 24-17-00346 «Определение пространственно-временной структуры магнитного поля Земли в окрестностях геомагнитных обсерваторий РФ с применением БПЛА».

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Агаян С. М., Богоутдинов Ш. Р., Булычев А. А., Соловьев А. А., Фирсов И. А. Проекционный метод решения систем линейных уравнений и его применение в гравиметрии // Доклады Российской Академии Наук. Науки о Земле. 2020. Vol. 493, №1. P. 58–62.

2. Agayan S., Bogoutdinov Sh., Firsov I. Solving Inverse Magnetometry Problems Using Fuzzy Logic // Russian Journal of Earth Sciences. 2024. Vol. 24, №4.

3. С. М. Агаян, Ш. Р. Богоутдинов, А. А. Соловьев, Б. А. Дзебоев, Б. В. Дзеранов, М. Н. Добровольский. Методы нечеткой математики для комплексного анализа геофизических данных // Физика Земли. 2025. №5. P. 3–26.

4. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа // Физматлит. 2009. P. 572. 2025. №5. P. 3–26.

5. Аверкин А. Н., Батыршин И. З., Блишун А. Ф., Силов В. Б., Тарасов В. Б. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта // Наука, Москва. 1986. P. 312.

6. Агаян С. М., Камаев Д. А., Богоутдинов Ш. Р., Павельев А. С. Гравитационное сглаживание временных рядов (спектральные свойства) // Чебышевский сборник. 2018. Vol. 19, №4. P. 11–25.

7. Гвишиани А. Д., Агаян С. М., Богоутдинов Ш. Р. Исследование систем действительных функций на двумерных сетках с использованием нечетких множеств // Чебышевский сборник. 2019. Vol. 20, №1. P. 94–111.

8. Агаян С. М., Богоутдинов Ш. Р., Камаев Д. А., Добровольский М. Н. Стохастические тренды на основе нечеткой математики // Чебышевский сборник. 2019. Vol. 20, №3. P. 92–106.

9. Агаян С. М., Богоутдинов Ш. Р., Добровольский М. Н., Иванченко О. В., Камаев Д. А. Регрессионное дифференцирование и регрессионное интегрирование конечных рядов // Чебышевский сборник. 2021. Vol. 22, №2. P. 27–47.

10. Агаян С. М., Богоутдинов Ш. Р., Камаев Д. А., Дзебоев Б. А., Добровольский М. Н. Распознавание аномалий на записях с помощью нечеткой логики // Чебышевский сборник. 2025. Vol. 26, №3. P. 6–43.

REFERENCES

1. Agayan S. M., Bogoutdinov Sh. R., Bulychev A. A., Soloviev A. A., Firsov I. A. 2020, “Projection Method for Solving Systems of Linear Equations and its Application in Gravimetry”, *Reports of the Russian Academy of Sciences. Earth Sciences*, vol. 493, no. 1, pp. 58–62.

2. Agayan S., Bogoutdinov Sh., Firsov I. 2024, “Solving Inverse Magnetometry Problems Using Fuzzy Logic”, *Russian Journal of Earth Sciences*, vol. 24, no. 4.

3. Agayan, S. M., Bogoutdinov, Sh. R., Soloviev, A. A., Dzeboev, B. A., Dzeranov, B. V., Dobrovolsky, M. N. 2025, “Fuzzy Mathematics Methods for Comprehensive Analysis of Geophysical Data”, *Physics of the Earth*, vol. 493, no. 5, pp. 3–26.
4. Kolmogorov A. N., Fomin S. V. 2009, “Elements of the theory of functions and functional analysis”, *Fizmatlit*, 572 p.
5. Averkin A. N., Batyrshin I. Z., Blishun A. F., Silov V. B., Tarasov V. B. 1986, “Fuzzy sets in control models and artificial intelligence”, *Nauka, Moscow*, 312 p.
6. Agayan S. M., Kamaev D. A., Bogoutdinov Sh. R., Pavel’ev A. S. 2018, “Gravity smoothing of time series (spectral properties)”, *Chebyshevsky sbornik*, vol. 19, no. 4, pp. 11–25.
7. Gvishiani A. D., Agayan S. M., Bogoutdinov Sh. R. 2019, “Study of systems of real functions on two-dimensional grids using fuzzy sets”, *Chebyshevsky sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 94–111.
8. Agayan S. M., Bogoutdinov Sh. R., Kamaev D. A., Dobrovolsky M. N. 2019, “Stochastic trends based on fuzzy mathematics”, *Chebyshevsky sbornik*, vol. 20, no. 3, pp. 92–106.
9. Agayan S. M., Bogoutdinov Sh. R., Dobrovolsky M. N., Ivanchenko O. V., Kamaev D. A. 2021, “Regression differentiation and regression integration of finite series”, *Chebyshevsky sbornik*, vol. 22, no. 3, pp. 27–47.
10. Agayan S. M., Bogoutdinov Sh. R., Kamaev D. A., Dzeboev B. A., Dobrovolsky M. N. 2025, “Recognition of anomalies in recordings using fuzzy logic”, *Chebyshevsky sbornik*, vol. 26, no. 3, pp. 6–43.

Получено: 18.07.2025
Принято в печать: 08.12.2025

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 26. Выпуск 5.

УДК: 517.956 DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-5-42-52

Задача типа Дирихле в цилиндрической области для одного класса многомерных гиперболо-эллиптических уравнений

С. А. Алдашев

Алдашев Серик Аймурзаевич — доктор физико-математических наук, Институт математики и математического моделирования КН ВНВО РК (Казахстан, г. Алматы).
e-mail:aldash51@mail.ru

Аннотация

Многомерные гиперболо-эллиптические уравнения описывают важные физические, астрономические и геометрические процессы. Известно, что колебания упругих мембран в пространстве можно моделировать многомерными гиперболическими уравнениями на основе принципа Гамильтона. Если предположить, что в положении изгиба мембрана находится в равновесии, то из принципа Гамильтона также следуют многомерные эллиптические уравнения.

Следовательно, колебания упругих мембран в пространстве могут быть описаны с помощью многомерных гиперболо-эллиптических уравнений.

Проблема корректности задачи Дирихле для уравнений смешанного типа в специальных областях была объектом исследований многих авторов в двумерном и многомерном случаях.

Автором ранее изучена задача Дирихле для многомерных гиперболо-параболических уравнений, показана однозначная разрешимость этой задачи, существенно зависящая от высоты рассматриваемой цилиндрической области.

В данной работе исследуется задача типа Дирихле в цилиндрической области для одного класса многомерных гиперболо-эллиптических уравнений и получен явный вид её классического решения.

Показано, что однозначная разрешимость зависит только от высоты гиперболической части цилиндрической области, а также приведён критерий единственности решения.

Ключевые слова: задача Дирихле, многомерные уравнения, однозначная разрешимость, критерий, сферические функции, функция Бесселя.

Библиография: 19 названий.

Для цитирования:
Алдашев С. А. Задача типа Дирихле в цилиндрической области для одного класса многомерных гиперболо-эллиптических уравнений // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 5, с. 42–52.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 26. No. 5.

UDC: 517.956 DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-5-42-52

Dirichlet problem in a cylindrical domain for a certain class of multidimensional hyperbolic-elliptic equations

S. A. Aldashev

Aldashev Serik Aymurzaevich. — doctor of physical and mathematical sciences, Institute of Mathematics and Mathematical Modeling of the KN MES RK (Kazakhstan, Almaty).
e-mail:aldash51@mail.ru

Abstract

Multidimensional Hyperbolic-Elliptic Equations describe important physical, astronomical, and geometric processes. It is known that the oscillations of elastic membranes in space can be modeled by multidimensional hyperbolic equations based on Hamilton's principle. Assuming that the membrane is in equilibrium in the bending position, Hamilton's principle also leads to multidimensional elliptic equations.

Consequently, the oscillations of elastic membranes in space can be described using multidimensional hyperbolic-elliptic equations.

The problem of the well-posedness of the Dirichlet problem for mixed-type equations in special domains has been the subject of research by many authors in both two-dimensional and multidimensional cases.

The author previously studied the Dirichlet problem for multidimensional hyperbolic-parabolic equations, where the unique solvability of this problem was demonstrated, significantly depending on the height of the considered cylindrical domain.

In this work, a Dirichlet-type problem is studied in a cylindrical domain for a certain class of multidimensional hyperbolic-elliptic equations, and an explicit form of its classical solution is obtained.

It is shown that the unique solvability depends only on the height of the hyperbolic part of the cylindrical domain, and a uniqueness criterion for the solution is provided.

Keywords: Dirichlet problem, multidimensional equations, unique solvability, criterion, spherical functions, Bessel function.

Bibliography: 19 titles.

For citation:
Aldashev, S. A. 2025, "Dirichlet problem in a cylindrical domain for a certain class of multidimensional hyperbolic-elliptic equations", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 5, pp. 42–52.

1. Введение

Известно, что колебания упругих мембран в пространстве моделируются уравнениями в частных производных. Если прогиб мембраны считать функцией $u(x,t), x=(x_1,...,x_m), m\geq 2$, то по принципу Гамильтона приходим к многомерным гиперболическим уравнениям.

Полагая, что в положении изгиба мембрана находиться в равновесии, из принципа Гамильтона также получаем многомерные эллиптические уравнения.

Следовательно, колебания упругих мембран в пространстве можно моделировать в качестве многомерных гиперболо-эллиптических уравнений.

Проблема корректности задачи Дирихле для уравнений смешанного типа в специальных областях была объектом исследований многих авторов на плоскости [1-5] и в пространстве [5,6]. Более полную библиографию работ, посвященных этой тематике, можно найти в монографиях [5,6].

Автором ранее (см. [7-9]) изучена задача Дирихле для многомерных гиперболо-эллиптических уравнений, где показана однозначная разрешимость этой задачи, существенно зависящая от высоты рассматриваемой цилиндрической области.

В данный работе исследована задача типа Дирихле в цилиндрической области для одного класса многомерных гиперболо-эллиптических уравнений и получен явный вид ее классического решение.

Показано,что однозначная разрешимость зависит только от высоты гиперболической части цилиндрической области, а также приведен критерий единственности решения.

2. Постановка задачи и результат.

Пусть $\Omega_{\alpha\beta}-$ цилиндрическая область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1, ..., x_m, t)$, ограниченная цилиндром $\Gamma = \{(x,t) : : |x| = 1\}$, плоскостями $t = \alpha > 0$ и $t = \beta < 0$, где $|x|-$ длина вектора $x = (x_1, ..., x_m)$.

Обозначим через Ω_α и Ω_β части области $\Omega_{\alpha\beta}$, а через Γ_α, $\Gamma_\beta-$части поверхности Γ, лежащие в полупространствах $t > 0$ и $t < 0$, $\sigma_\alpha-$ верхнее, а $\sigma_\beta-$ нижнее основание области $\Omega_{\alpha\beta}$.

Пусть далее $S-$ общая часть границ областей Ω_a и Ω_b представляющая множество $\{t = 0,\ 0 < |x| < 1\}$ в E_m.

В области $\Omega_{\alpha\beta}$ рассмотрим многомерные гиперболо-эллиптические уравнения

$$\Delta_x u - (sgnt)u_{tt} + \sum_{i=1}^{m} a_i(x,t)u_{x_i} + b(x,t)u_t + c(x,t)u = 0, \tag{1}$$

где Δ_x - оператор Лапласа по переменным $x_1, ..., x_m$, $m \geqslant 2$.

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат $x_1, ..., x_m, t$ к сферическим $r, \theta_1, ..., \theta_{m-1}, t$, $r \geqslant 0$, $0 \leqslant \theta_1 < 2\pi$, $0 \leqslant \theta_i \leq \pi$, $i = 2, 3, ..., m-1, \theta = (\theta_1, ..., \theta_{m-1})$.

Рассмотрим следующую задачу типа Дирихле

Задача 1. Найти решение уравнения (1) в области $\Omega_{\alpha\beta}$ при $t \neq 0$ из класса $C^1(\bar{\Omega}_{\alpha\beta}) \cap$ $\cap\, C^2(\Omega_\alpha \cup \Omega_\beta)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u\big|_{\sigma_\alpha} = \varphi(r,\theta), u\big|_{\Gamma_\alpha} = \psi_1(t,\theta),$$

$$u\big|_{\Gamma_\beta} = \psi_2(t,\theta), u\big|_{\sigma_\beta} = \tau(r,\theta), u_t\big|_{\sigma_\beta} = \nu(r,\theta), \tag{2}$$

при этом $\varphi(1,\theta) = \psi_1(\alpha,\theta)$, $\psi_1(0,\theta) = \psi_2(0,\theta)$, $\psi_2(\beta,\theta) = \tau(1,\theta)$, $\psi_{2t}(\beta,\theta) = \nu(1,\theta)$.

Пусть $\left\{Y^k_{n,m}(\theta)\right\}-$ система линейно независимых сферических функций порядка n, $1 \leqslant k \leqslant k_n$, $(m-2)!n!k_n = (n+m-3)!(2n+m-2)$, $W^l_2(S)$, $l = 0, 1, ...-$ пространства Соболева.

Имеет место ([10])

Лемма 1. Пусть $f(r,\theta) \in W^l_2(S)$. Если $l \geqslant m-1$, то ряд

$$f(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} f^k_n(r)Y^k_{n,m}(\theta), \tag{3}$$

а также ряды, полученного из него дифференцированием порядка $p \leqslant l-m+1$, сходятся абсолютно и равномерно.

Лемма 2. Для того, чтобы $f(r,\theta)\in W_2^l(S)$, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты ряда (3) удовлетворяли неравенствам

$$|f_0^1(r)|\le c_1,\ \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} n^{2l}|f_n^k(r)|^2\le c_2,\ \ c_1,\, c_2=const.$$

Через $\tilde{a}_{in}^k(r,t), a_{in}^k(r,t), \tilde{b}_n^k(r,t), \tilde{c}_n^k(r,t), \tilde{d}_n^k(r,t), \rho_n^k, \psi_{2n}^k(t),\ \bar{\tau}_n^k(r),\ \bar{\nu}_n^k(r)$, обозначим коэффициенты разложения ряда (3), соответственно функций $a_i(r,\theta,t)\rho(\theta), a_i\frac{x_i}{r}\rho, b(r,\theta,t)\rho,\ c(r,\theta,t)\rho,$ $d(r,\theta,t)\rho, \rho(\theta), i=1,...,m, \psi_2(t,\theta),\ \tau(r,\theta),\ \nu(r,\theta)$, причем $\rho(\theta)\in C^\infty(H), H-$ единичная сфера в E_m.

Пусть $a_i(r,\theta,t), b(r,\theta,t), c(r,\theta,t)\in W_2^l(\Omega_{\alpha\beta})\subset C(\bar{\Omega}_{\alpha\beta}), l\ge m+1, i=1,...,m, c(r,\theta)\le 0,$ $\forall(r,\theta,t)\in\Omega_\beta$.

Тогда справедливы следующие теоремы

Теорема 1. Если $\varphi(r,\theta)\in W_2^l(\sigma_\alpha), \psi_1(t,\theta)\in W_2^l(\Gamma_\alpha), \psi_2(t,\theta)\in W_2^l(\Gamma_\beta), \tau(r,\theta), \nu(r,\theta)\in$ $\in W_2^l(S), l>\frac{3m}{2}$, и

$$sin\mu_{s,n}\alpha\ne 0, s=1,2,..., \tag{4}$$

то задача 1 однозначна разрешима,где $\mu_{s,n}-$ положительные нули функций Бесселя первого рода $J_{n+\frac{(m-2)}{2}}(z), n=0,1,\dots$.

Теорема 2. Решение задачи 1 единственно, тогда и только тогда, когда выполняется условие (4).

3. Разрешимость задачи 1.

В сферических координатах уравнение (1) в области Ω_β имеет вид ([9])

$$Lu\equiv u_{rr}+\frac{m-1}{r}u_r-\frac{\delta u}{r^2}+u_{tt}+\sum_{i=1}^{m}a_i(r,\theta,t)u_{x_i}+b(r,\theta,t)u_t+c(r,\theta,t)u=0, \tag{5}$$

$$\delta\equiv-\sum_{j=1}^{m-1}\frac{1}{g_j\sin^{m-j-1}\theta_j}\frac{\partial}{\partial\theta_j}\left(\sin^{m-j-1}\theta_j\frac{\partial}{\partial\theta_j}\right),\ g_1=1,\ g_j=(\sin\theta_1...\sin\theta_{j-1})^2,\ j>1.$$

Известно ([10]), что спектр оператора δ состоит из собственных чисел $\lambda_n=n(n+m-$ $-2),\ n=0,1,...,$ каждому из которых соответствует k_n ортонормированных собствен- ных функций $Y_{n,m}^k(\theta)$.

Искомое решение задачи 1 будем искат в виде

$$u(r,\theta,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\bar{u}_n^k(r,t)Y_{n,m}^k(\theta), \tag{6}$$

где $\bar{u}_n^k(r,t)-$ функции, подлежащие определению.

Подставляя (6) в (5), умножив затем полученное выражение на $\rho(\theta)\ne 0$ и проинтегрировав по единичной сфере H, для $\bar{u}_n^k$ получим ([9])

$$\rho_0^1\overline{u}_{0rr}^1+\rho_0^1\overline{u}_{0tt}^1+(\frac{m-1}{r}\cdot\rho_0^1+\sum_{i=1}^{m}a_{i0}^1)\overline{u}_{0r}^1+\widetilde{b}_0^1\overline{u}_{0t}^1+\widetilde{c}_0^1\overline{u}_0^1$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\left\{\rho_n^k\overline{u}_{nrr}^k+\rho_n^k\overline{u}_{ntt}^k+\left(\frac{m-1}{r}\cdot\rho_n^k+\sum_{i=1}^{m}a_{in}^k\right)\overline{u}_{nr}^k+\widetilde{b}_n^k\overline{u}_{nt}^k+\right.$$

$$+\left[\widetilde{c}_n^k-\lambda_n\frac{\rho_n^k}{r^2}+\sum_{i=1}^m(\widetilde{a}_{in-1}^k-na_{in}^k)\right]\overline{u}_n^k\right\}=0. \qquad (7)$$

Теперь рассмотрим бесконечную систему дифференциальных уравнений

$$\rho_0^1\overline{u}_{0rr}^k+\rho_0^1\overline{u}_{0tt}^k+\frac{m-1}{r}\rho_0^1\overline{u}_{0r}^1=0, \qquad (8)$$

$$\rho_1^k\overline{u}_{1rr}^k+\rho_1^k\overline{u}_{1tt}^k+\frac{m-1}{r}\rho_1^k\overline{u}_{1r}^1-\frac{\lambda_1}{r^2}\rho_1^k\overline{u}_1^k= \qquad (9)$$

$$=-\frac{1}{k_1}\left(\sum_{i=1}^m a_{i0}^1\overline{u}_{0r}^1+\widetilde{b}_0^1\overline{u}_{0t}^1+\widetilde{c}_0^1\overline{u}_0^1\right), n=1, k=\overline{1,k_1},$$

$$\rho_n^k\overline{u}_{nrr}^k+\rho_n^k\overline{u}_{ntt}^k+\frac{m-1}{r}\rho_n^k\overline{u}_{nr}^k-\frac{\lambda_n}{r^2}\rho_n^k\overline{u}_n^k=-$$

$$-\frac{1}{k_n}\sum_{k=1}^{k_n-1}\left\{\sum_{i=1}^m a_{in-1}^k\overline{u}_{n-1r}^k+\widetilde{b}_{n-1}^k\overline{u}_{n-1t}^k+\left[\widetilde{c}_{n-1}^k+\sum_{i=1}^m(\widetilde{a}_{in-2}^k-\right.\right.$$

$$\left.\left.-(n-1)a_{in-1}^k)\right]\overline{u}_{n-1}^k\right\}, k=\overline{1,k_n}, n=2,3,.... \qquad (10)$$

Суммируя уравнение (9) от 1 до k_1 а уравнение (10) от 1 до k_n, а затем сложив полученные выражения вместо с (8), приходим к уравнению (7).

Отсюда следует, что если $\bar{u}_n^k, k=\overline{1,k_n}, n=0,1,...-$ решение системы (8)-(10), то оно является решенеием уравнения (7).

Нетрудно заметить, что каждое уравнение системы (8)-(10) можно представить в виде

$$\bar{u}_{nrr}^k+\frac{m-1}{r}\bar{u}_{nr}^k+\frac{\lambda_n}{r^2}\bar{u}_n^k+\bar{u}_{ntt}^k=f_n^k(r,t), \qquad (11)$$

где $f_n^k(r,t)$ определяются из предыдущих уравнений этой сиситемы, при этом $f_0^k(r,t)\equiv 0$.

Далее, из краевого условия (2) в силу (6), с учетом леммы 1 будем иметь

$$\bar{u}_n^k(1,t)=\psi_{2n}^k(t),\ \bar{u}_n^k(r,\beta)=\bar{\tau}_n^k(r),\ \bar{u}_{nt}^k(r,\beta)=\bar{\nu}_n^k(r),\ k=\overline{1,k_n},\ n=0,1,\dots. \qquad (12)$$

В (11), (12) произведя замену $\bar{\upsilon}_n^k(r,t)=\bar{u}_n^k(r,t)-\psi_{2n}^k(t)$, получим

$$\bar{\upsilon}_{nrr}^k+\frac{m-1}{r}\bar{\upsilon}_{nr}^k-\frac{\lambda_n}{r^2}\bar{\upsilon}_n^k+\bar{\upsilon}_{ntt}^k=\bar{f}_n^k(r,t), \qquad (13)$$

$$\bar{\upsilon}_n^k(1,t)=0,\ \bar{\upsilon}_n^k(r,\beta)=\tau_n^k(r),\ \bar{\upsilon}_{nt}^k(r,\beta)=\nu_n^k(r),\ k=\overline{1,k_n},\ n=0,1,\dots, \qquad (14)$$

$$\bar{f}_n^k(r,t)=f_n^k(r,t)+\frac{\lambda_n}{r^2}\psi_n^k(t)-\psi_{2ntt}^k, \tau_n^k(r)=\bar{\tau}_n^k(r)-\psi_{2n}^k(\beta), \nu_n^k(r)=\bar{\nu}_n^k(r)-\psi_{2nt}^k(\beta).$$

Произведя замену $\bar{\upsilon}_n^k(r,t)=r^{\frac{1-m}{2}}\upsilon_n^k(r,t)$ задачу (13),(14) приведем к следующей задаче

$$L\upsilon_n^k\equiv\upsilon_{nrr}^k+\frac{\bar{\lambda}_n}{r^2}\upsilon_n^k+\upsilon_{ntt}^k=\tilde{f}_n^k(r,t), \qquad (15)$$

$$\upsilon_n^k(1,t)=0, \upsilon_n^k(r,\beta)=\tilde{\tau}_n^k(r), \upsilon_{nt}^k(r,\beta)=\tilde{\nu}_n^k(r), \qquad (16)$$

$$\bar{\lambda}_n=\frac{[(m-1)(3-m)-4\lambda_n]}{4},\ \tilde{f}_n^k(r,t)=r^{\frac{(m-1)}{2}}\bar{f}_n^k(r,t), \tilde{\tau}_n^k(r)=r^{\frac{m-1}{2}}\tau_n^k(r), \tilde{\nu}_n^k(r)=r^{\frac{m-1}{2}}\nu_n^k(r).$$

Решение задачи (15), (16) ищем в виде $\upsilon_n^k(r,t) = \upsilon_{1n}^k(r,t) + \upsilon_{2n}^k(r,t)$, где $\upsilon_{1n}^k(r,t)$– решение задачи

$$L\upsilon_{1n}^k = \tilde{f}_n^k(r,t), \upsilon_{1n}^k(1,t) = 0, \upsilon_{1n}^k(r,\beta) = \upsilon_{1nt}^k(r,\beta) = 0, \tag{17}$$

а $\upsilon_{2n}^k(r,t)$– решение задачи

$$L\upsilon_{2n}^k = 0, \upsilon_{2n}^k(1,t) = 0, \upsilon_{2n}^k(r,\beta) = \tilde{\tau}_n^k(r), \upsilon_{2nt}^k(r,\beta) = \tilde{\nu}_n^k(r). \tag{18}$$

Решение выше указанных задач рассмотрим в виде

$$\upsilon_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} R_s(r)T_s(t), \tag{19}$$

при этом пусть

$$\tilde{f}_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{s,n}^k(t)R_s(r),\ \tilde{\tau}_n^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{s,n}^k R_s(r),\ \tilde{\nu}_n^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} e_{s,n}^k R_s(r). \tag{20}$$

Подставляя (19) в (17), с учетом (20), получим

$$R_{srr} + \left(\frac{\overline{\lambda}_n}{r^2} + \mu\right) R_s = 0,\ 0 < r < 1, R_s(1) = 0,\ |R_s(0)| < \infty, \tag{21}$$

$$T_{stt} - \mu T_s(t) = a_{s,n}^k(t),\ \beta < t < 0,\ T_s(\beta) = 0,\ T_{st}(\beta) = 0. \tag{22}$$

Ограниченным решением задачи (21) является([11])

$$R_s(r) = \sqrt{r} J_\nu(\mu_{s,n} r), \tag{23}$$

где $\nu = n + \frac{(m-2)}{2}, \mu_{s,n}$– нули функций Бесселя первого рода $J_\nu(z), \mu = \mu_{s,n}^2$.

Задача (22) сводится к интегральному уравнению Вольтерра второго рода относительно $T_{s,n}(t)$ ([12])

$$T_{s,n}(t) - \mu_{s,n}^2 \int_\beta^t (t-\xi)T_{s,n}(\xi)d\xi = \int_\beta^t (t-\xi)a_{s,n}(\xi)d\xi, \tag{24}$$

которое имеет, и притом единственное решение.

Подставляя (23) в (20) получим

$$\begin{gathered} r^{-\frac{1}{2}}\tilde{f}_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{s,n}^k(t) J_\nu(\mu_{s,n} r),\ \ r^{-\frac{1}{2}}\tilde{\tau}_n^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{s,n}^k J_\nu(\mu_{s,n} r), \\ r^{-\frac{1}{2}}\tilde{\nu}_n^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} e_{s,n}^k J_\nu(\mu_{s,n} r),\ 0 < r < 1. \end{gathered} \tag{25}$$

Ряды (25)-разложения в ряды Фурье-Бесселя ([13]), если

$$a_{s,n}^k(t) = 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2} \int_0^1 \sqrt{\xi}\tilde{f}_n^k(\xi,t) J_\nu(\mu_{s,n}\xi)d\xi. \tag{26}$$

$$\begin{gathered} b_{s,n}^k = 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2} \int_0^1 \sqrt{\xi}\tilde{\tau}_n^k(\xi) J_\nu(\mu_{s,n}\xi)d\xi, \\ e_{s,n}^k = 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2} \int_0^1 \sqrt{\xi}\tilde{\nu}_n^k(\xi) J_\nu(\mu_{s,n}\xi)d\xi, \end{gathered} \tag{27}$$

где $\mu_{s,n}, s = 1, 2, ...-$ положительные нули функций Бесселя первого рода $J_\nu(z)$, расположенные в порядке возрастания их величины.

Из (23), (24) получим решение задачи (17) в виде

$$\upsilon_{1n}^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} \sqrt{r} T_{s,n}(t) J_\nu(\mu_{s,n} r), \tag{28}$$

где $a_{s,n}^k(t)$ определяется из (26).

Далее подставляя (23) в (18), с учетом (20), будем иметь

$$V_{stt} - \mu_{s,n}^2 V_s = 0, \ \beta < t < 0, V_s(\beta) = b_{s,n}^k, V_{st}(\beta) = e_{s,n}^k,$$

которой произведя замену

$$G_{s,n}(t) = V_{s,n}(t) - b_{s,n}^k - (t-\beta) b_{s,n}^k, \tag{29}$$

приходим к следующей задаче

$$G_{s,ntt} - \mu_{s,n}^2 G_{s,n} = q_{s,n}^k(t), \beta < t < 0, G_{s,n}(\beta) = 0, G_{s,nt}(\beta) = 0, \tag{30}$$

$q_{s,n}^k(t) = \mu_{s,n}^2 [b_{s,n}^k + (t-\beta) e_{s,n}^k]$.

Задача (30) сводится также к интегральному уравнению (24), где вместо $a_{s,n}^k(t)$ берется $q_{s,n}^k(t)$.

Из (23), (24), (29) найдем решение задачи (18) в виде

$$\upsilon_{2n}^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} \sqrt{r} V_{s,n}(t) J_\nu(\mu_{s,n} r), \tag{31}$$

где $b_{s,n}^k, e_{s,n}^k$ находятся из (27).

Следовательно, сначала решив задачу (8), (12) $(n = 0)$, а затем (8), (12)$(n = 0)$ и т.д. найдем последлвательно все $\upsilon_n^k(r,t) = \upsilon_{1n}^k(r,t) + \upsilon_{2n}^k(r,t)$, где $\upsilon_{1n}^k(r,t), \upsilon_{2n}^k(r,t)$, определяются из (28), (31), $k = \overline{1, k_n}, n = 0, 1, \dots$.

Итак, в области Ω_β, имеет место

$$\int_H \rho(\theta) L u dH = 0. \tag{32}$$

Пусть $f(r,\theta,t) = R(r)\rho(\theta)T(t)$, причем $R(r) \in V_0$, V_0- плотна в $L_2((0,1))$, $\rho(\theta) \in C^\infty(H)-$ плотна в $L_2(H)$, а $T(t) \in V_1$, V_1- плотна в $L_2((0,\beta))$. Тогда $f(r,\theta,t) \in V$, $V = V_0 \otimes (H) \otimes V_1-$ плотна в $L_2(D_\beta)$ ([14]). Отсюда u из (12) следует, что

$$\int\limits_{\Omega_\beta} f(r,\theta,t) L u d\Omega_\beta = 0$$

и

$$Lu = 0, \ \forall (r,\theta,t) \in \Omega_\beta.$$

Таким образом, решением задачи (1), (2) в области Ω_β является ряд

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} [\psi_{2n}^k(t) + r^{\frac{(1-m)}{2}} [\upsilon_{1n}^k(r,t) + \upsilon_{2n}^k(r,t)]] Y_{n,m}^k(\theta), \tag{33}$$

где $\upsilon_{1n}^k(r,t), \upsilon_{2n}^k(r,t)$ определяются из (28) и (31).

Учитывая формулу ([13]) $2J'_\nu(z)=J_{\nu-1}(z)-J_{\nu+1}(z)$, оценки ([15,10])

$$J_\nu(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\left(z-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right)+0\left(\frac{1}{z^{3/2}}\right),\ \nu\geq 0,$$
$$|k_n|\leq c_1 n^{m-2},\ \left|\frac{\partial^l}{\partial\theta_j^l}Y_{n,m}^k(\theta)\right|\leq c_2 n^{\frac{m}{2}-1+l},\ j=\overline{1,m-1},\ l=0,1,... \tag{34}$$

а также леммы, ограничения на заданные функций $\psi_2(t,\theta),\tau(r,\theta),\nu(r,\theta)$, как в [9] можно доказать, что полученное решение в виде (33) принадлежит классу $C(\bar\Omega_\beta)\cap C^1(\Omega_\beta\cup S)$ $\cap\, C^2(\Omega_\beta)$.

Далее, из (28), (31), (33) при $t\to -0$ имеем

$$u(r,\theta,0)=\tau_1(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\tau_{1n}^k(r)Y_{n,m}^k(\theta),$$

$\tau_{1n}^k(r)=\psi_{2n}^k(0)+\sum\limits_{s=1}^{\infty}r^{\frac{(2-m)}{2}}\left[T_{s,n}(0)+V_{s,n}(0)\right]J_{n+\frac{(m-2)}{2}}(\mu_{s,n}r)$.

Из (25)-(27), (34), а также из леммы вытекает, что $\tau_1(r,\theta)\in W_2^l(S), l>\frac{3m}{2}$.

Таким образом, задача 1 приводится в области Ω_α к следующей задаче Дирихле для гиперболических уравнений

$$\Delta_x u-u_{tt}+\sum_{i=1}^m a_i(r,\theta,t)u_{x_i}+b(r,\theta,t)u_t+c(r,\theta,t)u=0. \tag{35}$$

Задача 2. Найти решение уравнения (35) в области Ω_α из класса $C(\bar\Omega_\alpha)\cap C^2(\Omega_\alpha)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u\big|_S=\tau_1(r,\theta),\ u\big|_{\Gamma_\alpha}=\psi_1(t,\theta),\ u\big|_{\sigma_\alpha}=\varphi(r,\theta). \tag{36}$$

В [16] доказаны теоремы 1 и 2 для задачи 2 при выполнение условия (4).

Далее используя справедливость теоремы 1 для задачи 2 получаем разрешимость задачи 1.

Так как в [16] получен явный вид решения задачи (35), (36), то можно записать явное представления и для задачи 1.

4. Единственность решения задачи 1.

Сначала рассмотрим задачу (1), (2) в области Ω_β и докажем ее единственность решения. Для этого построим решение смешанной задачи для уравнения

$$L^*v\equiv\Delta_x v+v_{tt}-\sum_{i=1}^m a_i v_{x_i}-bv_t+dv=0, \tag{5*}$$

$d(x,t)=c-\sum_{i=1}^m a_{ix_i}-b_t$, с данными

$$v|_S=0, v_t|_S=\nu_1(r,\theta)=\overline{\nu}_{1n}^k(r)Y_{n,m}^k(\theta),\ v|_{\Gamma_\beta}=0, k=\overline{1,k_n}, n=0,1,\dots\,. \tag{37}$$

где $\overline{\nu}_{1n}^k(r)\in G-$ множество функций $\nu(r)$ из класса $C([0,1])\cap C^2((0,1))$. Множество G плотна всюду в $L_2((0,1))$ [14].

Решение задачи $(5^*),(37)$ будем искать в виде (6), где функции $\overline{v}_n^k(r,t)$ будут определены ниже. Тогда, аналогично п.2, функции $\overline{v}_n^k(r,t)$ удовлетворяют систему уравнений (8)-(10), где $\tilde a_{in}^k, a_{in}^k,\tilde b_n^k$, заменены на $-\tilde a_{in}^k,-a_{in}^k,-\tilde b_n^k$, а $\tilde c_n^k$, на $\tilde d_n^k, i=1,...,m, k=\overline{1,k_n}, n=0,1,\dots$.

Далее, из краевого условия (37), в силу (6), получим

$$\overline{v}_n^k(r,\beta)=0,\overline{v}_{nt}^k(r,\beta)=\overline{\nu}_{1n}^k(r),\overline{v}_n^k(1,t)=0,k=\overline{1,k_n},n=0,1,\ldots\ . \tag{38}$$

Как ранее замечено, что каждое уравнение системы (8)-(10) представимо в виде (11). Как в п.2, нетрудно показать, задача (11), (38) имеет единственное решение.

Таким образом, решение задачи $(5^*),(37)$ в виде ряда (33) построено, которая в силу (34) принадлежит классу $C(\overline{\Omega}_\beta)\cap C^1(\Omega_\beta\cup S)\cap C^2(\Omega_\beta)$.

Из определения сопряженных операторов L,L^* ([17]) имеем

$$vLu-uL^*v=-vP(u)+uP(v)-uvQ,$$

где $P(u)=\sum_{i=1}^m u_{x_i}\cos\bigl(N^\perp,x_i\bigr)-u_t\cos\bigl(N^\perp,t\bigr)$, $Q=\sum_{i=1}^m a_i\cos\bigl(N^\perp,x_i\bigr)-b\cos\bigl(N^\perp,t\bigr)$,

а $N^\perp$ - внутренняя нормаль к границе $\partial\Omega_\beta$, по формуле Грина имеем

$$\int_{\Omega_\beta}(vLu-uL^*v)d\Omega_\beta=\int_{\partial\Omega_\beta}\left[\left(v\frac{\partial u}{\partial N}-u\frac{\partial v}{\partial N}\right)M+uvQ\right]ds \tag{39}$$

где $\frac{\partial}{\partial N}=\sum_{i=1}^m\cos\bigl(N^\perp,x_i\bigr)-\cos\bigl(N^\perp,t\bigr)\frac{\partial}{\partial t}$, а $M^2=\sum_{i=1}^m\cos^2(N^\perp,x_i)+\cos^2(N^\perp,t)$.

Из (39), принимая во внимание однородные граничные условия (2) и условия (37) получим

$$\int_S\nu_1(r,\theta)u(r,\theta,0)ds=0. \tag{40}$$

Поскольку линейная оболочка системы функций $\bigl\{\overline{\nu}_n^k(r)Y_{n,m}^k(\theta)\bigr\}$ плотна в $L_2(S)$[14], то из (40) заключаем, что $u_t(r,\theta,0)=0,\forall(r,\theta)\in S$.

Таким образом, мы приходим к задаче Дирихле:

$$Lu=0,u\big|_S=0,u\big|_{\Gamma_\beta}=0,u\big|_{\sigma_\beta}=0,$$

решение которого тривиальное [18].

Следовательно, мы пришли к однородной задаче (35), (36), которое имеет нулевое решение, если имеет место условие (4).

Единственность решения задачи 1 доказано.

Теорема 1 доказано.

Так как для задачи 2 имеет место теорема 2, то отсюда следует ее справедливость и для задачи 1.

Отметим, что в [19] задача 1 изучена для многомерного уравнения Лаврентьева-Бицадзе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шабат Б.В. Примеры решения Дирихле для уравнения смешанного типа // Докл. АН СССР.-1957.-112,№3.-с. 386-389.

2. Бицадзе А.В. Некорректность задачи Дирихле для уравнений смешанных областях // Докл. АН СССР.-1958.-112,№2.-с.167-170.

3. Солдатов А.П. Задачи типа Дирихле для уравнения Лаврентьева-Бицадзе // Докл. РАН.-1993.-332, №6.-С.696-698;333,№1.-С.16-18.

4. Сабитов К.Б. Задача Дирихле для уравнения смешанного типа в прямоугольной области // Докл. РАН.-2007.-413, №1.-С.23-26.

5. Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнения в частных производных, М.: Наука, 2006 - 287 с.

6. Хачев М.М. Первая краевая задача для линейных уравнений смешанного типа. Нальчик: Эльбрус, 1998 -168 с.

7. Алдашев С.А. Критерий единственности решения задачи Дирихле в цилиндрической области для многомерного уравнения Лаврентьева-Бицадзе // Мат-лы межд. Российско-Болгарского симп. "Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализ и информатики Нальчик: НИИ ПМА КБНЦ РАН, 2010 - с. 22-23

8. Алдашев С.А. Корректность задачи Дирихле в цилиндрической области для многомерного уравнения Лаврентьева-Бицадзе // Известия НАН РК, сер. физико-математическая, Алматы, 2014,№3-с. 136-143

9. Алдашев С.А. Корректность задачи Дирихле в цилиндрической области для одного класса многомерных гиперболо-эллиптических уравнений //Нелинейные колебания,Киев, 2013, т. 16, №4 -с. 435-451

10. Михлин С.Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения, М.:Физматгиз, 1962 - 254 с.

11. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, М.: Наука,1965 - 703 с.

12. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных, М.: Наука, 1981-448с.

13. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, т.2, М.: Наука, 1974 - 295с.

14. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа, М.: Наука, 1976 - 543 с.

15. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики, М.:Наука, 1966 -724с.

16. Алдашев С.А. Корректность задачи Дирихле в цилиндрической области для многомерных гиперболических уравнений с волновым оператором // Докл. Адыг (Черкес.) Междунар. акад. наук, 2011, т. 13, №1-с. 21-29.

17. Смирнов В.И. Курс высшей математики, Т.4,№.2, М.: Наука, 1981-550с.

18. Берс Л., Джон Ф., Шехтер М. Уравнения с частными производными, М.: Мир, 1966 - 352 с.

19. Алдашев С.А. Корректность задачи типа Дирихле в цилиндрической области для многомерного уравнения Лаврентьева-Бицадзе // Вестник СамУ, естественно научная серия, Самара, 2018, т. 24, No.1 -с. 7-13

REFERENCES

1. Shabat, B.V. 1957, “Examples of solving Dirichlet problems for mixed-type equations”, *Doklady Akademii Nauk SSSR*, vol. 112, no. 3, pp. 386–389.

2. Bitsadze, A.V. 1958, “Incorrectness of the Dirichlet problem for equations in mixed domains”, *Doklady Akademii Nauk SSSR*, vol. 112, no. 2, pp. 167–170.

3. Soldatov, A.P. 1993, “Dirichlet-type problems for the Lavrentiev-Bitsadze equation”, *Doklady Rossiiskoi Akademii Nauk*, vol. 332, no. 6, pp. 696–698; vol. 333, no. 1, pp. 16–18.

4. Sabitov, K.B. 2007, “Dirichlet problem for mixed-type equations in a rectangular domain”, *Doklady Rossiiskoi Akademii Nauk*, vol. 413, no. 1, pp. 23–26.

5. Nakhushev, A.M. 2006, *Problems with shifts for partial differential equations*, Nauka, Moscow, 287 p.

6. Khachev, M.M. 1998, *The first boundary-value problem for linear mixed-type equations*, Elbrus, Nalchik, 168 p.

7. Aldashev, S.A. 2010, “Uniqueness criterion for the solution of the Dirichlet problem in a cylindrical domain for the multidimensional Lavrentiev-Bitsadze equation”, in *Proceedings of the International Russian-Bulgarian Symposium "Mixed-Type Equations and Related Problems of Analysis and Informatics"*, NII PMA KBNTS RAN, Nalchik, pp. 22–23.

8. Aldashev, S.A. 2014, “Correctness of the Dirichlet problem in a cylindrical domain for the multidimensional Lavrentiev-Bitsadze equation”, *Izvestiya Natsional’noi Akademii Nauk Respubliki Kazakhstan. Seriya Fiziko-Matematicheskaya*, no. 3, pp. 136–143.

9. Aldashev, S.A. 2013, “Correctness of the Dirichlet problem in a cylindrical domain for a class of multidimensional hyperbolic-elliptic equations”, *Nonlinear Oscillations*, vol. 16, no. 4, pp. 435–451.

10. Mikhlin, S.G. 1962, *Multidimensional Singular Integrals and Integral Equations*, Fizmatgiz, Moscow, 254 p.

11. Kamke, E. 1965, *Handbook of Ordinary Differential Equations*, Nauka, Moscow, 703 p.

12. Bitsadze, A.V. 1981, *Some Classes of Partial Differential Equations*, Nauka, Moscow, 448 p.

13. Bateman, G. & Erdelyi, A. 1974, *Higher Transcendental Functions, Vol. 2*, Nauka, Moscow, 295 p.

14. Kolmogorov, A.N. & Fomin, S.V. 1976, *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis*, Nauka, Moscow, 543 p.

15. Tikhonov, A.N. & Samarskii, A.A. 1966, *Equations of Mathematical Physics*, Nauka, Moscow, 724 p.

16. Aldashev, S.A. 2011, “Correctness of the Dirichlet problem in a cylindrical domain for multidimensional hyperbolic equations with a wave operator”, *Doklady Adygeiskoi (Cherkesskoi) Mezhdunarodnoi Akademii Nauk*, vol. 13, no. 1, pp. 21–29.

17. Smirnov, V.I. 1981, *Course of Higher Mathematics, Vol. 4, Part 2*, Nauka, Moscow, 550 p.

18. Bers, L., John, F. & Schechter, M. 1966, *Partial Differential Equations*, Mir, Moscow, 352 p.

19. Aldashev, S.A. 2018, “Correctness of the Dirichlet-type problem in a cylindrical domain for the multidimensional Lavrentiev-Bitsadze equation”, *Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Estestvennonauchnaya Seriya*, vol. 24, no. 1, pp. 7–13.

Получено: 13.03.2025
Принято в печать: 08.12.2025

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 26. Выпуск 5.

УДК: 511.348 DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-5-53-72

О сумме квадратов четырёх простых чисел из арифметической прогрессии

И. Аллаков, О. Ш. Имамов

Аллаков Исмаил — доктор физико-математических наук, профессор, Термезский государственный университет (г. Термез, Узбекистан).
e-mail: iallakov@mail.ru
Имамов Ойбек Шаназарович — базовый докторант, Термезский государственный университет (г. Термез, Узбекистан)
e-mail: oybekimamov000@gmail.com

Аннотация

В работе изучается задача о представлении натурального числа n в виде суммы квадратов четырёх простых чисел из арифметической прогрессии. Оценено, количество натуральных чисел, которые нельзя представить в указанном виде, т.е. исключительное множество задачи. Также впервые получена оценка снизу для количества представлений данного не исключительного n в указанном виде.

Ключевые слова: диофантово уравнение; конгруэнтразрешимость; положительная разрешимость; исключительный нуль; L-функция Дирихле; символ Лежандра; малая дуга; большая дуга; особый ряд; особый интеграл.

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:
Аллаков И., Имамов О. Ш. О сумме квадратов четырёх простых чисел из арифметической прогрессии // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 5, с. 53–72.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 26. No. 5.

UDC: 511.348 DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-5-53-72

On the sum of the squares of four prime numbers from the arithmetic progression

I. Allakov, O. Sh. Imamov

Allakov Ismail —doctor of physical and mathematical sciences, professor, Termez State University (Termez, Uzbekistan).
e-mail: iallakov@mail.ru
Imamov Oybek Shanazarovich — basic doctoral student, Termez State University (Termez, Uzbekistan).
e-mail: oybekimamov000@gmail.com

Abstract

The work studies the problem of representing the natural number n as the sum of the squares of four prime numbers from an arithmetic progression. The number of natural numbers that cannot be represented in the specified form has been estimated, i.e. the exceptional set of the problem, is estimated.. Also, for the first time, a lower estimate was obtained for the number of representations of a given non-exceptional n in the indicated form.

Keywords: diophantine equation; congruent solution; positive solution; exceptional zero; Dirichlet L-function; Legendre symbol; minor arc; major arc; singular series; singular integral.

Bibliography: 16 titles.

For citation:
Allakov, I., Imamov, O. Sh. 2025, “On the sum of the squares of four prime numbers from the arithmetic progression”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 5, pp. 53–72.

1. Введение

Известно, что после доказательства теоремы Ж. Л. Лагранжа (см.§6.5., гл.VI [1]), о представлении заданного целого числа в виде суммы квадратов четырех целых чисел первым, кто обратил внимание на задачу представления данного целого числа в виде суммы квадратов четырех простых чисел $p_1, ..., p_4$ был Л. К.Хуа [2]. Пусть N-достаточно большое натуральное число и $U(N) = \{n \mid 1 < n \leqslant N, n \equiv 4(\mathrm{mod} 24), n \neq p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2\}$, $E(N) = card U(N)$.

Л. К.Хуа доказал, что $E(N) \ll N\log^{-A} N$, где $A > 0-$ некоторая постоянная, $\ll -$ символ Виноградова. Jianya Liu и Ming-Chit Liu [3] улучшили этот результат и доказали новую оценку $E(N) \ll N^{\theta}$, при $\theta > 13/15$.

Yonghui Wang [4] доказал, что диофантово уравнение $n = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2$ имеет решение, если выполняются условия $p_i \equiv b_i \,(\mathrm{mod}\, d)$, $(\, i = 1, 2, ..., 5)$, $d \leqslant N^{\delta}$, $n \equiv 5\,(\mathrm{mod} 24)$. Здесь и далее $\delta > 0-$ достаточно малое число. Затем в работе [5] авторы настоящей работы получили оценки снизу для количества представлений данного $n, 1 < n \leqslant N, n \equiv 5(\mathrm{mod} 24)$ в виде суммы квадратов пяти простых чисел из арифметической прогрессии. Кроме того О. Имамов [6] получил оценку снизу, для количества решений уравнения

$$n = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2. \tag{1}$$

В данной статье мы исследуем существования решений уравнения (1) в простых числах из арифметической прогрессии. Для удобства введем следующие обозначения:

$$U\,(N, d) = \left\{\bar{b} \in \mathbb{N}^4 : \, 1 \leqslant b_i \leqslant d, \, (b_i, d) = 1, \quad b_1^2 + \cdots + b_4^2 \equiv n\,(\mathrm{mod}\sigma(d)d)\right\}. \tag{2}$$

В дальнейшем будем рассматривать $p_i \equiv b_i(\mathrm{mod}\; d)$, $i = 1, ..., 4$ и $\bar{b} = (b_1, \ldots, b_4) \in U(N, d)$. Здесь $\sigma(d) = 1, 4, 2$ соответственно означает $2 \nmid d$, $2 \,\|d$ и $4|d$.

Пусть $S_d\,(n)-$ количество решений уравнения (1) в простых числах $p_i \equiv b_i(\mathrm{mod}\, d)$, $i = 1, ..., 4$; а $E_d\,(n)-$ количество n $(2 < n \leqslant N)$, которые не представимо в виде суммы четырёх квадратов простых чисел из арифметической прогрессии $p_i \equiv b_i(\mathrm{mod}\; d)$, $i = 1, ..., 4$. Положим $Q = N^{21\delta}$. Основным результатам настоящей работы является следующая.

Теорема. *Если* $n \equiv 4\,(\mathrm{mod} 24)$, $2 \leqslant d \leqslant N^{\delta}$ *, тогда справедлива оценка*

$$E_d(N) \ll N(Q^{15/14}\, d)^{-1}.$$

Метод, используемый в доказательстве теоремы, позволяет получить оценку для $S_d\,(n)$ при $N/50 < n \leqslant N$.

Следствие. *Для всех* n *($N/50 < n \leqslant N$), удовлетворяющие условию* $n \equiv 4\,(\mathrm{mod} 24)$, *за исключением не более чем* $E_d(N) \ll N\big(Q^{15/14}\,d\big)^{-1}$ *значений, справедлива оценка* $S_d\,(n) \gg \gg n^{1-7\delta}(d^{1/2}\log^4 n)^{-1}$.

Результаты сформулированном теоремы не только является обобщением сооатветствующие результать Jianya Liu и Ming-Chit Liu [3] простых чисел арифметической прогрессии, по внем улучщена оценка множества $E_d(N)$ в сравнинее оценки $E_1(N)$ доказанные в [3] . Отметим также, что вперые получена оценки для $S_d(N)$. В доказательстве теоремы, будем использовать методы Харди-Литтлвуда [7] , метод И.М.Виноградова [8],[9] а также схема работы Аллакова [10].

Отметим оценка для $S_d(n)$, получена впервые и отличается от ожидаемого главного члена на $n^{-7\delta}$.

2. Обозначения и оценка интеграла по малым дугам

Введем обозначения:

$$T = N^{\sqrt{\delta}}, L = N/50, \tau = N^{-1}T^{\frac{1}{4}}, L_1 = \sqrt{L}, N_1 = \sqrt{N}. \tag{3}$$

Положим $e(y) = e^{2\pi i y}$ и $e_q(y) = e(y/q)$. Для любых a, q, $(a, q) = 1$ при $1 \leqslant a \leqslant q \leqslant Q$, обозначим $\mathbf{m}\,(a, q) = \left[\frac{a-\tau}{q}, \frac{a+\tau}{q}\right]$. Легко видеть, что эти промежутки принадлежат интервалу $[\tau,\, 1+\tau]$ и не пересекаются (см. §2 , гл X [11] или п.3, §5 , гл II, [12]). Обозначим объединение $\mathbf{m}(a, q)$ через $\mathfrak{M}$, то есть $\mathfrak{M} = \bigcup\limits_{a,q} \mathbf{m}(a, q)$. Разность $[\tau,\, 1+\tau]\setminus\mathfrak{M}$ обозначим через $\mathfrak{m}$. Пусть

$$S_i(\alpha) = S_i(\alpha, d, b_i) = \sum_{\substack{L_1 < m_i \leqslant N_1 \\ m_i \equiv b_i (\bmod d)}} \Lambda(m_i) e(\alpha m_i^2), \tag{4}$$

и

$$\mathcal{R}(n) := \sum_{\substack{L_1 < n_i \leqslant N_1, \\ m_1^2+\cdots+m_4^2=n, \\ m_i \equiv b_i (\bmod d)}} \Lambda(m_1)\cdots\Lambda(m_4), \tag{5}$$

где $\Lambda(m)$-функция Мангольдта. Тогда, используя (4), $\mathcal{R}(n)$ можем представить в виде: $\mathcal{R}(n) = \int\limits_{\tau}^{1+\tau} \prod\limits_{i=1}^{4} S_i(\alpha) e(-n\alpha) d\alpha$. Теперь $\mathcal{R}(n)$ можем записать в виде

$$\mathcal{R}(n) = \left\{ \int\limits_{\mathfrak{M}} + \int\limits_{\mathfrak{m}} \right\} \prod_{i=1}^{4} S_i(\alpha) e(-n\alpha) d\alpha = \mathcal{R}_1(n) + \mathcal{R}_2(n). \tag{6}$$

В (6) интеграл по множестве $\mathfrak{M}$ обозначен как $\mathcal{R}_1(n)$, а интеграл по $\mathfrak{m}$ как $\mathcal{R}_2(n)$.

Оценим $\mathcal{R}_2(n)$. Для этого воспользуемся следующими леммами.

Лемма 2.1. *Если* $\left|\alpha - aq^{-1}\right| \leqslant q^{-2}$, $(a, q) = 1$, $d \leqslant N^{\delta}$ *и* $h = (q, d)$, *то для любого действительного числа* $\alpha \in \mathfrak{m}$ *при* $N > N_0(\delta)$ *справедлива оценка для* $S_i(\alpha) \ll N^{\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{2}} Q^{-\frac{1}{2}}$.

Эта лемма следует из леммы 2.1 в [4].

Лемма 2.2. *Для всех* $n \leqslant N$, $\varepsilon < 0,6\delta$ *и* $n \equiv 4\,(\mathrm{mod} 24)$ *за исключением не более чем* $\ll NQ^{-15/14}\,d^{-1}$ *значений* n, *справедлива оценка*

$$|\mathcal{R}_2(n)| < NQ^{-3/7} d^{-1/2}. \tag{7}$$

Доказательство. Используя неравенство Бесселя (см. §4, гл.III, [13]) и лемму 2.1, получим

$$\sum_{N/2\leqslant n\leqslant N}\left|\mathcal{R}_2(n)\right|^2\ll\int\limits_{\mathfrak{m}}|S(\alpha)|^8d\alpha\ll\left(N^{\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{2}}Q^{-\frac{1}{2}}\right)^4\int\limits_0^1|S(\alpha)|^4d\alpha$$

Так как

$$\int\limits_0^1|S(\alpha)|^4d\alpha\leqslant\log^4N\int\limits_0^1\left|\sum_{\substack{L_1<m_i\leqslant N_1\\ m_i\equiv b_i(\bmod\ d)}}e(\alpha m_i)\right|^4d\alpha$$

и согласно лемме Хуа (см. п.2.2, гл. II, [7]), существует такая постоянная c, что справедлива оценка

$$\int\limits_0^1\left|\sum_{\substack{L_1<m_i\leqslant N_1\\ m_i\equiv b_i(\bmod\ d)}}e(\alpha m)\right|^4d\alpha\ll Nd^{-2}\log^cN,$$

то получим

$$\sum_{L<n\leqslant N}\left|\mathcal{R}_2(n)\right|^2\ll N^{3+2\varepsilon}Q^{-2}d^{-2}\log^{4+c}N.$$

Отсюда следует, что количество значений n, $n\leqslant N$ для которых $|\mathcal{R}_2(n)|\geqslant N(Q^{3/7}\,d^{1/2}\,)^{-1}$, не превосходит $<N(Q^{15/14}d)^{-1}$. То есть, для всех $L<n\leqslant N$ и $n\equiv 4\,(\mathrm{mod}24)$ за исключением не более чем $\ll N(Q^{15/14}d)^{-1}$ значений n, справедливо неравенство $|\mathcal{R}_2(n)|<N(Q^{3/7}d^{1/2})^{-1}$.

3. Упрощение интеграла $\mathcal{R}_1(n)$

Обозначим $h=(d,q)$ и для любого характера $\chi(mod\,dqh^{-1})$ и действительного числа y, $S_i(\chi,y)$ и интегралы сумму $I(y),\tilde{I}(y)$ и $I(\chi,y)$ определим следующими равенствами:

$$S_i(\chi,y):=S_i(\chi,y,d,q):=\sum_{\substack{L_1<m_i\leqslant N_1,\\ n_i\equiv b_i\left(\bmod dqh^{-1}\right)}}\chi(m_i)\Lambda(m_i)e({m_i}^2y),$$

$$I(y):=\int\limits_{L_1}^{N_1}e(x^2y)dx,\ \ \tilde{I}(y):=\int\limits_{L_1}^{N_1}x^{\tilde{\beta}-1}e(x^2y)dx,\ \ I(\chi,y):=\sum_{\gamma\leqslant T}{}'\int\limits_{L_1}^{N_1}x^{\rho-1}e(x^2y)dx.$$

Здесь $\sum\limits_{\gamma\leqslant T}{}'$– обозначает сумму по всем нулям $\rho=\beta+i\gamma$ функции $L(s,\chi)$ в области $\frac{1}{2}\leqslant\beta\leqslant 1-c_1(\ln T)^{-1},\ |\gamma|\leqslant T$, за кроме исключительного нуля $\tilde{\beta}$.
Для дальнейших исследований нам понадобится следующые леммы.

Лемма 3.1. *Для любого действительного числа y и характера $\chi(mod\,dqh^{-1})$ при $dqh^{-1}\leqslant T$ справедливо следующее равенство*

$$S(\chi,y)=\delta_{\chi_0}I(y)-\delta_{\tilde{\chi}}\tilde{I}(y)-I(\chi,y)+O\left((1+|y|\,N)\,N_1T^{-1}\log^2N\right),$$

где $\delta_{\chi_0}=\begin{cases}1, & \text{если }\ \chi\equiv\chi_0(mod\,dqh^{-1}),\\ 0, & \text{в противном случае,}\end{cases}$ $\qquad\delta_{\tilde{\chi}}=\begin{cases}1, & \text{если }\ \chi\equiv\tilde{\chi}\chi_0(mod\,dqh^{-1}),\\ 0, & \text{в противном случае.}\end{cases}$

Доказательство этой леммы приведено в [11, 12, 14] (например, см. страницу 120 в [14]).

Чтобы упростить $\mathcal{R}_1(n)$ нам потребуются следующие обозначения. Для положительных целых чисел d, q обозначим $h\,(q) := (d, q)$, то есть наибольший общий делитель чисел d и q.Через положительные целые числа α_i, β_i, γ_i определим $h\,(q)$ следующим образом: $d = p_1^{\alpha_1} \cdots p_s^{\alpha_s} d_0,\;\; q = p_1^{\beta_1} \cdots p_s^{\beta_s} q_0,\;\; (d_0,\, q_0) = 1,$

$$h\,(q) = p_1^{\gamma_1} \cdots p_s^{\gamma_s}, \tag{8}$$

где $\gamma_i = \min\left(\alpha_i,\, \beta_i\right),\;\; i = 1, ..., s$. Определим $h_1\,(q)$ и $h_2\,(q)$ следующим образом.

$$h_1\,(q) := p_1^{\delta_1} \cdots p_s^{\delta_s}, \delta_i = \begin{cases} \alpha_i, & \text{если } \beta_i > \alpha_i \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{9}$$

Согласно (8) и (9)

$$h_2\,(q) := h\,(q)/h_1\,(q). \tag{10}$$

Для удобства записи обозначим $h = h\,(q)$, $h_1 = h_1\,(q)$ и $h_2 = h_2\,(q)$. Легко видеть, что $(h_1,\, h_2) = 1$ и $(d/h_1, q/h_2\,) = 1$.

Лемма 3.2. *Если $\alpha = aq^{-1} + \lambda$, то справедливо равенство*

$$S_i(\alpha) = \varphi^{-1}\,(d/h_1\,)\,\varphi^{-1}\,(q/h_2\,) \sum_{\zeta(\bmod\ d/h_1)} \bar{\zeta}(b_i) \sum_{\eta(\bmod\ q/h_2)} G_i(a, \bar{\eta}, q) S(\zeta\eta, \lambda) + O\left(\log^2 N\right),$$

где

$$G_i\,(a, \bar{\eta}, q) = G\,(h, b_i, a, \bar{\eta}, q) = \sum_{\substack{(c,q)=1 \\ c \equiv b_i(\bmod\ h)}} e\left(ac^2/q\,\right) \bar{\eta}(c), \tag{11}$$

а η и ζ — характеры по модулям q/h_2 и d/h_1 соответственно.

Доказательство. В силу определения $S_i\,(\alpha)$ имеем:

$$S_i\,(\alpha) = \sum_{\substack{L_1 < m_i \leqslant N_1, \\ m_i \equiv b_i(\bmod\ d) \\ (m_i, q)=1}} \Lambda(m_i) e\left(\alpha m_i^2\right) + O\left(\sum_{\substack{p^k \leqslant N_1 \\ p|q}} \log\, p\, e(p^{2k}\alpha)\right) =$$

$$= \sum_{\substack{(c,q)=1 \\ c \equiv b_i(\bmod\ h)}} e\left(\frac{ac^2}{q}\right) \sum_{\substack{L_1 < m_i \leqslant N_1 \\ m_i \equiv b_i(\bmod\ d) \\ m_i \equiv c(\bmod\ q)}} \Lambda(m_i) e(m_i^2 \lambda) + O\left(\log^2 N\right).$$

Если $c \equiv b_i(\mathrm{mod} h)$, то внутренняя сумма в главном члене превращается в нуль. Поэтому мы можем применить условие $c \equiv b_i(\mathrm{mod} h)$ к суммированию по c. С другой стороны, условие $c \equiv b_i(mod h)$ эквивалентно условиям $m_i \equiv b_i(\mathrm{mod}\, d)$ и $m_i \equiv c(\mathrm{mod} q)$ которые, в свою очередь, эквивалентны условиям $m_i \equiv b_i(\mathrm{mod}\, d/h_1)$, и $m_i \equiv c(\mathrm{mod}\, q/h_2\,)$. В этом случае, согласно свойству ортогональности характеров (см. §4,5, [14]), для $S_i\,(\alpha)$ справедливо следующее равенство

$$S_i\,(\alpha) = \varphi^{-1}\,(d/h_1\,)\,\varphi^{-1}\,(q/h_2\,) \sum_{\zeta(\bmod\ d/h_1)} \bar{\zeta}\,(b_i) \times$$

$$\times \sum_{\eta(\bmod\ q/h_2)} \sum_{\substack{(c,q)=1 \\ c \equiv b_i(\bmod\ h)}} e\left(\frac{ac^2}{q}\right) \bar{\eta}\,(c) \sum_{\substack{L_1 < m_i \leqslant N_1 \\ m_i \equiv b_i(\bmod\ d)}} \zeta\eta(m_i) \Lambda(m_i) e(m_i^2 \lambda) + O(\log^2 N).$$

Следовательно, используя (11) получим

$$S_i(\alpha)=\varphi^{-1}(d/h_1)\varphi^{-1}(q/h_2)\sum_{\zeta(\bmod d/h_1)}\bar{\zeta}(b_i)\sum_{\eta(\bmod q/h_2)}G_i(a,\bar{\eta},q)S(\zeta\eta,\lambda)+O\left(\log^2 N\right).$$

Отсюда следует утверждение леммы 3.2.

Теперь, используя приведённые леммы, упростим $R_1(n)$ следующим образом. Для любого $\alpha=a/q+\lambda\in\mathbf{m}(a,q)$ выполняются условия $|\lambda|<\tau/q$ и $q\leqslant Q$. Согласно леммам 3.1 и 3.2, $S_i\left(\alpha\right)$ можно записать следующим образом:

$$S_i(\alpha)=\varphi^{-1}(d/h_1)\varphi^{-1}(q/h_2)\{G_i(a,\bar{\eta}_0,q)I(\lambda)-\delta_q\tilde{\zeta}\zeta_0\left(b_i\right)G_i(a,\bar{\eta}\eta_0,q)\tilde{I}(\lambda)-$$

$$-\sum_{\zeta\;(\bmod d/h_1)\eta\;(\bmod q/h_2)}\tilde{\zeta}\left(b_i\right)G_i(a,\bar{\eta},q)\tilde{I}(\zeta\eta,\lambda)\}+$$

$$+O(\varphi^{-1}(q/h_2)\sum_{\eta\;(\bmod q/h_2)}|G_i(a,\bar{\eta},q)|(1+|\lambda|N)N^{1/2}T^{-1}\log^2 N)+O(\log^2 N),$$

где $\tilde{\zeta}\zeta_0\left(\bmod d/h_1\right)\tilde{\eta}\eta_0\left(\bmod q/h_2\right)=\tilde{\chi}\chi_0\left(\bmod dq/h\ \right)$, $\tilde{\zeta}$ и $\tilde{\eta}$ — примитивные характеры и

$$\delta_q:=\begin{cases}1, & \text{если существует } \tilde{\chi}\ (\bmod \tilde{r})\ \text{ и } \tilde{r}\mid(dq/h),\\ 0, & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Так как $|\lambda|\ll\tau/q$ и $|\lambda|\,N<T^{1/4}q^{-1}$, то тривиально получаем следующую оценку: $\sum\limits_{\eta\;(\bmod q/h_2)}|G_i(a,\bar{\eta},q)|\ll\varphi(q/h_2)\varphi(q)$, $|G_i\left(a,\chi,q\right)|\leqslant\sum\limits_{\substack{(c,q)=1\\ c\equiv b_i(\bmod q)}}\left|e\left(\frac{ac^2}{q}\right)\right||\chi\left(c\right)|\leqslant\varphi\left(q\right)$.

Используя это и (3), можно оценить остаток следующим образом.
$\ll\varphi(q)T^{1/4}q^{-1}N_1T^{-1}\log^2 N\ll N_1T^{-3/4}\log^2 N$. Таким образом, для $\alpha=a/q+\lambda\in\mathbf{m}\left(a,q\right)$ имеем следующего:

$$S_i\left(\alpha\right)=\varphi^{-1}\left(d/h_1\ \right)\varphi^{-1}\left(q/h_2\ \right)H_i\left(a,q,\lambda\right)+O\left(N_1T^{-3/4}\log^2 N\right). \qquad (12)$$

где

$$H_i\left(a,q,\lambda\right):=G_i(a,\bar{\eta}_0,q)I(\lambda)-\delta_q\tilde{\zeta}\zeta_0\left(b_i\right)G_i(a,\bar{\eta}\eta_0,q)\tilde{I}(\lambda)-F_i\left(a,q,\lambda\right) \qquad (13)$$

$$F_i\left(a,q,\lambda\right):=\sum_{\zeta\;(\bmod d/h_1)\eta\;(\bmod q/h_2)}\tilde{\zeta}\left(b_i\right)G_i(a,\bar{\eta},q)\tilde{I}(\zeta\eta,\lambda). \qquad (14)$$

Согласно лемме 3.3. а) работы [4], имеем $\varphi^{-1}\left(d/h_1\ \right)\varphi^{-1}\left(q/h_2\ \right)H_i\left(a,q,\lambda\right)\ll\varphi\left(q\right)N_1$. Учитывая это и (12) из (6) получим

$$\mathcal{R}_1\left(n\right)=\sum_{q\leqslant Q}\frac{1}{\varphi^4\left(\frac{d}{h_1}\right)\varphi^4\left(\frac{q}{h_2}\right)}\sum_{(a,q)=1}\int\limits_{-\tau/q}^{\tau/q}e\left(-n\left(\frac{a}{q}+\lambda\right)\right)\prod_{i=1}^{4}H_i\left(a,q,\lambda\right)d\lambda+O\left(\frac{NQ^4\log^2 N}{T^{1/2}}\right).$$

В произведении $\prod\limits_{i=1}^{4}H_i\left(a,q,\lambda\right)$ содержится $\left(\varphi\left(dq/h\right)+2\right)^4$ слагаемых. Каждое из этих слагаемых представляет собой $\prod\limits_{i=1}^{4}E_i$, где E_i принимает одно из следующих значений: $G_i\left(q\right)I\left(\lambda\right)$, $-\delta_q\tilde{\zeta}\left(b_i\right)G_i(a,\bar{\eta}\eta_0,q)\tilde{I}(\lambda)$ или $-\tilde{\zeta}\left(b_i\right)G_i(a,\bar{\eta},q)I\left(\zeta\eta,\lambda\right)$ Используя оценки для $I\left(\lambda\right)$, $\tilde{I}\left(\lambda\right)$ и $I\left(\chi,\lambda\right)$ из пункта а) леммы 3.3 в [4], и учитывая, что $|\lambda|>\tau/q\ >L^{-1}$, видим, что среди этих оценок самой слабой является оценка $\ll N^{1/2}(L\,|\lambda|)^{-1/2}$. Тогда, на основании пункта b) леммы 3.3 из [4] и неравенства Коши, получаем

$$\int\limits_{R\backslash[-\tau/q,\,\tau/q\,]} \prod_{i=1}^{4} E_i d\lambda \ll \varphi^2\,(q)\,[\tau/q\,]^{-1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |E_1E_2|d\lambda \ll \varphi^4\,(q)\,[\tau/q\,]^{-1},$$

поскольку

$$|E_i| \ll |G_i\,(q)\,I\,(\lambda)| \ll \varphi\,(q)\,N^{1/2}(L\,|\lambda|)^{-1/2} \ll \varphi\,(q)\,(\tau/q)^{-1/2}.$$

Поэтому имеем оценку

$$\sum_{q\leqslant Q} \varphi^{-4}\,(d/h_1\,)\,\varphi^{-4}\,(q/h_2\,) \sum_{(a,q)=1}\ \int\limits_{R\backslash[-\tau/q,\,\tau/q\,]} e\,(-n\lambda) \prod_{i=1}^{4} H_i\,(a,q,\lambda)d\lambda \ll NQ^{-1}.$$

Таким образом,

$$\mathcal{R}_1\,(n) = \sum_{q\leqslant Q} \frac{1}{\varphi^4\left(\frac{d}{h_1}\right)\varphi^4\left(\frac{q}{h_2}\right)} \sum_{(a,q)=1} e_q\,(-na) \int\limits_{-\infty}^{\infty} e\,(-n\lambda) \prod_{i=1}^{4} H_i\,(a,q,\lambda)d\lambda + O\left(NQ^{-1}\right). \quad (15)$$

4. Особый ряд и особый интеграл задачи

Для исследования особого ряда нам необходимо изучить следующие суммы :

$$Z\,(q) := Z\,(q,\eta_1,...,\eta_4) := \sum_{(a,q)=1} e_q\,(-na) \prod_{i=1}^{4} G_i\,(a,\eta_i,q), \quad (16)$$

$$Y\,(q) := Y\,(q,\eta_1,...,\eta_4) := \sum_{a=1}^{q} e_q\,(-na) \prod_{i=1}^{4} G_i\,(a,\eta_i,q), \quad (17)$$

где η_i характер по модулю $q/h_2\,(q)$. (17) можно записать в следующем виде:

$$Y\,(q,\eta_1,...,\eta_4) = q \sum_{(q)} \eta_1\,(c_1)\cdots\eta_4\,(c_4). \quad (18)$$

Здесь запись $\sum\limits_{(q)}$ – означает суммирование по всем $c_1,\ \ldots\ ,c_4$, удовлетворяющим условиям

$$1 \leqslant c_1,\ \ldots\ ,c_4 \leqslant q,\ c_i \equiv b_i\,(\mathrm{mod}\,(d,q))\,,(c_i,q)=1, \sum_{i=1}^{4} c_i^2 \equiv n\,(\mathrm{mod} q). \quad (19)$$

Пусть $N\,(q)$- количество решений сравнения, удовлетворяющие условию (19). Из работы Jianya Liu и Ming-Chit Liu [3] следует, что если $n \equiv 4(\mathrm{mod}\,24)$ и n удовлетворяет условию (2), то для всех q выполняется неравенство $N\,(q) \geqslant 1$. Если все η_i являются главными характерами, тогда из (18) получим

$$Y\,(q,\eta_0,...,\eta_0) = qN\,(q)\,. \quad (20)$$

Кроме того, мы обозначим

$$A\,(q) := \varphi^{-4}\left(q(d,q)^{\odot}/h\,\right) Z\,(q,\eta_0,...,\eta_0)\,, \quad (21)$$

где $(d,q)^{\odot}$— имеет те же простые делители, что (d,q) и $(d,q)^{\odot} \| d$ что означает: если $p^{\alpha} \| (d,q)^{\odot}$ то $p^{\alpha} \| d$.

Лемма 4.1. *Для любого положительного целого числа q справедлива оценка* $\varphi^{-4}\left(\frac{dq}{h(q)}\right) Z(q) \ll \frac{h^4(q)}{d^4} q^{-1}\mathcal{L}^{-4}$, *где* $\mathcal{L} = \log\log \frac{dq}{h(q)}$

Доказательство. Предположим, что $q = \prod\limits_{p|q} p^{\beta_p}$ является разложением числа q на простые множители. Тогда, из леммы 4.1 работы [4], учитывая, что функция $Z(q)$ является мультипликативной функцией получим:

$$|Z(q)| = \prod_{p|q} \left| \sum_{(a,p^{\beta_p})=1} e\left(\frac{-na}{\beta_p}\right) \prod_{i=1}^{4} G_i\left(a, \eta_i, p^{\beta_p}\right) \right| \leqslant \prod_{p|q} \varphi\left(p^{\beta_p}\right) \prod_{i=1}^{4} 2(2,p) p^{\frac{\beta_p}{2}} \ll q^3.$$

Теперь принимая во вниманию, что $\varphi(q) \gg q/\log\log q$ получим утверждение леммы.

Если в лемме 4.4 работы [4] положить $\chi_1 = \ldots = \chi_4 = \chi_0$ и $\beta = 0$, то получим следующее.

Следствие 4.2. *Пусть $N(q)$, $A(q)$ и $\alpha = \alpha(p)$ определены соответственно, как в (21), (20) и лемме 4.4 из работы [4]. Тогда справедливы следующие утверждения:*
a) Если $p \geqslant 3$, $t \geqslant 1+\alpha$, то $A(p^t) = 0$ и если $t \geqslant 2 + \max\{2,\alpha\}$, то $A(2^t) = 0$;
b) Если $p \geqslant 3$, $t \geqslant \alpha$, то $p^t\varphi^{-4}(p^t) N(p^t) = p^{\alpha}\varphi^{-4}(p^{\alpha}) N(p^{\alpha})$;
c) $t \geqslant \alpha'$, $a' = 1 + \max\{2,\alpha\}$, то $2^t\varphi^{-4}(2^t) N(2^t) = 2^{\alpha'}\varphi^{-4}\left(p^{\alpha'}\right) N\left(p^{\alpha'}\right)$.

Далее, обозначим

$$s(p) := \sum_{0 \leqslant t < \theta + \max\{\theta, \alpha(p)\}} A(p^t) = \varphi^{-4}\left(\sigma\left(p^{\alpha(p)}\right) p^{\alpha(p)}\right) N\left(\sigma\left(p^{\alpha(p)}\right) p^{\alpha(p)}\right) \sigma\left(p^{\alpha(p)}\right) p^{\alpha(p)}. \quad (22)$$

Здесь $\sigma(q)$ определено в (2). Теперь упростим $s(p)$.

Лемма 4.3. *Справедливы следующие утверждения:*
a) если $p \neq 2$ и $\alpha = \alpha(p) \geqslant 1$, то $s(p) = \varphi^{-4}(p^{\alpha}) p^{\alpha}$;
b)

$$s(2) = \begin{cases} 2^3, & \text{если } \alpha(2) = 1; \\ \varphi^{-5}\left(2^{\alpha(2)}\right) 2^{\alpha(2)+1}, & \text{если } \alpha(2) \geqslant 2. \end{cases}$$

Поэтому $s(2) = \varphi^{-5}(2^{\alpha}) 2^{\alpha}\sigma(d)$
c) если $p \neq 2$, $p \nmid d$, то $s(p) = 1 + A(p)$, если, $2 \nmid d$ то $s(2) = 1 + A(2) + A(2^2) + A(2^3)$.

Доказательство. (a) В силу (22) имеем

$$s(p) = \sum_{0 \leqslant t < \theta + \max\{\theta, \alpha(p)\}} A(p^t) = \sum_{0 \leqslant t \leqslant \theta + \max\{\theta, \alpha(p)\}} \varphi^{-4}\left(p^t (d, p^t)^{\odot}/h\right) Z\left(p^t, \eta_0, \ldots, \eta_0\right) =$$

$$= \sum_{0 \leqslant t \leqslant \theta + \max\{\theta, \alpha(p)\}} \varphi^{-4}(p^{\alpha}) Z(p^t) = \varphi^{-4}(p^{\alpha}) p^{\alpha}$$

b) Аналогичными рассуждениями при $t \leqslant \alpha$ получим, что $A(2^t) = \varphi^{-4}(2^{\alpha}) Z(2^t) = \varphi^{-4}(2^{\alpha}) \varphi(2^t)$. Если $\alpha = 1$ остаётся рассмотреть случаи $t = 2, 3$. Поскольку $\sum\limits_{(a,p^t)=1} = \sum\limits_{a=1}^{p^t} - \sum\limits_{\substack{a=1 \\ p|a}}^{p^t}$, то

$$A(2^t) = \varphi^{-4}(2^t) \sum_{(a,2^t)=1} e\left(\frac{-na}{2^t}\right) \prod_{i=1}^{4} \left(\sum_{\substack{c_i=1 \\ c_i \equiv b_i (\bmod 2)}}^{2^t} e\left(\frac{ac_i^2}{2^t}\right) \right) =$$

$$= \varphi^{-4}\left(2^{t}\right)\left(2^{t}N\left(2^{t}\right)-2^{t-1}2^{4}N\left(2^{t-1}\right)\right)=\varphi^{-4}\left(2^{t}\right)2^{t}N\left(2^{t}\right)-\varphi^{-4}\left(2^{t-1}\right)2^{t-1}N\left(2^{t-1}\right),$$

где $N\left(2^{t}\right)$ обозначает количество решений $\begin{cases} c_1^2+...+c_4^2 \equiv n\left(\bmod 2^{t}\right) \\ c_i \equiv b_i\left(\bmod 2\right)\end{cases}$ системы, которые удовлетворяют условию $1 \leqslant c_i \leqslant 2^{t}$, $(c_i,2)=1$.

Не посредственным вычислением видим, что $N\left(2^{3}\right)=2^{8}$, $N\left(2\right)=1$, то есть количество чисел c_i, удовлетворяющих условиям $1\leqslant c_i \leqslant 2^{3}$ и $\left(c_i,2^{3}\right)=1$, равно $\varphi\left(2^{3}\right)=2^{2}=4$. Поскольку в сравнение $c_1^2+...+c_4^2\equiv n\left(\bmod 2^{t}\right)$ число неизвестных равно четырём, перебором возможных значений c_i и их комбинируя находим, что число решений данного сравнения равно $4^{4}=2^{8}$. Сравнение $c_i\equiv b_i\left(\bmod 2\right)$ при условии $(c_i,2)=1$ имеет единственное решение, следовательно, мы учли значения c_i только один раз, поэтому $N\left(2^{3}\right)=2^{8}$. Аналогичными рассуждениями можно прийти к тому, что $N\left(2\right)=1$. Тогда, учитывая, что при $t\leqslant\alpha$ выполняется $A\left(2^{t}\right)=\varphi^{-4}\left(2^{\alpha}\right)Z\left(2^{t}\right)=\varphi^{-4}\left(2^{\alpha}\right)\varphi\left(2^{t}\right)$, мы имеем:
при $t=0$, то $A\left(2^{0}\right)=\varphi^{-4}\left(2^{\alpha}\right)Z\left(2^{0}\right)=\varphi^{-4}\left(2^{\alpha}\right)\varphi\left(2^{0}\right)=\varphi^{-4}\left(2^{1}\right)\varphi\left(2^{0}\right)=1$,
при $t=1$, то $A\left(2^{1}\right)=\varphi^{-4}\left(2^{1}\right)\varphi\left(2^{1}\right)=\varphi^{-4}\left(2^{1}\right)\varphi\left(2^{1}\right)=1$.
если учитывать, что при $t>\alpha$ выполняется $A\left(2^{t}\right)=\varphi^{-4}\left(2^{t}\right)2^{t}N\left(2^{t}\right)-\varphi^{-4}\left(2^{t-1}\right)2^{t-1}N\left(2^{t-1}\right)$, то получаем
$t=2$, $A\left(2^{2}\right)=\varphi^{-4}\left(2^{2}\right)2^{2}N\left(2^{2}\right)-\varphi^{-4}\left(2^{1}\right)2^{1}N\left(2^{1}\right)$,
$t=3$, $A\left(2^{3}\right)=\varphi^{-4}\left(2^{3}\right)2^{3}N\left(2^{3}\right)-\varphi^{-4}\left(2^{2}\right)2^{2}N\left(2^{2}\right)$.
Обобщая это, получаем следующую оценку для $s\left(2\right)$.
$s\left(2\right)=1+A\left(2\right)+A\left(2^{2}\right)+A\left(2^{3}\right)=1+1-\varphi^{-4}\left(2\right)2N\left(2\right)+\varphi^{-4}\left(2^{3}\right)2^{3}N\left(2^{3}\right)=2-2+\frac{2^{3}2^{8}}{\left(2^{2}\right)^{4}}=2^{3}$.
Если $\alpha>1$, остается рассмотреть случай $t=\alpha+1$. В этом случае имеем:

$$A\left(2^{\alpha+1}\right)=\varphi^{-4}\left(2^{\alpha+1}\right)\sum_{\left(a,2^{\alpha+1}\right)=1}e\left(\frac{-na}{2^{\alpha+1}}\right)\prod_{i=1}^{4}\left(\sum_{\substack{c_i=1\\ c_i\equiv b_i(\bmod 2^{\alpha})}}^{2^{\alpha+1}}e\left(\frac{ac_i^2}{2^{\alpha+1}}\right)\right)=$$

$$\varphi^{-4}\left(2^{\alpha+1}\right)\left(2^{\alpha+1}N\left(2^{\alpha+1}\right)-2^{4}Y\left(2^{\alpha}\right)\right)=\varphi^{-4}\left(2^{\alpha+1}\right)2^{\alpha+1}N\left(2^{\alpha+1}\right)-\varphi^{-4}\left(2^{\alpha}\right)2^{\alpha},$$

где $N\left(2^{\alpha+1}\right)$ обозначает количество решений $\begin{cases} c_1^2+...+c_4^2\equiv n\left(\bmod 2^{\alpha+1}\right)\\ c_i\equiv b_i\left(\bmod 2^{\alpha}\right)\end{cases}$ системы, которые удовлетворяют условию $1\leqslant c_i\leqslant 2^{\alpha+1}$, $(c_i,2)=1$. Следуя тем же рассуждениям, что при вычислении $N\left(2^{3}\right)$, мы получим $N\left(2^{\alpha+1}\right)=2^{4}$. Если учитывать, что при $t\leqslant\alpha$ выполняется $A\left(2^{t}\right)=\varphi^{-4}\left(2^{\alpha}\right)Z\left(2^{t}\right)=\varphi^{-4}\left(2^{\alpha}\right)\varphi\left(2^{t}\right)$, то
$t=0$, $A\left(2^{0}\right)=\varphi^{-4}\left(2^{\alpha}\right)Z\left(2^{0}\right)=\varphi^{-4}\left(2^{\alpha}\right)\varphi\left(2^{0}\right)=\varphi^{-4}\left(2^{\alpha}\right)$,
$t=1$, $A\left(2^{1}\right)=\varphi^{-4}\left(2^{\alpha}\right)Z\left(2^{1}\right)=\varphi^{-4}\left(2^{\alpha}\right)\varphi\left(2^{1}\right)=\varphi^{-4}\left(2^{\alpha}\right)$,
$t=2$, $A\left(2^{2}\right)=\varphi^{-4}\left(2^{\alpha}\right)Z\left(2^{2}\right)=\varphi^{-4}\left(2^{\alpha}\right)\varphi\left(2^{2}\right)=\varphi^{-4}\left(2^{\alpha}\right)\left(2^{2}-2\right)$,
$t=3$, $A\left(2^{3}\right)=\varphi^{-4}\left(2^{\alpha}\right)Z\left(2^{3}\right)=\varphi^{-4}\left(2^{\alpha}\right)\varphi\left(2^{3}\right)=\varphi^{-4}\left(2^{\alpha}\right)\left(2^{3}-2^{2}\right)$,
...
$t=\alpha-1$, $A\left(2^{\alpha-1}\right)=\varphi^{-4}\left(2^{\alpha}\right)Z\left(2^{\alpha-1}\right)=\varphi^{-4}\left(2^{\alpha}\right)\varphi\left(2^{\alpha-1}\right)=\varphi^{-4}\left(2^{\alpha}\right)\left(2^{\alpha-1}-2^{\alpha}\right)$,
$t=\alpha$, $A\left(2^{\alpha}\right)=\varphi^{-4}\left(2^{\alpha}\right)Z\left(2^{\alpha}\right)=\varphi^{-4}\left(2^{\alpha}\right)\varphi\left(2^{\alpha}\right)=\varphi^{-4}\left(2^{\alpha}\right)\left(2^{\alpha}-2^{\alpha-1}\right)$,
Если учитывать, что при $t>\alpha$ выполняется
$A\left(2^{t}\right)=\varphi^{-4}\left(2^{t}\right)2^{t}N\left(2^{t}\right)-\varphi^{-4}\left(2^{t-1}\right)2^{t-1}N\left(2^{t-1}\right)$, то получаем
$t=\alpha+1$, $A\left(2^{\alpha+1}\right)=\varphi^{-4}\left(2^{\alpha+1}\right)2^{\alpha+1}N\left(2^{\alpha+1}\right)-\varphi^{-4}\left(2^{\alpha}\right)2^{\alpha}$
Обобщая это, получаем следующую оценку для $s\left(2\right)$.
$s\left(2\right)=\varphi^{-4}\left(2^{\alpha}\right)+A\left(2\right)+...+A\left(2^{\alpha}\right)+A\left(2^{\alpha+1}\right)=\varphi^{-4}\left(2^{\alpha}\right)2^{\alpha+1}$.
Утверждение (c) непосредственно следует из равенства (22) и следствия 4.2. В самое деле. Если $p\neq 2$, $p\nmid d$, то $s\left(p\right)=1+A\left(p\right)$, $0\leqslant t<\theta+\max\left\{\theta,\alpha\left(p\right)\right\}$, $\theta=1+\left[2/p\right]=1+0=1$, $0\leqslant t<1+\max\left\{1,\alpha\right\}$. По следствию 4.2 (a), при $p\geqslant 3$, $t\geqslant 1+\alpha$, так как $A\left(p^{t}\right)=0$, имеем:

$s\left(p\right)=\sum\limits_{0\leqslant t<1+\alpha}A\left(p^{t}\right)=1+A\left(p\right)$. Если $2\nmid d$, то $s\left(p\right)=1+A\left(p\right)$, $0\leqslant t<\theta+\max\left\{\theta,\alpha\left(p\right)\right\}$, $\theta=1+\left[2/2\,\right]=1+1=2$, $0\leqslant t<2+\max\left\{2,\alpha\right\}$. По следствию 4.2 (a), при $t\geqslant 2+\max\left\{2,\alpha\right\}$ так как $A\left(2^{t}\right)=0$, имеем: $s\left(2\right)=\sum\limits_{0\leqslant t<2+\max\{2,\alpha\}}A\left(2^{t}\right)=1+A\left(2\right)+A\left(2^{2}\right)+A\left(2^{3}\right)$

Лемма 4.4. *Справедливы следующие утверждения:*

(a) если $p\nmid d$ *то,* $A\left(p\right)<9p^{-2}$*;*

(b) $\prod\limits_{p}s\left(p\right)$ *абсолютно сходящийся и* $\prod\limits_{p}s\left(p\right)\gg\varphi^{-4}\left(d\right)d\sigma\left(d\right)$

(c) $\sum\limits_{\substack{q=1\\(q,r)=1}}^{\infty}\varphi^{-4}\left(dq/h\,\right)Z\left(q;\eta_{0},...,\eta_{0}\right)=\prod\limits_{p\nmid r}s\left(p\right)=\frac{\sigma(d/(d,r)\,)d/(d,r)}{\varphi^{4}(d/(d,r)\,)}\prod\limits_{\substack{p\nmid r\\p\nmid d}}s\left(p\right)$*;*

(d) $\sum\limits_{q\geqslant y}\varphi^{-4}\left(dq/h\,\right)Z\left(q;\eta_{0},...,\eta_{0}\right)\ll y^{-1}d^{-2}\log^{9}\left(y+1\right)$.

Доказательство. (a) Если $p\nmid d$, то $h\left(p\right)=1$. Пусть g квадратные невычет по модулю p. Тогда

$$A\left(p\right)=\varphi^{-4}\left(p\right)\sum_{a=1}^{p-1}\left(e\left(\frac{-na}{p}\right)\prod_{i=1}^{4}\left(\sum_{c_{i}=1}^{p-1}e\left(\frac{ac_{i}^{2}}{p}\right)\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\varphi^{-4}\left(p\right)\sum_{a=1}^{p-1}\left(e\left(\frac{-na^{2}}{p}\right)\prod_{i=1}^{4}C_{p}\left(a^{2}\right)+e\left(\frac{-nga^{2}}{p}\right)\prod_{i=1}^{4}C_{p}\left(ga^{2}\right)\right).$$

Здесь $C_{p}\left(a\right)=\sum\limits_{c=1}^{p-1}e\left(\frac{ac^{2}}{p}\right)$. Далее, рассуждаю как доказательстве леммы 9 в работы [10] находим

$$A\left(p\right)=\frac{1}{2}\varphi^{-4}\left(p\right)\begin{cases}2\left(p-1\right)\left(\lambda^{4}+6\lambda^{2}+1\right), & \text{если } p\,|n,\\ -2\left(\lambda^{4}+10\lambda^{2}+1\right), & \text{если } p\nmid n \text{ и } \left(\dfrac{n}{p}\right)=1,\\ 2\left(3\lambda^{4}-2\lambda^{2}-1\right) & \text{если } p\nmid n \text{ и } \left(\dfrac{n}{p}\right)=-1,\end{cases}$$

где $\left(\frac{n}{p}\right)$ – символ Лежандра и

$$\lambda=\begin{cases}\sqrt{p}\,, & \text{если}\, p\equiv 1\left(\mathrm{mod}4\right),\\ 0\,, & \text{если } p\equiv 2\left(\mathrm{mod}4\right),\\ i\sqrt{p}, & \text{если } p\equiv -1\left(\mathrm{mod}4\right).\end{cases}$$

Следовательно, при $p\neq 2$, $p\nmid d$ выполняется неравенство $\left|A\left(p\right)\right|<9p^{-2}$.

(b) На основании леммы 4.3 и леммы 4.4 (a), имеем;
$\prod\limits_{p}s\left(p\right)=\prod\limits_{p|d}s\left(p\right)\prod\limits_{p\nmid d}\left(1+A\left(p\right)\right)\gg\sigma\left(d\right)\varphi^{-4}\left(d\right)d$.

Сходимость доказывается аналогичным образом.

(c) Пусть $q=q'q''$, $(q',\,q'')=1$ и $q'|\,d^{\odot}$, $(q'',d)=1$. В силу мультипликативности $Z\left(q\right)$ имеем

$$\sum_{\substack{q=1\\(q,r)=1}}^{\infty}\varphi^{-4}\left(dq/h\,\right)Z\left(q\right)=\left(\sum_{\substack{q'=1,\,(q',r)=1\\q'|d^{\odot}}}^{\infty}\varphi^{-4}\left(dq'/h\,\right)Z\left(q'\right)\right)\left(\sum_{\substack{q''=1,\,(q'',r)=1\\(q'',d)=1}}^{\infty}\varphi^{-4}\left(dq''/h\,\right)Z\left(q''\right)\right).$$

Отсюда используя следствия 4.2, равенства (22) и леммы 4.3 получим утверждение c).

(d) Пусть $\delta=(\log(y+1))^{-1}$. Поскольку $1+nx\ll(1-x)^{-n}$ и $\zeta(1+\delta)\sim\delta^{-1}$ находим

$$\sum_{q\geqslant y}\varphi^{-4}(dq/h)Z(q)\leqslant\sum_{q\geqslant y}|A(q)|\ll y^{-1}\frac{d}{\varphi^4(d)}\prod_{p|d}p^{\alpha(p)}\prod_p\left(1-p^{-1-\delta}\right)^{-9}\ll y^{-1}\frac{d^2}{\varphi^4(d)}\delta^{-9}.$$

Лемма 4.5. *Пусть* $r_i|\left(\frac{dq}{h}\right)$, $i=1,...,4$ *и* $\chi_i(\mathrm{mod}r_i)=\zeta_i\left(\mathrm{mod}\left(r_i,\frac{q}{h_1}\right)\right)\eta_i\left(\mathrm{mod}\left(r_i,\frac{q}{h_2}\right)\right)$ *все примитивные характеры, и пусть* $r=[r_1,...,r_4]$, *тогда справедливы следующие утверждения:*

(a) $\sum\limits_{\substack{q\leqslant Q\\ r|(dq/h)}}\left|\varphi^{-4}(dq/h)Z(q,\eta_1\eta_0,...,\eta_4\eta_0)\prod\limits_{i=1}^4\zeta_i\zeta_0(b_i)\right|\ll r^{-1}\mathcal{L}^{-4}$;

(b) Пусть $\alpha(p)$ *определено так же, как в лемме 4.4 из работе [4], и пусть* $r_i=r_i^{(1)}r_i^{(2)}$, $\left(r_i^{(1)},r_i^{(2)}\right)=1$, *причем выполняется* $p^\beta\| r_i^{(1)}$, *тогда* $\beta\leqslant\alpha(p)$, *а если* $p^\beta\| r_i^{(2)}$, *то* $\beta\leqslant\alpha(p)$. *Если* $d=d_1d_2$, $(d_1,d_2)=1$, $p^\beta\| r$ *и* $p|d_1$, *то* $\beta\leqslant\alpha(p)$. *Если* $p^\beta\| r$ *и* $p|d_2$, *то* $\beta>\alpha(p)$. *Если* $r^{(1)}=\left[r_1^{(1)},...,r_4^{(1)}\right]$ *и* $\chi_i(\mathrm{mod}r_i)=\chi_i^{(1)}\left(\mathrm{mod}r_i^{(1)}\right)\chi_i^{(2)}\left(\mathrm{mod}r_i^{(2)}\right)$, *то получаем:*

$$\mathcal{F}:=\sum_{\substack{q\leqslant Q\\ r|(dq/h)}}\varphi^{-4}\left(\frac{dq}{h}\right)Z(q,\eta_1\eta_0,...,\eta_4\eta_0)\prod_{i=1}^4\zeta_i\zeta_0(b_i)=$$

$$=\prod_{i=1}^4\chi_i^{(2)}(b_i)(\mathrm{mod}r_2)\frac{\sigma(d_1)d_1}{\varphi^4(d_1)}\cdot\frac{Y\left(\sigma\left(r^{(1)}\right)r^{(1)}\right)}{\varphi^4\left(\sigma\left(r^{(1)}\right)r^{(1)}\right)}\prod_{\substack{p\nmid d\\ p\nmid r}}s(p)+O\left(Q^{-1}\log^9Q\right).$$

Доказательство. Утверждения (a) непосредственно следует из леммы 4.1. Докажем (b). Воспользуемся мультипликативности $Z(q)$ и $Y(q)$. Пусть $d=d'd''$, $q=q'q''$, $(d'',r)=1$, $(q'',r)=1$ и $d'|r^{\odot}$, $q'|r^{\odot}$. Здесь $q|r^{\odot}$ означает, что каждый простой множитель q является делителем r. Для удобства обозначим $h''=h''(q)$, $h'=h'(q)$, $h''_i=h''_i(q)$, $h'_i=h'_i(q)$. В соответствии с (10) и тем, что $r_i|(dq/h)$, имеем:

$$\mathcal{F}:=\sum_{\substack{q'\leqslant Q,\ r'|d'q'/h'\\ q'|r^\infty,\ d'|r^\infty}}\varphi^{-4}\left(\frac{d'q'}{h'}\right)Z\left(q',\eta_1\eta_0,...,\eta_4\eta_0\right)\prod_{i=1}^4\zeta_i\zeta_0(b_i)\times$$

$$\times\sum_{\substack{q''\leqslant Q/q'\\ (q'',r)=1,\,(d'',r)=1}}\varphi^{-4}\left(\frac{d''q''}{h''}\right)Z\left(q'',\eta_0,...,\eta_0\right)=:\mathcal{F}_1\mathcal{F}_2. \qquad (23)$$

В силу (c) и (d) леммы 4.4, имеем:

$$\mathcal{F}_2=\left(\sum_{\substack{q''=1\\ (q'',r)=1,\\ (d'',r)=1}}^{\infty}-\sum_{q''\geqslant Q/q'}\right)\frac{1}{\varphi^4\left(\frac{d''q''}{h''}\right)}Z\left(q'',\eta_0,...,\eta_0\right)=\frac{\sigma(d'')d''}{\varphi^4(d'')}\prod_{\substack{p\nmid r\\ p\nmid d''}}s(p)+O\left(\frac{q'\log^9Q}{Qd''^2}\right). \qquad (24)$$

Таким образом, согласно лемме 4.1 и пункту (a) леммы 4.5, из равенства (23) и (24) следует

$$\mathcal{F}=\mathcal{F}_1\varphi^{-4}\left(d''\right)\sigma\left(d''\right)d''\prod_{\substack{p\nmid r\\ p\nmid d''}}s\left(p\right)+O\left(\sum_{\substack{q'\leqslant Q\\ r|d'q'/h'}}q'Q^{-1}\left(d''\right)^{-2}\log^9 Q\left(q'\right)^{-1}\mathcal{L}^{-4}\right)=$$

$$=\mathcal{F}_1\varphi^{-4}\left(d''\right)\sigma\left(d''\right)d''\prod_{\substack{p\nmid r\\ p\nmid d''}}s\left(p\right)+O\left(Q^{-1}\left(d''\right)^{-2}\tau\left(d\right)\log^9 Q\right). \tag{25}$$

Поскольку далее в доказательстве будет показано, что число q' будет меньше функции числа делителей $\tau\left(d\right)$. Предположим, что $q'=m'm''$, где $\left(m'',d\right)=1$ и $m'|\left(d'\right)^{\odot}$, а также $r_i={r'}_i{r''}_i$, при этом $\left(r'',d\right)=1$ и $r'|\left(d'\right)^{\odot}$. Понятно, что $m'|\left(r,d\right)^{\odot}$ и выполняются следующие соотношения: $\zeta_i\left(\operatorname{mod}\left(r_i,q'/{h'}_1\right)\right)={\zeta'}_i\left(\operatorname{mod}\left({r'}_i,q'/{h'}_1\right)\right)$, $\eta_i\left(\operatorname{mod}\left(r_i,q'/{h'}_2\right)\right)=$
$={\eta'}_i\left(\operatorname{mod}\left({r'}_i,m'/h_2\left(m'\right)\right)\right){\eta''}_i\left(\operatorname{mod}\left({r''}_i,m''/h_2\left(m''\right)\right)\right)$ Воспользовавшись тем, что $Z\left(q\right)$ является мультипликативной функцией, получаем:

$$\mathcal{F}_1=\sum_{\substack{m''\leqslant Q\\ r''|m''}}\varphi^{-4}\left(m''\right)Z\left(m'',{\eta''}_1,...,{\eta''}_4\right)\prod_{i=1}^{4}\zeta_i\zeta_0\left(b_i\right)\times$$

$$\times\sum_{\substack{q'\leqslant Q\\ r'|m'd'/h'}}\varphi^{-4}\left(\frac{d'q'}{h'}\right)Z\left(m',{\eta'}_1\eta_0,...,{\eta'}_4\eta_0\right)\prod_{i=1}^{4}{\zeta'}_i\zeta_0\left(b_i\right)=:G_1G_2. \tag{26}$$

В рассуждениях леммы 3.8 работы [15], используя (15), и на основании леммы 4.4 из работы [4], получаем, что если выполняется условие $\sigma\left(r''\right)r''\leqslant Q$, то $G_1=\varphi^{-4}\left(\sigma\left(r''\right)r''\right)Y\left(\sigma\left(r''\right)r''\right)$. В действительности, мы можем предположить, что $\sigma\left(r\right)r\leqslant Q$ если же $\sigma\left(r\right)r>Q$, то, на основании леммы 4.1 и части (a) леммы 4.5, получаем оценки:
$\mathcal{F}_1\ll Q^{-1}\mathcal{L}$, $\varphi^{-4}\left(\sigma\left(r''\right)r''\right)Y\left(\sigma\left(r''\right)r''\right)G_2\ll\left(r'r''\right)^{-1}\mathcal{L}^2\ll Q^{-1}\mathcal{L}^2$. Из этого и из (26) следует

$$\mathcal{F}_1=\varphi^{-4}\left(\sigma\left(r''\right)r''\right)Y\left(\sigma\left(r''\right)r''\right)G_2+O\left(Q^{-1}\mathcal{L}^2\right) \tag{27}$$

Кроме того, мы можем предположить, что $\sigma\left(r'\right)r'\leqslant Q/m''$; в противном случае, если $\sigma\left(r'\right)r'>Q/m''$, то согласно части (a) леммы 4.5, имеем $G_2\ll Q^{-1}(m'')^{-1}\mathcal{L}$. Тогда, в силу леммы 4.1, $\mathcal{F}_1\ll\sum\limits_{\substack{m''\leqslant Q\\ r''|m''}}Q^{-1}\mathcal{L}^2\ll Q^{-1}\mathcal{L}^2$, поскольку, как и в доказательстве леммы 3.8 из работы [15], $m''=ur''$. Следовательно, сумма по $\sigma\left(r'\right)r'>Q/m''$ входит в остаточный член.

Теперь упростим G_2 при условии $\sigma\left(r'\right)r'\leqslant Q/m''$. Поскольку $m'|\left(d'\right)^{\odot}$ и $m'|\left(r'\right)^{\odot}$ являются выражениями для $m'|\left(r,d\right)^{\odot}|r^{\odot}$,$d^{\odot}$, мы можем записать $d'=p_1^{\alpha_1}\cdots p_t^{\alpha_t}$ $r'=p_1^{\beta_1}\cdots p_t^{\beta_t}$, $m'=p_1^{s_1}\cdots p_t^{s_t}$. Здесь $p_i^{\alpha_i}\|\,d$, $p_i^{\beta_i}\left\|\,r\right.$ va $\alpha_i,\beta_i>0$. Из условия $p_i^{\beta_i}\left|\frac{p_i^{s_i}p_i^{\alpha_i}}{h(p_i^{s_i})}\right.$, если $\beta_i>\alpha_i$, то $s_i>\beta_i$; если $\beta_i\leqslant\alpha_i$, то $s_i\geqslant 0$. Таким образом, мы получаем ${\zeta'}_i\left(\operatorname{mod}\left({r'}_i,\,d'|\,h_1\left(m'\right)\right)\right)=$
$=\prod\limits_{\substack{\beta_j\leqslant\alpha_j\\ s_j\leqslant\alpha_j}}\zeta_{ij}\left(\operatorname{mod}p_j^{\beta_j}\right)$, ${\eta'}_i\left(\operatorname{mod}\left(r_i,\,m'|\,h_2\left(m'\right)\right)\right)=\prod\limits_{\substack{\beta_j\leqslant\alpha_j\\ s_j>\alpha_j}}\eta_{ij}\left(\operatorname{mod}p_j^{\beta_j}\right)\prod\limits_{\beta_j>\alpha_j}\eta_{ij}\left(\operatorname{mod}p_j^{\beta_j}\right)$ Пусть $\prod\limits_{j=1}^{u}\chi_{ij}\left(\operatorname{mod}p_j^{\beta_j}\right)={\zeta'}_i\,{\eta'}_i\left(\operatorname{mod}{r'}_i\right)$, тогда можно записать

$$\chi_{ij}=\begin{cases}\zeta_{ij},\ \text{если}\ \beta_j\leqslant\alpha_j,\ \ s_j\leqslant\alpha_j,\\ \eta_{ij},\ \text{если}\ \beta_j\leqslant\alpha_j,\ \ s_j>\alpha_j,\\ \eta_{ij},\ \text{если}\ \beta_j>\alpha_j.\end{cases}$$

На основании лемм 4.2 и 4.4 работы [4], а также равенства (26), получаем

$$G_2 = W_2 \prod_{\substack{p_j \neq 2 \\ \beta_j > \alpha_j}} \varphi^{-4}\left(p_j^{\beta_j}\right) Y\left(p_j^{\beta_j};\, \chi_{1j}\eta_0, ..., \chi_{4j}\eta_0\right) \prod_{\substack{p_j \neq 2 \\ \beta_j \leqslant \alpha_j}} W_{p_j} \tag{28}$$

Здесь $W_{p_j} = \varphi^{-4}\left(p_j^{\alpha_j}\right)\left(\sum\limits_{t=0}^{\alpha_j} Z\left(p_j^t;\, \eta_0, ..., \eta_0\right) \prod\limits_{i=1}^{4} \chi_{ij}\zeta_0\left(b_i\right)\right)$ и в силу пунктов (b) и (c) леммы 4.4 работы [4] имеем

$$W_2 = \begin{cases} 1, & \text{если } 2 \nmid (r,d)\,, \\ \varphi^{-4}\left(2^{\beta_2+1}\right) Y\left(2^{\beta_2+1}\right), & \text{если } \ 2|\,(r,d)\,,\ \beta_2 > \alpha_2 > 0, \\ \varphi^{-4}\left(2\right)\left(\sum\limits_{t=0}^{1} Z\left(2^t;\, \eta_0, ..., \eta_0\right) \prod\limits_{i=1}^{4} \chi_{i2}\zeta_0\left(b_i\right)\right) + & \\ \quad + \sum\limits_{t=2}^{3} \varphi^{-4}\left(2^t\right) Z\left(2^t;\, \chi_{12}\eta_0, ..., \chi_{42}\eta_0\right), & \text{если } \ 2|\,(r,d)\,,\ \beta_2 \leqslant \alpha_2 = 1, \\ \varphi^{-4}\left(2^{\alpha}\right)\left(\sum\limits_{t=0}^{\alpha} Z\left(2^t;\, \eta_0, ..., \eta_0\right) \prod\limits_{i=1}^{4} \chi_{i2}\zeta_0\left(b_i\right)\right) + & \\ \quad + \varphi^{-4}\left(2^{\alpha+1}\right) Z\left(2^{\alpha+1};\, \chi_{12}\eta_0, ..., \chi_{42}\eta_0\right), & \text{если } \ 2|\,(r,d)\,,\ \beta_2 \leqslant \alpha_2,\ \alpha_2 > 1. \end{cases}$$

Мы оцениваем W_2 при $2|\,(r,d)$, $\beta_2 \leqslant \alpha_2$ и W_{p_j} при $\beta_j \leqslant \alpha_j$. Рассуждая аналогично доказательству леммы 4.4 из работы [4] и исходя из равенства (11), получаем, что при $t \leqslant \alpha\left(p\right)$ и $(b_i, d) = 1$ выполняется $\prod\limits_{i=1}^{4} \zeta_{ij}\zeta_0\left(b_i\right) Z\left(p_j^t\right) = \prod\limits_{i=1}^{4} \chi_{ij}\left(b_i\right)\varphi\left(p^t\right)$. Тогда при $W_{p_j} = \prod\limits_{i=1}^{4} \chi_{ij}\left(b_i\right)\varphi^{-4}\left(p^{\alpha(p)}\right)p^{\alpha(p)}$ и $2|\,(r,d)$ имеем следующее равенство:

$$Z\left(2^{\alpha_2+1}\right) = \sum_{\left(\alpha,\, 2^{\alpha_2+1}\right)=1} e\left(-\frac{na}{2^{\alpha_2+1}}\right) \prod_{i=1}^{4} e\left(\frac{ac_i^2}{2^{\alpha_2+1}}\right) \chi_{i2}\eta_0\left(c_i\right) =$$

$$= Y\left(2^{\alpha_2+1}\right) - 2^{\alpha_2}2^4 \prod_{i=1}^{4} \chi_{i2}\left(b_i\right) = \left(2^{\alpha_2+1}N\left(2^{\alpha_2+1}\right) - 2^{\alpha_2+4}\right) \prod_{i=1}^{4} \chi_{i2}\left(b_i\right).$$

Таким образом, при $\alpha_2 > 1$ из доказательства утверждения (b) леммы 4.3 видно, что $N\left(2^{\alpha_2+1}\right) = 2^4$ и следовательно, получаем $W_2 = \prod\limits_{i=1}^{4} \chi_{i2}\left(b_i\right)\varphi^{-4}\left(2^{\alpha_2}\right)2^{\alpha_2+1}$. Если $\alpha_2 = 1$, то $\beta_2 = 1$, поскольку $0 < \beta_2 \leqslant \alpha_2$ и следовательно,

$$W_2 = \varphi^{-4}\left(2\right)\left(\sum_{t=0}^{1} Z\left(2^t;\, \eta_0, ..., \eta_0\right) \prod_{i=1}^{4} \chi_{i2}\left(b_i\right)\right) + \sum_{t=2}^{3} \varphi^{-4}\left(2^t\right) Z\left(2^t;\, \chi_{12}\eta_0, ..., \chi_{42}\eta_0\right) =$$

$$= \prod_{i=1}^{4} \chi_{i2}\left(b_i\right)\left(1 + A\left(2\right) + A\left(2^2\right) + A\left(2^3\right)\right) = 2^3 \prod_{i=1}^{4} \chi_{i2}\left(b_i\right)$$

Последнее равенство следует из доказательства утверждения (b) леммы 4.3. Поэтому при $2 \nmid (r,d)$ получаем

$$W_2 = \begin{cases} \prod\limits_{i=1}^{4} \chi_{i2}\left(b_i\right) \dfrac{\sigma\left(2^{\alpha_2}\right)2^{\alpha_2}}{\varphi^4\left(2^{\alpha_2}\right)}, & \text{если } \alpha_2 \geqslant \beta_2, \\ \varphi^{-4}\left(2^{\beta_2+1}\right) Y\left(2^{\beta_2+1}\right), & \text{если } \alpha_2 < \beta_2. \end{cases} \tag{29}$$

Тогда, на основании равенств (25)-(29), получаем равенство
$\mathcal{F}=\prod\limits_{i=1}^{4}\chi_i^{(2)}\left(b_i\right)\left(\mathrm{mod} r_2\right)\frac{\sigma(d_1)d_1}{\varphi^4(d_1)}\cdot\frac{Y\left(\sigma\left(r^{(1)}\right)r^{(1)}\right)}{\varphi^4\left(\sigma\left(r^{(1)}\right)r^{(1)}\right)}\prod\limits_{\substack{p\nmid d\\ p\nmid r}}s\left(p\right)+O\left(Q^{-1}\log^9 Q\right)$. Здесь остаточный член следует из леммы 4.4 работы [4] и пункта (a) леммы 4.5.

Лемма 4.6. *Для любых комплексных чисел ρ_i, $0<\mathrm{Re}\,\rho_i\leqslant 1$, $i=1,...,4$, выполняется следующее равенство*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}e\left(-n\eta\right)\prod_{i=1}^{4}\left(\int\limits_{L_1}^{N_1}x^{\rho_i-1}e\left(\eta x^2\right)dx\right)d\eta=\frac{N}{2^4}\int\limits_{D}\prod_{i=1}^{4}\left(Nx_i\right)^{(\rho_i-1)/2}x_i^{-1/2}dx_1...dx_3. \tag{30}$$

где $x_4:=nN_1^{-2}-\sum\limits_{i=1}^{3}x_i$ *и*

$$D:=\left\{(x_1,...,x_3):L/N\leqslant x_1,x_2,x_3,x_4\leqslant 1\right\}. \tag{31}$$

Кроме того, имеет место равенство

$$\int\limits_{D}\left(\prod_{i=1}^{4}x_i^{-1/2}\right)dx_1dx_2dx_3\gg 1. \tag{32}$$

Доказательство. Доказывается путем рассуждений, аналогичных доказательству леммы 4.9 из работы [4].

5. Оценка интеграла $\mathcal{R}_1(n)$ и завершение доказательства теоремы

Теперь постараемся получить необходимую нижнюю оценку для $\mathcal{R}_1(n)$. Как видно из (13), произведение $\prod\limits_{i=1}^{4}H_i\left(a,q,\lambda\right)$ представляет собой сумму из 3^4 слагаемого. Эти слагаемые мы разобьём на следующие три категории.
(C1): $\prod\limits_{i=1}^{4}G_i(a,\bar{\eta}_0,q)I(\lambda)$ слагаемое;
(C2): 65 слагаемых, в каждом из которых множитель $F_i\left(a,q,\lambda\right)$ входит по крайней мере один раз;
(C3): 15 оставшихся слагаемых.
Для удобства обозначим

$$\mathcal{T}_i=\sum_{q\leqslant Q}\varphi^{-4}\left(dq/h\right)\sum_{(a,q)=1}e_q\left(-n\alpha\right)\int\limits_{-\infty}^{\infty}e\left(-n\lambda\right)\{\text{ сумма слагаемых в }\ (C_i)\}\,d\lambda, \tag{33}$$

при $i=1,2,3$. На основании (15) имеем

$$\mathcal{R}_1\left(n\right)=\mathcal{T}_1+\mathcal{T}_2+\mathcal{T}_3+\left(NQ^{-1}\right) \tag{34}$$

Мы будем выбирать $m_1,m_2,...$ различных чисел из множества $\{1,\,...\,,4\}$. Введём следующие обозначения:

$$P\left(m_1,m_2,...\right):=N2^{-4}\int\limits_{D}\left(\prod_{i=1}^{4}x_i^{-1/2}\right)\left(Nx_{m_1}\right)^{(\tilde{\beta}-1)/2}\left(Nx_{m_2}\right)^{(\tilde{\beta}-1)/2}...\,dx_1dx_2dx_3, \tag{35}$$

и

$$\Delta(m_1, m_2, ...) := \tilde{\chi}(n_{m_1})\,\tilde{\chi}(n_{m_2})\,... \tag{36}$$

Здесь область D определяется с помощью (31), а $\tilde{\chi}$ и $\tilde{\beta}$ обозначают, соответственно, исключительные характеры и исключительные нули. Пусть

$$P_0 := N2^{-4}\int\limits_D \left(\prod_{i=1}^{4} x_i^{-1/2}\right) dx_1 dx_2 dx_3. \tag{37}$$

Из (32), (35) и (37) следует справедливость равенства

$$|P(m_1, m_2, ...)| \leqslant P_0 \ll N. \tag{38}$$

Лемма 5.1. *Справедливо следующее равенство.*

$$\mathcal{T}_1 = \varphi^{-4}(d)\,\sigma(d)\,d\prod_{p\nmid d} s(p)\,P_0 + O\left(Nd^{-2}Q^{-1}\log^9 Q\right).$$

Доказательство. На основании (33)

$$\mathcal{T}_1 = \sum_{q\leqslant Q}\varphi^{-4}(dq/h\,)\sum_{(a,q)=1} e_q(-n\alpha)\prod_{i=1}^{4} G_i(a, \bar{\eta}_0, q)\int\limits_{-\infty}^{\infty} e(-n\lambda)\prod_{i=1}^{4} I(\lambda)d\lambda.$$

Согласно равен(37) указанный выше интеграл равен P_0. В силу (16) две суммы в приведённом выше равенстве равны $\sum\limits_{q\leqslant Q}\varphi^{-4}(dq/h\,)Z(q)$. На основании пунктов (c) и (d) леммы 4.4 можем писать следующее.

$$\sum_{q\leqslant Q}\varphi^{-4}(dq/h\,)Z(q) = \varphi^{-4}(d)\,\sigma(d)\,d\prod_{p\nmid d} s(p) + O\left(\sum_{q>Q}|A(q)|\right) =$$

$$= \varphi^{-4}(d)\,\sigma(d)\,d\prod_{p\nmid d} s(p) + O\left(Q^{-1}d^{-2}\log^9 Q\right).$$

Из этого и равенства (38) следует доказательство леммы.

Лемма 5.2. *Если существует исключительный нуль $\tilde{\beta}$, а параметры $\tilde{r}_1$ и d_1 определяются так, как в утверждении (b) леммы 4.5, и если положить $r^{(1)} = \tilde{r}_1$, то выполняются утверждения:*
(a)

$$\mathcal{T}_3 = \frac{\sigma(d_1)\,d_1}{\varphi^4(d_1)}\cdot\frac{\sigma(\tilde{r}_1)\,\tilde{r}_1}{\varphi^4(\sigma(\tilde{r}_1)\,\tilde{r}_1)}\prod_{\substack{p\nmid d\\ p\nmid\tilde{r}_1}} s(p)\times\sum_{(\sigma(\tilde{r}_1)\tilde{r}_1)}\left(-\sum_{i=1}^{4}\Delta(i)\,P(i) + \ldots\right.$$

$$\left.\cdots + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\Delta(i,j)\,P(i,j) - \cdots + \Delta(1,2,3,4)\,P(1,2,3,4)\right) + O\left(\frac{N\log^9 Q}{Q}\right).$$

(b) $\mathcal{T}_3 \ll N\tilde{r}_1{}^{-1}\mathcal{L}$

Доказательство. На основании (13) 15 слагаемых из (C3) можно разделить на 5 типов в зависимости от количества множителей $\tilde{\zeta}(b_i)\, G_i(a,\tilde{\eta},q)\, \tilde{I}(\lambda)$. Слагаемое типа с k множителями имеет вид $(-1)^k \delta_q \left(\prod\limits_{i=1}^{k} \tilde{\zeta}(b_i)\, G_i(a,\tilde{\eta},q)\, \tilde{I}(\lambda)\right)\left(\prod\limits_{i=k+1}^{4} G_i(a,\eta_0,q)\, I(\lambda)\right)$. Если $\mathcal{T}_{3,k}$ обозначает вклад такого слагаемого в $\mathcal{T}_3$, то на основании (33) получаем следующее.

$$\mathcal{T}_{3,k} = (-1)^k \left(\sum_{\substack{q\leqslant Q\\ \tilde{r}|q}} \varphi^{-4}(dq/h\,) \sum_{(a,q)=1} e_q(-n\alpha) \prod_{i=1}^{k} \tilde{\zeta}(b_i)\, G_i(a,\tilde{\eta},q) \prod_{i=k+1}^{4} G_i(a,\eta_0,q)\right) \times$$

$$\times \int\limits_{-\infty}^{\infty} e(-n\lambda)\, \tilde{I}^k(\lambda)\, I^{4-k}(\lambda)\, d\lambda =: (-1)^k WB.$$

Интеграл по (30) равен $P(1,\ldots,k)$. Согласно (16), W представляет собой следующий сингулярный ряд: $W = \sum\limits_{\substack{q\leqslant Q\\ \tilde{r}|q}} \varphi^{-4}(dq/h\,) Z(q,\tilde{\eta}\eta_0,\ldots,\tilde{\eta}\eta_0,\eta_0,\ldots,\eta_0)\, \tilde{\zeta}\zeta_0 \cdot \ldots \cdot \tilde{\zeta}\zeta_0 \cdot \zeta_0 \cdot \ldots \cdot \zeta_0$. Учитывая, что в пункте (b) леммы 4.5 выполняется

$$\sum_{\substack{q\leqslant Q\\ r|dq/h}} \varphi^{-4}\left(\frac{dq}{h}\right) Z(q,\eta_1\eta_0,\ldots,\eta_4\eta_0) \prod_{i=1}^{4} \zeta_i\zeta_0(b_i) =$$

$$= \prod_{i=1}^{4} \chi_i^{(2)}(b_i)\, (\mathrm{mod}\, r_2)\, \frac{\sigma(d_1)\, d_1}{\varphi^4(d_1)} \cdot \frac{Y\left(\sigma\left(r^{(1)}\right) r^{(1)}\right)}{\varphi^4\left(\sigma\left(r^{(1)}\right) r^{(1)}\right)} \prod_{\substack{p\nmid d\\ p\nmid r}} s(p) + O\left(Q^{-1}\log^9 Q\right).$$

(36) равенство и $Y(\sigma\tilde{r}_1) = \sigma\tilde{r}_1 \sum\limits_{(\sigma\tilde{r}_1)} \ldots$, получаем выражение для

$$\mathcal{T}_{3,k} = (-1)^k \frac{\sigma(d_1)\, d_1}{\varphi^4(d_1)} \cdot \frac{\sigma(\tilde{r}_1)\, \tilde{r}_1}{\varphi^4(\sigma(\tilde{r}_1)\, \tilde{r}_1)} \prod_{\substack{p\nmid d\\ p\nmid \tilde{r}_1}} s(p) \sum_{(\sigma(\tilde{r}_1)\tilde{r}_1)} \Delta(1,\ldots,k)\, P(1,\ldots,k) + O\left(NQ^{-1}\log^9 Q\right).$$

Таким образом, суммируя вклады по всем k, получаем утверждение (a). Утверждение (b) следует из леммы 4.1.

Определим Ω следующим образом: $\Omega = \begin{cases} \left(1-\tilde{\beta}\right)\log T, & \text{если существует } \tilde{\beta}, \\ 1, & \text{в противном случае.} \end{cases}$

Из следствия 4.2, леммы 4.3 и равенства (22) получаем следующие результаты.

$$\prod_{\substack{p\nmid d\\ p\nmid \tilde{r}_1}} s(p) = \sigma\left(r''\right) r'' \varphi^{-4}\left(\sigma\left(r''\right) r''{}_1\right) N\left(\sigma\left(r''\right) r''{}_1\right), \tag{39}$$

$$\frac{\sigma(r'_1)\, r'_1}{\varphi^4(\sigma(r'_1)\, r'_1)} N\left(\sigma\left(r'_1\right) r'\right) = \frac{\sigma(d_2)\, d_2}{\varphi^4(\sigma(d_2)\, d_2)} N(\sigma(d_2)\, d_2) = \frac{\sigma(d_2)\, d_2}{\varphi^4(d_2)}. \tag{40}$$

Здесь $r''r' = r, (r'',r') = 1$, $(r'',d) = 1$, $r' | d^{\odot}$, r'_1, $d\,|(r,d)$ имеют одинаковые простые множители, и степень каждого простого делителя числа d_2 меньше степени соответствующего делителя в r'_1. Таким образом, мы можем записать $\mathcal{T}_1$ в следующем виде.

$$\mathcal{T}_1 = \frac{\sigma(d_1)\, d_1}{\varphi^4(d_1)} \cdot \frac{\sigma(\tilde{r}_1)\, \tilde{r}_1}{\varphi^4(\sigma(\tilde{r}_1)\, \tilde{r}_1)} \prod_{\substack{p\nmid d\\ p\nmid \tilde{r}_1}} s(p) \sum_{(\sigma(\tilde{r}_1)\tilde{r}_1)} P_0 + O\left(Nd^{-2}Q^{-1}\log^9 Q\right).$$

Используя выражение для $\mathcal{T}_3$ из утверждения (a) леммы 5.2, получаем

$$\mathcal{T}_1+\mathcal{T}_3=\frac{\sigma\left(d_1\right)d_1}{\varphi^4\left(d_1\right)}\cdot\frac{\sigma\left(\tilde r_1\right)\tilde r_1}{\varphi^4\left(\sigma\left(\tilde r_1\right)\tilde r_1\right)}\prod_{\substack{p\nmid d\\ p\nmid\tilde r_1}}s\left(p\right)N2^{-4}\sum_{\left(\sigma\left(\tilde r_1\right)\tilde r_1\right)}\int\limits_D\left(\prod_{i=1}^4x_i^{-1/2}\right)\times$$

$$\times\prod_{i=1}^4\left(1-\tilde\chi(Nx_i)^{(\tilde\beta-1)/2}\right)dx_1dx_2dx_3+O\left(NQ^{-1}\log^9Q\right). \qquad (41)$$

Остаётся оценить интеграл. Так как $\prod\limits_{i=1}^4\left(1-\tilde\chi(Nx_i)^{(\tilde\beta-1)/2}\right)=\prod\limits_{i=1}^4\left(1-L^{(\tilde\beta-1)/2}\right)$ является голоморфной в области D, при этом $x_i\geqslant L/N$. Таким образом, получаем следующее:

$$1-L^{\frac{\tilde\beta-1}{2}}\geqslant1-\exp\left(-\frac12\left(1-\tilde\beta\right)\log N\right)\geqslant\min\left\{\frac12,\,\frac14\left(\left(1-\tilde\beta\right)\log N\right)\right\}\geqslant\Omega.$$

В этом случае главный член в (41) имеет следующий вид:

$$\gg\Omega^4\frac{\sigma\left(d_1\right)d_1}{\varphi^4\left(d_1\right)}\cdot\frac{\sigma\left(\tilde r_1\right)\tilde r_1}{\varphi^4\left(\sigma\left(\tilde r_1\right)\tilde r_1\right)}\prod_{\substack{p\nmid d\\ p\nmid\tilde r_1}}s\left(p\right)\sum_{\left(\sigma\left(\tilde r_1\right)\tilde r_1\right)}P_0.$$

Поэтому, на основании (39) и (40), справедлива следующая.

Лемма 5.3.

$$\mathcal{T}_1+\mathcal{T}_3\geqslant\Omega^4\varphi^{-4}\left(d\right)\sigma\left(d\right)d\prod_{p\nmid d}s\left(p\right)P_0+O\left(NQ^{-1}\log^9Q\right).$$

Теперь оценим $\mathcal{T}_2$.

Лемма 5.4.

$$\mathcal{T}_2\ll\Omega^4\exp\left(-c/\sqrt{\delta}\,\right)\varphi^{-4}\left(d\right)\sigma\left(d\right)d\prod_{p\nmid d}s\left(p\right)P_0+O\left(NQ^{-1}\log^9Q\right).$$

Доказательство. Поскольку выполняется равенство (13) и (14), в каждом слагаемом из (C2) присутствует множитель вида $\sum\limits_{\zeta\eta}\bar\zeta\left(b_i\right)G_i\left(a,\bar\eta,q\right)I\left(\zeta\eta,\lambda\right)$. Действительно, мы ограничимся указанием метода оценки для типичного слагаемого вида

$$\delta_q\left(\prod_{i=1}^2\sum_{\zeta\eta}\bar\zeta\left(b_i\right)G_i\left(a,\bar\eta,q\right)I\left(\zeta\eta,\lambda\right)\right)G_3\left(a,\eta_0,q\right)I\left(\lambda\right)\tilde\beta\left(b_4\right)G_4\left(a,\tilde\eta,q\right)\tilde I\left(\lambda\right).$$

Вклад этого слагаемого в $\mathcal{T}_2$ обозначим через κ. Согласно (33),

$$\kappa=\sum_{\substack{q\leqslant Q\\ \tilde r|dq/h}}\delta_q\varphi^{-4}\left(dq/h\right)\sum_{(a,q)=1}e_q\left(-na\right)G_3\left(a,\eta_0,q\right)\tilde\zeta\left(b_4\right)G_4\left(a,\tilde\eta,q\right)\times$$

$$\times\left(\prod_{i=1}^2\sum_{\zeta\eta}\bar\zeta\left(b_i\right)G_i\left(a,\bar\eta,q\right)\right)\sum_{|\gamma|\leqslant T}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e\left(-n\lambda\right)\left(\prod_{i=1}^2\int\limits_{L_1}^{N_1}x^{\rho_i-1}e\left(\lambda x^2\right)dx\right)\times$$

$$\times\left(\int\limits_{L_1}^{N_1}e\left(\lambda x^2\right)dx\right)\left(\int\limits_{L_1}^{N_1}x^{\tilde\beta-1}e\left(\lambda x^2\right)dx\right)d\lambda.$$

В соответствии с (30), $\int\limits_{-\infty}^{\infty}...d\lambda$ равно $\frac{N}{2^4}\int\limits_{D}\left(\prod\limits_{i=1}^{4}x_i^{-1/2}\right)\left(\prod\limits_{i=1}^{2}(Nx_i)^{(\rho_i-1)/2}\right)(Nx_i)^{\frac{\tilde{\beta}-1}{2}}dx_1dx_2dx_3$. Как известно [13], каждый характер интегрируется (т.е. получается) с помощью единственного примитивного характера, и наоборот, для каждого характера $\chi^*\,(\mathrm{mod} r)$ и для каждого делителя r числа q существует единственный характер $\chi\,(\mathrm{mod} q)$, индуцированный характером χ^*. Кроме того, функция Дирихле $L\,(s,\chi^*)$ и $L\,(s,\chi)$ имеют нули с положительной действительной частью, кроме тривиальных. Соответственно, переставив порядок суммирования в κ, мы можем писать κ следующим образом:

$$\kappa = N2^{-4}\int\limits_{D}\left(\prod_{i=1}^{4}x_i^{-1/2}\right)(Nx_4)^{(\tilde{\beta}-1)/2}\left(\prod_{i=1}^{2}\sum_{r_i\leqslant dQ}\sum\nolimits^{*}_{\chi_i\equiv\zeta_i\eta_i(\bmod r_i)}\sum_{|\gamma|\leqslant T}{}'(Nx_i)^{(\rho_i-1)/2}\right)\times$$

$$\times\sum_{\substack{q\leqslant Q\\ \tilde{r}|dq/h}}\varphi^{-4}(dq/h)\sum_{(a,q)=1}G_3(a,\eta_0,q)\,\tilde{\zeta}\zeta_0(b_4)\,G_4(a,\tilde{\eta}\eta_0,q)\left(\prod_{i=1}^{2}\bar{\zeta}(b_i)\,G_i(a,\bar{\eta},q)\right)dx_1dx_2dx_3. \tag{42}$$

Здесь $\sum{}^*-$ означает сумму по всем примитивным характерам по модулю r_i, а $r=[r_1,r_2,\tilde{r}]$. В соответствии с леммой 4.5, внутренняя сумма $\sum\limits_{\substack{q\leqslant Q\\ \tilde{r}|dq/h}}$ равна выражению

$\prod\limits_{i=1}^{2}\chi_i^{(2)}(b_i)\tilde{\chi}_i^{(2)}(b_i)\,\varphi^{-4}(d_1)\,\sigma(d_1)\,d_1\cdot\frac{Y\left(\sigma\left(r^{(1)}\right)r^{(1)}\right)}{\varphi^4\left(\sigma\left(r^{(1)}\right)r^{(1)}\right)}\prod\limits_{p\nmid d,r}s(p)+O\left(Nd^{-2}Q^{-1}\log^9 Q\right)$. Здесь d_1 и $r^{(1)}$ определяются так же, как в пункте (b) леммы 4.5. В силу того, что $Y(\sigma(\tilde{r}_1)\,\tilde{r}_1)\leqslant$ $\leqslant\sigma(\tilde{r}_1)\,\tilde{r}_1 N(\sigma(\tilde{r}_1)\,\tilde{r}_1)$ комбинируя это с (39) и (40), получаем следующее:

$$\left|\sum_{\substack{q\leqslant Q\\ r|dq/h}}...\right|\leqslant\varphi^{-4}(d)\,\sigma(d)\,d\prod_{p\nmid d}s(p)+O\left(Nd^{-2}Q^{-1}\log^9 Q\right).$$

На основе идеи [16] и доказательства леммы 6.2 из [15], с применением метода большого сито, для любого числа c и любого действительного числа $y\geqslant N_1$ справедливо неравенство:

$$\sum_{q\leqslant T}\sum\nolimits^{*}_{\chi(\mathrm{modq})}\sum_{|\gamma|\leqslant T}{}'y^{\beta-1}\ll\Omega^4\exp\left(-c/\sqrt{\delta}\,\right).$$

Используя это в кратной сумме из (42) и комбинируя с (31), мы получаем доказательство леммы. Объединяя полученные выше результаты и используя равенство (34), мы можем получить оценку для $\mathcal{R}_1(n)$. Для этого рассмотрим два случая.

1-случай. Если не существует $\tilde{\beta}$-исключительный нуль L-функции Дирихле или же он существует и модуль соответствующего исключительного характера $\tilde{r}>Q^{1/8}$. Из леммы 5.1 и части (b) леммы 5.2, а также из лемм 5.4 при достаточно малом δ, получим:

$$\mathcal{R}_1(n)\geqslant\frac{1}{2}\varphi^{-4}(d)\,\sigma(d)\,d\prod_{p\nmid d}s(p)\,P_0+O\left(NQ^{-1/8}\log^9 Q\right). \tag{43}$$

Тогда, согласно леммы 4.4 (a), имеем: $\mathcal{R}_1(n)\gg N\left(Q^{5/42}\,d^{1/2}\right)^{-1}$. Здесь $d\leqslant Q^{1/21}$.

2-случай. Если существует $\tilde{\beta}$-исключительный нуль L-функции Дирихле и модуль соответствующего исключительного характера $\tilde{r}\leqslant Q^{1/8}$. Тогда, исполдьзуля на леммы 5.3 и 5.4 и при достаточно малом δ, получим:

$$\mathcal{R}_1(n)\geqslant\frac{1}{2}\Omega^4\varphi^{-4}(d)\,\sigma(d)\,d\prod_{p\nmid d}s(p)\,P_0+O\left(NQ^{-1}\log^9 Q\right). \tag{44}$$

Отсюда, учитывая, что $\Omega \gg \left(\tilde{r}^{\frac{1}{2}}\log^2\tilde{r}\right)^{-1}\log T \gg Q^{-1/16}\log^{-1}Q$, имеем: $\mathcal{R}_1\left(n\right) \gg N\left(Q^{1/3}d^{1/2}\right)^{-1}$.

Из оценки (43), (44) и (7) следуют, что $\mathcal{R}_1\left(n\right) > \left|\mathcal{R}_2\left(n\right)\right|$. Таким образом, наша теорема доказана.

6. Доказательство следствие

Используя равенство (5), для $\mathcal{R}\left(n\right)$ получим:

$$\mathcal{R}\left(n\right) \leqslant S_d\left(n\right)\log^4 N + O\left(N_1^{3/2}\log N\right). \tag{45}$$

Согласно равенству (6), имеем: $\mathcal{R}\left(n\right) > \mathcal{R}_1\left(n\right) - \left|\mathcal{R}_2\left(n\right)\right|$. Используя оценки $\mathcal{R}_1\left(n\right)$ и $\mathcal{R}_2\left(n\right)$, а также (45), получим: $\mathcal{R}_1\left(n\right) - \left|\mathcal{R}_2\left(n\right)\right| \leqslant S_d\left(n\right)\log^4 N + O\left(N_1^{3/2}\log N\right)$. Отсюда следует: $S_d\left(n\right) \geqslant \frac{\mathcal{R}_1(n)-|\mathcal{R}_2(n)|}{\log^4 N} - O\left(N_1^{3/2}\log^{-3}N\right)$ и следовательно, $S_d\left(n\right) \gg \frac{N}{Q^{1/3}d^{1/2}\log^4 N}$. Пользуясь тем, что $Q = N^{21\delta}$, а также условиями $n \equiv 4\,(\mathrm{mod}\,24)$, $L < n \leqslant N$, получим, что для всех n за исключением не более, чем $E_d(N) \ll N\left(Q^{15/14}\,d\right)^{-1}$ значений из них справедлива оценка: $S_d\left(n\right) \gg n^{1-7\delta}\left(d^{1/2}\log^4 n\right)^{-1}$. Следствие доказано.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нестеренко, Ю.В. Теория чисел. М:Издательский центр Академия. 2008. 272 с.
2. Хуа Ло-Кен. Аддитивная теория простых чисел.// Тр. Матем. ин-та им. В.А.Стеклова, 1947, том 22, с. 3-179.
3. Jianya Liu va Ming-Chit Liu. The exceptional set in the four prime squares problem. // Illinois journal of mathematics. 2000, Vol. 44, № 2, pp.272-293.
4. Wang, Y. Numbers representable by five prime squares with primes in an arithmetic progression. // Acta Arithmetica. 1999, Vol.90, № 3, pp.217–244.
5. Allakov I., Imamov O. A lower estimate for the quantity of a natural number represented as a sum of five squared prime numbers from an arithmetic progression.// Bull. Inst. Math., 2024, Vol.7, № 4, pp. 86-93
6. Imamov O. On numbers representable as the sum of four squares of prime numbers. // Samarkand University Scientific Bulletin., 2025, № 1, pp.106-110
7. Vaughan R.C.The Hardy-Littlewood method. Second edition. Cambridge University Press. 1997. 232 p.
8. Виноградов И.М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел. — М.: Наука, 1971.
9. Виноградов И.М. Особые варианты метода тригонометрических сумм. — М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1976.
10. Аллаков И., Музропова Н.С. О решении одного уравнения в простых числах.// Чебышевский сборник. 2024, том 25 № 4 с.5-26
11. Карацуба, А.А. Основы аналитической теории чисел. -М.: Наука, 1983. -240 с.
12. Аллаков И. Оценка тригонометрических сумм и их приложения к решению некоторых аддитивных задач теории чисел. Термез. Изд. «Сурхан нашр» 2021. 160с.

13. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», М., 1976 г. 543 с

14. Davenport H.Multiplicative number theory.Third edition.Springer. New York. 2000. 177p

15. Liu M. C. and Tsang K. M. Small prime solutions of some additive equations.// Monatsh. Math. 1991 vol. 111 , pp. 147–169.

16. Gallagher P. X. A large sieve density estimates near. // Invent. Math.1970 vol. 11, pp.329–339.

REFERENCES

1. Nesterenko, Yu. V. 2008. Number Theory. Moscow: Publishing Center "Akademiya 272 p.

2. Hua Lo-Ken. 1947. Additive prime number theory.// Tr. Math. Institute named after V.A. Steklova, vol.22. pp. 3–179.

3. Jianya Liu va Ming-Chit Liu. 2000. The exceptional set in the four prime squares problem.// Illinois journal of mathematics. V. 44, № 2,

4. Wang, Y. 1999. Numbers representable by five prime squares with primes in an arithmetic progression.// Acta Arithmetica, Vol.90, № 3, pp.217–244.

5. Allakov I., Imamov O.Sh. 2024. A lower estimate for the quantity of a natural number represented as a sum of five squared prime numbers from an arithmetic progression.// Bull. Inst. Math., Vol.7, №4, pp. 86-93

6. Imamov O.Sh. 2025. On numbers representable as the sum of four squares of prime numbers.// Samarkand University Scientific Bulletin. № 1, pp.106-110

7. Vaughan R.C. 1997.The Hardy-Littlewood method. Second edition. Cambridge University Press.232 p.

8. Vinogradov, I. M. 1971. The Method of Trigonometric Sums in Number Theory. Moscow: Nauka,

9. Vinogradov, I. M. 1976. Special Variants of the Method of Trigonometric Sums. Moscow: Nauka, Main Editorial Office for Physical and Mathematical Literature, (In Russian)

10. Allakov I., Muzropova N.S. 2024. The solution of some equation in primes. Chebyshevskii Sbornik. vol. 25 № 4 pp.5-26. (In Russ.)

11. Karatsuba A.A. 1983. Fundamentals of analytic number theory , Moscow, Nauka. 240 p.(in Russian).

12. Allakov I. 2021. “Estimation of trigonometric sums and their applications to the solution of some additive problems in number theory”, Termez, Surxon nashr. 160 p.

13. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. 1976. “Elements of the theory of functions and functional analysis”, Moscow, Nauka. 543 p.

14. Davenport H. 2000. Multiplicative Number Theory. Third edition, Springer, 177 p.

15. Liu M. C. and Tsang K. M. 1991. Small prime solutions of some additive equations.// Monatsh. Math. vol. 111, pp. 147–169.

16. Gallagher P. X. 1970. A large sieve density estimates near. // Invent. Math. vol. 11, pp.329–339.

Получено: 29.04.2025
Принято в печать: 08.12.2025

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 26. Выпуск 5.

УДК: 512.554.1 DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-5-73-83

Особенности трехмерных линейных операторов Нийенхейса с функционально независимыми инвариантами [1]

Е. А. Асташов, С. Д. Дегтярева

Асташов Евгений Александрович — кандидат физико-математических наук, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова; Московский Центр фундаментальной и прикладной математики (г. Москва).
e-mail: ast-ea@yandex.ru
Дегтярева Софья Денисовна — аспирант, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова; Московский Центр фундаментальной и прикладной математики (г. Москва).
e-mail: sofia.degtiareva@math.msu.ru

Аннотация

Настоящая работа посвящена исследованию особенностей операторов Нийенхейса — фундаментальных объектов нийенхейсовой геометрии. Хотя тензор Нийенхейса был введён Альбертом Нийенхейсом ещё в 1951 году, активное развитие эта область получила сравнительно недавно благодаря серии работ А.В. Болсинова, А.Ю. Коняева и В.С. Матвеева.

В размерности два известна классификация линейных операторов Нийенхейса — операторов, действующих на линейном пространстве, компоненты которых линейно зависят от координат. Существует важное взаимно однозначное соответствие между линейными операторами Нийенхейса и левосимметрическими алгебрами, что делает их классификацию эквивалентной задачей.

Несмотря на кажущуюся простоту, задача остаётся сложной даже для малых размерностей и может быть решена лишь при определённых дополнительных ограничениях. В данной работе исследуются трёхмерные линейные операторы Нийенхейса (или, что то же самое, трёхмерные левосимметрические алгебры) при условии функциональной независимости коэффициентов характеристического многочлена. Полная классификация операторов с таким дополнительным условием была получена недавно, и дает список из восьми операторов.

Основной целью данной статьи является изучение особенностей таких операторов. Особой точкой называется точка, в любой окрестности которой изменяется алгебраический тип оператора (жорданова нормальная форма). В работе определены особые точки для рассматриваемого класса операторов Нийенхейса и построены их множества в трехмерном пространстве.

Ключевые слова: оператор Нийенхейса, левосимметрическая алгебра, особые точки.

Библиография: 5 названий.

Для цитирования:
Асташов Е. А., Дегтярева С. Д. Особенности трехмерных линейных операторов Нийенхейса с функционально независимыми инвариантами // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 5, с. 73–83.

[1]Работа поддержана Программой развития МГУ, проект №23-Ш05-25.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 26. No. 5.

UDC: 512.554.1 DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-5-73-83

Singularities of three-dimensional linear Nijenhuis operators with functionally independent invariants

E. A. Astashov, S. D. Degtiareva

Astashov Evgenii Alexandrovich — candidate of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University; Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics (Moscow).
e-mail: ast-ea@yandex.ru
Degtiareva Sofia Denisovna — postgraduate student, Lomonosov Moscow State University; Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics (Moscow).
e-mail: sofia.degtiareva@math.msu.ru

Abstract

This work is devoted to the study of singularities of Nijenhuis operators – fundamental objects of Nijenhuis geometry. Although the Nijenhuis tensor was introduced by Albert Nijenhuis back in 1951, this field received active development relatively recently thanks to a series of works by A.V. Bolsinov, A.Yu. Konyaev, and V.S. Matveev.

In dimension two, the classification of linear Nijenhuis operators, operators acting on a linear space, whose components linearly depend on coordinates, is known. There exists an important one-to-one correspondence between linear Nijenhuis operators and left-symmetric algebras, which makes their classification an equivalent problem.

Despite its apparent simplicity, the problem remains challenging even for small dimensions and can be solved only under certain additional constraints. This paper investigates three-dimensional linear Nijenhuis operators (or, equivalently, three-dimensional left-symmetric algebras) under the condition of functional independence of the characteristic polynomial coefficients. A complete classification of operators with this additional condition was recently obtained, yielding a list of eight operators.

The main objective of this paper is to study the singularities of such operators. A singular point is defined as a point in any neighbourhood of which the algebraic type of the operator (Jordan normal form) changes. The paper determines singular points for the considered class of Nijenhuis operators and constructs their sets in three-dimensional space.

Keywords: Nijenhuis operator, left-symmetric algebra, singular points.

Bibliography: 5 titles.

For citation:
Astashov, E. A., Degtiareva, S. D. 2025, "Singularitites of three-dimensional linear Nijenhuis operators with functionally independent invariants" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 5, pp. 73–83.

1. Введение

В работе [2] была поставлена задача классификации особых точек операторов Нийенхейса. В теории операторов Нийенхейса выделяют несколько типов особенностей: точки, в любой окрестности которых алгебраический тип оператора меняется, называются *особыми*, а точки, где нарушается условие линейной независимости дифференциалов коэффициентов характеристического многочлена, называются *вырожденными*. И те, и другие особенности представляют интерес, и в данной статье подробно рассмотрены особенности первого типа и определены точки второго типа.

Операторы, особенности которых мы будем изучать, были классифицированы в статье [1, теорема 2] и представляют собой полный список всех возможных трёхмерных линейных операторов Нийенхейса, коэффициенты характеристических многочленов которых являются функционально независимыми.

В размерности два полный список линейных операторов Нийенхейса без дополнительных условий был получен А.Ю. Коняевым в статье [3]. В двумерном случае множество особых точек операторов устроено достаточно просто — это прямая. Для трёхмерного случая возникают более интересные множества.

2. Определения

Определение 1. *Пусть P — операторное поле на гладком многообразии M. Кручение Нийенхейса N_P определяется на паре векторных полей v, w следующим образом:*

$$N_P(v,w) = [Pv, Pw] + P^2[v,w] - P[Pv,w] - P[v,Pw],$$

где $[\,,]$ обозначает стандартный коммутатор векторных полей.

Определение 2. *Операторное поле P называется оператором Нийенхейса, если тензор Нийенхейса N_P тождественно равен нулю, т.е. $N_P \equiv 0$.*

Мы будем рассматривать линейные операторы Нийенхейса на вещественных аффинных пространствах размерности три, т.е. такие операторные поля P, для которых $N_P \equiv 0$ и которые линейно зависят от координат x^1, x^2, x^3: $P^k_i = a^k_{ij}x^j$, где $a^k_{ij} \in \mathbb{R}$.

Определение 3. *Точка $a \in M$ называется точкой общего положения, если алгебраический тип оператора P, т.е. структура жордановой нормальной формы, не меняется в некоторой окрестности $U(a)$ точки a.*

Точка $a \in M$ называется особой, если она не является точкой общего положения.

Определение 4. *Точка $a \in M$ называется дифференциально невырожденной, если дифференциалы df_1, df_2, df_3 коэффициентов характеристического многочлена $\chi(t) = \det(t \cdot Id - P) = t^3 - f_1t^2 + f_2t - f_3$ оператора Нийенхейса линейно независимы в точке a.*

Точка $a \in M$ называется вырожденной, если она не является дифференциально невырожденной.

3. Результаты

Сформулируем теорему классификации линейных операторов Нийенхейса из статьи [1].

Теорема 1. *Любой трехмерный линейный оператор Нийенхейса P с почти всюду функционально независимыми инвариантами в некотором базисе имеет один из видов, представленных в таблице 1, причем каждый из этих 8 операторов не может быть сведен к другим линейными заменами координат.*

Комментарий к таблице 1. В четвертом столбце указана алгебра Ли, ассоциированная с левосимметрической алгеброй, соответствующей данному оператору Нийенхейса P из третьего столбца (т.е. алгебра Ли со структурными константами $c^k_{ij} = a^k_{ij} - a^k_{ji}$). Обозначения для алгебр Ли взяты из статьи [5].

Таблица 1: Трехмерные линейные операторы Нийенхейса с функционально независимыми инвариантами

№	Инварианты	Оператор Нийенхейса P	Алгебра Ли
I	$f_1 = x$ $f_2 = -y^2 - z^2 + \frac{1}{4}x^2$ $f_3 = -\frac{1}{2}xz^2 - yz^2$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}x & 2y & 2z \\ \frac{1}{2}y & \frac{1}{2}x & -z \\ \frac{1}{4}z & -\frac{1}{2}z & 0 \end{pmatrix}$	$A_{3,11}$
II	$f_1 = x$ $f_2 = -y^2 - z^2 + \frac{1}{3}x^2$ $f_3=\frac{1}{27}x^3+\frac{2}{3\sqrt{3}}z^3-\frac{2\sqrt{3}}{3}y^2z-\frac{1}{3}xy^2-\frac{1}{3}xz^2$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{3}x & 2y & 2z \\ \frac{1}{3}y & \frac{1}{3}x - \frac{1}{\sqrt{3}}z & -\frac{1}{\sqrt{3}}y \\ \frac{1}{3}z & -\frac{1}{\sqrt{3}}y & \frac{1}{3}x + \frac{1}{\sqrt{3}}z \end{pmatrix}$	$A_{3,10}$
III	$f_1 = x$ $f_2 = -y^2 - z^2 + \frac{1}{3}x^2$ $f_3=\frac{1}{27}x^3+\frac{2}{3\sqrt{3}}z^3+\frac{\sqrt{3}}{3}y^2z-\frac{1}{3}xy^2-\frac{1}{3}xz^2$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{3}x & 2y & 2z \\ \frac{1}{3}y & \frac{1}{3}x - \frac{1}{\sqrt{3}}z & \frac{1}{2\sqrt{3}}y \\ \frac{1}{3}z & \frac{2}{\sqrt{3}}y & \frac{1}{3}x + \frac{1}{\sqrt{3}}z \end{pmatrix}$	$A_{3,11}$
IV	$f_1 = x$ $f_2 = y^2 - z^2$ $f_3 = (y-z)^2(2y-x)$	$\begin{pmatrix} x & -2y & 2z \\ y & x-3y & -x+2y+z \\ y & x-4y+z & -x+3y \end{pmatrix}$	$A_{3,11}$
V	$f_1 = x$ $f_2 = y^2 - z^2$ $f_3 = (y+z)^3$	$\begin{pmatrix} x & -2y & 2z \\ \frac{1}{2}y - \frac{1}{6}z & -\frac{3}{2}(y+z) & -\frac{3}{2}(y+z) \\ -\frac{1}{6}y + \frac{1}{2}z & \frac{3}{2}(y+z) & \frac{3}{2}(y+z) \end{pmatrix}$	$A_{3,5}$
VI	$f_1 = x$ $f_2 = y^2 - z^2 + \frac{1}{4}x^2$ $f_3 = \frac{1}{2}xy^2 + y^2z$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}x & -2y & 2z \\ \frac{1}{4}y & 0 & -\frac{1}{2}y \\ \frac{1}{2}z & y & \frac{1}{2}x \end{pmatrix}$	$A_{3,11}$
VII	$f_1 = x$ $f_2 = y^2 - z^2 + \frac{1}{3}x^2$ $f_3=\frac{1}{27}x^3-\frac{2}{3\sqrt{3}}z^3-\frac{2\sqrt{3}}{3}y^2z+\frac{1}{3}xy^2-\frac{1}{3}xz^2$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{3}x & -2y & 2z \\ \frac{1}{3}y & \frac{1}{3}x + \frac{1}{\sqrt{3}}z & \frac{1}{\sqrt{3}}y \\ \frac{1}{3}z & -\frac{1}{\sqrt{3}}y & \frac{1}{3}x - \frac{1}{\sqrt{3}}z \end{pmatrix}$	$A_{3,10}$
VIII	$f_1 = x$ $f_2 = y^2 - z^2 + \frac{1}{3}x^2$ $f_3=\frac{1}{27}x^3-\frac{2}{3\sqrt{3}}z^3+\frac{\sqrt{3}}{3}y^2z+\frac{1}{3}xy^2-\frac{1}{3}xz^2$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{3}x & -2y & 2z \\ \frac{1}{3}y & \frac{1}{3}x + \frac{1}{\sqrt{3}}z & -\frac{1}{2\sqrt{3}}y \\ \frac{1}{3}z & \frac{2}{\sqrt{3}}y & \frac{1}{3}x - \frac{1}{\sqrt{3}}z \end{pmatrix}$	$A_{3,11}$

Рассмотрим характеристический многочлен оператора Нийенхейса $P \chi(t) = det(t \cdot Id - P) = t^3 - f_1 t^2 + f_2 t - f_3$. Дискриминант этого кубического многочлена выражается через коэффициенты следующим образом: $D = f_1^2 f_2^2 + 18 f_1 f_2 f_3 - 27 f_3^2 - 4 f_2^3 - 4 f_1^3 f_3$. Тогда множество в $\mathbb{R}^3$, где дискриминант $D = 0$, будет состоять в точности из особых точек. Найдем его для каждого из операторов и графически изобразим в пространстве. Также укажем для каждого случая жордановы нормальные формы (объединяя их по алгебраическому типу, см. определение 3) и множество вырожденных точек (см. определение 4). Во всех случаях в области $D < 0$ оператор имеет одно вещественное и пару комплексно-сопряженных (невещественнных) собственных значений.

В случае **I** дискриминант имеет вид $D = \frac{1}{4}(-y(x+2y) + z^2)^2((x-2y)^2 + 16z^2)$. Тогда множество нулей дискриминанта имеет вид

$$\frac{1}{4}(-y(x+2y) + z^2)^2((x-2y)^2 + 16z^2) = 0.$$

Решением этого уравнения является объединение следующих множеств:

$$\left[\begin{array}{l} z^2 = y(x+2y) - \text{конус}, \\ x - 2y = z = 0 - \text{прямая}. \end{array}\right.$$

Жорданова нормальная форма имеет вид

- $\begin{pmatrix} -2y & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(x+2y) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(x+2y) \end{pmatrix}$ на конусе;

- $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2y \end{pmatrix}$ на прямой;
- $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(x+2y) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}(x-2y-\sqrt{(x-2y)^2+16z^2}) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}(x-2y+\sqrt{(x-2y)^2+16z^2}) \end{pmatrix}$ в области $D > 0$.

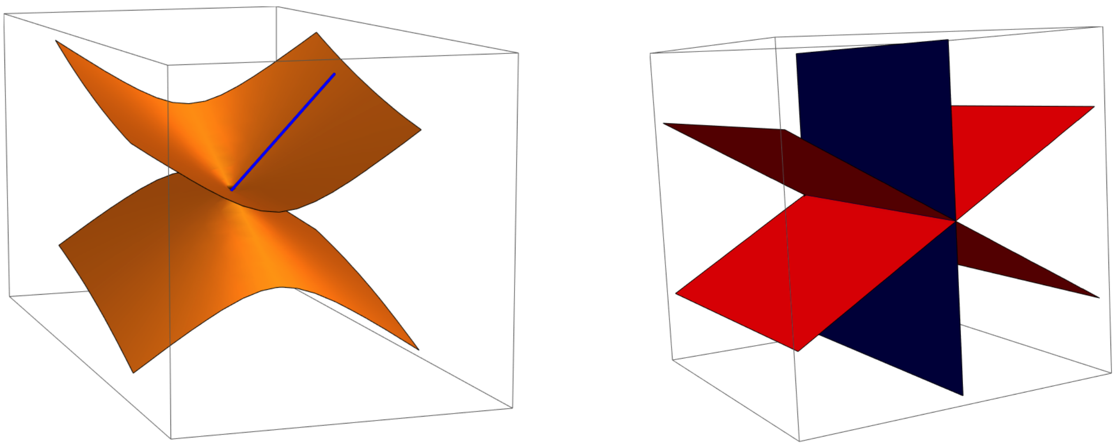


Рис. 1: Случаи **I** (слева) и **II** (справа)

Множество вырожденных точек имеет вид

$$\left[\begin{array}{l} z^2 = y(x+2y) - \text{конус}, \\ z = 0 - \text{плоскость}. \end{array}\right.$$

В случае **II** дискриминант имеет вид $D = 4y^2(y^2 - 3z^2)^2$. Тогда множество нулей дискриминанта имеет вид

$$4y^2(y^2 - 3z^2)^2 = 0.$$

Решением этого уравнения является объединение следующих множеств:

$$\left[\begin{array}{l} y = 0 - \text{плоскость}, \\ y - \sqrt{3}z = 0 - \text{плоскость}, \\ y + \sqrt{3}z = 0 - \text{плоскость}. \end{array}\right.$$

Жорданова нормальная форма имеет вид

- $\begin{pmatrix} \frac{1}{3}x & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}x & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}x \end{pmatrix}$ на прямой пересечения $y = 0, z = 0$;
- $\begin{pmatrix} \frac{1}{3}(x-\sqrt{3}z) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}(x-\sqrt{3}z) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}(x+2\sqrt{3}z) \end{pmatrix}$ на плоскости $y = 0$;
- $\begin{pmatrix} \frac{1}{3}(x-4\sqrt{3}z) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}(x+2\sqrt{3}z) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}(x+2\sqrt{3}z) \end{pmatrix}$ на паре плоскостей $y \pm \sqrt{3}z = 0$;
- $\begin{pmatrix} \frac{1}{3}(x-3y-\sqrt{3}z) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}(x+3y-\sqrt{3}z) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}(x+2\sqrt{3}z) \end{pmatrix}$ в области $D > 0$.

Множество вырожденных точек имеет вид

$$\left[\begin{array}{c} y = 0 - \text{плоскость}, \\ y - \sqrt{3}z = 0 - \text{плоскость}, \\ y + \sqrt{3}z = 0 - \text{плоскость}. \end{array}\right.$$

В случае **III** дискриминат имеет вид $D = y^4(4y^2 + 3z^2)$. Тогда

$$4y^4(4y^2 + 3z^2) = 0,$$
$$\left[\begin{array}{l} y = 0 - \text{плоскость}, \\ y = z = 0 - \text{прямая}. \end{array}\right.$$

Жорданова нормальная форма имеет вид

- $\begin{pmatrix} \frac{1}{3}(x - \sqrt{3}z) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}(x - \sqrt{3}z) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}(x + 2\sqrt{3}z) \end{pmatrix}$ на плоскости;
- $\begin{pmatrix} \frac{1}{3}x & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}x & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}x \end{pmatrix}$ на прямой;
- $\begin{pmatrix} \frac{1}{3}(x - \sqrt{3}z) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6}(2x + \sqrt{3}z - 3\sqrt{4y^2 + 3z^2}) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6}(2x + \sqrt{3}z + 3\sqrt{4y^2 + 3z^2}) \end{pmatrix}$ в области $D > 0$.

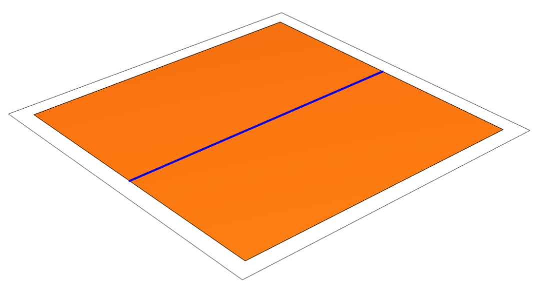


Рис. 2: случаи **III** и **VII**

Множество вырожденных точек имеет вид

$$y = 0 - \text{плоскость}.$$

В случае **IV** дискриминант имеет вид $D = 4(y - z)^2(x - 2y + z)^2((x + y - z)^2 - 8y(y - z))$. Тогда

$$4(y - z)^2(x - 2y + z)^2((x + y - z)^2 - 8y(y - z)) = 0,$$
$$\left[\begin{array}{c} y - z = 0 - \text{плоскость}, \\ x - 2y + z = 0 - \text{плоскость}, \\ (x + y - z)^2 - 8y(y - z) = 0 - \text{конус}. \end{array}\right.$$

Заметим, что конус касается плоскости $y - z = 0$ по прямой $x = 0, y - z = 0$, а также касается плоскости $x - 2y + z = 0$ по прямой $x - 2y + z = 0, y - 2z = 0$. Жорданова нормальная форма имеет вид

- $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ на прямой пересечения $x = 0, y - z = 0$;

- $\begin{pmatrix} z & 0 & 0 \\ 0 & z & 1 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$ на прямой пересечения $x-2y+z=0, y-2z=0$;
- $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$ на плоскости $y-z=0$ без прямой пересечения;
- $\begin{pmatrix} x-y & 0 & 0 \\ 0 & x-y & 0 \\ 0 & 0 & -x+2y \end{pmatrix}$ на плоскости $x-2y+z=0$ без прямой пересечения;
- $\begin{pmatrix} y-z & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(x-y+z) & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(x-y+z) \end{pmatrix}$ на конусе без прямой пересечения;
- $\begin{pmatrix} y-z & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(x-y+z-\sqrt{a}) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(x-y+z+\sqrt{a}) \end{pmatrix}$ в области $D>0$ (выделена желтым на рис. 3), где $a=(x+y-z)^2-8y(y-z)$.

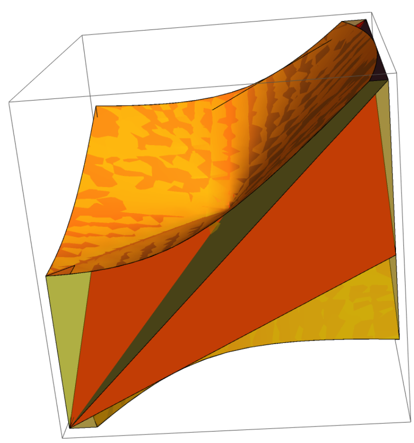


Рис. 3: случай **IV**

Множество вырожденных точек имеет вид

$$\left[\begin{array}{c} y-z=0 - \text{плоскость}, \\ x-2y+z=0 - \text{плоскость}. \end{array}\right.$$

В случае **V** дискриминант имеет вид $D=-(y+z)^2(4x^3y-x^2y^2-18xy^3+31y^4+4x^3z+2x^2yz-18xy^2z+100y^3z-x^2z^2+18xyz^2+162y^2z^2+18xz^3+116yz^3+23z^4)$. Тогда

$$-(y+z)^2(4x^3y-x^2y^2-18xy^3+31y^4+4x^3z+2x^2yz-18xy^2z+100y^3z-x^2z^2+ \\ +18xyz^2+162y^2z^2+18xz^3+116yz^3+23z^4)=0$$

$$\left[\begin{array}{c} y+z=0 - \text{плоскость}, \\ 4x^3y-x^2y^2-18xy^3+31y^4+4x^3z+2x^2yz-18xy^2z+100y^3z-x^2z^2+ \\ +18xyz^2+162y^2z^2+18xz^3+116yz^3+23z^4=0. \end{array}\right.$$

Заметим, что плоскость касается поверхности по прямым $x=0$, $y+z=0$ и $y=0$, $z=0$. Жорданова нормальная форма имеет вид

- $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ на прямой пересечения $x = 0, y + z = 0$;
- $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$ на прямой пересечения $y = 0, z = 0$;
- $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$ на плоскости $y + z = 0$ без прямых пересечения;
- на поверхности без прямых пересечения жорданова нормальная форма имеет диагональный вид.

На рис. 4 (слева) область, где $D > 0$, выделена желтым. Множество вырожденных точек имеет вид

$$y + z = 0 - \text{плоскость}.$$

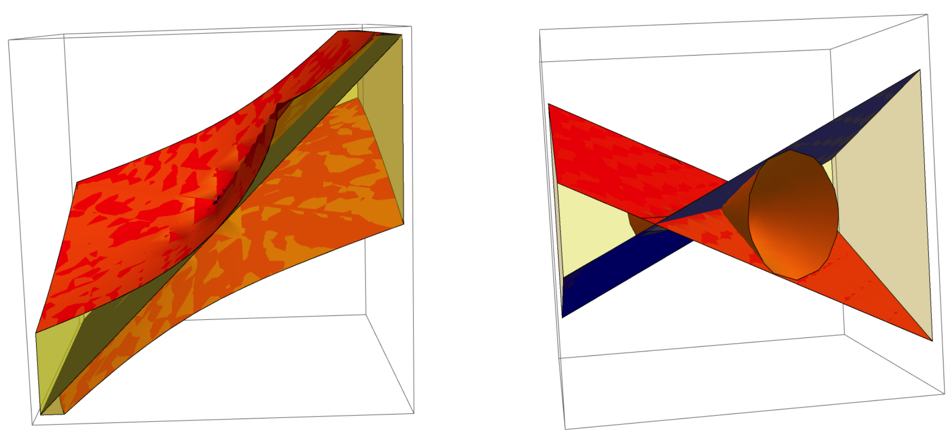


Рис. 4: случаи **V** (слева) и **VI** (справа)

В случае **VI** дискриминант имеет вид $D = \frac{1}{4}(x + 4y - 2z)(x - 4y - 2z)(y^2 + z(x + 2z))^2$. Тогда

$$(x + 4y - 2z)(x - 4y - 2z)(y^2 + z(x + 2z))^2 = 0,$$
$$\left[\begin{array}{l} x + 4y - 2z = 0 - \text{плоскость}, \\ x - 4y - 2z = 0 - \text{плоскость}, \\ \;y^2 + z(x + 2z) = 0 - \text{конус}. \end{array}\right.$$

Заметим, что плоскости касаются конуса по прямым $x + 4y - 2z = 0, y - 2z = 0$ и $x - 4y - 2z = 0$, $y + 2z = 0$. Жорданова нормальная форма имеет вид

- $\begin{pmatrix} -y & 1 & 0 \\ 0 & -y & 0 \\ 0 & 0 & -y \end{pmatrix}$ на прямой пересечения $x + 4y - 2z = 0$, $y - 2z = 0$;
- $\begin{pmatrix} y & 1 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$ на прямой пересечения $x - 4y - 2z = 0$, $y + 2z = 0$;

- $\begin{pmatrix} -y & 1 & 0 \\ 0 & -y & 0 \\ 0 & 0 & -2(y-z) \end{pmatrix}$ на плоскости $x+4y-2z=0$ без прямой пересечения;
- $\begin{pmatrix} y & 1 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 2(y+z) \end{pmatrix}$ на плоскости $x-4y-2z=0$ без прямой пересечения;
- $\begin{pmatrix} -2z & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(x+2z) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(x+2z) \end{pmatrix}$ на конусе без прямых пересечения;
- $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}x+z & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}(x-2z-\sqrt{(x-2z)^2-16y^2}) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}(x-2z+\sqrt{(x-2z)^2-16y^2}) \end{pmatrix}$ в области $D>0$ (выделена желтым на рис. 4 справа).

Множество вырожденных точек имеет вид

$$\left[\begin{array}{l} y=0 - \text{плоскость}, \\ y^2+z(x+2z)=0 - \text{плоскость}. \end{array}\right.$$

В случае **VII** дискриминант имеет вид $D=-4(y^3+3yz^2)^2$. Тогда

$$-4(y^3+3yz^2)^2=0,$$
$$\left[\begin{array}{l} y=0 - \text{плоскость}, \\ y=z=0 - \text{прямая}. \end{array}\right.$$

Жорданова нормальная форма имеет вид

- $\begin{pmatrix} \frac{1}{3}(x-2\sqrt{3}z) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}(x+\sqrt{3}z) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}(x+\sqrt{3}z) \end{pmatrix}$ на плоскости;
- $\begin{pmatrix} \frac{1}{3}x & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}x & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}x \end{pmatrix}$ на прямой.

Множество вырожденных точек имеет вид

$$\left[\begin{array}{l} y=0 - \text{плоскость}, \\ y=z=0 - \text{прямая}. \end{array}\right.$$

В случае **VIII** дискриминант имеет вид $D=y^4(3z^2-4y^2)$. Тогда

$$y^4(3z^2-4y^2)=0,$$
$$\left[\begin{array}{l} y=0 - \text{плоскость}, \\ \sqrt{3}z-2y=0 - \text{плоскость}, \\ \sqrt{3}z+2y=0 - \text{плоскость}. \end{array}\right.$$

Жорданова нормальная форма имеет вид

- $\begin{pmatrix} \frac{1}{3}x & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}x & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}x \end{pmatrix}$ прямой пересечения $y = 0, z = 0$;
- $\begin{pmatrix} \frac{1}{3}(x - 2\sqrt{3}z) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}(x + \sqrt{3}z) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}(x + \sqrt{3}z) \end{pmatrix}$ на плоскости $y = 0$ без прямой пересечения;
- $\begin{pmatrix} \frac{1}{6}(2x - \sqrt{3}z) & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6}(2x - \sqrt{3}z) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}(x + \sqrt{3}z) \end{pmatrix}$ на паре плоскостей без прямой пересечения;
- $\begin{pmatrix} \frac{1}{3}(x + \sqrt{3}z) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6}(2x - \sqrt{3}z - 3\sqrt{-4y^2 + 3z^2}) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6}(2x - \sqrt{3}z + 3\sqrt{-4y^2 + 3z^2}) \end{pmatrix}$ в области $D > 0$ (выделена желтым на рис. 5).

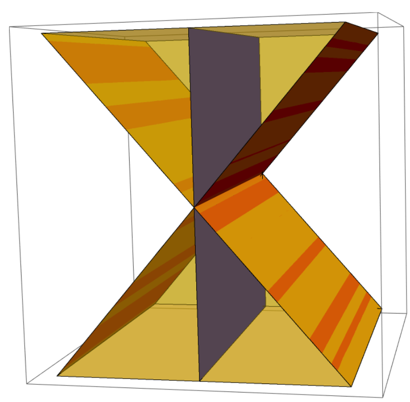


Рис. 5: случай **VIII**

Множество вырожденных точек имеет вид

$$y = 0.$$

Предложение 1. *Любые два оператора Нийенхейса из теоремы 1 имеют различные алгебраические типы (см. определение 3) в следующем смысле: не существует гомеоморфизма пространства $\mathbb{R}^3$ в себя, сохраняющего алгебраический тип оператора Нийенхейса.*

Доказательство. Выше найдено множество особых точек для каждого из восьми операторов (см. рис. 1—5) и найден знак дискриминанта в дополнении к этому множеству (на некоторых из рисунков область $D > 0$ показана желтым). Нетрудно видеть, что существует гомеоморфизм пространства $\mathbb{R}^3$ в себя, совмещающий множества особых точек ($D = 0$) только для следующих пар случаев: **II** и **VIII**, **III** и **VIII**, **IV** и **VI**. Но при таком геомеоморфизме не будет сохраняться знак D для каждой из этих пар случаев. $\square$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дегтярева С. Д. Классификация трехмерных линейных операторов Нийенхейса с функционально независимыми инвариантами // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. 2024. №4. С. 63–67; Moscow University Mathematics Bulletin. 2024. Vol. 79, №4. P. 192–197.

2. Bolsinov A. V., Matveev V. S., Miranda E., Tabachnikov S. Open problems, questions and challenges in finite-dimensional integrable systems // Phil. Trans. R. Soc. A. 2018. Vol. 376, №2131. 20170430 (40 pp.).

3. Konyaev A .Yu. Nijenhuis geometry II: Left-symmetric algebras and linearization problem for Nijenhuis operators // Diff. Geom. Appl. 2021. Vol. 74. P. 101706 (32 pp.).

4. Bolsinov A. V., Konyaev A. Yu., Matveev V. S. Nijenhuis Geometry // Adv. Math. 2021. Vol. 394. P. 108001 (52 pp.).

5. Короткевич А. А. Интегрируемые гамильтоновы системы на алгебрах Ли малой размерности // Математический сборник. 2009. Т. 200, №12. С. 3–40.

REFERENCES

1. Degtiareva, S. D. 2024, "Classification of three-dimensional linear Nijenhuis operators with functionally independent invariants", *Moscow University Mathematics Bulletin*, vol. 79, no. 4, pp. 192–197.

2. Bolsinov, A. V., Matveev, V. S., Miranda, E. & Tabachnikov, S. 2018, "Open problems, questions and challenges in finite-dimensional integrable systems", *Phil. Trans. R. Soc. A*, vol. 376, no. 2131, pp. 20170430 (40 pp.).

3. Konyaev, A. Yu. 2021, "Nijenhuis geometry II: Left-symmetric algebras and linearization problem for Nijenhuis operators", *Diff. Geom. Appl.*, vol. 74, pp. 101706 (32 pp.).

4. Bolsinov, A. V., Konyaev, A. Yu. & Matveev, V. S. 2021, "Nijenhuis Geometry", *Adv. Math.*, vol. 394, pp. 108001 (52 pp.)

5. Korotkevich, A. A. 2009, "Integrable Hamiltonian systems on low-dimensional Lie algebras", *Sb. Math.*, vol. 200, no. 12, pp. 1731–1766.

Получено: 14.04.2025
Принято в печать: 08.12.2025

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 26. Выпуск 5.

УДК: 511 DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-5-84-93

Об одном эвристическом алгоритме построения оптимальных коэффициентов с оптимизацией по h-функции

Ю. А. Басалов, И. Н. Балаба, Н. Н. Добровольский, Н. М. Исаева, А. Д. Панькина

Басалов Юрий Александрович — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: basalov_yurij@mail.ru
Балаба Ирина Николаевна — доктор физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: balabain@tolstovsky.ru
Добровольский Николай Николаевич — доктор физико-математических наук, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова; Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: Nikolai.Dobrovolsky@gmail.com
Исаева Нина Магомедрасуловна — кандидат биологических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: isaevanr@yandex.ru
Панькина Анна Дмитриевна — студент, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: pankinaad@tolstovsky.ru

Аннотация

В работе для $s \geqslant 3$ описывается алгоритм построения последовательностей $PH(s, \vec{a}, N)_i$ — s-мерных оптимальных коэффициентов $\vec{a} = (1, a, a^2 \pmod N), \ldots, a^{s-1} \pmod N))$ по модулю N, таких что $a^s \equiv \pm 1 \pmod N$. Строится последовательность, для которой выполнено, что погрешность численного вычисления интеграла от граничной функции класса E_s^2 $h(\vec{x}) = 3^s \prod_{i=1}^{s}(1 - 2x_i)^2$ по паралеллепипедальным сеткам $M(\vec{a}, N)$ на кубе $[0, 1)^s$ убывает с ростом N.

Ключевые слова: теоретико-числовой метод в приближенном анализе, параллепипедальные сетки.

Библиография: 19 названий.

Для цитирования:
Басалов Ю. А., Балаба И. Н., Добровольский Н. Н., Исаева Н.М., Панькина А. Д. Об одном эвристическом алгоритме построения оптимальных коэффициентов с оптимизацией по h-функции // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 5, с. 84–93.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 26. No. 5.

UDC: 511 DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-5-84-93

On a heuristic algorithm for constructing optimal coefficients with optimization by the h-function

Yu. A. Basalov, I. N. Balaba, N. N. Dobrovolsky, N. M. Isaeva, A. D. Pankina

Basalov Yuri Alexandrovich — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolsoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: basalov_yurij@mail.ru
Balaba Irina Nikolaevna — doctor of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolsoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: balabain@tolstovsky.ru
Dobrovolsky Nikolay Nikolaevich — doctor of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University; Tula State Lev Tolsoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: Nikolai.Dobrovolsky@gmail.com
Isaeva Nina Magomedrasulovna — candidate of biological sciences, Tula State Lev Tolsoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: isaevanr@yandex.ru
Pankina Anna Dmitrievna — student, Tula State Lev Tolsoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: pankinaad@tolstovsky.ru

Abstract

In this paper, for $s \geqslant 3$, we describe an algorithm for constructing sequences $PH(s,\vec{a},N)_i$ — s-dimensional optimal coefficients $\vec{a} = (1, a, a^2 \pmod N, \ldots, a^{s-1} \pmod N)$ modulo N, such that $a^s \equiv \pm 1 \pmod N$. We construct a sequence such that the error in numerically calculating the integral of the boundary function of class E_s^2 $h(\vec{x}) = 3^s \prod_{i=1}^{s}(1-2x_i)^2$ over parallelepiped grids $M(\vec{a}, N)$ on the cube $[0,1)^s$ decreases with increasing N.

Keywords: number-theoretic method in approximate analysis, parallelepipedal grids.

Bibliography: 19 titles.

For citation:
Basalov, Yu. A., Balaba, I. N., Dobrovolsky, N. N., Isaeva, N. M., Pankina, A. D., 2025, “On a heuristic algorithm for constructing optimal coefficients with optimization by the h-function”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 5, pp. 84–93.

1. Введение

Одним из главных объектов исследований в теоретико-числовом методе Н. М. Коробова являются параллелепипедальные сетки и квадратурные формулы на них, предложенные в 1959 году [1, 2]:

$$M(a_1, \ldots, a_{s-1}; N) = \left\{ \left(\frac{k}{N}, \left\{ \frac{ka_1}{N} \right\}, \ldots, \left\{ \frac{ka_{s-1}}{N} \right\} \right) \middle| k = 0, \ldots, N-1 \right\}, \qquad (1)$$

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 f(x_1, \ldots, x_s) dx_0 \ldots dx_{s-1} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f\left(\frac{k}{N}, \left\{ \frac{ka_1}{N} \right\}, \ldots, \left\{ \frac{ka_{s-1}}{N} \right\} \right) + R_N(f) \qquad (2)$$

на классах периодических функций $E_s^\alpha(C)$ с параметром гладкости $\alpha > 1$, задаваемых абсолютно сходящимся рядом Фурье

$$f(x_1, \ldots, x_s) = \sum_{(m_1,\ldots,m_s)\in\mathbb{Z}^s} \frac{C(m_1, \ldots, m_s)}{(\overline{m_1} \ldots \overline{m_s})^\alpha} e^{2\pi i(m_1x_1+\ldots+m_sx_s)}, \tag{3}$$

где для $x \in \mathbb{R}$, $\overline{x} = \max\{1, |x|\}$ и для всех $(m_1, \ldots, m_s) \neq (0, \ldots, 0)$ выполняется неравенство $|C(m_1, \ldots, m_s)| \leqslant$
$\leqslant C$, где C некоторая константа. Для них в работе [3] была поставлена задача о поиске наборов целых чисел $(a_1, \ldots, a_{s-1})$ по модулю натурального N, для которых погрешность квадратурной формулы $R_N(f)$ была бы как можно меньше в том или ином смысле. Такие наборы называются оптимальными коэффициентами.

Начиная с работы Э. Главки [4] вопрос о нахождении оптимальных коэффициентов связан с изучением свойств решёток решений линейного сравнения.

Параллелепипедальные сетки применимы на классе дифференцируемых функций H_s^α с помощью простейших периодизаций функций, подробнее см. глава 1, параграфы 2, 4 [5], либо гладких периодизаций, предложенных И. Ф. Шарыгиным [6]. Периодизации можно применять не к функциям, а к сеткам (смотри [7]). В работе [8] рассмотрен вопрос о применение параллелепипедальных сеток для интегрирования функций ограниченной вариации.

Для оценки качества квадратурных формул есть два классических метода. Первый подход это — нахождение точной верхней грани нормы функционала погрешности численного интегрирования

$$\sup_{f\in E_s^\alpha(C)} |R_N(f)|. \tag{4}$$

Более подробную информацию на эту тему см. в монографии С. М. Никольского [9]. Второй подход основан на вероятностных методах, его мы затрагивать не будем. Для классов функций $E_s^\alpha(C)$ Н.М. Коробовым [10] введена граничная функция класса

$$f_0 = C \sum_{(m_1,\ldots,m_s)\in\mathbb{Z}^s} \frac{e^{2\pi i(m_1x_1+\ldots+m_sx_s)}}{(\overline{m_1} \ldots \overline{m_s})^\alpha}, \tag{5}$$

на которой достигается точная верхняя грань нормы функционала погрешности численного интегрирования. Эти функции использовались еще в [5]. Для нахождения оптимальных коэффициентов будем использовать граничную функцию класса $E_s^2(C)$

$$h(x_1, \ldots, x_s) = 3^s \prod_{i=1}^{s} (1 - 2x_i)^2. \tag{6}$$

2. Решётки, ассоциированные с однородными линейными сравнениями

Пусть N — натуральное, большее 1. Обозначим через $\Lambda(a_1, a_2, \ldots, a_{s-1}; N)$ целочисленную решётку, состоящую из всех целых точек $(m_0, \ldots, m_{s-1})$, удовлетворяющих линейному сравнению

$$m_0 + a_1m_1 + \ldots + a_{s-1}m_{s-1} \equiv 0 \pmod N. \tag{7}$$

Далее, s — делитель $\varphi(N)$ и целое $a \in (1, N/2]$ удовлетворяет сравнению

$$a^s \equiv 1 \pmod N,$$

а

$$a^i \not\equiv 1 \pmod N, \quad 0 < i < s.$$

Тогда a принадлежат показателю s по модулю N и

$$1, a, a^2, \dots, a^{s-1}$$

— различные вычеты по модулю N.
Теперь рассмотрим случай, когда $2s$ — делитель $\varphi(N)$ и целое a удовлетворяет сравнению

$$a^s \equiv -1 \pmod N,$$

а

$$a^i \not\equiv 1 \pmod N, \quad 0 < i < 2s.$$

Тогда a принадлежат показателю $2s$ по модулю N и

$$1, a, a^2, \dots, a^{2s-1}$$

— различные вычеты по модулю N. Более подробно о показателях смотри [11] глава 6.
Положим

$$N_1 = [(N-1)/2], N_2 = [N/2],$$

$$a_1 = a, a_2 \equiv a^2 \pmod N, \dots, a_{s-1} \equiv a^{s-1} \pmod N, \text{ где } a_i \in [-N_1, N_2]. \tag{8}$$

Замечание 1. *Так как решётка $\Lambda(a_1, a_2, \dots, a_{s-1}; N)$ при замене знаков у некоторых a_i на противоположный не меняется с точностью до симметрии относительно гиперплоскостей размерности $s-1$, то можно положить*

$$\sqrt[s]{N-1} \leqslant a \leqslant N/2. \tag{9}$$

Замечание 2. *Параметры решётки $\Lambda(a_1, a_2, \dots, a_{s-1}; N)$*

$$a_1 = a, a_2 \equiv a^2 \pmod N, \dots, a_{s-1} \equiv a^{s-1} \pmod N, \text{ где } a_i \in [-N_1, N_2],$$

такие что

$$a^s \equiv \pm 1 \pmod N \text{ и } a^i \not\equiv 1 \pmod N, \quad 0 < i < s,$$

и параметры решётки $\Lambda(a_1^*, a_2^*, \dots, a_{s-1}^*; N)$

$$a_1^* = a^i \pmod N, a_2^* \equiv a^{2i} \pmod N, \dots, a_{s-1}^* \equiv a^{i(s-1)} \pmod N, \text{ где } a_i^* \in [-N_1, N_2],$$

такие что

$$a^{is} \equiv \pm 1 \pmod N \text{ и } a^{ik} \not\equiv 1 \pmod N, \quad 0 < k < s,$$

задают одну и туже решетку $\Lambda(a_1, a_2, \dots, a_{s-1}; N)$ с точностью до симметрии относительно гиперплоскостей размерности $s-1$.

Гиперболический параметр решётки, задается равенством

$$q(\Lambda) = \min_{\vec{m} \in \Lambda, \vec{m} \neq \vec{0}} \overline{m_0} \dots \overline{m_{s-1}}, \tag{10}$$

где $\overline{m} = \max\{1, |m|\}$. Подробнее смотрите монографию [12].

Замечание 3. *Для s-мерного гиперболического параметра выполняются неравенства*

$$q(\Lambda(a_1, a_2, \ldots, a_{s-1}; N)) \leqslant \min_{0<i<s} q(\Lambda(a_i; N)). \quad (11)$$

$$q(\Lambda(a_1, a_2, \ldots, a_{s-1}; N)) \leqslant \min_{0<i,j<s, i\neq j} q(\Lambda(a_i - a_j; N)). \quad (12)$$

$$q(\Lambda(a; N)) \leqslant a. \quad (13)$$

Поэтому на параметры решётки $\Lambda(a_1, a_2, \ldots, a_{s-1}; N)$, наилучшие относительно интегрирования,

$$a_1 = a, a_2 \equiv a^2 \pmod N, \ldots, a_{s-1} \equiv a^{s-1} \pmod N, \text{ где } a_i \in [-N_1, N_2],$$

такие что

$$a^s \equiv \pm 1 \pmod N \text{ и } a^i \not\equiv 1 \pmod N, \quad 0 < i < s,$$

можно наложить ограничения:

$$|a_i| > C(N), \ 0 < i < s, \ |a_i - a_j| > C(N), 0 < i, j < s, i \neq j, \quad (14)$$

где $C(N) = N/ln^s(N)$ — оценка из работы [15].

Вычислить гиперболический параметр s-мерной решётки решений линейного сравнения можно за $O((ln(N))^{s-1})$ операций [13], а условие (14) можно проверять за $O(ln(N))$ операций [14].

3. Последовательность параллелепипедальных сеток с убывающей погрешностью численного интегрирования граничной функции класса

Последовательность s-мерных оптимальных коэффициентов $PH(s, a_1, \ldots, a_{s-1}; N)_i$ строим следующим образом:

1. Перебираем a с условием замечания 1 и 2. Находим различные с точностью до перестановки наборы $(a_1, \ldots, a_{s-1})$ по модулю N, такие что a_1 принадлежит показателю s или $2s$ по модулю N.

2. Для полученных наборов проверяем условия замечания 3, если они выполнены, то вычисляем интеграл от функции $h(x_1, \ldots, x_s)$ по квадратурной формуле 2. Нас будет интересовать набор для которого $|R_N(h)|$ минимальный.

3. Из полученных наборов строим убывающую по $|R_N(h)|$ с ростом N последовательность.

Последовательности оптимальных коэффициентов для $s = 3, \ldots, 11$, $N \leqslant 10^6$ см. по адресу https://poivs.tsput.ru/ru/Count/TMK/BestCoeffs. Ниже приведены выборки из этих последовательностей.

s=3			s=4			s=5		
N	a	$R_N(h)$	N	a	$R_N(h)$	N	a	$R_N(h)$
18	7	0,857601						
52	23	0,165817						
74	27	0,096179	73	22	0,605890			
98	31	0,064119	97	47	0,424429			
155	56	0,029865	226	95	0,128203	262	73	0,540898
436	45	0,005508	457	170	0,045586	453	19	0,270954
584	81	0,003518	562	221	0,031911	568	25	0,198168
837	253	0,001894	825	307	0,019506	852	25	0,120193
1220	319	0,000887	1360	251	0,008337	1212	589	0,072506
4122	1967	0,000124	3298	937	0,002322	3275	859	0,018334
5562	881	6,90E-05	7735	2192	0,000573	6262	2205	0,006880
8180	2099	3,43E-05	8352	2071	0,000532	8168	1697	0,004630
29419	5612	3,61E-06	10656	4841	0,000332	21220	381	0,001091
36087	8831	2,61E-06	32697	4591	5,21E-05	33550	1961	0,000595
66707	18162	8,65E-07	72761	9569	1,44E-05	55748	20411	0,000264
87863	36081	4,89E-07	87975	33418	1,07E-05	85244	24125	0,000126
117061	47090	3,00E-07	190320	86243	2,60E-06	130724	39371	7,09E-05
361044	82151	3,80E-08	498435	169387	5,12E-07	383532	61489	1,24E-05
742442	236367	9,97E-09	598946	246915	4,18E-07	663985	264566	5,30E-06
861498	407485	7,49E-09	876641	36291	2,15E-07	928378	48791	3,21E-06
s=6			s=7			s=8		
N	a	$R_N(h)$	N	a	$R_N(h)$	N	a	$R_N(h)$
629	208	0,782899						
925	193	0,486496						
1385	182	0,294259	1766	71	0,91419			
3281	1109	0,100260	4118	1039	0,330884	5440	937	0,943521
5645	1427	0,049279	6223	1786	0,202369	6113	1178	0,813778
8321	606	0,029442	8193	553	0,149511	8273	2742	0,571604
11115	1114	0,020559	12470	1269	0,086316	10081	1064	0,461922
32513	12473	0,004564	38756	7307	0,020557	35153	8875	0,107398
56290	22147	0,002098	59222	13315	0,011725	60736	14695	0,053958
91104	34447	0,001061	86706	10871	0,007377	84913	7336	0,036507
113269	33665	7,58E-04	107691	17693	0,005486	116497	6297	0,024833
373469	138835	1,29E-04	351189	784	1,08E-03	334849	5503	0,006616
762565	279426	4,52E-05	659402	96619	4,51E-04	689089	187847	2,53E-03
973245	74611	3,13E-05	777287	356124	3,60E-04	780640	199123	2,20E-03
s=9			s=10			s=11		
N	a	$R_N(h)$	N	a	$R_N(h)$	N	a	$R_N(h)$
17164	8129	0,917022						
34067	6643	0,427520	52824	19997	0,917562			
61362	23117	0,218938	59675	15254	0,806003			
80271	9188	0,162477	103525	34788	0,436024	152948	55323	0,994392
336987	106117	0,029954	336025	60097	0,118757	333524	10809	0,427936
552026	245945	1,65E-02	585173	171372	6,30E-02	553528	9521	2,48E-01
806246	362827	9,98E-03	782936	6537	4,48E-02	796764	6887	1,64E-01

Для оценки качества квадратурной формул с оптимальными коэффициентами можно использовать нижнию оценку полученную И.Ф. Шарыгиным в работе [17]

$$R_N(f) > O\left(\frac{ln^{s-1}(N)}{N^{\alpha}}\right).$$

Ниже на рисунках приведено отношение погрешности численного интегрирования $R_N(h)$ к числу точек для оптимальных коэффициентов полученных разными методами

$$C(N) = R_N(h)\frac{N^2}{ln^{s-1}(N)}.$$

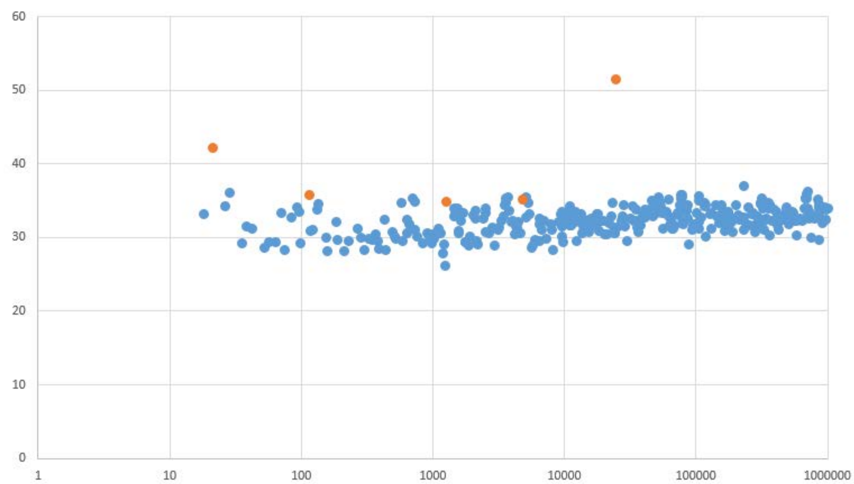


Рис. 1: Для размерности $s = 3$ по горизонтальной оси в логарифмической шкале число точек N, по вертикальной $C(N)$, синие точки соответствуют набором оптимальных коэффициентов полученными по алгоритму из данной статьи, оранжевые — приведенным в статье [18]

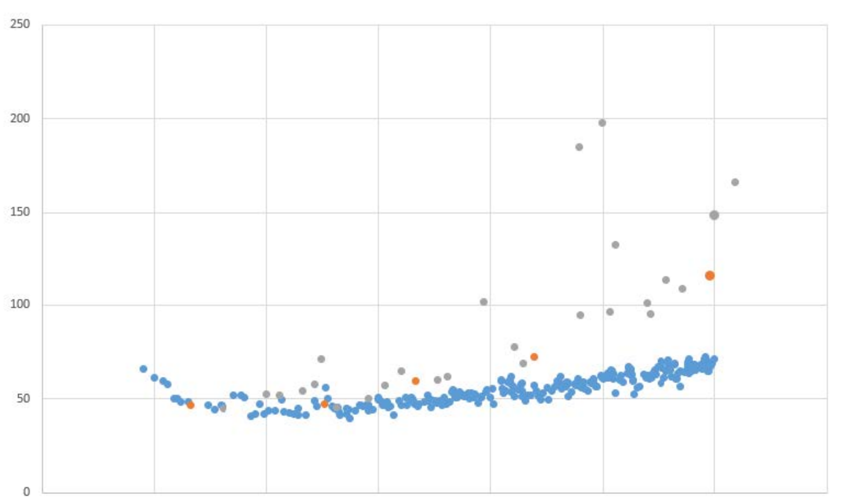


Рис. 2: Для размерности $s = 4$ по горизонтальной оси в логарифмической шкале число точек N, по вертикальной $C(N)$, синие точки соответствуют набором оптимальных коэффициентов полученными по алгоритму из данной статьи, оранжевые — приведенным в статье [18], серые — приведенным в статье [19].

Ниже приведены результаты статистической обработки $R_N(h) \leqslant 1$ для наборов оптимальных коэффициентов, соответствующих показателям s и $2s$ по модулю N. Методом наименьших квадратов вычислены коэффициенты C и β для размерностей $s = 3, \ldots, 10$.

$$R_N(h) \approx C\frac{ln^{\beta}(N)}{N^2}.$$

s	C	β
3	26,092225	2,094288
4	16,611884	3,528775
5	6,3581984	4,961214
6	2,0202589	6,308449
7	0,4167914	7,707383
8	0,0781266	9,045447
9	0,0155859	10,27278
10	4,549E-03	11,29249

4. Заключение

В работе представлен эвристический алгоритм поиска оптимальных коэффициентов, дающий наилучший из известных в смысле минимизации функционала погрешности численного интегрирования h-функции. Отметим что для размерности $s = 3$ получен результат близкий к нижней оценки.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Н. М. Коробов, Приближенное вычисление многомерных интегралов, Докл. АН СССР, 1959. Т. 124. С. 1207.

2. Н. М. Коробов, Вычисление кратных интегралов методом оптимальных коэффициентов // Вестн. Моск. ун-та, 1959. № 4. С. 19-25.

3. Н. М. Коробов, “Свойства и вычисление оптимальных коэффициентов”, Докл. АН СССР, 132:5 (1960), 1009–1012

4. E. Hlawka, Zur angenäherten Berechnung mehrfacher Integrale // Monatshefte für Mathematik, 66 (1962), 140–151.

5. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. / М.: Физмат-гиз, 1963.

6. И. Ф. Шарыгин, “О применении теоретико-числовых методов интегрирования в случае непериодических функций”, Докл. АН СССР, 132:1 (1960), 71–74.

7. Н. Н. Добровольский, С. А. Скобельцын, Л. А. Толоконников, Н. В. Ларин, “Применение теоретико-числовых сеток в задачах дифракции звука на упругих телах”, Чебышевский сб., 23:5 (2022), 206–226.

8. Н. М. Коробов, “О некоторых вопросах теории диофантовых приближений”, УМН, 22:3(135) (1967), 83–118; Russian Math. Surveys, 22:3 (1967), 80–118

9. С.М. Никольский, Квадратурные формулы, С добавлениями Н. П. Корнейчука, 4-е изд., Наука, М., 1988 , 255 с.

10. Н. М. Коробов, “Квадратурные формулы с комбинированными сетками”, Матем. заметки, 55:2 (1994), 83–90; Math. Notes, 55:2 (1994), 159–164

11. И. М. Виноградов, Основы теории чисел, Изд. 9-е, перераб., Наука, М., 1981.

12. Н. М. Коробов, Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. (второе издание) М.: МЦНМО, 2004. 288 с.

13. В. А. Быковский, Алгоритм вычисления локальных минимумов решеток // Докл. РАН. 2004. Т. 399. № 5. С. 585–589.

14. Dobrovol'skii, N.N., Dobrovol'skii, N.M., Basalov, Y.A., Rebrov, E.D. (2023). Fast Calculation of Parameters of Parallelepipedal Nets for Integration and Interpolation. In: Alikhanov, A., Lyakhov, P., Samoylenko, I. (eds) Current Problems in Applied Mathematics and Computer Science and Systems. APAMCS 2022. Lecture Notes in Networks and Systems, vol 702. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-031-34127-4_16

15. Н. С. Бахвалов, О приближенном вычислении кратных интегралов, Вестн. МГУ, № 4 (1959), 3—18.

16. Dobrovol'skii, N.N., Dobrovol'skii, N., Rebrova, I., Rebrov, E. (2023). On Calculating the Hyperbolic Parameter of a Two-Dimensional Lattice of Linear Comparison Solutions. In: Alikhanov, A., Lyakhov, P., Samoylenko, I. (eds) Current Problems in Applied Mathematics and Computer Science and Systems. APAMCS 2022. Lecture Notes in Networks and Systems, vol 702. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-031-34127-4_8

17. И. Ф. Шарыгин, “Оценки снизу погрешности квадратурных формул”, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 3:2 (1963), 370–376; U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys., 3:2 (1963), 489–497

18. А. А. Белов, М. А. Тинтул, “Многомерные кубатуры со сверхстепенной сходимостью”, Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр., 514:1 (2023), 107–111; Dokl. Math., 108:3 (2023), 514–518

19. Zhubanysheva A. Zh., Temirgaliev N., Temirgalieva Zh. N., Application of divisor theory to the construction of tables of optimal coefficients for quadrature formulas // Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz., 2009, Vol. 49, No. 1, pp. 14–25.

REFERENCES

1. Korobov, N.M. 1959, “Approximate computation of multiple integrals”, *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 124, pp. 1207.

2. Korobov, N.M. 1959, “Computation of multiple integrals by the method of optimal coefficients”, *Vestnik Moskovskogo Universiteta*, 4, pp. 19–25.

3. Korobov, N.M. 1960, “Properties and calculation of optimal coefficients”, *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 132(5), pp. 1009–1012.

4. Hlawka. E. 1962, “Zur angenäherten Berechnung mehrfacher Integrale”, *Monatshefte für Mathematik*, 66 (1962), 140–151.

5. Korobov, N.M. 1963, *Number-Theoretic Methods in Approximate Analysis*. Moscow: Fizmatgiz.

6. Sharigin, I.F. 1960, “On the application of number-theoretic methods of integration in the case of nonperiodic functions”, *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 132(1), pp. 71–74.

7. Dobrovol'skii, N.N., Skobel'tsyn, S.A., Tolokonnikov, L.A. and Larin, N.V. 2022, "Application of number-theoretic grids in problems of sound diffraction on elastic bodies", *Chebyshevskii Sbornik*, 23(5), pp. 206–226.

8. Korobov, N.M. 1967, "On some questions of the theory of Diophantine approximations", *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, 22(3), pp. 83–118; *Russian Mathematical Surveys*, 22(3), pp. 80–118.

9. Nikol'skii, S.M. 1988, *Quadrature Formulas*, 4th edn, with additions by N.P. Korneichuk. Moscow: Nauka. (In Russian).

10. Korobov, N.M. 1994, "Quadrature formulas with combined nets", *Matematicheskie Zametki*, 55(2), pp. 83–90; *Mathematical Notes*, 55(2), pp. 159–164.

11. Vinogradov, I.M. 1981, *Elements of Number Theory*, 9th rev. edn. Moscow: Nauka.

12. Korobov, N.M. 2004, *Number-Theoretic Methods in Approximate Analysis*, 2nd edn. Moscow: MCCME.

13. Bykovsky, V.A. 2004, "An algorithm for computing local minima of lattices", *Doklady Akademii Nauk*, 399(5), pp. 585–589.

14. Dobrovol'skii N. N., Dobrovol'skii N. M., Basalov Yu. A., Rebrov E. D. 2023. "Fast Calculation of Parameters of Parallelepipedal Nets for Integration and Interpolation", *In: Alikhanov, A., Lyakhov, P., Samoylenko, I. (eds) Current Problems in Applied Mathematics and Computer Science and Systems. APAMCS 2022. Lecture Notes in Networks and Systems*, vol 702. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-031-34127-4_16

15. Bahvalov, N.S. 1959, "On approximate computation of multiple integrals", *Vestnik Moskovskogo Universiteta*, 4, pp. 3–18.

16. Dobrovol'skii, N. N., Dobrovolskii, N. M., Rebrova, I. Yu., Rebrov, E. D. 2023. "On Calculating the Hyperbolic Parameter of a Two-Dimensional Lattice of Linear Comparison Solutions". *In: Alikhanov, A., Lyakhov, P., Samoylenko, I. (eds) Current Problems in Applied Mathematics and Computer Science and Systems. APAMCS 2022. Lecture Notes in Networks and Systems*, vol 702. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-031-34127-4_8

17. Sharigin, I.F. 1963, "Lower bounds for the error of quadrature formulas", *Zhurnal Vychislitel'noi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki*, 3(2), pp. 370–376; *U.S.S.R. Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 3(2), pp. 489–497.

18. Belov, A.A. Tintul, M.A. 2023, "Multidimensional cubature formulas with super-polynomial convergence", *Doklady Rossiiskoi Akademii Nauk. Matematika, Informatika, Protsessy Upravleniya*, 514(1), pp. 107–111; *Doklady Mathematics*, 108(3), pp. 514–518.

19. Zhubanysheva, A. Zh., Temirgaliev, N., Temirgalieva, Zh. N. 2009, "Application of divisor theory to the construction of tables of optimal coefficients for quadrature formulas", *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, Vol. 49, No. 1, pp. 14–25.

Получено: 27.05.2025
Принято в печать: 08.12.2025

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 26. Выпуск 5.

УДК: 530.007 DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-5-94-110

Алгоритм факторизации вектора состояния квантовой системы

А. В. Боева

Боева Анастасия Валерьевна — магистрант, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: anastasiavaleri555@gmail.com

Аннотация

Работа посвящена рассмотрению многокубитовых и многокудитовых квантовых систем в чистых состояниях, их описанию с точки зрения разбиения на непересекающиеся множества запутанных кубитов (кудитов) — наборы запутанности, представлена формула логарифмической запутанности многокубитовых и многокудитовых квантовых систем в чистых и смешанных состояниях. С помощью методов искусственного интеллекта произведена классификация многокубитовых систем, учитывающая максимальное по вектору состояния значение мгновенной запутанности и логарифмическую запутанность, построены диаграммы распределения этих характеристик в зависимости от факторизации вектора состояния системы на наборы запутанности. Построена формула средней по ансамблю логарифмической запутанности для многокубитовых и многокудитовых квантовых систем в чистых состояниях.

Ключевые слова: квантовая запутанность, многокубитовые системы, многокудитовые системы, кубиты, кудиты, наборы запутанности, средняя по ансамблю квантовая запутанность для многокубитовых и многокудитовых квантовых систем.

Библиография: 17 названий.

Для цитирования:
Боева А. В. Алгоритм факторизации вектора состояния квантовой системы // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 5, с. 94–110.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 26. No. 5.

UDC: 530.007 DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-5-94-110

Algoritm for factoring the state vector of a quantum system

A. V. Boeva

Boeva Anastasiya Valer'evna — master's student, Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: anastasiavaleri555@gmail.com

Abstract

The work is devoted to the consideration of multi-qubit and multi-qudit quantum systems in pure states, their description in terms of partitioning into non-overlapping sets of entangled qubits (qudits) — sets of entanglement, the formula of logarithmic entanglement of multi-qubit and multi-qudit quantum systems in pure and mixed states is presented. Using artificial intelligence methods, the classification of multi-qubit systems is made, taking into account the maximum instantaneous entanglement value and logarithmic entanglement, diagrams of the distribution of these characteristics depending on the factorization of the system state vector into sets of entanglement are constructed. A formula for the ensemble-averaged logarithmic entanglement for multi-qubit and multi-qudit quantum systems in pure states has been constructed.

Keywords: quantum entanglement, multi-qubit systems, multi-qudit systems, qubits, qudits, entanglement sets, ensemble-average quantum entanglement for multi-qubit and multi-qudit quantum systems.

Bibliography: 17 titles.

For citation:
Boeva, A. V. 2025, “Algoritm for factoring the state vector of a quantum system”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 5, pp. 94–110.

1. Введение

Огромную роль в современной физике, например, в квантовой криптографии, квантовых вычислениях и при исследовании процессов на атомарном уровне, играет явление квантовой запутанности [1, 3, 4, 5, 2, 6, 7, 8]. Это явление описывает зависимость характеристик двух квантовых систем, при котором измерение состояния одной из систем мгновенно влияет на состояние другой.

Квантовую систему в чистом состоянии можно характеризовать вектором состояния $|\Psi\rangle$, которое образовано суперпозицией состояний $|i\rangle$, $i=\overline{0,2_2^{n-1}}$ [9, 10, 12, 11, 14, 13]. Квантовая система называется запутанной, если её вектор состояния непредставим в виде тензорного произведения векторов состояния подсистем:

$$|\Psi\rangle \neq |\Psi_1\rangle \otimes |\Psi_2\rangle\,. \tag{1}$$

Примером запутанных состояний являются состояния Гринберга-Хорна-Цайлингера [15]:

$$|\Psi_{1,2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|000\rangle \pm |111\rangle\right). \tag{2}$$

Если квантовая система находится в смешанном состоянии, то её можно описать с помощью матрицы плосности ρ, для систем в чистых состояниях матрица плотности ρ выражается через вектор состояния как:

$$\rho = |\Psi\rangle\,\langle\Psi|\,. \tag{3}$$

Элементы матрицы, стоящие на главной диагонали, задают вероятности обнаружить систему в одном из состояний суперпозиции, поэтому они неотрицательны. Запутанность системы из двух кубитов (A,B) можно найти по формуле [16]:

$$\tau = 4\,det\rho_A = 4\,det\rho_B, \tag{4}$$

где ρ_A, ρ_B - матрицы плотности подсистем A и B.

Интересной задачей является задача определения запутанности квантовой системы из трёх и более кубитов или для систем с большим чем два числом уровней - кудитов. Сначала необходимо найти ответ на более простой вопрос: как по вектору состояния системы в чистом состоянии понять, запутана она или нет? В работе представлено решение задачи факторизации вектора состояния системы на векторы состояния подсистем, алгоритм, позволяющий по исходному вектору состояния системы ответить на вопрос, построены формула средней по ансамблю логарифмической запутанности для многокубитовых и многокудитовых систем в чистых состояниях и формула логарифмической запутанности для многокубитовых и многокудитовых систем в чистых и смешанных состояниях.

2. Алгоритм разбиения системы в чистом состоянии на наборы запутанности

В основе определения наборов запутанности квантовой системы лежит запутанность двух кубитов (кудитов) (A, B), два кубита (кудита) принадлежат разным наборам запутанности, если возможно определить такое разбиение системы на подсистемы, что:

1. Кубиты (кудиты) A и B находятся в разных наборах.
2. Состояние каждой из подсистем чистое.

Если такого разбиения нет, тогда кубиты A и B лежат в одном наборе запутанности. Тогда можно построить алгоритм факторизации вектора состояния на наборы запутанности:

1. Отделение незапутанных кубитов:
   a) Если на k-м месте всех векторов столбцов с ненулевыми коэффициентами стоят только нули (единицы), то k-й кубит незапутан.
   b) Если на m-м месте всех векторов столбцов с ненулевыми коэффициентами стоит одинаковое число нулей и единиц и отношение не равных нулю коэффициентов при одинаковых столбцах, образованных после вычёркивания m-й цифры, к образованным после вычёркивания m-й цифры постоянно, то m-й кубит незапутан с остальными.
2. Поиск пар запутанных кубитов:

   Пусть c_0 - сумма коэффициентов вектора состояния, у которых на i-м и j-м местах стоят нули, c_1 - сумма коэффициентов, у которых на i-м месте стоит ноль, а на j-м - единица, c_2 - сумма коэффициентов, у которых на i-м месте стоит единица, а на j-м ноль, c_3 - сумма коэффициентов, у которых на i-м и j-м местах стоят единицы. Тогда i-й и j-й кубиты образуют пару запутанности, если выполняется равенство:

$$c_0 c_3 = c_1 c_2. \tag{5}$$

3. Объединение пар запутанных кубитов в наборы запутанности по свойству транзитивности запутанности [17]:

   Если i-й кубит запутан с j-м кубитом, а j-й кубит запутан с k-м кубитом, то кубиты i, j и k входят в один набор запутанности.

Работу алгоритма можно показать на примере трёхкубитовой системы с вектором состояния:

$$|\Psi_3\rangle = \left(a_0 |00\rangle_{AB} + a_1 |01\rangle_{AB} + a_2 |10\rangle_{AB} + a_3 |11\rangle_{AB}\right) \otimes \left(b_0 |0\rangle_C + b_1 |1\rangle_C\right), \tag{6}$$

где a_0, a_1, a_2, a_3, b_0 и b_1 - вещественные числа, удовлетворяющие условиям нормировки:

$$\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{1}|a_ib_j|^2 = 1; \quad \sum_{i=0}^{3}|a_i|^2 = 1 \quad \sum_{i=0}^{1}|b_i|^2 = 1. \tag{7}$$

Вектор состояния системы можно переписать в виде:

$$|\Psi_3\rangle = a_0b_0\,|000\rangle_{ABC} + a_0b_1\,|001\rangle_{ABC} + a_1b_0\,|010\rangle_{ABC} + a_1b_1\,|011\rangle_{ABC} +$$

$$+a_2b_0\,|100\rangle_{ABC} + a_2b_1\,|101\rangle_{ABC} + a_3b_0\,|110\rangle_{ABC} + a_3b_1\,|111\rangle_{ABC}\,. \tag{8}$$

Следует проверить, есть ли в системе незапутанные кубиты. Можно начать проверку с кубита A, для этого необходимо найти отношения коэффициентов, стоящих при столбцах, образованных после вычёркивания $|0\rangle_A$ к коэффициентам, стоящих при тех же стобцах, полученных после вычёркивания $|1\rangle_A$:

$$\frac{a_0b_0}{a_2b_0}; \quad \frac{a_0b_1}{a_2b_1}; \quad \frac{a_1b_0}{a_3b_0}; \quad \frac{a_1b_1}{a_3b_1}. \tag{9}$$

Видно, что эти соотношения равны друг другу, когда $a_0a_3 = a_1a_2$, что соответствует ситуации, когда кубиты A и B незапутаны.

Для кубита B отношения коэффициентов имеет вид:

$$\frac{a_0b_0}{a_1b_0}; \quad \frac{a_0b_1}{a_1b_1}; \quad \frac{a_2b_0}{a_3b_0}; \quad \frac{a_2b_1}{a_3b_1}. \tag{10}$$

Кубит B незапутан, когда выполняется такое же равенство, как и для кубита A:

$$a_0a_3 = a_1a_2. \tag{11}$$

Осталось рассмотреть кубит C. Отношения коэффициентов для этого кубита записываются как:

$$\frac{a_0b_0}{a_0b_1}; \quad \frac{a_1b_0}{a_1b_1}; \quad \frac{a_2b_0}{a_2b_1}; \quad \frac{a_3b_0}{a_3b_1}. \tag{12}$$

Эти отношения попарно равны друг другу, поэтому кубит C незапутан с кубитами A и B.

Следующим шагом является поиск запутанных пар кубитов. Можно начать с проверки пары кубитов A и B на запутанность, для этого необходимо найти сумму коэффициентов вектора состояния при $|00\rangle_{AB}$ - c_0, сумму коэффициентов при $|01\rangle_{AB}$ - c_1, сумму коэффициентов при $|10\rangle_{AB}$ - c_2 и сумму коэффициентов при $|11\rangle_{AB}$ - c_3:

$$c_0 = a_0(b_0+b_1); \quad c_1 = a_1(b_0+b_1) \quad c_2 = a_2(b_0+b_1); \quad c_3 = a_3(b_0+b_1). \tag{13}$$

Отсюда с учётом второго условия алгоритма (5) следует, что кубиты A и B образуют пару запутанности, когда выполняется равенство:

$$a_0a_3 = a_1a_2. \tag{14}$$

Таким образом, продемонстрирована работа построенного в работе алгоритма на примере системы из трёх кубитов, в приложении приведена реализация этого алгоритма в среде программирования Python.

Алгоритм факторизации вектора состояния на наборы запутанности можно обобщить на случай кудита с d уровнями:

1. Отделение незапутанных кудитов:

a) Если цифра на k-м месте всех векторов столбцов с ненулевыми коэффициентами для всех векторов одинаковая, то k-й кудит незапутан.

b) Если на m-м месте всех векторов столбцов с ненулевыми коэффициентами стоит одинаковое количество различных цифр и отношение не равных нулю коэффициентов при одинаковых столбцах, образованных после вычёркивания m-й цифры, к образованным после вычёркивания m-й цифры постоянно, то m-й кудит незапутан с остальными.

2. Поиск пар запутанных кудитов:

Пусть $x_{a_i b_j}$ - коэффициент вектора состояния $|ab\rangle_{ij}$ $(a, b \in \{0, 1, ..., d-1\})$, образованного свёрткой вектора состояния $|\Psi\rangle$ по всем кудитам кроме i-го и j-го, тогда i-й и j-й кубиты образуют пару запутанности, если выполняется равенство:

$$\begin{vmatrix} x_{0_i 0_j} & x_{0_i 1_j} & ... & x_{0_i (d-1)_j} \\ x_{1_i 0_j} & x_{1_i 1_j} & ... & x_{0_i (d-1)_j} \\ ... & ... & ... & ... \\ x_{(d-1)_i 0_j} & x_{(d-1)_i 1_j} & ... & x_{(d-1)_i (d-1)_j} \end{vmatrix} = 0. \tag{15}$$

3. Объединение пар запутанных кудитов в наборы запутанности по свойству транзитивности запутанности [17]:

Если i-й кудит запутан с j-м кудитом, а j-й кудит запутан с k-м кудитом, то кудиты i, j и k входят в один набор запутанности.

3. Логарифмическая запутанность

Для многокубитовых и многокудитовых квантовых систем с d уровнями в чистых и смешанных состояниях логарифмическую запутанность можно определить по формуле:

$$\tau = \frac{d^d}{n} \sum_{i=1}^{n} (\rho_i \cdot \log_n q_i), \tag{16}$$

где ρ_i - матрица плотности i-го кубита ; q_i - количество кудитов в наборе с i-м кудитом.

Среднюю по ансамблю логарифмическую запутанность можно найти интегрируя вектор состояния квантовой системы по мере $d\Omega$:

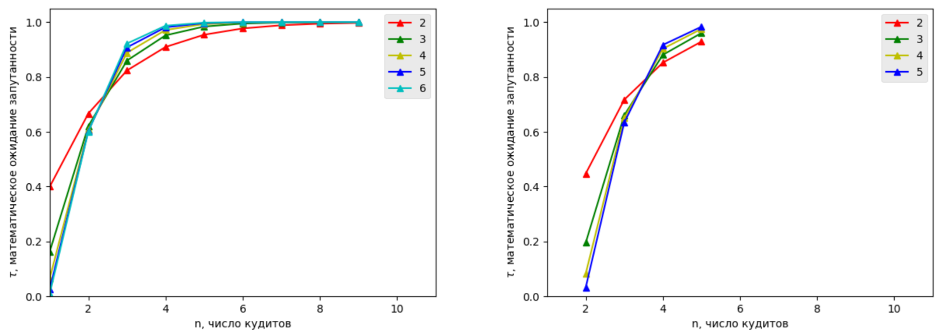
$$\tau = \int\limits_{\Omega} \det \rho_A d\Omega, \tag{17}$$

где $d\Omega = \frac{1}{(2\pi)^{d^n}} \prod\limits_{i=0}^{d^n-1} d\phi_i \prod\limits_{j=0}^{d^n-2} d \sin^{2d^n-2-2j} \theta_j$, $0 \leqslant \phi_i \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \theta_j \leqslant 2\pi$.

Можно получить среднюю по ансамблю логарифмическую запутанность для квантовой системе из n кудитов с d уровнями:

$$\tau = d^{d-1} \frac{(d^{n-1}-1)! d^n!}{(d^{n-1}-d)!(d^n+d-1)!}. \tag{18}$$

В среде программирования Python построим теоретический и экспериментальный, полученный в ходе моделирования произвольных векторов состояния квантовых систем, графики зависимости запутанности от числа кудитов для квантовых систем, разным цветом показаны характеристики векторов состояния квантовых систем с различным числом уровней.



(a) Теоретическая зависимость средней по ансамблю систем логарифмической запутанности от числа кудитов в системе

(b) Экспериментальная зависимость средней по ансамблю систем логарифмической запутанности от числа кудитов в системе

Рис. 1: Графики зависимости средней по ансамблю систем логарифмической запутанности от числа кудитов в системе

При усреднении по большему числу систем точность будет выше. Значение средней запутанности стремится к единице.

4. Моделирование векторов состояния и классификация систем с различными наборами запутанности с помощью регрессионного метода k ближайших соседей

Каждую систему в чистом состоянии можно охарактеризовать с помощью распределения кубитов по наборам запутанности. Например, для системы с вектором состояния (8) распределение по наборам запутанности запишется как A,B - C, если кубиты A и B запутаны, и A-B-C, если кубиты незапутаны. Для упрощения математической модели представим, что кубиты неразличимы, т.е. ситуация A,B - C равносильна ситуации A,C - B (здесь запутаны кубиты A и C, и незапутан кубит B). Эти две ситуации можно объединить в один случай: (1-2). Для трёхкубитовой системы возможны три варианта разбиения:

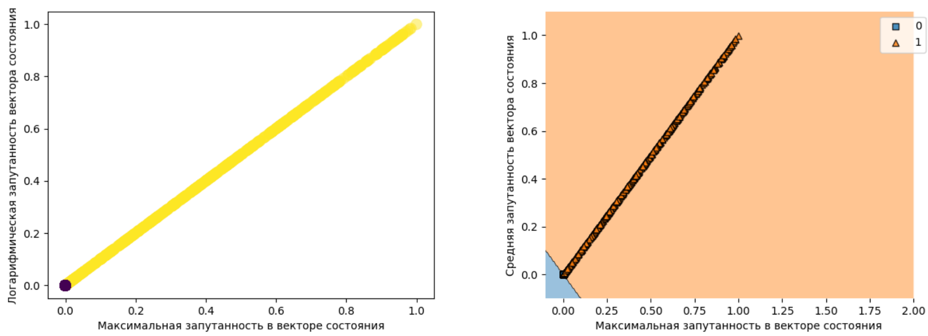
1. Система незапутана: (1-1-1).
2. Запутаны два кубита в системе: (1-2) или (2-1).
3. Запутаны все кубиты: (3).

Для k-го кубита системы из n кубитов можно определить мгновенную запутанность:

$$\tau = 4 \sum_{i=0}^{2^{n-1}-2} \sum_{j=i+1}^{2^{n-1}-1} \begin{vmatrix} x_{2^k i} & x_{2^k i+2^{k-1}} \\ x_{2^k j} & x_{2^k j+2^{k-1}} \end{vmatrix}^2 . \tag{19}$$

В программной среде Python было смоделировано 1000 случайных векторов состояния со случайными коэффициентами и случайным разбиением по наборам запутанности, для каждого из них найдена логарифмическая запутанность и максимальная по состоянию мгновенную запутанность, затем построены графики распределения их по разбиениям на наборы запутанности. С помощью регрессионного метода k ближайших соседей (при k = 2) вектора состояния систем были классифицированы по вариантам разбиений.

Для последовательности изложения следует начать с простого случая генерации векторов состояния двухкубитовых систем. В этом случае возможны два варианта распределения наборов запутанности: (1-1) - кубиты незапутаны и (2) - кубиты запутаны, в первом варианте максимальная запутанность равна нулю (точки, соответствующие незапутанным системам выделены фиолетовым на рисунке 1a), во втором случае запутанность первого кубита равна запутанности второго кубита и равна логарифмической запутанности системы, поэтому на графике в пределе при стремлении числа итераций к бесконечности получится прямая, точки прямой выделены жёлтым на рисунке 1a. Классификация векторов состояния по двум вариантам распределения наборов представлена на рисунке 1b, вариант (1-1) обозначен нулём, (2) - единицей.

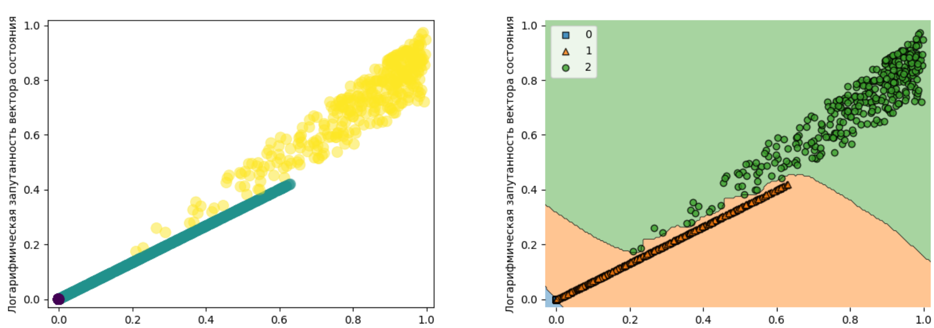


(a) Точечный график распределения векторов состояния

(b) Классификация систем регрессионым knn - методом

Рис. 2: Классификация векторов состояния по наборам запутанности для двух кубитов

Смоделированы векторы состояния трёхкубитовых систем для указанных в начале параграфа вариантов разбиений, полученный график с классификацией векторов состояния по наборам запутанности представлен на рисунке 3, точность классификации составила $\approx 99.9\%$.



(a) Точечный график распределения векторов состояния

(b) Классификация систем регрессионым knn - методом

Рис. 3: Классификация трёхкубитовых систем: 0 - (1-1-1); 1 - (1-2); 2 - (3)

Для систем из четырёх кубитов возможны пять вариантов распределения запутанности:

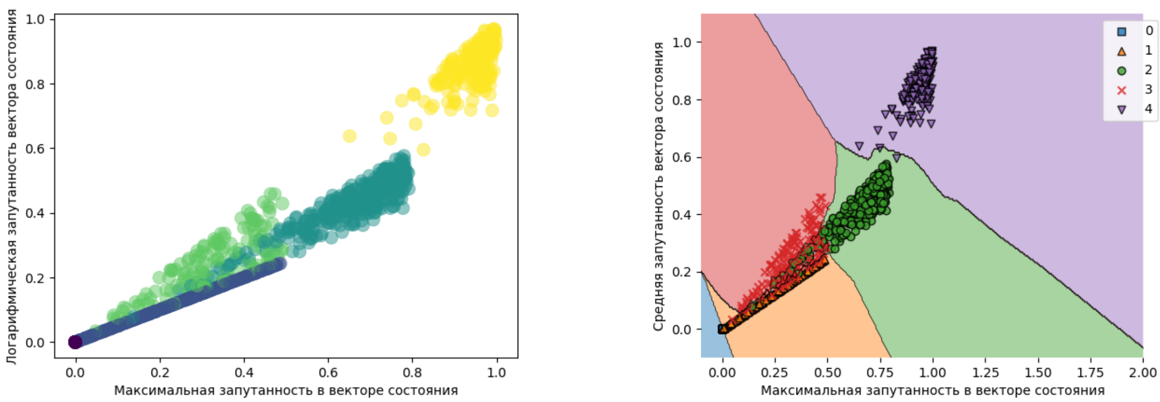
1. Система незапутана: (1-1-1-1).
2. Два кубита запутаны и два незапутаны: (1-1-2).

3. Кубиты запутаны по два: (2-2).

4. Запутаны три кубита: (1-3).

5. Запутаны все кубиты в системе: (4).

Классификация векторов состояния по разбиениям на наборы запутанности показана на рисунке 4. Точность ниже чем для трёхкубитовых систем, она составила ≈ 97.2 %.

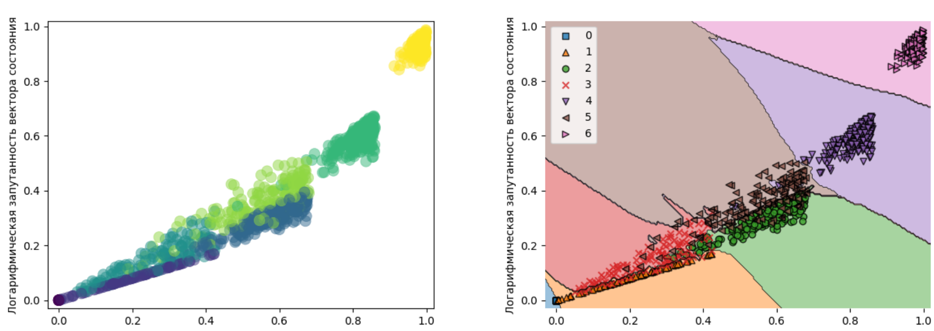


(a) Точечный график распределения векторов состояния

(b) Классификация систем регрессионным knn-методом

Рис. 4: Классификация четырёхкубитовых систем: 0 - (1-1-1-1); 1 - (1-1-2); 2 - (1-3); 3 - (2-2); 4 - (4)

Для пятикубитовых систем варианты разбиений и классификация представлены на рисунке 5.



(a) Точечный график распределения векторов состояния

(b) Классификация систем регрессионым knn - методом

Рис. 5: Классификация пятикубитовых систем: 0 - (1-1-1-1-1); 1 - (1-1-1-2); 2 - (1-1-3); 3 - (1-2-2); 4 - (1-4); 5 - (2-3); 6 - (5)

Здесь точность классификации составила $\approx 94\%$.

Число вариантов разбиения вектора состояния n-кубитовой системы на наборы запутанности можно определить по формуле:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{m!} \sum_{i=0}^{m} (-1)^i C_m^i (m-i)^n, \tag{20}$$

где m - число подсистем (наборов запутанности), на которые факторизуется вектор состояния системы. Из этой формулы видно, что число вариантов разбиения растёт сверхполиномиально, поэтому точность классифиции систем с большим числом кубитов будет низкой.

5. Заключение

Основными результатами работы являются:

1. Введение понятия наборов запутанности квантовых систем из двух и более кубитов (кудитов), а также построение алгоритма разбиения чистых систем на эти наборы для систем из кубитов или кудитов с d уровнями.

2. Построение формулы логарифмической запутанности для многокубитовых и многокудитовых квантовых систем в чистых и смешанных состояниях:

$$\tau = \frac{d^d}{n} \sum_{i=1}^{n} (\rho_i \cdot \log_n q_i), \tag{21}$$

   где ρ_i - матрица плотности i-го кубита ; q_i - количество кудитов в наборе с i-м кудитом.

3. Получение формулы для средней по ансамблю логарифмической запутанности по ансамблю для кудитов в системах с d уровнями:

$$\tau = d^{d-1} \frac{(d^{n-1}-1)!d^n!}{(d^{n-1}-d)!(d^n+d-1)!}. \tag{22}$$

4. В среде программирования Python смоделировано 1000 случайных векторов состояния со случайными коэффициентами и случайным разбиением по наборам запутанности, для каждого из них найдена логарифмическая запутанность и максимальная по состоянию мгновенную запутанность, построены графики распределения их по разбиениям на наборы запутанности и с помощью регрессионного метода k ближайших соседей вектора состояния систем классифицированы по вариантам разбиений. Моделирование проведено для чистых систем с различным числом кубитов, системы с количеством кубитов не рассматривались, так как с ростом числа кубитов сверхэкспоненциально растёт число возможных вариантов разбиения системы на наборы запутанности.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горбачев, В. Н., Физические основы современных информационных процессов или учеб. пос. / В.Н. Горбачев , А. И. Жилиба // Санкт-Петербург, 2001. — 43 с.

2. Холево, А. С. Введение в квантовую теорию информации. / А. С. Холево — М.: МЦНМО, 2002. — 128 с.

3. Имре, Ш. Квантовые вычисления и связь. / Ш. Имре, Ф. Балаж — М.: Физматлит, 2008. — 319 с.

4. Benenti, G., Principles of quantum computation and information (Vol. 1 Basic concepts) / G. Benenti , G. Casati , G. Strini / World Scientific, 2004. — 273 p.

5. Diósi, L. A Short Course in Quantum Information Theory. Lect. Notes Phys. 713 // Springer, Berlin Heidelberg, 2007. — 161 p.

6. Lvovsky, A. I. Quantum Physics An Introduction Based on Photons / A. I. Lvovsky // Springer, University of Calgary, Canada, 2018. – 303 p.

7. Baumester, D., The Physics of Quantum Information / D. Baumester, A. Ekert, A. Tsailinger // Springer Berlin, Heidelberg, 2002 – 315 p.

8. Валиев К. А. Квантовые компьютеры: надежды и реальность / К. А. Валиев, А. А. Кокин // Ижевск: "Регулярная и хаотическая динамика 2001. — 352 с.

9. Nielsen M., Chang I. Quantum computing and quantum information. [Nil'sen M., CHang I. Kvantovye vychisleniya i kvantovaya informaciya]. Moscow: MIR, 2006, 824 p.

10. Валиев, К. А. Квантовые компьютеры и квантовые вычисления / К. А. Валиев // Успехи физических наук. — 2005. — Т. 175, № 31. — С. 3–39.

11. Калачев, А. А. Квантовая информатика в задачах: учеб.-метод. пос. / А.А. Калачев. — Казань: Казан. ун-т, 2012 — 48 с.

12. Холево, А. С. Математические основы квантовой информатики [Текст] / А. С. Холево. - Москва : МИАН, 2018. - 117 с. : ил.; 29 см. - (Лекционные курсы НОЦ/ Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, ISSN 2226-8782; вып. 30).; ISBN 978-5-98419-080-7

13. Preskill J. / Quantum computation and information // California Institute of Technology, Caltech 1998. — 321 p.

14. Kaye P. An Introduction to Quantum Computing / P. Kaye, R. Laflamme, M. Mosca // Oxford University Press, 2007. — 274 p.

15. D. Greenberger, M. A. Horne, A. Zeilinger, Going beyond Bell's Theorem in“Bell's Theorem, Quantum Theory, and Conceptions of the universe”, M. Kafatos (Ed.), Knower, Dordrecht, p. 69-72 (1989).

16. Stib, V.-H. Problems and their solutions in quantum computing and quantum information theory. [Stib, V.-H. Zadachi i ih resheniya v kvantovyh vychisleniyah i kvantovoj teorii informacii]. / V.-H., Stib, J. Hardy. – Moscow-Izhevsk: SIC "Regular and chaotic dynamics 2007. – 296 p.

17. Стадная, Н. П., Боева, А. В., Клинских, А. Ф., Запутанность в чистых многокубитовых системах / Н. П. Стадная, А. В. Боева, А. Ф. Клинских // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2023. – № 2. – С. 16-21.

REFERENCES

1. Gorbachev, V. N., Zhiliba, V. N. 2001, “The physical foundations of modern information processes”, St. Petersburg, 43 p.

2. Holevo, A. S. 2002, “Introduction to the quantum theory of information”, MCCME, Moscow, 128 p.

3. Imre, Sh. & Balazs, F. 2008, "Quantum computing and communication Fizmatlit, Moscow, 319 p.

4. Benenti, G. 2004, “Principles of quantum computation and information”, vol. 1 Basic concepts, World Scientific, Italy, 273 p.

5. Diósi, L. 2007, “A Short Course in Quantum Information Theory”, Lect. Notes Phys. 713, Springer, Berlin Heidelberg, 161 p.

6. Lvovsky, A. I. 2018, “Quantum Physics An Introduction Based on Photons”, Springer, University of Calgary, Canada, 303 p.

7. Baumester, D., Ekert, A., Tsailinger, A. 2002, “ The Physics of Quantum Information ” Springer Berlin, Heidelberg, 315 p.

8. Valiev, K. A. 2001, “Quantum computers: hopes and reality”, Regular and Chaotic Dynamics, Izhevsk, 352 p.

9. Nielsen, M. & Chang, I. 2006, “Quantum computing and quantum information”, MIR, Moscow, 824 p.

10. Valiev, K. A. 2005, “Quantum computers and quantum computing”, *Phisics* — Uspekhi, no. 48(1), pp. 3–39.

11. Kalachev, A. A. 2012, “Quantum computer science in problems”, Kazan Federal University, Kazan, 48 p.

12. Holevo, A. S. 2018, “ Matematicheskie osnovi kvantovoi informatiki ”, Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, 117 p.

13. Preskill, J. 1998, “Quantum computation and information” California Institute of Technology, Caltech, 321 p.

14. Kaye, P., Laflamme, R. & Mosca, M. 2007, “Introduction to Quantum Computing” Oxford University Press, Oxford, 274 p.

15. Greenberger, D., Horne, M. A. & Zeilinger, A. 1989, “Going beyond Bell’s Theorem in Bell’s Theorem, Quantum Theory, and Conceptions of the universe” , M. Kafatos (Ed.), Knower, Dordrecht, pp. 69-72.

16. Stib, V.-H.& Hardy., J. 2007, “Problems and their solutions in quantum computing and quantum information theory”, SIC "Regular and chaotic dynamics Moscow-Izhevsk, 296 p.

17. N. P. Stadnaya, A. V. Boeva, A. F. Klinskikh, 2023, “Transitivity of entanglement states in multiqubit systems”, Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics, no. 2, pp. 16-21.

Получено: 18.07.2025
Принято в печать: 08.12.2025

Приложение

```
import random
import numpy as np
import math
import cmath
import scipy.linalg as la

def nSkobka(i):
    n1 = []
    while i > 0:
        k = random.randint(1,i)
        i = i - k
        n1.append(k)
    return(n1)

def RandVec(n1):
    for j in range(0,len(n1)):
        v = np.sqrt(np.random.uniform(0, 1, 2**n1[j])) * np.exp(1.j *
np.random.uniform(0, 2 * np.pi, 2**n1[j]))
        #Норма случайного вектора состояния
        norm = np.linalg.norm(v)
        #Нормировка случайного вектора состояния
        const = 1/norm
        v = const*v
        if j == 0:
            V = v
        else:
            V = np.kron(V,v)
    return(V)


n=12
nStates=2**n
l = nSkobka(n)
print(l)
c = RandVec(l)
#print(c)

# Отделение незапутанных кубитов

i=0
k=0
num=[]
CNotZero=[]
for i in range(0,nStates):
    if c[i]!=0:
        k=k+1
        num.append(i)
        CNotZero.append(c[i])

b=[]
i=0
for i in range(0,k):
    b.append(bin(int(num[i]))[2:])

i=0
```

```
for i in range(0,k):
    while len(str(b[i]))!=n:
        b[i]='0'+b[i]
    b[i] = [int(a) for a in b[i]]

#print(b)

NotEnt=[]
i=0
j=0
for j in range(0,n):
    easyq=0
    for i in range(1,k):
        if b[i][j]!=b[0][j]:
            easyq=1
    if easyq==0:
        NotEnt.append(j+1)

i=0
j=0
f=[[0]*k for _ in range(0,n)]

for i in range(0,n):
    for j in range(0,k):
        f[i][j]=b[j][i]
        j=j+1
    i=i+1

iNot_Ent=0
for iNot_Ent in range(0,n):
    if iNot_Ent+1 not in NotEnt:
        C_nol=[]
        c_nol_koeff=[]
        C_one=[]
        c_one_koeff=[]

        i=0
        f_three=[]
        for i in range(0,n):
            if i!=iNot_Ent:
                f_three.append(f[i])
                i=i+1

        i=0
        j=0
        h3=[[0]*(n-1) for _ in range(0,k)]

        for i in range(0,n-1):
            for j in range(0,k):
                h3[j][i]=f_three[i][j]
                j=j+1
            i=i+1

        i3=0
        k0=0
        k1=0
        for i3 in range(0,k):
```

```
            if b[i3][iNot_Ent]==0:
                k0=k0+1
                C_nol.append(h3[i3])
                c_nol_koeff.append(CNotZero[i3])


            if b[i3][iNot_Ent]==1:
                k1=k1+1
                C_one.append(h3[i3])
                c_one_koeff.append(CNotZero[i3])
            i3=i3+1


        if k0==k1:
            c_One_koeff=[]
            #print(C_nol)
            #print(C_one)
            j=0
            i=0
            k3=0
            for j in range(0,k0):
                for i in range(0,k0):
                    if C_one[i]==C_nol[j]:
                        c_One_koeff.append(c_one_koeff[i])
                        k3=k3+1
                    i=i+1
                j=j+1
            #print(k3)
            #print(c_One_koeff)
            #print(c_nol_koeff)
            if k3==k0:
                Delen=c_One_koeff[0]/c_nol_koeff[0]
                Delen = round(Delen.real, 8) + round(Delen.imag, 8) *
1j
                i=1
                kdel=0
                for i in range(1,k0):
                    Del = c_One_koeff[i]/c_nol_koeff[i]
                    Del = round(Del.real, 8) + round(Del.imag, 8) * 1j
                    if Del!=Delen:
                        kdel=kdel+1
                if kdel==0:
                    if iNot_Ent not in NotEnt:
                        NotEnt.append(iNot_Ent)
    iNot_Ent=iNot_Ent+1

#print(NotEnt)

if len(NotEnt)==n:
    print('Система не запутана')

else:

    Ent=[]

    z=list(range(n))
    i=0
```

```
for i in NotEnt:
    z.remove(i)

m=combinations(z,2)
M=[]
for ii in m:
    M.append(ii)
len_M=len(M)

i7=0
for i7 in range(0,len_M):

    one=M[i7][0]
    two=M[i7][1]

    a0=0
    a1=0
    a2=0
    a3=0

    for i3 in range(0,k):

        if (b[i3][one]==0) and (b[i3][two]==0):
            #if (CNotZero[i3]+a0)!=0:
            a0=a0+CNotZero[i3]

        if (b[i3][one]==0) and (b[i3][two]==1):
            #if (CNotZero[i3]+a1)!=0:
            a1=a1+CNotZero[i3]

        if (b[i3][one]==1) and (b[i3][two]==0):
            #if (CNotZero[i3]+a2)!=0:
            a2=a2+CNotZero[i3]

        if (b[i3][one]==1) and (b[i3][two]==1):
            #if (CNotZero[i3]+a3)!=0:
            a3=a3+CNotZero[i3]

    a0a3 = a0*a3
    a0a3 = round(a0a3.real, 8) + round(a0a3.imag, 8) * 1j

    a1a2 = a1*a2
    a1a2 = round(a1a2.real, 8) + round(a1a2.imag, 8) * 1j

    if a0a3!=a1a2:
        Ent.append(M[i7])
    i7=i7+1

#print(Ent)

k1=n-len(NotEnt)
k2=len(Ent)
ent=[]

i=0
for i in range(0,n):
    if i not in ent:
```

```
qub=[]
j=0
for j in range(0,k2):
    if i in Ent[j]:
        i1=0
        for i1 in range(0,2):
            qub.append(Ent[j][i1]+1)
            ent.append(Ent[j][i1])
if len(qub)!=0:
    qub=list(set(qub))
    print('Запутаны кубиты ',qub)
```

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 26. Выпуск 5.

УДК: 511.3 DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-5-110-136

Задача Гельфонда для разложений по линейным рекуррентным последовательностям

А. А. Жукова, А. В. Шутов

Жукова Алла Адольфовна — кандидат физико-математических наук, Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации (Владимирский филиал) (г. Владимир).
e-mail: georg967@mail.ru
Шутов Антон Владимирович — доктор физико-математических наук, Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых (г. Владимир).
e-mail: a1981@mail.ru

Аннотация

Гельфонд получил результат о равномерной распределенности сумм цифр b-ичных разложений натуральных чисел по классам вычетов по произвольному модулю d. Позднее Ламбергер и Тусвальднер, используя глубокие оценки тригонометрических сумм, получили налог теоремы Гельфонда, в котором вместо b-ичных разложений используются разложения по линейным рекуррентным последовательностям, удовлетворяющим условию Парри и некоторому дополнительному условию на коэффициенты. В статье мы даем новое, более простое и самозамкнутое доказательство теоремы Ламбергера – Тусвальднера. Наше доказательство носит чисто комбинаторный характер и требует только условия Парри. Кроме того, мы даем достаточно простую явную формулу для показателя степени в остаточном члене. В отличие от результата Ламбергера – Тусвальднера, полученный нами показатель зависит только от d и порядка линейной рекуррентной последовательности, но не от ее коэффициентов. Однако наш результат не включает равнораспределенность по модулю d сумм цифр натуральных чисел, пробегающих арифметические прогрессии, что также было доказано Ламбергером и Тусвальднером.

В конце работы кратко обсуждаются некоторые нерешенные задачи.

Ключевые слова: системы счисления, линейные рекуррентные последовательности, суммы цифр, задача Гельфонда.

Библиография: 17 названий.

Для цитирования:
Жукова А. А., Шутов А. В. Задача Гельфонда для разложений Островского по линейным рекуррентным последовательностям // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 5, с. 110–136.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 26. No. 5.

UDC: 511.3 DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-5-110-136

Gelfond's problem for expansions in linear recurrent bases

A. A. Zhukova, A. V. Shutov

Zhukova Alla Adolfovna — candidate of physical and mathematical sciences, Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration (Vladimir branch) (Vladimir).
e-mail: georg967@mail.ru
Shutov Anton Vladimirovich — doctor of physical and mathematical sciences, Vladimir State University named after Alexander Grigorievich and Nikolai Grigorievich Stoletov (Vladimir).
e-mail: a1981@mail.ru

Abstract

Gelfond obtained a result on the uniform distribution of sums of digits of b-ary expansions of natural numbers over residue classes modulo d for an arbitrary d. Later, Lamberger and Thuswaldner, using deep estimates of trigonometric sums, obtained an analogue of Gelfond's theorem, in which instead of b-ary expansions, expansions over linear recurrent bases satisfying the Parry condition and some additional condition on the coefficients, are used. In this paper, we give a new, simpler and self-contained, proof of the Lamberger-Tkuswaldner theorem. Our proof is purely combinatorial and require only Parry condition. In addition, we give a quite simple explicit formula for the exponent in the remainder term. In contrast to the Lamberger-Thuswaldner result, obtained exponent depends only on d and the order of the linear recurrent sequence, but not on its coefficients. However, our result does not include the equidistribution of the sums of the digits modulo d of natural numbers running from an arbitrary arithmetic progression, which was also proved by Lamberger and Thuswaldner.

At the end of the paper, some unsolved problems are briefly discussed.

Keywords: numeration systems, linear recurrent sequences, sums of digits, Gelfond problem.

Bibliography: 17 titles.

For citation:
Zhukova, A. A., Shutov, A. V. 2025, "Gelfond's problem for Ostrovsky expansions in linear recurrent sequences" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 5, pp. 110–136.

1. Введение

Пусть

$$n = \sum_{i=0}^{b(n)} b_i(n) b^k,$$

где $b_i(n) \in \{0, 1 \ldots, b-1\}$, $b(n) = \max\{k : b^k \leq n\}$ – разложение n в b-ичной системе счисления. Пусть

$$N_{d,a}^{(b)}(X) = \sharp \left\{ m < X : \sum_{i=0}^{b(m)} b_i(n) \equiv a \pmod{d} \right\}$$

– количество натуральных чисел, не превосходящих X, для которых сумма цифр b-ичного разложения принадлежит заданному классу вычетов по модулю d. Известно, что при условии взаимной простоты d и $b-1$ существует постоянная $\mu < 1$ (зависящая от b) такая, что

$$N_{d,a}^{(b)}(X) = \frac{X}{d} + O(n^{\mu}).$$

Данный результат был доказан Файном [1] в случае, когда d – простое число и А.О. Гельфондом [2] в общем случае.

Данный результат в дальнейшем изучался во многих направлениях. Среди них можно выделить перенос результатов на случай, когда рассматриваются суммы цифр разложений чисел, пробегающих некоторую последовательность (например, в упомянутых работах Файна и Гельфонда m могло также пробегать арифметическую прогрессию), изучение совместного распределения сумм цифр нескольких натуральных чисел (см., например [3]), изучение аналогов задачи Гельфонда для разложений по линейным рекуррентным последовательностям.

Рассмотрим класс линейных рекуррентных последовательностей $\{T_n\}$, удовлетворяющих условиям:

1. $\{T_n\}$ является линейной рекуррентной последовательностью порядка r, то есть существуют целые числа $a_i \geqslant 0$ $(1 \leqslant i < r)$ и $a_r > 0$ такие, что для каждого $n \geqslant 0$

$$T_{n+r} = a_1 T_{n+r-1} + a_2 T_{n+r-2} + \ldots + a_r T_n. \tag{1}$$

2. Начальные условия определяются следующим образом:

$$T_0 = 1 \qquad \text{и} \qquad T_n \geqslant a_1 T_{n-1} + a_2 T_{n-2} + \ldots + a_n T_0 + 1$$
$$\text{при} \qquad 1 \leqslant n < r. \tag{2}$$

3. Коэффициенты a_1, a_2, ..., a_r удовлетворяют условию Парри [4], то есть

$$(a_s, a_{s+1}, \ldots, a_r) \preccurlyeq (a_1, a_2, \ldots, a_{r-s+1}) \tag{3}$$

для $1 < s \leqslant d$, где $\preccurlyeq$ обозначает лексикографический порядок.

Замечание 1. *Условие Парри для последовательности $\{T_n\}$ может быть переписано следующим образом: при всех $n \geqslant 0$ и $1 \leqslant k < r$ справедливо неравенство*

$$T_{n+r-k} > \sum_{i=k+1}^{r} a_i T_{n+r-i}.$$

Любое натуральное число N можно представить в виде

$$N = \sum_{i=0}^{t(N)} t_i(N) T_i, \tag{4}$$

где $t(N) = \max\{i : T_i \leqslant N\}$, $t_i(N) \in \mathbb{Z}$, $t_i(N) \geqslant 0$, причем коэффициенты $t_i(N)$ подбираются так, что для любого $i \geqslant 0$ было справедливо неравенство

$$0 \leqslant N - \sum_{h=i}^{t(N)} t_h(N) T_h < T_i. \tag{5}$$

Данное условие означает, что разложение (4) получается по жадному алгоритму.

Различные задачи о суммах цифр подобных разложений изучались, в частности, в [5]–[8]. Нас будет интересовать аналог задачи Гельфонда.

Пусть $N_{d,a}^{(T)}(X)$ — количество натуральных чисел, меньших X, для которых сумма коэффициентов разложения (4) с условием (5) сравнима с a по модулю d, то есть

$$N_{d,a}^{(T)}(X) = \sharp \left\{ m < X : \sum_{i=0}^{t(m)} t_i(m) \equiv a \pmod d \right\}.$$

Нас интересуют асимптотические результаты вида

$$N_{d,a}^{(T)}(X) = \frac{X}{d} + O(n^{\mu}).$$

Подобный результат впервые был получен при $d = 2$ в работе [9]. Некоторые более тонкие результаты об остаточном члене можно найти в [10]. В случае простейшей линейной рекуррентной последовательности – последовательности Фибоначчи, еще более тонкие результаты содержатся в [11].

Общий результат об аналоге задачи Гельфонда для произвольного d при дополнительном условии взаимной простоты d и $a_1 + \ldots + a_r - 1$ был получен в фундаментальной работе [12]. Более того, в ней был получен ряд других важных результатов, в частности, был рассмотрен аналог задачи Гельфонда в случае, когда числа пробегают арифметическую прогрессию.

В основе доказательства из [12] лежал глубокий и имеющие многочисленные приложения результат об оценке тригонометрической суммы $\sum_{m<X} e^{2\pi i(\frac{a}{b}\sum_{i=0}^{t(m)} t_i(m)+ym)}$, доказательство которого, среди прочего, использовало сложные результаты из [13].

Отметим, что константа μ в результатах из [9] и [12] зависела от d и линейной рекуррентной последовательности. В случае $d = 2$ методами из [9] и [10] можно получить достаточно простое описание константы μ в виде отношения логарифмов максимумов модулей некоторых явно выписываемых алгебраических уравнений. В случае произвольного d работа [12] по сути тоже содержит некоторый эффективный алгоритм вычисления константы μ, однако этот алгоритм чрезвычайно сложен (даже его описание заняло бы несколько страниц) и не был реализован ни для одной линейной рекуррентной последовательности.

В настоящей работе мы даем новое, более простое, доказательство аналога теоремы Гельфонда в случае разложений по линейным рекуррентным последовательностям. Наше доказательство носит чисто комбинаторный характер и не использует оценок тригонометрических сумм. Кроме того, оно позволяет получить достаточно простую формулу для показателя степени в остаточном члене. Более того, наш результат, в отличие от [12], не требует условия d и $a_1 + \ldots + a_r - 1$, а показатель степени остаточного члена зависит только от модуля d и порядка линейного рекуррентного соотношения, но не зависит от самого соотношения.

2. Основной текст статьи

Положим $\varepsilon_{d,a}(m)$ равным единице, если сумма цифр соответствующего разложения m сравнима с a по модулю d, и равным $-\frac{1}{d-1}$ в противном случае, то есть

$$\varepsilon_{d,a}(m) = \begin{cases} 1, & \text{если } \sum\limits_{i=0}^{t(m)} t_i(m) \equiv a \pmod d, \\ -\frac{1}{d-1}, & \text{если } \sum\limits_{i=0}^{t(m)} t_i(m) \not\equiv a \pmod d. \end{cases}$$

Лемма 1. *Имеет место явная формула*

$$N_{d,a}^{(T)}(X) = \sum_{m=0}^{X-1} \left(\varepsilon_{d,a}(m) + \frac{1}{d-1} \right) \cdot \frac{d-1}{d}.$$

Справедливость данного утверждения следует из определения $\varepsilon_{d,a}(m)$.

Определим величины

$$S_{d,a}(X) = \sum_{m=0}^{X-1} \varepsilon_{d,a}(m) \qquad \text{и} \qquad S_{d,a}^*(n) = S_{d,a}(T_n) = \sum_{m=0}^{T_n-1} \varepsilon_{d,a}(m).$$

Для $S_{d,a}^*(n)$ справедлива лемма.

Лемма 2. *Имеет место явная формула*

$$\sum_{a=0}^{d-1} S_{d,a}^*(n) = 0.$$

Доказательство. Из определения $\varepsilon_{d,a}(m)$ следует очевидное равенство $\sum\limits_{a=0}^{d-1} \varepsilon_{d,a}(m) = 0$, поэтому в силу определения $S_{d,a}^*(n)$ получаем

$$\sum_{a=0}^{d-1} S_{d,a}^*(n) = \sum_{a=0}^{d-1} \sum_{m=0}^{T_n-1} \varepsilon_{d,a}(m) = \sum_{m=0}^{T_n-1} \sum_{a=0}^{d-1} \varepsilon_{d,a}(m) = 0.$$

Лемма 2 доказана.

Обозначим через $H(n+r)$ множество целых неотрицательных чисел, меньших T_{n+r}, то есть

$$H(n+r) = \{m : \, m \in \mathbb{Z}, \, 0 \leqslant m < T_{n+r}\}.$$

Из условий (1) и (3) следует, что $a_1 \geqslant 1$, $a_r \geqslant 1$ и $a_s \geqslant 0$ при $1 < s < r$, поэтому можно утверждать:

$$0 < a_1 T_{n+r-1} \leqslant \sum_{h=1}^{2} a_h T_{n+r-h} \leqslant \sum_{h=1}^{3} a_h T_{n+r-h} \leqslant \ldots \leqslant \sum_{h=1}^{r-1} a_h T_{n+r-h} < \sum_{h=1}^{r} a_h T_{n+r-h}.$$

Разобьем множество $H(n+r)$ на непересекающиеся подмножества $H^s(n+r)$ следующим образом:

$$\begin{gathered} H^1(n+r) = \{m : \, m \in \mathbb{Z}, \; 0 \leqslant m < a_1 T_{n+r-1}\}; \\ H^s(n+r) = \varnothing, \text{ если } \; a_s = 0 \; \text{ и } \; 1 < s < r; \\ H^s(n+r) = \left\{ m : \, m \in \mathbb{Z}, \; \sum_{h=1}^{s-1} a_h T_{n+r-h} \leqslant m < \sum_{h=1}^{s} a_h T_{n+r-h} \right\}, \text{если } \; a_s \neq 0 \; \text{ и } \; 2 \leqslant s \leqslant r. \end{gathered} \tag{6}$$

Возможны два случая: $a_1 > 1$ и $a_1 = 1$. При $a_1 > 1$ промежуток $0 \leqslant m < a_1 T_{n+r-1}$ разделим на a_1 частей и введем множества

$$H_j^1(n+r) = \{m : \, m \in \mathbb{Z}, \, (j-1) T_{n+r-1} \leqslant m < j T_{n+r-1}\}, \tag{7}$$

где $1 \leqslant j \leqslant a_1$. Если $a_1 = 1$, то будем полагать $H_1^1(n+r) = H^1(n+r)$.

Для каждого непустого множества $H^s(n+r)$ также рассмотрим два случая: $a_s > 1$ и $a_s = 1$. В том случае, когда $a_s > 1$ множество $H^s(n+r)$ разобьем на a_s подмножеств $H^s_j(n+r)$:

$$H^s_j(n+r) = \left\{ m:\ m \in \mathbb{Z},\ \sum_{h=1}^{s-1} a_h T_{n+r-h} + (j-1)T_{n+r-s} \leqslant m < \sum_{h=1}^{s-1} a_h T_{n+r-h} + jT_{n+r-s} \right\},$$

где $1 \leqslant j \leqslant a_s$. При $a_s = 1$ будем считать, что $H^s_1(n+r) = H^s(n+r)$.

Очевидно, что у всех чисел $m \in H(n+r)$, а, следовательно, у $m \in H^s(n+r)$, где $1 \leqslant s \leqslant r$, а также и $m \in H^s_j(n+r)$, где $1 \leqslant s \leqslant r$, $1 \leqslant j \leqslant a_s$, при $h \geqslant n+r$ все коэффициенты разложения (4) равны нулю, то есть $t_h(m) = 0$ при $h \geqslant n+r$, поэтому условие (5) можно записать как

$$0 \leqslant m - \sum_{h=i}^{n+r-1} t_h(m) T_h < T_i \tag{8}$$

при всех $0 \leqslant i \leqslant n+r-1$.

Лемма 3. *Если $m \in H^1_j(n+r)$, где $1 \leqslant j \leqslant a_1$, то в разложении (4) числа m коэффициент $t_{n+r-1}(m)$ равен $j-1$. Если $m \in H^s_j(n+r)$, где $2 \leqslant s \leqslant r$, $1 \leqslant j \leqslant a_s$, и $H^s(n+r) \neq \varnothing$, то в представлении (4) числа m будут следующие коэффициенты: $t_{n+r-1}(m) = a_1, \ldots, t_{n+r-s+1}(m) = a_{s-1}$, $t_{n+r-s}(m) = j-1$.*

Утверждение леммы 3 получается из определения множества $H^s_j(n+r)$ и условия (8).

Лемма 4. *Пусть $t_i(m)$ — коэффициенты разложения числа m по последовательности $\{T_n\}$. Если $0 \leqslant k < a_i$ (при $1 \leqslant i \leqslant r$), $0 \leqslant m' < T_{n+r-i}$ и $n \geqslant 0$, то для*

$$m = \sum_{h=1}^{i-1} a_h T_{n+r-i} + kT_{n+r-i} + m'$$

выполняются равенства

$$\begin{aligned} t_l(m) &= t_l(m') \quad \text{при} \quad 0 \leqslant l < n+r-i, \\ t_{n+r-i}(m) &= k, \\ t_l(m) &= a_{n+r-l} \quad \text{при} \quad n+r-i < l < n+r. \end{aligned}$$

Кроме того, для произвольного m_0 и $j \leqslant L = t(m_0)$, $k < t_j(m_0)$ и $m' < T_j$, то для

$$m = t_L(m_0)T_L + t_{L-1}(m_0)T_{L-1} + \ldots + t_{j+1}(m_0)T_{j+1} + kT_j + m'$$

справедливы равенства

$$\begin{aligned} t_l(m) &= t_l(m') \quad \text{при} \quad 0 \leqslant l < j, \\ t_j(m) &= k, \\ t_l(m) &= t_l(m_0) \quad \text{при} \quad j < l \leqslant L. \end{aligned}$$

Замечание 2. *Данное утверждение с дополнительным условием о взаимной простоте ненулевых коэффициентов a_i сформулировано и доказано в статье [8] (лемма 3.2), причем при доказательстве этой леммы авторы условие взаимной простоты ненулевых a_i не использовали.*

Обозначим $I = \{s:\ 1 \leqslant s \leqslant r,\ a_s \neq 0\}$, $P_s = \sum\limits_{i=1}^{s} a_i$, $P_0 = 0$, $a \ominus l = (a-l)\mathrm{mod} d$, то есть $a \ominus l$ — единственное целое g такое, что $0 \leqslant g < d$ и $g \equiv a - l \pmod{d}$.

Лемма 5. *При всех $n \geqslant 0$ имеет место рекуррентное соотношение*

$$S^*_{d,a}(n+r) = \sum_{s\in I}\sum_{j=1}^{a_s} S^*_{d,a\ominus(P_{s-1}+(j-1))}(n+r-s). \tag{9}$$

Доказательство. Согласно определению

$$S^*_{d,a}(n+r) = S_{d,a}(T_{n+r}) = \sum_{m=0}^{T_{n+r}-1} \varepsilon_{d,a}(m) = \sum_{m\in H(n+r)} \varepsilon_{d,a}(m).$$

Множество $H(n+r)$ можно представить как объединение непересекающихся подмножеств $H^s(n+r)$, где $1 \leqslant s \leqslant r$, некоторые из которых могут быть пустыми, поэтому, учитывая (6), имеем:

$$S^*_{d,a}(n+r) = \sum_{s\in I}\sum_{m\in H^s(n+r)} \varepsilon_{d,a}(m) = \sum_{m\in H^1(n+r)} \varepsilon_{d,a}(m) + \sum_{\substack{s\in I,\\ s>1}}\sum_{m\in H^s(n+r)} \varepsilon_{d,a}(m). \tag{10}$$

Возможны два случая: $a_1 = 1$ и $a_1 > 1$. Если $a_1 = 1$, то по определению $H^1(n+r) = H^1_1(n+r)$.

Если $a_1 > 1$, то $H^1(n+r)$ представим как объединение непересекающихся множеств $H^1_j(n+r)$, где $1 \leqslant j \leqslant a_1$, определяемых как (7). Пусть $m \in H^1_j(n+r)$, где $2 \leqslant j \leqslant a_1$. Будем полагать, что сумма коэффициентов разложения (4) числа m сравнима с a по модулю d, то есть $\sum\limits_{i=0}^{t(m)} t_i(m) \equiv a \pmod d$. Согласно лемме 4, для каждого $m \in H^1_j(n+r)$, где $2 \leqslant j \leqslant a_1$, найдется $m' \in H^1_1(n+r)$ такое, что

$$\sum_{i=0}^{t(m)} t_i(m) - \sum_{i=0}^{t(m')} t_i(m') = t_{n+r-1}(m) = j-1,$$

в соответствии с утверждением леммы 3. В таком случае сумма коэффициентов разложения (4) числа m' будет сравнима с $a-(j-1)$ по модулю d, то есть $\sum\limits_{i=0}^{\infty} t_i(m') \equiv a-(j-1) \pmod d$. В силу определения $\varepsilon_{d,a}(m)$ и того, что $m \in H^1_j(n+r)$, где $2 \leqslant j \leqslant a_1$, а $m' \in H^1_1(n+r)$, можно утверждать, что $\varepsilon_{d,a}(m) = \varepsilon_{d,a\ominus(j-1)}(m')$ или $\varepsilon_{d,a}(m) = \varepsilon_{d,a\ominus(P_0+(j-1))}(m')$.

В таком случае, при $a_1 \geqslant 1$ первое слагаемое в формуле (10) примет вид

$$\sum_{m\in H^1(n+r)} \varepsilon_{d,a}(m) = \sum_{j=1}^{a_1}\sum_{m\in H^1_j(n+r)} \varepsilon_{d,a}(m) = \sum_{j=1}^{a_1}\sum_{m=0}^{T_{n+r-1}-1} \varepsilon_{d,a\ominus(P_0+(j-1))}(m') =$$

$$= \sum_{j=1}^{a_1} S^*_{d,a\ominus(P_0+(j-1))}(n+r-1). \tag{11}$$

Рассмотрим теперь второе слагаемое суммы из формулы (10). Пусть $H^s(n+r) \neq \varnothing$ и сумма коэффициентов представления (4) числа $m \in H^s_j(n+r)$, где $2 \leqslant s \leqslant r$ и $1 \leqslant j \leqslant a_s$, сравнима с a по модулю d. Тогда согласно лемме 4 в множестве $H^1_1(n+r-s+1)$ найдется число m' такое, что

$$\sum_{i=0}^{t(m)} t_i(m) - \sum_{i=0}^{t(m')} t_i(m') = \sum_{i=n+r-s}^{n+r-1} t_i(m).$$

Воспользуемся утверждением леммы 3 для $m \in H_j^s(n+r)$ и получим, что

$$\sum_{i=n+r-s}^{n+r-1} t_i(m) = \sum_{i=1}^{s-1} a_i + (j-1) = P_{s-1} + (j-1).$$

Следовательно,

$$\sum_{i=0}^{t(m')} t_i(m') \equiv a - (P_{s-1} + (j-1)) \pmod{d}.$$

Вновь воспользуемся определением $\varepsilon_{d,a}(m)$ и получим, что если $m \in H_j^s(n+r)$, а $m' \in H_1^1(n+r-$ $-s+1)$, то $\varepsilon_{d,a}(m) = \varepsilon_{d,a\ominus(P_{s-1}+(j-1))}(m')$ при всех $2 \leqslant s \leqslant r$, $s \in I$ и $1 \leqslant j \leqslant a_s$.

В таком случае, второе слагаемое равенства (10) может быть представлено как

$$\sum_{\substack{s\in I,\\ s>1}} \sum_{m\in H^s(n+r)} \varepsilon_{d,a}(m) = \sum_{\substack{s\in I,\\ s>1}} \sum_{j=1}^{a_s} \sum_{m'\in H_1^1(n+r-s+1)} \varepsilon_{d,a\ominus(P_{s-1}+(j-1))}(m') =$$

$$= \sum_{\substack{s\in I,\\ s>1}} \sum_{j=1}^{a_s} S_{d,a\ominus(P_{s-1}+(j-1))}(T_{n+r-s}) = \sum_{\substack{s\in I,\\ s>1}} \sum_{j=1}^{a_s} S^*_{d,a\ominus(P_{s-1}+(j-1))}(n+r-s). \tag{12}$$

Подставляя равенства (2) и (2) в формулу (10), приходим к выводу, что

$$S^*_{d,a}(n+r) = \sum_{s\in I} \sum_{j=1}^{a_s} S^*_{d,a\ominus(P_{s-1}+(j-1))}(n+r-s).$$

Таким образом, лемма 5 полностью доказана.

По условию коэффициенты a_s не ограничены сверху, поэтому число слагаемых во внутренней сумме (9) может быть любым. Воспользуемся леммой 2 и ограничим число слагаемых в сумме по j в равенстве (9). Будем полагать

$$a'_s = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad a_s = 0, \\ a_s \operatorname{mod} d & \text{при} \quad a_s \not\equiv 0 \pmod{d}, \\ d & \text{при} \quad a_s \neq 0 \text{ и } a_s \equiv 0 \pmod{d}. \end{cases} \tag{13}$$

Из леммы 5 вытекает следующий результат.

Лемма 6. *При всех $n \geqslant 0$ имеет место рекуррентное соотношение*

$$S^*_{d,a}(n+r) = \sum_{s\in I} \sum_{j=1}^{a'_s} S^*_{d,a\ominus(P_{s-1}+(j-1))}(n+r-s). \tag{14}$$

Доказательство. Пусть $a_s \geqslant 1$ тогда представим a_s как $kd + a'_s$, где $k \geqslant 0$. В этом случае

$$\sum_{j=1}^{a_s} S^*_{d,a\ominus j}(m) = \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{l=id+1}^{(i+1)d} S^*_{d,a\ominus l}(m) + \sum_{l=kd+1}^{kd+a'_s} S^*_{d,a\ominus l}(m) = \sum_{l=1}^{a'_s} S^*_{d,a\ominus l}(m),$$

так как из леммы 2 следует, что $\sum\limits_{l=id+1}^{(i+1)d} S^*_{d,a\ominus l}(m) = \sum\limits_{l=1}^{d} S^*_{d,a\ominus l}(m) = 0$.

Из последнего равенства и рекуррентной формулы (9) следует утверждение леммы 6.

В соотношении (14) a может принимать любое значение из множества $\{0, 1, \ldots, d-1\}$. Очевидно, что $a \ominus (P_{s-1} + (j-1))$, где $j \in \{1, 2, \ldots, a'_s\}$, пробегает некоторое подмножество множеста $\{0, 1, \ldots, d-1\}$, поэтому при $n \geqslant 1$ к слагаемому $S^*_{d,a\ominus(P_{s-1}+(j-1))}(n+r-1)$ можно применить равенство (14), и, следовательно, выразить $S^*_{d,a}(n+r)$ через $S^*_{d,a}(n+r-s)$, где $2 \leqslant s \leqslant r+1$. Если $n \geqslant 2$, то воспользовавшись соотношением (14) для слагаемого $S^*_{d,a}(n+r-2)$, сможем представить $S^*_{d,a}(n+r)$ через $S^*_{d,a}(n+r-s)$, где $3 \leqslant s \leqslant r+2$. Выполняя это преобразование конечное число раз (k раз) при $n \geqslant k$ можно получить выражение для $S^*_{d,a}(n+r)$ через $S^*_{d,a}(n+r-k-s)$, где $1 \leqslant s \leqslant r$. Выразить этот итерационный процесс с помощью рекуррентной формулы можно, если равенство (14) переписать как

$$S^*_{d,a}(n+r) = \sum_{s=1}^{r} \sum_{l=0}^{d-1} \xi^s_{l,0}(n+r) S^*_{d,a\ominus l}(n+r-s), \tag{15}$$

где

$$\xi^s_{l,0}(n+r) = \begin{cases} 0 & \text{если} \quad s \in \overline{I}, \text{ или, если } s \in I \text{ и } a'_s \leqslant l \ominus P_{s-1} < d, \\ 1 & \text{если} \quad s \in I \text{ и } 0 \leqslant l \ominus P_{s-1} < a'_s. \end{cases} \tag{16}$$

Лемма 7. *Для любого целого $k \geqslant 0$ и $n \geqslant k$ справедливо равенство*

$$S^*_{d,a}(n+r) = \sum_{s=1}^{r} \sum_{l=0}^{d-1} \xi^s_{l,k}(n+r) S^*_{d,a\ominus l}(n+r-k-s), \tag{17}$$

где

$$\xi^s_{l,k+1}(n+r) = \begin{cases} \chi_1(s) \sum\limits_{j=1}^{a'_s} \xi^1_{l\ominus(P_{s-1}+(j-1)),k}(n+r) + \xi^{s+1}_{l,k}(n+r) \ \textit{при}\ 1 \leqslant s < r, \\ \sum\limits_{j=1}^{a'_r} \xi^1_{l\ominus(P_{r-1}+(j-1)),k}(n+r) \ \textit{при}\ s = r, \end{cases} \tag{18}$$

$$\chi_1(s) = \begin{cases} 1 & \textit{если} \quad s \in I, \\ 0 & \textit{если} \quad s \in \overline{I}. \end{cases} \tag{19}$$

Кроме того, коэффициенты $\xi^s_{l,k}(n)$, где $1 \leqslant s \leqslant r$, неотрицательны при всех $k \geqslant 0$.

Доказательство. Доказательство проведем, используя индукцию по k. При $k = 0$ равенство (17) полностью совпадает с (15).

Предположим, что утверждение леммы верно при $k = m$, то есть

$$S^*_{d,a}(n+r) = \sum_{s=1}^{r} \sum_{l=0}^{d-1} \xi^s_{l,m}(n+r) S^*_{d,a\ominus l}(n+r-m-s). \tag{20}$$

Распишем $S^*_{d,a\ominus l}(n+r-m-1)$, пользуясь равенством (14), как

$$S^*_{d,a\ominus l}(n+r-m-1) = \sum_{s\in I} \sum_{j=1}^{a'_s} S^*_{d,a\ominus l\ominus(P_{s-1}+(j-1))}(n+r-m-s-1)$$

и подставим в (20). Имеем:

$$S^*_{d,a}(n+r) = \sum_{l=0}^{d-1} \xi^1_{l,m}(n+r) \sum_{s\in I} \sum_{j=1}^{a'_s} S^*_{d,a\ominus l\ominus(P_{s-1}+(j-1))}(n+r-m-s-1)+$$

$$+\sum_{s=2}^{r}\sum_{l=0}^{d-1}\xi_{l,m}^{s}(n+r)S_{d,a\ominus l}^{*}(n+r-m-s).$$

Введем характеристическую функцию (19) для множества I, изменим порядок суммирования в первой части суммы и начнем суммирование с $s=1$ во второй части суммы. Получаем

$$S_{d,a}^{*}(n+r)=\sum_{s=1}^{r}\sum_{l=0}^{d-1}\chi_1(s)\sum_{j=1}^{a'_s}\xi_{l,m}^{1}(n+r)S_{d,a\ominus l\ominus(P_{s-1}+(j-1))}^{*}(n+r-m-s-1)+$$

$$+\sum_{s=1}^{r-1}\sum_{l=0}^{d-1}\xi_{l,m}^{s+1}(n+r)S_{d,a\ominus l}^{*}(n+r-m-s-1).$$

Обозначим $a\ominus l\ominus(P_{s-1}+(j-1))$ как $a\ominus l$ и перегруппируем слагаемые следующим образом:

$$S_{d,a}^{*}(n+r)=\sum_{s=1}^{r-1}\sum_{l=0}^{d-1}\left(\chi_1(s)\sum_{j=1}^{a'_s}\xi_{l\ominus(P_{s-1}+(j-1)),m}^{1}(n+r)+\xi_{l,m}^{s+1}(n+r)\right)\cdot S_{d,a\ominus l}^{*}(n+r-m-s-1)+$$

$$+\sum_{l=0}^{d-1}\sum_{j=1}^{a'_r}\xi_{l\ominus(P_{r-1}+(j-1)),m}^{1}(n+r)S_{d,a\ominus l}^{*}(n-m-1). \tag{21}$$

Введем обозначения:

$$\xi_{l,m+1}^{s}(n+r)=\chi_1(s)\sum_{j=1}^{a'_s}\xi_{l\ominus(P_{s-1}+(j-1)),m}^{1}(n+r)+\xi_{l,m}^{s+1}(n+r),$$

где $1\leqslant s<r$, и

$$\xi_{l,m+1}^{r}(n+r)=\sum_{j=1}^{a'_r}\xi_{l\ominus(P_{r-1}+(j-1)),m}^{1}(n+r).$$

В этом случае равенство (2) будет полностью совпадать с утверждением леммы 7 при $k=m+1$. Следовательно, равенство (17) справедливо при всех $k\geqslant 0$. Неотрицательность коэффициентов $\xi_{l,k}^{s}(n+r)$ следует из неотрицательности $\xi_{l,0}^{s}(n+r)$ и равенств (18).

Выясним, какими свойствми обладает соотношение (17). Для этого обозначим

$$A_k^s(n+r)=\sum_{l=0}^{d-1}\xi_{l,k}^{s}(n+r).$$

Из равенств (13) и (16) следует, что

$$A_0^s(n+r)=a'_s \qquad \text{для всех} \qquad 1\leqslant s\leqslant r. \tag{22}$$

Лемма 8. *Справедливы следующие рекуррентные соотношения*

$$A_k^s(n+r)=a'_sA_{k-1}^1(n+r)+A_{k-1}^{s+1}(n+r) \qquad \textit{при} \qquad 1\leqslant s<r$$

и $A_k^r(n+r)=a'_rA_{k-1}^1(n+r)$.

Доказательство. Воспользуемся определением $A_k^s(n+r)$ и равенствами (18) для получения доказываемого соотношения. При $1 \leqslant s < r$ имеем

$$A_k^s(n+r) = \sum_{l=0}^{d-1} \xi_{l,k}^s(n+r) = \chi_1(s) \sum_{j=1}^{a'_s} \sum_{l=0}^{d-1} \xi^1_{l\ominus(P_{s-1}+(j-1)),k-1}(n+r) + \sum_{l=0}^{d-1} \xi^{s+1}_{l,k-1}(n+r) =$$

$$= \chi_1(s) \sum_{j=1}^{a'_s} A^1_{k-1}(n+r) + A^{s+1}_{k-1}(n+r) = a'_s A^1_{k-1}(n+r) + A^{s+1}_{k-1}(n+r).$$

Если $s = r$, то

$$A_k^r(n+r) = \sum_{l=0}^{d-1} \sum_{j=1}^{a'_r} \xi^1_{l\ominus(P_{r-1}+(j-1)),k-1}(n+r) = \sum_{j=1}^{a'_r} A^1_{k-1}(n+r) = a'_r A^1_{k-1}(n+r).$$

Таким образом, лемма 8 доказана.

Перейдем к получению оценки сверху для $A_k^s(n+r)$.

Лемма 9. *При всех $1 \leqslant s \leqslant r$ справедливо неравенство*

$$A_k^s(n+r) \leqslant (d+1)^{k+1}. \tag{23}$$

Доказательство. Проведем доказательство неравенства, используя метод математической индукции. При $k = 0$, согласно определению $A_0^s(n+r)$, для всех $1 \leqslant s \leqslant r$, имеем: $A_0^s(n+r) = a'_s \leqslant d \leqslant d+1$. Значит, при $k = 0$ неравенство (23) выполняется.

Предположим, что утверждение леммы 9 справедливо при $k = m$, то есть для любых $1 \leqslant s \leqslant r$: $A_m^s(n+r) \leqslant (d+1)^{m+1}$. Воспользуемся леммой 8, чтобы получить оценку для $A_{m+1}^s(n+r)$. Если $1 \leqslant s < r$, то

$$A_{m+1}^s(n+r) = a'_s A_m^1(n+r) + A_m^{s+1}(n+r) \leqslant d(d+1)^{m+1} + (d+1)^{m+1} = (d+1)^{m+2}.$$

В том случае, когда $s = r$, получаем

$$A_{m+1}^s(n+r) = a'_r A_m^1(n+r) \leqslant d(d+1)^{m+1} \leqslant (d+1)^{m+2}.$$

Значит, при $k = m+1$ неравенство (23) также выполняется, что доказывает справедливость леммы 9 при всех целых неотрицательных k.

Теперь выясним, как связаны между собой члены рекуррентной последовательности $\{T_n\}$ и $A_k^s(n+r)$.

Лемма 10. *При всех $0 \leqslant k \leqslant n$ справедливо неравенство*

$$T_{n+r} \geqslant \sum_{s=1}^{r} A_k^s(n+r) T_{n+r-k-s}.$$

Доказательство. Применим метод математической индукции. При $k = 0$, в силу равенств (1), (13) и (22) можно записать, что

$$T_{n+r} = \sum_{s=1}^{r} a_s T_{n+r-s} \geqslant \sum_{s=1}^{r} a'_s T_{n+r-s} = \sum_{s=1}^{r} A_0^s(n+r) T_{n+r-s},$$

то есть при $k=0$ утверждение леммы справедливо. Предположим, что лемма 10 верна при $k=m$, где $m<n$, то есть

$$T_{n+r} \geqslant \sum_{s=1}^{r} A_m^s(n+r)T_{n+r-m-s} = A_m^1(n+r)T_{n+r-m-1} + \sum_{s=2}^{r} A_m^s(n+r)T_{n+r-m-s}.$$

Распишем $T_{n+r-m-1}$, используя равенство (1), как $T_{n+r-m-1} = \sum\limits_{s=1}^{r} a_s T_{n+r-m-s-1}$ и подставим в предыдущее неравенство. Имеем

$$T_{n+r} \geqslant A_m^1(n+r)\sum_{s=1}^{r} a_s T_{n+r-m-s-1} + \sum_{s=2}^{r} A_m^s(n+r)T_{n+r-m-s}.$$

В первой части суммы воспользуемся тем, что $a'_s \leqslant a_s$, а во второй — суммирование начнем с $s=1$. В результате получаем:

$$T_{n+r} \geqslant A_m^1(n+r)\sum_{s=1}^{r} a'_s T_{n+r-m-s-1} + \sum_{s=1}^{r-1} A_m^{s+1}(n+r)T_{n+r-m-s-1}.$$

Внесем $A_m^1(n+r)$ под знак суммы и перегруппируем слагаемые

$$T_{n+r} \geqslant \sum_{s=1}^{r-1} \left(a'_s A_m^1(n+r) + A_m^{s+1}(n+r)\right) T_{n+r-m-s-1} + a'_r A_m^1(n+r) T_{n-m-s-1}.$$

Применим утверждение леммы 8 к последнему неравенству и получим, что

$$T_{n+r} \geqslant \sum_{s=1}^{r} A_{m+1}^s(n+r)T_{n+r-m-s-1},$$

что соответствует утверждению леммы 10 при $k=m+1$. Таким образом, лемма 10 доказана.

В силу леммы 7 все $\xi_{l,k}^s(n+r)$ неотрицательны. Изучим вопрос о положительности $\xi_{l,k}^s(n+r)$. Пусть $D_k^s(n+r)$ — множество индексов l из $\{0,1,\ldots,d-1\}$ таких, что значения $\xi_{l,k}^s(n+r)$ отличны от нуля, то есть для $1 \leqslant s \leqslant r$

$$D_k^s(n+r) = \left\{l : \xi_{l,k}^s(n+r) > 0\right\},$$

причем из равенства (16) следует, что мощность множества $D_0^s(n+r)$ равна a'_s, то есть $\sharp D_0^s(n+r) = a'_s$.

Для двух множеств $A, B \in \{0,1,\ldots,d-1\}$ определим

$$A \ominus B = \{a \ominus b : a \in A,\, b \in B\}.$$

Лемма 11. *При всех натуральных $k \leqslant n$ справедливы равенства*

$$D_{k+1}^s(n+r) = \bigcup_{j=1}^{a'_s} \left(D_k^1(n+r) \ominus \{P_{s-1} + (j-1)\}\right) \cup D_k^{s+1}(n+r) \quad \textit{при} \quad s \in I \quad \textit{и} \quad s<r; \quad (24)$$

$$D_{k+1}^s(n+r) = D_k^{s+1}(n+r) \quad \textit{при} \quad s \in \overline{I} \quad \textit{и} \quad s<r; \quad (25)$$

$$D_{k+1}^r(n+r) = \bigcup_{j=1}^{a'_r} \left(D_k^1(n+r) \ominus \{P_{r-1} + (j-1)\}\right). \quad (26)$$

Утверждение леммы следует из равенства (18).

Пусть $d \geqslant 3$, и обозначим $d_0 = \left[\frac{d}{2}\right]$. Перейдем к изучению первого слагаемого в равенстве (17), а именно,

$$\sum_{l=0}^{d-1} \xi^1_{l,k}(n+r) S^*_{d,a\ominus l}(n+r-k-1). \tag{27}$$

Выясним, какое число итераций необходимо сделать, чтобы к последней сумме можно было бы применить равенство из леммы 2 и уменьшить число слагаемых в (27) по крайней мере на 1.

Лемма 12. *Справедливо неравенство*

$$\sharp D^1_{k_0}(n+r) > d_0, \tag{28}$$

где

$$k_0 = r(d_0-1)+1.$$

Доказательство. Пусть

$$k_0' = \begin{cases} \left[\frac{d_0-1}{a_1'-1}\right] & \text{при} \quad a_1' > 1; \\ \left[\frac{2(d_0-1)}{a_2'}\right]+1 & \text{при} \quad a_1' = 1 \quad \text{и} \quad a_2' > 0; \\ \left[\frac{s_0(d_0-1)}{a_{s_0}'}\right]+1 & \text{при} \quad a_1' = 1,\, a_2' = a_3' = \ldots = a_{s_0-1}' = 0 \quad \text{и} \quad a_{s_0}' > 0. \end{cases} \tag{29}$$

Покажем, что

$$\sharp D^1_{k_0'}(n+r) > d_0 \tag{30}$$

Вначале заметим, что из равенства (24) следует, что при всех $k \leqslant n$

$$D^1_k(n+r) \supseteq D^1_{k-1}(n+r). \tag{31}$$

Докажем три соотношения, характеризующих мощность множества $D^1_k(n+r)$ в зависимости от значений коэффициентов a_s':

$$\sharp D^1_k(n+r) \geqslant \sharp D^1_{k-1}(n+r) + a_1' - 1 \qquad \text{при} \qquad a_1' > 1; \tag{32}$$

$$\sharp D^1_k(n+r) \geqslant \sharp D^1_{k-2}(n+r) + a_2' \qquad \text{при} \qquad a_1' = 1 \qquad \text{и} \qquad a_2' > 0; \tag{33}$$

$$\sharp D^1_k(n+r) \geqslant \sharp D^1_{k-s_0}(n+r) + a_{s_0}' \quad \text{при} \quad a_1' = 1,\, a_2' = a_3' = \ldots = a_{s_0-1}' = 0 \quad \text{и} \quad a_{s_0}' > 0. \tag{34}$$

Пусть $a_1' > 1$, тогда согласно равенству (24), имеем:

$$D^1_k(n+r) = \bigcup_{j=1}^{a_1'} \left(D^1_{k-1}(n+r) \ominus \{P_0 + (j-1)\}\right) \cup D^2_{k-1}(n+r) \supseteq \bigcup_{j=1}^{a_1'} \left(D^1_{k-1}(n+r) \ominus \{j-1\}\right),$$

так как $P_0 = 0$. Множество $D^1_k(n+r)$ содержит a_1' множеств: $D^1_{k-1}(n+r)$, $D^1_{k-1}(n+r) \ominus \{1\}$, $\ldots$, $D^1_{k-1}(n+r) \ominus \{a_1'-1\}$, причем каждое из них отличается хотя бы одним элементом от другого, поэтому неравенство (32) выполняется.

Пусть $a_1' = 1$ и $a_2' > 0$, тогда в соответствии с равенством (24) можно утверждать, что

$$D^1_k(n+r) = D^1_{k-1}(n+r) \cup D^2_{k-1}(n+r). \tag{35}$$

Зная, что $a_2' > 0$, можем воспользоваться равенством (24) для $D_{k-1}^2(n+r)$ и включением (31) для $D_{k-1}^1(n+r)$. Имеем

$$D_k^1(n+r) \supseteq D_{k-2}^1(n+r) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{a_2'} \left(D_{k-2}^1(n+r) \ominus \{P_1 + (j-1)\} \right) \right) \supseteq \bigcup_{j=0}^{a_2'} \left(D_{k-2}^1(n+r) \ominus \{j\} \right),$$

так как $P_1 \equiv 1 \pmod d$ при $a_1' = 1$. Последнее включение означает, что множество $D_k^1(n+r)$ содержит $a_2'+1$ множество: $D_{k-2}^1(n+r)$, $D_{k-2}^1(n+r) \ominus \{1\}, \ldots, D_{k-2}^1(n+r) \ominus \{a_2'\}$, каждое из которых отличается хотя бы одним элементом. Следовательно, неравенство (33) справедливо.

Пусть $a_1' = 1$, $a_2' = a_3' = \ldots = a_{s_0-1}' = 0$ и $a_{s_0}' > 0$, тогда $s_0 - 2$ раза воспользуемся включением (31) для множества $D_{k-1}^1(n+r)$ и равенством (25) для множества $D_{k-1}^2(n+r)$ в формуле (35), и получим, что

$$D_k^1(n+r) \supseteq D_{k-2}^1(n+r) \cup D_{k-2}^3(n+r) \supseteq D_{k-3}^1(n+r) \cup D_{k-3}^4(n+r) \supseteq \ldots \supseteq$$
$$\supseteq D_{k-s_0+1}^1(n+r) \cup D_{k-s_0+1}^{s_0}(n+r). \tag{36}$$

По условию $a_{s_0}' > 0$, поэтому применив либо равенство (24), если $s_0 < r$, либо тождество (26) если $s_0 = r$, и, учитывая включение (31), перепишем (2) как

$$D_k^1(n+r) \supseteq D_{k-s_0}^1(n+r) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{a_{s_0}'} \left(D_{k-s_0}^1(n+r) \ominus \{P_{s_0-1} + (j-1)\} \right) \right) = \bigcup_{j=0}^{a_{s_0}'} \left(D_{k-s_0}^1(n+r) \ominus \{j\} \right),$$

так как $P_{s_0-1} = \sum\limits_{i=1}^{s_0-1} a_i$, и, следовательно, $P_{s_0-1} \equiv 1 \pmod d$. Множества $D_{k-s_0}^1(n+r)$, $D_{k-s_0}^1(n+r) \ominus \{1\}, \ldots, D_{k-s_0}^1(n+r) \ominus \{a_{s_0}'\}$ отличаются друг от друга хотя бы одним элементом, поэтому неравенство (34) будет иметь место.

Теперь перейдем к доказательству неравенства, приведенного в утверждении леммы 12. Если $a_1' > 1$, то применяя неравенство (32) k раз, и учитывая, что $\sharp D_0^1(n+r) = a_1'$, приходим к выводу, что

$$\sharp D_k^1(n+r) \geqslant \sharp D_{k-1}^1(n+r) + a_1' - 1 \geqslant \sharp D_{k-2}^1(n+r) + 2(a_1' - 1) \geqslant \ldots \geqslant$$
$$\geqslant \sharp D_0^1(n+r) + k(a_1' - 1) = (k+1)a_1' - k.$$

Очевидно, что последнее выражение будет больше, чем d_0, если $k = \left[\frac{d_0 - 1}{a_1' - 1}\right]$.

Если $a_1' = 1$, а $a_2' > 0$, то используя неравенство (33) ровно $\left[\frac{k}{2}\right]$ раз, получаем

$$\sharp D_k^1(n+r) \geqslant \sharp D_{k-2}^1(n+r) + a_2' \geqslant \sharp D_{k-4}^1(n+r) + 2a_2' \geqslant \ldots \geqslant \sharp D_0^1(n+r) + \left[\frac{k}{2}\right] a_2' = \left[\frac{k}{2}\right] a_2' + 1.$$

Если $k = \left[\frac{2(d_0-1)}{a_2'}\right] + 1$, то мощность множества $D_k^1(n+r)$ будет превышать d_0.

В том случае, когда $a_1' = 1$, $a_2' = a_3' = \ldots = a_{s_0-1}' = 0$ и $a_{s_0}' > 0$, применяя неравенство (34) $\left[\frac{k}{s_0}\right]$ раз, имеем

$$\sharp D_k^1(n+r) \geqslant \sharp D_{k-s_0}^1(n+r) + a_{s_0}' \geqslant \sharp D_{k-2s_0}^1(n+r) + 2a_{s_0}' \geqslant \ldots \geqslant \sharp D_0^1(n+r) + \left[\frac{k}{s_0}\right] a_{s_0}' = \left[\frac{k}{s_0}\right] a_{s_0}' + 1.$$

При $k = \left[\frac{s_0(d_0-1)}{a_{s_0}'}\right] + 1$ мощность множества $D_k^1(n+r)$ будет больше d_0.

Таким образом (30) доказано. Для доказательства леммы 12 остается воспользоваться (31) и очевидным неравенством $k_0' \leq k_0$.

Замечание 3. *Из определения $A_k^1(n+r)$ и леммы 12 вытекает, что если k_0 определяется равенствами (29), то $A_{k_0}^1(n+r) > d_0$.*

Пусть
$$\eta_{d,r} = \left(1 + \frac{1}{r(d+1)^{k_0+1}}\right)^{\frac{1}{k_0+r}}. \tag{37}$$

Лемма 13. *При всех натуральных n справедлива оценка*
$$\left|S_{d,a}^*(n)\right| \ll \frac{T_n}{\eta_{d,r}^n}.$$

Доказательство. Введем в рассмотрение последовательность $\{M_d(n)\}$, определяемую следующим образом:
$$M_d(n) = \max_{0\leqslant a<d} \left|S_{d,a}^*(n)\right| \tag{38}$$
при $0 \leqslant n \leqslant r + k_0$ и
$$M_d(n+r) = \left(A_{k_0}^1(n+r) - 1\right) M_d(n+r-k_0-1) + \sum_{s=2}^{r} A_{k_0}^s(n+r) M_d(n+r-k_0-s) \tag{39}$$
в остальных случаях. Пользуясь индукцией по n, докажем, что
$$\left|S_{d,a}^*(n)\right| \leqslant M_d(n). \tag{40}$$
При $n \leqslant r + k_0$ неравенство (40) следует из (38). Предположим, что неравенство (40) справедливо при $n + r - k_0 - s$, где $1 \leqslant s \leqslant r$. Распишем $S_{d,a}^*(n+r)$, воспользовавшись соотношением (17) при $k = k_0$, как $S_{d,a}^*(n+r) = \Sigma_1 + \Sigma_2$, где
$$\Sigma_1 = \sum_{l=0}^{d-1} \xi_{l,k_0}^1(n+r) S_{d,a\ominus l}^*(n+r-k_0-1)$$
и
$$\Sigma_2 = \sum_{s=2}^{r} \sum_{l=0}^{d-1} \xi_{l,k_0}^s(n+r) S_{d,a\ominus l}^*(n+r-k_0-s).$$
Используя определение множества $D_{k_0}^1(n+r)$, перепишем Σ_1 следующим образом:
$$\Sigma_1 = \sum_{l\in D_{k_0}^1(n+r)} \xi_{l,k_0}^1(n+r) S_{d,a\ominus l}^*(n+r-k_0-1) =$$
$$= \sum_{l\in D_{k_0}^1(n+r)} S_{d,a\ominus l}^*(n+r-k_0-1) + \sum_{l\in D_{k_0}^1(n+r)} \left(\xi_{l,k_0}^1(n+r) - 1\right) S_{d,a\ominus l}^*(n+r-k_0-1),$$
где $\xi_{l,k_0}^1(n+r) - 1 \geqslant 0$ в силу определения $D_{k_0}^1(n+r)$. Применим лемму 2 к первому слагаемому последней суммы и получим, что
$$\Sigma_1 = -\sum_{l\notin D_{k_0}^1(n+r)} S_{d,a\ominus l}^*(n+r-k_0-1) + \sum_{l\in D_{k_0}^1(n+r)} \left(\xi_{l,k_0}^1(n+r) - 1\right) S_{d,a\ominus l}^*(n+r-k_0-1).$$
Найдем оценку сверху для $|\Sigma_1|$. Имеем
$$|\Sigma_1| \leqslant \sum_{l\notin D_{k_0}^1(n+r)} \left|S_{d,a\ominus l}^*(n+r-k_0-1)\right| + \sum_{l\in D_{k_0}^1(n+r)} \left(\xi_{l,k_0}^1(n+r) - 1\right) \left|S_{d,a\ominus l}^*(n+r-k_0-1)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{l \notin D^1_{k_0}(n+r)} 1 + \sum_{l \in D^1_{k_0}(n+r)} \left(\xi^1_{l,k_0}(n+r) - 1\right) \right) \cdot \max_{0 \leqslant a < d} \left| S^*_{d,a\ominus l}(n+r-k_0-1) \right| =$$

$$= B(n+r) \max_{0 \leqslant a < d} \left| S^*_{d,a\ominus l}(n+r-k_0-1) \right|,$$

где

$$B(n+r) = \sum_{l \notin D^1_{k_0}(n+r)} 1 + \sum_{l \in D^1_{k_0}(n+r)} \left(\xi^1_{l,k_0}(n+r) - 1\right) = \sum_{l \notin D^1_{k_0}(n+r)} 1 + \sum_{l \in D^1_{k_0}(n+r)} \xi^1_{l,k_0}(n+r) -$$

$$- \sum_{l \in D^1_{k_0}(n+r)} 1 \leqslant \left(d - \sharp D^1_{k_0}(n+r)\right) + A^1_{k_0}(n+r) - \sharp D^1_{k_0}(n+r) = d + A^1_{k_0}(n+r) - 2\sharp D^1_{k_0}(n+r).$$

Из (28) получаем, что $\sharp D^1_{k_0}(n+r) \geqslant d_0 + 1$, а, следовательно, при d — четном: $d_0 = \frac{d}{2}$, $2\sharp D^1_{k_0}(n+r) \geqslant d+2$ и $B(n+r) \leqslant A^1_{k_0}(n+r) - 2$, а при d — нечетном: $d_0 = \frac{d-1}{2}$, $2\sharp D^1_{k_0}(n+r) \geqslant d+1$ и $B(n+r) \leqslant A^1_{k_0}(n+r) - 1$, то есть, в любом случае, $B(n+r) \leqslant A^1_{k_0}(n+r) - 1$.

Учитывая последнее неравенство и предположение индукции, можно утверждать, что

$$|\Sigma_1| \leqslant \left(A^1_{k_0}(n+r) - 1\right) \max_{0 \leqslant a < d} \left| S^*_{d,a\ominus l}(n+r-k_0-1) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left(A^1_{k_0}(n+r) - 1\right) M_d(n+r-k_0-1).$$

В свою очередь

$$|\Sigma_2| \leqslant \sum_{s=2}^{r} \sum_{l=0}^{d-1} \xi^s_{l,k_0}(n+r) \max_{0 \leqslant a < d} \left| S^*_{d,a\ominus l}(n+r-k_0-s) \right| =$$

$$= \sum_{s=2}^{r} A^s_{k_0}(n+r) \max_{0 \leqslant a < d} \left| S^*_{d,a\ominus l}(n+r-k_0-s) \right| = \sum_{s=2}^{r} A^s_{k_0}(n+r) M_d(n+r-k_0-s),$$

поэтому, используя (39) из неравенства $\left| S^*_{d,a}(n+r) \right| \leqslant |\Sigma_1| + |\Sigma_2|$ получаем, что

$$\left| S^*_{d,a}(n+r) \right| \leqslant \left(A^1_{k_0}(n+r) - 1\right) M_d(n+r-k_0-1) +$$

$$+ \sum_{s=2}^{r} A^s_{k_0}(n+r) M_d(n+r-k_0-s) = M_d(n+r),$$

что совпадает с неравенством (40). Перейдем к доказательству соотношения

$$M_d(n) \ll \frac{T_n}{\eta^n_{d,r}}, \tag{41}$$

то есть покажем, что найдется постоянная $C(d,r) > 0$ такая, что

$$T_n \geqslant C(d,r) M_d(n) \eta^n_{d,r}. \tag{42}$$

Пусть $0 \leqslant n \leqslant r + k_0$, тогда, очевидно, при $C(d,r) = \max\limits_{0 \leqslant n \leqslant r+k_0} \frac{T_n}{\eta^n_{d,r}}$ неравенство (42) будет выполняться. Предположим, что существует положительная постоянная $C(d,r)$ такая, что

$$T_{n+r-m} \geqslant C(d,r) M_d(n+r-m) \eta^{n+r-m}_{d,r} \tag{43}$$

при всех $1 \leqslant m \leqslant n+r$, тогда воспользуемся утверждением леммы 10 при $k = k_0$. Имеем:

$$T_{n+r} \geqslant \sum_{s=1}^{r} A_{k_0}^{s}(n+r) T_{n+r-k_0-s} = A_{k_0}^{1}(n+r) T_{n+r-k_0-1} + \sum_{s=2}^{r} A_{k_0}^{s}(n+r) T_{n+r-k_0-s} =$$

$$= \left(A_{k_0}^{1}(n+r) - 1\right) T_{n+r-k_0-1} + \sum_{s=2}^{r} A_{k_0}^{s}(n+r) T_{n+r-k_0-s} + T_{n+r-k_0-1}. \qquad (44)$$

Из равенства (1) и неравенства (1) следует, что при всех $1 \leqslant s \leqslant r$ справедливо соотношение $T_{n+r-k_0-s} \leqslant T_{n+r-k_0-1}$, поэтому

$$T_{n+r-k_0-1} \geqslant \frac{1}{r} \sum_{s=1}^{r} T_{n+r-k_0-s}.$$

Учитывая это неравенство, из соотношения (2) получаем, что

$$T_{n+r} \geqslant \left(A_{k_0}^{1}(n+r) - 1\right) T_{n+r-k_0-1} + \sum_{s=2}^{r} A_{k_0}^{s}(n+r) T_{n+r-k_0-s} + \frac{1}{r} \sum_{s=1}^{r} T_{n+r-k_0-s}.$$

Применим предположение индукции (43) к последнему неравенству. Находим

$$T_{n+r} \geqslant C(d,r) \eta_{d,r}^{n-k_0} \Bigg(\left(A_{k_0}^{1}(n+r) - 1\right) M_d(n+r-k_0-1) \eta_{d,r}^{r-1} +$$

$$+ \sum_{s=2}^{r} A_{k_0}^{s}(n+r) M_d(n+r-k_0-s) \eta_{d,r}^{r-s} + \frac{1}{r} \sum_{s=1}^{r} M_d(n+r-k_0-s) \eta_{d,r}^{r-s} \Bigg).$$

В силу того, что $\eta_{d,r} > 1$, получаем, что

$$T_{n+r} \geqslant C(d,r) \eta_{d,r}^{n-k_0} \Bigg(\left(A_{k_0}^{1}(n+r) - 1\right) M_d(n+r-k_0-1) +$$

$$+ \sum_{s=2}^{r} A_{k_0}^{s}(n+r) M_d(n+r-k_0-s) + \frac{1}{r} \sum_{s=1}^{r} M_d(n+r-k_0-s) \Bigg).$$

Согласно определению (39), имеем

$$T_{n+r} \geqslant C(d,r) \eta_{d,r}^{n-k_0} \left(M_d(n+r) + \frac{1}{r} \sum_{s=1}^{r} M_d(n+r-k_0-s) \right). \qquad (45)$$

Очевидно, что

$$\sum_{s=1}^{r} M_d(n+r-k_0-s) \geqslant \frac{1}{\max\limits_{1 \leqslant s \leqslant r} A_{k_0}^{s}(n+r)} \sum_{s=1}^{r} A_{k_0}^{s}(n+r) M_d(n+r-k_0-s) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{\max\limits_{1 \leqslant s \leqslant r} A_{k_0}^{s}(n+r)} \Bigg(\left(A_{k_0}^{1}(n+r) - 1\right) M_d(n+r-k_0-1) +$$

$$+ \sum_{s=2}^{r} A_{k_0}^{s}(n+r) M_d(n+r-k_0-s) \Bigg) = \frac{M_d(n+r)}{\max\limits_{1 \leqslant s \leqslant r} A_{k_0}^{s}(n+r)}.$$

Из неравенства (23) следует, что

$$\frac{1}{\max\limits_{1\leqslant s\leqslant r} A_{k_0}^s(n+r)} \geqslant \frac{1}{(d+1)^{k_0+1}},$$

поэтому

$$\sum_{s=1}^{r} M_d(n+r-k_0-s) \geqslant \frac{M_d(n+r)}{(d+1)^{k_0+1}}. \tag{46}$$

Подставим (46) в (45) и получим, что

$$T_{n+r} \geqslant C(d,r)\eta_{d,r}^{n-k_0} M_d(n+r)\left(1+\frac{1}{r(d+1)^{k_0+1}}\right).$$

Так как

$$\eta_{d,r}^{k_0+r} = 1+\frac{1}{r(d+1)^{k_0+1}},$$

то

$$T_{n+r} \geqslant C(d,r)\eta_{d,r}^{n+r} M_d(n+r).$$

Из соотношений (40) и (41) получается утверждение леммы 13.

Перейдем к изучению $S_{d,a}(X)$, где X — целое неотрицательное число, имеющее разложение (4), удовлетворяющее условию (5).

Лемма 14. *Справедливо неравенство*

$$|S_{d,a}(X)| \ll \sum_{i=0}^{t(X)} \max_{0\leqslant a<d}\left|S_{d,a}^*(i)\right|.$$

Доказательство. Утверждение леммы 14, очевидно, следует из неравенства

$$|S_{d,a}(X)| \leqslant \sum_{i=0}^{t(X)} t_i' \max_{0\leqslant a<d}\left|S_{d,a}^*(i)\right|, \tag{47}$$

где $t_i' = t_i(X)\mathrm{mod}d$, и тривиальной оценки $t_i' < d$. Прежде, чем доказать соотношение (47), покажем выполнимость при любых i неравенства

$$|S_{d,a}(t_iT_i)| \leqslant t_i' \max_{0\leqslant a<d}\left|S_{d,a}^*(i)\right|. \tag{48}$$

Имеем

$$S_{d,a}(t_iT_i) = \sum_{m=0}^{t_iT_i-1} \varepsilon_{d,a}(m) = \sum_{l=0}^{t_i-1}\sum_{X'=0}^{T_i-1} \varepsilon_{d,a}(lT_i+X') = \sum_{l=0}^{t_i-1}\sum_{X'=0}^{T_i-1} \varepsilon_{d,a\ominus l}(X') =$$

$$= \sum_{l=0}^{t_i-1} S_{d,a\ominus l}(T_i) = \sum_{l=0}^{t_i-1} S_{d,a\ominus l}^*(i).$$

Пусть $t_i = qd+t_i'$, где $q\geqslant 0$, $0\leqslant t_i' < d$, тогда

$$\sum_{l=0}^{t_i-1} S_{d,a\ominus l}^*(i) = \sum_{k=0}^{q-1}\sum_{s=0}^{d-1} S_{d,a\ominus(kd+s)}^*(i) + \sum_{s=0}^{t_i'-1} S_{d,a\ominus(qd+s)}^*(i) = \sum_{s=0}^{t_i'-1} S_{d,a\ominus(qd+s)}^*(i),$$

так как при любом k в силу леммы 2 получаем $\sum\limits_{s=0}^{d-1} S^*_{d,a\ominus(kd+s)}(i)=0$. В таком случае

$$|S_{d,a}(t_iT_i)|\leqslant\sum_{s=0}^{t'_i-1}\left|S^*_{d,a\ominus(qd+s)}(i)\right|\leqslant t'_i\max_{0\leqslant a<d}\left|S^*_{d,a}(i)\right|,$$

то есть неравенство (48) выполняется.

Доказательство неравенства (47) проведем, используя индукцию по $t(X)$. Пусть $t(X)=0$, тогда получаем, что $X=t_0T_0$, и в силу (48) $|S_{d,a}(X)|=|S_{d,a}(t_0T_0)|\leqslant t'_0\max\limits_{0\leqslant a<d}\left|S^*_{d,a}(0)\right|$, что совпадает с (47) при $t(X)=0$. Предположим, что неравенство (47) верно при $t(X)=p$, то есть при $X=\sum\limits_{i=0}^{p}t_iT_i$

$$|S_{d,a}(X)|\leqslant\sum_{i=0}^{p}t'_i\max_{0\leqslant a<d}\left|S^*_{d,a}(i)\right|. \tag{49}$$

Если $t(X)=p+1$, то $X=\sum\limits_{i=0}^{p+1}t_iT_i=X'+t_{p+1}T_{p+1}$, где $X'=\sum\limits_{i=0}^{p}t_iT_i$, и

$$S_{d,a}(X)=\sum_{m=0}^{t_{p+1}T_{p+1}-1}\varepsilon_{d,a}(m)+\sum_{m=t_{p+1}T_{p+1}}^{t_{p+1}T_{p+1}+X'-1}\varepsilon_{d,a}(m). \tag{50}$$

В соответствии с определением $\varepsilon_{d,a}(m)$ и $S_{d,a}(X)$ получаем, что

$$\sum_{m=t_{p+1}T_{p+1}}^{t_{p+1}T_{p+1}+X'-1}\varepsilon_{d,a}(m)=\sum_{m=t_{p+1}T_{p+1}}^{t_{p+1}T_{p+1}+X'-1}\varepsilon_{d,a\ominus t_{p+1}}(m-t_{p+1}T_{p+1})=\sum_{m=0}^{X'-1}\varepsilon_{d,a\ominus t_{p+1}}(m)=S_{d,a\ominus t_{p+1}}(X'),$$

а $\sum\limits_{m=0}^{t_{p+1}T_{p+1}-1}\varepsilon_{d,a}(m)=S_{d,a}(t_{p+1}T_{p+1})$, поэтому из неравенства (50) имеем

$$|S_{d,a}(X)|\leqslant|S_{d,a}(t_{p+1}T_{p+1})|+\left|S_{d,a\ominus t_{p+1}}(X')\right|.$$

Применим к первому слагаемому соотношение (48), а ко второму — предположение индукции (49), и получим, что

$$|S_{d,a}(X)|\leqslant t'_{p+1}\max_{0\leqslant a<d}\left|S^*_{d,a}(p+1)\right|+\sum_{i=0}^{p}t'_i\max_{0\leqslant a<d}\left|S^*_{d,a}(i)\right|=\sum_{i=0}^{p+1}t'_i\max_{0\leqslant a<d}\left|S^*_{d,a}(i)\right|.$$

Таким образом, лемма 14 доказана.

Для нахождения асимптотической формулы для T_n сформулируем и докажем следующую лемму.

Лемма 15. *Предположим, что G_0, G_1, …, G_{r-1} положительны, что $G_j=\sum\limits_{i=1}^{r}a_iG_{j-i}$ для $j\geqslant r$, где $a_i\geqslant 0$, $1\leqslant i\leqslant r$. Тогда характеристический многочлен $P(u)=u^r-\sum\limits_{i=1}^{r}a_iu^{r-i}$ имеет единственный корень α максимального модуля, который является действительным и большим 1. Кроме того,*

$$G_j=C\alpha^j+O(\alpha^{(1-\delta)j}) \tag{51}$$

для действительной константы $C>0$ и некоторого $\delta>0$.

Доказательство. Сначала покажем, что $P(u)$ имеет единственный положительный действительный корень $\alpha > 1$ максимального модуля. Положим $G(u) = 1 - u^r P(u^{-1}) = \sum\limits_{j=1}^{r} a_j u^j$. Тогда $G(u)$ строго возрастает для действительных $u \geqslant 0$. Поскольку $G(0) = 0$ и $\lim\limits_{u\to+\infty} G(u) = +\infty$, то существует единственное $u_0 > 0$, такое что $G(u_0) = 1$. Поскольку G_n строго возрастает, то $\sum\limits_{j=1}^{r} a_j = G(1) > 1$ и, следовательно, $u_0 < 1$. Более того, $G'(u_0) = \sum\limits_{j=1}^{r} j a_j u_0^{j-1} > 0$. Таким образом, $\alpha = \frac{1}{u_0} > 1$ является простым корнем $P(u)$. Если $|u| < u_0$, то

$$|G(u)| \leqslant G(|u|) < G(u_0) = 1.$$

то $u \in \mathbb{C}$.

Для комплексных чисел $z_1, z_2, \ldots, z_n$, то справедливо неравенство

$$|z_1 + z_2 + \ldots + z_n| \leqslant |z_1| + |z_2| + \ldots + |z_n|. \tag{52}$$

Равенство в (52) будет достигаться только в том случае, для некоторого z выполняются равенства $z_j = \alpha_j z$, где $\alpha_j \in \mathbb{R}$, $\alpha_j > 0$.

Пусть $u \in \mathbb{C}$, тогда $a_j u^j \in \mathbb{C}$ и можно воспользоваться неравенством (52) для $|G(u)|$:

$$|G(u)| = \left|\sum_{j=1}^{r} a_j u^j\right| \leqslant \sum_{j=1}^{r} \left|a_j u^j\right| = \sum_{j=1}^{r} a_j |u|^j = G(|u|).$$

Как было показано, равенство в последнем соотношении будет достигаться только в том случае, когда при всех j выполняется равенство $a_j u^j = \alpha_j z$, то есть $u^j = \frac{\alpha_j}{a_j} z$, где $\alpha_j > 0$, $a_j > 0$ и $z \in \mathbb{C}$. Последнее равенство возможно только если $u \in \mathbb{R}$ и $z \in \mathbb{R}$.

Итак, если $|u| = u_0$ и $u \neq u_0$, то

$$|G(u)| < G(|u|) = G(u_0) = 1,$$

то есть такое u не является корнем характеристического многочлена $P(u)$. Следовательно, нет корней $P(u)$, отличных от α с модулем большим или равным α. Далее ясно, что G_j имеет представление вида (51) для некоторого вещественного C. Нам нужно только показать, что $C > 0$. Для этого определим $F_j(x_0, \ldots, x_{r-1})$ как $F_j(x_0, \ldots, x_{r-1}) = x_j$, если $0 \leqslant j < r$ и как

$$F_j(x_0, \ldots, x_{r-1}) = \sum_{i=1}^{r} a_i F_{j-i}(x_0, \ldots, x_{r-1})$$

для $j \geqslant r$. Тогда $F_j(x_0, \ldots, x_{r-1})$ является полилинейной и монотонной по всем переменным. Кроме того, $F_j(G_0, ..., G_{r-1}) = G_j$ и $F_j(1, \alpha, \ldots, \alpha^{r-1}) = \alpha^j$. Следовательно, установив $c_1 = \min\limits_{0\leqslant j<r} G_j \alpha^{-j}$, получаем

$$c_1 \alpha^j = F_j(c_1, c_1\alpha, \ldots, c_1\alpha^{r-1}) \leqslant F_j(G_0, \ldots, G_{r-1}) = C_j = C\alpha^j + O(\alpha^{(1-\delta)j}).$$

Таким образом, $C > 0$.

Замечание 4. *Приведенное выше утверждение аналогично лемме 3.1 работы [8], в которой, однако, имеется дополнительное условие о взаимной простоте ненулевых коэффициентов a_i. Доказательство, за исключением утверждения $|G(u)| < 1$ при $|u| = u_0$, $u \neq u_0$ аналогично доказательству из упомянутой работы.*

Члены рекуррентной последовательности $\{T_n\}$, определяемые условиями (1)–(3), удовлетворяют утверждению леммы 15. Пусть α – наибольший по модулю корень характеристического уравнения линейной рекуррентной последовательности $\{T_n\}$. Из леммы 15 вытекает, что α определен однозначно, является действительным и $\alpha > 1$. Более того, в силу равенства (51) имеем

$$T_n \sim C\alpha^n \tag{53}$$

с некоторым $C > 0$.

Лемма 16. *При всех $n \geqslant 0$ имеет место оценка*

$$\left|S^*_{d,a}(n)\right| \ll \min\left(\frac{\alpha^n}{\eta^n_{d,r}}, \tau^n_{d_0}\right),$$

где α — наибольший по модулю корень характеристического уравнения линейной рекуррентной последовательности $\{T_n\}$, $\alpha > 1$, τ_{d_0} — наибольший по модулю корень уравнения $u^r - d_0 \sum\limits_{s=1}^{r} u^{r-s} = 0$, $\eta_{d,r}$ определяется равенством (37).

Доказательство. Характеристический многочлен $f(u) = u^r - d_0 \sum\limits_{s=1}^{r} u^{r-s}$, где $d_0 \geqslant 1$, удовлетворяет тем же условиям, что и характеристический многочлен $P(u)$ из условия леммы 15, поэтому максимальный по модулю корень τ_{d_0} уравнения $f(u) = 0$ действительный и, более того, больший единицы. Покажем, что $\tau_{d_0} > d_0$. Действительно,

$$f(d_0) = d_0^r - d_0 \sum_{s=1}^{r} d_0^{r-s} = d_0^r - d_0\left(d_0^{r-1} + d_0^{r-2} + \ldots + d_0 + 1\right) = -d_0^{r-1} - d_0^{r-2} - \ldots - d_0 - 1 < 0,$$

а $\lim\limits_{u\to+\infty} f(u) = +\infty$, значит найдется действительный корень уравнения $f(u) = 0$, больший d_0. Так как τ_{d_0} — наибольший корень уравнения $f(u) = 0$, то $\tau_{d_0} > d_0$.

Используя индукцию по n, докажем, что $\left|S^*_{d,a}(n)\right| \ll \tau^n_{d_0}$. Заметим, что всегда можно выбрать $C(d,r)$ так, чтобы $\left|S^*_{d,a}(n)\right| \leqslant C(d,r)\tau^n_{d_0}$ при $n = 0, 1, \ldots, r-1$. Действительно, можно взять $C(d,r) = \max\limits_{0\leqslant a<d} \max\left(\left|S^*_{d,a}(0)\right|,\right.$
$\left.\frac{\left|S^*_{d,a}(1)\right|}{\tau_{d_0}}, \ldots, \frac{\left|S^*_{d,a}(r-1)\right|}{\tau^{r-1}_{d_0}}\right)$.

Рассмотрим доказательство шага индукции. Перепишем равенство (14) как $S^*_{d,a}(n+r) = S_1 + S_2$, где

$$S_1 = \sum_{\substack{s\in I,\\ 1\leqslant a'_s\leqslant d_0}} \sum_{j=1}^{a'_s} S^*_{d,a\ominus(P_{s-1}+(j-1))}(n+r-s), \quad S_2 = \sum_{\substack{s\in I,\\ d_0<a'_s\leqslant d}} \sum_{j=1}^{a'_s} S^*_{d,a\ominus(P_{s-1}+(j-1))}(n+r-s).$$

Найдем оценку каждой из сумм S_1 и S_2:

$$|S_1| \leqslant \sum_{\substack{s\in I,\\ 1\leqslant a'_s\leqslant d_0}} \sum_{j=1}^{a'_s} \left|S^*_{d,a\ominus(P_{s-1}+(j-1))}(n+r-s)\right| \leqslant \sum_{\substack{s\in I,\\ 1\leqslant a'_s\leqslant d_0}} \max_{0\leqslant a<d} \left|S^*_{d,a}(n+r-s)\right| \sum_{j=1}^{a'_s} 1 \leqslant$$

$$\leqslant d_0 \sum_{\substack{s\in I,\\ 1\leqslant a'_s\leqslant d_0}} \max_{0\leqslant a<d} \left|S^*_{d,a}(n+r-s)\right|.$$

Для получения оценки S_2 воспользуемся утверждением леммы 2, в силу которого

$$|S_2| \leqslant \sum_{\substack{s\in I,\\ d_0<a'_s\leqslant d}} \left| -\sum_{j=a'_s+1}^{d} S^*_{d,a\ominus(P_{s-1}+(j-1))}(n+r-s)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\substack{s\in I,\\ d_0<a'_s\leqslant d}} \max_{0\leqslant a<d} \left|S^*_{d,a}(n+r-s)\right| \sum_{j=a'_s+1}^{d} 1 \leqslant d_0 \sum_{\substack{s\in I,\\ d_0<a'_s\leqslant d}} \max_{0\leqslant a<d} \left|S^*_{d,a}(n+r-s)\right|.$$

Из полученных оценок для $|S_1|$ и $|S_2|$ следует, что

$$\left|S^*_{d,a}(n+r)\right| \leqslant d_0 \sum_{s\in I} \max_{0\leqslant a<d} \left|S^*_{d,a}(n+r-s)\right|.$$

С учетом предположения индукции получаем, что

$$\left|S^*_{d,a}(n+r)\right| \leqslant d_0 \sum_{s\in I} C(d,r)\tau_{d_0}^{n+r-s} \leqslant d_0 C(d,r) \sum_{s\in I} \tau_{d_0}^{n+r-s} = d_0 C(d,r)\tau_{d_0}^{n}\frac{\tau_{d_0}^{r}-1}{\tau_{d_0}-1} =$$

$$= C(d,r)\frac{d_0}{\tau_{d_0}-1}\tau_{d_0}^{n}\left(\tau_{d_0}^{r}-1\right) < C(d,r)\frac{\tau_{d_0}}{\tau_{d_0}-1}\tau_{d_0}^{n}\left(\tau_{d_0}^{r}-1\right) < C(d,r)\tau_{d_0}^{n+r}.$$

Из последнего неравенства следует справедливость оценки $\left|S^*_{d,a}(n)\right| \ll \tau_{d_0}^{n}$. Кроме того, применяя асимптотику (53) к утверждению леммы 13, получаем, что $\left|S^*_{d,a}(n)\right| \ll \frac{\alpha^n}{\eta_{d,r}^n}$. Из последних двух оценок следует утверждение леммы 16.

Перейдем к оценке $t(X)$.

Лемма 17. *Пусть X имеет разложение (4) по линейным рекуррентным последовательностям $\{T_n\}$, определяемых условиями (1)–(3), и удовлетворяет условию (5), тогда*

$$\log_\alpha \frac{X}{C(a_1+1)} < t(X) < \log_\alpha \frac{X}{Ca_1},$$

где α — корень характеристического уравнения для равенства (1), $\alpha > 1$ и $C > 0$.

Доказательство. По условию $X = \sum\limits_{i=0}^{t(X)} t_i T_i$ удовлетворяет условию (5), значит $a_1 T_{t(X)} < X < (a_1+1)T_{t(X)}$ и в силу асимптотики (53) $a_1 C\alpha^{t(X)} < X < (a_1+1)C\alpha^{t(X)}$, где $a_1 > 1$, $\alpha > 1$ и $C > 0$, тогда

$$\log_\alpha(Ca_1) + t(X) < \log_\alpha X < \log_\alpha(C(a_1+1)) + t(X),$$

или

$$\log_\alpha X - \log_\alpha(C(a_1+1)) < t(X) < \log_\alpha X - \log_\alpha(Ca_1),$$

из которого следует утверждение леммы.

Сформулируем и докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Для любого $d \geqslant 3$ справедлива асимптотическая формула*

$$N^{(T)}_{d,a}(X) = \frac{X}{d} + O\left(X^{\lambda}\right),$$

где $\lambda = \log_{\tau_{d_0}\eta_{d,r}} \tau_{d_0}$, τ_{d_0} — *наибольший по модулю корень уравнения* $u^r - d_0 \sum\limits_{s=1}^{r} u^{r-s} = 0$,

$$\eta_{d,r} = \left(1 + \frac{1}{r(d+1)^{k_0+1}}\right)^{\frac{1}{k_0+r}},$$

$$k_0 = r(d_0 - 1) + 1,$$

$$d_0 = \left[\frac{d}{2}\right].$$

Замечание 5. *Легко видеть, что полученное значение* λ *зависит только от* d *и* r, *но не от коэффициентов* a_i *линейного рекуррентного соотношения. Константа, скрытая в* $O(X^{\lambda})$, *может зависеть от этих коэффициентов.*

Доказательство. Из утверждения леммы 1 следует, что

$$N_{d,a}^{(T)}(X) = \frac{X}{d} + \sum_{m=0}^{X-1} \varepsilon_{d,a}(m) = \frac{X}{d} + S_{d,a}(X).$$

Рассмотрим два случая.

1) $\alpha > \tau_{d_0}\eta_{d,r}$. В этом случае, используя утверждения лемм 14 и 16, находим $|S_{d,a}(X)| \ll \ll \sum\limits_{i=0}^{t(X)} \tau_{d_0}^i$. Суммируя геометрическую прогрессию, имеем $|S_{d,a}(X)| \ll \tau_{d_0}^{t(X)}$. Применив оценку $t(X)$ из леммы 17, получаем $|S_{d,a}(X)| \ll \tau_{d_0}^{\log_\alpha \frac{X}{Ca_1}}$. При этом

$$\tau_{d_0}^{\log_\alpha \frac{X}{Ca_1}} = \tau_{d_0}^{\frac{\log_{\tau_{d_0}} \frac{X}{Ca_1}}{\log_{\tau_{d_0}} \alpha}} = \left(\frac{X}{Ca_1}\right)^{\frac{1}{\log_{\tau_{d_0}} \alpha}} = \left(\frac{X}{Ca_1}\right)^{\log_\alpha \tau_{d_0}}.$$

Таким образом, существует постоянная $C_1(a_1, d, r)$ такая, что при $\alpha > \tau_{d_0}\eta_{d,r}$ выполняется неравенство

$$|S_{d,a}(X)| \leqslant C_1(a_1, d, r) X^{\log_\alpha \tau_{d_0}} < C_1(a_1, d, r) X^{\log_{\tau_{d_0}\eta_{d,r}} \tau_{d_0}} = C_1(a_1, d, r) X^{\lambda}.$$

2) $\alpha \leqslant \tau_{d_0}\eta_{d,r}$. В этом случае для получения оценки $S_{d,a}(X)$ воспользуемся леммами 14 и 13. Имеем

$$|S_{d,a}(X)| \ll \sum_{i=0}^{t(X)} \max_{0 \leqslant a < d} \left|S_{d,a}^{*}(i)\right| \ll \sum_{i=0}^{t(X)} \frac{T_i}{\eta_{d,r}^i}. \tag{54}$$

При всех $i \geqslant r$ из условий (1) и (3) следует, что $T_i \geqslant T_{i-1} + T_{i-r} \geqslant 2T_{i-r}$, поэтому $T_{i-r} \leqslant \frac{1}{2} T_i$, поэтому

$$\frac{T_{i-r}}{\eta_{d,r}^{i-r}} \leqslant \frac{\eta_{d,r}^r}{2} \cdot \frac{T_i}{\eta_{d,r}^i}. \tag{55}$$

По условию $r \geqslant 2$, $d \geqslant 3$ и $k_0 \geqslant 1$, следовательно, $\frac{1}{2} < \frac{\eta_{d,r}^r}{2} < 1$. Перепишем соотношение (54) как

$$|S_{d,a}(X)| \ll \sum_{s=0}^{r-1} \sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant t(X), \\ k \equiv s \pmod r}} \frac{T_{t(X)-k}}{\eta_{d,r}^{t(X)-k}}. \tag{56}$$

Воспользуемся неравенством (55) $\frac{k-s}{r}$ раз. Имеем:

$$\frac{T_{t(X)-k}}{\eta_{d,r}^{t(X)-k}} \leqslant \frac{\eta_{d,r}^r}{2} \cdot \frac{T_{t(X)-k+r}}{\eta_{d,r}^{t(X)-k+r}} \leqslant \left(\frac{\eta_{d,r}^r}{2}\right)^2 \cdot \frac{T_{t(X)-k+2r}}{\eta_{d,r}^{t(X)-k+2r}} \leqslant \ldots \leqslant \left(\frac{\eta_{d,r}^r}{2}\right)^{\frac{k-s}{r}} \cdot \frac{T_{t(X)-s}}{\eta_{d,r}^{t(X)-s}}.$$

Воспользуемся последним неравенством для преобразования соотношения (56). Получаем

$$|S_{d,a}(X)| \ll \sum_{s=0}^{r-1} \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant t(X),\\ k\equiv s \pmod r}} \left(\frac{\eta_{d,r}^r}{2}\right)^{\frac{k-s}{r}} \cdot \frac{T_{t(X)-s}}{\eta_{d,r}^{t(X)-s}} = \sum_{s=0}^{r-1} \frac{T_{t(X)-s}}{\eta_{d,r}^{t(X)-s}} \sum_{0\leqslant k\leqslant t(X), k\equiv s \pmod r} \left(\frac{\eta_{d,r}^r}{2}\right)^{\frac{k-s}{r}}.$$

Из равенства (1) следует, что $T_{t(X)-r+1} \leqslant T_{t(X)-r+2} \leqslant \ldots \leqslant T_{t(X)}$, поэтому

$$|S_{d,a}(X)| \ll \frac{T_{t(X)}}{\eta_{d,r}^{t(X)}} \sum_{s=0}^{r-1} \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant t(X),\\ k\equiv s \pmod r}} \left(\frac{\eta_{d,r}^r}{2}\right)^{\frac{k}{r}} \ll \frac{T_{t(X)}}{\eta_{d,r}^{t(X)}} \sum_{k\geqslant 0} \left(\frac{\eta_{d,r}^r}{2}\right)^{\frac{k}{r}}.$$

Найдем сумму бесконечной убывающей геометрической прогрессии

$$\sum_{k\geqslant 0} \left(\frac{\eta_{d,r}^r}{2}\right)^{\frac{k}{r}} = \frac{1}{1-\left(\frac{\eta_{d,r}^r}{2}\right)^{\frac{1}{r}}} = \frac{2^{\frac{1}{r}}}{2^{\frac{1}{r}} - \eta_{d,r}}.$$

Данная величина является положительной постоянной, так как $\eta_{d,r} < 2^{\frac{1}{r}}$, поэтому, принимая во внимание тот факт, что $T_{t(X)} \leqslant X$, получаем $|S_{d,a}(X)| \ll \frac{X}{\eta_{d,r}^{t(X)}}$. В силу леммы 17 $t(X) > \log_\alpha \frac{X}{C(a_1+1)}$, поэтому

$$\eta_{d,r}^{t(X)} \geqslant \eta_{d,r}^{\log_\alpha \frac{X}{C(a_1+1)}} = \eta_{d,r}^{\frac{\log_{\eta_{d,r}} \frac{X}{C(a_1+1)}}{\log_{\eta_{d,r}} \alpha}} = \left(\frac{X}{C(a_1+1)}\right)^{\frac{1}{\log_{\eta_{d,r}} \alpha}} = \left(\frac{X}{C(a_1+1)}\right)^{\log_\alpha \eta_{d,r}}.$$

Таким образом, существует постоянная $C_2(a_1,d,r)$ такая, что при $\alpha \leqslant \tau_{d_0}\eta_{d,r}$ выполняется неравенство

$$|S_{d,a}(X)| \leqslant C_2(a_1,d,r) X^{1-\log_\alpha \eta_{d,r}} < C_2(a_1,d,r) X^{1-\log_{\tau_{d_0}\eta_{d,r}} \eta_{d,r}} = C_2(a_1,d,r) X^\lambda.$$

Выберем $C(a_1,d,r) = \min(C_1(a_1,d,r), C_2(a_1,d,r))$ и получим утверждение теоремы 1.

3. Заключение

В настоящей работе было получено новое, чисто комбинаторное, доказательство аналога теоремы Гельфонда о распределении сумм цифр разложений натуральных чисел для разложений по линейным рекуррентным последовательностям, удовлетворяющим условию Парри, и произвольного модуля d.

В отличие от ранее известного доказательства из [12], наш подход дает достаточно простое и явное выражение для показателя степени в остаточном члене задачи. Кроме того, данный показатель степени зависит только от модуля d и порядка линейного рекуррентного соотношения (в [12] была зависимость от коэффициентов линейного рекуррентного соотношения). Также наше доказательство не требует некоторых технических условий на коэффициенты линейного рекуррентного соотношения, имевшихся в [12].

С другой стороны, методы [12] позволяют также получить результат о равномерности распределения сумм цифр натуральных чисел, пробегающих некоторую арифметическую прогрессию. Получить данный результат нашими методами пока не удается. Было бы интересно попробовать обобщить методы настоящей работы для построения элементарного доказательства данного результата.

В простейшем случае линейной рекуррентной последовательности Фибоначчи в [14] был получен результат о точном порядке остаточного члена для произвольного d. Хотелось бы уметь получать такие результаты и для других линейных рекуррентных последовательностей.

Рассмотренный класс систем счисления, связанный с разложениями по линейным рекуррентным последовательностям, является частным случаем систем счисления, связанных с подстановками. Конструкцию таких систем счисления и ряд важных результатов об их суммах цифр можно найти в [15]–[17]. Было бы интересно получить аналог теоремы Гельфонда и в этом случае.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Fine N. J. The distribution of the sum of digits $\pmod p$ // Bulletin of the American Mathematical Society. 1965. Vol. 71 (4). P. 651-652.

2. Gelfond A. O. Sur les nombres qui ont des propriétés additives et multiplicatives données // Acta Aithmetica. 1968. Vol. 13. № 3. P. 259-265.

3. Эминян К.М. Об одной бинарной задаче // Математические заметки. 1996. Т. 60. № 4. С. 478-481.

4. Parry W. On the β-expansion of real numbers // Acta Math. Acad. Sci. Hung. 1961. Vol. 12. № 3-4. P. 401-416.

5. Pethö A., Tichy R. F. On digit expansions with respect to linear recurrences // Journal of Number Theory. 1989. Vol. 33. № 2. P. 243-256.

6. Grabner P. J., Tichy R. F. Contributions to digit expansions with respect to linear recurrences // Journal of Number Theory. 1990. Vol. 36. № 2. P. 160-169.

7. Grabner P. J., Tichy R. F. α-Expansions, linear recurrences, and the sum-of-digits function // Manuscripta Math. 1991. Vol. 70. P. 311-324.

8. Drmota M., Gajdoski J. The distribution of the sum-of-digits function // Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux. 1998. Vol. 10. № 1. P. 17-32.

9. Drmota M., Gajdosik J. The Parity of the Sum-of-Digits-Function of Generalized Zeckendorf Representations // Fibonacci Quarterly. 1998. Vol. 36. № 1. P. 3-19.

10. Жукова А. А., Шутов А. В. Об аналоге задачи Гельфонда для обобщенных разложений Цеккендорфа // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22. № 2. С. 104-120.

11. Drmota M., Skałba M. The Parity of the Zeckendorf Sum-of-Digits-Function // Manuscripta Mathematica. 2000. Vol. 101. P. 361–383.

12. Lamberger M., Thuswaldner J. W. Distribution properties of digital expansions arising from linear recurrences // Mathematica Slovaca. 2003. Vol. 53. №1. P. 1-20.

13. Coquet J., Rhin G., Toffin Ph. Représentations des entiers naturels et indépendance statistique 2 // Annales de l'institut Fourier. 1981. Vol. 31. № 1. P. 1-15.

14. Шутов А. В. Об аналоге задачи Гельфонда для представлений Цекендорфа // Чебышевский сборник. 2024. Т. 25. № 5. С. 195-215.

15. Dumont J. M., Thomas A. Systèmes de numeration et fonctions fractales relatifs aux substitutions // Theoretical Computer Science. 1989. Vol. 65. № 2. P. 153-169.

16. Dumont J. M., Thomas A. Digital sum moments and substitutions // Acta Arithmetica. 1993. Vol. 64. № 3. P. 205-225.

17. Dumont J. M., Thomas A. Gaussian asymptotic properties of the sum-of-digits functions // Journal of Number Theory. 1987. Vol. 62. № 1. P. 19–38.

REFERENCES

1. Fine, N. J. 1965, "The distribution of the sum of digits $\pmod p$", *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 71, no. 4, pp. 651-652.

2. Gelfond, A. O. 1968, "Sur les nombres qui ont des propriétés additives et multiplicatives données (French)", *Acta Aithmetica*, vol. 13, no. 3, pp. 259-265. (https://doi.org/10.4064/aa-13-3-259-265).

3. Eminyan, K. M. 1996, "On a Binary Problem", *Mathematical Notes*, vol. 60, no. 4, pp. 478-481. (https://doi.org/10.1007/FBF02305438).

4. Parry, W. 1961, "On the β-expansion of real numbers", *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, vol. 12, no. 3-4, pp. 401–416. (https://doi.org/10.1007/BF02020954).

5. Pethö, A., Tichy, R. F. 1989, "On digit expansions with respect to linear recurrences", *Journal of Number Theory*, vol. 3, no. 2, pp. 243-256. (https://doi.org/10.1016/0022-314X(89)90011-5).

6. Grabner, P. J., Tichy, R. F. 1990, "Contributions to digit expansions with respect to linear recurrences", *Journal of Number Theory*, vol. 36, no. 2, pp. 160-169. (https://doi.org/10.1016/0022-314X(90)90070-8).

7. Grabner, P. J., Tichy, R. F. 1991, "α-Expansions, linear recurrences, and the sum-of-digits function", *Manuscripta Math.*, vol. 70, pp. 311-324. (https://doi.org/10.1007/BF02568381).

8. Drmota, M. & Gajdosik, J. 1998, "The distribution of the sum-of-digits function", *Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux*, vol. 10, no. 1, pp. 17-32.

9. Drmota, M., Gajdosik, J. 1998, "The Parity of the Sum-of-Digits-Function of Generalized Zeckendorf Representations", *Fibonacci Quarterly*, vol. 36, no. 1, pp. 3-19. (https://doi.org/doi:10.1007/s002290050221).

10. Zhukova, A. A., Shutov, A. V. 2021, "On Gelfond-type problem for generalized Zeckendorf representations (Russian)", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 22, no. 2, pp. 104-120.

11. Drmota, M. & Skałba, M. 2000, "The Parity of the Zeckendorf Sum-of-Digits-Function", *Manuscripta Mathematica*, vol. 101, pp. 361–383. (https://doi.org/10.1007/s002290050221).

12. Lamberger, M., Thuswaldner, J. W. 2003, "Distribution properties of digital expansions arising from linear recurrences", *Mathematica Slovaca*, vol. 53, no. 1, pp. 1-20.

13. Coquet, J., Rhin, G., Toffin, Ph. 1981, “Représentations des entiers naturels et indépendance statistique 2 (French)”, *Annales de l’institut Fourier*, vol. 31, no. 1, pp. 1-15. (https://doi.org/10.5802/aif.814).

14. Shutov, A. V. 2024, “On some analogue of the Gelfond problem for Zeckendorf representations (Russian)”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 25, no. 5, pp. 195-215. (https://doi.org/10.22405/2226-8383-2024-25-5-195-215).

15. Dumont, J. M., Thomas, A. 1989, “Systèmes de numeration et fonctions fractales relatifs aux substitutions”, *Theoretical Computer Science*, vol. 65, no. 2, pp. 153-169. (https://doi.org/10.1016/0304-3975(89)90041-8).

16. Dumont, J. M., Thomas, A. 1993, “Digital sum moments and substitutions”, *Acta Arithmetica*, vol. 64, no. 3, pp. 205-225. (https://doi.org/10.4064/aa-64-3-205-225).

17. Dumont, J. M., Thomas, A. 1987, “Gaussian asymptotic properties of the sum-of-digits functions”, *Journal of Number Theory*, vol. 62. no. 1, pp. 19–38. (https://doi.org/10.1006/jnth.1997.2044).

Получено: 28.03.2025
Принято в печать: 08.12.2025

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 26. Выпуск 5.

УДК: 519.716.35 DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-5-137-157

Алгоритмическая разрешимость задачи полноты конечных содержащих константу ноль множеств в классе линейных дефинитных автоматов

И. В. Молдованов

Молдованов Илья Владимирович — аспирант, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: jamfr-d@mail.ru

Аннотация

Проблема проверки полноты конечных подмножеств играет важную роль при исследовании функциональных систем. В классе конечных автоматов с операциями композиции задача проверки полноты конечных подмножеств является алгоритмически неразрешимой, тогда как класс конечных автоматов с операциями суперпозиции не содержит конечных полных систем. Подкласс дефинитных автоматов характеризуется наличием конечных полных систем относительно операций суперпозиции, однако задача проверки полноты конечных подмножеств в данном случае также оказывается алгоритмически неразрешимой. Ранее был рассмотрен класс линейных автоматов с операциями композиции. Для данного класса был получен алгоритм определения полноты конечных подмножеств. В то же время для линейных автоматов с операциями суперпозиции было установлено отсутствие конечных полных систем. Интерес представляет рассмотрение данной задачи применительно к классу дефинитных линейных автоматов с операциями суперпозиции. В данной работе был получен алгоритм проверки полноты конечных содержащих константу ноль подмножеств в классе дефинитных линейных автоматов.

Ключевые слова: конечные автоматы, линейные дефинитные автоматы, полнота, операции суперпозиции, алгоритм проверки полноты.

Библиография: 17 названий.

Для цитирования:
Молдованов И. В. Алгоритмическая разрешимость задачи полноты конечных содержащих константу ноль множеств в классе линейных дефинитных автоматов // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 5, с. 137–157.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 26. No. 5.

UDC: 519.716.35 DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-5-137-157

Algorithmic decidability of the completeness problem for finite sets containing the zero constant in the class of definite linear automata

I. V. Moldovanov

Moldovanov Ilya Vladimirovich — postgraduate student, Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: jamfr-d@mail.ru

Abstract

Determining the completeness of finite subsets is an important task in the study of functional systems. In the class of finite automata with composition operations, the problem of checking the completeness of finite subsets is algorithmically undecidable. Conversely, in the class of finite automata with superposition operations, no finite complete systems exist. The subclass of definite automata is notable for having finite complete systems with respect to superposition operations; however, the problem of verifying the completeness of finite subsets in this case is also algorithmically undecidable. Previously, the class of linear automata with composition operations was studied, and an algorithm for determining the completeness of finite subsets was developed for this class. At the same time, it was shown that finite complete systems do not exist in the class of linear automata with superposition operations. Of particular interest is the investigation of this problem in the context of definite linear automata with superposition operations. In this work, an algorithm is proposed for verifying the completeness of finite subsets that include the zero constant in the class of definite linear automata.

Keywords: finite automata, linear definite automata, completeness, superposition operations, completeness verification algorithm.

Bibliography: 17 titles.

For citation:

Moldovanov, I. V. 2025, "Algorithmic decidability of the completeness problem for finite sets containing the zero constant in the class of definite linear automata" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 5, pp. 137–157.

1. Введение

В дискретной математике при исследовании функциональных систем возникает задача проверки полноты конечных подмножеств. В классе конечных автоматов с операциями композиции $P_{\text{о.д.}}$ подобного алгоритма не существует [1, 2], тогда как класс конечных автоматов с операциями суперпозиции не содержит конечных полных систем. Интерес представляет рассмотрение подклассов конечных автоматов, для которых задача проверки полноты может быть алгоритмически разрешима.

В работах [3, 4, 5] был рассмотрен класс линейных автоматов над конечными полями. Линейные автоматы представляют интерес для вычислительной техники, кодирования, построения датчиков случайных чисел и т. д. Для линейных автоматов были найдены A-предполные и K-предполные классы [3, 4, 5], а также приведены алгоритмы распознавания A-полноты и K-полноты конечных подмножеств [6]. Если рассматривать линейные автоматы с операциями суперпозиции, то в [7] было показано отсутствие конечных полных систем.

Важным подклассом класса конечных автоматов с операциями суперпозиции являются дефинитные о.д. функции [8]. Дефинитные автоматы могу быть получены как результат замыкания системы, состоящей из задержки с заданным начальным состоянием и универсальной "истинностной" о.д. функции по операциям суперпозиции. В работах [9, 10] было показано, что для данного класса не существует алгоритма распознавания A-полноты и Σ-полноты конечных множеств.

Естественный интерес вызывает исследование задачи проверки Σ-полноты для класса линейных дефинитных автоматов с операциями суперпозиции. Описанная задача решена в данной работе для конечных подмножеств, содержащих константу 0.

2. Обозначения

Рассмотрим конечное поле из двух элементов E_2. Обозначим R_2 – множество формальных степенных рядов, построенных по последовательностям элементов из E_2, то есть

$$R_2 = \{\sum_{t=0}^{\infty} x(t)\xi^t \mid x(0), x(1), \cdots \in E_2\}.$$

Определение 1. *Функция* $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) : R_2^n \to R_2$ *– линейный дефинитный автомат* $\iff \exists\, u_0(\xi)$,
$u_1(\xi), \cdots, u_n(\xi),\ u_i(\xi) \in E_2[\xi]$ *такие, что* $\forall \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \alpha_i \in R_2$, *имеет место следующее равенство:*

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = \sum_{i=1}^{n} u_i(\xi)\alpha_i + u_0(\xi).$$

Упорядочим счетное множество всех неприводимых в $E_2[\xi]$ многочленов $p_1(\xi), p_2(\xi), ...$ так, что $p_1(\xi) = \xi$. Рассмотрим произвольный неприводимый многочлен p_i степени n_i. Фактор-кольцо $E_2[\xi] \big/ (p_i) = P_i$ является полем из 2^{n_i} элементов [11]. Для многочлена $u(\xi) \in E_2[\xi]$ через $\langle u \rangle_{(p_i)}$ будем обозначать класс вычетов по модулю p_i, которому он принадлежит. Для данного поля $P_i = E_2[\xi] \big/ (p_i)$, $\deg(p_i) = n_i$, рассмотрим все его максимальные подполя. Пусть $n_i = d_1^{k_1}...d_{l_i}^{k_{l_i}}$ — разложение на простые множители. Далее через P_i^s обозначим подполе P_i, содержащее $n_{i,s} = d_1^{k_1}...d_s^{k_s-1}...d_{l_i}^{k_{l_i}}$ элементов. Отметим, что множество $\{P_i^s, s \in 1...l_i\}$ включает все максимальные собственные подполя и только их [12].

Для пары неприводимых многочленов $p_i,\ p_j,\ i \neq j,\ \deg(p_i) = \deg(p_j)$, рассмотрим факторкольцо $E_2[\xi] \big/ (p_i p_j)$. Через $R_{i,j}^s$ обозначим такие подмножества данного кольца, что $R_{i,j}^s$ изоморфно P_i и P_j.

Лемма 1. *В* $E_2[\xi]$ *существуют такие неприводимые многочлены* $p_i,\ p_j,\ i \neq j,\ \deg(p_i) = \deg(p_j)$, *что* $|\{R_{i,j}^s\}| \neq 0$.

Доказательство. Рассмотрим многочлены $p_i = \xi^3 + \xi + 1,\ p_j = \xi^3 + \xi^2 + 1$.

$$\begin{array}{lll} a_0 = \langle 0 \rangle_{(p_i p_j)}, & a_1 = \langle 1 \rangle_{(p_i p_j)}, & \\ a_2 = \langle \xi^2 + \xi \rangle_{(p_i p_j)}, & a_3 = \langle \xi^2 + \xi + 1 \rangle_{(p_i p_j)}, & a_4 = \langle \xi^4 + \xi \rangle_{(p_i p_j)}, \\ a_5 = \langle \xi^4 + \xi + 1 \rangle_{(p_i p_j)}, & a_6 = \langle \xi^4 + \xi^2 \rangle_{(p_i p_j)}, & a_7 = \langle \xi^4 + \xi^2 + 1 \rangle_{(p_i p_j)}. \end{array}$$

Изоморфизм между полем $\{a_i \mid i = 0, ..., 7\}$ и P_i вытекает из единственности поля заданного порядка [12]. □
Докажем еще одно вспомогательное утверждение.

Лемма 2. *Для любых двух неприводимых многочленов* $p_i,\ p_j,\ \deg(p_i) < \deg(p_j),\ p_i,\ p_j \in E_2[\xi]$, *кольцо* $E_2[\xi] \big/ (p_i p_j)$ *не содержит полей, изоморфных* P_j.

Доказательство. Предположим, что $P_j' \subset E_2[\xi] \big/ (p_i p_j)$ и P_j' изоморфно P_j. Имеем:
$P_j' = \{\langle r_{i,k}(\xi) + r_{j,k}(\xi)p_i \rangle_{(p_i p_j)} \mid k = 1, .., 2^{\deg(p_j)},\ \deg(r_{i,k}(\xi)) < \deg(p_i),\ \deg(r_{j,k}(\xi)) < \deg(p_j)\}$.
Так как число уникальных $r_{i,k}(\xi),\ \deg(r_{i,k}(\xi)) < \deg(p_i)$ не превосходит $2^{\deg(p_i)}$, то среди элементов P_j' существуют $\langle v'(\xi) \rangle_{(p_i p_j)}$ и $\langle v''(\xi) \rangle_{(p_i p_j)}$, что $\langle v'(\xi) \rangle_{(p_i p_j)} + \langle v''(\xi) \rangle_{(p_i p_j)} = \langle 0 + \bar{r}(\xi)p_i \rangle_{(p_i p_j)}$. P_j' - поле, не содержащее повторяющихся элементов, следовательно $\bar{r}(\xi) \neq 0$, то есть в P_j' содержится необратимый элемент, что приводит к противоречию. □

3. Σ-полнота в классе одноместных дефинитных автоматов, сохраняющих нулевую последовательность.

Множество всех линейных дефинитных автоматов над E_2 обозначим LD_2. Рассмотрим подмножество $LD^0_{2,1}$ множества LD_2, состоящее из линейных дефинитных автоматов с одним входом, сохраняющих нулевую последовательность. Произвольный автомат, принадлежащий данному классу, реализует функцию: $f(x) = u(\xi)x,\ u(\xi) \in E_2[\xi]$. Таким образом, вместо $LD^0_{2,1}$ будем рассматривать $E_2[\xi]$ с операциями сложения и умножения.

Определение 2. *Определим семейство $H^{(1)}$ подмножеств $E_2[\xi]$ следующим образом:*

$$
\begin{aligned}
&L^{(1)}_{1,0} = \{u(\xi) \mid u(\xi) \in E_2[\xi],\ u(0) = 0\},\\
&L^{(1)}_{i,s} = \{u(\xi) \mid u(\xi) \in E_2[\xi], \langle u(\xi)\rangle_{(p_i)} \in P^s_i\},\ i > 1,\\
&N^{(1)}_1 = \{u(\xi) \mid u(\xi), u'(\xi) \in E_2[\xi],\ u(\xi) = u(0) + \xi^2 u'(\xi)\},\\
&N^{(1)}_i = \{v^2(\xi) + p_i^2 u(\xi) \mid v(\xi), u(\xi) \in E_2[\xi],\ \deg(v(\xi)) < \deg(p_i)\},\ i > 1,\\
&I^{(1)}_{i,j,s} = \{u(\xi) \mid u(\xi) \in E_2[\xi],\ \langle u(\xi)\rangle_{(p_i p_j)} \in R^s_{i,j}\},\ i \ge 1,\ j > 1,\ i \ne j,\ \deg(p_i) = \deg(p_j).
\end{aligned}
$$

Другими словами, при $i > 1$ класс $L^{(1)}_{i,s}$ содержит все такие многочлены $u(\xi) \in E_2[\xi]$, что их остатки по модулю неприводимого многочлена p_i образуют максимальное подполе, соответствующее простому делителю степени p_i под номером s. Также $N^{(1)}_i$ содержит все многочлены $u(\xi) \in E_2[\xi]$, остатки которых по модулю квадрата неприводимого многочлена p_i содержат только члены с четными степенями. Наконец, $I^{(1)}_{i,j,s}$ - это подмножество кольца $E_2[\xi] \big/ (p_i p_j)$, которое изоморфно полям P_i и P_j. Опишем некоторые свойства семейства $H^{(1)}$. Несложно проверить следующую лемму.

Лемма 3. *Для любого $\Theta \in H^{(1)}$ множество Θ замкнуто в $E_2[\xi]$ относительно операций сложения и умножения.*

Используя систему $H^{(1)}$, покажем, что задача полноты в классе одноместных дефинитных линейных автоматов, сохраняющих нулевую последовательность, алгоритмически разрешима. Через $S^{(1)}(M)$ обозначим замыкание множества $M,\ M \subseteq E_2[\xi]$, по операциям сложения и умножения.

Лемма 4. *Пусть $M \subseteq E_2[\xi]$, p_i – неприводимый многочлен степени $n_i = d_1^{k_1}...d_{l_i}^{k_{l_i}}$. Если для любого Θ, $\Theta \in \{L^{(1)}_{1,0}\} \cup \{L^{(1)}_{i,s} \mid s = 1, ..., l_i\}$, выполнено: $M \nsubseteq \Theta$, то для любого $r(\xi)$, $\deg(r(\xi)) < \deg(p_i)$, существует $u_r(\xi) \in S^{(1)}(M)$ такой, что $u_r(\xi) = r(\xi) + p_i u'(\xi)$ для некоторого $u'(\xi) \in E_2[\xi]$.*

Доказательство. Из условия $M \nsubseteq \{L^{(1)}_{i,s}\},\ s = 1, ..., l_i$, следует, что в $S^{(1)}(M)$ содержится множество многочленов вида $\{u_s(\xi) \mid \langle u_s(\xi)\rangle_{(p_i)} \notin P^s_i,\ s = 1...l_i\}$. То есть соответствующее множество классов вычетов по модулю p_i не содержится ни в одном из максимальных подполей P^s_i, поэтому его замыкание по операциям сложения и умножения совпадает с P_i. $\square$

Таким образом, было показано, что если множество M не содержится ни в одном из классов $\{L^{(1)}_{1,0}\} \cup \{L^{(1)}_{i,s} \mid s =$
$= 1, \ldots, l_i\}$ для некоторого i, то многочлены из его замыкания дают все остатки по модулю неприводимого многочлена $p_i,\ i = 1, 2, \ldots$. Покажем, что если M также не содержится в N_i, то многочлены из замыкания данного множества дают все остатки по модулю квадрата данного неприводимого многочлена.

Лемма 5. *Пусть $M \subseteq E_2[\xi]$, p_i – неприводимый многочлен степени $n_i = d_1^{k_1} \dots d_{l_i}^{k_{l_i}}$. Если для любого $\Theta, \Theta \in \{L_{1,0}^{(1)}\} \cup \{L_{i,s}^{(1)} \mid s = 1, \dots, l_i\} \cup \{N_i^{(1)}\}$, выполнено: $M \nsubseteq \Theta$, то для любого $r(\xi)$, $\deg(r(\xi)) < \deg(p_i^2)$, существует $u_r(\xi) \in S^{(1)}(M)$, такой что $u_r(\xi) = r(\xi) + p_i^2 u'(\xi)$ для некоторого $u'(\xi) \in E_2[\xi]$.*

Доказательство. В силу леммы 4 и особенностей возведения в степень в поле характеристики два, для любого $w(\xi)$, $\deg(w(\xi)) < \deg(p_i)$, многочлен вида $w^2(\xi) + p_i^2 u(\xi)$ принадлежит $S^{(1)}(M)$ для некоторого $u(\xi) \in E_2[\xi]$.

Из условия $M \nsubseteq N_i^{(1)}$: M принадлежит хотя бы один многочлен вида $v(\xi) = w(\xi) + p_i^2 u(\xi)$, $\deg(w(\xi)) < \deg(p_i^2)$, и $w(\xi)$ содержит хотя бы один одночлен нечетной степени. Обозначим через $w_o(\xi)$ и $w_e(\xi)$ сумму всех одночленов $w(\xi)$ нечетной и четной степеней, соответственно. Таким образом:

$$v(\xi) = w_o(\xi) + w_e(\xi) + p_i^2 u(\xi),\ 1 \leq \deg(w_o(\xi)) < \deg(p_i^2),\ \deg(w_e(\xi)) < \deg(p_i^2).$$

Рассмотрим $\bar{w}^2(\xi) = w_e(\xi)$, тогда $\bar{v}(\xi) = \bar{w}^2(\xi) + p_i^2 \bar{u}(\xi) \in S^{(1)}(M)$. Имеем:

$$v'(\xi) = v(\xi) + \bar{v}(\xi) = w_o(\xi) + w_e(\xi) + p_i^2 u(\xi) + \bar{w}^2(\xi) + p_i^2 \bar{u}(\xi) = w_o(\xi) + p_i^2 u'(\xi) \in S^{(1)}(M).$$

Следовательно:

$$v'(\xi) = w_o(\xi) + p_i^2 u'(\xi) = \xi w_e'(\xi) + p_i^2 u'(\xi).$$

Так как $w_e'(\xi)$ – многочлен, составленный только из одночленов четных степеней, существует такой $w_r'(\xi)$, $\deg(w_r'(\xi)) < \deg(p_i)$, что $w_r'(\xi)^2 = w_e'(\xi)$. Рассмотрим $h(\xi)$, $\deg(h(\xi)) < \deg(p_i)$, для которого $\langle h(\xi)\rangle_{(p_i)} = \langle w_r'(\xi)\rangle_{(p_i)}^{-1}$. Исходя из приведенных ранее рассуждений, существует такой $u_h(\xi) \in E_2[\xi]$, что $h^2(\xi) + p_i^2 u_h(\xi)$ принадлежит $S^{(1)}(M)$. Имеем:

$$(\xi w_e'(\xi) + p_i^2 u''(\xi)) \cdot (h^2(\xi) + p_i^2 u_h(\xi)) = (\xi (w_r'(\xi) h(\xi))^2 + p_i^2 \bar{u}(\xi)) =$$
$$= \xi (1 + p_i b(\xi))^2 + p_i^2 \bar{u}(\xi) = \xi + p_i^2 \bar{w}^2(\xi) + p_i^2 \bar{u}(\xi)) = \xi + p_i^2 \tilde{u}(\xi) \in S^{(1)}(M).$$

Так как многочлен $1 + p_i^2 \tilde{u'}(\xi)$ также принадлежит $S^{(1)}(M)$, получаем утверждение леммы. □
Отметим: чтобы получить остатки по модулю более старших степеней неприводимого многочлена, не требуется вводить дополнительные классы. Далее покажем: если M не принадлежит ни одному из классов $\{L_{1,0}^{(1)}\} \cup \{L_{i,s}^{(1)}\} \cup N_i^{(1)}$, то остатки по модулю произвольной степени неприводимого многочлена p_i содержатся в $S^{(1)}(M)$.

Лемма 6. *Пусть $M \subseteq E_2[\xi]$, p_i – неприводимый многочлен степени $n_i = d_1^{k_1} ... d_{l_i}^{k_{l_i}}$. Если для любого Θ, $\Theta \in \{L_{1,0}^{(1)}\} \cup \{L_{i,s}^{(1)} \mid s = 1, ..., l_i\} \cup \{N_i^{(1)}\}$, выполнено: $M \nsubseteq \Theta$, то для любого $J \in \mathbb{N}$, и произвольного набора многочленов $\{r_j(\xi) \mid \deg(r_j(\xi)) < \deg(p_i),\ j = 0, ..., J-1\}$ существует такой $g_J(\xi) \in E_2[\xi]$, что $\sum\limits_{j=0}^{J-1} p_i^j r_j(\xi) + p_i^J g_J(\xi) \in S^{(1)}(M)$.*

Доказательство. Докажем данное утверждение индукцией по степени l неприводимого многочлена p_i, относительно которой рассматриваются остатки. База индукции для $l = 1$ и $l = 2$ следует из лемм 4 и 5, соответственно.

Пусть утверждение леммы выполнено для любого $l < J$, $J \in \mathbb{N}$, $J > 1$. Тогда для любых многочленов вида $\{r_j(\xi) \mid \deg(r_j(\xi)) < \deg(p_i),\ j = 0, ..., J-2\}$ справедливо:

$$\sum_{j=0}^{J-2} p_i^j r_j(\xi) + p_i^{J-1} g(\xi)_{J-1} \in S^{(1)}(M).$$

Рассмотрим произведение многочленов $p_i+p_i^{J-1}g_1(\xi)$ и $r(\xi)p_i^{J-2}+p_i^{J-1}g_2(\xi)$ для произвольного $r(\xi)$, $\deg(r(\xi))<\deg(p_i)$:

$$\Big(p_i+p_i^{J-1}g_1(\xi)\Big)\cdot\Big(r(\xi)p_i^{J-2}+p_i^{J-1}g_2(\xi)\Big)=r(\xi)p_i^{J-1}+p_i^Jg'(\xi).$$

Так как по предположению индукции оба множителя принадлежат $S^{(1)}(M)$, то получаем, что для произвольного $r(\xi)$, $\deg(r(\xi))<\deg(p_i)$, многочлен $r(\xi)p_i^{J-1}+p_i^Jg'(\xi)\in S^{(1)}(M)$.

Покажем, что многочлен $p_i+p_i^J\bar g(\xi)$ также принадлежит $S^{(1)}(M)$. Для некоторого $g_1(\xi)\in E_2[\xi]$, имеем $p_i+p_i^{J-1}g_1(\xi)\in S^{(1)}(M)$. Если $g_1(\xi)\in\langle 0\rangle_{(p_i)}$, то $p_i+p_i^{J-1}g_1(\xi)=p_i+p_i^J\bar g(\xi)\in$ $\in S^{(1)}(M)$. В противном случае: $p_i+p_i^{J-1}g_1(\xi)=p_i+r(\xi)p_i^{J-1}+p_i^J\bar g'(\xi)$. Прибавив $r(\xi)p_i^{J-1}+$ $+p_i^Jg'(\xi)\in S^{(1)}(M)$, получим, что искомый многочлен принадлежит $S^{(1)}(M)$.

По предположению индукции $\sum\limits_{j=0}^{J-2}p_i^jr_j(\xi)+p_i^{J-1}g(\xi)_{J-1}\in S^{(1)}(M)$ для любых многочленов вида $\{r_j(\xi)\mid \deg(r_j(\xi))<\deg(p_i),\ j=0,...,J-2\}$. Тогда следующее произведение также принадлежит $S^{(1)}(M)$:

$$\left(\sum_{j=0}^{J-2}p_i^jr_j(\xi)+p_i^{J-1}g(\xi)_{J-1}\right)\cdot\big(p_i+p_i^J\bar g(\xi)\big)=\sum_{j=1}^{J-1}p_i^jr_j(\xi)+p_i^Jg''(\xi).$$

В заключение рассмотрим произвольный многочлен вида $r(\xi)+p_iu_r(\xi)$. Для любого $r(\xi)$, $\deg(r(\xi))<\deg(p_i)$, такой многочлен принадлежит $S^{(1)}(M)$ по лемме 4. Заметим, что

$$r(\xi)+p_iu_r(\xi)=r(\xi)+\sum_{j=1}^{J-1}p_i^jr_j'(\xi)+p_i^Ju_r'(\xi),$$

для некоторого набора $\{r_j'(\xi)\mid 0\le\deg(r_j')<\deg(p_i)\}$ и некоторого $u_r'(\xi)\in E_2[\xi]$. Следовательно, учитывая приведенные ранее рассуждения, получаем: $r(\xi)+p_i^Ju_r''(\xi)\in S^{(1)}(M)$, откуда следует утверждение леммы. □ Было показано, что если множество M не содержится в системе замкнутых классов $\{L_{1,0}^{(1)}\}\cup\{L_{i,s}^{(1)}|s=1,\dots,l_i\}\cup N_i^{(1)}$, то его замыкание содержит все остатки по модулю произвольной степени неприводимого многочлена p_i. Следующим шагом покажем, что если множество многочленов не содержится ни в одном классе семейства $H^{(1)}$, то и остатки по модулю произведения произвольной комбинации неприводимых многочленов также будут содержаться в $S^{(1)}(M)$.

Лемма 7. *Пусть $M\subseteq E_2[\xi]$. Рассмотрим $\{p_i\mid i\in\mathbb{I},\mathbb{I}\subset\mathbb{N},2\le|\mathbb{I}|<\infty\}$ – конечное множество неприводимых многочленов. Если для любого Θ, $\Theta\in\{L_{1,0}^{(1)}\}\cup\{L_{i,s}^{(1)}\,|\,s=1,\dots,l_i,\ i\in\mathbb{I}\}\cup$ $\cup\{N_i^{(1)},i\in\mathbb{I}\}\cup\{I_{i,j,s}^{(1)}\mid \deg(p_j)=\deg(p_i),\ i\ne j,\ i,\ j\in\mathbb{I}\}$, выполнено: $M\nsubseteq\Theta$, то для любого $\mathbb{I}'$, $\mathbb{I}'\subset\mathbb{I}$, $|\mathbb{I}'|=|\mathbb{I}|-1$ многочлен $\prod\limits_{i\in\mathbb{I}'}p_i+\left(\prod\limits_{i\in\mathbb{I}}p_i\right)u_{\mathbb{I}'}(\xi)\in S^{(1)}(M)$ для некоторого $u_{\mathbb{I}'}(\xi)\in$ $\in E_2[\xi]$.*

Доказательство. Докажем данное утверждение индукцией по мощности множества $\mathbb{I}$. В качестве базы индукции покажем, что утверждение леммы верно для $|\mathbb{I}|=2$. Пусть $\mathbb{I}=\{i,j\}$. Без ограничения общности рассуждений будем предполагать, что $\deg(p_j)\ge\deg(p_i)$.
По лемме 4 для любого $r(\xi)$, $\deg(r(\xi))<\deg(p_j)$, многочлен вида $v_r(\xi)=r(\xi)+p_ju_r(\xi)$ принадлежит $S^{(1)}(M)$ для некоторого $u_r(\xi)\in E_2[\xi]$. Рассмотрим множество $\mathbb{V}=\{v_r(\xi)\mid\langle r(\xi)\rangle_{(p_j)}\in P_j\}$ и покажем, что при выполнении условий леммы, как минимум один из многочленов p_i+ $+p_ip_ju_i(\xi)$ или $p_j+p_ip_ju_j(\xi)$ содержится в $S^{(1)}(M)$ для для некоторых $u_i(\xi),u_j(\xi)\in E_2[\xi]$.
Случай 1: Существует $v_r(\xi)\in\mathbb{V}$, такой что $v_r(\xi)\in\langle 0\rangle_{(p_i)}$ или $v_r(\xi)\in\langle 0\rangle_{(p_j)}$, и $v_r(\xi)\notin\langle 0\rangle_{(p_ip_j)}$.

Пусть без ограничения общности $v_r(\xi) \in \langle 0\rangle_{(p_j)}$, тогда имеем: $v_r(\xi) = r(\xi)p_j + p_ip_ju_0(\xi)$, где $\deg(r(\xi)) < \deg(p_i)$. По лемме 4 в $S^{(1)}(M)$ содержится многочлен $w_{r'}(\xi) = r'(\xi) + p_is(\xi) \in \in \langle r(\xi)\rangle^{-1}_{(p_i)}$, следовательно:

$$(r(\xi)p_j + p_ip_ju_0(\xi))(r'(\xi) + p_is(\xi)) = p_j + p_ip_ju_i(\xi) \in S^{(1)}(M).$$

Случай 2: Существует $v_r(\xi) \in \mathbb{V}$, такой что $v_r(\xi) \in \langle 1\rangle_{(p_j)}$ и $v_r(\xi) \notin \langle 1\rangle_{(p_ip_j)}$. Имеем $v_r(\xi) = 1 + p_ju_1(\xi),\ u_1(\xi) \notin \langle 0\rangle_{(p_i)}$. По лемме 4 в $S^{(1)}(M)$ содержится многочлен $w_1(\xi) = = 1 + p_is(\xi)$ и

$$(1 + p_ju_1(\xi)) \cdot (1 + p_is(\xi)) + (1 + p_is(\xi)) = p_j(1 + p_is(\xi))u_1(\xi) \in S^{(1)}(M).$$

Так как $u_1(\xi)$ не делит p_i, получаем случай 1.

Обозначим $\langle \mathbb{V}\rangle_{(p_ip_j)} = \{\langle v_r(\xi)\rangle_{(p_ip_j)} \mid v_r(\xi) \in \mathbb{V}\}$.

Невыполнение условий 1 и 2 означает, что $\langle 0\rangle_{(p_ip_j)} \in \langle \mathbb{V}\rangle_{(p_ip_j)}$ и $\langle 1\rangle_{(p_ip_j)} \in \langle \mathbb{V}\rangle_{(p_ip_j)}$, а также, что любой элемент $\langle r(\xi)\rangle_{(p_ip_j)} \in \langle \mathbb{V}\rangle_{(p_ip_j)} \setminus \{\langle 0\rangle_{(p_ip_j)}\}$ обратим по модулю произведения неприводимых многочленов p_ip_j.

Случай 3: Существуют $v_r(\xi), v_{r'}(\xi) \in \mathbb{V}$, что $v_{r'}(\xi) \in \langle v_r(\xi)\rangle^{-1}_{(p_j)}$ и $v_{r'}(\xi) \notin \langle v_r(\xi)\rangle^{-1}_{(p_ip_j)}$. Имеем:

$$v_r(\xi) \cdot v_{r'}(\xi) = 1 + \bar{r}(\xi)p_j + p_ip_j\tilde{u}(\xi),\ \bar{r}(\xi) \neq 0,$$

следовательно, получаем случай 2.

Случай 4: Существует $\bar{v}(\xi) \in S^{(1)}(\mathbb{V})$, такой что $\langle \bar{v}(\xi)\rangle_{(p_ip_j)} \notin \langle \mathbb{V}\rangle_{(p_ip_j)}$. Если $\bar{v}(\xi) \in \langle 0\rangle_{(p_i)}$ или $\bar{v}(\xi) \in \langle 0\rangle_{(p_j)}$, то получаем случай 1. В противном случае, в $\mathbb{V}$ содержится многочлен $v_r(\xi)$, такой что $\langle v_r(\xi) + \bar{v}(\xi)\rangle_{(p_j)} = \langle 0\rangle_{(p_j)}$ и $\langle v_r(\xi) + \bar{v}(\xi)\rangle_{(p_j)} \neq \langle 0\rangle_{(p_ip_j)}$, то есть реализуется случай 1.

Одновременное невыполнение условий 1-4 означает, что $\langle \mathbb{V}\rangle_{(p_ip_j)}$ является полем, изоморфным P_j, следовательно, если $\deg(p_i) < \deg(p_j)$, то получаем противоречие с утверждением леммы 2.

Случай 5: $\deg(p_i) = \deg(p_j)$. Имеем $\forall s \;\; M \not\subseteq I^{(1)}_{i,j,s}$, следовательно в $S^{(1)}(M)$ содержится многочлен $w(\xi)$, такой что $\langle w(\xi)\rangle_{(p_ip_j)} \notin R^s_{i,j}$, а значит реализуется один из случаев 1-4.

Таким образом, было доказано, что один из многочленов $p_i + p_ip_ju_i(\xi)$ или $p_j + p_ip_ju_j(\xi)$ содержится в $S^{(1)}(M)$ для некоторых $u_i(\xi), u_j(\xi) \in E_2[\xi]$.

Без ограничения общности рассуждений будем предполагать, что $p_j + p_ip_ju_j(\xi) \in S^{(1)}(M)$, то есть база индукции доказана для $\mathbb{I}' = \{j\}$. Имеем $p_i = r_1(\xi) + r_2(\xi)p_j$ для некоторых $r_1(\xi), r_2(\xi) \in E_2[\xi]$, $\deg(r_1(\xi)) < \deg(p_j), \deg(r_2(\xi)) < \deg(p_i)$. Покажем, что для произвольного $\bar{r}(\xi) \in E_2[\xi]$, $\deg(\bar{r}(\xi)) < \deg(p_i)$ многочлен $\bar{r}(\xi)p_j + p_ip_jw_{\bar{r}}(\xi) \in S^{(1)}(M)$. По лемме 4 имеем $\bar{r}(\xi) + p_i\bar{w}(\xi) \in S^{(1)}(M)$ для некоторого $\bar{w}(\xi) \in E_2[\xi]$, следовательно

$$(\bar{r}(\xi) + p_i\bar{w}(\xi)) \cdot (p_j + p_ip_ju_j(\xi)) = \bar{r}(\xi)p_j + p_ip_jw_{\bar{r}}(\xi) \in S^{(1)}(M).$$

Рассмотрим $r_1(\xi) + p_j\tilde{w}(\xi)$. По лемме 4 данный многочлен содержится в $S^{(1)}(M)$ для некоторого $\tilde{w}(\xi) \in E_2[\xi]$. Имеем $r_1(\xi) + p_j\tilde{w}(\xi) = r_1(\xi) + r_2'(\xi)p_j + p_ip_j\tilde{w}'(\xi)$, $\deg(r_2'(\xi)) < \deg(p_i)$, следовательно

$$\begin{aligned}&\big(r_1(\xi) + r_2'(\xi)p_j + p_ip_j\tilde{w}'(\xi)\big) + \Big(r_2'(\xi)p_j + p_ip_jw_{r_2'}(\xi)\Big) + (r_2(\xi)p_j + p_ip_jw_{r_2}) = \\ &= p_i + p_ip_ju_i(\xi) \in S^{(1)}(M).\end{aligned}$$

Таким образом, база индукции доказана для $\mathbb{I}' = \{i\}$, что завершает доказательство утверждения леммы для наборов, состоящих из двух многочленов.

Пусть утверждение леммы верно для любого $\mathbb{I} \subset \mathbb{N}$, $2 \le |\mathbb{I}| < l$, $l > 2$. Покажем, что оно выполняется для наборов мощности l. Выберем произвольный $j \in \mathbb{I}$, и для некоторого $k \in \mathbb{I} \setminus \{j\}$ рассмотрим наборы $\mathbb{I}_2 = \{j, k\}$ и $\mathbb{I}' = \mathbb{I} \setminus \{k\}$. По предположению индукции имеем:

$$\prod_{i \in \mathbb{I}' \setminus \{j\}} p_i + \prod_{i \in \mathbb{I}'} p_i u_{\mathbb{I}'}(\xi) \in S^{(1)}(M), \;\; p_k + p_k p_j u_{\{k,j\}}(\xi) \in S^{(1)}(M).$$

Произведение данных многочленов имеет вид:

$$\left(\prod_{i \in \mathbb{I} \setminus \{k,j\}} p_i + \prod_{i \in \mathbb{I} \setminus \{k\}} p_i u_{\mathbb{I}'}(\xi)\right) \cdot \left(p_k + p_k p_j u_{\{k,j\}}(\xi)\right) = \prod_{i \in \mathbb{I} \setminus \{j\}} p_i + \prod_{i \in \mathbb{I}} p_i u_{\mathbb{I}}(\xi) \in S^{(1)}(M),$$

что завершает доказательство леммы, так как выбор j был произвольным. □ Следующие две леммы обобщают лемму 7.

Лемма 8. *Пусть $M \subseteq E_2[\xi]$. Рассмотрим $\{p_i \mid i \in \mathbb{I}, \mathbb{I} \subset \mathbb{N}, 2\, |\mathbb{I}| < \infty\}$ – некоторый набор неприводимых многочленов. Если для любого Θ, $\Theta \in \{L^{(1)}_{1,0}\} \cup \{L^{(1)}_{i,s} \mid s = 1, \ldots, l_i,\ i \in \mathbb{I}\} \cup$ $\cup \{N_i \mid i \in \mathbb{I}\} \cup \{I^{(1)}_{i,j,s} \mid \deg(p_j) = \deg(p_i),\ i \neq j,\ i, j \in \mathbb{I}\}$, выполнено: $M \nsubseteq \Theta$, то для любого $j \in \mathbb{I}$ и произвольного $n_j \in \mathbb{N}$, многочлен $\prod_{i \in \mathbb{I} \setminus \{j\}} p_i + \left(p_j^{n_j} \prod_{i \in \mathbb{I} \setminus \{j\}} p_i\right) u_j(\xi) \in S^{(1)}(M)$ для некоторого $u_j(\xi) \in E_2[\xi]$.*

Доказательство. Докажем данное утверждение индукцией по степени n_j. В качестве базы индукции рассмотрим многочлен $\prod_{i \in \mathbb{I} \setminus \{j\}} p_i + \left(p_j \prod_{i \in \mathbb{I} \setminus \{j\}} p_i\right) u_1(\xi)$, принадлежащий $S^{(1)}(M)$ по лемме 7.

Докажем шаг индукции:

$$\prod_{i \in \mathbb{I} \setminus \{j\}} p_i + \left(p_j^{n_j} \prod_{i \in \mathbb{I} \setminus \{j\}} p_i\right) u_{n_j}(\xi) \in S^{(1)}(M) \to \prod_{i \in \mathbb{I} \setminus \{j\}} p_i + \left(p_j^{n_j+1} \prod_{i \in \mathbb{I} \setminus \{j\}} p_i\right) u_{n_j+1}(\xi) \in S^{(1)}(M).$$

Если $u_{n_j} \in \langle 0 \rangle_{(p_j)}$, то утверждение леммы доказано. Рассмотрим противоположный случай:

$$\prod_{i \in \mathbb{I} \setminus \{j\}} p_i + \left(p_j^{n_j} \prod_{i \in \mathbb{I} \setminus \{j\}} p_i\right) u_{n_j}(\xi) = \prod_{i \in \mathbb{I} \setminus \{j\}} p_i + r(\xi) \left(p_j^{n_j} \prod_{i \in \mathbb{I} \setminus \{j\}} p_i\right) + \left(p_j^{n_j+1} \prod_{i \in \mathbb{I} \setminus \{j\}} p_i\right) u_r(\xi),$$

где $\deg(u_r(\xi)) \ge 0$.

Рассмотрим произведение многочленов $r(\xi) p_j^{n_j} + p_j^{n_j+1} u_j(\xi)$ и $\prod_{i \in \mathbb{I} \setminus \{j\}} p_i + \left(p_j^{n_j} \prod_{i \in \mathbb{I} \setminus \{j\}} p_i\right) u_{n_j}(\xi)$:

$$\begin{aligned}
&\left(r(\xi) p_j^{n_j} + p_j^{n_j+1} u_j(\xi)\right) \cdot \left(\prod_{i \in \mathbb{I} \setminus \{j\}} p_i + \left(p_j^{n_j} \prod_{i \in \mathbb{I} \setminus \{j\}} p_i\right) u_{n_j}(\xi)\right) = \\
&= r(\xi) \left(p_j^{n_j} \prod_{i \in \mathbb{I} \setminus \{j\}} p_i\right) + r(\xi) \left(p_j^{2n_j} \prod_{i \in \mathbb{I} \setminus \{j\}} p_i\right) u_{n_j}(\xi) + \left(p_j^{n_j+1} \prod_{i \in \mathbb{I} \setminus \{j\}} p_i\right) u_j(\xi) + \\
&+ \left(p_j^{2n_j+1} \prod_{i \in \mathbb{I} \setminus \{j\}} p_i\right) u_j(\xi) u_{n_j}(\xi) = r(\xi) \left(p_j^{n_j} \prod_{i \in \mathbb{I} \setminus \{j\}} p_i\right) + \left(p_j^{n_j+1} \prod_{i \in \mathbb{I} \setminus \{j\}} p_i\right) v'(\xi),
\end{aligned}$$

причем данное произведение принадлежит $S^{(1)}(M)$, так как первый множитель содержится в $S^{(1)}(M)$ по лемме 6, а второй – по предположению индукции. Наконец, суммируя полученные выражения, имеем:

$$\left(\prod_{i\in\mathbb{I}\setminus\{j\}} p_i + r(\xi)\left(p_j^{n_j}\prod_{i\in\mathbb{I}\setminus\{j\}} p_i\right) + \left(p_j^{n_j+1}\prod_{i\in\mathbb{I}\setminus\{j\}} p_i\right)u_r(\xi)\right) +$$
$$\left(r(\xi)\left(p_j^{n_j}\prod_{i\in\mathbb{I}\setminus\{j\}} p_i\right) + \left(p_j^{n_j+1}\prod_{i\in\mathbb{I}\setminus\{j\}} p_i\right)v(\xi)\right) = \prod_{i\in\mathbb{I}\setminus\{j\}} p_i + \left(p_j^{n_j+1}\prod_{i\in\mathbb{I}\setminus\{j\}} p_i\right)v(\xi) \in S^{(1)}(M).$$

□

Лемма 9. *Пусть $M \subseteq E_2[\xi]$. Рассмотрим $\{p_i \mid i \in \mathbb{I}, \mathbb{I} \subset \mathbb{N}, 2 \le |\mathbb{I}| < \infty\}$ – некоторый набор неприводимых многочленов и $\{n_i \mid n_i \in \mathbb{N},\ i \in \mathbb{I}\}$ – соответствующие степени многочленов. Если для любого Θ, $\Theta \in \{L_{1,0}^{(1)}\} \cup \{L_{i,s}^{(1)} \mid s = 1, \dots l, i \in \mathbb{I}\} \cup \{N_i^{(1)} \mid i \in \mathbb{I}\} \cup \{I_{i,j,s}^{(1)} \mid \deg(p_j) = = \deg(p_i),\ i \ne j,\ i,j \in \mathbb{I}\}$, выполнено: $M \not\subseteq \Theta$, то для любого $j \in \mathbb{I}$ многочлен $\prod_{i\in\mathbb{I}\setminus\{j\}} p_i^{n_i} + \prod_{i\in\mathbb{I}} p_i^{n_i} u_j(\xi) \in S^{(1)}(M)$ для некоторого $u_j(\xi) \in E_2[\xi]$.*

Доказательство. По лемме 8 для любого $j \in \mathbb{I}$ многочлен $p_i + p_j^{n_j} p_i u_i(\xi) \in S^{(1)}(M)$.

Докажем утверждение индукцией по степени неприводимого многочлена для произвольного $i' \in \mathbb{I}\setminus\{j\}$. В качестве базы индукции рассмотрим многочлен $\prod_{i\in\mathbb{I}\setminus\{j\}} p_i + p_j^{n_j}\prod_{i\in\mathbb{I}\setminus\{j\}} p_i u_{n_j}(\xi)$, который принадлежит $S^{(1)}(M)$ по лемме 8. Докажем шаг индукции:

$$\left(p_{i'}^{n_{i'}}\prod_{i\in\mathbb{I}\setminus\{i',j\}} p_i^{n_i}\right) + \left(p_{i'}^{n_{i'}}\prod_{i\in\mathbb{I}\setminus\{i'\}} p_i^{n_i}\right)u(\xi) \to \left(p_{i'}^{n_{i'}+1}\prod_{i\in\mathbb{I}\setminus\{i',j\}} p_i^{n_i}\right) + \left(p_{i'}^{n_{i'}+1}\prod_{i\in\mathbb{I}\setminus\{i'\}} p_i^{n_i}\right)u'(\xi).$$

Многочлен $p_{i'} + p_j^{n_j} p_{i'} u_{i'}(\xi)$ принадлежит $S^{(1)}(M)$ по лемме 8 применительно к множеству $\{i', j\}$:

$$\left(p_{i'} + p_j^{n_j} p_{i'} u_{i'}(\xi)\right)\cdot\left(\left(p_{i'}^{n_{i'}}\prod_{i\in\mathbb{I}\setminus\{i',j\}} p_i^{n_i}\right) + \left(p_{i'}^{n_{i'}}\prod_{i\in\mathbb{I}\setminus\{i'\}} p_i^{n_i}\right)u(\xi)\right) = \left(p_{i'}^{n_{i'}+1}\prod_{i\in\mathbb{I}\setminus\{i',j\}} p_i^{n_i}\right) +$$
$$+\left(p_{i'}^{n_{i'}+1}\prod_{i\in\mathbb{I}\{i'\}} p_i^{n_i}\right)u(\xi) + \left(p_{i'}^{n_{i'}+1}\prod_{i\in\mathbb{I}\setminus\{i'\}} p_i^{n_i}\right)u_i(\xi) + \left(p_{i'}^{n_{i'}+1}\prod_{i\in\mathbb{I}\{i'\}} p_i^{n_i}\right)u(\xi)u_i(\xi) =$$
$$= \left(p_{i'}^{n_{i'}+1}\prod_{i\in\mathbb{I}\setminus\{i',j\}} p_i^{n_i}\right) + \left(p_{i'}^{n_{i'}+1}\prod_{i\in\mathbb{I}\setminus\{i'\}} p_i^{n_i}\right)u'(\xi) \in S^{(1)}(M).$$

□

Подводя итог предыдущим рассуждениям, подчеркнем, что по лемме 6 любой остаток по модулю произвольной целой положительной степени произвольного неприводимого многочлена принадлежит $S^{(1)}$-замыканию рассматриваемого множества M, если оно не содержится ни в одном из замкнутых классов $H^{(1)}$. В свою очередь, при выполнении аналогичного условия, лемма 9 утверждает, что если рассмотреть произвольное произведение степеней неприводимых многочленов, то по данному модулю любое произведение, исключающее один из неприводимых многочленов, принадлежит $S^{(1)}(M)$. Покажем, что из лемм 6 и 9 следует условие включения любого остатка по модулю произвольного произведения степеней неприводимых многочленов в $S^{(1)}$-замыкание множества M.

Лемма 10. *Пусть* $M \subseteq E_2[\xi]$. *Рассмотрим* $\{p_i^{n_i} \mid i \in \mathbb{I}, \mathbb{I} \subset \mathbb{N}, 1 \leq |\mathbb{I}| < \infty\}$ – *некоторый набор степеней неприводимых многочленов. Если для любого* Θ, $\Theta \in \{L_{1,0}^{(1)}\} \cup \{L_{i,s}^{(1)} \mid s=1,\dots,l_i, i \in \mathbb{I}\} \cup \{N_i^{(1)} \mid i \in \mathbb{I}\} \cup \{I_{i,j,s}^{(1)} \mid \deg(p_j) = \deg(p_i),\ i \neq j,\ i,j \in \mathbb{I}\}$, *выполнено:* $M \nsubseteq \Theta$, *то для* $\forall r(\xi) \in E_2[\xi]$, $\deg(r(\xi)) < \sum\limits_{i\in\mathbb{I}} n_i \deg(p_i)$, *существует такой* $u(\xi) \in E_2[\xi]$, *что* $r(\xi) + \prod\limits_{i\in\mathbb{I}} p_i^{n_i} u(\xi)$ *принадлежит* $S^{(1)}(M)$.

Доказательство. Обозначим $\mathbb{I}_i = \mathbb{I} \setminus \{i\}$. Исходя из китайской теоремы об остатках [13], существует изоморфизм колец

$$\prod_{i\in\mathbb{I}} E_2[\xi] \Big/ (p_i^{n_i}) \to E_2[\xi] \Bigg/ \left(\prod_{i\in\mathbb{I}} p_i^{n_i}\right),$$

который задается отображением вида:

$$\phi(\{\langle r_i(\xi)\rangle_{(p_i)} \mid i \in \mathbb{I}\}) = \langle \sum_{i\in\mathbb{I}} r_i(\xi) \prod_{j\in\mathbb{I}_i} p_j^{n_j} s_i(\xi)\rangle_{\left(\prod\limits_{i\in\mathbb{I}} p_i^{n_i}\right)},\ \prod_{j\in\mathbb{I}_i} p_j^{n_j} s_i(\xi) \in \langle 1\rangle_{p_i^{n_i}}, \forall i \in \mathbb{I}.$$

Для произвольного $i \in \mathbb{I}$ лемме 6 имеем $r_i(\xi) + p_i^{n_i} u_i'(\xi) \in S^{(1)}(M)$, $s_i(\xi) + p_i^{n_i} u_i''(\xi) \in S^{(1)}(M)$, а так же
$\left(\prod\limits_{j\in\mathbb{I}_i} p_j^{n_j}\right) + \left(\prod\limits_{j\in\mathbb{I}} p_j^{n_j}\right) \bar{u}_i(\xi) \in S^{(1)}(M)$ по лемме 9. Таким образом, имеем

$$\begin{aligned}
&\big(r_i(\xi) + p_i^{n_i} u_i'(\xi)\big) \cdot \left(\left(\prod_{j\in\mathbb{I}_i} p_j^{n_j}\right) + \left(\prod_{j\in\mathbb{I}} p_j^{n_j}\right) \bar{u}_i(\xi)\right) \cdot \big(s_i(\xi) + p_i^{n_i} u_i''(\xi)\big) = \\
&= r_i(\xi) \left(\prod_{j\in\mathbb{I}_i} p_j^{n_j}\right) s_i(\xi) + \left(\prod_{j\in\mathbb{I}_i} p_j^{n_j}\right) u_i(\xi).
\end{aligned}$$

Следовательно, остатки по модулю любого произведения многочленов из $\mathbb{I}$ принадлежат $S^{(1)}(M)$, то есть получаем утверждение леммы. ☐

Далее мы используем ряд описанных в [3] результатов. Рассмотрим M как подмножество поля $E_2'(\xi)$, $M \subseteq E_2[\xi] \subset E_2'(\xi)$, и спроектируем полученную в [3] критериальную систему $J^{(1)}$ на множество $E_2[\xi]$. Обозначим $JP^{(1)} = \{\Theta \cap E_2[\xi] \mid \Theta \in J^{(1)}\}$ и рассмотрим элементы данного множества:

$$\begin{aligned}
&R_0^{(1)} \cap E_2[\xi] = \{0(\xi)\}, \\
&R_i^{(1)} \cap E_2[\xi] = \{u(\xi) \mid u(\xi) \in E_2[\xi],\ u(\xi) \vdots p_i(\xi)\}, i = 1, 2, \dots, \\
&M_0^{(1)} \cap E_2[\xi] = \{0(\xi), 1(\xi)\}, \\
&M_i^{(1)} \cap E_2[\xi] = \{u(\xi) \mid u(\xi) \in E_2[\xi],\ (u(\xi) + u(0)) \vdots \xi p_i(\xi)\}, i = 1, 2, \dots .
\end{aligned}$$

Аналогично классам $H^{(1)}$, полученные при пересечении множества являются замкнутыми классами относительно операций сложения и умножения. Также отметим, что в случае линейных дефинитных автоматов, дробь $\frac{u(\xi)}{v(\xi)}$, $v(0) = 1$, $\deg(u(\xi)) > \deg(v(\xi))$, очевидно содержится в $S^{(1)}(M)$ при выполнение условий леммы, представленной ниже. Учитывая данные рассуждения, имеет место следующее утверждение, доказанное в [3].

Лемма 11. *Пусть* $M \subseteq E_2[\xi]$. *Если для любого* Θ, $\Theta \in JP^{(1)}$, *выполнено:* $M \nsubseteq \Theta$, *то существует* $u(\xi) \in E_2[\xi]$, $u(\xi) \neq 0$, *такой что* $\forall\ \bar{u}(\xi) \in E_2[\xi]$ *многочлен* $u(\xi) \cdot \bar{u}(\xi) \in S^{(1)}(M)$.

Сформулируем и докажем главное утверждение раздела.

Теорема 1. *Задача проверки полноты конечных множеств в классе одноместных дефинитных линейных автоматов, сохраняющих нулевую последовательность, алгоритмически разрешима.*

Доказательство. Рассмотрим некоторое конечное множество $M \subset E_2[\xi]$. Рассмотрим многочлены $u(\xi)$ и $u(\xi)+u(0)$, $u(\xi) \in M$. Оба данных многочлена однозначно представляются в виде конечного произведения некоторых неприводимых многочленов. Следовательно, необходимо проверить лишь конечное число замкнутых классов из $JP^{(1)}$.

Если M не содержится ни в одном из обозначенных замкнутых классов, то имеет место лемма 11, то есть существует $u(\xi) \in E_2[\xi]$, $u(\xi) \neq 0$, такой что $\forall\ \bar{u}(\xi) \in E_2[\xi]$ многочлен $u(\xi) \cdot \bar{u}(\xi) \in S^{(1)}(M)$.

Пусть $u(\xi) = \prod\limits_{i \in \mathbb{I}} p_i^{n_i}$ – разложение многочлена $u(\xi)$ на неприводимые делители. Множество $\mathbb{I}$ очевидно конечно. Следовательно, перебором конечного множества значений неизвестных в конечной системе уравнений, для каждой пары $p_i, i \in \mathbb{I},\ p_j, j \in \mathbb{I}$, $\deg(p_j) \geq \deg(p_i)$ возможно установить все возможные замкнутые классы вида $I^{(1)}_{i,j,l}$. Остается проверить, что система M не содержится ни в одном из следующих замкнутых классов: $L^{(1)}_{1,0}$, $L^{(1)}_{1,1}$, $L^{(1)}_{i,s}$, $N^{(1)}_i$, $I^{(1)}_{i,j,l}$ $i \in \mathbb{I}, j \in \mathbb{I}$. То есть что по лемме 10 система содержит все остатки по модулю произведения степеней неприводимых многочленов, составляющих многочлен $u(\xi)$. $\Box$

Теорема 2. *Система $\{\Theta \mid \Theta \in H^{(1)} \cup JP^{(1)}\}$ является критериальной для класса одноместных дефинитных линейных автоматов, сохраняющих нулевую последовательность.*

Доказательство. Рассмотрим некоторое множество $M \subset E_2[\xi]$. Если M не содержится ни в одном из замкнутых классов из $JP^{(1)}$, то имеет место лемма 11, то есть существует $u(\xi) \in E_2[\xi]$, $u(\xi) \neq 0$, такой что $\forall\ \bar{u}(\xi) \in E_2[\xi]$ многочлен $u(\xi) \cdot \bar{u}(\xi) \in S^{(1)}(M)$.

Пусть $u(\xi) = \prod\limits_{i \in \mathbb{I}} p_i^{n_i}$ – разложение многочлена $u(\xi)$ на неприводимые делители. Если M не содержится ни в одном из замкнутых классов из $H^{(1)}$, то по лемме 10 система содержит все остатки по модулю произведения степеней неприводимых многочленов, составляющих многочлен $u(\xi)$. $\Box$

4. Σ-полнота в классе дефинитных линейных автоматов

Ключевой интерес задача проверки полноты конечных множеств представляет в классе дефинитных линейных автоматов от многих переменных. Рассуждения, приведенные в предыдущей секции, ограничиваются коэффициентами автоматов и не учитывают важную особенность работы с подобными объектами, а именно: невозможность производить сложение коэффициентов, принадлежащих разным автоматам. Кроме этого, при операциях с линейными автоматами следует учитывать наличие свободного хода [15].

Напомним, что множество линейных дефинитных автоматов обозначалось ранее LD_2. Для произвольного линейного дефинитного автомата $f \in LD_2$, $f = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i(\xi)x_i + u_0(\xi)$, обозначим $U(f)$ - множество коэффициентов $\{u_i(\xi) \mid i = 1, ..., n\}$. Также обобщим данное обозначение для произвольного множества $M \subseteq LD_2$: $U(M) = \left(\bigcup\limits_{f \in M} U(f)\right)$.

Определение 3. *Определим семейство H подмножеств LD_2 следующим образом:*

$$L_{1,0} = \{\ f(x_1, \cdots, x_n) \mid f \in LD_2,\ U(f) \in L^{(1)}_{1,0}\},$$
$$L_{i,s} = \{\ f(x_1, \cdots, x_n) \mid f \in LD_2,\ U(f) \in L^{(1)}_{i,s}\},$$
$$N_i = \{\ f(x_1, \cdots, x_n) \mid f \in LD_2,\ U(f) \in N^{(1)}_{i}\},$$
$$I_{i,j,s} = \{\ f(x_1, \cdots, x_n) \mid f \in LD_2,\ U(f) \in I^{(1)}_{i,j,s}\},$$
$$T_i = \{\ f(x_1, \cdots, x_n) \mid f \in LD_2,\ f = \sum_{i=1}^{n} u_i(\xi)x_i + u_0(\xi)\ \text{и}\ u_0(\xi) \in \langle 0\rangle_{(p_i)}\},\ i \geq 1,$$
$$V_i = \{\ f(x_1, \cdots, x_n) \mid f \in LD_2,\ f = \sum_{i=1}^{n} u_i(\xi)x_i + u_0(\xi), \text{и среди многочленов } u_i(\xi)$$
$$\text{существует не более одного не принадлежащего } \langle 0\rangle_{(p_i)}\},\ i \geq 1,$$
$$P_J = \{\ f(x_1, \cdots, x_n) \mid f \in LD_2 \text{ и среди } j \in J \text{ существует индекс } j', \text{что } U(f) \subset \langle 0\rangle_{(p_{j'})}$$
$$\text{или в } U(f) \text{ существует } v(\xi), \text{что } \forall\ v'(\xi) \in U(f) \setminus \{v(\xi)\}, v'(\xi) \in \langle 0\rangle_{(p_j)}\ \forall j \in J\}.$$

Покажем, что каждое описанное выше множество является замкнутым классом по операциям суперпозиции в LD_2.

Лемма 12. *Для любого $\Theta \in H$ множество Θ замкнуто в LD_2 относительно операций суперпозиции.*

Доказательство. Для классов $L_{1,0}$, $L_{1,1}$, $L_{i,s}$, N_i, $I_{i,j,s}$ данное утверждение напрямую следует из леммы 3. Замкнутость классов P_J можно показать, используя соответствующие утверждения из [16, 17].

Пусть $\Theta = V_i$, $V_i \in H$ для некоторого $i = 1, 2, ...$. Переименование переменных очевидно не выводит за пределы данного класса. Подстановка переменных не меняет число не делящихся на p_i коэффициентов результирующего автомата. Аналогичное верно и для операции отождествления.

Рассмотрим $\Theta = T_i$, $T_i \in H$ для некоторого $i = 1, 2, ...$. Операции переименования и отождествления не влияют на коэффициент свободного хода. При подстановке коэффициент свободного хода результирующего автомата является суммой делящихся на p_i коэффициентов. □ Любой класс, принадлежащий системе H, является замкнутым в LD_2. Далее, аналогично предыдущему разделу, покажем, что, проверив принадлежность множества линейных дефинитных автоматов конечному количеству замкнутых классов из H, можно установить, принадлежит ли конкретный остаток по модулю данного неприводимого многочлена множеству $U(S^{(1)}(M))$.

Лемма 13. *Пусть $M \subseteq LD_2$, p_i – неприводимый многочлен степени $n_i = d_1^{k_1}...d_{l_i}^{k_{l_i}}$. Если для любого Θ, $\Theta \in \{L_{1,0}\} \cup \{L_{i,s} | s = 1, ..., l_i\} \cup \{N_i\} \cup \{V_i\}$, выполнено: $M \nsubseteq \Theta$, то для любого $n_i \in \mathbb{N}$ и любого $r(\xi)$, $\deg(r(\xi)) < \deg(p_i^{n_i})$, существует $u_r(\xi) \in U(S(M))$, такой что $u_r(\xi) = r(\xi) + p_i^{n_i}u(\xi)$ для некоторого $u(\xi) \in E_2[\xi]$.*

Доказательство. Из условия $M \nsubseteq V_i$ следует, что в $S^{(1)}(M)$ содержится автомат:

$$f(x_1, x_2, x) = (r_1(\xi) + p_i u_1(\xi))x_1 + (r_2(\xi) + p_i u_j(\xi))x_2 + h(x),\ r_1(\xi) \neq 0,\ r_2(\xi) \neq 0.$$

Так как $r_1(\xi)$ и $r_2(\xi)$ – ненулевые элементы конечного поля, то существуют $K_1 \in \mathbb{N}$ и $K_2 \in \mathbb{N}$, такие что $r_1^{K_1}(\xi) \in \langle 1\rangle_{(p_i)}$ и $r_2^{K_2}(\xi) \in \langle 1\rangle_{(p_i)}$. Тогда:

$$f'(x_1, x_2, x) = f(\underbrace{f(\cdots(f(x_1, x, x), x, x)\cdots)}_{K_1 - 1 \text{ раз } f}, \underbrace{f(\cdots(x, f(x, x_2, x), x)\cdots}_{K_2 - 1 \text{ раз } f}, x) =$$
$$= (1 + p_i u_i'(\xi))x_1 + (1 + p_i u_j'(\xi))x_2 + h'(x).$$

Далее для некоторого $n_i \in \mathbb{N}$ рассмотрим $n_i' = 2^k,\ 2^k \geq n_i$, тогда

$$f_{n_i}(x_1, x_2, x) = f'(\underbrace{f'(\cdots(f'(x_1, x, x), x, x)\cdots)}_{n_i'-1 \text{ раз } f}, \underbrace{f'(\cdots(x, f'(x, x_2, x), x)\cdots}_{n_i'-1 \text{ раз } f}, x) =$$

$$=(1 + p_i^{n_i'} u_1''(\xi))x_1 + (1 + p_i^{n_i'} u_2''(\xi))x_2 + h''(x).$$

Отметим, что сложение по модулю произвольной степени $p_i^{n_i}$ может быть осуществлено через отождествление переменных автомата $f_{n_i}(x_1, x_2, x)$. Далее, учитывая, что $U(M) \notin L_{i,s}^{(1)} \cup N_i^{(1)}$ и используя леммы 4, 5 и 6, получаем доказательство искомого утверждения. □ Покажем, что среди коэффициентов замыкания множества M содержатся остатки специального вида по модулю произведения двух неприводимых многочленов.

Лемма 14. *Пусть $M \subseteq LD_2$. Рассмотрим $\{p_i, p_j \mid i \neq j\}$ – пара различных неприводимых многочленов. Если для любого Θ, $\Theta \in \{L_{1,0}\} \cup \{L_{k,s} \mid s = 1, ..., l_k,\ k \in \{i, j\}\} \cup \{N_k \mid k \in \{i, j\}\} \cup \cup \{V_k \mid k \in \{i, j\}\} \cup \{I_{i,j,s} \mid \deg(p_i) = \deg(p_j)\} \cup P_{\{i,j\}}$, выполнено: $M \nsubseteq \Theta$, то для некоторых $v_i(\xi), v_j(\xi) \in E_2[\xi]$ и некоторого $F'(x) \in LD_2$ автомат $F(x_1, x_2, x) = (p_i + p_i p_j v_i(\xi))x_1 + + (p_j + p_i p_j v_j(\xi))x_2 + F'(x) \in S(M)$.*

Доказательство. Без ограничения общности будем считать $\deg(p_j) \geq \deg(p_i)$. Рассмотрим автомат $s(x_1, \cdots, x_n) \in M,\ s(x_1, \cdots, x_n) \notin P_{\{i,j\}}$. По определению класса $P_{\{i,j\}}$ в $U(s)$ существуют коэффициенты $u_i(\xi)$ и $u_j(\xi)$, не делящиеся на p_i и p_j соответственно. Без ограничения общности можно считать: $s(x_1, x_2, x) = u_i(\xi)x_1 + u_j(\xi)x_2 + f(x)$. Рассмотрим все возможные варианты их делимости на другой неприводимый многочлен.

Случай 1: $p_j \nmid u_i(\xi),\ p_i \nmid u_j(\xi)$, то есть $\langle u_i(\xi)\rangle_{(p_i p_j)}$ и $\langle u_j(\xi)\rangle_{(p_i p_j)}$ не являются делителями нуля в кольце $E_2[\xi] \Big/ (p_i p_j)$. Следовательно, существуют $K_1 \in \mathbb{N}$ и $K_2 \in \mathbb{N}$: $u_i^{K_1}(\xi) \in \langle 1\rangle_{(p_i p_j)}$ и $u_j^{K_2}(\xi) \in \langle 1\rangle_{(p_i p_j)}$. Тогда

$$s'(x_1, x_2, x) = s(\underbrace{s(\cdots(s(x_1, x, \cdots, x)\cdots)\cdots)}_{K_1-1 \text{ раз } s},\ \underbrace{s(x, s(x, \cdots s(x, x_2, \cdots, x)\cdots)}_{K_2-1 \text{ раз } s}\cdots) =$$

$$=(1 + p_i p_j u_i'(\xi))x_1 + (1 + p_i p_j u_j'(\xi))x_2 + h'(x).$$

Используя данный автомат в качестве сумматора по модулю произведения $p_i p_j$, аналогично лемме 7, получаем искомое утверждение.

Случай 2: $p_j \mid u_i(\xi),\ p_i \nmid u_j(\xi)$ или $p_j \nmid u_i(\xi),\ p_i \mid u_j(\xi)$. Без ограничения общности рассуждений будем считать, что $p_i \nmid u_j(\xi)$ то есть $\langle u_j(\xi)\rangle_{(p_i p_j)}$, не является делителем нуля в кольце $E_2[\xi] \Big/ (p_i p_j)$. Следовательно, существует $K_2 \in \mathbb{N}$: $u_j^{K_2}(\xi) \in \langle 1\rangle_{(p_i p_j)}$. Тогда

$$\begin{aligned} s'(x_1, x_2, x) &= s(x_1, \underbrace{s(x, s(x, \cdots s(x, x_2, \cdots, x)\cdots)}_{K_2-1 \text{ раз } s}, \cdots, x) = \\ &=(r(\xi)p_j + p_i p_j u_i'(\xi))x_1 + (1 + p_i p_j u_j'(\xi))x_2 + h'(x),\ \deg(r(\xi)) < deg(p_i). \end{aligned} \tag{1}$$

По лемме 13 в $S(M)$ существует автомат f_r, такой что в $U(f)$ существует многочлен, принадлежащий $\langle r(\xi)\rangle_{(p_i)}^{-1}$. Без ограничения общности данный многочлен является коэффициентом при x_1, тогда:

$$s''(x_1, x_2, x) = s'(f_r(x_1, x, \cdots, x), x_2, x) = (p_j + p_i p_j u_i''(\xi))x_1 + (1 + p_i p_j u_j'(\xi))x_2 + h''(x).$$

Имеем $p_i = r_1(\xi) + r_2(\xi)p_j,\ \deg(r_1) < \deg(p_j),\ \deg(r_2) < \deg(p_i)$. По лемме 13 в $S(M)$ существуют автоматы f_{r_1} и f_{r_2}, такие что в $U(f_{r_1})$ и в $U(f_{r_2})$ соответственно существуют многочлены, принадлежащие $\langle r_1(\xi)\rangle_{(p_j)}$ и $\langle r_2(\xi)\rangle_{(p_i)}$. Тогда

$$s_{p_i}(x_1, x) = s''(f_{r_2}(x_1, x, \cdots, x), f_{r_1}(x_1, x, \cdots, x), x) = (p_i + p_i p_j \bar{u}_i(\xi))x_1 + g(x).$$

Наконец, используя автомат $s''(x_1, s_{p_i}(x_2, x), x)$, получаем утверждение леммы.

Случай 3: $p_j \mid u_i(\xi),\ p_i \mid u_j(\xi)$. Для некоторых $r_i(\xi), r_j(\xi) \in E_2[\xi],\ \deg(r_i(\xi) < \deg(p_i)$, $\deg(r_j(\xi)) < \deg(p_j)$, имеем:

$$s(x_1, x_2, x) = (r_i(\xi)p_j + p_ip_ju_i'(\xi))x_1 + (r_j(\xi)p_i + p_ip_ju_j'(\xi))x_2 + f(x).$$

Повторяя рассуждения, представленные в (1), получаем утверждение леммы. □ Таким образом, было показано, что если для пары неприводимых многочленов p_i, p_j множество M не содержится ни в одном из замкнутых классов вида $\{L_{i,s} \mid s \in 0, ..., l_i\} \cup \{N_i\} \cup \{V_i\} \cup \{I_{i,j,s}\} \cup P_{\{i,j\}}$, то в $S(M)$ содержится автомат $\bar{f}$, для которого верно, что в $U(\bar{f})$ содержатся коэффициенты, остатки от деления которых на произведение данных неприводимых многочленов равны p_i и p_j соответственно.

Введем дополнительные обозначения. Положим $AS(M)$ – замыкание множества $M \subseteq LD_2$ по операциям суперпозиции за исключением операции отождествления переменных. Также будем говорить, что множество $U \subseteq E_2[\xi]$ содержится в классе $P_J^{(1)}, J \subset N, 1 \leq |J| < \infty$, если среди $j \in J$ существует индекс j', что $U \subset \langle 0 \rangle_{(p_{j'})}$ или в U существует $v(\xi)$, что $\forall\ v'(\xi) \in U \setminus \{v(\xi)\},\ v'(\xi) \in \langle 0 \rangle_{(p_j)}\ \forall j \in J$.

Лемма 15. *Пусть $M \subseteq LD_2$ и $\mathbb{I} = \{i_1, ..., i_J\} \subset \mathbb{N}$, $J < \infty$. Если для любого Θ, $\Theta \in \{P_{\mathbb{I}'}, \mid \mathbb{I}' \subseteq \mathbb{I}\}$, выполнено: $M \nsubseteq \Theta$, то автомат $H_{\mathbb{I}}(x_1, ..., x_J, x_{J+1}, ..., x_n) = \sum\limits_{j=1}^{J} u_j(\xi)x_j +$ $+ \bar{H}(x_{J+1}, ..., x_n),\ u_j(\xi) \notin \langle 0 \rangle_{(p_{i_j})}$, содержится в $AS(M)$ для некоторых $u_j(\xi) \in E_2[\xi], j \leq J$ и $\bar{H} \in LD_2$.*

Доказательство. Докажем данное утверждение индукцией по мощности множества $\mathbb{I}$.

В качестве базы индукции при $\mathbb{I} = \{i_1\}$ рассмотрим автомат $H_i \in M \setminus V_i$, у которого есть как минимум два входа, коэффициенты при которых не делятся на данный неприводимый многочлен. При $\mathbb{I} = \{i_1, i_2\}$ автомат $H_{\{i_1,i_2\}} \in M \setminus P_{\{i_1,i_2\}}$, завершает доказательство базы индукции.

Пусть предположение индукции выполнено для любого множества $\mathbb{I}'$, $\mathbb{I}' \subset \mathbb{I}$, покажем, что оно выполняется для множества $\mathbb{I}$. По условию $M \nsubseteq P_{\mathbb{I}}$, следовательно, $AS(M)$ принадлежит автомат H', такой что $U(H') \notin P_{\mathbb{I}}^{(1)}$. Обозначим $X = \{x_{j_1}, ..., x_{j_C}\}$, минимальное по включению подмножество переменных данного автомата, такое что коэффициенты при переменных из данного множества удовлетворяют свойству: $\{v_{j_1}(\xi), ..., v_{j_C}(\xi)\} \notin P_{\mathbb{I}}^{(1)}$. Следовательно, используя операцию переименования переменных, имеем:

$$\bar{H}(x_1', ..., x_C', y_1', ..., y_n') = \sum_{j=1}^{C} v_j'(\xi)x_j' + \bar{H}'(y_1', ..., y_n') \in AS(M),$$

и для данного автомата верно, что

- $2 \leq C \leq |\mathbb{I}|$,
- $\forall v_j'(\xi)\ \exists I_j = \{i \mid i \in \mathbb{I},\ v_j'(\xi) \notin \langle 0 \rangle_{(p_i)}\},\ 1 \leq |I_j| \leq |\mathbb{I}|$,
- $\mathbb{I} = \bigcup\limits_{j=1}^{C} I_j$.

Из представленных неравенств и по определению $P_{\mathbb{I}}^{(1)}$ следует, что существует система $\{I_j' \mid I_j' \subseteq I_j,\ 1 \leq |I_j'| < |\mathbb{I}|\}$, также удовлетворяющая условиям $\mathbb{I} = \bigcup\limits_{j=1}^{C} I_j'$ и $|\mathbb{I}| = \sum\limits_{j=1}^{C} |I_j'|$. Таким образом, по предположению индукции, получаем: $\forall j,\ j = 1, ..., C$ автомат $H_{I_j'} \in AS(M)$.

Обозначим $K_j = \sum\limits_{j'=1}^{j} |I'_{j'}|$ и рассмотрим автомат

$$H_{\mathbb{I}} = \bar{H}(H_{I'_1}(x'_1, ..., x'_{K_1}, y_{1,1}, ..., y_{n_1,1}), H_{I'_2}(x'_{K_1+1}, ..., x'_{K_2}, y_{1,2}, ..., y_{n_2,2}), ...$$
$$..., H_{I'_C}(x'_{K_{C-1}+1}, ..., x'_{K_C}, y_{1,C}, ..., y_{n_C,C}), y'_1, ..., y'_n).$$

Для произвольного $i \in \mathbb{I}$ имеем $\exists\, j \in \{1, ..., C\}$, что $i \in I_j$ и среди коэффициентов автомата $H_{I'_j}$ существует $v_{k,I'_j}(\xi) \notin \langle 0\rangle_{(p_i)}$, следовательно среди коэффициентов автомата $H_{\mathbb{I}}$ существует $\bar{v}_j(\xi)\cdot v_{k,I'_j}(\xi) \notin \langle 0\rangle_{(p_i)}$. Таким образом, автомат $H_{\mathbb{I}}$ удовлетворяет условию леммы с точностью до переименования переменных $\{x'_1, ..., x'_C\}$. $\square$

Рассмотрим два специальных автомата из $LD_2 : f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3$ и $f_2(x_1, x_2) = \xi x_1 + h(x_2)$. Первый представляет собой сумматор от трех переменных, а второй существенно зависит от двух переменных и обладает следующим свойством: $\xi \in U(f_2(x_1, x_2))$. Множество, составленное из двух данных автоматов, обозначим $\mathbb{A}$.

Лемма 16. *Пусть $M \subseteq LD_2$ и автомат $0 \in M$. Если для любого Θ, $\Theta \in \{T_i,\ i \geq 1\}$, выполнено: $M \not\subseteq \Theta$, то система $M \cup \{x_1 + x_2 + x_3,\ \xi x_1 + h(x_2)\}$ полна в LD_2.*

Доказательство. Множество $M \cup \{x_1+x_2+x_3,\ \xi x_1+h(x_2)\}$ обозначим через M'. По условию: константа 0 содержится в M', следовательно, автоматы $x_1 + x_2$ и ξx_1 принадлежат $S(M')$, и для любого многочлена $u(\xi) \in E_2[\xi]$ автомат $u(\xi)x$ может быть получен из $x_1 + x_2$ и ξx_1 с помощью операций суперпозиции. Следовательно, осталось доказать, что для произвольного $u_0(\xi) \in E_2[\xi]$, константа $u_0(\xi) \in S(M')$.

Покажем, что 1 принадлежит $S(M')$. По предположению: $M' \notin T_0$, следовательно, в M' содержится такой автомат $f(x_1, ..., x_n)$, что $f(0, ..., 0) = 1 + \xi u_0(\xi) \in S(M')$. Рассмотрим многочлен $1 + \xi u_0(\xi)$. Если $u_0 = 0(\xi)$, то предположение доказано, иначе $1 + \xi u_0 \neq 0(\xi)$ имеет определенное разложение на неприводимые $\prod\limits_{i\in\mathbb{I}} p_i^{n_i}$, $1 \notin \mathbb{I}$. Для любого $i \in \mathbb{I}$, $i \geq 2$, имеем: $M' \notin T_i$, значит, в M' содержится такой автомат $f_i(x_1, ..., x_n)$, что $f_i(0, ..., 0) = r_i(\xi) + p_i u_i(\xi) \in S(M')$, $r_i(\xi) \neq 0$.

Многочлены $\{1 + \xi u_0(\xi)\} \cup \{r_i(\xi) + p_i u_i(\xi), i \in \mathbb{I}\}$ взаимно просты, откуда получаем, что в $S(M')$ существует автомат $h(x_1, ..., x_m, x_{m+1})$, такой что

$$h(f_1(0, ..., 0), ..., f_m(0..., 0), f(0..., 0)) = \sum_{i\in\mathbb{I}} v_i(\xi)(r_i(\xi) + p_i u_i(\xi)) + v_{m+1}(\xi)(1 + \xi u_0(\xi)) = 1.$$

Таким образом, $1 \in S(M')$, следовательно для произвольного $u_0(\xi) \in E_2[\xi]$, имеем: $u_0(\xi) \in S(\{1, u_0(\xi)x\}$. $\square$

Отметим, что критерий, полученный в предыдущей лемме, является эффективным, несмотря на счетное число элементов в H, так как число замкнутых классов T_i, которые необходимо проверить, ограничено и определяется по автомату $f_0 \in M \setminus T_0$. Тем не менее, в рамках следующего утверждения, которое является основным в разделе, рассмотрим только конечные множества.

Теорема 3. *Задача проверки $\Sigma-$полноты конечных множеств, содержащих 0, алгоритмически разрешима в классе дефинитных линейных автоматов с операциями суперпозиции над полем E_2.*

Доказательство. Пусть M – конечное подмножество LD_2, содержащее 0. Согласно лемме 16, доказательство теоремы сводится к доказательству следующего утверждения: проверка условия $\{x_1 + x_2 + x_3,\ \xi x_1 + h(x_2)\} \subseteq S(M)$ алгоритмически разрешима.

Рассмотрим множество

$$\mathbb{I}(M) = \{i \mid i \in \mathbb{N},\ \exists\ u(\xi) \in U(M),\ \text{такой что}\ u(\xi) \in \langle 0 \rangle_{(p_i)}\} = \{i_1, ..., i_L\}.$$

Так как множество M конечно, то и $\mathbb{I}(M)$ конечно по определению. Если M содержится в $P_{\mathbb{I}(M)}$, то оно не полно, следовательно, по лемме 15 в $AS(M)$ существует автомат

$$h(x_1, ...x_L, x_{L+1}, ..., x_{n_h}) = \sum_{j=1}^{L} u_j(\xi)x_j + h'(x_{L+1}, ..., x_{n_h}),\ u_j(\xi) \notin \langle 0 \rangle_{(p_{i_j})}.$$

Так как $M \notin V_i,\ i \in \mathbb{I}(M)$, автоматы

$$l_i(x_{2i-1}, x_{2i}, y_{1,i}, ..., y_{n_i,i}) = v_{2i-1}(\xi)x_{2i-1} + v_{2i}(\xi)x_{2i} + l'(y_{1,i}, ..., y_{n_i,i}),\ v_{2i-1}(\xi), v_{2i}(\xi) \notin \langle 0 \rangle_{(p_i)},$$

содержатся в $S(M)$. Рассмотрим подстановку

$$m(x_1, ...x_{2L}, \bar{y}_1, ..., \bar{y}_{n_m}) = h(l_1(x_1, x_2, ...), ..., l_L(x_{2L-1}, x_{2L}, ...), ..., \bar{y}_{n_m}).$$

По построению автомат m обладает следующим свойством: $\forall i \in \mathbb{I}(M)$ коэффициенты при переменных x_{2i-1} и x_{2i} не делятся на p_i. Рассмотрим подстановку:

$$\begin{aligned} &H(x_1, ...x_{2L}, y'_1, ..., y'_{n_H}) = \\ &= m(m(y'_1, x_1, ..., y'_{n_m+1}), m(x_2, y'_{n_m+2}, ..., y'_{2n_m+3}), ..., m(\underbrace{...}_{2L-1}, x_{2L-1}, ...), m(\underbrace{...}_{2L-2}, x_{2L}, ...), ..., y'_{n_H}). \end{aligned}$$

Для H верно, что $\forall i \in \mathbb{I}(M)$ коэффициенты при переменных x_{2i-1} и x_{2i} не делятся на p_i и равны между собой. Данный автомат принадлежит $AS(M)$, то есть его коэффициенты являются конечным произведением элементов из $U(M)$, а следовательно, в $U(H)$ нет коэффициентов, делящихся на неприводимые многочлены, отличные от $p_i,\ i \in \mathbb{I}(M)$.

Рассмотрим

$$\bar{H}(x_1, ...x_{2L}, x) = H(x_1, ...x_{2L}, x, ..., x) = \sum_{j=1}^{L}(u_j(\xi)x_{2j-1} + u_j(\xi)x_{2j}) + \bar{H}'(x). \tag{2}$$

Имеем: $\forall j$ коэффициент $u_j(\xi)$ не делится ни на один неприводимый многочлен из множества $\{p_{i_j}\} \cup \{p_i \mid i \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{I}(M)\}$.

Покажем, что автомат

$$\begin{aligned} H_{s_1,...s_L}(x_1, ..., x_{M_L}, x) &= \sum_{l=1}^{L}\sum_{j=1}^{m_l} u_l^{m_l}(\xi)x_{M_{j,l}} + H'_{s_1,...s_L}(x), \\ m_l = 2^{s_l},\ M_l &= \sum_{q<l} 2^{s_q},\ M_{j,l} = j + M_l, \end{aligned} \tag{3}$$

принадлежит $S(M)$ для произвольного набора $\{s_l \mid s_l \in \mathbb{N}\}$.

В качестве базы индукции рассмотрим $H_{1,...,1}(x_1, ..., x_{2L}, x) = \bar{H}(x_1, ...x_{2L}, x)$.

Пусть выражение верно для некоторого набора $\{s_1, ..., s_L\}$, тогда положим $M'_L = M_L + 2^{s_1}$ и рассмотрим автомат:

$$H_{s_1+1,...,s_L}(x_1, ..., x_{M'_L}, x) = H_{s_1,...,s_L}(\bar{H}(x_1, x_2, x), ..., \bar{H}(x_{2^{s_1}-1}, x_{2^{s_1}}, x), ..., x_{M'_L}, x),$$

что завершает доказательство шага индукции.

Рассмотрим систему замкнутых классов $JP^{(1)}$. Для произвольного $j \leq L$ коэффициент $u_j(\xi)$ принадлежит конечному числу классов вида $MP_i^{(1)} = M_i^{(1)} \cap E_2[\xi] = \{u(\xi) \mid u(\xi) \in E_2[\xi],$ $(u(\xi) + u(0)) \vdots \xi p_i(\xi)\}$, $i = 1, 2, ...$, то есть имеем:

$$|\{\Theta \mid \Theta \in MP_i^{(1)},\ u_j(\xi) \in \Theta\}| = K_j < \infty.$$

Положим $K_H = \max\limits_{j=1}^{L} K_j$ и рассмотрим автомат $H_S = H_{S,...,S}$, такой что $2^S \geq 2(K_H + 2)$. Разделим переменные $\{x_1, ..., x_{M_S}\}$ автомата H_S на две группы X, Y и переименуем их соответствующим образом:

$$\bar{H}_S(X, Y, x) = \sum_{l=1}^{L}\sum_{j=1}^{\bar{m}} u_l^{2\bar{m}}(\xi)x_{j,l} + \sum_{l=1}^{L}\sum_{j=1}^{\bar{m}} u_l^{2\bar{m}}(\xi)y_{j,l} + \bar{H}'_S(x),\ \bar{m} = 2^{S-1}.$$

В [7] было показано, что если для некоторого линейного автомата g существует подмножество $U \subseteq U(g)$, такое что любой коэффициент, содержащийся в U, встречается среди коэффициентов g как минимум дважды, то $\forall u'(\xi) \in S^{(1)}(U)$ существует $g' \in S(g)$, для которого $u'(\xi) \in U(g')$. Отметим, что подмножества коэффициентов при переменных X и Y дублируют друг друга, таким образом, применив одинаковый набор преобразований ко входам автомата $\bar{H}_S$, соответствующим каждой из групп переменных, получим подмножество коэффициентов, удовлетворяющее описанному выше свойству.

Опишем только операции со входами при переменных группы X автомата $\bar{H}_S$, множество коэффициентов при переменных X обозначим $U(X)$. Получим автомат $\tilde{H}_X(X, Y, x)$, для которого верно $\tilde{U}(X) \nsubseteq \Theta, \forall\Theta : \Theta \in JP^{(1)}$. Положим $RP_i^{(1)} = R_i \cap E_2[\xi],\ i \in \mathbb{N}$. По построению автомата $\bar{H}_S$ имеем $U(X) \nsubseteq \Theta,\ \forall\Theta : \Theta \in \{RP_i^{(1)} \mid i \in \mathbb{N}\}$. Для произвольного $l,\ 1 \leq l \leq L$ рассмотрим переменные $\{x_{1,l}, ..., x_{\bar{m},l}\}$ автомата $\bar{H}_S$, коэффициент при каждой из которых равен $u_l^{2\bar{m}}(\xi)$. Обозначим $MP(l) = \{i \mid i \in \mathbb{N}, u_l^{2\bar{m}}(\xi) \in MP_i^{(1)}\} = \{i_{1,l}, ..., i_{n_l,l}\}$. Учитывая особенности возведения в степень в поле характеристики два, имеем:

$$u_l(\xi) \in \Theta \Leftrightarrow u_l^{2\bar{m}}(\xi) \in \Theta,\ \Theta \in JP^{(1)} \setminus MP_1^{(1)},$$

что продемонстрировано в [7]. Положим $g_{k,l}(x_{k,l}, x) = (\xi + \xi p_{i_{k,l}} u_{k,l}(\xi))x_{k,l} + g'_{k,l}(x),\ i_{k,l} \in MP(l)$ и рассмотрим подстановку:

$$\tilde{H}_X(X, Y, x) = \bar{H}_S(..., g_{1,l}(x_{1,l}, x), ..., g_{n_l,l}(x_{n_l,l}, x), \underbrace{x_{n_l+1,l}..., x_{\bar{m},l}}_{\bar{m}-n_l\geq 1 \text{ раз } x_{*,l}}, ..., Y, x). \tag{4}$$

Автомат $g_{k,l}(x_{k,l}, x) \in S(M),\ \forall l \leq L, k \leq n_l$ по лемме 13, следовательно $\tilde{H}_X \in S(M)$. Так как $\bar{m} - n_l \geq 1,\ l \leq L$, то $U(X) \subseteq \tilde{U}(X)$, следовательно, $\tilde{U}(X)$ не содержится ни в одном из классов серии $\{RP_i^{(1)} \mid i \in \mathbb{N}\}$. Если $U(X) \nsubseteq \{MP_i^{(1)} \mid i \in \mathbb{N}\}$, то предположение доказано, в противном случае положим $\mathbb{I}(X) = \{i \mid i \in \mathbb{N},\ U(X) \subseteq MP_i^{(1)}\}$. Для произвольного $i' \in \mathbb{I}(X)$ в $U(X)$ содержится коэффициент вида $1 + \xi p_{i'} v_{i'}(\xi)$, в противном случае, получаем противотечение с тем, что $U(X) \nsubseteq RP_{i'}^{(1)}$. Исходя из (4), в $\tilde{U}(X)$ содержится коэффициент

$$(\xi + \xi p_{i'} u_{i'}(\xi))(1 + \xi p_{i'} v_{i'}(\xi)) = \xi + \xi p_{i'} v'_{i'}(\xi) = \xi(p_{i'} v'_{i'}(\xi) + 1) \notin MP_{i'}^{(1)}.$$

Проведем аналогичные операции со входами, соответствующими переменным группы Y, и получим автомат $\tilde{H}(X, Y, x)$, для которого верно, что $\exists\ \tilde{U} \subseteq U(\tilde{H}),\ \tilde{U} \nsubseteq \Theta,\ \forall\Theta : \Theta \in JP^{(1)}$, и произвольный коэффициент $u(\xi) \in \tilde{U}$ встречается среди коэффициентов автомата $\tilde{H}$ как минимум два раза. Таким образом, используя лемму 11 и подход, изложенный в [4], получим:

$$\exists V(\xi) \in E_2[\xi] : \forall v(\xi) \in E_2[\xi] \text{ автомат } V(\xi)v(\xi)x_1 + Z(x) \in S(M). \tag{5}$$

Обозначим $\mathbb{I}(V)$ – номера всех неприводимых многочленов, встречающихся в разложении введенного в (5) многочлена $V(\xi)$. Рассмотрим множество $F = \mathbb{I}(M) \cup \mathbb{I}(V) = \{i_1, ..., i_{L'}\}$. Если $M \subseteq P_F$, то оно не полно. Применяя рассуждения, аналогичные приведенным в (2), получим, что автомат

$$G(x_1, ..., x_{2L'}, x) = \sum_{j=1}^{L'} (u_j(\xi)x_{2j-1} + u_j(\xi)x_{2j}) + G'(x) \in S(M).$$

По аналогии с (2), для автомата $G(x_1, ...x_{2L'}, x)$ верно: $\forall j \le L',\ u_j(\xi)$ не делится ни на один неприводимый многочлен из множества $\{p_{i_j}\} \cup \{p_i \mid i \in \mathbb{N} \setminus F\}$.

Перебором конечного множества значений неизвестных в конечной системе уравнений, установим все возможные замкнутые классы вида $\{I^{(1)}_{i,j,s} \mid \deg(p_j) = \deg(p_i),\ i \ne j,\ i, j \in F\}$. Обозначим:

$$K_F = \max_{j=1}^{L'} |\{L^{(1)}_{i_j,s} \mid i_j \in F\} \cup \{N^{(1)}_{i_j} \mid i_j \in F\} \cup \{I^{(1)}_{i_j,k,s},\ \deg(p_k) = \deg(p_{i_j}),\ i_j \ne k,\ i_j, k \in F\}|.$$

Повторяя алгоритм, приведенный в (3), покажем, что для $S' : 2^{S'} \ge 8(K_F + 2)$, автомат

$$G_{S'}(x_1, ..., x_{M_{L'}}, x) = \sum_{l=1}^{L'} \sum_{j=1}^{m'} u_l^{m'}(\xi)x_{M_{j,l}} + G'_{S'}(x),\ m' = 2^{S'},\ M_l = l \cdot m',\ M_{j,l} = j + M_l,$$

содержится в $S(M)$. Разделим переменные $\{x_1, ..., x_{M_{L'}}\}$ данного автомата на 5 групп X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z, переименуем их соответствующим образом и отождествим остальные:

$$\bar{G}_{S'}(X_1, Y_1, X_2, Y_2, Z, x) = \sum_{l=1}^{L'} \sum_{j=1}^{\bar{m}'} u_l^{8\bar{m}'}(\xi)x_{j,l,1} + \sum_{l=1}^{L'} \sum_{j=1}^{\bar{m}'} u_l^{8\bar{m}'}(\xi)y_{j,l,1} + \sum_{l=1}^{L'} \sum_{j=1}^{\bar{m}'} u_l^{8\bar{m}'}(\xi)x_{j,l,2} +$$
$$+ \sum_{l=1}^{L'} \sum_{j=1}^{\bar{m}'} u_l^{8\bar{m}'}(\xi)y_{j,l,2} + \sum_{l=1}^{L} \sum_{j=1}^{\bar{m}'} u_l^{8\bar{m}'}(\xi)z_{j,l} + \bar{G}'_{S'}(x),\ \bar{m}' = 2^{S'-3}.$$

Аналогично описанному выше, рассмотрим только операции со входами, ассоциированными с переменными группы X_1. Для произвольного $l,\ 1 \le l \le L$ рассмотрим переменные $\{x_{1,l,1}, ..., x_{\bar{m}',l,1}\}$ автомата $\bar{G}_{S'}$, коэффициент при каждой из которых равен $u_l^{8\bar{m}'}(\xi)$. Обозначим $\Theta(l) = \{\Theta \mid \Theta \in H^{(1)}, u_l^{8\bar{m}'}(\xi) \in \Theta\} = \{\Theta_1, ..., \Theta_{n_l}\}$. По построению автомата $\bar{G}_{S'}$ имеем $\bar{m}' - n_l > 0$. Положим $g'_{k,l}(x_{k,l,1}, x) = v(\xi)_{k,l}x_{k,l,1} + g''_{k,l}(x),\ v(\xi)_{k,l} \notin \Theta_k,\ \Theta_k \in \Theta(l)$ и рассмотрим подстановку:

$$\tilde{G}_X(X_1, Y_1, X_2, Y_2, Z, x) =$$
$$\bar{G}_{S'}(..., g_{1,l}(x_{1,l,1}, x), ..., g_{n_l,l}(x_{n_l,l,1}, x), \underbrace{x_{n_l+1,l,1} ..., x_{\bar{m},l,1}}_{\bar{m}-n_l \ge 1 \text{ раз } x_{*,l,1}}, ..., Y_1, X_2, Y_2, Z, x).$$

Автомат $g'_{k,l}(x_{k,l,1}, x) \in S(M),\ \forall l \le L,\ k \le n_l$ так как $M \nsubseteq \{L_{i,s} \mid i \in F\} \cup \{N_i \mid i \in F\} \cup$ $\cup \{I_{i,j,s}, \deg(p_i) = \deg(p_j), i \ne j,\ i, j \in F\}$, следовательно $\tilde{G}_X \in S(M)$.

Проведем аналогичные операции со входами, соответствующими переменным группы Y_1, X_2 и Y_2, следовательно получим автомат $\tilde{G}(X_1, Y_1, X_2, Y_2, Z, x)$, для которого верно, что $\exists\ \tilde{U}' \subseteq U(\tilde{G}),\ \tilde{U}' \nsubseteq \Theta,\ \forall \Theta : \Theta \in H^{(1)}$, и произвольный коэффициент $u(\xi) \in \tilde{U}'$ встречается среди коэффициентов автомата $\tilde{G}$ как минимум четыре раза, следовательно автомат

$$F_{r_1,r_2}(x_1, x_2, Z, x) =$$
$$\left(r_1(\xi) + \left(\prod_{i \in F} p_i^{n_i}\right) u_{r_1}(\xi)\right) x_1 + \left(r_2(\xi) + \left(\prod_{i \in F} p_i^{n_i}\right) u_{r_2}(\xi)\right) x_2 + \sum_{l=1}^{L} \sum_{j=1}^{\bar{m}'} u_l^{8\bar{m}'}(\xi)z_{j,l} + F'_{r_1,r_2}(x),$$

содержится в $S(M)$ для произвольных $\{n_i \mid n_i \in \mathbb{N},\ i \in F\}$, произвольных $r_k(\xi),\ \deg(r_k) < < \deg(\prod_{i \in F} p_i^{n_i}),\ k = 1, 2$, и некоторых $u_{r_1}(\xi), u_{r_2}(\xi) \in E_2[\xi],\ F'_{r_1,r_2}(x) \in LD_2$, по лемме 10. Так как $L' \geq 1$ и $8\bar{m}' \geq 2$, то автомат $F_{r_1,r_2}(x_1, x_2, Z, x)$ существенно зависит еще как минимум от двух своих переменных группы Z, коэффициенты при которых не делятся на многочлены, отличные от $\{p_i \mid i \in F\}$. Подставляя на данные входы автомат (5), получаем систему $\mathbb{A}$. $\square$

5. Заключение

В данной работе был получен алгоритм проверки полноты конечных содержащих константу ноль подмножеств в классе дефинитных линейных автоматов. Дальнейшие исследования по теме могут заключаться в выражении константы ноль, а также в использовании полученного в данной работе критерия для формирования критерия в терминах предполных классов.

В заключение автор выражает особую признательность научному руководителю, д.ф.-м.н. Часовских А. А. за научное руководство, помощь и обсуждение результатов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кратко М. И. Алгоритмическая неразрешимость проблемы распознавания полноты для конечных автоматов // ДАН СССР. 1964. Т. 155.

2. Буевич В. А. Об алгоритмической неразрешимости распознавания A-полноты для о.д.-функций // Математические заметки. 1972. Т. 12, № 6. С. 687-697.

3. Часовских А. А. О полноте в классе линейных автоматов // Математические вопросы кибернетики. 1991. Т. 3. С. 140-166.

4. Часовских А. А. // Проблема полноты в классах линейных автоматов // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. 2018. С. 151-153.

5. Часовских А. А. Проблема A-полноты линейно-автоматных функций над конечным полем 303540 // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. 2014. Т. 18, № 1. С. 253-257.

6. Часовских А. А. Об алгоритмической разрешимости проблемы полноты для линейных автоматов // Вестник Московского университета. 1986. Т. 1, № 3. С. 82-84.

7. Часовских А. А. Линейно-автоматные функции с операциями суперпозиции // Нейрокомпьютеры: разработка, применение. 2013. Т. 8 С. 3-13.

8. Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С. Введение в теорию автоматов // Наука. 1985.

9. Буевич В. А., Клиндухова Т. Э. Об алгоритмической неразрешимости задач об Аполноте и полноте для дефинитных ограниченно-детерминированных функций // Математические вопросы кибернетики. 2001. Т. 10.

10. Жук Д. В. О неразрешимости проблемы полноты для дефинитных автоматов // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. 2008. Т. 12. С. 211-228.

11. Чашкин А. В. Лекции по дискретной математике. // Москва. 2007.

12. Лидл Р., Нидеррайтер Г. Конечные поля // Том 1-2. Пер. с англ. М.: Мир, 1988.

13. Айерелэнд К., Роузен М. Классическое введение в современную теорию чисел: Пер. с англ. // Мир. 1987. 416 с.

14. Часовских А. А. О классах передаточных функций линейных автоматов // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. 2019. Т. 23, № 3. С. 135-142.

15. Гилл А., Линейные последовательностные машины, «Наука», Москва, 1974, 288 с.

16. Ронжин Д. В. Об условиях А-полноты линейных автоматов над двоично-рациональными числами // Дискретная математика. 2020. Т. 32, № 2 С. 44-60.

17. Ронжин Д. В. Распознавание А-полноты конечных систем линейных автоматов с добавками над кольцом двоично-рациональных чисел // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. 2021. Т. 25, № 1. С. 149-163.

REFERENCES

1. Kratko, M.I. 1964, “Algorithmic undecidability of the completeness recognition problem for finite automata”, *Proceedings of the USSR Academy of Sciences*, vol. 155, no. 4, pp. 771–774.

2. Buyevich, V.A. 1972, “On the algorithmic undecidability of recognizing A-completeness for O.D.-functions”, *Mathematical Notes*, vol. 12, no. 6, pp. 687–697.

3. Chasovskikh, A.A. 1991, “On completeness in the class of linear automata”, *Mathematical Questions of Cybernetics*, no. 3, pp. 140–166.

4. Chasovskikh, A.A. 2018, “The completeness problem in classes of linear automata”, *Intelligent Systems: Theory and Applications*, pp. 151–153.

5. Chasovskikh, A.A. 2014, “The A-completeness problem of linear-automatic functions over finite fields”, *Intelligent Systems: Theory and Applications*, vol. 18, no. 1, pp. 253–257.

6. Chasovskikh, A.A. 1986, “On the algorithmic decidability of the completeness problem for linear automata”, *Moscow University Bulletin. Series 1: Mathematics, Mechanics*, no. 3, pp. 82–84.

7. Chasovskikh, A.A. 2013, “Linear-automatic functions with superposition operations”, *Neurocomputers: Development and Application*, no. 8, pp. 3–13.

8. Kudryavtsev, V.B., Alekhin, S.V. & Podkolzin, A.S. 1985, *Introduction to automata theory*, Nauka, Moscow.

9. Buyevich, V.A. & Klindukhova, T.E. 2001, “On the algorithmic undecidability of problems regarding A-completeness and completeness for definitive limited-deterministic functions”, *Mathematical Questions of Cybernetics*, no. 10, pp. 29–50.

10. Zhuk, D.V. 2008, “On the undecidability of the completeness problem for definitive automata”, *Intelligent Systems: Theory and Applications*, vol. 12, no. 1, pp. 211–228.

11. Chashkin, A.V. 2007, *Lectures on discrete mathematics*, [Publisher not specified], Moscow.

12. Lidl, R. & Niederreiter, H. 1988, *Finite fields*, vols. 1–2, Mir, Moscow.

13. Ireland, K. & Rosen, M. 1987, *A classical introduction to modern number theory*, Mir, Moscow, 416 p.

14. Chasovskikh, A.A. 2019, “On classes of transfer functions of linear automata”, *Intelligent Systems: Theory and Applications*, vol. 23, no. 3, pp. 135–142.

15. Gill, A. 1974, *Linear sequential machines*, Nauka, Moscow, 288 p.

16. Ronzhin, D.V. 2020, “On the conditions for A-completeness of linear automata over binary-rational numbers”, *Discrete Mathematics*, vol. 32, no. 2, pp. 44–60.

17. Ronzhin, D.V. 2021, “Recognition of A-completeness of finite systems of linear automata with additions over the ring of binary-rational numbers”, *Intelligent Systems: Theory and Applications*, vol. 25, no. 1, pp. 149–163.

Получено: 07.03.2025
Принято в печать: 08.12.2025

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 26. Выпуск 5.

УДК: 511. 344 DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-5-158-183

Плотность нулей дзета-функции Римана в узких прямоугольниках критической полосы

З. Х. Рахмонов

Рахмонов Зарулло Хусенович — доктор физико-математических наук, академик НАН Таджикистана, Таджикский национальный университет (г. Душанбе, Таджикистан).
e-mail: zarullo-r@rambler.ru, zarullo.rakhmomov@gmail.com

Аннотация

Для количества нулей дзета-функции Римана $\zeta(s)$ в узких прямоугольниках критической полосы ($\operatorname{Re} s \geqslant \alpha \geqslant 0{,}5$ и $T < \operatorname{Im} s \leqslant T + H$), при

$$H > T^{\theta+\varepsilon}, \qquad \theta = \theta(\kappa, \lambda) = \frac{\kappa+\lambda}{2\kappa+2},$$

где (κ, λ) — произвольная экспоненциальная пара, $\varepsilon < 10^{-4}$ — любое фиксированное положительное число, $T \geqslant T_0(\varepsilon) > 0$, получена оценка вида

$$N(\alpha, T+H) - N(\alpha, T) \ll H^{a(1-\alpha)} \ln^c T,$$

причём $a = 2{,}4$, $c = 172$, если $\frac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{2}{3}$ или $\frac{5}{6} \leqslant \alpha \leqslant 1$, и соответственно $a = \frac{8}{3}$, $c = 50$, если $\frac{2}{3} < \alpha < \frac{5}{6}$.

Ключевые слова: нетривиальные нули дзета-функции Римана, плотностная теорема, узкие прямоугольники критической полосы, экспоненциальная пара.

Библиография: 30 названий.

Для цитирования:
Рахмонов З. Х. Плотность нулей дзета-функции Римана в узких прямоугольниках критической полосы // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 5, с. 158–183.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 26. No. 5.

UDC: 511. 344 DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-5-158-183

Density of zeros of the Riemann zeta function in narrow rectangles of the critical strip

Z. Kh. Rakhmonov

Rakhmonov Zarullo Khusenovich — doctor of physical and mathematical sciences, Academician of the National Academy of Sciences of Tajikistan, Tajik National University (Dushanbe, Tajikistan). *e-mail: zarullo-r@rambler.ru, zarullo.rakhmomov@gmail.com*

Светлой памяти Геннадия Ивановича Архипова

Abstract

For the number of zeros of the Riemann zeta-function $\zeta(s)$ in narrow rectangles of the critical strip ($\mathrm{Re}\, s \geqslant \alpha \geqslant 0.5$ and $T < \mathrm{Im} s \leqslant T + H$), assuming

$$H > T^{\theta+\varepsilon}, \qquad \theta = \theta(\kappa, \lambda) = \frac{\kappa+\lambda}{2\kappa+2},$$

where (κ, λ) is an arbitrary exponent pair, $\varepsilon < 10^{-4}$ is any fixed positive number, and $T \geqslant T_0(\varepsilon) > 0$, an estimate of the form

$$N(\alpha, T+H) - N(\alpha, T) \ll H^{a(1-\alpha)} \ln^c T,$$

is obtained. Here $a = 2,4$ and $c = 172$ when $\frac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{2}{3}$ or $\frac{5}{6} \leqslant \alpha \leqslant 1$, and respectively $a = \frac{8}{3}$ and $c = 50$ when $\frac{2}{3} < \alpha < \frac{5}{6}$.

Keywords: Nontrivial zeros of the Riemann zeta-function, density theorem, narrow rectangles of the critical strip, exponent pair.

Bibliography: 30 titles.

For citation:
Rakhmonov, Z. Kh. 2025, "Density of zeros of the Riemann zeta function in narrow rectangles of the critical strip" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 5, pp. 158–183.

1. Введение

Определение 1. *Пусть $N(\alpha, T)$ — число нулей функции Римана $\zeta(s)$ в области $\mathrm{Re}\, s \geqslant \alpha \geq 0{,}5$ и $0 \leq \mathrm{Im} s \leq T$. Оценка вида*

$$N(\alpha, T) \ll T^{a(1-\alpha)} \ln^c T, \quad \ln T, \tag{1}$$

с положительными абсолютными постоянными a и c называется плотностной теоремой.

Наилучшая плотностная теорема принадлежит М. Хаксли [1]. Он доказал (1) с $a = 2.4$ и $c = 244$. А. А. Карацуба [2] дал новый вариант доказательства теоремы Хаксли. Методом работы [2] С. А. Гриценко [3] доказал (1) с $a = 2.4$ и $c = 33.6$.

Определение 2. *При $H < T$ оценка вида*

$$N(\alpha, T+H) - N(\alpha, T) \ll H^{a(1-\alpha)} \ln^c T, \tag{2}$$

с положительными абсолютными постоянными a и c называется плотностной теоремой в узких прямоугольниках критической полосы.

Впервые проблему распределения нулей дзета-функции Римана в узких прямоугольниках критической полосы и в коротких промежутках критической прямой исследовал А. Сельберг [4]. Он доказал, что если $H \geqslant T^{\theta}$, $\theta > 0{,}5$ и $0{,}5 < \alpha \leqslant 1$, то справедливы следующие оценки:

$$N(\alpha, T+H) - N(\alpha, T) = O\left(\frac{H}{\alpha - 0{,}5}\right), \tag{3}$$

$$N_0(T+H) - N_0(T) \geqslant c_1 H \ln T, \tag{4}$$

где $N_0(t)$ — количество нулей нечетного порядка функции $\zeta(0{,}5 + it)$ на промежутке $(0, T)$. В этой работе А. Сельберг высказал гипотезы, что условие $\theta > 0{,}5$ в этих оценках может быть заменено условием $\theta >$ æ, æ $< 0{,}5$. Эти гипотезы в 1984 г. решил А. А. Карацуба [5, 6, 7, 8] и доказал, что неравенства (3) и (4) имеют место при $H \geqslant T^{\frac{27}{82}+\varepsilon}$. Он [9, 8, 10, 11] также доказал, что при таких H для количества нулей функции Дэвенпорта-Хейльбронна в коротких промежутках критической прямой выполняется соотношение

$$N_0(T+H)-N_0(T)\geqslant H(\ln T)^{\frac{1}{2}-\varepsilon_1}. \tag{5}$$

В работах [12, 13, 14, 15, 16] доказано, что неравенства (3), (4) и (5) имеют место при

$$H>T^{\theta+\varepsilon},\qquad \theta=\theta(\kappa,\lambda)=\frac{\kappa+\lambda}{2\kappa+2},$$

где (κ,λ) — произвольная экспоненциальная пара. Хиз-Браун [17], с помощью своей теоремы о четвертом моменте дзета-функции Римана на критической прямой при $H\geq T^{\frac{7}{8}+\varepsilon}$ доказал (2) с $a=2{,}4$ и $c=244$. Жан Тао [18] доказал (2) с $a=\frac{8}{3}$ и $c=216$ при условии $H>T^{\frac{35}{108}+\varepsilon}$.

Основным результатом этой работы является доказательство теоремы о плотности нулей дзета-функции Римана в узких прямоугольниках критической полосы, которая ранее была анонсирована автором в работе [19].

Теорема 1. *Пусть (κ,λ) — произвольная экспоненциальная пара, $\varepsilon<10^4$ — любое фиксированное положительное число, $T\geq T_0(\varepsilon)>0$,*

$$\theta=\theta(\kappa,\lambda)=\frac{\kappa+\lambda}{2\kappa+2},\qquad H>T^{\theta+\varepsilon},$$

тогда (2) выполняется при $a=2{,}4$, $c=172$, если $\frac{1}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{2}{3}$ или $\frac{5}{6}\leqslant\alpha\leqslant1$; и соответственно, $a=\frac{8}{3}$, $c=50$, если $\frac{2}{3}<\alpha<\frac{5}{6}$.

Показатель $\theta(\kappa,\lambda)$ также появляется в оценках остаточных членов в проблеме Гаусса о числе целых точек в круге, проблеме делителей Дирихле и второго момента дзета-функции Римана на критической прямой. Наилучшая оценка сверху для $\theta(\kappa,\lambda)$ принадлежит Дж. Бургейну и Н. Уотту [20], которые доказали, что

$$\theta_0=\min_{\kappa,\lambda\in\mathcal{P}}\theta(\kappa,\lambda)=\min_{\kappa,\lambda\in\mathcal{P}}\frac{\kappa+\lambda}{2\kappa+2}\leqslant\frac{1515}{4816}=0.314546\cdots, \tag{6}$$

где $\mathcal{P}$ — множество всех экспоненциальных пар.

Отсюда и из теоремы 1 следует:

Следствие 1. *Неравенство (2) справедливо при*

$$H\geqslant T^{\frac{1515}{4816}+\varepsilon},\qquad a=\frac{8}{3},\qquad c=50.$$

При доказательстве основной теоремы мы существенно используем метод работ А. А. Карацубы [2, 6], в которых, соответственно, доказаны плотностная теорема Хаксли и гипотеза Сельберга о количестве нулей дзета-функции Римана в окрестности критической прямой (см. также [21, 22, 23]).

2. Вспомогательные леммы

Лемма 1. [2]. *Пусть $s=\sigma+it$, $t\geqslant2\pi$, положительные числа y и z удовлетворяют условиям $y\geqslant1$, $z\geqslant1$, $2\pi yz=t$. Тогда при $0<\sigma_0\leqslant\sigma\leqslant2$ справедливо следующее равенство:*

$$\zeta(s)=\sum_{n\leqslant y}n^{-s}+\chi(s)\sum_{n\leqslant z}n^{s-1}+O(t^{0{,}5-\sigma}z^{-1+\sigma}+y^{-\sigma}\ln t),$$

где

$$\chi(s)=e\left(-\frac{t}{2\pi}\ln\frac{t}{2\pi}+\frac{t}{2\pi}-\frac{7}{8}\right)(2\pi)^{\sigma-1}t^{0{,}5-\sigma}.$$

Лемма 2. [2]. *Пусть $S(t)$ — комплекснозначная непрерывно дифференцируемая на отрезке $[t_0, t_k]$ функция,*

$$t_0 < t_1 < \ldots < t_{k-1} < t_k.$$

Тогда, полагая $d = \min\limits_{0\leqslant r<k}(t_{r+1} - t_r)$, будем иметь

$$\sum_{r=1}^{k} |S(t_r)|^2 \leqslant d^{-1} \int_{t_0}^{t_k} |S(t)|^2 dt + 2\left(\int_{t_0}^{t_k} |S(t)|^2 dt \int_{t_0}^{t_k} |S'(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Лемма 3. [2]. *Пусть $a(n)$ — произвольные комплексные числа, $0 < H < T$, $N \geq 2$,*

$$I = \int_{T}^{T+H} \left|\sum_{n\leq N} a(n)n^{it}\right|^2 dt.$$

Справедливо следующее неравенство:

$$I \leqslant (H + 32N\ln N) \sum_{n\leq N} |a(n)|^2.$$

Лемма 4. [24]. *При $x \geq 2$ имеем:*

$$\sum_{n\leqslant x} \tau_r^l(n) \ll x(\ln x)^{r^l-1}.$$

Лемма 5. [25]. *Пусть $f(u)$ — вещественная дифференцируемая функция в интервале (a, b), причем внутри интервала ее производная $f'(u)$ монотонна и знакопостоянна и при постоянном δ с условием $0 < \delta < 1$ удовлетворяет неравенству $|f'(u)| \leqslant \delta$. Тогда имеем*

$$\sum_{a<n\leqslant b} e(f(n)) = \int\limits_{a}^{b} e(f(u))du + O\left(3 + \frac{2\delta}{1-\delta}\right).$$

Лемма 6. [2]. *Пусть вещественные функции $f(n)$ и $\varphi(n)$ удовлетворяют на отрезке $[a, b]$ следующим условиям:*

а) *$f^{(4)}(n)$ и $\varphi^{(2)}(n)$ — непрерывные функции;*

б) *существуют числа H_1, U, A, $1 \leqslant A \leqslant U$, $0 < b - a \leqslant U$, такие что*

$$A^{-1} \ll f^{(2)}(n) \ll A^{-1}, \qquad f^{(3)}(n) \ll A^{-1}U^{-1}, \qquad f^{(4)}(n) \ll A^{-1}U^{-2},$$
$$\varphi(n) \ll H_1, \qquad \varphi'(n) \ll H_1U^{-1}, \qquad \varphi^{(2)}(n) \ll H_1U^{-2}.$$

Тогда, определяя числа n_m из уравнения $f'(n_m) = m$, будем иметь:

$$\sum_{a\leq n\leq b} \varphi(n)e(f(n)) = \sum_{f'(a)\leq m\leq f'(b)} C(m)Z(m) + R,$$

где $C(m) = 1$, если $f'(a) < m < f'(b)$, и $C(m) = 0{,}5$, если $m = f'(a)$ или $m = f'(b)$,

$$Z(m) = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \frac{\varphi(n_m)}{\sqrt{f''(n_m)}} e(f(n_m) - mn_m),$$

$$R = H_1(T_a + T_b + \ln\bigl(f'(b) - f'(a) + 2\bigr)),$$

$$T_\mu = \begin{cases} 0, & \text{если } f'(\mu) - \text{целое;} \\ \min(\sqrt{A}, \|f'(\mu)\|^{-1}), & \text{если } f'(\mu) - \text{нецелое.} \end{cases}$$

Лемма 7. [26]. *Пусть действительная функция $f(u)$ и монотонная функция $g(u)$ удовлетворяют условиям: $f'(u)$ монотонна, $|f'(u)| \geqslant m_1 > 0$ и $|g(u)| \leqslant M$. Тогда справедлива оценка:*

$$\int_a^b g(u)e(f(u))du \ll \frac{M}{m_1}.$$

Определение 3. *Если $B \geq 1$, $0 < h \leq B$, $F(u) \in C^\infty(B, 2B)$, $A \geq 1$,*

$$AB^{1-r} \ll |F^{(r)}(u)| \ll AB^{1-r}, \qquad r = 1, 2, 3, \ldots,$$

где постоянная под знаком $\ll$ зависит только от r, и имеет место оценка

$$\sum_{B<n\leq B+h} e(F(n)) \ll A^\kappa B^\lambda, \qquad 0 \leqslant \kappa \leq 0{,}5 \leq \lambda \leq 1,$$

то пара (κ, λ) называется экспоненциальной парой. Тривиальная оценка

$$\sum_{B<n\leq B+h_1} e(F(n)) \leqslant h_1 \leqslant B,$$

показывает, что $(0, 1)$ является экспоненциальной парой.

Э. Филлипс [27] показал, что если (κ, λ) — экспоненциальная пара, то

$$A(\kappa, \lambda) = \left(\frac{\kappa}{2\kappa+2}, \frac{1}{2} + \frac{\lambda}{2\kappa+2}\right), \qquad (A\text{-процесс}),$$
$$B(\kappa, \lambda) = (\lambda - 0{,}5, \kappa + 0{,}5); \qquad (B\text{-процесс})$$

также являются экспоненциальными парами. A-процесс выводится из неравенства Вейля [27] (см. также [28], стр. 26, лемма 3), а B-процесс доказывается с помощью леммы 6.

3. Доказательство теоремы 1

Не ограничивая общности, будем считать, что $H = T^{\theta+\varepsilon}$ и $2(\theta+\varepsilon)\varepsilon^{-1} - 1$ — целое число. Пусть

$$R = N(\alpha, T + H) - N(\alpha, T).$$

Положим в лемме 1 $y = (T/2\pi)^{\frac{1}{2}}$, $2\pi z = t$, $s = \sigma + it$, $\sigma \geqslant 0.5$, $T \leqslant t \leqslant T + H$; получим

$$\zeta(s) = \sum_{n\leqslant y} n^{-s} + \chi(s) \sum_{n\leqslant t/2\pi y} n^{-1+s} + O(T^{-0.5\sigma}\ln T).$$

Граница изменения n во второй сумме зависит от t. Освободимся от этой зависимости. Имеем

$$|\chi(s)| = |(2\pi)^{\sigma-1} t^{0.5-\sigma}| \leqslant T^{0.5-\sigma};$$

$$y \leqslant \frac{t}{2\pi y} \leqslant y + \frac{H}{\sqrt{2\pi T}} \leqslant y + 1.$$

Поэтому

$$\left|\chi(s) \sum_{y<n\leqslant t/2\pi y} n^{-1+s}\right| \ll T^{0.5-\sigma+0.5(-1+\sigma)} \ll T^{-0.5\sigma}.$$

Следовательно,

$$\zeta(s) = \sum_{n\leqslant y} n^{-s} + \chi(s)\sum_{n\leqslant y} n^{-1+s} + O(T^{-0.5\sigma}\ln T). \qquad (7)$$

В этом представлении $\zeta(s)$ границы изменения n уже не зависят от t. Далее возьмем

$$M_x(s) = \sum_{m\leqslant x} \mu(m)m^{-s}, \qquad x = T^{0.5\varepsilon}.$$

Умножим обе части (7) на $M_x(s)$ и преобразуем правую часть, получим

$$\zeta(s)M_x(s) = 1 + \sum_{x<n\leqslant xy} a(n)n^{-s} + \chi(s)M_x(s)\sum_{n\leqslant y} n^{-1+s} + O(T^{-0,2}), \tag{8}$$

где

$$a(n) = \sum_{\substack{m|n \\ m\leqslant x,\, \frac{n}{m}\leqslant y}} \mu(m), \qquad |a(n)| \leqslant \tau(n).$$

Если $s = \rho$, то левая часть (8) обращается в нуль, поэтому

$$\left|1 + O(T^{-0,2})\right| = \left|1 + \sum_{x<n\leqslant xy} a(n)n^{-\rho} + \chi(\rho)M_x(\rho)\sum_{n\leqslant y} n^{-1+\rho}\right|$$

или, предполагая $T \gg 1$, имеем неравенство:

$$1 \leqslant 2\left|\sum_{x<n\leqslant xy} a(n)n^{-\rho}\right| + 2\left|\chi(\rho)\sum_{m\leqslant x}\mu(m)m^{-\rho}\sum_{n\leqslant y} n^{-1+\rho}\right|.$$

Промежутки суммирования по n и m разобьем на промежутки вида $a < b \leqslant 2a$. В каждом случае получится не более $\ln T$ промежутков и приходим к такому неравенству:

$$1 \leqslant 2\sum^{\ln^2 T} |S(\rho)|, \tag{9}$$

где $S(\rho)$ имеет один из следующих видов:

$$S(\rho) = \sum_{N<n\leqslant N_1} a(n)n^{-\rho}, \qquad x < N \leqslant yx, \tag{10}$$

$$S(\rho) = \chi(\rho)\sum_{M<m\leqslant M_1} \mu(m)m^{-\rho} \sum_{Y<n\leqslant Y_1} n^{-1+\rho}. \tag{11}$$

Обозначим через D количество сумм $S(\rho)$ в правой части (9); $D \ll \ln^2 T$. Занумеруем эти суммы в произвольном порядке $S_1(\rho), S_2(\rho), \ldots, S_D(\rho)$. Все нули ρ с условием $\operatorname{Re}\rho \geqslant \alpha$, $T < \operatorname{Im}\rho \leqslant T + H$, а их R штук, разобьем на классы $A_1, A_2, \ldots, A_D$ следующим образом: в класс A_ν, $1 \leqslant \nu \leqslant D$ отнесем те ρ, для которых

$$|S_\nu(\rho)| \geqslant (2D)^{-1}.$$

Каждое ρ из общего количества R попадает хотя бы в один класс A_ν. Действительно, если некоторое ρ не попало бы ни в один из классов A_ν, то для этого ρ:

$$|S_\nu(\rho)| < (2D)^{-1}, \qquad \nu = 1, 2, ..., D;$$

$$2\sum_{\nu=1}^{D} |S_\nu(\rho)| < 1,$$

что противоречит (9). Далее найдется хотя бы один класс A_ν, $1 \leqslant \nu \leqslant D$, в котором не меньше чем RD^{-1} нулей ρ. Обозначим этот класс буквой A, а отвечающую ему сумму буквой $S(\rho)$. Имеем

$$(2D)^{-1} \leqslant |S(\rho)|, \qquad \rho \in A, \qquad |A| \geqslant RD^{-1}.$$

Мнимые части $\rho \in A$ лежат на промежутке $(T, T+H)$; будем считать, что $\gamma = \mathrm{Im}\rho$ занумерованы в порядке возрастания γ.

Разделим $(T, T+H]$ на промежутки вида $n, n+1$; те из них, для которых n — четное число, отнесем к множеству B_1, оставшиеся — к множеству B_2. В одном из множеств B_1 или B_2 попадет не менее чем $0.5RD^{-1}$ нулей ρ; множество этих нулей мы обозначим буквой B. Наконец, B разобьем на $\ll \ln T$ множеств следующим образом: к множеству E_1 отнесем те ρ, у которых мнимые части γ являются первыми на своих промежутках $(n, n+1]$ (если таких несколько, берем любое из них), к множеству E_2 отнесем те ρ, у которых γ являются вторыми на своих промежутках, и так далее. Так как на промежутке $(n, n+1]$ лежит не более чем $c\ln T$ чисел $\gamma = \mathrm{Im}\rho$, то и множеств E_ν будет не более чем $c\ln T$ штук. Следовательно найдется такое E_ν, в котором будет не менее $R(Dc\ln T)^{-1}$ нулей ρ. Итак, получили множество нулей ρ такое, что

$$(2D)^{-1} \leqslant |S(\rho)|, \qquad \rho \in E, \qquad |E| \geqslant R(Dc\ln T)^{-1}. \tag{12}$$

Отметим, что если ρ, $\rho' \in E$, то

$$|\mathrm{Im}\rho - \mathrm{Im}\rho'| = |\gamma - \gamma'| \geqslant 1.$$

3.1. Сумма $S(\rho)$ имеет вид (10)

Пусть $S(\rho)$ имеет вид (10). Из условий на n получаем

$$T^{0.5\varepsilon} = x < N < N_1 \leqslant xy \leqslant T^{0.5(1+\varepsilon)}.$$

Рассмотрим пять возможных случаев:

1. $T^{0.5\varepsilon} < N \leqslant H^{\frac{3}{5}}$;
2. $H^{\frac{3}{5}} < N \leqslant H^{\frac{4}{5}}$; $\alpha \in \left(\frac{2}{3},\ \frac{5}{6}\right)$;
3. $H^{\frac{3}{5}} < N \leqslant H^{\frac{4}{5}}$, $\alpha \notin \left(\frac{2}{3},\ \frac{5}{6}\right)$;
4. $H^{\frac{4}{5}} < N \leqslant H$;
5. $H < N \leqslant T^{0.5(1+\varepsilon)}$.

3.1.1. Случай $T^{0.5\varepsilon} < N \leqslant H^{\frac{3}{5}}$

Промежуток $(T^{0.5\varepsilon}, H^{\frac{3}{5}}]$ разделим точками $H^{\frac{1}{r}}$, $r = 2, 3, \cdots, r_0$; $r_0 = 2(\theta+\varepsilon)\varepsilon^{-1} - 1$, $\theta = \theta(k,\lambda) = \frac{k+\lambda}{2k+2}$, на r_0 промежутков F_r:

$$F_r = \left(H^{\frac{1}{r+1}}, H^{\frac{1}{r}}\right), \qquad r = r_0, \cdots, 2, \qquad F_1 = \left(H^{\frac{1}{2}}, H^{\frac{3}{5}}\right).$$

Возведя обе части (12) в степень $2(r+1)$, найдем

$$(2D)^{-2(r+1)} \leqslant |S^{r+1}(\rho)|^2 = \left| \sum_{N^{r+1} < n \leqslant N_1^{r+1}} A_{r+1}(n) n^{-\rho} \right|^2, \tag{13}$$

где
$$A_{r+1}(n) = \sum_{n_1 \cdots n_{r+1} = n} a(n_1) \cdots a(n_{r+1}).$$

Так как $|a(n)| \leqslant \tau(n)$, то
$$|A_{r+1}(n)| \leqslant \sum_{n_1 \cdots n_{r+1} = n} \tau(n_1) \cdots \tau(n_{r+1}) = \sum_{d_1 k_1 \cdots d_{r+1} k_{r+1} = n} 1 = \tau_{2r+2}(n). \tag{14}$$

Суммируя обе части неравенства (13) по $\rho \in E$ и имея в виду, что $D \ll \ln^2 T$, $|E| \gg R \ln^{-3} T$, получим
$$R \ll \ln^{4r+7} T \sum_{\rho \in E} \left| \sum_{N^{r+1} < n \leqslant N_1^{r+1}} A_{r+1}(n) n^{-\rho} \right|^2.$$

Во внутренней сумме по n сделаем частное суммирование и, помня, что $\beta \geqslant \alpha$, найдем
$$R \leqslant N^{-2(r+1)\alpha} \ln^{4r+7} T \sum_{\rho \in E} \left| \sum_{N^{r+1} < n \leqslant u} A_{r+1}(n) n^{-i\gamma} \right|^2. \tag{15}$$

Здесь $u \leqslant N_1^{r+1}$ такое, при котором правая часть (15) максимальна. К сумме по ρ применим лемму 2, полагая в ней $t_\nu = \gamma$, $\delta = 1$. Находим
$$R \leqslant N^{-2(r+1)\alpha} \ln^{4r+7} T \left(I_1 + \sqrt{I_1 I_2} \right), \tag{16}$$

где
$$I_1 = \int_T^{T+H} \left| \sum_{N^{r+1} < n \leqslant u} A_{r+1}(n) n^{-it} \right|^2 dt,$$
$$I_2 = \int_T^{T+H} \left| \sum_{N^{r+1} < n \leqslant u} A_{r+1}(n) n^{-it} \ln n \right|^2 dt.$$

Каждый из интегралов I_1 и I_2 оцениваем, пользуясь леммами 3 и 4:
$$\begin{aligned} I_1 &\ll (H + N^{r+1} \ln T) \sum_{N^{r+1} < n \leqslant N_1^{r+1}} |A_{r+1}(n)|^2 \ll \\ &\ll (H + N^{r+1}) \ln T \sum_{N^{r+1} < n \leqslant N_1^{r+1}} \tau_{2r+2}^2(n) \ll (H + N^{r+1}) N^{r+1} \ln^{(2r+2)^2} T; \\ I_2 &\ll (H + N^{r+1}) \ln^3 T \sum_{N^{r+1} < n \leqslant N_1^{r+1}} \tau_{2r+2}^2(n) \ll (H + N^{r+1}) N^{r+1} \ln^{(2r+2)^2+2} T. \end{aligned}$$

Подставляя эти оценки в правую часть неравенства (16), получим
$$\begin{aligned} R &\leqslant N^{-2(r+1)\alpha} \ln^{4r+7} T \cdot (H + N^{r+1}) N^{r+1} \ln^{(2r+2)^2+1} T \ll \\ &\ll (H + N^{r+1}) N^{(r+1)(1-2\alpha)} \ln^{(2r+2)^2+4r+8} T. \end{aligned} \tag{17}$$

Так как $N \in F_r$, то $H^{\frac{1}{r+1}} < N$, то есть $H < N^{r+1}$, и, следовательно,
$$R \ll N^{2(r+1)(1-\alpha)} \ln^{(2r+2)^2+4r+8} T. \tag{18}$$

Опять так как $N \in F_r$, то $N \leqslant H^{\frac{1}{r}}$ при $r = r_0, \cdots, 2$ и $N \leqslant H^{\frac{3}{5}}$ при $r = 1$. Поэтому, если $r = r_0, \cdots, 5$ или $r = 1$, то из (18) имеем

$$R \ll H^{2.4(1-\alpha)} \ln^{172} T.$$

Осталось рассмотреть случай $N \in F_r$, $r = 2, 3, 4$. Если $N \leqslant H^{\frac{6}{5(r+1)}}$, то из (18) следует

$$R \leqslant H^{2.4(1-\alpha)} \ln^{124} T.$$

Итак, пусть $r = 2, 3, 4$ и $H^{\frac{6}{5(r+1)}} < N \leqslant H^{\frac{1}{r}}$. Заменяя в (17) $r + 1$ на r, найдем

$$R \ll (H + N^r) N^{r(1-2\alpha)} \ln^{4r^2+4r+4} T.$$

Так как $H \geqslant N^r$, $\alpha \geqslant 0.5$, то

$$R \ll H N^{r(1-2\alpha)} \ln^{4r^2+4r+4} T \ll H^{1+\frac{6r}{5(r+1)}(1-2\alpha)} \ln^{84} T. \qquad (19)$$

Если для α выполняются неравенства $\frac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{1}{2} + \frac{r+1}{12}$, то

$$1 + \frac{6r}{5(r+1)}(1-2\alpha) = \frac{12}{5}(1-\alpha) + \frac{12}{5(r+1)}\left(\alpha - \frac{1}{2} - \frac{r+1}{12}\right) \leqslant 2.4(1-\alpha),$$

и нужная оценка следует из (19).

Пусть теперь

$$\frac{1}{2} + \frac{r+1}{12} \leqslant \alpha \leqslant 1, \quad 2 \leqslant r \leqslant 4.$$

Вернемся к (12)

$$1 \leqslant \ln^{2r} T |S^r(\rho)| = \ln^{2r} T \left| \sum_{N^r < n \leqslant N_1^r} A_r(n) n^{-\rho} \right|. \qquad (20)$$

Пусть

$$\varphi = \varphi(\rho) = \arg \sum_{N^r < n \leqslant N_1^r} A_r(n) n^{-\rho}.$$

Тогда (20) перепишется так:

$$1 \leqslant \ln^{2r} T e^{-i\varphi(\rho)} \sum_{N^r < n \leqslant N_1^r} A_r(n) n^{-\rho},$$

Суммируя обе части последнего неравенства по $\rho \in E$ и меняя порядок суммирования, найдем:

$$R \ll \ln^{2r+3} T \sum_{N^r < n \leqslant N_1^r} |A_r(n)| \left| \sum_{\rho \in E} e^{-i\varphi(\rho)} n^{-\rho} \right|;$$

$$R^2 \ll \ln^{4r+6} T \sum_{N^r < n \leqslant N_1^r} |A_r(n)|^2 \sum_{N^r < n \leqslant N_1^r} \left| \sum_{\rho \in E} e^{-i\varphi(\rho)} n^{-\rho} \right|^2.$$

Для первой суммы имеем оценку:

$$\sum_{N^r < n \leqslant N_1^r} |A_r(n)|^2 \leqslant \sum_{N^r < n \leqslant N_1^r} \tau_{2r}^2(n) \ll N^r \ln^{4r^2-1} T.$$

Следовательно,

$$R^2 \leqslant N^r \ln^{4r^2+4r+5} T \cdot W, \qquad W = \sum_{N^r < n \leqslant N_1^r} \left| \sum_{\rho \in E} e^{-i\varphi(\rho)} n^{-\rho} \right|^2. \tag{21}$$

Далее,

$$\begin{aligned} W &= \sum_{N^r < n \leqslant N_1^r} \sum_{\rho, \rho_1 \in E} e^{-i(\varphi(\rho) - \varphi(\rho_1))} n^{-\beta - \beta_1 - i(\gamma - \gamma_1)} = \\ &= \sum_{\substack{\rho, \rho_1 \in E \\ \gamma = \gamma_1}} \sum_{N^r < n \leqslant N_1^r} n^{-\beta - \beta_1} + \sum_{\substack{\rho, \rho_1 \in E \\ \gamma \neq \gamma_1}} e^{-i(\varphi(\rho) - \varphi(\rho_1))} \sum_{N^r < n \leqslant N_1^r} n^{-\beta - \beta_1 - i(\gamma - \gamma_1)} \ll \\ &\ll RN^{r(1-2\alpha)} + \sum_{\substack{\rho, \rho_1 \in E \\ \gamma \neq \gamma_1}} \left| \sum_{N^r < n \leqslant N_1^r} n^{-\beta - \beta_1 - i(\gamma - \gamma_1)} \right|. \end{aligned}$$

К последней сумме по n применим формулу частного суммирования; учитывая, что $\beta,\ \beta_1 \geqslant \alpha$, найдем:

$$W \ll RN^{r(1-2\alpha)} + N^{-2r\alpha} \sum_{\substack{\rho, \rho_1 \in E \\ \gamma \neq \gamma_1}} \left| \sum_{N^r < n \leqslant u} n^{-i(\gamma - \gamma_1)} \right|,$$

причем $u \leqslant N_1^r$ и такое, при котором правая часть максимальна. Двойную сумму по $\rho, \rho_1 \in E$, $\gamma \neq \gamma_1$ разобьем на $\ll \ln T$ сумм вида $V < \gamma - \gamma_1 \leqslant V_1$, $1 \leqslant V < V_1 \leqslant 2V \leqslant H$. Переходя к максимальной сумме, получим, что

$$\begin{aligned} W &\ll RN^{r(1-2\alpha)} + N^{-2r\alpha} \ln T \sum_{V < \gamma - \gamma_1 \leqslant V_1} \left| \sum_{N^r < n \leqslant u} n^{-i(\gamma - \gamma_1)} \right| \ll \\ &\ll RN^{r(1-2\alpha)} + RN^{-2r\alpha} \ln T \sum_{V < \gamma - \gamma_0 \leqslant V_1} \left| \sum_{N^r < n \leqslant u} n^{-i(\gamma - \gamma_0)} \right|, \end{aligned}$$

где внешнее суммирование проводится по числам γ, а γ_0 — фиксированное число из промежутка $(T, T+H]$.

Если $V_1 \leqslant \pi N^r$, то к сумме по n применим лемму 5:

$$\sum_{N^r < n \leqslant u} n^{-i(\gamma - \gamma_0)} = \int_{N^r}^{u} n^{-i(\gamma - \gamma_0)} dn \ll \frac{N^r}{|\gamma - \gamma_0| + 1};$$

$$W \ll RN^{r(1-2\alpha)} + RN^{-2r\alpha} \ln T \sum_{V < \gamma - \gamma_0 \leqslant V_1} \frac{N^r}{\gamma - \gamma_0 + 1} \ll RN^{r(1-2\alpha)} \ln^2 T.$$

Если $V_1 > \pi N^r$, то к сумме по n применим лемму 6:

$$\begin{aligned} \sum_{N^r < n \leqslant u} n^{-i(\gamma - \gamma_0)} &= \sum_{M \leqslant m \leqslant M_1} \left(\frac{\gamma - \gamma_0}{2\pi} \right)^{1/2} m^{-1} e\left(-\frac{\gamma - \gamma_0}{2\pi} \ln \frac{\gamma - \gamma_0}{2\pi e} + \frac{\gamma - \gamma_0}{2\pi} \ln m \right) + \\ &+ O(N^r V^{-0.5}) \ll V^{0.5} \left| \sum_{M \leqslant m \leqslant M_1} m^{i(\gamma - \gamma_0) - 1} \right| + N^r V^{-0.5}, \end{aligned}$$

$$M = \frac{\gamma - \gamma_0}{2\pi u}, \quad M_1 = \frac{\gamma - \gamma_0}{2\pi N^r}.$$

Таким образом, при любом V, $1 \leqslant V \leqslant H$, для W выполняется такая оценка:

$$W \ll RN^{r(1-2\alpha)} \ln^2 T + RV^{0.5} N^{-2r\alpha} \ln T \sum_{V<\gamma-\gamma_0 \leqslant V_1} \left(\left| \sum_{M \leqslant m \leqslant M_1} m^{-1+i(\gamma-\gamma_0)} \right| + N^r V^{-1} \right). \quad (22)$$

Границы изменения m зависят от переменной суммирования γ. Освободимся от этой зависимости за счет незначительного огрубления оценки. Возьмем

$$B = \left[VN^{-r} \right] + 1, \qquad U = V(2\pi u)^{-1}, \qquad U_1 = V(\pi N^r)^{-1}.$$

Имеем цепочку равенств:

$$\begin{aligned} \sum_{M \leqslant m \leqslant M_1} m^{-1+i(\gamma-\gamma_0)} &= \sum_{U \leqslant n \leqslant U_1} n^{-1+i(\gamma-\gamma_0)} \sum_{M \leqslant m \leqslant M_1} \frac{1}{2B+1} \sum_{|b| \leqslant B} e\left(\frac{b(n-m)}{2B+1} \right) = \\ &= \frac{1}{2B+1} \sum_{M \leqslant m \leqslant M_1} \sum_{U \leqslant n \leqslant U_1} n^{-1+i(\gamma-\gamma_0)} + \\ &\quad + \frac{1}{2B+1} \sum_{0<|b| \leqslant B} \sum_{U \leqslant n \leqslant U_1} n^{-1+i(\gamma-\gamma_0)} e\left(\frac{bn}{2B+1} \right) \sum_{M \leqslant m \leqslant M_1} e\left(\frac{-bm}{2B+1} \right). \end{aligned}$$

Последняя сумма по m суммируется и легко оценивается по абсолютной величине числом $(2B+1)|b|^{-1}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \sum_{M \leqslant m \leqslant M_1} m^{-1+i(\gamma-\gamma_0)} &\ll \sum_{|b| \leqslant B} \frac{1}{|b|+1} \left| \sum_{U \leqslant n \leqslant U_1} n^{-1+i(\gamma-\gamma_0)} e\left(\frac{bn}{2B+1} \right) \right| \ll \\ &\ll \ln T \left| \sum_{U \leqslant n \leqslant U_1} n^{-1+i(\gamma-\gamma_0)} e\left(\frac{bn}{2B+1} \right) \right|, \end{aligned}$$

где $|b| \leqslant B$ и такое, при котором правая часть максимальна. Подставляя эту оценку в (22), находим:

$$W \ll RN^{r(1-2\alpha)} \ln^2 T + RV^{0.5} N^{-2r\alpha} \ln^2 T \sum_{V<\gamma-\gamma_0 \leqslant V_1} \left(\left| \sum_{U \leqslant n \leqslant U_1} n^{-1+i(\gamma-\gamma_0)} e\left(\frac{bn}{2B+1} \right) \right| + \frac{N^r}{V} \right). \quad (23)$$

Возводя основное неравенство (12) в степень r, будем считать:

$$1 \leqslant \ln^{2r} T \left| \sum_{N^r < k \leqslant N_1^r} A_r(k) k^{-\beta+i\gamma} \right|. \quad (24)$$

Заменяя единицу в правой части (23) под знаком суммы по γ большой величиной, именно правой частью (24), получим:

$$W \ll RN^{r(1-2\alpha)} \ln^2 T + RV^{0.5} N^{-2r\alpha} \ln^{2r+2} T \cdot W_1, \quad (25)$$

$$\begin{aligned} W_1 = \sum_{V<\gamma-\gamma_0 \leqslant V_1} &\left(\left| \sum_{U \leqslant n \leqslant U_1} \sum_{N^r < k \leqslant N_1^r} n^{-1+i(\gamma-\gamma_0)} e\left(\frac{bn}{2B+1} \right) A_r(k) k^{-\beta+i\gamma} \right| + \right. \\ &\left. + N^r V^{-1} \left| \sum_{N^r < k \leqslant N_1^r} A_r(k) k^{-\beta+i\gamma} \right| \right). \end{aligned}$$

Наконец, в последних двух суммах сделаем частное суммирование по n и k; при этом за знак модуля выносятся максимумы величин n^{-1} и $k^{-\beta}$, а верхние границы изменения n и k заменяются какими-то другими; получим:

$$W_1 \ll N^{r-r\alpha}V^{-1}(W_2+W_3), \tag{26}$$

$$W_2 = \sum_{V<\gamma-\gamma_0\leqslant V_1}\left|\sum_{U\leqslant n\leqslant U_2}\sum_{N^r<k\leqslant N_2^r} n^{i(\gamma-\gamma_0)}e\left(\frac{bn}{2B+1}\right)A_r(k)k^{i\gamma}\right|,$$

$$W_3 = \sum_{V<\gamma-\gamma_0\leqslant V_3}\left|\sum_{N^r<k\leqslant N_3^r} A_r(k)k^{i\gamma}\right|, \qquad U_2\leqslant U_1, \quad N_2,\ N_3\leqslant N_1.$$

Записывая модуль внутренней суммы в W_2 в виде произведения суммы на $e^{-i\varphi(\gamma)}$ и меняя порядки суммирования, находим:

$$W_2 \ll \sum_{U\leqslant n\leqslant U_2}\sum_{N^r<k\leqslant N_2^r}|A_r(k)|\left|\sum_{V<\gamma-\gamma_0\leqslant V_1} e^{-i\varphi(\gamma)}(nk)^{i\gamma}\right| \ll$$

$$\ll \sum_{UN^r\leqslant m\leqslant U_2N_2^r} B(m)\left|\sum_{V<\gamma-\gamma_0\leqslant V_1} e^{-i\varphi(\gamma)}m^{i(\gamma-\gamma_0)}\right|, \tag{27}$$

$$B(m)\leqslant \sum_{nk=m}|A_r(k)| \ll \sum_{k|m}\tau_{2r}(k) = \tau_{2r+1}(m);$$

$$W_3 = \sum_{N^r\leqslant k\leqslant N_3^r}|A_r(k)|\left|\sum_{V<\gamma-\gamma_0\leqslant V_1} e^{-i\varphi(\gamma)}k^{i(\gamma-\gamma_0)}\right|. \tag{28}$$

Применяя к (27) и (28) неравенство Коши, оценку (14) и лемму 4, получим

$$W_2^2 \ll V\ln^{(2r+1)^2-1}T\sum_{UN^r\leqslant m\leqslant U_2N_2^r}\left|\sum_{V<\gamma-\gamma_0\leqslant V_1} e^{-i\varphi(\gamma)}m^{i(\gamma-\gamma_0)}\right|^2,$$

$$W_3^2 \ll N^r\ln^{4r^2-1}T\sum_{N^r\leqslant k\leqslant N_3^r}\left|\sum_{V<\gamma-\gamma_0\leqslant V_1} e^{-i\varphi(\gamma)}k^{i(\gamma-\gamma_0)}\right|^2.$$

Применив к правым частям полученных неравенств лемму 2, получим:

$$W_2^2 \ll V\ln^{(2r+1)^2-1}T\left(I_1+\sqrt{I_1I_2}\right), \qquad W_3^2 \ll N^r\ln^{4r^2-1}T\left(I_3+\sqrt{I_3I_4}\right), \tag{29}$$

где

$$I_1 = \int\limits_{UN^r}^{U_2N_2^r} \left| \sum_{V<\gamma-\gamma_0\leqslant V_1} e^{-i\varphi(\gamma)} m^{i(\gamma-\gamma_0)} \right|^2 dm,$$

$$I_2 = \int\limits_{UN^r}^{U_2N_2^r} \left| \sum_{V<\gamma-\gamma_0\leqslant V_1} (\gamma-\gamma_0) e^{-i\varphi(\gamma)} m^{i(\gamma-\gamma_0)-1} \right|^2 dm,$$

$$I_3 = \int\limits_{N^r}^{N_3^r} \left| \sum_{V<\gamma-\gamma_0\leqslant V_1} e^{-i\varphi(\gamma)} k^{i(\gamma-\gamma_0)} \right|^2 dk,$$

$$I_4 = \int\limits_{N^r}^{N_3^r} \left| \sum_{V<\gamma-\gamma_0\leqslant V_1} (\gamma-\gamma_0) e^{-i\varphi(\gamma)} k^{i(\gamma-\gamma_0)-1} \right|^2 dk.$$

Интегралы I_1, I_2, I_3 и I_4 оцениваются одинаково: после возведения модуля соответствующей суммы в квадрат, интеграл берется и сумма по γ и γ_1 оценивается тривиально суммой модулей слагаемых (следует помнить, что число слагаемых по γ, γ_1 не превосходит R, а γ, γ_1 таковы, что $|\gamma-\gamma_1| \geqslant 1$ и $U = V(2\pi u)^{-1} \asymp VN^{-r}$). Последовательно находим:

$$I_1 = \sum_{\substack{V<\gamma-\gamma_0\leqslant V_1\\ V<\gamma_1-\gamma_0\leqslant V_1}} e^{i(\varphi(\gamma_1)-\varphi(\gamma))} \int\limits_{UN^r}^{U_2N_2^r} m^{i(\gamma-\gamma_1)} dm =$$

$$= \sum_{\substack{V<\gamma-\gamma_0\leqslant V_1\\ V<\gamma_1-\gamma_0\leqslant V_1}} e^{i(\varphi(\gamma_1)-\varphi(\gamma))} \frac{(U_2N_2^r)^{i(\gamma-\gamma_1)+1} - (UN^r)^{i(\gamma-\gamma_1)+1}}{i(\gamma-\gamma_1)+1} \ll$$

$$\ll RUN^r + UN^r \sum_{\substack{V<\gamma-\gamma_0\leqslant V_1\\ V<\gamma_1-\gamma_0\leqslant V_1\\ \gamma\neq\gamma_1}} (|\gamma-\gamma_1|+1)^{-1} \ll RUN^r \ln T \ll RV\ln T;$$

$$I_2 = \sum_{\substack{V<\gamma-\gamma_0\leqslant V_1\\ V<\gamma_1-\gamma_0\leqslant V_1}} e^{i(\varphi(\gamma_1)-\varphi(\gamma))} (\gamma-\gamma_0)(\gamma_1-\gamma_0) \int\limits_{UN^r}^{U_2N_2^r} m^{i(\gamma-\gamma_1)-2} dm =$$

$$= \sum_{\substack{V<\gamma-\gamma_0\leqslant V_1\\ V<\gamma_1-\gamma_0\leqslant V_1}} e^{i(\varphi(\gamma_1)-\varphi(\gamma))} (\gamma-\gamma_0)(\gamma_1-\gamma_0) \frac{(U_2N_2^r)^{i(\gamma-\gamma_1)-1} - (UN^r)^{i(\gamma-\gamma_1)-1}}{i(\gamma-\gamma_1)-1} \ll$$

$$\ll V^2(UN^r)^{-1}R + V^2(UN^r)^{-1} \sum_{\substack{V<\gamma-\gamma_0\leqslant V_1\\ V<\gamma_1-\gamma_0\leqslant V_1\\ \gamma\neq\gamma_1}} |\gamma-\gamma_1|^{-1} \ll V^2(UN^r)^{-1}R\ln T \ll RV\ln T;$$

$$I_3 \ll RN^r \ln T;$$

$$I_4 \ll V^2 N^{-r} R \ln T.$$

Подставляя найденные оценки для интегралов I_1, I_2, I_3 и I_4 в (29), а при оценке W_3 пользуясь условием $V_1 > \pi N^r$, найдем

$$\begin{aligned}
&W_2^2 \ll V \ln^{(2r+1)^2-1} T \left(RV \ln T + \sqrt{RV \ln T \cdot RV \ln T}\right) \ll RV^2 \ln^{(2r+1)^2} T,\\
&W_3^2 \ll N^r \ln^{4r^2-1} T \left(RN^r \ln T + \sqrt{RN^r \ln T \cdot V^2 N^{-r} R \ln T}\right) \ll\\
&\qquad \ll R \ln^{4r^2-1} T (N^{2r} \ln T + N^r V \ln T) \ll RV^2 \ln^{4r^2} T.
\end{aligned}$$

Из (26), (25) и (21) последовательно получаем:

$$\begin{aligned}
&W_1 \ll N^{r-r\alpha} V^{-1} \left(R^{0,5} V \ln^{2r^2+2r+0,5} T + R^{0,5} V \ln^{2r^2} T\right) \ll R^{0.5} N^{r(1-\alpha)} \ln^{2r^2+2r+0,5} T;\\
&W \ll RN^{r(1-2\alpha)} \ln^2 T + RV^{0.5} N^{-2r\alpha} \ln^{2r+2} T \cdot R^{0.5} N^{r(1-\alpha)} \ln^{2r^2+2r+0,5} T \ll\\
&\qquad \ll RN^{r(1-2\alpha)} \ln^2 T + R^{1.5} V^{0.5} N^{r(1-3\alpha)} \ln^{2r^2+4r+2,5} T;\\
&R \leqslant N^r \ln^{4r^2+4r+5} T \cdot \left(N^{r(1-2\alpha)} \ln^2 T + R^{0.5} V^{0.5} N^{r(1-3\alpha)} \ln^{2r^2+4r+2,5} T\right) \ll\\
&\qquad \ll N^{2r(1-\alpha)} \ln^{4r^2+4r+7} T + R^{0.5} V^{0.5} N^{r(2-3\alpha)} \ln^{6r^2+8r+7.5} T.
\end{aligned}$$

Помня, что $V \leqslant H$, перепишем последнюю оценку для величины R в следующей удобной форме:

$$R \ll N^{2r(1-\alpha)} \ln^{4r^2+4r+7} T + HN^{r(4-6\alpha)} \ln^{12r^2+16r+15} T. \tag{30}$$

Мы рассматриваем случай:

$$H^{\frac{6}{5(r+1)}} < N \leqslant H^{\frac{1}{r}}, \quad \frac{1}{2} + \frac{r+1}{12} \leqslant \alpha \leqslant 1, \qquad r = 2, 3, 4.$$

Легко видеть, что $\alpha > \frac{3}{4} > \frac{2}{3}$, тогда

$$R \ll H^{2(1-\alpha)} \ln^{4r^2+4r+7} T + H^{1+\frac{12r}{5(r+1)}(2-3\alpha)} \ln^{12r^2+16r+15} T.$$

Отсюда, пользуясь соотношением

$$\begin{aligned}
&1 + \frac{12r}{5(r+1)}(2-3\alpha) - \frac{12}{5}(1-\alpha) = \frac{12(2r-1)}{5(r+1)} \left(\frac{17r-7}{12(2r-1)} - \alpha\right) \leqslant\\
&\leqslant \frac{12(2r-1)}{5(r+1)} \left(\frac{17r-7}{12(2r-1)} - \frac{1}{2} - \frac{r+1}{12}\right) = -\frac{2r(r-2)}{5(r+1)} \leqslant 0,
\end{aligned}$$

имеем

$$R \ll H^{2.4(1-\alpha)} \ln^{95} T.$$

3.1.2. Случай $H^{0.6} < N \leqslant H^{0.8}$; $\alpha \notin \left(\frac{2}{3},\ \frac{5}{6}\right)$

Если $1/2 \leqslant \alpha \leqslant 2/3$, то, полагая в (17) $r = 0$, найдем

$$\begin{aligned}
&R \ll (HN^{1-2\alpha} + N^{2(1-\alpha)}) \ln^{12} T \leqslant (H^{1+0.6(1-2\alpha)} + H^{1.6(1-\alpha)}) \ln^{14} T =\\
&\quad = (H^{2.4(1-\alpha)+1.2(\alpha-2/3)} + H^{1.6(1-\alpha)}) \ln^{14} T \ll H^{2.4(1-\alpha)} \ln^{14} T.
\end{aligned}$$

При $5/6 \leqslant \alpha \leqslant 1$ применим оценку (30), полагая в ней $r = 1$. Находим

$$\begin{aligned}
&R \ll (N^{2(1-\alpha)} + HN^{4-6\alpha}) \ln^c T \ll (H^{1.6(1-\alpha)} + H^{1+0.6(4-6\alpha)}) \ln^{43} T =\\
&\quad = (H^{1.6(1-\alpha)} + H^{2.4(1-\alpha)+1.2(5/6-\alpha)}) \ln^{43} T \ll H^{2.4(1-\alpha)} \ln^{43} T.
\end{aligned}$$

3.1.3. Случай $H^{0.6} < N \leqslant H^{0.8}$; $2/3 \leqslant \alpha \leqslant 5/6$

Пусть сначала $H^{0.6} < N \leqslant H^{2/3}$. Полагая в оценке (17) $r = 1$, найдем:

$$R \ll (HN^{2-4\alpha} + N^{4(1-\alpha)}) \ln^{28} T \ll H^{8/3(1-\alpha)} \ln^{28} T.$$

Пусть теперь $H^{2/3} \leqslant N \leqslant H^{0.8}$, $2/3 \leqslant \alpha \leqslant 3/4$. Применим (17) при $r = 0$. Находим

$$R \ll (HN^{1-2\alpha} + N^{2(1-\alpha)}) \ln^{14} T \ll (H^{1+2/3(1-2\alpha)} + H^{8/5(1-\alpha)}) \ln^{14} T =$$
$$= (H^{8/3(1-\alpha)+4/3(\alpha-3/4)} + H^{8/5(1-\alpha)}) \ln^{14} T \ll H^{8/3(1-\alpha)} \ln^{14} T.$$

Наконец, если $H^{2/3} \leqslant N \leqslant H^{0.8}$ и $3/4 \leqslant \alpha \leqslant 5/6$, то, пользуясь оценкой (30) при $r = 1$, получим:

$$R \ll (N^{2(1-\alpha)} + HN^{4-6\alpha}) \ln^{50} T \ll (H^{8/5(1-\alpha)} + H^{1+2/3(4-6\alpha)}) \ln^{50} T =$$
$$= (H^{8/5(1-\alpha)} + H^{8/3(1-\alpha)+4/3(3/4-\alpha)}) \ln^{50} T \ll H^{8/3(1-\alpha)} \ln^{50} T.$$

3.1.4. Случай $H^{0.8} < N \leqslant H$

Если $0.5 \leqslant \alpha \leqslant 3/4$, то, полагая в (17) $r = 0$, найдем:

$$R \ll (HN^{1-2\alpha} + N^{2(1-\alpha)}) \ln^{14} T \ll (H^{1+4/5(1-2\alpha)} + H^{2(1-\alpha)}) \ln^{14} T =$$
$$= (H^{2.4(1-\alpha)+0.8(\alpha-3/4)} + H^{2(1-\alpha)}) \ln^{14} T \ll H^{2.4(1-\alpha)} \ln^{14} T.$$

При $0.75 \leqslant \alpha \leqslant 1$ применим оценку (20), полагая в ней $r = 1$. Находим

$$R \ll (N^{2(1-\alpha)} + HN^{4-6\alpha}) \ln^{14} T \ll (H^{2(1-\alpha)} + H^{1+4/5(4-6\alpha)}) \ln^{14} T =$$
$$= (H^{2(1-\alpha)} + H^{2.4(1-\alpha)+2.4(0.75-\alpha)}) \ln^{14} T \ll H^{2.4(1-\alpha)} \ln^{14} T.$$

3.1.5. Случай $H \leqslant N \leqslant T^{0.5(1+\varepsilon)}$

Возводя основное неравенство (12) в квадрат и просуммировав обе части получившегося неравенства по $\rho \in E$, получим

$$R \ll \ln^7 T \sum_{\rho \in E} \left| \sum_{N < n \leqslant N_1} a(n) n^{-\rho} \right|^2.$$

Во внутренней сумме по n сделаем частное суммирование. При этом за знак модуля вынесется максимум величины $n^{-\beta}$, а верхняя граница изменения n заменится на N_2, $N_2 \leqslant N_1$. Помня, что $\beta \geqslant \alpha$, получим

$$R \ll N^{-2\alpha} \ln^7 T \sum_{\rho \in E} \left| \sum_{N < n \leqslant N_2} a(n) n^{-i\gamma} \right|^2.$$

К сумме по ρ применим лемму 2, полагая в ней $t_\nu = \gamma$, $\delta = 1$. Находим

$$R \ll N^{-2\alpha} \left(I_1 + \sqrt{I_1 I_2} \right) \ln^7 T. \tag{31}$$

где

$$I_1 = \int_T^{T+H} \left| \sum_{N < n \leqslant N_2} a(n) n^{-it} \right|^2 dt,$$
$$I_2 = \int_T^{T+H} \left| \sum_{N < n \leqslant N_2} a(n) n^{-it} \ln n \right|^2 dt.$$

Оценим сверху интеграл I_1. Имеем

$$I_1 = \int_0^H \left| \sum_{N<n\leqslant N_2} a(n) n^{-i(T+t)} \right|^2 dt \leqslant \int_0^H \exp\left(1 - \left(\frac{t}{H}\right)^2\right) \left| \sum_{N<n\leqslant N_2} a(n) n^{-i(T+t)} \right|^2 dt \leqslant$$
$$\leqslant e \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\left(\frac{t}{H}\right)^2\right) \left| \sum_{N<n\leqslant N_2} a(n) n^{-i(T+t)} \right|^2 dt =$$
$$= e \sum_{N<n_1,n_2\leqslant N_2} a(n_1)a(n_2) \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{-iT} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\left(\frac{t}{H}\right)^2 - it\ln\frac{n_1}{n_2}\right) dt.$$

При вещественном α справедливо равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-t^2 - i\alpha t\right) dt = \sqrt{\pi} \exp\left(-\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2\right).$$

Поэтому

$$I_1 \leqslant e\sqrt{\pi} H \sum_{N<n_1,n_2\leqslant N_2} a(n_1)a(n_2) \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{-iT} \exp\left(-\left(\frac{H}{2}\ln\frac{n_1}{n_2}\right)^2\right).$$

Представляя последнюю сумму в виде двух слагаемых, одно из которых получается при $n_1 = n_2$, приходим к оценке

$$I_1 \ll H(\Sigma_0 + W_0), \qquad \Sigma_0 = \sum_{N<n\leqslant N_2} a^2(n),$$
$$W_0 \leqslant \sum_{N<n_1<n_2\leqslant N_2} a(n_1)a(n_2) \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{-iT} \exp\left(-\left(\frac{H}{2}\ln\frac{n_2}{n_1}\right)^2\right).$$

Оценим сумму Σ_0, пользуясь леммой 4 и имея в виду, что $|a(n)| \leqslant \tau(n)$. Найдем:

$$\Sigma_0 \leqslant \sum_{N<n\leqslant N_2} \tau^2(n) \ll N\ln^2 T.$$

Теперь оценим W_0. Если в W_0 выполняется условие $n_2 - n_1 \geqslant K = NH^{-1}\ln T$, то

$$\ln\frac{n_2}{n_1} = \ln\left(1 + \frac{n_2 - n_1}{n_1}\right) \geqslant \ln\left(1 + \frac{\ln T}{2H}\right) \geqslant \frac{\ln T}{4H}.$$

Следовательно

$$\exp\left(-\left(\frac{H}{2}\ln\frac{n_2}{n_1}\right)^2\right) \leqslant \exp\left(-\frac{\ln^2 T}{64}\right).$$

Таким образом, если $n_2 - n_1 > K$, то соответствующая часть суммы W_0 есть величина порядка

$$O\left(\exp\left(-0.01\ln^2 T\right)\right).$$

Оценим оставшуюся часть суммы W_0, которую обозначим W_1:

$$W_1 = \sum_{N<n_1\leqslant N_2} a(n_1) \sum_{\substack{n_1<n_2\leqslant n_1+K \\ n_2\leqslant N_2}} a(n_2) \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{-iT} \exp\left(-\left(\frac{H}{2}\ln\frac{n_2}{n_1}\right)^2\right).$$

Записывая коэффициенты $a(n_1)$ и $a(n_2)$ в явном виде, получим:

$$W_1 = \sum_{m_1,m_2\leqslant x} \mu(m_1)\mu(m_2)W(m_1,m_2), \qquad y = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{32}$$

$$W(m_1,m_2) = \sum_{\substack{N<m_1n_1\leqslant N_2\\ n_1\leqslant y}} \sum_{\substack{m_1n_1<m_2n_2\leqslant m_1n_1+K\\ n_2\leqslant y,\ m_2n_2\leqslant N_2}} \exp\left(-\left(\frac{H}{2}\ln\frac{m_2n_2}{m_1n_1}\right)^2\right)\left(\frac{m_1n_1}{m_2n_2}\right)^{-iT}.$$

Обозначим через d наибольший общий делитель чисел m_1 и m_2. Тогда $m_1 = ad$, $m_2 = bd$, $(a,b) = 1$. Переменные суммирования представим так:

$$n_1 = bn_3 + n_3', \quad n_2 = an_4 + n_4'.$$

Причем n_3' и n_4' меняются в пределах $0 \leqslant n_3' < b$, $0 \leqslant n_4' < a$, а при заданных n_3', n_4' переменные n_3, n_4 меняются в пределах

$$N_3 = (Nm_1^{-1} - n_3')b^{-1} < n_3 \leqslant (N_2m_1^{-1} - n_3')b^{-1} = N_3', \qquad n_3 \leqslant (y - n_3')b^{-1},$$
$$(n_1m_1m_2^{-1} - n_4')a^{-1} < n_4 \leqslant (n_1m_1m_2^{-1} - n_4' + Km_2^{-1})a^{-1},$$
$$n_4 \leqslant (y - n_4')a^{-1}, \qquad n_4 \leqslant (N_2m_2^{-1} - n_4')a^{-1} = N_4.$$

Далее имеем:

$$(n_1m_1m_2^{-1} - n_4')a^{-1} = ((bn_3 + n_3')ab^{-1} - n_4')a^{-1} = n_3 + n_3'b^{-1} - n_4'a^{-1} = n_3 + \alpha - \beta,$$
$$\alpha = n_3'b^{-1}, \quad \beta = n_4'a^{-1}.$$

Поэтому

$$n_3 + \alpha - \beta < n_4 \leqslant n_3 + \alpha - \beta + K_1, \quad K_1 = K(abd)^{-1}, \quad n_4 \leqslant (y - n_4')a^{-1}, \quad n_4 \leqslant N_4.$$

Пользуясь введенными обозначениями, дробь n_1m_1/n_2m_2 представим так:

$$\frac{m_1n_1}{m_2n_2} = \frac{an_1}{bn_2} = \frac{abn_3 + an_3'}{abn_4 + bn_4'} = \frac{n_3 + \alpha}{n_4 + \beta}.$$

Сумма $W(m_1,m_2)$ будет теперь выглядеть следующим образом:

$$W(m_1,m_2) = \sum_{0\leqslant n_3'<b}\sum_{0\leqslant n_4'<a} W(n_3',n_4'), \tag{33}$$

$$W(n_3',n_4') = \sum_{\substack{N_3<n_3\leqslant N_3'\\ n_3\leqslant (y-n_3')b^{-1}}} \sum_{\substack{n_3+\alpha-\beta<n_4\leqslant n_3+\alpha-\beta+K_1\\ n_4\leqslant N_4,\ n_4\leqslant (y-n_4')a^{-1}}} \exp\left(-\left(\frac{H}{2}\ln\frac{n_4+\beta}{n_3+\alpha}\right)^2\right)\left(\frac{n_3+\alpha}{n_4+\beta}\right)^{-iT}.$$

Переменная суммирования n_4 принимает все значения натуральных чисел из полуинтервала

$$h_3 + \alpha - \beta < n_4 \leqslant \min\left\{n_3 + \alpha - \beta + K_1,\ N_4,\ (y - n_4')a^{-1}\right\}.$$

Поэтому n_4 можно заменить величиной $n_3 + h$; $n_4 = n_3 + h$, где h принимает значения:

$$\alpha - \beta < h \leqslant \min\left\{\alpha - \beta + K_1,\ N_4 - n_3,\ (y - n_4')a^{-1} - n_3\right\} = h_1.$$

Таким образом

$$W(n_3',n_4') = \sum_{\substack{N_3<n_3\leqslant N_3' \\ n_3\leqslant (y-n_3')b^{-1}}} \sum_{\alpha-\beta<h\leqslant h_1} E(n_3,h)\left(\frac{n_3+\alpha}{n_3+h+\beta}\right)^{-iT},$$

$$E(n_3,h) = \exp\left(-\left(\frac{H}{2}\ln\frac{n_3+h+\beta}{n_3+\alpha}\right)^2\right).$$

Меняя порядок суммирования, найдем:

$$W(n_3',n_4') \leqslant \sum_{\alpha-\beta<h\leqslant\alpha-\beta+K_1} \left|\sum_{N_3<n_3\leqslant N_5} E(n_3,h)\left(\frac{n_3+\alpha}{n_3+h+\beta}\right)^{-iT}\right|,$$

где

$$N_5 = \min\left\{N_3',\,(y-n_3')b^{-1},\,N_4-h,\,(y-n_4')a^{-1}-h\right\}.$$

Во внутренней сумме по n_3 сделаем частное суммирование, а затем с учетом следующих соотношений

$$E_u'(u,h) = E(u,h)\frac{H(\alpha-\beta-h)}{(u+h+\beta)(u+\alpha)}\ln\frac{n_3+h+\beta}{n_3+\alpha} < 0,$$

$$C(u,h) = \sum_{N_3<n_3\leqslant u}\left(\frac{n_3+\alpha}{n_3+h+\beta}\right)^{-iT}, \qquad 0<E(u,h)\leqslant 1,$$

то есть в частности, пользуясь монотонностью функции $E(u,h)$, последовательно получим:

$$W(n_3',n_4') \leqslant \sum_{\alpha-\beta<h\leqslant\alpha-\beta+K_1}\left|-\int_{N_3}^{N_5} C(u,h)E_u'(u,h)du + E(N_5,h)C(N_5,h)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\alpha-\beta<h\leqslant\alpha-\beta+K_1}\left|C(N_5',h)\right|(2E(N_5,h)+E(N_3,h)) \ll \sum_{\alpha-\beta<h\leqslant\alpha-\beta+K_1}\left|\sum_{N_3<n_3\leqslant N_5'}\left(\frac{n_3+\alpha}{n_3+h+\beta}\right)^{-iT}\right|,$$

где $N_3 < N_5' \leqslant N_5$. Отметим, что для $W_1(n_1,n_4')$ выполняются следующие условия, которыми мы будем далее пользоваться:

$$h+\beta-\alpha = \frac{m_2n_2-m_1n_1}{abd} \geqslant (ab)^{-1},$$

$$N^2 \leqslant m_1m_2y^2 \leqslant abd^2T.$$

Для оценки внутренней суммы в $W_1(n_3',n_4')$ пользуемся методом экспоненциальных пар (определение 3). Положим

$$f(u) = \frac{T}{2\pi}\ln\frac{u+h+\beta}{u+\alpha};$$

$$h_1 = N_5'-N_3 \leqslant N_3 = (Nm_1^{-1}-n_3')b^{-1};$$

$$B = N(abd)^{-1};$$

$$A = T(h+\beta-\alpha)(abd)^2N^{-2} \geqslant 1.$$

Производная порядка r, $r=1,2,\cdots$ функции $f(u)$ имеет вид

$$f^{(r)}(u) = \frac{(-1)^r(r-1)!T}{2\pi(u+h+\beta)^r(u+\alpha)^r}\sum_{i=1}^{r} C_r^i(u+\alpha)^{r-1}(h+\beta-\alpha),$$

и выполняются следующие соотношения

$$AB^{1-r} \ll f^{(r)}(u) \ll AB^{1-r}, \qquad AB^{1-r} = T(h+\beta-\alpha)(abd)^{r+1}N^{-r-1}.$$

Следовательно, для любой экспоненциальной пары (κ, λ) имеем:

$$W(n_3', n_4') \leqslant \sum_{\alpha-\beta<h\leqslant\alpha-\beta+K_1} A^\kappa B^\lambda \ll T^\kappa N^{\lambda-2\kappa}(abd)^{2\kappa-\lambda}K_1^{\kappa+1} \ll$$
$$\ll N^{1+\lambda-\kappa}T^k H^{-\kappa-1}(abd)^{\kappa-\lambda-1}\ln^{\kappa+1} T.$$

Тем самым из (32) и (33) получим:

$$W(m_1, m_2) \ll N^{1+\lambda-\kappa}T^k H^{-\kappa-1}(m_1m_2)^{\kappa-\lambda}\ln^{\kappa+1} T;$$
$$W_1 \ll N^{1+\lambda-\kappa}T^\kappa H^{-\kappa-1}x^{2(1+\kappa-\lambda)}\ln^{\kappa+1} T.$$

Так как $x < N \ll xT^{0.5}$, $x = T^{0.5\varepsilon}$ и $\kappa \leqslant \lambda$, то

$$W_1 \ll NT^{\frac{\kappa+\lambda}{2}}H^{-\kappa-1}x^{2+\kappa-\lambda}\ln^{\kappa+1} T \leqslant NT^{\frac{\kappa+\lambda}{2}+\varepsilon}H^{-\kappa-1}\ln^{\kappa+1} T =$$
$$= N\left(\frac{T^{\frac{\kappa+\lambda}{2(\kappa+1)}+\frac{\varepsilon}{\kappa+1}}}{H}\right)^{\kappa+1}\ln^{\kappa+1} T.$$

Поэтому, если $H \geqslant T^{\frac{\kappa+\lambda}{2\kappa+2}+\varepsilon}$, то

$$W_1 \ll N\ln^2 T.$$

Объединяя это с оценками W_0 и Σ_0, находим:

$$I_1 \ll HN\ln^2 T.$$

Оценивая интеграл I_2 также как и I_1, получим:

$$I_2 \ll HN\ln^3 T.$$

Отсюда и из (31), пользуясь соотношением $N \geqslant H$, найдем:

$$R \ll HN^{1-2\alpha}\ln^{10} T \ll H^{2(1-\alpha)}\ln^{10} T.$$

Таким образом, случай, когда $S(\rho)$ имеет вид (10), рассмотрен полностью.

3.2. Сумма $S(\rho)$ имеет вид (11)

Пусть $S(\rho)$ имеет вид (11). Так как

$$|\chi(\rho)| \ll T^{0.5-\beta}, \quad \beta = \operatorname{Re}\rho,$$

то, переходя в (11) к неравенствам, найдем:

$$1 \leqslant T^{0.5-\beta}\ln^2 T\left|\sum_{Y<n\leqslant Y_1} n^{-1+\rho}\sum_{M<m\leqslant M_1}\mu(m)m^{-\rho}\right|, \qquad Y \leqslant y = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^{\frac12}, \quad M_1 \leqslant x = T^{0.5\varepsilon}.$$

Производя частное суммирование по m и n, приходим к неравенству:

$$1 \leqslant T^{0.5-\beta}Y^{-1+\beta}M^{-\beta}\ln^2 T\left|\sum_{Y<n\leqslant Y_2} n^{-i\gamma}\sum_{M<m\leqslant M_2}\mu(m)m^{-i\gamma}\right|, \qquad Y_2 \leqslant Y_1, \quad M_2 \leqslant M_1.$$

Возводя это неравенство в квадрат и просуммировав обе части получившегося неравенства по $\rho \in E$, получим:

$$R \ll T^{1-2\alpha} Y^{2\alpha-2} M^{-2\alpha} \ln^7 T \sum_{\rho \in E} \left| \sum_{M<m\leqslant M_2} \mu(m) m^{-i\gamma} \sum_{Y<n\leqslant Y_2} n^{-i\gamma} \right|^2.$$

К сумме по ρ применяя лемму 2, получим:

$$R \ll T^{1-2\alpha} Y^{2\alpha-2} M^{-2\alpha} \ln^7 T \left(I_1 + \sqrt{I_1 I_2} \right), \tag{34}$$

$$I_1 = \int_T^{T+H} \left| \sum_{M<m\leqslant M_2} \mu(m) m^{-it} \sum_{Y<n\leqslant Y_2} n^{-it} \right|^2 dt,$$

$$I_2 = \int_T^{T+H} \left| \sum_{M<m\leqslant M_2} \mu(m) m^{-it} \sum_{Y<n\leqslant Y_2} n^{-it} \ln mn \right|^2 dt.$$

Оценим сверху интеграл I_1. Применяя прием, который был использован при преобразовании I_1 в пункте 3.1.5, найдем:

$$I_1 \leqslant e\sqrt{\pi} H \sum_{M<m_1,m_2\leqslant M_2} \mu(m_1)\mu(m_2) \sum_{Y<n_1,n_2\leqslant Y_2} \exp\left(-\left(\frac{H}{2} \ln \frac{m_1 n_1}{m_2 n_2} \right)^2 \right) \left(\frac{m_1 n_1}{m_2 n_2} \right)^{-iT}.$$

Представляя последнюю сумму в виде двух слагаемых, одно из которых получается при $m_1 n_1 = m_2 n_2$, приходим к оценке

$$I_1 \ll H(\Sigma_0 + W_0),$$

где

$$\Sigma_0 = \sum_{M<m_1,m_2\leqslant M_2} \mu(m_1)\mu(m_2) \sum_{\substack{Y<n_1,n_2\leqslant Y_2 \\ m_1 n_1 = m_2 n_2}} 1 \ll \sum_{MY<k\leqslant M_1 Y_1} \tau^2(k) \ll MY \ln^3 T,$$

$$W_0 = \sum_{M<m_1,m_2\leqslant M_2} \mu(m_1)\mu(m_2) \sum_{\substack{Y<n_1,n_2\leqslant Y_2 \\ m_1 n_1 < m_2 n_2}} \exp\left(-\left(\frac{H}{2} \ln \frac{m_2 n_2}{m_1 n_1} \right)^2 \right) \left(\frac{m_1 n_1}{m_2 n_2} \right)^{-iT}.$$

Оценим W_0. Если в W_0 выполняется условие $m_2 n_2 - m_1 n_1 \geqslant K$, $K = MYH^{-1} \ln T$, то

$$\ln \frac{m_2 n_2}{m_1 n_1} = \ln \left(1 + \frac{m_2 n_2 - m_1 n_1}{m_1 n_1} \right) \geqslant \ln \left(1 + \frac{\ln T}{4H} \right) \geqslant \frac{\ln T}{8H};$$

Следовательно

$$\exp\left(-\left(\frac{H}{2} \ln \frac{m_2 n_2}{m_1 n_1} \right)^2 \right) \leqslant \exp\left(-\frac{\ln^2 T}{256} \right).$$

Таким образом, если $m_2 n_2 - m_1 n_1 > K$, то соответствующая часть суммы W_0 есть величина порядка

$$O\left(\exp\left(-0.01 \ln^2 T \right) \right). \tag{35}$$

Отметим, что при $YM \leqslant H \ln T$, все суммы W_0 также имеют порядок (35). Оценим оставшуюся часть суммы W_0, которую обозначим W_1:

$$W_1 = \sum_{M<m_1,m_2\leqslant M_2} \mu(m_1)\mu(m_2) W(m_1, m_2), \tag{36}$$

$$W(m_1, m_2) = \sum_{Y<n_1,n_2\leqslant Y_2} \sum_{\substack{m_1 n_1 < m_2 n_2 \leqslant m_1 n_1 + K \\ Y<n_2\leqslant Y_2}} \exp\left(-\left(\frac{H}{2} \ln \frac{m_2 n_2}{m_1 n_1} \right)^2 \right) \left(\frac{m_1 n_1}{m_2 n_2} \right)^{-iT}.$$

Обозначим через d наибольший общий делитель чисел m_1 и m_2. Тогда $m_1 = ad$, $m_2 = bd$, $(a,b) = 1$. Переменные суммирования представим так:

$$n_1 = bn_3 + n_3', \quad n_2 = an_4 + n_4'.$$

Причем n_3' и n_4' меняются в пределах $0 \leqslant n_3' < b$, $0 \leqslant n_4' < a$, а при заданных n_4', n_4' переменные n_3, n_4 меняются в пределах

$$\begin{aligned} Y_3 = (Y - n_3')b^{-1} < n_3 \leqslant (Y_2 - n_3')b^{-1} = Y_3', \\ (n_1 m_1 m_2^{-1} - n_4')a^{-1} < n_4 \leqslant (n_1 m_1 m_2^{-1} - n_4' + K m_2^{-1})a^{-1}, \\ Y_4 = (Y - n_4')a^{-1} < n_4 \leqslant (Y_2 - n_4')a^{-1} = Y_4'. \end{aligned}$$

Далее имеем:

$$\begin{aligned} (n_1 m_1 m_2^{-1} - n_4')a^{-1} &= ((bn_3 + n_3')ab^{-1} - n_4')a^{-1} = n_3 + n_3' b^{-1} - n_4' a^{-1} = \\ &= n_3 + \alpha - \beta, \qquad \alpha = n_3' b^{-1}, \qquad \beta = n_4' a^{-1}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$n_3 + \alpha - \beta < n_4 \leqslant n_3 + \alpha - \beta + K_1, \qquad K_1 = K(abd)^{-1}, \qquad Y_4 < n_4 \leqslant Y_4'.$$

Пользуясь введенными обозначениями, дробь $m_1 n_1 / m_2 n_2$ представим так:

$$\frac{m_1 n_1}{m_2 n_2} = \frac{a n_1}{b n_2} = \frac{abn_3 + an_3'}{abn_4 + bn_4'} = \frac{n_3 + \alpha}{n_4 + \beta}.$$

Сумма $W(m_1, m_2)$ будет теперь выглядеть следующим образом:

$$W(m_1, m_2) = \sum_{0 \leqslant n_3' < b} \sum_{0 \leqslant n_4' < a} W(n_3', n_4'), \tag{37}$$

$$W(n_3', n_4') = \sum_{Y_3 < n_3 \leqslant Y_3'} \sum_{\substack{n_3 + \alpha - \beta < n_4 \leqslant n_3 + \alpha - \beta + K_1 \\ Y_4 < n_4 \leqslant Y_4'}} \exp\left(-\left(\frac{H}{2} \ln \frac{n_4 + \beta}{n_3 + \alpha}\right)^2\right) \left(\frac{n_3 + \alpha}{n_4 + \beta}\right)^{-iT}.$$

Переменная суммирования n_4 принимает все значения натуральных чисел из полуинтервала

$$\max(Y_4,\ h_3 + \alpha - \beta) < n_4 \leqslant \min(Y_4',\ n_3 + \alpha - \beta + K_1).$$

Поэтому n_4 можно заменить величиной $n_3 + h$; $n_4 = n_3 + h$, где h принимает значения:

$$h_1 = \max(Y_4 - n_3,\ \alpha - \beta) < h \leqslant \min(Y_4' - n_3,\ \alpha - \beta + K_1) = h_2.$$

Таким образом

$$W_1(n_3', n_4') = \sum_{Y_3 < n_3 \leqslant Y_3'} \sum_{h_1 < h \leqslant h_2} E(n_3, h) \left(\frac{n_3 + \alpha}{n_3 + h + \beta}\right)^{-iT},$$

$$E(n_3, h) = \exp\left(-\left(\frac{H}{2} \ln \frac{n_3 + h + \beta}{n_3 + \alpha}\right)^2\right).$$

Меняя порядок суммирования, найдем:

$$W_1(n_3', n_4') \leqslant \sum_{\alpha - \beta < h \leqslant \alpha - \beta + K_1} \left| \sum_{N < n_3 \leqslant N_1} E(n_3, h) \left(\frac{n_3 + \alpha}{n_3 + h + \beta}\right)^{-iT} \right|,$$

где $N = \max(Y_3,\, Y_4 - h)$, $N_1 = \min(Y_3',\, Y_4' - h)$. Поступая аналогично как при оценке $W(n_3', n_4')$ пункта 3.1.5, найдем:

$$W_1(n_3', n_4') \ll \sum_{\alpha-\beta<h\leqslant\alpha-\beta+K_1} \left| \sum_{N<n_3\leqslant N_2} \left(\frac{n_3+\alpha}{n_3+h+\beta}\right)^{-iT} \right|,$$

где $N_2 \leqslant N_1$. Отметим, что для $W_1(n_3', n_4')$ выполняются следующие условия, которыми мы будем далее пользоваться:

$$h + \beta - \alpha = \frac{m_2 n_2 - m_1 n_1}{abd} \geqslant (ab)^{-1},$$
$$Y(ab)^{-0.5} \ll Ya^{-1} \ll Yb^{-1} \ll Yb^{-1} \ll Ya^{-1} \ll Y(ab)^{-0.5}, \qquad Y \leqslant T^{0.5}.$$

Для оценки внутренней суммы в $W_1(n_3', n_4')$ применим метод экспоненциальных пар (определение 3). Положим

$$f(u) = \frac{T}{2\pi} \ln \frac{u+h+\beta}{u+\alpha}, \qquad B = Y(ab)^{-0.5};$$
$$h_1 = N_2 - N \leqslant N, \qquad A = T(h+\beta-\alpha)abY^{-2} \geqslant 1.$$

Следовательно, для произвольной экспоненциальной пары (κ, λ) имеем:

$$W_1(n_3', n_4') \leqslant \sum_{\alpha-\beta<n\leqslant\alpha-\beta+K_1} A^\kappa B^\lambda \ll T^\kappa Y^{\lambda-2\kappa}(ab)^{\kappa-0.5\lambda} K_1^{k+1} \ll$$
$$\ll Y^{1+\lambda-\kappa} M^{\kappa+1} T^\kappa H^{-\kappa-1} (ab)^{-1-0.5\lambda} d^{-\kappa-1} \ln^{\kappa+1} T.$$

Тем самым из (37) с учетом $\lambda - \kappa - 1 < 0$, а затем из (36) для W_1 получаем:

$$W(m_1, m_2) \ll Y^{1+\lambda-\kappa} M^{\kappa+1} T^\kappa H^{-\kappa-1} (ab)^{-0.5\lambda} d^{-\kappa-1} \ln^{\kappa+1} T \ll$$
$$\ll Y^{1+\lambda-\kappa} M^{\kappa+1} T^\kappa H^{-\kappa-1} (m_1 m_2)^{-0.5\lambda} \ln^{\kappa+1} T,$$
$$W_1 \ll Y^{1+\lambda-\kappa} T^k H^{-\kappa-1} M^{3+\kappa-\lambda} \ln^{\kappa+1} T.$$

Так как $Y \leqslant T^{0.5}$, $x = T^{0.5\varepsilon}$ и $\kappa - \lambda \leqslant 0$, то

$$W_1 \ll YMT^{\frac{\kappa+\lambda}{2}+\varepsilon} H^{-\kappa-1} \ln^{k+1} T = YM \left(\frac{T^{\frac{\kappa+\lambda}{2(\kappa+1)}+\frac{\varepsilon}{\kappa+1}}}{H}\right)^{\kappa+1} \ln^{k+1} T.$$

Поэтому, если $H \geqslant T^{\frac{\kappa+\lambda}{2\kappa+2}+\varepsilon}$, то

$$W_1 \ll YM \ln^2 T.$$

Объединяя это с оценками W_0 и Σ_0, находим:

$$I_1 \ll HYM \ln^2 T.$$

Оценивая интеграл I_2 также как и I_1, получим:

$$I_2 \ll HYM \ln^3 T.$$

Отсюда и из (34), пользуясь соотношениями

$$Y \leqslant y = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad 1 \leqslant M \leqslant x = T^{0.5\varepsilon}, \qquad H = T^{\theta+\varepsilon} < T^{\frac{1}{2}},$$

последовательно найдем:

$$R \ll T^{1-2\alpha} Y^{2\alpha-2} M^{-2\alpha} \ln^7 T \left(I_1 + \sqrt{I_1 I_2}\right) \ll HT^{1-2\alpha} Y^{2\alpha-1} M^{1-2\alpha} \ln^{10} T \ll$$
$$\ll HT^{0,5(1-2\alpha)} \ln^{10} T \ll H^{2(1-\alpha)} \ln^{10} T.$$

Таким образом, случай, когда $S(\rho)$ имеет вид (11), рассмотрен полностью, и теорема 1 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Huxley M. N. On one difference between consecutive primes // Invent. Math. 1972. V. 15.P. 164 – 170.

2. Карацуба А. А. Распределение простых чисел // УМН. 1990. Т. 45. № 5(275). С. 81 – 140.

3. Гриценко С.А. О плотностной теореме // Математические заметки. 1992. Т. 51. № 6. С. 32 - 40.

4. Selberg A. On the zeros Riemann zeta function // Shr. Norske Vid. Akad. Oslo, 1942. V. 10. P. 1 – 59

5. Карацуба А. А. О нулях функции $\zeta(s)$ на коротких промежутках критической прямой // Известия АН СССР. Серия математическая. 1984. Т. 48. № 3. С 569 – 584.

6. Карацуба А. А. О нулях функции $\zeta(s)$ в окресности критической прямой // Известия АН СССР. Серия математическая 1985. Т. 49. № 2. С. 326 - 333.

7. Карацуба А. А. Дзета-функция Римана и ее нули // УМН. 1985. Т. 40. В. 5(245). С. 19 –70.

8. Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета–функция Римана // М.: Физматлит. 1994. 376 с.

9. Карацуба А. А. О нулях функции Дэвенпорта–Хейльбронна, лежащих на критической прямой // Известия АН СССР. Серия математическая. 1990. Т 54. № 2. С. 303 – 315.

10. Карацуба А. А. О нулях арифметических рядов Дирихле, не имеющих эйлерова произведения // Известия РАН. Серия математическая. 1993. Т 57, № 5. С. 3 – 14.

11. Карацуба А. А. Новый подход к проблеме нулей некоторых рядов Дирихле // Труды МИАН. 1994. Т. 207. С. 180 – 196.

12. Рахмонов З.Х. Нули дзета-функции Римана в коротких промежутках критической прямой // Чебышевский сборник. 2006. Т. 7. В. 1. С. 263 – 279.

13. Неъматова Г. Д, Хасанов З. Н. О нулях дзета–функции Римана в окрестности критической прямой // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. Т. 44, № 3 – 4. С. 4 – 7.

14. Рахмонов З. Х., Аминов А. С. О нулях нечетного порядка функции Дэвенпорта-Хейльбронна в коротких промежутках критичекой прямой // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2019. Т. 62, № 3-4. С. 133 – 138.

15. Рахмонов З. Х., Аминов А. С. О нулях нечетного порядка функции Дэвенпорта-Хейлбронна в коротких промежутках критической прямой // Современные проблемы математики и механики. Материалы международной конференции, посвященной 80-летию академика РАН В.А.Садовничего. 2019. Издательство «МАКС Пресс». ISBN: 978-5-317-06116-6. С. 522 – 525.

16. Рахмонов З. Х., Хайруллоев Ш. А., Аминов А. С. Нули функции Дэвенпорта-Хейлбронна в коротких промежутках критической прямой // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, В. 4. С. 271 – 293.

17. Heath Brown D.R. The fourth power moment of the Riemann zeta function // Proceedings of the London Mathematical Society. 1979. V. s3-38. Is. 3. P. 385 – 422,

18. Zhan Tao. On the mean square of Dirichlet L-functions // Acta Mathematica Sinica June. 1992. V. 8. Is. 2.P. 204 – 224

19. Рахмонов З.Х. Оценка плотности нулей дзета функции Римана // УМН. 1994. Т. 49. Вып. 1. С. 161 – 162.

20. Bourgain J., Watt N. Decoupling for perturbed cones and mean square of // arXiv:1505.04161v1 [math.NT]. 15 May 2015.

21. Рахмонов З. Х., Хайруллоев Ш. А. Расстояние между соседними нулями дзета-функции Римана, лежащими на критической прямой // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2006. Т. 49. № 5. С. 393 – 400.

22. Рахмонов З. Х., Хайруллоев Ш. А. Соседние нули дзета-функции Римана, лежащие на критической прямой // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2009. Т. 52, № 1. С. 5 – 15.

23. Рахмонов З. Х., Хайруллоев Ш. А. О нулях дзета-функции Римана на критической прямой // Вестник Таджикского национального университета. Спецвыпуск посвящён году образования и технических знаний. 2010. С. 35 – 41.

24. Марджанашвили К.К. Оценка одной арифметической суммы // Доклды АН СССР. 1939. Т. 22, № 22. С. 391 - 393.

25. Виноградов И. М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел // Москва, Наука, 1971.

26. Архипов Г.И., Карацуба А.А., Чубариков В.Н. Теория кратных тригонометрических сумм // М.: Наука. 1987 г. 368 с.

27. Graham S. W., Kolesnik G. Van der Corput's method of exponential sums // London Mathematical Society Lecture Note Series 126, Cambridge University Press, Cambridge, 1991. vi+120 pp.

28. Карацуба А. А. Основы аналитической теории чисел — М.:, Наука, 1983.

REFERENCES

1. Huxley, M. N. 1972, "On the differences between consecutive primes", *Inventiones mathematicae*, vol. 15, pp. 164 – 170.

2. Karatsuba, A. A. 1990, "The distribution of prime numbers", *Russian Math. Surveys*, vol. 45, Is. 5, pp. 99 – 171.

3. Gritsenko, S. A. 1992, "On a density theorem", *Math. Notes,*, vol. 51, Is. 6, pp. 553 – 558.

4. Selberg, A. 1942, "On the zeros Riemann zeta function", *Shr. Norske Vid. Akad. Oslo*, vol. 10, pp. 1 – 59.

5. Karatsuba, A. A. 1984, "On the zeros of the function $\zeta(s)$ On short intervals of the critical line", *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, vol. 24, Is. 3, pp. 523 – 537.

6. Karatsuba, A. A. 1986, "On the zeros of the function $\zeta(s)$ in the neighborhood of the critical line", *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, vol. 26, Is. 2, pp. 307 – 313.

7. Karatsuba, A. A. 1985, A. A. Karatsuba, “The Riemann zeta function and its zeros”, *Russian Math. Surveys*, vol. 40, Is. 5, pp. 23 – 82.

8. Voronin, S. M., & Karatsuba, A. A. 1994, *The Riemann zeta function*, Fiziko-Matematicheskaya Literatura, Moscow, 376 p. ISBN: 5-02-014120-8.

9. Karatsuba, A. A. 1990, “On the zeros of the Davenport–Heilbronn function lying on the critical line”, *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, vol. 36, Is. 2, pp. 311 – 324.

10. Karatsuba, A. A. 1994, “On the zeros of arithmetic Dirichlet series without Euler product”, *Russian Acad. Sci. Izv. Math.*, vol. 43, Is. 2, pp. 193–203.

11. Karatsuba, A. A. 1995, “A new approach to the problem of the zeros of some Dirichlet series”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 207, pp. 163–177.

12. Rakhmonov, Z. Kh. 2006, “Zeros of the Riemann zeta function in short intervals of the critical line”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 7, Is. 1(17), pp. 263-269.

13. Nematova, G. D, & Khasanov, Z. N. 2001, “On the zeros of the Davenport–Heilbronn function lying on the critical line”, *Doklady Akademii nauk Respubliki Tajikistan*, vol. 44, no. 3-4, pp. 4 – 7.

14. Rakhmonov, Z. Kh., & Aminov, A. S. 2019, “On the zeros of an odd order of the Davenport-Heilbron function in short intervals of the critical line”, *Doklady Akademii nauk Respubliki Tajikistan*, vol. 62, no. 3-4, pp. 133 – 138.

15. Rakhmonov, Z. Kh., & Aminov, A. S. 2019, “On the zeros of an odd order of the Davenport-Heilbron function in short intervals of the critical line”, *Modern Problems of Mathematics and Mechanics. Proceedings of the International Conference Dedicated to the 80th Anniversary of Academician of the Russian Academy of Sciences V.A. Sadovnichy*, Publishing House "MAX Press". ISBN: 978-5-317-06116-6, pp. 522 – 525.

16. Rakhmonov, Z.Kh., & Khayrulloev, Sh. A., & Aminov, A. S. 2019, “Zeros of the Davenport–Heilbronn function in short intervals of the critical line”, *Chebyshevskii Sb.*, vol. 20, Is. 4, pp. 306 – 329.

17. Heath Brown D.R. 1979, “The fourth power moment of the Riemann zeta function”, *Proceedings of the London Mathematical Society*, vol. s3-38, Is. 3, pp. 385 – 422.

18. Zhan Tao, 1992, “On the mean square of Dirichlet L-functions”, *Acta Mathematica Sinica*, vol. 8, Is. 2, pp. 204 – 224.

19. Rakhmonov, Z. Kh. 1994, “Estimate of the density of the zeros of the Riemann zeta function”, *Russian Math. Surveys*, vol. 49, is. 2, pp. 168 – 169.

20. Bourgain, J., & Watt, N. 2015, “Decoupling for perturbed cones and mean square of $\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)$”, *arXiv:* 1505.04161v1 [math.NT]. 15 May 2015.

21. Rakhmonov, Z. Kh. & Khayrulloev, Sh. A. 2006, “Distance between the next zeros of Riemann's zeta-function in the critical line”, *Doklady Akademii nauk Respubliki Tajikistan*, vol. 49, no. 5, pp. 393 – 400.

22. Rakhmonov, Z. Kh. & Khayrulloev, Sh. A. 2009, “The neibour zero of the Riemann's zeta-function laying on a critical line”, *Doklady Akademii nauk Respubliki Tajikistan*, vol. 52, no. 5, pp. 331 – 337.

23. Rakhmonov, Z. Kh. & Khayrulloev, Sh. A. 2010, “On the zeros of the Riemann zeta function on the critical line”, *The Bulletin of the Tajik National University*, Special issue dedicated to the year of education and technical knowledge, pp. 35 – 41.

24. Mardjhanashvili, K. K. 1939, “An estimate for an arithmetic sum”, *Doklady Akad. Nauk SSSR*, vol. 22, no 7, pp. 391 – 393.

25. Vinogradov, I. M. 1971, *The method of trigonometric sums in the theory of numbers*, Izdat. “Nauka”, Moscow, 1971. 159 pp.

26. Arkhipov, G. I. & Chubarikov, V. N. & Karatsuba, A. A. 2004. *Trigonometric sums in number theory and analysis*, Berlin–New-York: Walter de Gruyter, 554 p.

27. Graham, S. W., & Kolesnik, G. 1991, *Van der Corput's method of exponential sums*, London Mathematical Society Lecture Note Series 126, Cambridge University Press, Cambridge, 1991. vi+120 pp.

28. Karatsuba A. A. 1993, *Basic analytic number theory*, Springer-Verlag, Berlin, xiv+222 pp.

Получено: 09.10.2025
Принято в печать: 08.12.2025

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 26. Выпуск 5.

УДК: 511. 344 DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-5-184-202

Обобщённая проблема Эстермана для нецелых степеней с почти пропорциональными слагаемыми

Ф. З. Рахмонов, П. З. Рахмонов

Рахмонов Фируз Заруллоевич — кандидат физико-математических наук, Институт математики им. А. Джураева НАН Таджикистана (г. Душанбе, Таджикистан).
e-mail: rakhmonov.firuz@gmail.com
Рахмонов Парвиз Заруллоевич — кандидат физико-математических наук, Marex Group Plc (г. Лондон, Великобритания).
e-mail: parviz.msu@gmail.com

Светлой памяти Геннадия Ивановича Архипова.
Настоящая работа посвящается 80-летию со дня рождения Геннадия Ивановича Архипова — выдающегося учёного и чуткого человека. Геннадий Иванович внёс существенный вклад в развитие аналитической теории чисел и жил по простому, но глубокому принципу: «Если можешь помочь — помоги». Он всегда был готов поддержать друзей, коллег и учеников и никогда не оставлял просьбы без внимания. Его широчайшая эрудиция и энциклопедический склад ума позволяли ему добиваться успехов во всём, за что бы он ни брался. Светлая память о нём будет жить в его работах и в сердцах тех, кто имел счастье его знать.

Аннотация

При $H \geqslant N^{1-\frac{1}{2c}}(\ln N)^2$, где $\mathscr{L} = \ln N$, а c — нецелое фиксированное число, удовлетворяющее условиям

$$\|c\| \geqslant 3c\left(2^{[c]+1}-1\right)\frac{\ln\mathscr{L}}{\mathscr{L}}, \qquad c > \frac{4}{3}\left(1+\frac{52\ln\mathscr{L}}{\mathscr{L}}\right),$$

получена асимптотическая формула для количества представлений достаточно большого натурального числа N в виде

$$p_1 + p_2 + [n^c] = N,$$

где p_1, p_2 — простые числа, n — натуральное число,

$$|p_k - \mu_k N| \leqslant H, \qquad k = 1, 2, \qquad |[n^c] - \mu_3 N| \leqslant H,$$

μ_1, μ_2, μ_3 — положительные фиксированные числа, причём $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1$.

Ключевые слова: проблема Эстермана, почти пропорциональные слагаемые, короткая тригонометрическая сумма с нецелой степенью натурального числа.

Библиография: 21 название.

Для цитирования:

Рахмонов Ф. З., Рахмонов П. З. Обобщённая проблема Эстермана для нецелых степеней с почти пропорциональными слагаемыми // Чебышёвский сборник, 2025, т. 26, вып. 5, с. 184–202.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 26. No. 5.

UDC: 511. 344 DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-5-184-202

Generalized Estermann problem for non-integer powers with almost proportional summands

F. Z. Rakhmonov, P. Z. Rakhmonov

Rakhmonov Firuz Zarulloevich — candidate of physical and mathematical sciences, A. Juraev Institute of Mathematics of the NAS of Tajikistan (Dushanbe, Tajikistan).
e-mail: rakhmonov.firuz@gmail.com
Rakhmonov Parviz Zarulloevich — candidate of physical and mathematical sciences, Marex Group Plc (London, United Kingdom).
e-mail: parviz.msu@gmail.com

Abstract

For $H \geqslant N^{1-\frac{1}{2c}}(\ln N)^2$, where $\mathscr{L} = \ln N$ and c is a fixed non-integer number satisfying

$$\|c\| \geqslant 3c\left(2^{[c]+1}-1\right)\frac{\ln \mathscr{L}}{\mathscr{L}}, \qquad c > \frac{4}{3}\left(1+\frac{52\ln \mathscr{L}}{\mathscr{L}}\right),$$

we obtain an asymptotic formula for the number of representations of a sufficiently large integer N in the form

$$p_1 + p_2 + [n^c] = N,$$

where p_1, p_2 are prime numbers, n is a natural number, and

$$|p_k - \mu_k N| \leqslant H, \qquad k = 1, 2, \qquad |[n^c] - \mu_3 N| \leqslant H,$$

with μ_1, μ_2, μ_3 being fixed positive constants satisfying $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1$.

Keywords: Estermann problem, almost proportional summands, short exponential sum with a non-integer power of a natural number.

Bibliography: 21 titles.

For citation:
Rakhmonov, F. Z., Rakhmonov, P. Z. 2025, “Generalized Estermann problem for non-integer powers with almost proportional summands” , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 5, pp. 184–202.

1. Введение

Эстерман [1] при $n = 2$ доказал асимптотическую формулу для числа решений уравнения

$$p_1 + p_2 + m^n = N, \tag{1}$$

где p_1, p_2 — простые числа, m — натуральное число. В работах [2, 3, 4] при $n = 2, 3, 4$ эта задача исследована при более жёстких условиях, а именно, когда слагаемые почти равны. То есть получена асимптотическая формула для числа решений диофантова уравнения (1) с условиями

$$\left|p_i - \frac{N}{3}\right| \leqslant H, \quad i = 1, 2, \qquad \left|m^n - \frac{N}{3}\right| \leqslant H, \qquad H \geqslant N^{1-\theta(n)}\mathscr{L}^{c_n},$$

соответственно при

$$\theta(2) = \frac{1}{4}, \quad c_2 = 2; \qquad \theta(3) = \frac{1}{6}, \quad c_3 = 3; \qquad \theta(4) = \frac{1}{12}, \quad c_4 = \frac{40}{3}. \tag{2}$$

В работе [5] при произвольном фиксированном $n \geqslant 3$, опираясь на новые оценки коротких тригонометрических сумм Г. Вейля [6, 7, 8, 9, 10], исследована проблема Эстермана с почти пропорциональными слагаемыми и получена асимптотическая формула для числа решений уравнения (1) с условиями

$$|p_k - \mu_k N| \leqslant H, \qquad k = 1, 2, \qquad |m^n - \mu_3 N| \leqslant H, \qquad H \geqslant N^{1-\frac{1}{n(n-1)}} \mathscr{L}^{\frac{2^{n+1}}{n-1}+n-1}. \tag{3}$$

Заметим, что полученная асимптотическая формула при $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \frac{1}{3}$ превращается в асимптотическую формулу для обобщённой проблемы Эстермана с почти равными слагаемыми, а результаты [3, 4], приведённые в (2), являются частными случаями (3).

В. Н. Чубариков поставил следующую задачу: *для фиксированных нецелых значений c исследовать короткие тригонометрические суммы вида*

$$S_c(\alpha; x, y) = \sum_{x-y<n\leqslant x} e\bigl(\alpha[n^c]\bigr),$$

а также уравнение (1), в котором слагаемое m^n заменяется на $[m^c]$, причём рассматривается случай почти равных слагаемых.

Первая часть этой задачи была решена в работах [11, 12, 13]. Для сумм $S_c(\alpha; x, y)$ получена оценка, равномерная по c, для всех $\alpha \in [-0.5, 0.5]$, за исключением малой окрестности нуля, а также получена асимптотическая формула с остаточным членом, равномерная по c при α из малой окрестности нуля. Эти результаты позволили доказать асимптотическую формулу в обобщённой тернарной проблеме Эстермана для нецелых степеней с почти равными слагаемыми [14, 15, 16], то есть при $H \geqslant N^{1-\frac{1}{2c}} \mathscr{L}^2$ найдена асимптотическая формула для числа решений уравнения

$$p_1 + p_2 + [n^c] = N, \qquad \left| p_i - \frac{N}{3} \right| \leqslant H, \ i = 1, 2, \qquad \left| [n^c] - \frac{N}{3} \right| \leqslant H,$$

в простых числах p_1, p_2 и натуральном n, где c — фиксированное нецелое число, удовлетворяющее условиям

$$\|c\| \geqslant 3c\bigl(2^{[c]+1} - 1\bigr) \frac{\ln \mathscr{L}}{\mathscr{L}}, \qquad c > \frac{4}{3} + \mathscr{L}^{-0.3}.$$

В настоящей работе для произвольного фиксированного нецелого c, удовлетворяющего условию (4), доказана теорема об асимптотической формуле в обобщённой проблеме Эстермана с почти пропорциональными слагаемыми. Полученный результат представляет собой обобщение и уточнение основной теоремы из работы [14].

Теорема 1. *Пусть N — достаточно большое натуральное число, $\mathscr{L} = \ln N$, μ_1, μ_2, μ_3 — положительные фиксированные числа, удовлетворяющие $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1$, а c — фиксированное нецелое число, удовлетворяющее условиям*

$$\|c\| \geqslant 3c\bigl(2^{[c]+1} - 1\bigr) \frac{\ln \mathscr{L}}{\mathscr{L}}, \qquad c > \frac{4}{3} \left(1 + \frac{52 \ln \mathscr{L}}{\mathscr{L}} \right). \tag{4}$$

Пусть $J_c(N, H)$ обозначает число решений диофантова уравнения

$$p_1 + p_2 + [n^c] = N$$

в простых числах p_1, p_2 и натуральном n при условиях

$$|p_k - \mu_k N| \leqslant H, \quad k = 1, 2, \qquad |[n^c] - \mu_3 N| \leqslant H.$$

Тогда при $H \geqslant N^{1-\frac{1}{2c}}\mathscr{L}^2$ справедлива асимптотическая формула

$$J_c(N, H) = \frac{3H^2}{c(\mu_3 N)^{1-\frac{1}{c}}\mathscr{L}^2} + O\left(\frac{H^2}{N^{1-\frac{1}{c}}\mathscr{L}^3}\right),$$

где постоянная под знаком O зависит от μ_1, μ_2, μ_3 и c.

2. Вспомагательные леммы

Лемма 1. [17]. *Пусть $2 \leqslant T_0 \leqslant x$, $\rho = \beta + i\gamma$ — нетривиальные нули дзета-функции. Тогда*

$$\psi(x) = x - \sum_{|\gamma| \leqslant T_0} \frac{x^\rho}{\rho} + R_1(x, T_0), \qquad R_1(x, T_0,) \ll \frac{x\mathscr{L}_x^2}{T_0}.$$

Лемма 2. [17]. *Существует абсолютная постоянная $c > 0$ такая, что $\zeta(s) \neq 0$, в области*

$$\sigma \geqslant 1 - \delta(t), \quad \delta(t) = \frac{c}{\ln^{\frac{2}{3}}(2t+2)\ln\ln(2t+2)},$$

Лемма 3. [18]. *Пусть ε сколь угодна малая положительная постоянная, и $T^{\frac{35}{108}+\varepsilon} \leqslant$ $\leqslant H \leqslant T$, тогда справедливы оценки*

$$N(u, T+H) - N(u, T) \ll \begin{cases} (qH)^{\frac{4}{3-2u}(1-u)}(\ln qH)^9, & \text{для } \dfrac{1}{2} \leqslant u \leqslant \dfrac{3}{4}, \\ (qH)^{\frac{2}{u}(1-u)+\varepsilon}, & \text{для } \dfrac{3}{4} \leqslant u \leqslant 1, \end{cases}$$

Лемма 4. [19]. *Пусть $y \geqslant x^{0.534}$, тогда справедлива оценка*

$$\frac{y}{\ln x} \ll \pi(x) - \pi(x-y) \ll \frac{y}{\ln x}.$$

Лемма 5. [13]. *Пусть $x \geqslant x_0 > 0$, $\mathscr{L}_x = \ln x$, A – фиксированное положительное число больше единицы, c – нецелое число с условиями*

$$1 < c \leqslant \log_2 \mathscr{L}_x - \log_2 \ln \mathscr{L}_x^{6A}, \qquad \|c\| \geqslant \left(2^{[c]+1} - 1\right)(A+1)\mathscr{L}_x^{-1}\ln \mathscr{L}_x. \tag{5}$$

Тогда при $y \geqslant \sqrt{2cx}\,\mathscr{L}_x^{A+\theta}$ и $x^{1-c}y^{-1}\mathscr{L}_x^A \leqslant |\alpha| \leqslant 0,5$ справедлива оценка

$$S_c(\alpha; x, y) \ll y\mathscr{L}_x^{-A},$$

где $\theta = 0$ при $c \geqslant 1,1$ и $\theta = 0,5$ при $c < 1,1$.

Лемма 6. [13]. *Пусть $x \geqslant x_0 > 0$, A – фиксированное положительное число больше единицы, c – нецелое число, удовлетворяющее условиям (5). Тогда при $y \geqslant \sqrt{2c}x^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}_x^A$ и $|\alpha| \leqslant x^{1-c}y^{-1}\mathscr{L}_x^A$ справедлива асимптотическая формула*

$$S_c(\alpha; x, y) = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi\alpha}\int_{x-y}^{x} e(\alpha(t^c - 0,5))dt + O\left(\frac{y|\sin \pi\alpha|}{\mathscr{L}_x^A}\right).$$

Лемма 7. [5] *Пусть μ_k — фиксированное действительное число, $0<\mu_k<1$, N — достаточно большое натуральное число, $N_k=\mu_k N+H$, $k=1,\ 2$, $N^{\frac12}\leqslant H\leqslant N^{1-\frac{1}{30}}$,*

$$\mathcal{S}(\alpha;N_k,2H)=\sum_{N_k-2H<p\leqslant N_k}e(\alpha p),\qquad S_1(\alpha;x,y)=\sum_{x-y<n\leqslant x}\Lambda(n)e(\alpha n).$$

Тогда имеет место соотношение

$$\mathcal{S}(\alpha;N_k,2H)=\frac{S_1(\alpha;N_k,2H)}{\ln(\mu_k N)}+O\left(\frac{H^2}{N\ln(\mu_k N)}\right).$$

Лемма 8. *Пусть $x\geqslant x_0$, A — произвольное положительное фиксированное положительное число, $y\geqslant x^{\frac58}\mathscr{L}_x^{1.5A+15}$ и $|\alpha|\leqslant x(2\pi y^2)^{-1}$. Тогда справедлива асимптотическая формула:*

$$S_1(\alpha;x,y)=\sum_{x-y<n\leq x}\Lambda(n)e(\alpha n)=\frac{\sin\pi\alpha y}{\pi\alpha}e\left(\alpha\left(x-\frac{y}{2}\right)\right)+O\left(\frac{y}{\mathscr{L}_x^A}\right).$$

Доказательство. Не ограничивая общности, будем считать, что

$$y=x^{\frac58}\mathscr{L}_x^{1.5A+15}. \tag{6}$$

Применяя преобразование Абеля в интегральной форме, имеем:

$$S_1(\alpha;x,y)=-\int_{x-y}^{x}\psi(u)de(\alpha u)+e(\alpha x)\psi(x)-e(\alpha(x-y))\psi(x-y).$$

Пользуясь представлением функции Чебышёва в виде суммы по нулям дзета-функции (лемма 1) при $T_0=\left(xy^{-1}+|\alpha|x\right)\mathscr{L}_x^{A+2}$, найдем:

$$\begin{aligned}S_1(\alpha;x,y)=&-\int_{x-y}^{x}\left(u-\sum_{|\gamma|\leqslant T_0}\frac{u^\rho}{\rho}\right)de(\alpha u)+e(\alpha x)\left(x-\sum_{|\gamma|\leqslant T_0}\frac{x^\rho}{\rho}\right)-\\&-e(\alpha(x-y))\left((x-y)-\sum_{|\gamma|\leqslant T_0}\frac{(x-y)^\rho}{\rho}\right)-\\&-\int_{x-y}^{x}R(u,T_0)2\pi i\alpha e(\alpha u)du+e(\lambda x)R(x,T_0)-e(\alpha(x-y))R(x-y,T_0).\end{aligned}$$

Применяя к первому интегралу формулу интегрирования по частям, а также пользуясь оценкой для $R(u,T_0)$ из леммы 1 и значением параметра T_0, найдём

$$\begin{aligned}S_1(\alpha;x,y)&=\int_{x-y}^{x}e(\lambda u)du-\sum_{|\gamma|\leqslant T_0}\int_{x-y}^{x}u^{\rho-1}e(\lambda u)du+O\left(\frac{y}{q^{\frac12}\mathscr{L}_x^A}\right)=\\&=\frac{\sin\pi\lambda y}{\pi\lambda}e\left(\lambda\left(x-\frac{y}{2}\right)\right)-W(\alpha,x,y)+O\left(\frac{y}{\mathscr{L}_x^A}\right),\end{aligned} \tag{7}$$

где

$$W(\alpha,x,y)=\sum_{|\gamma|\leqslant T_0}I(\rho),\qquad I(\rho)=\int_{x-y}^{x}u^{\beta-1}e\left(\alpha u+\frac{\gamma}{2\pi}\ln u\right)du.$$

Сумму $W(\alpha,x,y)$ будем оценивать только в случае $\alpha \geqslant 0$. При $\alpha \leqslant 0$, воспользовавшись соотношением

$$\begin{aligned}\overline{W(\alpha,x,y)} &= \sum_{|\gamma|\leqslant T_0}\int_{x-y}^{x} u^{\beta-1}e\left(-\alpha u-\frac{\gamma}{2\pi}\ln u\right)du = \\ &= \sum_{|\overline{\gamma}|\leqslant T_0}\int_{x-y}^{x} u^{\rho-1}u^{\beta-1}e\left(-\alpha u+\frac{\gamma}{2\pi}\ln u\right)du = W(-\alpha,x,y),\end{aligned}$$

сведем ее оценку к случаю $\alpha \geqslant 0$. Оценивая интеграл $I(\rho)$ тривиально, а также по величине производной первого порядка (см. [20], стр. 359), найдем:

$$|I(\rho)| \ll x^{\beta}\min_{x-y\leqslant u\leqslant x}\left(\frac{y}{x},\frac{1}{\min|\gamma+2\pi\alpha u|}\right). \tag{8}$$

Все нули $\rho=\beta+i\gamma$ с условием $|\gamma|\leqslant T_0$ разобьем на множества D_1, D_2 и D_3 следующим образом:

$$\begin{aligned}D_1 &= \left\{\rho: -T_0+2\pi\alpha u \leqslant \gamma+2\pi\alpha u < -2\pi\alpha x+2\pi\alpha u-\frac{x}{y}\right\},\\ D_2 &= \left\{\rho: -2\pi\alpha x+2\pi\alpha u-\frac{x}{y} \leqslant \gamma+2\pi\alpha u \leqslant 2\pi\alpha u-2\pi\alpha(x-y)+\frac{x}{y}\right\},\\ D_3 &= \left\{\rho:\ 2\pi\alpha u-2\pi\alpha(x-y)+\frac{x}{y} < \gamma+2\pi\alpha u \leqslant T_0+2\pi\alpha u\right\}.\end{aligned}$$

Обозначая через W_1, W_2 и W_3 соответственно суммы модулей интеграла $I(\rho)$ по нулям принадлежащим множествам D_1, D_2 и D_3, имеем:

$$|W(\alpha,x,y)| \leqslant \sum_{|\gamma|\leqslant T_0}|I(\rho)| = W_1+W_2+W_3. \tag{9}$$

В отрезке $x-y \leq u \leqslant x$ функция $2\pi\alpha u$ монотонно возрастает, поэтому для правой границы D_1 и левой границы D_3 соответственно имеем

$$-2\pi\alpha x+2\pi\alpha u-\frac{x}{y} \leqslant -\frac{x}{y}, \quad 2\pi\alpha u-2\pi\alpha(x-y)+\frac{x}{y} \geqslant \frac{x}{y}.$$

Следовательно, если ρ принадлежит соответственно D_1, D_2 или D_3, то соответственно

$$\gamma+2\pi\alpha u < -\frac{x}{y}, \qquad -\frac{x}{y} \leqslant \gamma+2\pi\alpha u \leqslant \frac{x}{y}, \qquad \gamma+2\pi\alpha u > \frac{x}{y}.$$

Поэтому для монотонной возрастающей функции $\gamma+2\pi\alpha u$ на отрезке $x-y\leqslant u\leqslant x$ справедливы следующие соотношения

$$\begin{aligned}\min_{x-y\leqslant u\leqslant x}|\gamma+2\pi\alpha u| = -\max_{x-y\leqslant u\leqslant x}(\gamma+2\pi\alpha u) = -\gamma-2\pi\alpha x \geqslant \frac{x}{y}, &\quad \text{если} \quad \rho\in D_1,\\ -\frac{x}{y}-2\pi\alpha y \leqslant \gamma+2\pi\alpha u \leqslant \frac{x}{y}+2\pi\alpha y, &\quad \text{если} \quad \rho\in D_2,\\ \min_{x-y\leqslant u\leqslant x}|\gamma+2\pi\alpha u| = \min_{x-y\leqslant u\leqslant x}(\gamma+2\pi\alpha u) = \gamma+2\pi\alpha(x-y) \geqslant \frac{x}{y}, &\quad \text{если} \quad \rho\in D_3.\end{aligned}$$

Отсюда, с учетом оценки (8) для W_1, W_2, и W_3, находим

$$W_1 \ll \sum_{\rho\in D_1}\frac{x^{\beta}}{-\gamma-2\pi\alpha x}, \qquad W_2 \ll \sum_{\rho\in D_2} yx^{\beta-1}, \qquad W_3 \ll \sum_{\rho\in D_3}\frac{x^{\beta}}{\gamma+2\pi\alpha(x-y)}.$$

Суммы W_1 и W_3 оцениваются одинаково. Оценим W_1. Все нули в множестве

$$D_1 = \left\{\rho:\ \frac{x}{y} < -\gamma - 2\pi\alpha x \leqslant T_0 - 2\pi\alpha x\right\},$$

разобьем на классы $D_{11}, \ldots, D_{1r}$, $r \ll \ln T_0 \ll \ln x$ следующим образом: в класс D_{1n} отнесем те нули ρ, для которых выполняется условия:

$$\frac{nx}{y} < -\gamma - 2\pi\alpha x \leqslant \frac{(n+1)x}{y}.$$

Поэтому

$$W_1 \ll \sum_{n=1}^{r} \sum_{\rho\in D_{1n}} \frac{x^\beta}{-\gamma - 2\pi\lambda x} \leqslant \frac{y}{x}\sum_{n=1}^{r} \sum_{\rho\in D_{1n}} \frac{x^\beta}{n} \leqslant \frac{y\mathscr{L}_x}{x} \max_{1\leqslant n\leqslant r} \sum_{\rho\in D_{1n}} x^\beta \leqslant \frac{y\mathscr{L}_x}{x} \max_{|T|\leqslant T_0} \sum_{T-\frac{x}{y}<\gamma\leqslant T} x^\beta.$$

Оценим W_2. Представляя множество D_2 в виде

$$D_2 = \left\{\rho:\ T_1 - 2\pi\alpha y - \frac{2x}{y} \leqslant -\gamma \leqslant T_1\right\}, \qquad T_1 = 2\pi\alpha x + \frac{x}{y} \leqslant T_0,$$

и имея в виду, что при $\alpha \leqslant x\left(2\pi y^2\right)^{-1}$ для длины множества D_2 выполняется неравенство

$$2\pi\lambda y + \frac{2x}{y} \leqslant \frac{3x}{y},$$

а также пользуясь тривиальной оценкой интеграла $I(\rho,\lambda)$, то есть первой оценкой (8), имеем

$$W_2 \leqslant \sum_{\rho\in D_2} |I(\rho)| \ll \frac{y}{x}\sum_{\rho\in D_2} x^\beta \leqslant \frac{3y}{x} \max_{|T|\leqslant T_0} \sum_{T-\frac{x}{y}\leqslant-\gamma\leqslant T} x^\beta \ll \frac{y}{x} \max_{|T|\leqslant T_0} \sum_{T-\frac{x}{y}\leqslant\gamma\leqslant T} x^\beta.$$

Подставляя в (9) полученные оценки для W_1, W_2 и W_3, имеем:

$$W(\alpha,x,y) \ll \frac{y\mathscr{L}_x}{x} \max_{|T|\leqslant T_0} \mathcal{V}, \qquad \mathcal{V} = \sum_{T-\frac{x}{y}\leqslant\gamma\leqslant T} x^\beta. \tag{10}$$

Оценку суммы $\mathcal{V}$ сведём к оценке количества нулей дзета-функции Римана в узких прямоугольниках критической полосы. Имеем

$$\mathcal{V} = \sum_{T-xy^{-1}<\gamma\leqslant T} \left(\int_0^\beta x^u du + 1\right) = \mathscr{L}_x \int_0^1 x^u \sum_{\substack{T-xy^{-1}<\gamma\leqslant T\\ \beta\geqslant u}} du + \sum_{T-xy^{-1}<\gamma\leqslant T} 1$$
$$= \mathscr{L}_x \int_0^1 x^u \left(N(u,T) - N(u,T-xy^{-1})\right) du + \left(N(T) - N(T-xy^{-1})\right).$$

Отсюда, принимая во внимание, что нетривиальные нули $\rho = \beta + i\gamma$ расположены симметрично относительно критической прямой $\sigma = 0.5$, получаем

$$\mathcal{V} \leqslant \mathscr{L}_x \int_{0,5}^1 x^u \left(N(u,T) - N(u,T-xy^{-1})\right) du + \left(\frac{\sqrt{x}\mathscr{L}_x}{2} + 1\right)\left(N(T) - N(T-xy^{-1})\right) \leqslant$$
$$\leqslant \mathscr{L}_x \max_{u\geqslant 0,5} x^u \left(N(u,T) - N(u,T-xy^{-1},\chi)\right) + \left(\frac{\sqrt{x}\mathscr{L}_x}{2} + 1\right)\left(N(T) - N(T-xy^{-1})\right) \leqslant$$
$$\leqslant 2\mathscr{L}_x \max_{u\geqslant 0,5} x^u \left(N(u,T) - N(u,T-xy^{-1})\right).$$

Согласно лемме 2 функция $\zeta(\sigma+it)$ не имеет нулей в области

$$\sigma\geqslant 1-\delta(t),\qquad \delta(t)=\frac{c}{\ln^{\frac{2}{3}}(2t+2)\ln\ln(2t+2)}.$$

Следовательно, учитывая, что $\delta(T)\geqslant\delta(T_0)$, получаем

$$\mathcal{V}\leqslant 2\mathscr{L}_x\max_{0{,}5\leqslant u\leqslant 1-\delta}x^u\left(N(u,T)-N(u,T-xy^{-1})\right),\qquad \delta=\delta(T_0).$$

Подставляя правую часть этого неравенства в (10), найдём

$$|W(\alpha;x,y)|\ll\frac{y\mathscr{L}_x}{x}\max_{|T|\leqslant T_0}\max_{0{,}5\leqslant u\leqslant 1-\delta}x^u\left(N(u,T)-N\left(u,T-\frac{x}{y},\chi\right)\right).\tag{11}$$

Из соотношения $|T|\leqslant T_0=\left(xy^{-1}+|\alpha|x\right)\mathscr{L}_x^{A+2}$, $0\leqslant\alpha\leqslant x\left(2\pi y^2\right)^{-1}$ и условия (6), имеем

$$\frac{T}{(xy^{-1})^3}\leqslant\left(\frac{y^2}{x^2}+\alpha\frac{y^3}{x^2}\right)\mathscr{L}_x^{A+2}\leqslant\left(\frac{y^2}{x^2}+\frac{y}{2\pi x}\right)\mathscr{L}_x^{A+2}\leqslant 1.$$

Следовательно, для правой части неравенства (11) выполняется условие $\frac{x}{y}\geqslant T^{\frac{1}{3}}$, то есть к этой сумме можно применить плотностную теорему для узких прямоугольников критической полосы (лемма 3). Полагая в этой лемме $\varepsilon=\frac{\delta}{3}-\frac{\delta^2}{1-\delta}$, получаем

$$\begin{aligned}&|W(\alpha;x,y)|\ll\mathscr{A}_1+\mathscr{A}_2,\\&\mathscr{A}_1=\frac{y\mathscr{L}_x^{10}}{x}\max_{0.5\leqslant u\leqslant 0.75}x^u\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{4-4u}{3-2u}},\\&\mathscr{A}_2=\frac{y\mathscr{L}_x}{x}\max_{0.75\leqslant u\leqslant 1-\delta}x^u\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{2}{u}(1-u)+\varepsilon}.\end{aligned}\tag{12}$$

Оценка $\mathscr{A}_1$. Имеем

$$\begin{aligned}&\mathscr{A}_1=\frac{x\mathscr{L}_x^{10}}{y}\max_{0{,}5\leqslant u\leqslant 0{,}75}f_1(u),\qquad f_1(u)=x^u\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{u-1{,}5}}>0,\\&f_1'(u)=f_1(u)\left(\ln x+\frac{\ln\left(\frac{y}{x}\right)}{(u-1{,}5)^2}\right)=\frac{f_1(u)}{(u-1{,}5)^2}\ln\frac{y}{x^{-u^2+3u-1{,}25}}.\end{aligned}$$

Из условий (6) и из соотношения

$$\max_{0{,}5\leqslant u\leqslant 0{,}75}\left(-u^2+3u-1,25\right)=\left(-u^2+3u-1,25\right)\big|_{u=0{,}75}=\frac{7}{16},$$

следует, что

$$\ln\frac{y}{x^{-u^2+3u-1{,}25}}\geqslant\ln\frac{yx^{\frac{5}{8}}\mathscr{L}_x^{1{,}5A+15}}{x^{\frac{7}{16}}}=\ln x^{\frac{3}{16}}\mathscr{L}_x^{1{,}5A+15}>\ln x^{\frac{1}{5}}>0.$$

Отсюда в свою очередь получаем, что на отрезке $0,5\leqslant u\leqslant 0,75$ выполняется неравенство

$$f_1'(u)\geqslant\frac{f(u)}{(u-1{,}5)^2}\ln x^{\frac{1}{5}}>0,$$

то есть $f_1'(u)$ положительна и $f_1(u)$ возрастающая функция в интервале $0,5 \leqslant u \leqslant 0,75$. Воспользовавшись этим свойством, а затем соотношением (6), имеем

$$\mathscr{A}_1 = \frac{x\mathscr{L}_x^{10}}{y} f_1(0.75) = \frac{x\mathscr{L}_x^{10}}{y} x^{\frac{3}{4}} \left(\frac{x}{y}\right)^{-\frac{4}{3}} = y \cdot \left(\frac{x^{\frac{5}{8}}\mathscr{L}_x^{15}}{y}\right)^{\frac{2}{3}} = y\mathscr{L}_x^{-A}.$$

Оценка $\mathscr{A}_2$. Имеем

$$\mathscr{A}_2 = \frac{y^{3-\varepsilon}\mathscr{L}_x}{x^{3-\varepsilon}} \max_{0,75\leqslant u\leqslant 1-\delta} f_2(u), \qquad f_2(u) = x^u \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{2}{u}} > 0, \qquad \delta = \delta(T_0).$$

$$f_2'(u) = f_2(u)\left(\ln x + \frac{\ln\left(\frac{y}{x}\right)}{u^2}\right) = \frac{f_2(u)}{u^2}\ln\frac{y}{x^{1-u^2}}.$$

Из условий (6) и из соотношения

$$\max_{0,75\leqslant u\leqslant 1-\delta}\left(-u^2+1\right) = \left(-u^2+1\right)\big|_{u=0,75} = \frac{7}{16},$$

следует, что

$$\frac{y}{x^{1-u^2}} \geqslant \frac{x^{\frac{5}{8}}\mathscr{L}_x^{1,5A+15}}{x^{\frac{7}{16}}} \geqslant x^{\frac{3}{16}}\mathscr{L}_x^{1,5A+15}.$$

Отсюда, в свою очередь, получаем, что на отрезке $0,75 \leqslant u \leqslant 1-\delta$ выполняется неравенство

$$f_2'(u) \geqslant \frac{f_2(u)}{u^2}\ln x^{\frac{3}{16}} > 0,$$

то есть $f_2'(u)$ положительна и $f_2(u)$ возрастающая функция в интервале $0,75 \leqslant u \leqslant 1-\delta$. Воспользовавшись этим свойством, имеем

$$\mathscr{A}_2 = \frac{y^{3-\varepsilon}\mathscr{L}_x}{x^{3-\varepsilon}} x^{1-\delta}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{2}{1-\delta}} = y\cdot\frac{x^{\frac{2\delta}{1-\delta}-\delta+\varepsilon}\mathscr{L}_x}{y^{\frac{2\delta}{1-\delta}+\varepsilon}} = y\mathscr{L}_x\left(\frac{x^{\frac{\delta+\delta^2+(1-\delta)\varepsilon}{2\delta+(1-\delta)\varepsilon}}}{y}\right)^{\frac{2\delta}{1-\delta}+\varepsilon} =$$

$$= y\mathscr{L}_x\left(\frac{x^{\frac{5}{8}}\mathscr{L}_x^{1,5A+15}}{y}x^{f(\delta,\varepsilon)}\mathscr{L}_x^{-1,5A-15}\right)^{\frac{2\delta}{1-\delta}+\varepsilon}, \qquad f(\delta,\varepsilon) = \frac{\delta+\delta^2+(1-\delta)\varepsilon}{2\delta+(1-\delta)\varepsilon} - \frac{5}{8}.$$

Отсюда, и из соотношения (6), получим

$$\mathscr{A}_2 \ll y\cdot x^{f(\delta,\varepsilon)\frac{2\delta+(1-\delta)\varepsilon}{1-\delta}}\mathscr{L}_x.$$

Далее при $\varepsilon = \frac{\delta}{3} - \frac{\delta^2}{1-\delta}$, воспользовавшись соотношением

$$f(\delta,\varepsilon)\frac{2\delta+(1-\delta)\varepsilon}{1-\delta} = \frac{\delta+\delta^2+(1-\delta)\varepsilon}{1-\delta} - \frac{5(2\delta+(1-\delta)\varepsilon)}{8(1-\delta)} =$$

$$= \frac{-2\delta+8\delta^2+3(1-\delta)\varepsilon}{8(1-\delta)} = -\frac{\delta}{8} + \frac{3(1-\delta)\varepsilon-\delta+7\delta^2}{8(1-\delta)} = -\frac{\delta}{8},$$

находим

$$\mathscr{A}_2 \ll yx^{-0,125\delta}\mathscr{L}_x = y\mathscr{L}_x\exp\left(-0,125\delta\mathscr{L}\right). \tag{13}$$

Пользуясь условиями $\alpha \leqslant x\left(2\pi y^2\right)^{-1}$ и (6), имеем

$$T_0 = \left(\frac{x}{y} + \alpha x\right)\mathscr{L}_x^{A+3} \leqslant \left(\frac{x}{y} + \frac{x^2}{2\pi y^2}\right)\mathscr{L}_x^{A+3} \leqslant \frac{x^2}{y^2}\mathscr{L}_x^{A+3} = x^{\frac{3}{4}}\mathscr{L}_x^{-2A-33} < x^{\frac{4}{5}},$$

Воспользовавшись этим неравенством, оценим снизу параметр $\delta = \delta(T_0)$:

$$\delta(T_0) = \frac{c_1}{(\ln(2T_0+2))^{\frac{2}{3}}\ln\ln(2T_0+2)} \geqslant \frac{c_1}{\mathscr{L}_c^{\frac{2}{3}}\ln\mathscr{L}_x} \geqslant c_1\mathscr{L}_x^{-0.6}.$$

Поэтому из (13) получаем

$$\mathscr{A}_2 \ll y\mathscr{L}_x \exp\left(-0,125c_1\mathscr{L}_x^{0.4}\right) \ll y\mathscr{L}_x^{-A}.$$

Подставляя эту оценку и оценку для суммы $\mathscr{A}_1$ в (12), имеем

$$|W(\alpha;x,y)| \ll y\mathscr{L}_x^{-A}.$$

Из этой оценки и (7) получим утверждение леммы 8.

2.1. Доказательство теоремы

Не ограничивая общности, будем считать, что

$$H = N^{1-\frac{1}{2c}}\mathscr{L}^2. \tag{14}$$

Вводя обозначения $N_3^c = \mu_3 N + H$ и $(N_3 - H_3)^c = \mu_3 N - H$, а затем пользуясь определением суммы $S_c(\alpha;x,y)$, имеем

$$\sum_{|[n^c]-\mu_3 N|\leqslant H} e(\alpha[n^c]) = \sum_{(N_3-H_3)^c+\{n^c\}\leqslant n^c\leqslant N_3^c+\{n^c\}} e(\alpha[n^c]) =$$
$$= \sum_{(N_3-H_3)^c<n^c\leqslant N_3^c} e(\alpha[n^c]) + \theta_{31} + \theta_{32} = S_c(\alpha;N_3,H_3) + \theta_3, \tag{15}$$

где $\theta_3 = \theta_{31} + \theta_{32}$, причём θ_{31} и θ_{32} определяются следующим образом:

- $|\theta_{31}| = 1$, если в интервале $\left[N_3 - H_3,\ ((N_3-H_3)^c + \{n^c\})^{\frac{1}{c}}\right]$ длина которого меньше единицы, существует целое число, и $|\theta_{32}| = 0$ в противном случае;
- $|\theta_{32}| = 1$, если в полуинтервале $\left(N_3,\ (N_3^c + \{n^c\})^{\frac{1}{c}}\right]$ длина которого также меньше единицы, существует целое число, и $|\theta_{32}| = 0$ в противном случае.

Для параметров N_3 и H_3 справедливы следующие соотношения, которыми далее неоднократно будем пользоваться

$$N_3 = (\mu_3 N + H)^{\frac{1}{c}} = (\mu_3 N)^{\frac{1}{c}}\left(1 + \frac{H}{\mu_3 N}\right)^{\frac{1}{c}} = (\mu_3 N)^{\frac{1}{c}}\left(1 + \frac{H}{c\mu_3 N} + O\left(\frac{H^2}{N^2}\right)\right), \tag{16}$$

$$H_3 = (\mu_3 N + H)^{\frac{1}{c}} - (\mu_3 N - H)^{\frac{1}{c}} = \frac{2H}{c(\mu_3 N)^{1-\frac{1}{c}}} + O\left(\frac{H^2}{N^{2-\frac{1}{c}}}\right). \tag{17}$$

Пользуясь соотношением (15) и обозначениями

$$\mathcal{S}_1(\alpha;N_k,2H) = \sum_{N_k-2H<p\leqslant N_k} e(\alpha p), \qquad N_k = \mu_k N + H, \qquad k = 1,\ 2;$$

$J_c(N,H)$ — число решений диофантова уравнения

$$p_1+p_2+[n^c]=N,$$

относительно простых чисел p_1, p_2 и натуральных чисел n с условиями

$$|p_k-\mu_kN|\leqslant H,\quad k=1,2,\quad |[n^c]-\mu_3N|\leqslant H,$$

представим в виде

$$J_c(N,H)=\int_{-0.5}^{0,5}e(-\alpha N)\sum_{|p_1-\mu_1N|\leqslant H}e(\alpha p_1)\sum_{|p_2-\mu_2N|\leqslant H}e(\alpha p_2)\sum_{|[n^c]-\mu_3N|\leqslant H}e(\alpha[n^c])=$$
$$=\int_{-0.5}^{0.5}e(-\alpha N)\left(\mathcal{S}_1(\alpha;N_1,2H)+\theta_1\right)\left(\mathcal{S}_1(\alpha;N_2,2H)+\theta_2\right)\left(S_c(\alpha;N_3,H_3)+\theta_3\right)d\alpha, \tag{18}$$

где $|\theta_k|$, (при $k=1,\ 2$) равен 1, если соответственно нижние пределы тригонометрических сумм $\mathcal{S}_1(\alpha;N_1,2H)$, $\mathcal{S}_1(\alpha;N_2,2H)$, $T(\alpha;N_3,H_3)$, то есть числа N_1-2H, N_2-2H, N_3-H_3 целые числа, и 0 в противном случае. Перемножая скобки в подинтегральной функции в (18), получим

$$J_c(N,H)=\int_{-0.5}^{0.5}e(-\alpha N)\mathcal{S}_1(\alpha;N_1,2H)\mathcal{S}_1(\alpha;N_2,2H)S_c(\alpha;N_3,H_3)d\alpha+\mathbb{R}_1, \tag{19}$$
$$\mathbb{R}_1=\int_{-0.5}^{0.5}e(-\alpha N)\left(\theta_3\mathcal{S}_1(\alpha;N_1,2H)\mathcal{S}_1(\alpha;N_2,2H)+\theta_1\theta_2S_c(\alpha;N_3,H_3)+\right.$$
$$+\theta_2\mathcal{S}_1(\alpha;N_1,2H)S_c(\alpha;N_3,H_3)+\theta_1\theta_3\mathcal{S}_1(\alpha;N_2,2H)+$$
$$\left.+\theta_1\mathcal{S}_1(\alpha;N_2,2H)S_c(\alpha;N_3,H_3)+\theta_2\theta_3\mathcal{S}_1(\alpha;N_1,2H)\right)d\alpha.$$

В $\mathbb{R}_1$, переходя к оценкам, пользуясь неравенством Коши, а затем соотношениями

$$\int_{-0.5}^{0.5}|\mathcal{S}_1(\alpha;N_k,2H)|^2d\alpha=\pi(N_k)-\pi(N_k-2H)\leqslant 2H,\qquad k=1,\ 2;$$
$$\int_{-0.5}^{0.5}|S_c(\alpha;N_3,H_3)|^2d\alpha=[N_3]-[N_3-H_3]\leqslant H_3+1\ll\frac{H}{N^{1-\frac1c}},$$

где при выводе второго из них используется соотношение (17), имеем

$$\mathbb{R}_1\leqslant\left(\int_{-0.5}^{0.5}|\mathcal{S}_1(\alpha;N_1,2H)|^2d\alpha\int_{-0.5}^{0.5}|\mathcal{S}_1(\alpha;N_2,2H)|^2d\alpha\right)^{\frac12}+\left(\int_{-0.5}^{0.5}|S_c(\alpha;N_3,H_3)|^2d\alpha\right)^{\frac12}+$$
$$+\left(\int_{-0.5}^{0.5}|\mathcal{S}_1(\alpha;N_1,2H)|^2d\alpha\int_{-0.5}^{0.5}|S_c(\alpha;N_3,H_3)|^2d\alpha\right)^{\frac12}+\left(\int_{-0.5}^{0.5}|\mathcal{S}_1(\alpha;N_2,2H)|^2d\alpha\right)^{\frac12}+$$
$$+\left(\int_{-0.5}^{0.5}|\mathcal{S}_1(\alpha;N_2,2H)|^2d\alpha\int_{-0.5}^{0.5}|S_c(\alpha;N_3,H_3)|^2d\alpha\right)^{\frac12}+\left(\int_{-0.5}^{0.5}|\mathcal{S}_1(\alpha;N_1,2H)|^2d\alpha\right)^{\frac12}\ll$$
$$\ll H+\left(\frac{H}{N^{1-\frac1c}}\right)^{\frac12}+\left(\frac{H^2}{N^{1-\frac1c}}\right)^{\frac12}+H^{\frac12}\ll H\ll\frac{H^2}{N^{1-\frac1c}\mathscr{L}^3}.$$

Отсюда и из (19), имеем

$$J_c(N,H)=\int_{-0.5}^{0.5}\mathbb{F}(\alpha)e(-\alpha N)d\alpha+O\left(\frac{H^2}{N^{1-\frac1c}\mathscr{L}^3}\right),$$
$$\mathbb{F}(\alpha)=\mathcal{S}_1(\alpha;N_1,2H)\mathcal{S}_1(\alpha;N_2,2H)S_c(\alpha;N_3,H_3).$$

Отрезок интегрирования $[-0,5,0,5]$ разделим на точки двух классов. К точкам первого класса отнесем интервал
$$\mathfrak{M} = [-æ, æ], \qquad \text{где} \qquad æ = (2cH)^{-1}\mathscr{L}^2.$$
Оставшиеся интервалы
$$\mathfrak{m}_+ = [æ, 0,5] \qquad \text{и} \qquad \mathfrak{m}_- = [-0,5, -æ]$$
отнесем к точкам второго класса. Обозначим через $I(\mathfrak{M})$, $I(\mathfrak{m}_+)$ и $I(\mathfrak{m}_-)$ соответственно интегралы по множествам $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{m}_+$ и $\mathfrak{m}_-$. Будем иметь
$$J_c(N, H) = I(\mathfrak{M}) + I(\mathfrak{m}_+) + I(\mathfrak{m}_-).$$
В последней формуле первый член, то есть $I(\mathfrak{M})$ доставляет главный член асимптотической формулы для $J_c(N, H)$, а $I(\mathfrak{m}_+)$ и $I(\mathfrak{m}_-)$ входят в его остаточный член.

2.2. Оценка интегралов $I(\mathfrak{m}_+)$ и $I(\mathfrak{m}_-)$

Имеем
$$I(\mathfrak{m}_+) = \int\limits_{\mathfrak{m}_+} e(-\alpha N)\mathcal{S}_1(\alpha; N_1, 2H)\mathcal{S}_1(\alpha; N_2, 2H)S_c(\alpha; N_3, H_3)d\alpha.$$
Переходя к оценкам, а затем воспользовавшись неравенством Коши для интегралов, находим
$$I(\mathfrak{m}_+) \ll \max_{\alpha\in\mathfrak{m}_+} |T(\alpha; N_3, H_3)| \int_0^1 |\mathcal{S}_1(\alpha; N_1, 2H)||\mathcal{S}_1(\alpha; N_2, 2H)|d\alpha =$$
$$= \max_{\alpha\in\mathfrak{m}_+} |S_c(\alpha; N_3, H_3)| \left(\int_0^1 |\mathcal{S}_1(\alpha; N_1, 2H)|^2 d\alpha\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 |\mathcal{S}_1(\alpha; N_2, 2H)|^2 d\alpha\right)^{\frac{1}{2}} =$$
$$= \max_{\alpha\in\mathfrak{m}_+} |S_c(\alpha; N_3, H_3)| \left(\pi\left(\mu_1 N + H\right) - \pi\left(\mu_1 N - H\right)\right)^{\frac{1}{2}} \left(\pi\left(\mu_2 N + H\right) - \pi\left(\mu_2 N - H\right)\right)^{\frac{1}{2}}.$$
Применяя к двум последним множителям правой части полученной формулы, с учётом соотношения
$$H = N^{1-\frac{1}{2c}}\mathscr{L}^2 \geqslant N^{\frac{5}{8}}\mathscr{L}^2 \geqslant (\mu_k N + H)^{0.534}, \qquad k = 1,$$
леммы 4, найдём
$$\pi(\mu_k N + H) - \pi(\mu_k N - H) \ll \frac{H}{\mathscr{L}}.$$
Следовательно
$$I(\mathfrak{m}_+) \ll \frac{H}{\mathscr{L}} \max_{\alpha\in\mathfrak{m}_+} |S_c(\alpha; N_3, H_3)|. \tag{20}$$
Оценим $S_c(\alpha, N_3, H_3)$ для α из множества $\mathfrak{m}_+$, используя лемму 5 в случае $c > 1,1$ при
$$A = 2, \qquad x = N_3, \qquad y = H_3,$$
а также проверим выполнение каждого из следующих условий:
$$\|c\| \geqslant 3\left(2^{[c]+1} - 1\right)\frac{\ln\ln N_3}{\ln N_3}, \tag{21}$$
$$H_3 \geqslant \sqrt{2cN_3}(\ln N_3)^2, \tag{22}$$
$$æ = (2cH)^{-1}\mathscr{L}^2 \geqslant \frac{(\ln N_3)^2}{H_3 N_3^{c-1}}. \tag{23}$$

Воспользовавшись определением параметра $N_3=(\mu_3N+H)^{\frac{1}{c}}$, имеем

$$\begin{aligned}\ln N_3 =&\frac{1}{c}\ln\left(N\left(\mu_3+\frac{H}{N}\right)\right)=\frac{1}{c}\left(\mathscr{L}+\ln\left(\mu_3+\frac{H}{N}\right)\right)=\\ &=\frac{\mathscr{L}}{c}\left(1+\frac{\ln\left(\mu_3+\frac{H}{N}\right)}{\mathscr{L}}\right)=\frac{\mathscr{L}}{c}\left(1+\mathbb{R}(n)\right),\qquad \mathbb{R}(n)\ll\mathscr{L}^{-1}.\end{aligned}\tag{24}$$

Логарифмируя обе части последнего равенства, находим

$$\ln\ln N_3=\ln\mathscr{L}-\ln c+\ln\left(1+\frac{\ln\left(\mu_3+\frac{H}{N}\right)}{\mathscr{L}}\right)=\ln\mathscr{L}+O(1)=\ln\mathscr{L}\left(1+O\left(\frac{1}{\ln\mathscr{L}}\right)\right).\tag{25}$$

Воспользовавшись формулами (24) и (25), получим

$$\begin{aligned}\frac{\ln\ln N_3}{\ln N_3}=&\frac{c\ln\mathscr{L}}{\mathscr{L}}\cdot\frac{1}{1+\mathbb{R}(N)}\left(1+O\left(\frac{1}{\ln\mathscr{L}}\right)\right)=\frac{c\ln\mathscr{L}}{\mathscr{L}}\left(1+O\left(\frac{1}{\mathscr{L}}\right)\right)\left(1+O\left(\frac{1}{\ln\mathscr{L}}\right)\right)=\\ =&\frac{c\ln\mathscr{L}}{\mathscr{L}}+O\left(\frac{1}{\ln\mathscr{L}}\right).\end{aligned}$$

Отсюда и из условия $\|c\|\geqslant 3\left(2^{[c]+1}-1\right)\dfrac{c\ln\mathscr{L}}{\mathscr{L}}$, следует, что

$$\|c\|\geqslant 3\left(2^{[c]+1}-1\right)\left(\frac{\ln\ln(N_1+H_1)}{\ln(N_1+H_1)}+O\left(\frac{1}{\mathscr{L}}\right)\right),$$

то есть выполняется условие (21). Используя соотношения (17), (14), (16) и (24), можно установить справедливость условия (22):

$$\begin{aligned}\frac{H_3}{\sqrt{2cN_3}(\ln N_3)^2}&=\frac{\dfrac{2N^{1-\frac{1}{2c}}\mathscr{L}^2}{c(\mu_3N)^{1-\frac{1}{c}}}\left(1+O\left(\dfrac{H}{N}\right)\right)}{\left(2c(\mu_3N)^{\frac{1}{c}}\left(1+O\left(\dfrac{H}{N}\right)\right)\right)^{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{\mathscr{L}}{c}\left(1+O\left(\dfrac{1}{\mathscr{L}}\right)\right)\right)^2}=\\ &=\frac{\sqrt{2c}}{\mu_3^{1-\frac{1}{2c}}}\left(1+O\left(\frac{1}{\mathscr{L}}\right)\right)>1.\end{aligned}$$

Аналогично, используя соотношения (24), (17) и (16), получаем:

$$\begin{aligned}\frac{\ln^2 N_3}{H_3N_3^{c-1}}=&\frac{\left(\dfrac{\mathscr{L}}{c}\left(1+O\left(\dfrac{1}{\mathscr{L}}\right)\right)\right)^2}{\dfrac{2H}{c(\mu_3N)^{1-\frac{1}{c}}}\left(1+O\left(\dfrac{H}{N}\right)\right)\left((\mu_3N)^{\frac{1}{c}}\left(1+O\left(\dfrac{H}{N}\right)\right)\right)^{c-1}}=\\ &=\frac{\mathscr{L}^2}{2cH}\left(1+O\left(\frac{1}{\mathscr{L}}\right)\right)=æ+O\left(\frac{æ}{\mathscr{L}}\right).\end{aligned}\tag{26}$$

Из условия $\alpha\in\mathfrak{m}_+=[æ,0.5]$ следует условие (23). Таким образом, согласно лемме 5, с учетом соотношений (17), имеем

$$S_c(\alpha;N_3,H_3)\ll\frac{H_3}{(\ln N_3)^2}\ll\frac{H}{N^{1-\frac{1}{c}}\mathscr{L}^2}.$$

Подставляя эту оценку в (20), найдем

$$I(\mathfrak{m}_+)\ll\frac{H}{\mathscr{L}}\cdot\max_{\alpha\in\mathfrak{m}_+}|S_c(\alpha;N_3,H_3)|\ll\frac{H^2}{N^{1-\frac{1}{c}}\mathscr{L}^3}.$$

Модули интегралов $I(\mathfrak{m}_+)$ и $I(\mathfrak{m}_-)$ совпадают, поэтому последняя оценка справедлива и для $I(\mathfrak{m}_-)$.

2.3. Вычисление интеграла $I(\mathfrak{M})$

По определению интеграла $I(\mathfrak{M})$ имеем:

$$I(\mathfrak{M}) = \int_{-æ}^{æ} \mathbb{F}(\alpha)e(-\alpha N)d\alpha, \qquad æ = \frac{\mathscr{L}^2}{2cH}, \tag{27}$$
$$\mathbb{F}(\alpha) = \mathcal{S}_1(\alpha; N_1, 2H)\mathcal{S}_1(\alpha; N_2, 2H)S_c(\alpha; N_3, H_3).$$

Пользуясь условием $c \geqslant \frac{4}{3}\left(1 + 52\frac{\ln \mathscr{L}}{\mathscr{L}}\right)$ и формулой суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, множитель которого равен $\frac{52\ln\mathscr{L}}{\mathscr{L}}$, имеем

$$\frac{3}{8} - \frac{1}{2c} = \frac{3}{8}\left(1 - \frac{4}{3c}\right) \geqslant \frac{3}{8}\left(1 - \left(1 + \frac{52\ln\mathscr{L}}{\mathscr{L}}\right)^{-1}\right) = \frac{3}{8}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\left(\frac{52\ln\mathscr{L}}{\mathscr{L}}\right)^k >$$
$$> \frac{3}{8}\left(\frac{52\ln\mathscr{L}}{\mathscr{L}} - \frac{52^2\ln^2\mathscr{L}}{\mathscr{L}^2}\right) = 18.5\frac{\ln\mathscr{L}}{\mathscr{L}} + \frac{\ln\mathscr{L}}{\mathscr{L}}\left(1 - 1014\frac{\ln\mathscr{L}}{\mathscr{L}}\right) > 18.5\frac{\ln\mathscr{L}}{\mathscr{L}}. \tag{28}$$

Для нахождения асимптотической формулы функции $\mathbb{F}(\alpha; N, H)$ сначала определим асимптотическое поведение суммы $S_1(\alpha; N_k, 2H)$ при $k = 1, 2$. Полагая

$$x = N_k = \mu_k N + H, \qquad y = 2H, \qquad A = 3,$$

применим к этим суммам лемму 8. Проверим выполнение следующих двух условий этой леммы:

$$2H \geqslant (\mu_k N + H)^{\frac{5}{8}}(\ln(\mu_k N + H))^{19.5}, \qquad æ = (2cH)^{-1}\mathscr{L}^2 \leqslant \frac{\mu_k N + H}{8\pi H^2}. \tag{29}$$

Используя условие (14) и для краткости введя обозначение

$$c_2 = 2\left(\mu_k + \frac{H}{N}\right)^{-\frac{5}{8}}\left(1 + \frac{\ln\left(\mu_k + \frac{H}{N}\right)}{\mathscr{L}}\right)^{-19.5},$$

а затем применяя неравенство (28), последовательно получаем

$$\frac{2H}{(\mu_k N + H)^{\frac{5}{8}}(\ln(\mu_k N + H))^{19.5}} = \frac{2N^{1-\frac{1}{2c}}\mathscr{L}^2}{(\mu_k N + H)^{\frac{5}{8}}(\ln(\mu_k N + H))^{19.5}} = c_2 N^{\frac{3}{8}-\frac{1}{2c}}\mathscr{L}^{-17.5} =$$
$$= c_2\exp\left(\left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2c}\right)\mathscr{L} - 17.5\ln\mathscr{L}\right) > c_2\exp\left(18.5\frac{\ln\mathscr{L}}{\mathscr{L}}\cdot\mathscr{L} - 17.5\ln\mathscr{L}\right) = c_2\mathscr{L},$$

то есть выполняется первое условие (29). Далее, используя условие (14), покажем, что второе условие (29) также выполняется:

$$\frac{æ}{x(2\pi y)^{-2}} = \frac{(2cH)^{-1}\mathscr{L}^2}{(\mu_k N + 2H)(2\pi\cdot 2H)^{-2}} = \frac{8\pi^2 H\mathscr{L}^2}{c(\mu_k N + 2H)} = \frac{8\pi^2}{c\left(\mu_k + \frac{2H}{N}\right)}\cdot\frac{\mathscr{L}^2}{N^{\frac{1}{2c}}} < 1.$$

Таким образом, оба условия леммы 8 выполнены, и поэтому имеем

$$S_1(\alpha; N_k, 2H) = \frac{\sin 2\pi\alpha H}{\pi\alpha}e\left(\alpha\mu_k N\right) + O\left(\frac{H}{\mathscr{L}^3}\right).$$

Используя лемму 7, сумму $\mathcal{S}_1(\alpha; N_k, 2H)$, $k = 1, 2$, выражаем через сумму $S_1(\alpha; N_k, 2H)$, а затем, пользуясь последней формулой, получаем

$$\mathcal{S}_1(\alpha; N_k, 2H) = \frac{S_1(\alpha; N_k, 2H)}{\ln(\mu_k N)} + O\left(\frac{H^2}{N\mathscr{L}}\right) = \frac{1}{\ln(\mu_k N)}\frac{\sin 2\pi\alpha H}{\pi\alpha}e(\alpha\mu_k N) + O\left(\frac{H}{\mathscr{L}^4}\right).$$

Отсюда, и из соотношения $\dfrac{\sin 2\pi\alpha H}{\pi\alpha} \ll H$, найдём

$$\mathcal{S}_1(\alpha; N_1, 2H)\mathcal{S}_1(\alpha; N_2N, 2H) = \frac{\sin^2 2\pi\alpha H}{\pi^2\alpha^2}\frac{e(\alpha(\mu_1+\mu_2)N)}{\ln(\mu_1 N)\ln(\mu_2 N)} + O\left(\frac{H^2}{\mathscr{L}^5}\right). \tag{30}$$

Теперь, используя лемму 6 при $A = 2$, $x = N_3$, $y = H_3$, найдем асимптотическое поведение суммы

$$S_c(\alpha; N_3, H_3) = \sum_{N_3-H_3<n\leqslant N_3} e(\alpha[n^c]), \qquad \alpha \in [-\text{æ},\ \text{æ}].$$

Условия (21) и (22) леммы 5, выполнение которых было продемонстрировано при оценке $I(\mathfrak{m}_+)$, совпадают с условиями леммы 6. При оценке суммы $S_c(\alpha, N_3, H_3)$ для α из множества $\mathfrak{m}_+$ в (26) показано, что имеет место

$$\frac{\ln^2 N_3}{H_3 N_3^{c-1}} = \text{æ} + O\left(\frac{\text{æ}}{\mathscr{L}}\right).$$

Из этой формулы и условия $\alpha \in \mathfrak{M} = [-\text{æ}, \text{æ}]$ непосредственно следует выполнение условия

$$|\alpha| \leqslant \frac{\ln^2 N_3}{H_3 N_3^{c-1}}.$$

Следовательно, согласно лемме 6, имеем

$$S_c(\alpha; N_3, H_3) = \frac{\sin\pi\alpha}{\pi\alpha}\int_{N_3-H_3}^{N_3} e(\alpha(t^c - 0,5))dt + O\left(\frac{H_3|\sin\pi\alpha|}{(\ln(N_3)^2}\right). \tag{31}$$

Оценивая остаточный член последней формулы с использованием соотношений (24) и (17), получаем

$$\frac{H_3|\sin\pi\alpha|}{(\ln(N_3)^2} \leqslant \frac{H_3\sin\pi\text{æ}}{(\ln(N_3)^2} \ll \frac{H_3}{\mathscr{L}^2}\cdot\sin\left(\frac{\pi\mathscr{L}^2}{2cH}\right) \ll \frac{H}{N^{1-\frac{1}{c}}\mathscr{L}^2}\cdot\frac{\mathscr{L}^2}{H} \ll \frac{1}{N^{1-\frac{1}{c}}}.$$

Подставляя эту оценку в правую часть формулы (31), находим

$$\begin{aligned} S_c(\alpha; N_3, H) &= \frac{1-e(-\alpha)}{2\pi i\alpha}\int_{N_3-H_3}^{N_3} e(\alpha t^c)dt + O\left(\frac{1}{N^{1-\frac{1}{c}}}\right) = \\ &= \frac{H_3(1-e(-\alpha))}{2\pi i\alpha}\gamma_c(\alpha; N_3, H_3) + O\left(\frac{1}{N^{1-\frac{1}{c}}}\right), \end{aligned} \tag{32}$$

$$\gamma_c(\alpha; N_3, H_3) = \int_{-0,5}^{0,5} e\left(\alpha(N_3 + H_3(t-0.5))^c\right)dt. \tag{33}$$

Найдем асимптотическую формулу для интеграла $\gamma_c(\alpha; N_3, H_3)$. Пользуясь соотношениями

$$N_3^c = \mu_3 N + H, \qquad H_3^2 N_3^{c-2} \ll \frac{H^2}{N^{2-\frac{2}{c}}}\cdot N^{\frac{c-2}{c}} = \frac{H^2}{N},$$

$$cH_3N_3^{c-1} = c\left(\frac{2H}{c(\mu_3N)^{1-\frac{1}{c}}} + O\left(\frac{H^2}{N^{2-\frac{1}{c}}}\right)\right)(\mu_3 N)^{\frac{c-1}{c}}\left(1 + O\left(\frac{H}{N}\right)\right) = 2H + O\left(\frac{H^2}{N}\right),$$

которые следуют из соотношений (17) и (16), получаем

$$\begin{aligned} (N_3 + H_3(t-0.5))^c &= N_3^c\left(1 + \frac{H_3(t-0.5)}{N_3}\right)^c = N_3^c\left(1 + \frac{cH_3(t-0.5)}{N_3} + O\left(\frac{H_3^2}{N_3^2}\right)\right) = \\ &= N_3^c + cH_3N_3^{c-1}(t-0.5) + O\left(H_3^2N_3^{c-2}\right) = \\ &= \mu_3 N + H + 2H(t-0.5) + O\left(\frac{H^2}{N}\right) = \mu_3 N + 2Ht + \mathbb{R}_2, \qquad \mathbb{R}_2 \ll \frac{H^2}{N}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (33), учитывая, что $e(\alpha\mathbb{R}_2)-1 \ll |\alpha|\mathbb{R}_2$ и $|\alpha| \ll \mathscr{L}^2 H^{-1}$, получаем

$$\gamma(\alpha;N_3,H_3)=\int_{-0,5}^{0,5} e\left(\alpha\left(\mu_3 N+2Ht+\mathbb{R}_2\right)\right)dt = e\left(\mu_3 N\alpha\right)\frac{\sin\left(2\pi\alpha H\right)}{2\pi\alpha H}+O\left(\frac{H\mathscr{L}^2}{N}\right). \quad (34)$$

Используя формулу Тейлора для функций $\cos 2\pi\alpha$ и $\sin 2\pi\alpha$ в окрестности нуля $|\alpha| \leqslant æ$, найдем

$$\frac{1-e(-\alpha)}{2\pi i\alpha}=\frac{1-\cos 2\pi\alpha+i\sin 2\pi\alpha}{2\pi i\alpha}=\frac{1-(1+O(\alpha^2))+2\pi i\alpha+O(\alpha^3)}{2\pi i\alpha}=1+O\left(\frac{\mathscr{L}^2}{H}\right). \quad (35)$$

Далее, перемножая почленно формулы (34) и (35) и воспользовавшись неравенством $\left|\dfrac{\sin\left(2\pi\alpha H\right)}{2\pi\alpha H}\right| \ll 1$, получим

$$\frac{1-e(-\alpha)}{2\pi i\alpha}\gamma(\alpha;N_3,H_3)=\left(e\left(\mu_3 N\alpha\right)\frac{\sin\left(2\pi\alpha H\right)}{2\pi\alpha H}+O\left(\frac{H\mathscr{L}^2}{N}\right).$$

Отсюда и из (32) получим

$$S_c(\alpha;N_3,H)=H_3\frac{\sin(2\pi\alpha H)}{2\pi\alpha H}e(\mu_3 N\alpha)+O\left(\frac{H^2\mathscr{L}^2}{N^{2-\frac{1}{c}}}\right). \quad (36)$$

Почленно перемножая формулы (30) и (36), а затем оценивая остаточный член этого произведения, обозначенный через $\mathbb{R}_4$, с использованием неравенства $|\sin(2\pi\alpha H)| \ll |2\pi\alpha H|$ и соотношения (17), получаем

$$\begin{aligned}\mathbb{F}(\alpha)&=\frac{H_3}{2H\ln(\mu_1 N)\ln(\mu_2 N)}\cdot\frac{\sin^3 2\pi\alpha H}{\pi^3\alpha^3}e(\alpha(\mu_1+\mu_2+\mu_3)N)+\mathbb{R}_4,\\ \mathbb{R}_4&\ll\frac{\sin^2 2\pi\alpha H}{\pi^2\alpha^2\mathscr{L}^2}\cdot\frac{H^2\mathscr{L}^2}{N^{2-\frac{1}{c}}}+\frac{H_3|\sin(2\pi H\alpha)|}{|2\pi H\alpha|}\frac{H^2}{\mathscr{L}^5}+\frac{H^4}{N^{2-\frac{1}{c}}\mathscr{L}^3}\ll\\ &\ll\frac{H^4}{N^{2-\frac{1}{c}}}+\frac{H^3}{N^{1-\frac{1}{c}}\mathscr{L}^5}+\frac{H^4}{N^{2-\frac{1}{c}}\mathscr{L}^3}\ll\frac{H^3}{N^{1-\frac{1}{c}}\mathscr{L}^5}.\end{aligned}$$

Подставляя выражение для функции $\mathbb{F}(\alpha)$, то есть правую часть последней формулы, в (27), получаем

$$I(\mathfrak{M})=\frac{H_3}{2H\ln(\mu_1 N)\ln(\mu_2 N)}J(H)+O\left(\frac{H^2}{N^{1-\frac{1}{c}}\mathscr{L}^3}\right), \quad (37)$$
$$J(H)=\int_{-æ}^{æ}\frac{\sin^3 2\pi\alpha H}{\pi^3\alpha^3}d\alpha.$$

Заменяя $J(H)$ близким к нему несобственным интегралом, не зависящим от $\mathscr{L}$, и используя формулу (см. [21], стр. 174)

$$\int\limits_0^\infty\frac{\sin^n mu}{u^n}du=\frac{\pi m^{m-1}}{2^n(n-1)!}\left[n^{n-1}-\frac{n}{1!}(n-2)^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}(n-4)^{n-1}+\ldots\right],$$

при $m=1$ и $n=3$, найдём

$$\begin{aligned}J(H)&=\frac{8H^2}{\pi}\int_0^{2\pi æ H}\frac{\sin^3 u}{u^3}du=\frac{8H^2}{\pi}\left(\int_0^\infty\frac{\sin^3}{u^3}du-\int_{2\pi æ H}^\infty\frac{\sin^3 u}{u^3}du\right)=\\ &=\frac{8H^2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin^3 u}{u^3}du+O\left(\frac{H}{\mathscr{L}^6}\right)=3H^2+O\left(\frac{H^2}{\mathscr{L}^6}\right).\end{aligned}$$

Подставляя значение интеграла $J(H)$ в формулу (37), найдём

$$I(\mathfrak{M}) = \frac{3HH_3}{2\ln(\mu_1 N)\ln(\mu_2 N)} + O\left(\frac{H^2}{N^{1-\frac{1}{c}}\mathscr{L}^A}\right) + O\left(\frac{H^2}{N^{1-\frac{1}{c}}\mathscr{L}^8}\right).$$

Воспользовавшись формулой (17) и соотношением

$$\frac{1}{\ln(\mu_k N)} - \frac{1}{\mathscr{L}} = \frac{-\ln\mu_k}{(\mathscr{L} - \ln\mu_k)\mathscr{L}} \ll \frac{1}{\mathscr{L}^2},$$

получим

$$I(\mathfrak{M}) = \frac{3H^2}{c(\mu_3 N)^{1-\frac{1}{c}}\mathscr{L}^2} + O\left(\frac{H^2}{N^{1-\frac{1}{c}}\mathscr{L}^3}\right).$$

Теорема доказана. □

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Estermann T. Proof that every large integer is the sum of two primes and square // Proc. London math.Soc. 1937. V. 11. P. 501–516.

2. Рахмонов З. Х. Тернарная задача Эстермана с почти равными слагаемыми // Математические заметки. 2003. Т. 74. вып. 4. С. 564 – 572.

3. Рахмонов З. Х. Кубическая задача Эстермана с почти равными слагаемыми // Математические заметки. 2014. Т. 95. вып. 3. С. 445 – 456.

4. Рахмонов Ф. З., Рахимов А. О. Об одной аддитивной задаче с почти равными слагаемыми // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам. Издательство: Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского. ISSN: 1810-4134. 2016. № 8. С. 87 – 89.

5. Рахмонов Ф З. Асимптотическая формула в обобщении тернарной проблемы Эстермана с почти пропорциональными слагаемыми // Чебышевский сборник. 2024. Т. 25, № 4(95). С. 120 – 137.

6. Рахмонов З. Х., Рахмонов Ф З. Асимптотическая формула в проблеме Варинга с почти пропорциональными слагаемыми // Чебышевский сборник. 2024. Т. 25. № 2(93). С. 139-168.

7. Рахмонов З.Х., Рахмонов Ф.З. Асимптотическая формула в проблеме Варинга с почти пропорциональными слагаемыми // Доклады Национальной академии наук Таджикистана. 2024. Т. 67. № 3-4. С. 125-136.

8. Рахмонов З.Х., Рахмонов Ф.З. Проблема Варинга с почти пропорциональными слагаемыми // Доклады Национальной академии наук Таджикистана. 2023. Т. 66. № 9-10. С. 481-488.

9. Рахмонов З.Х., Рахмонов Ф.З. Поведение коротких тригонометрических сумм Г.Вейля в больших дугах // Доклады Национальной академии наук Таджикистана. 2023. Т. 66. № 11-12. С. 625-633.

10. Рахмонов З. Х. Обобщение проблемы Варинга для девяти почти пропорциональных кубов // Чебышевский сборник. 2023. Т. 24. № 3. С. 71-94

11. Рахмонов П. З. Короткие тригонометрические суммы с нецелой степенью натурального числа // Вестн. Моск. ун-та. сер.1, математика. механика. 2012. № 6. С. 51 – 55.

12. Рахмонов П. З. Короткие тригонометрические суммы с нецелой степенью натурального числа // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2012. Т. 55. № 3. С 185 – 191.

13. Рахмонов П. З. Короткие суммы с нецелой степенью натурального числа // Математические заметки. 2014. Т. 95. Вып. :5. С. 763 – 774.

14. Рахмонов П. З. Обобщенная тернарная проблема Эстермана для нецелых степеней с почти равными слагаемыми // Математические заметки. 2016. Т. 100. Вып. :3. С. 410 – 420.

15. Рахмонов П. З. Обобщённая тернарная проблема Эстермана для нецелых степеней с почти равными слагаемыми // Чебышевский сборник. 2015. Т. 16, № 1. С. 248 – 253.

16. Рахмонов П. З. Обобщённая тернарная проблема Эстермана для нецелых степеней с почти равными слагаемыми // Известия Академии наук Республики Таджикистан. Отделение физико-математических, химических, геологических и тенических наук. 2013. № 2(151). С. 7 – 16.

17. Карацуба А. А. Основы аналитической теории чисел // М. Наука. 2-ое изд. 1983.

18. Zhan Tao On the Mean Square of Dirichlet L-Functions // Acta Mathematica Sinica. New Series. 1992. V. 8. № 2. P. 204 — 224.

19. Baker R., Harman G. The difference between consecutive primes // Proc. London Math. Soc. 1996. V. 72. P. 261 – 280.

20. Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета–функция Римана // М.: Физматлит. 1994. 376 с.

21. Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж.Н. Курс современного анализа. ч. 1. Основные операции анализа // М.: Физматгиз. 1963.

REFERENCES

1. Estermann, T., 1937, “Proof that every large integer is the sum of two primes and a square”, *Proc. London Math. Soc.*, vol. 11, pp. 501–516.

2. Rakhmonov, Z. Kh., 2003, “Ternary Estermann problem with almost equal summands”, *Matematicheskie Zametki (Mathematical Notes)*, vol. 74, Is. 4, pp. 564–572, (in Russian).

3. Rakhmonov, Z. Kh., 2014, “Cubic Estermann problem with almost equal summands”, *Matematicheskie Zametki (Mathematical Notes)*, vol. 95, Is. 3, pp. 445–456, (in Russian).

4. Rakhmonov, F. Z., Rahimov, A. O., 2016, “On an additive problem with almost equal summands”, *Research in Algebra, Number Theory, Functional Analysis and Related Topics*, Saratov National Research State University, vol. 8, pp. 87–89, (in Russian).

5. Rakhmonov, F. Z., 2024, “Asymptotic formula in the generalization of ternary Estermann problem with almost proportional summands”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 25, Is. 4(95), pp. 120–137, (in Russian).

6. Rakhmonov, Z. Kh., Rakhmonov, F. Z., 2024, “Asymptotic formula in Waring’s problem with almost proportional summands”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 25, Is. 2(93), pp. 139–168, (in Russian).

7. Rakhmonov, Z. Kh., Rakhmonov, F. Z., 2024, “Asymptotic formula in Waring’s problem with almost proportional summands”, *Doklady Natsional’noy Akademii Nauk Tadzhikistana*, vol. 67, Is. 3-4, pp. 125–136, (in Russian).

8. Rakhmonov, Z. Kh., Rakhmonov, F. Z., 2023, “Waring’s problem with almost proportional summands”, *Doklady Natsional’noy Akademii Nauk Tadzhikistana*, vol. 66, Is. 9-10, pp. 481–488, (in Russian).

9. Rakhmonov, Z. Kh., Rakhmonov, F. Z., 2023, “Behaviour of short G. Weyl exponential sums on major arcs”, *Doklady Natsional’noy Akademii Nauk Tadzhikistana*, vol. 66, Is. 11-12, pp. 625–633, (in Russian).

10. Rakhmonov, Z. Kh., 2023, “Generalization of Waring’s problem for nine almost proportional cubes”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 24, Is. 3, pp. 71–94, (in Russian).

11. Rakhmonov, P. Z., 2012, “Short trigonometric sums with a non-integer power of a natural number”, *Vestnik Moskovskogo Universiteta. Seriya 1. Matematika. Mekhanika*, Is. 6, pp. 51–55, (in Russian).

12. Rakhmonov, P. Z., 2012, “Short trigonometric sums with a non-integer power of a natural number”, *Doklady Akademii Nauk Respubliki Tadzhikistan*, vol. 55, Is. 3, pp. 185–191, (in Russian).

13. Rakhmonov, P. Z., 2014, “Short sums with non-integer powers of natural numbers”, *Matematicheskie Zametki (Mathematical Notes)*, vol. 95, Is. 5, pp. 763–774, (in Russian).

14. Rakhmonov, P. Z., 2016, “Generalized ternary Estermann problem for non-integer powers with almost equal summands”, *Matematicheskie Zametki (Mathematical Notes)*, vol. 100, Is. 3, pp. 410–420, (in Russian).

15. Rakhmonov, P. Z., 2015, “Generalized ternary Estermann problem for non-integer powers with almost equal summands”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 16, Is. 1, pp. 248–253, (in Russian).

16. Rakhmonov, P. Z., 2013, “Generalized ternary Estermann problem for non-integer powers with almost equal summands”, *Izvestiya Akademii Nauk Respubliki Tadzhikistan*, No. 2(151), pp. 7–16, (in Russian).

17. Karatsuba, A. A., 1983, *Basic analytic number theory*, Moscow: Nauka, 2nd ed., (in Russian).

18. Zhan, T., 1992, “On the mean square of Dirichlet L-functions”, *Acta Mathematica Sinica. New Series*, vol. 8, No. 2, pp. 204–224.

19. Baker, R., Harman, G., 1996, “The difference between consecutive primes”, *Proc. London Math. Soc.*, vol. 72, pp. 261–280.

20. Voronin, S. M., Karatsuba, A. A., 1994, *Riemann zeta-function*, Moscow: Fizmatlit, 376 pp., (in Russian).

21. Whittaker, E. T., Watson, G. N., 1963, *A Course of Modern Analysis, Vol. 1: Fundamental Operations of Analysis*, Moscow: Fizmatgiz, (in Russian).

Получено: 12.10.2025
Принято в печать: 08.12.2025

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 26. Выпуск 5.

УДК: 511, 517, 519.2 DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-5-203-220

Об одном применении теоремы А.Н. Колмогорова

В. Н. Соболев, А. А. Фролов

Соболев Виталий Николаевич — кандидат физико-математических наук, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова; РТУ МИРЭА (г. Москва).
e-mail: vitalii.sobolev@math.msu.ru
Фролов Андрей Александрович — старший преподаватель, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (г. Москва).
e-mail: faa75@yandex.ru

Аннотация

В статье на классе $\mathscr{K}$ бесконечных двоичных последовательностей без 1-серий строится согласованное распределение вероятностей P, которое индуцируется однородной цепью Маркова с матрицей перехода за один шаг $\mathbb{P}_\phi$, и полностью определяемой золотым сечением ϕ. Использование цепи Маркова при построении вероятностной меры P позволяет применить теорему А.Н. Колмогорова о продолжении меры. Асимптотическое распределение подкласса $\mathscr{K}^0$ бесконечных двоичных последовательностей без 1-серий, начинающихся с нуля, совпадает с аналогичным асимптотическим распределением классической равновероятностной модели. При этом асимптотическое распределение данного класса $\mathscr{K}^0$ совпадает с вероятностью $\mathsf{P}(\mathscr{K}^0)$.

Ключевые слова: теорема Колмогорова о продолжении меры, цепи Маркова, энтропия цепи Маркова, числа Фибоначчи, золотое сечение, двоичные последовательности, равновероятностные последовательности, распределение вероятностей, равномерное распределение, частотное распределение, асимптотическое распределение, асимптотическое поведение, предельное распределение, энтропия.

Библиография: 19 названий.

Для цитирования:
Соболев В. Н., Фролов А. А. Об одном применении теоремы А.Н. Колмогорова // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 5, с. 203–220.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 26. No. 5.

UDC: 511, 517, 519.2 DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-5-203-220

On the application of A.N. Kolmogorov's Theorem

V. N. Sobolev, A. A. Frolov

Sobolev Vitaliy Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University; RTU MIREA (Moscow).
e-mail: vitalii.sobolev@math.msu.ru
Frolov Andrey Alexandrovich — senior lecturer, HSE University (Moscow).
e-mail: faa75@yandex.ru

Abstract

In the article, on the class $\mathscr{K}^0$ of infinite binary sequences without the runs of ones, a consistent probability distribution P is constructed which is induced by a time-homogeneous Markov chain with a one-step transition matrix $\mathbb{P}_\phi$, and is completely determined by the golden ratio ϕ. Using a Markov chain to construct a probability measure P allows us to apply Kolmogorov's existence theorem. The asymptotic distribution of the subclass $\mathscr{K}^0$ of infinite binary sequences without the runs of ones starting with zero coincides with the analogous asymptotic distribution of the classical equiprobable scheme . And in this case, the asymptotic distribution of the class $\mathscr{K}^0$ coincides with the probability $\mathsf{P}(\mathscr{K}^0)$.

Keywords: Kolmogorov's existence theorem, Markov chains, entropy of Markov chains, Fibonacci numbers, golden ratio, binary sequences, equidistributed sequences, probability distribution, uniform distribution, frequency distribution, asymptotic distribution, asymptotic behavior, limiting distribution, entropy.

Bibliography: 19 titles.

For citation:
Sobolev, V. N., Frolov, A. A. 2025, "On the application of A.N. Kolmogorov's Theorem", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 5, pp. 203–220.

1. Введение

Построение асимптотических распределений [1, стр. 82] в своём основании содержит закон равномерного распределения. В силу чего используемые при таком построении семейства распределений оказываются несогласованными. Что в свою очередь приводит к тому, что получаемые асимптотические распределения оказываются вероятностно не связаными с исходными семействами распределений. Следующая фундаментальная теорема А.Н. Колмогорова о продолжении вероятностной меры [2, стр. 67, 398] позволяет избежать этого.

Теорема 1. *Задание на конечномерных пространствах $\mathscr{K}_n$ согласованных распределений P_n определяет на измеримом пространстве $(\mathscr{K}, \mathscr{F})$ такую единственную вероятностную меру P, что каждая P_n есть проекция P на $\mathscr{K}_n$.*

В работе на конкретном примере показано, как с помощью теоремы А.Н. Колмогорова вероятностно обосновывать построение асимптотических распределений. При этом само построение согласованных распределений для применения данной теоремы опирается на теорию цепей Маркова.

Так в статье на классе бесконечных двоичных последовательностей без 1-серий (нет двух подряд идущих единиц) [3, 4, 5]

$$\mathscr{K} = \{\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) : \, x_k \cdot x_{k+1} \neq 1\} \, , x_k \in \{0, 1\}$$

двумя разными наборами вероятностных мер: $\{\widetilde{\mathrm{P}}_n\}$ и $\{\mathrm{P}_n\}$, заданных на конечных подпространствах

$$\mathscr{K}_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : \, x_k \cdot x_{k+1} \neq 1\} \, ,$$

будет построено одно и тоже асимптотическое распределение вероятностей [6, 7, 8] появление последовательности из множеств

$$\mathscr{K}^0 = \{\overline{x} \in \mathscr{K} : x_1 = 0\} \, , \quad \mathscr{K}^1 = \{\overline{x} \in \mathscr{K} : x_1 = 1\} \, .$$

Первый тип распределений $\{\widetilde{\mathrm{P}}_n\}$ определяется на основе равновероятностной модели. Для его построения на каждом конечном пространстве $\mathscr{K}_n$ в качестве вероятностного закона берётся равномерное распределение $\widetilde{\mathrm{P}}_n$, то есть вероятности $\widetilde{\mathrm{P}}_n\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ появления любой последовательности $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из $\mathscr{K}_n$ при фиксированном n берутся равными между собой. Данные распределения $\{\widetilde{\mathrm{P}}_n\}$ в силу равномерного закона распределения оказываются несогласованными (см. далее п. 2.2). Поэтому их предельное распределение на $\mathscr{K}$ оказывается вероятностно не связанным с ними.

Построение второго семейства распределений $\{\mathrm{P}_n\}$, доставляющего такое же асимптотическое распределение, что и семейство $\{\widetilde{\mathrm{P}}_n\}$, как уже говорилось выше, опирается на теорему А.Н. Колмогорова (см., также [7, стр. 204] и [9, стр. 110]) и задаётся с помощью однородной цепи Маркова [10].

Таким образом, данное распределение $\{\mathrm{P}_n\}$ гарантирует существование на множестве всех двоичных последовательностей бесконечной длины с носителем $\mathscr{K}$ вероятностной меры P, которая соответствует асимптотическому распределению. В силу чего асимптотическое распределение равновероятностных мер $\widetilde{\mathrm{P}}_n$ приобретает в ней законное с вероятностной точки зрения основание. Значение энтропии такой цепи Маркова, как будет показано ниже, наиболее близко к энтропии равновероятностной модели. Кроме того, построеная в работе цепь Маркова может быть задана достаточно простым способом, описанным в теореме 4.

2. Основные определения и понятия

2.1. Множество последовательностей без 1-серий

Поскольку носитель $\mathscr{K}$ рассматриваемых далее распределений есть множество последовательностей без 1-серий [3, 4], то вначале дадим их определения и рассмотрим основные свойства и структуру данных множеств.

Обозначим при каждом натуральном $n \in \mathbb{N}$ множество двоичных последовательностей (цепочек, векторов) без 1-серий как и множество подобных последовательностей бесконечной длины $\mathscr{K}$.

В [5] доказывается, что

$$|\mathscr{K}_n| = |(x_1, x_2, \ldots, x_n) : \, x_k \cdot x_{k+1} \neq 1\} \, | = F_{n+2} \, ,$$

где F_n – числа Фибоначчи, которые можно определить рекуррентно [5, 11] как

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n\,, \quad F_1 = F_2 = 1\,.$$

Множества $\mathscr{K}_n$ распадаются на два подкласса

$$\mathscr{K}_n^0 = \{\overline{x} \in \mathscr{K}_n : x_k x_{k+1} \neq 1\,,\, x_1 = 0\}\;, \quad \mathscr{K}_n^1 = \{\overline{x} \in \mathscr{K}_n : x_k x_{k+1} \neq 1\,,\, x_1 = 1\}\;,$$

а множество $\mathscr{K}$ соответственно на

$$\mathscr{K}^0 = \{\overline{x} \in \mathscr{K} : x_1 = 0\}\;, \quad \mathscr{K}^1 = \{\overline{x} \in \mathscr{K} : x_1 = 1\}\;.$$

Мощности множеств $\mathscr{K}_n^0$, $\mathscr{K}_n^1$, также как и мощность $\mathscr{K}_n$, выражаются (см. доказательство в [5]) через соответствующие числа Фибоначчи:

$$\left|\mathscr{K}_n^0\right| = F_{n+1}\,, \quad \left|\mathscr{K}_n^1\right| = F_n\,.$$

В силу существования предела

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \phi \tag{1}$$

соотношение между числом элементов в данных двух поклассах $\mathscr{K}_n$ с ростом n асимптотически [12, стр. 72] сохраняется:

$$\frac{\left|\mathscr{K}_n^0\right|}{\left|\mathscr{K}_n^1\right|} \sim \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\,. \tag{2}$$

Здесь ϕ – золотое сечение или число Фидия [11].

Нам так же понадобится разложение каждого из множеств $\mathscr{K}_n^0$, $\mathscr{K}_n^1$ на части:

$$\mathscr{K}_n^0 = \mathscr{K}_n^{00} \bigsqcup \mathscr{K}_n^{01}\,, \quad \mathscr{K}_n^1 = \mathscr{K}_n^{10} \bigsqcup \mathscr{K}_n^{11}\,,$$

где

$$\mathscr{K}_n^{00} = \{\overline{x} \in \mathscr{K}_n : x_1 = 0\,, x_n = 0\}\;, \quad \mathscr{K}_n^{01} = \{\overline{x} \in \mathscr{K}_n : x_1 = 0\,, x_n = 1\}\;,$$

$$\mathscr{K}_n^{10} = \{\overline{x} \in \mathscr{K}_n : x_1 = 1\,, x_n = 0\}\;, \quad \mathscr{K}_n^{11} = \{\overline{x} \in \mathscr{K}_n : x_1 = 1\,, x_n = 1\}\;.$$

Мощности классов $\mathscr{K}_n^{ij}$, как и раньше мощности классов $\mathscr{K}_n^i$, будут выражаться через числа Фибоначчи:

$$\left|\mathscr{K}_n^{00}\right| = F_n\,, \quad \left|\mathscr{K}_n^{10}\right| = F_{n-1}\,, \quad \left|\mathscr{K}_n^{01}\right| = F_{n-1}\,, \quad \left|\mathscr{K}_n^{11}\right| = F_{n-2}\,,$$

и

$$\left|\mathscr{K}_n^{00}\right| + \left|\mathscr{K}_n^{10}\right| = \left|\mathscr{K}_n^0\right|\;, \quad \left|\mathscr{K}_n^{01}\right| + \left|\mathscr{K}_n^{11}\right| = \left|\mathscr{K}_n^1\right|\;.$$

В связи с таким разбиением также возникает класс векторов

$$\widetilde{\mathscr{K}_n^0} = \{\overline{x} \in \mathscr{K}_n : x_n = 0\} = \mathscr{K}_n^{00} \bigsqcup \mathscr{K}_n^{10}\,,$$

которые заканчиваются единицей, и класс векторов

$$\widetilde{\mathscr{K}_n^1} = \{\overline{x} \in \mathscr{K}_n : x_n = 1\} = \mathscr{K}_n^{11} \bigsqcup \mathscr{K}_n^{01}\,,$$

которые заканчиваются нулём.

2.2. Вероятностные пространства

Положим в качестве *пространства элементарных событий* (*исходов*) Ω множество всех бесконечных последовательностей без 1-серий, то есть $\Omega = \mathscr{K}$. Элементарными событиями данного пространства будут двоичные последовательности без 1-серий $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots)$. С пространством Ω связаны конечномерные пространства элементарных исходов $\Omega_n = \mathscr{K}_n$.

Кроме пространств элементарных событий Ω_n определим алгебры событий $\mathcal{F}_n = 2^{\Omega_n}$ как множества всех подмножеств соответствующих пространств элементарных событий. В силу конечности Ω_n будут конечны и $\mathcal{F}_n$, поскольку $|\mathcal{F}_n| = 2^{|\Omega_n|}$.

Вероятность $\mathrm{P}_n(A)$ для любого события (подмножества последовательностей) $A \in \mathcal{F}_n$ суть аддитивная, неотрицательная и нормированная функция событий (множеств). Её можно задавать разными способами. В нашем случае в силу конечности пространств Ω_n для полного описания вероятностной меры P_n на Ω_n достаточно определить P_n на множестве элементарных событий, то есть на множестве двоичных последовательностей (цепочек) из Ω_n

$$\overline{x}_n = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \ ,$$

приписав каждой такой последовательности вероятность её появления:

$$\mathrm{P}_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) := P_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ .$$

Тогда любая вероятностная мера P_n полностью описывается [2, стр. 33] таким конечным набором вероятностей и для произвольного события $A \in \mathcal{F}_n$ вероятность $\mathrm{P}_n(A)$ может быть представлена в виде суммы соответствующих ей значений $P_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ вероятностей $\mathrm{P}_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$:

$$\mathrm{P}_n(A) = \sum_{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A} P_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ .$$

В общем случае в силу несчётности $\mathscr{K}$ возникает вопрос о задании на $\mathcal{F}$ вероятностной меры P. Для его решения, как уже говорилось выше, удобно использовать фундаментальную теорему А.Н. Колмогорова о продолжении вероятностной меры, в формулировке которой используется понятие согласованности вероятностных мер. Для полного описания данной теоремы кратко напомним основные моменты, связанные с этим понятием.

Говорят, что *распределения* P_n на $(\Omega_n, \mathcal{F}_n)$ и P_m на $(\Omega_m, \mathcal{F}_m)$ *согласованы*, если две меры P_n^* и P_m^*, индуцированые на пересечении $\Omega_n \cdot \Omega_m$ соответственно мерами P_n и P_m, на данном пересечении совпадают.

В последнем определении без ограничения общности можно считать, что $m < n$. Тогда в рассматриваемом нами случае в силу определения Ω_n и Ω_m имеем $\Omega_m = \Omega_n \cdot \Omega_m$. Таким образом, согласованность P_n и P_m означает, что $\mathrm{P}_n(A) = \mathrm{P}_m(A)$ при всех $A \in \mathcal{F}_m$. В этом случае говорят, что вероятностная мера P_m является *проекцией меры* P_n.

Совпадение $\mathrm{P}_n(A) = \mathrm{P}_m(A)$ при всех $A \in \mathcal{F}_m$ в нашем дискретном случае может быть заменено выполнением следующих равенств для всех $(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathscr{K}_m$

$$\mathrm{P}_m(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \sum \mathrm{P}_n(x_1, x_2, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n) \ ,$$

в которых суммирование ведётся по всевозможным наборам $(x_1, x_2, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n)$ из $\mathscr{K}_n$ таким, что начало вектора $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ фиксировано.

Система таких согласованных распределений и используется в формулировке теоремы Колмогорова [2, стр. 67, 398].

3. Частотная модель распределения конечного набора векторов

3.1. Построение частотной модели как равномерного равномерного распределения

На множестве всех последовательностей $\mathscr{K}_n$ рассмотрим вероятности попадания произвольной цепочки $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в множества $\mathscr{K}_n^0$ и $\mathscr{K}_n^1$ в предположении о том, что появление любой последовательности из $\mathscr{K}_n$ равновозможно. Поскольку количество таких цепочек, как мы уже указывали выше, равно F_{n+2}, то вероятности их появления одинаковы и определяется формулой

$$\widetilde{\mathrm{P}}_n\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = \frac{1}{F_{n+2}}\,.$$

В этом случае говорят, что на $\mathscr{K}_n$ задано равномерное распределение $\widetilde{\mathrm{P}}_n$, а вероятности попадания произвольной цепочки $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в множества $\mathscr{K}_n^0$ и $\mathscr{K}_n^1$ находятся как отношения мощностей соответствующих множеств:

$$\widetilde{\mathrm{P}}_n\left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathscr{K}_n^0\right\} = \frac{\left|\mathscr{K}_n^0\right|}{\left|\mathscr{K}_n\right|} = \frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}\,, \tag{3}$$

$$\widetilde{\mathrm{P}}_n\left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathscr{K}_n^1\right\} = \frac{\left|\mathscr{K}_n^1\right|}{\left|\mathscr{K}_n\right|} = \frac{F_{n}}{F_{n+2}}\,, \tag{4}$$

то есть для их определения используется классическое определение вероятностей.

3.2. Определение асимптотического распределения в рамках частотной модели

При классическом определении вероятностей $\widetilde{\mathrm{P}}_n$ асимптотическое распределение находится как обычные пределы отношения вероятностей (3) и (4):

$$\lim_{n\to+\infty} \widetilde{\mathrm{P}}_n\left(\overline{x}_n \in \mathscr{K}_n^0\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{F_{n+1}}{F_{n+2}} = \frac{1}{\phi}\,, \qquad \lim_{n\to+\infty} \widetilde{\mathrm{P}}_n\left(\overline{x}_n \in \mathscr{K}_n^1\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{F_{n}}{F_{n+2}} = \frac{1}{\phi^2}\,, \tag{5}$$

где $\overline{x}_n = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathscr{K}_n$.

Значениям пределов (5) часто сопоставляются вероятностям попадания последовательности $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots,$
$x_n, \ldots) \in \mathscr{K}$ в множества $\mathscr{K}^0$ и $\mathscr{K}^1$соответственно, то есть в соответствии с (5) на данных двух множествах определяется вероятностная мера $\widetilde{\mathrm{P}}$ так, чтобы попаданию произвольной цепочки $\overline{x}$ в множества $\mathscr{K}^0$ и $\mathscr{K}^1$ соответствовали вероятности

$$\widetilde{\mathrm{P}}\left\{(x_1, x_2, \ldots, x_{n,\ldots}) \in \mathscr{K}^0\right\} := \frac{1}{\phi}\,, \tag{6}$$

$$\widetilde{\mathrm{P}}\left\{(x_1, x_2, \ldots, x_{n,\ldots}) \in \mathscr{K}^1\right\} := \frac{1}{\phi^2}\,. \tag{7}$$

В силу справедливости равенств $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ и свойств предела вектор

$$\vec{q} = (q_0, q_1) = \left(\frac{1}{\phi}, \frac{1}{\phi^2}\right) \tag{8}$$

является стохастическим. Это также следует из известного для золотого сечения [11, стр. 24] равенства $\phi^2 = 1 + \phi$.

3.3. Несогласованность распределений в рамках частотной модели

Сопоставление вектора $\vec{q} = (q_0, q_1)$ вероятностям попадания в множества $\mathscr{K}^0$ и $\mathscr{K}^1$ с вероятностной точки зрения носит условный характер. Это можно объяснить тем, что распределения $\widetilde{\mathrm{P}}_n$, $n \in \mathbb{N}$ не согласованы, то есть не удовлетворяют теореме Колмогорова о продолжении меры (см. выше теорему 2). В связи с этим они не позволяют определить на $\mathscr{K}$ согласованную с ними вероятность $\widetilde{\mathrm{P}}$ так, чтобы выполнялись равенства $\widetilde{\mathrm{P}}\left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \in \mathscr{K}^0\right\} = \phi^{-1}$ и $\widetilde{\mathrm{P}}\left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \in \mathscr{K}^1\right\} = \phi^{-2}$.

Для дальнейших рассуждений отметим, что в предельном случае (8) отношение асимптотических вероятностей q_0 и q_1 в точности равно ϕ, в то время как согласно (1) отношение вероятностей (3) и (4)

$$\frac{\widetilde{\mathrm{P}}_n\left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathscr{K}_n^0\right\}}{\widetilde{\mathrm{P}}_n\left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathscr{K}_n^1\right\}} = \frac{\left|\mathscr{K}_n^0\right|}{\left|\mathscr{K}_n^1\right|} = \frac{F_{n+1}}{F_n} \sim \phi \tag{9}$$

зависит от n (длины вектора) и только стремится к ϕ с ростом n.

4. Марковская модель как метод построения согласованных распределений

Для построения согласованных распределений будем использовать цепь Маркова.

4.1. Построение распределения вероятностей как цепи Маркова

Цепь Маркова или иначе *модель испытаний, связанных в цепь Маркова* можно полностью определить (подробнее см. [7, стр. 140]), задав вероятности P_n на всех двоичных последовательностях $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из $\mathscr{K}_n$ по формуле (в ней нижнии индексы вероятностей перехода и составляют «цепь», последовательно «зацепляясь друг за друга»)

$$\mathrm{P}_n\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) := q_{x_1} \cdot p_{x_1 x_2} \cdot p_{x_2 x_3} \cdot \ldots \cdot p_{x_{n-1} x_n}\,, \tag{10}$$

в которой вероятности перехода $p_{x_k x_{k+1}}$ от числа x_k к числу x_{k+1} в силу того, что $x_k \in \{0, 1\}$, имеют всего четыре значения: p_{00}, p_{01}, p_{11}, p_{10} , а вероятности q_{x_1} появления первого значения x_1 в последовательности $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ только два: q_0, q_1. Значения p_{00}, p_{01}, p_{11}, p_{10} записанные в виде матрицы

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{pmatrix}$$

составляют *матрицу перехода* однородной цепи Маркова за один шаг [7, 2], а значения q_0, q_1, записанные в виде стохастического вектора $\vec{q} = (q_0, q_1)$ — *начальное распределение* цепи Маркова.

Цепь Маркова полностью определяется своей матрицей перехода и своим начальным распределением. В контексте нашей задачи цепь Маркова используется как способ задания распределений P_n с помощью формулы (10).

Семейство распределений $\{\mathrm{P}_n\}$, построенное по правилу (10), является согласованным. Поэтому согласно теореме Колмогорова на множестве бесконечных бинарных последовательностей $\mathscr{K}$ оно определяет некоторое распределение P.

4.2. Условие совпадения асимптотических распределений

Найдём среди множества согласованных семейств распределений вида (10) те, которые индуцируют на $\mathscr{K}$ меру P так, чтобы вероятности множеств $\mathscr{K}^0$ и $\mathscr{K}^1$ совпадали бы со значениями вероятностей (6) и (7) асимптотического распределения $\widetilde{\mathrm{P}}$ из классической частотной модели, то есть так, чтобы гарантировать для P выполнение равенств

$$\mathrm{P}\left\{(x_1, x_2, \ldots, x_{n,\ldots}) \in \mathscr{K}^0\right\} = \frac{1}{\phi}\,, \tag{11}$$

$$\mathrm{P}\left\{(x_1, x_2, \ldots, x_{n,\ldots}) \in \mathscr{K}^1\right\} = \frac{1}{\phi^2} \tag{12}$$

и, следовательно, соотношения

$$\frac{\mathrm{P}\left\{(x_1, x_2, \ldots, x_{n,\ldots}) \in \mathscr{K}^0\right\}}{\mathrm{P}\left\{(x_1, x_2, \ldots, x_{n,\ldots}) \in \mathscr{K}^1\right\}} = \phi\,.$$

Аналогичные требования наложим и на сами вероятностные меры P_n:

$$\mathrm{P}_n\left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathscr{K}_n^0\right\} = \frac{1}{\phi}\,, \tag{13}$$

$$\mathrm{P}_n\left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathscr{K}_n^1\right\} = \frac{1}{\phi^2}\,. \tag{14}$$

Таким образом, построеные распределения P_n будут не просто гарантировать существование на пространстве бесконечных последовательностей распределения P со свойствами (11) и (12), но и при каждом натуральном n сами будут обладать подобными свойствами (13) и (14). Такое свойство данных распределений, в частности позволяет заменять при статистических исследованиях распределение P на P_n при любом натуральном n.

Обратим внимание на то, что асимптотическое распределение в смысле равенств (6) и (7) не совпадает с предельным распределением цепи Маркова [13, стр. 118] как численно так и по определению. Изучение связи между ними требует отдельного рассмотрения.

Оказывается, что за численные значения асимптотического распределения цепи Маркова в рассматриваемой нами задаче отвечает только её начальное распределение. При этом матрица переходных вероятностей может быть любой из класса матриц вида

$$\mathbb{P}_\alpha = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{15}$$

где $0 < \alpha < 1$. Обозначим класс распределений вероятностей, определяемых матрицами вида $\mathbb{P}_\alpha,\ 0 < \alpha < 1$, через $\mathscr{P}$.

Лемма 1. *Распределение вероятностей цепи Маркова, порождаемое матрицей (15) и начальным вектором $\vec{q} = \left(\phi^{-1}, \phi^{-2}\right)$, определяет на множестве $\mathscr{K}$ распределение* P*, для которого выполнены равенства (11) и (12).*

Доказательство. 1. По построению $\vec{q} = \left(\phi^{-1}, \phi^{-2}\right)$ есть начальное распределение цепи, то есть ϕ^{-1} – это вероятность появления на первом месте последовательности $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ нуля, а ϕ^{-2} – вероятность появления единицы. Поэтому равенства (11) и (12) верны, как вероятности появления на первом месте нуля и единицы соответственно. Их можно рассматривать как вероятностные меры одномерных цилиндров (одномерных цилиндрических множеств) $(0, x_2, \ldots, x_{n,\ldots})$ и $(1, x_2, \ldots, x_{n,\ldots})$.

2. Распределение цепи Маркова (10) порождаемое матрицей (15) будет иметь своим носителем (множество, на котором оно невырождено) только такие последовательности, в которых

никакие две единицы не стоят рядом, поскольку вероятность такого события определяется элементом $p_{11} = 0$ матрицы $\mathbb{P}_\alpha$, то есть вероятность того, что две единицы стоят рядом равна нулю. Из этого условия следует, что $p_{10} = 1$, то есть для любой последовательности из носителя с вероятностью единица после 1 следует 0. Такие последовательности и составляют множество $\mathscr{K}$.

□

Аналогичное доказательство имеет подобная лемма и для пространств $\mathscr{K}_n$ с распределением P_n.

Лемма 2. *Распределение вероятностей цепи Маркова, порождаемое матрицей (15) и начальным вектором $\vec{q} = \left(\phi^{-1}, \phi^{-2}\right)$, определяет на множестве $\mathscr{K}_n$ распределение P_n, для которого выполнены равенства (13) и (14).*

4.3. Энтропия как условие близости цепи Маркова к статистической модели

Согласно результатам предыдущего пункта имеется бесконечно много распределений (моделей), построенных с помощью цепей Маркова, асимптотические распределения которых совпадают с асимптотическим распределением частотной модели. Как известно, частотная модель описывается с помощью равномерного распределения и в теории вероятностей называется классической.

Среди всех моделей, построенных нами выше с помощью цепи Маркова, определим наиболее близкую к классической частотной модели, аппелируя к понятию энтропии (см. [14, 15, 16]). Поскольку самая большая энтропия соответствует равномерному распределению [2, стр. 295], то среди всех распределений из класса $\mathscr{P}$, описываемого матрицами (15) и начальным вектором (8), возьмём только то, которое имеет максимальную данном классе распределений энтропию.

Поскольку "выравнивание" вероятностей приводит к увеличению энтропии, то не вызывает удивления, что самой большой энтропией обладает равномерное распределение, поскольку у него вероятности "выравнены" на всей области определения, то есть вероятности всех цепочек из $\mathscr{K}$ равны. Ближайшей ступенью близости с точки зрения разбиения пространства элементарных исходов (последовательностей) на классы (далее *классы равномерности*), внутри которых элементарные исходы имеют одинаковые значения вероятностей, являются распределения с двумя классами равномерности.

Ниже мы докажем, что модель с максимальной энтропией единствена, имеет ровно два класса равномерности и может быть определена с помощью матрицы перехода (17), начального распределения (8), которое совпадает с асимптотическим распределением частотной модели.

Для описания энтропии кроме матрицы $\mathbb{P}$ введём матрицу *переходных вероятностей цепи Маркова* за $m \in \mathbb{N}_0$ *шагов*:

$$\mathbb{P}^{(m)} := \left\| p_{ij}^{(m)} \right\| .$$

Согласно определению $\mathbb{P}^{(0)} := E, \mathbb{P}^{(1)} := \mathbb{P}$. Для таких матриц $\mathbb{P}^{(m)}$ однородных цепей Маркова верно равенство $\mathbb{P}^{(m)} = \mathbb{P}^m$.

В нашем случае путем подстановки соответствующих значений вероятностей в общую формулу [7, стр. 145] для цепей Маркова с двумя состояниями для $\mathbb{P}_\alpha^{(m)}$ получается представление

$$\mathbb{P}_\alpha^m = \frac{1}{1+\alpha} \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} + \frac{(-\alpha)^m}{1+\alpha} \begin{pmatrix} \alpha & -\alpha \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Из него следует, что если $0 < \alpha < 1$, то при $m \to +\infty$ существуют *предельные вероятности* (см. [7, стр. 833] и [13, стр. 118])

$$\pi_j := \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} > 0\,,$$

такие, что

$$\mathbb{P}^m \longrightarrow \tfrac{1}{1+\alpha}\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\pi} \\ \vec{\pi} \end{pmatrix},$$

где предельная матрица состоит из двух одинаковых стохастических векторов

$$\overline{\pi} = \left(\tfrac{1}{1+\alpha}\,,\ \tfrac{\alpha}{1+\alpha} \right). \tag{16}$$

В силу определения компонент вектор $\overline{\pi}$ через определение предела последовательности чисел вектор $\overline{\pi}$ единственен. Поскольку при $0 < \alpha < 1$ все финальные вероятности положительны, то есть

$$\overline{\pi} = (\pi_0,\, \pi_1) > 0\,,$$

то любая цепь Маркова с такими параметрами *эргодическая* [7, стр. 811]. Напомним, что в этом случае стохастический вектор $\vec{\pi}$ так же является *стационарным* (или *инвариантным*) *распределением* [7, стр. 147, 809] однородной цепи Маркова, то есть он является левым собственным вектором матрицы переходных вероятностей $\mathbb{P}$ с собственным значением $\lambda = 1$:

$$\vec{q}\,(\mathbb{P} - E) = 0\,.$$

К тому же вектор $\vec{\pi}$ будет совпадать с предельным распределением цепи Маркова [10, стр. 117]. Каждому стохастическому вектору $\vec{q} = (1-q, q)$ сопоставим число $H\left(\vec{q}\right)$, воспользовавшись формулой

$$H\left(\vec{q}\right) = -\left(1-q\right)\log_2\left(1-q\right) - q\log_2\left(q\right)\,,$$

которое называется *энтропией вектора* $\vec{q}$ (при этом $\log_2(0)$ заменяется на 0).

Для эргодической цепи Маркова с $\mathbb{P}_\alpha$ вида (15) существует величина $H_\infty\left(\mathbb{P}_\alpha\right)$, называемая *предельной энтропией* или *энтропией цепи Маркова* [15], которая определяется равенством

$$H_\infty\left(\mathbb{P}_\alpha\right) = \sum_{k=0}^{1} \pi_k H\left(\mathbb{P}_{(k+1)}\right) =$$

$$= \pi_0 \cdot H\left(\mathbb{P}_{(1)}\right) = -\pi_0 \cdot \left(\left(1-\alpha\right)\log_2\left(1-\alpha\right) + \alpha\log_2\left(\alpha\right)\right)\,.$$

где $\mathbb{P}_{(k+1)}$ означает k-ю строку матрицы перехода $\mathbb{P}_\alpha$ вида (15).

Из определения следует, что предельная энтропия $H_\infty\left(\mathbb{P}_\alpha\right)$ при каждом фиксированном α из интервала $(0,1)$ в силу эргодичности цепи Маркова не зависит от начального распределения $\vec{q}$, и поэтому будет одинакова при фиксированной матрице $\mathbb{P}_\alpha$ и различных начальных распределениях $\vec{q} = (q_0, q_1)$.

4.4. Марковская модель с максимальной энтропией

Приведём доказательство того, что модель с максимальной энтропией и фиксированным начальным распределением единственна, точнее верна следующая теорема.

Теорема 2. *Максимум энтропии $H_\infty\left(\mathbb{P}_\alpha\right)$ из класса $\mathscr{P}$ достигается на цепи Маркова с матрицей перехода за один шаг*

$$\mathbb{P}_{\phi^{-2}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{5}-1 & 3-\sqrt{5} \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\phi} & \frac{1}{\phi^2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{17}$$

и равен

$$H_\phi := H\left(\phi^{-2}\right) = \log_2\phi \approx \frac{25}{36}\,.$$

Доказательство. Поскольку, как указано выше, для каждого представителя рассматриваемого семейства цепей Маркова с $\mathbb{P}_\alpha$ существует $H_\infty(\mathbb{P}_\alpha)$, а стационарное распределение имеет вид (16), то при $0 < \alpha < 1$ для решения задачи нужно найти максимум функции

$$H(\alpha) := H_\infty(\mathbb{P}_\alpha) = \pi_0 \cdot h(\alpha) =$$

$$= -\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\log_2(1-\alpha) - \frac{\alpha}{1+\alpha}\log_2(\alpha)\ .$$

Её производная

$$H'(\alpha) = \frac{2\log_2(1-\alpha) - \log_2(\alpha)}{1+\alpha}\,.$$

Тогда равенство $H'(\alpha) = 0$ возможно при

$$\alpha = (1-\alpha)^2\ , \quad 1 - 3\alpha + \alpha^2 = 0\,.$$

Откуда при таких соотношениях на α в силу равенств

$$H(\alpha) = \frac{\alpha-1}{1+\alpha}\log_2(1-\alpha) - \frac{2\alpha}{1+\alpha}\log_2(1-\alpha) =$$

$$= -\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha} + \frac{2\alpha}{1+\alpha}\right)\log_2(1-\alpha) = -\log_2(1-\alpha)$$

следует, что

$$H(\alpha) = -\log_2(1-\alpha)\ .$$

Единственным положительным решением уравнения $H'(\alpha) = 0$ является число

$$\alpha_0 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = 1 - \frac{1}{\phi}\,,$$

где ϕ было определено выше формулой (2). Поэтому

$$H(\alpha_0) = -\log_2(1-\alpha_0) = \log_2\phi \approx \frac{25}{36}$$

и

$$H_\phi := \max_\alpha H(\alpha) = \log_2\phi \approx 0{,}6942419\,.$$

Данное значение соответствует цепи Маркова с матрицей перехода за один шаг

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 1-\alpha_0 & \alpha_0 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\phi} & 1-\frac{1}{\phi} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

□

Найдём явное значение стационарного вектора для такой матрицы, проверив тем самым, что асимптотическое распределение численно не совпадает с предельным распределением цепи Маркова.

Лемма 3. *Стационарный вектор цепи Маркова с матрицей $\mathbb{P}_{\phi^{-2}}$ равен*

$$\overline{\pi} = \left(\ \frac{\phi}{\sqrt{5}}\,, \frac{\phi-1}{\sqrt{5}}\ \right) = \left(\ \frac{\phi^2}{1+\phi^2}\,, \frac{1}{1+\phi^2}\ \right)\ . \qquad (18)$$

Доказательство. 1. Поскольку в рассматриваемом случае

$$\overline{\pi} = \left(\tfrac{1}{1+\alpha_0}\,,\, \tfrac{\alpha_0}{1+\alpha_0} \right), \quad \alpha_0 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = 1 - \frac{1}{\phi}\,,$$

то

$$\alpha_0 = 1 - \frac{1}{\phi} = 1 - \left(1 - \frac{1}{\phi^2}\right) = \frac{1}{\phi^2}$$

и

$$\overline{\pi} = \left(\tfrac{1}{1+1/\phi^2}\,,\, \tfrac{1/\phi^2}{1+1/\phi^2} \right) = \left(\tfrac{\phi^2}{1+\phi^2}\,,\, \tfrac{1}{1+\phi^2} \right).$$

2. Иначе

$$\frac{1}{1+\alpha_0} = \frac{1}{1+\frac{3-\sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{5-\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{5+\sqrt{5}}{10} = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} = \frac{\phi}{\sqrt{5}}\,.$$

Откуда

$$\overline{\pi} = \left(\tfrac{\phi}{\sqrt{5}}\,,\, \tfrac{\phi-1}{\sqrt{5}} \right) = \left(\tfrac{5+\sqrt{5}}{10}\,,\, \tfrac{5-\sqrt{5}}{10} \right) = \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2\sqrt{5}}\,,\, \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2\sqrt{5}} \right).$$

□

Замечание 6. *Согласно (18) при совпадении начального распределения $\vec{q}$ со стационарным $\overline{\pi}$ вероятность появления нуля в ϕ^2 раз больше появления единицы.*

Замечание 7. *Также при любом начальном распределении $\vec{q}$ согласно (18) асимптотически (при больших n) появления нуля в ϕ^2 раз больше появления единицы .*

В качестве примера для сравнения укажем, что для цепи Маркова с матрицей перехода за один шаг

$$\mathbb{P}_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

то есть в случае, когда переход в состояния 1 или 0 после появления 0 равновероятностен, соответствующее значение энтропии равно

$$H_2 := H_\infty\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3} = \frac{24}{36}\,.$$

4.5. Построение распределения цепи Маркова через классы равномерности

Как уже говорилось выше, поскольку равномерную модель определяют как модель, у которой все исходы равноправны, то в этом смысле наиболее близкой к ней является модель, у которой все исходы делятся на два класса, внутри которых все реализации равноправны между собой. В рассматриваемой модели в общем случае таких равновероятностных классов векторов оказывается не более четырёх. Четыре класса появляются при большинстве произвольных значений начального распределения цепи Маркова $\vec{q} = (q_0, q_1)$. А при начальном распределении $\vec{q} = \left(\phi^{-1}, \phi^{-2}\right)$ таких классов всего два. Меньше для случая согласованных распределений быть не может, поскольку тогда существует только один класс равнораспределённых векторов, то есть цепь Маркова вырождается в равномерное на $\mathscr{K}$ распределение (частотную модель), при котором в нашей задаче, как мы уже видели, исчезает свойство согласованности распределений. Таким образом, построенная выше цепь Маркова является наилучшей на $\mathscr{K}$ в смысле числа таких классов.

Теорема 3. *Распределение вероятностей цепи Маркова, порождаемое матрицей (17) и начальным вектором $\vec{q} = (q_0, q_1)$, разбивает множество $\mathscr{K}_n$ на четыре класса $\mathscr{K}_n^{ij}$, $i, j = 0, 1$ равновероятностных векторов. При этом для $\overline{x}_n = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathscr{K}_n^{00}$*

$$\mathrm{P}_n (x_1, x_2, \dots, x_n) = q_0 \cdot \frac{1}{\phi^{n-1}}\,,$$

для $\overline{x}_n \in \mathscr{K}_n^{10}$

$$\mathrm{P}_n (x_1, x_2, \dots, x_n) = q_1 \cdot \frac{1}{\phi^{n-2}}\,,$$

для $\overline{x}_n \in \mathscr{K}_n^{01}$

$$\mathrm{P}_n (x_1, x_2, \dots, x_n) = q_0 \cdot \frac{1}{\phi^{n}}\,,$$

для $\overline{x}_n \in \mathscr{K}_n^{11}$

$$\mathrm{P}_n (x_1, x_2, \dots, x_n) = q_1 \cdot \frac{1}{\phi^{n-1}}\,.$$

Доказательство. 1. Равнораспределённость цепочек $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в каждом из четырёх рассматриваемых классов докажем методом математической индукции опираясь на равенство вероятностей появления в них подпоследовательностей 010 и 000. Вероятности появления подпоследовательностей 010 и 000 равны в силу справедливости следующих равенств:

$$p_{01} \cdot p_{10} = \frac{1}{\phi^2} \cdot 1 = \frac{1}{\phi} \cdot \frac{1}{\phi} = p_{00} \cdot p_{00}\,, \tag{19}$$

где вероятности p_{01}, p_{10}, p_{00} берутся из (17).
2. Если рассмотреть $\overline{x}_n = (0, \dots, 0) \in \mathscr{K}_n^{00}$, то

$$\mathrm{P}_n (0, \dots, 0) = q_{i_1} \cdot p_{i_1 i_2} \cdot p_{i_2 i_3} \cdot \ldots \cdot p_{i_{n-1} i_n} =$$
$$= q_0 \cdot \frac{1}{\phi} \cdot \frac{1}{\phi} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{\phi} = q_0 \cdot \frac{1}{\phi^{n-1}}\,.$$

Возьмём вектор $\overline{x}_n = (0, \dots, 0) \in \mathscr{K}_n^{00}$ в качестве базы индукции для доказательства равновероятности цепочек из класса $\mathscr{K}_n^{00}$. Индукцию будем проводить по количеству единиц в векторе. Предположим, что утверждение верно для любых векторов $\overline{x}_n(k)$, содержащих ровно k единиц, из класса $\mathscr{K}_n^{00}$.

Рассмотрим произвольный вектор $\overline{x}_n(k+1) \in \mathscr{K}_n^{00}$, содержащий $k+1$ единицу. Пусть у него первая единица стоит на j-ом месте. Рассмотрим вектор $\overline{x}_n(k) \in \mathscr{K}_n^{00}$, у которого отсутствует единица на j-ом месте, а все остальные позиции единиц совпадают с позициями единиц у вектора $\overline{x}_n(k+1) \in \mathscr{K}_n^{00}$. Тогда

$$\mathrm{P}_n (\overline{x}_n(k+1)) = q_{i_1} \cdot p_{i_1 i_2} \cdot \ldots \cdot p_{i_{j-1} i_j} \cdot p_{i_j i_{j+1}} \cdot \ldots \cdot p_{i_{n-1} i_n} =$$
$$= q_0 \cdot p_{i_1 i_2} \cdot \ldots \cdot p_{01} \cdot p_{10} \cdot \ldots \cdot p_{i_{n-1} i_n} =$$
$$= q_0 \cdot p_{i_1 i_2} \cdot \ldots \cdot p_{00} \cdot p_{00} \cdot \ldots \cdot p_{i_{n-1} i_n} =$$
$$= \mathrm{P}_n (\overline{x}_n(k)) = q_0 \cdot \frac{1}{\phi^{n-1}}\,.$$

Таким образом, утверждение доказано для любого вектора $\overline{x}_n$ из класса $\mathscr{K}_n^{00}$.
3. Если теперь рассмотреть вектор $\overline{x}_n = (1, 0, \dots, 0) \in \mathscr{K}_n^{10}$, содержащий ровно одну единицу, то

$$\mathrm{P}_n (1, 0, \dots, 0) = q_{i_1} \cdot p_{i_1 i_2} \cdot p_{i_2 i_3} \cdot \ldots \cdot p_{i_{n-1} i_n} =$$

$$= q_1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{\phi} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{\phi} = q_1 \cdot \frac{1}{\phi^{n-2}}\,.$$

Для вектора с одной единицей $\overline{x}_n = (0, \ldots, 0, 1) \in \mathscr{K}_n^{01}$ имеем

$$\mathrm{P}_n\,(0, \ldots, 0, 1) = q_{i_1} \cdot p_{i_1 i_2} \cdot p_{i_2 i_3} \cdot \ldots \cdot p_{i_{n-1} i_n} =$$

$$= q_0 \cdot \frac{1}{\phi} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{\phi^2} = q_0 \frac{1}{\phi^n}\,.$$

Для вектора $\overline{x}_n = (1, 0, \ldots, 0, 1) \in \mathscr{K}_n^{11}$ ровно с двумя единицами

$$\mathrm{P}_n\,(1, 0, \ldots, 0, 1) = q_{i_1} \cdot p_{i_1 i_2} \cdot p_{i_2 i_3} \cdot \ldots \cdot p_{i_{n-1} i_n} =$$

$$= q_1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{\phi} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{\phi^2} = \frac{1}{\phi^{n-1}}\,.$$

Доказательства совпадения значения вероятностей внитри одного данного класса векторов для классов $\mathscr{K}_n^{10}$, $\mathscr{K}_n^{01}$, $\mathscr{K}_n^{11}$ проводим аналогично доказательству для класса $\mathscr{K}_n^{00}$, только в качестве базиса индукции нужно взять соответственно вектора $(1, 0, \ldots, 0)$, $(0, \ldots 0, 1)$, $(1, 0, \ldots 0, 1)$.

□

Последняя теорема позволяет определить изучаемое нами распределение не матрицей (17) и начальным распределением (8), а вероятностями появления только двух векторов из двух классов равновероятностных подмножеств. Такой способ определения данного распределения не требует никаких утверждений из теории цепей Маркова и достаточно лаконичен.

Теорема 4. *Согласованные распределения вероятностей*

$$\mathrm{P}_n\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{\phi^n}\,, \qquad (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \widetilde{\mathscr{K}_n^0}\,,$$

$$\mathrm{P}_n\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{\phi^{n+1}}\,, \qquad (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \widetilde{\mathscr{K}_n^1}$$

определяют на множестве $\mathscr{K}$ распределение P*, для которого выполнены равенства (11) и (12). Оно так же совпадает с распределением, порождаемым матрицей (17) и начальным вектором $\vec{q} = \left(\phi^{-1}, \phi^{-2}\right)$.*

Доказательство. Заметим, что в теореме 3 вероятности появления любой последовательности из множеств $\mathscr{K}_n^{00}$ и $\mathscr{K}_n^{10}$ при $\vec{q} = \left(\phi^{-1}, \phi^{-2}\right)$ совпадают: для $\overline{x}_n = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathscr{K}_n^{00}$

$$\mathrm{P}_n\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) = q_0 \cdot \frac{1}{\phi^{n-1}} = \frac{1}{\phi^n}\,,$$

для $\overline{x}_n = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathscr{K}_n^{10}$

$$\mathrm{P}_n\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) = q_1 \cdot \frac{1}{\phi^{n-2}} = \frac{1}{\phi^n}\,.$$

На этом основании их можно объединить в один равновероятностный класс:

$$\widetilde{\mathscr{K}_n^0} = \{\overline{x}_n \in \mathscr{K}_n : x_n = 0\} = \mathscr{K}_n^{00} \bigsqcup \mathscr{K}_n^{10},$$

мощность которого согласно формулам из пункта 2. равна F_{n+1}.

Аналогичная картина с множествами $\mathscr{K}_n^{11}$ и $\mathscr{K}_n^{01}$. Поэтому определим множество

$$\widetilde{\mathscr{K}_n^1} = \{\overline{x}_n \in \mathscr{K}_n : x_n = 1\} = \mathscr{K}_n^{11} \bigsqcup \mathscr{K}_n^{01}\,,$$

мощность которого равна F_n, а вероятность появления вектора из него – ϕ^{-n-1}. □

4.6. Некоторые следствия

Одним из следствий доказанной выше теоремы 5 является следующее известное утверждение о числах Фибоначчи и золотом сечении. В рамках нашей задачи оно имеет вероятностный смысл и вероятностное доказательство.

Следствие 1. *Справедливо равенство*

$$\frac{F_{n+1}}{\phi^n} + \frac{F_n}{\phi^{n+1}} = 1\,. \tag{20}$$

Доказательство. Поскольку общее количество векторов из класса $\widetilde{\mathscr{K}_n^0}$ равно F_{n+1}, а вероятность появления любого из них равна ϕ^{-n}, произведение $F_{n+1} \cdot \phi^{-n}$ есть вероятность появления любого вектора из класса $\widetilde{\mathscr{K}_n^0}$.

Аналогично общее количество векторов из класса $\widetilde{\mathscr{K}_n^1}$ равно F_n, а вероятность появления любого из них равна ϕ^{-n-1}. Поэтому вероятность появления любого вектора из класса $\widetilde{\mathscr{K}_n^1}$ равна произведению $F_n \cdot \phi^{-n-1}$.

Сумма данных вероятностей равна единице, поскольку они составляют полную группу событий, и поэтому одно из данных событий появится обязательно. Данные рассуждения можно записать как

$$F_{n+1} \cdot \phi^{-n} + F_n \cdot \phi^{-n-1} = \mathrm{P}_n \left\{ \overline{x}_n \in \widetilde{\mathscr{K}_n^0} \right\} + \mathrm{P}_n \left\{ \overline{x}_n \in \widetilde{\mathscr{K}_n^1} \right\} =$$

$$= \mathrm{P}_n \left\{ \overline{x}_n \in \widetilde{\mathscr{K}_n^0},\, \overline{x}_n \in \widetilde{\mathscr{K}_n^1} \right\} = \mathrm{P}_n \left\{ \overline{x} \in \widetilde{\mathscr{K}_n} \right\} = 1\,.$$

□

Замечание 8. *Соотношение (20) соответствует известному представлению степени числа ϕ:*

$$\phi^{n+1} = F_n + \phi F_{n+1}.$$

Следствием теоремы 4 является другое доказательство равенств (13) и (14), которое показывает структуру сохранения асимптотических значений распределения при переходе от векторов длины $n-1$ к векторам длины n.

Следствие 2. *Вероятности последовательностей из $\mathscr{K}_n^0$ (или $\mathscr{K}_n^1$) при любом фиксированном $n \in \mathbb{N}$ совпадают между собой и с вероятностями (6) (или (7)) асимптотического распределения частотной модели.*

Доказательство. Вероятности попадания произвольной цепочки в множества $\mathscr{K}_n^0$ и $\mathscr{K}_n^1$ можно легко найти исходя из теоремы 4:

$$\mathrm{P}_n \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathscr{K}_n^0 \right\} = \frac{F_n}{\phi^n} + \frac{F_{n-1}}{\phi^{n+1}} = \frac{F_{n-1} + \phi F_n}{\phi^{n+1}} = \frac{\phi^n}{\phi^{n+1}} = \frac{1}{\phi}\,, \tag{21}$$

$$\mathrm{P}_n \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathscr{K}_n^1 \right\} = \frac{F_{n-1}}{\phi^n} + \frac{F_{n-2}}{\phi^{n+1}} = \frac{F_{n-2} + \phi F_{n-1}}{\phi^{n+1}} = \frac{\phi^{n-1}}{\phi^{n+1}} = \frac{1}{\phi^2}\,. \tag{22}$$

□

В заключение данного пункта отметим, что рассматриваемое нами распределение встречается в других задачах и обладает ещё рядом дополнительных свойств (см, например, работы [17, стр. 111] и [18, стр. 348]), изучение которых выходят за рамки данной работы.

5. Заключение

На примере последовательностей без 1-серий в статье показано, как строить множество согласованных распределений, которые задаются с помощью однородной цепи Маркова. Эти распределения строятся согласованными так, чтобы асимптотическое распределение вероятностей (8) из классической частотной модели совпадало с аналогичным распределением предложенной модели, а само распределение было максимально близко к равномерному в смысле близости энтропий.

Такой подход, благодаря выполнению теоремы А.Н. Колмогорова о продолжении меры, позволяет использовать методы теории вероятностей при изучении свойств бесконечных последовательностей без 1-серий в контексте множеств $\widetilde{\mathscr{K}_n^0}$ и $\widetilde{\mathscr{K}_n^1}$, что даёт строгое математическое обоснование получаемым результатам, а кроме того позволяет применять вероятностные методы при её дальнейшем исследовании, и математически обосновывают совпадение результатов для пространств статистических экспериментова в рамках предложенной марковской модели.

Отметим, что стационарное распределение предложенной здесь цепи Маркова для обоснования асимптотического распределения равновероятностной модели появляется в качестве предельного распределения в теореме А.О. Гельфонда [19] об остатках разложения чисел из интервала $(0, 1]$, если в ней в качестве основания разложения θ взять ϕ.

Предложенный метод можно очевидным образом повторять в других подобных задачах для изменения частотной модели на модель согласованных распределений.

6. Благодарности

Авторы приносят благодарность проф. В.Н. Чубарикову и к.ф.-м.н. В.В. Козлову за постоянное внимание к данной работе, плодотворное обсуждение и редакционные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кац М. Статистическая независимость в теории вероятностей, анализе и теории чисел. — М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 156 с.

2. Боровков А. А. Вероятность. — М.: Наука, 1986. 432 с.

3. Гончаров В. Л. Из области комбинаторики // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1944, т. 8, вып. 1, с. 3–48.

4. Амелькин В. А. Алгоритмы точного решения задач перечисления, кодирования и генерирования серийных последовательностей // Сиб. журн. вычисл. математики. 2001, т. 4, № 1, с. 1-12.

5. Минеев М. П., Чубариков В. Н. Лекции по арифметическим вопросам криптографии. — М.: Луч, 2014. 224 с.

6. Прохоров А. В. Вероятность и математическая статистика: энциклопедия / под редакцией Ю.В. Прохорова. — М.: БРЭ, 2003. 910 с.

7. Ширяев А. Н. Вероятность. — М.: МЦНМО, 2004. 927 с.

8. Феллер У. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. — М.: Мир, 1984. 752 с.

9. Гихман И. И., Скороход А. В. Теория случайных процессов. — М.: Наука, 1971. 664 с.

10. Романовский В. И. Дискретные цепи Маркова — М.,Л.: Гостехиздат, 1949. 436 с.

11. Воробьев Н. Н. Числа Фибоначчи. — М.: Наука, 1964. 71 с.

12. Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н. Лекции по математическому анализу. — М.: Дрофа, 2008. 638 с.

13. Климов Г. П. Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983. 328 с.

14. Шеннон К. Э. Работы по теории информации и кибернетике. — М.: ИЛ, 1963. 829 с.

15. Хинчин А. Я. Понятие энтропии в теории вероятностей // УМН. 1953, т. 8., № 3(55), с. 3–20.

16. Юшкевич А. А. О предельных теоремах, связанных с понятием энтропии цепей Маркова // УМН. 1953, т. 8, № 5(57), с. 177–180.

17. Вершик А. М., Н. А. Сидоров Н. А. Арифметические разложения, ассоциированные с поворотом окружности и непрерывными дробями // Алгебра и анализ, 1993, т. 5, № 6, с. 97–115.

18. Куликова В. Л., Олехова Е. Ф., Оселедец В. И. Об абсолютной непрерывности меры Эрдёша для золотого сечения, числа трибоначчи и марковских цепей второго порядка // ТВП, 2024, т. 69, № 2, с. 335–353.

19. Гельфонд А. О. Об одном общем свойстве систем счисления // Изв. АН СССР. Сер. матем., 1959, т. 23, в. 6, с. 809–814.

REFERENCES

1. Kac, M. 1959, *Probability and related topics in physical sciences, Lectures in Applied Mathematics, vol. I*, Interscience Publishers, New York, 266 p.

2. Borovkov, A.A. 2013, *Probability theory*, Springer-Verlag, Berlin, 733 p.

3. Goncharov, V.L. 1944, "Du domaine de l'analyse combinatoire", *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Seriya Matematicheskaya*, vol. 8, no. 1, pp. 3–48.

4. Amelkin, V.A. 2001, "Algorithms for exact solving the problems of enumeration, coding, and generation of serial sequences" [Algoritmy tochnogo resheniya zadach perechisleniya, kodirovaniya i generirovaniya serijnykh posledovatel'nostej], *Sibirskii Zhurnal Vychislitel'noi Matematiki*, vol. 4, no. 1, pp. 1–12.

5. Mineev, M.P. & Chubarikov, V.N. 2014, *Lectures on the arithmetic aspects of cryptography* [Lektsii po arifmeticheskim voprosam kriptografii], Izdatel'stvo Luch, Moscow, 224 p.

6. Prokhorov, A.V. (ed.) 2003, *Probability and mathematical statistics: Encyclopedia* [Veroyatnost' i matematicheskaya statistika: entsiklopediya], Izdatel'stvo Bol'shaya Rossiiskaya Entsiklopediya, Moscow, 910 p.

7. Shiryaev, A.N. 2004, *Probability* [Veroyatnost'], Izdatel'stvo MTsNMO, Moscow, 927 p.

8. Feller, W. 1957, *An introduction to probability theory and its applications, Vol. 1*, John Wiley & Sons, New York, 462 p.

9. Gikhman, I.I. & Skorokhod, A.V. 2004, *The theory of stochastic processes, Vol. 1*, Springer-Verlag, Berlin, 574 p.

10. Romanovsky, V.I. 1970, *Discrete Markov chains*, Wolters-Noordhoff, Groningen, 408 p.

11. Vorobyov, N.N. 1964, *Fibonacci numbers* [Chisla Fibonacci], Izdatel'stvo Nauka, Moscow, 71 p.

12. Arkhipov, G.I., Sadovnichy, V.A. & Chubarikov, V.N. 2008, *Lectures on mathematical analysis* [Lektsii po matematicheskomu analizu], Izdatel'stvo Drofa, Moscow, 638 p.

13. Klimov, G.P. 1986, *Probability theory and mathematical statistics*, Izdatel'stvo Moskovskogo Universiteta, Moscow, 336 p.

14. Shannon, C.E. 1963, *Works on information theory and cybernetics* [Raboty po teorii informatsii i kibernetike], Izdatel'stvo Inostrannoi Literatury, Moscow, 829 p.

15. Khinchin, A.Ya. 1953, "The concept of entropy in probability theory", *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, vol. 8, no. 3, pp. 3–20.

16. Yushkevich, A.A. 1953, "On limit theorems connected with the concept of entropy of Markov chains", *Russian Mathematical Surveys*, vol. 8, no. 5, pp. 177–180.

17. Vershik, A.M. & Sidorov, N.A. 1994, "Arithmetic expansions associated with the rotation of a circle and continued fractions", *St. Petersburg Mathematical Journal*, vol. 5, no. 6, pp. 1121–1136.

18. Kulikova, V.L., Olekhova, E.F. & Oseledets, V.I. 2024, "On absolute continuity of the Erdos measure for the golden ratio, Tribonacci numbers, and second-order Markov chains", *Theory of Probability and Its Applications*, vol. 69, no. 2, pp. 265–280.

19. Gelfond, A.O. 1959, "A common property of number systems", *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Seriya Matematicheskaya*, vol. 23, no. 6, pp. 809–814.

Получено: 27.09.2025
Принято в печать: 08.12.2025

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 26. Выпуск 5.

УДК: 511.7 DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-5-221-245

Об одной задаче, связанной с законом повторного логарифма

Э. В. Тищенко

Тищенко Элина Викторовна — аспирант, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова; РТУ МИРЭА (г. Москва).
e-mail: elina.tischenko@math.msu.ru

Аннотация

В статье рассматривается задача нахождения количества натуральных чисел, не превосходящих наперед заданного n, удовлетворяющих некоторым условиям на функцию $\nu(m)$ – количество простых делителей числа m. Данная работа обобщает результат М. В. Левека, который рассматривал значения функции ν в соседних точках натурального ряда. В статье же значения данной функции рассматриваются в соседних точках арифметической прогрессии. Решение опирается на взаимную простоту и следующую из этого «статистическую независимость» простых делителей соседних членов арифметической прогрессии.

Ключевые слова: закон повторного логарифма, статистическая независимость, простые числа.

Библиография: 8 названий.

Для цитирования:
Тищенко Э. В. Об одной задаче, связанной с законом повторного логарифма // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 5, с. 221–245.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 26. No. 5.

UDC: 511.7 DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-5-221-245

On the problem related with a law of the iterated logarithm

E. V. Tishchenko

Tishchenko Elina Viktorovna — postgraduate student, Lomonosov Moscow State University; RTU MIREA (Moscow).
e-mail: elina.tischenko@math.msu.ru

Abstract

In paper we consider the problem of finding the number of natural numbers that do not exceed a given n, satisfying certain conditions for the function $\nu(m)$ – the number of prime divisors of m. This work summarizes the result of M. V. Leveque, who considered the values of the function ν at consecutive terms of the natural series. In contrast, the present article examines the behavior of this function at consecutive points of an arithmetic progression. The solution relies on coprimality and the resulting statistical independence of the prime divisors of neighboring terms in the arithmetic progression.

Keywords: law of the iterated logarithm, statistical independence, prime numbers.

Bibliography: 8 titles.

For citation:
Tishchenko, E. V. 2025, "On the problem related with a law of the iterated logarithm", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 5, pp. 221–245.

1. Введение

Первые результаты, связанные с законом повторного логарифма, были получены в рамках симметричной схемы Бернулли с нулевым математическим ожиданием и дисперсией, равной 1: $P(X_i = -1) = P(X_i = 1) = \frac{1}{2}$,
$i = 1, \ldots, n$ ([1]). Обозначим $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$.

В 1913 году Ф. Хаусдорф доказал, что $|S_n| = O(n^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$ п.н. для любого $\varepsilon > 0$.

В 1914 году Г. Х. Харди и Дж. Литтлвуд получили более точную оценку, согласно которой $|S_n| = O(\sqrt{n \ln n})$ п.н.

В 1923 году А. Я. Хинчин показал, что $|S_n| = O(\sqrt{n \ln \ln n})$ п.н.

Годом позже он уточнил данный результат и получил закон повторного логарифма, а именно:
$\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{|S_n|}{\sqrt{2n \ln \ln n}} = 1$ п.н.

Пусть p обозначает простое число, m и n – натуральные числа, $\omega, \omega_1, \omega_2$ – действительные числа.

Обозначим $D(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\omega} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.

Рассмотрим функцию количества простых делителей числа: $\nu(m) = \sum\limits_{p|m} 1$.

В 1917 году Г. Х. Харди и С. Рамануджан ([2]) получили результат, похожий на закон повторного логарифма для функции $\nu(m)$, согласно которому если $f(n)$ – действительнозначная функция, стремящаяся к бесконечности при $n \to \infty$, то количество чисел $m \leqslant n$ таких, что

$$\ln \ln n - f(n)\sqrt{\ln \ln n} < \nu(m) < \ln \ln n + f(n)\sqrt{\ln \ln n},$$

равно $n + o(n)$ при $n \to \infty$.

В 1940 году П. Эрдёш и М. Кац ([3]) обобщили данный результат, доказав, что количество чисел $m \leqslant n$, удовлетворяющих условию

$$\nu(m) < \ln \ln n + \omega\sqrt{2 \ln \ln n},$$

равно $nD(\omega) + o(n)$ при $n \to \infty$.

В. М. Левек в работе [4] рассмотрел систему неравенств на функцию ν и доказал, что количество $m \leqslant n$, удовлетворяющих условию

$$\begin{cases} \nu(m) < \ln \ln n + \omega_1\sqrt{\ln \ln n} \\ \nu(m+1) < \ln \ln n + \omega_2\sqrt{\ln \ln n} \end{cases},$$

равно $nD(\omega_1)D(\omega_2) + o(n)$ при $n \to \infty$.

Мы будем рассматривать функцию количества простых делителей в точках вида $mq + 1$:

$$\nu(mq + 1) = \sum_{p|mq+1} 1,$$

где $q = q(n)$ – некоторая последовательность, принимающая натуральные значения.

Основным результатом данной работы являются следующие теоремы:

Теорема 1. *Пусть $q = q(n)$ – некоторая последовательность с условием*

$$\exists C > 0 : \ q(n) < n^C, \ \forall n.$$

Тогда количество $m \leqslant n$ таких, что выполняются неравенства

$$\begin{cases} \nu(mq+1) < \ln\ln n + \omega_1\sqrt{\ln\ln n} \\ \nu((m+1)q+1) < \ln\ln n + \omega_2\sqrt{\ln\ln n} \end{cases}$$

равно $nD(\omega_1)D(\omega_2) + o(n)$ при $n \to \infty$.

Теорема 2. *Пусть $q = q(n)$ – некоторая последовательность с условием*

$$\exists C > 0 : \ q(n) < n^C, \ \forall n.$$

Пусть $t_n(\omega) = |\{m \leqslant n : \nu(mq+1) < \nu((m+1)q+1) + \omega\sqrt{2\ln\ln n}\}|$. Тогда

$$t_n(\omega) = nD(\omega) + o(n) \text{ при } n \to \infty,$$

откуда следует, что

$$P\left(\frac{\nu(mq+1) - \nu((m+1)q+1)}{\sqrt{2\ln\ln n}} < x\right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = D(x), \ n \to \infty,$$

где $P(f(m) < x) = \dfrac{|\{m \leqslant n : f(m) < x\}|}{n}$.

2. Вспомогательные утверждения

Пусть $f(m)$ – аддитивная функция, т.е. $f(mn) = f(m) + f(n)$, если $(m, n) = 1$. Если при этом $f(p^n) = f(p)$, то такая функция называется *сильно аддитивной.*

Если $f(m)$ – сильно аддитивная функция, то $f(m) = \sum\limits_{p|m} f(p)$.

Назовем функции $f_1(m), f_2(m), \ldots, f_k(m)$ *статистически независимыми*, если

$$M\left\{e^{i\sum\limits_{j=1}^{k} f_j(m)}\right\} = \prod_{j=1}^{k} M\{e^{if_j(m)}\},$$

где $M\{t(m)\} = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{m=1}^{n}\dfrac{t(m)}{n}$.

Нам потребуется следующая

Теорема 3. *Пусть f – сильно аддитивная функция такая, что $|f(p)| \leqslant 1$ для всех простых p. Пусть $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R}$, $q = q(n)$ – член некоторой последовательности, принимающей натуральные значения с условием*

$$\exists C > 0 : q(n) < n^C \ \forall n.$$

Обозначим

$$A_n = \sum_{\substack{p \leqslant n, \\ p \nmid q}} \frac{f(p)}{p}, \qquad B_n = \sqrt{\sum_{\substack{p \leqslant n, \\ p \nmid q}} \frac{f^2(p)}{p}},$$

причем $B_n \to \infty$ *при* $n \to \infty$.

Пусть $N(n)$ *– количество натуральных чисел* $m \leqslant n$ *таких, что выполняются условия*

$$\begin{cases} f(mq+1) < A_n + \omega_1 B_n \\ f((m+1)q+1) < A_n + \omega_2 B_n \end{cases}. \tag{1}$$

Тогда $N(n) = nD(\omega_1)D(\omega_2) + o(n)$.

Чтобы доказать теорему 3, нам потребуется сначала доказать предварительные леммы.

Лемма 1. *Пусть* $f(p)$ *– сильно аддитивная функция,* $f_l^q(m) = \sum\limits_{p|mq+1,\, p\leqslant l} f(p)$, $|f(p)| \leqslant 1$.

Обозначим

$$A_n = \sum_{\substack{p \leqslant n,\\ p \nmid q}} \frac{f(p)}{p}, \qquad B_n = \sqrt{\sum_{\substack{p \leqslant n,\\ p \nmid q}} \frac{f^2(p)}{p}},$$

причем $B_n \to \infty$ *при* $n \to \infty$.

Пусть $N(l,n)$ *– количество натуральных чисел* $m \leqslant n$ *таких, что выполняются условия*

$$\begin{cases} f_l^q(m) < A_l + \omega_1 B_l \\ f_l^q(m+1) < A_l + \omega_2 B_l \end{cases}. \tag{2}$$

Обозначим $\delta_l = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{N(l,n)}{n}$ *– плотность натуральных чисел* m*, удовлетворяющих условию* (2)*. Тогда*

$$\lim_{l\to\infty} \delta_l = D(\omega_1)D(\omega_2).$$

Доказательство. Пусть

$$\rho_p^q(m) = \begin{cases} f(p), \text{ если } p \mid mq+1, \\ 0, \text{ если } p \nmid mq+1. \end{cases}$$

Тогда $f_l^q(m)$ переписывается в следующем виде:

$$f_l^q(m) = \sum_{p\leqslant l} \rho_p^q(m).$$

1. Докажем, что функции $a\rho_p^q(m) + b\rho_p^q(m+1)$, где a, b – произвольные фиксированные константы, не равные одновременно 0, *статистически независимы*. Для этого достаточно доказать, что

$$M\left\{e^{i\sum\limits_{p\in P}(a\rho_p^q(m)+b\rho_p^q(m+1))}\right\} = \prod_{p\in P} M\{e^{i(a\rho_p^q(m)+b\rho_p^q(m+1))}\},$$

где $M\{t(m)\} = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{m=1}^{n} \dfrac{t(m)}{n}$, P – произвольное множество, состоящее из простых чисел, меньших l.

Докажем данное утверждение для случая, когда P состоит из двух простых чисел p_1 и p_2. Для других случаев доказательство аналогично. Таким образом, докажем, что

$$M\left\{e^{i(a\rho_{p_1}^q(m)+b\rho_{p_1}^q(m+1)+a\rho_{p_2}^q(m)+b\rho_{p_2}^q(m+1))}\right\} =$$
$$= M\{e^{i(a\rho_{p_1}^q(m)+b\rho_{p_1}^q(m+1))}\}M\{e^{i(a\rho_{p_2}^q(m)+b\rho_{p_2}^q(m+1))}\}. \tag{3}$$

Заметим, что

$$e^{ia\rho^q_{p_1}(m)} = 1 + \frac{e^{ia\alpha}-1}{\alpha}\rho^q_{p_1}(m), \text{ где } \alpha = f(p_1) \neq 0.$$

Действительно, если $p \mid mq+1$, то получаем $e^{iaf(p_1)} = 1 + \dfrac{e^{iaf(p_1)}-1}{f(p_1)}f(p_1)$ – верное равенство; если $p \nmid mq+1$, то $e^0 = 1+0$ – тоже верное равенство.

Аналогично

$$e^{ia\rho^q_{p_2}(m)} = 1 + \frac{e^{ia\beta}-1}{\beta}\rho^q_{p_2}(m), \text{ где } \beta = f(p_2) \neq 0.$$

Обозначим $\mathcal{A}_{p_1} = \dfrac{e^{ia\alpha}-1}{\alpha}$, $\mathcal{A}_{p_2} = \dfrac{e^{ia\beta}-1}{\beta}$, $\mathcal{B}_{p_1} = \dfrac{e^{ib\alpha}-1}{\alpha}$, $\mathcal{B}_{p_2} = \dfrac{e^{ib\beta}-1}{\beta}$. Тогда левая часть (3) переписывается в следующем виде:

$$M\left\{e^{i(a\rho^q_{p_1}(m)+b\rho^q_{p_1}(m+1)+a\rho^q_{p_2}(m)+b\rho^q_{p_2}(m+1))}\right\} =$$
$$= M\{(1+\mathcal{A}_{p_1}\rho^q_{p_1}(m))(1+\mathcal{B}_{p_1}\rho^q_{p_1}(m+1))(1+\mathcal{A}_{p_2}\rho^q_{p_2}(m))(1+\mathcal{B}_{p_2}\rho^q_{p_2}(m+1))\}. \quad (4)$$

Заметим, что $\rho^q_{p_i}(m)\cdot\rho^q_{p_i}(m+1) = 0$. Действительно,

$$\rho^q_{p_i}(m)\cdot\rho^q_{p_i}(m+1) = \begin{cases} f(p_i)\cdot f(p_i), \text{ если } p \mid mq+1,\ p \mid (m+1)q+1, \\ 0, \text{ иначе.}\end{cases}$$

Если $p \mid mq+1$, $p \mid (m+1)q+1$, то $p \mid mq+1$ и $p \mid q$. Отсюда следует, что $p \mid 1$ – противоречие.

Следовательно, произведение в левой части (4) можно представить следующим образом:

$$(1+\mathcal{A}_{p_1}\rho^q_{p_1}(m))(1+\mathcal{B}_{p_1}\rho^q_{p_1}(m+1))(1+\mathcal{A}_{p_2}\rho^q_{p_2}(m))(1+\mathcal{B}_{p_2}\rho^q_{p_2}(m+1)) =$$

$$= 1 + \mathcal{A}_{p_1}\rho^q_{p_1}(m) + \mathcal{B}_{p_1}\rho^q_{p_1}(m+1) + \mathcal{A}_{p_2}\rho^q_{p_2}(m) + \mathcal{B}_{p_2}\rho^q_{p_2}(m+1) +$$

$$+\mathcal{A}_{p_1}\mathcal{A}_{p_2}\rho^q_{p_1}(m)\rho^q_{p_2}(m) + \mathcal{B}_{p_1}\mathcal{B}_{p_2}\rho^q_{p_1}(m+1)\rho^q_{p_2}(m+1) +$$

$$+\mathcal{A}_{p_1}\mathcal{B}_{p_2}\rho^q_{p_1}(m)\rho^q_{p_2}(m+1) + \mathcal{A}_{p_2}\mathcal{B}_{p_1}\rho^q_{p_2}(m)\rho^q_{p_1}(m+1). \quad (5)$$

Применим оператор M к слагаемым в правой части последнего равенства, получим:

$$1) M\{\rho^q_{p_i}(m))\} = \lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{n}\frac{\rho^q_{p_i}(m)}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}f(p_i)\cdot\left|\left\{\begin{array}{c} m\in\mathbb{N}: \\ 1\leqslant m\leqslant n, \\ p_i \mid mq+1\end{array}\right\}\right| = \begin{cases}\dfrac{f(p_i)}{p_i}, & p_i\nmid q \\ 0, & p_i \mid q\end{cases}.$$

Действительно, количество $m\in\mathbb{N}, m\leqslant n, p_i \mid mq+1$ совпадает с количеством решений сравнения $mq\equiv -1 \pmod{p_i}$, $m\leqslant n$. Это сравнение разрешимо тогда и только тогда, когда $(p_i,q)\mid -1$, то есть p_i и q взаимно просты (т.е. $p_i\nmid q$). В таком случае существует единственное решение $m_0:\ 0<m_0\leqslant p_i-1$, а все другие решения представимы в виде m_0+tp_i. Количество таких решений, меньших n, равно $1+\left[\dfrac{n-m_0}{p_i}\right]$, откуда следует равенство выше.

Если же p_i и q не взаимно просты, то решений сравнения не существует и предел равен 0.

$$2) M\{\rho^q_{p_i}(m+1))\} = \begin{cases}\dfrac{f(p_i)}{p_i}, & p_i\nmid q \\ 0, & p_i \mid q\end{cases} \qquad \text{аналогично.}$$

$$3)M\{\rho_{p_1}^q(m)\rho_{p_2}^q(m)\} = \lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{n}\frac{\rho_{p_1}^q(m)\rho_{p_2}^q(m)}{n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}f(p_1)f(p_2)\cdot\left|\left\{\begin{array}{c} m\in\mathbb{N}: 1\leqslant m\leqslant n,\\ p_1\mid mq+1,\ p_2\mid mq+1\end{array}\right\}\right| = \begin{cases}\dfrac{f(p_1)f(p_2)}{p_1p_2},\ p_1,p_2\nmid q,\\ 0,\ \text{иначе}\end{cases}.$$

Действительно, количество $m\in\mathbb{N}, m\leqslant n, p_i\mid mq+1, i=1,2$, совпадает с количеством решений системы сравнений $\begin{cases} mq\equiv -1 \pmod{p_1}\\ mq\equiv -1 \pmod{p_2}\end{cases}$ при $m\leqslant n$. Каждое из этих сравнений разрешимо тогда и только тогда, когда $(p_i,q)\mid -1$, то есть $p_i\nmid q$. В таком случае q обратимо в кольцах $\mathbb{Z}_{p_1},\mathbb{Z}_{p_2}$ и исходная система сравнений равносильна системе $\begin{cases} m\equiv r_1 \pmod{p_1}\\ m\equiv r_2 \pmod{p_2}\end{cases}$. По китайской теореме об остатках у данной системы существует единственное решение $m_0:\ 0<m_0\leqslant p_1p_2-1$, а все другие решения представимы в виде $m_0+tp_1p_2$. Количество таких решений, меньших n, равно $1+\left[\dfrac{n-m_0}{p_1p_2}\right]$, откуда следует равенство выше.

Если же p_i и q для некоторого i не взаимно просты, то решений системы не существует и предел равен 0.

$$4)M\{\rho_{p_1}^p(m+1)\rho_{p_2}^q(m+1)\} = \begin{cases}\dfrac{f(p_1)f(p_2)}{p_1p_2},\ p_1,p_2\nmid q,\\ 0,\ \text{иначе}\end{cases} \quad \text{аналогично.}$$

$$5)M\{\rho_{p_i}^q(m)\rho_{p_j}^q(m+1)\} = \lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{n}\frac{\rho_{p_i}^q(m)\rho_{p_j}^q(m+1)}{n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}f(p_i)f(p_j)\cdot\left|\left\{\begin{array}{c} m\in\mathbb{N}: 1\leqslant m\leqslant n,\\ p_i\mid mq+1,\ p_j\mid (m+1)q+1\end{array}\right\}\right| = \begin{cases}\dfrac{f(p_1)f(p_2)}{p_1p_2},\ p_1,p_2\nmid q,\\ 0,\ \text{иначе}\end{cases}$$

Действительно, количество $m\in\mathbb{N}, m\leqslant n, p_i\mid mq+1,\ p_j\mid (m+1)q+1$ совпадает с количеством решений системы сравнений $\begin{cases} mq\equiv -1 \pmod{p_1}\\ (m+1)q\equiv -1 \pmod{p_2}\end{cases}$ при $m\leqslant n$. Каждое из этих сравнений разрешимо тогда и только тогда, когда $(p_i,q)\mid -1$, то есть $p_i\nmid q$. В таком случае q обратимо в кольцах $\mathbb{Z}_{p_1},\mathbb{Z}_{p_2}$ и исходная система сравнений равносильна системе $\begin{cases} m\equiv r_1 \pmod{p_1}\\ m+1\equiv r_2 \pmod{p_2}\end{cases} \iff \begin{cases} m\equiv r_1 \pmod{p_1}\\ m\equiv r_2-1 \pmod{p_2}\end{cases}$. По китайской теореме об остатках у данной системы существует единственное решение $m_0:\ 0<m_0\leqslant p_1p_2-1$, а все другие решения представимы в виде $m_0+tp_1p_2$. Количество таких решений, меньших n, равно $1+\left[\dfrac{n-m_0}{p_1p_2}\right]$, откуда следует равенство выше.

Если же p_i и q для некоторого i не взаимно просты, то система не имеет решений и предел равен 0.

Следовательно, применив оператор M к обеим частям равенства (5), получим:

1) Если $p_1, p_2 \nmid q$:

$$M\{(1+\mathcal{A}_{p_1}\rho^q_{p_1}(m))(1+\mathcal{B}_{p_1}\rho^q_{p_1}(m+1))(1+\mathcal{A}_{p_2}\rho^q_{p_2}(m))(1+\mathcal{B}_{p_2}\rho^q_{p_2}(m+1))\} =$$
$$= 1+\mathcal{A}_{p_1}\frac{\alpha}{p_1}+\mathcal{B}_{p_1}\frac{\alpha}{p_1}+\mathcal{A}_{p_2}\frac{\beta}{p_2}+\mathcal{B}_{p_2}\frac{\beta}{p_2}+\frac{\alpha\beta}{p_1p_2}\left(\mathcal{A}_{p_1}\mathcal{A}_{p_2}+\mathcal{B}_{p_1}\mathcal{B}_{p_2}+\mathcal{A}_{p_1}\mathcal{B}_{p_2}+\mathcal{A}_{p_2}\mathcal{B}_{p_1}\right) =$$
$$= \left(1+\frac{\alpha\mathcal{A}_{p_1}}{p_1}+\frac{\alpha\mathcal{B}_{p_1}}{p_1}\right)\left(1+\frac{\beta\mathcal{A}_{p_2}}{p_2}+\frac{\beta\mathcal{B}_{p_2}}{p_2}\right).$$

Правая часть последнего равенства в силу аналогичных рассуждений равна

$$M\{e^{i(a\rho^q_{p_1}(m)+b\rho^q_{p_1}(m+1))}\}\cdot M\{e^{i(a\rho^q_{p_2}(m)+b\rho^q_{p_2}(m+1)}\} =$$
$$= M\{(1+\mathcal{A}_{p_1}\rho^q_{p_1}(m))(1+\mathcal{B}_{p_1}\rho^q_{p_1}(m+1))\}\cdot M\{(1+\mathcal{A}_{p_2}\rho^q_{p_2}(m))(1+\mathcal{B}_{p_2}\rho^q_{p_2}(m+1))\},$$

что и требовалось доказать.

2) Если $p_1 \mid q$, $p_2 \nmid q$:

$$M\{(1+\mathcal{A}_{p_1}\rho^q_{p_1}(m))(1+\mathcal{B}_{p_1}\rho^q_{p_1}(m+1))(1+\mathcal{A}_{p_2}\rho^q_{p_2}(m))(1+\mathcal{B}_{p_2}\rho^q_{p_2}(m+1))\} =$$
$$= 1+\mathcal{A}_{p_2}\frac{\beta}{p_2}+\mathcal{B}_{p_2}\frac{\beta}{p_2} = \underbrace{M\{(1+\mathcal{A}_{p_1}\rho^q_{p_1}(m))(1+\mathcal{B}_{p_1}\rho^q_{p_1}(m+1))\}}_{=1}\times$$
$$\times M\{(1+\mathcal{A}_{p_2}\rho^q_{p_2}(m))(1+\mathcal{B}_{p_2}\rho^q_{p_2}(m+1))\},$$

что и требовалось доказать.

Случай $p_1 \nmid q$, $p_2 \mid q$ аналогичен.

3) Если $p_1 \mid q$, $p_2 \mid q$:

$$M\{(1+\mathcal{A}_{p_1}\rho^q_{p_1}(m))(1+\mathcal{B}_{p_1}\rho^q_{p_1}(m+1))(1+\mathcal{A}_{p_2}\rho^q_{p_2}(m))(1+\mathcal{B}_{p_2}\rho^q_{p_2}(m+1))\} = 1 =$$
$$= M\{(1+\mathcal{A}_{p_1}\rho^q_{p_1}(m))(1+\mathcal{B}_{p_1}\rho^q_{p_1}(m+1))\}\cdot M\{(1+\mathcal{A}_{p_2}\rho^q_{p_2}(m))(1+\mathcal{B}_{p_2}\rho^q_{p_2}(m+1))\},$$

что и требовалось доказать.

Равенство (3) доказано.

2. Докажем, что

$$M\left\{e^{i\xi\frac{f^q_l(m)-A_l}{B_l}+i\eta\frac{f^q_l(m+1)-A_l}{B_l}}\right\} \to e^{-\frac{\xi^2+\eta^2}{2}},\ l\to\infty. \tag{6}$$

Согласно пункту 1 доказательства

$$Me^{i(a\rho^q_p(m)+b\rho^q_p(m+1))} = \begin{cases} 1+\dfrac{\alpha\mathcal{A}_p}{p}+\dfrac{\alpha\mathcal{B}_p}{p} = 1+\dfrac{e^{ia\alpha}-1}{p}+\dfrac{e^{ib\alpha}-1}{p},\ p\nmid q,\\ 1,\ p\mid q.\end{cases} \tag{7}$$

Преобразуем левую часть (6), пользуясь (7) и статистической независимостью функций $a\rho^q_p(m)+b\rho^q_p(m+1)$:

$$M\left\{e^{i\xi\frac{f_l^q(m)-A_l}{B_l}+i\eta\frac{f_l^q(m+1)-A_l}{B_l}}\right\}=e^{-i\frac{A_l}{B_l}(\xi+\eta)}M\left\{e^{\frac{i}{B_l}(\xi f_l^q(m)+\eta f_l^q(m+1))}\right\}=$$

$$=e^{-i\frac{A_l}{B_l}(\xi+\eta)}\prod_{p\leqslant l}M\left\{e^{i\left(\frac{\xi}{B_l}\rho_p^q(m)+\frac{\eta}{B_l}\rho_p^q(m+1)\right)}\right\}=e^{-i\frac{A_l}{B_l}(\xi+\eta)}\prod_{p\leqslant l,\,p\nmid q}\left(1+\frac{e^{i\xi\frac{f(p)}{B_l}}-1}{p}+\frac{e^{i\eta\frac{f(p)}{B_l}}-1}{p}\right)=$$

$$=e^{-i\frac{A_l}{B_l}(\xi+\eta)}\prod_{p\leqslant l,\,p\nmid q}\left(1+\frac{if(p)}{pB_l}(\xi+\eta)-\frac{1}{2}\frac{f^2(p)}{pB_l^2}(\xi^2+\eta^2)-\frac{i}{6}\frac{f^3(p)}{pB_l^3}(\xi^3+\eta^3)+\ldots\right)=$$

$$=e^{-i\frac{A_l}{B_l}(\xi+\eta)}\exp\left\{\sum_{p\leqslant l,\,p\nmid q}\ln\left(1+\underbrace{\frac{if(p)}{pB_l}(\xi+\eta)-\frac{1}{2}\frac{f^2(p)}{pB_l^2}(\xi^2+\eta^2)-\frac{i}{6}\frac{f^3(p)}{pB_l^3}(\xi^3+\eta^3)+\ldots}_{\to 0\text{ при }l\to\infty,\text{ так как }B_l\to\infty}\right\}\right)=$$

$$=e^{-i\frac{A_l}{B_l}(\xi+\eta)}\exp\left\{\sum_{p\leqslant l,\,p\nmid q}\left(\frac{if(p)}{pB_l}(\xi+\eta)-\frac{1}{2}\frac{f^2(p)}{pB_l^2}(\xi^2+\eta^2)-\frac{i}{6}\frac{f^3(p)}{pB_l^3}(\xi^3+\eta^3)+\ldots\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\left(\frac{if(p)}{pB_l}(\xi+\eta)-\frac{1}{2}\frac{f^2(p)}{pB_l^2}(\xi^2+\eta^2)-\frac{i}{6}\frac{f^3(p)}{pB_l^3}(\xi^3+\eta^3)+\ldots\right)^2+\ldots\right\}=$$

$$=e^{-i\frac{A_l}{B_l}(\xi+\eta)}\exp\left\{\frac{i(\xi+\eta)}{B_l}\underbrace{\sum_{p\leqslant l,\,p\nmid q}\frac{f(p)}{p}}_{A_l}-\frac{1}{2}\frac{(\xi^2+\eta^2)}{B_l^2}\underbrace{\sum_{p\leqslant l,\,p\nmid q}\frac{f^2(p)}{p}}_{B_l^2}-\frac{i}{6}\frac{\xi^3+\eta^3}{B_l^3}\sum_{p\leqslant l,\,p\nmid q}\frac{f^3(p)}{p}\ldots-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\sum_{p\leqslant l,\,p\nmid q}\frac{1}{p^2}\left(\frac{if(p)}{B_l}(\xi+\eta)-\frac{1}{2}\frac{f^2(p)}{B_l^2}(\xi^2+\eta^2)+\ldots\right)^2+\ldots\right\}=$$

$$=\underbrace{e^{-i\frac{A_l}{B_l}(\xi+\eta)}e^{\frac{i(\xi+\eta)A_l}{B_l}}}_{=1}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\xi^2+\eta^2)-i\frac{\xi^3+\eta^3}{6}\cdot\underbrace{\frac{\sum\limits_{p\leqslant l,\,p\nmid q}\frac{f^3(p)}{p}}{B_l^3}}_{\leqslant\frac{B_l^2}{B_l^3}=\frac{1}{B_l}\to 0,\text{ т.к. }|f(p)|\leqslant 1}-\ldots-\right.$$

$$\left.-\underbrace{\frac{1}{2B_l^2}}_{\to 0}\underbrace{\sum_{p\leqslant l,\,p\nmid q}\frac{1}{p^2}\left(if(p)(\xi+\eta)-\frac{1}{2}\frac{f^2(p)}{B_l}(\xi^2+\eta^2)+\ldots\right)^2}_{\text{ограничено}}+\ldots\right\}\to e^{-\frac{1}{2}(\xi^2+\eta^2)},\ l\to\infty.$$

Отсюда по теореме о непрерывности преобразования Фурье-Стилтьеса (см. [5], с. 105-120) следует утверждение леммы 1.

Сформулируем предварительные утверждения и теорему, на которую будет опираться доказательство леммы 2.

Утверждение 1.

1) $\sum\limits_{p\leqslant x}\dfrac{\ln p}{p}\leqslant \ln x+\dfrac{\ln x}{x}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{2}$;

2) $\sum\limits_{p\leqslant x}\dfrac{\ln p}{p}\geqslant \ln x+\dfrac{\ln x}{2x}+\dfrac{3}{x}-3.$

Доказательство. 1) Заметим, что $\frac{1}{x}\ln[x]!=\frac{1}{x}\sum\limits_{1<k\leqslant x}\ln k=\frac{1}{x}\sum\limits_{1<k\leqslant x}\ln\left(p_{k_1}^{\alpha_{k_1}}p_{k_2}^{\alpha_{k_2}}\cdot\ldots\cdot p_{k_r}^{\alpha_{k_r}}\right)=$

$$= \frac{1}{x}\sum_{1<p\leqslant x}\ln p\left(\left[\frac{x}{p}\right]+\left[\frac{x}{p^2}\right]+\ldots\right)\geqslant \frac{1}{x}\sum_{1<p\leqslant x}\ln p\left[\frac{x}{p}\right]=\sum_{1<p\leqslant x}\frac{\ln p}{p}-\frac{1}{x}\sum_{1<p\leqslant x}\ln p\left\{\frac{x}{p}\right\}.$$ Значит,

$$\sum_{1<p\leqslant x}\frac{\ln p}{p}\leqslant \frac{1}{x}\sum_{1<k\leqslant x}\ln k+\frac{1}{x}\sum_{1<p\leqslant x}\ln p\left\{\frac{x}{p}\right\}.$$

Применим формулу суммирования Эйлера

$$\sum_{a<n\leqslant x} f(n)-\rho(x)f(x)=\int_a^x f(u)du-\int_a^x \rho(u)f'(u)du-\rho(a)f(a)$$

к $\sum\limits_{1<k\leqslant x}\ln k$:

$$\sum_{1<k\leqslant x}\ln k=\rho(x)\ln x+\int_1^x \ln u du-\int_1^x\frac{\rho(u)}{u}du-\rho(1)\ln 1=\rho(x)\ln x+\left(x\ln x-\int_1^x 1du\right)-$$
$$-\int_1^x\frac{\rho(u)}{u}du=x\ln x-x+\rho(x)\ln x-\int_1^x\frac{\rho(u)}{u}du+1.$$

Таким образом,

$$\sum_{1<p\leqslant x}\frac{\ln p}{p}\leqslant \ln x-1+\frac{\rho(x)\ln x}{x}-\frac{1}{x}\int_1^x\frac{\rho(u)}{u}du+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\sum_{1<p\leqslant x}\ln p\left\{\frac{x}{p}\right\}=\ln x+\frac{\rho(x)\ln x}{x}+\frac{1}{x}-1+$$
$$+\frac{1}{x}\left(\sum_{1<p\leqslant x}\ln p\left\{\frac{x}{p}\right\}-\int_1^x\frac{\rho(u)}{u}du\right).$$

Оценим отдельно последнее слагаемое:

$$\frac{1}{x}\left(\sum_{1<p\leqslant x}\ln p\left\{\frac{x}{p}\right\}-\int_1^x\frac{\rho(u)}{u}du\right)\leqslant\frac{1}{x}\left(\sum_{1<p\leqslant x}\ln p-\int_1^x\frac{\rho(u)}{u}du\right)=\frac{1}{x}\left(\sum_{1<p\leqslant x}\ln p-\right.$$
$$\left.-\sum_{1\leqslant k\leqslant [x]-1}\int_k^{k+1}\frac{\rho(u)}{u}du-\int_{[x]}^x\frac{\rho(u)}{u}du\right)=\frac{1}{x}\left(\sum_{1<p\leqslant x}\ln p-\sum_{1\leqslant k\leqslant [x]-1}\left(\rho(u)\ln u\Big|_k^{k+1}+\int_k^{k+1}\ln u du\right)-\right.$$
$$\left.-\int_{[x]}^x\frac{\rho(u)}{u}du\right)=\frac{1}{x}\left(\sum_{1<p\leqslant x}\ln p-\rho([x])\ln[x]-\int_1^{[x]}\ln u du-\rho(x)\ln x+\rho([x])[x]-\int_{[x]}^x\ln u du\right)\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{x}\left(\sum_{1<k\leqslant x}\ln k-\int_1^x\ln u du-\rho(x)\ln x\right)\leqslant\frac{1}{x}\left(\int_1^{x+1}\ln u du-\int_1^x\ln u du-\rho(x)\ln x\right)\leqslant$$
$$\leqslant\frac{\ln(x+1)-\rho(x)\ln x}{x}.$$

Следовательно,

$$\sum_{1<p\leqslant x}\frac{\ln p}{p}\leqslant \ln x+\frac{\rho(x)\ln x}{x}+\frac{1}{x}-1+\frac{\ln(x+1)-\rho(x)\ln x}{x}=\ln x+\frac{1}{x}-1+\frac{\ln x}{x}+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x}\leqslant$$
$$\leqslant \ln x+\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}-1+\ln 2,$$

откуда следует пункт 1) утверждения.

2) Оценим сверху выражение $\frac{1}{x}\ln[x]! = \frac{1}{x}\sum\limits_{1<k\leqslant x}\ln k = \frac{1}{x}\sum\limits_{1<k\leqslant x}\ln\Big(p_{k_1}^{\alpha_{k_1}}p_{k_2}^{\alpha_{k_2}}\cdot\ldots\cdot p_{k_r}^{\alpha_{k_r}}\Big) =$

$$= \frac{1}{x}\sum_{1<p\leqslant x}\ln p\left(\left[\frac{x}{p}\right]+\left[\frac{x}{p^2}\right]+\ldots\right) \leqslant \sum_{1<p\leqslant x}\ln p\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^3}+\ldots\right) = \sum_{1<p\leqslant x}\frac{\ln p}{p}+\sum_{1<p\leqslant x}\underbrace{\frac{\ln p}{p^2}\frac{1}{1-\frac{1}{p}}}_{\frac{\ln p}{p^2-p}}.$$

Следовательно, в силу формулы суммирования Эйлера, имеем:

$$\sum_{1<p\leqslant x}\frac{\ln p}{p} \geqslant \frac{1}{x}\sum_{1<k\leqslant x}\ln k - \sum_{1<p\leqslant x}\frac{\ln p}{p^2-p} = \ln x - 1 + \frac{\rho(x)\ln x}{x} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x}\int\limits_1^x \underbrace{\frac{\rho(u)du}{u}}_{<\ln x,\ \text{т.к. } |\rho(u)|\leqslant\frac{1}{2}} -$$

$$-\sum_{1<p\leqslant x}\frac{\ln p}{p^2-p} \geqslant \ln x - 1 + \frac{(\rho(x)-1)\ln x}{x} + \frac{1}{x} - \sum_{1<n\leqslant x}\frac{\ln n}{\underbrace{n^2-n}_{\geqslant\frac{1}{2}n^2 \text{ при } n\geqslant 2}} \geqslant \ln x - 1 - \frac{3\ln x}{2x} + \frac{1}{x} -$$

$$-\sum_{1<n\leqslant x}\frac{2\ln n}{n^2} \geqslant \ln x - 1 - \frac{3\ln x}{2x} + \frac{1}{x} - \sum_{1<n\leqslant x}\underbrace{\frac{2\ln n}{n^2}}_{\downarrow \text{ при } n>\sqrt{e}\approx 1{,}65} \geqslant \ln x - 1 - \frac{3\ln x}{2x} + \frac{1}{x} - 2\int\limits_1^x \ln u\, d\left(-\frac{1}{u}\right) =$$

$$= \ln x - 1 - \frac{3\ln x}{2x} + \frac{1}{x} + 2\frac{\ln x}{x} + \frac{2}{x} - 2 \geqslant \ln x + \frac{\ln x}{2x} + \frac{3}{x} - 3.$$

Теорема А. ([4])

Пусть выполнены условия:

a) A, Q – положительные константы.

b) $q_1, q_2, \ldots q_r$ – простые числа, $k > 0$ – целое число, взаимно простое с q_i для любого $i = 1, \ldots r$;

$\alpha_i \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha_i < q_i$ при $0 < i \leqslant T$;

$a_{ij} \in \mathbb{Z}$, $1 \leqslant i \leqslant T$, $1 \leqslant j \leqslant \alpha_i$, *при этом в случае $i \neq j$ выполнено сравнение* $a_{ij} \not\equiv a_{ik} \pmod{q_i}$;

$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ – целочисленная функция;

$N_t(k) = \sum\limits_m 1$, *где суммирование берется по всем целым числам m таким, что одновременно выполнено:*

1) m удовлетворяет некоторому фиксированному условию, не зависящему от $t, k, l, q_i, a_{ij}, \alpha_i$,

2) $f(m) \equiv l \pmod{k}$,

3) $f(m) \not\equiv a_{ij} \pmod{q_i}$, $\quad 1 \leqslant i \leqslant t$, $1 \leqslant j \leqslant \alpha_i$.

c) $N_t(k) \geqslant 0$ при $0 \leqslant t \leqslant T$.

d) Существуют $X, C > 0$, независящие от k, такие, что $|N_0(k) - F_0(k)| < C$ для всех k, l, где

$$F_t(k) = \frac{X}{k}\prod_{i=1}^{t}\left(1 - \frac{\alpha_i}{q_i}\right).$$

e) $q_1 < q_2 < \ldots < q_r$.

f) $Y \in \mathbb{R}$ такое, что $q_t \leqslant Y$ для любого $t \leqslant T$.

g) Существует $\eta, 0 < \eta < 1$, такое, что для некоторого x_0 выполнены неравенства

$$10^3 \leq x_0 \leqslant e^{(\ln Y)^\eta},$$

$$\left|\sum_{q_i\leqslant x}\frac{\alpha_i \ln q_i}{q_i} - Q\ln x\right| < \frac{A\ln x}{(\ln\ln x)^2} \text{ для } x > x_0.$$

h) Существует $v \in (0,1)$ *такое, что для всех* i $0 < \dfrac{\alpha_i}{q_i} \leqslant v < 1$.

i) $0.003eQ\ln\ln Y \geqslant 2$.

j) Существует $\omega \in \mathbb{R}$ *такое, что* $\omega > 1$, $eQ\ln\omega \leqslant \dfrac{3(1-\eta)}{2}$.

k) Обозначим

$$Z = \sum_{i=1}^{t}\frac{\alpha_i}{q_i}; \quad W = \frac{36A(1-v)+9AQ+9A^2}{(1-v)\ln\ln Y}; \quad z = \frac{36A}{Q\ln\omega\ln\ln Y}.$$

l) $Z \leqslant 4Q\dfrac{\ln\ln Y}{3}$.

m) n *– нечетное натуральное число, большее 2.*

Тогда:

$$N_t(k) \leqslant F_t(k)\left(1-(-1)^n\frac{e^{W+2z+2}}{\sqrt{2\pi n}e^{n\frac{4-\omega^Q(eQ\ln\omega)^2}{4}}}\right) - (-1)^n\frac{X}{k}\left(\frac{3Z}{4Q\ln\ln Y}\right)^{\frac{4Qe\ln\ln Y}{3}} - $$
$$- (-1)^n CY^{n-1+\frac{2}{\omega-1}}e^Z. \quad (8)$$

При этом если в пункте m) n *– четное натуральное число, большее 2, то в* (8) *знак "*$\leqslant$*" меняется на "*$\geqslant$*".*

Пусть $\Phi(n)$ – положительная функция, которая стремится к 0 при $n\to\infty$ таким образом, что

$$\frac{1}{\Phi(n)} = o((\ln\ln n)^2)$$

и также

$$\frac{1}{\Phi(n)} = o(B_n).$$

Из первого соотношения следует, что $\dfrac{1}{\Phi(n)(\ln\ln n)^2} \underset{n\to\infty}{\to} 0$, откуда $\Phi(n) \underset{n\to\infty}{>>} \dfrac{1}{(\ln\ln n)^2}$.

Пусть $n^{\Phi(n)} = \alpha_n$, $n^{(\Phi(n))^{1/2}} = \beta_n$; очевидно, что $\alpha_n\to\infty, \beta_n\to\infty$ при $n\to\infty$.

Пусть $a_1(n), a_2(n), \ldots$ – целые числа, все простые делители которых меньше, чем α_n, а $\psi(m,n) =$
$= \max\{a_i(n) : a_i(n) \mid m\}$. Обозначим через $q_1, q_2, \ldots, q_{T_n}$ простые числа, меньшие α_n.

Верна следующая лемма:

Лемма 2. *Пусть* $q = q(n)$ *– член некоторой последовательности, принимающей натуральные значения,* φ *– функция Эйлера.*

Обозначим $N(n,q) = \left|\left\{m\in\mathbb{N} : \begin{array}{l} m\leqslant n, \\ \psi(mq+1,n) = a_\kappa(n), \\ \psi((m+1)q+1,n) = a_\lambda(n), \\ \text{где } a_\kappa, a_\lambda \leqslant \beta_n \end{array}\right\}\right|.$

$$\textit{Тогда } N(n,q)=\begin{cases}0, \textit{ если } (a_\kappa,a_\lambda)>1 \textit{ или } 2\nmid a_\kappa a_\lambda,\\ \dfrac{nq}{4\varphi(a_\kappa a_\lambda)}\prod\limits_{i=2}^{T_n}\left(1-\dfrac{2}{q_i}\right)\prod\limits_{2\leqslant i\leqslant T_n, q_i|a_\kappa a_\lambda}\left(1+\dfrac{1}{q_i(q_i-2)}\right)\times\\ \times\prod\limits_{\substack{2\leqslant i\leqslant T_n\\ q_i\mid q,\, q_i\nmid a_\kappa a_\lambda}}\left(1+\dfrac{1}{q_i-2}\right)(1+o(1)), \textit{ иначе.}\end{cases}$$

Доказательство. Пусть n – фиксированное натуральное число. Рассмотрим сначала случай, когда $q=q(n)$ – нечетное натуральное число.

1) Пусть $(a_\kappa,a_\lambda)>1$ или $2\nmid a_\kappa a_\lambda$.

Из условия $\psi(mq+1,n)=a_\kappa(n)$ следует, что $a_\kappa\mid mq+1$. Аналогично $a_\lambda\mid(m+1)q+1$.

Если $(a_\kappa,a_\lambda)=d>1$, то $d\mid mq+1$, $d\mid(m+1)q+1$. Тогда $d\mid q$ и $d\mid 1$. Противоречие.

Если $2\nmid a_\kappa a_\lambda$, то a_κ,a_λ – нечетные числа. Так как q – нечетное по предположению, то среди чисел $mq+1$, $(m+1)q+1$ есть четное число. Без ограничения общности, пусть $mq+1$ – четное. Тогда $mq+1=\underbrace{2^{k_1}3^{k_2}\dots q_{T_n}^{k_{T_N}}}_{\in\{a_i(n)\},\text{ т.к. все } q_i<\alpha_n}\cdot p_1^{r_1}\dots p_s^{r_s}=a_{\gamma_0}(n)\cdot p_1^{r_1}\dots p_s^{r_s}$. $a_{\gamma_0}(n)$ делит $mq+1$, при этом это максимальное $a_i(n)$, обладающее этим свойством. Следовательно, $a_\kappa=a_{\gamma_0}=2^{k_1}3^{k_2}\dots q_{T_n}^{k_{T_N}}$, при этом $k_1>0$ по предположению. Получаем противоречие с нечетностью a_κ.

Следовательно, $N(n,q)=0$, если $(a_\kappa,a_\lambda)>1$ или $2\nmid a_\kappa a_\lambda$.

Замечание 9. *Заметим, что если q – четное, то $N(n,q)\neq 0$, вообще говоря, если $(a_\kappa,a_\lambda)>1$ или $2\nmid a_\kappa a_\lambda$.*

Действительно, если q – четное, то и $mq+1$, и $(m+1)q+1$ – оба нечетные, поэтому прийти к противоречию тем же способом нельзя.

2) Пусть $(a_\kappa,a_\lambda)=1$, $2\mid a_\kappa a_\lambda$.

Условие $\begin{cases}a_\kappa\mid mq+1\\ a_\lambda\mid(m+1)q+1\end{cases}$ равносильно $\begin{cases}mq+1=Ra_\kappa\\ (m+1)q+1=Sa_\lambda\end{cases}$, где у R и S все простые делители $\geqslant\alpha_n$ по определению функции ψ.

Отсюда следует, что $Ra_\kappa+q=(m+1)q+1=Sa_\lambda\equiv 0 \pmod{a_\lambda}$, то есть $Ra_\kappa\equiv -q \pmod{a_\lambda}$. Последнее сравнение разрешимо тогда и только тогда, когда $(R,a_\lambda)=1\mid -q$, что верно. Следовательно, существует единственное решение сравнения $0<r_0<a_\lambda$ такое, что $r_0a_\kappa\equiv -q \pmod{a_\lambda}$. В частности, отсюда получаем, что $\dfrac{r_0a_\kappa+q}{a_\lambda}=:b_0\in\mathbb{Z}$.

Все решения сравнения $Ra_\kappa\equiv -q \pmod{a_\lambda}$ представимы в виде $R=r_0+ga_\lambda$, $g\in\mathbb{Z}$. При этом $S=\dfrac{Ra_\kappa+q}{a_\lambda}=\dfrac{r_0a_\kappa+q}{a_\lambda}+ga_\kappa=b_0+ga_\kappa$.

Таким образом, нам достаточно найти количество возможных $R=r_0+ga_\lambda\not\equiv 0 \pmod{q_i}$, с условием, что $S=b_0+ga_\kappa\not\equiv 0 \pmod{q_i}$, $1\leqslant i\leqslant T_n$.

Рассмотрим подробнее систему сравнений:

$$\begin{cases}r_0+ga_\lambda\not\equiv 0 \pmod{q_i}\\ b_0+ga_\kappa\not\equiv 0 \pmod{q_i}\end{cases}\iff\begin{cases}ga_\lambda\not\equiv -r_0 \pmod{q_i}\\ ga_\kappa\not\equiv -b_0 \pmod{q_i}\end{cases}.$$

а) Если $q_i\mid a_\lambda$, то $ga_\lambda\equiv 0\not\equiv -r_0 \pmod{q_i}$, так как $r_0=\underbrace{R}_{\not\,\vdots\, q_i}-\underbrace{ga_\lambda}_{\vdots\, q_i}\not\equiv 0 \pmod{q_i}$. Первое сравнение в системе выше выполнено.

б) Если $q_i \mid a_\kappa$, то $ga_\kappa \equiv 0 \not\equiv -b_0 \pmod{q_i}$ аналогично. Второе сравнение в системе выше выполнено.

в) Если $q_i \nmid a_\lambda$, $q_i \nmid a_\kappa$, то получаем $\begin{cases} ga_\lambda \not\equiv -r_0 \pmod{q_i} \\ ga_\kappa \not\equiv -b_0 \pmod{q_i} \end{cases} \iff \begin{cases} g \not\equiv e_i \pmod{q_i} \\ g \not\equiv f_i \pmod{q_i} \end{cases}$, так как a_λ, a_κ – обратимые элементы по модулю q_i.

Рассмотрим, может ли e_i быть сравнимо с f_i по модулю q_i.

- Предположим, что $q_i \nmid q$ и $e_i \equiv f_i \pmod{q_i}$. Тогда $e_i = -r_0 \cdot (a_\lambda)^{-1} \equiv -b_0(a_\kappa)^{-1} = f_i \pmod{q_i}$. Обозначим $g' = -r_0(a_\lambda)^{-1} \equiv -b_0(a_\kappa)^{-1}$. Тогда g' является решением следующей системы сравнений: $\begin{cases} g'a_\lambda \equiv -r_0 \\ g'a_\kappa \equiv -b_0 \end{cases} \Longrightarrow g'a_\kappa \equiv -\underbrace{\dfrac{r_0a_\kappa + q}{a_\lambda}}_{=b_0} \Longrightarrow \underbrace{g'a_\lambda}_{\equiv -r_0} a_\kappa \equiv -r_oa_\kappa + q \Longrightarrow$

  $\Longrightarrow q \equiv 0 \pmod{q_i}$. Противоречие с предположением $q_i \nmid q$.

- Пусть теперь $q_i \mid q$. $e_i = -r_0(a_\lambda)^{-1}$, $f_i = -b_0(a_\kappa)^{-1}$. Так как $q_i \nmid a_\kappa a_\lambda$ имеем:

  $e_i \equiv f_i \Leftrightarrow r_0(a_\lambda)^{-1} \equiv b_0(a_\kappa)^{-1} \Leftrightarrow (r_0(a_\lambda)^{-1} - b_0(a_\kappa)^{-1})a_\lambda a_\kappa \equiv 0 \Leftrightarrow r_0a_\kappa \equiv b_0a_\lambda =$
  $= \dfrac{r_0a_\kappa + q}{a_\lambda} a_\lambda \Leftrightarrow q \equiv 0$ – верное сравнение. Значит, если $q_i \mid q$, то $e_i \equiv f_i \pmod{q_i}$.

Таким образом, нам необходимо и достаточно найти количество целых g таких, что

а) $0 < g < \dfrac{nq + 1 - a_\kappa r_0}{a_\kappa a_\lambda}$.

Действительно, $mq + 1 = Ra_\kappa = (r_0 + ga_\lambda)a_\kappa \leqslant nq + 1$, следовательно, $0 < g \leqslant \dfrac{\frac{nq+1}{a_\kappa} - r_0}{a_\lambda}$, откуда вытекает требуемая оценка.

б) $g \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow g \equiv 0 \pmod 1$.

в)

- если $1 \leqslant i \leqslant T_n$, $q_i \nmid a_\kappa, q_i \nmid a_\lambda$, $q_i \nmid q$, то $\begin{cases} g \not\equiv e_i \pmod{q_i} \\ g \not\equiv f_i \pmod{q_i} \end{cases}$.
- если $1 \leqslant i \leqslant T_n$, $q_i \nmid a_\kappa, q_i \nmid a_\lambda$, $q_i \mid q$, то $g \not\equiv e_i \pmod{q_i}$.
- если $1 \leqslant i \leqslant T_n$, $q_i \mid a_\kappa, q_i \nmid a_\lambda$, то $g \not\equiv e_i \pmod{q_i}$.
- если $1 \leqslant i \leqslant T_n$, $q_i \nmid a_\kappa, q_i \mid a_\lambda$, то $g \not\equiv f_i \pmod{q_i}$.

Пусть $N_t(k), 0 \leqslant t \leqslant T_n$ – количество целых g удовлетворяющих условиям а), в) (с T_n замененным на t) и б)': $g \equiv l \pmod{q_i}$, где l пробегает целые значения на полуинтервале $[0, k)$, $(k, q_i) = 1$ при $i = 1, \ldots t$.

Тогда $N_{T_n}(1) = N(n, q)$ из условия леммы.

Также обозначим $F_t(k) = \dfrac{nq}{ka_\kappa a_\lambda} \prod\limits_{i=1}^{t} \left(1 - \dfrac{\alpha_i}{q_i}\right)$, где $\alpha_i = \begin{cases} 1, q_i \mid a_\kappa a_\lambda \text{ или } q_i \mid q, q_i \nmid a_\kappa a_\lambda, \\ 2, \text{ иначе.} \end{cases}$

(Почему α_i определено таким образом будет сказано ниже, пункт **b)**).

Заметим, что $\alpha_1 = 1$, так как $q_1 = 2 \mid a_\kappa a_\lambda$.

Найдем значение $N_0(k)$. $N_0(k)$ – это количество целых g удовлетворяющих условиям

$$\begin{cases} \text{а) } 0 < g < \dfrac{nq + 1 - a_\kappa r_0}{a_\kappa a_\lambda} \\ \text{б)' } g \equiv 0 \pmod k \\ \text{в) } \varnothing (\text{так как условие } 1 \leqslant i \leqslant t = 0 \text{ не выполняется}) \end{cases}$$

Следовательно, $N_0(k)=\left[\dfrac{nq+1-a_\kappa r_0}{ka_\kappa a_\lambda}\right]$, $F_0(k)=\dfrac{nq}{ka_\kappa a_\lambda}$. Имеем:

$|N_0(k)-F_0(k)|=\left|\left[\dfrac{nq+1-a_\kappa r_0}{ka_\kappa a_\lambda}\right]-\dfrac{nq}{ka_\kappa a_\lambda}\right|=\left|\left[\dfrac{nq}{ka_\kappa a_\lambda}-\dfrac{a_\kappa r_0-1}{ka_\kappa a_\lambda}\right]-\dfrac{nq}{ka_\kappa a_\lambda}\right|<2$, так как $\left|\dfrac{\overbrace{a_\kappa r_0}^{\geqslant 1}-1}{ka_\kappa a_\lambda}\right|=\dfrac{a_\kappa r_0-1}{ka_\kappa a_\lambda}<\dfrac{r_0}{ka_\lambda}<1$.

Применим теорему A. Проверим выполнение условий теоремы и подберем необходимые константы:

a) Возьмем $A=1, Q=2$.

b) $T=\infty, f(m)=m$.

Фиксированное условие суммирования в $N_t(k)$ – условие $0\leqslant g\leqslant \dfrac{nq}{a_\kappa a_\lambda}=X$. Условия 2) и 3) – это условия б)' и в).

$\alpha_{i1}=e_i, \alpha_{i2}=f_i$. Следовательно, α_i должно быть равно 1, когда на g накладывается только одно условие несравнимости, и α_i должно быть равно 2, когда g должно быть несравнимо и с e_i, и с f_i. Отсюда определяем $\alpha_i=\begin{cases}1, q_i\mid a_\kappa a_\lambda \text{ или } q_i\mid q, q_i\nmid a_\kappa a_\lambda,\\ 2, \text{ иначе.}\end{cases}$

c) Очевидно, выполняется.

d) $X=\dfrac{nq}{a_\kappa a_\lambda}, C=2$.

e) Выполнено.

f) $t=\pi(\alpha_n)=T_n$, $Y=q_{T_n}\Leftrightarrow q_t\leqslant Y$.

Заметим, что $Y\sim T_n\ln T_n\sim \dfrac{\alpha_n}{\ln\alpha_n}\cdot\ln\dfrac{\alpha_n}{\ln\alpha_n}\sim\dfrac{\alpha_n}{\ln\alpha_n}\cdot(\ln\alpha_n-\ln\ln\alpha_n)=\alpha_n\left(1-\dfrac{\ln\ln\alpha_n}{\ln\alpha_n}\right)\sim\alpha_n$ при $n\to\infty$.

g) Рассмотрим $S=\sum\limits_{q_i\leqslant x}\dfrac{\alpha_i\ln q_i}{q_i}-2\ln x\leqslant 2\sum\limits_{q_i\leqslant x}\dfrac{\ln q_i}{q_i}-2\ln x\overset{\text{Утверждение 1}}{<}2\left(\dfrac{\ln x}{x}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{2}\right)<5$.

Оценим S снизу. Для этого заметим, что

$$S=\sum_{q_i\leqslant x}\frac{\alpha_i\ln q_i}{q_i}-2\ln x=2\sum_{q_i\leqslant x}\frac{\ln q_i}{q_i}-\sum_{q_i\leqslant x,\,\alpha_i=1}\frac{\ln q_i}{q_i}-2\ln x.$$

Но количество α_i, равных 1, не больше количества q_i, делящих $a_\kappa a_\lambda$ или q. Следовательно, количество слагаемых во второй сумме не превосходит $\log_2 a_\kappa a_\lambda+\log_2 q<\ln X$ при достаточно большом n. Следовательно,

$$S\geqslant 2\sum_{q_i\leqslant x}\frac{\ln q_i}{q_i}-\sum_{q_i\leqslant \ln X}\frac{\ln q_i}{q_i}-2\ln x\overset{\text{Утверждение 1}}{>}\frac{\ln x}{x}-3-\left(\ln\ln X+\frac{\ln\ln X}{\ln X}+\frac{1}{\ln X}+\frac{3}{2}\right)>$$
$$>-\ln\ln X-6.$$

Отсюда получаем, что $|S|<6+\ln\ln X$.

Пусть $\eta=\dfrac{2}{3}$, $x_0=e^{(\ln\ln X)^2}$. Тогда $x_0<e^{(\ln Y)^{\frac{2}{3}}}$ для достаточно большого n. Действительно, сравним $(\ln\ln X)^2$ и $(\ln Y)^{\frac{2}{3}}$:

$(\ln Y)^{\frac{2}{3}}\sim(\ln\alpha_n)^{\frac{2}{3}}=(\ln n^{\Phi(n)})^{\frac{2}{3}}=(\Phi(n)\ln n)^{\frac{2}{3}}>\left(\dfrac{\ln n}{(\ln\ln n)^2}\right)^{\frac{2}{3}}>2(\ln\ln n)^2>(\ln\ln(nq))^2>$ $>(\ln\ln X)^2$ для достаточно больших n, что и требовалось.

Следовательно, найдется x_0 такой, что $|S| < 6+\ln\ln X = 6+\sqrt{\ln x_0} < \dfrac{\ln x}{(\ln\ln x)^2}$ при $x > x_0$.

h) Возьмем $v = \frac{2}{3}$. Тогда $0 < \dfrac{\alpha_i}{q_i} \leqslant v < 1$, так как $\alpha_1 = 1, q_1 = 2$, а при $i \geqslant 2$ имеем $\alpha_i \leqslant 2$, $q_i \geqslant 3$.

Замечание 10. *Заметим, что если q – четное, то*

- *если $q_1 = 2 \mid a_\kappa a_\lambda$, то $\alpha_1 = 1$ по определению.*
- *если $q_1 = 2 \nmid a_\kappa a_\lambda$, то $q_1 = 2 \mid q$, так как q – четное, следовательно, $\alpha_1 = 1$ по определению.*

Следовательно, пункт h) выполнен и в случае четного q.

i) Верно для достаточно большого n.

j) Возьмем некоторое $\omega \in (1, \frac{6}{5})$. Тогда должно быть разрешимо неравенство $eQ\ln\omega = 2e\ln\omega \leqslant \frac{3}{2}(1-\eta) = \frac{1}{2}$. Действительно, данное неравенство равносильно неравенству $\ln\omega < \frac{1}{4e} \Leftrightarrow \omega < e^{\frac{1}{4e}} \approx 1,096$.

k)

$$Z = \sum_{i=1}^{t}\frac{\alpha_i}{q_i}; \quad W = \frac{12+18+9}{\frac{1}{3}\ln\ln Y} = \frac{117}{\ln\ln Y}; \quad z = \frac{18}{\ln\omega\ln\ln Y}.$$

l) Докажем, что $Z \leqslant 8\dfrac{\ln\ln Y}{3}$.

Так как $q_i > ci\ln i$ при $i \geqslant 2$ по оценкам Чебышева, то имеем:
$Z \leqslant 2\sum\limits_{i=1}^{t}\dfrac{1}{q_i} \leqslant 1+\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{3}\sum\limits_{i=3}^{t}\dfrac{1}{i\ln i} \leqslant \dfrac{5}{3}+\int\limits_{2}^{t}\dfrac{du}{u\ln u} = \dfrac{5}{3}+\ln\ln t-\ln\ln 2 \leqslant 2\ln\ln T_n \leqslant 2\ln\ln q_{T_n} = 2\ln\ln Y$, откуда следует требуемая оценка.

m) Переобозначим n за ν – нечетное натуральное число, большее 2, которое мы выберем позже. Тогда по теореме А имеем:

$$N_t(k) \leqslant F_t(k)\left(1-(-1)^\nu\frac{e^{W+\frac{4}{3}+2}}{\sqrt{2\pi\nu}e^{\nu\frac{4-\omega^2(2e\ln\omega)^2}{4}}}\right)-(-1)^\nu\frac{X}{k}\left(\frac{3Z}{8\ln\ln Y}\right)^{\frac{8e\ln\ln Y}{3}} -$$
$$-(-1)^\nu 2Y^{\nu-1+\frac{2}{\omega-1}}e^Z. \quad (9)$$

Докажем, что правая часть (9) равна $F_t(k)(1+o(1)), n\to\infty$.

а) $$\frac{e^{W+2z+2}}{\sqrt{2\pi\nu}e^{\nu\frac{4-\omega^2(2e\ln\omega)^2}{4}}} = \frac{e^{\overbrace{W+2z}^{\to 0}+2}}{\underbrace{\sqrt{2\pi\nu}}_{\to\infty}e^{\nu(1-\omega^2e^2\ln^2\omega)}} \to 0 \text{ при } \nu\to\infty.$$

Значит, подберем ν так, чтобы оно стремилось к бесконечности с ростом n.

б) Известна оценка (см. [8], с. 36-37) $\prod\limits_{i=1}^{t}\left(1-\dfrac{2}{q_i}\right) \geqslant \dfrac{c}{(\ln q_t)^2}$. Отсюда

$F_t(k) = \dfrac{nq}{ka_\kappa a_\lambda}\prod\limits_{i=1}^{t}\left(1-\dfrac{\alpha_i}{q_i}\right) > \dfrac{X}{k}\prod\limits_{i=1}^{t}\left(1-\dfrac{2}{q_i}\right) \geqslant \dfrac{X}{k}\dfrac{c}{(\ln q_t)^2} \geqslant \dfrac{X}{k}\dfrac{c}{(\ln Y)^2}$. При этом

$$\ln Y \sim \ln\alpha_n = \ln n^{\Phi(n)} = \Phi(n)\ln n.$$

Следовательно,

$$F_t(k) \geqslant \frac{cX}{k(\Phi(n)\ln n)^2}.$$

Докажем, что $\dfrac{X}{k}\left(\dfrac{3Z}{8\ln\ln Y}\right)^{\frac{8e\ln\ln Y}{3}} = o(F_t(k)),\ n\to\infty.$

Заметим, что в силу неравенства Чебышева $q_n > cn\ln n$ при $n\geqslant 2$ имеем

$$Z=\sum_{i=1}^{t}\frac{\alpha_i}{q_i}\leqslant 2\sum_{i=1}^{t}\frac{1}{q_i}<\frac{2}{2}+\frac{2}{3}+\frac{2}{c}\sum_{i=3}^{t}\frac{1}{i\ln i}<\frac{5}{3}+\frac{2}{c}\int\limits_2^t\frac{du}{u\ln u}<$$
$$<\frac{5}{3}+\frac{2}{c}\ln\ln t-\frac{2}{c}\ln\ln 2<\ln\ln Y. \quad (10)$$

Таким образом, имеем:

$$\frac{X}{k}\Bigg(\underbrace{\frac{3Z}{8\ln\ln Y}}_{<\frac{3}{8}}\Bigg)^{\frac{8e\ln\ln Y}{3}}<\frac{X}{k}\left(\frac{3}{8}\right)^{\frac{8e\ln\ln Y}{3}}<\frac{X}{k}e^{8\ln\frac{3}{8}\ln\ln Y}=\frac{X}{k}\frac{1}{(\ln Y)^{8\ln\frac{8}{3}}}\sim$$
$$\sim\frac{X}{k}\frac{1}{(\Phi(n)\ln n)^{8\ln\frac{8}{3}}}=\left|8\ln\frac{8}{3}\approx 7,85>2\right|=o(F_t(k)),\ n\to\infty.$$

в) В силу (10) имеем

$$2Y^{\nu-1+\frac{2}{\omega-1}}e^{Z}<2Y^{\nu-1+\frac{2}{\omega-1}}e^{\ln\ln Y}=2Y^{\nu-1+\frac{2}{\omega-1}}\ln Y<2\alpha_n^{\nu-1+\frac{2}{\omega-1}}\ln\alpha_n\boxed{<}$$

Выберем ν и ω следующим образом:

$$\nu=\begin{cases}\left[\frac{1}{\Phi^{\frac12}}\right], & \text{если } \left[\frac{1}{\Phi^{\frac12}}\right] - \text{ нечетное},\\ 1+\left[\frac{1}{\Phi^{\frac12}}\right], & \text{иначе.}\end{cases}\qquad \omega=1+\Phi^{\frac12}$$

$$\boxed{<}2n^{\Phi\cdot(\Phi^{-\frac12}-1)+2\Phi^{\frac12}}\Phi\ln n=2n^{3\Phi^{\frac12}-\Phi}\Phi\ln n=o(n^{\delta}) \text{ для любого наперед заданного } \delta>0.$$

В то же время по уже доказанному

$$F_t(k)\geqslant\frac{cX}{k(\Phi(n)\ln n)^2},$$

$$X=\frac{nq}{\underbrace{a_\kappa a_\lambda}_{\leqslant\beta_n^2=\alpha_n}}\geqslant\frac{n}{n^{\Phi(n)}}\geqslant n^{1-\delta} \text{ для любого наперед заданного } \delta>0,$$

следовательно, $F_t(k)\geqslant n^{1-2\delta}$, откуда следует, что $2Y^{\nu-1+\frac{2}{\omega-1}}e^{Z}=o(F_t(k))$.

Из а), б), в) следует, что

$$N_t(k)\leqslant F_t(k)(1+o(1))$$

Аналогично с помощью замены нечетного ν на четное доказывается

$$N_t(k)\geqslant F_t(k)(1+o(1)).$$

Следовательно, $N_t(1)=F_t(1)(1+o(1))$. Найдем $F_{T_n}(1)$:

$$F_{T_n}(1)=\frac{nq}{a_\kappa a_\lambda}\prod_{i=1}^{T_n}\left(1-\frac{\alpha_i}{q_i}\right)=\left|\begin{array}{c}\alpha_1=1,\\ q_1=2\end{array}\right|=\frac{nq}{2a_\kappa a_\lambda}\prod_{i=2}^{T_n}\left(1-\frac{\alpha_i}{q_i}\right)=\frac{nq}{2a_\kappa a_\lambda}\prod_{i=2}^{T_n}\left(1-\frac{2}{q_i}\right)\times$$

$$\times\frac{\prod\limits_{\alpha_i=1}\left(1-\frac{1}{q_i}\right)}{\prod\limits_{\alpha_i=1}\left(1-\frac{2}{q_i}\right)}=\frac{nq}{2a_\kappa a_\lambda}\prod_{i=2}^{T_n}\left(1-\frac{2}{q_i}\right)\cdot\left(\prod_{\substack{2\leqslant i\leqslant T_n,\, q_i\mid a_\kappa a_\lambda\\ \text{или } q_i\mid q,\, q_i\nmid a_\kappa a_\lambda}}\frac{1-\frac{1}{q_i}}{1-\frac{2}{q_i}}\right)\times$$

$$\times\underbrace{\frac{\prod\limits_{\substack{2\leqslant i\leqslant T_n,\\ q_i\mid a_\kappa a_\lambda}}\left(1-\frac{1}{q_i}\right)}{2\prod\limits_{\substack{1\leqslant i\leqslant T_n,\\ q_i\mid a_\kappa a_\lambda}}\left(1-\frac{1}{q_i}\right)}}_{=1}=\left|\varphi(a_\kappa a_\lambda)=a_\kappa a_\lambda\prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant T_n,\\ q_i\mid a_\kappa a_\lambda}}\left(1-\frac{1}{q_i}\right)\right|=$$

$$=\frac{nq}{4\varphi(a_\kappa a_\lambda)}\prod_{i=2}^{T_n}\left(1-\frac{2}{q_i}\right)\cdot\prod_{\substack{2\leqslant i\leqslant T_n,\, q_i\mid a_\kappa a_\lambda\\ \text{или } q_i\mid q,\, q_i\nmid a_\kappa a_\lambda}}\left(1+\frac{1}{q_i-2}\right)\cdot\prod_{\substack{2\leqslant i\leqslant T_n,\\ q_i\mid a_\kappa a_\lambda}}\left(1-\frac{1}{q_i}\right)=$$

$$=\frac{nq}{4\varphi(a_\kappa a_\lambda)}\prod_{i=2}^{T_n}\left(1-\frac{2}{q_i}\right)\cdot\prod_{\substack{2\leqslant i\leqslant T_n\\ q_i\mid a_\kappa a_\lambda}}\left(1+\frac{1}{q_i-2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{q_i}\right)\cdot\prod_{\substack{2\leqslant i\leqslant T_n\\ q_i\mid q,\, q_i\nmid a_\kappa a_\lambda}}\left(1+\frac{1}{q_i-2}\right)=$$

$$=\frac{nq}{4\varphi(a_\kappa a_\lambda)}\prod_{i=2}^{T_n}\left(1-\frac{2}{q_i}\right)\cdot\prod_{\substack{2\leqslant i\leqslant T_n\\ q_i\mid a_\kappa a_\lambda}}\left(1+\frac{1}{q_i(q_i-2)}\right)\cdot\prod_{\substack{2\leqslant i\leqslant T_n\\ q_i\mid q,\, q_i\nmid a_\kappa a_\lambda}}\left(1+\frac{1}{q_i-2}\right),$$

откуда следует утверждение леммы для нечетного q. Для четного q утверждение также верно в силу замечания 2.

Лемма 3. *Обозначим* $N(M,n)=|\{m\in\mathbb{N}|m\leqslant M,\exists i: a_i(n)\mid m, a_i(n)>\beta_n\}|$. *Тогда*

$$N(M,n)<bM(\Phi(n))^{\frac{1}{2}},$$

где b – положительная константа.

Доказательство. См. [3].

Лемма 4. *Пусть*

$$l_n(\omega_1,\omega_2)=\left|\{m\in\mathbb{N}: m\leqslant n, f^q_{\alpha_n}(m)<A_{\alpha_n}+\omega_1B_{\alpha_n}, f^q_{\alpha_n}(m+1)<A_{\alpha_n}+\omega_2B_{\alpha_n}\}\right|.$$

Тогда $l_n(\omega_1,\omega_2)=nD(\omega_1)D(\omega_2)+o(n)$.

Доказательство. Разделим все целые числа $m \leqslant n$, удовлетворяющие неравенствам

$$\begin{cases} f^q_{\alpha_n}(m) < A_{\alpha_n} + \omega_1 B_{\alpha_n}, \\ f^q_{\alpha_n}(m+1) < A_{\alpha_n} + \omega_2 B_{\alpha_n}, \end{cases} \tag{11}$$

на классы E_{jk} таким образом, что $m \in E_{jk} \Longleftrightarrow \begin{cases} \psi(mq+1,n) = a_j(n) \\ \psi((m+1)q+1,n) = a_k(n) \end{cases}$.

Имеем: $l_n(\omega_1,\omega_2) = \sum\limits_{j,k} |E_{jk}| = \sum\limits_{j,k\colon a_j,a_k \leqslant \beta_n} |E_{jk}| + \sum\limits_{j,k\colon a_j>\beta_n \text{ или } a_k>\beta_n} |E_{jk}|$.

В силу леммы 3 $\sum\limits_{j,k\colon a_j>\beta_n \text{ или } a_k>\beta_n} |E_{jk}| < bn(\Phi(n))^{\frac{1}{2}} = o(n), n \to \infty$ и, следовательно, достаточно доказать, что $\sum\limits_{j,k\colon a_j,a_k \leqslant \beta_n} |E_{jk}| = nD(\omega_1)D(\omega_2) + o(n), n \to \infty$.

По лемме 2 имеем:

$$\sum_{a_j,a_k \leqslant \beta_n} |E_{jk}| = \frac{nq}{4} \prod_{i=2}^{T_n} \left(1 - \frac{2}{q_i}\right) \sum_{a_j,a_k \leqslant \beta_n}{}' \frac{P(a_j,a_k,n)}{\varphi(a_j a_k)} (1+o(1)),$$

где

$$P(a_j,a_k,n) = \prod_{2 \leqslant i \leqslant T_n, q_i | a_j a_k} \left(1 + \frac{1}{q_i(q_i-2)}\right) \prod_{\substack{2 \leqslant i \leqslant T_n \\ q_i \mid q,\, q_i \nmid a_j a_k}} \left(1 + \frac{1}{q_i - 2}\right),$$

а штрих означает суммирование по a_j, a_k, удовлетворяющим условиям

$$f_{\alpha_n}(a_j) < A_{\alpha_n} + \omega_1 B_{\alpha_n},\ f_{\alpha_n}(a_k) < A_{\alpha_n} + \omega_2 B_{\alpha_n},$$
$$(a_j,a_k) = 1; 2 \mid a_j a_k,$$
$$f_\alpha(m) = \sum_{\substack{p \mid m, \\ p \leqslant \alpha}} f(p)$$

Действительно, если $m \in E_{jk}$, то в силу определения функции ψ и аддитивности f_{α_n} имеем $f^q_{\alpha_n}(m) =$
$= f_{\alpha_n}(mq+1) = f_{\alpha_n}(r \cdot a_j) = f_{\alpha_n}(r) + f_{\alpha_n}(a_j) = f_{\alpha_n}(a_j)$, так как r – делитель $mq+1$, все простые делители которого больше α_n. Аналогично $f^q_{\alpha_n}(m+1) = f_{\alpha_n}(a_k)$.

Теперь разделим все целые числа, удовлетворяющие (11), на классы F_{jk} таким образом, что
$m \in F_{jk} \Longleftrightarrow \begin{cases} \psi(mq+1,n) = a_j(n) \\ \psi((m+1)q+1,n) = a_k(n) \end{cases}$, и пусть $\{F_{jk}\}$ обозначает плотность F_{jk}. Рассмотрим сумму $\sum' F_{jk}$, где штрих обозначает то же, что и раньше. Взяв $l = \alpha_n$ и применив лемму 1, получим:

$$\left\{ \sum{}' F_{jk} \right\} = D(\omega_1)D(\omega_2) + o(1),\ n \to \infty.$$

Аналогично разобьем сумму на две:

$$\sum{}' F_{jk} = \sum_{a_j,a_k \leqslant \beta_n}{}' F_{jk} + \sum_{a_j>\beta_n \text{ или } a_k>\beta_n}{}' F_{jk}. \tag{12}$$

По лемме 3
$$\left\{\sum_{a_j>\beta_n \text{ или } a_k>\beta_n}{}' F_{jk}\right\} \leqslant b(\Phi(n))^{\frac{1}{2}} = o(1),\ n \to \infty. \tag{13}$$

Кроме того, количество a_j и a_k, меньших β_n, конечно, поэтому
$$\left\{\sum_{a_j,a_k\leqslant\beta_n}{}' F_{jk}\right\} = \sum_{a_j,a_k\leqslant\beta_n}{}' \{F_{jk}\} = D(\omega_1)D(\omega_2) + o(1),\ n \to \infty.$$

Но $\{F_{jk}\} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|E_{jk}|}{n}$, откуда следует
$$\sum_{a_j,a_k\leqslant\beta_n} |E_{jk}| = n \sum_{a_j,a_k\leqslant\beta_n} \{F_{jk}\} + o(n) = nD(\omega_1)D(\omega_2) + o(n), n \to \infty,$$

что и требовалось доказать.

3. Доказательство теоремы 3

Из лемм 1–4 следует

Теорема 3. *Пусть f – сильно аддитивная функция такая, что $|f(p)| \leqslant 1$ для всех простых p. Пусть $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R}$, $q = q(n)$ – член некоторой последовательности, принимающей натуральные значения с условием*
$$\exists C > 0 : q(n) < n^C\ \forall n.$$

Обозначим
$$A_n = \sum_{\substack{p\leqslant n,\\ p\nmid q}} \frac{f(p)}{p}, \qquad B_n = \sqrt{\sum_{\substack{p\leqslant n,\\ p\nmid q}} \frac{f^2(p)}{p}},$$

причем $B_n \to \infty$ при $n \to \infty$.

Пусть $N(n)$ – количество натуральных чисел $m \leqslant n$ таких, что выполняются условия
$$\begin{cases} f(mq+1) < A_n + \omega_1 B_n \\ f((m+1)q+1) < A_n + \omega_2 B_n \end{cases}. \tag{14}$$

Тогда $N(n) = nD(\omega_1)D(\omega_2) + o(n)$.

Доказательство. Имеем:
$$|f(mq+1) - f^q_{\alpha_n}(m)| = \left|\sum_{\substack{p\,\mid\, mq+1,\\ p>\alpha_n}} f(p)\right| \leqslant \sum_{\substack{p\,\mid\, mq+1,\\ p>\alpha_n}} |f(p)| \leqslant \sum_{\substack{p\,\mid\, mq+1,\\ p>\alpha_n}} 1 < \tag{15}$$
$$< \frac{C+1}{\Phi(n)} = o(B_n),\ n \to \infty. \tag{16}$$

Действительно, пусть $mq+1 = P \cdot \underbrace{p_1 \dots p_k}_{>(\alpha_n)^k}$, где p_i – простые делители $mq+1$, большие α_n, P – произведение оставшихся простых делителей. Тогда если $k > \frac{C+1}{\Phi(n)}$, то $mq(n)+1 > (\alpha_n)^{\frac{C+1}{\Phi(n)}} = n^{C+1} > nq(n)+1$, противоречие.

Также верна следующая оценка:

$$|A_n - A_{\alpha_n}| \leqslant \sum_{\alpha_n < p \leqslant n} \frac{1}{p} = \ln\ln n - \ln\ln n^{\Phi} + O(1) = \ln\frac{1}{\Phi} + O(1) = o(B_n),\ n \to \infty, \tag{17}$$

по выбору Φ.

$$|B_n - B_{\alpha_n}| \leqslant |B_n - B_{\alpha_n}||B_n + B_{\alpha_n}| = |B_n^2 - B_{\alpha_n}^2| \leqslant \sum_{\alpha_n < p \leqslant n} \frac{1}{p} = o(B_n),\ n \to \infty, \tag{18}$$

аналогично.

Таким образом, из (16)-(18) следует, что для достаточно большого n из неравенства $f(mq+1) < A_n + \omega_1 B_n$ вытекает $f^q_{\alpha_n}(m) < A_{\alpha_n} + (\omega_1 + \varepsilon)B_{\alpha_n}$. Действительно,

$$f^q_{\alpha_n}(m) = f(m) + o(B_n) < A_n + \omega_1 B_n + o(B_n) < (A_{\alpha_n} + o(B_n)) + \omega_1(B_{\alpha_n} + o(B_n)) + o(B_n) < \\ < A_{\alpha_n} + (\omega_1 + \varepsilon)B_{\alpha_n}.$$

Аналогично из неравенства $f^q_{\alpha_n}(m) < A_{\alpha_n} + (\omega_1 - \varepsilon)B_{\alpha_n}$ вытекает $f(mq+1) < A_n + \omega_1 B_n$. Следовательно, в силу леммы 4 имеем:

$$D(\omega_1 - \varepsilon)D(\omega_2 - \varepsilon) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \frac{N(n)}{n} \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \frac{N(n)}{n} \leqslant D(\omega_1 + \varepsilon)D(\omega_2 + \varepsilon),$$

откуда вытекает утверждение теоремы, поскольку $\varepsilon > 0$ – произвольное.

4. Доказательство основных теорем

Утверждение 2. *Если $q = q(n)$ – член некоторой последовательности, принимающей натуральные значения, с условием*

$$\ln\ln\ln q(n) = o(\sqrt{\ln\ln n}),\ n \to \infty,$$

то

$$\sum_{\substack{p \leqslant n,\\ p \nmid q}} \frac{1}{p} = \ln\ln n + o(\sqrt{\ln\ln n}), n \to \infty.$$

Доказательство. Оценим $\sum\limits_{\substack{p \leqslant n,\\ p \mid q(n)}} \dfrac{1}{p} = \sum\limits_{p\leqslant n} \dfrac{1}{p} - \sum\limits_{\substack{p \leqslant n,\\ p \nmid q(n)}} \dfrac{1}{p}.$

Пусть $\widetilde{q}(n) = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$, где $k = k(n) = \max\{l \in \mathbb{N} : p_1 \ldots p_l \leqslant q(n)\}$. Тогда $k \geqslant \nu(q(n))$.

Действительно, если $k < \nu(q(n))$, то $q(n) = p_{i_1}^{\alpha_{i_1}} \ldots p_{i_{\nu(q(n))}}^{\alpha_{i_{\nu(q(n))}}} \geqslant p_1 \ldots p_{\nu(q(n))} \geqslant p_1 \ldots p_k \cdot p_{k+1}$, что противоречит определению k.

Тогда имеем:

$$\sum_{\substack{p \leqslant n,\\ p \mid q(n)}} \frac{1}{p} \leqslant \sum_{i=1}^{\nu(q(n))} \frac{1}{p_i} \leqslant \sum_{\substack{p \leqslant n,\\ p \mid \widetilde{q}(n)}} \frac{1}{p} = \sum_{i=1}^{k(n)} \frac{1}{p_i} \leqslant \sum_{p\leqslant ck\ln k} \frac{1}{p} = \ln\ln(ck\ln k) + O(1) = \\ = \ln\ln k + o(\ln\ln k).$$

Следовательно, если $\ln\ln k = o(\sqrt{\ln\ln n}), n \to \infty$, то будет выполнено требуемое утверждение.

При этом в силу определения $k(n)$ верны следующие оценки: $p_1 \dots p_{k(n)} \leqslant q(n) \leqslant \leqslant p_1 \dots p_{k(n)+1}$.

Прологарифмировав неравенство выше, получим: $\sum\limits_{i=1}^{k(n)} \ln p_i \leqslant \ln q(n) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{k(n)+1} \ln p_i = = \theta(p_{k(n)+1})$, где $\theta(x)$ – тета-функция Чебышева, для которой известны оценки

$$c_3 x \leqslant \theta(x) \leqslant c_4 x,\ \forall x \geqslant 2.$$

Отсюда следует, что $\ln q(n) \leqslant c_4 p_{k(n)+1} \leqslant c_5(k(n)+1)\ln(k(n)+1)$ и $\ln q(n) \geqslant c_3 p_{k(n)} \geqslant \geqslant c_6 k(n)\ln(k(n))$. Дважды логарифмируя последние неравенства, получаем:

$$\ln\ln\ln q(n) = \ln\ln k(n) + o(\ln\ln k(n))$$

Таким образом, если $\ln\ln\ln q(n) = o(\sqrt{\ln\ln n}), n \to \infty$, то $\sum\limits_{\substack{p \leqslant n,\\ p \mid q(n)}} \dfrac{1}{p} = o(\sqrt{\ln\ln n})$, откуда $\sum\limits_{\substack{p \leqslant n,\\ p \nmid q(n)}} \dfrac{1}{p} = \ln\ln n + o(\sqrt{\ln\ln n}), n \to \infty$, что и требовалось.

Замечание 11. *Пусть $q = q(n)$ – некоторая последовательность с условием $\ln\ln\ln q = = o(\sqrt{\ln\ln n})$, $n \to \infty$. Тогда имеем:*

$$\ln\ln\ln q \ll \sqrt{\ln\ln n} \Longleftrightarrow \ln\ln q \ll e^{\sqrt{\ln\ln n}} \Rightarrow \ln\ln q \ll (\ln n)^{\alpha}, \forall\alpha > 0 \Longleftrightarrow \ln q \ll e^{(\ln n)^{\alpha}}, \forall\alpha > 0.$$

В частности, если для некоторого $C > 0$ $q \leqslant n^C$, то условие $\ln\ln\ln q = o(\sqrt{\ln\ln n})$, $n \to \infty$, выполнено.

Замечание 12. *Из условия $\ln\ln\ln q(n) = o(\sqrt{\ln\ln n})$ не следует, что $\exists C > 0 :$ $q(n) < n^C$, $\forall n$.*

Действительно, если $q(n) = e^{\sqrt{(\ln n)^3}}$, то $\ln\ln\ln q(n) = \ln\ln\sqrt{(\ln n)^3} = o(\sqrt{\ln\ln n})$, но $\forall C$ $e^{(\sqrt{\ln n})^3} > n^C =$ $= e^{C\ln n}$, начиная с некоторого номера.

Теперь докажем теорему 1.

Теорема 1. *Пусть $q = q(n)$ – некоторая последовательность с условием*

$$\exists C > 0 :\ q(n) < n^C,\ \forall n.$$

Тогда количество $m \leqslant n$ таких, что выполняются условия

$$\begin{cases} \nu(mq+1) < \ln\ln n + \omega_1\sqrt{\ln\ln n} \\ \nu((m+1)q+1) < \ln\ln n + \omega_2\sqrt{\ln\ln n} \end{cases}$$

равно $nD(\omega_1)D(\omega_2) + o(n)$.

Доказательство. Для функции $\nu(n)$ в силу утверждения 2 имеем:

$$A_n = \sum_{\substack{p \leqslant n,\\ p \nmid q}} \frac{1}{p} = \ln\ln n + o(\sqrt{\ln\ln n}), n \to \infty.$$

Тогда

$$B_n = \Bigg(\sum_{\substack{p \leqslant n, \\ p \nmid q}} \frac{1}{p} \Bigg)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{A_n} = \sqrt{\ln\ln n} + o(\sqrt{\ln\ln n}), n \to \infty.$$

Таким образом, утверждение теоремы вытекает из теоремы 3.

Приведем примеры, когда количество $m \leqslant n$ таких, что выполняются условия $\begin{cases} \nu(mq+1) < f_1(n,\omega_1) \\ \nu((m+1)q+1) < f_2(n,\omega_2) \end{cases}$ для некоторых функций $f_i(n,\omega_i)$, не равно $Cn + o(n), n \to \infty$.

Пример 7. *Пусть $q = 2$. Рассмотрим следующую систему неравенств:*

$$\begin{cases} \nu(2m+1) < 2 \\ \nu(2(m+q)+1) < 2 \end{cases} \tag{19}$$

Данная система эквивалентна системе равенств

$$\begin{cases} \nu(2m+1) = 1 \\ \nu(2(m+1)+1) = 1 \end{cases},$$

которая равносильна тому, что числа $2m+1$ и $2(m+1)+1$ являются простыми.

Таким образом, количество $m \leqslant n$, удовлетворяющих системе (19), равно количеству пар простых близнецов, не превосходящих $2n+3$. Обозначим это количество как $\pi_2(2n+3)$.

Известна оценка (см. [7])

$$\pi_2(n) \leqslant C\frac{n}{(\ln n)^2},$$

для некоторого $C > 0$.

Пример 8. *Пусть $q = q(n) = \prod\limits_{i=1}^{k(n)} p_i$, где $k(n) = [\sqrt{\ln n}]$. Рассмотрим систему*

$$\begin{cases} \nu(mq+1) < \ln n \\ \nu((m+1)q+1) < \ln n \end{cases} \tag{20}$$

Докажем, что количество $m \leqslant n$, удовлетворяющих системе (20), равно n для достаточно больших n.

Действительно, пусть $mq + 1 = \prod\limits_{p|mq+1} p^{\alpha_p}$. Так как $q = \prod\limits_{i=1}^{k(n)} p_i$, то $mq+1$ не делится на p_i, $i \leqslant k(n)$. Тогда имеем $nq+1 \geqslant mq+1 \geqslant p_{k(n)}^{\nu(mq+1)}$, откуда

$$\nu(mq+1) \leqslant \frac{\ln(nq+1)}{\ln p_{k(n)}} \leqslant c\frac{\ln(nq)}{\ln(k\ln k)} \leqslant c\frac{\ln n + \ln q}{\ln k} \leqslant c\left(\frac{\ln n}{\ln\ln n} + \frac{\theta(p_k)}{\ln k}\right) \leqslant$$
$$\leqslant c\left(\frac{\ln n}{\ln\ln n} + \frac{k\ln k}{\ln k}\right) \leqslant c\left(\frac{\ln n}{\ln\ln n} + \sqrt{\ln n}\right) < \ln n,$$

для любого $m \leqslant n$ при достаточно больших n.

Аналогично $\nu((m+1)q+1) < \ln n$ для любого $m \leqslant n$ при достаточно больших n.

Значит, неравенства системы (20) выполнены для любого $m \leqslant n$, что и требовалось доказать.

Наконец, из теоремы 1 вытекает

Теорема 2. *Пусть $q = q(n)$ – некоторая последовательность с условием*

$$\exists C > 0 : \ q(n) < n^C, \ \forall n.$$

Пусть $t_n(\omega) = |\{m \leqslant n : \nu(mq+1) < \nu((m+1)q+1) + \omega\sqrt{2\ln\ln n}\}|$. *Тогда*

$$t_n(\omega) = nD(\omega) + o(n) \ \text{при} \ n \to \infty,$$

откуда следует, что

$$P\left(\frac{\nu(mq+1) - \nu((m+1)q+1)}{\sqrt{2\ln\ln n}} < x\right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = D(x), \ n \to \infty,$$

где $P(f(m) < x) = \dfrac{|\{m \leqslant n : f(m) < x\}|}{n}$.

Доказательство. Рассмотрим функции $X_n(m) = \dfrac{\nu(mq+1) - \ln\ln n}{(\ln\ln n)^{\frac{1}{2}}}$, $1 \leqslant m \leqslant n$.

В силу следствия 1 имеем:

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n(m) < \omega_1, X_n(m+1) < \omega_2) = D(\omega_1)D(\omega_2).$$

Значит, характеристическая функция $(X_n(m), X_n(m+1))$ стремится к характеристической функции нормального распределения:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} \exp\left\{ i\left(\xi \frac{\nu(mq+1) - \ln\ln n}{(\ln\ln n)^{\frac{1}{2}}} + \eta \frac{\nu((m+1)q+1) - \ln\ln n}{(\ln\ln n)^{\frac{1}{2}}}\right)\right\} =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\xi x + \eta y)} \exp\left\{ -\frac{x^2+y^2}{2}\right\} dxdy.$$

При $\eta = -\xi$ имеем:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} \exp\left\{ i\xi \frac{\nu(mq+1) - \nu((m+1)q+1)}{(\ln\ln n)^{\frac{1}{2}}}\right\} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi(x-y)} \exp\left\{ -\frac{x^2+y^2}{2}\right\} dxdy =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x - \frac{x^2}{2}} dx \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi y - \frac{y^2}{2}} dy = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x - \frac{x^2}{2}} dx\right)^2 =$$
$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{ -\frac{1}{2}(x^2 - 2i\xi x - \xi^2) - \frac{\xi^2}{2}\right\} dx\right)^2 =$$
$$= \left(\frac{\exp\{-\xi^2/2\}}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{ -\frac{u^2}{2}\right\} du\right)^2 = e^{-\xi^2}.$$

Найдем функцию плотности для данной характеристической функции, т.е. найдем функцию $\rho(x)$ такую, что

$$e^{-\xi^2} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x} \rho(x) dx.$$

Так как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x}e^{-x^2/2}dx = e^{-\xi^2/2},$$

то при $\xi = \sqrt{2}\eta, x = y/\sqrt{2}$ имеем:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\eta y}\frac{e^{-y^2/4}}{\sqrt{2}}dy = e^{-\eta^2},$$

откуда $\rho(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-x^2/4}$.

Таким образом,

$$P\left(\frac{\nu(mq+1)-\nu((m+1)q+1)}{\sqrt{\ln\ln n}} < x\right) \to \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{4}}dt = \left| t = u\sqrt{2}, dt = \sqrt{2}du \right| = F\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right),$$

где $F(x)$ – функция распределения нормального закона. При замене $y = x/\sqrt{2}$ получим, что

$$P\left(\frac{\nu(mq+1)-\nu((m+1)q+1)}{\sqrt{2\ln\ln n}} < y\right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{y} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = F(y).$$

Также имеем $\dfrac{t_n(\omega/\sqrt{2})}{n} \to \int\limits_{-\infty}^{\omega} \rho(x)dx$. Сделав замену переменной $\omega' = \omega/\sqrt{2}$, получим:

$$\frac{t_n(\omega')}{n} \to \int\limits_{-\infty}^{\omega'\sqrt{2}} \rho(x)dx = |u = x/\sqrt{2}| = \int\limits_{-\infty}^{\omega'} \sqrt{2}\rho(u\sqrt{2})du = \int\limits_{-\infty}^{\omega'} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u^2/2}du = D(\omega'),$$

откуда следует, что $t_n(\omega) = nD(\omega) + o(n)$, $n \to \infty$.

Теорема 2 доказана.

5. Заключение

В данной статье исследована задача о распределении значений функции ν в соседних точках арифметической прогрессии $mq+1$, где параметр q может зависеть от n и расти не быстрее, чем степень n. Работа расширяет результат Левека, перенося его на случай прогрессий.

Автор выражает благодарность научному руководителю профессору В.Н. Чубарикову за постановку задачи и внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ламперти, Дж. Вероятность // Москва: Наука. 1973. 184 с.

2. Hardy, G. H., Ramanujan, S. The normal number of prime factors of a number // Quarterly Journal of Mathematics. 1917. Vol. 48. P. 76–92.

3. Erdös, P., Kac, M. The Gaussian law of errors in the theory of additive number theoretic functions // American Journal of Mathematics. 1940. Vol. 49, №1. P. 738–742.

4. LeVeque, W. J. On the size of certain number-theoretic functions // Transactions of the American Mathematical Society. 1949. Vol. 66, №2. P. 440–463.
5. Крамер, Г. Математические методы статистики // Москва: Мир, 1976. 648 с.
6. Erdös, P., Wintner, A. Additive Arithmetical Functions and Statistical Independence // American Journal of Mathematics. 1939. Vol. 61, №3. P. 713–721.
7. Jie W. Chen's double sieve, Goldbach's conjecture and the twin prime problem // Acta Arithmetica. 2004. Vol. 114, №3. P. 215–273.
8. Прахар, К. Распределение простых чисел // Москва: Мир, 1976. 512 с.

REFERENCES

1. Lamperti, J. 1973, *Probability*, Nauka, Moscow.
2. Hardy, G.H. & Ramanujan, S. 1917, "The normal number of prime factors of a number n", *Quarterly Journal of Mathematics*, vol. 48, pp. 76–92.
3. Erdős, P. & Kac, M. 1940, "The Gaussian law of errors in the theory of additive number theoretic functions", *American Journal of Mathematics*, vol. 62, no. 1, pp. 738–742.
4. LeVeque, W.J. 1949, "On the size of certain number-theoretic functions", *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 66, no. 2, pp. 440–463.
5. Cramér, H. 1976, *Mathematical methods of statistics*, Mir, Moscow.
6. Erdős, P. & Wintner, A. 1939, "Additive arithmetical functions and statistical independence", *American Journal of Mathematics*, vol. 61, no. 3, pp. 713–721.
7. Wu, J. 2004, "Chen's double sieve, Goldbach's conjecture and the twin prime problem", *Acta Arithmetica*, vol. 114, no. 3, pp. 215–273.
8. Prachar, K. 1976, *Distribution of prime numbers*, Mir, Moscow.

Получено: 30.06.2025
Принято в печать: 08.12.2025

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 26. Выпуск 5.

УДК: 517 DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-5-246-258

Уравнение Гарри Дима со специальным самосогласованным источником

Г. У. Уразбоев, А. К. Бабаджанова, Ш. Э. Атаназарова

Уразбоев Гайрат Уразалиевич — доктор физико-математических наук, Ургенчский государственный университет имени Абу Райхана Беруни; Институт математики имени В. И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан (г. Ургенч, Узбекистан).
e-mail: gayrat71@mail.ru

Бабаджанова Айгуль Камилджановна — кандидат физико-математических наук, Институт математики имени В. И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан; Ургенчский государственный университет имени Абу Райхана Беруни (г. Ургенч, Узбекистан).
e-mail:aygul.babadjanova1987@gmail.com

Атаназарова Шоира Эркиновна — Институт математики имени В. И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан; Ургенчский государственный университет имени Абу Райхана Беруни (г. Ургенч, Узбекистан).
e-mail:atanazarova94@gmail.com

Аннотация

Работа посвящена изучению интегрирования уравнения Гарри Дима с самосогласованным источником. Источник состоит из комбинации собственных функций и линейно-независимого решения с теми же собственными функциями соответствующей спектральной задачи для уравнения струны, не имеющего спектральных особенностей. При рассмотрении источника точки дискретного спектра уравнения струны есть функции от времени. Выведены временные характеристики данных рассеяния уравнения струны, которые позволяют интегрировать задачу Коши для уравнения Гарри Дима со специальным самосогласованным источником в классе быстроубывающих функций методом обратной задачи рассеяния.

Ключевые слова: уравнение струны, уравнение Гарри Дима, метод обратной задачи рассеяния, данные рассеяния, солитоны.

Библиография: 20 названий.

Для цитирования:

Уразбоев Г.У., Бабаджанова А. К., Атаназарова Ш. Э. Уравнение Гарри Дима со специальным самосогласованным источником // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 5, с. 246–258.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 26. No. 5.

UDC: 517 DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-5-246-258

Harry Dym equation with a special self-consistent source

G. U. Urazboev, A. K. Babadjanova, Sh. E. Atanazarova

Urazboev Gayrat Urazalievich — doctor of physical and mathematical sciences, Urgench State University named after Abu Rayhan Biruni; V. I. Romanovskiy Institute of Mathematics; Uzbekistan Academy of Sciences (Urgench, Uzbekistan).
e-mail: gayrat71@mail.ru
Babadjanova Aygul Kamildjanovna — candidate of physical and mathematical sciences, V. I. Romanovskiy Institute of Mathematics; Uzbekistan Academy of Sciences; Urgench State University named after Abu Rayhan Biruni (Urgench, Uzbekistan).
e-mail: aygul.babadjanova1987@gmail.com
Atanazarova Shoira Erkinovna — V. I. Romanovskiy Institute of Mathematics; Uzbekistan Academy of Sciences; Urgench State University named after Abu Rayhan Biruni (Urgench, Uzbekistan).
e-mail: atanazarova94@gmail.com

Abstract

The work is concerned with studying the integration of the Harry Dym equation with the self-consistent source. The source consists of the combination of the eigenfunctions and linear independent solution with the same eigenfunctions of the corresponding spectral problem for the string equation which has not spectral singularities. While considering the source, the points of the discrete spectrum of the string equation have been as the functions of time. Deduced the time performance of the scattering data of the string equation which allows to integrate the Cauchy problem for the Harry Dym equation with the special self-consistent source in the class of the rapidly decreasing functions via the inverse scattering method.

Keywords: string equation, Harry Dym equation, inverse scattering method, scattering data, solitons.

Bibliography: 20 titles.

For citation:
Urazboev, G. U. Babadjanova, A. K., Atanazarova, Sh. E. 2025, “Harry Dym equation with a special self-consistent source” , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 5, pp. 246–258.

1. Introduction

The Harry Dym equation is an integrable nonlinear evolution equation which has the applications in the hydrodynamics [1] and has strong relation with the solution of the Korteweg-de Vries equation [2], [3], [4]. This equation firstly was appeared in the works [5]-[7], which was represented as

$$u_t = -\frac{1}{2}u^3 u_{xxx}$$

for real-valued function $u(x,t)$ and related to the classical string problem [8].

In the work [9] shown that Harry Dym equation can be transformed to the modified Korteweg-de Vries equation. The significantly important results for the Harry Dym equation on construction finite-gap solutions was studied in [10]. In the paper [11] worked out the reciprocal transformations generated by the adjoint eigenfunctions, which are useful to construct the new type solutions of the Harry Dym hierarchy.

The present work is based on integrating of the Harry Dym equation with a special self-consistent source using the techniques in [12]-[14]. There are also another interesting works on the integration of the Harry Dym equation with the source in the various class of functions [15], [16] as well as Harry Dym hierarchy with self-consistent sources [17], [18].

We consider the following system of equations:

$$q_t(x,t) = 2\left(\frac{1}{\sqrt{1+q(x,t)}}\right)_{xxx} - 2\sum_{n=1}^{N}(1+q(x,t))\frac{\partial}{\partial x}(f_n(x,t))g_n(x,t)) - \\ - q_x(x,t)\sum_{n=1}^{N} f_n(x,t)g_n(x,t) \tag{1}$$

$$f_n''(x,t) - \chi_n^2 f_n(x,t)q(x,t) = \chi_n^2 f_n(x,t) \tag{2}$$

$$g_n''(x,t) - \chi_n^2 g_n(x,t)q(x,t) = \chi_n^2 g_n(x,t) \tag{3}$$

with initial data

$$q(x,0) = q_0(x) \tag{4}$$

which has following properties

- $$\int_{-\infty}^{\infty}(1+x^2)\left(|q_0(x)| + \left|1 - \frac{1}{1+q_0(x)}\right|\right)dx < \infty, \tag{5}$$

- The operator $L(0) := \frac{d^2}{dx^2} + \lambda^2 q_0(x)$ possesses exactly N simple eigenvalues $-\chi_1^2(0) >$ $> -\chi_2^2(0) > ... > -\chi_N^2(0)$ without spectral singularities.

Here, the prime means the derivative with respect to variable x, while dot means the derivate by variable t, $f_n(x,t)$ is eigenfunction corresponding to the eigenvalue $-\chi_n^2$, while $g_n(x,t)$ is linear independent solution with $f_n(x,t)$

$$W(f_n(x,t), g_n(x,t)) = f_n(x,t)g_n'(x,t) - f_n{}'(x,t)g_n(x,t) = \omega_n(t), \tag{6}$$

where $\omega_n(t)$ is ahead given continuous function satisfying the condition

$$\omega_1(t) < \omega_2(t) < ... < \omega_N(t) \tag{7}$$

for any $t \geq 0$ and $q(x,t)$ is assumed to be sufficiently smooth and sufficiently rapidly tends to zero as $|x| \to \infty$:

$$\int_{-\infty}^{\infty}(1+x^2)\left(|q(x,t)| + \left|1 - \frac{1}{1+q(x,t)}\right|\right)dx < \infty. \tag{8}$$

Let us put

$$L = \frac{d^2}{dx^2} + \lambda^2 q(x,t)$$

$$B = 2\lambda^2\left[\frac{2}{\sqrt{1+q(x,t)}}\frac{\partial}{\partial x} - \left(\frac{1}{\sqrt{1+q(x,t)}}\right)_x\right], \tag{9}$$

then the equation (1) can be represented with the Lax form

$$L_t = [B, L] + G, \tag{10}$$

$$G = -2\lambda^2 \sum_{n=1}^{N} (1 + q(x,t)) \frac{\partial}{\partial x} (f_n(x,t)) g_n(x,t)) - \lambda^2 q_x(x,t) \sum_{n=1}^{N} f_n(x,t) g_n(x,t) \tag{11}$$

We have concerned on determining the time evolution equations of the scattering data with approach of the inverse scattering method for the operator $L(t)$ in order to find the solution $\{q(x,t), f_n(x,t), g_n(x,t)\}$ of the problem (1)-(6) under the assumption of existence in the class of decreasing functions (8).

2. Facts from the scattering theory

In this section, we will present the necessary information concerning the direct and inverse scattering problem for the equation [8]

$$Ly \equiv y'' + \lambda^2 q(x) y = -\lambda^2 y. \tag{12}$$

LEMMA 1. *If $X(x,\lambda)$ and $Y(x,\mu)$ are solutions of $LX = -\lambda^2 X$ and $LY = -\mu^2 Y$ respectively, then the following identity holds*

$$\frac{dW(X(x,\lambda), Y(x,\mu))}{dx} = (1 + q(x))(\lambda^2 - \mu^2) X(x,\lambda), Y(x,\mu), \tag{13}$$

where $W(X(x,\lambda), Y(x,\mu)) = X(x,\lambda) Y'(x,\mu) - X'(x,\lambda) Y(x,\mu)$.

The equation (12) has the Jost solutions $\psi(x,\lambda)$ and $\varphi(x,\lambda)$ with the following asymptotics

$$\psi(x,\lambda) \to e^{-i\lambda x} \text{ as } x \to -\infty, \tag{14}$$

$$\varphi(x,\lambda) \to e^{i\lambda x} \text{ as } x \to \infty, \tag{15}$$

and for real $\lambda \neq 0$ parameters the pairs $\{\varphi(x,\lambda), \varphi(x,-\lambda)\}$ and $\{\psi(x,\lambda), \psi(x,-\lambda)\}$ form the fundamental solutions of the equation (12) and therefore, at any $\lambda \neq 0$ we have representations

$$\psi(x,\lambda) = a(\lambda)\varphi(x,-\lambda) + b(\lambda)\varphi(x,\lambda), \tag{16}$$

where,

$$a(\lambda) = \frac{W(\psi(x,\lambda), \varphi(x,\lambda))}{2i\lambda}, \tag{17}$$

$$b(\lambda) = \frac{W(\psi(x,-\lambda), \varphi(x,\lambda))}{2i\lambda}. \tag{18}$$

Here, $a(\lambda)$ admits an analytic continuation in the upper half plane $Im\lambda > 0$ and $\varphi(x,\lambda)e^{-i\lambda x}$ and $\psi(x,\lambda)e^{i\lambda x}$ can be analytic for $Im\lambda \geqslant 0$. From this yields that in the upper half plane $Im\lambda > 0$

$$\begin{gathered} \psi(x,\lambda)e^{i\lambda x} \to a(\lambda), \text{ as } x \to \infty, \\ \varphi(x,\lambda)e^{-i\lambda x} \to a(\lambda), \text{ as } x \to -\infty. \end{gathered} \tag{19}$$

We assume that $a(\lambda)$ has a finite number of simple zeros in the upper half plane $Im\lambda > 0$ such $\lambda_n = i\chi_n, n = 1, 2, \ldots,$

N, which corresponds to the eigenvalues $-\chi_n^2$, $(\chi_n > 0)$ $n = \overline{1, N}$ of L and the follwoing relation holds for the Jost solutions

$$\psi(x, \lambda_n) = c_n \varphi(x, \lambda_n), \quad n = 1,\ 2,\ ...,\ N. \tag{20}$$

We define reflection coefficient by the formula

$$R(\lambda) = \frac{b(\lambda)}{a(\lambda)}. \tag{21}$$

The following integral representation is valid for the Jost function $f(x, \lambda)$

$$\varphi(x, \lambda) = e^{i\lambda(x+\varepsilon_+)} + e^{i\lambda\varepsilon_+} \int_x^\infty K(x, s) e^{i\lambda s} ds, \tag{22}$$

where

$$\varepsilon_+ = \int_x^\infty \sigma_{-1}\, dx, \quad \sigma_{-1} = 1 - \sqrt{1+q}$$

and the kernel K is assumed to satisfy

$$\lim_{s \to \infty} K(x, s) = 0 \tag{23}$$

and have relation with $q(x)$ in this form

$$1 + q(x) = [1 - K(x, x)]^{-4}. \tag{24}$$

For $x \leqslant y$, $K(x, y)$ kernel satisfies the following Gelfand-Levitan-Marchenko equation

$$K(x, y) - \Omega(x + y) - \int_x^\infty K(x, s)\Omega'(s + y) ds = 0.$$

Here

$$\begin{gathered}
\Omega(z) = -\sum_{n=1}^N c_n \frac{e^{-\chi_n(z+2\varepsilon_+(x))}}{\chi_n} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty R(\lambda)\frac{e^{i\lambda(z+2\varepsilon_+(x))}}{i\lambda} d\lambda, \\
\Omega'(z) = \sum_{n=1}^N c_n e^{-\chi_n(z+2\varepsilon_+(x))} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty R(\lambda) e^{i\lambda(z+2\varepsilon_+(x))} d\lambda.
\end{gathered} \tag{25}$$

Definition 1. *The set of quantities* $\{R(\lambda),\, c_n,\, -\chi_n^2,\ n = \overline{1, N}\}$ *is called the scattering data associated to the equation* (12).

3. Evolution equations

3.1. Evolution equations for $a(\lambda)$ and $b(\lambda)$

Let $y(x, t)$ be a solution of the equation

$$Ly = y''(x, t) + \lambda^2 y(x, t) q(x, t) = -\lambda^2 y(x, t) \tag{26}$$

and let for $F(x, \lambda)$ it is valid the equation

$$\frac{\partial F(x, \lambda)}{\partial x} = (1 + q(x, t)) f_n(x, t) y(x, t). \tag{27}$$

Introduce the function

$$H = \dot{y} - By - \lambda^2 \sum_{n=1}^{N} g_n(x,t) F(x,\lambda). \tag{28}$$

For $\lambda \in \mathbb{R}$ function (28) will be a solution of the equation

$$LH + \lambda^2 H = -\lambda^2 \sum_{n=1}^{N} (1+q(x,t)) g_n(x,t) \hat{H},$$

where

$$\hat{H} = \left(\chi_n^2 + \lambda^2\right) F(x,\lambda) + W(f_n(x,t), y(x,t))).$$

The following functions

$$\begin{aligned} F^-(x,\lambda) &= -\int_{-\infty}^{x} (1+q(\tau,t)) f_n(\tau,t) \psi(\tau,\lambda) d\tau, \\ F^+(x,\lambda) &= \int_{x}^{\infty} (1+q(\tau,t)) f_n(\tau,t) \varphi(\tau,\lambda) d\tau, \end{aligned} \tag{29}$$

which are defined by the Jost solutions, satisfy the equation (27), consequently, it is easy to show that the following functions

$$\begin{aligned} H_0^-(\lambda) &= \dot{\psi}(x,\lambda) - B\psi(x,\lambda) - \lambda^2 \sum_{n=1}^{N} g_n(x,t) F^-(x,\lambda), \\ H_0^+(\lambda) &= \dot{\varphi}(x,\lambda) - B\varphi(x,\lambda) - \lambda^2 \sum_{n=1}^{N} g_n(x,t) F^+(x,\lambda) \end{aligned} \tag{30}$$

satisfy the equation (26). In fact, taking into account the identity (13), it yields that $\dfrac{\partial \hat{H}}{\partial x} = 0$. With the help of the asymptotes of the Jost solutions and taking account of (29), for $Im\lambda \geqslant 0$, we have $\hat{H}^{\pm} \to 0$ as $x \to \pm\infty$, then it yields that for $Im\lambda \geqslant 0$ and at any for $x \in (-\infty, \infty)$ it is valid $\hat{H}^{\pm} \equiv 0$. Hence, $LH^+ = -\lambda^2 H^+$ and $LH^- = -\lambda^2 H^-$.

At $\lambda = i\chi_j$ it holds that

$$f_j(x,t) = c_j^+ \varphi(x,\lambda_j) = c_j^- \psi(x,\lambda_j), \tag{31}$$

and the following asymptotics for the solutions $g_j^{\pm}(x,t)$

$$\begin{aligned} g_j^+ &= \frac{\omega_j}{2\chi_j c_j^+} e^{\chi_j x}, \quad x \to +\infty, \\ g_j^- &= -\frac{\omega_j}{2\chi_j c_j^-} e^{-\chi_j x}, \quad x \to -\infty \end{aligned} \tag{32}$$

are valid.

Lemma 2. *$a(\lambda)$ and $b(\lambda)$ coefficients satisfy the following differential equations*

$$\begin{aligned} \dot{b}(\lambda) &= 8i\lambda^3 b(\lambda), \\ \dot{a}(\lambda) &= -\lambda^3 \sum_{n=1}^{N} \frac{i\omega_n}{(\lambda^2 + \chi_n^2)\chi_n} a(\lambda). \end{aligned} \tag{33}$$

Proof. Using the result for $H^{\pm}(\lambda)$ we introduce the following auxiliary function for $\lambda \neq 0$

$$S = H_0^-(\lambda) - a(\lambda) H_0^+(-\lambda) - b(\lambda) H_0^+(\lambda). \tag{34}$$

With the help of the relation (16) and representations (29) for $F^-(x,\lambda)$, $F^+(x,\lambda)$ in equalities (30) and substituting them into (34), we obtain

$$S = \dot{a}(\lambda)\varphi(x,-\lambda) + \dot{b}(\lambda)\varphi(x,\lambda). \tag{35}$$

In the other hand, taking account the uniqueness of the Jost solutions and the representation (9) and asymptotics (32), we obtain the following representations

$$H_0^-(\lambda) = 4i\lambda^3\psi(x,\lambda) - \lambda^2 \sum_{n=1}^{N} \frac{i\omega_n}{2\chi_n(\lambda + i\chi_n)}\psi(x,\lambda), \tag{36}$$

$$H_0^+(\lambda) = -4\lambda^3 i\varphi(x,\lambda) - \lambda^2 \sum_{n=1}^{N} \frac{i\omega_n}{2\chi_n(\lambda + i\chi_n)}\varphi(x,\lambda). \tag{37}$$

Substituting expressions (36), (37) into (34) and using the relation (16), we have

$$S = 8i\lambda^3 b(\lambda)\varphi(x,\lambda) - \lambda^3 \sum_{n=1}^{N} \frac{i\omega_n}{(\lambda^2 + \chi_n^2)\chi_n} a(\lambda)\varphi(x,-\lambda). \tag{38}$$

Comparing (35) and (38) we have relations (33) for $\lambda \neq 0$. Lemma is proved.

From the relations (33) and according to (21), we have the equality

$$\dot{R}(\lambda,t) = i\lambda^3 \left(8 + \sum_{n=1}^{N} \frac{\omega_n}{(\lambda^2 + \chi_n^2)\chi_n}\right) R(\lambda,t). \tag{39}$$

3.2. Evolution equations of the discrete spectrum and normalization constants

Lemma 3. *The discret spectrum and normalization constants satisfy the following differential eqautions*

$$\frac{d\chi_j(t)}{dt} = \frac{\chi_j(t)\omega_j(t)}{2}, \quad j = \overline{1,N}. \tag{40}$$

$$\dot{c}_j(t) = c_j(t)\left(8\chi_j^3(t) + i\beta_j \frac{\omega_j(t)\chi_j(t)}{2}\right), \quad j = \overline{1,N}. \tag{41}$$

Proof. Now, we determine the function

$$h(i\chi_j) = h^-(i\chi_j) - c_j(t)h^+(i\chi_j). \tag{42}$$

Here, functions $h^-(i\chi_j)$ and $h^+(i\chi_j)$ are defined as

$$h^-(i\chi_j(t)) = \dot{\psi}(x,i\chi_j(t)) - B\psi(x,i\chi_j(t)) + \chi_j^2(t)\sum_{n=1}^{N} g_n^-(x,t)F^-(x,i\chi_j(t)),$$

$$h^+(i\chi_j(t)) = \dot{\varphi}(x,i\chi_j(t)) - B\varphi(x,i\chi_j) + \chi_j^2(t)\sum_{n=1}^{N} g_n^+(x,t)F^+(x,i\chi_j(t)).$$

Using the asymptotics (14) and (15) of the Jost soluitons $\varphi(x, i\chi_j)$ and $\psi(x, i\chi_j)$ we have

$$h^-(i\chi_j(t)) = 4\chi_j^3(t)\psi(x, i\chi_j(t)),$$
$$h^+(i\chi_j(t)) = -4\chi_j^3(t)\varphi(x, i\chi_j(t)).$$

Due to the relation (20) we show that

$$h(i\chi_j(t)) = 8\chi_j^3(t)c_j(t)\varphi(x, i\chi_j(t)). \tag{43}$$

In the other hand, differentiating the equality (20) by t we have

$$\dot{\psi}(x, i\chi_j(t)) = \dot{c}_j(t)\varphi\left(x, i\chi_j(t)\right) + c_j(t)\dot{\varphi}(x, i\chi_j(t)) - i\tilde{\varphi}(x, i\chi_j(t))\frac{d\chi_j(t)}{dt}, \tag{44}$$

where

$$\tilde{\varphi}(x, i\chi_j(t)) = \left.\frac{d}{d\lambda}\left(\psi(t,\lambda) - c_j(t)\varphi(t,\lambda)\right)\right|_{\lambda = i\chi_j(t)}.$$

Using (44) in the expression (42) we receive

$$\begin{aligned} h(i\chi_j(t)) &= \dot{c}_j(t)\varphi\left(x, i\chi_j(t)\right) - i\tilde{\varphi}(x, i\chi_j(t))\frac{d\chi_j(t)}{dt} \\ &+ \chi_j^2(t)\sum_{n=1}^{N} g_n(x,t)(F^-(x, i\chi_j(t)) - c_j(t)F^+(x, i\chi_j(t))), \end{aligned}$$

where

$$F^-(x, i\chi_j(t)) - c_j(t)F^+(x, i\chi_j(t)) = \int_{-\infty}^{\infty}\left(1 + q(x,t)\right) f_n(x,t)c_j(t)\varphi(x, i\chi_j(t))d\tau. \tag{45}$$

Using the orthogonality of the eigenfunctions corresponding to the different eigenvalues for $n \neq j$, we can show that the integral in the right-hand side of equality (45) equals to zero, therefore,

$$\begin{aligned} h(i\chi_j(t)) &= \dot{c}_j(t)\varphi\left(x, i\chi_j(t)\right) - i\tilde{\varphi}(x, i\chi_j(t))\frac{d\chi_j(t)}{dt} - \\ &+ \chi_j^2(t)g_j^+(x,t)\int_{-\infty}^{\infty}\left(1 + q(x,t)\right) f_j(x,t)c_j(t)\varphi(x, i\chi_j(t))d\tau. \end{aligned} \tag{46}$$

As the $\tilde{\varphi}(x, i\chi_j)$ being the solution of the equation (2) i.e. $(L - \chi_j^2)\tilde{\varphi}\left(x, i\chi_j\right) = 0$, this solution can be represented by

$$\tilde{\varphi}(x, i\chi_j) = \alpha_j g_j(x,t) + \beta_j\psi(x, i\chi_j). \tag{47}$$

By virtue of (14), (15) and (19), we find the following asymptotics for the function $\tilde{\varphi}(x, i\chi_j(t))$

$$\tilde{\varphi}(x, i\chi_j(t)) \sim \left.\left(\frac{da(\lambda)}{d\lambda}\right)\right|_{\lambda = i\chi_j(t)} e^{\chi_j x}, \quad x \to +\infty.$$

$$\tilde{\varphi}(x, i\chi_j(t)) \sim -c_j\left.\left(\frac{da(\lambda)}{d\lambda}\right)\right|_{\lambda = i\chi_j(t)} e^{-\chi_j x}, \quad x \to -\infty.$$

Taking into account (19), (32), (47) and the last asymptotics, we can write the following representation

$$\tilde{\varphi}(x, i\chi_j(t)) = \frac{2\chi_j(t)c_j^+(t)}{\omega_j}\left.\left(\frac{da(\lambda)}{d\lambda}\right)\right|_{\lambda = i\chi_j(t)} g_j^+(x,t) + \beta_j c_j(t)\varphi(x, i\chi_j(t)) \tag{48}$$

is valid. It is easy to show that the following equality holds

$$\left(\frac{da(\lambda)}{d\lambda}\right)\Big|_{\lambda=i\chi_j} = -i\int_{-\infty}^{+\infty}(1+q(t,\tau))\psi(\tau,i\chi_j)\varphi(\tau,i\chi_j)d\tau. \tag{49}$$

Using the equalities (48) and (49) in (46) we have

$$\begin{aligned} h(i\chi_j(t)) = \dot{c}_j(t)\varphi(x,i\chi_j(t)) - i\frac{d\chi_j(t)}{dt}\frac{2\chi_j(t)c_j^+(t)}{\omega_j(t)}\dot{a}(i\chi_j)g_j^+(x,t)- \\ - i\frac{d\chi_j(t)}{dt}\beta_j c_j(t)\varphi(x,i\chi_j(t)) + i\chi_j^2(t)g_j^+(x,t)c_j^+(t)\dot{a}(i\chi_j(t)). \end{aligned} \tag{50}$$

Comparing (43) and (50) we get

$$\begin{aligned} &\dot{c}_j(t) - i\frac{d\chi_j(t)}{dt}\beta_j c_j(t) = 8\chi_j^3(t)c_j(t), \\ &\frac{2\chi_j(t)}{\omega_j(t)}\frac{d\chi_j(t)}{dt} = \chi_j^2(t), \quad j=\overline{1,N}. \end{aligned} \tag{51}$$

Hence, we obtain the time evolution (40) for $\chi_j(t)$ and subtituting it to the differential equation for $c_j(t)$ in (51) we have (41). Here, β_j can be defined by (47). Lemma is proved.

4. Multi-soliton solution

We use the (A, B, C) triplet matrix technique [20] for providing the explicit form of the multi-soliton solution. As we are focusing on the the reflectionless case $R(\lambda, t) = 0$ and that $L(t)$ operator has simple eigenvalues, we take (A, B, C) triplet matrix in the following form

$$A = \begin{pmatrix} \chi_1(t) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \chi_N(t) \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} c_1(t) & \dots & c_N(t) \end{pmatrix},$$

where $\chi_j(t)$ and $c_j(t)$, $j=\overline{1,N}$ satisfy the equations (40) and (41). Hence, the kernel of Gelfand-Levitan-Marchenko equation can be written as

$$\Omega(x+y,t) = -Ce^{-A(x+y+2\varepsilon_+)}A^{-1}B.$$

Inserting this into the Gelfand-Levitan equation and solving it we obtain

$$K(x,x,t) = -Ce^{-A(x+2\varepsilon_+)}A^{-1}\Gamma^{-1}(x,t)e^{-Ax}B,$$

and, by the formula (24) we obtain

$$q(x,t) = [1 + Ce^{-A(x+2\varepsilon_+)}A^{-1}\Gamma^{-1}(x,t)e^{-Ax}B]^{-4} - 1,$$

where

$$\Gamma(x,t) = I - e^{-2A\varepsilon_+}Q(x)$$

$$Q(x) = \int_x^\infty e^{-As}BCe^{-As}ds.$$

For one soliton case, we have

$$q(x,t) = tanh^4\left[\chi_1(t)(x+\varepsilon_+(x)) - \frac{1}{2}\ln\frac{c_1(t)}{2\chi_1(t)}\right] - 1, \tag{52}$$

where

$$\varepsilon_+ = \frac{1}{\chi_1(t)}\left\{1 - tanh\left[\chi_1(t)(x+\varepsilon_+(x)) - \frac{1}{2}\ln\frac{c_1(t)}{2\chi_1(t)}\right]\right\}.$$

Using the integral expression for the Jost solution $\varphi(x,\lambda)$ and taking $c_j^+ = 1$ in (31), we can find the eigenfunction

$$f(x,i\chi_1) = \sqrt{\frac{2\chi_1(t)}{c_1(t)}}\frac{1}{2\sin h\left(\chi_1(t)(x+\varepsilon_+(x)) - \frac{1}{2}\ln\frac{c_1(t)}{2\chi_1(t)}\right)}. \tag{53}$$

By solving the differential equation (6) with (53), we get the representation for the solution $g(x,i\chi_1)$:

$$\begin{aligned} g(x,i\chi_1) =& \sqrt{\frac{2c_1(t)}{\chi_1(t)}}\frac{1}{2\sin h\left(\chi_1(t)(x+\varepsilon_+(x)) - \frac{1}{2}\ln\frac{c_1(t)}{2\chi_1(t)}\right)} \\ &\times\left(\omega_1(t)\int \sin h^2\left(\chi_1(t)(x+\varepsilon_+(x)) - \frac{1}{2}\ln\frac{c_1(t)}{2\chi_1(t)}\right)dx\right). \end{aligned} \tag{54}$$

5. Conclusions

The equations (39), (40) and (41) allow completely determine the time evolution of all scattering data for the eigenvalue problem of the form of (2). Then, we can integrate the problem (1)-(8) by reducing it into solving the integral Gelfand-Levitan equation with the obtained results (39)–(41). Due to the condition (7) for the considering problem (1)-(8), there is no effect of the creation and anhilation of the solitons differing from the KdV equation [12].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Vasconcelos G. L., Kadanoff L. P. Stationary solutions for the Saffman-Taylor problem with surface tension // Phys. Rev. A. 1991. Vol. 44. P. 6490–6495. https://doi.org/10.1103/PhysRevA.44.6490.

2. Ibragimov N. K., Shabat A. B. Infinite Lie-Beklund algebras // Functional Analysis and Its Applications. 1981. Vol. 14, no. 4. P. 313–315. https://doi.org/10.1007/BF01078315.

3. Ben-Yu G., Roges C. On Harry Dym equation and its solution // Science. 1989. Vol. 32, no. 3. P. 283–295.

4. Fuchssteiner B., Schulzet T., Carllot S. Explicit solutions for Harry Dym equation // J. Phys. A: Math. Gen. 1992. Vol. 25. P. 223–230. https://doi.org/10.1088/0305-4470/25/1/025.

5. Kruskal M. D. Lecture notes in physics. Berlin: Springer, 1975. Vol. 38.

6. Sabatier P. C. On some spectral problems and isospectral evolutions connected with the classical string problem. II: evolution equation // Lettere al Nuovo Cimento. 1979. Vol. 26. P. 483–486. http://dx.doi.org/10.1155/
2013/109170.

7. Wadati M., Konno H., Ichikawa Y. H. New integrable nonlinear evolution equation // J. Phys. Soc. Japan. 1979. Vol. 47. P. 1698–1700. https://doi.org/10.1143/JPSJ.47.1698.

8. Wadati M., Ichikawa Y. H., Shimizu T. Cusp Soliton of a New Integrable Nonlinear Evolution Equation // Progress of Theoretical Physics. 1980. Vol. 64, no. 6. P. 1959–1967. https://doi.org/10.1143/PTP.64.1959.

9. Hereman W., Banerje P. P., Chatterjee M. R. Derivation and implicit solution of the Harry Dym equation and its connection with the Korteweg-de Vries equation // J. Phys. A: Math. Theor. 1989. Vol. 22. P. 241–255. https://doi.org/10.1088/0305-4470/22/3/009.

10. Kawamoto Sh. An exact transformation from the Harry Dym equation to the modified KdV equation // J. Phys. Soc. Japan. 1985. Vol. 54. P. 2055–2056. https://doi.org/10.1143/JPSJ.54.2055.

11. Dmitrieva L., Pyatkin D. Elliptic finite-gap densities of the polar operator // Phys. Lett. A. 2002. Vol. 1. P. 37–44. https://doi.org/10.1016/S0375-9601(02)00858-7.

12. Cai L., Cheng J. Reciprocal transformations of Harry–Dym hierarchy // Appl. Math. Lett. 2021. Vol. 112. http://dx.doi.org/10.1063/1.1606527.

13. Mel'nikov V. K. Creation and annihilation of solitons in the system described by the Korteweg-de Vries equation with a self-consistent source // Inverse Probl. 1990. Vol. 6. P. 809–823. https://doi.org/10.1088/0266-5611/6/5/010.

14. Urazboev G. U. Toda lattice with a special self-consistent source // Theor. Math. Phys. 2008. Vol. 154. P. 260–269. https://doi.org/10.1007/S11232-008-0025-8.

15. Babajanov B., Fečkan M., Urazboev G. On the periodic Toda lattice hierarchy with an integral source // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2017. Vol. 52. P. 110–123. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2017.04.023.

16. Urazboev G. U., Babadjanova A. K., Saparbaeva D. R. Integration of the Harry Dym equation with an integral type source // Vestnik Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki. 2021. Vol. 31. P. 285–295. https://doi.org/10.35634/vm210209.

17. Urazboev G. U., Babadjanova A. K., Zhuaspayev T. A. Integration of the periodic Harry Dym equation with a source // Wave Motion. 2022. Vol. 113. Art. no. 102970. https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2022.102970.

18. Wu H., Liu J., Zeng Y. New extension of dispersionless Harry Dym hierarchy // Journal of Nonlinear Mathematical Physics. 2016. Vol. 23, no. 3. P. 383–398. https://doi.org/10.1080/14029251.2016.1199499.

19. Ma W.-X. An extended Harry Dym hierarchy // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. 2010. Vol. 43, no. 16. Art. no. 165202. https://doi.org/10.1088/1751-8113/43/16/165202.

20. Aktosun T., van der Mee C. Explicit solutions to the Korteweg–de Vries equation on the half line // Inverse Problems. 2006. Vol. 22, no. 6. P. 2165–2174. https://doi.org/10.1088/0266-5611/22/6/014.

REFERENCES

1. Vasconcelos, G.L. & Kadanoff, L.P. 1991, "Stationary solutions for the Saffman-Taylor problem with surface tension", *Physical Review A*, vol. 44, no. 11, pp. 6490–6495, doi: 10.1103/PhysRevA.44.6490.

2. Ibragimov, N.K. & Shabat, A.B. 1981, "Infinite Lie-Beklund algebras", *Functional Analysis and Its Applications*, vol. 14, no. 4, pp. 313–315, doi: 10.1007/BF01078315.

3. Guo, B.-Y. & Roges, C. 1989, “On Harry Dym equation and its solution”, *Science*, vol. 32, no. 3, pp. 283–295.

4. Fuchssteiner, B., Schulze, T. & Carllot, S. 1992, “Explicit solutions for Harry Dym equation”, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. 25, no. 1, pp. 223–230, doi: 10.1088/0305-4470/25/1/025.

5. Kruskal, M.D. 1975, “Lecture notes in physics”, in *Lecture Notes in Physics*, vol. 38, Springer, Berlin.

6. Sabatier, P.C. 1979, “On some spectral problems and isospectral evolutions connected with the classical string problem. II: Evolution equation”, *Letters al Nuovo Cimento*, vol. 26, no. 15, pp. 483–486, http://dx.doi.org/
10.1155/2013/109170.

7. Wadati, M., Konno, H. & Ichikawa, Y.H. 1979, “New integrable nonlinear evolution equation”, *Journal of the Physical Society of Japan*, vol. 47, no. 5, pp. 1698–1700, doi: 10.1143/
JPSJ.47.1698.

8. Wadati, M., Ichikawa, Y.H. & Shimizu, T. 1980, “Cusp Soliton of a New Integrable Nonlinear Evolution Equation”, *Progress of Theoretical Physics*, vol. 64, no. 6, pp. 1959–1967, doi: 10.1143/
PTP.64.1959.

9. Hereman, W., Banerjee, P.P. & Chatterjee, M.R. 1989, “Derivation and implicit solution of the Harry Dym equation and its connection with the Korteweg-de Vries equation”, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. 22, no. 3, pp. 241–255, doi: 10.1088/0305-4470/22/3/009.

10. Kawamoto, S. 1985, “An exact transformation from the Harry Dym equation to the modified KdV equation”, *Journal of the Physical Society of Japan*, vol. 54, no. 5, pp. 2055–2056, doi: 10.1143/JPSJ.54.2055.

11. Dmitrieva, L. & Pyatkin, D. 2002, “Elliptic finite-gap densities of the polar operator”, *Physics Letters A*, vol. 299, no. 1, pp. 37–44, doi: 10.1016/S0375-9601(02)00858-7.

12. Cai, L. & Cheng, J. 2021, “Reciprocal transformations of Harry–Dym hierarchy”, *Applied Mathematics Letters*, vol. 112, art. id. 106702, http://dx.doi.org/10.1063/1.1606527.

13. Mel’nikov, V.K. 1990, “Creation and annihilation of solitons in the system described by the Korteweg-de Vries equation with a self-consistent source”, *Inverse Problems*, vol. 6, no. 5, pp. 809–823, doi: 10.1088/0266-5611/6/5/010.

14. Urazboev, G.U. 2008, “Toda lattice with a special self-consistent source”, *Theoretical and Mathematical Physics*, vol. 154, no. 2, pp. 260–269, doi: 10.1007/S11232-008-0025-8.

15. Babajanov, B., Fečkan, M. & Urazboev, G. 2017, “On the periodic Toda lattice hierarchy with an integral source”, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 52, pp. 110–123, doi: 10.1016/
j.cnsns.2017.04.023.

16. Urazboev, G.U., Babadjanova, A.K. & Saparbaeva, D.R. 2021, “Integration of the Harry Dym equation with an integral type source”, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp’yuternye Nauki*, vol. 31, no. 2, pp. 285–295, doi: 10.35634/vm210209.

17. Urazboev, G.U., Babadjanova, A.K. & Zhuaspayev, T.A. 2022, “Integration of the periodic Harry Dym equation with a source”, *Wave Motion*, vol. 113, art. id. 102970, doi: 10.1016/j.wavemoti.2022.102970.

18. Wu, H., Liu, J. & Zeng, Y. 2016, “New extension of dispersionless Harry Dym hierarchy”, *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, vol. 23, no. 3, pp. 383–398, doi: 10.1080/14029251.2016.1199499.

19. Ma, W.-X. 2010, “An extended Harry Dym hierarchy”, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, vol. 43, no. 16, art. id. 165202, doi: 10.1088/1751-8113/43/16/165202.

20. Aktosun, T. & van der Mee, C. 2006, “Explicit solutions to the Korteweg–de Vries equation on the half line”, *Inverse Problems*, vol. 22, no. 6, pp. 2165–2174, doi: 10.1088/0266-5611/22/6/017.

Получено: 07.03.2025
Принято в печать: 08.12.2025

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 26. Выпуск 5.

УДК: 512.54 DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-5-259-279

Связь между решениями линейных диофантовых уравнений при действиях группы подстановок и группы автоморфизмов целых чисел

И. С. Чистов, Л. М. Цыбуля

Чистов Иван Сергеевич — студент, Московский педагогический государственный университет (г. Москва).
e-mail: i.chistow2014@yandex.ru
Цыбуля Лилия Михайловна — кандидат физико–математических наук, Московский педагогический государственный университет (г. Москва).
e-mail: liliya-kinder@mail.ru

Аннотация

В статье показано, что между действиями симметрической группы S_n подстановок на множестве линейных диофантовых уравнений и на множестве их решений существует прямая связь.

Так, удалось установить, что при перестановке коэффициентов линейного диофантова уравнения координаты его вектора общего решения переставляются в том же порядке, а при перестановке переменных — в обратном порядке.

Аналогичная связь имеется и между действиями группы автоморфизмов целых чисел на множестве линейных диофантовых уравнений и их решений: если какие-либо коэффициенты в уравнении заменить на им противоположные, то соответствующие по порядку следования координаты его вектора общего решения также заменятся на им противоположные.

Были также получены результаты, которые касаются связи разных действий группы подстановок на множестве линейных диофантовых уравнений. Например, перестановка коэффициентов уравнения означает перестановку его неизвестных в обратном порядке.

Установленные связи между действиями позволяют на практике быстрее находить решения целого класса линейных диофантовых уравнений, зная решение всего одного его представителя. В свою очередь, изучение действий других групп на данном множестве и связей, порожденных ими, позволит расширить этот класс.

Ключевые слова: действие группы, симметрическая группа, подстановка, группа автоморфизмов целых чисел, линейное диофантово уравнение.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:
Чистов И. С., Цыбуля Л. М. Связь между решениями линейных диофантовых уравнений при действиях группы подстановок и группы автоморфизмов целых чисел // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 5, с. 259–279.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 26. No. 5.

UDC: 512.54 DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-5-259-279

The connection between the linear Diophantine equations solutions under the actions of the symmetric group and the automoprhism group of the integers

I. S. Chistov, L. M. Tsybulya

Chistov Ivan Sergeevich — student, Moscow Pedagogical State University (Moscow).
e-mail: i.chistow2014@yandex.ru
Tsybulya Liliya Mikhailovna — candidate of physical and mathematical sciences, Moscow Pedagogical State University (Moscow).
e-mail: liliya-kinder@mail.ru

Abstract

This article shows that there is a direct connection between the actions of the symmetric group S_n on the set of linear Diophantine equations and on the set of their solutions.

Thus, it was found that for coefficients rearrangement in a linear Diophantine equation the coordinates of its general solution vector are rearranged in the same order, and for variables rearrangement we get the reverse order of the vector coordinates.

There is a similar connection between the actions of the group of the automorphisms of the integers on the set of linear Diophantine equations and their solutions: if on changes the signs of some coefficients in the equation, then the signs of the corresponding coordinates of the general solution vector are changed too.

We also obtained results on the connection of different actions of the symmetric group on the set of linear Diophantine equations. For example, rearrangement of the equation coefficients is equivalent to rearrangement of its variables in the reverse order.

Established connections between the actions make it possible to quickly find solutions of an entire class of linear diophantine equations from a solution of only one of its elements. In turn, studying the actions of other groups on the given set and the connections generated by them would expand this class.

Keywords: a group action, the symmetric group, a permutation, the automoprhism group of the integers, a linear Diophantine equation.

Bibliography: 15 titles.

For citation:
Chistov, I. S., Tsybulya, L. M. 2025, “The connection between the linear Diophantine equations solutions under the actions of the symmetric group and the automoprhism group of the integers”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 5, pp. 259–279.

1. Введение

Непосредственным изучением действий групп на различные множества занимается абстрактная теория групп ([1], [2]). Многие алгебраические задачи лучше всего решать с помощью групповых действий, ведь при рассмотрении последних на конкретных множествах выявляются определенные закономерности, позволяющие найти более простой способ решения той или иной задачи.

Цель работы — ввести действия группы подстановок S_n и группы автоморфизмов целых чисел $Aut(\mathbb{Z})$ на множестве линейных диофантовых уравнений и на множестве их решений $\mathbb{Z}^n$, а также выявить взаимосвязи как между различными действиями группы S_n на множестве на множестве линейных диофантовых уравнений, так и между действиями каждой из групп на двух данных множествах.

Задачи — задать действия на множестве линейных диофантовых уравнений и на множестве решений этих уравнений, исследовать и описать свойства этих действий и, наконец, связать исследуемые на разных множествах действия между собой.

В первом параграфе рассматривается понятие линейного диофантова уравнения с n неизвестными, приводится условие совместности такого уравнения, демонстрируется общий подход к решению. Задается обозначение для множества таких уравнений.

В следующем параграфе введены действия группы подстановок на множестве линейных диофантовых уравнений и на множестве их решений. Далее изучены взаимосвязи между действиями данной группы на одном из указанных множеств, а после — между её действиями на двух данных множествах.

Последний параграф посвящен действиям другой группы на множестве линейных диофантовых уравнений и на множестве их решений — группы автоморфизмов группы целых чисел. Продемонстрирована связь между действиями на двух данных множествах, полезная в применении на практике.

Научная новизна исследования состоит в применении теории групповых действий на нестандартном объекте — множестве, состоящем из линейных диофантовых уравнений с n переменными.

Научная значимость результатов исследования заключается в возможности использования и дальнейшего расширения механизма отыскания решений линейных и нелинейных диофантовых уравнений с помощью метода групповых действий.

2. Множество линейных диофантовых уравнений

Определение 1. *Линейным диофантовым уравнением (ЛДУ) с n неизвестными будем называть уравнение вида*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b, \tag{1}$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ — целые числа, причём хотя бы одно $a_i \neq 0$, и при этом для него поставлена задача, чтобы неизвестные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ принимали только целые значения.

Числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ называют коэффициентами ЛДУ, [3], [4].

Предложение 1. *ЛДУ (1) совместно тогда и только тогда, когда наибольший общий делитель всех коэффициентов НОД$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ делит b, [3], [4].*

Пусть ЛДУ (1) совместно. Рассмотрим процедуру нахождения решений данного уравнения при помощи составления матрицы $M_{n+1\times n}$, первая вектор-строка которой представляет собой выписанные по порядку коэффициенты ЛДУ, а остальные элементы в совокупности составляют единичную квадратную подматрицу порядка n:

$$M_{n+1\times n} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Данную матрицу с помощью трёх элементарных преобразований, а именно умножения любого столбца на -1, перемены местами любых двух столбцов или прибавлением к любому столбцу любого другого столбца, умноженного на произвольное целое число (прибавляемый столбец остается на месте), всегда можно привести к виду:

$$\begin{pmatrix} d & 0 & \cdots & 0 \\ z_{11} & z_{12} & \cdots & z_{1n} \\ z_{21} & z_{22} & \cdots & z_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z_{n1} & z_{n2} & \cdots & z_{nn} \end{pmatrix},$$

где $d =$НОД$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Тогда вектор общего решения $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из множества векторов-строк $\mathbb{Z}^n$ для совместного ЛДУ (1) легко увидеть из строк получившейся матрицы. Он будет иметь вид

$$x = (\frac{b}{d}z_{11} + z_{12}t_2 + \ldots + z_{1n}t_n, \frac{b}{d}z_{21} + z_{22}t_2 + \ldots + z_{2n}t_n, \ldots, \frac{b}{d}z_{n1} + z_{n2}t_2 + \ldots + z_{nn}t_n),$$

где $t_2, \ldots, t_n \in \mathbb{Z}$, [5].

Множество всевозможных диофантовых уравнений с n неизвестными будем обозначать так:

$$LDE = \{D : a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b \mid a_i,\ b \in \mathbb{Z}, i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Для удобства элементы LDE иногда будут обозначаться $D = (a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b)$.

Равными элементами в LDE будем считать такие уравнения, у которых совпадают правые части и все коэффициенты при соответствующих переменных в их левых частях.

3. Действия группы подстановок на множестве линейных диофантовых уравнений

3.1. Основные действия-перестановки

В данном параграфе будут рассмотрены различные действия группы подстановок S_n с операцией $\circ$ правой композиции подстановок ([6], [7], [8]) на множестве LDE, а также будут выявлены взаимосвязи между этими действиями.

Для начала определим отображение

$$a_\sigma : S_n \times LDE \to LDE$$

по следующему правилу: каждой паре $(\sigma, a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b)$ поставим в соответствие элемент

$$\sigma \cdot (a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b) = (a_{\sigma(1)}x_1 + a_{\sigma(2)}x_2 + \ldots + a_{\sigma(n)}x_n = b).$$

Предложение 2. *Отображение a_σ является действием группы S_n на множестве LDE.*

Доказательство. Действительно, результат этого отображения лежит в LDE, так как перемена мест коэффициентов, очевидно, не изменит их целостности.

Первая аксиома действия выполняется:

$$id \cdot (a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b) = (a_{id(1)}x_1 + a_{id(2)}x_2 + \ldots + a_{id(n)}x_n = b) =$$

$$= (a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b).$$

Аналогично со второй аксиомой:

$$\tau \cdot (\sigma \cdot (a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b)) = \tau \cdot (a_{\sigma(1)}x_1 + a_{\sigma(2)}x_2 + \ldots + a_{\sigma(n)}x_n = b) =$$

$$= (a_{\tau(\sigma(1))}x_1 + a_{\tau(\sigma(2))}x_2 + \ldots + a_{\tau(\sigma(n))}x_n = b) =$$

$$= (a_{(\tau\circ\sigma)(1)}x_1 + a_{(\tau\circ\sigma)(2)}x_2 + \ldots + a_{(\tau\circ\sigma)(n)}x_n = b) =$$

$$= (\tau \circ \sigma) \cdot (a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b).$$

■

Определение 2. *Действие a_σ будем называть перестановкой коэффициентов ЛДУ.*

Рассмотрим ещё отображение

$$x_\sigma : S_n \times LDE \to LDE,$$

по правилу: каждой паре $(\sigma, a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b)$ поставим в соответствие элемент

$$\sigma \cdot (a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b) = (a_1x_{\sigma(1)} + a_2x_{\sigma(2)} + \ldots + a_nx_{\sigma(n)} = b).$$

Данное отображение является действием: доказательство аналогично проведенному выше для действия a_σ.

Определение 3. *Будем называть действие x_σ перестановкой неизвестных ЛДУ.*

Введём в рассмотрение, наконец, отображение

$$a_\sigma x_\sigma : S_n \times LDE \to LDE,$$

определённое правилом: каждой паре $(\sigma, a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b)$ ставится в соответствие элемент

$$\sigma \cdot (a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b) = (a_{\sigma(1)}x_{\sigma(1)} + a_{\sigma(2)}x_{\sigma(2)} + \ldots + a_{\sigma(n)}x_{\sigma(n)} = b).$$

Как и выше, легко проверяется, что $a_\sigma x_\sigma$ — действие.

Замечание 13. *Легко видеть, что действие $a_\sigma x_\sigma$ есть не что иное, как комбинация действий a_σ и x_σ. Видим, что $a_\sigma x_\sigma = x_\sigma a_\sigma$, то есть совсем не важно, в каком порядке эти действия сочетать. В действительности, отображение $a_\sigma x_\sigma$ — это скорее операция умножения на множестве введённых нами действий на множестве LDE, а в данном случае эта операция оказалась коммутативной для конкретных действий.*

Определение 4. *Будем говорить, что действие $a_\sigma x_\sigma$ — это перестановка коэффициентов и неизвестных ЛДУ в одноименном порядке.*

Определение 5. *При применении действий $a_\sigma, x_\sigma, a_\sigma x_\sigma$ для конкретной подстановки σ будем говорить, что коэффициенты и/или неизвестные ЛДУ переставились в порядке σ.*

Рассмотрим множество D_{a_σ} всех ЛДУ, полученных перестановкой коэффициентов совместного ЛДУ (1) в порядке $\sigma^k, k \in \mathbb{N}_0$. Другими словами,

$$D_{a_\sigma} = \{(a_{\sigma^k(1)}x_1 + a_{\sigma^k(2)}x_2 + \ldots + a_{\sigma^k(n)}x_n = b) \mid k \in \mathbb{N}_0\}.$$

Ясно, что само ЛДУ (1) тоже принадлежит этому множеству, так как для этого случая $k = 0$, то есть коэффициенты переставляются в порядке $\sigma^0 = id$. Заметим, что $D_{a_\sigma} \subset LDE$, поэтому мы в праве говорить о действии S_n на D_{a_σ} и называть такое действие аналогичным образом, как в определении 2.

Удобно воспринимать множество D_{a_σ} как орбиту фиксированного уравнения (1) при действии подгруппы $\langle\sigma\rangle$ группы S_n на множестве LDE.

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *Если в уравнении множества D_{a_σ} переставить коэффициенты и неизвестные в одноимённом порядке, то полученное новое уравнение будет совпадать с исходным, то есть*

$$\forall T \in D_{a_\sigma}\big(a_\sigma x_\sigma(T) = T\big).$$

Доказательство. Формально, требуется показать, что для любого $k \in \mathbb{N}_0$

$$(a_{\sigma^{k+1}(1)}x_{\sigma(1)} + a_{\sigma^{k+1}(2)}x_{\sigma(2)} + \ldots + a_{\sigma^{k+1}(n)}x_{\sigma(n)} = b) =$$

$$= (a_{\sigma^k(1)}x_1 + a_{\sigma^k(2)}x_2 + \ldots + a_{\sigma^k(n)}x_n = b).$$

Докажем данное утверждение индукцией по k.

Возьмём $D = (a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b) \in LDE$. Множеству D_{a_σ} тогда будет принадлежать элемент вида $T = a_{\sigma^k}(D)$.

1. База индукции: пусть $k = 0$, тогда если применить действие $a_\sigma x_\sigma$ к уравнению

$$T = a_{\sigma^0}(D) = \sigma^0 \cdot D = id \cdot (a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b) =$$

$$= (a_{id(1)}x_1 + a_{id(2)}x_2 + \ldots + a_{id(n)}x_n = b) = (a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b),$$

то результатом будет служить уравнение

$$a_\sigma x_\sigma(T) = a_\sigma x_\sigma(a_{\sigma^0}(D)) = (a_{\sigma(1)}x_{\sigma(1)} + a_{\sigma(2)}x_{\sigma(2)} + \ldots + a_{\sigma(n)}x_{\sigma(n)} = b),$$

которое, очевидно, совпадает с исходным $a_{\sigma^0}(D) = T$, так как подстановка переведёт равные индексы в равные.

2. Шаг индукции: предположим, что формула, справедливость которой требуется показать, верна для $k = m$, то есть

$$(a_{\sigma^{m+1}(1)}x_{\sigma(1)} + a_{\sigma^{m+1}(2)}x_{\sigma(2)} + \ldots + a_{\sigma^{m+1}(n)}x_{\sigma(n)} = b) =$$

$$= (a_{\sigma^m(1)}x_1 + a_{\sigma^m(2)}x_2 + \ldots + a_{\sigma^m(n)}x_n = b).$$

Покажем тогда справедливость для $k = m + 1$, то есть

$$\begin{gathered}(a_{\sigma^{m+2}(1)}x_{\sigma(1)} + a_{\sigma^{m+2}(2)}x_{\sigma(2)} + \ldots + a_{\sigma^{m+2}(n)}x_{\sigma(n)} = b) = \\ = (a_{\sigma^{m+1}(1)}x_1 + a_{\sigma^{m+1}(2)}x_2 + \ldots + a_{\sigma^{m+1}(n)}x_n = b).\end{gathered} \tag{2}$$

Чтобы прообраз был равен образу, все пары индексов в новом и старом уравнениях должны быть инвариантны (то есть индексы коэффициентов в новом уравнении будут находиться именно с теми индексами неизвестных, что и в старом, просто, ясно, что в других местах).

Предположим противное, то есть что уравнения не равны, значит, нашлась такая пара i, j, что $i = \sigma(j)$, но $\sigma^{m+1}(i) \neq \sigma^{m+2}(j)$. Последнее неравенство можно в силу второй аксиомы действия переписать в виде $\sigma^{m+1}(i) \neq \sigma^{m+1}(\sigma(j))$. После подстановки в него правой части равенства $i = \sigma(j)$, получим $\sigma^{m+1}(i) \neq \sigma^{m+1}(i)$. Это будет противоречить тому, что σ — подстановка.

Стало быть, все пары индексов коэффициентов и примыкающих к ним неизвестных остались инвариантны, хоть и в разных местах, значит, верно (2), следовательно, верно и требуемое. ∎

Переформулировать лемму 1 можно так: перестановка коэффициентов и неизвестных ЛДУ в одноимённом порядке σ тривиальна (как действие) на всей орбите, образованной при действии на множестве LDE циклической подгруппы, порожденной σ.

Важно при этом понимать, чем элементы (уравнения) орбиты D_{a_σ} отличаются от других ЛДУ. На самом деле, это отличие не так очевидно на первый взгляд. Так как орбита D_{a_σ}

образована при действии a_σ, то к её элементам мы будем относиться с особым вниманием, потому что они имеют вид $(a_{\sigma^k(1)}x_1 + a_{\sigma^k(2)}x_2 + \ldots + a_{\sigma^k(n)}x_n = b), k \in \mathbb{N}_0$. Иными словами, все элементы этой орбиты стоит воспринимать как результаты действия a_σ, и соответствующим образом относиться к коэффициентам (их индексы уже зависят от σ.)

Вообще говоря, можно было и не рассматривать настолько сильное утверждение, так как даже если переобозначить в элементах этой орбиты коэффициенты $a_{\sigma(i)}$ через a'_i и относиться к таким уравнениям, будто никаким действиям они подвергнуты не были, то лемма 1 всё равно будет справедлива, при этом смысл её был бы таковым: действие $a_\sigma x_\sigma$ тривиально на LDE.

Необходимость рассмотрения данного утверждения обоснуем тем, что этот результат будет нам важен в доказательстве следующих утверждений, например, важной теоремы 1.

Пример 9. *Пусть имеется ЛДУ*

$$D : (x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 6)$$

и подстановка

$$\sigma = (12345).$$

Чтобы воспользоваться леммой, нам нужно рассмотреть ЛДУ из орбиты при действии подгруппы $\langle(12345)\rangle$. На такую роль может подойти и само ЛДУ D, но мы рассмотрим нетривиальный представитель орбиты (это будет ЛДУ T ниже):

$$T = a_{(12345)}(D) = (2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 + x_5 = 6) \in D_{a_{(12345)}}.$$

Теперь воспользуемся условием леммы, то есть переставим у ЛДУ T коэффициенты и переменные в одноимённом порядке (том же) $\sigma = (12345)$:

$$a_{(12345)}x_{(12345)}(T) = (3x_2 + 4x_3 + 5x_4 + x_5 + 2x_1 = 6) = T.$$

Замечание 14. *Лемма 1 верна и для одноименной перестановки коэффициентов и/или неизвестных в порядке $\sigma^s, s \in \mathbb{N}_0$. Формально это означает следующее:*

$$\forall T \in D_{a_\sigma}\big(a_{\sigma^s}x_{\sigma^s}(T) = T\big).$$

Или

$$(a_{\sigma^{k+s}(1)}x_{\sigma^s(1)} + a_{\sigma^{k+s}(2)}x_{\sigma^s(2)} + \ldots + a_{\sigma^{k+s}(n)}x_{\sigma^s(n)} = b) =$$
$$= (a_{\sigma^k(1)}x_1 + a_{\sigma^k(2)}x_2 + \ldots + a_{\sigma^k(n)}x_n = b).$$

Теорема 1. *Переставить неизвестные в любом совместном ЛДУ в определённом порядке означает переставить его коэффициенты в обратном порядке, т.е.*

$$\forall D \in LDE\ \big(x_\sigma(D) = a_{\sigma^{-1}}(D)\big).$$

Доказательство. Осуществим перестановку коэффициентов в порядке σ^{-1}:

$$\sigma^{-1} \cdot (a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b) =$$

$$= (a_{\sigma^{-1}(1)}x_1 + a_{\sigma^{-1}(2)}x_2 + \ldots + a_{\sigma^{-1}(n)}x_n = b).$$

Далее переставим коэффициенты и неизвестные уже в одноимённом порядке σ, получив при этом равносильное, даже идентичное (равное), по лемме 1 уравнение:

$$\sigma \cdot (a_{\sigma^{-1}(1)}x_1 + a_{\sigma^{-1}(2)}x_2 + \ldots + a_{\sigma^{-1}(n)}x_n = b) =$$

$$= (a_{\sigma(\sigma^{-1}(1))}x_{\sigma(1)} + a_{\sigma(\sigma^{-1}(2))}x_{\sigma(2)} + \ldots + a_{\sigma(\sigma^{-1}(n))}x_{\sigma(n)} = b).$$

После преобразования правой части последнего равенства получим

$$(a_1x_{\sigma(1)} + a_2x_{\sigma(2)} + \ldots + a_nx_{\sigma(n)} = b).$$

Обращаясь к началу доказательства, видим, что коэффициенты переставились в обратном порядке. ■

Замечание 15. *Схожим образом мы могли создать множество D_{x_σ} всех ЛДУ, полученных перестановкой неизвестных совместного ЛДУ (1) в порядке $\sigma^k, k \in \mathbb{N}_0$, и множество $D_{a_\sigma x_\sigma}$ всех ЛДУ, полученных перестановкой коэффициентов и неизвестных совместного ЛДУ (1) в порядке $\sigma^k, k \in \mathbb{N}_0$. Для всех элементов таких множеств также будет справедлива лемма 1, сформулированная аналогичным образом.*

По данному замечанию доказывается, что верно и

$$\forall D \in LDE\ \big(a_\sigma(D) = x_{\sigma^{-1}}(D)\big).$$

Вывод: для изучения действия x_σ достаточно изучения a_σ или наоборот, так как имеется непосредственная связь.

3.2. Действия на связанных с ЛДУ множествах

Дополнительно рассмотрим также действия на связанные с ЛДУ множества, такие как множество $\mathbb{Z}^n$ арифметических векторов-строк $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ и множество матриц ([9]) вида

$$M_{n+1\times n}(\mathbb{Z}) = \left\{ M = \begin{pmatrix} a_{01} & a_{02} & \cdots & a_{0n} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \middle|\ a_{ij} \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Итак, сконструируем сначала отображение

$$z_\sigma : S_n \times \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^n,$$

определённое правилом: каждой паре (σ, z) поставим в соответствие элемент

$$\sigma \cdot (z_1, z_2, \ldots, z_n) = (z_{\sigma(1)}, z_{\sigma(2)}, \ldots, z_{\sigma(n)}).$$

Далее посмотрим ещё на три отображения:

$$c_\sigma : S_n \times M_{n+1\times n}(\mathbb{Z}) \to M_{n+1\times n}(\mathbb{Z})$$

с правилом: каждой паре (σ, M) поставим в соответствие элемент

$$\sigma \cdot \begin{pmatrix} a_{01} & a_{02} & \cdots & a_{0n} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{0\sigma(1)} & a_{0\sigma(2)} & \cdots & a_{0\sigma(n)} \\ a_{1\sigma(1)} & a_{1\sigma(2)} & \cdots & a_{1\sigma(n)} \\ a_{2\sigma(1)} & a_{2\sigma(2)} & \cdots & a_{2\sigma(n)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n\sigma(1)} & a_{n\sigma(2)} & \cdots & a_{n\sigma(n)} \end{pmatrix};$$

$$l_\sigma : S_n \times M_{n+1\times n}(\mathbb{Z}) \to M_{n+1\times n}(\mathbb{Z})$$

с правилом: каждой паре (σ, M) поставим в соответствие элемент

$$\sigma \cdot \begin{pmatrix} a_{01} & a_{02} & \cdots & a_{0n} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{01} & a_{02} & \cdots & a_{0n} \\ a_{\sigma(1)1} & a_{\sigma(1)2} & \cdots & a_{\sigma(1)n} \\ a_{\sigma(2)1} & a_{\sigma(2)2} & \cdots & a_{\sigma(2)n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\sigma(n)1} & a_{\sigma(n)2} & \cdots & a_{\sigma(n)n} \end{pmatrix};$$

$$c_\sigma l_\sigma : S_n \times M_{n+1\times n}(\mathbb{Z}) \to M_{n+1\times n}(\mathbb{Z})$$

с правилом: каждой паре (σ, M) поставим в соответствие элемент

$$\sigma \cdot \begin{pmatrix} a_{01} & a_{02} & \cdots & a_{0n} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{0\sigma(1)} & a_{0\sigma(2)} & \cdots & a_{0\sigma(n)} \\ a_{\sigma(1)\sigma(1)} & a_{\sigma(1)\sigma(2)} & \cdots & a_{\sigma(1)\sigma(n)} \\ a_{\sigma(2)\sigma(1)} & a_{\sigma(2)\sigma(2)} & \cdots & a_{\sigma(2)\sigma(n)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\sigma(n)\sigma(1)} & a_{\sigma(n)\sigma(2)} & \cdots & a_{\sigma(n)\sigma(n)} \end{pmatrix}.$$

Нам предстоит также убедиться, что все отображения выше являются действиями. На самом деле, так как мы всё время работали с индексами, то очевидна аналогия с действиями $a_\sigma, x_\sigma, a_\sigma x_\sigma$.

Определение 6. *Действие z_σ будем называть перестановкой координат z_1, z_2, $\ldots, z_n$ вектора $z \in \mathbb{Z}^n$.*

Определение 7. *Действие c_σ назовём перестановкой столбцов матрицы множества $M_{n+1\times n}(\mathbb{Z})$.*

Действие l_σ назовём перестановкой строк матрицы множества $M_{n+1\times n}(\mathbb{Z})$.

Действие $c_\sigma l_\sigma$ назовём перестановкой столбцов и строк матрицы множества $M_{n+1\times n}(\mathbb{Z})$.

Определение 8. *Матрицей подстановки $\alpha \in S_n$ называется квадратная матрица P_α порядка n, у которой в каждом столбце и строке находится ровно один единичный элемент, то есть матрица вида*

$$P_\alpha = \begin{pmatrix} e_{\alpha(1)} \\ \vdots \\ e_{\alpha(n)} \end{pmatrix},$$

где $e_i = (0, \ldots, \underbrace{1}_{i}, \ldots, 0) \in \mathbb{Z}^n$, *[10], [11].*

Множество всех матриц подстановок обозначим

$$P_{n\times n} = \{P_\alpha \mid \alpha \in S_n\}.$$

Рассмотрим единичную матрицу E порядка n:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что $E = P_{id}$, а все матрицы подстановки получаются из матрицы E перестановкой строк или перестановкой столбцов единичной матрицы (*здесь «или» как дизъюнкция*). Видно, что в E элементы $a_{ij} = 1$, если $i = j$, и $a_{ij} = 0$ в противном случае.

Замечание 16. *Важно понимать, что в определении 8 уже скрыто действие группы подстановок, результатом которого мы будем пользоваться в дальнейших доказательствах. Например, в матрице подстановки* $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *элемент* a_{11} *не равен нулю, а явно является единицей, ибо нужно учесть результат предыдущего действия, скрытого в определении 8. Позже важность этого будет показана в доказательстве леммы 2. Название матрицы подстановки не случайно формулируется таким образом. Такая матрица завязана на определённой подстановке.*

Далее мы фактически будем говорить о действиях группы подстановок S_n на множестве $P_{n\times n}$ и тоже условимся называть их по аналогии с определением 7. Также для удобства и простоты восприятия будем полноправно считать

$$P_{n\times n} = \{E_\alpha \mid \alpha \in S_n\}.$$

Это обусловлено тем, что если $E = P_{id}$, то $E_\alpha = P_{\alpha(id)} = P_\alpha$.

Определение 9. *Пусть* $i, j \in \mathbb{N}$ *и* $\overline{\mathbb{Z}^n}$ *— множество арифметических* n*-мерных векторов-столбцов с целочисленными координатами.*

Действие $\widetilde{c}_\sigma$*, определенное по правилу*

$$(\sigma, E_\alpha) \mapsto \sigma \cdot E_\alpha = \left(e_{\sigma(\alpha(1))} \ \cdots \ e_{\sigma(\alpha(n))}\right),$$

где $e_{\sigma(\alpha(i))} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \underbrace{1}_{\sigma(\alpha(i))} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \overline{\mathbb{Z}^n}$, *назовём перестановкой столбцов матрицы множества* $P_{n\times n}$.

Действие $\widetilde{l}_\sigma$*, определенное по правилу*

$$(\sigma, E_\alpha) \mapsto \sigma \cdot E_\alpha = \begin{pmatrix} e_{\sigma(\alpha(1))} \\ \vdots \\ e_{\sigma(\alpha(n))} \end{pmatrix},$$

где $e_{\sigma(\alpha(i))} = (0, \ldots, \underbrace{1}_{\sigma(\alpha(i))}, \ldots, 0) \in \mathbb{Z}^n$, *назовём перестановкой строк матрицы множества* $P_{n\times n}$.

Действие $\widetilde{c}_\sigma \widetilde{l}_\sigma$*, определенное по правилу*

$$(\sigma, E_\alpha) \mapsto \sigma \cdot E_\alpha = \left(e_{\sigma(\alpha(i)) \ \sigma(\alpha(j))}\right),$$

назовём перестановкой столбцов и строк матрицы множества $P_{n\times n}$.

Лемма 2. *Одноименная перестановка и столбцов, и строк не меняет матрицы множества* $P_{n\times n}$*. То есть*

$$\forall\, M \in P_{n\times n}\, (\widetilde{c}_\sigma \widetilde{l}_\sigma(M) = M).$$

Доказательство. Рассмотрим произвольную матрицу $M = E_\alpha, \alpha \in S_n$. Из определения 9 видно, что $M = E_\alpha = c_\alpha(E)$ (К слову, можно использовать $M = E_\alpha = l_\alpha(E)$). При этом допускаем, что $\alpha = id$. Результат такого действия, имеющий вид $c_\alpha(E)$ (или же $l_\alpha(E)$), в дальнейшем будет нами учитываться. Состоит он в том, что при перестановке столбцов (или строк) матрицы E все единицы переходят опять в элементы $a_{ij}, i = j$ с равными индексами в паре, ведь индексы закреплены за конкретным элементом, а смена индексов индуцирует смену элементов. Единицы могут оказаться только там, где при действии образовались равные индексы в паре.

Теперь рассмотрим матрицу $c_\sigma l_\sigma(M) = c_\sigma l_\sigma(E_\alpha)$. Уже при одноимённой перестановке и столбцов, и строк индексы единиц тем более перейдут в равные, что и будет говорить о том, что матрица $M = E_\alpha$ не поменялась. ∎

Замечание 17. *Данная лемма в нескольких аспектах схожа с леммой 1. Во-первых, лемму 2 можно сформулировать, используя понятие орбиты. И, во-вторых, лемма 2 необходима для обоснования следующего утверждения.*

Теорема 2. *Переставить строки в определённом порядке в любой из матриц множества $P_{n\times n}$ означает переставить её столбцы в обратном порядке. То есть*

$$\forall M \in P_{n\times n} \left(\widetilde{l}_\sigma(M) = \widetilde{c}_{\sigma^{-1}}(M)\right).$$

Доказательство. Данное доказательство проведём из соображений, аналогичным тем, что применяли в теореме 1.

Сначала осуществим действие $\widetilde{c}_{\sigma^{-1}}$ на произвольную матрицу из множества $P_{n\times n}$:

$$\sigma^{-1} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1\sigma^{-1}(1)} & a_{1\sigma^{-1}(2)} & \cdots & a_{1\sigma^{-1}(n)} \\ a_{2\sigma^{-1}(1)} & a_{2\sigma^{-1}(2)} & \cdots & a_{2\sigma^{-1}(n)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n\sigma^{-1}(1)} & a_{n\sigma^{-1}(2)} & \cdots & a_{n\sigma^{-1}(n)} \end{pmatrix}.$$

Далее переставим столбцы и строки уже в порядке σ. Это не должно изменить матрицу по лемме 2:

$$\sigma \cdot \begin{pmatrix} a_{1\sigma^{-1}(1)} & a_{1\sigma^{-1}(2)} & \cdots & a_{1\sigma^{-1}(n)} \\ a_{2\sigma^{-1}(1)} & a_{2\sigma^{-1}(2)} & \cdots & a_{2\sigma^{-1}(n)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n\sigma^{-1}(1)} & a_{n\sigma^{-1}(2)} & \cdots & a_{n\sigma^{-1}(n)} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{\sigma(1)\sigma(\sigma^{-1}(1))} & a_{\sigma(1)\sigma(\sigma^{-1}(2))} & \cdots & a_{\sigma(1)\sigma(\sigma^{-1}(n))} \\ a_{\sigma(2)\sigma(\sigma^{-1}(1))} & a_{\sigma(2)\sigma(\sigma^{-1}(2))} & \cdots & a_{\sigma(2)\sigma(\sigma^{-1}(n))} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\sigma(n)\sigma(\sigma^{-1}(1))} & a_{\sigma(n)\sigma(\sigma^{-1}(2))} & \cdots & a_{\sigma(n)\sigma(\sigma^{-1}(n))} \end{pmatrix}.$$

Упростим правую часть последнего равенства и, сравнивая матрицу в начале доказательства с той, что получим ниже, убедимся в справедливости данного утверждения:

$$\begin{pmatrix} a_{\sigma(1)1} & a_{\sigma(1)2} & \cdots & a_{\sigma(1)n} \\ a_{\sigma(2)1} & a_{\sigma(2)2} & \cdots & a_{\sigma(2)n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\sigma(n)1} & a_{\sigma(n)2} & \cdots & a_{\sigma(n)n} \end{pmatrix}.$$

∎

Замечание 18. *Верно также, что*

$$\forall M \in P_{n\times n} \left(\widetilde{c}_\sigma(M) = \widetilde{l}_{\sigma^{-1}}(M)\right).$$

3.3. Связь действий

В следующей теореме будет продемонстрирована связь между перестановкой коэффициентов совместного ЛДУ и перестановкой координат вектора общего решения этого ЛДУ. В доказательстве увидим, что чрезвычайно важно и полезно было отдельно дополнительно рассматривать действия на множествах $M_{n+1\times n}(\mathbb{Z})$ и $P_{n\times n}$.

При действии a_σ совместность уравнений является инвариантом, так как НОД коэффициентов снова будет делить свободный член образа.

Теорема 3. *Пусть $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}^n$ — векторы общего решения совместных ЛДУ $D_1, D_2 \in \in LDE$ соответственно. Тогда если переставить коэффициенты ЛДУ в порядке σ, то координаты вектора общего решения переставятся в том же порядке. То есть*

$$\forall D_1, D_2 \in LDE\ \big(D_2 = a_\sigma(D_1) \Longrightarrow z_2 = z_\sigma(z_1)\big).$$

Доказательство. Итак, в качестве исходного ЛДУ возьмём

$$D_1 : a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b.$$

Составим для уравнения D_1 матрицу, чтобы найти его вектор общего решения:

$$M_{D1} = \begin{pmatrix} a_{01} & a_{02} & \cdots & a_{0n} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

где $a_{0i} = a_i$, и $a_{ij} = 1$, если $i = j$, и $a_{ij} = 0$, если $i \neq j$, для $i, j = 1, \ldots, n$.

Пока не будем применять элементарные преобразования. Зато переставим в этой матрице строки в таком же порядке, в котором переставляли коэффициенты уравнения D_1:

$$l_\sigma(M_{D1}) = M'_{D1} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_{\sigma(1)1} & a_{\sigma(1)2} & \cdots & a_{\sigma(1)n} \\ a_{\sigma(2)1} & a_{\sigma(2)2} & \cdots & a_{\sigma(2)n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\sigma(n)1} & a_{\sigma(n)2} & \cdots & a_{\sigma(n)n} \end{pmatrix}.$$

Матрица M'_{D1} уже не будет отождествляться с уравнением D_1, так как перестановка строк не является элементарным преобразованием для матрицы ЛДУ.

Переставим в D_1 коэффициенты и получим

$$a_\sigma(D_1) = D_2 : a_{\sigma(1)}x_1 + a_{\sigma(2)}x_2 + \ldots + a_{\sigma(n)}x_n = b.$$

Составим теперь для уравнения D_2 матрицу, чтобы найти уже его вектор общего решения:

$$M_{D2} = \begin{pmatrix} a'_{01} & a'_{02} & \cdots & a'_{0n} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

где $a'_{0i} = a_{0\sigma(i)} = a_{\sigma(i)}$, и $a_{ij} = 1$, если $i = j$, и $a_{ij} = 0$, если $i \neq j$, для $i, j = 1, \ldots, n$.

Иными словами,

$$M_{D2} = \begin{pmatrix} a_{\sigma(1)} & a_{\sigma(2)} & \cdots & a_{\sigma(n)} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

В этой матрице переставим в обратном порядке столбцы:

$$c_{\sigma^{-1}}(M_{D2}) = M'_{D2} = \begin{pmatrix} a_{\sigma^{-1}(\sigma(1))} & a_{\sigma^{-1}(\sigma(2))} & \cdots & a_{\sigma^{-1}(\sigma(n))} \\ a_{1\sigma^{-1}(1)} & a_{1\sigma^{-1}(2)} & \cdots & a_{1\sigma^{-1}(n)} \\ a_{2\sigma^{-1}(1)} & a_{2\sigma^{-1}(2)} & \cdots & a_{2\sigma^{-1}(n)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n\sigma^{-1}(1)} & a_{n\sigma^{-1}(2)} & \cdots & a_{n\sigma^{-1}(n)} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_{1\sigma^{-1}(1)} & a_{1\sigma^{-1}(2)} & \cdots & a_{1\sigma^{-1}(n)} \\ a_{2\sigma^{-1}(1)} & a_{2\sigma^{-1}(2)} & \cdots & a_{2\sigma^{-1}(n)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n\sigma^{-1}(1)} & a_{n\sigma^{-1}(2)} & \cdots & a_{n\sigma^{-1}(n)} \end{pmatrix}.$$

Матрица M'_{D2} по отношению к M_{D2}, в отличие от M'_{D1} по отношению к M_{D1}, уже будет отождествляться с уравнением D_2, то есть её ещё можно использовать для нахождения вектора общего решения ЛДУ D_2, так как перестановка столбцов относится к элементарным преобразованиям для матрицы ЛДУ.

Согласно теореме 2, матрицы M'_{D2} и M'_{D1} равны. Теорема применима к этим матрицам корректно, так как в итоге действие коснулось их нижних подматриц размера $n \times n$, а верхние вектор-строки у них и так покоординатно равны в силу обратной перестановки столбцов в матрице M_{D2}.

Равенство данных матриц является ключевым моментом в этом доказательстве. Дело в том, что в силу равенства этих матриц мы однозначно можем отождествить матрицу M'_{D1} уже с уравнением D_2. Нам осталось только прийти к векторам общего решения уравнений D_1 и D_2.

Вектор общего решения уравнения D_2 получится после цепочки элементарных преобразований матрицы M'_{D2} (а значит и матрицы M'_{D1}). Сейчас нам не важно их количество и то, какими именно они будут. Сейчас нам важна их очерёдность. В силу равенства матриц их очерёдность совпадает, а значит, нам не принципиально вообще их совершать. Значит, из данных матриц в итоге будут выделены одинаковые векторы общего решения для уравнения D_2. Более того, в силу равенств первых векторов-строк в матрицах M_{D_1}, M'_{D_1} и M'_{D_2}, ровно такие же элементарные преобразования (со столбцами) будут производиться и с матрицей M_{D_1} для получения вектора общего решения z_1 уравнения D_1.

Так как, опять же, вектор общего решения получается из матрицы, то перестановка строк в матрице уравнения D_1 очевидным образом означает то же, что и перестановка координат вектора z_1 в том же порядке, а значит, $z_\sigma(z_1) = z_2$. ■

Данную теорему можно доказать быстрее.

Доказательство. Пусть ЛДУ

$$D_1 : a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

имеет решение

$$z_{D_1} = (z_1, z_2, \ldots, z_n).$$

Теперь переставим все коэффициенты D_1 в порядке σ:

$$D_2 = a_\sigma(D_1) : a_{\sigma(1)}x_1 + a_{\sigma(2)}x_2 + \ldots + a_{\sigma(n)}x_n = b.$$

Рассмотрим

$$z_{D_2} = z_\sigma(z_{D_1}) = (z_{\sigma(1)}, z_{\sigma(2)}, \ldots, z_{\sigma(n)}).$$

Осталось убедиться, что набор z_{D_2} удовлетворяет ЛДУ D_2. Действительно, при подстановке этого набора в уравнение D_2 в итоге получается

$$a_{\sigma(1)} \cdot z_{\sigma(1)} + a_{\sigma(2)} \cdot z_{\sigma(2)} + \ldots + a_{\sigma(n)} \cdot z_{\sigma(n)} = b,$$

что является верным равенством, ведь по лемме 1 означает то же самое, что

$$a_1 z_1 + a_2 z_2 + \ldots + a_n z_n = b,$$

что в свою очередь является верным равенством, так как иллюстрирует подстановку z_{D_1} — решения ЛДУ D_1 в ЛДУ D_1. ■

Данное доказательство, на первый взгляд, не так строго, как основное, что было приведено раньше, ведь мы лишь предъявили вектор, который удовлетворит уравнению, но не показали, что вектор общего решения, полученный таким способом (действием) является идентичным (не по внешнему виду, а по наборам частных решений) вектору общего решения, который получился бы, если бы мы находили решение стандартным способом (через матрицу), а не через действие. В предыдущем доказательстве это показано, так как решали с помощью матрицы и перекладывали результат на язык действий.

Чтобы убедиться в строгости именно этого доказательства, нужно показать, что этот вектор действительно охватит все частные решения. Однако это правда так, ибо все частные решения векторов z_{D_2} и z_{D_1} состоят из тех же координат, только в разном порядке, а общее решение z_{D_1} ЛДУ D_1 дано нам по условию.

Данная теорема буквально позволяет нам не искать методично векторы общего решения всех ЛДУ с помощью матрицы или другими способами, что было бы весьма трудозатратно и времязатратно. Достаточно будет решить всего одно уравнение, которое как представитель породит уже всю свою орбиту. Тогда для любого другого представителя орбиты решение будет находиться лишь перестановкой координат. Так, теорема представляет большую полезность при решении ЛДУ со значительным количеством неизвестных.

При решении ЛДУ, полученных действием из другого ЛДУ, составленные матрицы можно преобразовывать по-разному. Однако в доказательстве теоремы 3 был найден и продемонстрирован универсальный метод такого решения.

Важную роль сыграет также и следствие 1.

Следствие 1. *При перестановке неизвестных совместного ЛДУ координаты его вектора общего решения переставляются в обратном порядке. То есть*

$$\forall D_1, D_2 \in LDE \left(D_2 = x_\sigma(D_1) \Longrightarrow z_2 = z_{\sigma^{-1}}(z_1)\right).$$

Доказательство. Сошлёмся лишь на теорему 1 и теорему 3. ■

Проиллюстрируем теорему конкретной задачей.

Пример 10. *Можно ли, решив в целых числах только уравнение*

$$D_1 : 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 7x_4 = 2,$$

найти вектор общего решения уравнения

$$D_2 : 2x_1 + 5x_2 - 7x_3 + 3x_4 = 2?$$

Если да, то объяснить почему.

Решение. Чтобы ответить положительно на вопрос данной задачи, нужно убедиться в том, что данные уравнения удовлетворяют условию теоремы 3. Действительно, во-первых, D_1, D_2 совместны, так как НОД их коэффициентов делит b в каждом из них. Во-вторых,

$$D_2 = a_{(234)}(D_1).$$

Покажем, как прийти к этому выводу ниже (тем самым мы решим задачу о нахождении действия, если оно существует, которым связаны два данных уравнения. Собственно, выдвижение такого предположения обосновывается тем, что коэффициенты у D_1 и D_2 идентичны, только записаны в разном порядке. Наша цель состоит в том, чтобы отыскать этот порядок). Алгоритм следующий.

1. Мы по условию найдём решение именно ЛДУ D_1. При этом $D_2 = a_\sigma(D_1)$. Напишем D_2 строго под D_1, подчеркнув, что D_2 является образом D_1 при действии a_σ:

$$D_1 : 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 7x_4 = 2,$$

$$D_2 : 2x_1 + 5x_2 - 7x_3 + 3x_4 = 2.$$

2. Перепишем уравнения друг под другом, положив $a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 5, a_4 = -7$:

$$D_1 : a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 2,$$

$$D_2 : a_1x_1 + a_3x_2 + a_4x_3 + a_2x_4 = 2.$$

3. Запишем индексы коэффициентов уравнений D_1 и D_2 соответственно в первую и вторую строчки подстановки σ:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = (234).$$

4. Полученная подстановка σ и есть искомая. Убедимся в этом (тем самым решим задачу нахождения образа уравнения при действии a_σ):

$$a_\sigma(D_1) = a_{(234)}(2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 7x_4 = 2) = a_{(234)}(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 2) =$$

$$= (a_{(234)(1)}x_1 + a_{(234)(2)}x_2 + a_{(234)(3)}x_3 + a_{(234)(4)}x_4 = 2) =$$

$$= (a_1x_1 + a_3x_2 + a_4x_3 + a_2x_4 = 2) = (2x_1 + 5x_2 - 7x_3 + 3x_4 = 2) = D_2.$$

Можно обратить внимание на то, что порядок расположения индексов коэффициентов в новом уравнении (образе) совпадает со второй строчкой подстановки (234)*, записанной в матричном виде.*

Отметим, что можно было идти и через действие x_σ, при этом пришлось бы для вектора общего решения дополнительно вычислять обратную подстановку найденной, но не пришлось бы переименовывать переменные, так как их индексы видны у уравнений сразу; мы просто записали бы их друг под другом так, чтобы друг под другом стояли одинаковые коэффициенты, ибо таково определение действия x_σ.

Возвращаемся к решению поставленной задачи:

Тогда, на самом деле, решив лишь D_1, мы мгновенно найдём и решение D_2. Итак, вектор общего решения D_1 есть

$$z_1 = (4 - 3t_2 + 5t_3 - 7t_4, -2 + 2t_2 - 5t_3 + 7t_4, t_3, t_4).$$

Стало быть,

$$z_2 = z_{(234)}(z_1) = (4 - 3t_2 + 5t_3 - 7t_4, t_3, t_4, -2 + 2t_2 - 5t_3 + 7t_4).$$

Ответ: да, можно, так как D_1 и D_2 удовлетворяют условию теоремы 3.

4. Действия группы автоморфизмов группы целых чисел $Aut(\mathbb{Z})$ на множестве линейных диофантовых уравнений

4.1. Основные действия

В данном параграфе будет рассмотрен класс действий на множестве ЛДУ, индуцированный группой

$$\langle Aut(\mathbb{Z}) = \{f \mid f(z) = mz, m = \pm 1, z \in \mathbb{Z}\}, \circ \rangle, [12], [13],$$

причём целые числа выбраны неспроста, ведь образом при действии должно служить ЛДУ, то есть целочисленность коэффициентов должна быть инвариантом.

В дальнейшем нам будет интересен только случай, когда $m = -1$.

Следующее отображение и будет являться таким действием, и это доказывается ровно так же, как делалось ранее для действий группы подстановок.

$$a^{(-)} : Aut(\mathbb{Z}) \times LDE \to LDE,$$

где каждой паре

$$(f, a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b)$$

поставим в соответствие элемент

$$f \cdot (a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b) = (f(a_1)x_1 + f(a_2)x_2 + \ldots + f(a_n)x_n = b).$$

Отметим, что группа $Aut(\mathbb{Z})$ может действовать иначе (задействуя не все коэффициенты):

$$(f, a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b) \mapsto$$

$$\mapsto (a_1x_1 + \ldots + f(a_{i_1})x_{i_1} + \ldots + f(a_{i_2})x_{i_2} + \ldots + f(a_{i_k})x_{i_k} + \ldots + a_nx_n = b),$$

где k есть любое число от 1 до n. При $k = n$ получим действие, которое будет задействовать все коэффициенты ЛДУ. Оно было определено нами ранее.

Легко проверить, что организованное таким же образом действие $Aut(\mathbb{Z})$ на неизвестные ЛДУ совпадет с $a^{(-)}$, ведь минус всегда можно в силу ассоциативности умножения вынести перед коэффициентом и отнести непосредственно к нему. По этой причине отдельно рассматривать такое действие $x^{(-)}$ не станем.

Определение 10. *Действия определённых групп на конкретных множествах, где задействованы не все коэффициенты и/или переменные ЛДУ (или же координаты вектора, элементы матрицы и тому подобное), будем называть частичными.*

Определение 11. *Действие $a^{(-)}$ будем называть заменой коэффициентов ЛДУ на им противоположные.*

Замена коэффициентов на им противоположные может быть и частичной, однако отдельного обозначения для таких действий вводить не будем. В случае частичного действия мы просто будем говорить, перед какими именно коэффициентами изменился знак. Однако, если ЛДУ имеет небольшое количество неизвестных, можно для удобства у именно частичного действия $a^{(-)}$ в обозначении отображать факт замены знаков. Например, для действия на ЛДУ с двумя неизвестными можно использовать обозначение $a^{(+-)}$, что будет означать, что первый коэффициент остался неизменным, а у второго знак изменился на противоположный.

Далее, по аналогии с предыдущими параграфами, скажем, что $Aut(\mathbb{Z})$ может действовать, опять же, на $\mathbb{Z}^n$ (так же, как и S_n), в том числе частично.

Так, отображение
$$z^{(-)} : Aut(\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^n,$$
определённое правилом: каждой паре (f, z) ставится в соответствие элемент
$$f \cdot (z_1, z_2, \ldots, z_n) = (z_1, \ldots, f(z_{i_1}), \ldots, f(z_{i_2}), \ldots, f(z_{i_k}), \ldots, z_n),$$
где $k \leq n$, является действием группы $Aut(\mathbb{Z})$ на множестве $\mathbb{Z}^n$.

При $k = n$ данное действие не частично, то есть будут задействованы все координаты.

Определение 12. *Действие $z^{(-)}$ будем называть заменой координат вектора на ему противоположные.*

4.2. Связь действий

При действии $a^{(-)}$ совместность уравнений является инвариантом, так как НОД коэффициентов снова будет делить свободный член образа.

Теорема 4. *Пусть $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}^n$ – векторы общего решения совместных ЛДУ $D_1, D_2 \in LDE$ соответственно. Тогда если заменить определенные коэффициенты ЛДУ на им противоположные, то соответствующие по порядку следования координаты вектора общего решения также заменятся на им противоположные. То есть*
$$\forall\, D_1, D_2 \in LDE \left(D_2 = a^{(-)}(D_1) \Longrightarrow z_2 = z^{(-)}(z_1)\right).$$

Доказательство. Данное утверждение докажем полноправным вторым способом, который был использован при доказательстве теоремы 3, но отметим, что способ доказательства через составление матрицы также имеет место.

Пусть ЛДУ
$$D_1 : a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$
имеет решение
$$z_1 = (z_{11}, z_{12}, \ldots, z_{1n}).$$
Теперь заменим некоторые или, быть может, все коэффициенты D_1 на им противоположные:
$$D_2 = a^{(-)}(D_1) :$$
$$a_1x_1 + \ldots + f(a_{i_1})x_{i_1} + \ldots + f(a_{i_2})x_{i_2} + \ldots + f(a_{i_k})x_{i_k} + \ldots + a_nx_n = b,$$
где k есть любое число от 1 до n.

Рассмотрим
$$z_2 = z^{(-)}(z_1) = (z_{11}, \ldots, f(z_{1i_1}), \ldots, f(z_{1i_2}), \ldots, f(z_{1i_k}), \ldots, z_{1n}).$$

Осталось убедиться, что набор z_2 удовлетворяет ЛДУ D_2. Действительно, на соответствующих изменённым знакам у коэффициентов уравнения D_1 местах у вектора z_2 стоят противоположные координаты. Это означает, что при их подстановке в уравнение D_2 в итоге получается

$$a_1 \cdot z_{11} + a_2 \cdot z_{12} + \ldots + a_n \cdot z_{1n} = b,$$

что является верным равенством, ведь означает то же самое, что подстановка координат z_1 в ЛДУ D_1. ■

Таким образом, действия $a^{(-)}$ и $z^{(-)}$ связаны прямым образом, ровно так же, как и a_σ и z_σ.

Теорема 4 дополняет теорему 3. И теперь множество ЛДУ, к которым применимы эти теоремы, становится больше. То есть данная теория решения уравнений с помощью действий уже охватывает все больше уравнений.

Можно немного уточнить формулировки теорем 3 и 4. Сделаем это на примере теоремы 4. Так, если заменить определённые коэффициенты ЛДУ на им противоположные, то вектор, у которого соответствующие по порядку следования координаты заменены на им противоположные, может служить вектором общего решения для нового ЛДУ.

Пример 11. *Благодаря теоремам 3 и 4 стало возможным быстро решать целый класс ЛДУ, зная решение всего одного его представителя (назовём такое ЛДУ и его решение базовыми при решении других ЛДУ). Так, рассмотрим ЛДУ*

$$B : (2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 7x_4 = 2),$$

вектором общего решения базового ЛДУ B служит

$$b = (4 - 3t_2 + 5t_3 - 7t_4, -2 + 2t_2 - 5t_3 + 7t_4, t_3, t_4).$$

Проследим за тем, как быстро найти решение, например, для ЛДУ

$$D : (-3x_1 + 5x_2 + 7x_3 - 2x_4 = 2).$$

Для того чтобы применить теоремы 3 и 4, нужно сначала понять, как именно D получено из базового B.

Собственно, замечаем, что

$$D = a^{(-+--)}(D'), \text{ где } D' = a_{(1234)}(B) = (3x_1 + 5x_2 - 7x_3 + 2x_4 = 2).$$

Тогда по теоремам 3 и 4 решение ЛДУ D есть

$$z = z^{(-+--)}(z'), \text{ где } z' = z_{(1234)}(b).$$

Так, применяя теорему 3 к D', а затем теорему 4 к D, получим, что решением D' будет

$$z' = z_{(1234)}(b) = (-2 + 2t_2 - 5t_3 + 7t_4, t_3, t_4, 4 - 3t_2 + 5t_3 - 7t_4),$$

и, наконец, решением D будет

$$z = z^{(-+--)}(z') = (2 - 2t_2 + 5t_3 - 7t_4, t_3, -t_4, -4 + 3t_2 - 5t_3 + 7t_4).$$

В примере выше важно отметить, что сначала в уравнении переставляли коэффициенты, а потом меняли их на им противоположные. Данный пример можно решить и другим способом: сначала заменить коэффициенты на им противоположные, а затем изменить их порядок.

Посмотрим на второй способ.

Так, рассмотрим базовое ЛДУ

$$B : (2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 7x_4 = 2),$$

вектором общего решения базового ЛДУ B служит

$$b = (4 - 3t_2 + 5t_3 - 7t_4, -2 + 2t_2 - 5t_3 + 7t_4, t_3, t_4).$$

Проследим за тем, как быстро найти решение, например, для ЛДУ

$$D : (-3x_1 + 5x_2 + 7x_3 - 2x_4 = 2).$$

Для того чтобы применить теоремы 4 и 3, нужно сначала понять, как именно D получено из базового B.

Снова замечаем, что

$$D = a_{(1234)}(D'), \text{ где } D' = a^{(-)}(B),$$

причём надо уточнить $a^{(-)}$. Для этого перепишем D в виде

$$D : (-2x_4 - 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 2) = (-2x'_1 - 3x'_2 + 5x'_3 + 7x'_4 = 2).$$

Значит,

$$D' = a^{(--+-)}(B).$$

Тогда по теоремам решение ЛДУ D есть

$$z = z_{(1234)}(z'), \text{ где } z' = z^{(--+-)}(b).$$

Так, применяя теорему 4 к D', а затем теорему 3 к D, получим, что решением D' будет

$$z' = z^{(--+-)}(b) = (-4 + 3t_2 - 5t_3 + 7t_4, 2 - 2t_2 + 5t_3 - 7t_4, t_3, -t_4),$$

и, наконец, решением D будет

$$z = z_{(1234)}(z') = (2 - 2t_2 + 5t_3 - 7t_4, t_3, -t_4, -4 + 3t_2 - 5t_3 + 7t_4).$$

5. Заключение

По ходу работы были получены следующие важные результаты и выводы, [15], а именно:

1) перестановка коэффициентов и неизвестных ЛДУ в одноимённом порядке не меняет уравнения;

2) переставить неизвестные ЛДУ в определённом порядке означает переставить его коэффициенты в обратном порядке (или наоборот — переставить коэффициенты ЛДУ в определённом порядке означает переставить его неизвестные в обратном порядке);

3) если переставить коэффициенты ЛДУ в определённом порядке, то координаты его вектора общего решения переставятся в том же порядке.

4) если переставить переменные ЛДУ в определённом порядке, то координаты его вектора общего решения переставятся в обратном порядке.

5) при замене определённых коэффициентов ЛДУ на им противоположные соответствующие по порядку следования координаты его вектора общего решения тоже заменяются на им противоположные.

Таким образом, все задачи работы решены, а цель достигнута.

Исследование предполагается расширить в следующих направлениях:

- более детально исследовать введённые действия-перестановки и другие с точки зрения их характеристик (орбит, стабилизаторов) и применения данных характеристик для дальнейшего изучения ЛДУ и связей между их решениями;

- можно поставить вопрос об изучении других действий и их связей с решениями линейных и нелинейных диофантовых уравнений с помощью метода групповых действий;

- рассмотреть множества действий конкретной группы или нескольких групп на множестве линейных диофантовых уравнений на предмет наличия определённой структуры и/или дополнительных свойств;

- постановка вопроса об исследовании решений ЛДУ с точки зрения понятия линейного многообразия ([14]) и его свойств в рамках целочисленной решётки.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кострикин А. И. Введение в алгебру. Часть III. Основные структуры: учебник для вузов. — 3-е изд. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 272 с.

2. Винберг Э. Б. Курс алгебры. — 2-е изд., испр. и доп. — М.: Факториал Пресс, 2001. — 544 с.

3. Бухштаб А. А. Теория чисел. — М.: Просвещение, 1966. — 384 с.

4. Серпинский В. О решении уравнений в целых числах. — М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. — 88 с.

5. Нестеренко Ю. В. Теория чисел: учебник для студ. высш. учеб. заведений. — М.: Издательский центр «Академия», 2008. — 272 с.

6. Монахов В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов: Учебное пособие. — Гомель: УО «ГГУ им. Ф. Скорины», 2003. — 322 с.

7. Калужнин Л. А., Сущанский В. И. Преобразования и перестановки: пер. с укр. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1985. — 160 с.

8. Александров П. С. Введение в теорию групп. — М.: ЛЕНАНД, 2017. — 128 с.

9. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. — 9-е изд., — М.: Наука, 1968. — 431 с.

10. Artin, Michael. Algebra, Prentice Hall, 1991. — 618 p.

11. Стренг Г. Линейная алгебра и ее применения. — М: Мир, 1980. — 454 с.

12. Артамонов В. А., Салий В. Н., Скорняков Л. А. и др. Под общ. ред. Л. А. Скорнякова. Общая алгебра Т. 2. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1991. — 480 с.

13. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 2. Пер. с англ. А. П. Мишиной и А. А. Мановцева. Под ред. Л. Я. Куликова. — М.: Мир, 1977. — 416 с.

14. Кострикин А. И. Введение в алгебру. Часть II. Линейная алгебра: Учебник для вузов. — М.: Физико-математическая литература, 2000. — 368 с.

15. Чистов И. С., Цыбуля Л. М. Некоторые зависимости между решениями линейных диофантовых уравнений при действиях группы подстановок и группы автоморфизмов целых чисел //Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование:

Современные проблемы, приложения и проблемы истории: Материалы XXIII Международной конференции, посвящённой 80-летию профессора Александра Ивановича Галочкина и 75-летию профессора Владимира Григорьевича Чирского. — Тула: Тул. гос. пед. ун-т им. Л. Н. Толстого, 2024. С. 38—41.

REFERENCES

1. Kostrikin, A. I. 2004, "Introduction to algebra. Part III. Basic structures: textbook for universities", *M.: FIZMATLIT*, Third Edition, 272 p. (In Russian).
2. Vinberg, E. B. 2001, "Algebra course", *M.: Faktorial Press*, Second Edition, 544 p. (In Russian).
3. Buhshtab, A. A. 1966, "Number theory", *M.: Prosveshchenie*, 384 p. (In Russian).
4. Serpinskij, V. 1961, "On solving equations in integers", *M.: Gosudarstvennoe izdatel'stvo fiziko-matematicheskoj literatury*, 88 p. (In Russian).
5. Nesterenko, Yu. V. 2008, "Number Theory: a textbook for university students", *M.: Izdatel'skij centr «Akademiya»*, 272 p. (In Russian).
6. Monahov, V. S. 2003, "Introduction to the theory of finite groups and their classes: a textbook", Gomel': *UO «GGU im. F. Skoriny»*, 322 p. (In Russian).
7. Kaluzhnin, L. A., Sushchanskij V. I. 1985, "Transformations and permutations: translation from Ukrainian", *M.: Nauka. Glavnaya redakciya fiziko-matematicheskoj literatury*, Second Edition, 160 p. (In Russian).
8. Aleksandrov, P. S. 2017, "Introduction to group theory", *M.: LENAND*, 128 p. (In Russian).
9. Kurosh, A. G. 1968, "Higher Algebra Course", *M.: Nauka*, Ninth Edition, 431 p. (In Russian).
10. Artin, Michael 1991, "Algebra", *Prentice Hall*, 618 p.
11. Streng, G. 1980, "Linear algebra and its applications", *M: Mir*, 454 p. (In Russian).
12. Artamonov, V. A., Salij V. N., Skornyakov L. A. and others under the general editorship of L. A. Skornyakov 1991, "General algebra", *M.: Nauka. Gl. red. fiz.-mat. lit.*, Volume 2, 480 p. (In Russian).
13. Fuks, L. 1977, "Infinite Abelian groups", *M.: Mir*, Volume 2, 416 p. (In Russian).
14. Kostrikin, A. I. 2000, "Introduction to algebra. Part II. Linear algebra: a textbook for universities", *M.: Fiziko-matematicheskaya literatura*, 368 p. (In Russian).
15. Chistov, I. S., Tsybulya, L. M. 2024, "Some dependencies of the linear Diophantine equations solutions under the actions of the symmetric group and the automoprhism group of the integers", *Algebra, number theory, discrete geometry and multiscale modeling: Modern problems, applications and problems of history: Proceedings of the XXIII International Conference devoted the 80-th anniversary of the birth of professor Aleksandr Ivanovich Galochkin and the 75-th anniversary of the professor Vladimir Grigor'evich Chirskij.* — Tula: Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University, pp. 38 – 41. (In Russian).

Получено: 12.03.2025
Принято в печать: 08.12.2025

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 26. Выпуск 5.

УДК: 511.3 DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-5-280-286

Об одной теореме Г. И. Архипова

Л. Г. Архипова, В. Н. Чубариков

Архипова Людмила Геннадьевна — Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: chubarik2020@mail.ru
Чубариков Владимир Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: chubarik2020@mail.ru

Аннотация

В работе в модельной ситуации исследуется обобщенное решение задачи Коши линеаризованного уравнения Кортевега – де Фриза. Решение представляется в виде тригонометрического ряда Виноградова, что позволяет свести вывод к методу Виноградова тригонометрических сумм Г. Вейля.

Ключевые слова: обобщенное решение задачи Коши, линеаризованное уравнение Кортевега – де Фриза, критерий Г. Вейля равномерного распределения последовательности по модулю единица, метод Виноградова, рациональные тригонометрические суммы, тригонометрические интегралы.

Библиография: 14 названий.

Для цитирования:
Архипова Л. Г., Чубариков В. Н. Об одной теореме Г. И. Архипова // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 5, с. 280–286.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 26. No. 5.

UDC: 511.3 DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-5-280-286

On one G.I.Arkhipov's theorem

L. G. Arkhipova, V. N. Chubarikov

Arkhipova Lyudmila Gennadievna — Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: chubarik2020@mail.ru
Chubarikov Vladimir Nikolaevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: chubarik2020@mail.ru

Abstract

In this paper in the model situation the generalized solution of the Cauchy problem of linearalized the Corteveg – de Vriz equation are investigated. The solution are represented as the Vinogradov's trigonometric series, that permits to reduce the deduction to the Vinigradov's method of the H.Weyl's trigonometric sums.

Keywords: a generalized solution of the Cauchy problem, the linearalized Corteveg – de Vriz equation, the H. Weyl criteria of the uniform distribution of a sequence modulo unit, the Vinogradov's method, rational trigonometric sums, trigonometric integrals.

Bibliography: 14 titles.

For citation:
Arkhipova, L. G., Chubarikov, V. N. 2025, "On one G.I.Arkhipov's theorem" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 5, pp. 280–286.

1. Введение

Настоящая работа посвящается восьмидесятилетию со дня рождения Геннадия Ивановича Архипова (12.12.1945 – 14.03.2013). Теорема, о которой идет речь здесь, была сформулирована им в 2010 г. Доказательство ее дано в настоящей работе.

Г.И.Архипов и К.И.Осколков исследовали специальные тригонометрические ряды с многочленом в аргументе, — ряды И.М.Виноградова. Сформулируем их результат.

Пусть k — натуральное число, E — единичный k — мерный куб точек $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ с действительными координатами $0 \leq \alpha_s < 1, s = 1, \ldots, k$, и пусть $f(x) = f_k(x) = \alpha_k x^k + \cdots + \alpha_1 x$ — многочлен степени k. Пусть далее

$$h(f) = \sum_{n \neq 0} \frac{e^{2\pi i f(n)}}{n}$$

ряд Виноградова, в котором суммирование распространяется по всем целым $n \neq 0$, и его симметричные частичные суммы $h_N(f)$ имеют вид

$$h_N(f) = \sum_{1 \leq |n| \leq N} \frac{e^{2\pi i f(n)}}{n}, \quad N \geq 1.$$

Используя метод Виноградова оценок тригонометрических сумм [1], Г.И.Архипов и К.И.Осколков [2] доказали следующее утверждение о равномерной ограниченности последовательности симметричных частичных сумм $h_N(f)$.

Теорема A. *Пусть $k \geq 2$ — фиксированное натуральное число. Тогда для ненулевого многочлена $f_k \neq 0$ имеем*

$$\sup_{N \geq 1} \sup_{f_k} |h_N(f_k)| = g_k < \infty.$$

Более того, для каждого многочлена $f \neq 0$ последовательность $h_N(f)$ при $N \to \infty$ сходится, и сумма ряда $h(f)$, рассматриваемая как предел симметричных частичных сумм $h_N(f)$, ограничена всюду на множестве многочленов степени k.

В настоящей стаьее используются идеи и методы работ [1]-[13].

§1. Теорема Г.И.Архипова

Нам понадобятся следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Пусть функция $f(x)$ имеет непрерывную производную на отрезке $[a,b]$ и пусть $A(x)=\sum_{a<n\le x}\alpha_n$. Тогда при любом $x\in[a,b]$ имеем*

$$\sum_{a<n\le x}\alpha_n f(n)=A(x)f(x)-\int\limits_a^x A(s)f'(s)\,ds.$$

Лемма 2. *Последовательность дробных частей $\{x_n\}$ равномерно распределена по модулю единица тогда и только тогда, когда при любом целом числе $m\ne 0$ имеем*

$$\lim_{N\to\infty}N^{-1}\sum_{n=1}^{N}e^{2\pi i m x_n}=0.$$

Лемма 3. *Пусть $f(x)$ в промежутке $M<x\le M'$ — вещественная дифференцируемая функция, причем внутри промежутка ее прvоизводная $f'(x)$ монотонна и знакопостоянна и при постоянном δ с условием $0<\delta<1$ удовлетворяет неравенству $|f''(x)|\le\delta$. Тогда имеем*

$$\sum_{M<x\le M'}e^{2\pi i f(x)}=\int\limits_M^{M'}e^{2\pi i f(x)}\,dx+\theta\left(3+\frac{2\delta}{1-\delta}\right),\quad |\theta|\le 1.$$

Лемма 1 — формула Абеля суммирования значений гладкой функции по целым точкам [14], лемма 2 — критерий Г.Вейля равномерного распределения последовательности вещественных чисел по модулю единица [14], лемма 3 принадлежит ван дер Корпуту [1].

Пусть $\{x\}$ — дробная часть числа x. Тогда имеем $\{x+1\}=\{x\},\quad 0\le\{x\}<1$.

Теорема. *Пусть $u=u(x,t)$ — обобщенное решение задачи Коши линеаризованного уравнения Кортевега – де Фриза вида*

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^3 u}{\partial x^3},\quad u|_{t=0}=\{x\}. \tag{1}$$

Тогда существует ограниченная и для всех иррациональных x непрерывная по x функция $u(x,t)$. Если же $x=\frac{p}{q}$, $\quad(p,q)=1$, то функция $u(x,t)$ имеет точки разрыва первого рода со скачком $b(q)$ в количестве q на периоде.

Доказательство. Данное уравнение является уравнением с разделенными переменными. Представим его решение в виде $u(x,t)=X(x)T(t)$. Получим

$$\frac{T'}{T}=\frac{X'''}{X}=\lambda,$$

где λ — постоянная разделения.

Отсюда находим $u(x,t)=e^{\lambda^3 t+\lambda x}$. Из начального условия имеем

$$\{x\}=\sum_n e^{\lambda_n x}=\sum_{n\ne 0}\frac{1}{2\pi i n}e^{2\pi i n x}.$$

Следовательно, $c_n=\frac{1}{2\pi i n}$. Тогда решение в задаче Коши имеет вид

$$u(x,t)=\sum_{n\ne 0}\frac{1}{2\pi i n}e^{2\pi i(nx-n^3t)}. \tag{2}$$

Докажем, что ряд (2) равномерно сходится в окрестности иррациональной точки x при любом фиксированном значении t. Воспользуемся критерием Коши. Для этого при $1 \le N$ оценим сумму

$$T_N(x,t) = \sum_{0<|n|\le N} e^{2\pi i(nx-n^3t)}$$

исходя из критерия Г.Вейля (лемма 2) равномерного распределения по модулю 1 последовательности значений дробных частей $\{nx - tn^3\}$ при иррациональном значении x. При $N \to \infty$ находим

$$T_N(x,t) = o(N).$$

Следовательно, при полуцелых M и N по формуле Абеля суммирования значений гладкой функции по целым точкам имеем

$$|u_{M,N}(x,t)| = \left| \sum_{M<|n|\le N} \frac{1}{2\pi i n} e^{2\pi i(nx-n^3t)} \right| \le$$

$$\le \frac{1}{2\pi} \left| \frac{T_N(x,t)}{N} - \int\limits_M^N \frac{T_s(x,t)}{s^2}\, ds \right| = o(1).$$

Отсюда по критерию Коши следует сходимость ряда $u(x,t)$ при иррациональном x.

Пусть далее $x = \frac{p}{q}, (p,q) = 1,$ — рациональное число. Рассмотрим решение $u(x,t)$ в окрестности точки $(x,t) = (\frac{p}{q}, \frac{p_1}{q_1}), (p_1, q_1) = 1$. Покажем, что в этой точке функция $u(x,t)$ имеет разрыв первого рода. Для этого найдем предел при $\Delta x \to 0$ справа и слева к точке $x = \frac{p}{q}$. Получим

$$u(x+\Delta x, t) = \lim_{N\to\infty} \sum_{1\le|n|\le N} \frac{1}{2\pi i n} e^{2\pi i(n(x+\Delta x)-n^3t)} =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{1\le n\le N} \frac{1}{2\pi i n} \left(e^{2\pi i(n(x+\Delta x)-n^3t)} - e^{-2\pi i(n(x+\Delta x)-n^3t)} \right) =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\pi} \left(\frac{T_N(x+\Delta x,t)}{N} - \int\limits_M^N \frac{T_s(x+\Delta x,t)}{s^2}\, ds \right),$$

где

$$T_s(v,t) = \sum_{0<n\le s} \sin 2\pi(nv - n^3t).$$

Преобразуем сумму $T_s(x+\Delta x,t)$ в точке $(\frac{p}{q}, \frac{p_1}{q})$, представляя $n \le s$ в виде $n = qm + l, 1 \le l \le q$, $(1-l)q^{-1} \le m \le (s-l)q^{-1}$. Находим

$$T_s(x+\Delta x,t) = \sum_{l=1}^{q} \sum_{(-l)q^{-1}\le m\le(s-l)q^{-1}} \sin 2\pi \left(\frac{pl - p_1 l^3}{q} + (qm+l)\Delta x \right) =$$

$$= \sum_{l=1}^{q} \sin\left(2\pi \frac{pl - p_1 l^3}{q} \right) \sum_{(-l)q^{-1}\le m\le(s-l)q^{-1}} \cos\left(2\pi\Delta x(qm+l)\right) +$$

$$+ \sum_{l=1}^{q} \cos\left(2\pi \frac{pl - p_1 l^3}{q} \right) \sum_{(-l)q^{-1}\le m\le(s-l)q^{-1}} \sin\left(2\pi\Delta x(qm+l)\right) + O(q).$$

Отсюда по лемме 3 имеем

$$T_s(x+\Delta x,t)=\frac{s}{q}\sum_{l=1}^{q}\sin\left(2\pi\frac{pl-p_1l^3}{q}\right)\int\limits_0^1\cos\left(2\pi y\Delta x\right)dy+$$

$$+\frac{s}{q}\sum_{l=1}^{q}\cos\left(2\pi\frac{pl-p_1l^3}{q}\right)\int\limits_0^1\sin\left(2\pi y\Delta x\right)dy+O(q)=$$

$$=-\frac{s}{q}\frac{\sin(2\pi\Delta x)}{2\pi\Delta x}\sum_{l=1}^{q}\sin\left(2\pi\frac{pl-p_1l^3}{q}\right)-$$

$$-\frac{s}{q}\frac{1-\cos(2\pi\Delta x)}{2\pi\Delta x}\sum_{l=1}^{q}\cos\left(2\pi\frac{pl-p_1l^3}{q}\right)+O(q).$$

Поскольку

$$\sum_{l=1}^{q}\sin\left(2\pi\frac{pl-p_1l^3}{q}\right)=0,$$

получим

$$T_s(x+\Delta x,t)=-\frac{s}{q}\frac{\sin^2(\pi\Delta x)}{\pi\Delta x}\sum_{l=1}^{q}\cos\left(2\pi\frac{pl-p_1l^3}{q}\right)+O(q).$$

Далее

$$\sum_{l=1}^{q}\cos\left(2\pi\frac{pl-p_1l^3}{q}\right)\neq 0,$$

следовательно,

$$\lim_{\Delta x\to 0-}T_s\left(\frac{p}{q}+\Delta x,\frac{p_1}{q}\right)=-\lim_{\Delta x\to 0+}T_s\left(\frac{p}{q}+\Delta x,\frac{p_1}{q}\right)$$

т.е. левосторонний предел не равен правостороннему пределу и функция

$$f(\Delta x)=T_s\left(\frac{p}{q}+\Delta x,\frac{p_1}{q}\right)$$

имеет в рассматриваемой точке разрыв первого рода.

Теорема доказана.□

2. Заключение

После завершения доказательства утверждения теоремы приведем слова Л.Г. Архиповой к 80-летию со дня рождения Г.И.Архипова. “Посвящается моему дорогому отцу, который интересовался всем на свете и знал всё обо всём, мог просто и понятно ответить на любые вопросы. Любимым занятием для него всегда была математика, а теорию чисел он называл её венцом. Всю жизнь он старался вовлечь в свою науку всех, с кем общался, и щедро раздавал свои знания всем, кто был готов их принять, превращая математику в красивое и интересное занятие”.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Виноградов И. М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел, 2-е изд., Москва, Наука, 1980, 144 с.

2. Архипов Г. И., Осколков К. И. Специальные тригонометрические ряды и их применения// Матем. сб., 1989, **62,**No.2. С.145–155.

3. Осколков К. И. Ряды и интегралы И.М.Виноградова и их приложения// Тр. МИАН., 1989, **190,** С.186–221.

4. Осколков К. И. Ряды И.М.Виноградова в задаче Коши для уравнений типа Шрёдингера// Тр. МИАН., 1991, **200,** С.265–288.

5. Карацуба А. А. Основы аналитической теории чисел, 2-е изд., Москва, Наука, 1983, 240 с.

6. Архипов Г. И. Избранные труды. Орел: Изд-во Орловского гос.ун-та, 2013. 464 с.

7. Arkhipov G. I., Chubarikov V. N., Karatsuba A. A. Trigonometric Sums in Number Theory and Analysis. De Gruyter expositions in mathematics; 39. Berlin, New York, 2004. 554 c.

8. Chubarikov,V.N. Azerbaijan-Turkey-Ukrainian Int.Conf.“Mathematical Analysis, Differential Equations and their Applications”. Abstracts.(September 08-13, 2015, Baku-Azerbaijan). Linear arithmetic sums and Gaussian multiplication theorem. 2015, p.38.

9. Чубариков В. Н. Элементарный вывод оценки полной рациональной арифметической суммы от многочлена// Чебышевский сборник. — 2015. — Т.16,No.3(55). — С.452-461.

10. Чубариков В. Н. Показатель сходимости среднего значения полных рациональных арифметических сумм// Чебышевский сборник. — 2015. — Т.16,No.4(56). — С.303-318.

11. Чубариков В. Н. Арифметические суммы от значений полинома// Докл. РАН — 2016. — Т.466,No.2. — С.152-153.

12. Чубариков В. Н. Полные рациональные арифметические суммы// Вестн. Моск. ун-та. Сер.I, Математика, механика. 2015. No.1. 60-61.

13. Гияси А. Х., Чубариков В. Н. О рядах Виноградова по простым числам// Чебышевский сборник. — 2025. — Т.26,No.3. — С.81-95.

14. Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н. Лекции по математическому анализу: Учеб. для вузов. Под ред. Садовничего В. А.. — 4-е изд., испр. — М.: Дрофа, 2004. 640 с.

REFERENCES

1. Vinogradov, I. M. 1980, “Method of trigonometric sums in the number theory, 2nd edit.”, *Moscow, Nauka*, pp. 144.

2. Arkhipov, G. I., “Oskolkov, K. I. 1989, Special trigonometric series and their applications”, *Math. Trans.*, **62,**No.2. pp. 145 – 155.

3. Oskolkov, K. I. 1989, “I.M.Vinogradov’s series and integrals and their applications”, *Proc. MIAN.*, **190,** pp. 186 – 221.

4. Oskolkov, K. I. 1991, “I.M.Vinogradov’s series in the Caushy problem for equations of Schródinger type”, *Proc. MIAN.*, **200,** pp. 265 – 288.

5. Karatsuba, A. A. 1983, “Basics of analytic number theory, 2nd edit”, *Moscow, Nauka*, pp. 240.

6. Chubarikov, V. N. 2015, “The elementary deduction of the estimate of the complete rational arithmetical sum from a polynomial”, *Chebyshev Trans.*, V.16, № . 3(55), pp. 452 – 461.

7. Chubarikov, V. N. 2015, “The exponent of the convergence of the mean-value of complete rational arithmetical sums”, *Chebyshev Trans.*, V.16, № . 4(56), pp. 303 – 318.

8. Chubarikov, V. N. 2016, “Arithmetical sums from values of a polynomial”, *Dokl. RAS*, V.466, № . 2, pp. 152 – 153.

9. Chubarikov, V. N. 2015, “Complete rational arithmetical sums”, *Bull. Moscow. Univ. Ser.I, Math., mech.*, № . 1, pp. 60 – 61.

10. Gijasi, A. H., 2025, “Chubarikov, V. N. On Vinogradov’s series over prime numbers”, *Chebyshev Trans.*, V.26, № . 3, pp. 81 – 95.

11. Arkhipov, G. I., Sadovnichii, V. A., Chubarikov, V. N. 2004, “Lectures on mathematical analysis: Text-book for higher educ. of Inst. 4th edit.”, *M.: Drofa*, P. 640.

Получено: 19.03.2025
Принято в печать: 08.12.2025

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 26. Выпуск 5.

УДК: 517.95 DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-5-287-298

Теорема единственности для бигармонических функций, заданных в трехмерном евклидовом пространстве R^3

З. Р. Ашурова, У. Ю. Жураева, Н. Ю. Жураева, Ф. У. Маллаева

Ашурова Зебинисо Рахимовна — доцент, Узбекско-Финляндский педагогический институт (г. Самарканд, Узбекистан).
e-mail: zeb1957niso@gmail.com
Жураева Умидахон Юнусалиевна — докторант, Самаркандский государственный университет (г. Самарканд, Узбекистан).
e-mail: umida_9202 @mail.ru
Жураева Нодирахон Юнусовна — доцент, Ташкентский университет информационных технологий имени Мухаммада ал-Хоразмий (г. Ташкент, Узбекистан).
e-mail: nodira8181@mail.ru
Маллаева Феруза Уткиржановна — студент, Самаркандский государственный университет (г. Самарканд, Узбекистан).
e-mail: feruzamallayeva2405@gmail.com

Аннотация

Настоящая работа посвящена изучения свойств специальной построенной функции $\varphi_\sigma(y, x)$, которая задана в бесконечной области D трехмерного евклидова пространства. В данной работе доказываются результаты, позволяющие утверждать ограниченность бигармонической функции внутри некоторой трехмерной области, если она ограничена со своей нормальной производной на границе этой области.

Ключевые слова: гармонические функции, бигармонические функции, полигармонические функции, функция Карлемана, теорема единственности.

Библиография: 18 названий.

Для цитирования:
Ашурова З. Р., Жураева У. Ю., Жураева Н. Ю., Маллаева Ф. У. Теорема единственности для бигармонических функций, заданных в трехмерном евклидовом пространстве R^3// Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 5, с. 287–298.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 26. No. 5.

UDC: 517.95 DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-5-287-298

Uniqueness theorem for biharmonic functions given in three-dimensional Euclidian space R^3

Z. R. Ashurova, U. Yu. Juraeva, N. Yu. Juraeva, F. U. Mallaeva

Ashurova Zebiniso Rahimovna — associate professor, Uzbek-Finnish Pedagogical Institute (Samarkand, Uzbekistan).
e-mail: zeb1957niso@gmail.com
Jurayeva Umidakhon Yunusalievna — doctoral student, Samarkand State University (Samarkand, Uzbekistan).
e-mail: umida_9202@mail.ru
Jurayeva Nodirakhon Yunusovna — associate professor, Tashkent University of Information Technologies named after Mu-hammad al-Kharazmi (Tashkent, Uzbekistan).
e-mail: nodira8181@mail.ru
Mallaeva Feruza Utkirjanovna — student, Samarkand State University (Samarkand, Uzbekistan).
e-mail: feruzamallayeva2405@gmail.com

Abstract

This work is devoted to studying the properties of the method of the constructed function $\varphi_\sigma(y,x)$, which is defined in the infinite domain D of three-dimensional Euclidean space. In this work, we prove results that allow us to assert the boundedness of a biharmonic function inside a certain three-dimensional region if it is bounded with its normal derivative at the boundaries of this region.

Keywords: harmonic functions, biharmonic functions, polyharmonic functions, Carleman function, uniqueness theorem.

Bibliography: 18 titles.

For citation:
Ashurova, Z. R., Juraeva, U. Yu., Juraeva, N. Yu., Mallaeva, F. U. 2025, “Uniqueness theorem for biharmonic functions given in three-dimensional Euclidean space R^3”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 5, pp. 287–298.

1. Введение

Постановка задачи. В данной работе рассматривается следующая задача: Дана бесконечная область D двухмерного пространство и бигармоническая в D функция $u(P)$, непрерывная вплоть до границы со своими производными до третьего порядка. Требуется показать, что если функция $u(P)$, ее нормальная производная, лапласиан функции и нормальная производная этого лапласиана ограничены на границе D и $u(P)$ неограниченна внутри, то при $P \longrightarrow \infty$ она должна расти внутри D со скоростью, не меньшей некоторой предельной, и оценить эту предельную скорость роста.

В работах М.А.Евграфова [1] , И.А.Чегиса [2], Аршон И.С. [3], Евграфов М.А. [4], [5], Леоньтев А.Ф. [6] получены теоремы типа Фрагмена Линделефа. Для гармонических функций это задача была предметом исследования в трехмерном пространстве М.А.Евграфова [1] , И.А.Чегиса [2], в произвольном m-мерным Евклидовом пространстве Ш.Ярмухамедовым [7], З.Р.Ашуровой [8], [9], Н.Жураевой [10], У.Жураевойи др.

Если рассматривать задачу по заданным на части границы граничным значениям восстановить ее значения всюду внутри области, при произвольных начальных данных задача неразрешима. Если граница и начальные данные аналитичны и можно аналитически продолжить во внутрь области, то продолжение существует и единственно, но не устойчиво. Поэтому оно относится к числу некорректно поставленных задач. В 1926 году Карлеман построил интегральную формулу для класса ограниченных функций. Им было предложена идея введения в интегральную формулу Коши дополнительной функции, зависящей от положительного параметра и позволяющей путем предельного перехода, погасить влияние интегралов по части границы, где значение продолжаемой функции не задано, исследования Т.Карлемана в течение долгого времени не имело продолжения. Однако неустойчивые задачи, часто возникали в приложениях [11]. В 1943 году А. Н. Тихонову удалось [12] выяснить истинную природу некорректных задач. Он указал на практическую важность неустойчивых задач и показал, что если сузить класс возможных решений до компакта, то задача становится устойчивой. Основываясь на этих исследованиях, М.М.Лаврентьев [13] ввел важное понятие - функцию Карлемана и с ее помощью построил регуляризацию решения задачи.

Определение. Функция $\Phi_\sigma(y,x)$, зависящая от параметра $\sigma > 0$ и определенная при $y \neq x$, называется функцией Карлемана для точки $x \in D$ и части $\partial D \setminus S$, если она удовлетворяет следующим условиям:

1.Функция $\Phi_\sigma(y,x)$ представима в виде:

$$\Phi_\sigma(y,x) = \begin{cases} C_{n,m} r^{2n-m} \ln r + G_\sigma(y,x), & 2n \geq m, m - \text{чётное число}, \\ C_{n,m} r^{2n-m} + G_\sigma(y,x), \text{в остальных случаях}, \end{cases}$$

где

$$C_{n,m} = (-1)^{\frac{m}{2}-1} (\Gamma(n - \frac{m}{2}) 2^{2n-1} \pi^{\frac{m}{2}} \Gamma(n))^{-1},$$

и $G_\sigma(y,x)$ регулярная по переменному y и непрерывно дифференцируема на $D \cup \partial D = \overline{D}$, решения полигармонического уравнения.

2. При фиксированном $x \in D$ функция $\Phi_\sigma(y,x)$ удовлетворяет неравенству

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_{\partial D \setminus S} (|\Delta^k \Phi_\sigma(y,x)| - |\frac{\partial \Delta^k \Phi_\sigma(y,x)}{\partial n}|) ds_y \leq C(x) \varepsilon(\sigma),$$

где постоянная $C(x)$ зависит от x и n -направленная внешняя нормаль к ∂D, $\varepsilon(\sigma) \to 0$, когда $\sigma \to \infty$.

С помощью методы и идеи М.М.Лаврентьева, Ш. Ярмухамедов в работе [14] впервые предлагает метод построения семейства фундаментальных решений уравнения Лапласа, исчезающего в пределе вместе со своими производными любого порядка вне произвольного фиксированного конуса.

Один из результатов Ш. Ярмухамедова: Для неограниченной односвязной области где D полупространство $y_m > 0$, положим

$$B_\rho(D) = \{u(y) : u(y) \in A(D), |u(y)| + |gradu(y)| \leq exp|y|^\rho, \rho < 1, y \in D\}.$$

Теорема. *Пусть для функции $u(y) \in B_\rho(D)$ в любой точке, где D полупространство $y_m > 0$ выполняется неравенства:*

$$\int_{\partial D} \frac{|u(y)| ds}{1 + |y|^m} < \infty, \ \int_{\partial D} |\frac{\partial u}{\partial n}| \frac{ds}{1 + |y|^{m-1}} < \infty.$$

Тогда $\forall x_0 \in D$, *имеет место равенство:*

$$u(x_0) = C \int_{\partial D} \frac{u(y)ds}{r^m}.$$

Теорема. *Пусть для функции* $u(y) \in B_\rho(D)$ *в любой точке, где* D *полупространство* $y_m > 0$.*Если выполнены условия*

$$u(y) = 0,\ \frac{\partial u(y)}{\partial n} \to 0, y \to \infty, \forall y \in \partial D,$$

то $u(x) \equiv 0$.

Е.М.Ландис паставил задачу в виде: Пусть в цилиндре $0 \leq \sum_{k=0}^{n-1} x_i^2 < 1$ расположена область, уходящая в бесконечность (в одну или в оба стороны – все равно) в граница Γ этой области как угодно гладка [11]. Пусть в области определено решение и уравнение$\Delta\Delta u = 0$как угодно гладкое вплоть до границы и $u|_\Gamma = 0$, $\frac{\partial u}{\partial n}|_\Gamma = 0$. Следует ли отсюда, что неограниченно (экспоненциально растет при уходе на бесконечность).Для того чтобы решить эту задачу используем, решая задачу о продолжении бигармонической функции во внутрь области, когда на границе области задаются значения лапласианов этой функции до (n-1)го порядка, а также нормальная производная от этих лапласианов и получим оценки роста этой функции. Полученные результаты в данной работе в некотором смысле является ответом на задачу поставленном Е.М.Ландисом. В 2009 году Н.Ю. Жураева получила регуляризацию и разрешимость задачи Коши для полигармонических уравнений порядка n в некоторых неограниченных областях (при произвольных нечетных m и четных m когда $2n < m$). В работе [15] построена функция Карлемана для полигармонических уравнений порядка n в некоторых неограниченных областях лежащих в R^m при четных m, когда $2n \geq m$. У.Ю.Жураевой были доказаны теоремы типа Фрагмена-Линделефа в работах [16], [17], [18]. Позже совместно У.Жураева и Ф.Маллаева получили результаты :

Теорема. Пусть функция $u(y)$ бигармоническая функция определенных в области $D \subset R^3$, где $D = \{y : y = (y_1, y_2, y_3), y_3 > 0\}$. Если выполнено условие

$$\sum_{k=0}^{1} (|\Delta^k u(y)| + |grad\Delta^{1-k} u(y)|) \leqslant c_0 exp|y|^{\rho_2}, y \in D, \tag{1}$$

и в любой точке $y \in \partial D$ выполняется неравенство:

$$|\Delta^k u(y)| + |\frac{\Delta^k u(y)}{\partial \overline{n}}| < c_0, \forall k \in \{0, 1\},$$

$\forall y \in \partial D$ выполнено условие роста $\Delta^k u(y) \to 0$, $\frac{\partial \Delta^k u(y)}{\partial \overline{n}} \to 0$, $\forall k \in \{0, 1, 2\}$, $\forall y \in \partial D$, тогда $\forall x \in D$ справедливо $u(x) = 0$.

2. Основные результаты.

Работа посвящена теореме типа Фрегмена-Линделефа для бигармонических функций определенных в области $D \subset R^3$, где D-неограничанная область лежащая $\{y_3 > 0\}$, с границей ∂D , где ∂D- внутри некоторого шара (предположим шара: $K(0, P)$ радиуса P с центром в $(0, 0, 0), D_P = D \cap K(0, P))$ удовлетворяет условию Ляпунова, а вне шара ее можно представить как, $y_3 = f(y_1, y_2)$ -непрерывная функция, имеющая непрерывная ограниченные частные производные первого порядка.

Функции $\varphi_\sigma(y,x)$ и $\Phi_\sigma(y,x)$ при $s>0$, $\sigma>0$ определим следующими равенствами:

$$c_0\varphi_\sigma(y,x)=\int_0^\infty Im\left[\frac{exp\left[-\sigma\left(i\sqrt{s+u^2}+y_3+1\right)^{\rho_1}\right]}{\left(i\sqrt{s+u^2}+y_3-x_3\right)\left(i\sqrt{s+u^2}+y_3+x_3\right)^2}\right]\frac{du}{\sqrt{u^2+s}},\qquad(2)$$

$$\Phi_\sigma(y,x)=c_0r^2\varphi_\sigma(y,x)\qquad(3)$$

где $x=(x_1;x_2;x_3)$, $y=(y_1;y_2;y_3)$, $r=|y-x|$, $s=\alpha^2=(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2$, $r_1{}^2=s+(y_3+x_3)^2$, $\sigma>0$, $y_3>0$, $0<\rho_1<1$, в дальнейшем обозначим через c_0 –постоянные числа не зависящая отy.

Лемма 1. Функция $\varphi_\sigma(y,x)$, определенная в области $D\subset R^3$, будет гармонической функцией по переменной у при $\alpha>0$.

Теорема 1. *Функция $\varphi_\sigma(y,x)$ определенная формулой (2), имеет вид*

$$\varphi_\sigma(y,x)=c_0\int_0^\infty\frac{(((y_3+x_3)^2-(u^2+s))+2(y_3-x_3)(y_3+x_3))cos(\sigma\lambda)}{(u^2+r^2)(u^2+r_1^2)^2exp(\sigma A_1)}du$$

$$+c_0\int_0^\infty\frac{[(y_3-x_3)((y_3+x_3)^2-\eta^2)-(y_3+x_3)^2-\eta^2]sin(\sigma\lambda)}{(u^2+r^2)(u^2+r_1^2)^2exp(\sigma A_1)}\frac{du}{\eta},$$

где

$$A_1=|(y_3+1)^2+u^2+s|^{\frac{\rho_1}{2}}cos(\sigma\rho_1arctg\frac{\sqrt{u^2+s}}{y_3+1}),$$

$$\lambda=|(y_3+1)^2+u^2+s|^{\frac{\rho_1}{2}}sin(\sigma\rho_1arctg\frac{\sqrt{u^2+s}}{y_3+1}),$$

$$\eta=\sqrt{u^2+s}.$$

Теорема 2. *Функцию $\Phi_\sigma(y,x)$ можно представит в виде*

$$\Phi_\sigma(y,x)=c_0r+c_0r^2G_\sigma(y,x)$$

и она является бигармонической.

Теорема 3. *Для функции $\Phi_\sigma(y,x)$ справедлива оценка*

$$|\Phi_\sigma(y,x)|\leqslant c_0\frac{r^2}{\alpha r_1^2exp(\sigma A)}$$

где

$$A=|(y_3+1)^2+s|^{\frac{\rho_1}{2}}cos\left(\sigma\rho_1arctg\frac{s^{\frac{1}{2}}}{(y_3+1)}\right)$$

Доказательство:

Для функции $\varphi_\sigma(y,x)$, определяемой условией (1) доказываем, что имеет место неравенство

$$|\varphi_\sigma(y,x)|\leqslant\frac{c_0}{\alpha r_1^2exp(\sigma A)}$$

Действительно,

$$\varphi_\sigma(y,x) = c_o \int_0^\infty Im \frac{1}{(y_3 - x_3 + i\sqrt{u^2+\alpha^2})(y_3 + x_3 + i\sqrt{u^2+\alpha^2})^2 exp(\sigma(\omega+1)^{\rho_1})} \frac{du}{\sqrt{u^2+\alpha^2}},$$

и

$$exp((y_3+1) + i\sqrt{u^2+s})^{\rho_1} =$$

$$= exp\sigma\left(|y_3+1+i\sqrt{u^2+s}|^{\frac{\rho_1}{2}} cos(\sigma\rho_1 arctg\frac{\sqrt{u^2+s}}{y_3+1}) expi\left(|y_3+1+i\sqrt{u^2+s}|^{\frac{\rho_1}{2}} sin(\sigma\rho_1 arctg\frac{\sqrt{u^2+s}}{y_3+1})\right)\right).$$

Учитывая $cos(\sigma\rho_1 arctg\frac{\sqrt{u^2+s}}{y_3+1}) \geqslant \delta_0 > 0$, и обозначения η, λ, A_1 тогда функцию $\varphi_\sigma(y,x)$ можно переписать в виде

$$\varphi_\sigma(y,x) = c_0 \int_0^\infty \frac{[(y_3-x_3)((y_3+x_3)^2-\eta^2) - (y_3+x_3)^2 - \eta^2] sin(\sigma\lambda)}{(u^2+r^2)(u^2+r_1^2)^2 exp(\sigma A_1)} \frac{du}{\eta} +$$

$$+ c_0 \int_0^\infty \frac{[((y_3+x_3)^2-\eta^2) + 2(y_3-x_3)(y_3+x_3)]}{(u^2+r^2)(u^2+r_1^2)^2} \frac{cos\sigma\lambda du}{exp(\sigma A_1)}.$$

Введём обозначения $\varphi_\sigma = \phi_1 + \phi_2$, где

$$\phi_1 = c_0 \int_0^\infty \frac{[(y_3-x_3)((y_3+x_3)^2-\eta^2) - (y_3+x_3)^2 - \eta^2] sin\sigma\lambda}{(u^2+r^2)(u^2+r_1^2)^2 exp(\sigma A_1)} \frac{du}{\eta},$$

$$\phi_2 = c_0 \int_0^\infty \frac{[((y_3+x_3)^2-\eta^2) + 2(y_3-x_3)(y_3+x_3)]}{(u^2+r^2)(u^2+r_1^2)^2} \frac{cos\sigma\lambda du}{exp(\sigma A_1)},$$

$$\phi_1 = F_1 - F_2,$$

$$F_1 = c_o \int_0^\infty \frac{(y_3-x_3)((y_3+x_3)^2-\eta^2) sin\sigma\lambda}{(u^2+r^2)(u^2+r_1^2)^2 exp(\sigma A_1)} \frac{du}{\eta},$$

$$F_2 = c_o \int_0^\infty \frac{((y_3+x_3)^2+\eta^2) sin\sigma\lambda}{(u^2+r^2)(u^2+r_1^2)^2 exp(\sigma A_1)} \frac{du}{\eta}.$$

Точно также имеем

$$|F_1| \leqslant \left| \int_0^\infty \frac{sin\sigma\lambda}{\sqrt{u^2+s} exp\{\sigma A_1\}} \frac{(y_3+x_3)^2}{(u^2+r_1^2)^2} \frac{(y_3-x_3)du}{(u^2+r^2)} \right|$$

$$+ \left| \int_0^\infty \frac{sin\sigma\lambda}{\sqrt{u^2+s} exp(\sigma A_1)} \frac{(u^2+s^2)}{(u^2+r_1^2)^2} \frac{(y_3-x_3)du}{(u^2+r^2)} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c_0}{\alpha r_1^2 exp(\sigma A)}.$$

$$|F_2| = \left| c_o \int_0^\infty \frac{((y_3+x_3)^2+\eta^2) sin\sigma\lambda}{(u^2+r^2)(u^2+r_1^2)^2 exp(\sigma A_1)} \frac{du}{\eta} \right| \leqslant \frac{c_0}{\alpha r_1^2 exp(\sigma A)},$$

$\phi_2 = F_3 + F_4$,

$$F_3 = c_o \int_0^\infty \frac{((y_3+x_3)^2-\eta^2) cos\sigma\lambda du}{(u^2+r^2)(u^2+r_1^2)^2 exp(\sigma A_1)},\ F_4 = c_0 \int_0^\infty \frac{2(y_3+x_3)(y_3-x_3) cos(\sigma\lambda) du}{(u^2+r^2)(u^2+r_1^2)^2 exp(\sigma A_1)},$$

$$|F_3| = \left| c_o \int_0^\infty \frac{((y_3+x_3)^2-\eta^2)cos\lambda du}{(u^2+r^2)(u^2+r_1^2)^2 exp(\sigma A_1)} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| c_o \int_0^\infty \frac{(y_3+x_3)^2}{(u^2+r_1^2)^2} \frac{cos\lambda}{exp\{\sigma A_1\}} \frac{du}{(u^2+r^2)} \right| + \left| c_o \int_0^\infty \frac{cos\lambda}{exp(\sigma A_1)} \frac{du}{(u^2+r^2)} \frac{\eta^2}{(u^2+r_1^2)^2} \right|$$

$$\leqslant \frac{c_0}{r r_1^2 exp(\sigma A)},$$

$$|F_4| = \left| c_o \int_0^\infty \frac{2(y_3+x_3)(y_3-x_3)cos\sigma\lambda du}{(u^2+r^2)(u^2+r_1^2)^2 exp(\sigma A_1)} \right| \leqslant$$

$$\leqslant c_0 \int_0^\infty \left| \frac{(y_3+x_3)cos\lambda}{(u^2+r_1^2)^2 exp(\sigma A_1)} \frac{2(y_3-x_3)}{(u^2+r^2)} \right| \leqslant \frac{c_0}{r_1^3 exp(\sigma A)}.$$

Поэтому для $|\varphi_\sigma(y;x)|$ получим оценку

$$|\varphi_\sigma(y;x)| \leqslant \frac{c_0}{\alpha r_1^2 exp(\sigma A)} + \frac{c_0}{\alpha r_1^2 exp(\sigma A)} + \frac{c_0}{r r_1^2 exp(\sigma A)} + \frac{c_0}{r_1^3 exp(\sigma A)} \leqslant \frac{c_0}{\alpha r_1^2 exp(\sigma A)}.$$

Теорема 4. *Пусть $\overline{n}$- внешняя нормаль к границе ∂D. Тогда для функции $\Phi_\sigma(y,x)$ справедливы неравенства:*

$$|\frac{\partial \Phi_\sigma(y,x)}{\partial y_i}| \leqslant (1 + \frac{1}{\alpha r} + \frac{r}{\alpha} + \frac{r}{\alpha^2}) \frac{c_0}{r_1^2 exp(\sigma A)}, i = 1,2$$

$$|\frac{\partial \Phi_\sigma(y,x)}{\partial y_3}| \leqslant (1 + \frac{1}{\alpha r} + \frac{r}{\alpha} + \frac{r}{\alpha^2}) \frac{c_0}{r_1^2 exp(\sigma A)},$$

$$|\frac{\partial \Phi_\sigma(y,x)}{\partial \overline{n}}| \leqslant (1 + \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha r} + \frac{r}{\alpha} + \frac{r}{\alpha^2} + \frac{r^2}{\alpha^2}) \frac{c_0}{r_1^2 exp(\sigma A)}.$$

Доказательство: Обозначим $A_3 = A_3^k + A_3^3 = A_3^k$, так как $A_3^3 = 0$. Для A_3^k имеем:

$$A_3^k = \int_0^\infty \psi_2(y;x)\psi_3(y;x)\psi_4(y;x) \frac{\partial \psi_3(y;x)}{\partial y_k}\, du, \quad k = 1,2.$$

Для A_3^3:

$$A_3^3 = \int_0^\infty \psi_2(y;x)\psi_3(y;x)\psi_4(y;x) \frac{\partial \psi_3(y;x)}{\partial y_3}\, du.$$

Поскольку $A_3^3 = 0$, мы сосредоточимся на оценке A_3^k. Для модуля $|A_3^k|$ получаем:

$$|A_3^k| = \frac{c_0}{\exp(\sigma A)} \left| \int_0^\infty \frac{(y_k - x_k)\, du}{(i\sqrt{u^2+s} + y_3 - x_3)(i\sqrt{u^2+s} + y_3 + x_3)^2 (u^2+s)^{3/2}} \right|.$$

С использованием дополнительных оценок интеграла:

$$|A_3^k| \leqslant \frac{c_0}{\exp(\sigma A)} \left| \int_0^\infty \frac{(y_k - x_k)}{\sqrt{u^2+s}} \frac{1}{(u^2+s)} \frac{1}{(u^2+r_1^2)^2} \frac{du}{(u^2+r^2)} \right| \leqslant \frac{1}{\alpha^2 r} \frac{c_0}{\exp(\sigma A)}, \quad k = 1,2.$$

Теперь обозначим A_4^k следующим образом:

$$A_4^k = \int_0^\infty \psi_1(y;x)\psi_2(y;x)\psi_3(y;x) \frac{\partial \psi_4(y;x)}{\partial y_k}\, du, \quad k = 1,2,$$

и аналогично для A_4^3:

$$A_4^3 = \int_0^\infty \psi_1(y;x)\psi_2(y;x)\psi_3(y;x)\frac{\partial\psi_4(y;x)}{\partial y_3}\,du.$$

Суммарно $A_4 = A_4^k + A_4^3$. Для вычислений нам потребуются выражения для производных:

$$\frac{\partial\psi_4(y;x)}{\partial y_k} = -\rho_1\sigma i(y_k - x_k)\exp\Big(-\sigma(\sqrt{u^2+s}+y_3+1)^{\rho_1}\Big)(u^2+s)^{-1/2},$$

$$\frac{\partial\psi_4(y;x)}{\partial y_3} = \rho_1\sigma i\exp\Big(-\sigma(\sqrt{u^2+s}+y_3+1)^{\rho_1}\Big)\sigma(\sqrt{u^2+s}+y_3+1)^{\rho_1-1},$$

где $\rho_1 - 1 < 0$.

Теперь оценим эти интегралы. Для $|A_4^k|$:

$$|A_4^k| \leqslant \frac{c_0\rho_1\sigma}{\exp(\sigma A)}\left|\int_0^\infty \frac{(y_k-x_k)}{(u^2+s)}\frac{1}{(u^2+r_1^2)^2}\frac{du}{(u^2+r^2)}\right| \leqslant \frac{1}{\alpha^2}\frac{c_0}{\exp(\sigma A)}, \quad k=1,2.$$

Для $|A_4^3|$:

$$|A_4^3| \leqslant \frac{c_0\rho_1\sigma}{\exp(\sigma A)}\left|\int_0^\infty \frac{1}{(u^2+s)}\frac{1}{(u^2+r_1^2)^2}\frac{1}{(u^2+s+(y_3+1)^2)}\frac{du}{(u^2+r^2)}\right| \leqslant \frac{1}{\alpha^2 r}\frac{c_0}{\exp(\sigma A)}.$$

Объединяя оценки, получаем:

$$\sum_{i=1}^4 |A_i^k| \leqslant \left(\frac{1}{\alpha^2 r^2}+\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\alpha^2 r}\right)\frac{c_0}{\exp(\sigma A)}, \quad k=1,2,$$

$$\sum_{i=1}^4 |A_i^3| \leqslant \left(\frac{1}{\alpha r^3}+\frac{1}{\alpha^2 r}+\frac{1}{\alpha r}\right)\frac{c_0}{\exp(\sigma A)}.$$

Для производной $\frac{\partial\phi_\sigma(y;x)}{\partial\overline{n}}$ справедливо:

$$\frac{\partial\phi_\sigma(y;x)}{\partial\overline{n}} = \frac{\partial\phi_\sigma(y;x)}{\partial y_1}\cos\alpha + \frac{\partial\phi_\sigma(y;x)}{\partial y_2}\cos\alpha_2 + \frac{\partial\phi_\sigma(y;x)}{\partial y_3}\cos\alpha_3.$$

Используя неравенство

$$\left|\frac{\partial\phi_\sigma(y;x)}{\partial\overline{n}}\right| \leq \left|\frac{\partial\phi_\sigma(y;x)}{\partial y_1}\right| + \left|\frac{\partial\phi_\sigma(y;x)}{\partial y_2}\right| + \left|\frac{\partial\phi_\sigma(y;x)}{\partial y_3}\right|,$$

и формулу (3) получаем утверждение теоремы.

Теорема 5. *Для функции $\Phi(y,x)$ имеет место оценка*

$$|\Delta\Phi_\sigma(y,x)| \leqslant (1+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\alpha r}+\frac{1}{\alpha r^2})\frac{c_0}{r_1^2 exp(\sigma A)}.$$

Лемма 2. Для функции $\Phi(y,x)$ справедливы неравенства:

$$|\frac{\partial\Delta\Phi_\sigma(y,x)}{\partial y_k}| \leqslant (1+\frac{1}{\alpha r^4}+\frac{1}{\alpha^2 r}+\frac{1}{\alpha^2 r^2}+\frac{1}{\alpha^2 r^3}+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\alpha^3}+\frac{1}{\alpha^4}+\frac{r}{\alpha}+\frac{r}{\alpha^2})\frac{c_0}{r_1^4 exp(\sigma A)},\ k=1,2,$$

$$|\frac{\partial\Delta\Phi_\sigma(y,x)}{\partial y_3}| \leqslant (1+\frac{1}{\alpha r^3}+\frac{1}{\alpha r}+\frac{1}{\alpha^2 r}+\frac{1}{\alpha r^4}+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha^2})\frac{c_0}{r_1^4 exp(\sigma A)},$$

$$|\frac{\partial \Delta \Phi_\sigma(y,x)}{\partial \overline{n}}| \leqslant (1+\frac{1}{\alpha r^3}+\frac{1}{\alpha r}+\frac{1}{\alpha r^4}+\frac{1}{\alpha^2 r}+\frac{1}{\alpha^2 r^2}+\frac{1}{\alpha^2 r^3}+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\alpha^3}+\frac{1}{\alpha^4}+\frac{r}{\alpha}+\frac{r}{\alpha^2})\frac{c_0}{r_1^4 exp(\sigma A)}.$$

Теорема 6. *Функция $\Phi_\sigma(y,x)$ зависящая от параметра $\sigma > 0$, определенная формулой (2), при $y \neq x$ является функцией Карлемана для точки $x \in D$ и части ∂D*

$$\int_{\partial D}\left(|\Phi_\sigma(y,x)|+|\frac{\partial \Phi_\sigma(y,x)}{\partial \overline{n}}|+|\Delta\Phi_\sigma(y,x)|+|\frac{\partial \Delta\Phi_\sigma(y,x)}{\partial \overline{n}}|\right)|ds| \leqslant C(x)\varepsilon(\sigma)$$

где постоянная C(x) зависит от x и $\overline{n}$ внешняя нормаль к границе ∂D, $\varepsilon(\sigma)\to 0$ когда $\sigma \to \infty$.

Доказательство:

Так как поверхность ∂D_P , поверхность Ляпунова, т.е в каждой точке $M \in \partial D_P, M = (y_1, y_2, y_3)$ существует определенная касательная плоскость и следовательно нормаль; существует такое число $r > 0$, одно и то же для всех точек ∂D_P, что если взять часть поверхности ∂D_P, попавшую внутрь сферы Ляпунова с центром в любой точке $M_0 \in \partial D_P, M_0 = (y_{01}, y_{02}, y_{03})$ радиуса r , то прямые , параллельные нормали к ∂D_P, в точкеy_0, встречают поверхность не более чем один раз т.е поверхность попавшую внутрь сферы Ляпунова задаётся с помощи $y_{03} = \phi_0(y_{01}, y_{02})$; Кроме того существуют такие два числа $A > 0$ и $\lambda, 0 < \lambda \leqslant 1$ одни и те же для всей поверхности ∂D_P, что для любых двух точек $M_1, M_2 \in \partial D_P$ выполняется неравенство: $|\theta| < A|(|M_1|-|M_2|)|^\lambda$, где θ угол между нормалями к ∂D_P в точках M_1 и M_2 т.е если ds -элемент площади тогда $ds < Cdy_3$. Используя свойства компактности ∂D_P и условия поверхности Ляпунова , получаем доказательство теоремы.

Теорема 7. *Пусть функция u(y) бигармоническая функция определенных в области $D \subset R^3$. Если выполнено условие*

$$\sum_{k=0}^{1}(|\Delta^k u(y)|+|grad\Delta^{1-k}u(y)|) \leqslant c_0 exp|y|^{\rho_2}, y \in D, \tag{4}$$

и в любой точке $y \in \partial D$ выполняется неравенство:

$$|\Delta^k u(y)|+|\frac{\Delta^k u(y)}{\partial \overline{n}}| < c_0, \forall k \in \{0,1\}$$

тогда $\forall x_0 \in D$ имеет место равенство:

$$u(x_0) = \sum_{k=0}^{1}\int_{\partial D}(\Delta^k\Phi_\sigma(y,x_0)\frac{\partial\Delta^{1-k}u(y)}{\partial\overline{n}} - \Delta^{1-k}u(y)\frac{\partial\Delta^k\Phi_\sigma(y,x_0)}{\partial\overline{n}})ds.$$

$y \in \partial D$

Теорема 8. *Пусть функция u(y) бигармоническая функция определенный в области $D \subset R^3$. Если выполнено условия теоремы 7 и условие роста $\Delta^k u(y) < c$, $\frac{\partial\Delta^k u(y)}{\partial\overline{n}} < c$, $\forall k \in \{0,1,2\}$, $\forall y \in \partial D$, тогда $\forall x_0 \in D$ справедливо*

$$u(x_0) = \sum_{k=0}^{1}\int_{\partial D}\left(\Delta^k\Phi_\sigma(y,x_0)\frac{\partial\Delta^{1-k}u(y)}{\partial\overline{n}} - \Delta^{1-k}u(y)\frac{\partial\Delta^k\Phi_\sigma(y,x_0)}{\partial\overline{n}}\right)ds.$$

Теорема 9. Пусть функция u удовлетворяет условия теоремы 7 и $\forall y \in \partial D$ выполнено условие роста $\Delta^k u(y) \to 0$, $\frac{\partial\Delta^k u(y)}{\partial\overline{n}} \to 0$, $\forall k \in \{0,1,2\}$, $\forall y \in \partial D$, тогда $\forall x \in D$ справедливо $u(x) = 0$.

3. Заключение

В данном исследовании мы доказали теоремы типа Фрагмена–Линделёфа для бигармонических функций, определённых в области $D \subset R^3$, где D-неограничанная область лежащая $\{y_3 > 0\}$, с границей ∂D , где ∂D- внутри некоторого шара (предположим шара: $K(0, P)$ радиуса P с центром в $(0, 0, 0), D_P = D \cap K(0, P)$) удовлетворяет условию Ляпунова, а вне шара ее можно представить как, $y_3 = f(y_1, y_2)$ -непрерывная функция, имеющая непрерывная ограниченные частные производные первого порядка. Сначала мы построили специальную функцию для этой области и оценили скорость её роста, лапласиан этой функции, её нормальные производные и нормальные производные лапласиана. Затем мы доказали, что эта специальная функция является функцией Карлемана для данной области. Используя интегральное представление бигармонической функции, мы получили основную теорему.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Евграфов М.А., Чегис И.А., Обобшение теоремы типа Фрагмена-Линделефа для аналитических функций на гармонические функции в пространстве, // Доклады Академии наук СССР, 134, 252–262, 1960.

2. Чегис И.А.,Теорема типа Фрагмена-Линделефа для гармонических функций в прямоугольном цилиндре, //Доклады Академии наук СССР, 556–559, 1961.

3. Аршон И.С., Евграфов М.А.,О росте функций, гармонических в цилиндре и ограниченных на его поверхности вместе с нормальной производной, //Доклады Академии наук СССР, 321–324, 1962.

4. Аршон И.С., Евграфов М.А.,Пример гармонической во всем пространстве функции, // ограниченной вне круглого цилиндра, Доклады Академии наук СССР, 231–234, 1962.

5. Аршон И.С., Евграфов М.А., О росте гармонических функций трех переменных,// Доклады Академии наук СССР, 147, 347–351, 1962.

6. Леоньтев А.Ф., О теоремах типа Фрагмена-Линделефа для гармонических функций в цилиндре, //Изв. АН СССР. Сер.матем, 661–676, 1963.

7. Ярмухамедов Ш.Я., Задача Коши для полигармонического уравнения, //Доклады РАН, 162–165, 2003.

8. Ашурова З.Р.,Жураева Н.Ю.,Жураева У.Ю., О некоторых свойствах ядро Ярмухамедова, //International Journal of Innovative Research, 84–90, 2021, Impact Factor 7.512.

9. Ashurova Z.R., Jurayeva N.YU.,Jurayeva U.Yu., Growing Polyharmonic functions and Cauchy problem, //Journal of Critical Reviews, India, 7,371–378, 10.31938.jcr.07.06.62,2020.

10. Ashurova Z.R., Jurayeva N.YU.,Jurayeva U.Yu., Task Cauchy and Carleman function, Academicia: An International Multidisciplinary Research Journal, Affiliated to Kurukshetra University, // Kurukshetra India, 371–378, 2020, http://saarj.com.

11. Голузин Г. М., Обобщенная формула Карлемана и ее приложение к аналитическому продолжению функций, //Математический сборник, 144–149, 1933.

12. Тихонов А. Н., Об устойчивости обратных задач, //ДАН СССР, 195–198, 1943.

13. Лаврентьев М.М.,Романов В.Г., Некорректные задачи математической физики и анализа,// Москва, Наука, 1990.

14. Ярмухамедов Ш.Я., Формула Грина в бесконечной области и ее применение, //ДАН СССР, 697–700, 1985.

15. Жураева Н.Ю.,Жураева У.Ю,Саидов У.М, Функция Карлемана для полигармонических функций для некоторых областей лежащих в m-мерном четном евклидовом пространстве, //Uzbek Mathematical Journal, 64–68, 2011.

16. Жураева У.Ю, Теоремы типа Фрагмена–Линделефа для бигармонических функций, Изв. вузов. Матем., 2022, номер 10, 42–65. DOI: https://doi.org/10.26907/0021-3446-2022-10-42-65

17. Жураева У.Ю, Теоремы типа Фрагмена–Линделефа, Дифференциальное уравнения, 2024, том 60, № 8, с. 1063–1075. DOI: 10.31857/S0374064124080059, EDN: KDBSIQ

18. Juraeva U.Yu., The Phragmen-Lindelof type theorems,Uzbek Mathematical Journal, 2022, Volume 66, Issue 3, pp.54-61. DOI: 10.29229/uzmj.2022-3-7.

REFERENCES

1. Evgrafov, M.A. & Chegis, I.A. 1960, “Generalization of the Phragmén-Lindelof type theorem for analytic functions to harmonic functions in space”, *Doklady Akademii Nauk SSSR*, vol. 134, pp. 252–262.

2. Chegis, I.A. 1961, “A Phragmén-Lindelof type theorem for harmonic functions in a rectangular cylinder”, *Doklady Akademii Nauk SSSR*, vol. 141, pp. 556–559.

3. Arshon, I.S. & Evgrafov, M.A. 1962, “On the growth of functions harmonic in a cylinder and bounded on its surface together with the normal derivative”, *Doklady Akademii Nauk SSSR*, vol. 147, pp. 321–324.

4. Arshon, I.S. & Evgrafov, M.A. 1962, “Example of a harmonic function in the entire space bounded outside a circular cylinder”, *Doklady Akademii Nauk SSSR*, vol. 147, pp. 231–234.

5. Arshon, I.S. & Evgrafov, M.A. 1962, “On the growth of harmonic functions of three variables”, *Doklady Akademii Nauk SSSR*, vol. 147, pp. 347–351.

6. Leontiev, A.F. 1963, “On Phragmén-Lindelof type theorems for harmonic functions in a cylinder”, *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Seriya Matematicheskaya*, vol. 27, pp. 661–676.

7. Yarmukhamedov, Sh.Ya. 2003, “The Cauchy problem for the polyharmonic equation”, *Doklady Rossiiskoi Akademii Nauk*, vol. 393, no. 2, pp. 162–165.

8. Ashurova, Z.R., Jurayeva, N.Yu. & Jurayeva, U.Yu. 2021, “On some properties of the Yarmukhamedov kernel”, *International Journal of Innovative Research*, vol. 10, no. 1, pp. 84–90.

9. Ashurova, Z.R., Jurayeva, N.Yu. & Jurayeva, U.Yu. 2020, “Growing polyharmonic functions and the Cauchy problem”, *Journal of Critical Reviews*, vol. 7, no. 6, pp. 371–378, doi: 10.31938/jcr.07.06.62.

10. Ashurova, Z.R., Jurayeva, N.Yu. & Jurayeva, U.Yu. 2020, “Task Cauchy and Carleman function”, *Academicia: An International Multidisciplinary Research Journal*, vol. 10, no. 6, pp. 371–378, [Online] Available at: http://saarj.com [Accessed 19 December 2024].

11. Goluzin, G.M. 1933, “The generalized Carleman formula and its application to analytic continuation of functions”, *Matematicheskii Sbornik*, vol. 40, no. 2, pp. 144–149.

12. Tikhonov, A.N. 1943, “On the stability of inverse problems”, *Doklady Akademii Nauk SSSR*, vol. 39, no. 5, pp. 195–198.

13. Lavrentyev, M.M. & Romanov, V.G. 1990, *Ill-posed problems of mathematical physics and analysis*, Nauka, Moscow.

14. Yarmukhamedov, Sh.Ya. 1985, “Green's formula in an infinite domain and its application”, *Doklady Akademii Nauk SSSR*, vol. 284, no. 5, pp. 697–700.

15. Juraeva, N.Yu., Jurayeva, U.Yu. & Saidov, U.M. 2011, “The Carleman function for polyharmonic functions in some regions in m-dimensional even Euclidean space”, *Uzbek Mathematical Journal*, no. 3, pp. 64–68.

16. Juraeva, U.Yu. 2022, “Phragmén-Lindelof type theorems for biharmonic functions”, *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Matematika*, no. 10, pp. 42–65, doi: 10.26907/0021-3446-2022-10-42-65.

17. Juraeva, U.Yu. 2024, “Phragmén-Lindelof type theorems”, *Differential Equations*, vol. 60, no. 8, pp. 1063–1075, doi: 10.31857/S0374064124080059.

18. Juraeva, U.Yu. 2022, “The Phragmen-Lindelof type theorems”, *Uzbek Mathematical Journal*, vol. 66, no. 3, pp. 54–61, doi: 10.29229/uzmj.2022-3-7.

Получено: 27.07.2025
Принято в печать: 08.12.2025

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 26. Выпуск 5.

УДК: 517 DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-5-299-306

Об одной цепи Маркова, связанной с системой счисления

С. Е. Тюрин, В. Н. Соболев

Тюрин Станислав Евгеньевич — Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: stanislav.turin@math.msu.ru
Соболев Виталий Николаевич — кандидат физико-математических наук, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова; РТУ МИРЭА (г. Москва).
e-mail: vitalii.sobolev@math.msu.ru

Аннотация

Исследуется задача нахождения стационарной цепи Маркова с максимальной энтропией на множестве бесконечных двоичных последовательностей, запрещающих появление трёх единиц подряд. Установлена связь этой задачи с системой счисления с нецелым основанием, изученной А. О. Гельфондом. Дана вероятностная интерпретация распределения остатков Гельфонда в терминах эргодической цепи Маркова с тремя состояниями. В качестве основного результата явно указаны параметры искомой экстремальной цепи. Показано, что матрица переходных вероятностей и стационарное распределение выражаются через корень $\theta > 1$ уравнения $1 = \theta^{-1} + \theta^{-2} + \theta^{-3}$. Энтропия найденной цепи равна $\ln \theta$, что определяет максимально достижимую непредсказуемость в классе рассматриваемых последовательностей с данным запретом.

Ключевые слова: цепь Маркова, максимальная энтропия, бинарные последовательности, запрещённые подпоследовательности, система счисления Гельфонда, стационарное распределение.

Библиография: 6 названия.

Для цитирования:
Тюрин С. Е., Соболев В. Н. Об одной цепи Маркова, связанной с системой счисления // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 5, с. 299–306.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 26. No. 5.

UDC: 517 DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-5-299-306

About a Markov chain connected with the number system

S. E. Tyurin, V. N. Sobolev

Tyurin Stanislav Evgenievich — Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: stanislav.turin@math.msu.ru
Sobolev Vitaliy Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University; RTU MIREA (Moscow).
e-mail: vitalii.sobolev@math.msu.ru

Abstract

This work addresses the problem of finding a stationary Markov chain with maximum entropy on the set of infinite binary sequences that forbid three consecutive ones. A connection is established between this problem and the non-integer base numeration system studied by A. O. Gelfond. A probabilistic interpretation of Gelfond's distribution of remainders is provided in terms of a three-state ergodic Markov chain. As the main result, the parameters of the extremal chain are explicitly determined. It is shown that the transition probability matrix and the stationary distribution are expressed via the root $\theta > 1$ of the equation $1 = \theta^{-1} + \theta^{-2} + \theta^{-3}$. The entropy of the resulting chain equals $\ln \theta$, which defines the maximum achievable entropy in the class of sequences with this forbidden pattern.

Keywords: Markov chain, maximum entropy, binary sequences, forbidden subsequences, Gelfond's numeration system, stationary distribution.

Bibliography: 6 titles.

For citation:

Tyurin, S. E., Sobolev, V. N. 2025, "About a Markov chain connected with the number system", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 5, pp. 299–306.

1. Введение

Рассмотрим множество всех бесконечных бинарных последовательностей с запретом на три подряд идущие единицы [1]. Будем моделировать такие последовательности как траектории некоторой цепи Маркова [2] с тремя состояниями, где состояние процесса определяется окончанием формируемой последовательности:

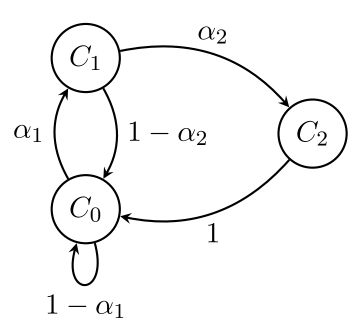
- Состояние C_0: последовательность заканчивается на 0.
- Состояние C_1: последовательность заканчивается на 01.
- Состояние C_2: последовательность заканчивается на 011.

Запрет на три единицы подряд означает, что переход (путем добавления символа) из состояния C_2 возможен только в состояние C_0.

На основании введённых состояний определим цепь Маркова, задав начальное распределение
$\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2)$ и матрицу переходных вероятностей P.

Пусть параметры α_1, α_2 задают вероятности добавления единицы при условии, что этот переход допустим.

Тогда цепь Маркова можно представить в виде графа переходов из одного состояния в другое:



Её матрица переходных вероятностей P имеет вид:

$$\begin{array}{c} \\ C_0 \\ C_1 \\ C_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} C_0 & C_1 & C_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1-\alpha_1 & \alpha_1 & 0 \\ 1-\alpha_2 & 0 & \alpha_2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

где строки и столбцы соответствуют состояниям C_0, C_1, C_2 в указанном порядке.

Среди всех стационарных цепей Маркова [2], порождающих допустимые последовательности, нас интересует цепь с максимальной энтропией [3].

Теорема 1. *Стационарная цепь Маркова, порождающая двоичные последовательности без трех подряд идущих единиц и имеющая максимальную энтропию, определяется матрицей переходных вероятностей*

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\theta} & \frac{\theta-1}{\theta} & 0 \\ \frac{\theta}{\theta+1} & 0 & \frac{1}{\theta+1} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

в которой $\theta \in (1,2)$ – корень уравнения

$$1 = \frac{1}{\theta} + \frac{1}{\theta^2} + \frac{1}{\theta^3}\,,$$

и стационарным распределением $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$, которое задаётся

$$\pi = \left(\frac{\theta^3}{\theta^3+\theta+2}, \frac{\theta+1}{\theta^3+\theta+2}, \frac{1}{\theta^3+\theta+2} \right).$$

Основная идея работы состоит в установлении связи представленной в данной теореме цепи Маркова с системой счисления с нецелым основанием, изученной А. О. Гельфондом [4].

2. Система счисления

2.1. Система счисления А. О. Гельфонда

Пусть $\theta > 1$ – фиксированное нецелое число (случай целого θ см. в [5], мы его рассматривать не будем). Тогда для всякое число $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, можно однозначно представить рядом

$$\alpha = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i}{\theta^i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\theta^i} + \frac{x_{n+1}}{\theta^n}, \qquad 0 \leqslant x_n < 1\,,$$

где λ_i – целые числа, удовлетворяющие $0 \leqslant \lambda_i < \theta$ и $x_n = x_n(\alpha)$, если последовательно определять эти числа соотношениями:

$$x_1 = \alpha, x_2 = \{\theta x_1\}, \ldots, x_{n+1} = \{\theta x_n\}, \ldots \tag{1}$$

$$\lambda_1 = [\alpha\theta], \ldots, \lambda_n = [\theta x_n], \ldots \tag{2}$$

Здесь $\{\}, []$ – дробная и целая часть числа соответственно.

А. О. Гельфонд для описания закона распределения остатков $x_n(\alpha)$ при произвольном нецелом θ ввел числа t_n. Рассмотрим частный случай разложения, для $\alpha = 1$. Тогда из общих соотношений получаем:

$$1 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i(1)}{\theta^i} + \frac{t_{n+1}}{\theta^n}, \qquad t_1 = 1\,,$$

где $t_n = x_n\,(1)$ – это остатки, возникающие при разложении единицы.

По этим остаткам А. О. Гельфонд определяет константу

$$\tau = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{t_i}{\theta^{i-1}}\,.$$

2.2. Теорема А.О. Гельфонда

Говорят, что последовательность остатков $x_n\,(\alpha)$ имеет закон распределения $\sigma\,(t)$, если для почти всех α, существует предел

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \psi\,(1 - t + x_n) = \sigma\,(t)\ ,$$

где $\psi\,(x) = \begin{cases} 1 & ,\ 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & ,\ \text{иначе} \end{cases}$.

Теорема 2 (А. О. Гельфонд). *Если $\theta > 1$ – не целое число, то почти для всех имеет место соотношение*

$$\sigma\,(t) = \frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\min\,(t, t_i)}{\theta^{i-1}}\,,$$

где функция $\psi\,(x)$ и числа $\tau, t_1, t_2, \ldots$ определены выше.

В контексте нашей задачи представляет интерес частный случай, в котором θ удовлетворяет уравнению

$$1 = \frac{1}{\theta} + \frac{1}{\theta^2} + \frac{1}{\theta^3}\,.$$

В соответствии с рекуррентными соотношениями (1), найдем числа $t_1, t_2, t_3, \ldots$ и константу τ. Они выражаются через корень θ:

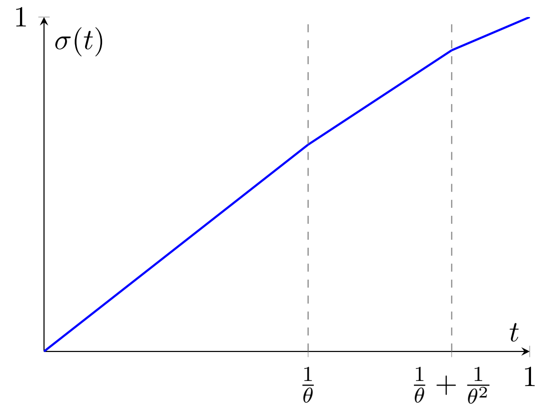
$$t_m = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{4-m} \frac{1}{\theta^i}, & 1 \leqslant m \leqslant 3, \\ 0, & m > 3, \end{cases} \qquad \tau = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{t_i}{\theta^{i-1}} = \frac{3}{\theta^3} + \frac{2}{\theta^2} + \frac{1}{\theta}\,.$$

Подставляя найденные значения t_m и τ в теорему Гельфонда, получаем явный вид закона распределения $x_n\,(\alpha)$:

$$\sigma\,(t) = \begin{cases} \frac{1}{\tau} \sum_{l=1}^{3} \frac{t}{\theta^{l-1}} & t \in [0, t_3] \\ \frac{1}{\tau} \left(\sum_{l=1}^{m} \frac{t}{\theta^{l-1}} + \sum_{l=m+1}^{3} \frac{t_l}{\theta^{l-1}} \right) & t \in [t_{m+1}, t_m] \end{cases} \tag{3}$$

где $m = 1, 2$.

Для того чтобы проиллюстрировать это распределения построим график:



2.3. Последовательности без трех подряд идущих единиц и система счисления

Лемма 1. *Разложение по основанию θ, удовлетворяющему уравнению $1 = \frac{1}{\theta} + \frac{1}{\theta^2} + \frac{1}{\theta^3}$, обладает следующим свойством: для почти всех $\alpha \in [0,1)$ соответствующая ему последовательность $\{\lambda_i\}$, полученная из (2), не содержит трёх подряд идущих единиц.*

Доказательство. Доказательство выполним от противного, пусть в последовательности $\{\lambda_i\}$ есть три единицы подряд. Тогда в разложении числа α по основанию θ найдутся подряд идущие слагаемые

$$\frac{1}{\theta^l} + \frac{1}{\theta^{l+1}} + \frac{1}{\theta^{l+2}} = \frac{1}{\theta^{l-1}}. \tag{4}$$

Сопоставив два разложения α с остаточными членами $x_{l-1}(\alpha)$ и $x_{l+3}(\alpha)$, получим равенство

$$S + \frac{x_{l-1}(\alpha)}{\theta^{l-2}} = S + \frac{\lambda_{l-1}}{\theta^{l-1}} + \left(\frac{1}{\theta^l} + \frac{1}{\theta^{l+1}} + \frac{1}{\theta^{l+2}}\right) + \frac{x_{l+3}(\alpha)}{\theta^{l+2}},$$

где S – совпадающая часть разложений до позиции $l-1$. Откуда

$$\frac{x_{l-1}(\alpha)}{\theta^{l-2}} = \frac{\lambda_{l-1}}{\theta^{l-1}} + \frac{1}{\theta^{l-1}} + \frac{x_{l+3}(\alpha)}{\theta^{l+2}} \Rightarrow [\theta x_{l-1}(\alpha)] = \lambda_{l-1} + 1,$$

что противоречит определению $\lambda_{l-1} = [\theta x_{l-1}]$. □ Таким образом наше ограничение на последовательности в виде количества подряд идущих единиц, оказывается встроенным в структуру разложения числа $\alpha \in [0,1)$ по основанию θ.

3. Цепь Маркова

3.1. Марковская модель для распределения А. О. Гельфонда

Проанализируем структуру полученного распределения $\sigma(t)$ заданного формулой (3). Заметим, что функция распределения имеет изломы в точках $\frac{1}{\theta}, \frac{1}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}$. Они разбивают отрезок $[0,1]$ на интервалы $[0, \frac{1}{\theta})$, $[\frac{1}{\theta}, \frac{1}{\theta} + \frac{1}{\theta^2})$ и $[\frac{1}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}, 1)$. Последовательность $\{\lambda_i\}$ для числа α из интервалов:

- $[0, \frac{1}{\theta})$ начинается на 0
- $[\frac{1}{\theta}, \frac{1}{\theta} + \frac{1}{\theta^2})$ начинается на 10
- $[\frac{1}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}, 1)$ начинается на 110

Таким образом для каждого $m = 0, 1, 2$ установлено взаимно однозначное соответствие между:

- Ровно m единиц в начале последовательности $\{\lambda_i\}$ в разложении А. О. Гельфонда
- Состояние C_m в цепи Маркова

3.2. Стационарный режим и энтропия

Исследуем стационарное распределение и энтропийные характеристики цепи Маркова, с заданной матрицей переходных вероятностей :

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1-\alpha_1 & \alpha_1 & 0 \\ 1-\alpha_2 & 0 & \alpha_2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Известно [2], что стационарное распределение $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ удовлетворяет системе уравнений, которую для нашей цепи можно записать в матричном виде как

$$\begin{cases} \pi\mathrm{P} = \pi, \\ \sum_{i=1}^{3} \pi_i = 1. \end{cases} \tag{5}$$

Её решение имеет вид:

$$\begin{cases} \pi_1 &= \frac{1}{1+\alpha_1+\alpha_1\alpha_2}, \\ \pi_2 &= \frac{\alpha_1}{1+\alpha_1+\alpha_1\alpha_2}, \\ \pi_3 &= \frac{\alpha_1\alpha_2}{1+\alpha_1+\alpha_1\alpha_2}. \end{cases} \tag{6}$$

Таким образом, стационарное распределение существует и единственно для всех значениях $\alpha_1, \alpha_2 \in (0, 1)$, что также следует из эргодичности цепи, обусловленной возможностью попасть из любого состояния в любое другое за конечное число шагов.

Энтропия цепи Маркова [3] с матрицей переходных вероятностей (p_{ij}) и стационарным распределением (π_1, π_2, π_3) определяется формулой:

$$H = -\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \pi_i p_{ij} \ln(p_{ij}) \ .$$

После подстановки p_{ij} из матрицы P энтропия цепи принимает вид:

$$H(\alpha_1, \alpha_2) = -\sum_{i=1}^{2} \pi_i \left[(1-\alpha_i)\ln(1-\alpha_i) + \alpha_i \ln \alpha_i\right] \ .$$

Энтропия цепи Маркова из теоремы 1 будет равна

$$H(\alpha_1, \alpha_2) = \ln\theta \, .$$

3.3. Максимизация энтропии

Установленное взаимно однозначное соответствие подсказывает нам вид стационарного распределения $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ для цепи Маркова с максимальной энтропией.

А именно, естественно предположить, что для значений $\sigma(t_m)$ имеет место следующее представление:

$$\begin{cases}\sigma(t_m) = \sum_{l=1}^{4-m} \pi_l \quad ,1 \leqslant m \leqslant 3\end{cases} . \tag{7}$$

Из (3) и (7) найдем явный вид распределения π

$$\sigma(t) = \begin{cases} \frac{\pi_1}{t_3} t & t \in [0, t_3] \\ \frac{\pi_{4-m}}{t_m - t_{m+1}} t + \frac{t_{m+1}}{t_m - t_{m+1}} \pi_{4-m} + \sum_{l=1}^{3-m} \pi_l & t \in [t_{m+1}, t_m] \end{cases} \tag{8}$$

где $m = 1, 2$.

Сопоставляя коэффициенты при t в (3) и (8), получим связь между значениями стационарного распределения цепи Маркова и числами t_m из закона распределения А. О. Гельфонда в виде следующих соотношений:

$$\begin{cases}\pi_m = \frac{1 - t_{5-m}}{\tau} \quad 1 \leqslant m \leqslant 3\end{cases} \tag{9}$$

Для полноты картины остается найти параметры α_1, α_2, определяющие матрицу переходных вероятностей P, через числа t_m из закона распределения А. О. Гельфонда и через действительный корень θ уравнения, подобного уравнению для чисел Фибоначчи [6]. Из представлений (6) и (9) получаем явные формулы:

$$\begin{cases}\alpha_1 = 1 - t_3 = \frac{\theta - 1}{\theta} \\ \alpha_2 = \frac{1 - t_2}{1 - t_3} = \frac{1}{\theta + 1}\end{cases}$$

4. Заключение

В работе решена задача о нахождении стационарной цепи Маркова с максимальной энтропией на множестве бинарных последовательностей без трёх подряд идущих единиц. Установлена связь этой задачи с системой счисления А. О. Гельфонда с основанием θ, являющимся корнем уравнения $1 = \theta^{-1} + \theta^{-2} + \theta^{-3}$. Данная связь позволяет находить стационарное распределение цепи Маркова через теорему А. О. Гельфонда, и наоборот.

Полученные результаты допускают естественное обобщение на случай запрета последовательности из k единиц (при $k = 2$ см. [6]). В этом случае параметры экстремальной цепи Маркова будут выражаться через корень $1 < \theta < 2$ уравнения

$$1 = \frac{1}{\theta} + \frac{1}{\theta^2} + \cdots + \frac{1}{\theta^k},$$

а максимальная энтропия будет равна $\ln \theta$. Другим направлением дальнейших исследований является изучение цепей Маркова с максимальной энтропией , где запрещены конкретные комбинации подряд идущих символов.

5. Благодарности

Авторы приносят благодарность проф. В.Н. Чубарикову, к.ф.-м.н. В.В. Козлову и А. А. Фролову за постоянное внимание к данной работе и редакционные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гончаров В. Л. Из области комбинаторики // Изв. Акад. Наук СССР. Сер. матем. — 1944. — Т. 8, № 1. — С. 3–48.

2. Ширяев А. Н. Вероятность. — 2-е изд., перераб. — М.: МЦНМО, 1999. — Т. 2. — 568 с.

3. Хинчин А. Я. Понятие энтропии в теории вероятностей // Успехи математических наук. — 1953. — Т. 8, вып. 3(55). — С. 3–20.

4. Гельфонд А. О. Об одном общем свойстве систем счисления // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1940. — Т. 4, № 3. — С. 365–370.

5. Hardy G. H., Littlewoo J. E. Some problems of diophantine approximation: Part I. The fractional part of $n_k Q$, // Acta Math., 1914, vol. 37, pp. 155–191.

6. Соболев В. Н., Фролов А. А. Об одном применении теоремы А.Н. Колмогорова // Чебышевский сборник,т. 26, № 5, с. 33–35.

REFERENCES

1. Goncharov, V.L. 1944, "From the field of combinatorics", *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Seriya Matematicheskaya*, vol. 8, no. 1, pp. 3–48.

2. Shiryaev, A.N. 1999, *Probability, Vol. 2*, 2nd edn, MTSNMO, Moscow.

3. Khinchin, A.Ya. 1953, "The concept of entropy in probability theory", *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, vol. 8, no. 3, pp. 3–20.

4. Gelfond, A.O. 1940, "On a general property of numeration systems", *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Seriya Matematicheskaya*, vol. 4, no. 3, pp. 365–370.

5. Hardy, G.H. & Littlewood, J.E. 1914, "Some problems of Diophantine approximation: Part I. The fractional part of $n_k\theta$", *Acta Mathematica*, vol. 37, pp. 155–191.

6. Sobolev, V.N. & Frolov, A.A. 2025, "On the application of A.N. Kolmogorov's Theorem", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 26, no. 5, pp. [номер первой страницы]–[номер последней страницы].

Получено: 06.09.2025
Принято в печать: 08.12.2025

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 26. Выпуск 5.

УДК: 514.743 DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-5-307-312

Максимальные пучки Нийенхейса, содержащие подпучок симметричных 2×2-матриц[1]

М. М. Чернин

Чернин Михаил Михайлович — Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова; Московский Центр фундаментальной и прикладной математики (г. Москва).
e-mail: chernin_03@mail.ru

Аннотация

Линейное пространство операторных полей, состоящее из операторов Нийенхейса, называют пучком Нийенхейса. Интересными примерами таких пучков являются максимальные (по включению) пучки Нийенхейса. Случай, когда максимальный пучок Нийенхейса содержит подпучок симметричных постоянных $(n \times n)$-матриц (в некоторой фиксированной системе координат), недавно рассматривался в работе [4], в которой было получено полное описание таких максимальных пучков при $n \geqslant 3$. Как оказалось, случай $n = 2$ требует отдельного исследования. Эта задача решена в данной работе.

Ключевые слова: операторы Нийенхейса, скобка Фролихера – Нийенхейса, нийенхейсовы пучки.

Библиография: 4 названия.

Для цитирования:
Чернин М. М. Максимальные пучки Нийенхейса, содержащие подпучок симметричных 2×2-матриц // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 5, с. 307–312.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 26. No. 5.

UDC: 514.743 DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-5-307-312

Maximal Nijenhuis pencils containing the subpencil of symmetric 2×2-matrices

M. M. Chernin

Chernin Mikhail Mikhailovich — Lomonosov Moscow State University; Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics (Moscow).
e-mail: chernin_03@mail.ru

[1]Исследование выполнено в МГУ имени М. В. Ломоносова за счет гранта Российского научного фонда (проект 24-21-00450).

Abstract

A linear space of operator fields that consists of Nijenhuis operators is called a Nijenhuis pencil. Maximal (by inclusion) Nijenhuis pencils serve as interesting examples of such pencils. The case when maximal Nijehuis pencil contains a subpencil of symmetric constant $(n \times n)$-matrices (in some fixed coordinate system) was recently investigated in paper [4], in which the complete description of such maximal pencils was obtained for $n \geqslant 3$. As it turned out, the case $n = 2$ requires special research. This problem is solved in the present paper.

Keywords: Nijenhuis operators, Frolicher – Nijenhuis bracket, Nijenhuis pencils.

Bibliography: 4 titles.

For citation:
Chernin, M. M. 2025, "Maximal Nijenhuis pencils containing the subpencil of symmetric 2 × 2-matrices", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 5, pp. 307–312.

1. Введение

Операторы Нийенхейса естественным образом возникают в различных задачах, связанных с геометрией, алгеброй, математической физикой (см., например, [1, 2]). В частности, в теории интегрируемых систем важную роль играют пространства операторных полей, состоящие из операторов Нийенхейса, которые называют пучками Нийенхейса (см. [3]). Интересными примерами таких пучков являются максимальные (по включению) пучки Нийенхейса. Например, в недавней работе [4] рассматривались пучки Нийенхейса, содержащие подпучок симметричных постоянных $(n \times n)$-матриц (в некоторой фиксированной системе координат), где было получено полное описание максимальных пучков, обладающих этим свойством, при $n \geqslant 3$. Как оказалось, в случае $n = 2$ требуется дополнительное исследование для описания максимальных нийенхейсовых пучков указанного типа, что и сделано в данной работе.

Напомним необходимые определения.

Скобка Фролихера – Нийенхейса $[[\ ,\ ]]$ двух тензорных полей типа $(1,1)$ (операторных полей) L и R на многообразии M^n задается формулой

$$[[L,R]](\xi,\eta) = L[\xi,R\eta] + R[L\xi,\eta] + R[\xi,L\eta] + L[R\xi,\eta] - [L\xi,R\eta] - [R\xi,L\eta] - LR[\xi,\eta] - RL[\xi,\eta],$$

где ξ, η — произвольные векторные поля, а $[\ ,\ ]$ — стандартный коммутатор векторных полей. Это выражение определяет кососимметричный по нижним индексам тензор типа $(1,2)$.

Кручение Нийенхейса — это тензор $\mathcal{N}_L = \frac{1}{2}[[L,L]]$, где L — операторное поле.

Операторное поле L называют *оператором Нийенхейса*, если $\mathcal{N}_L = 0$.

Нийенхейсов пучок $\mathcal{P}$ — это такое подпространство в бесконечномерном линейном пространстве тензорных полей типа $(1,1)$ на многообразии M^n, что для любых $L, R \in \mathcal{P}$ выполнено условие $[[L,R]] = 0$.

Централизатор $C(\mathcal{P})$ *нийенхейсова пучка* $\mathcal{P}$ — это линейное пространство, состоящее из таких операторных полей L, что $[[L,R]] = 0$ для любого операторного поля $R \in \mathcal{P}$.

По определению пучок Нийенхейса $\mathcal{P}$ *максимален*, если любое операторное поле L, для которого $[[L,R]] = 0$ для всех $R \in \mathcal{P}$, лежит в $\mathcal{P}$. Иными словами, пучок Нийенхейса $\mathcal{P}$ *максимален*, если он не является подпучком никакого большего пучка.

Пусть $\mathcal{S}$ — пучок Нийенхейса, который состоит из операторов, матрицы которых в данной системе координат симметричны. Задача описания всех нийенхейсовых пучков, содержащих $\mathcal{S}$, рассматривалась А. Ю. Коняевым в работе [4], где им был получен ответ для $n \geq 3$. А именно, им было показано, что в фиксированных координатах $u^1, \ldots, u^n$ любой максимальный нийенхейсов пучок, содержащий $\mathcal{S}$, совпадает либо с $\mathcal{A}$, либо с $\mathcal{B}$, где

$\mathcal{A} = \{$Операторы, матрицы которых в данной системе координат имеют вид $l^i_j = a^i_j + u^i c^j$, где a^i_j — компоненты произвольной постоянной матрицы A, а c^j, $j = 1, \ldots, n$ — произвольные константы.$\}$

$\mathcal{B} = \{$Операторы, матрицы которых в данной системе координат имеют вид $l^i_j = a^i_j + c^i u^j + u^i c^j + K u^i u^j$, где a^i_j — компоненты произвольной симметрической постоянной матрицы A, а $K, c^1, \ldots, c^n$ — произвольные константы.$\}$.

В данной статье мы рассматриваем описанную задачу классификации максимальных нийенхейсовых пучков, содержащих $\mathcal{S}$, при $n = 2$. Как оказалось, полученный ответ совпадает с результатом для $n \geq 3$.

2. Классификация максимальных пучков, содержащих $\mathcal{S}$

Для описания максимальных нийенхейсовых пучков, содержащих $\mathcal{S}$, целесообразно сначала найти
$C(\mathcal{S}) = \{L \mid | [[L, R]] = 0 \, \forall R \in \mathcal{S}\}$, т.е. централизатор пучка $\mathcal{S}$.

Теорема 1. *Централизатор $C(\mathcal{S})$ при $n = 2$ состоит из операторов с матрицами $R = (r^i_j)$ вида*

$$\begin{bmatrix} \frac{Dx^2}{2} + C_1 x + N & f_3(x,y) \\ C_1 y + C_2 x + A + Dxy - f_3(x,y) & \frac{Dy^2}{2} + C_2 y + M \end{bmatrix},$$

где A, C_1, C_2, D, M, N — произвольные вещественные числа, x, y — локальные координаты на многообразии M^2, а $f_3(x,y)$ — произвольная дифференцируемая функция.

Доказательство. Пусть $L \in \mathcal{S}$ — оператор, матрица которого в фиксированной системе координат (x, y) диагональна с различными числами λ_1 и λ_2 на диагонали. Положим $x = u^1$, $y = u^2$. Тогда для любого $R \in C(\mathcal{S})$

$$[[R, L]](\partial_{u^1}, \partial_{u^2}) = L[R\partial_{u^1}, \partial_{u^2}] + L[\partial_{u^1}, R\partial_{u^2}] - [R\partial_{u^1}, L\partial_{u^2}] - [L\partial_{u^1}, R\partial_{u^2}] = \\ = \sum_{\alpha=1}^{2} \left(\lambda_\alpha \frac{\partial r^\alpha_1}{\partial u^2} - \lambda_\alpha \frac{\partial r^\alpha_2}{\partial u^1} - \lambda_2 \frac{\partial r^\alpha_1}{\partial u^2} + \lambda_1 \frac{\partial r^\alpha_2}{\partial u^1} \right) \partial_{u^\alpha} = 0.$$

Приравнивая к нулю коэффициенты при ∂_{u^1} и ∂_{u^2}, получаем систему из двух уравнений

$$\begin{cases} (\lambda_1 - \lambda_2) \dfrac{\partial r^1_1}{\partial u^2} = 0 \\ (\lambda_1 - \lambda_2) \dfrac{\partial r^2_2}{\partial u^1} = 0 \end{cases}, \tag{1}$$

из которой вытекает (так как $\lambda_1 \neq \lambda_2$), что r^1_1 не зависит от u^2, а r^2_2 — от u^1.

Теперь рассмотрим $L \in \mathcal{S}$ такой, что $L\partial_{u^1} = \partial_{u^2}$ и $L\partial_{u^2} = \partial_{u^1}$. Тогда для любого $R \in C(\mathcal{S})$ (здесь идет суммирование по α)

$$[[R, L]](\partial_{u^1}, \partial_{u^2}) = L[R\partial_{u_1}, \partial_{u_2}] + L[\partial_{u_1}, R\partial_{u_2}] - [R\partial_{u_1}, L\partial_{u_2}] - [L\partial_{u_1}, R\partial_{u_2}] = \\ = L[R\partial_{u_1}, \partial_{u_2}] + L[\partial_{u_1}, R\partial_{u_2}] - [R\partial_{u_1}, \partial_{u_1}] - [\partial_{u_2}, R\partial_{u_2}] = \\ = -\frac{\partial r^1_1}{\partial u^2} \partial_{u^2} - \frac{\partial r^2_1}{\partial u^2} \partial_{u^1} + \frac{\partial r^1_2}{\partial u^1} \partial_{u^2} + \frac{\partial r^2_2}{\partial u^1} \partial_{u^1} + \frac{\partial r^\alpha_1}{\partial u^1} \partial_{u^\alpha} - \frac{\partial r^\alpha_2}{\partial u^2} \partial_{u^\alpha} = \\ = -\left(\frac{\partial r^2_1}{\partial u^2} + \frac{\partial r^1_2}{\partial u^2} - \frac{\partial r^1_1}{\partial u^1} \right) \partial_{u^1} + \left(\frac{\partial r^1_2}{\partial u^1} + \frac{\partial r^2_1}{\partial u^1} - \frac{\partial r^2_2}{\partial u^2} \right) \partial_{u^2} = 0,$$

где учтено, что $\frac{\partial r_2^2}{\partial u^1} = \frac{\partial r_1^1}{\partial u^2} = 0$. Таким образом, мы получаем систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial r_1^2}{\partial u^2} + \dfrac{\partial r_2^1}{\partial u^2} - \dfrac{\partial r_1^1}{\partial u^1} = 0 \\ \dfrac{\partial r_2^1}{\partial u^1} + \dfrac{\partial r_1^2}{\partial u^1} - \dfrac{\partial r_2^2}{\partial u^2} = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Выше было выведено, что r_1^1 не зависит от y, а r_2^2 не зависит от x, поэтому

$$r_1^1(x,y) = f_1(x) \quad \text{и} \quad r_2^2(x,y) = f_2(y).$$

Продифференцировав первое уравнение системы (2) по y, а второе по x, получим, что

$$r_1^2(x,y) + r_2^1(x,y) = C_1 y + C_2 x + A + Dxy.$$

Итак, получаем систему

$$\begin{cases} r_1^2(x,y) + r_2^1(x,y) = C_1 y + C_2 x + A + Dxy \\ r_1^1(x) = f_1(x) \\ r_2^2(y) = f_2(y) \end{cases} \tag{3}$$

Из системы (2) следует, что

$$\begin{cases} \dfrac{\partial r_1^2}{\partial u^2} + \dfrac{\partial r_2^1}{\partial u^2} = \dfrac{\partial r_1^1}{\partial u^1} = f_1'(x) \\ \dfrac{\partial r_2^1}{\partial u^1} + \dfrac{\partial r_1^2}{\partial u^1} = \dfrac{\partial r_2^2}{\partial u^2} = f_2'(y) \end{cases}$$

то есть

$$\begin{cases} C_1 + Dx = f_1'(x) \\ C_2 + Dy = f_2'(y) \end{cases}$$

Система (3) принимает вид

$$\begin{cases} r_1^2(x,y) + r_2^1(x,y) = C_1 y + C_2 x + A + Dxy \\ r_1^1(x) = \dfrac{Dx^2}{2} + C_1 x + N \\ r_2^2(y) = \dfrac{Dy^2}{2} + C_2 y + M \end{cases}$$

Положим $r_2^1(x,y) = f_3(x,y)$. Тогда

$$r_1^2(x,y) = C_1 y + C_2 x + A + Dxy - f_3(x,y).$$

Получаем, что операторы из $C(\mathcal{S})$ имеют матрицы вида

$$R = \begin{bmatrix} \frac{Dx^2}{2} + C_1 x + N & f_3(x,y) \\ C_1 y + C_2 x + A + Dxy - f_3(x,y) & \frac{Dy^2}{2} + C_2 y + M \end{bmatrix}.$$

■

Таким образом, мы получили централизатор пучка $\mathcal{S}$. Теперь нам нужно найти пучки Нийенхейса. Для этого необходимо наложить дополнительное условие $[[R,R]] \equiv 0$, то есть $(\mathcal{N}_R)_{12}^1 \equiv 0$ и $(\mathcal{N}_R)_{12}^2 \equiv 0$.

Как известно, в локальных координатах $x^1, \dots, x^n$ компоненты $(\mathcal{N}_L)^i_{jk}$ тензора $\mathcal{N}_L$ определяются по следующей формуле:

$$(\mathcal{N}_L)^i_{jk} = L^l_j \frac{\partial L^i_k}{\partial x^l} - L^l_k \frac{\partial L^i_j}{\partial x^l} - L^i_l \frac{\partial L^l_k}{\partial x^j} + L^i_l \frac{\partial L^l_j}{\partial x^k},$$

где L^i_j обозначают компоненты L. Тогда в нашем случае

$$\begin{aligned}(\mathcal{N}_R)^1_{12} &= r^l_1 \frac{\partial r^1_2}{\partial u^l} - r^l_2 \frac{\partial r^1_1}{\partial u^l} - r^1_l \frac{\partial r^l_2}{\partial u^1} + r^1_l \frac{\partial r^l_1}{\partial u^2} = \\ &= \frac{\partial f_3}{\partial x} \cdot \Big(\frac{Dx^2}{2} + C_1 x + N\Big) + \frac{\partial f_3}{\partial y} \cdot (C_1 y + C_2 x + A + Dxy - f_3(x,y)) - \\ &\quad - (Dx + C_1) \cdot f_3(x,y) - \Big(\frac{Dx^2}{2} + C_1 x + N\Big) \cdot \frac{\partial f_3}{\partial x} + f_3(x,y) \cdot \Big(C_1 + Dx - \frac{\partial f_3}{\partial y}\Big) = \\ &= \frac{\partial f_3}{\partial y} \cdot (C_1 y + C_2 x + A + Dxy - 2 f_3(x,y)) = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\mathcal{N}_R)^2_{12} &= r^l_1 \frac{\partial r^2_2}{\partial u^l} - r^l_2 \frac{\partial r^2_1}{\partial u^l} - r^2_l \frac{\partial r^l_2}{\partial u^1} + r^2_l \frac{\partial r^l_1}{\partial u^2} = \\ &= (Dy + C_2) \cdot (C_1 y + C_2 x + A + Dxy - f_3(x,y)) - f_3(x,y) \cdot \Big(C_2 + Dy - \frac{\partial f_3}{\partial x}\Big) - \\ &\quad - \Big(\frac{Dy^2}{2} + C_2 y + M\Big) \cdot \Big(C_1 + Dx - \frac{\partial f_3}{\partial y}\Big) - \\ &\quad - (C_1 y + C_2 x + A + Dxy - f_3(x,y) \cdot \frac{\partial f_3}{\partial x} + \Big(\frac{Dy^2}{2} + C_2 y + M\Big)\Big(C_1 + Dx - \frac{\partial f_3}{\partial y}\Big) = \\ &= \Big(C_2 + Dy - \frac{\partial f_3}{\partial x}\Big) \cdot (C_1 y + C_2 x + A + Dxy - 2 f_3(x,y)) = 0\end{aligned}$$

для любых x, y.

Так мы получаем систему из двух уравнений, задающих условия на коэффициенты матрицы R из формулировки теоремы 1:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_3}{\partial y} \cdot (C_1 y + C_2 x + A + Dxy - 2 f_3(x,y)) = 0 \\ (C_2 + Dy - \dfrac{\partial f_3}{\partial x}) \cdot (C_1 y + C_2 x + A + Dxy - 2 f_3(x,y)) = 0 \end{cases} \tag{4}$$

Первый случай: $C_1 y + C_2 x + A + Dxy - 2 f_3(x,y) = 0$, то есть $f_3(x,y) = \frac{1}{2}(C_1 y + C_2 x + A + Dxy)$. Тогда

$$R = \begin{bmatrix} N & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{Dx^2}{2} + C_1 x & \frac{1}{2}(Dxy + C_1 y + C_2 x + A) \\ \frac{1}{2}(Dxy + C_1 y + C_2 x + A) & \frac{Dy^2}{2} + C_2 y \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Второй случай: $\frac{\partial f_3}{\partial y} = 0$, то есть $f_3 = f_3(x)$. Из второго уравнения системы (4) имеем

$$\frac{\partial f_3}{\partial x} = C_2 + Dy,$$

то есть

$$f_3(x) = x \cdot (C_2 + Dy) + g(y).$$

У нас $\frac{\partial f_3}{\partial y} = 0$, поэтому $\frac{\partial f_3}{\partial y} = Dx + g^{'}(y) \equiv 0$, то есть $f_3(x) = C_2 x + C$, где C — константа. В итоге

$$R = \begin{bmatrix} N & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 x & C_2 x + C \\ C_1 y + A - C & C_2 y \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Таким образом, мы получаем два максимальных нийенхейсовых пучка $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$:

$\mathcal{P}_1 = \{$Операторы, матрицы которых в данной системе координат (x, y) имеют вид (5)$\}$,

$\mathcal{P}_2 = \{$Операторы, матрицы которых в данной системе координат (x, y) имеют вид (6)$\}$.

Ясно, что $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \mathcal{S}$, $\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 \subset C(\mathcal{S})$. Как мы выяснили, множество операторов Нийенхейса в централизаторе совпадает с $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$. По определению любой максимальный нийенхейсов пучок $\mathcal{P}$, содержащий $\mathcal{S}$, целиком лежит в $C(\mathcal{S})$ и, так как пучок — это линейное пространство, целиком лежит либо в $\mathcal{P}_1$, либо в $\mathcal{P}_2$. Так как эти пучки максимальны, $\mathcal{P}$ совпадает с одним из них. Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 2. *В фиксированных координатах x, y любой максимальный нийенхейсов пучок, содержащий $\mathcal{S}$, совпадает либо с $\mathcal{P}_1$, либо с $\mathcal{P}_2$, где матрицы операторов из пучков $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ задаются матрицами вида R_1 и R_2 соответственно:*

$$R_1 = \begin{bmatrix} m & a \\ a & n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Dx^2 & Dxy \\ Dxy & Dy^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2C_1x & C_1y + C_2x \\ C_1y + C_2x & 2C_2y \end{bmatrix},$$

$$R_2 = \begin{bmatrix} m & a \\ b & n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1x & C_2x \\ C_1y & C_2y \end{bmatrix}.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bolsinov A. V., Konyaev A. Yu., Matveev V. S. Nijenhuis geometry // Adv. Math. 2022. Vol. 394, Article 108001.

2. Konyaev A. Yu. Nijenhuis geometry II: Left-symmetric algebras and linearization problem for Nijenhuis operators // Differential Geom. Appl., 2021. Vol. 74, Article 101706.

3. Bolsinov A. V., Konyaev A. Yu., Matveev V. S. Applications of Nijenhuis geometry II: maximal pencils of multi-Hamiltonian structures of hydrodynamic type // Nonlinearity, 2021. Vol. 34, №8. P. 5136–5162.

4. Коняев А. Ю. Симметрические матрицы и максимальные нийенхейсовы пучки // Матем. сб., 2023. Т. 214, №8. С. 53–62.

REFERENCES

1. Bolsinov, A. V., Konyaev, A. Yu. & Matveev, V. S. 2022, “Nijenhuis geometry”, *Adv. Math.*, vol. 394, Article 108001.

2. Konyaev, A. Yu. 2021, “Nijenhuis geometry II: Left-symmetric algebras and linearization problem for Nijenhuis operators”, *Differential Geom. Appl.*, vol. 74, Article 101706.

3. Bolsinov, A. V., Konyaev A. Yu. & Matveev V. S. 2021, “Applications of Nijenhuis geometry II: maximal pencils of multi-Hamiltonian structures of hydrodynamic type”, *Nonlinearity*, vol. 34, no. 8. pp. 5136–5162.

4. Konyaev, A. Yu. 2023, “Symmetric matrices and maximal Nijenhuis pencils”, *Sbornik: Math.*, vol. 214, no. 8, pp. 1101–1110.

Получено: 09.04.2025
Принято в печать: 08.12.2025

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 26. Выпуск 5.

УДК: 539.3 DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-5-313-322

Определение упругих констант на основе решения задачи Ламе[1]

В. В. Козлов, А. А. Маркин, А. В. Храименков

Козлов Виктор Вячеславович — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный университет (г. Тула).
e-mail: vvkozlovtsu@mail.ru
Маркин Алексей Александрович — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет (г. Тула).
e-mail: markin.nikram@yandex.ru
Храименков Александр Владиславович — младший научный сотрудник, Тульский государственный университет (г. Тула); ООО «Фидесис» (г. Москва).
e-mail: hav.2000@mail.ru

Аннотация

Представлены двухконстантные формы связей между напряжениями и деформациями нелинейно-упругих изотропных материалов. Такого рода материалы могут использоваться для гашения колебаний строительных конструкций при динамических воздействиях (землетрясения, ударные волны при взрывах). Свободная энергия рассматриваемых соотношений представляется функцией алгебраических инвариантов тензора деформаций Коши-Грина либо естественных инвариантов «левого» тензора деформаций Генки. Разработана методика определения констант представленных связей между напряжениями и деформациями. Предлагаемая методика основана на анализе экспериментальных зависимостей окружных деформаций на внешней и внутренней поверхностях от приложенного внутреннего давления и решениях задачи Ламе для полого цилиндра в плоском деформированном состоянии. Показано, что конкретизация приведенных определяющих соотношений возможна на основе выделения линейного участка экспериментальных зависимостей и построения теоретических зависимостей в предположении малости деформаций. Таким образом, следующие за линейным участком данные могут быть использованы для конкретизации модулей упругости третьего порядка определяющих соотношений, построенных на основе рассмотренных. Следовательно, изложенную в работе методику можно также рассматривать как частичное решение задачи конкретизации связей между напряжениями и деформациями, включающих модули упругости третьего порядка. Для представленных экспериментальных данных показано, что результаты конкретизации по выдвинутой методике соответствуют определенным с помощью классического эксперимента на растяжение модулям упругости. Приведенная методика может использоваться как непосредственно, так и с целью минимизации числа экспериментов в задачах конкретизации определяющих значений нелинейной теории упругости.

Ключевые слова: задача Ламе, нелинейно-упругая модель, алгебраический инвариант, плоское деформированное состояние, конкретизация определяющих соотношений.

Библиография: 21 название.

Для цитирования:
Козлов В. В., Маркин А. А., Храименков А. В. Определение упругих констант на основе решения задачи Ламе // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 5, с. 313–322.

[1]Работа выполнена при поддержке госзадания Минобрнауки РФ (шифр FEWG-2023-0002).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 26. No. 5.

UDC: 539.3 DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-5-313-322

Determination of elastic constants based on the solution of the Lame problem

V. V. Kozlov, A. A. Markin, A. V. Khraimenkov

Kozlov Victor Vyacheslavovich — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State University (Tula).
e-mail: vvkozlovtsu@mail.ru
Markin Alexey Alexandrovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State University (Tula).
e-mail: markin.nikram@yandex.ru
Khraimenkov Alexander Vladislavovich — junior researcher, Tula State University (Tula); Fidesys LLC (Moscow).
e-mail: hav.2000@mail.ru

Abstract

Two-constant forms of relationships between stresses and strains in nonlinear-elastic isotropic materials are presented. Such materials can be used to dampen vibrations in building structures under dynamic loads (earthquakes, shock waves from explosions). The free energy of the considered relationships is represented as a function of algebraic invariants of the Cauchy-Green strain tensor or natural invariants of the “left” Hencky strain tensor. A method for determining the constants of the presented relationships between stresses and strains has been developed. The proposed method is based on the analysis of experimental dependencies of circumferential deformations on the outer and inner surfaces on the applied internal pressure and solutions to the Lamé problem for a hollow cylinder in a flat deformed state. It is shown that the present constitutive relationships can be particularized by identifying the linear section of the experimental dependencies and constructing theoretical dependencies under the assumption of small deformations. Thus, the data following the linear section can be used to specify the third-order elasticity moduli of the determining relations constructed on the basis of those considered. Consequently, the methodology presented in the work can also be considered as a partial solution to the problem of particularization the relationships between stresses and strains, including third-order elasticity moduli. For the experimental data presented, it is shown that the results of particularization according to the proposed method correspond to the elasticity moduli determined by means of a classical tensile experiment. The presented method can be used both directly and for the purpose of minimizing the number of experiments in the tasks of particularization the constitutive parameters of nonlinear elasticity theory.

Keywords: Lame problem, nonlinear elastic model, algebraic invariant, plane strain, constitutive law particularization.

Bibliography: 21 titles.

For citation:

Kozlov, V. V., Markin, A.A. & Khraimenkov, A. V. 2025, “Determination of elastic constants based on the solution of the Lame problem” , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 5, pp. 313–322.

Введение

Построение и экспериментальная конкретизация соотношений, определяющих поведение упругих тел при конечных деформациях, остается актуальной задачей ввиду отсутствия единственности её решения [1, 2, 3, 4]. Каждое определяющее соотношение содержит специфичный для него ряд материальных параметров [5, 6, 7, 8]. Использование связи между напряжениями и деформациями для конкретного материала предполагает предварительное решение задачи установления значений всех материальных констант определяющего соотношения — его конкретизацию.

Решения задачи конкретизации некоторых определяющих соотношений представлены в работах [9, 10, 11, 12]. В данной статье предлагается методика конкретизации двухконстантных связей между напряжениями и деформациями для изотермических процессов изотропных нелинейно-упругих материалов [13, 14, 15]. Представленную методику можно рассматривать и как частичное решение вопроса конкретизации более сложных определяющих соотношений, в частности, Мурнагана [16], построенных как расширение рассматриваемых. В отличие от классического способа определения констант упругости с помощью эксперимента о растяжении образца [17, 18] предлагаемая методика основана на рассмотрении задачи Ламе для полого цилиндра, находящегося в условии плоско-деформированного состояния под действием внутреннего давления [19]. Соответствующие модельные соотношения содержат связи между экспериментально наблюдаемыми характеристиками процесса. Из требования соответствия модельных уравнений экспериментальным данным решается задача конкретизации определяющего соотношения.

1. Определение упругих констант на основе решения задачи Ламе

Рассмотрим вопрос конкретизации двухконстантных определяющих соотношений нелинейной теории упругости, являющихся прямым обобщением закона Гука на случай изотропных нелинейно-упругих материалов. К таким можно отнести соотношение [13]

$$\underset{\sim}{\mathbf{T}} = (2c_1 + c_2)\, I_1 \underset{\sim}{\mathbf{E}} - c_2 \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}, \tag{1}$$

где $\underset{\sim}{\mathbf{T}}$ – энергетический тензор напряжений, $\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}$ – тензор деформаций Коши-Грина, I_1 – первый алгебраический инвариант $\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}$, $\underset{\sim}{\mathbf{E}}$ – единичный тензор.

Представленная связь является частным случаем связи напряжений и деформаций Мурнагана [16]

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{\mathbf{T}}_{Murn} = \left[(2c_1 + c_2)\, I_1 + (3c_3 + c_4)\, I_1^2 + c_5 I_2\right] \underset{\sim}{\mathbf{E}} - \\ - \left[c_2 + (c_4 + c_5)\, I_1\right] \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} + c_5 \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^2, \end{aligned} \tag{2}$$

содержащего также константы упругости третьего порядка c_3, c_4, c_5, вопрос конкретизации которых в данной работе не рассматривается.

Также к определяющим соотношениям с двумя константами относится соотношение [13, 18]

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_R = 2G^* \tilde{\mathbf{\Gamma}} + K^* \Theta \underset{\sim}{\mathbf{E}}, \tag{3}$$

построенное в рамках предельного случая частного постулата изотропии Ильюшина, где $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_R$ – повернутый обобщенный тензор напряжений, $\tilde{\mathbf{\Gamma}}$ – девиатор тензора деформаций Генки, Θ – первый естественный инвариант тензора Генки.

Общим при решении проблемы конкретизации определяющих соотношений (1), (3) является требование их асимптотического вырождения в классический закон Гука линейной теории упругости [20]:

$$\underset{\sim}{\mathbf{S}} = \lambda I_1 \underset{\sim}{\mathbf{E}} + 2G\underset{\sim}{\varepsilon}_{lin} = \left(K - \frac{2G}{3}\right) I_1 \underset{\sim}{\mathbf{E}} + 2G\underset{\sim}{\varepsilon}_{lin}, \tag{4}$$

где λ, G, K – классические параметры Ламе: модуль сдвига и модуль объемного расширения соответственно, а I_1 – первый алгебраический инвариант линеаризованного тензора деформаций Коши-Грина

$$\underset{\sim}{\varepsilon}_{lin} = \frac{1}{2}\left(\overset{\circ}{\vec{\nabla}}\vec{u} + \vec{u}\overset{\circ}{\vec{\nabla}}\right). \tag{5}$$

При использовании (1), (3) в рамках линейной теории упругости как энергетический тензор напряжений, так и обобщенный тензор $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_R$ вырождаются в тензор истинных напряжений Коши. Линеаризация тензора деформаций Генки и его первого естественного инварианта приводят к тензору деформаций $\underset{\sim}{\varepsilon}_{lin}$ и алгебраическому инварианту I_1 соответственно. Тогда соотношения (1), (3) примут вид, эквивалентный (4)

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{\mathbf{S}} = (2c_1 + c_2)\, I_1 \underset{\sim}{\mathbf{E}} - c_2 \underset{\sim}{\varepsilon}_{lin} = \left(K^* - \frac{2G^*}{3}\right) I_1 \underset{\sim}{\mathbf{E}} + 2G^* \underset{\sim}{\varepsilon}_{lin} = \\ = \left(K - \frac{2G}{3}\right) I_1 \underset{\sim}{\mathbf{E}} + 2G \underset{\sim}{\varepsilon}_{lin}. \end{aligned} \tag{6}$$

Из (6) следует связь между парами значений (c_1, c_2), (G^*, K^*), (G, K):

$$\begin{aligned} &\begin{cases} 2c_1 + c_2 = K - \dfrac{2G}{3}, \\ -c_2 = 2G. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = \dfrac{1}{2}\left(K - \dfrac{2G}{3}\right) + G, \\ c_2 = -2G. \end{cases} \\ &\begin{cases} G^* = G, \\ K^* = K. \end{cases} \end{aligned} \tag{7}$$

Классически коэффициенты закона Гука определяются с помощью эксперимента на растяжение образца [17]. В то же время набор экспериментов для нахождения значения параметров определяющих соотношений нелинейной теории упругости, включающих константы упругости третьего порядка, таких как (2), более обширный и может включать рассмотрение неоднородных процессов деформирования. Решим вопрос конкретизации констант c_1, c_2 в случае доступных экспериментальных данных задачи Ламе. Заметим при этом, что пара значений G^*, K^*, может быть легко выражена через c_1, c_2 с помощью системы (7) и далее выкладки конкретизации производятся только для c_1, c_2.

Схема нагружения полого цилиндра представлена на рис. 1. Координаты точек в недеформированном состоянии (ρ_0, φ_0, z_0), в деформированном (ρ, φ, z) и $a \leqslant \rho_0 \leqslant b$, $h/2 \leqslant z_0 \leqslant h/2$. На поверхность $\rho_0 = a$ действует внутреннее давление p, внешняя поверхность свободна от нагрузок. Предполагается плоско-деформированное состояние.

Запишем связь между координатами в начальном и деформированном состояниях

$$\rho = \rho\left(\rho_0\right),\ \varphi = \varphi_0,\ z = z_0. \tag{8}$$

Выражение (8) позволяет представить радиус-вектор положения точки в деформированном состоянии

$$\vec{x} = \rho\left(\rho_0\right) \vec{e}^{\,0}_{\rho} + z_0 \vec{e}_z, \tag{9}$$

где $\vec{e}^{\,0}_{\rho}$,$\vec{e}_z$ – соответствующие базисные векторы цилиндрической системы координат.

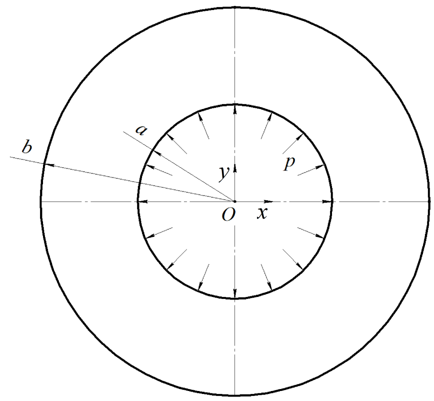


Рис. 1: Схема модели

С учётом определения в цилиндрической системе координат оператора Гамильтона $\overset{\circ}{\vec{\nabla}} = \vec{e}^{\,0}_{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho_0} + \vec{e}^{\,0}_{\varphi}\dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial}{\partial\varphi_0} + \vec{e}_z\dfrac{\partial}{\partial z_0}$ определим аффинор деформаций, используя (6):

$$\begin{aligned}\underset{\sim}{\mathbf{\Phi}} = \overset{\circ}{\vec{\nabla}}\vec{x} = \rho'\vec{e}^{\,0}_{\rho}\vec{e}^{\,0}_{\rho} + \frac{\rho}{\rho_0}\frac{\partial\vec{e}^{\,0}_{\rho}}{\partial\varphi_0}\frac{\partial\vec{e}^{\,0}_{\rho}}{\partial\varphi_0} + \vec{e}_z\vec{e}_z = \\ = \rho'\vec{e}^{\,0}_{\rho}\vec{e}^{\,0}_{\rho} + \lambda_{\rho}\vec{e}^{\,0}_{\varphi}\vec{e}^{\,0}_{\varphi} + \vec{e}_z\vec{e}_z.\end{aligned} \tag{10}$$

Здесь ρ', λ_{ρ} соответствуют радиальному и окружному растяжениям материальных волокон соответственно. Из определения полярного разложения $\underset{\sim}{\mathbf{\Phi}} = \underset{\sim}{\mathbf{U}} \cdot \underset{\sim}{\mathbf{R}}$ [21] и (10) следует, что аффинор деформации задачи Ламе совпадает с симметричной левой мерой искажения $\underset{\sim}{\mathbf{U}}$, в то время как ортогональный тензор поворота $\underset{\sim}{\mathbf{R}}$ является единичным. При этом $\vec{e}^{\,0}_{\rho}$, $\vec{e}^{\,0}_{\varphi}$, $\vec{e}_z$ образуют ортонормированную тройку векторов.

С помощью соотношения (10) запишем градиент перемещений

$$\overset{\circ}{\vec{\nabla}}\vec{u} = \overset{\circ}{\vec{\nabla}}\vec{x} - \underset{\sim}{\mathbf{E}} = \left(\rho' - 1\right)\vec{e}^{\,0}_{\rho}\vec{e}^{\,0}_{\rho} + \left(\lambda_{\rho} - 1\right)\vec{e}^{\,0}_{\varphi}\vec{e}^{\,0}_{\varphi}. \tag{11}$$

Для малых деформаций линеаризованный тензор деформаций Коши-Грина (5) в соответствии с градиентом перемещений (11) примет вид

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}_{lin} = \left(\rho' - 1\right)\vec{e}^{\,0}_{\rho}\vec{e}^{\,0}_{\rho} + \left(\lambda_{\rho} - 1\right)\vec{e}^{\,0}_{\varphi}\vec{e}^{\,0}_{\varphi} = \left(\varepsilon_{\rho\rho}\right)_{lin}\vec{e}^{\,0}_{\rho}\vec{e}^{\,0}_{\rho} + \left(\varepsilon_{\varphi\varphi}\right)_{lin}\vec{e}^{\,0}_{\varphi}\vec{e}^{\,0}_{\varphi}. \tag{12}$$

С учётом (12) выразим тензор истинных напряжений (6):

$$\begin{aligned}\underset{\sim}{\mathbf{S}} &= \left(2c_1 + c_2\right)\left(\rho' + \lambda_p - 2\right)\left(\vec{e}^{\,0}_{\rho}\vec{e}^{\,0}_{\rho} + \vec{e}^{\,0}_{\varphi}\vec{e}^{\,0}_{\varphi} + \vec{e}_z\vec{e}_z\right) - c_2\left[\left(\rho' - 1\right)\vec{e}^{\,0}_{\rho}\vec{e}^{\,0}_{\rho} + \left(\lambda_{\rho} - 1\right)\vec{e}^{\,0}_{\varphi}\vec{e}^{\,0}_{\varphi}\right] = \\ &= \vec{e}^{\,0}_{\rho}\vec{e}^{\,0}_{\rho}\left[\left(2c_1 + c_2\right)\left(\rho' + \lambda_p - 2\right) - c_2\left(\rho' - 1\right)\right] + \\ &+ \vec{e}^{\,0}_{\varphi}\vec{e}^{\,0}_{\varphi}\left[\left(2c_1 + c_2\right)\left(\rho' + \lambda_p - 2\right) - c_2\left(\lambda_{\rho} - 1\right)\right] + \vec{e}_z\vec{e}_z\left(2c_1 + c_2\right)\left(\rho' + \lambda_p - 2\right) = \\ &= S_{\rho\rho}\vec{e}^{\,0}_{\rho}\vec{e}^{\,0}_{\rho} + S_{\varphi\varphi}\vec{e}^{\,0}_{\varphi}\vec{e}^{\,0}_{\varphi} + S_{zz}\vec{e}_z\vec{e}_z.\end{aligned} \tag{13}$$

Если записать уравнение равновесия, приходим к известной [19] зависимости

$$\rho\left(\rho_0\right) = A\rho_0 + \frac{B}{\rho_0}. \tag{14}$$

Найдем константы A, B. Из (13) и (14) выразим нормальные радиальные напряжения

$$S_{\rho\rho}\left(\rho_0\right) = \left(4c_1 + c_2\right)\left(A - 1\right) + c_2\frac{B}{\rho_0^2}.$$

Используем граничные условия $S_{\rho\rho}\Big|_{\rho_0=a}=-p$, $S_{\rho\rho}\Big|_{\rho_0=b}=0$ и запишем последнее выражение на внутреннем и внешнем радиусах цилиндра:

$$\begin{cases} (4c_1+c_2)\,A+c_2\dfrac{B}{a^2}=4c_1+c_2-p, \\ (4c_1+c_2)\,A+c_2\dfrac{B}{b^2}=4c_1+c_2. \end{cases} \tag{15}$$

Решим систему алгебраических уравнений (15) относительно A и B:

$$\begin{aligned} A&=1-\frac{pa^2}{(4c_1+c_2)\,(a^2-b^2)}, \\ B&=\frac{pa^2b^2}{c_2\,(a^2-b^2)}. \end{aligned} \tag{16}$$

Выражения (14), (16) вместе с (9) полностью определяют закон движения материальных точек цилиндра, конкретизируют меры описания напряженно-деформированного состояния. В частности, компонента окружных деформаций тензора Коши-Грина (5) примет вид:

$$\begin{gathered} (\varepsilon_{\varphi\varphi})_{lin}=\frac{\rho}{\rho_0}-1=A+\frac{B}{\rho_0^2}-1=1-\frac{pa^2}{(4c_1+c_2)\,(a^2-b^2)}+ \\ +\frac{pa^2b^2}{c_2\rho^2\,(a^2-b^2)}-1=\frac{pa^2}{a^2-b^2}\left(\frac{b^2}{\rho_0^2c_2}-\frac{1}{4c_1+c_2}\right). \end{gathered}$$

На внутреннем и внешнем радиусах получим

$$\begin{cases} (\varepsilon_{\varphi\varphi})_{lin}\Big|_{\rho_0=a}=\dfrac{pa^2}{a^2-b^2}\left(\dfrac{b^2}{a^2c_2}-\dfrac{1}{4c_1+c_2}\right)=pc_1^*, \\ (\varepsilon_{\varphi\varphi})_{lin}\Big|_{\rho_0=b}=\dfrac{pa^2}{a^2-b^2}\left(\dfrac{b^2}{c_2}-\dfrac{1}{4c_1+c_2}\right)=pc_2^*. \end{cases} \tag{17}$$

Принимая во внимание, что c_1, c_2 – материальные константы, получим, что c_1^*, c_2^* также постоянные величины, а зависимости (17) – линейные относительно давления p. Таким образом, для нахождения c_1, c_2 на экспериментальных кривых $\varepsilon^e_{\varphi\varphi}\Big|_{\rho_0=a}(p)$, $\varepsilon^e_{\varphi\varphi}\Big|_{\rho_0=b}(p)$ необходимо выделить линейный участок, произвольная точка которого может быть использована для составления системы уравнений (17) относительно неизвестных c_1, c_2.

Рассмотрим вопрос возможности получения экспериментальных данных $\varepsilon^e_{\varphi\varphi}\Big|_{\rho_0=a}(p)$, $\varepsilon^e_{\varphi\varphi}\Big|_{\rho_0=b}(p)$. Экспериментально наблюдаемыми величинами рассматриваемой постановки являются деформированные значения внешнего $\rho^e\,(b)$ и внутреннего $\rho^e\,(a)$ радиусов и соответствующее внутреннее давление p^e. Используя выражение аффинора деформаций (10), запишем тензор Коши-Грина

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}=\frac{1}{2}\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{\Phi}}\cdot\underset{\sim}{\boldsymbol{\Phi}}^{\mathsf{T}}-\underset{\sim}{\mathbf{E}}\right)=\frac{1}{2}\left(\rho'-1\right)^2\bar{e}^0_\rho\bar{e}^0_\rho+\frac{1}{2}\left(\frac{\rho}{\rho_0}-1\right)^2\bar{e}^0_\varphi\bar{e}^0_\varphi=\varepsilon_{\rho\rho}\bar{e}^0_\rho\bar{e}^0_\rho+\varepsilon_{\varphi\varphi}\bar{e}^0_\varphi\bar{e}^0_\varphi.$$

Таким образом, окружные деформации определяются соответствующими значениями деформированного радиуса и могут быть измерены $\varepsilon^e_{\varphi\varphi}\Big|_{\rho_0=a}(p)$, $\varepsilon^e_{\varphi\varphi}\Big|_{\rho_0=b}(p)$.

Применим методику конкретизации констант c_1, c_2 для следующих экспериментальных данных, полученных для цилиндра, имеющие безразмерные геометрические характеристики $a=0.5$ и $b=1$:

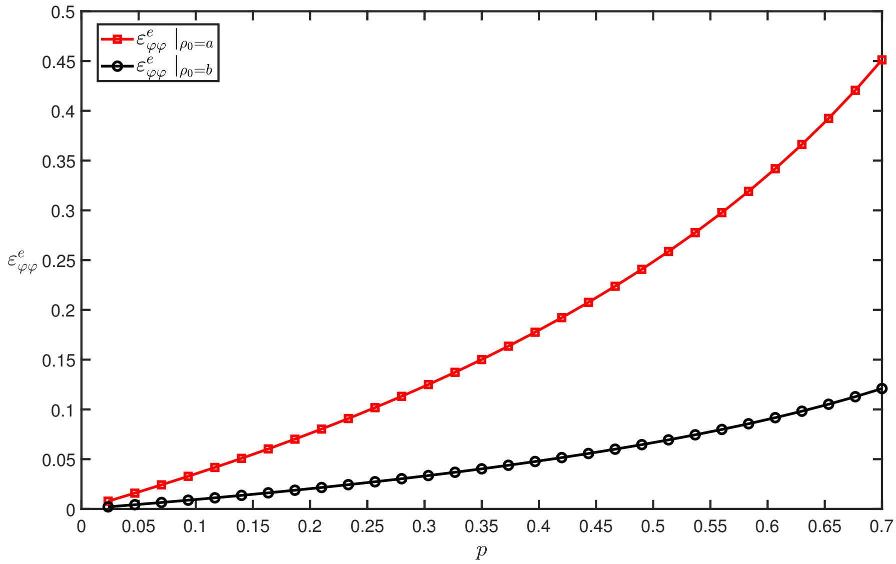


Рис. 2: Экспериментальные зависимости $\varepsilon^e_{\varphi\varphi}\Big|_{\rho_0=a}(p)$, $\varepsilon^e_{\varphi\varphi}\Big|_{\rho_0=b}(p)$

Заметим, что представленные на рис. 2 зависимости были получены для материала, имеющего классическим образом определенные модуль сдвига, коэффициент объемного расширения $G_{classic} = 2.069$ МПа, $K_{classic} = 20$ МПа соответственно. Выберем в качестве участка, на котором $\varepsilon^e_{\varphi\varphi}\Big|_{\rho_0=a}(p)$, $\varepsilon^e_{\varphi\varphi}\Big|_{\rho_0=b}(p)$ растут предположительно линейно, интервал $p \in [0;\ 0.1]$ МПа. Решив систему (17) для произвольной точки данного интервала, получим искомые значения материальных параметров. В таблице 1 приведены материальные константы c_1, c_2, а также соответствующие им модули упругости G, K, выраженные с помощью системы (7).

Таблица 1: Материальные константы, найденные для значений $p = 0.025i$, $i \in [1;\ 4]$

Внутреннее давление	$\max\left(\varepsilon^e_{\varphi\varphi}\right)$	c_1	c_1	K	G
0.025	0.0083909	11.067	−4.0717	19.419	2.0358
0.05	0.017059	10.891	−4.0055	19.111	2.0027
0.075	0.026021	10.714	−3.9391	18.802	1.9695
0.1	0.035293	10.536	−3.8724	18.491	1.9362

Анализируя приведенные в таблице 1 значения, наблюдаем, что вычисленные на основе по представленной методике модули сдвига, объемного расширения асимптотически вырождаются в классические значения с уменьшением внутреннего давления и приближения экспериментальных зависимостей $\varepsilon^e_{\varphi\varphi}\Big|_{\rho_0=a}(p)$, $\varepsilon^e_{\varphi\varphi}\Big|_{\rho_0=b}(p)$ к линейным. Таким образом, определение параметров может быть осуществлено как с помощью стандартным образом определенных модулей $G_{classic}$, $K_{classic}$, так и посредством представленной методики.

Заключение

Предложена методика конкретизации модулей упругости двухконстантного определяющего соотношения на основе решения задачи Ламе для полого изотропного однородного цилиндра. Показано, что выделение линейной части экспериментальных зависимостей поверхностных окружных деформаций от внутреннего давления приводит к определению классических модулей. Это означает, что классические модули данного материала должны входить в нелинейные определяющие соотношения. Результаты применения методики могут быть использованы как непосредственно, так и в целях минимизации числа экспериментов, используемых при решении задачи конкретизации определяющих соотношений нелинейной теории упругости.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rajagopal K. R., Rodriguez C., A mathematical justification for nonlinear constitutive relations between stress and linearized strain // Mathematical Physics. 2024; DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.2405.20977

2. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости / А. И. Лурье. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980 г. – 512 с.

3. Муравлев А.В. О представлении упругого потенциала в обобщенном пространстве деформаций А.А. Ильюшина // Известия РАН. Механика твердого тела. 2011. № 1. С. 99-102.

4. Bustamante R., Rajagopal K. R. A new type of constitutive equation for nonlinear elastic bodies. Fitting with experimental data for rubber-like materials // Proceedings of the Royal Society A. 2021. Vol. 477. № 2252. P. 1–16; DOI: https://doi.org/10.1098/rspa.2021.0330

5. Průša V., Rajagopal K.R., Tůma, K. Gibbs free energy based representation formula within the context of implicit constitutive relations for elastic solids // International Journal of Non-Linear Mechanics. 2020. vol. 121; DOI: https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2020.103433

6. Montella G., Govindjee S., Neff P. The exponentiated Hencky strain energy in modelling tire derived material for moderately large deformations // Journal of Engineering Materials and Technology, Transaction of the ASME. 2015; DOI: https://doi.org/10.1115/1.4032749

7. Маркин А.А., Соколова М.Ю. Нелинейные соотношения анизотропной упругости и частный постулат изотропии // Прикладная математика и механика, 2007. Т. 71. Вып. 4. С. 587-594

8. Markin, A.A., Sokolova, M.Y. Variant of Nonlinear Elasticity Relations // Mechanics of Solids. 2019. Vol. 54. P. 1182–1188; DOI: https://doi.org/10.3103/S0025654419080089

9. Нгуен Ш.Т. Идентификация параметров квадратичной модели упругого ани-зотропного материала / Ш.Т. Нгуен, Д.В. Христич // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния, 2021. № 3 (49). С. 3–11; DOI: https://doi.org/10.37972/chgpu.2021.49.3.001

10. Минин С.И. Определение модулей упругости третьего порядка для измерения напряженно-деформированного состояния металла элементов конструк-ций АЭС. // Известия вузов. Ядерная энергетика, 2018. № 1. С. 15-22; DOI: https://doi.org/10.26583/npe.2018.1.02

11. Ф. Е. Гарбузов, А. М. Самсонов, А. А. Семенов, А. Г. Шварц, Определение упругих модулей 3-го порядка по параметрам объемных солитонов деформации // Письма в ЖТФ, 2016. Т. 42. Вып 3. С. 16–22.

12. Карабутов А. А., Подымова Н. Б., Черепецкая Е. Б. Измерение зависимости локального модуля Юнга от пористости изотропных композитных материа-лов импульсным акустическим методом с использованием лазерного источника ультразвука // Прикладная механика и техническая физика, 2013. № 3 (54). С. 181—190.

13. Маркин А. А. Нелинейная теория упругости: учеб. пособие: 2-е изд., доп. / А. А. Маркин, Д. В. Христич. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2007. – 92 с.

14. Толоконников Л.А., Маркин А.А. Определяющие соотношения при конечных деформациях // Проблемы механики деформируемого твердого тела. Межвузов. сб. трудов / Калинин. политех. ин-т. Калинин: Изд-во КГУ. 1986. С. 49-57.

15. Гузь А. Н. Устойчивость упругих тел при конечных деформациях. – К.: Наук. думка, 1973. – 270 с.

16. Murnaghan F. D. Finite deformation of an elastic solid. John Wiley & Sons, New York. 1951. 140 p.

17. Шишкин А.В. Исследование физических свойств материалов. В 4 ч. Ч. 4.1. Испытания на растяжение : учеб.-метод. пособие / О.С. Дутова; А.В. Шишкин. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2012. – 64 с; ISBN 978-5-7782-1970-0

18. Козлов В. В. Вопросы конкретизации определяющих соотношений нелинейной теории упругости на основе рассмотрения одноосного однородного растяжения / В.В. Козлов, А.А. Маркин // Известия ТулГУ. Естественные науки – Тула: Изд-во ТулГУ, 2015. Вып. 4. С. 137–143

19. Седов Л. И. Механика сплошной среды : учебник для вузов. Т. 2. / Седов Л. И.; МГУ им. М. В. Ломоносова. 6-е изд. – СПб.: Лань, 2004. – 560 с; ISBN: 5-8114-0542-1

20. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды: Учебник / А.А. Ильюшин 3-е изд. – М.: Изд-во МГУ, 1990. – 310 с.

21. Маркин А. А. Механика сплошной среды: Учеб. пособие / А. А. Маркин, К. Ю. Сотников. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2003. – 132 с; ISBN: 5-7679-0476-6 : 36.00

REFERENCES

1. Rajagopal, K. R. & Rodriguez, C. 2024, “A mathematical justification for nonlinear constitutive relations between stress and linearized strain”, *Mathematical Physics*; DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.2405.20977

2. Lurie, A. I. 1990, *Nonlinear theory of elasticity.* Amsterdam, North-Holland, pp. 617.

3. Muravlev, A.V. 2011, “On a Representation of an Elastic Potential in A. A. Il’yushin’s Generalized Strain Space”, *Mechanics of Solids*, vol. 46, pp. 77-79.

4. Bustamante R. & Rajagopal K.R. 2021, “A new type of constitutive equation for nonlinear elastic bodies. Fitting with experimental data for rubber-like materials”, *Proceedings of the Royal Society A*. vol. 477. no 2252. pp. 1–16; DOI: https://doi.org/10.1098/rspa.2021.0330

5. Průša, V., Rajagopal, K.R. & Tůma, K. 2020, “Gibbs free energy based representation formula within the context of implicit constitutive relations for elastic solids”, *International Journal of Non-Linear Mechanics*. vol. 121; DOI: https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2020.103433

6. Montella, G., Govindjee, S. & Neff, P. 2015, “The exponentiated Hencky strain energy in modelling tire derived material for moderately large deformations”, *Journal of Engineering Materials and Technology, Transaction of the ASME*; DOI: https://doi.org/10.1016/0045-7825(92)90129-8

7. Markin, A.A. & Sokolova, M.Y. 2007, “Nonlinear relations of anisotropic elasticity and the particular postulate of isotropy”, *J. Appl. Math. Mech.* vol. 71, no. 4, pp. 587-594.

8. Markin, A.A. & Sokolova, M.Y. 2019, “Variant of Nonlinear Elasticity Relations”, *Mechanics of Solids*. 2019. vol. 54. pp. 1182–1188; DOI: https://doi.org/10.3103/S0025654419080089

9. Nguyen, S.T. & Khristich, D.V. 1977, “Identification of parameters of the quadratic model of elastic anisotropic material”, *I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University Bulletin. y. Series: Mechanics of Limit State*. no. 3 (49). pp. 3-11.

10. Minin, S.I. 2018, “Determination of third-order elastic moduli to measure stressed-strained states in metal structural components of nuclear power plants”, *Izvestiya vuzov. Yadernaya Energetika*, no. 1, pp. 15-22; DOI: https://doi.org/10.26583/npe.2018.1.02

11. Garbuzov, F.E., Samsonov, A. M., Semenov, A.A. & Shvartz, A. G. 2016, “Determination of third-order elastic moduli via parameters of bulk strain solitons”, *Pisma v Zhurnal Tekhnicheskoi Fiziki*, vol. 42. no. 3. pp. 16–22; DOI: https://doi.org/10.1051/epjconf/20122604002

12. Karabutov, A.A., Podymova, N.B. & Cherepetskaya, E. B. 2013, “Measuring the dependence of the local Young’s modulus on the porosity of isotropic composite materials by a pulsed acoustic method using a laser source of ultrasound”, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, vol. 54, no. 3, pp. 503–510; DOI: https://doi.org/10.1134/ S0021894413030218

13. Markin, A. A. & Khristich, D. V. 2007, *Nonlinear Theory of Elasticity.* 2 edition. Tula State University Press, Tula, pp. 92; ISBN: 5-7679-1118-9: 4500.00

14. Tolokonnikov L.A. & Markin, A.A. 1986, “Constitutive laws at finite deformations”, *Problems of Mechanics of Deformable Solids. Interuniversity Collection of Works*. pp. 49-57.

15. Guz, A.N. 1973, *Stability of elastic bodies under finite deformation.* Naukova Dumka, Kyiv, pp. 270.

16. Murnaghan F.D. 1951, *Finite deformation of an elastic solid.* John Wiley & Sons, New York. 1951. pp 140.

17. Shishkin, A.V. & Dutova, O.S. 2012, *Study of physical properties of materials. Part 4.1. Tensile tests.* Novosibirsk State University Press, Novosibirsk. pp 64; ISBN: 978-5-7782-1970-0

18. Kozlov, V.V. & Markin, A.A. 2015, “Questions specification of the defining relationships of nonlinear elasticity theory by considering uniaxial homogeneous tension”, *Izvestiya Tula State University. Physical sciences, Tula*, vol. 4, pp. 137-143.

19. Sedov, L. I. 2004, *Continuum Mechanics 6th.* Lan Publishing, Saint Petersburg, Vol. 2. pp. 560; ISBN: 5-8114-0542-1

20. Ilyushin, A. A. 1990, *Continuum Mechanics 3nd edition.* Moscow University Press, Moscow, pp. 310.

21. Markin, A. A & Sotnikov, K.Y. 2003, *Continuum Mechanics.* Tula State University Press, Tula, vol.1. pp. 132; ISBN: 5-7679-0476-6 : 36.00

Получено: 03.07.2025
Принято в печать: 08.12.2025

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 26. Выпуск 5.

УДК: 539.3:534.26 DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-5-323-335

Дифракция звуковых волн, излучаемых линейным источником, на неоднородном проницаемом сфероиде с твердым шаровым включением

Л. А. Толоконников, Д. В. Окороков

Толоконников Лев Алексеевич — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет (г. Тула).
e-mail: tolokonnikovla@mail.ru
Окороков Данила Витальевич — магистрант, Тульский государственный университет (г. Тула).
e-mail: danila_okorokov@mail.ru

Аннотация

В статье рассматривается задача о дифракции цилиндрической гармонической звуковой волны на неоднородном жидком сфероиде с абсолютно жестким шаровым включением. Полагается, что квадрат эксцентриситета сфероида является малой величиной. Сфероид помещен в безграничную однородную сжимаемую идеальную жидкость. Линейный источник, генерирующий звуковые волны, параллелен оси вращения сфероида. Материал сфероида характеризуется переменными плотностью и скоростью звука, которые являются непрерывными функциями радиальной координаты.

Методом возмущений получено приближенное аналитическое решение задачи с использованием разложений по волновым сферическим функциям.

Представлены результаты численных расчетов диаграмм направленности рассеянного акустического поля в дальней зоне.

Ключевые слова: дифракция, звуковые волны, линейный источник, проницаемый неоднородный сфероид, шаровое включение.

Библиография: 17 названий.

Для цитирования:
Толоконников Л. А., Окороков Д. В. Дифракция звуковых волн, излучаемых линейным источником, на неоднородном проницаемом сфероиде с твердым шаровым включением // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 5, с. 323–335.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 26. No. 5.

UDC: 539.3:534.26 DOI: 10.22405/2226-8383-2025-26-5-323-335

Diffraction of sound waves emitted by a linear source on a inhomogeneous permeable spheroid with a solid spherical inclusion

L. A. Tolokonnikov, D. V. Okorokov

Tolokonnikov Lev Alexeevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State University (Tula).
e-mail: tolokonnikovla@mail.ru
Okorokov Danila Vitalevich — master's student, Tula State University (Tula).
e-mail: danila_okorokov@mail.ru

Abstract

In paper the problem of diffraction of a cylindrical harmonic sound wave on an inhomogeneous liquid spheroid with an absolutely rigid spherical inclusion is considered.

It is assumed that the square eccentricity of the spheroid is a small value. The spheroid is placed in an infinite homogeneous incompressible ideal liquid. A linear source generating sound waves is parallel to the axis of rotation of the spheroid. The material of the spheroid is characterized by variable density and speed of sound which are continuous functions of the radial coordinate.

An approximate analytical solution is obtained by the perturbation method problems with using decompositions in a row by spherical wave functions.

The results of numerical calculations of the directional patterns of the scattered acoustic field in the far zone are presented.

Keywords: diffraction, sound waves, linear source, permeable inhomogeneous spheroid, spherical inclusion.

Bibliography: 17 titles.

For citation:
Tolokonnikov, L. A., Okorokov, D. V. 2025, "Diffraction of sound waves emitted by a linear source on a inhomogeneous permeable spheroid with a solid spherical inclusion", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 5, pp. 323–335.

1. Введение

Дифракция гармонических звуковых волн на жидких сфероидах и сфероидальных телах из подобных жидкости материалов, в которых не распространяются сдвиговые волны, исследовалась в ряде работ.

В [1 – 4] получены решения задач о рассеянии плоских звуковых волн на однородных проницаемых (жидких) сфероидах.

Работы [5, 6] посвящены изучению дифракции плоских звуковых волн на неоднородных жидких сфероидах, находящихся в однородной идеальной жидкости.

Дифракция плоских звуковыях волн на абсолютно жестком сфероиде, окруженном неоднородным жидким слоем, обсуждалась в [7].

В [8] решена задача о рассеянии плоской звуковой волны неоднородным проницаемым сфероидом с жестким шаровым включением.

Непрерывно-неоднородное тело можно аппроксимировать дискретно-слоистым, то есть телом состоящим из совокупности тонких однородных слоев. Подобный подход для сфероидальных тел реализован в работах [9 – 11]. Задача о рассеянии сферической волны на многослойном проницаемом сфероиде с жестким сфероидальным включением решена в [9]. На основе полученного решения рассмотрен случай одного сфероидального жидкого слоя, окружающего жесткий сфероид [10]. В [11] рассматривается дифракция цилиндрических звуковых волн на многослойном проницаемом сфероиде с абсолютно жестким сфероидальным включением.

В настоящей работе рассматривается задача о дифракции звуковых волн, излучаемых линейным источником, на неоднородном жидком сфероиде с абсолютно жестким шаровым включением.

2. Постановка задачи

Рассмотрим неоднородный жидкий сфероид с полуосью вращения a и второй полуосью b, эксцентриситет которого ε. Причем для вытянутого сфероида ($a > b$) $\varepsilon = \left(1 - \dfrac{b^2}{a^2}\right)^{1/2}$, а для сплюснутого сфероида ($a < b$) $\varepsilon = \left(1 - \dfrac{a^2}{b^2}\right)^{1/2}$. Сфероид имеет абсолютно жесткое шаровое включение радиуса r_0. Центры сфероида и шара совмещены. Сфероид помещен в безграничную однородную сжимаемую идеальную жидкость, которая характеризуется плотностью в невозмущенном состоянии ρ_1 и скоростью звука c_1.

Введем прямоугольную декартову систему координат x, y, z с началом в центре сфероида так, чтобы ось вращения сфероида располагалась на оси z. Свяжем с координатной системой x, y, z сферическую r, θ, φ и цилиндрическую r, φ, z системы координат, начала которых совмещены с центром сфероида:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = \cos\theta;$$

$$x = \hat{r}\cos\varphi, \quad y = \hat{r}\sin\varphi, \quad z = z.$$

Уравнение сфероида в сферической системе координат имеет вид

$$r(\theta) = a(1 - e\sin^2\theta)^{-1/2}, \tag{2.1}$$

где $e = \dfrac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - 1}$ для вытянутого сфероида и $e = \varepsilon^2$ для сплюснутого сфероида.

Будем полагать, что материал сфероида характеризуется переменными плотностью ρ и скоростью звука c, которые являются непрерывными функциями радиальной координаты r:

$$\rho = \rho(r); \qquad c = c(r).$$

Из внешнего пространства на сфероид падает гармоническая симметричная цилиндрическая звуковая волна давления p_0, излучаемая бесконечно длинным линейным источником с временной зависимостью $e^{-i\omega t}$, где ω — круговая частота; t — время (в дальнейшем временной множитель будем опускать). Линейный источник параллелен оси вращения сфероида и имеет цилиндрические координаты $(\hat{r}_0, \varphi_0)$ (рис. 1). Без ограничения общности положим $\varphi_0 = 0$.

Падающая волна имеет вид

$$p_0 = AH_0(k_1R), \quad R = [\hat{r}^2 + \hat{r}_0^2 - 2\hat{r}\hat{r}_0\cos\varphi]^{1/2},$$

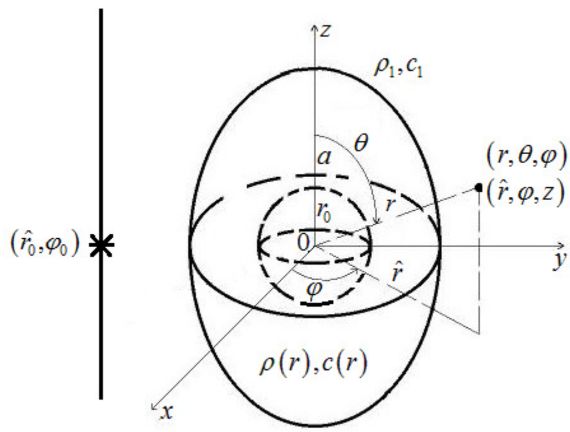


Рис. 1: Геометрия задачи

где A — амплитуда падающей волны, $H_0(x)$ — цилиндрическая функция Ганкеля первого рода нулевого порядка, $k_1 = \omega/c_1$ — волновое число содержащей жидкости, R — расстояние от источника до произвольной точки внешнего пространства.

Определим акустическое поле, рассеянное сфероидом, в предположении малости величины e.

3. Математическая модель задачи

Распространение малых возмущений в однородной идеальной жидкости в случае установившихся колебаний описывается уравнением Гельмгольца [12]

$$\Delta p_1 + k_1^2 p_1 = 0, \tag{3.1}$$

где $p_1 = p_0 + p_s$ — давление полного акустического поля во внешней области; p_s — звуковое давление в рассеянной волне; $k_1 = \omega/c_1$ — волновое число внешней среды.

Распространение звука в неоднородной сжимаемой идеальной жидкости описывается уравнением [13]

$$\Delta p + k^2 p - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad}\rho \cdot \operatorname{grad} p = 0, \tag{3.2}$$

где p — звуковое давление в неоднородной среде; $k = \omega/c$ — волновое число в неоднородной жидкости; $c = c(r)$; $\rho = \rho(r)$.

Скорости частиц в однородной и неоднородной жидкостях определяются соответственно по формулам

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{i\rho_1\omega}\operatorname{grad} p_1, \quad \mathbf{v} = \frac{1}{i\rho\omega}\operatorname{grad} p. \tag{3.3}$$

Граничные условия на поверхности сфероида S заключаются в равенстве нормальных скоростей частиц внешней среды и неоднородной жидкости и равенстве акустических давлений

$$v_{n1}|_S = v_n|_S, \quad p_1|_S = p|_S. \tag{3.4}$$

Граничное условие на поверхности жесткого шарового включения заключается в равенстве нулю нормальной скорости частиц прилегающей неоднородной жидкости

$$v_n|_{r=r_0} = 0. \tag{3.5}$$

Кроме того, для давления в рассеянной волне должно выполняться условие излучения на бесконечности [12]

$$\lim_{r\to\infty} r\left(\frac{\partial p_s}{\partial r} - ik_1 p_s\right) = 0. \tag{3.6}$$

Таким образом, в математической постановке задача заключается в нахождении решений дифференциальных уравнений (3.1) и (3.2), удовлетворяющих граничным условиям (3,4) и (3.5), а также условию излучения на бесконечности (3.6).

4. Аналитическое решение задачи

В цилиндрической системе координат падающая цилиндрическая волна может быть представлена разложением [14]

$$p_0 = A\sum_{m=0}^{\infty}(2-\delta_{0m})\cos m\varphi \begin{cases} J_m(k_1\hat{r})H_m(k_1\hat{r}_0), & \hat{r} < \hat{r}_0; \\ J_m(k_1\hat{r}_0)H_m(k_1\hat{r}), & \hat{r} > \hat{r}_0, \end{cases} \tag{4.1}$$

где $J_m(x)$ и $H_m(x)$ — цилиндрические функции Бесселя и Ганкеля первого рода порядка m, δ_{0m} — символ Кронекера.

В сферической системе координат уравнение Гельмгольца, которому удовлетворяет искомое давление p_s, уравнение (3.2) и граничные условия (3.4), (3.5) принимают вид

$$\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial p_s}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial p_s}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 p_s}{\partial\varphi^2}\right] + k_1^2 p_s = 0, \tag{4.2}$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{\rho(r)}\frac{d\rho}{dr}\right)\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial p}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 p}{\partial\varphi^2} + k^2(r)p = 0; \tag{4.3}$$

$$\rho_1^{-1}\frac{\partial}{\partial n}(p_0+p_s)\bigg|_{r=r(\theta)} = \rho^{-1}(r)\frac{\partial p}{\partial n}\bigg|_{r=r(\theta)}, \qquad (p_0+p_s)|_{r=r(\theta)} = p|_{r=r(\theta)}; \tag{4.4}$$

$$\frac{\partial p}{\partial r}\bigg|_{r=r_0} = 0. \tag{4.5}$$

При этом $\dfrac{\partial}{\partial n}$ определяется формулой

$$\frac{\partial}{\partial n} = \cos\gamma\frac{\partial}{\partial r} + \sin\gamma\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}, \tag{4.6)}$$

где γ — угол между радиус-вектором $\mathbf{r}$ и внешней нормалью $\mathbf{n}$ к поверхности тела, а выражение для $\cos\gamma$ имеет вид

$$\cos\gamma = \left[1 + \left(\frac{e\sin\theta\cos\theta}{1-e\sin^2\theta}\right)^2\right]^{-1/2}. \tag{4.7)}$$

Получим приближенное решение задачи методом возмущений [15].

Искомые функции p_s и p представим в виде разложений по малому параметру e

$$p_s(r,\theta,\varphi) = p_s^0(r,\theta,\varphi) + ep_s^1(r,\theta,\varphi) + \ldots, \tag{4.8}$$

$$p(r,\theta,\varphi) = p^0(r,\theta,\varphi) + ep^1(r,\theta,\varphi) + \ldots, \tag{4.9}$$

ограничиваясь членами со степенями e не выше первой.

Подставим разложения (4.8) и (4.9) в уравнения (4.2) и (4.3) и приравниваем нулю члены с одинаковыми степенями e. В результате для определения функций p_s^j и p^j $(j = 0, 1)$ получим следующие уравнения:

$$\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial p_s^j}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial p_s^j}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 p_s^j}{\partial\varphi^2}\right]+k_1^2 p_s^j=0, \tag{4.10}$$

$$\frac{\partial^2 p^j}{\partial r^2}+\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{\rho(r)}\frac{d\rho}{dr}\right)\frac{dp^j}{dr}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial p^j}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 p^j}{\partial\varphi^2}+k^2(r)p^j=0,\ j=0,1. \tag{4.11}$$

С выбранной степенью точности из (4.6) и (4.7) находим

$$\cos\gamma = 1 + O(e^2), \quad \sin\gamma = -e\sin\theta\cos\theta + O(e^2), \quad \frac{\partial}{\partial n}=\frac{\partial}{\partial r}-e\sin\theta\cos\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}. \tag{4.12}$$

С учетом (4.12) подставим разложения (4.8) и (4.9) в граничные условия (4.3) и (4.4), а затем приравняем члены с одинаковыми степенями e, стоящие в левой и правой частях каждого уравнения. Поскольку условия (4.3) и (4.4) должны выполняться на поверхности сфероида $r = r(\theta)$, определяемой выражением (2.1), то в этих условиях r представляет собой функцию от θ. Поэтому в каждое граничное условие параметр e будет входить как явно, так и неявно. Следовательно, непосредственно приравнять члены с одинаковыми степенями e в левой и правой частях уравнений не представляется возможным. Необходимо предварительно разложить все функции, неявно содержащие e, в ряды Тейлора в окрестности $r = a$ с тем, чтобы получить их явную зависимость от e. Проделав указанные операции и сохранив только линейные относительно e члены, получим следующие условия:

$$\left.\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial}{\partial r}(p_0+p_s^0)\right|_{r=a}=\left.\frac{1}{\rho(r)}\frac{\partial p^0}{\partial r}\right|_{r=a}, \tag{4.13}$$

$$[p_0+p_s^0]_{r=a}=p^0|_{r=a}, \tag{4.14}$$

$$\left.\frac{\partial p_s^1}{\partial r}\right|_{r=a}=\left\{\frac{\rho_1}{\rho(a)}\frac{\partial p^1}{\partial r}+\frac{a}{2}\sin^2\theta\left[\frac{\rho_1}{\rho(a)}\left(\frac{\partial^2 p^0}{\partial r^2}-\frac{1}{\rho(a)}\frac{d\rho}{dr}\frac{\partial p^0}{\partial r}\right)-\frac{\partial^2}{\partial r^2}(p_0+p_s^0)\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{a}\sin\theta\cos\theta\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(p_0+p_s^0)-\frac{\rho_1}{\rho(a)}\frac{\partial p^0}{\partial\theta}\right]\right\}_{r=a}, \tag{4.15}$$

$$p_s^1|_{r=a}=\left[p^1+\frac{a}{2}\sin^2\theta\frac{\partial}{\partial r}(p^0-p_0-p_s^0)\right]_{r=a}. \tag{4.16}$$

Теперь подставим (4.9) в условие (4.5). Получаем

$$\left.\frac{\partial p^j}{\partial r}\right|_{r=r_0}=0, \quad j=0,1. \tag{4.17}$$

Уравнения (4.10) и (4.11) будем решать методом разделения переменных. Так как акустические поля во внешней среде и в неоднородной части сфероида симметричны относительно плоскости xOz, то с учетом условий излучения на бесконечности (3.6) функций p_s^j $(j = 0, 1)$ будем искать в виде

$$p_s^j=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}A_{mn}^j h_n(k_1 r)P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi, \qquad (4.18),$$

а функции p^j $(j = 0, 1)$ — в виде

$$p^j = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} R_n^j(r) P_n^m(\cos\theta) \cos m\varphi. \tag{4.19}$$

Здесь $h_n(x)$ — сферическая функция Ганкеля первого рода порядка n; $P_n^m(x)$ — присоединенный многочлен Лежандра степени n порядка m. Коэффициенты A_{mn}^j и функции $R_n^j(r)$ $(j = 0, 1)$ подлежат определению.

Подставляя (4.19) в уравнение (4.11) и используя дифференциальное уравнение для присоединенных многочленов Лежандра [14]

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{d}{d\theta} P_n^m(\cos\theta) \right) + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta} \right] P_n^m(\cos\theta) = 0,$$

получим линейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами относительно неизвестной функции $R_n^j(r)$ $(j = 0, 1)$ для каждого n $(n = 0, 1, 2, ...)$

$$\frac{d^2 R_n^j}{dr^2} + g(r) \frac{dR_n^j}{dr} + q(r) R_n^j = 0, \tag{4.20}$$

где

$$g(r) = \frac{2}{r} - \frac{1}{\rho(r)} \frac{d\rho}{dr}, \quad q(r) = k^2(r) - \frac{n(n+1)}{r^2}.$$

Используя условия (4.13) – (4.17) определим коэффициенты A_{mn}^0, A_{mn}^1 и по два краевых условия для дифференциальнолго уравнения (4.20) при $j = 0$ и $j = 1$.

Прежде всего получим интегральные соотношения между цилиндрическими и сферическимими функциями, которые будут использованы при удовлетворении условий (4.13) – (4.17).

Воспользуемся соотношением [14]

$$\int_0^\pi J_m(k_1 r \sin\theta) P_n^m(\cos\theta) \sin\theta \, d\theta = 2i^{n-m} j_n(k_1 r) P_n^m(0), \tag{4.21}$$

где $j_n(x)$ — сферическая функция Бесселя порядка n, а величина $P_n^m(0)$ определятся формулой [16]

$$P_n^m(0) = \begin{cases} 0, & (n-m) \text{— нечетное;} \\ \dfrac{(-1)^{\frac{n-m}{2}} (n+m)!}{2^n \left(\frac{n-m}{2}\right)! \left(\frac{n+m}{2}\right)!}, & (n-m) \text{— четное.} \end{cases}$$

Дифференцируя обе части равенства (4.21) по $k_1 r$, получим

$$\int_0^\pi J_m'(k_1 r \sin\theta) P_n^m(\cos\theta) \sin^2\theta \, d\theta = 2i^{n-m} j_n'(k_1 r) P_n^m(0). \tag{4.22}$$

Здесь и далее штрихи обозначают дифференцирование по аргументу.

Подставим (4.1), (4.18) и (4.19) в условия (4.13) – (4.16), заменяя цилиндрическую координату $\hat{r}$ ее выражением $r \sin\theta$ в сферических координатах. Затем умножим левые и правые части полученных равенств на $P_l^m(\cos\theta) \sin\theta$ и проинтегрируем по θ от 0 до π.

Используя интегральные соотношения (4.21) и (4.22), условия ортогональности для присоединенных многочленов Лежандра [16]

$$\int_0^\pi P_n^m(\cos\theta) P_l^m(\cos\theta) \sin\theta \, d\theta = \begin{cases} 0, & n \neq l; \\ N_{ml}, & n = l, \end{cases}$$

где $N_{ml} = \dfrac{2}{(2l+1)}\dfrac{(l+m)!}{(l-m)!}$ — квадрат нормы присоединенных многочленов Лежандра, и выражение для вронскиана

$$j_n(x)h_n'(x) - j_n'(x)h_n(x) = \frac{i}{x^2},$$

получим следующие выражения для коэффициентов A_{mn}^j $(j = 0, 1)$ и краевые условия для уравнения (4.20) при $r = a$:

$$A_{mn}^0 = \frac{R_n^0(a)N_{mn} - 2A(2-\delta_{0m})i^{n-m}H_m(k_1\hat{r}_0)j_n(k_1a)P_n^m(0)}{h_n(k_1a)N_{mn}},$$

$$A_{mn}^1 = \frac{R_n^1(a)}{h_n(k_1a)} + \frac{a}{2N_{mn}h_n(k_1a)}\left\{-Ak_1(2-\delta_{0m})H_m(k_1\hat{r}_0)\gamma_{mn} + \sum_{l=m}^{\infty}\left[R_l^{0\prime}(a) - A_{ml}^0k_1h_l'(k_1a)\right]\alpha_{\ln}^m\right\},$$

$$R_n^{0\prime}(r) + a_nR_n^0(r)\big|_{r=a} = b_{mn}, \tag{4.23}$$

$$R_n^{1\prime}(r) + a_nR_n^1(r)\big|_{r=a} = c_{mn}, \tag{4.24}$$

где

$$\gamma_{mn} = \int_0^{\pi}\sin^4\theta P_n^m(\cos\theta)J_m'(k_1a\sin\theta)\,d\theta; \quad \alpha_{ln}^m = \int_0^{\pi}\sin^3\theta P_l^m(\cos\theta)\,P_n^m(\cos\theta)\,d\theta;$$

$$a_n = -\frac{k_1h_n'(k_1a)\rho(a)}{\rho_1h_n(k_1a)}; \quad b_{mn} = -\frac{iA2(2-\delta_{0m})i^{n-m}H_m(k_1\hat{r}_0)P_n^m(0)\rho(a)}{k_1a^2\rho_1h_n(k_1a)N_{mn}};$$

$$c_{mn} = \frac{a\rho(a)}{2\rho_1N_{mn}}\left\{A(2-\delta_{0m})H_m(k_1\hat{r}_0)f_{mn} + \sum_{l=m}^{\infty}\left[\left(-\frac{\rho_1}{\rho(a)}R_l^{0\prime\prime}(a) + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + f_{nl}^{(1)}R_l^{0\prime}(a) + f_{nl}^{(2)}A_{ml}^0\right)\alpha_{ln}^m - \frac{2}{a^2}\left(A_{ml}^0h_l(k_1a) - \frac{\rho_1}{\rho(a)}R_l^0(a)\right)\beta_{ln}^m\right]\right\};$$

$$f_{nl}^1 = \frac{\rho_1\rho'(a)}{\rho^2(a)} + \frac{k_1h_n{}'(k_1a)}{h_n(k_1a)}; \quad f_{nl}^2 = k_1^2\frac{h_n(k_1a)h_l{}''(k_1a) - h_n{}'(k_1a)h_l{}'(k_1a)}{h_n(k_1a)};$$

$$\beta_{ln}^m = \int_0^{\pi}\sin^2\theta\cos\theta P_l^m(\cos\theta)\frac{d}{d\theta}P_n^m(\cos\theta)d\theta; \quad f_{nm} = k_1^2\left[-\frac{h_n{}'(k_1a)}{h_n(k_1a)}\gamma_{mn} + \lambda_{mn} - \frac{2}{k_1a}\mu_{mn}\right];$$

$$\lambda_{mn} = \int_0^{\pi}\sin^5\theta P_n^m(\cos\theta)J_m''(k_1a\sin\theta)d\theta; \quad \mu_{mn} = \int_0^{\pi}\sin^2\theta\cos^2\theta P_n^m(\cos\theta)\frac{d}{d\theta}J_m(k_1a\sin\theta)d\theta.$$

Подстановка (4.19) в (4.17) дает два краевых условия при $r = r_0$

$$R_n^{0\prime}(r)\big|_{r=r_0} = 0, \tag{4.25}$$

$$R_n^{1\prime}(r)\big|_{r=r_0} = 0. \tag{4.26}$$

Коэффициенты A_{mn}^0 и A_{mn}^1 могут быть вычислены только после нахождения значений $R_n^0(a)$, $R_n^1(a)$, $R_n^{0\prime}(a)$. Для нахождения этих значений необходимо решить краевые задачи для обыкновенного дифференциального уравнения (4.20) при $j = 0$ и $j = 1$ с краевыми условиями (4.23), (4.25) и (4.24), (4.26) соответственно.

После решения краевых задач вычисляются коэффициенты A_{mn}^{j} ($j = 0, 1$). В результате получаем приближенное аналитическое описание рассеянного акустического поля с помощью выражений (4.8) и (4.18).

Отметим, что из решения задачи дифракции цилиндрических волн на неоднородном сфероиде с абсолютно жестким включением можно найти решение задачи для случая, когда падающая волна является плоской. Для этого в полученном решении, считая, что расстояние между источником и рассеивателем достаточно велико ($k_1\hat{r}_0 >> 1$), следует заменить функцию $H_m(k_1\hat{r}_0)$ ее асимптотическим выражением при больших значениях аргумента [16]

$$H_m(k_1\hat{r}_0) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi k_1\hat{r}_0}} \exp\left[i\left(k_1\hat{r}_0 - \frac{\pi m}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right].$$

В результате получим решение задачи дифракции плоской волны, амплитуда которой равна
$A\sqrt{\dfrac{2}{\pi k_1\hat{r}_0}} \exp\left[i\left(k_1\hat{r}_0 - \pi m - \dfrac{\pi}{4}\right)\right]$.

Рассмотрим дальнюю зону рассеянного акустического поля. Используя асимптотическую формулу для сферической функции Ганкеля первого рода при больших значениях аргумента ($k_1 r >> 1$) [16]

$$h_n(k_1 r) \approx (-i)^{n+1}\frac{e^{ik_1 r}}{k_1 r},$$

из (4.8) и (4.18) находим

$$p_s \approx \frac{a}{2r}\exp(ik_1 r)F(\theta,\, \varphi),$$

где

$$F(\theta,\, \varphi) = \frac{2}{k_1 a}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}(-i)^{n+1}(A_{mn}^{0} + e\,A_{mn}^{1})P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi. \tag{4.27}$$

5. Численные исследования

На основании выражения (4.27) были проведены расчеты угловых характеристик рассеянного акустического поля в дальней зоне. Диаграммы направленности $|F(\theta,\, \varphi)|\,/A$ рассчитывались в диапазоне углов $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ в плоскости xOz для сфероида, находящегося в воде ($\rho_1 = 10^3$ кг/м^3, $c_1 = 1485$ м/с).

Расчеты проводились как для однородного сфероида с плотностью $\bar{\rho} = 1.26 \cdot 10^3$ кг/м^3 и скоростью звука $\bar{c} = 1920$ м/с (глицерин), так и для неоднородного материала, механические характеристики которого менялись по радиальной координате по квадратичным законам

$$\rho = \bar{\rho}\,f(r), \quad c = \bar{c}\,f(r),$$

$$f_1(r) = 100\left(\frac{r - r_0}{a - r_0}\right)^2 + 1, \quad f_2(r) = 100\left(\frac{a - r}{a - r_0}\right)^2 + 1.$$

Зависимости $f_1(r)$ и $f_2(r)$ выбраны такими, что их графики являются зеркальным отображением друг друга относительно прямой $r = (r_0 + a)/2$. При этом функция $f_1(r)$ достигает максимума при $r = a$, а на поверхности шара при $r = r_0$ – минимума. Функция $f_2(r)$ достигает тех же максимальных и минимальных значений, но уже наоборот на поверхностях $r = r_0$ и $r = a$.

Краевые задачи для дифференциального уравнения (4.20) при $j = 0$ и $j = 1$ решены методом сведения их к задачам с начальными условиями. Решение задач Коши проведено методом Рунге-Кутты четвертого порядка [17].

На рис. 2 – 4 представлены диаграммы направленности, рассчитанные для волнового размера сфероида $k_1 a = 3$ при $e = 0$, $e = -0.2$ и $e = 0.2$. При этом полагалось: $\hat{r}_0 = 4$ м, $r_0 = 0.1$ м, $a = 1.1$ м.

На лучах диаграмм отложены значения безразмерной амплитуды рассеяния $|F|/A$, вычисленной для соответствующих значений угла θ. На рисунках сплошная линия соответствует однородному сфероиду, штриховая – неоднородному вида $f_1(r)$, пунктирная – неоднородному вида $f_2(r)$. Стрелкой показано направление падения волны.

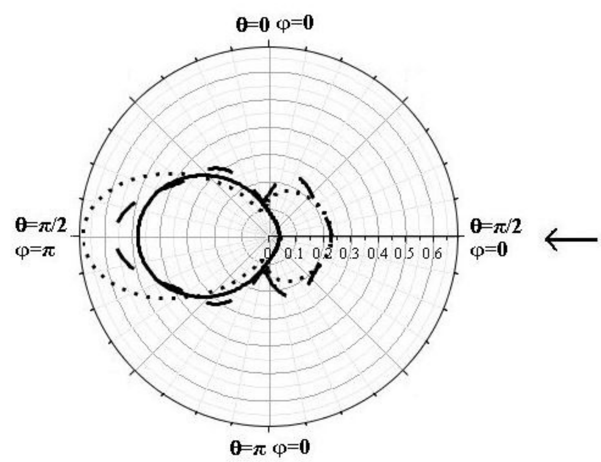


Рис. 2: Диаграммы направленности при $e = 0$

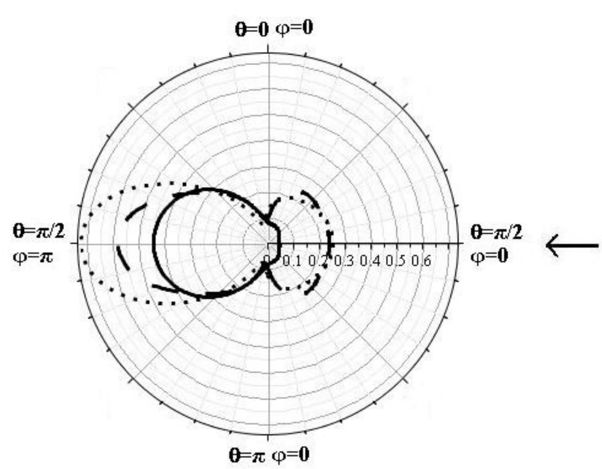


Рис. 3: Диаграммы направленности при $e = -0.2$

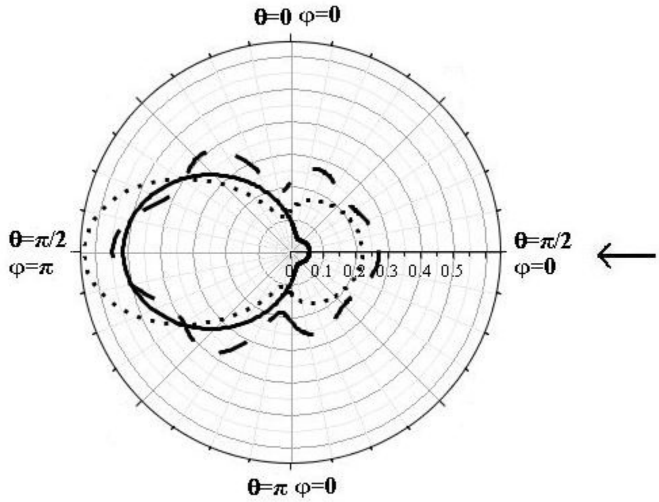


Рис. 4: Диаграммы направленности при $e = 0.2$

На рис. 5 представлены диаграммы направленности, рассчитанные для однородного сфероида при $k_1 a = 3$, $e = -0.2$ и разном удалении линейного источника от сфероида: $k_1 \hat{r}_0 = 5$ (пунктирная линия), $k_1 \hat{r}_0 = 8$ (штриховая линия) и $k_1 \hat{r}_0 = 50$ (сплошная линия). Для сравнения приведена диаграмма направленности для случая падения плоской волны (штрихпунктирная линия).

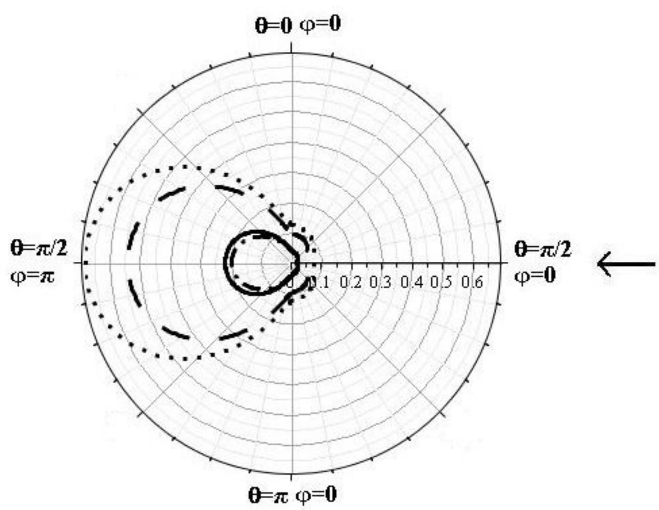


Рис. 5: Диаграммы направленности при разном удалении линейного источника от сфероида

6. Заключение

В настоящей работе методом возмущений получено приближенное аналитическое решение задачи дифракции симметричной цилиндрической звуковой волны на жидком сфероиде с жестким шаровым включением. Найденное решение позволяет численно исследовать рассеянное сфероидом акустическое поле при любых значениях волнового размера тела ka и произвольном удалении линейного источника от рассеивателя. Проведенные численные расчеты показали, что что диаграмма направленности рассеянного поля в дальней зоне существенно зависит от конфигурации тела и закона неоднородности материала сфероида. При приближении источника к рассеивателю диаграммы направленности существенно изменяются, что подтверждает необходимость учета криволинейности фронта падающей волны.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Yeh C. Scattering of acoustic waves by a penetrable prolate spheroid. I. Liquid prolate spheroid // J. Acoust. Soc. Amer. 1967. Vol. 42. No. 2. P. 518 – 521.
2. Burke J. E. Scattering by penetrable spheroids // J. Acoust. Soc. Amer. 1968. Vol. 43. No. 4. P. 871 – 875.
3. Родионова Г. А., Толоконников Л. А. Рассеяние звука вращающимся сфероидом // Акуст. журн. 1989. Т. 35. № 5. С. 895 – 899.
4. Котсис А. Д., Роумелиотис Дж. А. Рассеяние звука на проницаемом сфероиде // Акуст. журн. 2008. Т. 54. № 2. С. 189 – 204.
5. Толоконников Л. А., Шапошник Л. М. Дифракция звуковых волн на неоднородном сфероиде и неоднородном эллиптическом цилиндре // Известия Тульского гос. ун-та. Серия Математика. Механика. Информатика. 1996. Т. 2. Вып. 2. С. 141 – 151.
6. Толоконников Л. А. Дифракция плоской звуковой волны на неоднородном эллипсоиде вращения с малым эксцентриситетом // Дифференциальные уравнения и прикладные задачи. Тула: ТулГУ, 1997. С. 90 – 96.
7. Дружков А. Н., Толоконников Л. А. Рассеяние плоской звуковой волны на абсолютно жестком эллипсоиде вращения, окруженном неоднородным слоем // Дифференциальные уравнения и их приложения. Тула: ТулПИ, 1988. С. 105 – 110.
8. Толоконников Л. А., Окороков Д. В. Рассеяние плоской звуковой волны неоднородным сфероидом с жестким шаровым включением // Известия Тульского гос. ун-та. Технические науки. 2024. Вып. 10. С. 441 – 447.
9. Charalambopoulos A., Dassios G., Fotiadis D. I., Massalas C. V. Scattering of a point generated field by a multilayered spheroid // Acta Mech. 2001. Vol. 150. No. 2. P. 107 – 119.
10. Charalambopoulos A., Fotiadis D. I., Massalas C. V. Scattering of a point generated field by kidney stones // Acta Mech. 2002. Vol. 153. No. 1. P. 63 – 77.
11. Толоконников Л. А., Толоконников С. Л. Дифракция цилиндрической звуковой волны на многослойном сфероиде // Чебышевский сборник. 2025. Т. 26. Вып. 1. С. 190 – 203.
12. Шендеров Е. Л. Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 352 с.
13. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 344 с.
14. Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики Т.2. М.: ИЛ, 1960. 886 с.
15. Найфэ А. Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 456 с.
16. Иванов Е. А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск: Наука и техника, 1968. 584 с.
17. Калиткин Н. Н. Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.

REFERENCES

1. Yeh, C. 1967, “Scattering of acoustic waves by a penetrable prolate spheroid. I. Liquid prolate spheroid”, *J. Acoust. Soc. Amer.*, Vol. 42, Iss. 2, pp. 518–521.

2. Burke, J. E. 1968, “Scattering by penetrable spheroids”, *J. Acoust. Soc. Amer.*, Vol. 43, Iss. 4, pp. 871–875.

3. Rodionova, G. A., Tolokonnikov, L. A. 1989, “Sound scattering by a rotating spheroid”, *Akust. Zhurn.*, Vol. 35, Iss. 5, pp. 895–899, [in Russian].

4. Kotsis, A. D., Roumeliotis, J. A. 2008, “Acoustic Scattering by a Penetrable Spheroid”, *Akust. Zhurn.*, Vol. 54, Iss. 2, pp. 189–204, [in Russian].

5. Tolokonnikov, L. A., Shaposhnik, L. M. 1996, “Diffraction of sound waves on an inhomogeneous spheroid and an inhomogeneous elliptical cylinder”, *Izv. Tul. Gos. Univ. Ser. Mathematics. Mechanics. Computer science.*, Vol. 2, Iss. 2, pp. 141–151, [in Russian].

6. Tolokonnikov, L. A. 1997, “Diffraction of a plane sound wave on an inhomogeneous ellipsoid of rotation with a small eccentricity”, *Differential equations and applied problems*, TulSU, pp. 90–96, [in Russian].

7. Druzhkov, A. N., Tolokonnikov, L. A. 1988, “Scattering of a plane sound wave on an absolutely rigid ellipsoid of rotation surrounded by an inhomogeneous layer”, *Differential equations and applied problems*, TulPI, pp. 105–110, [in Russian].

8. Tolokonnikov, L. A., Okorokov, D. V. 2024, “Scattering of a plane sound wave by an inhomogeneous spheroid with a rigid spherical inclusion”, *Izv. Tul. Gos. Univ. Ser. Tekh. Nauki*, Iss. 10, pp. 441–447, [in Russian].

9. Charalambopoulos, A., Dassios, G., Fotiadis, D. I., Massalas, C. V. 2001, “Scattering of a point generated field by a multilayered spheroid”, *Acta Mech.*, Vol. 150, Iss. 2, pp. 107–119.

10. Charalambopoulos, A., Fotiadis, D. I., Massalas, C. V. 2002, “Scattering of a point generated field by kidney stones”, *Acta Mech.*, Vol. 153, Iss. 1, pp. 63–77.

11. Tolokonnikov, L. A., Tolokonnikov, S. L. 2025, “Diffraction of a cylindrical sound wave on a multilayered spheroid”, *Chebyshevskii sbornik*, Vol. 26, Iss. 1, pp. 190–203, [in Russian].

12. Shenderov, E. L. 1972, *Wave problems of underwater acoustics*, Sudostroenie, Leningrad, 352 p., [in Russian].

13. Brekhovskikh, L. M. 1973, *Waves in layered media*, Nauka, Moscow, 344 p., [in Russian].

14. Mors, P. M., Feshbach, H. 1953, *Methods of theoretical physics*, Vol. 2, McGraw-Hill, New York, 1001 p.

15. Nayfen, A. H. 1973, *Perturbation methods*, John Wiley & Sons, New York, 425 p.

16. Ivanov, E. A. 1968, *Diffraction of electromagnetic waves by two bodies*, Nauka i tekhnika, Minsk, 584 p., [in Russian].

17. Kalitkin, N. N. 1978, *Numerical methods*, Nauka, Moscow, 512 p., [in Russian].

Получено: 10.03.2025
Принято в печать: 08.12.2025

РЕДКОЛЛЕГИЯ

Том 26 Выпуск 5

Фукшанский Леонид Евгеньевич — доктор математических наук, профессор, Колледж Клермонт Маккенна (США).
e-mail: lenny@cmc.edu

Шяучюнас Дарюс — доктор математических наук, профессор, старший научный сотрудник Научного института Шяуляйского университета (Литва).
e-mail: darius.siauciunas@su.lt

THE EDITORIAL BOARD

Volume 26 Issue 5

TABLE OF CONTENTS

Volume 26 Issue 5

Научное издание

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Научно-теоретический журнал

Том XXVI. Выпуск 5 (101)

Оригинал-макет подготовлен
А. В. Родионовым, А. П. Крыловым.
Технический редактор – И. Е. Агапова.

Регистрационный номер средства массовой информации ПИ № ФС77-80049
от 31 декабря 2020 г. выдан Федеральной службой
по надзору в сфере связи, информационных технологий
и массовых коммуникаций.

Подписано в печать 22.12.2025. Формат 60×84/8.
Бумага офсетная. Печать трафаретная. Усл. печ. л. 40,45.
Тираж 150 экз. (первый завод – 25 экз.). Заказ 25/27.
Цена свободная. Дата выхода в свет 30.12.2025.

Издатель – Тульский государственный педагогический
университет им. Л. Н. Толстого. 300026, Тула, просп. Ленина, 125.

Отпечатано в ТГПУ им. Л. Н. Толстого.
300026, Тула, просп. Ленина, 125.