ISSN 2226-8383

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Научно-теоретический математический журнал

www.chebsbornik.ru

XXVI

Выпуск 2 (98)

2025

ISSN 2226-8383

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Министерство просвещения Российской Федерации
Российская академия наук
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
Московский педагогический государственный университет
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
Тульский государственный университет

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Научно-теоретический журнал

ТОМ XXVI

ВЫПУСК 2 (98)

Тула
2025

Учредитель: ФГБОУ ВО
«ТГПУ им. Л. Н. Толстого»

Адрес редакции:
300026, г. Тула, пр. Ленина, 125.
Тел: +79065327314

E-mail: cheb@tsput.ru
URL: http://www.chebsbornik.ru

Издается с 2001 года.
Выходит 5 раз в год.
Регистрационный номер
СМИ: ПИ № ФС77-80049

В журнале публикуются оригинальные статьи по направлениям современной математики: теория чисел, алгебра и математическая логика, теория функций вещественного и комплексного переменного, функциональный анализ, дифференциальные уравнения, математическая физика, геометрия и топология, теория вероятностей и математическая статистика, численные методы, теория оптимизации и др. Также публикуются статьи о памятных датах и юбилеях.

Журнал включен в перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание ученых степеней кандидата наук и доктора наук (перечень ВАК), индексируется и/или реферируется: Scopus, MathSciNet, Zentralblatt MATH, Russian Science Citation Index (RSCI), РЖ Математика, Mathematical Reviews, РИНЦ, Google Scholar Metrics.

Журнал выходит под эгидой Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, Министерства просвещения Российской Федерации, Российской академии наук, Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Московского педагогического государственного университета, Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого, Тульского государственного университета.

12+

СОДЕРЖАНИЕ

Том 26 Выпуск 2

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 26. Выпуск 2.

DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-2-4-6

Анатолий Тимофеевич Фоменко

Рис. 1: Анатолий Тимофеевич Фоменко

В 2025 году академику Анатолию Тимофеевичу Фоменко исполняется 80 лет.

А. Т. Фоменко родился 13 марта 1945 года, в городе Сталино (сегодня — Донецк). В 1950 году переехал вместе с родителями в Магадан, затем в 1959 году — в Луганск, где закончил среднюю школу номер 26 с золотой медалью. Участник школьных олимпиад, победитель Всесоюзной заочной Олимпиады по математике. В 1956 и 1959 годах был удостоен бронзовых медалей ВДНХ. В 1962 году поступил на механико-математический факультет МГУ, на отделение механики. Учился на кафедре теоретической механики у профессора В. В. Румянцева. Перейдя на 4-ом курсе на отделение математики факультета, закончил его в 1967 году и поступил в аспирантуру на кафедру дифференциальной геометрии к профессору П. К. Рашевскому. Активно включившись в научные исследования, А. Т. Фоменко в 1969 году становится ассистентом кафедры дифференциальной геометрии механико-математического факультета МГУ, а в 1970 году успешно защищает кандидатскую диссертацию по теме «Вполне геодезические модели циклов».

Спустя всего два года А. Т. Фоменко блестяще защитил докторскую диссертацию «Решение многомерной проблемы Плато на римановых многообразиях». Ему удалось решить многомерную проблему Плато в классе спектральных поверхностей: доказано существование «геометрического» решения — глобально минимальной поверхности, представимой в виде непрерывного образа спектра многообразий с краем. Эта работа А. Т. Фоменко получила широкое международное признание; он приглашен с пленарным докладом на Международный математический конгресс в Ванкувере (ICM 1974), получил премию Московского математического общества. Написанные А. Т. Фоменко монографии о проблеме Плато неоднократно издавались как у нас в стране, так и за рубежом.

Уже тогда А. Т. Фоменко проявил себя как блестящий организатор науки. Сформировавшаяся к началу 80-х годов вокруг него школа специалистов по топологическим вариационным задачам получила ряд глубоких результатов, связанных с теорией мультиварифолдов, обобщенными формами калибровки, геометрией особенностей минимальных поверхностей, геометрией экстремалей функционала Дирихле, индексами минимальных поверхностей, теорией экстремальных сетей. Среди учеников А. Т. Фоменко в этом направлении работают Дао Чонг Тхи, А. И. Плужников, А. В. Тырин, Ле Хонг Ван, И. С. Новикова, А. О. Иванов, А. А. Тужилин, И. В. Шклянко (Птицына), А. А. Борисенко, М. В. Пронин.

В конце 70-х годов основной темой исследований А. Т. Фоменко стала разработка алгебраических конструкций интегрируемых гамильтоновых систем и теория некоммутативного интегрирования (совместно с А. С. Мищенко). Результаты, полученные в те годы, лежат в основе многих современных исследований интегрируемых гамильтоновых систем на группах Ли и однородных пространствах. Отметим здесь работы таких учеников А. Т. Фоменко как В. В. Трофимов, А. В. Браилов, Ле Нгок Тьеуен, А. В. Болсинов, К. Швая.

Во второй половине 80-х годов А. Т. Фоменко создал теорию топологической классификации интегрируемых гамильтоновых систем. Несмотря на фундаментальный математический характер основных результатов этой теории, она, в отличие от многих других работ в этой области, с самого начала имела в виду приложения к конкретным задачам механики и физики. Оказалось, что техника, развитая в работах А. Т. Фоменко, позволяет эффективно справляться с многочисленными техническими трудностями, возникающими в процессе топологического анализа поведения динамических систем. Эти исследования были удостоены премии Президиума АН СССР в 1987 году. Школой А. Т. Фоменко были разработаны методы вычисления инвариантов интегрируемых гамильтоновых систем, что позволило дать топологическую классификацию многих случаев интегрируемости, известных в математической физике, механике и геометрии. Среди наиболее ярких представителей этой школы А. В. Болсинов, А. А. Ошемков, Нгуен Тьен Зунг, Е. А. Кудрявцева, А. Ю. Коняев, В. С. Матвеев, Л. С. Полякова, Е. В. Аношкина, Е. Н. Селиванова, В. В. Калашников, Б. С. Кругликов, П. Й. Топалов, Н. В. Коровина, О. Е. Орел, Ю. А. Браилов, П. В. Морозов, А. Ю. Москвин, А. С. Воронцов, Т. А. Лепский, М. М. Деркач, А. М. Изосимов, И. К. Козлов, И. Н. Шнурников, Н. С. Славина, О. А. Загрядский, Д. А. Федосеев, В. В. Ведюшкина (Фокичева), Е. О. Кантонистова, М. А. Тужилин, С. С. Николаенко, А. И. Жила.

Начиная с 2015 года А. Т. Фоменко, совместно с В. В. Ведюшкиной, Е. Е. Каргиновой, И. С. Харчевой, В. А. Кибкало, Г. В. Белозеровым, С. Е. Пустовойтовым, В. Н. Завьяловым и другими учениками, активно разрабатывает новое направление — теорию интегрируемых топологических бильярдов. Идея рассматривать «бильярдные столы» сложной геометрии и топологии оказалась чрезвычайно плодотворной и позволила построить новые модели сложных интегрируемых систем, дающие наглядное представление об их поведении. В настоящее время активно обсуждается частично доказанная «бильярдная гипотеза» А. Т. Фоменко об универсальности бильярдных систем.

С 1987 года А. Т. Фоменко возглавляет Отделение математики механико-математического факультета МГУ. В 1990 году он становится член-корреспондентом АН СССР, а уже в 1994 — действительным членом Российской Академии Наук. С 1992 года А. Т. Фоменко возглавляет кафедру дифференциальной геометрии и приложений мехмата МГУ. В 1996 году за цикл работ «Исследование инвариантов гладких многообразий и гамильтоновых динамических систем» он удостоен Государственной Премии Российской Федерации (совместно с

А С Мищенко).

Научные интересы А. Т. Фоменко охватывают широкий круг вопросов современной математики и ее приложений. В 70–90-е годы, вместе с О. В. Мантуровым и Л. В. Сабининым, А. Т. Фоменко руководит Семинаром по векторному и тензорному анализу, вокруг которого концентрируются исследования по дифференциальной геометрии и топологии. Многие годы под руководством В. В. Козлова и А. Т. Фоменко работал исследовательский семинар «Геометрия и Механика», целью которого являлась разработка топологических и геометрических подходов к изучению качественного поведения механических систем. По его инициативе на механико-математическом факультете МГУ была создана лаборатория компьютерных методов в естественных и гуманитарных науках. Он принимал активное участие в организации различных научных семинаров: по квантовым вычислениям (мехмат МГУ), по приложениям геометрических и топологических методов к молекулярной биологии (мехмат и биофак МГУ), Общефакультетского семинара по математике, и др. Также под руководством А. Т. Фоменко, декана биологического факультета М. П. Кирпичникова и профессора К. В. Шайтана при поддержке программы развития МГУ была создана межфакультетская лаборатория структурной биологии. Лаборатория приняла участие в поддержанном РНФ междисциплинарном проекте «Ноев ковчег» и продолжает разрабатывать и изучать математические модели биополимеров. Недавно при участии А. Т. Фоменко была создана Междисциплинарная научная школа «Математические методы анализа сложных систем», в рамках которой математики, физики, химики, биологи, медики вместе решают актуальные прикладные задачи.

А. Т. Фоменко ведет активную педагогическую деятельность. Он много лет бессменно читает курс дифференциальной геометрии и топологии для студентов математиков, а также спецкурс по топологии и и симплектической геометрии, изучаемый студентами кафедры наравне с основными курсами. По его инициативе был организован курс компьютерной геометрии, а также Практикум по компьютерной геометрии, вызывающий большой интерес среди студентов. Также под руководством А. Т. Фоменко был создан новый курс Наглядной геометрии и топологии для всех студентов первого курса мехмата, который позволяет первокурсникам быстрее освоиться и перейти на новый уровень изучения геометрии, познакомиться с целым рядом достаточно сложных, но тем не менее наглядных конструкций, допускающих глубокие обобщения, погрузиться в современную геометрическую проблематику. По его инициативе и при активной поддержке на мехмате недавно был создан новый поток со специализацией «Фундаментальная математика и математическая физика», который уже пользуется устойчивым высоким спросом у абитуриентов. В 2024 году А. Т. Фоменко удостоен премии имени М.В.Ломоносова за педагогическую деятельность.

А. Т. Фоменко — автор более 380 научных работ, множества книг, монографий и учебников, многие из которых выдержали несколько переизданий, были переведены на многие языки мира. Под его руководством защищено 12 докторских и более 60 кандидатских диссертаций.

За многолетний плодотворный труд в 2024 году А.Т.Фоменко был удостоен медали ордена «За заслуги перед Отечеством» второй степени.

Вместе с его многочисленными учениками, коллегами и друзьями, мы желаем Анатолию Тимофеевичу Фоменко крепкого здоровья и новых ярких достижений в его разносторонней научной и педагогической работе.

А. Болсинов, Н. Добровольский, А. Иванов,
Е. Кудрявцева, А. Ошемков, Ф. Попеленский,
А. Тужилин, В. Чубариков, А. Шафаревич, В.А.Мантуров.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 26. Выпуск 2.

УДК 517.938.5 DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-2-7-32

Топология слоений Лиувилля трехмерных биллиардов с проскальзыванием[1]

Г. В. Белозеров, В. Н. Завьялов

Белозеров Глеб Владимирович — Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: gleb0511beloz@yandex.ru
Завьялов Владимир Николаевич — аспирант, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова; Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана; Московский центр Фундаментальной и прикладной математики (г. Москва).
e-mail: vnzavyalov@mail.ru

Аннотация

Рассматриваются биллиарды в трехмерных областях, ограниченных софокусными квадриками, с проскальзыванием на границе. Такие динамические системы являются интегрируемыми по Лиувиллю в кусочно-гладком смысле. В случае двумерных столов класс биллиардов с проскальзыванием был введен А. Т. Фоменко. Для нескольких типов софокусных биллиардов с проскальзыванием определены классы гомеоморфности поверхностей постоянной энергии, построены бифуркационные диаграммы, описана топология слоения Лиувилля малых окрестностей особых и неособых слоев.

Ключевые слова: интегрируемая система, биллиард, интегрирумый биллиард, слоение Лиувилля, бифуркационная диаграмма, проскальзывание.

Библиография: 32 названия.

Для цитирования:
Белозеров Г. В., Завьялов В. Н. Топология слоений Лиувилля трехмерных биллиардов с проскальзыванием // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 2, с. 7–32.

[1]Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда 22-71-00111 в МГУ имени М. В. Ломоносова. Г. В. Белозеров и В. Н. Завьялов являются стипендиатами фонда БАЗИС.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 26. No. 2.

UDC 517.938.5 DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-2-7-32

The topology of Liouville foliations of three-dimensional billiards with slipping

G. V. Belozerov, V. N. Zavyalov

Belozerov Gleb Vladimirovich — Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: gleb0511beloz@yandex.ru
Zavyalov Vladimir Nikolaevich — postgraduate student, Lomonosov Moscow State University; Bauman Moscow State Technical University; Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics (Moscow).
e-mail: vnzavyalov@mail.ru

Abstract

Billiards in three-dimensional confocal domains with slipping along the boundary are considered. Such dynamical systems are Liouville integrable in piecewise-smooth sense. In two-dimensional case, class of billiards with slipping was introduced by A.T.Fomenko. For several types of confocal billiards with slipping the classes of homeomorphism of constant energy surfaces are found, the bifurcation diagrams are constructed and the topology of Liouville foliation in small neighborhoods of singular and non-singular fibers is described.

Keywords: integrable system, billiard, integrable billiard, Liouville foliation, bifurcation diagram, slipping.

Bibliography: 32 titles.

For citation:
Belozerov, G. V., Zavyalov, V. N. 2025, “Topology of Liouville foliations of three-dimensional billiards with slipping” , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 2, pp. 7–32.

1. Введение

Математический биллиард — это задача о движении материальной точки внутри области n-мерного евклидового пространства с абсолютно упругим отражением от границы (т.е. по классическому закону “угол падения равен углу отражения”). Интегрируемость биллиарда внутри эллипса была замечена Дж. Д. Биркгофом в работе [1]. В книге В.В. Козлова и Д. В. Трещева [2] отмечена интегрируемость плоских биллиардов, ограниченных дугами софокусных квадрик. В качестве дополнительного первого интеграла таких систем выступает параметр софокусной квадрики, которой касаются все звенья (или их продолжения) траектории-ломаной. Такие биллиарды были исследованы с точностью до лиувиллевой эквивалентности в работах В. Драговича и М. Раднович [3, 4], а также В. В. Ведюшкиной (Фокичевой) [5, 6, 7].

Важным расширением класса интегрируемых биллиардов стало введение В. В. Ведюшкиной биллиардных книжек — CW-комплексов, склеенных из плоских софокусных областей по их общим гладким дугам границы (см. [8, 9]). При попадании на границу листа (т.е. элементарного плоского биллиардного стола) книжки материальная точка переходит на другой лист согласно перестановке, указанной на ребре границы. Значимым подклассом биллиардных книжек являются топологические биллиарды. Такие книжки имеют на ребрах только циклические перестановки длины 1 или 2 и являются кусочно гладкими двумерными многообразиями.

В классе таких биллиардов В. В. Ведюшкиной и А. Т. Фоменко [11] были промоделированы геодезические потоки на сфере S^2 и торе T^2, обладающие линейным по импульсам дополнительным первым интегралом, а также квадритично интегрируемые геодезические потоки на сфере S^2. Для моделирования квадратичных геодезических потоков на торе были использованы другие биллиардные книжки [10].

Еще одним обобщением плоских биллиардов являются биллиарды с проскальзыванием, введеные А. Т. Фоменко в работе [12]. Отражение у таких биллиардов устроено иначе (см. рис. 1). Частица, попадая на границу стола, отражается и выходит из точки, полученной сдвигом точки удара вдоль границы на некоторое расстояние или, в частном случае софокусных и круговых биллиардов, поворотом на некоторый угол относительно начала координат радиус-вектора точки столкновения частицы с границей стола. В работе [12] была доказана интегрируемость софокусных биллиардов с проскальзыванием в случае, когда угол поворота равняется π. Там же было показано, что биллиардами с проскальзыванием (софокусными и круговыми) топологически моделируются представители каждого из четырех классов геодезических потоков на неориентируемых двумерных поверхностях (проективной плоскости или бутылке Клейна), имеющих дополнительный первый интеграл малой степени, т.е. линейный или квадратичный по импульсам. В работе В. В. Ведюшкиной и В. Н. Завьялова [13] с помощью биллиардов с проскальзыванием были развиты результаты В. В. Ведюшкиной и А. Т. Фоменко [11] по реализации линейных геодезических потоков биллиардами на случай неориентируемых многообразий.

Одним из авторов работы, В.Н.Завьяловым, был предложен и изучен новый подкласс интегрируемых биллиардов с проскальзыванием – т.н. биллиарды с рациональным проскальзыванием [14]. Если комплекс склеен из круговых колец и дисков, а на каждой свободной границе введено проскальзывание на произвольный угол $k\pi/n$, соизмеримый с π, то при движении частицы сохраняется интеграл кругового биллиарда, а изоэнергетическая поверхность остается трехмерным компактным топологическим многообразием (для биллиардных книжек это было показано И.С.Харчевой [15]). В указанном классе удалось промоделировать как различные классы линзовых пространств (получено достаточное условие ее реализуемости биллиардом в диске с проскальзыванием), так и различные значения числовых меток r, n.

Последняя задача представляет большой интерес в контексте гипотезы А. Т. Фоменко о биллиардах [16] и ее локальной версии [17]. Она предполагает реализуемость биллиардами произвольных значений числовых меток (доказана, см. [17, 18] и работы В. В. Ведюшкиной и В. А. Кибкало [19, 20]), а также "меченых подграфов" инварианта Фоменко – Цишанга вблизи своей вершины или ребра. Ряд результатов в этом направлении был недавно получен В. Н. Завьяловым и В. А. Кибкало. Также было бы интересно применить подходы, основанные на биллиардах с проскальзыванием, для моделирования особенностей (атомов) интегрируемых систем, что для боттовских атомов выполнено В. В. Ведюшкиной и И. С. Харчевой, а для неботтовских развивается в недавних работах А. А. Кузнецовой [21].

Аналогично плоскому случаю, классические трехмерные биллиарды (т.е. со стандартным законом отражения), ограниченные конечным числом софокусных квадрик, интегрируемы. Дополнительными первыми интегралами таких систем являются параметры двух софокусных квадрик, которых касаются все звенья (или их продолжения) траектории-ломаной. Биллиард внутри эллипсоида был рассмотрен В. Драговичем и М. Раднович в книге [4]. В этой работе они построили бифуркационную диаграмму и описали регулярные слои этой системы. Классификация трехмерных биллиардных столов в $\mathbb{R}^3$, ограниченных конечным числом софокусных квадрик и имеющих двугранные углы излома на границе равные $\pi/2$, была получена Г. В. Белозеровым в [22]. В этой работе он описал топологию 1-перестроек торов Лиувилля таких систем и показал, что неособая изоэнергетическая поверхность произвольного трехмерного софокусного биллиарда гомеоморфна либо $S^2 \times S^3$, либо $S^1 \times S^4$, либо S^5.

В настоящей работе изучается обобщение биллиардов с проскальзыванием на трехмерный

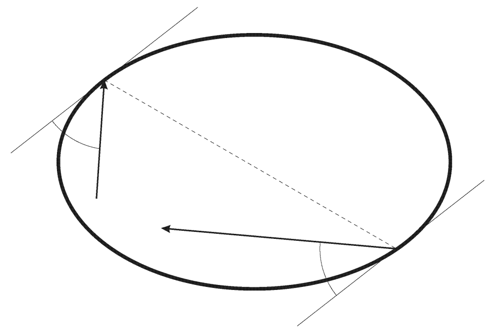


Рис. 1: Динамика частицы при попадании на границу биллиарда с проскальзыванием.

случай. Рассмотрим связный трехмерный биллиардный стол (т.е. компактную область в $\mathbb{R}^3$ с кусочно-гладкой границей), симметричный относительно начала координат и ограниченный конечным числом софокусных квадрик. Все грани этого стола мы разобьем на два класса: с проскальзыванием и с отражением. При попадании на грань с проскальзыванием материальная точка, находившаяся в точке P с вектором скорости v, продолжит движение из точки $-P$ с вектором скорости v', который получается из v путем следующих преобразований: сначала v отражается от касательной плоскости к данной грани в точке P, а затем заменяется на противоположный.

Мы рассмотрим два трехмерных биллиардных стола: область, ограниченную эллипсоидом, а также бесфокусную область, ограниченную тремя софокусными квадриками. Отметим, что первый стол допускает лишь один режим проскальзывания, в то время как второй — в точности семь. На бесфокусном столе мы рассмотрим только те режимы, в которых проскальзывание происходит ровно на одной паре противоположных граней. Для таких бесфокусных биллиардов, а также для биллиарда с проскальзыванием внутри эллипсоида были определены классы гомеоморфности поверхностей постоянной энергии, описаны регулярные слои и их перестройки. Изучено локальное устройство слоений Лиувилля таких систем.

Благодарности. Авторы выражают особую благодарность своему научному руководителю Анатолию Тимофеевичу Фоменко за постановку задачи.

2. Описание задачи. Интегрируемость

Напомним определение и некоторые свойства семейства софокусных квадрик в трехмерном евклидовом пространстве.

Определение 1. *Семейством софокусных квадрик в евклидовом $\mathbb{R}^3$ называется множество квадрик, заданных уравнением*

$$(b-\lambda)(c-\lambda)x^2+(a-\lambda)(c-\lambda)y^2+(a-\lambda)(b-\lambda)z^2=(a-\lambda)(b-\lambda)(c-\lambda), \qquad (1)$$

где $a>b>c$ — фиксированные числа, а λ — вещественный параметр. Если параметр квадрики этого семейства равен a, b или c, то она (квадрика) называется вырожденной, в противном случае — невырожденной.

Замечание 1. *Если $\lambda\in(-\infty,c)$, то соответствующая квадрика является эллипсоидом, если $\lambda\in(c,b)$, то — однополостным гиперболоидом, если $\lambda\in(b,a)$, то — двуполостным гиперболоидом. Вырожденные квадрики — это в точности координатные плоскости. На рисунке 2 изображены три невырожденные софокусные квадрики различных типов.*

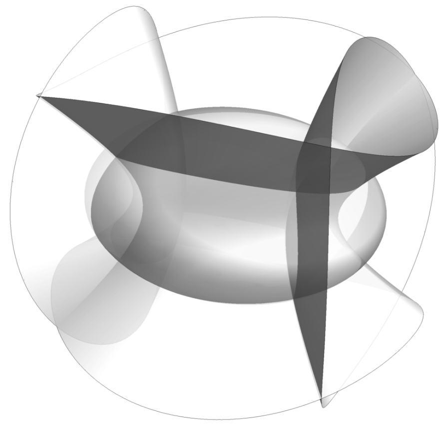


Рис. 2: Три невырожденные софокусные квадрики в $\mathbb{R}^3$: эллипсоид, однополостный и двуполостный гиперболоиды.

К. Якоби, исследуя геодезический поток на эллипсоиде, показал (см. [23]), что через каждую точку $\mathbb{R}^3$ проходит в точности три софокусные квадрики (с учетом кратности). Параметры этих квадрик $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, упорядоченные по возрастанию, образуют тройку функций, называемую *эллиптическими координатами в* $\mathbb{R}^3$. В каждом координатном октанте эллиптические координаты являются однозначными, регулярными и ортогональными.

Семейству софокусных квадрик можно сопоставить две плоские кривые: *фокальный эллипс* $F_1 = \left\{(x, y, 0)\Big| \dfrac{x^2}{a-c} + \dfrac{y^2}{b-c} = 1\right\}$, и *фокальную гиперболу* $F_2 = \left\{(x, 0, z)\Big| \dfrac{x^2}{a-b} - \dfrac{z^2}{b-c} = 1\right\}$. Эллипс F_1 состоит в точности из тех точек, в которых $\lambda_1 = \lambda_2$. Точки гиперболы F_2 удовлетворяют уравнению $\lambda_2 = \lambda_3$.

Теперь опишем конфигурационное пространство системы, которую мы будем изучать.

Определение 2. *Трехмерным биллиардным столом будем называть связное компактное множество с непустой внутренностью, ограниченное конечным числом софокусных квадрик и имеющее двугранные углы излома на границе, равные* $\pi/2$.

Среди всех трехмерных биллиардных столов выделим класс тех, с которыми мы будем работать.

Определение 3. *Трехмерный биллиардный стол D будем называть допустимым, если он центрально симметричен.*

На рисунке 3 изображены два допустимых биллиардных стола, которым будет посвящена бо́льшая часть настоящей работы: a —область, ограниченная эллипсоидом, b — стол, ограниченный тремя различными софокусными квадриками. Отметим, что второй стол не пересекается с фокальными кривыми. В связи с этим мы будем называть его *бесфокусным*.

Пусть D — допустимый биллиардный стол, F_D — множество его гладких 2-граней, а A — оператор центральной симметрии в $\mathbb{R}^3$. Отметим, что в силу определения 3 корректно определено действие оператора A на множестве F_D. Пусть F — непустое инвариантное подмножество F_D относительно A. Рассмотрим следующую динамическую систему. Материальная точка единичной массы движется внутри допустимого биллиардного стола D равномерно и прямолинейно, преобразуя свое движение на границе D по следующему правилу.

- Если материальная точка попала в точку P гладкой 2-грани $f \notin F$ с вектором скорости v, то отражение от границы в этом случае происходит классическому биллиардному закону.

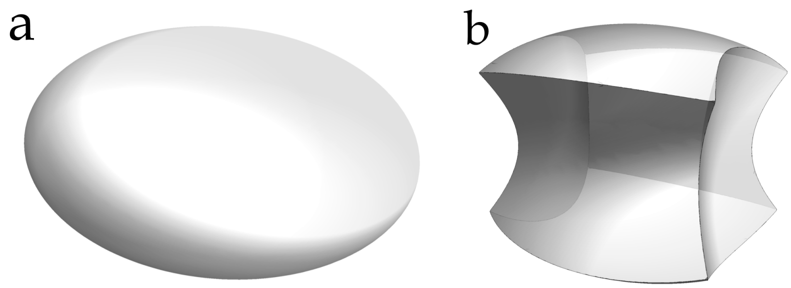


Рис. 3: Примеры допустимых биллиардных столов: a — область, ограниченная эллипсоидом, b — бесфокусная область, ограниченная тремя квадриками различных типов.

То есть материальная точка отражается от P с вектором скорости $v' = v - 2(v, n_f)n_f$, где n_f — единичный вектор нормали к грани f в точке P.

- Если материальная точка попала в точку P гладкой 2-грани $f \in F$ с вектором скорости v, то в этот же момент времени она “перескакивает” в точку AP (грани Af) и продолжает свое движение с вектором скорости $v' = Av - 2(Av, n_f)n_f$, где n_f — единичный вектор нормали к грани f в точке P.

Такую динамическую систему мы будем называть *трехмерным биллиардом с проскальзыванием.*

Отметим, что биллиардный стол, ограниченный эллипсоидом, допускает единственное проскальзывание, в то время как бесфокусный стол (изображенный на рис. 3.b), допускает 7 режимов проскальзывания. Действительно, у этого стола 3 пары центрально симметричных граней. Поэтому количество типов проскальзывания на нем равно $2^3 - 1$, т.е 7.

На самом деле, описание системы, представленное выше, определяет ее не во всех точках конфигурационного пространства. В частности, неизвестна динамика частицы попавшей на стык двух или трех гладких 2-граней. Тем не менее, движение частицы в таких точках можно доопределить по непрерывности.

Предложение 1. *Система трехмерного биллиарда с проскальзыванием может быть корректно доопределена во всех точках конфигурационного пространства.*

Доказательство. Покажем, что в точках стыка двух гладких граней границы стола доопределение по непрерывности возможно. Для точек, в которых пересекаются три гладких грани, рассуждения будут аналогичными.

Пусть в точке P смыкаются грани f и g. Тогда возможны три варианта: $f, g \notin F$; $f, g \in F$; $f \in F, g \notin F$. Рассмотрим каждый из этих случаев.

1. Пусть $f, g \notin F$, тогда в граничных точках стола близких к P происходит отражение. Покажем сначала, что операторы отражений A_f и A_g от граней f и g в точке P соответственно коммутируют друг с другом. Пусть n_f, n_g — внешние единичные нормали к граням f и g в точке P. Поскольку софокусные квадрики пересекаются под прямым углом, векторы n_g и n_f ортогональны друг другу, т.е. $(n_g, n_f) = 0$. Тогда $\forall v \in T_P\mathbb{R}^3$ имеем

$$A_f \circ A_g(v) = A_f(v - 2(v, n_g)n_g) = v - 2(v, n_f)n_f - 2(v, n_g)n_g + 4(v, n_g)(n_g, n_f) =$$
$$= v - 2(v, n_f)n_f - 2(v, n_g)n_g = A_g \circ A_f(v).$$

Коммутативность A_f и A_g доказана.

Используя этот факт покажем существование и единственность доопределения биллиардного закона в точках стыка f и g. Пусть в точку P попала частица с вектором скорости v. В таком случае, рассмотрим близкую траекторию материальной точки с тем же вектором скорости. Поскольку n_f и n_g — внешние нормали, углы между v и n_f, v и n_g острые. Предположим, что близкая траектория сначала отразится от грани f. Тогда, после отражения угол между вектором скорости v' и n_f станет тупым, а между v' и n_g останется по-прежнему острым. Так как все двугранные углы излома на границе стола равны $\pi/2$, далее частица будет двигаться по направлению к грани g и через малое время должна от нее отразиться.

Отсюда становится ясным, что в пределе, т.е. при стремлении к точке P, отраженный вектор v'' будет получаться из v путем последовательных отражений от граней f и g, причем порядок отражений может быть произвольным. Поскольку операторы отражений от гранией f и g коммутируют, поведение материальной точки в точках излома границы однозначно определено.

2. Пусть теперь $f, g \in F$. Проверим коммутативность проскальзываний на этих гранях. Этого условия снова будет достаточно для корректного доопределения траектории в точке P. При проскальзании через грань f точка P перейдет в AP, а вектор v скорости в $v' = Av - (v, n_f)n_f$. При проскользывании через грань g точка AP вернется в P, а вектор v' преобразуется к v'' по правилу: $v'' = Av' - (v', n_g)n_g$. Отсюда заключаем, что

$$v'' = A(Av - (v, n_f)n_f) - (Av - (v, n_f)n_f, n_g)n_g = v + (v, n_f)n_f + (v, n_g)n_g.$$

Последняя формула симметрична относительно n_f и n_g. Следовательно, проскальзывания коммутируют.

3. Этот случай проверяется аналогично предыдущим. Предложение доказано. □

Таким образом, трехмерный биллиард с проскальзыванием — корректно определенная динамическая система. Опишем ее фазовое пространство. Рассмотрим $\widehat{M}^6 = \{(x, v) | x \in D, v \in T_x\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}\} \subset T\mathbb{R}^3$ со стандартной топологией. На множестве пар точка-вектор $(x, v) \in \widehat{M}^6$, где x лежит на границе биллиардного стола D, введем отношение эквивалентности $\sim$, определяющее динамику частицы в граничных точках D. Множество $M^6 = \widehat{M}^6 / \sim$, наделенное фактор-топологией, и есть *фазовое пространство трехмерного биллиарда с проскальзыванием*. Отметим, что функция $H = \|v\|^2/2$ является первым интегралом трехмерного биллиарда с проскальзыванием, непрерывно зависящим от точки M^6.

Фазовое пространство M^6 трехмерного биллиарда с проскальзыванием является, вообще говоря, кусочно-гладким многообразием. Обозначим через $\widetilde{M}^6$ объединение гладких кусков M^6. Отметим, что на $\widetilde{M}^6$ корректно определена форма $\omega = dv_x \wedge dx + dv_y \wedge dy + dv_z \wedge dz$ (здесь v_x, v_y, v_z — компоненты вектора скорости в декартовых координатах), которая обладает непрерывным пределом в точках излома M^6 (т.е. на границе стола D). Для таких систем А. Т. Фоменко было предложено понятие *гамильтонова сглаживания*. Будем говорить, что на M^6 задана *интегрируемая по Лиувиллю гамильтонова система* (в кусочно-гладком смысле) с функцией Гамильтона H, если

1. на $\widetilde{M}^6$ динамика точки определяется векторным полем
$$\operatorname{sgrad} H = \omega^{ij} \frac{\partial H}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j};$$
2. существуют непрерывные на M^6 и гладкие на $\widetilde{M}^6$ функции F_1, F_2 такие, что набор H, F_1, F_2 является инволютивным и функционально независимым в $\widetilde{M}^6$.

В некоторых случаях удается ввести гладкую структуру во всех точках "излома" многообразия M^6 так, что форма ω и функции H, F_1, F_2 тоже становились бы гладкими. Вопрос сглаживания многообразия M^6 рассматривался В. Лазуткиным [25] и Е. А. Кудрявцевой [26].

Предложение 2. *Трехмерный биллиард с проскальзыванием является интегрируемой системой в кусочно-гладком смысле.*

Доказательство. Действительно, рассмотрим классический биллиард (т.е. без проскальзывания) внутри допустимого биллиардного стола. Согласно теореме Якоби-Шаля такая динамическя система является интегрируемой. Ее первыми интегралами являются кинетическая энергия H, а также параметры двух квадрик $\Lambda_1 \geqslant \Lambda_2$ софокусных с границей стола, которых касаются все прямолинейные участки траектории или их продолжения. Покажем, что эти же функции H, Λ_1, Λ_2 являются первыми интегралами рассматриваемой задачи.

Если прямая, проведенная из точки $P \in f$ в направлении вектора v касается софокусной квадрики Q, то прямая, проведенная из этой же точки в направлении вектора $v' = v - 2(v, n_f)n_f$, также касается Q (это следует из интегрируемости классического софокусного биллиарда). Однако при проскальзывании точка P переходит в $AP = -P$, а вектор v в $Av - 2(Av, n_f)n_f$, т.е. в $Av' = -v'$. Остается заметить, что уравнения софокусных квадрик не содержат линейной части, а следовательно, если прямая из точки P с вектором скорости v' касается Q, то прямая, проведенная из точки AP с направляющим вектором Av', также касается Q. $\square$

Замечание 2. *При различных положительных значениях h_i энергии H система биллиарда на изоэнергетических поверхностях $Q^5_{h_i} = \{(x, v) \in M^6 | H(x, v) = h\}$ "устроена одинаково". Действительно, увеличивая или уменьшая энергию материальной точки, мы изменяем скорость ее движения, не меняя при этом траектории на столе. Поэтому далее мы будем рассматривать биллиарды в ограничении на их изоэнергетические поверхности.*

В заключении параграфа напишем уравнения движения трехмерного биллиарда с проскальзыванием на изоинтегральной поверхности $H = h, \Lambda_1 = l_1, \Lambda_2 = l_2$. Для этого рассмотрим функции $I_1 = H(\Lambda_1 + \Lambda_2)$ и $I_2 = H\Lambda_1\Lambda_2$. Они тоже являются первыми интегралами нашей задачи и в декартовых координатах вычисляются по формулам:

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \frac{b+c}{2}\dot{x}^2 + \frac{a+c}{2}\dot{y}^2 + \frac{a+b}{2}\dot{z}^2 - \frac{1}{2}\left(K_x^2 + K_y^2 + K_z^2\right),\\
I_2 &= \frac{bc}{2}\dot{x}^2 + \frac{ac}{2}\dot{y}^2 + \frac{ab}{2}\dot{z}^2 - \frac{1}{2}\left(aK_x^2 + bK_y^2 + cK_z^2\right),
\end{aligned}
$$

где K_x, K_y, K_z — компоненты вектора кинетического момента. Эти формулы легко получить, выписав условие касания квадрик.

Переходя к эллиптическим координатам $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ и сопряженным им импульсам (p_1, p_2, p_3), преобразуем функции H, I_1, I_2 к следующему виду.

$$
\begin{aligned}
H =& 2\frac{(a-\lambda_1)(b-\lambda_1)(c-\lambda_1)}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)}p_1^2 + 2\frac{(a-\lambda_2)(b-\lambda_2)(c-\lambda_2)}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_2)}p_2^2 + 2\frac{(a-\lambda_3)(b-\lambda_3)(c-\lambda_3)}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}p_3^2,\\
I_1 =& 2\frac{(\lambda_2+\lambda_3)(a-\lambda_1)(b-\lambda_1)(c-\lambda_1)}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)}p_1^2 + 2\frac{(\lambda_1+\lambda_3)(a-\lambda_2)(b-\lambda_2)(c-\lambda_2)}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_2)}p_2^2 +\\
&+2\frac{(\lambda_1+\lambda_2)(a-\lambda_3)(b-\lambda_3)(c-\lambda_3)}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}p_3^2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_2 =& 2\frac{\lambda_2\lambda_3(a-\lambda_1)(b-\lambda_1)(c-\lambda_1)}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)}p_1^2 + 2\frac{\lambda_1\lambda_3(a-\lambda_2)(b-\lambda_2)(c-\lambda_2)}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_2)}p_2^2\\
&+2\frac{\lambda_1\lambda_2(a-\lambda_3)(b-\lambda_3)(c-\lambda_3)}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}p_3^2,
\end{aligned}
$$

Отсюда с учетом уравнений Гамильтона приходим к следующим уравнениям движения.

$$
\dot{\lambda}_i = \pm\frac{2\sqrt{2}}{(\lambda_i - \lambda_j)(\lambda_i - \lambda_k)}\sqrt{\left(H\lambda_i^2 - I_1\lambda_i + I_2\right)(a-\lambda_i)(b-\lambda_i)(c-\lambda_i)}.
$$

Ввиду зависимости I_1, I_2 от Λ_1 и Λ_2 получаем уравнения движения на изоинтегральной поверхности.

$$\dot{\lambda}_i = \pm \frac{2\sqrt{2}}{(\lambda_i - \lambda_j)(\lambda_i - \lambda_k)} \sqrt{h(\lambda_i - l_1)(\lambda_i - l_2)(a - \lambda_i)(b - \lambda_i)(c - \lambda_i)}. \tag{2}$$

Эти формулы нам понадобятся в дальнейшем.

Далее мы остановимся на двух видах трехмерных биллиардов: биллиард с проскальзыванием внутри эллипсоида, а также биллиард внутри бесфокусного стола с проскальзыванием на одной паре противоположных граней. Для каждой из этих систем в следующем параграфе мы определим топологические типы поверхностей постоянной энергии, после чего, в четвертом и пятом параграфах опишем локальное устройство их слоений Лиувилля.

3. Топология изоэнергетических поверхностей

В настоящем параграфе мы определим классы гомеоморфности изоэнергетических поверхностей Q^5 биллиарда с проскальзыванием внутри эллипсоида, а также биллиарда в бесфокусной области с проскальзыванием на одной паре противоположных граней.

Чем примечательны эти системы? Конфигурационные пространства таких биллиардов естественным образом двулистно накрываются конфигурационными пространствами других известных интегрируемых гамильтоновых систем.

Действительно, конфигурационное пространство биллиарда внутри эллипсоида есть трехмерное проективное пространство $\mathbb{R}P^3$, которое получается факторизацией трехмерной сферы S^3 по инволюции центральной симметрии. Для того чтобы явно описать это накрытие, склеим две одинаковых области D_1 и D_2, ограниченные эллипсоидом, по их границе. В результате мы получим комплекс X, гомеоморфный трехмерной сфере. Заметим, что X не что иное, как (простейшая) трехмерная биллиардная книжка. Инволюцию α на этом комплексе зададим так: если $P \in D_1$, то через $\alpha(P)$ объявим точку центрально симметричную точке P, лежащую на листе D_2, и наоборот. При этом, отметим, что факторизация произвольной биллиардной траектории на X есть траектория биллиарда с проскальзыванием внутри эллипсоида. Это означает, что инволюция α продолжается до инволюции на изоэнергетической поверхности $\tilde{Q}^5$ биллиарда на книжке X, а фактор по этой инволюции есть изоэнергетическая поверхность Q^5 биллиарда с проскальзыванием внутри эллипсоида.

Аналогичные соображения сработают и для бесфокусного биллиарда с проскальзыванием. Для этого нужно рассмотреть две копии такого стола и склеить их по соответствующим участкам границы, на которых определено проскальзывание. Применим эти рассуждения для нахождения топологических типов поверхностей Q^5.

Теорема 1. *Изоэнергетическая поверхность Q^5 биллиарда с проскальзыванием внутри эллипсоида гомеоморфна почти прямому произведению $(S^3 \times S^2)/\mathbb{Z}_2(\alpha)$, где инволюция α действует на сомножителях центральной симметрией.*

Доказательство. Заметим, что конфигурационное и фазовое пространства геодезического потока на стандартной трехмерной сфере гомеоморфны соответствующим пространствам биллиарда на трехмерной книжке X, описанной выше. Поэтому если рассмотреть геоедезический поток на стандартной сфере S^3, а затем отождествить пары $(P, v), (-P, -v)$ для всех $P \in S^3, v \in T_P S^3$, то фазовое пространство этой системы будет гомеоморфно Q^5.

Поскольку сфера S^3 — группа Ли (изоморфная $SU(2)$), многообразие $M = \{(g, v) | g \in SU(2), v \in T_g SU(2), \|v\| = 1\}$ единичных касательных векторов к ней диффеоморфно прямому произведению двумерной и трехмерной сфер. Действительно, этот диффеоморфизм φ можно построить так: $\forall g \in SU(2), v \in T_g SU(2), \|v\| = 1$ положим

$$\varphi(g, v) = (g, dL_{g^{-1}}v) \in SU(2) \times S^2 \cong S^3 \times S^2,$$

где через $L_{g^{-1}}$ обозначен левый сдвиг группы $SU(2)$ на элемент g^{-1}.

Склейка диаметрально противоположных точек на сфере S^3 эквивалентна факторизации группы $SU(2)$ по подгруппе $\mathbb{Z}_2 = \langle -E \rangle$ (т.е. порожденной матрицей $-E$). Эта подгруппа действует и на фазовом пространстве, и на поверхностях постоянной энергии геодезического потока на сфере S^3. Ее действие как раз и порождает склейку пар точка-вектор, описанную выше. Остается заметить, что в силу коммутативности этой подгруппы $\langle -E \rangle$ в $SU(2)$ она действует на произведении $S^3 \times S^2$ центральной симметрией на обоих сомножителях. $\square$

Теперь определим классы гомеоморфности изоэнергетических поверхностей биллиардов с проскальзыванием на бесфокусном столе. Для этого, как и в случае эллипсоида, упростим конфигурационное пространство системы. Вместо бесфокусного стола мы можем рассмотреть куб, одной паре граней которого сопоставим эллипсоид границы, второй — однополостный гиперболоид, третьей — двуполостный гиперболоид. Нетрудно убедиться, что при таком преобразовании фазовое пространство и изоэнергетическая поверхность не изменят класс гомеоморфности.

Теорема 2. *Изоэнергетическая поверхность Q^5 биллиарда в бесфокусной области с проскальзыванием на одной паре противоположных гранией гомеоморфна почти прямому произведению $(S^1 \times S^4)/\mathbb{Z}_2(\alpha)$, где инволюция α действует на каждом сомножителе центральной симметрией.*

Доказательство. Как было отмечено выше, мы можем рассматривать биллиард внутри куба, на одной паре граней которого задано проскальзывание. Заметим, что фазовое пространство (а также изоэнергетические поверхности) рассматриваемого биллиарда двулистно накрывается фазовым пространством (соответственно изоэнергетическими поверхностями) биллиарда внутри трехмерной области D, получаемой следующим образом. Рассмотрим два одинаковых прямоугольных параллелепипеда, выберем на каждом из них по одной паре противоположных граней, а затем склеим эти параллелепипеды по выбранным граням.

Отметим, что область D представляет собой полноторие, которое получается вращением квадрата вдоль некоторой оси. Обозначим это полноторие через K. Мы утверждаем, что изоэнергетическая поверхность $\tilde{Q}^5$ биллиарда внутри K гомеоморфна прямому произведению окружности и четырехмерной сферы. Тот факт, что $\tilde{Q}^5$ обладает тривиальным S^1 расслоением, является довольно очевидным. Действительно, полноторие K обладает тривиальным S^1 расслоением и на каждом его слое ограничение $\tilde{Q}^5$ "устроено одинаково". Остается показать, что ограничение $\tilde{Q}^5$ на каждый такой слой полнотория K гомеоморфно сфере S^4. Опишем устройство этого ограничения.

Рассмотрим в $\mathbb{R}^3$ плоский квадрат $R = \{(x, y, z) \,|\, |x| \leqslant 1, |y| \leqslant 1, z = 0\}$. В каждой точке этого квадрата рассмотрим единичную сферу касательных векторов со следующим отношением эквивалентности на границе R:

$$(P, v) \sim (P, v'), \qquad \text{где } P \in \partial R,\ \ v, v' \in T_P\mathbb{R}^3,\ \ \|v\| = \|v'\| = 1,\ \ v - v' \,||\, (0, 0, 1).$$

Введем на этом множестве фактор-топологию и обозначим получившееся топологическое пространство через Q'. По построению ясно, что $\tilde{Q}^5 \cong S^1 \times Q'$.

На пространстве Q' определена и непрерывна функция f, которая паре точка-вектор $(P, v) \in Q'$ сопоставляет третью координату вектора v. Функция f принимает значения на отрезке $[-1, 1]$ и ее поверхности уровня $f^{-1}(t)$ гомеоморфны друг другу при $t \in (-1, 1)$. При этом, $f^{-1}(1)$ и $f^{-1}(-1)$ гомеоморфны двумерным дискам. Заметим, что $f^{-1}(0)$ есть изоэнергетическая поверхность биллиарда внутри квадрата R. Поэтому согласно результатам В. В. Ведюшкиной поверхность $f^{-1}(0)$ гомеоморфна трехмерной сфере S^3.

Итак, согласно приведенным выше результатам для всех $t \in (-1, 1)$ поверхность $f^{-1}(t)$ гомеоморфна трехмерной сфере S^3, а при $t = \pm 1$ — двумерному диску. Отсюда заключаем, что Q' гомеоморфна четырехмерной сфере S^4 (трехмерные сферы стягиваются к двумерным дискам). Более строгое доказательство этого факта читатель может найти в [24].

Итак, мы показали, что $\tilde{Q}^5 \cong S^1 \times S^4$, а следовательно, $Q^5 = (S^1 \times S^4)/\mathbb{Z}_2$. Осталось описать действие факторизующей инволюции. Совершенно ясно, что она склеивает диаметрально противоположное точки окружности. Чуть менее очевидно устроена инволюция на сфере S^4. Тем не менее, аккуратно выписав условия склейки области D, можно убедится, что и на S^4 группа $\mathbb{Z}_2$ склеивает диаметрально противоположные точки. Таким образом, теорема доказана. □

4. Биллиард внутри эллипсоида с проскальзыванием

Цель настоящего параграфа — изучить топологию слоения Лиувилля биллиарда с проскальзыванием внутри эллипсоида. Согласно замечанию 2 на различных поверхностях постоянной энергии Q^5_h слоение Лиувилля этой системы устроено одинаково. Поэтому мы зафиксируем уровень $h = 1$ и опишем топологию слоения Лиувилля на Q^5_1. Далее нижний индекс у Q^5_1 писать не будем ввиду его неинформативности.

Без ограничения общности можем считать, что параметр c семейства софокусных квадрик положителен. Рассмотрим биллиард с проскальзыванием внутри эллипсоида параметра 0. Отметим, что траектория биллиардного стола не может касаться двух софокусных квадрик положительной гауссовой кривизны. Следовательно, дополнительные первые интегралы Λ_1 и Λ_2 нашего биллиарда удовлетворяют следующим ограничениям: $\Lambda_1 \geqslant \Lambda_2$, $\Lambda_1 \in [c, a]$, $\Lambda_2 \in [0, b]$. Отсюда заключаем, что образ отображения момента $\mathcal{F} : Q^5 \to \mathbb{R}^2(\Lambda_1, \Lambda_2)$ представляет собой многоугольник, изображенный на рисунке 4а.

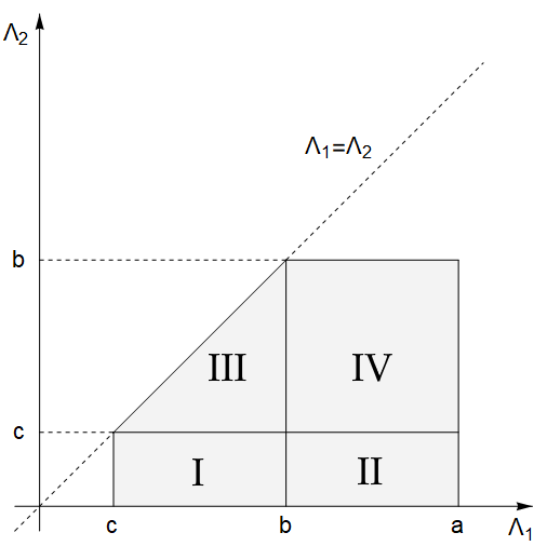
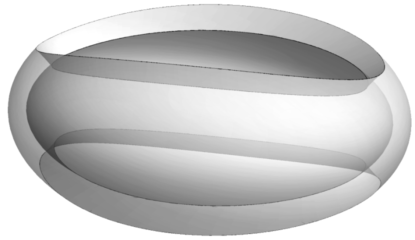
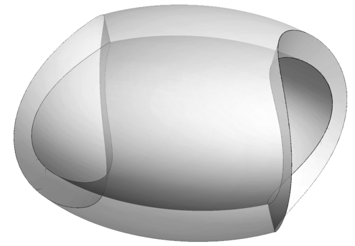
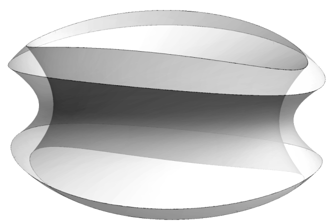
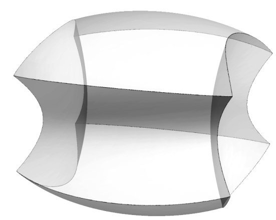


Рис. 4: Образ отображения момента $\mathcal{F} : Q^5 \to \mathbb{R}^2(\Lambda_1, \Lambda_2)$ трехмерного биллиарда с проскальзыванием внутри эллипсоида. Черными сплошными линиями выделена бифуркационная диаграмма. Римскими цифрами пронумерованы камеры диаграммы.

Заметим, что вид области возможного движения (далее ОВД) может измениться либо на прямых $\Lambda_1 = b$, $\Lambda_2 = c$, либо на границе образа отображения момента. Действительно, на прямых $\Lambda_1 = b$, $\Lambda_2 = c$ меняется тип квадрики-каустики, а на границе образа отображения момента появляются/исчезают слои системы. Таким образом, граница образа отображения момента, а также отрезки прямых $\Lambda_1 = b$, $\Lambda_2 = c$ составляют *бифуркационную диаграмму* нашего биллиарда. Точки образа отображения момента, не лежащие на бифуркационной диаграмме, будем называть *регулярными.* Слои Лиувилля, отвечающие регулярным точкам, тоже будем называть *регулярными.*

Исходя из уравнений 2, опишем типичные области возможного движения. Все они представлены в таблице 1. Каждая из них отвечает ровно одной камере бифуркационной диаграммы. Нумерация ОВД совпадает с нумерацией соответствующих камер.

Таблица 1: Области возможного движения общего положения

I $0 < \Lambda_2 < c < \Lambda_1 < b$ 	**II** $0 < \Lambda_2 < c < b < \Lambda_1 < a$ 
III $c < \Lambda_2 < \Lambda_1 < b$ 	**IV** $c < \Lambda_2 < b < \Lambda_1 < a$ 

Следующая теорема описывает устройство слоения Лиувилля в окрестности регулярных слоев.

Теорема 3. *Регулярные слои трехмерного биллиарда с проскальзыванием внутри эллипсоида гомеоморфны трехмерному тору. Слоение Лиувилля вблизи регулярных слоев тривиально.*

Доказательство. Обусловимся нумеровать камеры бифуркационной диаграммы номерами соответствующих им типов областей возможного движения из таблицы 1. Мы докажем теорему для точек камеры I. Остальные случаи разбираются аналогично.

Пусть $P = (l_1, l_2) \in \mathrm{I}$. Обозначим через D_P соответствующую ОВД, а через T_P — поверхность совместного уровня, отвечающего точке P. В каждой точке $x \in D_P$ рассмотрим все векторы v такие, что $(x, v) \in T_P$. Согласно уравнениям движения 2 каждой внутренней точке D_P, не лежащей ни в одной из координатных плоскостей, отвечают в точности 8 таких векторов. Действительно, в этих точках эллиптические координаты удовлетворяют ограничениям $\lambda_1 \in (0, l_1)$, $\lambda_2 \in (c, l_2)$, $\lambda_3 \in (b, a)$, а следовательно, $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$. Более подробный анализ показывает, что оставшимся внутренним точкам области D_P также отвечают 8 векторов скорости.

В каждой гладкой грани границы области D_P в силу биллиардного закона и уравнений 2 возникают в точности 4 пары неэквивалентных векторов, в то время как на ребрах излома — 2 пары.

Используя знания о расположении векторов скорости в точках ОВД, опишем слой T_P. Для этого введем обозначения векторов скорости внутренних точек области D_P, не лежащих в координатных плоскостях. Отметим, что плоскости $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ разбивают D_P на 8 компонент связности. Рассмотрим произвольную точку любой из этих восьми компонент. Тогда каждый касательный вектор в ней можно однозначно закодировать набором знаков $\left(\operatorname{sign}\dot\lambda_1, \operatorname{sign}\dot\lambda_2, \operatorname{sign}\dot\lambda_3\right)$. Занумеруем также координатные октанты: через $(>,<,>)$ будем обозначать октант $x > 0$, $y < 0$, $z > 0$ и т.д. Используя эту кодировку, заполним таблицу обозначений.

Таблица 2: Ваша таблица

	$(+,+,+)$	$(-,+,+)$	$(-,-,+)$	$(+,-,+)$	$(+,+,-)$	$(-,+,-)$	$(-,-,-)$	$(+,-,-)$
$(>,>,>)$	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
$(<,>,>)$	v_5	v_6	v_7	v_8	v_1	v_2	v_3	v_4
$(>,>,<)$	v_2	v_1	v_3	v_3	v_6	v_5	v_8	v_7
$(<,>,<)$	v_6	v_5	v_8	v_7	v_2	v_1	v_3	v_3
$(>,<,>)$	v_4	v_3	v_2	v_1	v_8	v_7	v_6	v_5
$(<,<,>)$	v_8	v_7	v_6	v_5	v_4	v_3	v_2	v_1
$(>,<,<)$	v_3	v_4	v_1	v_2	v_7	v_8	v_5	v_6
$(<,<,<)$	v_7	v_8	v_5	v_6	v_3	v_4	v_1	v_2

Отметим, что одному и тому же набору знаков мы сопоставили разные обозначения векторов. Однако такая нумерация выбрана не случайно. Все дело в том, что векторные поля v_i можно непрерывно продолжить на все множество D_P. Более того, продолжения векторных полей v_i будут гладкими внутри D_P.

Векторные поля $v_1, \dots, v_8$ разбивают поверхность T_P на 8 компонент связности, каждая из которых гомеоморфна области D_P. Обозначим эти компоненты через $D_1, \dots, D_8$ соответственно. В силу биллиардного отражения, а также устройства D_P заключаем, что D_1 и D_4, D_2 и D_3, D_5 и D_8, D_6 и D_7 отождествляются на внутренней эллиптической границе, а D_1 и D_2, D_3 и D_4, D_5 и D_6, D_7 и D_8 — на гиперболических. В силу проскальзывания на границе стола D_1 и D_4, D_2 и D_3, D_5 и D_8, D_6 и D_7 склеиваются с "перекруткой" (точка x на большой эллиптической границе D_i отождествляется с точкой $-x \in D_j$). При склейке областей D_i по соответствующим границам, получим два трехмерных тора T^3, которые будут составлены из компонент $D_1, \dots, D_4$ и $D_5, \dots, D_8$. Таким образом, первую часть теоремы мы доказали.

Осталось отметить, что при малом изменении точки P область возможного движения не поменяет свой тип, а векторные поля v_i будут непрерывно меняться. Значит, вблизи T_P слоение Лиувилля тривиально. Что и требовалось доказать. □

Замечание 3. *Таким образом, для биллиарда с проскальзыванием внутри эллипсоида выполнен кусочно-гладкий аналог теоремы Лиувилля. Отметим, что рассуждения в доказательстве теоремы 3 справедливы не только для эллипсоида но и для других допустимых биллиардных столов.*

Теперь опишем топологию слоения Лиувилля вблизи нерегулярных слоев. Для этого напомним понятие 2-атома, введенное А. Т. Фоменко (см., например, [27]).

Определение 4. *Пусть $f = c$ — критическое значение функции Морса на компактном ориентируемом многообразии M^2. Пусть $\varepsilon > 0$ выбрано так, что на отрезке $[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$ точка c является единственным критическим значением f. Связная компонента множества $f^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon])$, расслоенная на линии уровня функции f, называется 2-атомом.*

Замечание 4. *Все 2-атомы рассматриваются с точностью до послойного диффеоморфизма.*

Приведем несколько примеров 2-атомов. Согласно лемме Морса в окрестности невырожденной особой точки P функция f приводится к виду $f = f(P) \pm x^2 \pm y^2$. Поэтому, если P — точка минимума или максимума, 2-атом, отвечающий ей, представляет собой круг, расслоенный семейством концентрических окружностей (см. рис. 5.a). Такой атом называется 2-*атомом* A. Атомов, отвечающих седловым особенностям, бесконечно много. В настоящей работе нам понадобятся только два из них: B и C_2. Они изображены на рисунках 5.b и 5.c соответственно. Отметим, что атомы B и C_2 являются центрально симметричными.

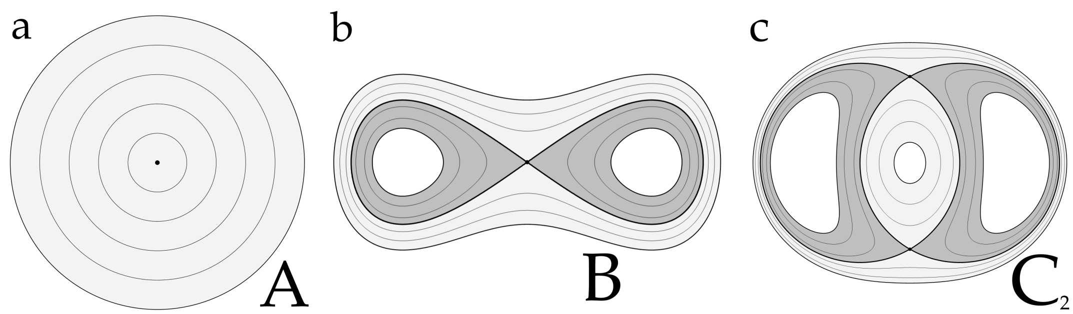


Рис. 5: Примеры 2-атомов: a) A; b) B; c) C_2.

Согласно результатам Н. Т. Зунга, слоение Лиувилля в окрестности многих седловых невырожденных особенностей представимо в виде почти прямого произведения 2-атомов (см., например, [28]). Для произвольных невырожденных особенностей сложности 1 систем с 2 степенями свободы реализация их топологических инвариантов в классе биллиардных книжек с потенциалом Гука была выполнена в работе В.А.Кибкало и А.Т.Фоменко [29]. Реализация произвольных полулокальных фокусных особенностей системы с 2 степенями свободы также была получена в [30]. Оказывается, аналогичное представление справедливо для невырожденных особенностей биллиарда с проскальзыванием внутри эллипсоида.

Заметим, что на бифуркационной диаграмме имеется ровно одна точка типа *крест*: (b, c) (см. рис. 4). Если мы опишем слоение Лиувилля вблизи слоя, отвечающего этой точке, то будет ясно, какие бифуркации происходят на прямых $\Lambda_1 = b$ и $\Lambda_2 = c$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Малая окрестность слоя, отвечающего точке (b, c), в Q^5 послойно гомеоморфна произведению $S^1 \times \dfrac{C_2 \times C_2}{\mathbb{Z}_2(\alpha)}$, где инволюция α действует центральной симметрией на каждом из 2-атомов.*

Доказательство. Обозначим точку креста (b, c) через P, слой слоения Лиувилля, соответствующий ей — через T_P, а малую замкнутую окрестность слоя T_P — через U. Точке P отвечают две критические окружности, возникающие при движении частицы вдоль оси Ox (по и против ее направления). Окружность, соответствующую движению материальной точки в направлении оси Ox, обозначим через $\gamma(P)$. Оказывается, что на близких к T_P торах Лиувилля $T_{P'}$ можно выбрать базисный цикл $\gamma(P')$, гомологичный $\gamma(P)$, который при стремлении P' к P перейдет в $\gamma(P)$. Это наглядно показано на рисунке 6 для всех четырех видов торов Лиувилля близких к T_P.

На самом деле, этот факт говорит о наличии тривиального S^1 расслоения окрестности U. Ниже мы схематично докажем его с помощью переменных действия.

Из результатов В.Ф.Лазуткина [25] следует (см. также работу Е.А.Кудрявцевой [26]), что биллиард с проскальзыванием внутри эллипсоида является сглаживаемой системой, а формы

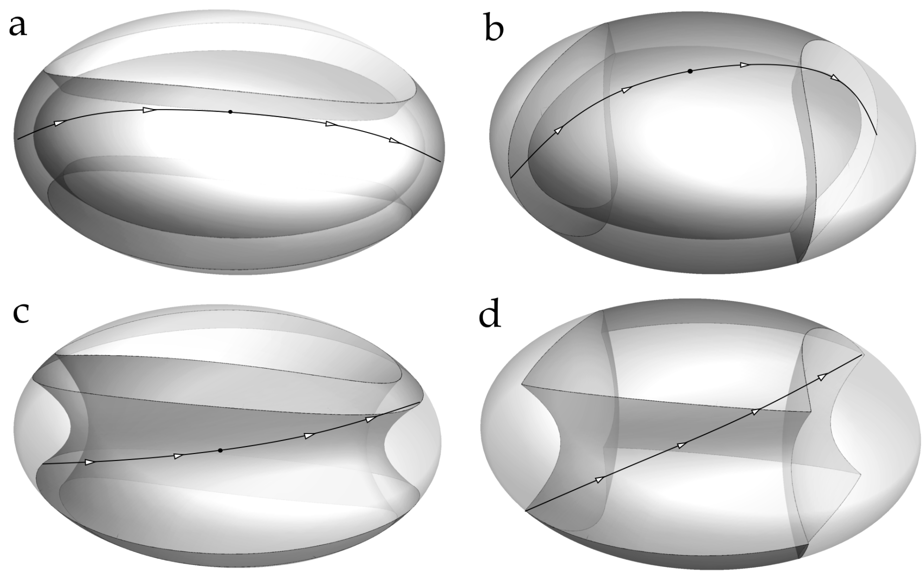


Рис. 6: Цикл $\gamma(P')$ на торах Лиувилля $T_{P'}$, близких к изоинтегральной поверхности L. Выделенные точки есть точки касания цикла $\gamma(P')$ и эллипсоида (в случаях a, b), однополостного гиперболоида (случай c) меньших параметров.

$\alpha = p_1 d\lambda_1 + p_2 d\lambda_2 + p_3 d\lambda_3$ и $\omega = dp_1 \wedge d\lambda_1 + dp_2 \wedge d\lambda_2 + dp_3 \wedge d\lambda_3$ корректно определены на фазовом пространстве биллиарда. Определим в малой окрестности слоя T_P в Q^5 на регулярных участках слоения Лиувилля функцию

$$s(P') = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\gamma(P')} \alpha.$$

Функция s — не что иное, как переменная действия. Покажем, что она корректно определена в малой окрестности точки P. Для этого найдем ее явную формулу. Согласно уравнениям разделенных переменных (см. 2) справедливы равенства

$$p_i^2 = \frac{H}{2} \frac{(\lambda_i - \Lambda_1)(\lambda_i - \Lambda_2)}{(a - \lambda_i)(b - \lambda_i)(c - \lambda_i)} \quad \forall i = 1, 2, 3.$$

Поскольку Q^5 задается уравнением $H = 1$, а цикл γ обходит каждую эллиптическую координату в точности 2 раза, получаем

$$s(\Lambda_1, \Lambda_2) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{0}^{\min\{\Lambda_1, c\}} \sqrt{2\frac{(t-\Lambda_1)(t-\Lambda_2)}{(a-t)(b-t)(c-t)}} dt +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\max\{c,\Lambda_1\}}^{\min\{\Lambda_2, b\}} \sqrt{2\frac{(t-\Lambda_1)(t-\Lambda_2)}{(a-t)(b-t)(c-t)}} dt + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\max\{b,\Lambda_2\}}^{a} \sqrt{2\frac{(t-\Lambda_1)(t-\Lambda_2)}{(a-t)(b-t)(c-t)}} dt.$$

На первый взгляд может показаться, что функция s является разрывной. Однако оказывается, что это не так.

Лемма 1. *Функция s является аналитической в малой окрестности точки P.*

Доказательство леммы 1. Пусть $\Lambda_1 \neq b$, $\Lambda_2 \neq c$. Рассмотрим на комплексной плоскости контур C, изображенный на рисунке 7. Он состоит из верхней полуокружности l, соединяющей точки 0 и a, четырех верхних полуокружностей l_ε радиусов ε с центрами в точках $c, b, \Lambda_1, \Lambda_2$ и пяти отрезков. Выберем на контуре положительное направление обхода. Пусть

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2(z-\Lambda_1)(z-\Lambda_2)}{(a-z)(b-z)(c-z)}}.$$

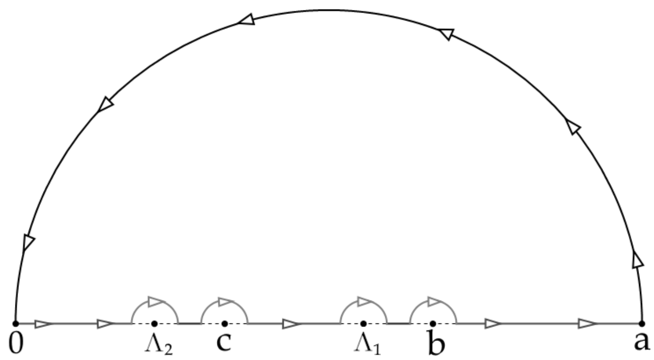


Рис. 7: Контур интегрирования. Черным выделена дуга l.

Согласно теореме Коши об интеграле по замкнутому контуру

$$0 = \oint\limits_{C^+} f(z)dz = \int\limits_{l^+} f(z)dz + I_1(\varepsilon) + I_2(\varepsilon) + I_3(\varepsilon), \tag{3}$$

где

$$I_1(\varepsilon) = \int\limits_0^{\min\{\Lambda_1,c\}-\varepsilon} f(z)dz + \int\limits_{\max\{c,\Lambda_1\}+\varepsilon}^{\min\{\Lambda_2,b\}-\varepsilon} f(z)dz + \int\limits_{\max\{b,\Lambda_2\}-\varepsilon}^{a} f(z)dz,$$

$$I_2(\varepsilon) = \int\limits_{\min\{\Lambda_1,c\}+\varepsilon}^{\max\{\Lambda_1,c\}-\varepsilon} f(z)dz + \int\limits_{\min\{b,\Lambda_2\}+\varepsilon}^{\max\{\Lambda_2,b\}-\varepsilon} f(z)dz,$$

$$I_3(\varepsilon) = \int\limits_{l_\varepsilon^-(\xi_1)} f(z)dz + \int\limits_{l_\varepsilon^-(\xi_1)} f(z)dz + \int\limits_{l_\varepsilon^-(\xi_2)} f(z)dz + \int\limits_{l_\varepsilon^-(c)} f(z)dz + \int\limits_{L_\varepsilon^-(b)} f(z)dz.$$

Заметим, что $s = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} I_1(\varepsilon)$, а выражение $I_2(\varepsilon)$ является чисто мнимым. При этом, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} I_3(\varepsilon) = 0$. Последний факт следует из стандартного неравенства:

$$\left|\oint\limits_\gamma f(z)dz\right| \leqslant \max_{z\in\gamma} |f(z)| \cdot |\gamma|.$$

Таким образом,

$$s = \frac{1}{2\pi}\mathsf{Re}\int\limits_{l^-}\sqrt{\frac{2(z-\Lambda_1)(z-\Lambda_2)}{(a-z)(b-z)(c-z)}}dz.$$

Ввиду отсутствия на дуге l особых точек $c, b, \Lambda_1, \Lambda_2$ функция s корректно определена и является аналитической в малой окрестности точки P. Лемма 1 доказана. ■

Далее, используя методы интегрирования функции комплексного переменного, можно показать, что в окрестности U дифференциал функции s не обращается в ноль, более того, векторное поле $v = \operatorname{sgrad} s$ трансверсально подмногообразию с краем $\hat{M} \subset Q^5$, задаваемому уравнением $x = 0$.

Поскольку s — переменная действия, согласно классической теории интегрируемых гамильтоновых систем, траектории поля $v = \operatorname{sgrad} s$ замкнуты, а интегральные кривые являются 2π-периодическими. Более того, траектории v, "живущие" на слое $T_{P'}$, гомологичны циклам $\gamma(P')$, которые по своему определению гомологичны $\gamma(P)$.

Рассмотрим задачу Коши векторного поля v с начальными точками на многообразии $\hat{M}$. Получаем поток g_t, под действием которого многообразие $\hat{M}$ деформируется внутри Q^5. Однако заметим, что $g_{2\pi} = g_0 = \mathrm{id}$. Иными словами, за время $t = 2\pi$ многообразие $\hat{M}$ возвращается в исходное положение. Таким образом, мы получаем отображение $G : \hat{M} \times S^1 \to U$, которое действует по формуле $G(x,t) = g_t(x)$. Перечислим свойства этого отображения.

1. Отображение G непрерывно. Этот факт следует из теоремы о непрерывной зависимости решения задачи Коши от начальных данных.

2. Отображение G биективно. Действительно, многообразие $\hat{M}$ пересекает каждый тор Лиувилля $T_{P'}$ близкий к слою T_P по двумерному тору $\tilde{T}_{P'}$. При этом, векторное поле $v = \operatorname{sgrad} s$ будет трансверсальным к $\tilde{T}_{P'}$. А значит, интегральные траектории поля v, проведенные из разных точек $\tilde{T}_{P'}$, пересекаться не будут. Отсюда заключаем инъективность отображения G на каждом из торов $\tilde{T}_{P'} \times S^1$. Если дополнить произвольный базис на этом двумерном торе $\tilde{T}_{P'}$ циклом $\gamma(P')$, полученная тройка будет базисом в группе гомологий тора $T_{P'}$. Следовательно, весь тор Лиувилля $T_{P'}$ накрывается отображением G. Отсюда нетрудно показать биективность G на всем произведении $\hat{M} \times S^1$.

Поскольку $\hat{M}$ и S^1 компактны, а отображение G — непрерывная биекция, то G — гомеоморфизм.

Ограничим слоение Лиувилля в Q^5 на $\hat{M}$ и продолжим его на $\hat{M} \times S^1$, тривиально умножив каждый слой на окружность. Согласно построению отображение G является послойным гомеоморфизмом. Поэтому, для того чтобы описать слоение Лиувилля в окрестности U, необходимо выяснить, как устроено слоение Лиувилля в $\hat{M}$.

Рассмотрим уравнения движения 2, индуцированные на $\hat{M}$. Поскольку на $\hat{M}$ зафиксирована третья эллиптическая координата λ_1, изучим дифференциальные уравнения на λ_2 и λ_3. Имеем:

$$
\begin{aligned}
\dot{\lambda}_1 &= \pm \frac{2\sqrt{2}}{(\lambda_2 - \lambda_1)(a - \lambda_1)} \sqrt{(\lambda_1 - \Lambda_1)(\lambda_1 - \Lambda_2)(a - \lambda_1)(b - \lambda_1)(c - \lambda_1)}, \\
\dot{\lambda}_2 &= \pm \frac{2\sqrt{2}}{(\lambda_1 - \lambda_2)(a - \lambda_2)} \sqrt{(\lambda_2 - \Lambda_1)(\lambda_2 - \Lambda_2)(a - \lambda_2)(b - \lambda_2)(c - \lambda_2)}.
\end{aligned}
$$

Поскольку $\lambda_1, \lambda_2 < a$, слоение Лиувилля на $\hat{M}$ будет совпадает с соответствующим слоением системы, уравнения движения которой имеют следующий вид.

$$
\begin{aligned}
\dot{\lambda}_1 &= \pm \frac{2\sqrt{2}}{\lambda_2 - \lambda_1} \sqrt{(\lambda_1 - \Lambda_1)(\lambda_1 - \Lambda_2)(b - \lambda_1)(c - \lambda_1)} \\
\dot{\lambda}_2 &= \pm \frac{2\sqrt{2}}{\lambda_1 - \lambda_2} \sqrt{(\lambda_2 - \Lambda_1)(\lambda_2 - \Lambda_2)(b - \lambda_2)(c - \lambda_2)}
\end{aligned}
$$

Однако мы должны учесть, что при проскальзывании в точке вида $(0, y, z)$ первая координата вектора скорости меняет свой знак. Это равносильно переходу материальной точки с листа на лист биллиардной книжки, склееной из двух эллипсов. Таким образом, для описания слоения Лиувилля на $\hat{M}$ необходимо понять, какая динамическая система на биллиардной книжке из двух склеенных эллипсов задается приведенной выше системой уравнений.

Оказывается, аналогичным уравнениям удовлетворяет софокусный биллиард с потенциалом Гука (см., например, [31]). Поскольку $h > 0$ и биллиардная книжка, описанная выше, представляет собой двумерный эллипсоид, слоение Лиувилля на многообразии $\hat{M}$ послойно гомеоморфно малой окрестности особого слоя точки типа седло-седло биллиарда с отталкивающим потенциалом Гука на трехосном эллипсоиде. А эта окрестность послойно гомеоморфна почти прямому произведению двух 2-атомов C_2 с инволюцией, отождествляющей центрально симметричные точки атомов. Таким образом, $U \cong S^1 \times \dfrac{C_2 \times C_2}{\mathbb{Z}_2(\alpha)}$, где α действует центральной симметрией на сомножителях. Теорема доказана. $\square$

Теоремы 3, 4 описывают устройство слоения Лиувилля вблизи слоев, отвечающих внутренним точкам образа отображения момента. В самом конце параграфа мы приведем полный ответ, описывающий устройство слоения Лиувилля рассматриваемого биллиарда в окрестности произвольного слоя. Однако перед этим напомним определение двух важных вырожденных особенностей, часто встречающихся в различных интегрируемых гамильтоновых системах двух степеней свободы (см., например, [32]).

Рассмотрим на многообразии $\mathbb{R}^3(x, y, z) \times S^1(\varphi)$ две гладкие функции: $H = z$, $F = x^2 + y^4 - zy^2$. Эти функции задают разбиение многообразия $\mathbb{R}^3(x, y, z) \times S^1(\varphi)$ на связные компоненты их совместного уровня (см. рис. 8).

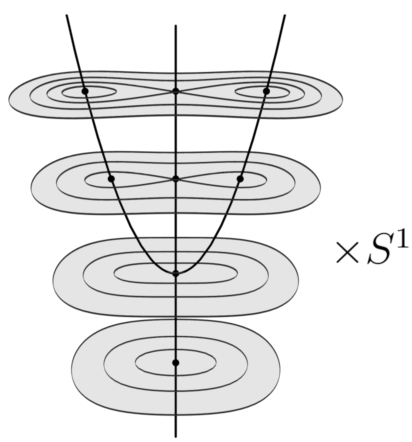
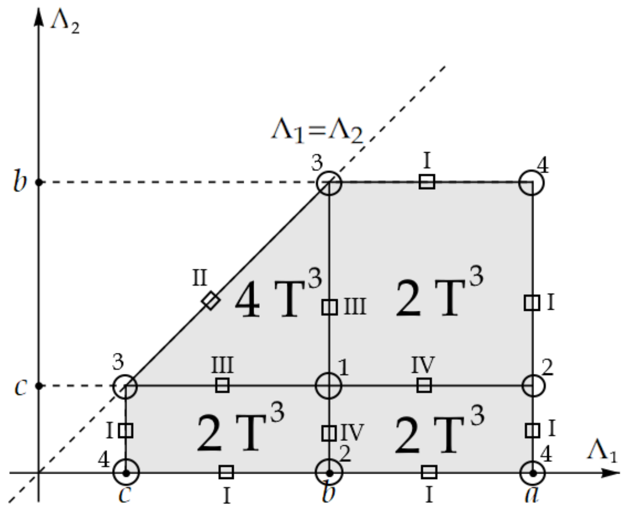


Рис. 8: Слоение особенности “эллиптическая вилка”.

Малая окрестность слоя точки $x = y = z = \varphi = 0$, разбитая на слои, называется *ориентируемой эллиптической вилкой*. Будем обозначать ее через PF_o. Заметим, что на вилке PF_o действует группа $\mathbb{Z}_2$, которая сопоставляет точке $\mathbb{R}^3$ симметричную ей относительно оси Oz, а точке окружности S^1 — диаметрально противоположную. Фактор PF_o по этой подгруппе будем называть *неориентируемой эллиптической вилкой* и обозначать PF_{no}.

Ниже на рисунке 9 представлено полное описание локального устройства слоения Лиувилля на поверхности постоянной энергии биллиарда с проскальзыванием внутри трехосного эллипсоида. Малые окрестности точек стенок и вершин бифуркационной диаграммы пронумерованы римскими и арабскими цифрами. Для каждой из этих окрестностей справа в таблице описан их послойный прообраз при отображении момента.



Прообразы малых окрестностей □,○ при отображении момента

□	Тип слоения Лиувилля
I	$2\,\mathrm{A}\times\mathrm{T}^2\times\bar{\mathrm{D}}^1$
II	$4\,\mathrm{A}\times\mathrm{T}^2\times\bar{\mathrm{D}}^1$
III	$2\,\mathrm{B}\times\mathrm{T}^2\times\bar{\mathrm{D}}^1$
IV	$\mathrm{C}_2\times\mathrm{T}^2\times\bar{\mathrm{D}}^1$

○	Тип слоения Лиувилля
1	$\mathrm{S}^1\times\dfrac{\mathrm{C}_2\times\mathrm{C}_2}{\mathbb{Z}_2(\alpha)}$, α - центральная симметрия атомов
2	$2\,\mathrm{A}\times\mathrm{B}\times\mathrm{S}^1$
3	$2\,\mathrm{PF}_o\times\mathrm{S}^1$
4	$2\,\mathrm{A}\times\mathrm{A}\times\mathrm{S}^1$

Рис. 9: Слоение Лиувилля на изоэнергетической поверхности биллиарда с проскальзыванием внутри трехосного эллипсоида.

5. Биллиарды с проскальзыванием в бесфокусной области

В этом параграфе мы опишем локальное устройство слоения Лиувилля биллиарда в бесфокусной области с проскальзыванием на одной паре противоположных граней.

Бесфокусный стол обладает тремя парами центрально симметричных граней. Каждая из этих пар лежит либо на эллипсоиде, либо на однополостном гиперболоиде, либо на двуполостном. Присвоим этим парам номера 1, 2 и 3 соответственно. Без ограничения общности будем считать, что параметр граничного эллипсоида равен 0. Параметры граничных однополостного и двуполостного гиперболоидов обозначим через λ' и λ'' соответственно.

Как уже отмечалось, на бесфокусном столе можно задать 7 режимов проскальзывания. Закодируем их векторами длины три из нулей и единиц следующим образом. Вектору $(a_1, a_2, a_3) \in \{0,1\}^3$ сопоставим режим проскальзывания, при котором на i-й паре граней отражение происходит в том и только том случае, когда $a_i = 0$. В частности, вектор $(0,0,0)$ кодирует обычный биллиард в бесфокусной области. Нас интересуют режимы $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$.

На изоэнергетических поверхностях этих биллиардов рассмотрим отображение момента $\mathcal{F} : Q^5 \to \mathbb{R}^2(\Lambda_1, \Lambda_2)$. Заметим, что образ этого отображения является пятиугольником, изображенным на рисунке 10, и не зависит от режима проскальзывания.

Как устроены бифуркационные диаграммы этих систем? Безусловно они обязаны включать в себя границу образа отображения момента, а также отрезки $\Lambda_1 = b$, $\Lambda_2 = c$ (поскольку на них меняется тип одной из каустик). Однако в случаях $(0,1,0)$ и $(0,0,1)$ проскальзывание тоже вносит свой вклад в диаграмму. Действительно, пусть внутренняя точка P образа отображения момента такова, что одна из ее координат равна параметру границы с проскальзыванием. В этом случае в любой сколь угодно малой окрестности P можно выбрать точки P' и P'' такие, что режимы движения, отвечающие значениям P' и P'' пары интегралов (Λ_1, Λ_2), будут разные. В одном случае материальная точка не будет доходить до границы с проскальзыванием, а в другом — будет проходить сквозь нее и продолжать свое движение из диаметрально противоположной точки стола. Таким образом, бифуркационная диаграмма биллиарда $(0,1,0)$ обязана содержать отрезок прямой $\Lambda_2 = \lambda'$, а диаграмма биллиарда $(0,0,1)$ — отрезок прямой $\Lambda_1 = \lambda''$.

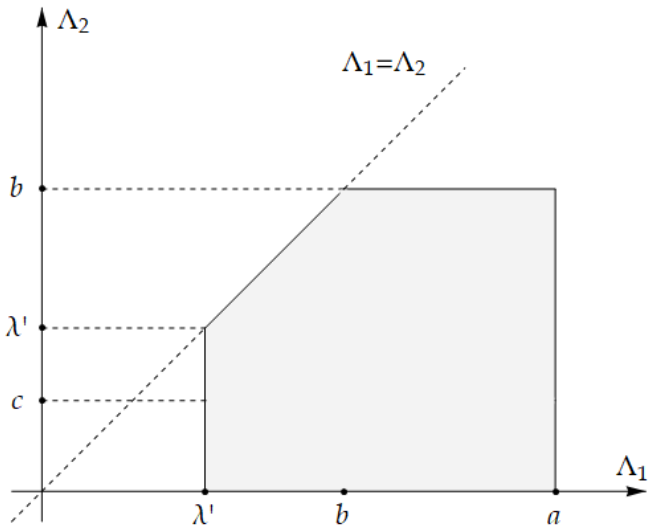


Рис. 10: Образ отображения момента биллиарда с проскальзыванием в бесфокусной области.

Итак, бифуркационная диаграмма биллиарда $(1,0,0)$ содержит ровно одну точку креста — (b,c), в то время как диаграммы биллиардов $(0,1,0)$ и $(0,0,1)$ помимо (b,c) содержат также точки (b,λ') и (λ'',c) соответственно.

Замечание 5. *Точка* (b,λ') *биллиарда* $(0,1,0)$ *соответствует топологически неустойчивой невырожденной особенности ранга* 2. *Поэтому слоение Лиувилля в малой окрестности слоя, отвечающего этой точке, нельзя описать в виде почти прямого произведения атомов, цилиндров и окружностей.*

Согласно замечанию 3 регулярные слои биллиарда с проскальзыванием в бесфокусной области гомеорофны трехмерным торам, а слоение Лиувилля в их малой окрестности тривиально. Следующая теорема описывает устройство слоения Лиувилля вблизи слоев, отвечающих точкам креста (кроме точки (b,λ') биллиарда $(0,1,0)$).

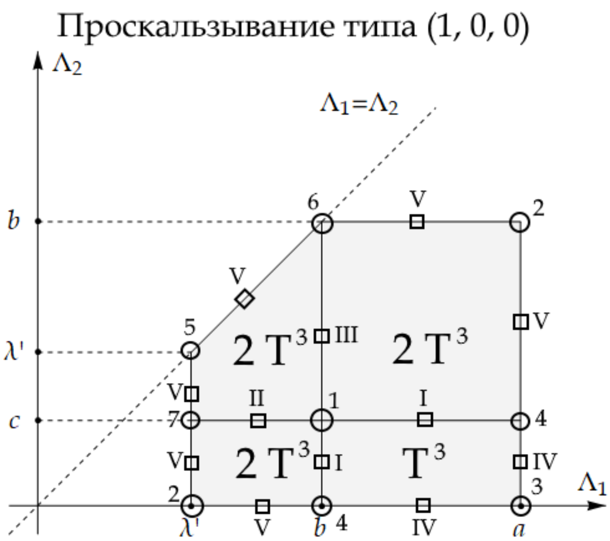
Теорема 5. *Слоение Лиувилля в окрестности точек креста биллиардов в бесфокусной области с проскальзыванием на одной паре противоположных граней устанавливает следующая таблица.*

Режим	*Точка креста*	*Слоение Лиувилля*
$(1,0,0)$	(b,c)	$\dfrac{B\times C_2\times S^1}{\mathbb{Z}_2(\alpha)}$
$(0,1,0)$	(b,c)	$\dfrac{B\times C_2\times S^1}{\mathbb{Z}_2(\alpha)}$
$(0,0,1)$	(b,c)	$2\,\dfrac{B\times B\times S^1}{\mathbb{Z}_2(\alpha)}$
$(0,0,1)$	(λ'',c)	$\dfrac{B\times C_2\times S^1}{\mathbb{Z}_2(\alpha)}$

Здесь α *— инволюция центральной симметрии.*

Доказательство. Опишем идею доказательства этой теоремы. Рассмотрим бесфокусный стол. Координаты точки $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ внутри такого стола ограничены значениями a,b,c сверху и параметрами граничных квадрик снизу соответственно. Поэтому множители $\lambda_i - \lambda_j$, $\lambda_i - \lambda_k$ в знаменателях уравнений 2 можно отбросить, так как они не влияют на топологию слоения Лиувилля. В итоге, переменные в уравнениях 2 полностью разделились.

Теперь возьмем 2 экземпляра бесфокусного стола с проскальзыванием и склеим соответствующие грани, на которых оно было введено. Данный комплекс будет двулисто накрывать исходный биллиардный стол с проскальзыванием. Более того, как отмечалось в доказательстве теоремы 2 при таком двулистном накрытии столов происходит двулистное накрытие соответствующих изоэнергетических поверхностей. Однако заметим, что в накрытии система уравнений движения останется прежней, а накрывающий биллиардный стол разложится в прямое произведение одномерных столов. Поскольку переменные в уравнениях движения полностью разделены, слоение Лиувилля в малой окрестности точки креста в накрывающем Q^5 раскладывается в прямое произведение окружностей и окрестностей слоев невырожденных особенностей систем одной степени свободы, т.е. 2-атомов. Остается вычислить фактор от таких произведений по накрывающей инволюции. В результате получим устройство слоения Лиувилля в окрестности точек креста. $\square$



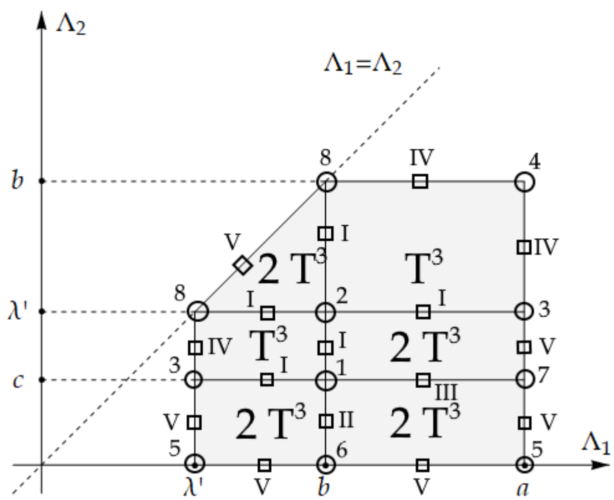
□	Тип слоения
I	$B \times T^2 \times \bar{D}^1$
II	$C_2 \times T^2 \times \bar{D}^1$
III	$2\,\frac{B \times S^1}{\mathbb{Z}_2(\alpha)} \times S^1 \times \bar{D}^1$
IV	$A \times T^2 \times \bar{D}^1$
V	$2\,A \times T^2 \times \bar{D}^1$

○	Тип слоения
1	$\frac{B \times C_2 \times S^1}{\mathbb{Z}_2(\alpha)}$
2	$2\,A \times A \times S^1$
3	$A \times A \times S^1$
4	$A \times B \times S^1$
5	$2\,A \times T^2 \times \bar{D}^1$
6	$2\,PF_{no} \times S^1$
7	$A \times C_2 \times S^1$

Рис. 11: Слоение Лиувилля биллиарда с проскальзыванием типа $(1, 0, 0)$ в бесфокусной области.

На рисунках 11, 12, 13 мы приводим описание локального устройства слоения Лиувилля биллиардов на бесфокусном столе с режимами проскальзывания $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$. В тех случаях, когда окрестность слоя можно представить в виде почти прямого произведения 2-атомов и окружностей, мы запишем ответ именно в такой форме. Однако напомним, что почти прямое произведение $\dfrac{B \times S^1}{\mathbb{Z}_2(\alpha)}$, где α — инволюция центральной симметрии, гомеоморфно 3-атому A^*, а произведение $\dfrac{C_2 \times S^1}{\mathbb{Z}_2(\alpha)}$ — прямому произведению 2-атома B и окружности (более подробно см. [27]).

Проскальзывание типа (0, 1, 0)



Прообразы малых окрестностей □, ○ при отображении момента

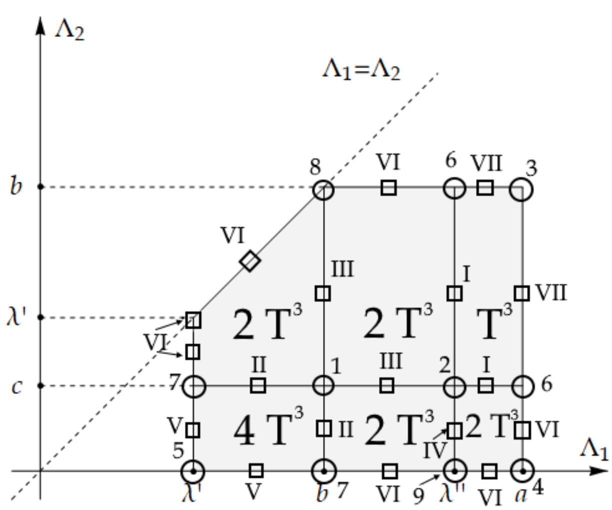
(α - инволюция центральной симметрии)

□	Тип слоения
I	$B \times T^2 \times \bar{D}^1$
II	$C_2 \times T^2 \times \bar{D}^1$
III	$2\,\frac{B \times C_2}{\mathbb{Z}_2(\alpha)} \times S^1 \times \bar{D}^1$
IV	$C_2 \times T^2 \times \bar{D}^1$
V	$C_2 \times T^2 \times \bar{D}^1$

○	Тип слоения
1	$\frac{B \times C_2 \times S^1}{\mathbb{Z}_2(\alpha)}$
2	топологически неустойчива
3	$A \times B \times S^1$
4	$A \times A \times S^1$
5	$2\,A \times A \times S^1$
6	$A \times C_2 \times S^1$
7	$2\,\frac{B \times S^1}{\mathbb{Z}_2(\alpha)} \times A$
8	$PF_o \times S^1$

Рис. 12: Слоение Лиувилля биллиарда с проскальзыванием типа $(0, 1, 0)$ в бесфокусной области.

Проскальзывание типа (0, 0, 1)



Прообразы малых окрестностей □, ○ при отображении момента

(α - инволюция центральной симметрии)

□	Тип слоения
I	$B \times T^2 \times D^1$
II	$2\,B \times T^2 \times \bar{D}^1$
III	$2\,\frac{B \times S^1}{\mathbb{Z}_2(\alpha)} \times S^1 \times \bar{D}^1$
IV	$C_2 \times T^2 \times \bar{D}^1$
V	$4\,A \times T^2 \times \bar{D}^1$
VI	$2\,A \times T^2 \times \bar{D}^1$
VII	$A \times T^2 \times \bar{D}^1$

○	Тип слоения
1	$2\,\frac{B \times B \times S^1}{\mathbb{Z}_2(\alpha)}$
2	$\frac{B \times C_2 \times S^1}{\mathbb{Z}_2(\alpha)}$
3	$A \times A \times S^1$
4	$2\,A \times A \times S^1$
5	$4\,A \times A \times S^1$
6	$A \times B \times S^1$
7	$2\,A \times B \times S^1$
8	$PF_o \times S^1$
9	$A \times C_2 \times S^1$

Рис. 13: Слоение Лиувилля биллиарда с проскальзыванием типа $(0, 0, 1)$ в бесфокусной области.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Биркгоф Дж.Д. Динамические системы. Ижевск: Удмуртский университет, 1999. 408 с.

2. Козлов В.В., Трещев Д.В. Генетическое введение в динамику систем с ударами. М.: Изд-во МГУ, 1991. 240 с.

3. Dragović V., Radnović M. Bifurcations of Liouville tori in elliptical billiards // Regul. Chaotic Dyn. 2009. Vol. 14, no. 4-5. P. 479-494.

4. Драгович В., Раднович М. Интегрируемые биллиарды, квадрики и многомерные поризмы Понселе. М.-Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2010. 338 с.

5. Фокичева В.В. Описание особенностей системы "биллиард в эллипсе"// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1: Матем., мех. 2012. № 5. С. 31-34.

6. Фокичева В.В. Описание особенностей системы бильярда в областях, ограниченных софокусными эллипсами или гиперболами // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1: Матем., мех. 2014. № 4. С. 18-27.

7. Фокичева В.В. Топологическая классификация биллиардов в локально плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик // Матем. сб. 2015. Т. 206, № 10. С. 127-176.

8. Ведюшкина В.В., Фоменко А.Т., Харчева И.С. Моделирование невырожденных бифуркаций замыканий решений интегрируемых систем с двумя степенями свободы интегрируемыми топологическими биллиардами // Докл. РАН. 2018. Т. 479, № 6. С. 607-610.

9. Ведюшкина В.В., Харчева И.С. Биллиардные книжки моделируют все трехмерные бифуркации интегрируемых гамильтоновых систем // Матем. сб. 2018. Т. 209, № 12. С. 17-56.

10. Ведюшкина В.В. Интегрируемые биллиарды реализуют торические слоения на линзовых пространствах и 3-торе // Матем. сб. 2020. Т. 211, № 2. С. 46-73.

11. Ведюшкина В.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые геодезические потоки на ориентируемых двумерных поверхностях и топологические биллиарды // Изв. РАН. Сер. матем. 2019. Т. 83, № 6. С. 63-103.

12. Fomenko A.T., Vedyushkina V.V., Zav'yalov V.N. Liouville foliations of topological billiards with slipping // Russ. J. Math. Phys. 2021. Vol. 28, no. 1. P. 37-55.

13. Ведюшкина В.В., Завьялов В.Н. Реализация геодезических потоков с линейным интегралом биллиардами с проскальзыванием // Матем. сб. 2022. Т. 213, № 12. С. 31-52.

14. Завьялов В.Н. Биллиард с проскальзыванием на любой рациональный угол // Матем. сб. 2023. Т. 214, № 9. С. 3-26.

15. Харчева И.С. Изоэнергетические многообразия интегрируемых бильярдных книжек // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1: Матем., мех. 2020. № 4. С. 12-22.

16. Фоменко А.Т., Ведюшкина В.В. Бильярды и интегрируемость в геометрии и физике. Новый взгляд и новые возможности // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1: Матем., мех. 2019. № 3. С. 15-25.

17. Ведюшкина В.В., Кибкало В.А., Фоменко А.Т. Топологическое моделирование интегрируемых систем биллиардами: реализация числовых инвариантов // Докл. РАН. Матем., информ., процессы упр. 2020. Т. 493, № 1. С. 9-12.

18. Кибкало В.А., Фоменко А.Т., Харчева И.С. Реализация интегрируемых гамильтоновых систем бильярдными книжками // Тр. ММО. 2021. Т. 82, № 1. С. 45-78.

19. Ведюшкина В.В. Локальное моделирование бильярдами слоений Лиувилля: реализация реберных инвариантов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1: Матем., мех. 2021. № 2. С. 28-32.

20. Ведюшкина В.В., Кибкало В.А. Реализация бильярдами числового инварианта расслоения Зейферта интегрируемых систем // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1: Матем., мех. 2020. № 4. С. 22-28.

21. Кузнецова А.А. Моделирование вырожденных особенностей интегрируемых бильярдных систем бильярдными книжками // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1: Матем., мех. 2023. № 5. С. 3-10.

22. Белозеров Г.В. Топологическая классификация биллиардов в трехмерном евклидовом пространстве, ограниченных софокусными квадриками // Матем. сб. 2022. Т. 213, № 2. С. 3-36.

23. Якоби К. Лекции по динамике. М.-Л.: ОНТИ, 1936. 272 с.

24. Белозеров Г.В. Топология изоэнергетических 5-поверхностей трехмерного бильярда внутри трехосного эллипсоида с потенциалом Гука // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1: Матем., мех. 2022. № 6. С. 21-31.

25. Lazutkin V. KAM theory and semiclassical approximations to eigenfunctions. Berlin: Springer, 1993. 387 p.

26. Кудрявцева Е.А. Интегрируемые по Лиувиллю обобщённые биллиардные потоки и теоремы типа Понселе // Фундамент. и прикл. матем. 2015. Т. 20, № 3. С. 113-152.

27. Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия. Топология. Классификация: В 2 т. Ижевск: Удмуртский университет, 1999. Т. 1. 444 с.; Т. 2. 448 с.

28. Nguen T.Z. Symplectic topology of integrable Hamiltonian systems, I: Arnold–Liouville with singularities // Compositio Math. 1996. Vol. 101. P. 179-215.

29. Fomenko A.T., Kibkalo V.A. Saddle singularities in integrable Hamiltonian systems: examples and algorithms // Contemporary approaches and methods in fundamental mathematics and mechanics. Cham: Springer, 2021. P. 3-26. (Underst. Complex Syst.).

30. Ведюшкина В.В., Кибкало В.А., Пустовойтов С.Е. Реализация фокусных особенностей интегрируемых систем биллиардными книжками с потенциалом Гука // Чебышевский сб. 2021. Т. 22, № 5. С. 44-57.

31. Кобцев И.Ф. Эллиптический биллиард в поле потенциальных сил: классификация движений, топологический анализ // Матем. сб. 2020. Т. 211, № 7. С. 93-120.

32. Болсинов А.В., Рихтер П.Х., Фоменко А.Т. Метод круговых молекул и топология волчка Ковалевской // Матем. сб. 2000. Т. 191, № 2. С. 3-42.

REFERENCES

1. Birkhoff, G.D., 1927, *Dynamical Systems*, Providence: American Mathematical Society, 295 p. (Colloquium Publications; vol. 9).

2. Kozlov, V.V., Treshchev, D.V., 1991, *A Genetic Introduction to the Dynamics of Systems with Impacts*, Providence: American Mathematical Society, 171 p. (Translations of Mathematical Monographs; vol. 89).

3. Dragović, V., Radnović, M., 2009, "Bifurcations of Liouville tori in elliptical billiards", *Regular and Chaotic Dynamics*, vol. 14, no. 4-5, pp. 479-494.
4. Dragović, V., Radnović, M., 2010, *Integrable Billiards, Quadrics and Multidimensional Poncelet Porisms*, Moscow-Izhevsk: Regular and Chaotic Dynamics, 338 p. [in Russian].
5. Fokicheva, V.V., 2014, "Description of singularities for billiard systems bounded by confocal ellipses or hyperbolas", *Moscow University Mathematics Bulletin*, vol. 69, no. 4, pp. 148-158.
6. Fokicheva, V.V., 2014, "Classification of billiard motions in domains bounded by confocal parabolas", *Sbornik: Mathematics*, vol. 205, no. 8, pp. 1201-1221.
7. Fokicheva, V.V., 2015, "A topological classification of billiards in locally planar domains bounded by arcs of confocal quadrics", *Sbornik: Mathematics*, vol. 206, no. 10, pp. 1463-1507.
8. Vedyushkina, V.V., Fomenko, A.T., Kharcheva, I.S., 2018, "Modeling nondegenerate bifurcations of closures of solutions for integrable systems with two degrees of freedom by integrable topological billiards", *Doklady Mathematics*, vol. 97, no. 2, pp. 174-176.
9. Vedyushkina, V.V., Kharcheva, I.S., 2018, "Billiard books model all three-dimensional bifurcations of integrable Hamiltonian systems", *Sbornik: Mathematics*, vol. 209, no. 12, pp. 1690-1727.
10. Vedyushkina, V.V., 2020, "Integrable billiard systems realize toric foliations on lens spaces and the 3-torus", *Sbornik: Mathematics*, vol. 211, no. 2, pp. 201-225.
11. Vedyushkina, V.V., Fomenko, A.T., 2019, "Integrable geodesic flows on orientable two-dimensional surfaces and topological billiards", *Izvestiya: Mathematics*, vol. 83, no. 6, pp. 1137-1173.
12. Fomenko, A.T., Vedyushkina, V.V., Zavyalov, V.N., 2021, "Liouville foliations of topological billiards with slipping", *Russian Journal of Mathematical Physics*, vol. 28, no. 1, pp. 37-55.
13. Vedyushkina, V.V., Zavyalov, V.N., 2022, "Realization of geodesic flows with a linear first integral by billiards with slipping", *Sbornik: Mathematics*, vol. 213, no. 12, pp. 1645-1664.
14. Zavyalov, V.N., 2023, "Billiard with slipping by an arbitrary rational angle", *Sbornik: Mathematics*, vol. 214, no. 9, pp. 1191-1211.
15. Kharcheva, I.S., 2020, "Isoenergetic manifolds of integrable billiard books", *Moscow University Mathematics Bulletin*, vol. 75, no. 4, pp. 149-160.
16. Fomenko, A.T., Vedyushkina, V.V., 2019, "Billiards and integrability in geometry and physics. New scope and new potential", *Moscow University Mathematics Bulletin*, vol. 74, no. 3, pp. 98-107.
17. Vedyushkina, V.V., Kibkalo, V.A., Fomenko, A.T., 2020, "Topological modeling of integrable systems by billiards: realization of numerical invariants", *Doklady Mathematics*, vol. 102, no. 1, pp. 269-271.
18. Kibkalo, V.A., Fomenko, A.T., Kharcheva, I.S., 2021, "Realizing integrable Hamiltonian systems by means of billiard books", *Transactions of the Moscow Mathematical Society*, vol. 82, pp. 37-64.
19. Vedyushkina, V.V., 2021, "Local modeling of Liouville foliations by billiards: implementation of edge invariants", *Moscow University Mathematics Bulletin*, vol. 76, no. 2, pp. 60-64.

20. Vedyushkina, V.V., Kibkalo, V.A., 2020, “Realization of the numerical invariant of the Seifert fibration of integrable systems by billiards”, *Moscow University Mathematics Bulletin*, vol. 75, no. 4, pp. 161-168.

21. Kuznetsova, A.A., 2023, “Modeling the Degenerate Singularities of Integrable Billiard Systems by Billiard Books”, *Moscow University Mathematics Bulletin*, vol. 78, no. 5, pp. 207-215.

22. Belozerov, G.V., 2022, “Topological classification of billiards bounded by confocal quadrics in three-dimensional Euclidean space”, *Sbornik: Mathematics*, vol. 213, no. 2, pp. 129-160.

23. Jacobi, K., 1936, *Lectures on Dynamics*, Moscow: Gostekhizdat [in Russian].

24. Belozerov, G.V., 2022, “Topology of 5-surfaces of a 3D billiard inside a triaxial ellipsoid with Hooke’s potential”, *Moscow University Mathematics Bulletin*, vol. 77, no. 6, pp. 277-289.

25. Lazutkin, V., 1993, *KAM Theory and Semiclassical Approximations to Eigenfunctions*, Berlin: Springer, 387 p.

26. Kudryavtseva, E.A., 2017, “Liouville integrable generalized billiard flows and Poncelet type theorems”, *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 225, no. 4, pp. 611-638.

27. Bolsinov, A.V., Fomenko, A.T., 2004, *Integrable Hamiltonian Systems: Geometry, Topology, Classification*, Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 730 p.

28. Nguyen, T.Z., 1996, “Symplectic topology of integrable Hamiltonian systems, I: Arnold-Liouville with singularities”, *Compositio Mathematica*, vol. 101, pp. 179-215.

29. Fomenko, A.T., Kibkalo, V.A., 2021, “Saddle singularities in integrable Hamiltonian systems: examples and algorithms”, in *Contemporary Approaches and Methods in Fundamental Mathematics and Mechanics*, Cham: Springer, pp. 3-26.

30. Vedyushkina, V.V., Kibkalo, V.A., Pustovoitov, S.E., 2021, “Realization of focal singularities of integrable systems using billiard books with a Hooke potential field”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 22, no. 5, pp. 44-57.

31. Kobtsev, I.F., 2020, “An elliptic billiard in a potential force field: classification of motions, topological analysis”, *Sbornik: Mathematics*, vol. 211, no. 7, pp. 987-1013.

32. Bolsinov, A.V., Richter, P.H., Fomenko, A.T., 2000, “The method of loop molecules and the topology of the Kovalevskaya top”, *Sbornik: Mathematics*, vol. 191, no. 2, pp. 151-188.

Получено: 19.11.2024
Принято в печать: 07.04.2025

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 26. Выпуск 2.

УДК 515.163.6 DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-2-33-48

Погружения двудольных графов и нумизматика

С. А. Богатый, С. Ф. Грубиянов

Богатый Семеон Антонович — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: bogatyi@inbox.ru
Грубиянов Сергей Федорович — выпускник механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: sfg@live.ru

Аннотация

Изучаются двудольные погружения двудольного графа в плоскость с минимальным числом самопересечения. Для некоторых классов двудольных графов вычисленно минимальное число самопересечения для всех двудольных погружений. В частности описаны все графы, обладающие двудольным вложением в плоскость. Даны приложения к хронологическому упорядочению начального чекана Ширваншаха Абу Мансур Али ибн Йазида (425–435 гг.х. = 1034–1044 р.х.).

Ключевые слова: конечнократное отображение в евклидово пространство, размерность, плотное подмножество.

Библиография: 19 названий.

Для цитирования:
Богатый С.А., Грубиянов С.Ф. Погружения двудольных графов и нумизматика Чебышёвский сборник, 2025, т. 26, вып. 2, с. 33–48.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 26. No. 2.

UDC 515.163.6 DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-2-33-48

Immersions of bipartite graphs and numismatics

S. A. Bogatyy, S. F. Grubiyanov

Bogatyy Semeon Antonovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: bogatyi@inbox.ru
Grubiyanov Sergey Fedorovich — graduate of the Faculty of Mechanics and Mathematics of Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: sfg@live.ru

Abstract

Bipartite immersions of a bipartite graph into a plane with a minimum self-intersection number are studied. For some classes of bipartite graphs, the minimum self-intersection number is calculated for all bipartite immersions. In particular, all graphs with a bipartite embedding into a plane are described. Appendixes are given to the chronological ordering of the initial coinage of Shirvanshah Abu Mansur Ali bin Yazid (425-435 AH = 1034-1044 AD).

Keywords: finite-multiple mapping into Euclidean space, dimension, dense subset.

Bibliography: 19 titles.

For citation:

Bogatyy, S.A., Grubiyanov, S.F. 2025, "Immersions of bipartite graphs and numismatics", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 2, pp. 33–48.

[1]

1. Введение

При работе с большим объемом информации крайне полезно ее структурировать. Одним из эффективных решений может быть представление имеющихся данных в виде графа. Всякий граф можно представлять геометрически лежащим в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ с прямолинейными ребрами, пересекающимися только в общих вершинах. Визуализацию графа наиболее естественно провести геометрически, т.е. вложить заданный граф в плоскость. Классическая теорема Куратовского–Понтрягина описывает все планарные графы. Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подразделений полного графа с пятью вершинами K_5 и полного двудольного графа с тремя вершинами в каждой доле $K_{3,3}$.

"Промежуточными" между пространством и плоскостью являются поверхности (ориентируемые и неориентируемые) рода $g \geq 0$. Задача определения рода заданного графа является NP-трудной [1]. В настоящее время известен алгоритм, линейный по количеству вершин графа, который определяет возможность вложения графа в поверхность заданного рода g и задает это вложение при существовании такого вложения [2]. Но представление графа на поверхности лишено наглядности.

Более наглядным является вложение вершин графа в плоскость с допуском пересечения ребер графа во внутренних точках. Проблема плохой читаемости получаемого результата связана с большим количеством пересечений между рёбрами графа и требует применения алгоритмов, направленных на уменьшение числа самопересечений графа. Отправной точкой изучения числа пересечений графа стала задача Турана (Пал Туран (1910-1976) - венгерский математик) о кирпичной фабрике. Во время Второй мировой войны Пал Туран был отправлен на принудительную работу на кирпичную фабрику, где он возил вагонетки с кирпичами из печей на склады. На фабрике между любой печью и любым складом были проложены железнодорожные пути, при этом вагонетку было сложнее толкать там, где эти пути пересекались. Это вдохновило Турана на вопрос о том, как можно перерасположить пути, чтобы минимизировать число пересечений. Также известна проблема Заранкевича нахождения минимального числа пересечений при изображении на плоскости полного двудольного графа. В 1983 году было доказано, что задача нахождения минимального числа самопересечений графа является NP-трудной [3].

Данная работа посвящена двудольным графам, образующимся при построении модели соответствия штемпелей монет. Рассматриваются именно двудольные представления таких графов на плоскости. Введено минимальное число самопересечения графа при двудольном

[1]Авторы благодарят Г. Абдуллаева, Д.Э. Ибрагимова и М.С. Шабанова за помощь в работе.

погружении. Для некоторых классов двудольных графов посчитано это число и описаны оптимальные двудольные погружения (теоремы 2, 3, 5, 6, 7, 8). Это позволило дать критерий двудольной вложимости общего двудольного графа в плоскость (теорема 4) и описать графы с максимальными числами самопересечения (следствия 4, и 7). Предложен пример двудольного графа, при оптимальном двудольном погружении которого крайние (первые и последние) вершины долей не соединены ребром.

Обсуждено применение двудольного погружения к хронологическому упорядочению монет чекана Ширваншаха Абу Мансур Али ибн Йазида (425–435 гг.х. = 1034–1044 р.х.). Наш анализ основан на рассмотрении двудольного графа сопряжения сторон всех доступных нам изображений монет начального периода правления Али ибн Йазида. Здесь важно подчеркнуть следующие три момента. Мы впервые вводим в научный оборот новый тип аверса $A4$ монет Али ибн Йазида. За счет использования новых изображений монет уже известного типа удалось почти полностью восстановить реверс $R1$ ранее известного типа и отождествить его с другим ранее известным реверсом. Кроме того, с помощью новых экземпляров монет удалось полностью восстановить аверс $A2$ ранее известного типа и за счет выше отмеченного отождествления двух реверсов $R1$ с большой степенью достоверности получить, что аверс $A2$ является хронологически вторым.

Мы также сравниваем выводы, получаемые при математическом анализе двудольных графов всей известной нам информации и только ранее опубликованной информации.

Отметим, что прочтение и расшифровка текстов на древних и средневековых монетах с арабскими надписями является сложной проблемой. Спорные представления и ошибочные утверждения в этой области обсуждаются в работе [4], к которой мы и отсылаем читателя.

2. Теоретические результаты.

Для изложения результатов работы необходимы некоторые предварительные пояснения. Формулировки и доказательства некоторых из них несомненно широко известны, но для полноты изложения мы напомним их и даже частично докажем некоторые из используемых утверждений.

Для заданного (n, m)-двудольного графа $G \subset K_{n,m}$ мы хотим вычислить минимальное число самопересечения $\mathrm{SInt}(G)$ двудольного погружения или даже описать все двудольные погружения в плоскость $f\colon G \to \mathbb{R}^2$ с минимальным числом самопересечения $\mathrm{SInt}(f) = \mathrm{SInt}(G)$.

Два ребра графа называются *пересекающимися*, если они пересекаются во внутренних точках.

Вложение вершин долей в плоскость в прямые $y = 0$ и $y = 1$ порождает *двудольное вложение* графа, если никакие два ребра не пересекаются.

Вложение вершин долей в плоскость в прямые $y = 0$ и $y = 1$ порождает *двудольное погружение* графа, если никакие три ребра не пересекаются в одной (внутренней) точке.

Точки $(x_i, 0)$ на прямой $y = 0$ будем обозначать через x_i или i, точки $(x_j, 1)$ на прямой $y = 1$ будем обозначать через y_j или x_j или j, т.е. индексы соответствуют точкам на разных прямых (долях). При этом точки пронумерованы так, что $(x_{i_1} < x_{i_2})$ при $i_1 < i_2$ и $(y_{j_1} < y_{j_2})$ при $j_1 < j_2$ соответственно.

Теорема 1. *Всякое отображение вершин полного двудольного графа $K_{n,m}$ в прямые $y = 0$ и $y = 1$ сколь угодно малым шевелением можно превратить в такое вложение вершин, которое порождает двудольное погружение.*

Предложение 1. *Для двудольного погружения двудольного графа G ребра $[x_{i_1}, y_{j_1}]$ и $[x_{i_2}, y_{j_2}]$ пересекаются по внутренней точке тогда и только тогда, когда $(x_{i_2} - x_{i_1})(y_{j_2} - y_{j_1}) < 0$.*

Опишем некоторые классы двудольных графов, которые нельзя двудольно вложить в плоскость.

Следствие 1. *Всякое двудольное погружение полного графа $K_{2,2}$ имеет точно одно самопересечение.*

Доказательство. Действительно, ребра $[x_1, y_2]$ и $[x_2, y_1]$ пересекаются, а остальные пары ребер погружения графа $K_{2,2}$ не пересекаются. □

Предложение 2. *Простой замкнутый цикл является двудольным графом $\Longleftrightarrow$ цикл содержит четное число ребер.*

Предложение 3. *Простой замкнутый цикл длины $2n$, $n \geq 2$, является (n,n)-двудольным графом $L(n,n)$ с $2n$ ребрами. Справедливо неравенство* $\mathrm{SInt}(L(n,n)) \leq n-1$.

Доказательство. Расположим точки долей в следующем порядке $x_{i_1} < x_{i_n} < x_{i_2} < x_{i_{n-1}} < < x_{i_3} < x_{i_{n-2}} < \ldots < x_{i_{\left[\frac{n}{2}\right]+1}}$, $y_{j_n} < y_{j_1} < y_{i_{n-1}} < y_{i_3} < y_{i_{n-2}} < \ldots < y_{j_{\left[\frac{n-1}{2}\right]+1}}$. Подчеркнем, что здесь индексы вершин долей рождены не порядком их расположения на прямой, а порядком их обхода при движении по циклу. При таком упорядочении вершин в долях графа получается погружение с числом самопересечения $n-1$. □

Описанное погружение цикла $L(n,n)$ будем называть *"гармошкой"*.

Теорема 2. *Для произвольного двудольного погружения $f\colon L(n,n) \to \mathbb{R}^2$ справедливо неравенство* $\mathrm{SInt}(f) \geq n-1$. *Причем равенство имеет место только для погружения $2n$-цикла $L(n,n)$ "гармошкой".*

Доказательство. Проведем индукцию по числу $n \geq 2$. Базой индукции при $n = 2$ является следствие 1.

Индуктивный переход. Обозначим точки верхней и нижней долей в порядке возрастания $y_1 < y_2 < y_3 < \ldots < y_{n-1} < y_n$ и $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_{n-1} < x_n$ соответственно. Пусть вершина y_1 соединена ребрами с вершинами $x_l < x_k$. Пусть вершина x_l соединена ребром еще с вершиной y_r. Заменим путь (ломанную) $x_k y_1 x_l y_r$ на путь (ребро) $x_k y_r$. Возникает погружение $f_0\colon L(n-1,n-1) \to \mathbb{R}^2$. По индуктивному предположению $\mathrm{SInt}(f_0) \geq n-2$.

Покажем, что $\mathrm{SInt}(f) > \mathrm{SInt}(f_0)$. При погружении f ребро $x_i y_j$ графа $L(n,n)$ пересекает "появившееся" ребро $x_k y_r$ графа $L(n-1,n-1)$ тогда и только тогда, когда $(k-i)(r-j) < 0$.

Если $1 < j < r$, то $i > k$. Поэтому в этом случае ребра $x_i y_j$ и $x_l y_r$ графа $L(n,n)$ пересекаются.

Если $r < j$, то $i < k$. В этом случае ребра $x_i y_j$ и $x_l y_r$ графа $L(n,n)$ пересекаются.

"Удаленный" путь содержит "удаленную" точку пересечения ребер $x_k y_1$ и $x_l y_r$ графа $L(n,n)$, поэтому погружение f графа $L(n,n)$ имеет по крайней мере на одну точку самопересечения больше чем погружение f_0 графа $L(n-,n-1)$.

Пусть теперь погружение f графа $L(n,n)$ имеет ровно $n-1$ точку самопересечения. Согласно базе индукции (следствию 1) можно считать, что $n \geq 3$. Согласно вышеприведенному рассуждению погружение f_0 графа $L(n-1,n-1)$ имеет ровно $n-2$ точки самопересечения. По индуктивному предположению погружение f_0 графа $L(n-1,n-1)$ имеет вид "гармошки".

Если $l > 1$, то для некоторого $t > 1$ имеется ребро $x_1 y_t$, которое пересекается с ребром $x_l y_1$. Указанная точка пересечения не учитывается (отсутствует) в погружении f_0 графа $L(n-1,n-1)$. Поэтому в сделанном предположении справедливо более сильное неравенство $\mathrm{SInt}(f) \geq \mathrm{SInt}(f_0) + 2 = n$. Далее будем считать, что $l = 1$.

Если $k > 2$, $r > 2$, то согласно индуктивному предположению "гармошки" есть ребро $x_2 y_2$, которое дает погружению f две "лишние" точки пересечения с ребрами $x_1 y_r$ и $x_k y_1$.

Если $k > 2$, $r = 2$, то согласно индуктивному предположению “гармошки” есть ребро x_2y_2, которое дает погружению f “лишнюю” точку пересечения с ребром x_ky_1.

Следовательно, для оптимального погружения $l = 1$, $k = 2$, $r = 2$. Таким образом “гармошка” графа $L(n-1, n-1)$ влечет “гармошку” графа $L(n, n)$. $\square$

Обозначим через T граф, в котором из одной вершины выходят три “уса” длины 2. Ясно, что граф T является двудольным графом $T \subset K_{4,3}$, одной долей которого являются центр графа и три конца усов, а вторую долю составляют три промежуточные вешины усов.

Теорема 3. *Справедливо равенство* $\mathrm{SInt}(T) = 1$.

Доказательство. Погружение графа T с числом пересечения 1 построить легко. Центр графа отобразим в точку x_2.

Один ус пустим по ребрам x_2y_1 и далее по ребру x_1y_1.

Второй ус пустим по ребрам x_2y_2 и далее по ребру x_3y_2.

Третий ус пустим по ребрам x_2y_3 и далее по ребру x_4y_3.

В построенном двудольном погружении есть ровно одна точка пересечения ребер x_3y_2 и x_2y_3.

Рассмотрим теперь произвольное двудольное погружение $f\colon T \to \mathbb{R}^2$.

Без ограничения общности можно считать, что образом центра является точка x_1 или x_2. Пусть образом центра является точка x_1. Тогда усы выходят по ребрам x_1y_1, x_1y_2 и x_1y_3. Тогда продолжение первого уса – ребро x_iy_1 пересекается с началами двух усов, поэтому имеется не менее двух точек самопересечения.

Итак, при оптимальном погружении центр графа не может отображаться в крайние точки. Следовательно, без ограничения общности можно считать, что образом центра является точка x_2.

Рассмотрим ус, который начинается по ребру x_2y_1. Если этот ус заканчивается по ребру x_iy_1, $i > 2$, то это ребро пересекается с началами второго и третьего усов. Следовательно, в оптимальном погружении конец первого уса идет по ребру x_1y_1

Если конец второго уса идет по ребру x_4y_2, то это ребро пересекает с обоими ребрами третьего уса. Таким образом, в оптимальном погружении конец второго уса идет по ребру x_3y_2, которое в этом случае пересекается тольео с ребром начала третьего уса. $\square$

Замечание 6. *Доказанное утверждение можно усилить в разных направлениях. Например, можно показать, что если в графе G имеется точка порядка 3, из которой выходят “усы” длин $n_1 \geq n_2 \geq n_3$ соответственно, то* $\mathrm{SInt}(G) = n_3 - 1$. *Более кропотливый перебор возможных погружений позволяет показать, что для дерева G с единственной точкой ветвления порядка $r \geq 3$, из которой выходят “усы” длин $n_1 \geq \ldots \geq n_r$ соответственно, имеет место равенство*

$$\mathrm{SInt}(G) = \sum_{i=1}^{[\frac{r+1}{2}]} (i-1)(n_{2i-1} - 1) + \sum_{i=1}^{[\frac{r}{2}]} (i-1)(n_{2i} - 1).$$

Теорема 4. *Двудольный граф двудольно вкладывается в плоскость тогда и только тогда, когда он не содержит ни замкнутого цикла, ни графа T.*

Доказательство. Согласно теоремам 2 и 3 двудольно вкладываемый в плоскость граф не может содержать ни один из перечисленных графов.

Пусть теперь граф G является деревом, не содержащим граф T. Индукцией по числу вершин (ребер) графа G построим двудольное вложение.

Если $G = K_{n,1}$, то всякое вложение n точек в прямую $y = 0$ порождает двудольное вложение графа $G = K_{n,1}$ в плоскость.

Если все вершины данного дерева G имеют порядок ≤ 2, то это змеевидный граф и он двудольно вкладывается в плоскость. Причем у него есть только два двудольных вложения, которые получаются друг из друга инверсией, т.е. сменой начала и конца.

Пусть теперь у данного дерева G есть вершины порядка ≥ 3. Рассмотрим произвольную вершину A порядка $\mathrm{Ord}(A) \geq 3$. Так как дерево G не содержит дерево T, то из вершины A выходит не менее чем $\mathrm{Ord}(A)-2 \geq 3-2 = 1$ висячих ребер, т.е. ребер к другим концам которых не примыкают другие ребра. Удалим из дерева G какое-нибудь висячее ребро, входящее в вершину A. Согласно индуктивному предположению полученный граф обладает двудольным вложением $f_0\colon G' \to \mathbb{R}^2$. Можно считать, что $G \neq K_{n,1}$. Поэтому из вершины A выходят два или одно не висячее ребро. Без ограничения общности можно считать, что вершина A принадлежит нижней доле.

Если из вершины A выходят два не висячех ребра, то при вложении f_0 эти ребра занимают крайние положения. Т.е. существует такой индекс k, что при вложении f_0 одно не висячее ребро (из вершины A) отображается в ребро $x_A y_k$, а другое не висячее ребро отображается в ребро $x_A y_{k+\mathrm{Ord}(A)-2}$. Теперь всякая не занятая точка интервала $(y_k, y_{k+\mathrm{Ord}(A)-2})$ определяет вложение ранее удаленного висячего ребра, что задает двудольное вложение первоначального графа G,

Если из вершины A выходит одно не висячее ребро, то при вложении f_0 это ребро занимает крайнее положение. Без ограничения общности можно считать, что это крайнее положение является самым левым. Теперь всякая не занятая точка интервала $(y_k, +\infty)$ позволяет двудольное вложение f_0 продолжить до двудольного вложения f первоначального графа G. $\square$

Вычисление для заданного двудольного графа G инварианта $\mathrm{SInt}(G)$ является сложной задачей. Теоремы 2 и 3 можно понимать как примеры вычисления числа самопересечения конкретных графов, они позволяют получать некоторые оценки снизу в общем случае.

Для двудольного графа G рассмотрим инвариант $k_{2,2}(G)$ – число различных подграфов графа G, которые являются полными графами $K_{2,2}$.

Следствие 2. *Для двудольного графа G справедливо неравенство* $\mathrm{SInt}(G) \geq k_{2,2}(G)$.

Доказательство. Действительно, согласно следствию 1 всякий подграф $K_{2,2} \subset G$ порождает одну точку самопересечения и разные такие подграфы порождают разные точки самопересечения. $\square$

Согласно теореме 3 полученная оценка не является точной. Согласно теореме 2 для замкнутого цикла $L(n,n)$, $n \geq 2$, длины $2n$ полученная оценка верна только для $n = 2$. Ниже мы показываем, что для некоторых специальных графов оценка следствия 2 точна.

Предложение 4. *Для двудольного погружения полного двудольного графа $K_{n,m}$ ребро $[i,j]$, соединяющее вершины с номерами i и j верхней и нижней долей соответственно, пересекается с $S_{i,j} = (i-1)(m-j) + (n-i)(j-1)$ других ребер.*

Доказательство. Согласно предложению 1 ребро $[i,j]$ пересекается с ребром $[i',j'] \iff (i-i')(j-j') < 0$. Таких пар $S_{i,j} = (i-1)(m-j) + (n-i)(j-1)$. $\square$

Теорема 5. *Для всякого двудольного погружения полного двудольного графа $K_{n,m}$ число самопересечения равно*

$$\mathrm{SInt}(K_{n,m}) = k_{2,2}(K_{n,m}) = C_n^2 C_m^2 = \frac{n(n-1)m(m-1)}{4}.$$

Доказательство. Всякий подграф $K_{2,2} \subset K_{n,m}$ порождает одну точку самопересечения и всякая точка самопересечения возникает из одного подграфа $K_{2,2} \subset K_{n,m}$. $\square$

Этот же результат можно получить, если по всем ребрам $[i,j]$ просуммировать числа $S_{i,j}$: $2\,\mathrm{SInt}(K_{n,m}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} S_{i,j}$.

Предложение 5. *Для множества всех погружений полного двудольного графа без одного ребра $K_{n,m} \setminus K_{1,1}$ числа самопересечения образуют множество*

$$\Pi(K_{n,m} \setminus K_{1,1}) = \left\{C_n^2 C_m^2 - S_{i,j} \colon i = 1, ..., n, \quad j = 1, ..., m\right\}.$$

Доказательство. Пусть задано погружение $f\colon K_{n,m} \setminus K_{1,1} \to \mathbb{R}^2$. Это есть стандартное погружение полного графа $K_{n,m}$ из которого удаляется одно ребро. Если удаляется ребро $[i, j]$, то для оставшейся части полного графа число самопересечения равно $C_n^2 C_m^2 - S_{i,j}$. Рассматривая все возможные значения i и j, получаем все возможные значения числа самопересечения для всех возможных погружений. □

Замечание 7. *Так как $S_{i,j} = S_{n+1-i,m+1-j}$, то можно считать, что $i = 1, ..., \left[\frac{n+1}{2}\right]$ или $j = 1, ..., \left[\frac{m+1}{2}\right]$. Также укажем, что при $n = 2k + 1$ для любого j справедливо равенство $S_{k+1,j} = k(m-1)$.*

Предложение 6. *На прямоугольнике $\Pi = [-a, a]\times[-b, b] = \left\{(x, y) \colon -a \le x \le a, \ -b \le y \le \le b\right\}$, $a, b > 0$, функция $f(x, y) = -2xy$ достигает свой максимум $2ab$ в точках $(-a, b)$ и $(a, -b)$.*

Предложение 7. *Для любых $1 \le i \le n$, $1 \le j \le m$ справедливо неравенство $S_{i,j} \le S_{1,m} = S_{n,1} = (n-1)(m-1)$. Причем равенство имеет место только для указанных пар $i = 1, j = m$ и $i = n, j = 1$.*

Доказательство. Согласно предложению 4 для любых $1 \le i \le n$, $1 \le j \le m$ справедливо равенство $S_{i,j} = (i-1)(m-j)+(n-i)(j-1) = (\frac{n-1}{2}+x)(\frac{m-1}{2}-y)+(\frac{n-1}{2}-x)(\frac{m-1}{2}+y) = \frac{(n-1)(m-1)}{2} - - 2xy$, где $x = i - \frac{n+1}{2}$, $y = j - \frac{m+1}{2}$. Так как переменные x, y лежат внутри прямоугольника $[-\frac{n-1}{2}, \frac{n-1}{2}] \times [-\frac{m-1}{2}, \frac{m-1}{2}]$, вершины которого соответствуют целым значениям $i = 1, n$ и $j = 1, m$ соответственно, то согласно предложению 6 максимальное значение величины $S_{i,j}$ достигается на парах $i = 1, j = m$ и $i = n, j = 1$. □

Следствие 3. *Для полного двудольного графа без одного ребра $G = K_{n,m} \setminus K_{1,1}$ справедливы равенства*

$$\mathrm{SInt}(G) = k_{2,2}(G) = \mathrm{SInt}(K_{n,m}) - (n-1)(m-1) = \frac{(n-1)(m-1)(nm-4)}{4}.$$

Доказательство. Согласно предложениям 5 и 7 имеет место цепочка равенств

$$\mathrm{SInt}(K_{n,m} \setminus K_{1,1}) = \frac{n(n-1)m(m-1)}{4} - \max_{1\le i\le n, 1\le j\le m} S_{i,j} =$$

$$\frac{n(n-1)m(m-1)}{4} - (n-1)(m-1) = \frac{(n-1)(m-1)(nm-4)}{4}.$$

□

Следствие 4. *При $n, m \ge 2$ для (n, m)-двудольного графа G следующие условия эквивалентны:*

1) граф G является полным графом $K_{n,m}$;

2) для всякого двудольного погружения $f\colon G \to \mathbb{R}^2$ число самопересечения $\mathrm{SInt}(f) = = C_n^2 C_m^2 = \frac{n(n-1)m(m-1)}{4}$;

3) для всякого двудольного погружения $f\colon G \to \mathbb{R}^2$ число самопересечения $\mathrm{SInt}(f) > > \mathrm{SInt}(K_{n,m} \setminus K_{1,1}) = \mathrm{SInt}(K_{n,m}) - (n-1)(m-1) = \frac{(n-1)(m-1)(nm-4)}{4}$.

Доказательство. Импликация 1) $\Longrightarrow$ 2) это теорема 5.

Импликация 2) $\Longrightarrow$ 3) очевидна.

3) $\Longrightarrow$ 1). Если $G \neq K_{n,m}$, то $G \subset K_{n,m} \setminus K_{1,1}$ для некоторого ребра $K_{1,1}$. Получено противоречие $\mathrm{SInt}(G) \leq \mathrm{SInt}(K_{n,m} \setminus K_{1,1})$. $\square$

Таким образом мы видим, что в структуре чисел самопересечения всех (n,m)-двудольных графов имеются большие лакуны. Опишем скачок, возникающий при удалении второго ребра.

Теорема 6. *Для двудольного графа $G = K_{n,m} \setminus K_{k,l}$, $k \leq n$, $l \leq m$, имеют место равенства*

$$\mathrm{SInt}(G) = k_{2,2}(G) = C^2_{n-k}C^2_m + C^2_n C^2_{m-l} - C^2_{n-k}C^2_{m-l} = C^2_{n-k}C^2_m + \frac{k(2n-k-1)}{2}C^2_{m-l}.$$

Доказательство. Фиксируем какое-нибудь двудольное погружение графа $K_{n,m}$. Удалим ребра полного графа $K_{k,l}$, построенного на первых k вершинах нижней доли и последних l вершинах верхней доли.

Опишем пары вершин $i_1 < i_2$ и $j_1 < j_2$, которые образуют подграф $K_{2,2}$ в графе G.

Если среди вершин i_1, i_2 нижней доли нет вершин $1, \ldots, k$, то для любых двух вершин верхней доли получается полный граф типа $K_{2,2}$, который содержится в рассматриваемом графе. Таких графов ровно $C^2_{n-k}C^2_m$.

Если среди вершин j_1, j_2 верхней доли нет вершин $m-l+1, \ldots, m$, то для любых двух вершин нижней доли получается полный граф типа $K_{2,2}$, который содержится в рассматриваемом графе. Таких графов ровно $C^2_n C^2_{m-l}$.

При этом графы с $k+1 \leq i_1$ и $j_2 \leq m-l$ учитываются дважды. Таких графов ровно $C^2_{n-k}C^2_{m-l}$.

Если $i_1 \leq k$ и $m-l+1 \leq j_2$, то в графе G нет ребра $[i_1, j_2]$. Поэтому в этом случае две пары вершин $i_1 < i_2$ и $j_1 < j_2$ не порождают в графе G подграф $K_{2,2}$ и, более того, эти две пары вершин не порождают точку самопересечения в графе G.

Полученные утверждения сформулируем в компактной форме. Двудольный подграф в G с нижними вершинами (i_1, i_2) и верхними вершинами (j_1, j_2) является полным графом $K_{2,2}$ тогда и только тогда, когда $k < i_1, i_2$ или $j_1, j_2 < m-l+1$; и это в точности случаи точки самопересечения, рожденной в G двумя парами вершин. Графов, удовлетворяющих первому условию ровно $C^2_{n-k}C^2_m$, графов, удовлетворяющих второму условию ровно $C^2_n C^2_{m-l}$. Причем графов удовлетворяющих обоим условиям ровно $C^2_{n-k}C^2_{m-l}$. Следовательно число искомых графов $C^2_{n-k}C^2_m + C^2_n C^2_{m-l} - C^2_{n-k}C^2_{m-l}$. $\square$

Следствие 5. *Для двудольного графа $G = K_{n,m} \setminus K_{1,2}$ имеют место равенства*

$$\mathrm{SInt}(G) = k_{2,2}(G) = \mathrm{SInt}(K_{n,m}) - (n-1)(2m-3) = \mathrm{SInt}(K_{n,m} \setminus K_{1,1}) - (n-1)(m-2).$$

Доказательство. Действительно, $\mathrm{SInt}(G) = k_{2,2}(G) = C^2_{n-1}C^2_m + (n-1)C^2_{m-2} = \frac{(n-1)(n-2)m(m-1)}{4} + (n-1)C^2_{m-2} = \frac{n(n-1)m(m-1)}{4} - (n-1)(2m-3) = \mathrm{SInt}(K_{n,m}) - (n-1)(2m-3) = \mathrm{SInt}(K_{n,m} \setminus K_{1,1}) - (n-1)(m-2)$. $\square$

Теорема 7. *Для двудольного графа $G = K_{n,m} \setminus (K_{k_1,l_1} \sqcup K_{k_2,l_2})$, где графы K_{k_1,l_1} и K_{k_2,l_2} не имеют общих вершин, справедливы равенства* $\mathrm{SInt}(G) = k_{2,2}(G) = C^2_{k_1}C^2_{m-l_1} + C^1_{k_1}C^1_{n-k_1-k_2}C^2_{m-l_1} + C^1_{k_1}C^1_{k_2}C^2_{m-l_1-l_2} + C^2_{n-k_1-k_3}C^2_m + C^1_{n-k_1-k_2}C^1_{k_2}C^2_{m-l_2} + C^2_{k_2}C^2_{m-l_2} = \frac{k_1(2n-k_1-2k_2-1)}{2}C^2_{m-l_1} + C^1_{k_1}C^1_{k_2}C^2_{m-l_1-l_2} + C^2_{n-k_1-k_3}C^2_m + \frac{k_2(2n-2k_1-k_2-1)}{2}C^2_{m-l_2}$.

Доказательство. Фиксируем какое-нибудь двудольное погружение графа $K_{n,m}$. Удалим ребра полного графа K_{k_1,l_1}, построенного на первых k_1 вершинах нижней доли и последних l_1 вершинах верхней доли. Удалим также ребра полного графа K_{k_2,l_2}, построенного на последних k_2 вершинах нижней доли и первых l_2 вершинах верхней доли.

Опишем пары вершин $i_1 < i_2$ и $j_1 < j_2$, которые образуют подграф $K_{2,2}$ в графе G.

I. Если $i_2 \le k_1$, то получается полный граф типа $K_{2,2}$ тогда и только тогда, когда $j_2 \le m-l_1$. Таких графов ровно $C^2_{k_1}C^2_{m-l_1}$.

II. Если $i_1 \le k_1 < i_2 \le n-k_2$, то получается полный граф типа $K_{2,2}$ тогда и только тогда, когда $j_2 \le m-l_1$. Таких графов ровно $C^1_{k_1}C^1_{n-k_1-k_2}C^2_{m-l_1}$.

III. Если $i_1 \le k_1$ и $n-k_2+1 \le i_2$, то получается полный граф типа $K_{2,2}$ тогда и только тогда, когда $j_2 \le m-l_1$ и $l_2+1 \le j_1$. Таких графов ровно $C^1_{k_1}C^1_{k_2}C^2_{m-l_1-l_2}$.

IV. Если $k_1+1 \le i_1 < i_2 \le n-k_2$, то всегда получается полный граф типа $K_{2,2}$. Таких графов ровно $C^2_{n-k_1-k_2}C^2_m$.

V. Если $k_1+1 \le k_1 \le n-k_2 < i_2$, то получается полный граф типа $K_{2,2}$ тогда и только тогда, когда $l_2+1 \le j_1$. Таких графов ровно $C^1_{n-k_1-k_2}C^1_{k_2}C^2_{m-l_2}$.

VI. Если $n-k_2+1 \le i_1$, то получается полный граф типа $K_{2,2}$ тогда и только тогда, когда $l_2+1 \le j_1$. Таких графов ровно $C^2_{k_2}C^2_{m-l_2}$.

Следовательно число искомых графов $C^2_{k_1}C^2_{m-l_1} + C^1_{k_1}C^1_{n-k_1-k_2}C^2_{m-l_1} + C^1_{k_1}C^1_{k_2}C^2_{m-l_1-l_2} +$ $+ C^2_{n-k_1-k_2}C^2_m + C^1_{n-k_1-k_2}C^1_{k_2}C^2_{m-l_2} + C^2_{k_2}C^2_{m-l_2}$. □

Следствие 6. *Для двудольного графа $G = K_{n,m} \setminus (K_{1,1} \sqcup K_{1,1})$ справедливы равенства* $\mathrm{SInt}(G) = k_{2,2}(G) = C^2_nC^2_m - 2(n-1)(m-1)+1 = \mathrm{SInt}(K_{n,m} \setminus (K_{1,1}) - (n-1)(m-1)+1 =$ $= \mathrm{SInt}(K_{n,m} \setminus (K_{1,2}) - (n-2)$.

Следствие 7. *При $m \ge n \ge 2$, $m \ge 3$, для (n,m)-двудольного графа G следующие условия эквивалентны:*

1) граф G является полным графом без ребра $K_{n,m} \setminus K_{1,1}$;

2) $\mathrm{SInt}(G) = \mathrm{SInt}(K_{n,m}) - (n-1)(m-1)$*;*

3) $\mathrm{SInt}(K_{n,m} \setminus K_{1,2}) = \mathrm{SInt}(K_{n,m} \setminus K_{1,1}) - (n-1)(m-2) < \mathrm{SInt}(G) \le \mathrm{SInt}(K_{n,m} \setminus K_{1,1})$.

Доказательство. Импликация 1) $\Longrightarrow$ 2) это следствие 3.

Импликация 2) $\Longrightarrow$ 3) очевидна.

3) $\Longrightarrow$ 1). Если $G \not\supset K_{n,m} \setminus K_{1,1}$, то имеет место по крайней мере одно из включений $G \subset K_{n,m} \setminus (K_{1,1} \sqcup K_{1,1})$, $G \subset K_{n,m} \setminus K_{1,2}$, $G \subset K_{n,m} \setminus K_{2,1}$. В первом случае согласно следствию 6 справедливо неравенство $\mathrm{SInt}(G) \le \mathrm{SInt}(K_{n,m} \setminus (K_{1,1} \sqcup K_{1,1}) = \mathrm{SInt}(K_{n,m} \setminus K_{1,2}) - (n-2)$. Во втором случае справедливо неравенство $\mathrm{SInt}(G) \le \mathrm{SInt}(K_{n,m} \setminus K_{1,2})$. В третьем случае согласно следствию 5 справедливо неравенство $\mathrm{SInt}(G) \le \mathrm{SInt}(K_{n,m} \setminus K_{2,1}) = \mathrm{SInt}(K_{n,m} \setminus K_{1,1}) -$ $-(n-2)(m-1) = \mathrm{SInt}(K_{n,m} \setminus K_{1,1}) - (n-1)(m-2) - (m-n) = \mathrm{SInt}(K_{n,m} \setminus K_{1,2}) - (m-n)$. □

Замечание 8. *Для (n,m)-двудольного графа G можно рассмотреть структуру множества*

$$\Pi(G) = \{\mathrm{SInt}(f)\colon f\colon G \to \mathbb{R}^2 \text{ является двудольным погружением } \} \subset [0, C^2_nC^2_m].$$

Из рассмотрений работы следует, что $C^2_nC^2_m \in \Pi(G) \Longleftrightarrow G \supset K_{n,m} \setminus (K_{1,1} \sqcup K_{1,1})$. Три графа $K_{n,m}$ $K_{n,m} \setminus K_{1,1}$ и $K_{n,m} \setminus (K_{1,1} \sqcup K_{1,1})$ различаются по наименьшему числу в множества $\Pi(G)$. Множество $\Pi(G)$ состоит из $n!m!$ чисел (каждое число учитывается с кратностью количества двудольных погружений с таким числом самопересечения. Можно предположить, что множество $\Pi(G)$ однозначно восстанавливает граф G.

Во всех рассмотренных нами случаях в оптимальном погружении первые и последние вершины долей соединены ребрами. Для указанных ниже графов во всяком оптимальном погружении ни первые ни последние вершины не соединены ребром, т.е. удаление любого ребра в указанных графах уменьшает число самопересечения.

Теорема 8. *При $n, m \geq 4$ для $(n+2, m+2)$-двудольного графа G, получаемого из графа $K_{n,m}$ приклейкой четырех висячих ребер (двух к разным вершинам нижней доли и двух к разным вершинам верхней доли), справедливо равенство*

$$\mathrm{SInt}(G) = k_{2,2}(G) + 2 = \mathrm{SInt}(K_{n,m}) + 2.$$

Причем оптимальное погружение получается только следующим образом. Берётся такое погружение графа $K_{n,m}$, при котором вершины приклейки висячих ребер являются крайними (самыми правыми и самыми левыми). Свободный конец висячего ребра располагаются с той же стороны, с которой находится другой конец этого ребра (из графа $K_{n,m}$).

Доказательство. Ясно, что для описанных погружений графа G число самопересечения равно указанному числу.

Рассмотрим какое-нибудь оптимальное двудольное погружение f графа G. Оно порождает двудольное погружение графа $K_{n,m}$, которое согласно теореме 5 имеет в $K_{n,m}$ ровно $\mathrm{SInt}(K_{n,m})$ точек самопересечения. Отождествим граф $K_{n,m}$ со своим образом при погружении f. Вершины графа $K_{n,m}$ занумеруем согласно порядку на прямой, т.е. будем считать, что $x_1 < \ldots < x_n$ и $y_1 < \ldots < y_m$ Отождествим также висячие ребра со своими образами при погружении f.

Пусть висячая вершина y_0 лежит внутри верхней доли графа $K_{n,m}$ и соединена ребром с вершиной x_{i_0}. Если $x_{i_0} = x_1$, то висячее ребро $[x_1, y_0]$ имеет не менее $n-1 \geq 3$ точек пересечения с ребрами графа $K_{n,m}$ (с ребрами $[x_i, y_1]$, $i = 2, \ldots n$). Если $x_1 < x_{i_0} < x_n$, то висячее ребро $[x_{i_0}, y_0]$ имеет не менее $m \geq 4$ точек пересечения с ребрами графа $K_{n,m}$ (с ребрами $[x_1, y_j]$ при $y_0 < y_j$ и ребрами $[x_n, y_j]$ при $y_j < y_0$). Если $x_{i_0} = x_n$, то висячее ребро $[x_n, y_0]$ имеет не менее $n-1 \geq 3$ точек пересечения с ребрами графа $K_{n,m}$ (с ребрами $[x_i, y_m]$, $i = 1, \ldots n-1$). Во всех случаях число самопересечения строго больше числа из формулировки, которое, как мы уже указали, является верхней оценкой числа самопересечения графа. Следовательно все висячие вершины находятся вне отрезка вершин соответствующей доли полного графа $K_{n,m}$.

Пусть для висячей вершины $y_0 < y_1$ и пусть она соединена ребром с вершиной x_{i_0} полного подграфа. Если $x_1 < x_{i_0}$, то висячее ребро $[x_{i_0}, y_0]$ имеет не менее $m \geq 4$ точек пересечения с ребрами графа $K_{n,m}$ (с ребрами $[x_1, y_j]$, $j = 1, \ldots m$). Значит невисячие вершины висячих ребер являются крайними точками полного графа $K_{n,m}$. □

Подчеркнем, что при оптимальном двудольном погружении рассмотренного графа первые и последние вершины долей не соединены ребрами. На первый взгляд это представляется удивительным, так как такое ребро всегда вносит нулевой вклад в число точек самопересечения.

3. Приложения к нумизматике.

Большинство монет имеют две стороны с изображениями - металлические денежные средства с односторонним изображением являются редкостью и обычно называются *брактеатами*. Одна сторона монеты называется *аверсом*, противоположная сторона называется *реверсом*. В качестве *аверса* (главной стороны) обычно берут сторону с данными об эмитенте монеты (правителе от имени которого она выпущена). Монеты Древнего мира и Средневековья не всегда несут информацию о дате (или даже эмитенте), поэтому не всегда удается точно узнать дату их создания.

Даже в случае наличия на монете имени эмитента и известности времени его правления, остается задача хронологического упорядочения его монет. Мы обсуждаем модель для хронологического упорядочения монетных типов одного эмитента в случае, когда вся имеющаяся в нашем распоряжении информация имеет не кладовый характер, а является результатом объединения данных по всем известным в настоящее время экземплярам монет, т.е. по единичным находкам и монетам с неизвестной историей. Основой для попыток хронологического упорядочения различных монет (штемпелей монет) является сравнение монет с одной общей стороной (сторонами одного типа или даже сторонами, отчеканенными одним штемпелем) и различными оборотными сторонами.

Таким образом все аверсы (аверсы одного типа или аверсы, отчеканенные одним штемпелем, при более детальном и точном анализе) образуют вершины одной доли двудольного графа сопряженности (оттисков) штемпелей, а все реверсы образуют вершины другой доли. В рассматриваемом нами случае нет сведений о монетах, отчеканенных двумя аверсами или двумя реверсами. Аверс и реверс соединены ребром (сопряжены), если имеется монета, отчеканенная этой парой аверс-реверс. Так как при ручной чеканке монет верхние штемпеля, по которым бьют молотком, испытывают большие механические напряжения, то они чаще выходят из строя и заменяются на новые. Это приводит к тому, что граф сопряженности состоит не из отдельных ребер, а из больших связных компонент. На практике эти компоненты связности не всегда удается *"линейно развернуть"*, т.е. двудольно вложить в плоскость. Это связано с тем, что в монетной мастерской обычно работают несколько чеканщиков и это порождает различные сочетания сторон. Возникает сложная задача *"развертывания двудольного графа"*, т.е. "хронологически правильного" упорядочения вершин долей. Бывают случаи возврата к старым уже выработанным штемпелям. Специалисты-нумизматы определяют это по изношенности или подрезке штемпеля и наличию "далеких" сопряженностей. Также учитываются при упорядочении штемпелей стилистические и весовые характеристики монет и данные по кладам. Отсутствие в кладе монет некоторых типов является признаком их более позднего производства. В нашей модели эти элементы игнорируются.

К чекану Ширваншаха Али ибн Йазида мы применяем гипотезу:

Хронологически верное упорядочение штемпелей совпадает с их упорядочением в некотором оптимальном или близком к оптимальному двудольном погружении графа сопряженнности. Близость можно понимать по (отностельной) избыточности числа пересечения в погружениях. Почти эквивалентным образом гипотезу можно сформулировать так. *Некоторое оптимальное погружение задает хронологически верное или близкое к нему упорядочение штемпелей.* Близость можно понимать по (отностельному) количеству инверсных пар в каждой доле графа сопряженности.

По мнению В.Ф. Минорского династия Ширваншахов правила (областью Ширван, государством Ширван, государством Ширваншахов) около 1000 лет непрерывно [5], [6, стр. 43]. Эта область находится в северо–восточной части современной Республики Азербайджан; с востока она ограничена Каспийским морем, с севера Кавказскими горами, с юго–запада рекой Кура, а с северо–запада рекой Ганых (Алазань) [6, стр. 17]. В разные периоды истории границы правления Ширваншахов раздвигались и сжимались. Истории Ширвана и монетному наследию Ширваншахов посвящено много работ [7], [8], [9], [10], [11], [12], [13], [14], [15]. Мы рассматриваем один конкретный вопрос, связанный с чеканом Ширваншаха Али ибн Йазида [425–435] гг.х. (1034–1044) р.х.

Ширваншаху Йазиду ибн Ахмаду [381–418] гг.х. последовательно наследовали три его сына: Минучихр I ибн Йазид [418–425], Абу Мансур Али ибн Йазид [425–435] и Кубад ибн Йазид [435–441].

Согласно письменным источникам Абу Мансур Али ибн Йазид занял престол Ширвана в [425] г.х. (1034) г. [5] [6, стр. 88].

Монета Али ибн Йазида с датой 424 (аверс A_1) привела к пересмотру времени его прихода к власти [14], [15, стр. 95].

Насколько однозначно письменные источники указывают на дату 425 как на время прихода к власти Али ибн Йазида, и возможно ли альтернативное объяснение наличия монеты с именем Абу Мансур Али ибн Йазида и датой 424?

"В 425 г.х./1034 г. ширваншах Минучихр после семилетнего правления был предательски убит в своем доме братом Абу Мансур [Али] ибн Йазидом. Причиной послужило то, что

Абу Мансур сам опасался ширваншаха и прятался от него. ... Абу Мансур Али ибн Йазид ибн Ахмад, вступив на трон в 425 г.х./1034 г., приказал похоронить брата и по истечении установленного обычаем срока, через год женился на его вдове в раби I 426 г.х./январе 1035 г. После того как население ал-Баба выгнало своего эмира Абд ал-Малика в канун пятницы 17 раби I/9 февраля 1034 г. жители ал-Баба подчинились ширваншаху Мансуру, ...” [6, стр. 88].

В описании указанных событий современные историки обычно ссылаются на монографию В.Ф. Минорского [5]. Источником для В.Ф. Минорского послужила историческая хроника “Тарих ал-Баб-ва-Ширван”, для которой он подготовил критическое издание текста и прекрасно откоментированный перевод. Исследование востоковеда А.К. Аликберова позволило установить, что хроника “Тарих ал-Баб-ва-Ширван” создавалась в Багдаде и была завершена в 1106-1107 г. А.К. Аликберов считает, что авторство принадлежит Маммусу ал-Лакзи ад–Дербенди, который вынужден был переехать из Дербенда (ал-Баба) в Багдад в связи со сменой политической власти в городе [16].

Таким образом, можно предполагать, что автор хроники не ошибался, указывая даты. Дата 17 раби I [425]/9 февраля 1034 г. очень конкретна, чтобы предполагать в ней ошибку. Следовательно Али ибн Йазид убил брата не позже 17.03.425 г.х. Это согласуется со временем свадьбы в месяце раби I 426 г.х. Согласно хронике “Тарих ал-Баб-ва-Ширван” княгиня Ситт супруга ширваншаха Минучихра являлась одним из главных действующих лиц убийства последнего. Поэтому можно предполагать, что свадьба состоялась немедленно “по истечении установленного обычаем срока, через год”. Тем более, что свадьба со вдовой покойного ширваншаха придавала легитимности новому ширваншаху, в которой он, судя по описанию убийства Минучихра [6, стр. 88], нуждался. Нам представляется маловероятным, что Али ибн Йазид уже в 424 до убийства своего брата обладал властью и возможностью для чекана собственной монеты. Вполне возможно, что эта дата фальшиво была поставлена для легитимации захвата власти. Возможно с этим как-то связана и последовавшая заморозка даты 425 на монетах Али ибн Йазида.

В следующей таблице собраны все доступные нам данные по группе монет Али ибн Йазида ранней чеканки. Трехсложные числа в таблице являются опубликованными в [15, стр. 117-124] типами монет. Обычные числа указывают количество известных нам монет этого нового типа.

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9
R_1	1.1.0	1.2.5							
R_2		1.2.6	1.3.2	3	7	2			
R_3		2	1.3.1	5	1.2.2	1.2.4	1.2.3		
R_4								1.2.1	
R_5									1.3.3

Таблица 1: Схема всех известных типов монет

Формальные методы не позволяют упорядочить между собой компоненты связности графа сопряженности. Они также не позволяют определять “направление времени”, т.е. отличать начало и конец. В нашем случае дата 424 на аверсе A_1 позволяет считать соответствующую монету первой. Неединственность оптимального погружения также оставляет возможности для различного упорядочения штемпелей. В нашем случае аверсы $A_3 - A_6$ можно переставлять в любом порядке. Так как аверс A_4 ранее не публиковался, то мы посчитали нужным дать его фото.

Математика это аксиоматическая (формализованная) наука, поэтому её выводы достоверны и верны (в рамках взятых аксиом). Однако достоверность (точность) выводов приложения математики к реальным явлениям зависит от степени адекватности модели, принятой для описания реального процесса. Одним из косвенных признаков применимости метода к реальному процессу является его устойчивость к небольшим погрешностям (изменениям) данных процесса. Граф сопряженности ранее опубликованных данных (таблицы 1 без обычных чисел) является двудольно вложимым в плоскость деревом и порождает тот же порядок долей, но с возможностью любой перестановки аверсов $A_5 - A_7$ (в отсутствии аверса A_4). Важно то, что для двудольно вложимого графа порождаемый порядок вершин долей представляется почти достоверно верным порядком. Общими для двух рассмотренных графов являются заданный порядок с возможностью любой перестановки аверсов $A_4 - A_6$.

На самом деле таблица 1 содержт важное уточнение опубликованных данных. В опубликованном варианте реверсы типов 1.1.0 и 1.2.5 считаются различными. В действительности это один реверс и нам удалось его реконструировать почти полностью.

Мы также полностью реконструировали аверс A_2 типов 1.2.5 и 1.2.6. Важно указать, что новые экземпляры помогли увидеть в правой части центрального круга монеты слово "кубад", которое, впрочем, встречается на реверсе еще одного типа монет ширваншаха Али ибн Йазида (типа 2.1.3 [15, стр. 127]). Это слово "кубад" можно воспринимать как имя брата Али – следующего Ширваншаха. Но, видимо, такое восприятие не соответствует стилистике и месту этого слова в поле монеты. Таким образом, это слово надо понимать как "качественная".

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9
R_1	1.1.0								
$R_1{}^*$		1.2.5							
R_2		1.2.6	1.3.2						
R_3			1.3.1		1.2.2	1.2.4	1.2.3		
R_4								1.2.1	
R_5									1.3.3

Таблица 2: Схема опубликованных типов с раздвоением штемпеля R_1

Раздвоение штемпеля R_1 на R_1 и $R_1{}^*$ "отрывает" тип 1.1.0. У оставшейся компоненты связности формально неопределимы начало и конец, что, видимо, и привело к публикации типов конца этого дерева как начальных типов.

На самом деле в публикации типов допущены опечатки. Типу 1.3.2 приписан реверс $R_1{}^*$, а типу 1.2.4 приписан реверс R_4. Построение графа сопряженности при буквальном следовании публикации приводит при двудольном вложении к необходимости перестановки аверсов A_6, A_7 и реверсов $R_1{}^*, R_2$. На самом деле эти перестановки фактически переставляют хронологически только аверсы A_6 и A_7. Другие опечатки не влияют на структуру графа сопряженности штемпелей, поэтому здесь не обсуждаются.

Отметим, что обычно чекан каждого эмитента начинается с монеты новых аверса и реверса, т.е. в хронологическом погружении графа сопряжения обычно (в нашем случае это так) первые вершины долей соединены ребром. Теорема 8 показывает, что для общего двудольного графа нельзя утверждать, что существует оптимальное двудольное погружение, при котором первые вершины долей соединены ребром.

Так как обычный текст читается последовательно, т.е. символы в нем линейно упорядочены, то при упорядоченности вершин долей двудольного графа возникает задача линейного упорядочения ребер. Обычно (и в нумизматике тоже) ребрам номера присваиваются в лексикографическом порядке после выбора одной из долей (аверса) в качестве первой [17], [18], [19]. Не всякий линейный порядок ребер порождается лексикографически из порядках на долях. Поэтому возникает естественная задача определения принципа (алгоритма) построения по линейному порядку на множестве всех ребер двудольного графа упорядочения вершин долей.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Thomassen Carsten. The graph genus problem is NP-complete // Journal of Algorithms. 1989. V. 10. № 4. P. 568–576. doi:10.1016/0196-6774(89)90006-0.
2. Mohar Bojan A Linear Time Algorithm for Embedding Graphs in an Arbitrary Surface // SIAM J. Discr. Math. 1999. V. 12. № 1. P. 6-26. doi:10.1137/S089548019529248X.
3. M. R. Garey, D. S. Johnson. Crossing number is NP-complete // SIAM J. Alg. Discr. Meth. 1983. V. 4. № 3. P. 312-316. doi: 10.1137/0604033
4. Носовский Г.В., Фоменко А.Т. Старые русские деньги. Средневековые русские монеты с арабскими надписями – Москва: Издательство АСТ, 2024 г.
5. Минорский В.Ф. История Ширвана и Дербенда X–XI веков – Москва: 1963 г.
6. Ашурбейли С.Б. Государство Ширваншахов (VI–XVI вв.) – Баку: Издательство “Элм”, 1983 г.
7. Пахомов Е.А. Монеты Азербайджана – Баку: вып 1, 1959 г.; вып 2, 1962 г.
8. Сейфеддини М.А. Монетное дело и денежное обращение в Азербайджане XII–XV вв. – Баку: Издательство “Элм”, Книга I. 1978 г.; Книга II. 1981 г.
9. Сейфеддини М.А., Алиев З.М. Нумизматика Азербайджана. Денежное обращение и монетное дело при феодальных государствах Азербайджана (IX – первой половины XIII в.) – Баку: Издательство “Элм”, Том II. 1997 г.
10. Раджабли Али. Нумизматика Азербайджана. (Очерки истории монетного дела и денежного обращения Азербайджана) – Баку: Издательство “Элм ве Хаят”, 1997 г.
11. Злобин Г.В. Монеты Ширваншахов династии Дербенди (третья династия) 784–956 г.х. / 1382–1548 гг. – Москва: Издательство “Маска”, 2010 г.
12. Раджабли Али Монеты Азербайджана – Баку: Издательство “Xalq Bank”, 2012 г.
13. Раджабли Али Монетная чеканка в государстве Ширваншахов (VIII – XVI вв) – Баку: Издательство “Тахсиль ве Тедрис”, 2015 г.
14. Злобин Г.В., Казбеков К.Х. К нумизматике ширваншахов Кисранидов: Уточнение даты начала правления ширваншаха Али б. Йазида 425–435 г.х./1034–1043 гг. Journey from modern Azerbaijan to the historical states of Shirvanshahs. Baku: 2018, с. 299–303.
15. Злобин Г.В. Монеты Ширвана и Ширваншахов династии Кесранидов (вторая династия) 330–784 г.х. / 941–1382 гг. – Москва: Издательство “Маска”, 2020 г.
16. Аликберов А.К. Об авторе исторической хроники XI в. “Та’рих Баб ал-абваб ва-Ширван”. Рукописная и книжная культура в Дагестане – Махачкала: 1990, с. 119—121.
17. Мельникова А.С. Русские монеты от Ивана Грозного до Петра Первого – Москва: Издательство "Финансы и статистика 1989 г.
18. Клещинов В.Н., Гришин И.В. Каталог русских средневековых монет с правления царя Ивана IV (Грозного) до шведской оккупации Новгорода (1533-1617гг.) Москва: Издательство УРСС, 1998 г.
19. Савоста Р.Ю. Монеты Хаджи-Тархана 813 – 831 годов хиджры – Николаев: 2016 г.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Thomassen, C., 1989, "The graph genus problem is NP-complete", *Journal of Algorithms*, vol. 10, no. 4, pp. 568–576. DOI: https://doi.org/10.1016/0196-6774(89)90006-0.

2. Mohar, B., 1999, "A linear time algorithm for embedding graphs in an arbitrary surface", *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, vol. 12, no. 1, pp. 6–26. DOI: https://doi.org/10.1137/S089548019529248X.

3. Garey, M.R., Johnson, D.S., 1983, "Crossing number is NP-complete", *SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods*, vol. 4, no. 3, pp. 312–316. DOI: https://doi.org/10.1137/0604033.

4. Nosovskiy, G.V., Fomenko, A.T., 2024, "Old Russian money. Medieval Russian coins with Arabic inscriptions", Moscow: AST Publishing House, 352 p.

5. Minorsky, V.F., 1963, "History of Shirvan and Derbent in the 10th–11th centuries", Moscow.

6. Ashurbeyli, S.B., 1983, "State of the Shirvanshahs (VI–XVI centuries)", Baku: Publishing house "Elm", 344 p.

7. Pakhomov, E.A., 1959; 1962, "Coins of Azerbaijan", Baku: issue number 1; issue number 2.

8. Seifeddini, M.A., 1978; 1981, "Coinage and money circulation in Azerbaijan in the 12th–15th centuries", Baku: Publishing house "Elm", Book I, 268 p.; Book II, 244 p.

9. Seifeddini, M.A., Aliyev, Z.M., 1997, "Numismatics of Azerbaijan. Money circulation and coinage in the feudal states of Azerbaijan (IX – first half of the XIII century)", Baku: Publishing house "Elm", Book II., 228 p.

10. Rajabli, A., 1997, "Numismatics of Azerbaijan. (Essays on the history of coinage and money circulation in Azerbaijan)", Baku: Publishing house "Elm ve Hayat", 232 p.

11. Zlobin, G.V., 2010, "Coins of the Shirvanshahs of the Derbendi dynasty (third dynasty) 784–956 AH / 1382–1548", Moscow: Publishing house "Maska", 432 p.

12. Rajabli, A., 2012, "Coins of Azerbaijan", Baku: Publishing house "Xalq Bank", 358 p.

13. Rajabli, A., 2015, "Coin minting in the state of the Shirvanshahs (VIII – XVI centuries)", Baku: Publishing house "Tahsil ve Tedris", 240 p.

14. Zlobin, G.V., Kazbekov, K.Kh., 2018, "On the numismatics of the Shirvanshahs of the Kisranids: Clarification of the start date of the reign of Shirvanshah Ali b. Yazid 425–435 AH / 1034–1043", in "Journey from modern Azerbaijan to the historical states of Shirvanshahs", Baku, pp. 299–303.

15. Zlobin, G.V., 2020, "Coins of Shirvan and the Shirvanshahs of the Kesranid dynasty (second dynasty) 330–784 AH / 941–1382", Moscow: Publishing house "Maska", 800 p.

16. Alikberov, A.K., 1990, "About the author of the historical chronicle of the 11th century "Ta'rikh Bab al-abwab va-Shirvan" ", in "Manuscript and book culture in Dagestan", Makhachkala, pp. 119–121.

17. Melnikova, A.S., 1989, "Russian coins from Ivan the Terrible to Peter the Great", Moscow: Publishing house "Finance and statistics".

18. Kleshchinov, V.N., Grishin, I.V., 1998, “Catalog of Russian medieval coins from the reign of Tsar Ivan IV (the Terrible) to the Swedish occupation of Novgorod (1533–1617)”, Moscow: Publishing house URSS.

19. Savosta, R.Ju., 2016, “Coins of Haji-Tarkhan 813–831 Anno Hegirae”, Nikolaev.

Получено: 15.01.2025
Принято в печать: 07.04.2025

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 26. Выпуск 2.

УДК 517 DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-2-49-60

Проблема построения геодезических в классе Громова – Хаусдорфа: оптимальная хаусдорфова реализация не всегда существует

А. А. Вихров

Вихров Антон Андреевич — Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: Vihrov.01@mail.ru

Аннотация

Данная работа посвящена изучению геодезических в классе метрических пространств, наделенных расстоянием Громова–Хаусдорфа. Исследование показывает, что построение линейной геодезической невозможно в общем случае, даже если рассматривать класс Громова – Хаусдорфа, отфакторизованным по нулевым расстояниям. Кроме того, установлено, что оптимальная хаусдорфова реализация разбивает метрические пространства, находящиеся на нулевом расстоянии, на классы эквивалентности с совпадающим пополнением. Также продемонстрировано, как можно построить геодезическую в примере Хансена, используя 0-модификации. Тем не менее показано, что в общем случае невозможно построение геодезической, используя оптимальную хаусдорфову реализацию. Тем самым показано, что геодезические в классе метрических пространств имеют еще более богатую структуру и на класс метрических пространств не могут быть перенесены методы построения геодезических из пространства Громова – Хаусдорфа.

Ключевые слова: Класс Громова – Хаусдорфа, метрические пространства, Хаусдорфова реализация, метрические пространства в общем положении

Библиография: 18 названий.

Для цитирования:
Вихров А.А. Проблема построения геодезических в классе Громова–Хаусдорва: оптимальная хаусдорфова реализация не всегда существует // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 2, с. 49–60.

Эта работа выполнена с поддержкой гранта Базис номер 23-8-2-3-1.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 26. No. 2.

UDC 517 DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-2-49-60

The problem of constructing geodesics in the Gromov–Hausdorff class: optimal Hausdorff realizations does not exists in general case

A. A. Vikhrov

Vikhrov Anton Andreevich — Lomonosov Moscow State University (Moscow)
e-mail: Vihrov.01@mail.ru

Abstract

This work is devoted to the study of geodesics in the class of metric spaces endowed with the Gromov–Hausdorff distance. The study shows that the construction of a linear geodesic is impossible in the general case, even if we consider the Gromov – Hausdorff class factored by zero distances. Moreover, it is established that the optimal Hausdorff realization divides metric spaces at zero distance into equivalence classes with matching completions. It is also demonstrated how to construct a geodesic in Hansen's example using 0-modifications. Nevertheless, it is shown that, in general, it is impossible to construct a geodesic using the optimal Hausdorff realization. This shows that geodesics in the class of metric spaces have an even richer structure, and the methods for constructing geodesics from the Gromov – Hausdorff space cannot be transferred to the class of metric spaces.

Keywords: Gromov – Hausdorff class, metric space, Hausdorff realizations, generic metric spaces, geodesics

Bibliography: 18 titles.

For citation:
Vikhrov, A.A. 2025, "The problem of constructing geodesics in the Gromov–Hausdorff class: optimal Hausdorff realizations does not exists in general case" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 2, pp. 49–60.

1. Введение

Симметричное отображение $d\colon X \times X \to [0, \infty]$, равное нулю на диагонали и удовлетворяющее неравенству треугольника, называется *обобщённой псевдометрикой*. Если, кроме того, функция d обращается в нуль только на диагонали, она называется *обобщённой метрикой*, а если она не принимает бесконечных значений, то она называется *метрикой*.

Расстояние Громова–Хаусдорфа измеряет степень различия между двумя метрическими пространствами. Это расстояние было введено Громовым в 1981 [6] и определялось как наименьшее расстояние Хаусдорфа между изометрическими изображениями рассматриваемых пространств. Позднее эквивалентное определение этого расстояния было дано с помощью соответствий.

В данной работе используется система аксиом, введённая фон Нейманом, Бернайсом и Гёделем, в рамках которой рассматриваются классы и собственные классы, обобщающие понятие множества. Собственный класс, состоящий из всех метрических пространств, рассматриваемых с точностью до изометрии, обозначается $\mathcal{GH}$. На этом собственном классе естественным образом определяется расстояния Громова—Хаусдорфа. В этой работе мы не будем различать изометричные метрические пространства.

В работе [9] оптимальное соответствие между конечными метрическими пространствами использовалось для построения геодезической между произвольными компактными метрическими пространствами. Позднее, почти одновременно в [4] и [8], было доказано существование оптимального соответствия между компактными метрическими пространствами и, как следствие, геодезической между этими пространствами, порождённой оптимальным соответствием. Такие геодезические называются линейными.

Помимо определения через соответствия, существует другое определение расстояния Громова–Хаусдорфа. Оно равно точной нижней грани расстояний Хаусдорфа между различными изометрическими вложениями в объемлющие пространства. Если точная нижняя грань достигается на некотором объемлющем пространстве, то такие вложения называются оптимальной хаусдорфовой реализацией. В [15] показано, что между компактными метрическими пространствами можно построить оптимальную хаусдорфову реализацию, а по ней – геодезическую, составленную из подмножеств объемлющего пространства.

В первой части работы обсуждаются пространства, находящиеся на нулевом расстоянии друг от друга. Если такие пространства неизометричны, то такие пространства назовем 0-модификациями друг друга. Если у таких пространств есть оптимальное соответствие, то они совпадают. В частности, между отрезком $[0, 1]$ и интервалом $(0, 1)$ оптимальное соответствие не существует. Практически очевидно, что у конечных метрических пространств нет 0-модификаций. Также известно, что пополнения всех 0-модификаций вполне ограниченных метрических пространств совпадают. Однако в общем случае семейства 0-модификаций могут иметь более богатую структуру. В работе [16] построена пара различных неограниченных полных пространств, находящихся на нулевом расстоянии друг от друга, а в работе [14] построена такая же пара, но ограниченных метрических пространств. В настоящей работе доказано, что оптимальная хаусдорфова реализация разбивает пространства, находящиеся на нулевом расстоянии друг от друга, на классы метрических пространств с совпадающим пополнением. В общем случае количество этих классов больше одного, поскольку, как было отмечено выше, существуют неизометричные друг другу, полные, ограниченные или неограниченные метрические пространства, находящиеся на нулевом расстоянии друг от друга.

Известно также, что и между метрическими пространствами, находящимися на ненулевым расстоянии друг от друга, может не существовать оптимальное соответствие, см. пример 9. Однако, в этом примере можно пополнить одно из пространств так, чтобы оптимальное соответствие существовало. Пример полных метрических пространств, находящихся на строго положительном расстоянии друг от друга, между которыми нет оптимального соответствия, получен в [16], а в работе [14] построен пример таких ограниченных метрических пространств. Также в последнем примере показано, что у используемых метрических пространств отсутствуют 0-модификации, то есть, между ними, или между их 0-модификациями отсутствует линейная геодезическая. Таким образом, технологию построения линейной геодезической не получится обобщить так, чтобы её можно было провести между всеми метрическими пространствами, даже если рассматривать их с точностью до нулевого расстояния Громова—Хаусдорфа.

Как мы отметили выше, оптимальное соответствие, если оно существует, всегда позволяет построить линейную геодезическую. Очевидно, что метод построения геодезической по хаусдорфовой реализации, полученный в [15] не работает для произвольного объемлющего метрического пространства. В качестве примера можно рассмотреть одноточечное пространство, окружность и их дизъюнкнтное объединение так, чтобы получилась оптимальная хаусдорфова реализация. С другой стороны, если удалось изометрично вложить два метрических компакта в геодезическое метрическое пространство так, чтобы получилась оптимальная хаусдорфова реализация, то между ними можно построить кратчайшую геодезическую в метрике Громова–Хаусдорфа из подмножеств этого объемлющего пространства, см [15]. Возникает вопрос: всегда ли среди оптимальных хаусдорфовых реализаций имеется такая, по которой можно построить соответствующую геодезическую? На данный момент ответ на этот вопрос нам не известен, однако, даже если такой алгоритм существует, то оптимальная хаусдорфова реализация существует не обязана.

В [7] построена пара полных метрических пространств X и Y, у которых не существует оптимальной хаусдорфовой реализации. Однако, как будет показано в настоящей работе, у этих пространств существуют такие 0-модификации $\tilde{X}$ и $\tilde{Y}$, что между $\tilde{X}$ и $\tilde{Y}$ оптимальная хаусдорфова реализация есть. Тем не менее мы построим такие два метрических пространства, находящиеся на конечном расстоянии Громова–Хаусдорфа, что между ними не существует хаусдорфовой реализации, у них нет 0-модификаций, тем не менее, эти пространства соединяются кратчайшей геодезической. Тем самым, существование геодезической не влечет ни существование оптимального соответствия, ни существования оптимальной хаусдорфовой реализации даже для 0-модификаций.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю, доктору физико-математических наук, профессору А.А. Тужилину, а также доктору физико-математических наук, профессору А.О. Иванову за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

2. Предварительные результаты

Сначала введем несколько основных обозначения. Обозначим через $\mathbb{R}_{\geq 0}$ множество неотрицательных действительных чисел, а через $\mathbb{R}_+$ множество положительных действительных чисел. Пусть (X, ρ) — произвольное метрическое пространство и $x, y \in X$. Расстояние между точками x и y обозначается как $|xy| = \rho(x, y) = \mathrm{d}^X(x, y)$. Пусть $U_\varepsilon(a)$ — открытый шар с центром a радиуса ε и $U_\varepsilon(A) = \bigcup\limits_{a \in A} U_\varepsilon(a)$ — ε-окрестность непустого подмножества A, а $S_\varepsilon(a)$ — сфера радиуса ε с центром в точке a. Обозначим через $\#X$ мощность X и для любого $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ и метрического пространства X положим $a\,X = (X, a\,\mathrm{d}^X)$.

Определение 1. *Пусть A, B — непустые подмножества метрического пространства X. **Расстоянием Хаусдорфа** называется следующая величина*

$$\mathrm{d}_H^X(A, B) = \inf\Big\{r \colon A \subset U_r(B) \,\&\, B \subset U_r(A)\Big\}.$$

Определение 2. *Пусть A, B, X — метрические пространства. Если A изометрично $\tilde{A}$ и B изометрично $\tilde{B}$, где $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ — подпространства X, то тройку $(\tilde{A}, \tilde{B}, X)$ называют **реализацией пары** (A, B).*

Определение 3. ***Расстояние Громова–Хаусдорфа** между двумя метрическими пространствами A, B — это нижняя грань хаусдорфовых расстояний среди всех реализаций пары (A, B). Другими словами,*

$$\mathrm{d}_{\mathrm{GH}}(A, B) = \inf\big\{r : \textit{существует реализация } (\tilde{A}, \tilde{B}, X) \textit{ пары } (A, B), \textit{ что } d_H(\tilde{A}, \tilde{B}) \leq r\big\}.$$

Определение 4. ***Соответствием** между двумя множествами A и B называется такое подмножество $R \subset A \chi B$, что для любых $a \in A$ и $b \in B$ существует $\tilde{a} \in A$ и $\tilde{b} \in B$, для которых $(a, \tilde{b})$, $(\tilde{a}, b)$ принадлежат R.*

Далее, aRb означает, что a и b находятся в соответствии R, а множество всех соответствий между метрическими пространствами A, B обозначается как $\mathcal{R}(A, B)$.

Определение 5. *Пусть R — соответствие между метрическими пространствами A, B. Его **искажение** определяется выражением*

$$\operatorname{dis} R = \sup\Big\{\big|d_X(a, a') - d_Y(b, b')\big| \colon \, aRb \ \textit{ и } \ a'R'\Big\}.$$

Предложение 8 ([1]). *Для любых метрических пространств A и B справедливо равенство:*

$$2\,\mathrm{d_{GH}}(A,B) = \inf_{R\in\mathcal{R}(A,B)} \operatorname{dis} R.$$

Определение 6. *Если искажение соответствия R минимально с точки зрения включения среди всех соответствий $\mathbb{R}(A,B)$, то оно называется* ***неприводимым***. *В случае, если выполнено $dis(R) = 2\,\mathrm{d_{GH}}(A,B) < \infty$, то такое соответствие называется* ***оптимальным***. *Множество оптимальных соответствий между метрическими пространствами A, B обозначается как $\mathbb{R}_{opt}(A,B)$.*

Определение 7. *Диаметром метрического пространства A называется величина*

$$\operatorname{diam}(A) = \operatorname{supp} a, a' \in Ad(a,a')$$

Предложение 9 ([1]). *Для произвольных ограниченных A, B имеем следующие неравенства:*

$$\big|\operatorname{diam}(A) - \operatorname{diam}(B)\big| \le 2\,\mathrm{d_{GH}}(A,B) \le \max\big(\operatorname{diam}(A), \operatorname{diam}(B)\big)$$

В данной работе кратчайшие кривые называются геодезическими.

Теорема 1 ([8]). *Если R — оптимальное соответствие между метрическими пространствами A и B, то кривая $\gamma\colon [0,1] \to \mathcal{GH}$, где $\gamma(t) = (R, d_t)$ и $d_t((a,b),(a',b')) = (1-t)d_A(a,a') + t\,\mathrm{d}^B(b,b')$, — геодезическая, соединяющая метрические пространства A, B.*

Такие геодезические принято называть ***линейными***.

Определение 8. ***Класс Громова–Хаусдорфа*** *$\mathcal{GH}$ является собственным классом (в смысле теории множеств фон Неймана–Бернейса–Гёделя) всех метрических пространств, рассматриваемых с точностью до изометрии.*

Теорема 2 ([1]). *Расстояние Громова–Хаусдорфа является обобщенной псевдометрикой на $\mathcal{GH}$.*

Через $\triangle_n$ обозначим n-точечный ***симплекс***, т.е. такое метрическое пространство мощности n, что расстояния между различными его точками равны 1.

Определение 9. ***Оптимальной хаусдорфовой реализацией*** *двух метрических пространств A, B будем называть такую тройку $(X, \tilde{A}, \tilde{B})$, реализующую пару A, B, что $\mathrm{d}_H^X(A,B) = \mathrm{d_{GH}}(A,B)$. Если расстояние Громова–Хаусдорфа не совпадает с расстоянием Хаусдорфа между $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$, то мы называем такую тройку* ***хаусдорфовой реализацией***. *В дальнейшем мы будем опускать $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$, если изометрические копии пространств A и B понятны из контекста.*

Заметим, что изометричное вложение $\varphi\colon A \to B$ также задает хаусдорфову реализацию, где $X = B$.

Определение 10. ***Спектр*** *метрического пространства – это совокупность всех расстояний между точками (включая нулевое).*

2.1. Пространства общего положения

Определение 11. *Пусть $X \in \mathcal{GH}$. Обозначим через $S(X)$ множество всех биективных отображений X в себя. Введем следующие обозначения:*

$$\sigma(X) = \inf\left\{|xx'| \mid x \neq x';\ x, x' \in X\right\},$$
$$\mathrm{t}(X) = \inf\left\{|xx'| + |x'x''| - |xx''| \mid x \neq x' \neq x'' \neq x; x, x', x'' \in X\right\},$$
$$\varepsilon(X) = \inf\left\{\mathrm{dis}(f) \mid f \in S(X), f \neq id\right\},$$
$$\varepsilon'(X) = \inf\left\{\mathrm{dis}(f) \mid f \in S(X) \setminus ISO(X)\right\}.$$

Определение 12. ***Пространство общего положения*** *— это метрическое пространство X, в котором $\sigma(X)$, $\mathrm{t}(X)$, $\varepsilon(X)$ положительны.*

Определение 13. ***Пространство обобщенного общего положения*** *— это метрическое пространство X, в котором $\sigma(X), \varepsilon'(X)$ положительны.*

Теорема 3 ([10]). *Если пространство M удовлетворяет условиям $\varepsilon(M) > 0$ и $\sigma(M) > 0$, то для произвольного $\varepsilon > 0$ такого, что $\varepsilon < \sigma(M)/4$, $\varepsilon < \varepsilon(M)/4$, метрического пространства X и соответствия $R \in \mathcal{R}(M, X)$, для которых выполнено $\mathrm{dis}(R) < 2\varepsilon$, R является оптимальным соответствием.*

Замечание 9. *Теорема 3 остается верной, если вместо $e(M)$ рассматривать $e'(M)$. Чтобы доказать это, достаточно заметить, что соответствия, отличающиеся изометрией пространства M, имеют одинаковые искажения. Таким образом, условие отделения от тождественного для всех нетождественных отображений можно заменить условием отделения от изометрии, которое совпадает с условием $\varepsilon'(M) > 0$.*

3. Про 0-модификации

Начнем с определения.

Определение 14. *Метрическое пространство Z называется* ***0-модификацией*** *метрического пространства X, если $\mathrm{d_{GH}}(Z, X) = 0$ и $X \neq Z$.*

У компактных метрических пространств 0-модификации практически очевидны.

Теорема 4 ([14]). *Пространство Y является 0-модификацией компактного метрического пространства X тогда и только тогда, когда $\overline{Y} = X$, где $\overline{Y}$ — пополнение метрического пространства Y.*

Заметим, что если пополнение метрического пространства X конечно, то и пространство X конечно. Следовательно, имеем следующую теорему.

Следствие 1. *Конечные метрические пространства не имеют 0-модификаций.*

Предложение 10. *Если пространство M удовлетворяет условиям $\varepsilon'(M) > 0$ и $\sigma(M) > 0$, то множество его 0-модификаций пусто.*

Доказательство. Предположим противное, пусть M' является 0-модификацией. Воспользуемся замечанием 9, положив $X = M'$, и искажение R с достаточно малым искажением (такое существует, так как расстояние между ними равно нулю). Значит, между M и M' существует оптимальное соответствие, то есть, соответствие с искажением равным нулю. Следовательно, пространства M и M' изометричны. Противоречие. □ Заметим, что расстояние

Громова–Хаусдорфа между метрическим пространством и его пополнением равно нулю. Следовательно, для достаточно большого класса метрических пространств существует несчетное число 0-модификаций, в частности, если из интервала $(0,1)$ убрать разное количество рациональных точек, то получатся неизометричные пространства (количество компонент линейной связности будет различно), а расстояние между ними, как и расстояние между интервалом и интервалом без точек, будет равно нулю. Теперь выясним, между какими 0-модификациями существует оптимальное соответствие, а между какими существует оптимальная хаусдорфова реализация.

Предложение 11. *Если между пространствами, находящихся на нулевом расстоянии Громова–Хаусдорф а существует оптимальное соответствие, то они изометричны.*

Доказательство. Это утверждение практически очевидно. Действительно, если существует оптимальное соответствие, то его искажение равно нулю и оно является изометрией. В частности, оно является биекцией, так как если двум различным точкам соответствуют различные, то искажение соответствия будет строго больше нуля. $\square$

Теорема 5. *Между двумя метрическими пространствами, находящимися на нулевом расстоянии, существует оптимальная хаусдорфова реализация тогда и только тогда, когда их пополнения изометричны. В частности, между неизометричными полными пространствами, находящимися на нулевом расстоянии, не существует оптимальной хаусдорфовой реализации.*

Доказательство. Рассмотрим оптимальную хаусдорфову реализацию X, и пополним ее, получив X'. Тем самым мы пополнили $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$, получив $\tilde{A}'$ и $\tilde{B}'$ лежащие в X'. Для каждой точки a из $\tilde{A}$ существует последовательность точек $a_n \in \tilde{A}$, для которых верно $\mathrm{d}^{X'}(a_n, a) \le 1/n$. Так как $\mathrm{d}_H^X(\tilde{A}, \tilde{B}) = \mathrm{d}_H^{X'}(\tilde{A}, \tilde{B}) = 0$, то существует последовательность точек $b_n \in \tilde{B} \subseteq B$, для которых верно $\mathrm{d}^{X'}(a_n, b_n) \le 1/n$, в силу неравенства треугольника, имеем $\mathrm{d}^{X'}(a, b_n) < 2/n$. То есть, b_n сходится, а так как $\tilde{B}'$ полное, то сходится к некоторой точке $b \in \tilde{B}'$, причем $\mathrm{d}^{X'}(a, b) = 0$. Мы доказали, что для каждой точки из $\tilde{B}'$ существует точка из B на нулевом расстоянии, аналогично доказывается для B. $\square$ Таким образом, все метрические пространства, находящиеся на нулевом расстоянии Громова–Хаусдорфа друг от друга, разбиваются на классы эквивалентности так, что между любыми двумя элементами из одного класса существует оптимальная Хаусдорфова реализация, а между различными – нет.

4. Преимущества хаусдорфовой реализации над соответствиями

Для начала напомним, что существование оптимального соответствия влечет существование оптимальной хаусдорфовой реализации.

Предложение 12 ([1]). *Если существует оптимальное соответствие между двумя метрическими пространствами, то существует и оптимальная хаусдорфова реализация.*

Пример двух метрических пространств, между которыми не существует оптимального соответствия, но существует оптимальная хаусдорфова реализация практически очевиден — достаточно взять некоторое неполное метрическое пространство и его пополнение. Если между ними существует оптимальное соответствие, то они изометричны, что неверно (хотя бы потому, что одно из них полное, а другое нет). Тем не менее каноническое вложение исходного пространства в его пополнение представляет собой оптимальную хаусдорфову реализацию.

Теперь покажем, что существует пара метрических пространств, находящихся на ненулевом расстоянии Громова–Хаусдорфа, между которыми существует оптимальная хаусдорфова реализация, но не существует оптимального соответствия.

Замечание 1. *Пусть* $A = (0,1)$, *а* $B = [0,2]$, *со стандартной метрикой вещественной прямой. По формуле* (9) *имеем* $\mathrm{d_{GH}}(A,B) \geq 1/2|\operatorname{diam}(A) - \operatorname{diam}(B)| = 1/2$. *Рассмотрим вложение* $(0,1) \to [0,2]$, $t \to t + 1/2$, *оно, как уже обсуждалось выше, задает хаусдорфову реализацию. Обозначим это пространство через* X. *Тогда* $\mathrm{d}_H^X(A,B) = 1/2$, *следовательно,* $\mathrm{d_{GH}}(A,B) = 1/2$ *и указанная хаусдорфова реализация является оптимальной. Пусть существует оптимальное соответствие* R *между* A *и* B. *Тогда рассмотрим точки* a *и* a' *из* A, *для которых верно* aRb_0 *и* $a'Rb_2$, *где* b_0 *и* b_2 *— это крайние точки из* B. *Тогда получаем* $\operatorname{dis}(R) \geq \big||b_0b_2| - |aa'|\big| > |2-1| = 1$ *(последний знак строгий, так как равенство* $|aa'| = 1$ *не достигается ни на каких точках из* A*). Получили противоречие, так как* $1 < \operatorname{dis}(R) = 1 = 2\,\mathrm{d_{GH}}(A,B)$.

Отмечу, что существование полных метрических пространств, удовлетворяющих примеру 1 является открытым вопросом.

Замечание 2. *Может показаться, что в общем случае верен следующий факт: Пусть* X,Y *– два компактных метрических пространства, а* X' *таково, что его пополнение совпадает с* X, *но* $X \neq X'$ *с точностью до изометрии. Тогда между* X' *и* Y *не существует оптимального соответствия. Однако, этот факт неверен в общем случае: достаточно рассмотреть* $Y = \triangle_1$ *и* X *– произвольное компактное метрическое пространство, для которого существует* X', *обсуждавшийся выше. Но для любого метрического пространства* Z, *множество оптимальных соответствий* $\mathbb{R}_{opt}(\triangle_1, Z)$ *непусто.*

4.1. Пример Хансена

Хансен показал, что существует пара метрических пространств, между которыми не существует оптимальной хаусдорфовой реализации. Покажем, что в его случае геодезическая может быть построена с использованием 0-модификаций. Для начала напомним результат Хансена.

Замечание 3 ([7]). *Не существует оптимальной хаусдорфовой реализации для пространств* N *и* M, *где* $M = 3\triangle_2$, *а* $N = \{\mathbb{N}, \mathrm{d}^N\}$, *где* $\mathrm{d}^N(i,j) = 1 - 2^{-max(i,j)}$ *для* $i \neq j$. *Более того,* $\mathrm{d_{GH}}(N,M) = 1$.

Теперь построим такую 0-модификацию пространства N, что между модифицированным пространством и M существует не только оптимальная хаусдорфова реализация, но и оптимальное соответствие.

Предложение 13. *Существует такое метрическое пространство* $\tilde{N}$, *что* $\mathrm{d_{GH}}(N,\tilde{N}) = 0$ *и множество оптимальных соответствий* $\mathbb{R}_{opt}(\tilde{N}, M)$ *не является пустым.*

Доказательство. Будем строить $\tilde{N}$ вида $\big\{\mathbb{N} \cup \{p\}, \tilde{\mathrm{d}}\big\}$, где $\tilde{\mathrm{d}}\ |_{\mathbb{N}} = \mathrm{d}^N$ из примера 3, а $\tilde{\mathrm{d}}(p,i) = 1$ для всех $i \in N$. Это действительно будет метрическим пространством, так как все ненулевые расстояния лежат в отрезке $[1/2, 1]$. Покажем, что расстояние между N и $\tilde{N}$ равно нулю. Рассмотрим следующее соответствие между N и $\tilde{N}$: $R_n = \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}}(i,i) \cup (n,p)$. Его искажение

$$\operatorname{dis}(R_n) = \sup_{i\in\mathbb{N}}\big|\tilde{\mathrm{d}}(p,i) - \mathrm{d}^N(n,i)\big| = \sup_{i\in\mathbb{N}}\big|1 - (1 - 2^{-max(n,i)})\big| = 2^{-n}.$$

Получаем $\operatorname{dis}(R_n) \to 0$, когда $n \to \infty$. То есть, $\mathrm{d_{GH}}(N,\tilde{N}) = 0$. В силу неравенства треугольника, $\mathrm{d_{GH}}(\tilde{N}, M) = \mathrm{d_{GH}}(N,M) = 1$. Наконец, построим оптимальное соответствие между $\tilde{N}$ и

$M = \{p_1, p_2\}$. Рассмотрим $R = \bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} \{(p_1, i)\} \cup \{(p_2, p)\}$. Имеем

$$\operatorname{dis}(R) = \max\Big(\sup_{i,j\in\mathbb{N}} \big|\mathrm{d}^M(p_1,p_1) - d_{\tilde{N}}(i,j)\big|, \sup_{k\in\mathbb{N}} \big|\mathrm{d}^M(p_1,p_2) - d_{\tilde{N}}(p,k)\big|\Big) =$$
$$= \max\Big(\sup_{i,j\in\mathbb{N}} \big|0 - (1 - 2^{-max(i,j)})\big|, \sup_{k\in\mathbb{N}} \big|3 - 1\big|\Big) = 2.$$

То есть $R \in \mathbb{R}_{opt}(\tilde{N}, M)$, так как $\operatorname{dis}(R) = 2\,\mathrm{d}_{\mathrm{GH}}(\tilde{N}, M) = 2$. Предложение доказано. $\square$ Отмечу, что в этом примере также построена пара полных неизометричных метрических пространств N и $\tilde{N}$, находящихся на нулевом расстоянии. Может показаться, что для каждой пары пространств можно подобрать их 0-модификации так, чтобы между ними существовало оптимальное соответствие и между ними можно было построить геодезическую. Однако, в работе [14] показана неверность данного предположения.

4.2. Расширение примера Хансена

Покажем, что существуют такие пространства A и B, что

(1) $\mathrm{d}_{\mathrm{GH}}(A, B) > 0$,

(2) для любых A' и B', $\mathrm{d}_{\mathrm{GH}}(A, A') = 0$ и $\mathrm{d}_{\mathrm{GH}}(B, B') = 0$, выполнено $H_{opt}(A', B') = \emptyset$.

Докажем, что построенные в [14] пространства удовлетворяют указанным выше свойствам.

Алгоритм 1. *Пространством A является $\triangle_2$. Пространство B строится следующим образом. Возьмем $C = (\mathbb{N}, \mathrm{d}^C)$, где*

$$d_C(i,j) = \begin{cases} 0, & i = j, \\ 1/4 - 1/2^{\max(i,j)+2}, & i \neq j. \end{cases}$$

Пространство B получается из пространства C добавлением для каждой пары $i < j$ новой точки $p_{i,j}$, а расстояние от этой точки для других точек равно

(1) $\mathrm{d}^B(p_{i,j}, j) = \delta$,

(2) $\mathrm{d}^B(p_{i,j}, i) = \mathrm{d}^C(i,j) - \delta$,

(3) $\mathrm{d}^B(p_{i,j}, k) = \mathrm{d}^C(j,k) + \delta$ *для* $k \notin \{i, j\}$,

(4) $\mathrm{d}^B(p_{i,j}, p_{k,l}) = \mathrm{d}^C(l,j) + 2\delta$ *для* $j \neq k$, $i \neq l$ *и* $p_{i,j} \neq p_{k,l}$,

(5) $\mathrm{d}^B(p_{i,j}, p_{j,l}) = \mathrm{d}^C(j,l)$,

где $\delta = 1/2023$. В работе [14] показано, что

(1) d^B *является метрикой,*

(2) $\mathrm{d}_{\mathrm{GH}}(A, B) = 3/8 + \delta/2$,

(3) *не существует 0-модификаций A и B.*

Теорема 6. *Не существует оптимальных хаусдорфовых реализаций для пространств A и B, построенных выше.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть E — искомая реализация и $A = \{u, v\}$. Так как $\mathrm{d}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{E}}(A, B) = 3/8+\delta/2$, то у каждой точки из B должна быть точка из A на расстоянии, не превышающем $3/8 + \delta/2$.

Если для некоторой точки $p \in B$ верно, что $\mathrm{d}^E(p, u) \le 3/8+\delta/2$, то в силу неравенства треугольника выполнено неравенство $\mathrm{d}^E(p, v) \ge 1-(3/8+\delta/2) > 3/8+\delta/2$. Значит, у каждой точки из B существует ровно одна точка из A на расстоянии не превышающем $3/8 + \delta/2$, а оставшаяся точка из A будет находиться на расстоянии не меньшем, чем $5/8 - \delta/2$. То есть, все точки из B разбиваются на два класса: $\{p \in B\colon\ \mathrm{d}^E(p, u) \le 3/8 + \delta\}$ и $\{p \in B\colon\ \mathrm{d}^E(p, v) \le 3/8 + \delta\}$, причем эти два класса не пересекаются.

Под i, j, k будем обозначать произвольные точки из C. Пусть, без ограничения общности, для $1 \in C \subset B$ выполнено $\mathrm{d}^E(1, u) \le 3/8 + \delta/2$. Покажем, что если $d(i, u) \le 3/8 + \delta/2$, то для любого $p_{i,j} \in B$ верно $d(p_{i,j}, u) \le 3/8+\delta/2$. Предположим обратное, то есть $d(p_{i,j}, v) \le 3/8+\delta/2$, тогда

$$1 = d(u, v) \le d(u, i) + d(i, p_{i,j}) + d(p_{i,j}, v) \le 3/8 + \delta/2 + (1/4 - 2^{-j-2}) - \delta + 3/8 + \delta/2 < 1,$$

противоречие.

Покажем теперь, что если $d(u, p_{i,j}) \le 3/8 + \delta/2$, то и $d(u, j) \le 3/8 + \delta/2$. Действительно, если $d(u, j) > 3/8 + \delta/2$, то $d(v, j) \le 3/8 + \delta/2$. Однако,

$$1 = d(u, v) \le d(u, p_{i,j}) + d(p_{i,j}, j) + d(j, v) \le 3/8 + \delta/2 + \delta + 3/8 + \delta/2 < 1,$$

противоречие.

Получаем, что для каждой точки $b \in B$ верно неравенство $d(u, b) \le 3/8 + \delta/2$. Следовательно, для каждой точки $b \in B$ выполнено $d(v, b) \ge 5/8 - \delta/2$, поэтому такой оптимальной реализации не существует. □

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Burago D., Burago Y., Ivanov S. A course in metric geometry. Providence: American Mathematical Society, 2021. 416 p. (Graduate Studies in Mathematics; vol. 33).

2. Blumenthal L. Theory and applications of distance geometry // The Mathematical Gazette. 1954. Vol. 38, no. 324. P. 213-220.

3. Chikin V.M. Functions preserving metrics, and Gromov-Hausdorff space // Moscow University Mathematics Bulletin. 2021. Vol. 76. P. 154-160.

4. Chowdhury S., Mémoli F. Explicit geodesics in Gromov-Hausdorff space // Electronic Research Announcements. 2018. Vol. 25. P. 48-59.

5. Bogataya S.I., Bogatyy S.A., Redkozubov V.V., Tuzhilin A.A. Gromov-Hausdorff class: its completeness and cloud geometry // Topology and its Applications. 2023. Vol. 329. P. 108771.

6. Gromov M. Structures métriques pour les variétés riemanniennes. Paris: CEDIC, 1981. 120 p.

7. Hansen J. Is Gromov Hausdorff distance realized when one space is compact? // Math Stack Exchange. 2022. URL: https://math.stackexchange.com/questions/4552398 (дата обращения: 22.11.2024).

8. Ivanov A.O., Iliadis S., Tuzhilin A.A. Realizations of Gromov-Hausdorff distance // ArXiv e-prints. 2016. arXiv:1603.08850 [math.MG].

9. Ivanov A.O., Nikolaeva N.K., Tuzhilin A.A. The Gromov-Hausdorff metric on the space of compact metric spaces is strictly intrinsic // Mathematical Notes. 2016. Vol. 100, no. 6. P. 883-885.

10. Ivanov A.O., Tuzhilin A.A. Isometric embeddings of bounded metric spaces into the Gromov-Hausdorff class // Sbornik: Mathematics. 2022. Vol. 213, no. 10. P. 1400-1414.

11. Grigorjev D.S., Ivanov A.O., Tuzhilin A.A. Gromov-Hausdorff distance to simplexes // Chebyshevskii Sbornik. 2019. Vol. 20, no. 2. P. 100-114.

12. Borsík J., Doboš J. On metric preserving functions // Real Analysis Exchange. 1988. Vol. 13, no. 2. P. 285-293.

13. Vikhrov A. Denseness of metric spaces in general position in the Gromov-Hausdorff class // Topology and its Applications. 2024. Vol. 342. P. 108771.

14. Vikhrov A. Geometry of linear and nonlinear geodesics in the proper Gromov-Hausdorff class // Matematički Vesnik. 2024. Vol. 76, no. 1. P. 1-15.

15. Mémoli F., Wan Z. Characterization of Gromov-type geodesics // Differential Geometry and its Applications. 2023. Vol. 88. P. 102006. DOI: 10.1016/j.difgeo.2023.102006.

16. Ghanaat P. Gromov-Hausdorff distance and applications // Metric Geometry Les Diablerets. 2013. 25-30 August. P. 1-15.

REFERENCES

1. Burago, D, Burago, Y, and Ivanov, S. 2021, *A course in metric geometry*. Graduate Studies in Mathematics, 33. Providence, RI: American Mathematical Society.

2. Blumenthal, L. 1954, “Theory and applications of distance geometry”, *The Mathematical Gazette*, 38(216).

3. Chikin, V.M. 2021, “Functions preserving metrics, and Gromov–Hausdorff space”, *Moscow University Mathematics Bulletin*, 76, pp. 154–160.

4. Chowdhury, S. and Mémoli, F. 2018, “Explicit geodesics in Gromov–Hausdorff space”, *Electronic Research Announcement*, 25, pp. 48–59.

5. Bogataya, S.I., Bogatyy, S.A., Redkozubov, V.V. and Tuzhilin, A.A. 2023, “Gromov–Hausdorff class: its completeness and cloud geometry”, *Topology and its Applications*, 329.

6. Gromov, M. 1981, *Structures métriques pour les variétés riemanniennes*. Textes Mathématiques, no. 1. Paris: CEDIC.

7. Hansen, J. (n.d.). “Is Gromov–Hausdorff distance realized when one space is compact?“”, *Math Stack Exchange*. Available at: https://math.stackexchange.com/questions/4552398/is-gromov-hausdorff-distance-realized-when-one-space-is-compact. (Accessed: 22 November 2024).

8. Ivanov, A.O., Iliadis, S. and Tuzhilin, A.A. 2016, “Realizations of Gromov–Hausdorff distance”, *ArXiv e-prints*, arXiv:1603.08850.

9. Ivanov, A.O., Nikolaeva, N.K. and Tuzhilin, A.A. 2016, “The Gromov–Hausdorff metric on the space of compact metric spaces is strictly intrinsic”, *Mathematical Notes*, 100, pp. 883–885.

10. Ivanov, A.O. and Tuzhilin, A.A. 2022, "Isometric embeddings of bounded metric spaces into the Gromov–Hausdorff class", *Sbornik: Mathematics*, 213(10), pp. 1400–1414.

11. Grigorjev, D.S., Ivanov, A.O. and Tuzhilin, A.A. 2019, "Gromov–Hausdorff distance to simplexes", *Chebyshevskii Sbornik*, 20(2), pp. 100–114.

12. Borsík, J. and Doboš, J. 1988, "On metric preserving functions", *Real Analysis Exchange*.

13. Vikhrov, A. 2024, "Denseness of metric spaces in general position in the Gromov–Hausdorff class", *Topology and its Applications*, 342.

14. Vikhrov, A. 2024, "Geometry of linear and nonlinear geodesics in the proper Gromov–Hausdorff class", *MATEMATIČKI VESNIK*, 342.

15. Mémoli, F. and Wan, Z. 2023, "Characterization of Gromov-type geodesics", *Differential Geometry and its Applications*, 88, Article 102006. Available at: https://doi.org/10.1016/j.difgeo.2023.102006.

16. Ghanaat, P. (2013) "Gromov-Hausdorff distance and applications", *Metric Geometry Les Diablerets*, 25–30 August.

Получено: 14.12.2024
Принято в печать: 07.04.2025

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 26. Выпуск 2.

УДК 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-2-61-70

Представления действительных чисел

А. Гияси, И. П. Михайлов, В. Н. Чубариков

Восьмидесятилетию со дня рождения
академика Анатолия Тимофеевича Фоменко
посвящается

Гияси Азар — кандидат физико-математических наук, Университет им. Алламе Табатабаи (Иран).
e-mail: azarghyasi@atu.ac.ir
Михайлов Илья Петрович — Казанский авиационный институт (г. Лениногорск).
e-mail: chubarik2020@mail.ru
Чубариков Владимир Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: chubarik2020@mail.ru

Аннотация

В работе доказаны теоремы о представлении действительных чисел α с помощью бесконечной итерации последовательности положительных монотонных функций $\alpha_n = f_n(x_n)$ в виде

$$\alpha = \lambda_0 + f_1(\lambda_1 + f_2(\lambda_2 + f_3(\lambda_3 + \dots))),$$

где «цифры» $\lambda_n,\ n \geq 0$, и “остатки”

$$r_n = r_n(\alpha) = f_{n+1}(\lambda_{n+1} + f_{n+2}(\lambda_{n+2} + f_{n+3}(\lambda_{n+3} + \dots))),\ n \geq 0,$$

определяются по следующим рекуррентным формулам

$$\lambda_0 = [\alpha],\ r_0 = \{\alpha\},$$

$$\lambda_n = [\varphi_n(r_{n-1}(\alpha))],\ r_n = \{\varphi(r_{n-1})\},$$

причем $\{z\}$ и $[z]$ обозначают соответственно дробную и целую части действительного числа z и $x_n = \varphi_n(\alpha_n),\ n \geq 1,$ — обратные функции для $\alpha_n = f_n(x_n)$.

В частности, представление числа α с помощью функции $f(x) = \frac{1}{x}$ приводит к цепной дроби для числа α. Общий случай, когда $f(x)$ — убывающая функция, был рассмотрен Б. Х. Биссинжером (1944) и А. Реньи (1957). Для функции $f(x) = \frac{x}{q}$ при $q \geq 2$ — натуральном числе получается q-адическое представление вида $\alpha = \sum \lambda_n q^{-n}$, где цифры $\lambda_n,\ n \geq 1$, могут принимать все целые значения от 0 до $q-1$. Случай возрастающей функции $f(x)$ исследовался С. И. Эвереттом (1946) и А. Реньи (1957). Представление α для $f(x) = \frac{x}{\theta}$ при нецелом $\theta > 1$ изучалось А. Реньи (1957) и А. О. Гельфондом (1959). В настоящей работе для последовательности функций $f_n(x) = \frac{x}{q_n}, q_n \geq 2,$ — целые числа, исследуется представление α по мультипликативной системе чисел при $n \geq 1$ в виде

$$\alpha = \lambda_0 + \frac{\lambda_1}{q_1} + \dots + \frac{\lambda_n}{q_1 \dots q_n} + \frac{x_n}{q_1 \dots q_n},$$

где цифры λ_n могут принимать целые значения от 0 до $q_n - 1$. А. Х. Гияси (2007) обобщила теорему Гельфонда, касающуюся мультипликативной системы чисел. Пусть

$\theta_n,\ n \geq 1,$ — последовательность действительных чисел, каждое из которых больше единицы. Тогда любое действительное число $\alpha,\ 0 < \alpha < 1$, может быть представлено в форме $\alpha = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{q_1 \cdots q_k} + \frac{x_n}{q_1 \cdots q_n},\ n \geq 1$, где последовательность x_n остаточных членов определяется рекуррентно

$$x_0 = \{\alpha\},\ x_1 = \{\theta_1 x_0\}, \dots, x_n = \{\theta_n x_{n-1}\}, \dots,$$

и последовательность целых чисел λ_n определяется по правилу

$$\lambda_0 = [\alpha],\ \lambda_1 = [\theta_1 x_0], \dots, \lambda_n = [\theta_n x_{n-1}], \dots .$$

Ключевые слова: q-адическое представление, непрерывная (цепная) дробь, мультипликативная система чисел.

Библиография: 10 названий.

Для цитирования:
Гияси, А., Михайлов, И.П., Чубариков, В.Н. Представления действительных чисел // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 2, с. 61–70.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 26. No. 2.

UDC 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-2-61-70

Representations for real numbers

A. Ghyasi, I. P. Mikhailov, V. N. Chubarikov

Giyasi Azar — candidate of physical and mathematical sciences, Allameh Tabataba'i University (Iran).
e-mail: aoivamech.math.msu.su
Mikhailov Ilya Petrovich — Kazan Aviation Institute (Leninogorsk).
e-mail: chubarik2020@mail.ru
Chubarikov Vladimir Nikolaevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: chubarik2020@mail.ru

Abstract

In this paper theorems on the representations of real numbers α by using infinite iteration of a sequence of positive monotonic functions $\alpha_n = f_n(x_n)$ in the form

$$\alpha = \lambda_0 + f_1(\lambda_1 + f_2(\lambda_2 + f_3(\lambda_3 + \dots))),$$

where “digits” $\lambda_n,\ n \geq 0$, and “remainders”

$$r_n = r_n(\alpha) = f_{n+1}(\lambda_{n+1} + f_{n+2}(\lambda_{n+2} + f_{n+3}(\lambda_{n+3} + \dots))),\ n \geq 0,$$

are defined by the following recurrent formulas

$$\lambda_0 = [\alpha],\ r_0 = \{\alpha\},$$

$$\lambda_n = [\varphi_n(r_{n-1}(\alpha))],\ r_n = \{\varphi(r_{n-1})\},$$

moreover $\{z\}$ and $[z]$ denote accordingly the fractional and the integral parts of the real number z, and $x_n = \varphi_n(\alpha_n),\ n \geq 1$, are inverse functions of $\alpha_n = f_n(x_n)$.

In particular, the representation of the number α by using function $f(x)=\frac{1}{x}$ leads to the continued fraction of the number α. The general case when $f(x)$ is decreasing function have been considered by B.H. Bissinger (1944) and A. Rényi (1957). For the function $f(x)=\frac{x}{q}$ as $q\geq 2$ is the natural number, is obtained q-adic the representation of the form $\alpha=\sum\lambda_n q^{-n}$, where digits $\lambda_n,\ n\geq 1$, can to receive all integral values from 0 to $q-1$. The case when $f(x)$ is increasing function have been investigated by C.I. Everett (1946) and A. Rényi (1957). The representation α for $f(x)=\frac{x}{\theta}$ is nonintegral number $\theta>1$ have been studied A. Rényi (1957) and A.O. Gelfond (1959). In the present paper for the sequence of functions $f_n(x)=\frac{x}{q_n}, q_n\geq 2$, are integer, has been investigated the representation of α on the multiplicative system of numbers as $n\geq 1$ in the form

$$\alpha=\lambda_0+\frac{\lambda_1}{q_1}+\cdots+\frac{\lambda_n}{q_1\dots q_n}+\frac{x_n}{q_1\dots q_n},$$

where digits λ_n can to receive integral values from 0 to q_n-1.

A. Kh. Ghyasi (2007) has been generalized Gelfond theorem concerning the multiplicative system of numbers. Let $\theta_n,\quad n\geq 1$, be a sequence of real numbers, each of which greater than 1. Then any real number $\alpha, 0<\alpha<1$, can be represented in the form $\alpha=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\lambda_k}{\theta_1\dots\theta_k}+\frac{x_n}{\theta_1\dots\theta_n},\ n\geq 1$, where the sequence x_n of error terms is defined by recurrence

$$x_0=\{\alpha\}, x_1=\{\theta_1 x_0\}, x_n=\{\theta_n x_{n-1}\},\dots,$$

and the sequence of integers λ_n is defined by the rule

$$\lambda_0=[\alpha],\ \lambda_1=[\theta_1 x_0],\dots,\lambda_n=[\theta_n x_{n-1}],\dots.$$

Keywords: q-adic expansion, continued fraction, multiplicative number system.

Bibliography: 10 titles.

For citation:

Ghyasi, A., Mikhailov, I.P., Chubarikov, V.N. 2025, “Representations for real numbers”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 2, pp. 61–70.

1. Введение

В настоящей работе даны обобщения теорем об однозначном представлении действительного числа в позиционной системе счисления и в виде цепной дроби [1]-[9].

Пусть $x=f(\alpha)$ неотрицательная монотонная функция при $\alpha\geq 1$ и $\alpha=\varphi(x)$ — обратная к ней функция. Для любого неотрицательного действительного числа α определим представление его в виде

$$\alpha=\lambda_0+f(\lambda_1+f(\lambda_2+\cdots+f(\lambda_n+r_n)\dots)),\quad n\geq 0, \tag{1}$$

где «цифры» $\bar{\lambda}_n=\bar{\lambda}_n(\alpha), n\geq 0,$ — целые числа,

$$\lambda_0=\lambda_0(\alpha)=[\alpha], r_0=r_0(\alpha)=\{\alpha\},$$

$$\lambda_n=\lambda_n(\alpha)=[\varphi(r_{n-1}(\alpha))], r_n=r_n(\alpha)=\{\varphi(r_{n-1}(\alpha))\},\quad n\geq 1,$$

причем $[\alpha]$ и $\{\alpha\}$ обозначают соответственно целую и дробную часть числа α ([1]-[3]).

Заметим, что $\lambda_n+r_n=\varphi(r_{n-1}),\quad \lambda_0+r_0=\alpha,\quad n\geq 1.$

Рассмотрим конкретные примеры функций $f(\alpha)$.

1. Пусть $q>1$ — натуральное число,

$$x=f(\alpha)=\frac{\alpha}{q},\quad \alpha=\varphi(x)=qx.$$

Тогда имеем
$$\lambda_n = [\varphi(r_{n-1}(\alpha))] = [qr_{n-1}(\alpha)], \quad r_n = \{qr_{n-1}(\alpha)\} = \{q^n\alpha\}.$$
Следовательно,
$$0 \le \lambda_n \le qr_{n-1}(\alpha) < q,$$
т.е. «цифры» λ_n могут принимать целые значения от 0 до $q-1$.

Тем самым получено q-адическое представление числа в виде
$$\alpha = \lambda_0 + \frac{\lambda_1}{q} + \dots + \frac{\lambda_n}{q^n} + \frac{r_n}{q^n} = S_n(\alpha) + \frac{r_n}{q^n}, \quad 0 \le r_n < 1.$$
В частности, последовательность $\{S_n(\alpha)\}$ равномерно сходится к α, а последовательность $r_n(\alpha)$ почти для всех $\alpha \in [0,1]$ в смысле меры Лебега равномерно распределена по модулю 1. По критерию Г. Вейля условие равномерного распределения по модулю единица последовательности $r_n(\alpha)$ эквивалентно тому, что для любой функции $g(x)$, интегрируемой по Риману на отрезке $[0,1]$, справедливо предельное равенство
$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} g(r_n) = \int\limits_0^1 g(t)\,dt.$$

2. Пусть $\theta > 1$ — нецелое действительное число,
$$x = f(\alpha) = \frac{\alpha}{\theta}, \quad \alpha = \varphi(x) = \theta x.$$
Положим
$$\lambda_0 = [\alpha],\ r_0 = \{\alpha\},$$
а при $n \ge 1$
$$\lambda_n = [\varphi(r_{n-1}(\alpha))] = [\theta r_{n-1}(\alpha)], \quad r_n = \{\theta r_{n-1}(\alpha)\} = \{\{\theta \dots \{\theta\alpha\}\dots\}\}.$$
Следовательно,
$$0 \le \lambda_n \le \theta r_{n-1}(\alpha) < \theta,$$
т.е. «цифры» λ_n могут принимать целые значения от 0 до $[\theta]$.

Тем самым получено представление числа α в виде
$$\alpha = \lambda_0 + \frac{\lambda_1}{\theta} + \dots + \frac{\lambda_n}{\theta^n} + \frac{r_n}{\theta^n} = S_n(\alpha) + \frac{r_n}{\theta^n}, \quad 0 \le r_n < 1.$$
В частности, последовательность $\{S_n(\alpha)\}, n \ge 1$, равномерно сходится к α [5].

3. Пусть $F_0 = F_1 = 1, F_{n+1} = F_n + F_{n-1},\ n \ge 1,$ — последовательность чисел Фибоначчи,
$$x_n = f_n(\alpha_n) = \frac{\alpha_n F_{n-1}}{F_n}, \quad \alpha_n = \varphi_n(x_{n-1}) = \frac{F_n}{F_{n-1}} x_{n-1}.$$
Положим
$$\lambda_0 = [\alpha] = 0,\ x_0 = \{\alpha\},$$
а при $n \ge 1$
$$\lambda_n = [\varphi_n(x_{n-1}(\alpha))] = \left[\frac{F_n}{F_{n-1}} x_{n-1}(\alpha)\right],$$
$$x_n(\alpha) = \{\varphi_n(x_{n-1}(\alpha))\} = \left\{\left\{\frac{F_0}{F_1}\dots\left\{\frac{F_{n-1}}{F_n}\alpha\right\}\dots\right\}\right\},\ 0 \le x_n < 1.$$

Следовательно,

$$0 \le \lambda_n \le \frac{F_n}{F_{n-1}} x_{n-1}(\alpha) < \frac{F_n}{F_{n-1}} < 2,$$

т.е. «цифры» λ_n могут принимать целые значения 0 и 1.

Тем самым получено представление числа α в виде

$$\alpha = \lambda_0 + \frac{F_0}{F_1}\left(\lambda_1 + \frac{F_1}{F_2}\left(\lambda_2 + \dots + \frac{F_{n-1}}{F_n}(\lambda_n + x_n)\dots\right)\right) =$$

$$= \lambda_1 + \frac{\lambda_2}{F_2} + \dots + \frac{\lambda_n}{F_n} + \frac{x_n}{F_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{F_n}.$$

([9], [10]).

4. Пусть теперь $x = f(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$, $\quad \alpha = \varphi(x) = \frac{1}{x}$. Тогда выражение (1) приводит к цепной дроби для числа x. Находим

$$\lambda_n = [\varphi(r_{n-1}(\alpha))] = \left[\frac{1}{r_{n-1}}\right], \quad r_n = \left\{\frac{1}{r_{n-1}}\right\}.$$

Таким образом при $r_0 r_1 \dots r_{n-1} \ne 0$ имеем цепную дробь вида

$$\alpha = \lambda_0 + \cfrac{1}{\lambda_1 + \cfrac{1}{\dots \cfrac{1}{\lambda_{n-1} + \cfrac{1}{\lambda_n + r_n}}}}.$$

Если $r_n = 0$, то цепная дробь представляет собой конечное выражение. Если же α — иррационально, то для любого n справедливо неравенство $r_n \ne 0$ ([1], [3], [4]).

5. При целом $m \ge 2$ и $0 \le x \le 2^m - 1$ положим

$$x = f(\alpha) = \sqrt[m]{1+\alpha} - 1, \ \alpha = \varphi(x) = (1+x)^m - 1.$$

Тогда «цифры» λ_n и последовательность остатков r_n образуются рекуррентным образом

$$\lambda_0 = [\alpha], \ r_n = \{\alpha\}, \ \lambda_0 + r_0 = \alpha,$$

$$\lambda_n = [(1+r_{n-1})^m - 1], \ r_n = \{(1+r_{n-1})^m - 1\}, \ \lambda_n + r_n + 1 = (1+r_{n-1})^m, \ n \ge 1.$$

Следовательно,

$$\alpha = \lambda_0 - 1 + \sqrt[m]{\lambda_1 + \sqrt[m]{\lambda_2 + \dots + \sqrt[m]{\lambda_{n-1} + \sqrt[m]{\lambda_n + r_n + 1}}}}$$

(см. [3]).

Пусть теперь задана последовательность $x_n = f_n(\alpha_n)$ неотрицательных монотонных (возрастающих, соответственно, убывающих) функций при $\alpha_n \ge 1$ и $\alpha_n = \varphi_n(x_n)$ — последовательность обратных к ним функций. Для любого неотрицательного действительного числа α определим представление его в виде

$$\alpha = \lambda_0 + f_1(\lambda_1 + f_2(\lambda_2 + \dots + f_n(\lambda_n + r_n)\dots)), \quad n \ge 0, \tag{1'}$$

где «цифры» $\bar\lambda_n = \bar\lambda_n(\alpha), n \ge 0,$ — целые числа,

$$\lambda_0 = \lambda_0(\alpha) = [\alpha], r_0 = r_0(\alpha) = \{\alpha\},$$

$$\lambda_n = \lambda_n(\alpha) = [\varphi_{n-1}(r_{n-1}(\alpha))], r_n = r_n(\alpha) = \{\varphi_{n-1}(r_{n-1}(\alpha))\}, \quad n \geq 1,$$

причем $[\alpha]$ и $\{\alpha\}$ обозначают соответственно целую и дробную часть числа α.

6. Пусть при $n \geq 1$ заданы последовательность $q_n > 1$ натуральных чисел,

$$x_n = f_n(\alpha_n) = \frac{\alpha_n}{q_n}, \quad \alpha_n = \varphi_n(x_n) = q_n x_n.$$

Тогда имеем

$$\lambda_n = [\varphi_n(r_{n-1}(\alpha))] = [q_n r_{n-1}(\alpha)], \quad r_n = \{q_n r_{n-1}(\alpha)\} = \{q_1 \dots q_n \alpha\}.$$

Следовательно,

$$0 \leq \lambda_n \leq q_n r_{n-1}(\alpha) < q_n,$$

т.е. «цифры» λ_n могут принимать целые значения от 0 до $q_n - 1$.

Тем самым получено представление числа α в виде

$$\alpha = \lambda_0 + \frac{\lambda_1}{q_1} + \dots + \frac{\lambda_n}{q_1 \dots q_n} + \frac{r_n}{q_1 \dots q_n} = S_n(\alpha) + \frac{r_n}{q_1 \dots q_n}, \quad 0 \leq r_n < 1.$$

В частности, при $\alpha \in [0,1]$ последовательность $\{S_n(\alpha)\}$ равномерно сходится к α (см. [6]-[8]).

§1. Представление действительных чисел с помощью убывающей функции [1],[3].

Пусть $f(1) = 1$ и $f(t)$ — неотрицательная, убывающая функция при $t \geq 1$. Если существует число $T \geq 1$ такое, что $f(T) = 0$, то при $t \geq T$ имеем $f(t) = 0$. В противном случае справедливо предельное соотношение

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = 0.$$

Пусть, как и раньше, существует обратная функция $t = \varphi(x)$ для функции $x = f(t)$ такая, что $\varphi(f(t)) \equiv t$ при $t \in [1, T]$. Пусть, также,

$$\lambda_0 = [t],\ r_0 = \{t\},\ t = \lambda_0 + r_0;$$

$$\lambda_n = [\varphi(r_{n-1})],\ r_n = \{\varphi(r_{n-1})\},\ \lambda_n + r_n = \varphi(r_{n-1}).$$

Наконец, пусть найдется число $0 < \delta < 1$ такое, что для всех $t, u \in [1, T]$ справедливо неравенство

$$|f(t) - f(u)| \leq \delta |t - u|. \tag{2}$$

Положим

$$C_n = \lambda_0 + f(\lambda_1 + f(\lambda_2 + \dots + f(\lambda_n) \dots)).$$

Теорема 1. *Последовательность C_n сходится к числу t.*

Доказательство. Сначала, используя критерий Коши, установим сходимость последовательности C_n, $n \geq 1$. Оценим при $p \geq 1$ модуль разности

$$|C_{n+p} - C_n| = |f(\lambda_1 + f(\lambda_2 + \dots + f(\lambda_{n+p}) \dots)) - f(\lambda_1 + f(\lambda_2 + \dots + f(\lambda_n) \dots))| =$$

$$= |f(\lambda_1 + f(\lambda_2 + \dots + f(\lambda_n + \sigma_{n,p}) \dots)) - f(\lambda_1 + f(\lambda_2 + \dots + f(\lambda_n) \dots))|,$$

где

$$\sigma_{n,p} = f(\lambda_{n+1} + f(\lambda_{n+2} + \dots + f(\lambda_{n+p}) \dots)).$$

Далее, используя неравенство (2), находим $|C_{n+p} - C_n| \leq$

$$\leq \delta |f(\lambda_2 + f(\lambda_3 + \dots + f(\lambda_n + \sigma_{n,p}) \dots)) - f(\lambda_2 + f(\lambda_3 + \dots + f(\lambda_n) \dots))| \leq \dots$$

$$\cdots \leq \delta^{n-1}|f(\lambda_n+\sigma_{n,p})-f(\lambda_n)| \leq \delta^n \sigma_{n,p} \leq \delta^n.$$

Тем самым при $n \to \infty$ и любом $p \geq 1$ имеем, что $C_{n+p}-C_n \to 0$. Это и доказывает существование предела $\lim\limits_{n\to\infty} C_n$.

Докажем теперь, что найденный предел равен t. Действительно, при $n \geq 1$ справедливо тождество

$$\lambda_n + r_n = \varphi(r_{n-1}).$$

Тогда при $n \geq 1$ получим

$$\lambda_0 + f(\lambda_1 + f(\lambda_2 + \cdots + f(\lambda_n + r_n)\ldots)) =$$

$$= \lambda_0 + f(\lambda_1 + f(\lambda_2 + \cdots + f([\varphi(r_{n-1})] + \{\varphi(r_{n-1})\})\ldots)) =$$

$$\lambda_0 + f(\lambda_1 + f(\lambda_2 + \cdots + f(\lambda_{n-1} + f(\varphi(r_{n-1}))\ldots)) = \ldots$$

$$= \lambda_0 + f(\lambda_1 + r_1) = \lambda_0 + r_0 = t.$$

Оценим сверху модуль разности

$$|t - C_n| = |f(\lambda_1 + f(\lambda_2 + \cdots + f(\lambda_n + r_n)\ldots)) - f(\lambda_1 + f(\lambda_2 + \cdots + f(\lambda_n)\ldots))| \leq$$

$$\leq \delta|f(\lambda_2 + \cdots + f(\lambda_n + r_n)\ldots)) - f(\lambda_2 + \cdots + f(\lambda_n)\ldots)| \leq \ldots$$

$$\leq \delta^{n-1}|f(\lambda_n + r_n) - f(\lambda_n)| \leq \delta^n r_n \leq \delta^n.$$

Теорема доказана.

§2. Представление действительного числа с помощью возрастающей функции [2],[3].

Пусть $f(0) = 0$ и $f(t)$ — возрастающая функция при $t \geq 1$. Если существует число $T \geq 1$ такое, что $f(T) = 1$, то при $t \geq T$ имеем $f(t) = 1$. В противном случае справедливо предельное соотношение

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = 1.$$

Пусть, как и раньше, существует обратная функция $t = \varphi(x)$ для функции $x = f(t)$ такая, что $\varphi(f(t)) \equiv t$ при $t \in [1, T]$. Пусть, также,

$$\lambda_0 = [t],\ r_0 = \{t\},\ t = \lambda_0 + r_0;$$

$$\lambda_n = [\varphi(r_{n-1})],\ r_n = \{\varphi(r_{n-1})\},\ \lambda_n + r_n = \varphi(r_{n-1}).$$

Наконец, пусть найдется число $0 < \delta < 1$ такое, что для всех $t, u \in [1, T]$ справедливо неравенство

$$|f(t) - f(u)| \leq \delta|t - u|.$$

Положим

$$C_n = \lambda_0 + f(\lambda_1 + f(\lambda_2 + \cdots + f(\lambda_n)\ldots)).$$

Теорема 2. *Последовательность C_n сходится к числу t.*

Доказательство теоремы 2 повторяет доказательство теоремы 1 с очевидной заменой условия убывания функции $f(x)$ на ее возрастание и соответствующей заменой пределов изменения этой функции.

§3. Представление действительных чисел с помощью последовательности возрастающих функций.

Пусть при $n \geq 1$ имеем $f_n(0) = 0$ и $f_n(t)$ — возрастающая функция для $t \geq 1$. Если существует число $T_n \geq 1$ такое, что для всех $n \geq 1$ справедливо равенство $f_n(T) = 1$, то при $t \geq T_n$ имеем $f_n(t) = 1$. В противном случае справедливо предельное соотношение

$$\lim_{t\to\infty} f_n(t) = 1.$$

Пусть, как и раньше, существует обратная функция $t_n = \varphi_n(x_n)$ для функции $x_n = f(t_n)$ такая, что $\varphi_n(f_n(t_n)) \equiv t_n$ при $t_n \in [1, T_n]$. Пусть, также,

$$\lambda_0 = [t],\ r_0 = \{t\},\ t = \lambda_0 + r_0;$$

$$\lambda_n = [\varphi_{n-1}(r_{n-1})],\ r_n = \{\varphi_{n-1}(r_{n-1})\},\ \lambda_n + r_n = \varphi_{n-1}(r_{n-1}).$$

Наконец, пусть для $n \geq 1$ найдется число $0 < \delta < 1$ такое, что для всех $t, u \in [1, T_n]$ справедливо неравенство

$$|f_n(t) - f_n(u)| \leq \delta |t - u|.$$

Положим

$$C_n = \lambda_0 + f_1(\lambda_1 + f_2(\lambda_2 + \cdots + f_n(\lambda_n) \ldots)).$$

Теорема 3. *Последовательность C_n сходится к числу t.*

Доказательство. Используя критерий Коши, установим сходимость последовательности $C_n,\ n \geq 1$. Оценим при $p \geq 1$ модуль разности

$$|C_{n+p} - C_n| = |f_1(\lambda_1 + f_2(\lambda_2 + \cdots + f_{n+p}(\lambda_{n+p}) \ldots)) - f_1(\lambda_1 + f_2(\lambda_2 + \cdots + f_n(\lambda_n) \ldots))| =$$
$$= |f_1(\lambda_1 + f_2(\lambda_2 + \cdots + f_n(\lambda_n + \sigma_{n,p}) \ldots)) - f_1(\lambda_1 + f_2(\lambda_2 + \cdots + f_n(\lambda_n) \ldots))|,$$

где

$$\sigma_{n,p} = f_{n+1}(\lambda_{n+1} + f_{n+2}(\lambda_{n+2} + \cdots + f_{n+p}(\lambda_{n+p}) \ldots)).$$

Далее, используя неравенство (2), находим $|C_{n+p} - C_n| \leq$

$$\leq \delta |f(\lambda_2 + f(\lambda_3 + \cdots + f(\lambda_n + \sigma_{n,p}) \ldots)) - f(\lambda_2 + f(\lambda_3 + \cdots + f(\lambda_n) \ldots))| \leq \ldots$$
$$\cdots \leq \delta^{n-1} |f_n(\lambda_n + \sigma_{n,p}) - f_n(\lambda_n)| \leq \delta^n \sigma_{n,p} \leq \delta^n.$$

Тем самым при $n \to \infty$ и любом $p \geq 1$ имеем, что $C_{n+p} - C_n \to 0$. Это и доказывает существование предела $\lim\limits_{n\to\infty} C_n$.

Докажем теперь, что найденный предел равен t. Действительно, при $n \geq 1$ справедливо тождество

$$\lambda_n + r_n = \varphi_n(r_{n-1}).$$

Тогда при $n \geq 1$ получим

$$\lambda_0 + f_1(\lambda_1 + f_2(\lambda_2 + \cdots + f_n(\lambda_n + r_n) \ldots)) =$$
$$= \lambda_0 + f_1(\lambda_1 + f_2(\lambda_2 + \cdots + f_n([\varphi(r_{n-1})] + \{\varphi(r_{n-1})\}) \ldots)) =$$
$$\lambda_0 + f_1(\lambda_1 + f_2(\lambda_2 + \cdots + f_n(\lambda_{n-1} + f_n(\varphi_n(r_{n-1})) \ldots)) = \ldots$$
$$= \lambda_0 + f_1(\lambda_1 + r_1) = \lambda_0 + r_0 = t.$$

Оценим сверху модуль разности

$$|t - C_n| = |f_1(\lambda_1 + f_2(\lambda_2 + \cdots + f_n(\lambda_n + r_n) \ldots)) - f_1(\lambda_1 + f_2(\lambda_2 + \cdots + f_n(\lambda_n) \ldots))| \leq$$
$$\leq \delta |f_2(\lambda_2 + \cdots + f_n(\lambda_n + r_n) \ldots)) - f_2(\lambda_2 + \cdots + f_n(\lambda_n) \ldots)| \leq \ldots$$
$$\leq \delta^{n-1} |f_n(\lambda_n + r_n) - f_n(\lambda_n)| \leq \delta^n r_n \leq \delta^n.$$

Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bissinger, B.H. A generalization of continued fractions // Bulletin of the Amer. Math. Soc., **(50)**1944, pp. 868–876.

2. Everett, C.I. Representation for real numbers // Bulletin of the Amer. Math. Soc., **(52)**1946, pp. 861–869.

3. Rényi, A. Representation for real numbers and their ergodic properties // Acta Math., 1957, **VIII,** 3-4. С. 477–493.

4. Khinchine, A. Kettenbr´uche // Leipzig, 1956.

5. Гельфонд, А.О. Об одном общем свойстве систем счисления // Изв. АН СССР, сер. матем., 1959, **23**.

6. Ghyasi, A. K. A generalization of the Gelfond theorem concerning number systems // Russian Journal of Math. Physics, 2007,bf 14, No.3, С. 370.

7. Гияси, А.Х., Михайлов, И.П., Чубариков, В.Н. О разложении действительных чисел по некоторым последовательностям // Чебышевский сборник, 2022, **23:1**, С. 50–60.

8. Гияси, А.Х., Михайлов, И.П., Чубариков, В.Н. О равномерном распределении остатков в разложении действительных чисел по мультипликативной системе чисел // Чебышевский сборник, 2022, **23:3**, С. 38–44.

9. Гияси, А.Х., Михайлов, И.П., Чубариков, В.Н. О разложении чисел по последовательности чисел Фибоначчи // Чебышевский сборник, 2023, **24:2**, С. 248–255.

10. Гияси, А.Х., Михайлов, И.П., Чубариков, В.Н. О последовательности дробных частей отношения чисел Фибоначчи // Чебышевский сборник, 2023, **24:3**, С. 242–250.

REFERENCES

1. Bissinger B.H. 1944, "A generalization of continued fractions", *Bulletin of the Amer. Math. Soc.*, **(50)**, pp. 868–876.

2. Everett C.I. 1946, "Representation for real numbers", *Bulletin of the Amer. Math. Soc.*, **(52)**, pp. 861–869.

3. Rényi A. 1957, "Representation for real numbers and their ergodic properties", *Acta Math.*, **VIII,** 3-4. pp. 477–493.

4. Khinchine, A. 1956, "Kettenbr´uche", *Leipzig*.

5. Gelfond, A.O. 1959, "On one general property of number systems", *Izv. of the USSR Academy of Sciences, ser. matem.*, **23**.

6. Ghyasi, A. K. 2007, "A generalization of the Gelfond theorem concerning number systems", *Russian Journal of Math. Physics*, **14,** № 3, 370.

7. Giyasi, A.H., Mikhailov, I.P., Chubarikov, V.N. 2022, "On the decomposition of real numbers by some sequences", *Chebyshevskii Sbornik*, **23:1**, pp. 50–60.

8. Giyasi, A.H., Mikhailov, I.P., Chubarikov, V.N. 2022, “On the uniform distribution of residues in the expansion of real numbers by the multiplicative number system”, *Chebyshevskii Sbornik*, **23:3**, pp. 38–44.

9. Giyasi, A.H., Mikhailov, I.P., Chubarikov, V.N. 2023, “On the decomposition of numbers by the sequence of Fibonacci numbers”, *Chebyshevskii Sbornik*, **24:2**, pp. 248–255.

10. Giyasi, A.H., Mikhailov, I.P., Chubarikov, V.N. 2023, “About the sequence of fractional parts of the ratio of Fibonacci numbers”, *Chebyshevskii Sbornik*, **24:3**, pp. 242–250.

Получено: 25.01.2025
Принято в печать: 07.04.2025

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 26. Выпуск 2.

УДК 514.8+514.1 DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-2-71-89

Моделирование оптимальных сетей в манхеттенском пространстве с помощью шарнирных механизмов

М. Ю. Житная

Житная Марина Юрьевна — Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: g-ferra@mail.ru

Аннотация

В широком смысле шарнирные механизмы представляют собой конструкции из жёстких элементов, соединённых таким образом, что некоторые их пары могут вращаться вокруг общей точки. Одной из основных задач, связанных с исследованием шарнирных механизмов, является описание возможных положений шарниров. Важными результатами в этой области являются теоремы Кинга [7], [8] и Кемпе [2]. Основным результатом настоящей статьи является конструктивное доказательство существования шарнирного механизма, который решает задачу оптимизации, а именно поиска кратчайшей сети для границы из $m \geqslant 1$ точек в пространстве размерности $n \geqslant 2$ с манхеттенской метрикой. Данная работа является продолжением предыдущих работ автора [3], [4], в которых были описаны механизмы, строящие кратчайшую сеть на евклидовой плоскости, а также минимальную параметрическую сеть в евклидовом пространстве размерности $k \geqslant 2$.

Ключевые слова: проблема Штейнера, шарнирный механизм, ℓ_1-метрика.

Библиография: 19 названий.

Для цитирования:
Житная М. Ю. Моделирование оптимальных сетей в манхеттенском пространстве с помощью шарнирных механизмов // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 2, с. 71–89.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 26. No. 2.

UDC 514.8+514.1 DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-2-71-89

Modeling of optimal networks in Manhattan Geometry by means of linkages

M. Yu. Zhitnaya

Zhitnaia Marina Yur'evna — Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: g-ferra@mail.ru

Abstract

In a broad sense, linkages are constructions made of rigid elements connected in such a way that some of their pairs can rotate around a common point. One of the main tasks related to the study of linkages is the description of possible hinge positions. Important results in this area are provided by the theorems of King [7], [8] and Kempe [2]. The main result of this paper is the constructive proof of the existence of a linkage that solves the optimization problem, namely the search for the shortest network connecting the boundary of $m \geqslant 1$ points in a space of dimension $n \geqslant 2$ with the Manhattan metric. This work is a continuation of the author's previous works[3],[4], which described mechanisms for constructing the shortest network in the Euclidean plane, as well as the minimal parametric network in Euclidean space of dimension $k \geqslant 2$.

Keywords: Steiner problem, linkages, Manhattan metric.

Bibliography: 19 titles.

For citation:
Zhitnaya, M. Yu. 2025, “Modeling of optimal networks in Manhattan Space by means of linkages” , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 2, pp. 71–89.

Введение

Шарнирные механизмы — конструкции, представляющие собой жёсткие элементы, соединённые таким образом, что некоторые пары могут вращаться вокруг общей точки [18], [19]. Использование механизмов можно встретить в различных устройствах, например, в роботах [9], [13], [12] медицинских протезах и многих других.

Для описания возможных положений шарниров важными являются теоремы Кинга и Кемпе. Теорема Кинга утверждает, что множество является рисуемым тогда и только тогда, когда оно является компактным полуалгебраическим множеством или совпадает со всем пространством $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 2$, а теорема Кемпе доказывает, что с помощью шарнирных механизмов можно нарисовать любую алгебраическую кривую [14].

Настоящая работа посвящена решению задачи поиска кратчайшей сети, соединяющей множество точек на манхеттенской плоскости, с помощью шарнирных механизмов.

Манхеттенская метрика позволяет измерять расстояния в пространстве, где перемещения возможны только по прямым линиям вдоль перпендикулярных осей [17]. Применение этой метрики имеет широкое распространение в задачах логистики, городского планирования, компьютерного зрения [1] и др.

Основным результатом текущего исследования является доказательство существования и описание алгоритма сборки механизма, решающего задачу поиска кратчайшей сети в манхеттенском пространстве.

В общем случае вариационные задачи, связанные с поиском максимума, минимума или точек экстремума, с помощью шарнирных механизмов решать нельзя. Тем не менее, в некоторых частных случаях построить механизм, решающий проблему оптимизации можно. Пусть в рассматриваемой задаче есть конечное количество структур имеющих числовой параметр, который подвергается оптимизации. В данной и предыдущих работах автора реализован подход, который позволяет сортировать структуры согласно их параметру таким образом, что оптимальная структура оказывается во вполне конкретном положении.

Автор выражает глубочайшую признательность своему научному руководителю, Алексею Августиновичу Тужилину, за его неоценимую помощь и поддержку в процессе подготовки данной работы. Его терпение, профессионализм и способность делиться знаниями стали основой продвижения в достижении результатов, а наставления, советы и вдохновение помогли преодолеть все трудности. Также автор благодарит Александра Олеговича Иванова за содействие, поддержку и готовность помочь, что существенно способствовало успешному завершению исследования.

1. Основные определения и предварительные результаты

В этом разделе приведём ключевые понятия и теоретические основания, которые будут использованы в последующих частях работы.

1.1. Формализация сетей

Любое отображение $\Gamma = \Gamma_G\colon V \to \Omega$, где V — вершины простого конечного графа $G = (V, E)$, Ω — метрическое пространство, будем называть сетью в пространстве Ω, а граф G — *типом этой сети*. Отображения $\Gamma_v = \Gamma|_v$, $v \in V$ будем называть *вершинами сети* Γ, а $\Gamma_e = \Gamma|_e$, $e \in E$ — рёбрами сети Γ. Значение $|\Gamma_{uv}| = |\Gamma(u)\Gamma(v)|$ — *длина ребра* uv, сумма длин всех рёбер — *длина* $|\Gamma|$ *сети* Γ. Рёбра нулевой длины будем называть *вырожденными*, сети, не содержащие вырожденных рёбер, — *невырожденными сетями*.

Иногда во множестве вершин V мы будем выделять подмножество $W \subset V$, которое назовём *границей графа* G, его элементы $w \in W$ — *граничными вершинами*. Граф G с границей W будем обозначать G^W. Отображение $\Gamma_W = \Gamma|_W$ назовём *границей сети* Γ, вершины Γ_w, $w \in W$ — *граничные вершины сети* Γ, остальные вершины сети или графа — *внутренние*. Если для некоторого отображения φ выполнено $\Gamma|_W = \varphi$, то будем говорить, что Γ — *сеть с фиксированной границей* φ.

Для заданного графа G^W можно рассматривать различные граничные отображения φ и для каждого из них — различные сети Γ типа G^W с границей $\Gamma|_W = \varphi$.

Сети Γ_1 и Γ_2 — *изоморфны*, если их типы изоморфны с помощью изоморфизма α и верно $\Gamma_1 = \Gamma_2 \circ \alpha$.

Отметим, что если пространство Ω, в которое отображается вершина v обозначить Ω_v, то сети можно отождествить с точками из декартова произведения $\prod\limits_{v \in V} \Omega_v = \Omega^n$. В дальнейшем будем пользоваться этим естественным соответствием.

Если G — связный граф, то сети, имеющие тип G будем называть *связными*.

Пусть $M \subset \Omega$ — конечное множество. Будем говорить, что сеть Γ *соединяет* M, если $M = \Gamma(W)$. Так как далее мы будем решать задачу поиска кратчайшей связной сети, соединяющей M, то ограничимся типами, где G — дерево, у которого все вершины степени 1 и 2 — граничные. Это можно сделать, так как, если внутренняя вершина имеет степень 1, то уберём её и смежное ей ребро, после чего длина сети не увеличится. Если внутренняя вершина имеет степень 2, то её тоже можно убрать, соединив смежные ей вершины ребром, и тогда, в силу неравенства треугольника, длина всей сети тоже не увеличится.

Для описанных графов G множество всех сетей типа G с точностью до изоморфизма с границей из $n \geqslant |M|$ вершин и граничным отображением, образ которого равен M, обозначим $T_n(M)$.

Положим $\mathrm{smt}_n(M) = \inf_{\Gamma \in T_n(M)} |\Gamma|$. Можно проверить, что значение $\mathrm{smt}_n(M)$ не зависит от n, поэтому любое из этих $\mathrm{smt}_n(M)$ будем обозначать $\mathrm{smt}(M)$. Если существует сеть Γ_0 такая, что $|\Gamma_0| = \mathrm{smt}(M)$, то будем называть сеть Γ_0 *минимальной сетью, соединяющей* M. Если $n = |M|$, то среди минимальных сетей, соединяющих M будут невырожденные, которые традиционно называются *минимальными деревьями Штейнера, соединяющими* M. Как показано в [5], если метрическое пространство ограниченно компактно (любое замкнутое ограниченное подмножество в нём компактно), то для любой границы существует минимальное дерево Штейнера, которое её соединяет.

Пусть Ω — метрическое пространство с прямоугольной системой координат и манхеттенской метрикой, в которой расстояния порождаются нормой $\|x\| = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$. В таком пространстве минимальные сети и минимальные деревья Штейнера называются *прямоугольными*.

Из [6], [10] известно, что образы внутренних вершин минимального прямоугольного дерева Штейнера содержатся внутри конечного множества. Это множество — узлы *решётки Ханана*, которая получается пересечением прямых, проходящих через граничные вершины и параллельных осям координат.

1.2. Формализация шарнирных механизмов

Существуют разные способы определения шарнирных механизмов даже при рассмотрении их математических моделей [15], [16]. Текущее исследование продолжает предыдущие работы автора [3], [4], но используемая далее терминология немного отличается от использованной ранее, чтобы сделать описание более удобным, сохранив строгость.

Пусть $G = (V, E)$ – граф, на множестве рёбер которого задана *весовая функция* $\ell\colon E \to [0, \infty)$. Набор $L = (G, \ell)$ будем называть *шарнирным механизмом*. Элементы множества V — *шарниры механизма* L, элементы множества E — *стержни*, значения функции $\ell(e)$, $e \in E$ — *длины стержней*.

Пусть $L = (G, \ell)$ — шарнирный механизм. Сеть x типа G в пространстве Ω будем называть *согласованной с* ℓ, если для любого ребра $uv \in E$ выполнено $|(x(u)x(v)| = \ell(uv)$. Каждую такую сеть будем называть *положением шарнирного механизма* L в пространстве Ω и говорить, что механизм L рассматриваем в пространстве Ω.

Ограничение $x|_A$ на набор шарниров $A \subset V$ будем называть *положением набора шарниров* A и обозначать через x_A.

Если множество A состоит из одного шарнира v, то положение $x_A = x_{\{v\}}$ будем обозначать через x_v. Множество всех положений шарнира v обозначим через X^L_v. Множество всех положений механизма L обозначим через X^L, а множество всех положений набора A — через X^L_A.

Из сказанного выше вытекает, что множества положений X^L, X^L_A, X^L_v, можно рассматривать как подмножества соответствующих пространств $\Omega^n = \prod\limits_{v \in V} \Omega_v$, $\Omega^{|A|} = \prod\limits_{v \in A} \Omega_v$, $\Omega = \Omega_v$.

В обозначениях положений и их множеств, если понятно, к какому механизму они относятся, верхний индекс L будем опускать.

Для любого набора *шарниров* A механизма L будем говорить, что A *рисует* множество X^L_A.

На рисунках будем изображать механизмы в виде геометрических графов, рёбра которых — отрезки. Вершины этих графов будут соответствовать положениям шарниров и подписаны названиями самих шарниров, рёбра — стержням.

Часто для описания множества положений набора шарниров A будет удобно использовать словесное описание, которое, если множество A содержит более одного шарнира, может ограничивать положения шарниров относительно друг друга, либо относительно объемлющего пространства.

Пример 1. *Рассмотрим механизм L на плоскости, состоящий из двух подвижных шарниров a_1, a_2, соединённых стержнем длины r. В таком механизме шарниры $A = \{a_1, a_2\}$ рисуют множество X_A, которое представляет собой множество концов отрезков длины r.*

Пусть V — множество шарниров некоторого механизма, на котором заданы подмножества $A, B \subset V$, а также задано некоторое положение $x_B \in X_B$ набора шарниров B. Множество

$\{x|_A \colon x \in X, x|_B = x_B\}$ будем называть *множеством положений шарниров A при фиксированном положении x_B шарниров множества B* и обозначать через $X_A \dashv x_B = \{x_A \dashv x_B\}$.

Пример 2. *Множество положений механизма L из примера 1 можно также описать другим способом. Множество положений X_{a_1} шарнира a_1 равно $\mathbb{R}^2$. Для любого положения $x_{a_1} \in X_{a_1}$ множество положений $X_{a_2} \dashv x_{a_1}$ — окружность радиуса r с центром в x_{a_1}. Таким образом, говоря общо, можно сказать, что шарниры множества A рисуют на плоскости всевозможные окружности радиуса r, а точнее, шарнир a_2 рисует окружность радиуса r с центром в a_1 для всевозможных положений шарнира a_1.*

Пусть A, B и C три подмножества шарниров механизма L и A не пересекается с B. Будем говорить что шарниры множеств A и B *двигаются независимо друг от друга для любого положения набора шарниров C*, если для любых положений $x_C \in X_C$, $x_A \dashv x_C \in X_A \dashv x_C$, $x_B \dashv x_C \in X_B \dashv x_C$, существует положение $x \in X$, для которого $x|_C = x_C$, $x|_A = x_A \dashv x_C$, $x|_B = x_B \dashv x_C$.

Пример 3. *Рассмотрим механизм L, содержащий два стержня ab и bc длины r с общим концом b. В механизме L для каждого положения шарнира b шарниры a и c двигаются независимо друг от друга и рисуют окружности с центром в b радиуса r.*

Будем говорить, что A — *набор свободных шарниров*, если A — множество всех шарниров механизма L, не содержащего стержни.

Рассмотрим два механизма $L = \big(G = (V, E), \ell\big)$ и $L' = \big(G' = (V', E'), \ell'\big)$. Пусть выполнено $V \subset V'$, $E \subset E'$, $\ell'|_E = \ell$. Будем говорить, что механизм L *вложен* в L', либо, что L' получен в результате *расширения механизма L, добавлением стержней $\tilde{E} = E' \setminus E$ и шарниров $\tilde{V} = V' \setminus V$*.

Опишем операцию скрепления пересекающихся механизмов. Рассмотрим два механизма $L_1 = \big((V_1, E_1), \ell_1\big)$ и $L_2 = \big((V_2, E_2), \ell_2\big)$. Будем говорить, что механизмы L_1 и L_2 имеют *согласованное пересечение*, если для любого ребра $e \in E_1 \cap E_2$ верно, что $\ell_1(e) = \ell_2(e)$. Рассмотрим механизм $L = \big((V, E), \ell\big)$, где $V = V_1 \cup V_2$, $E = E_1 \cup E_2$, $\ell \colon E \to [0; \infty)$, $\ell|_{E_1} = \ell_1$, $\ell|_{E_2} = \ell_2$. Механизм L будем называть *скреплением* L_1 и L_2 *по множеству шарниров* $A = V_1 \cap V_2$ и обозначать $L = L_1 \cup_A L_2$. Часто скрепляемые механизмы не будут содержать общих рёбер и границ, поэтому скрепление таких механизмов определено корректно.

Обобщим операцию скрепления для непересекающихся механизмов. Пусть есть два механизма $L_1 = \big((V_1, E_1), \ell_1)$ и $L_2 = \big((V_2, E_2), \ell_2, \big)$, множества шарниров которых не пересекаются. Рассмотрим два равномощных подмножества $A_1 \subset V_1$ и $A_2 \subset V_2$, на которых определена биекция $\varphi \colon A_1 \to A_2$. Продолжим φ на всё множество V_1 и обозначим это отображение Φ, определив $\Phi|_{V_1 \setminus A_1} = \mathrm{id}$, $\Phi|_{A_1} = \varphi$. Рассмотрим механизм $L' = \big((V', E'), \ell'\big)$, в котором $V' = \Phi(V_1)$, $E' = \{\Phi(u)\Phi(v), uv \in E_1\}$, $\ell'(u'v') = \ell(\Phi^{-1}(u')\Phi^{-1}(v'))$. Если L' и L_2 имеют согласованное пересечение, то биекцию φ будем называть *отождествлением шарниров A_1 и A_2*, а скрепление механизмов L' и L_2 по множеству шарниров A_2 будем называть *скреплением механизмов L_1 и L_2, с отождествлением φ шарниров* A_1 и A_2, и обозначать $L = L_1 \cup_\varphi L_2$.

Описанная выше операция позволяет скреплять шарниры разных механизмов, но её можно обобщить, позволив также скреплять шарниры, принадлежащие одному механизму. Рассмотрим механизм $L = \big((V, E), \ell\big)$. Выберем пару шарниров $u, v \in V$, которые будем скреплять друг друг с другом. Обозначим через E_v все стержни, инцидентные v. Рассмотрим механизм $L_1 = \big((V_1, E_v), \ell_1\big)$, где V_1 — множество концов стержней E_v и механизм $L_2 = \big((V \setminus v, E \setminus E_v), \ell|_{E \setminus E_v}\big)$. Отождествим друг с другом шарниры u и v и объединим со множеством $V_1 \setminus v$, которое принадлежит обоим механизмам. Обозначим результат A. Объединение L_1 и L_2 по множеству A будем называть скреплением шарниров u и v в механизме L. Отметим, что, несмотря на то, что процесс не симметричен для шарниров u и v, легко проверить, что от перемены их местами, результат не меняется.

Опишем множество положений механизма, полученного в результате объединения пересекающихся механизмов.

Утверждение 1. *При объединении механизмов L_1 и L_2 по множеству A множество положений X_A^L шарниров A в получившемся механизме L равно пересечению $X_1|_A \cap X_2|_A$ множеств положений шарниров A в каждом из объединяемых механизмов.*

Утверждение 2. *Пусть механизм $L = L_1 \cup_A L_2$ — объединение L_1 и L_2, множества положений которых X_1 и X_2 соответственно. Положим $S = X_1|_{(V_1 \setminus A)}$, $T = X_1|_A \cap X_2|_A$, $U = X_2|_{(V_2 \setminus A)}$. Тогда множество положений X^L состоит из всевозможных наборов шарниров $\{s,t,u\}$, где $t \in T$, $\{s,t\} \in X_1$, $\{t,u\} \in X_2$.*

Следствие 1. *Если L — результат скрепления механизмов L_1 и L_2 по множеству шарниров A, причём для L_1 множество положений A после скрепления не изменилось, то есть $X_A^{L_1} = X_A^L$, то множество положений $X_{V_1}^{L_1}$ всех шарниров L_1 после скрепления не изменится, $X^{L_1} = X_{V_1}^L$.*

Доказательство. Пусть S, T, U множества из утверждения 2. Верность $X^{L_1} \supset X_{V_1}^L$ вытекает из утверждения 2. Покажем, что $X^{L_1} \subset X_{V_1}^L$. Фиксируем $x^1 \in X^{L_1}$. Так как $X_A^{L_1} = T$, то можно представить $x^1 = \{s,t\}$, $s \in S$, $t \in T$. Так как $T = X_A^L$, то для t существует $x \in X^L$, для которого $x|_{V_2} = x^2 \in X^{L_2}$, $x^2 = \{t,u\}$, $u \in U$. Таким образом, найден $x = \{s,t,u\} \in X^L$, для которого $x|_{V_1} = x^1$. $\square$

Замечание 10. *Для описания множества положений механизма L', полученного в результате расширения L можно представлять L в виде объединения L с механизмом состоящим из добавленных стержней и шарниров.*

2. Классические шарнирные механизмы

В этом разделе приведём описание, а иногда и порядок построения, классических механизмов. На их примере будет показана технология работы с механизмами, которая в дальнейшем будет активно использоваться для решения поставленной задачи.

Если не сказано иного, то механизмы рассматриваются в $\mathbb{R}^2$.

Механизм 1 (Шарнирный треугольник abc.) Механизма, состоящий из трёх шарниров a, b и c, попарно соединённых стержнями.

У такого механизма в каждом положении в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$ расстояние между любой парой шарниров одно и то же.

Механизм 2 (Закрепление шарнира на стержне.) На основе любого механизма $L = \big((V,E), \ell\big)$, содержащегося в нём стержня uv и пары чисел r_1, r_2 таких, что $r_1 + r_2 = \ell(uv)$, можно построить механизм L' с множеством шарниров $V' = V \sqcup \{f\}$. Для множества положений шарниров V верно $X_V^L = X_V^{L'}$, и для любого положения шарниров V положение шарнира f однозначно определено — он находится на расстоянии r_1 от u и r_2 от v.

Будем говорить, что L' получен в результате *закрепления шарнира f на стержне uv*.

Доказательство. [Построение] Рассмотрим механизм L_2, состоящий из двух стержней uf и fv, длины которых соответственно равны r_1 и r_2. Все шарниры L_2 подвижные. В L шарниры u и v рисуют концы всех отрезков длины $\ell(uv)$, в механизме L_2 шарниры u и v рисуют концы всех отрезков длины не больше $r_1 + r_2$ и не меньше $|r_1 - r_2|$, поэтому верно, что $X_{\{u,v\}}^L \subset X_{\{u,v\}}^{L_2}$, а значит $X_{\{u,v\}}^L \cap X_{\{u,v\}}^{L_2} = X_{\{u,v\}}^L$, и согласно следствию 1, множество положений всех шарниров механизма L после объединения с L_2 не изменится. В механизме L_2 шарнир f всегда находился на расстояниях r_1 и r_2 от u и v. После скрепления это также будет верно (утверждение 2). Такое построение будем называть *закреплением шарнира f на стержне uv*. $\square$

Если далее на рисунках механизмов шарнир изображён на стержне, и не указано, что он может менять положение относительно вершин этого стержня, то подразумевается, что шарнир закреплён на стержне как описано выше.

Механизм 3 (Шарнирный четырёхугольник.) Это механизм $L = \big((V, E), \ell\big)$, для которого множество шарниров $V = \{a, b, c, d\}$, все шарниры подвижные, множество стержней $E = \{ab, bc, cd, da\}$, и для длин верно $\ell(ab) = \ell(cd) = s$, $\ell(bc) = \ell(da) = t$.

У такого механизма в любом его положении вершины образуют либо параллелограмм, либо *антипараллелограмм* — четырёхугольник, полученный из параллелограмма отражением двух его смежных сторон относительно диагонали, с которой они образуют треугольник. Параллелограмм (антипараллелограмм) называют вырожденным, если все его вершины лежат на одной прямой. Множества параллелограммов и антипараллелограммов со сторонами a и b пересекаются по множеству *вырожденных параллелограммов* и *антипараллелограммов*.

Лемма 1. *Рассмотрим пару чисел $s > t > 0$. Для любого параллелограмма, включая вырожденные, с длинами сторон s и t длина большей средней линии равна s. Для любого невырожденного антипараллелограмма со сторонами s и t длины средних линий меньше s.*

Доказательство. Докажем, что длина средней линии невырожденного антипараллелограмма меньше s. Рассмотрим равнобедренную трапецию с диагоналями s и боковыми сторонами t (рис. 1). Средняя линия трапеции совпадает с большей средней линией антипараллелограмма и содержит вторую. Обозначим через α угол между большим основанием и её диагональю трапеции. Длина средней линии трапеции равна проекции диагонали на большее основание $s\cos(\alpha)$. Следовательно, средняя линия невырожденного антипараллелограмма не превосходит s и равенство достигается только при $\alpha = 0$, то есть, когда антипараллелограмм вырожденный. □ Пользуясь леммой 1 расширим шарнирный четырёхугольник 2 так, чтобы его

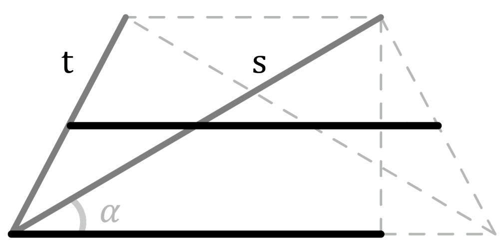


Рис. 1: Длина средней линии антипараллелограмма.

шарниры рисовали либо только вершины всевозможных параллелограммов (вырожденных или нет), либо только вершины антипараллелограммов (вырожденных или нет).

Механизм 4 (Укреплённый параллелограмм.) Механизм, содержащий шарниры a, b, c, d, которые рисуют всевозможные параллелограммы с длинами сторон s и t.

Доказательство. [Построение.] Рассмотрим механизм 2. С помощью механизма 2 добавим шарниры u и v на середины стержней длины t. Полученный механизм обозначим L. Пусть L_2 — механизм, состоящий из одного стержня uv длины s. Для множеств положений шарниров u и v верно, что $X^{L_2}_{\{u,v\}} \subset X^{L}_{\{u,v\}}$, поэтому согласно утверждению 1, при объединении механизмов L и L_2 по u и v шарниры u и v будут рисовать вершины отрезков длины s. Согласно лемме 1, положения a, b, c, d, соответствующие таким положениям шарниров u и v, — вершины всевозможных параллелограммов (возможно вырожденных) с длинами сторон s и t (рис. 2). □

Модификацию механизма 2, описанную в построении механизма 2, назовём *укреплением параллелограмма*.

Механизм 5 (Укреплённый антипараллелограмм.) Механизм, содержащий шарниры a, b, c, d, которые рисуют всевозможные антипараллелограммы с длинами сторон s и t.

Доказательство. [Построение.] Для обоснования приведённой ниже конструкции нам понадобится следующий результат.

Лемма 2. *Для любой пары значений s и t можно подобрать числа $r_1 = r_1(s,t)$, $r_2 = r_2(s,t)$ такие, что для всех антипараллелограммов со сторонами s и t существует точка на расстояниях r_1 от середин сторон длины s и r_2 от середин сторон длины t, причём для любого невырожденного параллелограмма со сторонами s и t такие числа r_1 и r_2 подобрать нельзя.*

Как и для укреплённого параллелограмма (механизм 2), возьмём за основу шарнирный четырёхугольник 2 с длинами сторон s и t. Добавим к нему шарниры m, n, l, k, лежащие на серединах стержней (механизм 2), и обозначим получившийся механизм через L. Пользуясь леммой 2, для данных s и t подберём числа r_1 и r_2. Рассмотрим механизм L_2, состоящий из четырёх стержней с общим концом, два из которых равны по длине r_1, и два других — r_2. Прикрепим свободные концы стержней механизма L_2 к шарнирам m, n, l, k, как показано на рис. 2. Из леммы 2 и утверждения 2 следует, что множество положений вершин шарнирного четырёхугольника будет строго ограниченно положениями, соответствующими вершинам антипараллелограммов с длинами сторон s и t. $\square$

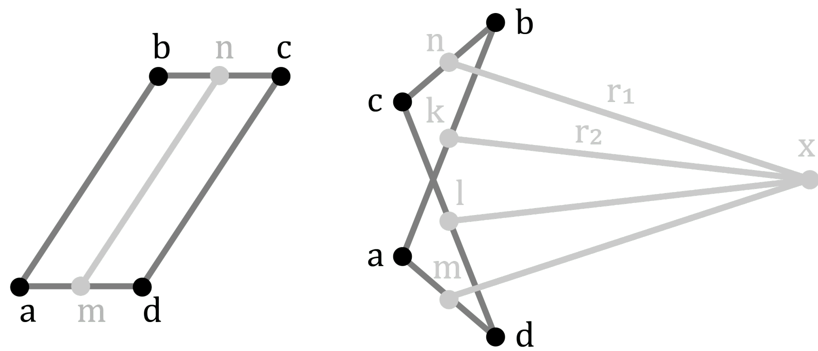


Рис. 2: Укрепление параллелограмма и антипараллелограмма

Во всех последующих механизмах использованные параллелограммы и антипараллелограммы будут по умолчанию укреплены, если не сказано иного.

Следующие два механизма — реверсор и сумматор Кемпе. Они помогают удваивать (делить пополам) углы и складывать (вычитать) углы. В текущей работе приведены схематичные изображения этих механизмов, а подробное описание можно найти в [2]. Отметим, что углы будем считать по модулю 2π, а также полагать, что они ориентированы: положительное направление угла $\angle abc$ отсчитывается от стороны ab к bc при повороте против часовой стрелки, а отрицательное — в обратную сторону.

Механизм 6 (Реверсор Кемпе с биссектральным шарниром b для $\angle dad'$.) Механизм $R = R(\angle dad', b)$, содержащий три стержня ad, ad', ab, в котором для каждого положения шарнира a шарниры d, b, d' двигаются независимо друг от друга и рисуют окружности с центром в a с некоторыми радиусами, и для любого положения $x \in X^R$ верно, что x_b лежит на биссектрисе ориентированного угла $\angle dad'$ (рис. 3).

Механизм 7 (Сумматор Кемпе.) Механизм L, содержащий четыре стержня ab, ac, ad, ae, в котором для каждого положения шарнира a шарниры b, c, d двигаются независимо от друга и рисуют окружность радиуса r с центром в a, и для любого положения $x \in X^L$ верно $\angle x_b x_a x_c + \angle x_b x_a x_d = \angle x_b x_a x_e$ (рис. 4).

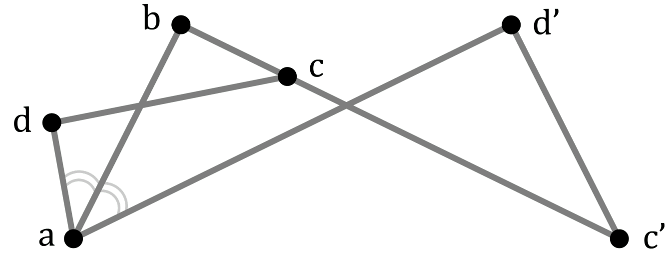


Рис. 3: Реверсор Кемпе.

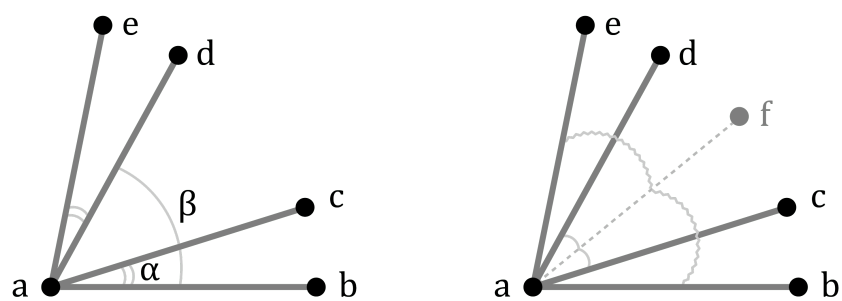


Рис. 4: Элемент сумматора Кемпе.

3. Описание предварительных результатов и вспомогательных механизмов

Механизм 8 (Простой механизм, ограничивающий дальность r с центром o.) Шарниры механизма L содержат подмножество A и шарнир o. Шарниры множества A двигаются независимо друг от друга и рисуют круг $B_r(o)$ радиуса r с центром в o.

Доказательство. [Построение] Искомый механизм L состоит из набора $|A|$ двузвенных шарнирных ломаных с длинами стержней $\frac{r}{2}$ и общим концом o. Множество A — противоположные концы ломаных и для них будет выполнено требуемое условие. □

Будем говорить, что шарниры множества A *соединены простым механизмом, ограничивающим дальность* r *(с центром в* o*)*.

Механизм 9 (Ограничение множества положений свободных шарниров в $\mathbb{R}^n$ шаром радиуса r размерности $m < n$.) Механизм L в пространстве $\mathbb{R}^n$, содержащий наборы шарниров $A = \{a_i\}_{i=1}^k$, $N = \{n_j\}_{j=1}^m$, $m < n$ и шарнир o, причём для множества положений механизма L выполнены следующие условия.

(1) Набор векторов $\{\vec{on}_j\}_{j=1}^m$ образуют базис m-мерного линейного подпространства Π.

(2) Шарниры множества A двигаются независимо друг от друга и рисуют шар с центром в точке o радиуса r, лежащий в ортогональном дополнении к Π.

Доказательство. [Построение] Искомый механизм подробно описан в [3] как скрепление k книг. Простой вариант этого механизма в пространстве $\mathbb{R}^n$, в котором два шарнира a_1 и a_2 двигаются независимо друг от друга и рисуют шар размерности $\mathbb{R}^{n-1}$ с центром в o, перпендикулярный on изображён на рисунке 5.

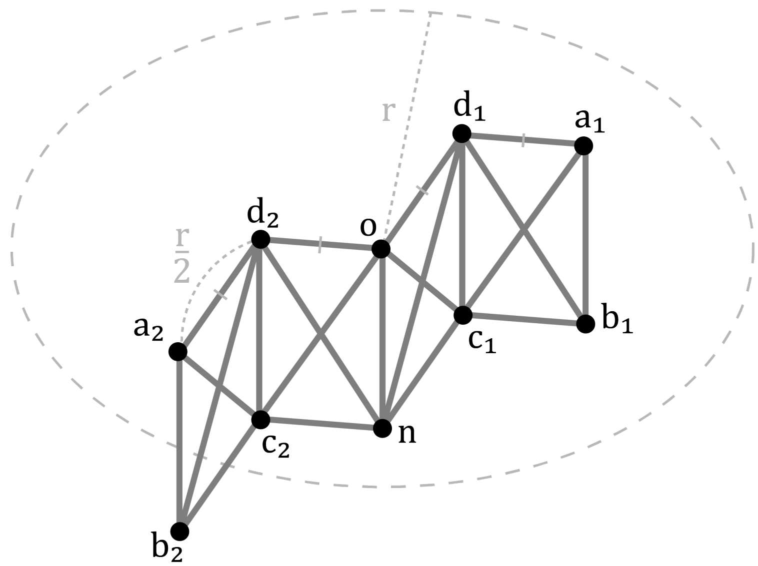


Рис. 5: Шарниры a_1 и a_2 двигаются независимо друг от друга и рисуют шар с центром в o в гиперплоскости, перпендикулярной on.

□

В частности, описанный выше механизм 3 при $m = 1$ позволяет двигать набор шарниров независимо друг от друга по произвольному отрезку в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$. В данной работе для движения точек по отрезку этого механизма будет достаточно. Стоит отметить, что плоский механизм, позволяющий двигать точки по прямой тоже существует. Он представляет собой модификацию инверсора Поселье и описан в [3].

Если изначально плоский механизм L рассмотреть в пространстве большей размерности, то необходимые условия на его положения, могут перестать выполняться. Для того, чтобы они сохранились, если далее механизм L, описанный при построении как плоский, будет рассматриваться в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, то будем иметь ввиду, что к нему прикреплён механизм 3 с параметрами $m = 2$ и достаточно большим r так, что все его шарниры всегда остаются в одной плоскости.

Механизм 10 (Движение шарниров набора A по лучу с вершиной a.) Механизм L в пространстве $\mathbb{R}^n$, содержащий набор шарниров $A = \{a_i\}_{i=1}^k$ и шарниры a и o, в котором для каждого положения шарниров a и o шарниры множества A двигаются независимо друг от друга и рисуют отрезок с вершиной в a и центром o длины r.

Доказательство. [Построение] Искомый механизм получается из механизма 3, двигающего множество шарниров $A \cup a$ по отрезку I с центром в o длины r. Расширим этот механизм стержнем oa длины $\frac{r}{2}$ и получим, что шарнир a всегда будет в вершине отрезка I, а значит шарниры множества A лежат на луче oa с вершиной o. □

Механизм 11 (Движение шарнира a по окружности с центром в o радиуса bc.) Механизм L, содержит шарниры o, b, c, a. Для любого положения шарнира a шарниры b и c двигаются независимо друг от друга и рисуют круг с центром в o радиуса r, а для любого положения шарниров o, b, c шарнир a рисует окружность радиуса bc с центром в o.

Доказательство. [Построение] Возьмём набор шарниров b, c, c', которые соединены простым механизмом ограничивающим дальность r с центром в o. Прикрепим к нему механизм 3, чтобы oc' было результатом параллельного переноса отрезка bc на вектор $\overrightarrow{bo}$. Прикрепим к o и c одноимённые вершины параллелограмма 2 $oe'c'f'$ со стороной $\frac{r}{2}$. Прикрепим к o ещё один параллелограмм 2 $oeaf$ с такими же длинами стержней. Сделаем так, чтобы параллелограмм $oeaf$ мог вращаться вокруг o, но его угол o был равен углу o параллелограмма $oe'c'f'$ (рис. 6 слева). Для этого прикрепим к имеющейся конструкции сумматор Кемпе 2 так, чтобы выполнялось $\angle e'of = \angle e'of' + \angle e'oe$. В построенном механизме будут выполнены условия, требуемые в описании.

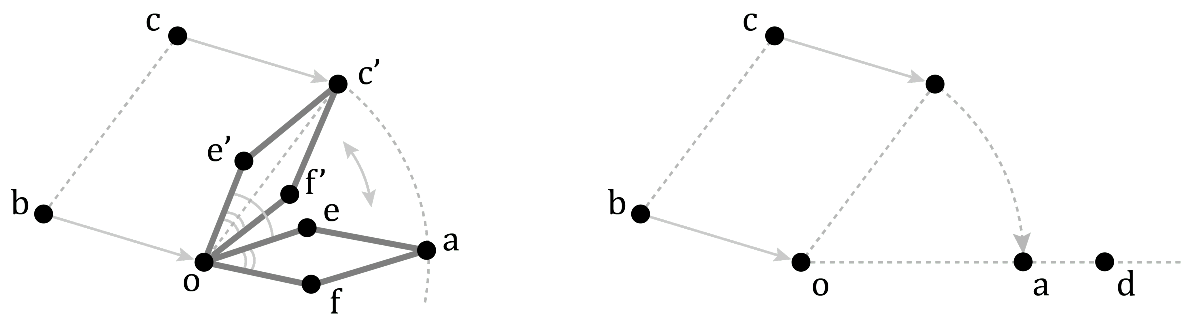


Рис. 6: Слева — схема построения окружность заданного радиуса, справа — схема переноса отрезка на луч, начиная от вершины.

□

Механизм 12 (Перенести отрезок в начало луча.) Механизм L, содержит шарниры a, b, c, d, o. Для любого положения шарнира a шарниры b и c двигаются независимо друг от друга и рисуют круг с центром в o радиуса r, шарнир d рисует окружность с центром в o радиуса r. Для любого положения шарниров o, b, c, d шарнир a рисует вершину отрезка oa длины bc на луче od.

Доказательство. [Построение] Начнём построение с механизма 3. Прикрепим к его шарниру o стержень od длины r. Далее прикрепим механизм 3, так чтобы шарниры a и d лежали на луче с вершиной o, и в результате получим искомый механизм (рис. 6 справа).

□

Механизм 13 (Пересечение прямых.) Механизм L, содержащий шарниры a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, в котором шарниры рисуют всевозможные положения, при которых для каждой из троек $\{a_1, a_2, a_5\}$ и $\{a_3, a_4, a_5\}$ существует некоторый отрезок длины r, который её содержит.

Доказательство. [Построение.] Рассмотрим L_1 и L_2 — два экземпляра механизма 3, двигающих наборы шарниров a_1, a_2, a_5 и a_3, a_4, a_5 по отрезкам длины r. Скрепив L_1 и L_2, по шарниру a_5, получим искомый механизм. □

Описанный выше механизм имеет следующее прикладное значение. Для любых пересекающихся или совпадающих прямых ℓ_1 и ℓ_2 и точки $o \in \ell_1$, $o \in \ell_2$, которая, если прямые совпадают, тоже может быть любой, во множестве положений X механизма L можно выделить подмножество $X_{\ell_1\ell_2 o}$. Оно состоит из положений, в которых шарнир a_5 совпадает с o, и пары шарниров a_1, a_2 и a_3, a_4 рисуют множества всевозможных пар точек, лежащих соответственно на прямых ℓ_1 и ℓ_2, для которых при этом выполнены неравенства $\operatorname{diam}\bigl(\{a_1, a_2, a_5\}\bigr) \leqslant r$ и $\operatorname{diam}\bigl(\{a_3, a_4, a_5\}\bigr) \leqslant r$. Множество положений X можно представить в виде дизъюнктного объединения множеств $\sqcup_{(\ell_1\ell_2 o)} X_{\ell_1\ell_2 o}$ по всевозможным наборам (ℓ_1, ℓ_2, o).

Механизм 14 (Параллельный перенос отрезка.) Механизм L содержит шарниры a, b, c, d. Шарниры b и c двигаются независимо друг от друга и рисуют круг $B_r(a)$ с центром в a радиуса r, и для каждого положения шарниров a, b, c отрезок cd является образом отрезка ab при параллельном переносе на вектор $\vec{ac}$. Доказательство. [Построение.] Описанный далее механизм представляет собой модификацию известного механизма, транслятора Кемпе, который осуществляет параллельный перенос отрезка постоянной длины. Транслятор Кемпе состоит из двух укреплённых параллелограммов с общей стороной. Модификация транслятора, решающая задачу параллельного переноса отрезка переменной длины изображена на рис. 7. Она представляет собой четыре укреплённых параллелограмма с общими сторонами. Длины всех стержней равны $\frac{r}{2}$. Покажем, что для любого положения механизма верно $\vec{ab} = \vec{cd}$.

Так как L собран из укреплённых параллелограммов, то верно $\vec{ae} = \vec{hf} = \vec{bg}$, $\vec{ec} = \vec{fk} = \vec{gd}$, а значит $\vec{ac} = \vec{ae} + \vec{ec} = \vec{bg} + \vec{gd} = \vec{cd}$. Также непосредственно проверяется, что реализуются любые положения шарниров b и c внутри круга $B_r(a)$.

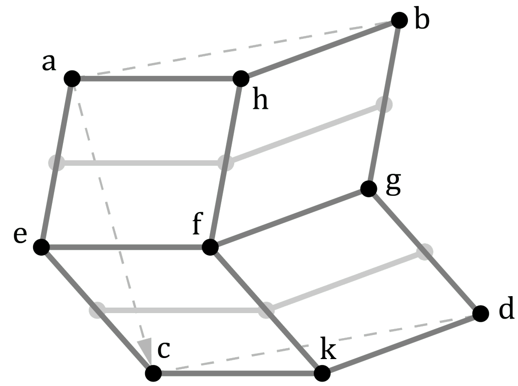


Рис. 7: Параллельный перенос отрезка ab на вектор ac.

□

Для множества положений описанного выше механизма также верно, что для всевозможных векторов $\overrightarrow{ab}$ и $\overrightarrow{ac}$ длины не больше r шарнир d рисует вершину вектора $\overrightarrow{ad} = \overrightarrow{ab} + \overrightarrow{ac}$. Поэтому будем использовать механизм 3 также для построения суммы векторов. Так как для более чем двух векторов результат суммы не зависит от порядка сложения, то построенный механизм можно применять для сложения нескольких векторов, пронумеровав их произвольным образом и последовательно добавляя следующий вектор к сумме предыдущих.

Механизм 15 (Проекция точки на прямую.) Механизм L содержит шарниры a, b, c, h и в нём на шарниры a, b, c строго действует простое ограничение дальности r, и для каждого их положения такого, что $b \neq c$, шарнир h рисует проекцию шарнира a на прямую bc. Для положений, в которых $b = c$, шарнир h рисует окружность, для которой $ab = ac$ — диаметр.

Доказательство. [Построение.]

Рассмотрим два стержня d_1e_1 и d_2e_2 длины $4r$. Прикрепим к ним стержни d_1d_2, e_1e_2 длины $\sqrt{2}r$. В получившемся механизме отрезки d_1d_2 и e_1e_2 всегда перпендикулярны. На одном из стержней закрепим в середине шарнир h (механизм 2). С помощью механизма 3 добавим шарниры b, c, рисующие отрезок d_1e_1 и a, рисующий отрезок d_2e_2. Затем соединим шарниры a, b, c механизмом, ограничивающим дальность r с центром в h и в результате получим искомый механизм (рис. 8).

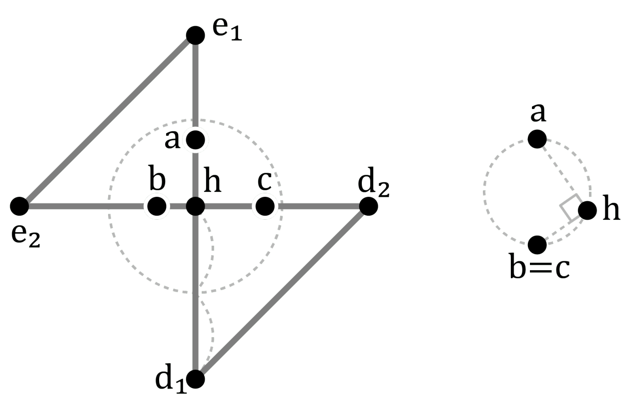


Рис. 8: Проекция точки на прямую.

В таком механизме выполнено условие, требуемое в описании механизма и никакие другие положения, исходя из построения, реализованы не будут.

□

Механизм 16 (Построение отрезка, равного минимальному (максимальному) из двух данных.) Механизм L, содержащий шарниры m, n, k, l, p, h, в котором положения шарниров m, n, k, l — всевозможные наборы точек, для которых существует круг радиуса r, содержащий их, и для каждого их положения длина отрезка ph (отрезка mh) равна минимальной (максимальной) из длин mn и kl. Доказательство. [Построение.]

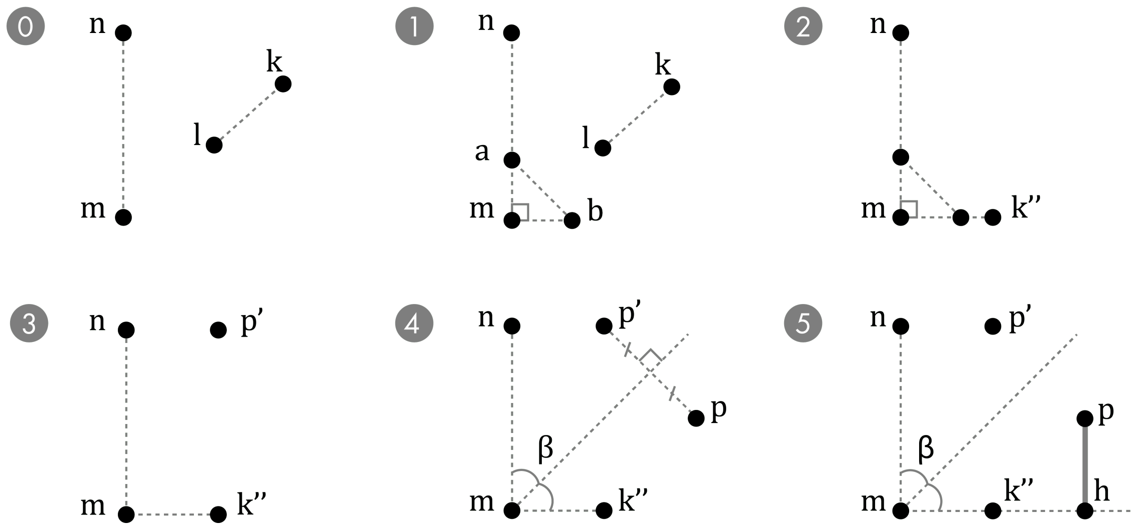


Рис. 9: План построения механизма, строящего минимальный (максимальный) отрезок из двух данных.

Подробное описание механизма, строящего минимальный отрезок, приведено в [3], механизм № 17. Для этого построения также используются вспомогательные механизмы, описанные в [3]. Приведём краткий план этого построения (рис. 9).

Пусть шарниры m, n, k, l — концы двузвенных шарнирных ломаных с равными длинами стержней и общим противоположным концом. Прикрепим к шарниру m вершину прямого угла шарнирного треугольника mab. Прикрепим к шарнирам m, n, a механизм 3, чтобы они оставались на одной прямой. С помощью механизма 3 отложим отрезок равный mk на луче mb. Обозначим k'' образ k. Перенесём параллельно mk'', чтобы образ m попал в n (механизм 3). Образ k'' обозначим p'. Расширим построение так, чтобы механизм содержал шарнир p, удовлетворяющий следующему свойству. Если p' и k'' лежат по одну стороны относительно биссектрисы угла nmk'', то $p = p'$, а иначе p является образом при отражении p' относительно этой биссектрисы [3]. Исходя из построения этого механизма, можно заметить, что в нём расстояние между шарнирами p и h равно минимальному из mn и lk, а mh — максимальному. Таким образом, описанный механизм строит отрезок, равный минимальному и максимальному из двух данных. □

4. Основные результаты

Лемма 3 (Построение узлов решётки Ханана для границы из n точек). *Для любого n на плоскости $\mathbb{R}^2$ существует механизм $L = L(n) = \left(G^W = (V,E)^W, \ell\right)$, $|W| = n$ удовлетворяющий следующим условиям.*

(1) *Механизм L содержит шарниры o, e_1, e_2, которые в каждом положении задают орто-*

нормированную систему координат $(o, \vec{e_1}, \vec{e_2})$. Далее положения (x^1, x^2) любых шарниров механизма L будем рассматривать в этой системе координат.

(2) *Шарниры множества W двигаются независимо друг от друга и каждый из них для каждого положения шарнира o рисует круг $B_r(o)$ с центром в o радиуса r.*

(3) *Во множестве шарниров V выделено подмножество $H = \{h_{uv} | u, v \in W, u \neq v\}$.*

(4) *Для любого положения x_W шарниров множества W множество положений $X^L \dashv x^W$ механизма L состоит из одной точки $X^L \dashv x_W = \{x \dashv x_W\}$.*

(5) *Положения шарниров H зависят от положений граничных вершин следующим образом. Для любой пары граничных вершин $u, v \in W$ и их положений $x_u = (u^1, u^2)$, $x_v = (v^1, v^2)$ положения шарниров $h_{uv}, h_{vu} \in H$ имеют следующие координаты $x_{h_{uv}} \dashv \{x_u, x_v\} = (u^1, v^2)$, $x_{h_{vu}} \dashv \{x_v, x_u\} = (v^1, u^2)$. Таким образом, шарниры множества H лежат в узлах решётки Ханана.*

Доказательство. Пусть oe_1e_2 — шарнирный прямоугольный треугольник. Рассмотрим набор шарниров W, соединённых простым механизмом, ограничивающим дальность r, центр которого скрепим с o (механизм 3). Для каждого шарнира $w \in W$ с помощью механизма 3 добавим шарниры, которые строят проекции w^1 и w^2 на прямые oe_1 и oe_2. Для каждой пары $u, v \in W$, $u \neq v$ с помощью механизма 3 построим сумму $\overrightarrow{oh_{uv}} = \overrightarrow{ou^1} + \overrightarrow{ov^2}$. В полученном механизме будут выполнены требуемые условия на положения шарниров множества W, и для каждого их положения шарниры h_{uv}, образующие множество H, будут рисовать все узлы решётки Ханана. □

Лемма 4 (Построение отрезка, равного манхеттенской длине сети). *Существует механизм $L = \big((V, E)^{V'}, \ell\big)$, для которого выполнено следующее.*

(1) *Механизм L содержит шарниры o, e_1, e_2, которые в каждом положении задают ортонормированную систему координат $(o, \vec{e_1}, \vec{e_2})$. Далее положения (x^1, x^2) любых шарниров механизма L будем рассматривать в этой системе координат.*

(2) *Во множестве шарниров V выделено подмножество V', для которого задан граф $G^{V'} = (V', E^{V'})$.*

(3) *Шарниры множества W двигаются независимо друг от друга и для каждого положения шарнира o рисуют круг $B_r(o)$.*

(4) *Механизм L содержит шарнир b и для него верно, что для каждого положения $x \in X^L$ евклидова длина отрезка $[x_o, x_b]$ равна манхеттенской длине сети x_W типа G_W.*

.

Доказательство. Начнём с жёсткого прямоугольного треугольника oe_1e_2 с прямым углом o. Прикрепим к нему механизм 3, ограничивающий дальность r набора шарниров W с центром в o. Для каждого ребра $uv \in E_W$ с помощью механизма 3 построим проекции u_1, u_2 шарнира u и v_1, v_2 шарнира v на прямые oe_1 и oe_2 соответственно.

Далее пронумеруем проекции произвольным образом и с помощью механизмов 3, которые переносят отрезок в начало заданного луча, отложим последовательно отрезки, равные проекциям, на луче oe_1, начиная с вершины o. Дальнюю от o вершину последнего перенесённого отрезка обозначим b. В полученном механизме для любого его положения x длина отрезка $[x_o, x_b]$ равна манхеттенской длине сети x_W типа G^W, таким образом искомый механизм построен. □

Утверждение 3 (Поиск кратчайшей сети)**.** *Пусть дан механизм $L = \big((V, E), \ell\big)$, удовлетворяющий следующим условиям.*

(1) *L — механизм в пространстве $\mathbb{R}^3$.*

(2) *Механизм L содержит шарниры o, e_1, e_2, e_3, которые в каждом положении задают ортонормированную систему координат $(o, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ с одной и той же заданной ориентацией. Далее положения (x^1, x^2, x^3) любых шарниров механизма L будем рассматривать в этой системе координат.*

(3) *Выделены подмножества шарниров $V_i \subset V$ и заданы графы $G_i = (V_i, E_i)$.*

(4) *Для любого положения $x \in X^L$ и любого i верно $x^3_{V_i} = 0$.*

Тогда механизм L можно расширить до механизма $L' = \big((V', E'), \ell\big)$, в котором выполнено следующее.

(1) $X^L_{V_i} = X^{L'}_{V_i}$.

(2) *Заданы подмножества шарниров $V'_i \subset V'$ и графы $G'_i = (V'_i, E'_i)$, которые изоморфны G_i, где $p_i \colon V_i \to V'_i$.*

(3) *Для любого положения $x' \in X^{L'}$ и для всех i положения шарниров $x'_{V'_i}$ лежат в горизонтальной плоскости $x^3 = \mathrm{const}_i$ и являются образами параллельного переноса положений x_{V_i} на вектор, сонаправленный с $\vec{e_3}$.*

(4) *Для каждого индекса j такого, что $x^3_{V'_j} = 0$, манхеттенская длина сети x_{V_j} типа G_j равна $\min\limits_k d_1(x_{V_k})$, где x_{V_k} — сеть типа G_k.*

Доказательство. Используя механизм, описанный в теореме 4, расширим исходный механизм так, чтобы в нём появились пары шарниров, строящие концы отрезков равных манхеттенским длинам сетей x_{V_i} типа G_i. С помощью механизма 3 отложим эти отрезки на луче oe_1 от точки o и обозначим $[o, l_i]$ отрезок, соответствующий $d_1(x_{V_i})$. Далее, с помощью механизма 3 построим отрезок $[o, l]$, длина которого равна минимальной длине из всех $|ol_i|$.

Рассмотрим шарнирный треугольник abc с прямым углом b.

С помощью механизма 3 ограничим положения вершин треугольника кругом с центром в o радиуса $2R$, лежащем в плоскости oe_1e_3. Прикрепим к шарнирам a, b, o, e_3 механизм 3 так, чтобы они оставались на луче ab. На данном этапе построения треугольник abc, оставаясь в плоскости oe_1e_3, может двигаться вдоль прямой oe_3, при этом катет ab всегда лежит на оси oe_3. Прикрепим к шарнирам a, l, c механизм 3 так, чтобы эти шарниры оставались на луче с вершиной a. Таким образом, для каждого положения шарниров V положение шарнира l определено однозначно, а значит и положение шарниров a, b, c.

К каждому отрезку $[o, l_i]$ прикрепим механизм 3 так, чтобы шарниры o'_i и l'_i были образом параллельного переноса $[o, l_i]$ на вектор $\overrightarrow{oo'_i}$.

Прикрепим 3 к тройкам шарниров a, b, o'_i и a, c, l'_i так, чтобы они оставались на одной прямой. В результате получим, что для каждого положения шарниров V положения шарниров o'_i и l'_i определены однозначно. Они лежат на сторонах треугольника abc и параллельны oe_1. Таким образом однозначно определены вектора $\overrightarrow{oo'_i}$, которые сонаправлены с oe_3 (рис. 10).

Чем больше отрезок $[o, l_i]$, тем длиннее вектор $\overrightarrow{oo'_i}$, на который происходит перенос $[o, l_i]$ и значит тем выше плоскость $x^3 = \mathrm{const}_i$, в которой лежит отрезок $[o, l_i]$, причём самый короткий из $[o'_i, l'_i]$ совпадает с $[o, l]$, поэтому для него $\overrightarrow{oo'_i} = 0$.

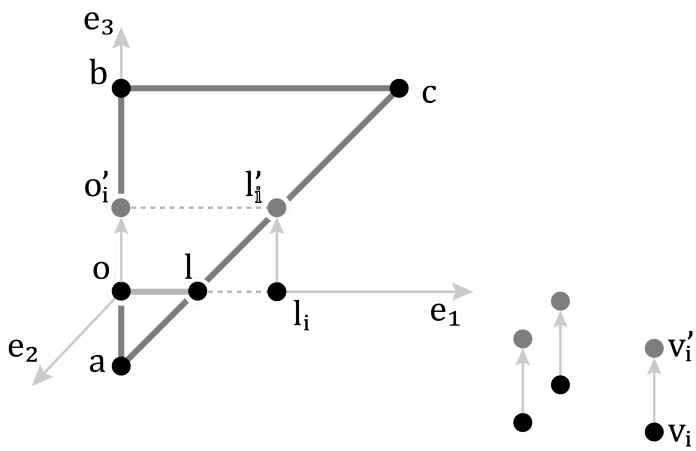


Рис. 10: Параллельный перенос сети вдоль оси oe_3.

Для каждого i к шарнирам множеств V_i прикрепим механизм 3 смещающий шарниры на вектор $\overrightarrow{oo_i'}$. Обозначим образы соответствующих шарниров V_i'. В построенном расширении механизма L множество положений шарниров V не изменилось, и для каждого положения $x \in X^L$ каждое из подмножеств V_i параллельно перенесено на вектор $\overrightarrow{oo_i'}$, длина которого равна разнице длины сети x_{V_i} типа G_i и кратчайшей из длин всех сетей x_{V_i}. $\square$

Теорема 1. *Для любого натурального числа n существует рассматриваемый в $\mathbb{R}^3$, шарнирный механизм $L = L(n) = \left(G^W = (V,E)^W, \ell\right)$, $|W| = n$, обладающий следующими свойствами*:

(1) *Механизм L содержит шарниры o, e_1, e_2, e_3, которые в каждом положении задают ортонормированную систему координат $(o, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Далее положения (x^1, x^2, x^3) любых шарниров механизма L будем рассматривать в этой системе координат.*

(2) *Шарниры множества W двигаются независимо друг от друга, и при фиксированном положении шарнира o каждый из них рисует круг $B_r(o)$ в плоскости $x^3 = \mathrm{const}$ с центром в o радиуса r.*

(3) *Во множестве шарниров V выделены подмножества I_i не пересекающиеся с W. Обозначим $V_i = W \cup I_i$. Для каждого V_i задан граф $T_i^W = (V_i, E_i)^W$.*

(4) *Для любого положения x_W шарниров W множество положений $X^L \dashv x_W$ механизма L состоит из одной точки x.*

(5) *Для каждого i и любого положения x механизма L образы отображения x_{I_i} лежат в плоскости $x^3 = \mathrm{const}_i$.*

(6) *Если для некоторого j положения шарниров I_j лежат в плоскости $x^3 = 0$, то сеть x_{V_j} типа T_j — минимальная прямоугольная сеть Штейнера с границей x_W.*

(7) *Для любого положения x_W существует как минимум один набор I_k такой, что $x^3_{I_k} = 0$.*

(8) *Если x_W — инъекция, то найдётся T_k, для которого x_{V_k} типа T_k — минимальное прямоугольное дерево Штейнера.*

Доказательство. Опишем порядок сборки искомого механизма. Для начала возьмём три равных жёстких прямоугольных равнобедренных треугольника oe_1e_2, oe_2e_3, oe_3e_1 и скрепим их, отождествляя шарниры с одинаковыми именами. Далее возьмём набор свободных шарниров W, $|W| = n$. Прикрепим к множеству шарниров W механизм 3 чтобы они продолжали свободно двигаться, оставаясь при этом в шаре с центром в o радиуса r. Чтобы шарниры множества W рисовали не трёхмерный шар, а круг в плоскости oe_1e_2, прикрепим к шарнирам множества W механизм 3, который ограничит положения W кругом с центром в o радиуса r в плоскости oe_1e_2. Расширим имеющуюся конструкцию с помощью механизма, описанного в теореме 3 и получим множество шарниров H, которые для каждого положения граничных шарниров рисуют положения узлов решётки Ханана. Полученный механизм обозначим L'.

Далее рассмотрим множество всевозможных деревьев $T_i^W = (V_i, E_i)^W$, $V_i = W \sqcup I_i$, для которых $I_i \subset H$, степени вершин не превосходят 4 и вершины степени один содержатся в W (таких деревьев конечное число). С помощью механизма, описанного в теореме 3, расширим L' и обозначим результат L. Полученный механизм будет содержать наборы шарниров I_i'. Для каждого положения механизма L верно, что шарниры I_i' лежат в образах параллельного переноса соответствующих наборов шарниров I_i на вектор сонаправленный с $\vec{e}_3$, длина которого пропорциональна манхеттенской длине сети x_{V_i} типа T_i, причём кратчайшая из сетей согласно описанию механизма 3 будет лежать в плоскости $x^3 = 0$. Таким образом, искомый механизм построен. □

Замечание 11. *Все приведённые выше рассуждения естественным образом распространяется на случай, когда граница W лежит в пространстве размерности $n > 2$. Для такой границы внутренние вершины кратчайшей сети тоже лежат во множестве узлов многомерного аналога решётки Ханана [11]. Перебирая все возможные сети, для каждой из них построим отрезок, равный манхеттенской длине сети. Далее, совершая параллельный перенос вдоль оси e_{n+1}, перпендикулярной пространству, в котором лежит W, получим, что искомая сеть будет лежать в гиперплоскости $x^{n+1} = 0$. Таким образом, формулировку теоремы 1 можно обобщить на случай, когда граница лежит в пространстве размерности $n \geqslant 2$.*

5. Заключение

Основной результат работы даёт построение механизма, строящего кратчайшую сеть в пространстве размерности $n \geqslant 2$ с манхеттенской метрикой. Несмотря на то, что в общем случае решение вариационных задач не свойственно шарнирным механизмам, при выполнении специальных условий придуман и реализован метод, который позволяет строить механизм, решающий задачу оптимизации. Этот подход применён для решения задачи, поставленной в данной статье, а также предыдущих работах автора [3], [4]. Полученные результаты открывают новую область для исследования возможностей решения вариационных задач с помощью шарнирных механизмов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Distance Measures for Machine Learning // MachineLearningMastery.com. 2020. URL: https://machinelearningmastery.com/distance-measures-for-machine-learning/ (дата обращения: 01.01.2025).

2. Кемпе А.Б. О методе описания плоских кривых степени n с использованием шарнирных механизмов // Proceedings of the London Mathematical Society. 1876. Т. 7. С. 213-216.

3. Житная М.Ю. Моделирование оптимальных сетей с использованием шарнирных механизмов // Фундаментальная и прикладная математика. 2019. Т. 22, № 6. С. 95-122.

4. Житная М.Ю. Моделирование минимальных параметрических сетей в евклидовых пространствах с помощью шарнирных механизмов // Чебышевский сборник. 2022. Т. 23, № 2. С. 74-87.

5. Иванов А.О., Тужилин А.А. Теория экстремальных сетей. М.: Наука, 2001. 320 с.

6. Ханан М. О проблеме Штейнера с использованием манхэттенских расстояний // SIAM Journal on Applied Mathematics. 1966. Т. 14. С. 255-265.

7. King R. The Robotic Revolution. Oxford: Oxford University Press, 1998. 280 p.

8. King R. Advanced Robotics: Theory and Application. Cambridge: MIT Press, 2005. 350 p.

9. Револьвентные шарниры // Dorna Robotics. URL: https://dorna.ai/blog/types-of-robot-joints/ (дата обращения: 01.01.2025).

10. Захариасен М. Каталог проблем сетки Ханана // Networks. 2000. Т. 38. С. 200-221.

11. Snyder T.L. On Minimal Rectilinear Steiner Trees in All Dimensions // Discrete and Computational Geometry. 1992. Vol. 7. P. 221-261. URL: https://dl.acm.org/doi/10.1145/98524.98596.

12. Леверенз К.Р., Трушчински М. Проблема ректильнейного дерева Штейнера: алгоритмы и примеры с использованием перестановок терминалов // ACM Southeast Regional Conference. 1999. DOI: 10.1145/306363.306402.

13. Хартенберг Р.С., Денавит Ж. Теория кинематического синтеза механизмов. Нью-Йорк: McGraw-Hill, 1964. 450 p.

14. Капович М., Миллсон Дж.Дж. Универсальные теоремы для конфигураций плоских шарнирных механизмов // Topology. 2002. Т. 41, № 6. С. 1051-1107.

15. Ковалёв М.Д. Геометрические вопросы кинематики и статики. М.: URSS Ленанд, 2019. 240 с.

16. Ковалёв М.Д. Что такое шарнирный механизм? И что же доказал Кемпе? // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. 2020. Т. 179. С. 16-28.

17. Ошемков А.А., Попеленский Ф.Ю., Тужилин А.А., Фоменко А.Т., Шафаревич А.И. Курс наглядной геометрии и топологии. М.: URSS, 2014. 360 с.

18. Sosinsky A.B. Two-dimensional surfaces and configuration spaces of articulated mechanisms. Lecture one // Summer school “Modern mathematics”. Dubna, 2007. URL: http://www.mathnet.ru/php/presentation.phtml?option_lang=rus&presentid=130 (дата обращения: 01.01.2025).

19. Sosinsky A.B. Two-dimensional surfaces and configuration spaces of articulated mechanisms. Lecture two // Summer school “Modern mathematics”. Dubna, 2007. URL: http://www.mathnet.ru/php/presentation.phtml?presentid=131&option_lang=rus (дата обращения: 01.01.2025).

REFERENCES

1. MachineLearningMastery.com, 2020, "4 Distance Measures for Machine Learning", [Online]. Available: https://machinelearningmastery.com/distance-measures-for-machine-learning/ [Accessed: Jan. 1, 2025].
2. Kempe, A.B., 1876, "On a General Method of Describing Plane Curves of the nth Degree by Linkwork", *Proceedings of the London Mathematical Society*, vol. 7, pp. 213-216.
3. Zhitnaya, M.Y., 2019, "Modeling of optimal networks by means of linkages", *Fundamental and Applied Mathematics*, vol. 22, no. 6, pp. 95-122.
4. Zhitnaya, M.Y., 2022, "Modeling minimal parametric networks in Euclidean spaces using linkages", *Chebyshev Collection*, vol. 23, no. 2, pp. 74-87.
5. Ivanov, A.O., Tuzhilin, A.A., 2001, *Theory of Extreme Networks*, Moscow: Nauka.
6. Hanan, M., 1966, "On Steiner's problem with rectilinear distance", *SIAM Journal on Applied Mathematics*, vol. 14, pp. 255-265.
7. King, R., 1998, *The Robotic Revolution*, Oxford: Oxford University Press.
8. King, R., 2005, *Advanced Robotics: Theory and Application*, Cambridge: MIT Press.
9. Dorna Robotics, 2023, "Revolute Joints", [Online]. Available: https://dorna.ai/blog/types-of-robot-joints/ [Accessed: Jan. 1, 2025].
10. Zachariasen, M., 2000, "A Catalog of Hanan Grid Problems", *Networks*, vol. 38, pp. 200-221.
11. Snyder, T.L., 1992, "On Minimal Rectilinear Steiner Trees in All Dimensions", *Discrete and Computational Geometry*, vol. 7, pp. 221-261. DOI: 10.1145/98524.98596.
12. Leverenz, C.R., Truszczynski, M., 1999, "The Rectilinear Steiner Tree Problem: Algorithms and Examples using Permutations of the Terminal Set", in *Proceedings of the ACM Southeast Regional Conference*, pp. 1-10. DOI: 10.1145/306363.306402.
13. Hartenberg, R.S., Denavit, J., 1964, *Kinematic Synthesis of Linkages*, New York: McGraw-Hill.
14. Kapovich, M., Millson, J.J., 2002, "Universality theorems for configurations of planar linkages", *Topology*, vol. 41, no. 6, pp. 1051-1107.
15. Kovalev, M.D., 2019, *Geometric Questions of Kinematics and Statics*, Moscow: URSS Lenand.
16. Kovalev, M.D., 2020, "What is a linkage mechanism? And what did Kempe prove?", *Results of Science and Technology. Modern Mathematics and Its Applications*, vol. 179, pp. 16-28.
17. Oshemkov, A.A., Popelensky, F.Yu., Tuzhilin, A.A., Fomenko, A.T., Shafarevich, A.I., 2014, *Course of Visual Geometry and Topology*, Moscow: URSS.
18. Sosinsky, A.B., 2007, "Two-dimensional surfaces and configuration spaces of articulated mechanisms. Lecture one", in *Summer School "Modern Mathematics"*, Dubna: JINR. [Online]. Available: http://www.mathnet.ru/php/presentation.phtml?option_lang=rus&presentid=130.
19. Sosinsky, A.B., 2007, "Two-dimensional surfaces and configuration spaces of articulated mechanisms. Lecture two", in *Summer School "Modern Mathematics"*, Dubna: JINR. [Online]. Available: http://www.mathnet.ru/php/presentation.phtml?presentid=131&option_lang=rus.

Получено: 29.12.2024
Принято в печать: 07.04.2025

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 26. Выпуск 2.

УДК 514 DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-2-90-100

Устойчивость решений задачи Ферма – Торичелли в нормированных плоскостях

Д. А. Илюхин

Илюхин Даниил Александрович — Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: daniil.ilukhin@math.msu.ru

Аннотация

В статье изучается устройство неединственных решений задачи Ферма – Торичелли в нормированных плоскостях. Была поставлена проблема наличия свойства устойчивости у таких решений. Получены результаты в виде необходимых и достаточных условий для устойчивости всех решений для наборов из трёх точек в нормированной плоскости. Кроме того, в качестве иллюстрации были рассмотрены бифуркационные диаграммы решений и исследовано их строение.

Ключевые слова: проблема Ферма – Торичелли, нормирующий функционал, устойчивость решений задачи Ферма – Торичелли.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:
Илюхин Д.А. Устойчивость решений задачи Ферма – Торичелли в нормированных плоскостях // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 2, с. 90–100.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 26. No. 2.

UDC 514 DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-2-90-100

The stability of Fermat – Torricelli problem's locus in normed planes

D. A. Ilyukhin

Ilyukhin Daniil Alexandrovich — Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: daniil.ilukhin@math.msu.ru

Abstract

The article studies the structure of non-unique solutions of the Fermat–Torricelli problem in normed planes. The problem of the presence of the stability property for such solutions was posed. The results were obtained in the form of necessary and sufficient conditions for the stability of all solutions for sets of three points in a normed plane. In addition, as an illustration, bifurcation diagrams of solutions were considered and their structure was investigated.

Keywords: Fermat – Torricelli problem, norming functional, stability of Fermat – Torricelli problem's locus.

Bibliography: 15 titles.

For citation:
Ilyukhin, D.A. 2025, "The stability of Fermat – Torricelli problem's locus in normed planes", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 2, pp. 90–100.

1. Введение

Задача поиска точки, минимизирующей сумму расстояний от неё до заданного множества точек в метрическом пространстве, впервые упоминается в 17 веке. В 1643 году Ферма поставил задачу для трёх точек на евклидовой плоскости, и в том же веке Торричелли предложил решение этой проблемы ([3]).

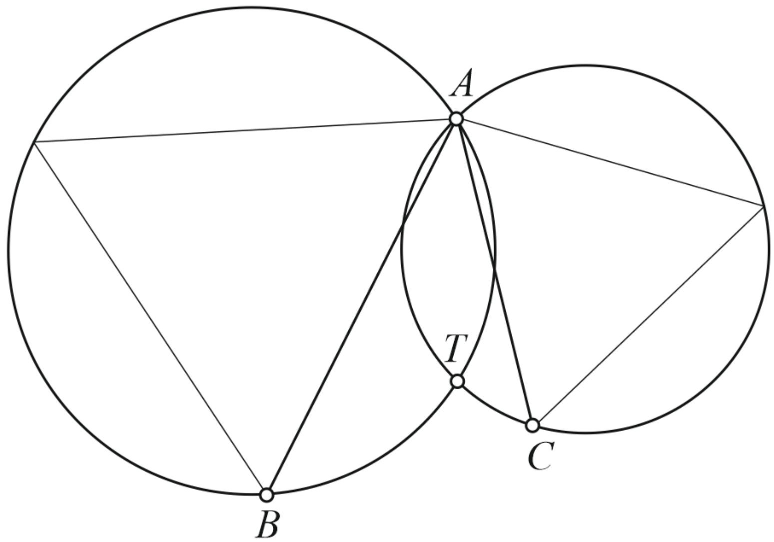


Рис. 1: Конструкция, предложенная Торричелли. Точка T является решением задачи для заданных точек A, B, C ([13])

С тех пор были рассмотрены различные обобщения этой проблемы. Задача была сформулирована для произвольных количества точек, размерности пространства, а также нормы, заданной в этом пространстве. Простота формулировки позволяет рассматривать задачу даже в произвольном метрическом пространстве. К примеру, задача для четырёх точек на евклидовой плоскости решена Д. Фаньяно ([2], [10]). А для случая пяти точек было доказано, что задача неразрешима в радикалах, доказательство приведено в [1] и [5]. Кроме того, существует обобщённая задача, в которой вершины рассматриваются вместе с некоторыми положительными величинами, называемых весами. О развитии взвешенной задачи можно прочитать в работах [14], [15], [12]. В частности, были доказаны существование и единственность решения такой задачи для трёх точек на евклидовой плоскости ([10]).

В этой статье будет рассматриваться классический вариант задачи: поиск точки, для которой достигается минимум суммы расстояний до элементов подмножества метрического пространства. Такую формулировку будем называть *обобщённой проблемой Ферма – Торичелли* (или просто *проблемой Ферма – Торичелли*). Работа опирается на статью [11], в ней описано применение геометрического подхода к задаче и изложены некоторые новые результаты, которые получены в рамках вещественных конечномерных нормированных пространств.

В предыдущей статье [7] были достигнуты результаты по определению необходимых и достаточных условий единственности решений задачи Ферма – Торичелли для любых n точек в произвольном конечномерном нормированном пространстве. Теперь поставлена цель по исследованию устойчивости неединственных решений и условий на нормированное пространство, обеспечивающих такое свойство для всех наборов.

Выражаю благодарность своему научному руководителю д.ф.-м.н. профессору А.А. Тужилину, а также д.ф.-м.н. профессору А.О. Иванову за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

2. Проблема Ферма – Торичелли и методы её решения

В этом разделе рассмотрим современные методы решения задачи Ферма – Торичелли в рамках конечномерных нормированных пространств.

Определение 1. *Точка x_0 называется точкой Ферма – Торичелли для точек $A = \{x_1, ..., x_n\}$, если $x = x_0$ минимизирует $\sum_{i=1}^n |xx_i|$. Множество всех таких точек обозначим* $\mathrm{ft}(A)$.

Из свойств функции $\sum_{i=1}^n |xx_i|$ можно получить следующее утверждение про множество решений задачи Ферма – Торичелли, см. например [4].

Предложение 1. *Пусть $A = \{x_1, \ldots, x_n\}$ — точки в пространстве. Тогда* $\mathrm{ft}(A)$ *— непустое, компактное и выпуклое множество.*

Теперь будет изложен геометрический метод построения решения задачи Ферма–Торричелли. Чтобы его использовать, наряду с исходным пространством X нужно рассматривать двойственное к нему пространство X^*, состоящее из линейных функционалов.

Определение 2. *Функционал $\varphi \in X^*$ называется нормирующим для вектора $x \in X$, если $\|\varphi\| = 1$ и $\varphi(x) = \|x\|$.*

Следующая теорема является критерием принадлежности некоторой точки множеству решений задачи Ферма – Торичелли.

Теорема 1 ([6], [8]). *Пусть $x_0, x_1, \ldots, x_n$ — точки в пространстве и $x_0 \neq x_i$ для $i = 1, ..., n$. Тогда x_0 — точка Ферма – Торичелли для $A = \{x_1, ..., x_n\}$ тогда и только тогда, когда для каждого вектора $x_i - x_0$, $i = 1, ..., n$, существует нормируюший функционал φ_i такой, что $\sum_{i=1}^n \varphi_i = 0$.*

Допустим, что найдена точка, являющаяся решением для множества A. Теперь с помощью функционалов из теоремы 1 можно построить всё множество $\mathrm{ft}(A)$. Для этого введём новый объект.

Определение 3. *Пусть даны функционал $\varphi \in X^*$ и точка $x \in X$. Определим конус $C(x, \varphi) = x - \big\{a : \varphi(a) = \|a\|\big\}$.*

Теорема 2 ([6]). *Пусть $A = \{x_1, \ldots, x_n\}$ — точки в пространстве и $p \in \mathrm{ft}(A) \setminus A$. По теореме 1 для каждого вектора $x_i - p$, $i = 1, ..., n$, существует нормируюший функционал φ_i такой, что $\sum_{i=1}^n \varphi_i = 0$. Тогда $\mathrm{ft}(A) = \cap_{i=1}^n C(x_i, \varphi_i)$.*

Теоремы 1 и 2 составляют геометрический метод поиска решения задачи Ферма–Торричелли. Чтобы описать применение этой теоремы, рассмотрим пример с вершинами равностороннего треугольника в шестиугольной норме (рисунок 2).

Во-первых, найдём хотя бы одно решение. Возьмём $p = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)$ и с помощью теоремы 1 докажем, что $p \in \mathrm{ft}(A)$. Для этого рассмотрим векторы $x_1 - p, x_2 - p, x_3 - p$ и построим их нормирующие функционалы. Так как они лежат на одних направлениях с внутренними точками уплощений, то для каждого из векторов $x_i - p$ существует ровно один функционал φ_i, линия уровня которого содержит соответствующее уплощение. Уплощения равноудалены от начала координат и задают равносторонний треугольник, следовательно, сумма функционалов, построенных по ним, равна нулю, и условие теоремы выполнено.

Теперь воспользуемся теоремой 2, чтобы отыскать все решения. Построим конус, задаваемый функционалом φ_2 и вектором $x_2 - p$. Так как функционал является нормирующим для всех точек уплощения, множество $\big\{a : \varphi_2(a) = \|a\|\big\}$ представляет собой набор лучей, выходящих из начала координат и проходящих через точки уплощения, то есть угол, стороны

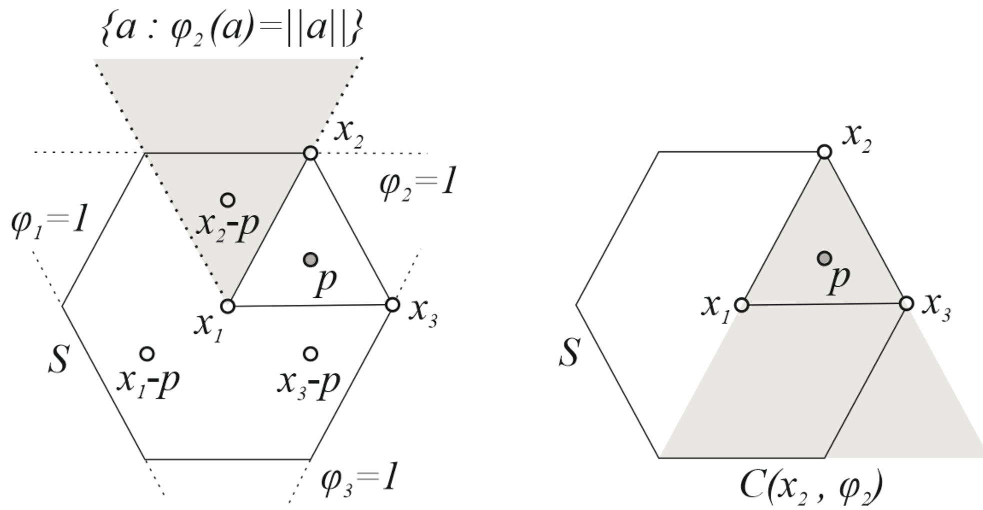


Рис. 2: Построение полного множества решений для точек x_1, x_2, x_3 на плоскости с шестиугольной нормой

которого содержат две соседние вершины. Теперь отразим угол относительно начала координат и совершим параллельный перенос так, чтобы вершина угла оказалась в точке x_2. После аналогичного построения двух других конусов получим, что их пересечением является весь треугольник $x_1x_2x_3$.

Замечание 12. *Утверждение теоремы 2 не зависит от выбора точки p и функционалов φ_i.*

Геометрический метод даёт общее описание решений задачи Ферма – Торичелли для различных заданных множеств — это пересечение некоторых конусов с вершинами, расположенными в точках этого множества. В случае плоскости это наблюдение позволяет сформулировать следующие утверждения:

Предложение 2 ([11]). *Пусть $A = \{x_1, \ldots, x_n\}$ — точки на плоскости. Тогда $\mathrm{ft}(A)$ — выпуклый многоугольник, который может вырождаться в отрезок или точку.*

Предложение 3 ([11]). *Пусть в пространстве точки множества $A = \{x_1, \ldots, x_{2k+1}\}$ расположены на одной прямой в порядке их нумерации. Тогда $\mathrm{ft}(A) = \{x_{k+1}\}$.*

3. Конфигурационные пространства для задачи Ферма – Торичелли и устойчивость её решений

Пусть X — нормированное пространство размерности d. Рассмотрим в нём задачу Ферма – Торичелли для n точек.

Определение 4. *Конфигурационным пространством $C_{X,n}$ называется евклидово пространство $\mathbb{R}^{nd}(x_{11}, \ldots, x_{1d}, \ldots, x_{n1}, \ldots, x_{nd})$, точкам которого соответствуют наборы точек пространства X.*

3.1. Устойчивость решений задачи Ферма – Торичелли

Наборы точек нормированного пространства разделяются на два класса в зависимости от характера единственности их решения задачи Ферма – Торичелли. Чтобы изучить, как устроена граница между ними в конфигурационном пространстве, рассмотрим свойство устойчивости решений.

Определение 5. *Пусть решение задачи Ферма – Торичелли для набора точек* $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ *единственно (неединствено). Будем говорить, что решение устойчиво, если существует окрестность набора* $\mathbf{x}$ *в конфигурационном пространстве* $C_{X,n}$ *такая, что для любого набора из этой окрестности решение задачи Ферма – Торичелли тоже единственно (неединственно).*

Назовём X *пространством с устойчивой* n*-единственностью (*n*-неединственностью), если любое единственное (неединственное) решение для* n *точек является устойчивым.*

Сначала покажем, что вопрос об устойчивости единственности решения тривиален.

Предложение 4. *Пусть* n *нечётно. Пространство* X *является пространством с устойчивой* n*-единственностью тогда и только тогда, когда решение задачи Ферма – Торичелли единственно для любых* n *точек.*

Доказательство. Допустим, что в X есть набор точек такой, что решение неединственно. Можно считать, что оно содержит ноль. Рассмотрим соответствующее этому решению согласованное множество граней. Пусть $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ — набор внутренних точек этих граней. Для любого $\lambda > 0$ решение задачи для набора $\lambda\mathbf{x} = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$ тоже неединственно. Тогда в любой окрестности нуля лежит набор $\lambda\mathbf{x}$ с неединственным решением при достаточно малом $\lambda > 0$. При этом для самого нулевого набора решение единственно. □

Предложение 5. *Для чётного* n *пространств с устойчивой* n*-единственностью не существует.*

Доказательство. Для чётного числа различных точек, лежащих на одной прямой, решение всегда неединственно. Аналогично предыдущему доказательству получаем, что нулевой набор неустойчив. □

Изучение устройства неединственных решений начнём с рассмотрения шестиугольных нормированных плоскостей.

Лемма 1. *Для каждой шестиугольной нормированной плоскости её набор согласованных множеств граней относится к одному из трёх типов:*

(1) *Существуют только согласованные множества из трёх граней-отрезков и из трёх граней-точек* $\iff$ *Неединственными решениями являются только многоугольники.*

(2) *Существуют все виды согласованных множеств кроме трёх граней-отрезков* $\iff$ *Неединственными решениями являются только отрезки.*

(3) *Существуют только согласованные множества из трёх граней-точек* $\iff$ *Неединственных решений не существует.*

Доказательство. Допустим, что три грани-отрезка шестиугольной нормированной плоскости составляют согласованное множество. Для двух функционалов, опирающихся на две несоседние грани шестиугольника, дополняющий их до нуля функционал опирается на третью грань, поэтому согласованного множества из двух отрезков и точки не существует. Если в согласованное множество входят две точки, то они противоположные. Опирающиеся на них функционалы не могут дополнять функционал грани до нуля, так как точка пересечения опорных прямых лежит дальше точки пересечения опорных прямых прилежащих к ним граней, который действительно дополняют до нуля первый функционал.

Пусть существует согласованное множество из двух граней-точек и грани-отрезка. Грани-точки противоположны, через них проходит нулевой уровень функционала грани-отрезка. Можно поверачивать функционалы граней-точек вокруг самих точек так, чтобы точка их пересечения оставалась на линии уровня первого функционала $\varphi = -2$, при этом сумма функционалов будет оставаться нулевой. Повернём их так, что один из функционалов станет опорным для грани, прилежащей к опорной точке. Получим согласованное множество из двух граней-отрезков и одной грани-точки. Аналогично можно получить из согласованных двух отрезков и точки согласованные две точки и один отрезок. Утверждение доказано. $\square$

Как будет показано далее, оба типа шестиугольной плоскости обладают устойчивой 3-неединственностью. На рисунке 3 проиллюстрирован этот факт в виде бифуркационных диаграмм.

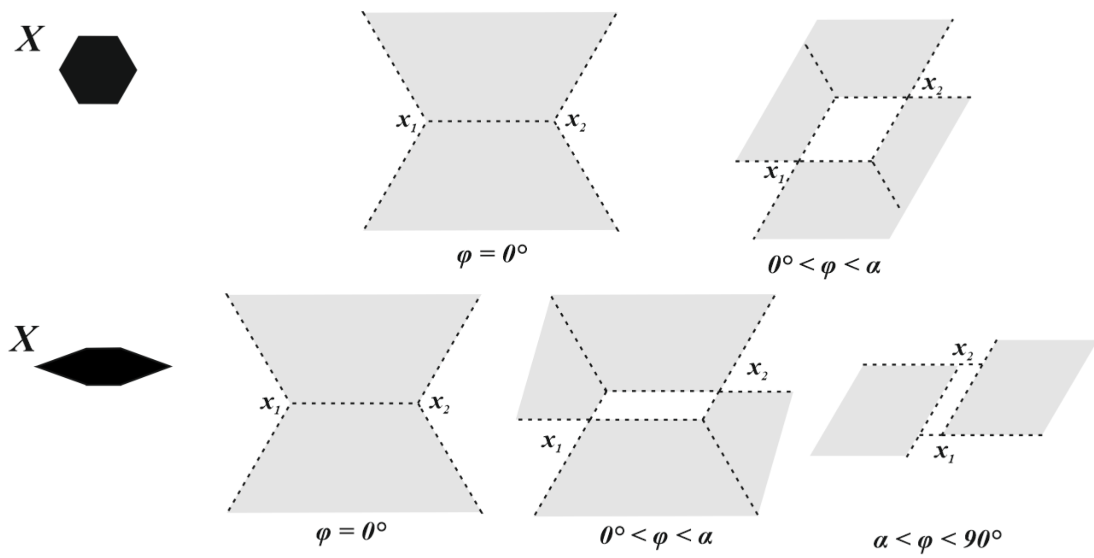


Рис. 3: Неединственные решения в шестиугольных нормах

Лемма 2. *Пусть для набора $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ решение единственно (неединственно) и существуют окрестности для всех точек x_i кроме одной x_n такие, что для любого набора $\mathbf{x}' = (x'_1, \ldots, x'_{n-1}, x_n)$, где x'_i из окрестности x_i, решение тоже единственно (неединственно). Тогда решение устойчиво.*

Доказательство. По определению устойчивости решения единственность или неединственность должна сохраняться для всех точек некоторой окрестности набора. Это эквивалентно сохранению решения для наборов, где каждая компонента взята из окрестности компоненты исходного набора. Однако так как параллельный перенос набора точек сохраняет решение задачи Ферма – Торичелли, то можно ограничиться теми наборами, где одна из компонент остаётся на месте. $\square$

Предложение 6. *Все нормированные плоскости, норма на которых задаётся многоугольниками, обладают устойчивой 3-неединственностью.*

Доказательство. Пусть для точек $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ решение задачи Ферма – Торичелли неединственно и ноль входит в решение. Функционалы $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ — нормирующие для x_1, x_2, x_3. Нужно расммотреть три варианта состава согласованного множества граней, соответствующего набору φ_i.

Случай 1. Пусть каждый функционал φ_i опирается на грань-отрезок.

Если хотя бы две точки $\widehat{x}_1, \widehat{x}_2$ принадлежат внутренностям уплощений, то для них существуют окрестности такие, что для любого набора x_1', x_2', x_3 решение неединственно. Тогда по лемме 2 решение устойчиво.

Если две точки $\widehat{x}_i$ и $\widehat{x}_j$ — непротивоположные вершины единичной окружности, то параллельным переносом сдвинем набор вдоль диагонали единичной окружности, на которой лежит точка $\widehat{x}_i$. Направление переноса нужно задать так, чтобы точка x_j сохранила свой нормирующий функционал. Получили предыдущий случай, для которого решение устойчивого.

Если точки $\widehat{x}_i$ и $\widehat{x}_j$ противоположны, то грани, на которые опираются их нормирующие функционалы, лежат с одной стороны от прямой, содержащей отрезок $\overline{x_i x_j}$. Значит, можно сдвинуть параллельным переносом набор x_1, x_2, x_3 в направлении, перпендикулярном отрезку $\overline{x_i x_j}$ так, что точки $\widehat{x}_i, \widehat{x}_j$ попадут внутрь уплощений.

Пусть все точки $\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \widehat{x}_3$ не лежат внутри уплощений. Проверим сдвиги вдоль диаметров единичной окружности, содержащих точки x_i. Если для некоторого диаметра существует сдвиг, после которого две другие точки попадают внутрь уплощений, соответствующих своим функционалам, то получаем устойчивость. Если такого сдвига не существует, то конусы, выходящие из x_i, пересекаются только по нулю, и решение единственно.

Случай 2. Пусть функционалы φ_1 и φ_2 опираются на уплощения, а φ_3 — на вершину. Если точки $\widehat{x}_1, \widehat{x}_2$ лежат внутри уплощений, то для них существуют окрестности такие, что для любого набора x_1', x_2', x_3 решение неединственно. Тогда по лемме 2 решение устойчиво.

Если одна из точек $\widehat{x}_1, \widehat{x}_2$ — вершина, то сдвинем набор $\mathbf{x}$ вдоль диаметра единичной окружности, содержащего точку $\widehat{x}_3$, так, чтобы все точки $\widehat{x}_i$ сохранили свои функционалы.

Если обе точки $\widehat{x}_1, \widehat{x}_2$ являются вершинами, то снова рассмотрим возможность сдвига вдоль диаметра, содержащего $\widehat{x}_3$. В случае существования сдвига такого, что точки $\widehat{x}_1, \widehat{x}_2$ попадают внутрь уплощений, получаем устойчивость. Если независимо от направления сдвига одна из точек не сохраняет свой нормирующий функционал, то исходные точки $\widehat{x}_1, \widehat{x}_2$ расположены так, что конусы, выходящие из них пересkаются на диаметре, содержащем $\widehat{x}_3$, только по нулю. В таком случае решение единственно, и, следовательно, такой случай не возникает.

Случай 3. Пусть функционал φ_1 опирается на уплощение, а φ_2 и φ_3 — на вершины. Тогда эти вершины противоположны, и можно повернуть φ_2 и φ_3 вокруг точек касания так, что один из них станет опираться на уплощение. Таким образом, тому же набору $\mathbf{x}$ теперь соответствует согласованное множество из двух уплощений и вершины. Этот случай уже разобран, значит, решение устойчиво. □

Для полного описания норм с устойчивой 3-неединственностью дополним определение согласованного множества граней единичной сферы из [7].

Определение 6. *Возьмём конечное множество граней F единичной сферы S пространства Минковского. Для каждой $f_i \in F$ выберем опорную гиперплоскость π_i так, что $\pi_i \cap S = f_i$. Пусть гиперплоскость π_i задаёт поверхность уровня $\varphi_i = 1$ некоторого линейного функционала φ_i. Если найдётся набор опорных гиперплоскостей такой, что сумма построенных функционалов равна нулевому, то такое множество граней называется* согласованным.

Согласованное множество граней $F_0 = \{f_1^0, \ldots, f_n^0\}$ называется максимальным, если не существует другого согласованного множества $F = \{f_1, \ldots, f_n\}$, полностью покрывающего его, то есть такого, что $f_i^0 \subset f_i$ для любого $i = 1, \ldots, n$.

Теорема 3. *В нормированной плоскости существует набор из трёх точек с неустойчивым неединственным решением, если и только если у её единичной окружности найдётся максимальное согласованное множество граней из двух точек и уплощения.*

Доказательство. Рассуждение доказательства утверждения 6 для случаев 1 и 2 верно и для произвольных нормированных плоскостей. Случай 3 также имеет место, если согласованное множество из уплощения и двух вершин не является максимальным. Таким образом, если искомое сооласованное множество отсутствует, то все неединственные решения устойчивы.

Допустим, что единичная окружность имеет согласованное множество F_M из уплощения и двух вершин, и оно максимально. Тогда в некоторой окрестности этих вершин отсутствуют уплощения, а также какие-либо грани других согласованных множеств. Пусть этой окрестности соответствует конус с углом раствора ε и с вершиной в нуле. Рассмотрим набор вершин треугольника, основание которого параллельно прямой, соединяющей вершины из F_M, а третья вершина равноудалена от двух других вершин и находится на достаточно малом расстоянии от основания так что острые углы треугольника меньше, чем ε. Решение для этого набора неединственно и соответствует рассматриваемым граням F_M.

Сдвинем на малое расстояние одну из вершин основания треугольника так, что основание треугольника сменит направление. Допустим, что решение нового набора снова неединственно, тогда одно из решений лежит в треугольнике и не является одной из его вершин. Сдвинем треугольник так, что это решение совпадает с нулём. Лучи, проведённые из нуля к вершинам основания треугольника, должны пересекать согласованные грани единичной окружности. Так как эти пересечения находятся в ε-окерестности вершин из F_M, но не являются ими, то получаем противоречие.

□

3.2. Бифуркационные диаграммы решений

Рассмотрим задачу Ферма – Торичелли для трёх точек в нормированной плоскости. Существуют преобразования плоскости, которые для любого набора $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ переводят их множество решений $\mathrm{ft}\,(\mathbf{x})$ в $\mathrm{ft}\,(\mathbf{x}')$ — множество решений изменённого набора. Такими преобразованиями являются сдвиги и гомотетии с центром в нуле.

Будем считать, что набор из трёх точек $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ задаётся полярным углом φ вектора $\overline{x_1 x_2}$ и положеним точки x_3 относительно этого вектора. Для фиксированного угла φ рассмотрим *бифуркационную диаграмму решений* — разобьём плоскость на два подмножества. Одно из них отвечает положениям точки x_3, для которых множество $\mathrm{ft}\,(\mathbf{x})$ состоит из единственного решения, другое — положениям, соответствующим неединственным решениям.

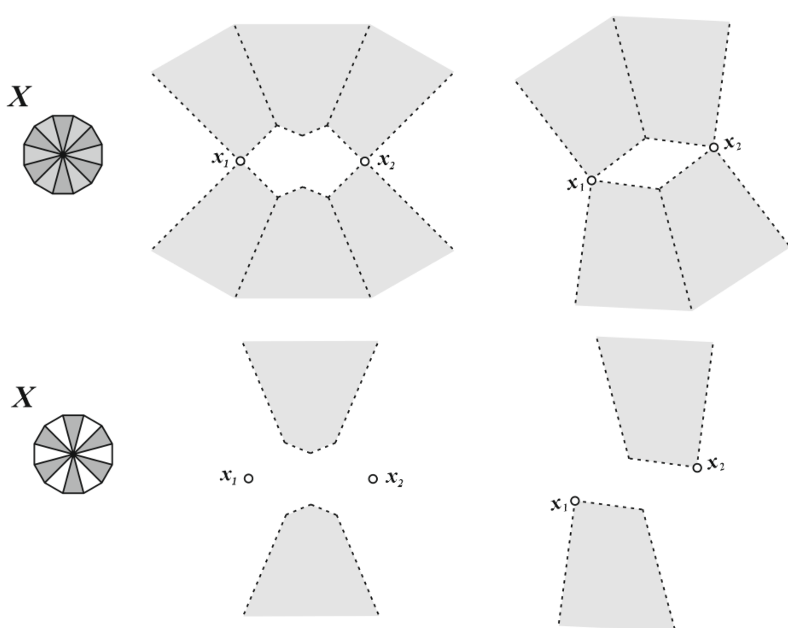


Рис. 4: Бифуркационные диаграммы для многоугольной нормы и нормы с уплощениями

Изучим свойства бифуркационных диаграмм. Так как для любых трёх точек, лежащих на одной прямой, решение единственно и совпадает с одной из этих точек, то получаем первое свойство:

Предложение 7. *Прямая, содержащая точки x_1 и x_2, входит в подмножество единственных решений.*

Вид решения задачи Ферма – Торичелли зависит только от направления границ конусов, пересечением которых оно является, отсюда верно следующее утверждение.

Предложение 8. *Каждому максимальному согласованному множеству уплощений единичной окружности поставим в соответствие набор углов $\{(\varphi_{11}, \varphi_{12}), \ldots, (\varphi_{n1}, \varphi_{n2})\}$, где $(\varphi_{i1}, \varphi_{i2})$ — это полярные углы концов грани f_i. Если грань — точка, то $\varphi_{i1} = \varphi_{i2}$. Эти наборы углов однозначно задают вид бифуркационных диаграмм для данной нормированной плоскости.*

Предложение 9. *Пусть для нормированной плоскости известно множество всех максимальных наборов из трёх согласованных граней. Тогда для любой бифуркационной диаграммы подмножество неединственных решений разбивается на непересекающиеся области такие, что каждому набору соответствует одна область.*

Доказательство. Пересечение двух разных областей означало бы, что для одного и того же набора точек можно подобрать два разных максимальных согласованных множества, дающих совпадающее решение.

Допустим, что это так. Так как наборы максимальны, то они различаются хотя бы по двум элементам. Если хотя бы один элемент одного набора не пересекается ни с одним из другого, то и соответствующие решения не пересекаются. Пусть два элемента отличны и пересекаются с элементами другого набора по точке, тогда конусы пересекаются по лучу. Получаем, что решение — отрезок. Но в этом случае множества состоят из двух граней-отрезков и одной вершины, причём вершины из разных множеств противоположны. Тогда они могут быть решением для одного и того же набора точек только в том случае, если две точки x_1, x_2 лежат на прямой, соединяющей вершины. Оба множества граней образуют одну и ту же область неединственности — объединение конусов, выходящих из точек отрезка x_1x_2.

Таким образом, если две разные области неединственности пересекаются, то они совпадают, что и требовалось доказать. □

4. Заключение

Исследование конфигурационных пространств показало, что задача об устойчивости неединственных решений задачи Ферма – Торичелли нетривиальна и позволяет продолжить расширение классификации нормированных пространств относительно характера решений, встречающихся в них.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bajaj C. The algebraic degree of geometric optimization problems. // 1988. Discr. Comput. Geom., 3, 177–191.

2. Boltyanski V., Martini H., Soltan V. Geometric methods and optimization problems. // 1999. Kluwer Acad. Publ.

3. Brazil M., Graham R. L., Thomas D. A., Zachariasen M. On the History of the Euclidean Steiner Tree Problem // 2013.

4. Cieslik D. The Fermat-Steiner-Weber-problem in Minkowski spaces. // 1988. Optimization 19, 485–489.

5. Cockayne E. J., Melzak Z. A. Euclidean constructibility in graph-minimization problems. // 1969. Math. Mag., 42, 206–208.

6. Durier R., Michelot C. Geometrical properties of the Fermat-Weber problem. // 1985. Europ. J. Oper. Res. 20, 332–343.

7. Илюхин Д. А. 2022, "Проблема Ферма – Торичелли в случае трёх точек в нормированных плоскостях", Чебышевский сборник. Т. 23(5): 72-86.

8. Иванов А. О., Тужилин А. А. Разветвленные геодезические в нормированных пространствах. // 2002. Изв. РАН. Сер. матем., 66:5, 33–82

9. Иванов А. О., Тужилин А. А. Теория экстремальных сетей. // 2003. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований.

10. Kupitz Y. S., Martini H. Geometric aspects of the generalized Fermat–Torricelli problem. // 1997. Bolyai Society Mathematical Studies 6, 55-127.

11. Martini H., Swanepoel K. J., Weis G. The Fermat–Torricelli problem in normed planes and spaces. // 2002. Journal of Optimization Theory and Applications 115, 283-314.

12. Nguyen S. D. Constrained Fermat-Torricelli-Weber Problem in real Hilbert Spaces // 2018. ArXiv e-prints. arXiv:1806.04296.

13. Torricelli E. De maximis et minimis. // 1919. Opere di Evangelista Torricelli, Faenza, Italy.

14. Uteshev A. Y. Analytical solution for the generalized Fermat–Torricelli problem // 2014. The American Mathematical Monthly 121(4), 318–331.

15. Zachos A. N. An analytical solution of the weighted Fermat-Torricelli problem on the unit sphere // 2014. ArXiv e-prints. arXiv:1408.6495.

REFERENCES

1. Bajaj, C., 1988, "The algebraic degree of geometric optimization problems", *Discr. Comput. Geom.*, vol. 3, pp. 177–191.

2. Boltyanski, V., Martini, H., Soltan, V., 1999, "Geometric methods and optimization problems", Kluwer Acad. Publ.

3. Brazil, M., Graham, R.L., Thomas, D.A., Zachariasen, M., 2013, "On the History of the Euclidean Steiner Tree Problem".

4. Cieslik, D., 1988, "The Fermat-Steiner-Weber-problem in Minkowski spaces", *Optimization*, vol. 19, pp. 485–489.

5. Cockayne, E.J., Melzak, Z.A., 1969, "Euclidean constructibility in graph-minimization problems", *Math. Mag.*, vol. 42, pp. 206–208.

6. Durier, R., Michelot, C., 1985, "Geometrical properties of the Fermat-Weber problem", *Europ. J. Oper. Res.*, vol. 20, pp. 332–343.

7. Ilyukhin, D.A., 2022, “The Fermat–Torricelli problem in the case of three-point sets in normed planes”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 23, no. 5, pp. 72–86.

8. Ivanov, A.O., Tuzhilin, A.A., 2002, “Branching geodesics in normed spaces”, *Izvestiya: Mathematics*, vol. 66, no. 5, pp. 905–948.

9. Ivanov, A.O., Tuzhilin, A.A., 2003, “Extreme Networks Theory”, Moscow-Izhevsk: Institute of Computer Investigations.

10. Kupitz, Y.S., Martini, H., 1997, “Geometric aspects of the generalized Fermat–Torricelli problem”, *Bolyai Society Mathematical Studies*, vol. 6, pp. 55–127.

11. Martini, H., Swanepoel, K.J., Weis, G., 2002, “The Fermat–Torricelli problem in normed planes and spaces”, *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 115, pp. 283–314.

12. Nguyen, S.D., 2018, “Constrained Fermat-Torricelli-Weber Problem in real Hilbert Spaces”, *ArXiv e-prints*, arXiv:1806.04296.

13. Torricelli, E., 1919, “De maximis et minimis”, *Opere di Evangelista Torricelli*, Faenza, Italy.

14. Uteshev, A.Y., 2014, “Analytical solution for the generalized Fermat–Torricelli problem”, *The American Mathematical Monthly*, vol. 121, no. 4, pp. 318–331.

15. Zachos, A.N., 2014, “An analytical solution of the weighted Fermat-Torricelli problem on the unit sphere”, *ArXiv e-prints*, arXiv:1408.6495.

Получено: 08.12.2024
Принято в печать: 07.04.2025

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 26. Выпуск 2.

УДК 515.124.4+519.852.3 DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-2-101-124

Симметрии выпуклых многогранников бинарных деревьев

А. О. Иванов, Д. А. Марханов

Иванов Александр Олегович — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова; Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана (г. Москва).
e-mail: aoiva@mech.math.msu.su
Марханов Дмитрий Алексеевич — Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: demetryfotball@gmail.com

Аннотация

Задача о поиске минимальных параметрических заполнений конечного метрического пространства M сводится к классической задаче линейного программирования. Множество допустимых значений двойственной задачи представляет собой выпуклый многогранник Λ_G, который зависит только от типа заполнения G — дерева, множество вершин степени 1 которого совпадает с M, а остальные вершины имеют степень 3 (такие деревья называются бинарными, соединяющими M). Вершины этого многогранника играют важную роль при вычислении веса минимального заполнения.

Изоморфным бинарным деревьям, соединяющим одно и тоже пространство M, соответствуют, вообще говоря, разные многогранники. В данной работе получен полный ответ на вопрос о том, как они связаны между собой. Кроме того, в работе обсуждается вопрос об устройстве объединения U множеств вершин всех многогранников Λ_G, соответствующих всевозможным бинарным деревьям G, соединяющим данное множество M. Множество $U = U(m)$ зависит только от количества m точек в множестве M. Оказывается при $m \leqslant 6$ множество $U(m)$ является выпуклым, то есть представляет собой множество вершин некоторого выпуклого многогранника. Выпуклость $U(m)$ при больших m — это открытый вопрос.

Ключевые слова: конечное метрическое пространство, минимальное параметрическое заполнение, линейное программирование, многогранник бинарного дерева, группа перестановок, выпуклость.

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:
Иванов А.О., Марханов Д.А. Симметрии выпуклых многогранников бинарных деревьев // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 2, с. 101–124.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 26. No. 2.

UDC 515.124.4+519.852.3 DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-2-101-124

Convex Polyhedra of Binary Trees and their Symmetries

A. O. Ivanov, D. A. Markhanov

Ivanov Alexandr Olegovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Lomonosov Moscow State University; Bauman Moscow State Technical University (Moscow).
e-mail: aoivamech.math.msu.su
Markhanov Dmirtii Alexeevich — Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: demetryfotball@gmail.com

Abstract

Problem of finding minimal parametric fillings of a finite metric space M can be reduced to classical linear programming. The set of admissible values of the dual problem is a convex polyhedron Λ_G that depends on the filling type G, i.e., on a tree, whose set of degree 1 vertices equals M, and all other vertices have degree 3 (such trees are referred as binary trees connecting M). Vertices of this polyhedron have an important role in minimal filling weight calculation.

Generally speaking, isomorphic binary trees connecting the same space M correspond to different polyhedra. In the present paper a complete answer on the relations between such polyhedra is obtained. Besides, the question on the structure of the set U obtained as the union of the vertices of all polyhedra Λ_G over all binary trees connecting a given set M. This set $U = U(m)$ depends on the number of points m in the set M. It turns out that the set $U(m)$ is convex for $m \leqslant 6$, i.e., it is a vertex set of a convex polyhedron. Convexity of $U(m)$ for other m is an open question.

Keywords: finite metric space, minimal parametric filling, linear programming, convex polyhedron of a binary tree, permutation group, convexity

Bibliography: 16 titles.

For citation:
Ivanov, A.O, Markhanov, D.A. 2025, “Convex polyhedra of binary trees and their symmetries”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 2, pp. 101–124.

1. Введение

Задачи об оптимальном соединении привлекают специалистов не только из-за наличия многочисленным приложениям, но и благодаря их математической нетривиальности и красоте. Их изучение требует синтетических методов, находящихся на стыке геометрии, комбинаторики, вариационного исчисления, выпуклого анализа. Классическим примером задачи этого типа — задача Штейнера о поиске кратчайшей сети, соединяющей заданный конечный набор точек метрического пространства, см. [1]. Недавно в [2] появилось еще одно обобщение этой задачи — задача о минимальном заполнении конечного метрического пространства [2], [3], [4], в основу которого легли идеи теории М. Громова о минимальном заполнении риманова многообразия, см. [5].

В этом контексте, *заполнением* конечного метрического пространства M называется такой связный граф $G = (V, E)$ с весовой функцией ω на ребрах, который соединяет точки пространства M (то есть $M \subset V$) так, что вес любого пути в графе G между произвольными точками из M не меньше, чем расстояние между этими точками в метрическом пространстве M. Граф G называется *типом* заполнения. Пусть тип G заполнения фиксирован. Если весовая функция ω такова, что вес заполнения $\omega(G)$ минимален, то заполнение называется *минимальным параметрическом заполнением типа* G. Точная нижняя грань весов $\omega(G)$ минимальных параметрических заполнений по всем возможным типам G графов, соединяющих M, называется *весом минимального заполнения*, а взвешенный граф, на котором этот имфимум достигается — *минимальным заполнением пространства* M. Существование минимального заполнения для произвольного конечного метрического пространства доказано в [2]. Там же показано, что в качестве типа заполнения G достаточно брать так называемые *бинарные деревья*, то есть деревья, степени вершин которых равны 1 или 3, причем множество вершин степени 1 совпадает с M. Более подробно о минимальных заполнениях см. раздел 2.1 ниже, а также [6].

Минимальные заполнения конечных метрических пространств тесно связаны с решениями проблемы Штейнера — кратчайшими деревьями. Действительно, пусть $M \subset X$ — конечное подмножество метрического пространства X. Тогда расстояние между точками в X превращает M в конечное метрическое пространство, а каждое дерево с вершинами в X, которое соединяет M (то есть содержит M как подмножество множества своих вершин), задает заполнение метрического пространства M, если в качестве весовой функции взять длину ребер в X. Поэтому вес минимального заполнения для M дает оценку снизу на длину кратчайшего дерева, соединяющего M. Такие оценки бывают полезны при доказательстве того, что конкретное дерево является кратчайшим. В работах П. Бородина и Б. Беднова [7] полностью описаны банаховы пространства, в которых эта оценка оказывается точной.

Введение в рассмотрение обобщенных заполнений [3] позволило А. Еремину получить общую формулу веса минимального параметрического заполнения в терминах так называемых неприводимых мультиобходов, см. [8], подтвердив, в модифицированном виде, высказанную в [2] гипотезу о связи обходов дерева (см. ниже) и веса минимального заполнения. Однако, полученная формула предполагает экспоненциально большой и комбинаторно сложный перебор, причем ограничения на объекты перебора — неприводимых мультиобходов, — очень грубые.

Еще в работе [2] было замечено, что задача о минимальном параметрическом заполнении сводится к задаче линейного программирования. Двойственная задача, см. например [13], в этом случае — это классическая задача линейного программирования, ее множество допустимых значений — выпуклый многогранник Λ_G, зависящий только от типа G минимального параметрического заполнения. От функции расстояния на метрическом пространстве M зависит только целевая функция, максимум которой соответствует весу минимального параметрического заполнения. Максимум целевой функции достигается в одной из вершин многогранника Λ_G. В работах А. Иванова, А. Тужилина [4] и О. Щербакова [9], [10] была дана геометрическая интерпретация формулы Еремина. Оказалось, что точки многогранника Λ_G с рациональными координатами соответствуют мультиобходам дерева G, а вершины многогранника Λ_G — неприводимым мультиобходам. Таким образом, с этой точки зрения, формула Еремина представляет собой классический результат теории линейного программирования: максимум целевой функции может быть найден как максимум ее значений в вершинах многогранника допустимых значений. Отметим, что в работе [9] показано, что максимум может достигаться в любой из вершин многогранника Λ_G. Таким образом, задача поиска веса минимального параметрического заполнения сводится к нахождению всех вершин многогранника Λ_G.

Одним и тем же бинарным деревом типа G можно по-разному соединять точки пространства M (си. примеры ниже). Цель данной работы — исследовать, как может меняться многогранник Λ_G, в зависимости от того, как одно и то же дерево G соединяет M. Разные способы соединения множества M деревом G можно задавать изменением нумерации элементов множества M, то есть элементами группы перестановок S_m, где m — количество элементов в M. В этих терминах удалось получить полный ответ, см. теорему 1.

Также в работе обсуждается следующий вопрос. Одно и то же множество M можно соединить разными (не изоморфными) бинарными деревьями. Каждому такому дереву соответствует несколько выпуклых многогранников (следствие 2). В работах [4] и [9] разобраны случаи $|M| \leqslant 5$, см. также ниже. Показано, что объединение множеств вершин всех этих многогранников также представляет собой множество вершин выпуклого многогранника. В данной работе разобран случай $|M| = 6$. Оказалось, что имеет место тот же результат.

2. Основные определения

В данном разделе приведены необходимые определения и результаты.

2.1. Минимальные заполнения конечных метрических пространств

Пусть M — произвольное конечное множество и $G = (V, E)$ — некоторый связный простой граф с множеством вершин V и множеством ребер E. Для краткости ребро графа, соединяющее его вершины u и v, будем обозначать просто через uv. Будем говорить, что G *соединяет* M, если $M \subset V$. В этом случае также будем говорить, что M — *граница* графа G. (Отметим, что граница графа определена не однозначно, ее выбор зависит от конкретной задачи.) В дальнейшем мы всегда предполагаем, что у графа фиксирована некоторая граница, возможно пустая. *Дерево* — это связный граф без циклов, граница которого содержит все его вершины степени 1 и 2. Дерево будем называть *бинарным*, если степени его вершин равны 1 или 3, а граница совпадает с множеством всех его вершин степени 1.

Пусть теперь $\mathcal{M} = (M, \rho)$ — конечное псевдометрическое пространство (в отличие от метрики, расстояния между разными точками могут быть равны нулю), $G = (V, E)$ — связный граф, соединяющий M, и $\omega\colon E \to \mathbb{R}_+$ — некоторая вещественная неотрицательная функция, называемая обычно *весовой функцией* и порождающая *взвешенный граф* $\mathcal{G} = (G, \omega)$. *Весом* взвешенного графа $\mathcal{G}$ называется величина $\omega(\mathcal{G})$, равная сумме весов всех ребер этого графа. Функция ω задает на V псевдометрику d_ω, а именно, расстояние между вершинами графа $\mathcal{G}$ определяется как наименьший из весов маршрутов, соединяющих эти вершины в графе G. Если для любых точек p и q из M выполняется $\rho(p, q) \le d_\omega(p, q)$, то взвешенный граф $\mathcal{G}$ называется *заполнением* пространства $\mathcal{M}$, а граф G — *типом* этого заполнения. Число $\mathrm{mf}(\mathcal{M})$, равное $\inf \omega(\mathcal{G})$ по всем заполнениям $\mathcal{G}$ пространства $\mathcal{M}$, назовем *весом минимального заполнения*, а заполнение $\mathcal{G}$, для которого $\omega(\mathcal{G}) = \mathrm{mf}(\mathcal{M})$, — *минимальным заполнением.* Если минимизировать вес заполнений фиксированного типа, то получаем *минимальные параметрические заполнения*, вес которых обозначается через $\mathrm{mpf}(\mathcal{M}, G)$. В работе [2] показано, что и минимальное заполнение существует для любого конечного псевдометрического пространства, и что при поиске минимальных заполнений пространства M достаточно ограничится бинарными деревьями с границей M.

В дальнейшем нам будет полезно следующее определение. Пара граничных вершин бинарного дерева называется *усами*, если эти вершины имеют общую соседнюю вершину (степень которой, очевидно, равна трем). Ребра, инцидентные вершинам усов, также будем называть усами. Хорошо известно, что каждое бинарное дерево с четырьмя и более граничными вершинами имеет не менее двух усов.

Оказывается, не обязательно требовать, чтобы веса всех рёбер в параметрическом заполнении были неотрицательными, а именно, можно искать минимум веса среди заполнений с произвольной, необязательно неотрицательной, весовой функцией. Такие заполнения называются *обобщенными.* В работе [3] доказано, что при переходе к обобщенным минимальным заполнениям сохраняется большинство свойств минимальных заполнений. Один из замечательных фактов состоит в том, что для всякого конечного псевдометрического пространства веса минимального и минимального обобщённого заполнений равны, т.е. минимум веса на множестве заполнений с неотрицательной весовой функцией совпадает с минимумом веса на более широком множестве заполнений с произвольной весовой функцией, см. [3].

2.2. Линейное программирование

Напомним формулировку так называемой *общей задачи линейного программирования*, сокращенно ОЗЛП. Рассмотрим n-мерное линейное пространство, которое нам будет удобно представить как $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$. Векторы из $\mathbb{R}^n$ запишем в виде $x = (x_1, x_2)$, где $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$. Пусть задана линейная функция $F(x) = \langle f_1, x_1 \rangle + \langle f_2, x_2 \rangle$, где $f_i \in \mathbb{R}^{n_i}$, а угловые скобки обозначают стандартное скалярное произведение. Задача состоит в том, чтобы найти наименьшее значение функции F, называемой в этом контексте *целевой*, на подмножестве $X \subset \mathbb{R}^n$ пространства $\mathbb{R}^n$, заданном системой линейных уравнений и линейных неравенств так:

$$X = \{x = (x_1, x_2) \mid A_{11}x_1 + A_{12}x_2 \le b_1, \quad A_{21}x_1 + A_{22}x_2 = b_2, \quad x_1 \ge 0\}, \tag{1}$$

где неравенства на векторах понимаются как покомпонентные, A_{ij} — фиксированные матрицы размера $m_i \times n_j$, а $b_i \in \mathbb{R}^{m_i}$. Множество X называется *множеством допустимых значений переменных*. Если X не пусто, то X представляет собой замкнутое выпуклое многогранное подмножество пространства $\mathbb{R}^n$. В последнем случае положим $F_* = \inf_{x \in X} F(x)$, а если F_* конечно, то $X_* = \{x \in X : F(x) = F_*\}$. Задача называется *разрешимой*, если X_* не пусто. В этом случае каждая точка $x_* \in X_*$ называется *решением*.

Говорят, что задача линейного программирования имеет *канонический вид*, если в определении множества X допустимых значений переменных нет ограничений в виде неравенств, кроме $x \geqslant 0$, то есть

$$X = \{x \mid Ax = b, \quad x \ge 0\}. \tag{2}$$

Множество допустимых значений любой *канонической задачи линейного программирования* (КЗЛП) содержится в положительном ортанте. Поэтому, если КЗЛП разрешима, то среди ее решений обязательно есть так называемые *угловые* или *экстремальные точки* множества X, то есть такие точки, которые не лежат внутри никакого интервала с концами в X. Более того, множество X_* в этом случае также представляет собой выпуклое многогранное множество, все угловые точки которого являются также угловыми точками для X. С геометрической точки зрения угловые точки представляют собой вершины многогранного множества. Способ нахождения угловых точек допустимого множества X канонической задачи описан, например, в [13].

Важную роль при изучении задач линейного программирования играет так называемый принцип двойственности. *Двойственная задача* к ОЗЛП вида (1) формулируется так. Требуется найти наибольшее значение H^* линейной функции $H(\lambda) = \langle b_1, \lambda_1 \rangle + \langle b_2, \lambda_2 \rangle$, где переменные $\lambda_i \in \mathbb{R}^{m_i}$ образуют вектор $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$, который меняется в многогранной области $\Lambda \subset \mathbb{R}^m$, $m = m_1 + m_2$, заданной следующей системой линейных уравнений и линейных неравенств:

$$\Lambda = \left\{\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \mid A_{11}^T\lambda_1 + A_{21}^T\lambda_2 \le -f_1, \quad A_{12}^T\lambda_1 + A_{22}^T\lambda_2 = -f_2, \quad \lambda_1 \ge 0\right\}.$$

Как известно, задача, двойственная к двойственной задаче, эквивалентна исходной, поэтому принято говорить о взаимной двойственности. Согласно принципу двойственности, взаимно двойственные задачи линейного программирования разрешимы или не разрешимы одновременно, при этом, если задачи разрешимы, то $F_* = H^*$, причем $F(x) = F_* = H^* = H(\lambda)$ для всех $x \in X_*$ и $\lambda \in \Lambda^*$ и только для них, где через Λ^* обозначено множество всех решений двойственной задачи.

2.3. Минимальные параметрические заполнения и линейное программирование

Как было замечено в [2], задача о поиске минимального параметрического заполнения сводится к задаче линейного программирования. Действительно, пусть (M,ρ) — произвольное конечное метрическое пространство. Занумеруем произвольным образом точки из $M=\{p_1,\dots,p_m\}$ и положим $\rho_{ij}=\rho(p_i,p_j)$. Далее, пусть $G=(V,E)$ — некоторое дерево, соединяющее M. Будем предполагать, что $M=\partial G\subset V$ совпадает с множеством вершин степени 1 и 2 дерева M. Опишем весовые функции $\omega\colon E\to\mathbb{R}$, превращающие дерево G в обобщенное заполнение конечного метрического пространства (M,ρ). Для каждой пары граничных вершин p_i,p_j в дереве G существует единственный путь $\gamma(i,j)$, соединяющий эти вершины. По определению, взвешенное дерево (G,ω) является обобщенным заполнением для (M,ρ), если и только если

$$\sum_{e\in\gamma(i,j)}\omega(e)\ge\rho_{ij},\qquad \text{при всех } 1\le i<j\le m. \tag{3}$$

Вес этого заполнения равен $\sum_{e\in E}\omega(e)$, где E — множество ребер дерева G. Таким образом, чтобы найти обобщенное минимальное параметрическое заполнение типа G, нужно найти наименьшее значение линейной функции $F(\omega)=\sum_{e\in E}\omega(e)$ на выпуклом многогранном подмножестве Ω_G пространстве $\mathbb{R}^{|E|}$, заданном системой линейных неравенств (3).

Итак, мы получили ОЗЛП. Запишем ее в виде (1). Так как у нас нет ограничений на знаки переменных, то $n_1=0$, а n_2 равно количеству $|E|$ ребер дерева G. Переменные, составляющие вектор x_2, — это переменные $\omega(e)$, веса ребер. Занумеруем ребра дерева произвольным образом, положив $E=\left\{e_1,\dots,e_{|E|}\right\},\omega(e_i)=\omega_i$. Далее, все наши условия на переменные ω_i имеют вид неравенств, поэтому отлична от нуля только матрица A_{12}. Строки этой матрицы соответствуют неравенствам из (3), то есть занумерованы упорядоченными парами (i,j), $1\le i<j\le m$, где, как и выше, $M=\{p_1,\dots,p_m\}$ — занумерованное множество граничных вершин дерева G. Поэтому $n_1=m(m-1)/2$. Столбцы матрицы A_{12} соответствуют ребрам дерева. Будем обозначать через a_{ij}^k элемент матрицы A_{12}, стоящий в строке (i,j) на месте, соответствующем ребру e_k. Элемент $a_{ij}^k=1$, если и только если ребро e_k входит в путь $\gamma(i,j)$, иначе $a_{ij}^k=0$. Подмножество Ω_G задается системой неравенств

$$A_{12}x_2\le b_1,\qquad \text{где } x_2=-\left(\omega_1,\dots,\omega_{|E|}\right),\ \text{а } b_1=-\left(\rho_{12},\dots,\rho_{(m-1)m}\right),$$

и на этом подмножестве мы ищем наименьшее значение линейной функции $F(x)=\langle f_2,x_2\rangle$, где $f_2=-(1,\dots,1)$. Заметим, что знаки «минус» появились из-за того, что неравенства в ОЗЛП вида 1 и в задаче о минимальном заполнении 3 записаны «в разные стороны».

Запишем теперь двойственную задачу. В нашем случае $n_2=0$, и компоненты λ_{ij} вектора λ_1 размерности n_1 занумерованы упорядоченными парами $(i,j),1\le i<j\le m$. Двойственная линейная функция имеет вид

$$H(\lambda)=H(\lambda_1)=-\langle b_1,\lambda_1\rangle=\sum_{1\le i<j\le m}\rho_{ij}\lambda_{ij}$$

Подмножество Λ_G пространства $\mathbb{R}^{m_1}$, $m_1=|E|$, на котором следует искать наибольшее значение функции H, задано следующей системой линейных уравнений и неравенств:

$$A_{12}^T\lambda_1=-f_2,\quad \lambda_1\ge0$$

В частности, двойственная задача является КЗЛП. Матрица A_{12}^T представляет собой $n_2\times m_1$ матрицу. Ее строки соответствуют ребрам дерева G, а столбцы — упорядоченным парам (i,j), $i<j$, которые естественно интерпретировать как ребра полного графа $K(M)$ с

множеством вершин M. Обозначим через a_k^{ij} элемент k-ой строки матрицы A_{12}^T, стоящий в столбце с номером (i,j). Пусть ребро e_k дерева G порождает разбиение $\mathcal{P}_G(e_k)$ множества M на два непустых подмножества. Элемент a_k^{ij} равен 1, если и только если концы ребра (i,j) графа $K(M)$ лежат в разных элементах разбиения $\mathcal{P}_G(e_k)$. Таким образом, матрица A_{12}^T — это матрица разрезов полного графа $K(M)$, порожденных ребрами дерева G (см. определение разреза ниже). Все компоненты вектора $-f_2$ равны 1. В работе [4] доказано, что если G — произвольное бинарное дерево с границей M, состоящей из $m \geq 2$ вершин, то матрица A_{12}^T имеет максимальный ранг $2m-3$.

3. Заполнения и многогранники

Пусть (M,ρ) — произвольное конечное метрическое пространство, и $G=(V,E)$ — бинарное дерево, соединяющее M. Как и выше, будем предполагать, что $M=\partial G$ совпадает с множеством вершин степени 1 дерева G. Рассмотрим сформулированную выше двойственную задачу, соответствующую задача о минимальном параметрическом заполнении:

$$H(\lambda_1)=\sum_{1\leq i<j\leq m}\rho_{ij}\lambda_{ij}\to\sup \quad \text{при} \quad A_{12}^T\lambda_1=-f_2, \quad \lambda_1\geq 0. \tag{4}$$

В дальнейшем, для краткости, будем писать $A_G=A_{12}^T$, $\lambda=\lambda_1$, $f=-f_2$. Пусть Λ_G — множество допустимых значений переменных λ, заданное условиями (4). Как было отмечено в разделе 1.2, Λ_G представляет собой выпуклое многогранное множество, которое лежит в положительном ортанте. Легко проверить, что Λ_G ограничено, то есть является выпуклым многогранником. Этот многогранник полностью определяется бинарным деревом G, соединяющим M.

Из принципа двойственности вытекает, что вес минимального параметрического заполнения типа G для пространства M может быть найден как максимум функции H на многограннике Λ_G. Этот максимум достигается в одной из вершин многогранника, поэтому достаточно найти максимальное значение функции H на множестве W_{Λ_G} всех вершин многогранника Λ_G, то есть

$$\operatorname{mpf}(M,G)=\max_{v\in W_{\Lambda_G}}H(v). \tag{5}$$

Подчеркнем, что многогранник Λ_G не зависит от функции расстояния, заданной на M, то есть, зная его вершины, можно получить формулу веса минимального параметрического заполнения данного типа для любого метрического пространства с данным числом точек (см. примеры в [4] и ниже). Однако, количество вершин многомерного многогранника Λ_G быстро растет с ростом размерности, и, как показал О. Щербаков [9], максимум может достигаться, вообще говоря, в любой его вершине. Поэтому в общем случае нас интересует все множество W_{Λ_G}.

Замечание 13. *В работе А. Еремина [8] была получена формула веса минимального параметрического заполнения типа G в терминах так называемых неприводимых мультиобходов дерева G, см. ниже. Как показано в [4] и [9], точки многогранника Λ_G с рациональными координатами соответствуют мультиобходам, а вершины — неприводимым мультиобходам дерева G. Поэтому формула (5) — это, фактически, геометрическая интерпретация формулы Еремина, а упомянутый выше результат Щербакова говорит о том, что эту формулу нельзя в общем случае улучшить. Используя эти идеи, Щербаков [9] получил формулу веса минимального параметрического заполнения, в предположении, что дерево, задающее тип, имеет ровно двое усов (то есть наименьшее возможное их количество)*

Как уже говорилось выше, многогранник Λ_G определяется деревом G, соединяющим M. Заметим, что множество M можно соединить «одним и тем же» деревом G по-разному, и тогда, вообще говоря, могут получиться разные многогранники.

Пример 4. *Пусть $m = 4$. Обозначим элементы множества M натуральными числами, а именно, положим $M = \{1, 2, 3, 4\}$. Рассмотрим единственное бинарное дерево с 4 вершинами степени 1, см. рис. 1.*

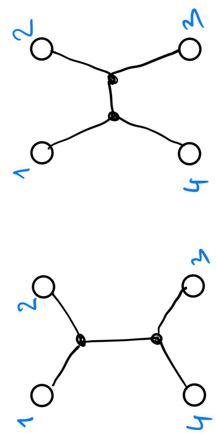


Рис. 1: Бинарное дерево с 4 вершинами степени 1 может соединять $M = \{1, 2, 3, 4\}$ по-разному.

Пусть сначала вершины его усов — это пары точек пространства M с номерами 1, 2 и 3, 4 соответственно. Занумеруем граничные ребра в соотвествии с нумерацией граничных вершин, а единственному внутреннему ребру присвоим номер 5.

Тогда $A_G = A_1$ имеет вид

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

множество $\Lambda_G = \Lambda_1$ допустимых значений переменных представляет собой отрезок в шестимерном пространстве с концами (вершинами)

$$\frac{1}{2}(1, 0, 1, 1, 0, 1), \quad \frac{1}{2}(1, 1, 0, 0, 1, 1),$$

Пусть теперь вершины усов — это пары точек пространства M с номерами 1, 4 и 2, 3, см. рис. 1. Снова занумеруем граничные ребра в соотвествии с нумерацией граничных вершин, а единственному внутреннему ребру присвоим номер 5.

Тогда $A_G = A_2$ имеет вид

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

множество $\Lambda_G = \Lambda_2$ допустимых значений переменных представляет собой отрезок в шестимерном пространстве с концами (вершинами)

$$\frac{1}{2}(1,0,1,1,0,1), \quad \frac{1}{2}(0,1,1,1,1,0),$$

Заметим, что Λ_1 и Λ_2 — это разные отрезки (имеющие) общую точку.

Цель данной работы — исследовать, как может меняться многогранник Λ_G, в зависимости от того, как одно и то же дерево G соединяет M. Разные способы соединения множества M деревом G можно задавать изменением нумерации элементов множества M, то есть элементами группы перестановок S_m.

3.1. Перестановки граничных вершин дерева

Пусть $G = (V, E)$ — бинарное дерево с границей $M \subset V$. Положим $M = \{1, \ldots, m\}$, тем самым фиксировав нумерацию граничных вершин, т.е. нумерацию элементов множества M. Она порождает нумерацию ребер полного графа $K(M)$ двухэлементными множествами $\{i, j\} = \{j, i\}$, которые мы будем обозначать через $ij = ji$, и нумерацию переменных (λ_{ij}) двойственной задачи. Таким образом, многогранник $\Lambda_G(\mathrm{id})$ допустимых значений определяется деревом G и нумерацией множества M. Здесь через id обозначена фиксированная нумерация $M = \{1, \ldots, m\}$.

Изменение нумерации множества M с помощью перестановки $\pi \in S_m$ порождает изменение нумерации ребер полного графа и переменных (λ_{ij}), а именно, $\{i, j\}$ превращается в $\{\pi(i), \pi(j)\}$. В результате, уравнения, задающие множество допустимых значений переменных двойственной задачи, меняются на перестановку переменных, и получается многогранник $\Lambda_G(\pi)$ изометричный $\Lambda_G(\mathrm{id})$ (один получается из другого преобразованием пространства, соответствующим перестановке переменных).

Напомним, что *автоморфизмом* простого графа $G = (V, E)$ называется такая биекция $f\colon V \to V$, что $uv \in E$, если и только если $f(u)f(v) \in E$. В частности, автоморфизм f порождает биекцию на ребрах графа, которую мы тоже обозначим через f, а именно, $f(uv) = f(u)f(v)$.

Лемма 1. *Пусть $G = (V, E)$ — бинарное дерево с границей $M \subset V$, и f — некоторый его автоморфизм. Тогда f порождает перестановку π_f множества M, причем соответствующий гомоморфизм $f \mapsto \pi_f$ групп $\operatorname{Aut} G \to S_m$ инъективен, то есть разным автоморфизмам соответствуют разные перестановки.*

Доказательство. Каждый автоморфизм графа является биекцией на множестве его вершин, сохраняющей степени последних. Поэтому ограничение f на множество M вершин степени 1 является биекцией на M, то есть перестановкой, которую мы и обозначим через π_f.

Предположим теперь, что перестановки π_f и π_g, порожденные автоморфизмами f и g, совпадают. Покажем, что $f = g$. Проведем индукцию по количеству m вершин в M. Утверждение очевидно при $m = 1$, 2, 3. Пусть $n \geqslant 4$ и i, $j \in M$ — пара граничных вершин дерева G, соответствующая некоторым его усам, а $v \in V$ — их общая соседняя вершина. Тогда вершины $f(i) = g(i)$ и $f(j) = g(j)$ также соответствуют некоторым усам с общей соседней вершиной w, причем $f(v) = g(v) = w$, так как вершина, соседняя заданным усам, определена однозначно. Отметим, что пары $\{i, j\}$ и $\{f(i), f(j)\}$ могут совпадать (в этом случае $v = w$). Перестроим дерево G, выбросив вершины i, j, $f(i)$, $f(j)$ и инцидентные им ребра, и объявив вершины v и w граничными. Получим бинарное дерево G', у которого на одну или две вершины степени один меньше, чем у G. Ограничения автоморфизмов f и g на дерево G' совпадают на множестве его вершин степени 1, поэтому $f = g$ на множестве вершин дерева G' по предположению индукции, а, значит, и на всем V. Лемма доказана. $\square$

Таким образом, имеется вложение $\operatorname{Aut} G \to S_m$ группы автоморфизмов бинарного дерева G в группу перестановок его граничного множества M.

Напомним, что *изоморфизмом* простых графов $G = (V, E)$ и $G' = (V', E')$ называется такая биекция $f\colon V \to V'$, что $uv \in E$, если и только если $f(u)f(v) \in E'$. В случае если $G = G'$, то f — *автоморфизм*. Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Многогранники изоморфных деревьев изометричны. Они совпадают, если и только если деревья отличаются на автоморфизм.*

Для доказательства этой теоремы сформулируем вспомогательные определения и утверждения.

3.2. Циклические порядки, обходы и укладки бинарных деревьев

Пусть $M = \{1, \dots, m\}$ — конечное множество. *Циклический порядок на M* — это циклическая перестановка, которую мы будем записывать в виде $(i_1, \dots, i_m)$. Мы будем рассматривать циклические порядки с точностью до перехода к обратной перестановке.

Далее, пусть G — бинарное дерево, соединяющее M. Каждый циклический порядок на M задает набор путей в дереве G, соединяющих пары граничных вершин дерева, соседних в этом порядке. Обозначим (единственный) путь в G, соединяющий его граничные вершины p и q, через $G(p, q)$. Такие пути будем называть *граничными*. Таким образом, циклический порядок $\sigma = (i_1, \dots, i_m)$ порождает семейство путей

$$G_\sigma = \bigl\{G(i_1, i_2), \dots, G(i_{m-1}, i_m), G(i_m, i_1)\bigr\}.$$

Циклический порядок σ на $M = \partial G$ назовем *обходом дерева G*, если объединение всех путей из G_σ порождает эйлеров цикл в удвоении графа G.

Далее, хорошо известно, что каждое дерево можно изобразить на плоскости так, чтобы ребрам соответствовали прямолинейные отрезки. Другими словами, для каждого дерева $G = (V, E)$ можно построить на плоскости набор точек $\{p_v\}_{v \in V}$ и соединяющих их отрезков так, чтобы каждой вершине v дерева соответствовала единственная точка p_v, каждому ребру $e = uv \in E$ — отрезок $s_e = [p_u, p_v]$, причем пересечение отрезков s_e и s_f или пусто, или равно точке p_v, где v — общая вершина ребер e и f. *Укладкой дерева $G = (V, E)$* будем называть подмножество $\Gamma = \cup_{e \in E} s_e$ плоскости, а обход этого подмножества «по периметру» — *обходом укладки* (см. рис. 2). Очевидно, обход укладки бинарного дерева G с границей M задает на M циклический порядок, являющийся обходом дерева G в смысле предыдущего определения. Например, обход дерева на рис. 2 по часовой стрелке задает циклический порядок $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$. Из работы [2] (утверждение 7.1) известно, что верно и обратное, а именно, каждый обход дерева порождается обходом некоторой его укладки. Поэтому, говоря об укладке дерева, будем иметь в виду обход дерева и наоборот. В частности, можно задавать укладку циклическим порядком. Укладки бинарного дерева с границей M будем считать *эквивалентными*, если их обходы по периметру задают один и тот же циклический порядок на M.

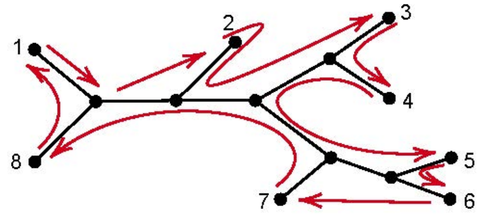


Рис. 2: Обход укладки дерева по периметру.

Пусть задана укладка $(i_1, \ldots, i_m)$ бинарного дерева G, и пусть e — внутреннее ребро этого дерева. Ребро e задает разбиение множества M на два подмножества, $M = M_1 \sqcup M_2$, при этом, из определения обхода вытекает, что вершины из множеств M_1 и M_2 не могут чередоваться в циклическом порядке, заданном укладкой. Без ограничения общности можно считать, что $M_1 = \{i_1, \ldots, i_k\}$, $k \geqslant 2$, а $M_2 = \{i_{k+1}, \ldots, i_m\}$. В сделанных обозначениях, *подкруткой укладки* $(i_1, \ldots, i_m)$ относительно ребра e назовем укладку $(i_1, \ldots, i_k, i_m, \ldots, i_{k+1})$. Заметим, что эта укладка эквивалентна укладке $(i_k, \ldots, i_1, i_{k+1}, \ldots, i_m)$, то есть подмножества M_1 и M_2 из определения подкрутки можно менять местами. Наглядно эту операцию можно представить как отражение относительно прямой, содержащей ребро e, одного из двух поддеревьев, на которые распадается дерево G при разрезании по ребру e. Пример подкрутки приведен на рис. 3.

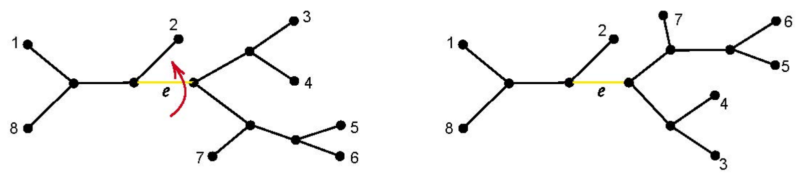


Рис. 3: Пример подкрутки укладки дерева относительно ребра e: обход $(8, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$ превращается в $(8, 1, 2, 7, 6, 5, 4, 3)$.

Лемма 2. *Дважды примененная подкрутка относительно одного и того же ребра не меняет обход. Операции подкрутки относительно разных ребер коммутируют.*

Доказательство. Первое утверждение очевидно. Чтобы доказать второе утверждение заметим, что разрезание по двум разным внутренним ребрам порождает три поддерева, стыкующихся по этим ребрам, поэтому подмножества множества M, у которых меняется порядок обхода, можно выбрать непересекающимися. $\square$

Утверждение 1. *Укладки бинарного дерева с* $m \geqslant 3$ *вершинами степени* 1 *отличаются подкрутками относительно внутренних ребер. Более того, разным наборам подкруток соответствуют разные укладки, в частности, число разных укладок равно* 2^{m-3}.

Доказательство. Проведем доказательство с помощью индукции по числу внутренних ребер k. База индукции $k = 0$, в этом случае существует одна единственная укладка (один обход, две взаимно обратных циклических перестановки элементов множества из трех элементов). Предположим, что для $k - 1$ внутренних ребер утверждение справедливо, докажем его для k. Пусть число k внутренних ребер дерева G не меньше 1. Тогда дерево G имеет усы, причем общая вершина каждых усов инцидентна однозначно определенному внутреннему ребру. Выберем одни из усов, и пусть e — такое внутреннее ребро. Предположим, что даны две различные укладки дерева G и покажем, что одну можно получить из другой с помощью подкруток. Разрежем дерево по ребру e. Получим пару бинарных деревьев, G_1 и G_2, у первого количество внутренних ребер равно $k-1$, у второго — 0 (и одна внутренняя вершина). Укладки дерева G получаются как объединение укладок деревьев G_1 и G_2 (с общим ребром e). В силу предположения индукции, укладки G_1 можно перевести одну в другую подкрутками относительно его внутренних ребер. Остается присоединить укладку дерева G_2 по e, что можно сделать одним из двух способов, отличающихся на подкрутку относительно ребра e.

Теперь покажем, что разным подкруткам соответствуют разные укладки. Для этого достаточно проверить, что нетривальная подкрутка не может сохранять обход. Снова воспользуемся индукцией по числу внутренних ребер. Пусть имеется нетривиальная конечная последовательность $\pi_1, \dots, \pi_i$ подкруток, сохраняющая обход $(1, \dots, m)$. Заметим, что из леммы 2 вытекает, что без ограничения общности можно предполагать, что подкрутка вокруг каждого внутреннего ребра встречается в этой последовательности не более одного раза. Предположим сначала, что существует ребро e, относительно которого подкруток не происходит. Разрезание по этому ребру e порождает поддеревья G_1 и G_2, и каждую подкрутку π_j можно рассматривать как подкрутку одного из этих под деревьев (в зависимости от того, в каком поддереве расположено ребро подкрутки π_j). К поддеревьям G_i применимо предположение индукции, поэтому их подкрутки тривиальны, что и требовалось.

Остается показать, что последовательность, содержащая подкрутки относительно всех внутренних ребер дерева G не может сохранять обход. Воспользуемся известным результатом Венга [14], который он использовал для построения линейного по числу операций аналога алгоритма Мелзака построения локально-минимального бинарного дерева на плоскости.

Лемма 3. *Бинарное дерево с $m \geqslant 4$ вершинами степени 1 содержит или пару соседних усов, или усы, соседние с граничной вершиной, см. рис. 4.*

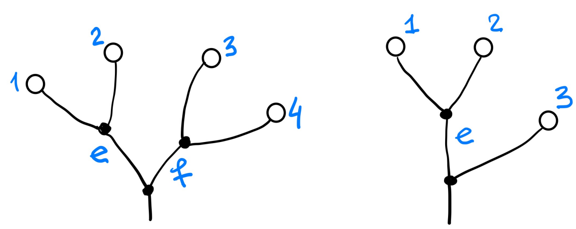


Рис. 4: Пара соседних усов (слева) и усы, соседние с граничной вершиной (спарва).

Пусть сначала пары вершин 1, 2 и 3, 4 соответствуют соседним усам, и e и f — внутренние ребра, смежные общим вершинам этих усов, см. рис. 4. Тогда подкрутки относительно e и f переводят обход $(1, 2, 3, 4, \cdots)$ в неэквивалентный ему обход $(2, 1, 4, 3, \cdots)$, а подкрутки относительно других внутренних ребер оставляют вершины 1 и 4 соседними, поэтому эти две подкрутки не могут одновременно входить в последовательность, сохраняющую обход.

Пусть теперь пара вершин 1, 2 соответствует усам, соседним с граничной вершиной 3, и e — внутреннее ребро, смежное общей вершине этих усов, см. рис. 4. Тогда подкрутка относительно e переводит обход $(1, 2, 3, \cdots)$ в неэквивалентный ему обход $(2, 1, 3, \cdots)$, а подкрутки относительно других внутренних ребер оставляют вершины 1 и 3 соседними, поэтому эта подкрутка не может входить в последовательность, сохраняющую обход. Утверждение доказано. □

Замечание 14. *Количество укладок для бинарных деревьев с двумя и тремя усами было ранее подсчитано О. Щербаковым в [10] исходя из полученного им полного описания обходов этих деревьев.*

Лемма 4. *Пусть $G = (V, E)$ и $G' = (V', E')$ — бинарные деревья с общей границей M, $M = V \cap V'$. Порожденные ими множества обходов границы M совпадают, если и только если $G = G'$.*

Доказательство. Если деревья равны, то множества их обходов (или, что то же самое, их укладок) очевидно совпадают. Обратно, покажем, что бинарное дерево G восстанавливается по множеству порожденных им обходов. Воспользуемся индукцией по числу граничных вершин m. Без ограничения общности предположим, что $m \geqslant 4$. Заметим, что вершины, образующие усы дерева G, являются соседними при любом его обходе, а любая пара граничных вершин, не образующих усы, может перестать быть соседней после подкрутки относительно внутреннего ребра, необходимо входящего в соединяющий эти вершины в дереве G путь. Тем самым, найдя пары вершин, являющиеся соседними во всех обходах, мы найдем все усы дерева G.

Фиксируем какие-нибудь усы p и q дерева G, обозначим их общую смежную вершину через v и перестроим дерево, выбросив вершины p и q вместе с соответствующими граничными ребрами, и объявив v граничной вершиной. Обозначим полученное бинарное дерево через $\widehat{G}$, а его граничное множество — через $\widehat{M}$. Все обходы дерева $\widehat{G}$ получаются из обходов дерева G заменой всех пар p, q и q, p на v. По предположению индукции дерево $\widehat{G}$ однозначно восстанавливается. Чтобы получить дерево G остается добавить усы с вершинами p и q с общей вершиной v. Лемма доказана. □

3.3. Разрезы графа $K(M)$, порожденные бинарным деревом с границей M

Напомним, что *разрез* графа — это разбиение множества всех его вершин на два подмножества. Разрез можно также задавать набором всех ребер графа, вершины которых лежат в разных подмножествах разреза. Эти ребра называются *ребрами разреза*. Количество ребер разреза в разрезе назовем его *длиной*. Далее, если G — бинарное дерево с границей M, то каждое ребро e этого дерева порождает разрез полного графа $K(M)$, а именно, выбрасывание ребра e разбивает дерево, а значит и множество M, на две компоненты. Этот разрез будем обозначать через C_e или $C_e(M)$.

Как отмечалось выше, уравнения, задающие множество допустимых значений переменных двойственную задачу, занумерованы ребрами дерева G и соответствуют разрезам полного графа $K(M)$, порожденным этими ребрами. Ясно, что если разрез представляет собой разбиение m-элементного множества M на подмножества из k и $(m-k)$ элементов, то длина такого разреза равна $k(m-k)$.

Лемма 5. *Пусть $G = (V, E)$ и $G' = (V', E')$ — бинарные деревья с общей границей M, $M = V \cap V'$. Системы разрезов графа $K(M)$, порожденные ребрами деревьев G и G', совпадают, тогда и только тогда, когда $G = G'$.*

Доказательство. Для $m = 2$ и 3 утверждение очевидно, так как в этих случаях существует только одно бинарное дерево. Проведем доказательство индукцией по m. Пусть $m \geqslant 4$. Разрез, порожденный граничным ребром дерева с граничной вершиной i, состоит из всех ребер графа $K(M)$ вида $\{i, j\}$, $j \neq i$. Длина такого разреза равна $m-1$, система разрезов, порожденная любым бинарным деревом с границей M содержит ровно m таких разрезов.

Далее, пусть граничные вершины p и q бинарного дерева G образуют усы, v — общая соседняя вершина этих усов, и e — единственное инцидентное v и не инцидентное ни p, ни q ребро. Тогда ребра разреза C_e — это ребра вида $\{p, i\}$ и $\{q, i\}$, где i не равно ни p, ни q. Длина такого разреза равна $2(n-2)$. Обратно, каждый разрез длины $2(n-2)$ соответствует разбиению множества M на два подмножества, одно из которых состоит из двух вершин. Если этот разрез порожден ребром дерева G, то эти две вершины являются вершинами усов дерева G. Таким образом, разрезы длины $2(n-2)$ однозначно определяют все усы бинарного дерева.

Фиксируем какие-нибудь усы p и q бинарного дерева G с общей вершиной v и перестроим дерево, выбросив вершины p и q вместе с соответствующими граничными ребрами e_p и e_q, и объявив v граничной вершиной. Обозначим полученное дерево через $\widehat{G}$, а его граничное множество — через $\widehat{M}$. Система разрезов полного графа $K(\widehat{M})$, порожденная ребрами дерева $\widehat{G}$, получается из исходной системы разрезов графа $K(M)$ так. Разрезы графа $K(M)$, порожденные ребрами e_p и e_q выбрасываются. Пусть e — произвольное ребро дерева $\widehat{G}$. Заметим, что оно также является ребром дерева G. Разрезу $C_e(M)$ графа $K(M)$ соответствует разрез $C_e(\widehat{M})$ графа $K(\widehat{M})$. При этом, паре ребер $\{p,i\}$ и $\{q,i\}$ разреза $C_e(M)$ соответствует ребро $\{v,i\}$ разреза $C_e(\widehat{M})$. По предположению индукции дерево $\widehat{G}$ однозначно восстанавливается по системе разрезов, порожденных его ребрами. Лемма доказана. $\square$

Лемма 6. *Пусть бинарные деревья $G=(V,E)$ и $G'=(V',E')$ с общей границей M изоморфны, и f — соответствующий изоморфизм. Изоморфизм f порождает перестановку π_f элементов множества M, которая переводит систему разрезов Σ_G графа $K(M)$, порожденную ребрами дерева G, в систему разрезов $\Sigma_{G'}$ графа $K(M)$, порожденную ребрами дерева G'. При этом, $\Sigma_G=\Sigma_{G'}$, если и только если $G=G'$, то есть f — автоморфизм дерева $G=G'$.*

Доказательство. Каждый изоморфизм графов является биекцией на множествах их вершин, сохраняющей степени последних. Поэтому ограничение f на множество M вершин степени 1 дерева G отображает M на множество вершин степени 1 дерева G', то есть на себя, и является биекцией на M, которую мы обозначим через π_f. Далее пусть e — произвольное ребро дерева G, и $e'=f(e)$ — соответсвующее ребро дерева G'. Пусть i, j — произвольные вершины из M, и γ — единственный путь в дереве G, их соединяющий. Изоморфизм f отображает путь γ в единственный путь γ' в дереве G', соединяющий вершины $\pi_f(i)=f(i)$ и $\pi_f(j)=f(j)$ из M. При этом γ содержит e, если и только если γ' содержит $e'=f(e)$, поэтому ij является ребром разреза C_e графа $K(M)$, тогда и только тогда, когда $f(i)f(j)$ является ребром разреза $C_{f(e)}$. Тем самым, перестановка π_f переводит систему разрезов графа $K(M)$, порожденную ребрами дерева G, в систему разрезов графа $K(M)$, порожденную ребрами дерева G'. Заключительное утверждение леммы следует из леммы 5. $\square$

3.4. Доказательство теоремы 1. Следствия.

Напомним, см. замечание 13, что обходы дерева G соответствуют (вообще говоря не всем) вершинам многогранника Λ_G, поэтому если семейства обходов различны, то и многогранники различны.

Доказательство. Пусть даны два измофорных бинарных дерева $G=(V,E)$ и $G'=(V',E')$ с границей M, и f — соответствующий изоморфизм. Тогда, по лемме 6, перестановка граничных вершин π_f порождает изменение нумерации ребер полного графа $K(M)$ и, тем самым, перестановку переменных λ_{ij}, а перестановка последних является изометрией всего объемлющего пространства.

Пусть теперь f — автоморфизм. Тогда, по той же лемме 6, множества разрезов Σ_G и $\Sigma_{G'}$ совпадают. Последнее означает, что системы уравнений, задающих многогранники Λ_G и $\Lambda_{G'}$ отличаются на перестановку уравнений, поэтому многогранники совпадают.

Наконец, если $G\neq G'$, то есть f не является автоморфизмом, то множества обходов деревьев G и G' различны в силу леммы 4. Поэтому многогранники Λ_G и $\Lambda_{G'}$ имеют разные множества вершин. Теорема доказана. $\square$

Следствие 1. *Разным (неизоморфным) бинарным деревьям соответствуют разные многогранники.*

Доказательство. У неизоморфных бинарных деревьев разные множества обходов. □

Следствие 2. *Количество разных многогранников для бинарного дерева фиксированного типа G с n граничными вершинами равно количеству смежных классов группы перестановок S_m по подгруппе $\operatorname{Aut} G$, то есть $m!/|\operatorname{Aut} G|$.*

Хорошо известно, что порядок группы $\operatorname{Aut} G$ можно вычислить как произведение порядка стационарной подгруппы подходящей вершины дерева G и количества элементов орбиты этой вершины при действии $\operatorname{Aut} G$.

Пример 5. *Пусть G — бинарное дерево с двумя усами и $m \geqslant 4$ вершинами степени 1. Рассмотрим вершину, входящую в какие-нибудь усы. Тогда орбита этой вершины состоит из четырех вершин, а стационарная подгруппа — из двух перестановок, поэтому $|\operatorname{Aut} G| = 8$, и количество разных многогранников $L_G(\pi)$ равно $c(m) = m!/8$. Заметим, что $c(4) = 3$, $c(5) = 15$, $c(6) = 90$, $c(m) = c(5)6^{m-5}$ при $m \geqslant 5$.*

Пример 6. *Пусть G — бинарное дерево с тремя усами и $m = 6$ вершинами степени 1. Рассмотрим вершину, входящую в какие-нибудь усы. Тогда орбита этой вершины состоит из шести вершин, а стационарная подгруппа — из восьми перестановок (как группа автоморфизмов дерева с двумя усами), поэтому $|\operatorname{Aut} G| = 48$, и количество разных многогранников $L_G(\pi)$ равно $6!/48 = 15$. Аналогично, для «симметричного» бинарного дерева с тремя усами («длины концов-побегов» одинаковы) получим $m!/48$.*

4. Примеры и открытые вопросы

Возникает естественный вопрос, что получится, если взять множество $U(m)$ вершин всех многогранников, соответствующих всевозможным типам G заполнений пространства M, $|M| = m$? Получится ли в результате множество вершин строго выпуклого многогранника? При попытке ответить на этот вопрос был разобран ряд примеров. Часть приведенных ниже вычислений и примеров приводится в работе [4], здесь мы систематизировали. Как и выше, ребра полного графа $K(M)$ на m-элементном множестве M занумерованы парами (i, j), $i < j$, и упорядочены лексикографически. Расстояния в пространстве M обозначаются через d_{ij}. Для удобства, конечное подмножество пространства $\mathbb{R}^n$ будем называть *выпуклым*, если оно представляет собой множество вершин некоторого выпуклого многогранника размерности k, $k \leqslant n$.

4.1. Четырехточечное пространство

Пусть $m = 4$. Рассмотрим единственное бинарное дерево с 4 вершинами степени 1, и пусть вершины его усов — это пары точек пространства M с номерами 1, 2 и 3, 4 соответственно. Занумеруем граничные ребра в соотвествии с нумерацией граничных вершин, а единственному внутреннему ребру присвоим номер 5.

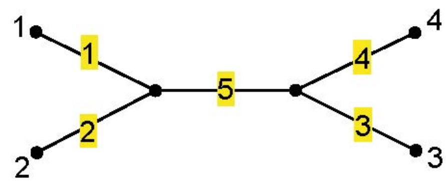


Рис. 5: Бинарное дерево с 4 вершинами степени 1.

Тогда A_G имеет вид

$$A_G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

множество Λ_G допустимых значений переменных представляет собой отрезок в шестимерном пространстве с концами (вершинами)

$$\frac{1}{2}(1,0,1,1,0,1), \quad \frac{1}{2}(1,1,0,0,1,1),$$

значения целевой функции в них равны соответственно

$$\frac{1}{2}\left(d_{12}+d_{14}+d_{23}+d_{34}\right), \quad \frac{1}{2}\left(d_{12}+d_{13}+d_{24}+d_{34}\right),$$

а вес минимального параметрического заполнения типа G равен максимуму из этих двух величин (двух полупериметров соответствующих обходов). Эта формула была получена в [2].

Так как $m = 4$, то S_m состоит из 4! перестановок, а группа автоморфизмов состоит из 8 элементов: транспозиции двух пар усов и симметрии относительно центрального ребра. Число различных многогранников–отрезков равняется числу смежных классов, то есть $\frac{4!}{8} = 3$.

Найдем оставшиеся отрезки. Возьмем сначала перестановку, которая вершинам усов с номерами 1, 2 и 3, 4, ставит в соответствие пары с номерами 1, 3 и 2, 4. Соответствующая перенумерация шести двойственных переменных λ_{ij} будет иметь вид $(1,2)(3)(4)(5,6)$. Применяя эту последнюю перестановку к найденному на предыдущем шаге множеству допустимых значений Λ_G, получим отрезок с концами (вершинами)

$$\frac{1}{2}(0,1,1,1,1,0), \quad \frac{1}{2}(1,1,0,0,1,1)$$

Проделывая этот алгоритм еще раз для пар с номерами 1, 4 и 2, 3, получим отрезок с концами(вершинами)

$$\frac{1}{2}(0,1,1,1,1,0), \quad \frac{1}{2}(1,0,1,1,0,1)$$

Легко заметить, что в объединении построенных отрезков — это треугольник в шестимерном пространстве, в частности, объединение $U = U(4)$ множеств вершин этих отрезков выпукло. Весом минимального заполнения является минимумом по весам минимальных параметрических заполнений разных типов. Таким образом, вес минимального заполнения достигается в одной из вершин из U.

4.2. Пятиточечное пространство

Пусть $m = 5$. Рассмотрим единственное бинарное дерево с 5 вершинами степени 1, и пусть вершины его усов — это пара точек пространства M с номерами 1, 2 и 4, 5, а оставшаяся граничная вершина имеет номер 3. Занумеруем граничные ребра в соответствии с нумерацией граничных вершин, и пусть внутреннее ребро, соседнее с ребрами усов 1, 2, имеет номер 6, а оставшееся — номер 7.

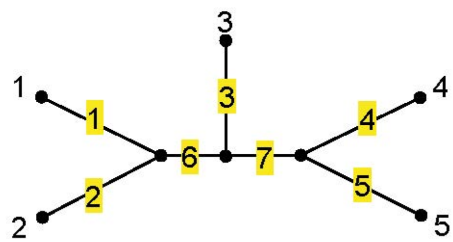


Рис. 6: Бинарное дерево с 5 вершинами степени 1

Тогда

$$A_G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

множество Λ_G допустимых значений переменных представляет собой трехмерный тетраэдр в десятимерном пространстве с вершинами

$$\begin{array}{ll} \frac{1}{2}(1,0,0,1,1,0,0,1,0,1), & \frac{1}{2}(1,1,0,0,0,0,1,1,0,1), \\ \frac{1}{2}(1,0,1,0,1,0,0,0,1,1), & \frac{1}{2}(1,1,0,0,0,1,0,0,1,1), \end{array}$$

значения целевой функции в них равны соответственно

$$\begin{array}{ll} \frac{1}{2}\left(d_{12}+d_{15}+d_{23}+d_{34}+d_{45}\right), & \frac{1}{2}\left(d_{12}+d_{13}+d_{25}+d_{34}+d_{45}\right), \\ \frac{1}{2}\left(d_{12}+d_{14}+d_{23}+d_{35}+d_{45}\right), & \frac{1}{2}\left(d_{12}+d_{13}+d_{24}+d_{35}+d_{45}\right), \end{array}$$

а весом минимального параметрического заполнения типа G равен максимуму из этих четырех выражений. Эта формула была получена в [4], она также следует из результатов работы [12].

В случае $m = 5$ множество S_m состоит из 5! перестановок граничных вершин дерева G, а группа автоморфизмов состоит из 8 элементов: транспозиции двух пар усов и симметрии относительно внутренней вершины, инцидентной ребрам 6 и 7. Поэтому число различных тетраэдоров равняется числу смежных классов, то есть $\frac{5!}{8} = 15$. При применении перестановок, порождаемых изоморфизмами дерева G, к вершинам многогранника Λ_G получим 15 различных тетраэдоров. Как и выше через $U = U(5)$ обозначим множеств вершин всех этих тетраэдров, и пусть Λ_U — выпуклая оболочка множества U. Общее число различных вершин в U равно 12, приведем их список:

$$\frac{1}{2}(1,0,0,1,1,0,0,1,0,1), \quad \frac{1}{2}(1,0,1,0,1,0,0,0,1,1),$$
$$\frac{1}{2}(1,1,0,0,0,1,0,0,1,1), \quad \frac{1}{2}(1,1,0,0,0,0,1,1,0,1),$$
$$\frac{1}{2}(0,0,1,1,1,0,1,1,0,0), \quad \frac{1}{2}(0,1,1,0,1,0,1,0,0,1),$$
$$\frac{1}{2}(0,1,1,0,0,1,1,0,1,0), \quad \frac{1}{2}(1,0,1,0,0,0,1,1,1,0),$$
$$\frac{1}{2}(0,0,1,1,1,1,0,0,1,0), \quad \frac{1}{2}(0,1,0,1,1,1,0,0,0,1),$$
$$\frac{1}{2}(0,1,0,1,0,1,1,1,0,0), \quad \frac{1}{2}(1,0,0,1,0,1,0,1,1,0),$$

О. Щербаковым [9] было замечено, что U — подмножество вершин 10-мерного куба C со стороной $1/2$, так как координата каждой вершины равна или 0 или $\frac{1}{2}$ и, следовательно, U — выпуклое множество. Размерность многогранника Λ_U равняется 5.

Напомним, что *гранью* выпуклого многогранника называется всякое непустое пересечение этого многогранника с некоторым числом его опорных гиперплоскостей (см. например [15]). С помощью компьютерной программы, которая находит все опорные гиперплоскости многогранника Λ_U, а затем находит грани каждой размерности, был получен так называемый *f-вектор*. Напомним, что компоненты этого вектора равны количеству граней соответствующей размерности, к которым традиционно приписывают единицу. В нашем случае f-вектор многогранника Λ_U равен

$$(1,12,60,120,90,20,1),$$

то есть, многогранник Λ_U имеет 12 граней нулевой размерности (вершин), 60 граней размерности 1 (ребер), ..., 20 граней размерности 4 (гиперграней) и 1 грань размерности 5 (сам многогранник Λ_U). Каждая из 20 гиперграней имеет f-вектор $(1,6,15,18,9,1)$.

4.3. Шеститочечное пространство

Пусть $m = 6$. В этом случае существует два неизоморфных бинарных дерева с 6 вершинами степени 1, одно с двумя усами, и одно с тремя.

4.3.1. Дерево с двумя парами усов

Дерево с двумя усами показано на рис 7, на нем же указана нумерация граничных вершин. Граничные ребра занумерованы так же как граничные вершины, нумерация внутренних ребер

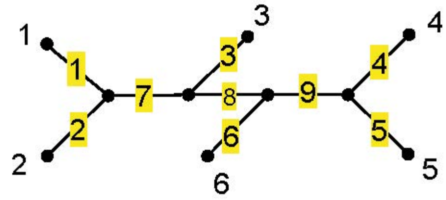


Рис. 7: Бинарное дерево с 6 вершинами степени 1 с двумя усами

также показана на рис. 7. Тогда

$$A_G = \begin{pmatrix} 1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&1&0&0&1&0&0&1&1&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&1&0&1&0&1\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&1&0&1&1\\ 0&1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&1&1&0&1&1&1&1&1&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&1&0&0&1&1&0&1&1&1&1&0 \end{pmatrix}.$$

Множество Λ_G допустимых значений переменных представляет собой шестимерный выпуклый многогранник в 15-мерном пространстве. У него 8 вершин, координаты которых имеют вид

$$\begin{array}{ll}
\frac{1}{2}(1,0,0,0,1,1,0,0,0,1,0,0,1,0,1), & \frac{1}{2}(1,1,0,0,0,0,0,0,1,1,0,0,1,0,1),\\
\frac{1}{2}(1,0,1,0,0,1,0,0,0,0,0,1,1,0,1), & \frac{1}{2}(1,1,0,0,0,0,1,0,0,0,0,1,1,0,1),\\
\frac{1}{2}(1,0,0,1,0,1,0,0,0,1,0,0,0,1,1), & \frac{1}{2}(1,1,0,0,0,0,0,1,0,1,0,0,0,1,1),\\
\frac{1}{2}(1,0,1,0,0,1,0,0,0,0,1,0,0,1,1), & \frac{1}{2}(1,1,0,0,0,0,1,0,0,0,1,0,0,1,1),
\end{array}$$

его f-вектор, найденный с помощью компьютерной программы, равен $(1,8,26,45,45,26,8,1)$.

Значения целевой функции в вершинах многогранника Λ_G равны соответственно

$$\begin{array}{ll}
\frac{1}{2}\left(d_{12}+d_{16}+d_{23}+d_{34}+d_{45}+d_{56}\right), & \frac{1}{2}\left(d_{12}+d_{13}+d_{26}+d_{34}+d_{45}+d_{56}\right),\\
\frac{1}{2}\left(d_{12}+d_{14}+d_{23}+d_{36}+d_{45}+d_{56}\right), & \frac{1}{2}\left(d_{12}+d_{13}+d_{24}+d_{36}+d_{45}+d_{56}\right),\\
\frac{1}{2}\left(d_{12}+d_{15}+d_{23}+d_{34}+d_{46}+d_{56}\right), & \frac{1}{2}\left(d_{12}+d_{13}+d_{25}+d_{34}+d_{46}+d_{56}\right),\\
\frac{1}{2}\left(d_{12}+d_{14}+d_{23}+d_{35}+d_{46}+d_{56}\right), & \frac{1}{2}\left(d_{12}+d_{13}+d_{24}+d_{35}+d_{46}+d_{56}\right),
\end{array}$$

а вес минимального параметрического заполнения типа G равен максимуму из этих восьми выражений.

В случае дерева с двумя парами усов количество перестановок граничных вершин равно $6!$, а группа автоморфизмов состоит из 8 элементов: транспозиции двух пар усов и симметрии относительно внутреннего ребра 8, получим $\frac{6!}{8} = 90$ различных многогранников. Объединяя множества вершин всех этих многогранников, получим множество U_2, состоящее из 60 точек. Заметим, что вершины исходного многогранника Λ_G, а значит и все вершины из U_2, снова имеют координаты или 0 или $\frac{1}{2}$, поэтому U_2 — подмножество вершин некоторого куба и, значит, выпукло. Размерность соответствующего выпуклого многогранника равна 9.

4.3.2. Дерево с тремя парами усами

Перейдем к случаю дерева с тремя парами усов. На рис. 8 показано такое дерево вместе с нумерацией граничных вершин

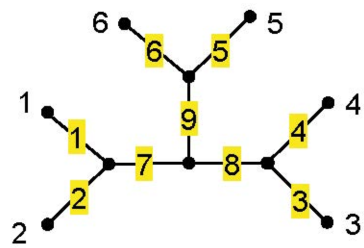


Рис. 8: Бинарное дерево с 6 вершинами степени 1 с тремя усами.

Матрица A_G имеет вид:

$$A_G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Множество Λ_G допустимых значений переменных представляет собой шестимерный выпуклый многогранник в 15-мерном пространстве. У него 12 вершин, координаты которых имеют вид

$$\begin{array}{ll}
\frac{1}{2}(1,0,0,0,1,0,1,0,0,1,1,0,0,0,1), & \frac{1}{2}(1,0,1,0,0,0,0,0,1,1,1,0,0,0,1), \\
\frac{1}{2}(1,0,0,1,0,0,1,0,0,1,0,1,0,0,1), & \frac{1}{2}(1,0,1,0,0,0,0,1,0,1,0,1,0,0,1), \\
\frac{1}{4}(2,1,0,0,1,0,1,1,0,2,0,1,1,0,2), & \frac{1}{4}(2,0,1,1,0,1,0,0,1,2,0,1,1,0,2), \\
\frac{1}{2}(1,0,0,0,1,1,0,0,0,1,0,0,1,0,1), & \frac{1}{2}(1,1,0,0,0,0,0,0,1,1,0,0,1,0,1), \\
\frac{1}{4}(2,0,1,0,1,1,0,1,0,2,1,0,0,1,2), & \frac{1}{4}(2,1,0,1,0,0,1,0,1,2,1,0,0,1,2), \\
\frac{1}{2}(1,0,0,1,0,1,0,0,0,1,0,0,0,1,1), & \frac{1}{2}(1,1,0,0,0,0,0,1,0,1,0,0,0,1,1),
\end{array}$$

Вычисленный на компьютере f-вектор многогранника Λ_G равен $(1, 12, 52, 108, 110, 54, 12, 1)$.

Значения целевой функции в вершинах многогранника Λ_G имеют вид

$$\frac{1}{2}(d_{12}+d_{16}+d_{24}+d_{34}+d_{35}+d_{56}), \quad \frac{1}{2}(d_{12}+d_{14}+d_{26}+d_{34}+d_{35}+d_{56}),$$
$$\frac{1}{2}(d_{12}+d_{15}+d_{24}+d_{34}+d_{36}+d_{56}), \quad \frac{1}{2}(d_{12}+d_{14}+d_{25}+d_{34}+d_{36}+d_{56})$$
$$\frac{1}{4}(2d_{12}+d_{13}+d_{16}+d_{24}+d_{25}+2d_{34}+d_{36}+d_{45}+2d_{56})$$
$$\frac{1}{4}(2d_{12}+d_{14}+d_{15}+d_{23}+d_{26}+2d_{34}+d_{36}+d_{45}+2d_{56})$$
$$\frac{1}{2}(d_{12}+d_{16}+d_{23}+d_{34}+d_{45}+d_{56}), \quad \frac{1}{2}(d_{12}+d_{13}+d_{26}+d_{34}+d_{45}+d_{56}),$$
$$\frac{1}{4}(2d_{12}+d_{14}+d_{16}+d_{23}+d_{25}+2d_{34}+d_{35}+d_{46}+2d_{56})$$
$$\frac{1}{4}(2d_{12}+d_{13}+d_{15}+d_{24}+d_{26}+2d_{34}+d_{35}+d_{45}+2d_{56})$$
$$\frac{1}{2}(d_{12}+d_{15}+d_{23}+d_{34}+d_{46}+d_{56}), \quad \frac{1}{2}(d_{12}+d_{13}+d_{25}+d_{34}+d_{46}+d_{56}),$$

а вес минимального параметрического заполнения типа G равен максимуму из этих 12 значений.

Отметим, что 8 из 12 вершин многогранника Λ_G являются вершинами 15-мерного куба (их координаты принимают значения 0 и 1/2), а оставшиеся четыре вершины являются центрами некоторых шестимерных граней этого куба. Для проверки выпуклости объединения множества вершин таких многогранников нам понадобится следующая простая лемма.

Лемма 7. *Пусть $C \subset \mathbb{R}^n$ — куб, F — его грань, $x \in F$ — точка, лежащая в этой грани, и $W = \{w_1, \ldots, w_k\} \subset C$ — конечное подмножество, причем $x = \sum_i \lambda_i w_i$, $0 < \lambda_i \leqslant 1$, $\sum_i \lambda_i = 1$. Тогда $W \subset F$.*

Доказательство. Пусть $(x_1, \ldots, x_n)$ — стандартные координаты в $\mathbb{R}^n$. Без ограничения общности, куб C задается неравенствами $0 \leqslant x_i \leqslant 1$, а грань F является пересечение куба с плоскостью, заданной системой уравнений $x_1 = \cdots = x_k = 0$. Если $w_i \notin F$, то по крайней мере одна из первых k координат точки w_i строго положительна, но тогда то же верно и для этой координаты точки x, противоречие. $\square$

Рассмотрим множество V состоящее из точек двух типов — некоторых вершин многомерного куба C и центров некоторых его граней. Представим V в виде $V = W \sqcup W^*$, где W содержит все вершины куба из V, а W^* — все центры граней. Для $x \in W^*$ обозначим через $F(x)$ грань, центром которой является x.

Утверждение 4. *Пусть, в сделанных обозначениях, для каждой точки $x \in W^*$ множество $F(x) \cap V$ представляет собой множество вершин выпуклого многогранника. Тогда и все множество V — тоже представляет собой множество вершин выпуклого многогранника.*

Доказательство. От противного, пусть одна из точек $x \in V$ является нетривиальной выпуклой комбинацией некоторых других: $x = \sum_i \lambda_i x_i$, $0 < \lambda_i \leqslant 1$, $\sum_i \lambda_i = 1$. Тогда x не может быть вершиной куба, так как $V \subset C$, поэтому $x \in W^*$. Но тогда все точки x_i, входящие в эту выпуклую комбинацию, должны лежать в $F(x)$ в силу леммы 7. Но по предположению $F(x) \cap V$ — множество вершин выпуклого многогранника, противоречие. $\square$

Таким образом, для проверки выпуклости конечного подмножества V куба вида $V = W \sqcup W^*$ достаточно проверить выпуклость каждого множества $F(x) \cap V$, $x \in W^*$.

В случае дерева с тремя парами усов группа автоморфизмов состоит из 24-х элементов: транспозиции трех пар усов и «круговой» симметрии, поэтому $\frac{6!}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 3!} = 30$. Количество уникальных вершин в объединении U_3 множеств вершин многогранников Λ_G для всевозможных деревьев с тремя парами усов равно 120. Оказалось, что множество U_3 содержит все вершины из множества U_2 вершин многогранников, построенных для деревьев с двумя парами усов. Таким образом, множество $U_3 = U(6)$ — это объединение множеств вершин всех многогранников Λ_G по всем возможным типам заполнений G пространства из 6 точек. Описанный выше метод проверки выпуклости показал, что множество $U(6)$ является выпуклым. Как и в случае двух пар усов, f-вектор для многогранника Λ_U не получен из-за большого объема вычислений.

4.4. Заключение: некоторые открытые вопросы.

В данном разделе перечислено несколько задач, которые могут стать темами дальнейшего исследования в данной области.

- Оценить количество вершин многогранника Λ_G в терминах $m = |M|$.
- Пусть деревья G_1 и G_2, задающие тип заполнения пространства M, изоморфны. Изоморфизм порождает перестановку множества M, которая порождает перестановку координат объемлющего пространства, и эта перестановка переводит Λ_{G_1} в Λ_{G_2}. Сколько общих вершин могут иметь эти многогранники? Сколько общих гиперграней? Могут ли они не пересекаться?
- Как меняется многогранник Λ_G при отрезании/добавлении усов к дереву G?
- В разобранных примерах объединение $U(m)$ множеств вершин многогранников Λ_G, где объединение берется по всевозможным бинарным деревьям G, соединяющим M, $m = |M|$, представляет собой множество вершин выпуклого многогранника $\Lambda_U(m)$. Являются ли многогранники Λ_G гранями многогранника $\Lambda_U(m)$? Если да, то чем эти грани выделяются среди других его граней?
- Обобщить доказательство выпуклости многогранника $\Lambda_U(6)$ на случай произвольного бинарного дерева с тремя усами. Использовать результаты А. Иванова и О. Щербакова [10],[11], из которых следует что кратность мультиобхода в этом случае не превосходит двух.
- Остается ли верным утверждение о выпуклости множества $U(m)$ для всех m?

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иванов А.О., Тужилин А.А. Теория экстремальных сетей. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 256 с.
2. Иванов А.О., Тужилин А.А. Одномерная проблема Громова о минимальном заполнении // Матем. сборник. 2012. Т. 203, № 5. С. 65–118. DOI: https://doi.org/10.4213/sm7777.
3. Иванов А.О., Овсянников З.Н., Стрелкова Н.П., Тужилин А.А. Одномерные минимальные заполнения с ребрами отрицательного веса // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1: Матем., мех. 2012. № 5. С. 3–8.
4. Ivanov A.O., Tuzhilin A.A. Dual Linear Programming Problem and One-Dimensional Gromov Minimal Fillings of Finite Metric Space // Trends in Mathematics. Cham: Springer, 2021. P. 165–182. arXiv:1907.03828.
5. Gromov M. Filling Riemannian manifolds // J. Diff. Geom. 1983. Vol. 18, no. 1. P. 1–147. DOI: 10.4310/jdg/1214509283.

6. Ivanov A.O., Tuzhilin A.A. Minimal fillings of finite metric spaces: The state of the art // Discrete Geometry and Algebraic Combinatorics. AMS, 2014. Vol. 625. P. 9–35. (Contemporary Mathematics).

7. Беднов Б.Б., Бородин П.А. Банаховы пространства, реализующие минимальные заполнения // Матем. сборник. 2014. Т. 205, № 4. С. 3–20. DOI: https://doi.org/10.4213/sm8264.

8. Еремин А.Ю. Формула веса минимального заполнения конечного метрического пространства // Матем. сборник. 2013. Т. 204, № 9. С. 51–72. DOI: https://doi.org/10.4213/sm7835.

9. Щербаков О.С. Многогранники бинарных деревьев, строение многогранника дерева типа «змея» // Чебышевский сборник. 2022. Т. 23, № 4. С. 136–151. DOI: https://doi.org/10.22405/2226-8383-2022-23-4-136-151.

10. Щербаков О.С. Ограничения на кратность неприводимых мультиобходов некоторых бинарных деревьев // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1: Матем., мех. 2025. № 2. (В печати).

11. Иванов А.О., Щербаков О.С. Существование неприводимых мультиобходов кратности 2 // Чебышевский сборник. 2024. Т. 25, № 3. С. 101–117.

12. Беднов Б.Б. Длина минимального заполнения пятиточечного метрического пространства // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1: Матем., мех. 2017. № 6. С. 3–8.

13. Васильев Ф.П., Иваницкий А.Ю. Линейное программирование. М.: Факториал Пресс, 1998. 320 с.

14. Hwang F.K. A linear time algorithm for full Steiner trees // Operations Research Letters. 1986. Vol. 4, no. 5. P. 235–237. DOI: https://doi.org/10.1016/0167-6377(86)90008-8.

15. Винберг Э.Б. Курс алгебры. 2-е изд., испр. и доп. М.: Факториал Пресс, 2001. 544 с.

16. Малышева О.С. Оптимальное положение компактов и проблема Штейнера в пространствах с евклидовой метрикой Громова–Хаусдорфа // Матем. сборник. 2020. Т. 211, № 10. С. 32–49. DOI: https://doi.org/10.4213/sm9361.

REFERENCES

1. Ivanov, A.O., Tuzhilin, A.A., 2003, *Extreme Networks Theory*, Moscow-Izhevsk: Regul. i Khaot. Dinamika [in Russian].

2. Ivanov, A.O., Tuzhilin, A.A., 2012, "One-dimensional Gromov Minimal Filling Problem", *Sbornik Math.*, vol. 203, no. 5, pp. 65–118. DOI: https://doi.org/10.1070/SM2012v203n05ABEH004239.

3. Ivanov, A.O., Ovsyannikov, Z.N., Strelkova, N.P., Tuzhilin, A.A., 2012, "One-dimensional Minimal Fillings with Negative Edge Weights", *Moscow Univ. Math. Bull.*, vol. 67, no. 5–6, pp. 189–194. DOI: https://doi.org/10.3103/S0027132212050014.

4. Ivanov, A., Tuzhilin, A., 2021, "Dual Linear Programming Problem and One-Dimensional Gromov Minimal Fillings of Finite Metric Space", in *Trends in Mathematics*, Cham: Springer, pp. 165–182. arXiv:1907.03828 [math.MG] (2019).

5. Gromov, M., 1983, "Filling Riemannian Manifolds", *J. Diff. Geom.*, vol. 18, no. 1, pp. 1–147. DOI: 10.4310/jdg/1214509283.

6. Ivanov, A.O., Tuzhilin, A.A., 2014, "Minimal Fillings of Finite Metric Spaces: The State of the Art", in *Discrete Geometry and Algebraic Combinatorics*, AMS, vol. 625, pp. 9–35.

7. Bednov, B.B., Borodin, P.A., 2014, "Banach Spaces that Realize Minimal Fillings", *Sb. Math.*, vol. 205, no. 4, pp. 459–475. DOI: https://doi.org/10.1070/SM2014v205n04ABEH004383.

8. Eremin, A.Yu., 2013, "A Formula for the Weight of a Minimal Filling of a Finite Metric Space", *Sb. Math.*, vol. 204, no. 9, pp. 1285–1306.
DOI: https://doi.org/10.1070/SM2013v204n09ABEH004340.

9. Shcherbakov, O.S., 2022, "Polyhedra of Binary Trees, Structure of the Polyhedron for a Tree of the "Snake" Type", *Chebyshev. Sbornik*, vol. 23, no. 4, pp. 136–151 [in Russian]. DOI: https://doi.org/10.22405/2226-8383-2022-23-4-136-151.

10. Shcherbakov, O.S., 2025, "Upper Estimates on the Multiplicities of Irreducible Multitours for Some Binary Trees", *Moscow Univ. Math. Bull.* [in Russian, to appear].

11. Ivanov, A.O., Shcherbakov, O.S., 2024, "Existence of Irreducible Multitours of Multiplicity 2", *Chebyshev. Sbornik*, vol. 25, no. 3, pp. 101–117.

12. Bednov, B.B., 2017, "The Length of Minimal Filling for a Five-Point Metric", *Moscow University Math. Bull.*, vol. 72, no. 6, pp. 221–225. DOI: https://doi.org/10.3103/S0027132217060018.

13. Vasiliev, F.P., Ivanitskii, A.Yu., 1998, *Linear Programming*, Moscow: Factorial Press.

14. Hwang, F.K., 1986, "A Linear Time Algorithm for Full Steiner Trees", *Operations Research Letters*, vol. 4, no. 5, pp. 235–237. DOI: https://doi.org/10.1016/0167-6377(86)90008-8.

15. Vinberg, E.B., 2003, *A Course in Algebra*, New York: AMS.

16. Malysheva, O.S., 2020, "Optimal position of compact sets and the Steiner problem in spaces with Euclidean Gromov–Hausdorff metric", *Sb. Math.*, vol. 211, no. 10, pp. 1382–1398. DOI: https://doi.org/10.1070/SM9361.

Получено: 15.11.2024
Принято в печать: 07.04.2025

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 26. Выпуск 2.

УДК 515.165.7+517.938.5+514.763.2 DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-2-125-140

Бифуркации магнитных геодезических потоков на торических поверхностях вращения

И. Ф. Кобцев, Е. А. Кудрявцева

Кобцев Иван Федорович — Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана (г. Москва).
e-mail: int396.kobtsev@mail.ru

Кудрявцева Елена Александровна — доктор физико-математических наук, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова; Московский центр фундаментальной и прикладной математики (г. Москва).
e-mail: eakudr@mech.math.msu.su

Аннотация

Изучаются магнитные геодезические потоки, инвариантные относительно вращений, на двумерном торе. Предполагается, что пара 2π-периодических функций (f, Λ), задающая динамическую систему, удовлетворяет условиям общего положения, при этом функция Λ, задающая магнитное поле, принимает значения в окружности, если магнитное поле не является точным. Описана топология слоения Лиувилля данной интегрируемой системы вблизи ее особых орбит и особых слоев, найдены типы этих особенностей. Описана топология слоения Лиувилля на неособых трехмерных изоэнергетических многообразиях путем вычисления инварианта Фоменко – Цишанга. Показано, что слоения Лиувилля для геодезического потока и для неточного магнитного геодезического потока на любом изоэнергетическом многообразии имеют разную топологию. Описаны все возможные бифуркационные диаграммы отображений момента таких интегрируемых систем.

Ключевые слова: точный магнитный геодезический поток, интегрируемая система, топология слоения Лиувилля, бифуркационная диаграмма.

Библиография: 20 названий.

Для цитирования:

Кобцев И.Ф., Кудрявцева Е.А. Бифуркации магнитных геодезических потоков на торических поверхностях вращения // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 2, с. 125–140.

Исследование Е. А. К. выполнено в МГУ им. М. В. Ломоносова при поддержке Российского научного фонда, проект № 24-71-10100 (§§ 2, 3), и в рамках реализации Программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа, соглашение № 075-02-2024-1438 (§§ 4, 5).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 26. No. 2.

UDC 515.165.7+517.938.5+514.763.2 DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-2-125-140

Bifurcations of magnetic geodesic flows on toric surfaces of revolution

I. F. Kobtsev, E. A. Kudryavtseva

Kobtsev Ivan Fedorovich — Bauman Moscow State Technical University (Moscow).
e-mail: int396.kobtsev@mail.ru
Kudryavtseva Elena Alexandrovna — doctor of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University; Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics (Moscow).
e-mail: eakudr@mech.math.msu.su

Abstract

We study magnetic geodesic flows invariant under rotations on the 2-torus. The dynamical system is given by a generic pair of 2π-periodic functions (f, Λ), where the function Λ takes values in a circle if the magnetic field is not exact. Topology of the Liouville fibration of the given integrable system near its singular orbits and singular fibers is decribed. Types of these singularities are computed. Topology of the Liouville fibration on regular 3-dimensional isoenergy manifolds is described by computing the Fomenko-Zieschang invariant. It is shown that Liouville fibrations for geodesic flow and non-exact magnetic geodesic flow on any isoenergy manifold have different topology. All possible bifurcation diagrams of the momentum maps of such integrable systems are described.

Keywords: exact magnetic geodesic flow, integrable system, topology of the Liouville fibration, bifurcation diagram.

Bibliography: 20 titles.

For citation:
Kobtsev, I. F., Kudryavtseva, E. A. 2025, “Bifurcations of magnetic geodesic flows on toric surfaces of revolution” , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 2, pp. 125–140.

1. Введение

Магнитный геодезический поток описывает движение заряженной частицы по риманову многообразию (M, g) в идеальном магнитном поле. При этом магнитное поле задано произвольной замкнутой 2-формой β на M. Если риманова метрика и магнитное поле инвариантны относительно гладкого эффективного действия группы S^1 на M и $\dim M = 2$, то магнитный геодезический поток интегрируем по Лиувиллю [1]. При этом в случае компактного M все интегральные многообразия компактны и почти все являются двумерными торами с квазипериодической динамикой (лиувиллевы торы), и возникает задача изучения топологии и особенностей соответствующего слоения Лиувилля. Связана ли топология слоения Лиувилля

Если M трехмерно, то 2-форма β связана с векторным полем магнитной индукции B формулой $\beta = * \downarrow B$, где $\downarrow$ — операция опускания индекса и $*$ — операция Ходжа. Если M — двумерная поверхность в $\mathbb{R}^3$, то вектор магнитной индукции B пропорционален единичному вектору нормали n к поверхности, т.е. имеет вид $B = \lambda n$, где λ — гладкая функция на M, при этом $\beta = \lambda\, d\sigma$, где $d\sigma$ — ориентированная форма площади на M.

для данной задачи при больших уровнях энергии и для геодезического потока? Наша работа посвящена решению этих задач для магнитных геодезических потоков на двумерном торе M.

В частном случае геодезических потоков (при отсутствии магнитного поля) на поверхностях вращения задача была решена Т.З. Нгуеном и Л.С. Поляковой [1, том 2, теорема 3.9]. Также был изучен случай натуральных механических систем, инвариантных относительно вращений, на сфере [2], торе [3], бутылке Клейна [3] и проективной плоскости [4]. В статье [5], посвященной родственной задаче — изучению интегрируемой системы с линейным по импульсам периодическим интегралом на алгебре Ли $e(3)$, были классифицированы невырожденные особенности отображения момента, найдена топология неособых 3-мерных изоэнергетических многообразий Q_h^3 и описаны бифуркации торов Лиувилля на них. В работе [6] рассматривалась задача, полученная из поставленной в [2] задачи добавлением магнитного поля, т.е. гироскопических сил (с сохранением требования S^1-инвариантности римановой метрики, магнитного поля и потенциала). При выполнении некоторых условий "общности положения" на тройку функций, задающую эту систему, в [6] были классифицированы невырожденные и вырожденные особенности, найдены молекулы Фоменко на Q_h^3 (включая описание бифуркаций торов Лиувилля) [7, 8], метки на некоторых ребрах молекулы и описана топология Q_h^3.

В работе [9] проведено более подробное исследование задачи из [6] в частном случае, когда потенциал равен нулю (т.е. исследовались магнитные геодезические потоки на сфере, инвариантные относительно вращений). В частности, были вычислены все метки для инвариантов Фоменко – Цишанга [10, 11, 12], кодирующих слоение Лиувилля на изоэнергетических 3-мерных многообразиях (тем самым, было завершено вычисление меток, начатое в [6]). При этом в работе [9] обнаружилось несколько новых интересных феноменов, показывающих, что такая задача представляет интерес. Во-первых, было показано, что различные магнитные геодезические потоки характеризуются (задаются) плоской кривой в плоскости (f, Λ), которая по сути дела является произвольной за исключением некоторых граничных условий на ее концах. Тем самым, все интересующие нас инварианты могут быть описаны в терминах этой кривой [9, теоремы 3.3, 3.7, 4.2, 4.8, 5.13, 5.17]. При этом обнаружился несколько неожиданный геометрический факт: для описания этих инвариантов полезно перейти к проективно двойственной кривой. Во-вторых, был обнаружен новый тип вырожденных особенностей — "несимметричная эллиптическая вилка" [9, теорема 3.7], который не упоминался в других работах, в том числе в [6]. Таким образом, даже без потенциала система оказалась очень богатой.

В настоящей работе изучаются, как и в [9], магнитные геодезические потоки на поверхностях вращения, однако поверхность вращения предполагается гомеоморфной двумерному тору, а не сфере. При этом магнитное поле не предполагается точным (как оказалось, случай точного магнитного поля на торе существенно отличается от общего случая). Для этой интегрируемой системы классифицированы полулокальные особенности (теоремы 1 и 2) при условии, что пара функций f, Λ, задающая магнитный геодезический поток, находится в общем положении (см. условия 1—3 в $S2$), вычислены топологические инварианты Фоменко – Цишанга для слоения Лиувилля на неособых изоэнергетических многообразиях (теоремы 3 и 4, рис. 3 и 5). Показано, что слоение Лиувилля магнитного геодезического потока на торе, помимо 2-параметрических семейств регулярных слоев (торов Лиувилля), имеет конечное число 1-параметрических семейств критических слоев (эллиптического и гиперболического типов) и конечное число изолированных критических слоев: вырожденных (каспидальные торы и "несимметричные эллиптические вилки") и невырожденных ("расщепляющиеся" гиперболические особенности ранга 1 [6]). Описаны соответствующие 3-атомы (замечание 16 и рис. 1, 2). Отметим, что для магнитных геодезических потоков на торе, инвариантных относительно вращений и удовлетворяющих условиям общности положения 1—3 из $S2$, нетрудно получить (почти дословным повторением случая сферы [9, теорема 5.17]) описание всех бифуркационных диаграмм, а также связь между геометрическими свойствами кривой (f, Λ) и бифуркационной диаграммы, а также динамическими свойствами системы [9, теорема 5.13

и рис. 3, 7—10], с помощью которых легко построить бифуркационный комплекс по кривой (f, Λ) или по бифуркационной диаграмме (см. примеры на рис. 4 и 5).

Во всех доказательствах вначале подробно изучается случай точного магнитного поля, а затем — общий случай.

2. Магнитный геодезический поток на торе

Опишем построение магнитного геодезического потока на поверхности вращения M, гомеоморфной тору. Для этого введем на торе M стандартные угловые координаты $r \in \mathbb{R}/L\mathbb{Z}$, $\varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ и определим риманову метрику $ds^2 = dr^2 + f^2(r)d\varphi^2$. Здесь $f : [0, L] \to \mathbb{R}_{>0}$ — гладкая функция, которая продолжается до гладкой L-периодической функции на $\mathbb{R}$.

Гамильтониан и симплектическая структура магнитного геодезического потока на торе имеют вид

$$H = \frac{p_r^2}{2} + \frac{p_\varphi^2}{2f^2(r)}, \quad \omega = dp_r \wedge dr + dp_\varphi \wedge d\varphi + \pi^*\beta,$$

где $\pi : T^*M \to M$ — каноническая проекция. Потребуем, чтобы 2-форма β на торе, задающая магнитное поле, была S^1-инвариантна. Это значит, что она пропорциональна форме площади $d\sigma = f(r)dr \wedge d\varphi$ с коэффициентом пропорциональности, зависящем только от r, т.е. имеет вид $\beta = \lambda(r)f(r)dr \wedge d\varphi$ для некоторой гладкой L-периодической функции $\lambda(r)$ (по модулю равной длине вектора магнитной индукции, см. сноску). Ввиду гладкости функции $\lambda(r)f(r)$, мы можем представить ее в виде $\lambda(r)f(r) = \Lambda'(r)$ для некоторой гладкой функции $\Lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, т.е.

$$\beta = \Lambda'(r)dr \wedge d\varphi.$$

Очевидно, ввиду L-периодичности функций $f(r)$ и $\lambda(r)$, что функция $\Lambda'(r) = \lambda(r)f(r)$ тоже L-периодична (однако сама функция $\Lambda(r)$ будет L-периодичной лишь тогда, когда $\Lambda(0) = \Lambda(L)$).

Если магнитное поле β точно всюду на торе, то $0 = \int_M \beta = 2\pi \int_0^L \Lambda'(r)dr = 2\pi(\Lambda(L) - \Lambda(0))$, поэтому $\Lambda(L) = \Lambda(0)$, значит функция $\Lambda(r)$ (а не только ее производная) является L-периодичной. Значит, $\beta = d\alpha$, где $\alpha = \Lambda(r)d\varphi$ — гладкая 1-форма на торе (т.н. магнитный потенциал). Это предположение позволяет привести симплектическую структуру к стандартной, выполнив (всюду на кокасательном расслоении к тору!) замену

$$(p_r, p_\varphi, r, \varphi) \to (p_r, K = p_\varphi + \Lambda(r), r, \varphi),$$

которая в бескоординатной записи имеет вид $(p, q) \to (p + \alpha, q)$, где $q \in M$, $p \in T_q^*M$. При этом гамильтониан и симплектическая структура системы на T^*M примут вид

$$H = \frac{p_r^2}{2} + \frac{(K - \Lambda(r))^2}{2f^2(r)}, \quad \omega = dp_r \wedge dr + dK \wedge d\varphi. \tag{1}$$

Эта гамильтонова система интегрируема и задает точный магнитный геодезический поток $T(f, \Lambda)$ на торе. Под ее *особенностями* будем понимать критические точки *отображения момента*

$$\mathcal{F} = (H, K) : T^*M \to \mathbb{R}^2.$$

Как и в случае сферы [9, предположение 2.4], наложим на функции f, Λ следующие условия:

1') $f(r) > 0$, $\Lambda(r)$ — L-периодические функции Морса;

2) $(\Lambda'(r))^2 + (f'(r))^2 > 0$;

3) ориентированная кривизна плоской кривой (f, Λ) имеет только простые нули.

Если магнитное поле не предполагается точным, будем накладывать на гладкие функции $f, \Lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ условия 2, 3, приведенные выше, и следующее условие:

1) $f(r) > 0$, $\Lambda(r)$ — функции Морса, при этом $f(r)$ и $\Lambda'(r)$ являются L-периодическими. Обозначим

$$\tau := \Lambda(L) - \Lambda(0).$$

Тогда условие точности магнитного поля принимает вид $\tau = 0$.

Замечание 15. *Если магнитное поле не является точным, т.е. $\tau \neq 0$, то функция $\Lambda(r)$ индуцирует (однозначную) гладкую L-периодическую функцию $\Lambda(r) \mathrm{mod} \tau$ со значениями в окружности $R/\tau\mathbb{Z}$. Накроем тор M цилиндром $\widetilde{M}$ с координатами $\varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ и $r \in \mathbb{R}$, и определим на цилиндре $\widetilde{M}$ функцию $L(r)$, магнитное поле $\widetilde{\beta}$ и 1-форму $\widetilde{A}$ теми же формулами, что и выше. Это магнитное поле на цилиндре $\widetilde{M}$ является точным, поэтому индуцированный магнитный геодезический поток на $T^*\widetilde{M}$ является точным и имеет дополнительный первый интеграл $K = p_\varphi + \Lambda(r)$, и система принимает вид* (1) *при указанной замене координат на $T^*\widetilde{M}$. Ясно, что этот первый интеграл на $T^*\widetilde{M}$ обладает свойством эквивариантности*

$$K(p_r, p_\varphi, r + L, \varphi) = K(p_r, p_\varphi, r, \varphi) + \tau,$$

а изначальный магнитный геодезический поток на T^*M имеет корректно определенный первый интеграл $K \mathrm{mod} \tau = p_\varphi + \Lambda(r) \mathrm{mod} \tau$ со значениями в окружности $\mathbb{R}/\tau\mathbb{Z}$.

Из такого S^1-значного первого интеграла можно получить “обычный” — вещественнозначный — первый интеграл, например $\cos(2\pi K/\tau) = \cos(2\pi(p_\varphi + \Lambda(r))/\tau)$. *Домножением метрики на положительный коэффициент можно нормировать $L = 2\pi$. В случае неточного магнитного поля ($\tau \neq 0$) можно нормировать $\tau = 2\pi$ домножением импульсов и энергии на ненулевые коэффициенты. Но мы не будем этого делать.*

Мы не будем налагать других ограничений на систему, кроме условий гладкости (см. выше) и условий 1—3 общности положения. Случай однородных ($\lambda = \mathrm{const}$, см. [9]) точных магнитных геодезических потоков биллиардного типа на некоторых кусочно-плоских поверхностях вращения (гомеоморфных сфере, тору, диску и цилиндру) изучен в [13].

Пусть $\{r_i\}_{i=1}^n$ — критические точки f, а $\{r_j^*\}_{j=1}^N$ — критические точки Λ. Обозначим $I = [0, L] \setminus \{r_i\}_{i=1}^n$. Обозначим $\mathcal{O}_{\rho,k} = \{(p_r, K, r, \varphi) : p_r = 0, K = k, r = \rho, \varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\}$ — окружность, зависящая от пары параметров $\rho \in [0, L]$, $k \in \mathbb{R}$. При этом в случае неточного магнитного поля ($\tau \neq 0$) эта окружность содержится в $T^*\widetilde{M}$ и задана в координатах (p_r, K, r, φ) на $T^*\widetilde{M}$.

3. Полулокальные особенности слоения Лиувилля

Следующая теорема описывает топологию слоения Лиувилля вблизи особых орбит (т.е. полулокальные особенности системы).

Теорема 1. *Если функции f, Λ удовлетворяют условиям 1 и 2 из S2, то особые точки магнитного геодезического потока $T(f, \Lambda)$ на торе (соответственно индуцированного магнитного потока на накрывающем цилиндре в случае неточного магнитного поля) образуют следующие два семейства особых точек ранга 1:*

(i) $\mathcal{C}_1^k = \bigcup\limits_{r \in I} \mathcal{O}_{r,k(r)}$, *где* $k(r) = \Lambda(r) - f(r)\dfrac{\Lambda'(r)}{f'(r)}$,

(ii) $\mathcal{C}_1^\Lambda = \bigcup\limits_{r \in [0,L]} \mathcal{O}_{r,\Lambda(r)}$.

Образом семейства $\mathcal{C}_1^k$ при отображении момента $\mathcal{F} = (H, K) : T^*M \to \mathbb{R}^2$ в случае точного магнитного поля (соответственно $\mathcal{F} = (H, K) : T^*\widetilde{M} \to \mathbb{R}^2$ в случае неточного магнитного поля) является кривая $\gamma_1 = \{(h(r), k(r)) \mid r \in I\}$, где $h(r) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\Lambda'(r)}{f'(r)}\right)^2$, а *образом семейства* $\mathcal{C}_1^\Lambda$ *— вертикальный отрезок* $\gamma_2 = \{(0, \Lambda(r)) \mid r \in [0, L]\}$. *Особых точек ранга 0 система* $T(f, \Lambda)$ *не имеет.*

Доказательство. Из описания особых точек магнитного геодезического потока $S(f, \Lambda)$ на сфере [9, теорема 3.3] следует, что множество точек ранга 1 системы $T(f, \Lambda)$ на торе задается теми же формулами, что и у системы $S(f, \Lambda)$. А поскольку координаты $(r \mathrm{mod} L, \varphi \mathrm{mod} 2\pi)$ определены всюду на торе, то система $T(f, \Lambda)$ не имеет точек ранга 0. Теорема доказана. □

Отметим, что если магнитное поле является точным ($\tau = 0$), то все функции $\Lambda(r), k(r), h(r)$ являются L-периодичными. В общем случае функция $k(r)$, задающая первое семейство особых точек в теореме 1, и кривые γ_1, γ_2 обладают свойством эквивариантности

$$k(r+L) = k(r) + \tau, \quad h(r+L) = h(r), \qquad \gamma_j(r+L) = \gamma_j(r) + (0, \tau), \quad j = 1, 2.$$

Определение 1. Эффективным потенциалом *системы* $T(f, \Lambda)$ *называется функция*

$$U_k(r) = \frac{(k - \Lambda(r))^2}{2f^2(r)},$$

где k *— вещественный параметр. В случае точного магнитного поля* ($\tau = 0$) *эффективный потенциал является* L*-периодичным, т.е. корректно определен на торе. В общем случае он корректно определен лишь на накрытии* $\widetilde{M}$ *тора* M *и обладает свойством инвариантности*

$$U_{k+\tau}(r+L) = U_k(r).$$

$r \in [0, L]$.

Теорема 2. *Пусть функции* f, Λ *удовлетворяют условиям 1 и 2 из S2. Тогда типы критических окружностей магнитного геодезического потока* $T(f, \Lambda)$ *на торе определяются следующими условиями:*

1) *Для любого* $r \in [0, L]$ *такого, что* $f'(r) \neq 0$, *следующие условия* (a)—(d) *равносильны:*

(a) *критическая орбита* $\mathcal{O}_{r,k(r)}$ *из семейства* $\mathcal{C}_1^k$ *системы* $T(f, \Lambda)$ *невырождена,*

(b) $U''_{k(r)}(r) \neq 0$,

(c) $k'(r)\Lambda'(r) \neq 0$,

(d) $(f'(r)\Lambda''(r) - f''(r)\Lambda'(r))\Lambda'(r) \neq 0$.

Если $U''_{k(r)}(r) > 0$, *то критическая окружность имеет эллиптический тип, а если* $U''_{k(r)}(r) < 0$ *— гиперболический; при этом* $\operatorname{sgn} U''_{k(r)}(r) = \operatorname{sgn}(-k'(r)\Lambda'(r)) = \operatorname{sgn}(f'(r)\Lambda''(r) - - f''(r)\Lambda'(r))\Lambda'(r)) = -\operatorname{sgn} \frac{d^2 f(\Lambda)}{d\Lambda^2}$. *Здесь* $f(\Lambda)$ *— локальная функция, график которой совпадает с кривой* $(f(r), \Lambda(r))$, $r \notin \{r_j^*\}_{j=1}^N$.

2) *Любая критическая орбита* $\mathcal{O}_{r,\Lambda(r)}$ *системы* $T(f, \Lambda)$, *содержащаяся в* $\mathcal{C}_1^\Lambda \setminus (\mathcal{C}_1^\Lambda \cap \mathcal{C}_1^k)$, *является невырожденной и имеет эллиптический тип.*

3) Если функции f, Λ *удовлетворяют также условию 3 из S2, то вырожденные критические окружности* $\mathcal{O}_{r,k(r)}$ *семейства* $\mathcal{C}_1^k$ *могут быть одного из двух типов:*

(i) *параболическая окружность [14, 15, 16, 17, 18, 19] — при таком* $r \in I$, *что* $\Lambda''(r)f'(r) - \Lambda'(r)f''(r) = 0$; *ее образ при отображении момента — обыкновенная полукубическая точка возврата кривой* γ_1. *Росток слоения Лиувилля в соответствующей вырожденной орбите* $\mathcal{O}_{r_\ell^\circ, k(r_\ell^\circ)}$ *имеет тип "параболическая орбита";*

(ii) *критическая орбита, содержащаяся в обоих семействах* $\mathcal{C}_1^k$, $\mathcal{C}_1^\Lambda$ *— при таком* $r \in I$, *что* $\Lambda'(r) = 0$; *ее образ при отображении момента — точка касания кривых* γ_1 *и* γ_2. *Росток слоения Лиувилля в соответствующей вырожденной орбите* $\mathcal{O}_{r_j^*, \Lambda(r_j^*)}$ *имеет тип "несимметричная эллиптическая вилка" [14, 20, 9].*

Доказательство. Повторяет доказательство теоремы 3.7 из [9]. □

4. Инварианты грубой лиувиллевой эквивалентности системы

Рассмотрим плоскую кривую $\Gamma(r) = (f(r), \Lambda(r))$ и ее отражение $\Gamma_-(r) = (-f(r), \Lambda(r))$. Если магнитное поле точно, то эти кривые замкнуты: $\Gamma(r+L) = \Gamma(r)$, $\Gamma_-(r+L) = \Gamma_-(r)$. Рассмотрим все прямые в плоскости (f, Λ) со следующим свойством: кривая Γ и ее отражение Γ_- лежат в разных полуплоскостях относительно этой прямой. Ясно, что такая прямая существует: например, прямая $\{f = 0\}$. Легко видеть, что в точности две такие прямые касаются обеих кривых Γ и Γ_-, и что эти прямые имеют вид $\{(f, \Lambda) : \Lambda = k_0 \pm a_0 f\}$ для некоторых констант $a_0 > 0$ и k_0. Положим $h_0 = a_0^2/2$. Для неточного магнитного поля положим $h_0 = +\infty$.

Итак, в случае точного магнитного поля выполнено $\Gamma \subset \{(f, \Lambda) : |\Lambda - k_0| \leqslant \sqrt{2h_0} f\}$ и кривая Γ касается обеих прямых $\{\Lambda = k_0 \pm \sqrt{2h_0} f\}$ (в общем случае h_0 — это точная верхняя грань абсцисс точек пересечения гиперболических дуг бифуркационной кривой γ_1, обладающих следующим свойством: тангенсы углов наклона касательных к дугам кривой в точке пересечения имеют разные знаки, см. первую часть теоремы 2, рис. 4, 5 и замечание 17).

В следующих двух теоремах рассматривается первый интеграл K в случае точного магнитного поля ($\tau = 0$), а в случае неточного магнитного поля ($\tau \neq 0$) — функция $K \mathrm{mod} \tau$ (тоже обозначаемая через K), принимающая значения в окружности $\mathbb{R}/\tau\mathbb{Z}$. Под *молекулой Фоменко* функции $K|_{Q_h^3}$ будем понимать граф Риба этой функции, каждой вершине которого сопоставлен соответствующий 3-атом с указанием соответствующей биекции между множеством его граничных торов и множеством всех ребер, инцидентных данной вершине [7, 9].

Теорема 3. *В магнитном геодезическом потоке $T(f, \Lambda)$ на торе*

1) *изоэнергетическое многообразие $Q_h^3 = \{H = h\} \subset T^*M$ является неособым тогда и только тогда, когда $h \neq 0$. При любом $h > 0$ оно диффеоморфно трехмерному тору T^3;*

2) *если пара функций f, Λ удовлетворяет условиям 1–3 из S2 и значение $h > 0$ отлично от абсцисс точек возврата кривой γ_1, то $K\big|_{Q_h^3}$ — функция Ботта и молекула Фоменко функции Ботта $K\big|_{Q_h^3}$ является связным графом, в концевых вершинах которого стоят 3-атомы A, а в других вершинах — седловые 3-атомы $V = V_{\sigma_1 \ldots \sigma_m} \times S^1$ или $P = P_{\sigma_1 \ldots \sigma_m} \times S^1$ (определенные в замечании* 16 (a) ниже), при этом молекула Фоменко имеет вид, описанный в замечании 16 (d). Более точно:

(i) если $0 < h < h_0$ (это автоматически выполнено для неточного магнитного поля), то молекула Фоменко имеет единственный цикл и не содержит 3-атомов P;

(ii) в случае $h = h_0$ молекула Фоменко является деревом и содержит единственный 3-атом P, причем P отличен от $P_{+\ldots+} \times S^1$ и $P_{-\ldots-} \times S^1$;

(iii) в случае $h > h_0$ молекула Фоменко имеет единственный цикл и содержит ровно два 3-атома вида P, причем они соединены двумя ребрами и имеют вид $P_{+\ldots+} \times S^1$ и $P_{-\ldots-} \times S^1$;

(iv) в случае $h \geqslant h_0$ все 3-атомы V молекулы Фоменко, расположенные “выше” 3-атомов P, имеют вид $V_{+\ldots+} \times S^1$, а расположенные “ниже” 3-атомов P — вид $V_{-\ldots-} \times S^1$.

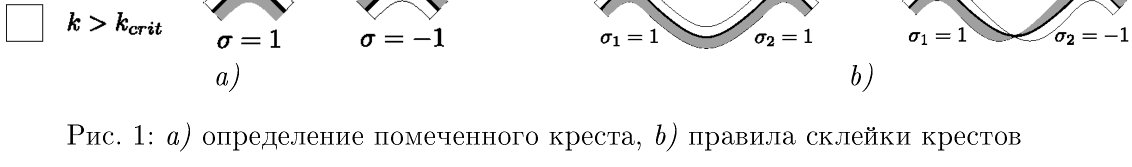


Рис. 1: *a)* определение помеченного креста, *b)* правила склейки крестов

Замечание 16. (a) *Аналогично построению 3-атома $V = V_{\sigma_1 \ldots \sigma_m} \times S^1$ в [6] и [9, замечание 4.3], будем строить 3-атомы P как результат умножения соответствующего 2-атома*

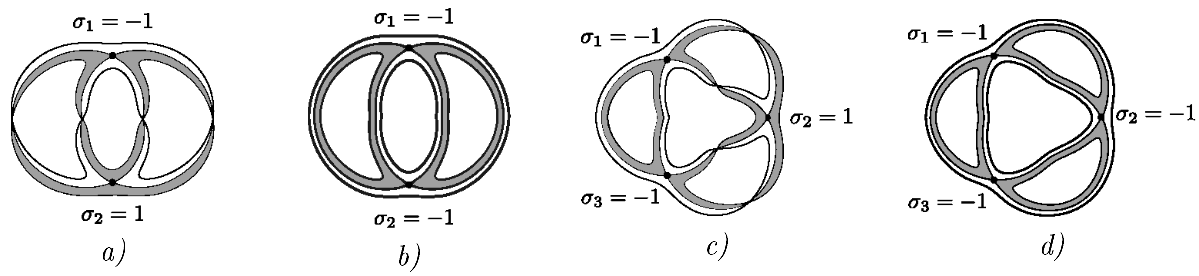


Рис. 2: Примеры 2-атомов, возникающих в системе на торе: *a)* $P_{-+}=C_1$, *b)* $P_{--}=C_2$, *c)* $P_{-+-}=E_2$, *d)* $P_{---}=E_3$

$P_{\sigma_1\dots\sigma_m}$ на окружность. При этом 2-атом $P_{\sigma_1\dots\sigma_m}$ тоже строится склейкой крестов, помеченных знаками $\sigma_i=\pm1$ (см. рис. 1 или [9, замечание 4.3]). Но, в отличие от 2-атома $V_{\sigma_1\dots\sigma_m}$ (особый слой которого — цепь окружностей), особый слой 2-атома $P_{\sigma_1\dots\sigma_m}$ определяется как замкнутая цепь окружностей (рис. 2).

(b) *Нетрудно показать, что 2-атомы $V_{\sigma_1\dots\sigma_m}$, $P_{+\dots+}$ и $P_{-\dots-}$ вложимы в плоскость, т.е. имеют род 0, а остальные 2-атомы $P_{\sigma_1\dots\sigma_m}$ вложимы в тор, но не в плоскость, т.е. имеют род 1. Также отметим, что 2-атомы $V_{\sigma_1\dots\sigma_m}$ совпадают с 2-атомами $V_m^{\eta_1\dots\eta_m}$, появляющимися в натуральных механических системах с магнитным полем [6] и магнитных геодезических потоках [9] на сферических поверхностях вращения, а также в интегрируемых системах с линейным периодическим первым интегралом для алгебры Ли* $e(3)$ *[5]. Знакоопределенные 2-атомы $V_{+\dots+}$ и $V_{-\dots-}$ (соответственно $P_{+\dots+}$ и $P_{-\dots-}$) появляются в натуральных механических системах на сферических [2] (соответственно торических [3]) поверхностях вращения. 2-Атомы $V_{\sigma_1\dots\sigma_m}$ и $P_{\sigma_1\dots\sigma_m}$ появляются в однородных [9] точных магнитных геодезических потоках биллиардного типа на кусочно-гладких поверхностях вращения (гомеоморфных сфере, тору, диску и цилиндру) [13, рис. 21–23, 27, 28].*

(c) *Согласно теореме 3, 3-атомы P возникают только у точных магнитных геодезических потоков и только при $h\geqslant h_0$. Если пара функций f,Λ удовлетворяет дополнительному условию "общности положения в сильном смысле" [9, предположение 3.12], то в магнитном геодезическом потоке $T(f,\Lambda)$ на торе могут возникнуть только следующие виды седловых 3-атомов в молекуле Фоменко боттовской функции $K|_{Q^3_h}$: $V_\sigma\times S^1$, $P_\sigma\times S^1$, $V_{\sigma_1\sigma_2}\times S^1$ и $P_{\sigma_1\sigma_2}\times S^1$ (топологически устроенные как 3-атомы B, D_1, D_2, см. [9, рис. 5], C_1 и C_2, см. рис. 2,a,b и замечание* 17). Отметим, что свойства (iii) и (iv) из теоремы 3 верны и для геодезического потока на торе (при условии, что f — функция Морса и $\Lambda\equiv0$). С учетом (i) получаем, что слоения Лиувилля для любого неточного магнитного геодезического потока на любом уровне энергии и для геодезического потока имеют разную топологию.

(d) Опишем алгоритм построения молекулы Фоменко функции $K|_{Q^3_h}$ по функциям f, Λ и неособому уровню энергии h. Построим в плоскости (k,r) графики функций $g_\pm(r)=\Lambda(r)\pm$ $\pm\sqrt{2h}f(r)$. Затем склеим боковые стороны области $\{(k,r)\in\mathbb{R}\times[0,L]:g_-(r)\leqslant k\leqslant g_+(r)\}$ между этими графиками по правилу $(k,0)\sim(k+\tau,L)$ и обозначим через Π_h результат этой склейки (это будет область в цилиндре $\mathbb{R}\times(\mathbb{R}/L\mathbb{Z})$, гомеоморфная цилиндру вида $[0,1]\times S^1$). Далее разобьем "цилиндрическую" область Π_h на горизонтальные слои вида $\Pi_h\cap\{k=\mathrm{const}\}$ и стянем каждый из них в точку. В полученном графе рассмотрим все ребра, которые соответствуют нестягиваемым на цилиндре слоям (как нетрудно показать, количество таких ребер может быть только 0 или 1), и заменим каждое из этих ребер на пару ребер с общими началом и концом. Наконец, каждой свободной вершине полученного графа сопоставим 3-атом A, нижней и верхней вершинам упомянутого выше двукратного ребра сопоставим 3-атомы

В случае сферы [9] область Π_h была плоской.

$P_{-\dots-}\times S^1$ и $P_{+\dots+}\times S^1$ соответственно. Всем остальным вершинам, расположенным выше 3-атома $P_{+\dots+}\times S^1$, сопоставим 3-атомы $V_{+\dots+}\times S^1$, а расположенным ниже 3-атома $P_{-\dots-}\times S^1$ — 3-атомы $V_{-\dots-}\times S^1$. При этом сложность атома $V_{+\dots+}\times S^1$ (или $P_{+\dots+}\times S^1$) равна количеству ребер, выходящих из соответствующей вершины; аналогично сложность атома $V_{-\dots-}\times S^1$ (или $P_{-\dots-}\times S^1$) равна количеству ребер, входящих в соответствующую вершину.

Доказательство. Докажем первое утверждение теоремы 3. Согласно доказательству пункта 1 теоремы [9, теорема 4.2], имеем $Q_h^3\cong STM$. В случае $M=T^2$ получаем $Q_h^3\cong STT^2\cong T^3$.

Для доказательства второго утверждения теоремы представим изоэнергетическое многообразие Q_h^3 как прямое произведение окружности на трансверсальное сечение

$$Q_h^3\cap\{\varphi=\mathrm{const}\}=\{K=k_\pm(p_r,r):(p_r,r)\in\mathbb{R}\times[0,L],\ \varphi=\mathrm{const}\}/\sim,\qquad(2)$$

где $k_\pm(p_r,r)=\Lambda(r)\pm\sqrt{2h-p_r^2}f(r)$, при этом “боковые стороны” графиков функций $k_\pm(p_r,r)$ в пространстве (p_r,k,r) склеиваются в торическую поверхность по правилу $(p_r,k,0)\sim$ $\sim(p_r,k+\tau,L)$ ввиду свойства эквивариантности

$$k_\pm(p_r,r+L)=k_\pm(p_r,r)+\tau.$$

Доказательство второго утверждения теоремы почти полностью повторяет доказательство пункта 2 теоремы [9, теорема 4.2], но со следующим отличием: в системе $T(f,\Lambda)$ на торе в дополнение к трем описанным в доказательстве леммы [9, лемма 4.5] случаям (точка, окружность, цепь окружностей) линия уровня функции Морса $K\bmod\tau$ на трансверсальном сечении (2) может быть также замкнутой цепью окружностей. Последний вариант реализует 2-атом $P_{\sigma_1\dots\sigma_m}$. Поэтому в молекуле Фоменко встречаются только 3-атомы вида A, $V=V_{\sigma_1\dots\sigma_m}\times S^1$ и $P=P_{\sigma_1\dots\sigma_m}\times S^1$.

Рассмотрим “цилиндрическую” область Π_h из замечания 16 (d). Заметим, что $g_\pm(r)=$ $=k_\pm(0,r)$ (см. [9, формула (4.1)]), поэтому склейка из определения Π_h согласована со свойством эквивариантности

$$g_\pm(r+L)=g_\pm(r)+\tau.$$

Рассмотрим координатную функцию $k\bmod\tau$ в цилиндре $(\mathbb{R}\times[0,L])/\sim$. Пусть W — граф Риба ограничения этой функции на “цилиндрическую” область Π_h.

В Π_h рассмотрим все нестягиваемые по цилиндру слои $\Pi_h\cap\{k\bmod\tau=\mathrm{const}\}$ (они существуют только в случае точного магнитного геодезического потока при $h\geqslant h_0$, их объединение C гомеоморфно цилиндру $[0,1]\times S^1$), и заменим этот цилиндр C на объединение двух экземпляров этого цилиндра C, склеенных по основаниям. Результат этой операции обозначим через Π_h^* (это конечный клеточный комплекс). Отметим, что $\Pi_h^*\neq\Pi_h$, только если магнитный геодезический поток точный и $h>h_0$.

Функция $k\bmod\tau$ индуцирует на комплексе Π_h^* корректно определенную функцию, которую также будем обозначать через $k\bmod\tau$. Пусть W^* — граф Риба этой функции, $p:\Pi_h^*\to W^*$ — каноническая проекция, $p_\#:\pi_1(\Pi_h^*)\to\pi_1(W^*)$ — индуцированный ею эпиморфизм. Если магнитный геодезический поток является неточным или $h<h_0$, то $\Pi_h^*=\Pi_h$ есть “цилиндрическая” область, а все связные компоненты линий уровня функции $k\bmod\tau$ на Π_h являются отрезками (т.е. стягиваемы), поэтому эпиморфизм $p_\#$ инъективен (т.е. является изоморфизмом), откуда $\pi_1(W^*)=\pi_1(W)\cong\pi_1(\Pi_h)\cong\mathbb{Z}$, значит граф Риба $W^*=W$ имеет единственный цикл. Если магнитный геодезический поток является точным и $h=h_0$, то $\Pi_h^*=\Pi_h$ гомеоморфна цилиндру и все связные компоненты линий уровня функции k на этом цилиндре являются отрезками (т.е. стягиваемы), за исключением линии уровня $(\{k_0\}\times[0,L])/\sim$, являющейся окружностью и деформационным ретрактом цилиндра Π_h, поэтому проекция этой окружности в граф Риба W является вершиной этого графа и его деформационным ретрактом, откуда сразу получаем, что граф Риба $W^*=W$ является деревом.

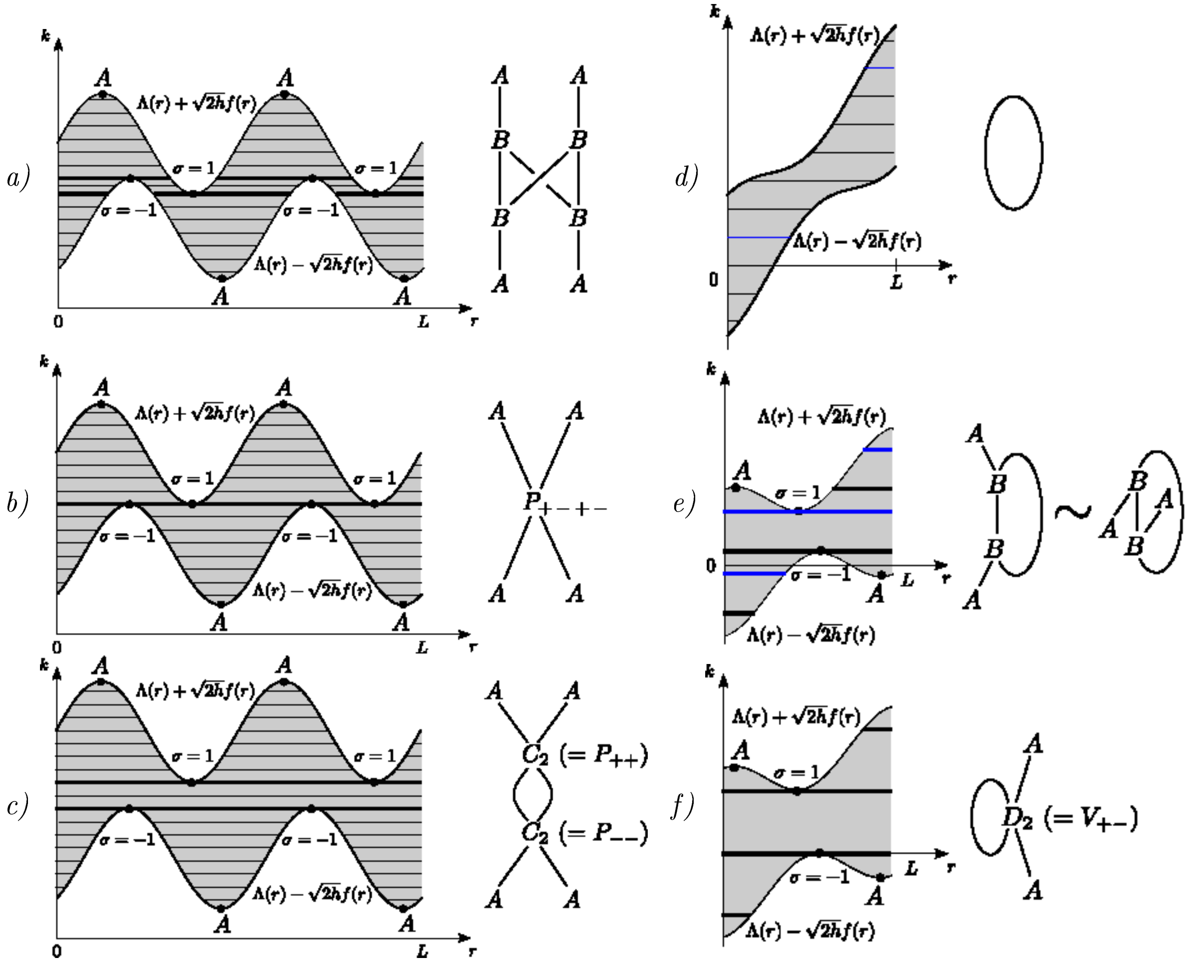


Рис. 3: Области Π_h в цилиндре $\{(k,r)\}/\sim$ и молекулы Фоменко на уровне энергии $h>0$ для точного (a, b, c) и неточного (d, e, f) магнитных геодезических потоков на торе (примеры): *a)* $0<h<h_0$; *b)* $h=h_0$; *c)* $h>h_0$; *d)* $0<h<h_c$; *e)* $h>h_c$, $h\notin\{h_1,h_2,\dots\}$; *f)* $h\in\{h_1,h_2,\dots\}$

Для завершения доказательства утверждений (i)—(iv) заметим, что в случае точного магнитного потока уровень энергии h_0 обладает следующими свойствами:

(1) $\min\limits_{r\in[0,L]} g_+(r) < \max\limits_{r\in[0,L]} g_-(r)$ при $h<h_0$,

(2) $\min\limits_{r\in[0,L]} g_+(r) = \max\limits_{r\in[0,L]} g_-(r) = k_0$ при $h=h_0$,

(3) $\kappa^+ := \min\limits_{r\in[0,L]} g_+(r) > \max\limits_{r\in[0,L]} g_-(r) =: \kappa^-$ при $h>h_0$.

Поэтому при $h<h_0$ в молекуле Фоменко 3-атомов P нет, т.е. верно (i). Аналогично, в случае $h=h_0$ на уровнях $k\neq k_0$ функции K нет 3-атомов P, а на уровне $k=k_0$ находятся одновременно точки минимума функции $g_+(r)$ и точки максимума функции $g_-(r)$, т.е. соответствующий 2-атом имеет вид $P_{\sigma_1\dots\sigma_m}$, при этом среди знаков $\sigma_1,\dots,\sigma_m$ есть различные. Последнее означает, что такой 2-атом отличен от $P_{+\dots+}$ и $P_{-\dots-}$. Свойство (ii) доказано.

Если выполнено либо $h>h_0$, либо $h=h_0$ и $k\neq k_0$, то на уровне $K=k$, которому отвечает локальный минимум функции $g_+(r)$ (соответственно локальный максимум функции $g_-(r)$), все знаки σ_i положительны и равны 1 (соответственно отрицательны и равны -1), т.е.

наблюдается атом $V_{+\dots+}$ или $P_{+\dots+}$ (соответственно $V_{-\dots-}$ или $P_{-\dots-}$). При этом атом $P_{+\dots+}$ (соответственно $P_{-\dots-}$) отвечает глобальному минимуму функции g_+ (соответственно глобальному максимуму функции g_-). Если $h > h_0$, то все связные компоненты линий уровня функции k в комплексе Π_h^* являются отрезками (т.е. стягиваемы), за исключением линий уровня, содержащихся в подмножестве $\Pi_h^* \cap \{\kappa^- \leqslant k \leqslant \kappa^+\}$. Поэтому это подмножество (гомеоморфное двумерному тору) является деформационным ретрактом комплекса Π_h^*, а проекция этого подмножества в граф Риба W^* (очевидно, состоящая из двух вершин и двух соединяющих их ребер) является деформационным ретрактом графа Риба W^*. Свойства (iii) и (iv) доказаны.

Из свойств (i)–(iv) и построения комплекса Π_h^* и получаем, что верен алгоритм построения молекулы Фоменко функции $K|_{Q_h^3}$. Теорема 3 доказана. □

5. Вычисление меток Фоменко – Цишанга

Теорема 3 и следующая теорема 4 описывают топологию слоения Лиувилля на неособом 3-мерном изоэнергетическом многообразии.

Теорема 4. *Если в магнитном геодезическом потоке $T(f, \Lambda)$ на торе пара функций f, Λ удовлетворяет условиям 1—3 из S2 и значение $h > 0$ отлично от абсцисс точек возврата кривой γ_1, то $K\big|_{Q_h^3}$ — функция Ботта, и имеет место следующее:*

1) *Молекула Фоменко функции Ботта $K\big|_{Q_h^3}$ имеет ровно один цикл при $h \neq h_0$ и является деревом при $h = h_0$. В ее вершинах степени 1 находятся 3-атомы A, а в других вершинах — седловые 3-атомы $V = V_{\sigma_1\dots\sigma_m} \times S^1$ или $P = P_{\sigma_1\dots\sigma_m} \times S^1$. При $h < h_0$ 3-атом P отсутствует, при $h = h_0$ — единствен и отличен от $P_{+\dots+} \times S^1$ и $P_{-\dots-} \times S^1$, а при $h > h_0$ таких 3-атомов ровно два, они соединены парой ребер и имеют вид $P_{+\dots+} \times S^1$ и $P_{-\dots-} \times S^1$.*

2) *Топологический инвариант Фоменко – Цишанга слоения Лиувилля на изоэнергетическом многообразии Q_h^3 (с ориентацией гиперболических орбит, заданной потоком $\operatorname{sgrad} K = \widetilde{\omega}^{-1} dK$) задается этой молекулой Фоменко со следующими метками:*

(i) *$r = 0$, $\varepsilon = \pm 1$ на ребрах вида $A - V$ и $A - P$, где знак "$-$" берется в случае, когда 3-атом A соответствует локальному минимуму функции $K\big|_{Q_h^3}$, а знак "$+$" — в случае, когда 3-атом A соответствует локальному максимуму функции $K\big|_{Q_h^3}$;*

(ii) *$r = \infty$, $\varepsilon = 1$ на ребрах вида $V - V'$, $P - P'$, $V - P$;*

(iii) *все седловые атомы образуют единственную семью с меткой $n = 0$.*

Доказательство. Первое утверждение уже доказано в теореме 3.

Докажем второе утверждение, следуя доказательству [9, теорема 4.8]. Зафиксируем граничный тор 3-атома (тор Лиувилля). Ему отвечают значения $H = h = \text{const}$, $K = k = \text{const}$. Определим на нем два цикла

$$\alpha_r = \left\{\pm\sqrt{2(h - U_k(r))},\ K = k,\ r \in [r_1, r_2],\ \varphi = \text{const}\right\},$$

$$\alpha_\varphi = \{p_r = \text{const},\, K = k,\, r = \text{const},\, \varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\},$$

где $[r_1, r_2]$ — проекция на координату r тора Лиувилля, т.е. соответствующей связной компоненты области возможного движения $R_{h,k} = \{(r \operatorname{mod} L, \varphi) : U_k(r) \leqslant h\}$ (здесь $R_{h,k}$ — проекция на конфигурационное многообразие интегрального многообразия, соответствующего значениям $H = h = \text{const}$, $K = k = \text{const}$), которая связана с "цилиндрической" областью Π_h из замечания 16 (d) соотношением $(\Pi_h \cap \{k = \text{const}\}) \times S^1 = \{k\} \times R_{h,k}$. Ориентация цикла α_φ задана направлением векторного поля $\operatorname{sgrad} K = \omega^{-1} dK = (0, 0, 0, 1)$, а направление обхода цикла α_r выбрано так, что возрастанию r соответствуют $p_r > 0$, а убыванию r соответствуют $p_r < 0$. Как и в случае сферы, $\widetilde{\omega} \wedge \widetilde{\omega}(v_{\alpha_r}, v_{\alpha_\varphi}, \operatorname{grad} K, \operatorname{grad} H) > 0$, см. [9, формула (4.3)]. Выразим допустимые базисы на граничных торах через циклы α_r, α_φ.

Важно отметить, что поведение системы на торе качественно отличается от системы на сфере, так как эффектов, сходных с “перебрасыванием” базисного цикла через полюс сферы, здесь не наблюдается. Это также является весомым аргументом в пользу прямого вычисления метки n.

Как и в случае сферы [9], на граничном торе 3-атома A допустимый базис выберем в виде $\lambda_A = -\alpha_r$, $\mu_A = \mp\alpha_\varphi$, а на граничных торах 3-атома V или P — в виде $\lambda_V = \alpha_\varphi$, $\mu_V = \mp\alpha_r$, при этом цикл на положительной границе 3-атома берется с верхним знаком, на отрицательной — с нижним знаком (знак $\mp$ в формуле для цикла μ_A — это знак $\sigma = \mathrm{sgn}(k'/h')$ критической окружности 3-атома [9, замеч. 4.6]).

Следовательно, на ребрах, соединяющих седловые 3-атомы, матрица склейки равна C_{VV}, на ориентированных ребрах вида $A \to V$ или $A \to P$ равна C_{AV}, а на ориентированных ребрах вида $V \to A$ или $P \to A$ равна C_{VA}, где $C_{VV} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $C_{AV} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $C_{VA} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Из вида этих матриц склейки находим метки r, ε на ребрах, а также получаем, что вклад любого ребра в метку n равен 0. Поэтому и метка n также нулевая. Теорема доказана. □

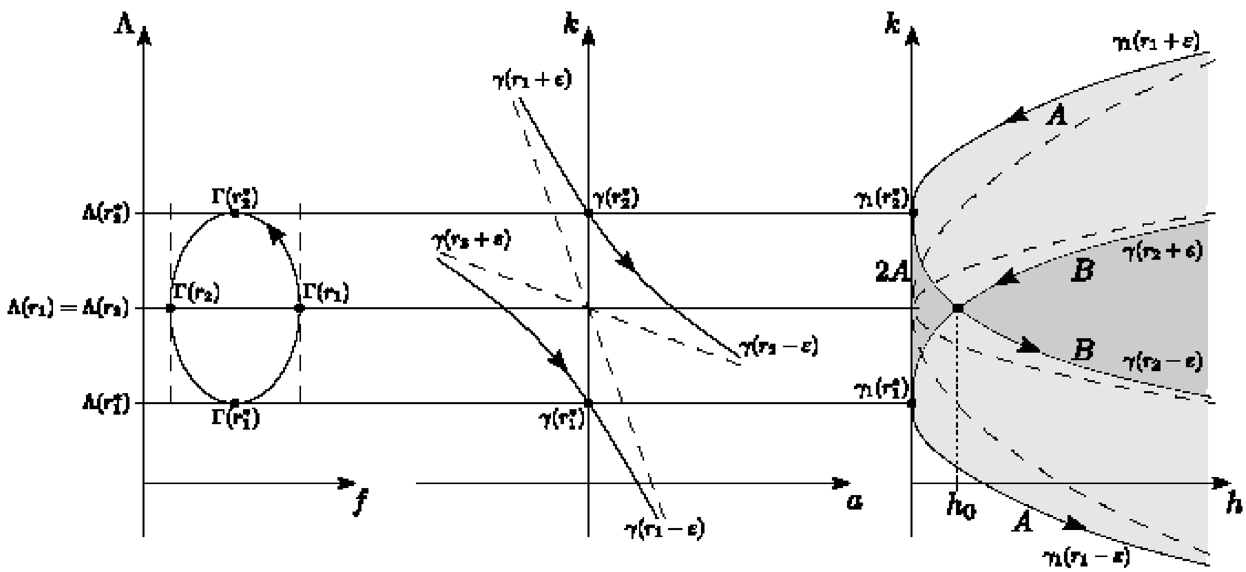


Рис. 4: Кривые $\Gamma = (f, \Lambda, 1)$, $\gamma = (a, -1, k)$ и $\gamma_1 = (h, k)$ для точного магнитного геодезического потока на торе (пример)

Замечание 17. (a) *На рис. 4 показан пример соответствующих кривых* $\Gamma = (f, \Lambda, 1)$, $\gamma = (a, -1, k)$ *и* $\gamma_1 = (h, k) = (a^2/2, k)$ *для точного магнитного геодезического потока на торе, при этом соответствующие проективные кривые* $(f : \Lambda : 1)$ *и* $(a : -1 : k)$ *проективно двойственны, как и в случае систем на сфере [9]. Бифуркационная диаграмма содержится в полуплоскости* $\{h \geqslant 0\}$ *и состоит из вертикального отрезка* $\gamma_2 \subset \{h = 0\}$ *и кривой* γ_1 *(ориентированной параметром* $r \in I \subset [0, L]$*), имеющей “двусторонние асимптоты–параболы”* $\{h = U_{\Lambda(r_i)}(r_i)\}$ *(показанные пунктиром). Все указанные асимптоты–параболы касаются оси* $\{h = 0\}$ *в своих вершинах. На рис. 4 метки* A, B *на дугах бифуркационной диаграммы описывают топологию слоения Лиувилля вблизи соответствующего 1-параметрического семейства невырожденных особых слоев (эллиптический 3-атом* A*, гиперболический 3-атом* B*). В плоскости* (h, k) *светло-серым цветом показаны области с одним тором Лиувилля в прообразе каждой точки; темно-серым цветом — с двумя торами Лиувилля в прообразе каждой точки. Молекулы Фоменко имеют вид* $A - B = B - A$ *для всех уровней энергии* $h > 0$*, кроме* h_0*, а для уровня* $h = h_0$ *— вид* $A - C_1 - A$*. Здесь* (h_0, k_0) *— точка пересечения двух дуг бифуркационной кривой* γ_1*,* $C_1 = P_{-+}$ *(рис. 2).*

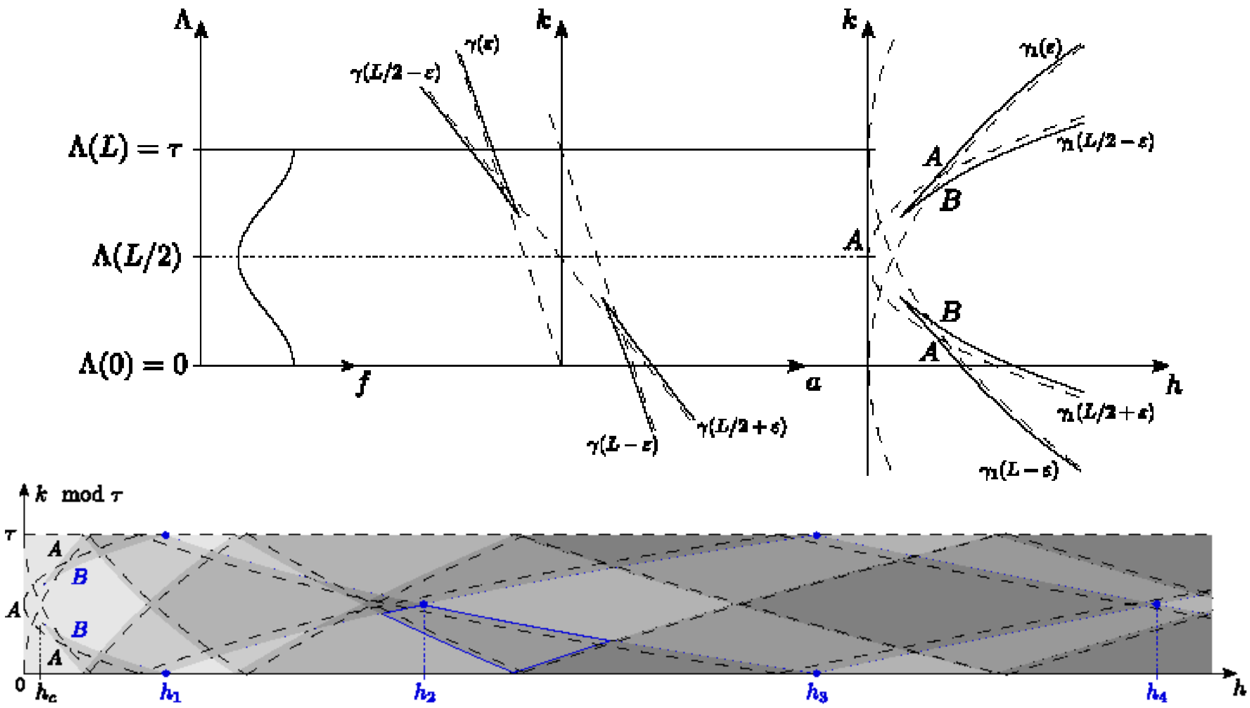


Рис. 5: Кривые $\Gamma = (f, \Lambda, 1)$, $\gamma = (a, -1, k)$, $\gamma_1 = (h, k)$ и бифуркационная диаграмма в цилиндре $(h, k \bmod \tau)$ для неточного магнитного геодезического потока на торе (пример)

(b) *На рис. 5 показан пример аналогичных кривых для магнитного поля, не являющегося точным. В этом случае плоская кривая* (f, Λ) *не является замкнутой, но индуцирует замкнутую кривую в цилиндре* $\mathbb{R} \times (\mathbb{R}/\tau\mathbb{Z})$. *Ее проективно двойственная кривая* $(a : -1 : k)$ *тоже незамкнута, но индуцирует замкнутую кривую* $(a, k \bmod \tau)$ *в этом цилиндре. Получаем бифуркационную диаграмму в полуцилиндре* $\mathbb{R}_+ \times (\mathbb{R}/\tau\mathbb{Z})$, *состоящую из кривой* $\gamma_1 = (h, k \bmod \tau) = (a^2/2, k \bmod \tau)$ *и граничной окружности* $\gamma_2 = \{0\} \times (\mathbb{R}/\tau\mathbb{Z})$ *полуцилиндра. В этом полуцилиндре светло-серым цветом показаны области с одним тором Лиувилля в прообразе каждой точки, а более темными цветами — с бо́льшими количествами торов Лиувилля в прообразе каждой точки. Молекула Фоменко является окружностью при* $0 < h < h_c$ *(рис. 3,d); для всех уровней энергии* $h > h_c$, *кроме* $h_1, h_2, \dots$, *она имеет вид как на рис. 3,e; для уровней энергии* $h \in \{h_1, h_2, \dots\}$ *она имеет вид как на рис. 3,f. Здесь* h_c *— это абсцисса обеих точек возврата бифуркационной кривой* γ_1, *уровни энергии* $h_1 < h_2 < \dots$ *— это абсциссы точек пересечения гиперболических дуг кривой* γ_1 *(в этих точках тангенсы углов наклона касательных имеют разные знаки),* $D_2 = V_{+-}$ *(см. первую часть теоремы 2 и замечание* 16 (c)). Неограниченность такой последовательности уровней энергии $h_1, h_2, \dots$ доказывается аналогично построению значения h_0 для точного магнитного поля (см. начало раздела 4).

Авторы приносят благодарность А.Т. Фоменко за постановку задачи, А.В. Болсинову и А.А. Ошемкову за ценные комментарии и обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Болсинов А. В., Фоменко А. Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. — Ижевск: Издательский дом «Удмуртский университет», 1999.

2. Кантонистова Е. О. Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем на поверхностях вращения в потенциальном поле // Матем. сб. 2016. Т. 207, №3. С. 47–92.

3. Тимонина Д. С. Лиувиллева классификация интегрируемых геодезических потоков в потенциальном поле на двумерных многообразиях вращения: торе и бутылке Клейна // Матем. сб. 2018. Т. 209, №11. С. 103–136.

4. Антонов Е. И., Козлов И. К. Лиувиллева классификация интегрируемых геодезических потоков на проективной плоскости в потенциальном поле // Чебышевский сборник. 2020. Т. 21, №2. С. 10–25.

5. Kozlov I., Oshemkov A. Integrable systems with linear periodic integral for the Lie algebra $e(3)$ // Lobachevskii J. Math. 2017. Vol. 38. P. 1014–1026.

6. Кудрявцева Е. А., Ошемков А. А. Бифуркации интегрируемых механических систем с магнитным полем на поверхностях вращения // Чебышевский сборник. 2020. Т. 21, №2. С. 244–265.

7. Фоменко А. Т. Топология поверхностей постоянной энергии интегрируемых гамильтоновых систем и препятствия к интегрируемости // Изв. АН СССР. Серия матем. 1986. Т. 50, №6. С. 1276–1307.

8. Фоменко А. Т. Теория Морса интегрируемых гамильтоновых систем // Доклады АН СССР. 1986. Т. 287, №5. С. 1071–1075.

9. Kobtsev I. F., Kudryavtseva E. A. Bifurcations of magnetic geodesic flows on surfaces of revolution // Russian Journal of Mathematical Physics (in print).

10. Фоменко А. Т., Цишанг Х. О топологии трехмерных многообразий, возникающих в гамильтоновой механике // Доклады АН СССР. 1987. Т. 294, №2. С. 283–287.

11. Фоменко А. Т. Топологические инварианты гамильтоновых систем, интегрируемых по Лиувиллю // Функц. анализ и его прил. 1988. Т. 22, №4. С. 38–51.

12. Фоменко А. Т., Цишанг Х. Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы // Изв. АН СССР. 1990. Т. 54, №3. С. 546–575.

13. Ведюшкина В. В., Пустовойтов С. Е. Классификация слоений Лиувилля интегрируемых топологических биллиардов в магнитном поле // Матем. сб. 2023. Т. 214, №2. С. 23–57.

14. Болсинов А. В., Рихтер П., Фоменко А. Т. Метод круговых молекул и топология волчка Ковалевской // Матем. сб. 2000. Т. 191, №2. С. 3–42.

15. Efstathiou K., Giacobbe A. The topology associated with cusp singular points // Nonlinearity. 2012. V. 25. P. 3409–3422.

16. Bolsinov A. V., Guglielmi L., Kudryavtseva E. A. Symplectic invariants for parabolic orbits and cusp singularities of integrable systems with two degrees of freedom // Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 2018. V. 376, №2131. 20170424.

17. Lerman L. M., Umanskii Ya. L. The structure of a Poisson action of R^2 on a four-dimensional symplectic manifold. I // Selecta Math. Sov. 1987 (transl. from Russian preprint of 1981). V. 6. P. 365–396.

18. Lerman L. M., Umanskii Ya. L. Classification of four-dimensional integrable Hamiltonian systems and Poisson actions of R^2 in extended neighborhoods of simple singular points. I // Russian Acad. Sci. Sb. Math. 1994. V. 77, №2. P. 511–542.

19. Kudryavtseva E., Martynchuk N. Existence of a smooth Hamiltonian circle action near parabolic orbits and cuspidal tori // Regular and Chaotic Dynamics. 2021. V. 26, №6. P. 732–741.

20. Kudryavtseva E. A. Hidden toric symmetry and structural stability of singularities in integrable systems // Europ. J. Math. 2022. V. 8. P. 1487–1549.

REFERENCES

1. Bolsinov, A. V. & Fomenko, A. T. 2004, Integrable Hamiltonian systems: geometry, topology, classification, Chapman & Hall / CRC, Boca Raton, London, N.Y., Washington.

2. Kantonistova, E. O. 2016, "Topological classification of integrable Hamiltonian systems in a potential field on surfaces of revolution", *Sb. Math.*, vol. 207, no. 3, pp. 358–399.

3. Timonina, D. S. 2018, "Liouville classification of integrable geodesic flows in a potential field on two-dimensional manifolds of revolution: the torus and the Klein bottle", *Sb. Math.*, vol. 209, no. 11, pp. 1644–1676.

4. Antonov, E. I. & Kozlov, I. K. 2020, "Liouville classification of integrable geodesic flows on a projective plane in potential field", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 2, pp. 10–25.

5. Kozlov, I. & Oshemkov, A. 2017, "Integrable systems with linear periodic integral for the Lie algebra $e(3)$", *Lobachevskii J. Math.*, vol. 38, pp. 1014–1026. https://doi.org/10.1134/S1995080217060063

6. Kudryavtseva, E. A. & Oshemkov, A. A. 2020, "Bifurcations of integrable mechanival systems with magnetic field on surfaces of revolution", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 2, pp. 244–265.

7. Fomenko, A. T. 1987, "The topology of surfaces of constant energy in integrable Hamiltonian systems, and obstructions to integrability", *Math. USSR-Izv.*, vol. 29, no. 3, pp. 629–658.

8. Fomenko, A. T. 1986. "Morse theory of integrable Hamiltonian systems", *Soviet Math. Dokl.*, vol. 33, no. 2, pp. 502–506.

9. Kobtsev, I. F. & Kudryavtseva, E. A. 2024, "Bifurcations of magnetic geodesic flows on surfaces of revolution", *Russian Journal of Mathematical Physics* (in print).

10. Fomenko, A. T. & Zieschang, H. 1987, "On the topology of the three-dimensional manifolds arising in Hamiltonian mechanics", *Soviet Math. Dokl.*, vol. 35, no. 2, pp. 520–534.

11. Fomenko, A. T. 1988, "Topological invariants of Liouville integrable Hamiltonian systems", *Funct. Anal. Appl.*, vol. 22, no. 4, pp. 286–296.

12. Fomenko, A. T. & Zieschang, H. 1991, "A topological invariant and a criterion for the equivalence of integrable Hamiltonian systems with two degrees of freedom", *Math.USSR Izv.*, vol. 36, no. 3, pp. 567–596.

13. Vedyushkina, V. V. & Pustovoitov, S. E. 2023, "Classification of Liouville foliations of integrable topological billiards in magnetic fields", *Sb. Math.*, vol. 214, no. 2, pp. 166–196.

14. Bolsinov, A. V., Richter, P. H. & Fomenko, A. T. 2000, "The method of loop molecules and the topology of the Kovalevskaya top", *Sb. Math.*, vol. 191, no. 2, pp. 151–188.

15. Efstathiou, K. & Giacobbe, A. 2012, "The topology associated with cusp singular points", *Nonlinearity*, vol. 25, pp. 3409–3422.

16. Bolsinov, A. V., Guglielmi, L. & Kudryavtseva, E. A. 2018, "Symplectic invariants for parabolic orbits and cusp singularities of integrable systems with two degrees of freedom", *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 376, no. 2131, 20170424.

17. Lerman, L. M. & Umanskii, Ya. L. 1987, "The structure of a Poisson action of R^2 on a four-dimensional symplectic manifold. I", *Selecta Math. Sov.* (transl. from Russian preprint of 1981), vol. 6, pp. 365–396.

18. Lerman, L. M. & Umanskii, Ya. L. 1994, "Classification of four-dimensional integrable Hamiltonian systems and Poisson actions of R^2 in extended neighborhoods of simple singular points. I", *Russian Acad. Sci. Sb. Math.*, vol. 77, no. 2, pp. 511–542.

19. Kudryavtseva, E. & Martynchuk, N. 2021, "Existence of a smooth Hamiltonian circle action near parabolic orbits and cuspidal tori", *Regular and Chaotic Dynamics*, vol. 26, no. 6, pp. 732–741.

20. Kudryavtseva, E. A. 2022, "Hidden toric symmetry and structural stability of singularities in integrable systems", *Europ. J. Math.*, vol. 8, pp. 1487–1549.

Получено: 13.01.2025
Принято в печать: 07.04.2025

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 26. Выпуск 2.

УДК 514.747.2 DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-2-141-159

Классификация неразрешимых алгебр Ли с четырехмерными орбитами коприсоединенного представления

Ф. И. Лобзин

Лобзин Фёдор Игоревич — МГУ имени М. В. Ломоносова; Московский Центр фундаментальной и прикладной математики (г. Москва).
e-mail: fiadat@mail.ru

Аннотация

В работе представлена классификация алгебр Ли с четырехмерными орбитами коприсоединенного представления для алгебр Ли, изоморфных полупрямой сумме нетривиальной полупростой алгебры Ли и ненулевого разрешимого идеала.

Ключевые слова: скобка Пуассона, алгебра Ли, коприсоединенное представление, интегрируемые системы.

Библиография: 14 названий.

Для цитирования:
Лобзин Ф.И. Классификация неразрешимых алгебр Ли с четырехмерными орбитами коприсоединенного представления // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 2, с. 141–159.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 26. No. 2.

UDC 514.747.2 DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-2-141-159

Classification of unsolvable Lie algebras with four-dimensional orbits of coadjoint representation

F. I. Lobzin

Lobzin Feodor Igorevich — Lomonosov Moscow State University; Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics (Moscow).
e-mail: fiadat@mail.ru

Abstract

The paper presents a classification of Lie algebras with four-dimensional coadjoint orbits for Lie algebras that are isomorphic to a semidirect sum of a nontrivial semisimple Lie algebra and a nonzero solvable ideal.

Keywords: Poisson bracket, Lie algebra, coadjoint representation, integrable systems.

Bibliography: 14 titles.

For citation:
Lobzin, F.I. 2025, “Classification of unsolvable Lie algebras with four-dimensional orbits of coadjoint representation”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 2, pp. 141–159.

Работа выполнена в МГУ имени М. В. Ломоносова при поддержке гранта Российского научного фонда № 24-21-00450 https://rscf.ru/project/24-21-00450/ Автор является стипендиатом фонда БАЗИС.

1. Введение

Важнейшим примером пуассонова многообразия является аффинное пространство Π с заданным на нем тензорным полем π^{ij}, удовлетворяющим свойствам

$$\pi^{jk}(x) = -\pi^{kj}(x),$$

$$\pi^{jk}\partial_k\pi^{lm} + \pi^{lk}\partial_k\pi^{mj} + \pi^{mk}\partial_k\pi^{jl} = 0.$$

Тензорное поле с такими свойствами называется тензором Пуассона.

Простейшим примером такого тензора является тензор, не зависящий от координат, однако изучение свойств подобного пуассонова многообразия сводится к простым задачам линейной алгебры. Следующим по сложности и важным примером является тензор Пуассона, линейно зависящий от координат x^k на Π:

$$\pi^{ij} = c_k^{ij}x^k. \tag{1}$$

Тогда для тензора c_k^{ij} условия, выписанные ранее, переписываются в виде

$$c_k^{ij} = -c_k^{ji},$$

$$c_e^{ad}c_d^{bc} + c_e^{bd}c_d^{ca} + c_e^{cd}c_d^{ab} = 0.$$

Отсюда видно, что любую линейную пуассонову структуру можно интерпретировать как тензор Пуассона на $\mathfrak{g}^*$ — пространстве, сопряженном некоторой алгебре Ли $\mathfrak{g}$ со структурными константами из формулы (1).

Такой подход рассмотрен, например, в книге В. И. Арнольда [1]. Симплектические слои такого пуассонова многообразия совпадают с орбитами коприсоединенного представления. Иными словами, механическая система с n степенями свободы при таком подходе описывается алгеброй Ли, у которой орбиты коприсоединенного представления общего положения имеют размерность $2n$. Этот факт вызывает интерес к построению алгебр Ли с орбитами определенных размерностей, их классификации и изучению свойств получившихся интегрируемых систем.

Простейший случай среди интегрируемых систем — это системы с одной степенью свободы. Они моделируются алгебрами Ли, у которых орбиты коприсоединенного представления общего положения двумерные. Полная классификация таких алгебр Ли проведена в [2], где также приводятся ссылки на работы, посвященные конкретным интегрируемым системам, соответствующим этим алгебрами. В работе [3] изучена топология орбит общего положения в алгебрах из списка основной теоремы в [2].

Настоящая работа посвящена следующему по сложности и важному случаю интегрируемых систем с двумя степенями свободы. Такие системы моделируются алгебрами Ли с четырехмерными орбитами коприсоединенного представления общего положения. Полная классификация таких алгебр Ли может быть полезна для решения различных задач теории интегрируемых систем, например, для построения полных бикоммутативных наборов многочленов и проверки обобщенной гипотезы Мищенко–Фоменко, сформулированной в [4], или для построения геодезических потоков на орбитах коприсоединенного представления с использованием конструкции, предложенной в [5]. В частности, в работе [6] рассматриваются примеры алгебр Ли с двумерными и четырехмерными орбитами коприсоединенного представления с рациональными инвариантами в контексте конструкции из [5].

Результаты о классификации алгебр Ли с четырехмерными орбитами коприсоединенного представления общего положения, полученные автором, основаны на известной теореме Леви, согласно которой любая алгебра изоморфна полупрямой сумме полупростой алгебры и разрешимого идеала. В данной статье рассматривается случай полупрямой суммы нетривиальной полупростой алгебры с некоторым разрешимым идеалом. Для завершения классификации остается рассмотреть случай разрешимых алгебр Ли, который будет разобран в последующих работах автора.

2. Постановка задачи

Пусть $\mathfrak{g}$ — конечномерная алгебра Ли над полем нулевой характеристики со структурными константами c_{ij}^k, $\mathcal{G}$ — ее группа Ли, $\mathfrak{g}^*$ — пространство линейных функционалов над $\mathfrak{g}$, а $\mathcal{A} = c_{ij}^k x_k$ — тензорное поле на $\mathfrak{g}^*$, зависящее от координат x_i, которое мы будем называть тензором Пуассона–Ли для алгебры $\mathfrak{g}$. Хорошо известно, что орбиты Ad^* (коприсоединенного представления группы $\mathcal{G}$ на пространстве $\mathfrak{g}^*$) являются симплектическими слоями пуассонова многообразия $(\mathfrak{g}^*, \mathcal{A})$. На практике оказывается удобно пользоваться следующим известным фактом.

Предложение 1. *Размерность орбиты коприсоединенного представления общего положения равна* $\max_{x\in\mathfrak{g}^*} \operatorname{rank}(\mathcal{A}(x))$.

Для дальнейших рассуждений будем использовать следующую формулировку известной теоремы Леви.

Теорема 1 (Леви). *Пусть $\mathfrak{g}$ — некоторая алгебра Ли, тогда возможны только следующие три случая:*

- *$\mathfrak{g}$ полупроста,*
- *$\mathfrak{g}$ изоморфна $\mathfrak{s} +_\varphi \mathfrak{h}$ — полупрямой сумме нетривиальной полупростой алгебры и разрешимого идеала,*
- *$\mathfrak{g}$ разрешима.*

Замечание 18. *Здесь и далее тривиальной полупростой алгеброй мы будем считать одномерную алгебру Ли или алгебру Ли, состоящую из* 0.

Размерности орбит общего положения Ad^* полупростых алгебр Ли фактически выписаны, например, в [4]. Поэтому нетривиальными, в контексте классификации алгебр с четырехмерными орбитами Ad^* общего положения, являются второй и третий случаи. Данная статья посвящена классификации алгебр Ли с четырехмерными орбитами коприсоединенного представления, относящихся ко второму случаю.

В контексте интегрируемых систем нам интересны в первую очередь вещественные алгебры Ли. Приведем основной результат из работы [2], который сформулирован там для вещественных алгебр Ли.

Теорема 2 ([2]). *С точностью до прямой суммы с центром произвольной размерности существуют одна бесконечная серия и шесть исключительных алгебр Ли над полем действительных чисел, размерность орбит коприсоединенного представления общего положения которых равна* 2*:*

1) *бесконечная серия — полупрямые суммы вида* $\mathbb{R} +_\varphi \mathbb{R}^n$*;*
2) *трехмерная простая алгебра Ли* $so(3)$*;*
3) *трехмерная простая алгебра Ли* $sl(2)$*;*

4) *четырехмерная разрешимая алгебра Ли $A_{4,8}$, которая в подходящем базисе e_i задается коммутационными соотношениями (указаны только ненулевые)*

$$[e_2, e_3] = e_1, \quad [e_2, e_4] = e_2, \quad [e_3, e_4] = -e_3;$$

5) *четырехмерная разрешимая алгебра Ли $A_{4,10}$, которая в подходящем базисе e_i задается коммутационными соотношениями (указаны только ненулевые)*

$$[e_2, e_3] = e_1, \quad [e_2, e_4] = -e_3, \quad [e_3, e_4] = e_2;$$

6) *пятимерная разрешимая алгебра Ли $A_{5,3}$, которая в подходящем базисе e_i задается коммутационными соотношениями (указаны только ненулевые)*

$$[e_3, e_4] = e_5, \quad [e_3, e_5] = e_1, \quad [e_4, e_5] = e_3;$$

7) *шестимерная нильпотентная алгебра Ли $A_{6,3}$, которая в подходящем базисе e_i задается коммутационными соотношениями (указаны только ненулевые)*

$$[e_1, e_2] = e_6, \quad [e_1, e_3] = e_4, \quad [e_2, e_3] = e_5.$$

Основную теорему 3 в этой работе мы докажем над полем комплексных чисел. Это сделано, в первую очередь, для удобства записи и рассуждений. Полную же классификацию для вещественного случая мы получим позже при помощи следующего утверждения.

Предложение 2. *Пусть $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$ и $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ — алгебры Ли над полями $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ соответственно, такие что их структурные константы совпадают как элементы поля $\mathbb{R}$. Тогда размерности их орбит общего положения относительно коприсоединенного представления равны.*

Доказательство. Согласно предложению 1 нам необходимо доказать равенство

$$\max_{x \in (\mathfrak{g}^{\mathbb{R}})^*} \operatorname{rank}(\mathcal{A}^{\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}}(x)) = \max_{x \in (\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})^*} \operatorname{rank}(\mathcal{A}^{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}}(x)),$$

которое следует из того, что у вещественной матрицы ранг над полем вещественных и комплексных чисел один и тот же. $\square$

Классификация будет выполнена с точностью до изоморфизма. Благодаря предложению 2 оказывается возможным изучать этот вопрос над полем комплексных чисел. Поэтому далее, если не указано иного, все алгебры будут пониматься как алгебры над полем комплексных чисел. Чтобы получить полную классификацию вещественных алгебр с орбитами коприсоединенного представления общего положения размерности 4, будет необходимо классифицировать все вещественные формы комплексных алгебр, являющихся представителями классов изоморфности. Классификации вещественных алгебр с орбитами коприсоединенного представления общего положения размерности 4 посвящена теорема 5.

3. Основной результат

Сформулируем, наконец, основной результат этой статьи.

Теорема 3. *Пусть у некоторой комплексной алгебры Ли, представимой в виде полупрямой суммы $\mathfrak{s} +_{\varphi} \mathfrak{h}$, где $\mathfrak{s}$ — нетривиальная полупростая алгебра Ли, а $\mathfrak{h}$ — разрешимый идеал, орбиты общего положения коприсоединенного представления четырехмерны. Тогда она изоморфна одной из следующих алгебр:*

- *прямая сумма полупростой и разрешимой алгебр с двумерными орбитами коприсоединенного представления общего положения;*
- *полупрямая сумма $sl(2) +_\varphi \mathbb{C}^2$ по стандартному представлению;*
- *полупрямая сумма $sl(2) +_\varphi \mathbb{C}^3$ по присоединенному представлению.*

Замечание 19. *Первый случай из этого списка фактически сводится к всевозможным попарным суммам комплексификаций алгебр из списка в теореме 2. Однако теорема 2 доказана только для вещественных алгебр Ли. Ее можно обобщить и для алгебр над некоторыми другими полями, что будет необходимо при работе с разрешимыми алгебрами Ли. Это обобщение автор планирует сделать в своей следующей работе, посвященной данной теме.*

Доказательство. Ясно, что прямая сумма алгебр с двумерными орбитами Ad^* общего положения будет алгеброй с четырехмерными орбитами Ad^* общего положения. Пусть теперь представление φ, связанное с полупрямой суммой $\mathfrak{s} +_\varphi \mathfrak{h}$, нетривиально. Разберем отдельно три варианта.

1. Разрешимый идеал $\mathfrak{h}$ коммутативен и размерность орбит Ad^* подалгебры $\mathfrak{s}$ общего положения равна 2. Рассмотрим сначала случай нетривиальной полупростой алгебры Ли $\mathfrak{s}$, размерность орбиты Ad^* общего положения которой равна 2. Согласно теореме 2 алгебра $\mathfrak{s}$ изоморфна либо $sl(2)$, либо $so(3)$. Хорошо известно, что над полем комплексных чисел эти алгебры изоморфны. Воспользуемся теперь классификацией всевозможных неприводимых представлений $sl(2)$.

Теорема 4 (см. [7]). *Пусть в $sl(2,\mathbb{F})$ над полем $\mathbb{F}$ выбран базис h, y, x, такой что $[h,y] = -2y$, $[h,x] = 2x$, $[x,y] = h$. Тогда для любого неприводимого представления φ алгебры Ли $sl(2,\mathbb{F})$ на векторном пространстве V существует базис $v_0,\dots,v_{n-1}$ в V, такой что*

$$[h,v_i] = (n-1-2i)v_i,\quad [y,v_i] = (i+1)v_{i+1},\quad [x,v_i] = (n-i)v_{i-1},\quad 0 \leqslant i \leqslant n-1,\quad v_{-1} = v_n = 0.$$

При помощи этой теоремы оказывается возможным доказать следующее утверждение, интересное не только в контексте поставленной задачи.

Предложение 3. *Размерность орбиты коприсоединенного представления общего положения алгебры $sl(2,\mathbb{C}) +_\varphi V$ (или $sl(2,\mathbb{R}) +_\varphi V$) равна*

- *четырем, если размерность V равна двум или трем;*
- *шести в остальных случаях.*

Доказательство. Тензор Пуассона–Ли для таких алгебр выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}^{sl(2)} & * \\ * & 0 \end{pmatrix},$$

где $\mathcal{A}^{sl(2)}$ — тензор Пуассона–Ли для $sl(2)$, а $*$ — матрица размера $3\times n$. Далее для явного описания тензоров Пуассона–Ли этих алгебр мы будем пользоваться теоремой 4. Из вида матрицы ясно, что их ранг не превышает 6. В статье [8] разобраны все случаи, когда представление раскладывается в сумму двумерных. Из этих результатов следует, что единственный случай среди полупрямых сумм $sl(2)$ с коммутативным идеалом по представлению, разложимому на двумерные, с четырехмерными орбитами Ad^* общего положения размерности 4 — это, когда $\dim V = 2$. В работе [8] рассматривались только вещественные алгебры, однако, согласно теореме 2, интересующий нас результат из [8] верен и над полем комплексных чисел. Пусть теперь размерность V равна 3. Существует только одно трехмерное представление алгебры Ли $sl(2)$, поэтому для доказательства утверждения предложения 3 в этом случае достаточно показать, что максимум по всем возможным ковекторам с координатами (h, y, x, v_0, v_1, v_2) ранга тензора Пуассона–Ли

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & -2y & 2x & 2v_0 & 0 & -2v_2 \\ 2y & 0 & -h & v_1 & 2v_2 & 0 \\ -2x & h & 0 & 0 & 2v_0 & v_1 \\ -2v_0 & -v_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2v_2 & -2v_0 & 0 & 0 & 0 \\ 2v_2 & 0 & -v_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

равен 4. Определитель $\mathcal{A}$ равен квадрату определителя подматрицы $\mathcal{A}'$, где

$$\mathcal{A}' = \begin{pmatrix} 2v_0 & 0 & -2v_2 \\ v_1 & 2v_2 & 0 \\ 0 & 2v_0 & v_1 \end{pmatrix}.$$

Определитель $\mathcal{A}'$ равен 0, а значит ранг $\mathcal{A}$ меньше 6. Покажем, что он равен 4. Рассмотрим минор, полученный вычеркиванием первой и четвертой строки и первого и четвертого столбца:

$$\det \begin{pmatrix} 0 & -h & 2v_2 & 0 \\ h & 0 & 2v_0 & v_1 \\ -2v_2 & -2v_0 & 0 & 0 \\ 0 & -v_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4v_1^2 v_2^2.$$

Пусть теперь размерность V равна $n > 3$ и представление φ неприводимо. Тогда для некоторого ковектора $(h, y, x, v_0, v_1 \dots, v_{n-1})$ тензор Пуассона–Ли будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{pmatrix} 0 & -2y & 2x & (n-1)v_0 & (n-3)v_1 & \dots & (n-1-2i)v_i & \dots & (2-n)v_{n-1} \\ 2y & 0 & -h & v_1 & 2v_2 & \dots & (i+1)v_{i+1} & \dots & 0 \\ -2x & h & 0 & 0 & (n-1)v_0 & \dots & (n-i)v_{i-1} & \dots & v_{n-2} \\ -(n-1)v_0 & -v_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ -(n-3)v_1 & -2v_2 & -(n-1)v_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ -(n-1-2i)v_i & -(i+1)v_{i+1} & -(n-i)v_{i-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ (n-2)v_{n-1} & 0 & -v_{n-2} & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Как уже говорилось ранее, ранг этого тензора меньше или равен 6. Для того чтобы показать, что максимум ранга этого тензора по всех ковекторам равен 6, рассмотрим этот тензор для ковектора вида $(0, 0, 0, 0, 1, 0, \dots, 0)$ и минор в нем, полученный вычеркиванием всех столбцов и строчек кроме первых шести. Этот минор будет равен $(n-2)^2(n-3)^2 v_1^6$, что и требовалось доказать.

Рассмотрим еще два частных случая, которые в дальнейшем помогут нам завершить доказательство предложения 3.

Пусть φ — прямая сумма одного трехмерного и одного двумерного представлений. Тогда тензор Пуассона–Ли для некоторого ковектора $(h, y, x, v_0^1, v_1^1, v_2^1, v_0^2, v_1^2)$ выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} 0 & -2y & 2x & 2v_0^1 & 0 & -2v_2^1 & v_0^2 & -v_1^2 \\ 2y & 0 & -h & v_1^1 & 2v_2^1 & 0 & v_1^2 & 0 \\ -2x & h & 0 & 0 & 2v_0^1 & v_1^1 & 0 & v_0^2 \\ -2v_0^1 & -v_1^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2v_2^1 & -2v_0^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2v_2^1 & 0 & -v_1^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -v_0^2 & -v_1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_1^2 & 0 & -v_0^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг этого тензора меньше или равен 6. Рассмотрим минор, полученный вычеркиванием четвертых и пятых столбцов и строчек. Этот минор равен $(-2v_2^1 v_1^2 v_0^2 + v_1^2 v_1^2 v_1^1)^2$, что не равно тождественно нулю, а значит, максимум ранга этого тензора по всех ковекторам равен 6.

Пусть φ — прямая сумма двух трехмерных представлений. Тензор Пуассона–Ли для некоторого ковектора $(h, y, x, v_0^1, v_1^1, v_2^1, v_0^2, v_1^2, v_2^2)$ выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} 0 & -2y & 2x & 2v_0^1 & 0 & -2v_2^1 & 2v_0^2 & 0 & -2v_2^2 \\ 2y & 0 & -h & v_1^1 & 2v_2^1 & 0 & v_1^2 & 2v_2^2 & 0 \\ -2x & h & 0 & 0 & 2v_0^1 & v_1^1 & 0 & 2v_0^2 & v_1^2 \\ -2v_0^1 & -v_1^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2v_2^1 & -2v_0^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2v_2^1 & 0 & -v_1^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2v_0^2 & -v_1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2v_2^2 & -2v_0^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2v_2^2 & 0 & -v_1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогично, рассмотрим в нем минор, полученный вычеркиванием четвертых, пятых и девятых столбцов и строчек. Этот минор равен $(-4v_1^2 v_2^1 v_0^2 + 4v_0^2 v_2^2 v_1^1)^2$, то есть он не равен тождественно нулю. Получается, что для почти всех ковекторов ранг этого тензора равен 6.

Если размерность V равна $n > 3$ и представление φ приводимо, то возможны следующие случаи:

(1) разложение представления φ на неприводимые представления содержит неприводимое представление размерности четыре или больше;

(2) разложение представления φ на неприводимые представления содержит хотя бы одно двумерное представление и хотя бы одно трехмерное представление;

(3) разложение представления φ на неприводимые представления содержит только трехмерные представления;

(4) разложение представления φ на неприводимые представления содержит только двумерные представления.

Если алгебра принадлежит первым трем типам (в смысле предыдущего списка), то она содержит в качестве подалгебры соответственно одну из трех подалгебр:

(1) $sl(2) +_\varphi V$, $\dim V > 3$ и φ неприводимо;

(2) $sl(2) +_\varphi V$, $\dim V = 5$ и φ раскладывается в прямую сумму двумерного и трехмерного представлений;

(3) $sl(2) +_\varphi V$, $\dim V = 6$ и φ раскладывается в прямую сумму двух трехмерных представлений.

Ясно, что размерность орбиты Ad^* общего положения у алгебры больше или равна, чем у ее подалгебры, и следовательно, размерность орбиты Ad^* общего положения алгебр первых трех типов равна 6. Как говорилось ранее, случай, когда все неприводимые представления в разложении φ двумерны, разобран в работе [8]. Предложение 3 доказано. □

2. Разрешимый идеал $\mathfrak{h}$ некоммутативен и размерность орбит Ad^* подалгебры $\mathfrak{s}$ общего положения равна 2. Для того, чтобы воспользоваться результатами, касающимися представлений $sl(2)$, докажем лемму.

Лемма 1. *Пусть $\mathfrak{s} +_\varphi \mathfrak{h}$ — полупрямая сумма по представлению φ, и пусть размерность орбиты общего положения действия Φ^* (сопряженного к Φ — представлению группы, соответствующему φ) равна k. Тогда размерность орбиты общего положения коприсоединенного представления алгебры $\mathfrak{s} +_\varphi \mathfrak{h}$ больше или равна $2k$.*

Доказательство. Размерность орбиты Ad^* общего положения для алгебры $\mathfrak{s} +_\varphi \mathfrak{h}$ равна максимуму по всем $z \in (\mathfrak{s} +_\varphi \mathfrak{h})^*$ из рангов матрицы соответствующего тензора Пуассона–Ли, который имеет вид

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}^{\mathfrak{s}} & \mathcal{B} \\ -\mathcal{B}^\top & \mathcal{A}^{\mathfrak{h}} \end{pmatrix}.$$

Максимум по всем $z \in (\mathfrak{s} +_\varphi \mathfrak{h})^*$ не меньше, чем максимум по всем функционалам z, равным нулю на подалгебре $\mathfrak{s}$, т.е. максимум из рангов матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathcal{B} \\ -\mathcal{B}^\top & \mathcal{A}^{\mathfrak{h}} \end{pmatrix},$$

а ранг этой матрицы не меньше ранга матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathcal{B} \\ -\mathcal{B}^\top & 0 \end{pmatrix},$$

который равен удвоенной размерности орбиты общего положения действия Φ^*, поскольку фактически в матрице $\mathcal{B}$ по строчкам записаны координаты векторов $\varphi^*(e_i)z$ (где e_i образуют базис в $\mathfrak{s}$), порождающих касательное пространство к орбите действия Φ^* в точке z. □

Нетрудно понять, что при доказательстве предложения 3 фактически показано, что размерность орбит Φ^* общего положения не меньше 3 во всех случаях, когда размерность представления φ больше 3. А значит, согласно лемме 1, нам необходимо разобрать только случаи, когда представление φ двумерно или трехмерно.

Предложение 4. *Не существует алгебры Ли $sl(2) +_\varphi \mathfrak{h}$, такой что представление φ неприводимое двумерное и идеал $\mathfrak{h}$ некоммутативен.*

Доказательство. Покажем, что из тождества Якоби следует коммутативность идеала $\mathfrak{h}$. Пусть v_0, v_1 из $\mathfrak{h}$ таковы, что, с одной стороны, представление φ действует на них по формулам из теоремы 4, а с другой стороны, $[v_0, v_1] = \alpha v_0 + \beta v_1$. Тогда

$$[h, [v_0, v_1]] + [v_1, [h, v_0]] + [v_0, [v_1, h]] = [h, \alpha v_0 + \beta v_1] + [v_1, v_0] + [v_0, v_1] = \alpha v_0 - \beta v_1 = 0,$$

откуда следует, что $\alpha = \beta = 0$ и идеал $\mathfrak{h}$ коммутативен. □

Для трехмерного представления φ уже существует алгебра вида $sl(2) +_\varphi \mathfrak{h}$ с некоммутативным идеалом.

Предложение 5. *Пусть алгебра Ли представима в виде $sl(2) +_\varphi \mathfrak{h}$, причем представление φ трехмерно, а идеал $\mathfrak{h}$ некоммутативен. Тогда идеал $\mathfrak{h} = \langle v_0, v_1, v_2\rangle$ задается коммутационными соотношениями $[v_0, v_1] = 2v_0$, $[v_1, v_2] = 2v_2$, $[v_0, v_2] = v_1$, и представление φ действует на $\mathfrak{h}$ по формулам из теоремы 4.*

Доказательство. Пусть $[v_i, v_j] = c_{ij}^k v_k$. Выпишем тождество Якоби:

$$[x,[v_0,v_1]]+[v_1,[x,v_0]]+[v_0,[v_1,x]] = [x, c_{01}^0 v_0 + c_{01}^1 v_1 + c_{01}^2 v_2] - 2[v_0,v_0] = \\ = 2c_{01}^1 v_0 + c_{01}^2 v_1 = 0 \Rightarrow c_{01}^1 = c_{01}^2 = 0.$$

Аналогично:

$$[y,[v_1,v_2]]+[v_2,[y,v_1]]+[v_1,[v_2,y]] = [y, c_{12}^0 v_0 + c_{12}^1 v_1 + c_{12}^2 v_2] + 2[v_2,v_2] = \\ = c_{12}^0 v_1 + 2c_{12}^1 v_2 = 0 \Rightarrow c_{12}^0 = c_{12}^1 = 0,$$

$$[h,[v_0,v_2]]+[v_2,[h,v_0]]+[v_0,[v_2,h]] = [h, c_{02}^0 v_0 + c_{02}^1 v_1 + c_{02}^2 v_2] + 2[v_2,v_0] + 2[v_0,v_2] = \\ = 2c_{02}^0 v_0 - 2c_{02}^2 v_2 = 0 \Rightarrow c_{02}^0 = c_{02}^2 = 0.$$

Получаем, что $[v_0, v_1] = c_{01}^0 v_0$, $[v_0, v_2] = c_{02}^1 v_1$, $[v_1, v_2] = c_{12}^2 v_2$. Вычислим значения $c_{01}^0, c_{02}^1, c_{12}^2$:

$$[x,[v_1,v_2]]+[v_2,[x,v_1]]+[v_1,[v_2,x]] = [x, c_{12}^2 v_2] + 2[v_2,v_0] = c_{12}^2 v_1 - 2c_{02}^1 v_1 = 0 \Rightarrow c_{12}^2 = 2c_{02}^1,$$
$$[x,[v_0,v_2]]+[v_2,[x,v_0]]+[v_0,[v_2,x]] = [x, c_{02}^1 v_1] - [v_0,v_1] = 2c_{02}^1 v_0 - c_{01}^0 v_0 = 0 \ \Rightarrow c_{01}^0 = 2c_{02}^1.$$

Отсюда получаем, что если $\mathfrak{h}$ некоммутативен, то с точностью до изоморфизма $c_{01}^0 = 2$, $c_{02}^1 = 1$, $c_{12}^2 = 2$. Проверим, наконец, тождество Якоби для оставшихся троек:

$$[y,[v_0,v_1]]+[v_1,[y,v_0]]+[v_0,[v_1,y]] = [y,2v_0] - 2[v_0,v_2] = 2v_1 - 2v_1 = 0,$$
$$[y,[v_0,v_2]]+[v_2,[y,v_0]]+[v_0,[v_2,y]] = [y,v_1] + [v_2,v_1] = 2v_2 - 2v_2 = 0,$$
$$[h,[v_0,v_1]]+[v_1,[h,v_0]]+[v_0,[v_1,h]] = [h,2v_0] + 2[v_1,v_0] = 4v_0 - 4v_0 = 0,$$
$$[h,[v_1,v_2]]+[v_2,[h,v_1]]+[v_1,[v_2,h]] = [h,2v_2] + 2[v_1,v_2] = -4v_2 + 4v_2 = 0.$$

Предложение 5 доказано. □

Нетрудно заметить, что идеал $\mathfrak{h}$ из предыдущего предложения не является разрешимым, а значит алгебр вида $sl(2) +_\varphi \mathfrak{h}$ с орбитами Ad^* общего положения размерности 4 и с нетривиальным φ и некоммутативным $\mathfrak{h}$ не существует.

3. Размерность орбит Ad^* общего положения подалгебры $\mathfrak{s}$ равна 4.

Предложение 6. *Не существует алгебры Ли, представимой в виде суммы по нетривиальному представлению нетривиальной полупростой алгебры Ли с орбитами коприсоединенного представления общего положения размерности 4 и разрешимого идеала.*

Доказательство. Из результатов из статьи [4] следует, что над полем комплексных чисел существует только одна полупростая алгебра Ли с орбитами Ad^* общего положения размерности 4 и она изоморфна $sl(2) \oplus sl(2)$. Ясно, что в алгебре $(sl(2) \oplus sl(2)) +_\varphi \mathfrak{h}$ есть идеал, изоморфный полупрямой сумме $sl(2) +_{\varphi_1} \mathfrak{h}$ по нетривиальному представлению φ_1. Получаем, что алгебра $(sl(2) \oplus sl(2)) +_\varphi \mathfrak{h}$ изоморфна полупрямой сумме $sl(2) +_{\varphi_2} (sl(2) +_{\varphi_1} \mathfrak{h})$ и предложение следует из предложения 3 и леммы 1. □

Теорема 3 полностью доказана. □

4. Следствие из теоремы 3 для вещественных алгебр Ли

Основной практический интерес представляют интегрируемые системы, соответствующие вещественным алгебрам Ли. Этот раздел посвящен работе с вещественными формами комплексной алгебры $sl(2)$ и ее полупрямых сумм. Далее мы будем пользоваться общепринятыми обозначениями $sl(2,\mathbb{C})$ для комплексной алгебры и $sl(2,\mathbb{R})$ и $so(3,\mathbb{R})$ для вещественных алгебр. Докажем следствие из теоремы 3 для вещественных алгебр Ли.

Теорема 5. *Пусть у некоторой вещественной алгебры, представимой в виде полупрямой суммы $\mathfrak{s} +_\varphi \mathfrak{h}$, где $\mathfrak{s}$ — нетривиальная полупростая алгебра Ли, а $\mathfrak{h}$ — разрешимый идеал, орбиты общего положения коприсоединенного представления четырехмерны. Тогда она изоморфна одной из следующих алгебр:*

- *прямая сумма полупростой и разрешимой алгебры с двумерными орбитами коприсоединенного представления общего положения;*
- *полупрямая сумма $sl(2,\mathbb{R}) +_\varphi \mathbb{R}^2$ по стандартному представлению;*
- *полупрямая сумма $sl(2,\mathbb{R}) +_\varphi \mathbb{R}^3$ по присоединенному представлению;*
- *полупрямая сумма $so(3,\mathbb{R}) +_\varphi \mathbb{R}^3$ по стандартному трехмерному представлению.*

Доказательство. Из теоремы 2 следует, что список из теоремы 3 можно воспринимать как список комплексификаций всех вещественных алгебр Ли с орбитами общего положения Ad^* размерности 4. Иными словами, для доказательства этого утверждения достаточно рассмотреть всевозможные вещественные формы алгебр из списка в теореме 3. Вещественная форма прямой суммы алгебры Ли — это прямая сумма вещественных форм, следовательно, первый случай сводится к всевозможным прямым суммам алгебр из списка в теореме 2.

Разберемся теперь с оставшимися случаями. Пусть $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ — комплексная алгебра Ли, а $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$ — ее вещественная форма. Тогда из разложения $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}^{\mathbb{R}} \bigoplus i\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$ следует существование естественной инволюции σ, удовлетворяющей свойствам:

(1) $\sigma(\sigma(\xi)) = \xi$;

(2) $\sigma(\xi + \eta) = \sigma(\xi) + \sigma(\eta)$;

(3) $\sigma(\lambda\xi) = \overline{\lambda}\sigma(\xi)$, $\lambda \in \mathbb{C}$;

(4) $\sigma([\xi, \eta]) = [\sigma(\xi), \sigma(\eta)]$.

Более того, если определена инволюция алгебры $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, удовлетворяющая этим свойства, то по ней однозначно восстанавливается вещественная форма. Действительно, множество неподвижных точек инволюции σ замкнуто относительно сложения, умножения на вещественный скаляр и коммутации. Покажем единственность. Разложение $\xi = \frac{1}{2}(\xi + \sigma(\xi)) + i(\frac{1}{2i}(\xi - \sigma(\xi))$ единственно, так как если $\xi = \eta + i\theta$, то $\sigma(\xi) = \eta - i\theta$, откуда $\eta = \frac{1}{2}(\xi + \sigma(\xi))$ и $\theta = \frac{1}{2i}(\xi - \sigma(\xi)$. Таким образом, для классификации вещественных форм нам достаточно классифицировать все возможные инволюции σ.

В рассматриваемой ситуации верно следующее простое утверждение.

Лемма 2. *Пусть некоторая комплексная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ изоморфна полупрямой сумме $\mathfrak{s} +_\varphi \mathbb{C}^n$ полупростой алгебры $\mathfrak{s}$ и коммутативного идеала $\mathbb{C}^n$. Тогда для инволюции σ, удовлетворяющей свойствам 1-4, верно, что $\sigma(\mathfrak{s}) = \mathfrak{s}$ и $\sigma(\mathbb{C}^n) = \mathbb{C}^n$.* ■

Пусть алгебра изоморфна $sl(2,\mathbb{C}) +_\varphi \mathbb{C}^2$ $(sl(2,\mathbb{C}) +_\varphi \mathbb{C}^3)$. И пусть σ — отображение из этой алгебры в себя, удовлетворяющее свойствам 1–4, выписанным ранее. Из леммы 2 получаем, что в алгебре $sl(2,\mathbb{C}) +_\varphi \mathbb{C}^2$ $(sl(2,\mathbb{C}) +_\varphi \mathbb{C}^3)$ идеал $\mathbb{C}^2(\mathbb{C}^3)$ будет инвариантен относительно σ. Аналогично, из леммы 2 следует, что подалгебра $sl(2,\mathbb{C})$ инварианта относительно σ.

Изучим теперь, какие инволюции, удовлетворяющие свойствам 1-4, бывают на алгебре $sl(2,\mathbb{C})$. На самом деле, решение этой задачи известно в общем случае, однако мы проведем здесь эти рассуждения для рассматриваемого частного случая явно. Из свойств 2 и 4 инволюции σ получаем

$$-2\sigma(y) = \sigma([h,y]) = [\sigma(h),\sigma(y)], \qquad 2\sigma(x) = \sigma([h,x]) = [\sigma(h),\sigma(x)]. \tag{2}$$

Легко проверить, что полученные соотношения для $\sigma(h)$ в $sl(2,\mathbb{C})$ могут быть выполнены только если $\sigma(h) = ah$. Тогда из первого свойства инволюции σ следует, что $a = \pm 1$. Пусть для начала $a = 1$, тогда из равенств (2) получаем:

$$\begin{cases} \sigma(h) = h, \\ \sigma(x) = x, \\ \sigma(y) = y. \end{cases}$$

Иначе говоря, в этом случае инволюция задается естественным образом: $\sigma(\xi + i\eta) = \xi - i\eta$. Вещественная форма $sl(2,\mathbb{C})$ при такой инволюции изоморфна $sl(2,\mathbb{R})$. По предложению 3 получаем, что существуют два случая алгебр, представимых в виде $sl(2,\mathbb{R}) +_\varphi V$, с орбитами Ad^* общего положения размерности 4:

- полупрямая сумма $sl(2,\mathbb{R}) +_\varphi \mathbb{R}^2$ по стандартному представлению;
- полупрямая сумма $sl(2,\mathbb{R}) +_\varphi \mathbb{R}^3$ по присоединенному представлению.

Пусть теперь $a = -1$, тогда из равенств 2 получаем:

$$\begin{cases} \sigma(h) = -h, \\ \sigma(x) = y, \\ \sigma(y) = x. \end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что $\sigma([x,y]) = [\sigma(x),\sigma(y)]$. Распространим эту инволюцию на всю алгебру $sl(2,\mathbb{C})$ при помощи свойств 1–3. Множество неподвижных элементов относительно такой инволюции натянуто на ih, $\frac{x+y}{2}$, $i\frac{x-y}{2}$, и нетрудно проверить, что это векторное пространство над полем действительных чисел, с естественным ограничением коммутатора изоморфно $so(3,\mathbb{R})$.

Остается определить то, каким образом σ отображает коммутативный идеал. Хорошо известно, что не существует неприводимых четномерных представлений $so(3)$. Этот факт в рассматриваемом случае можно также доказать, если попытаться построить на $sl(2,\mathbb{C}) +_\varphi (\mathbb{C}^2)$ инволюцию с описанными свойствами.

Определим теперь действие инволюции σ на подпространстве $\mathbb{C}^3$ алгебры $so(3) +_\varphi (\mathbb{C}^3)$. Воспользуемся свойством 4 инволюции σ:

$$-[h,\sigma(v_1)] = [\sigma(h),\sigma(v_1)] = \sigma([h,v_1]) = 0,$$

$$[x,\sigma(v_2)] = [\sigma(y),\sigma(v_2)] = \sigma([y,v_2]) = 0,$$

$$[y,\sigma(v_0)] = [\sigma(x),\sigma(v_0)] = \sigma([x,v_0]) = 0.$$

Поскольку у элементов представления $\varphi(h)$, $\varphi(y)$, $\varphi(x)$ ядро определяется однозначно, получаем

$$\sigma(v_0) = \alpha v_2, \qquad \sigma(v_1) = \beta v_1, \qquad \sigma(v_2) = \gamma v_0.$$

Определим теперь значения α, β, γ:

$$\alpha v_1 = [x, \sigma(v_0)] = [\sigma(y), \sigma(v_0)] = \sigma([y, v_0]) = \sigma(v_1) = \beta v_1,$$

$$2\beta v_0 = [x, \sigma(v_1)] = [\sigma(y), \sigma(v_1)] = \sigma([y, v_1]) = 2\sigma(v_2) = 2\gamma v_0.$$

Получаем, что $\alpha = \beta = \gamma$, и из свойства $\sigma(\sigma(\xi)) = \xi$ следует, что $\alpha = \beta = \gamma = 1$ или $\alpha = \beta = \gamma = -1$. Убедимся, что выполняется свойство 4 инволюции σ:

$$2\alpha v_2 = [y, \sigma(v_1)] = [\sigma(x), \sigma(v_1)] = \sigma([x, v_1]) = 2\sigma(v_0) = 2\alpha v_2,$$

$$2\alpha v_1 = [y, \sigma(v_2)] = [\sigma(y), \sigma(v_2)] = \sigma([y, v_2]) = 2\sigma(v_2) = 2\alpha v_1,$$

$$2\alpha v_2 = [-h, \sigma(v_0)] = [\sigma(h), \sigma(v_0)] = \sigma([h, v_0]) = 2\sigma(v_0) = 2\alpha v_2,$$

$$-2\alpha v_0 = [-h, \sigma(v_2)] = [\sigma(h), \sigma(v_2)] = \sigma([h, v_2]) = -2\sigma(v_2) = -2\alpha v_0.$$

Итак, получается, что на базисных векторах алгебры $sl(2, \mathbb{C}) +_\varphi \mathbb{C}^3$ инволюция σ при $\alpha = -1$ может действовать только следующим образом:

$$\sigma(h) = -h,\ \sigma(y) = x,\ \sigma(x) = y,\ \sigma(v_0) = \alpha v_2,\ \sigma(v_1) = \alpha v_1,\ \sigma(v_2) = \alpha v_0,\ \alpha = \pm 1.$$

На всю алгебру $sl(2, \mathbb{C}) +_\varphi \mathbb{C}^3$ инволюция распространяется таким образом, чтобы удовлетворять первым трем свойствам. Множество неподвижных элементов относительно такой инволюции при $\alpha = 1$ натянуто на $ih, \frac{x+y}{2}, i\frac{x-y}{2}, v_1, v_0 + v_2, i(v_0 - v_2)$, а при $\alpha = -1$ натянуто на $ih, \frac{x+y}{2}, i\frac{x-y}{2}, iv_1, i(v_0 + v_2), -(v_0 - v_2)$. Если взять эти векторы в качестве базисных и рассмотреть это векторное пространство над полем действительных чисел, с естественным ограничением коммутатора оно будет изоморфно $so(3, \mathbb{R}) +_\varphi \mathbb{R}^3$, где сумма берется по стандартному представлению $so(3, \mathbb{R})$. $\square$

5. Свойства и приложения

Инварианты коприсоединенного представления и топология орбит.

Определение 1. *Функция $f : \mathfrak{g}^* \to \mathbb{C}$ называется функцией Казимира или* Ad^**-инвариантной функцией, если она постоянна на всех орбитах коприсоединенного представления.*

На практике функции Казимира удобно вычислять при помощи следующего известного утверждения.

Утверждение 1. *Функция f — функция Казимира для алгебры Ли с тензором Пуассона–Ли $\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}(df) = 0$.*

Набор инвариантов коприсоединенного представления для прямых сумм получается объединением наборов инвариантов каждого слагаемого. Вычислим эти инварианты для $sl(2) +_\varphi \mathbb{R}^3$. Как было показано ранее, тензор Пуассона–Ли для алгебры $sl(2) +_\varphi \mathbb{R}^3$ выглядит следующим образом:

$$\mathcal{A}^{sl(2)+_\varphi\mathbb{R}^3} = \begin{pmatrix} 0 & -2y & 2x & 2v_0 & 0 & -2v_2 \\ 2y & 0 & -h & v_1 & 2v_2 & 0 \\ -2x & h & 0 & 0 & 2v_0 & v_1 \\ -2v_0 & -v_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2v_2 & -2v_0 & 0 & 0 & 0 \\ 2v_2 & 0 & -v_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно убедится, что дифференциалы функций $2v_2v_0 - \frac{(v1)^2}{2}$ и $\frac{1}{2}hv_1 + v_2x - v_0y$ зануляют матрицу $\mathcal{A}^{sl(2)+_\varphi\mathbb{R}^3}$, а значит, эти функции являются функциями Казимира. Инварианты для алгебр $sl(2)+_\varphi\mathbb{R}^2$ и $so(3)+_\varphi\mathbb{R}^3$ вычислены в [8] (отметим, что основной результат, касающийся алгебр вида $so(n) +_\varphi (\mathbb{R}^n)^k$ в работе [8], содержит ошибку, которая исправлена в [9]).

Интересным вопросом является топология орбит коприсоединенного представления. Оказывается, что в алгебрах, рассмотренных в данной статье, топология орбит не является очень богатой.

Теорема 6. *Пусть вещественная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ изоморфна полупрямой сумме $\mathfrak{s} +_\varphi V$ нетривиальной полупростой алгебры Ли $\mathfrak{s}$ и коммутативного идеала V. Пусть у алгебры Ли $\mathfrak{g}$ орбиты общего положения коприсоединенного представления имеют размерность 4. Тогда возможны только следующие случаи:*

- *орбиты общего положения коприсоединенного представления для прямой суммы полупростой и разрешимой алгебр с двумерными орбитами коприсоединенного представления общего положения гомеоморфны прямому произведению пары, где каждый множитель либо плоскость, либо цилиндр, либо сфера;*
- *орбиты общего положения коприсоединенного представления для полупрямой суммы $sl(2,\mathbb{R}) +_\varphi \mathbb{R}^2$ по стандартному представлению гомеоморфны прямому произведению цилиндра на двумерную плоскость;*
- *орбиты общего положения коприсоединенного представления для полупрямой суммы $sl(2,\mathbb{R}) +_\varphi \mathbb{R}^3$ по присоединенному представлению гомеоморфны прямому произведению цилиндра на двумерную плоскость;*
- *орбиты общего положения коприсоединенного представления для полупрямой суммы $so(3,\mathbb{R}) +_\varphi \mathbb{R}^3$ по стандартному трехмерному представлению гомеоморфны касательному расслоению двумерной сферы.*

Доказательство. Для доказательства теоремы нам достаточно рассмотреть орбиты алгебр из списка в теореме 5. В работе [3] доказано, что двумерные орбиты общего положения гомеоморфны либо плоскости, либо цилиндру, либо сфере. Из этого результата следует, что орбиты общего положения коприсоединенного представления прямых сумм полупростой алгебры Ли и разрешимого идеала гомеоморфны прямому произведению пары, где каждый множитель гомеоморфен либо плоскости, либо цилиндру, либо сфере.

Хорошо известно, что орбиты общего положения алгебры $so(3,\mathbb{R}) +_\varphi \mathbb{R}^3$ гомеоморфны касательному расслоению сферы. Также нетрудно убедится, что у алгебры $so(2,1,\mathbb{R}) +_\varphi \mathbb{R}^3$, которая изоморфна $sl(2,\mathbb{R})+_\varphi\mathbb{R}^3$, орбиты общего положения гомеоморфны касательному расслоению цилиндра или плоскости, т.е. произведению плоскости на цилиндр или плоскость.

Разберем оставшийся случай. В статье [8] показано, что функцией Казимира для $sl(2,\mathbb{R}) +_\varphi \mathbb{R}^2$ является функция $yv_0^2 - 2hv_0v_1 - xv_1^2$. При фиксированных v_0, v_1, не равных вместе нулю, уравнение $yv_0^2 - 2hv_0v_1 - xv_1^2 = a$ задает плоскость. Получается расслоение со слоем плоскость над проколотой плоскостью, натянутой на v_0, v_1. Проколотая плоскость гомеоморфна цилиндру. Из соображений ориентируемости ясно, что в данном случае расслоение гомеоморфно прямому произведению цилиндра на двумерную плоскость. □

Инварианты Жордана–Кронекера. В различных задачах важную роль играют размеры жордановых и кронекеровых блоков в разложении пучков: $(\mathcal{A}_x - \lambda\mathcal{A}_a)_{ij} = (c_{ij}^k x_k - \lambda c_{ij}^k a_k)$, где c_{ij}^k — структурные константы алгебры Ли $\mathfrak{g}$, а $(x_k), (a_k) \in \mathfrak{g}^*$. Подробнее о разложении Жордана–Кронекера и его роли в построении полных бикоммутативных наборов многочленов можно прочитать в работе [4]. Отдельно интересно, какие именно наборы различных инвариантов Жордана–Кронекера могут реализовываться на различных алгебрах Ли. Изучим этот вопрос для алгебр Ли из теоремы refmain.

Из определения следует, что наборы инвариантов Жордана–Кронекера для алгебры и ее комплексификации (вещественной формы) совпадают. Инварианты Жордана–Кронекера для алгебр вида $sl(2,\mathbb{R}) +_\varphi (\mathbb{R}^2)^n$ и $so(3,\mathbb{R}) +_\varphi (\mathbb{R}^3)^n$ вычислены в [9]. Инварианты Жордана–Кронекера прямых сумм получаются объединением соответствующих наборов инвариантов, полученных отдельно для каждого слагаемого. Тем самым из теоремы 3 и результатов работ [2] и [9] можно получить следующее утверждение.

Теорема 7. *Пусть некоторая алгебра изоморфна полупрямой сумме нетривиальной полупростой алгебры Ли и разрешимого идеала. Пусть размерность орбит общего положения коприсоединенного представления у этой алгебры равна 4. Тогда с точностью до произвольного числа кронекровых блоков размера 1 возможны следующие наборы инвариантов Жордана–Кронекера:*

- *один жорданов блок размера 2 и один кронекеров блок размера 3,*
- *два кронекерова блока размера 3,*
- *один кронекеров блок размера 5.*

Доказательство. Как уже говорилось ранее, последние два случая из теоремы 3 и, соответственно, последние три случая из теоремы 5 разобраны в работе [9]. Нам остается разобрать только случаи прямых сумм полупростой и разрешимой алгебр Ли из списка в теореме 2.

Инварианты Жордана–Кронекера всех полупростых алгебр Ли вычислены в [4]. Из этих результатов следует, что для алгебр $so(3)$ и $sl(2)$ набор инвариантов состоит только из одного кронекерова блока размера 3. Вычислим теперь инварианты Жордана–Кронекера разрешимых алгебр из теоремы 2. У четырехмерных алгебр Ли $A_{4,8}$ и $A_{4,10}$ центр одномерный и индекс равен двум. Более того, нетрудно убедится, что коразмерность сингулярного множества у этих алгебр больше 1, откуда получаем, что их инварианты Жордана–Кронекера состоят из одного кронекерова блока размера 1 и одного кронекерова блока размера 3. У пятимерной алгебры $A_{5,3}$ центр двумерный и индекс равен трем. Аналогично нетрудно убедится, что коразмерность ее сингулярного множества больше 1. Получаем, что ее инварианты Жордана–Кронекера состоят из двух кронекеровых блоков размера 1 и одного кронекерова блока размера 3. И, наконец, у шестимерной нильпотентной алгебры Ли центр двумерный и индекс равен четырем. Легко проверить, что коразмерность ее сингулярного множества больше 1, а значит ее инварианты Жордана–Кронекера состоят из трех кронекеровых блоков размера 1 и одного кронекерова блока размера 3.

Осталось вычислить инварианты Жордана–Кронекера у алгебр вида $\mathbb{R} +_\varphi \mathbb{R}^n$, где φ — некоторое нетривиальное представление. Тензор Пуассона–Ли такой алгебры выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} 0 & \varphi^*(e)v_1 & \dots & \varphi^*(e)v_n \\ -\varphi^*(e)v_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\varphi^*(e)v_n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Тот факт, что коразмерность сингулярного множества равна 1, равносилен в данном случае тому, что у всех миноров размерности 2 найдется общий делитель. Общий делитель у миноров такой матрицы будет тогда и только тогда, когда размерность образа оператора $\varphi^*(e)$ равна 1. В остальных случаях алгебра будет кронекеровой, следовательно, ее инварианты Жордана–Кронекера будут состоять из одного кронекерова блока размера 3 и $(n-1)$ кронекеровых блоков размера 1. В случае же, когда размерность образа оператора $\varphi^*(e)$ равна 1, инварианты Жордана–Кронекера состоят из одного жорданова блока размера 2 и $(n-1)$ кронекеровых блоков размера 1. $\square$

Полные бикоммутативные наборы многочленов. Пусть $\mathfrak{g}$ — некоторая алгебра Ли со структурными константами c_{ij}^k, и пусть $\{f,g\} = c_{ij}^k x_k \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial g}{\partial x^j}$ и $\{f,g\}_a = c_{ij}^k a_k \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial g}{\partial x^j}$ — скобка Пуассона–Ли и скобка с замороженным аргументом $a \in \mathfrak{g}^*$ соответственно. Полным бикоммутативным относительно скобки Пуассона–Ли и скобки с замороженным аргументом набором многочленов мы будем называть функционально независимый почти всюду набор многочленов, попарно коммутирующих относительно скобки Пуассона–Ли и скобки с замороженным аргументом, состоящий из $\frac{1}{2}(\dim g + \operatorname{ind} g)$ функций. Построим полные бикоммутативные наборы многочленов для всех алгебр из списка в теореме 5. Подробнее про эту задачу можно прочитать в [4] (см. также [11, conjecture 5.5]).

Решим эту задачу для произвольного $a \in \mathfrak{g}^*$ для алгебр из списка в теореме 5. В работе [12] сформулировано усиление обобщенной гипотезы Мищенко–Фоменко (см. "argument shift conjecture" в [4]):

Гипотеза (Сильная обобщенная гипотеза Мищенко–Фоменко). *Для любой алгебры Ли $\mathfrak{g}$, для всех (не обязательно регулярных) элементов $a \in \mathfrak{g}^*$ существует полный бикоммутативный набор многочленов, то есть набор, функции из которого попарно коммутируют относительно скобки $\{\cdot,\cdot\}$ и скобки $\{\cdot,\cdot\}_a$.*

В работе [12] также предложен метод построения полных бикоммутативных наборов (которые в той работе назывались биинволютивными наборами) многочленов для сингулярных ковекторов, основанный на методе Мищенко–Фоменко сдвига аргумента, предложенном в [13].

Теорема 8 (Метод построения полных наборов в биинволюции для сингулярных элементов; см. [12]). *Пусть $\mathfrak{g}$ — такая алгебра Ли, что $\operatorname{tr.deg} P(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} = \operatorname{ind}\mathfrak{g}$, и пусть для некоторого a из $\mathfrak{g}^*$ верно*

1) *для почти всех x из $\mathfrak{g}^*$ плоскость, натянутая на x, a в $(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})^*$, без прямой λa состоит только из регулярных элементов,*

2) $\operatorname{ind}(\operatorname{St}(a)) = \operatorname{ind}\mathfrak{g}$.

Тогда объединение набора многочленов, полученного сдвигом на элемент $a \in \mathfrak{g}^*$, с любым полным инволютивным набором многочленов, поднятым с $\operatorname{St}(a)^*$, дает полный бикоммутативный относительно скобки Пуассона–Ли и скобки с замороженным аргументом $a \in \mathfrak{g}^*$ набор многочленов.

При помощи этой теоремы и результатов, полученных в работах [4], [12], [14], можно доказать следующую теорему.

Теорема 9. *Сильная обобщенная гипотеза Мищенко–Фоменко верна для любой алгебры Ли, представимой в виде полупрямой суммы нетривиальной полупростой алгебры Ли и разрешимого идеала, у которой орбиты коприсоединенного представления общего положения имеют размерность* 4.

Доказательство. Докажем гипотезу для всех четырех типов вещественных алгебр последовательно. Пусть для начала алгебра изоморфна прямой сумме алгебр из списка в теореме 2. Ясно, что в этом случае нам достаточно проверить эту гипотезу для каждого слагаемого отдельно или, что то же самое, проверить ее для всех алгебр из этого списка. Для все алгебр кроме $\mathbb{R} +_\varphi \mathbb{R}^n$ гипотеза доказана в [14]. В этой алгебре есть коммутативный идеал размерности $\frac{1}{2}(\dim g + \operatorname{ind} g)$, его базис и будет полным бикоммутативным набором многочленов для скобки Пуассона–Ли и любой скобки с замороженным аргументом.

Для доказательства усиленной обобщенной гипотезы Мищенко–Фоменко для алгебр Ли из теоремы 5 достаточно проверить достаточные условия теоремы 8 для всех ковекторов последних трех алгебр Ли из теоремы 5.

Как было показано ранее, последние три алгебры из списка в доказательстве теоремы 5 кронекеровы в том смысле, что у них в общем положении в разложении Жордана–Кронекера нет жордановых блоков. В [4] показано, что для таких алгебр можно построить полный бикоммутативный относительно скобки Пуассона–Ли и скобки с регулярным замороженным аргументом набор при помощи метода сдвига аргумента. Иными словами, нам остается разобраться со случаем, когда скобка с замороженным аргументом задана сингулярным ковектором.

Проверим для этих алгебр выполнение достаточных условий теоремы 8. Из кронекеровости алгебр следует, что для них выполняется первое условие теоремы для всевозможных ковекторов $a \in \mathfrak{g}^*$. Пусть алгебра изоморфна $sl(2) +_\varphi \mathbb{R}^2$. Множество ее сингулярных ковекторов задается системой уравнений

$$\begin{cases} v_1^4 = 0, \\ v_0^4 = 0. \end{cases}$$

Тогда стационарная подалгебра $\mathrm{St}(a)$ любого ненулевого сингулярного ковектора $a = (a_h, a_y, a_x, 0, 0)$ натянута на векторы v_0, v_1 и $(2a_h, a_x, a_y, 0, 0)$. Покажем, что стационарная подалгебра $\mathrm{St}(a)$ некоммутативна. Действительно, пусть

$$\begin{cases} [2a_h h + a_y y + a_x x, v_0] = 2a_h v_0 + a_y v_1 = 0, \\ [2a_h h + a_y y + a_x x, v_1] = -2a_h + a_x v_0 = 0, \end{cases}$$

тогда $a_h = a_x = a_y = 0$. Так как стационарная подалгебра $\mathrm{St}(a)$ некоммутативна, то ее индекс не равен ее размерности, следовательно он равен 1, а значит, ко всем ненулевым сингулярным ковекторам этой алгебры возможно применить теорему 8 и построить полный бикоммутативный набор многочленов.

Пусть теперь алгебра изоморфна $sl(2) +_\varphi \mathbb{R}^3$. Множество ее сингулярных ковекторов задается системой уравнений

$$\begin{cases} v_0 = 0, \\ v_1 = 0, \\ v_2 = 0. \end{cases}$$

Тогда стационарная подалгебра $\mathrm{St}(a)$ любого ненулевого сингулярного ковектора $a = (a_h, a_y, a_x, 0, 0)$ натянута на векторы v_0, v_1, v_2 и $(2a_h, a_x, a_y, 0, 0, 0)$. Аналогично, эта подалгебра некоммутативна, а значит ее индекс меньше 4. Так как индекс подалгебры не может быть меньше индекса алгебры, то индекс этой подалгебры равен 2, следовательно, для всех ненулевых сингулярных ковекторов возможно применить теорему 8 и получить полный бикоммутативный набор многочленов.

Пусть теперь алгебра изоморфна $so(3) +_\varphi \mathbb{R}^3$. Выпишем тензор Пуассона–Ли этой алгебры:

$$\mathcal{A}^{so(3)+_\varphi\mathbb{R}^3} = \begin{pmatrix} 0 & z & -y & 0 & 2u_3 & -2u_2 \\ -z & 0 & x & u_2 & u_1 & 0 \\ y & -x & 0 & u_3 & 0 & u_2 \\ 0 & -u_2 & -u_3 & 0 & 0 & 0 \\ -2u_3 & -u_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2u_2 & 0 & -u_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Множество ее сингулярных ковекторов задается системой уравнений

$$\begin{cases} u_1 = 0, \\ u_2 = 0, \\ u_3 = 0. \end{cases}$$

Тогда стационарная подалгебра $\mathrm{St}(a)$ любого ненулевого сингулярного ковектора $a = (a_x, a_y, a_z, 0, 0, 0)$ натянута на векторы u_1, u_2, u_3 и $(a_x, a_y, a_z, 0, 0, 0)$. Как и предыдущем случае, эта подалгебра некоммутативна, а значит, ее индекс меньше 4. Индекс подалгебры больше индекса алгебры, а значит и больше 0. Итак, индекс этой подалгебры равен 2, следовательно, для всех ненулевых сингулярных ковекторов возможно применить теорему 8 и получить полный бикоммутативный набор многочленов.

Отдельно хочется отметить, что в алгебрах $sl(2,\mathbb{R}) +_\varphi \mathbb{R}^2$, $sl(2,\mathbb{R}) +_\varphi \mathbb{R}^2$ и $so(3,\mathbb{R}) +_\varphi \mathbb{R}^3$ множество сингулярных элементов состоит из всех ковекторов, которые равны нулю на коммутативном идеале. Для всех таких алгебр полный бикоммутативный набор можно построить при помощи обобщения метода Садэтова. Об этом обобщении автор рассказывал на некоторых конференциях и семинарах. Работа, где будут изложены соответствующие результаты, готовится к печати. $\square$

6. Заключение

Случай, рассмотренный в данной работе, существенно отличается от всех, изученных в [2]. Выяснилось, что существует всего две неразложимые алгебры Ли, которые можно представить в виде полупрямой суммы полупростой алгебры и разрешимого идеала для алгебр с орбитами коприсоединенного представления общего положения размерности 4. В то же время, среди алгебр с орбитами размерности 6 существует по меньшей мере одна бесконечная серия. Это указывает на то, что классификация алгебр с шестимерными орбитами также будет принципиально отличаться от классификации алгебр с четырехмерными орбитами коприсоединенного представления общего положения.

Как упоминалось во введении, продолжается работа по классификации разрешимых алгебр Ли с четырехмерными орбитами коприсоединенного представления, чтобы дать полный ответ на поставленную задачу. Однако методы и идеи, представленные в данной статье, оказываются малоэффективными для этой задачи. Поэтому работа с разрешимыми алгебрами потребовала нового подхода, чему будет посвящена одна из следующих работ.

Особый интерес представляют приложения полученных результатов. После завершения полной классификации планируется применить ее для задач построения полных бикоммутативных наборов и исследования геодезических потоков на двумерных и четырехмерных орбитах коприсоединенного представления алгебр Ли с неполиномиальными инвариантами.

Автор выражает благодарность А. Ю. Коняеву за постановку задачи и внимание к работе, а также А. А. Ошемкову за помощь и внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арнольд В. И., Математические методы классической механики.

2. Коняев А. Ю., Классификация алгебр Ли с орбитами коприсоединенного представления общего положения размерности 2 // Матем. сб. 2014 Т. 205 С. 47–66.

3. Fomenko A. T., Konyaev A. Y., Geometry, dynamics and different types of orbits // J. Fixed Point Theory Appl. 2014. Vol 15. P. 49–66.

4. Bolsinov A. V., Zhang P., Jordan–Kronecker invariants of finite-dimensional Lie algebras // Transformation Groups. 2016. Vol. 21, P. 51–86.

5. Galinski A., Some metrics admitting nonpolynomial first integrals of the geodesic equation // Physics Letters B. 2021. Vol. 820. P.634050

6. Agapov S., Shubin V., Rational integrals of 2-dimensional geodesic flows: new examples // Journal of Geometry and Physics. 2021. Vol. 170. P. 104389.

7. Хамфрис Дж., Введение в теорию алгебр Ли и их представлений

8. Воронцов А. С., Инварианты алгебр Ли, представимых в виде полупрямой суммы с коммутативным идеалом // Матем. сб.. 2009. Т.200. №8. С. 45–62.

9. Vorushilov K. S., Jordan–Kronecker invariants for semidirect sums defined by standard representation of orthogonal or symplectic Lie algebras // Lobachevskii journal of Mathematics. 2017. Vol. 38. no. 6. P. 1121–1130.

10. Ворушилов К. С., Инварианты Жордана–Кронекера для полупрямых сумм вида $\mathrm{sl}(n) + (\mathbb{R}^n)^k$ и $\mathrm{gl}(n) + (\mathbb{R}^n)^k$ // Фундамент. и прикл. матем. 2019. Т. 22. №6. С. 3–18.

11. Bolsinov A. V., Matveev V. S., Miranda E., Tabachnikov S., Open problems, questions and challenges in finitedimensional integrable systems // Phil. Trans. R. 2018. vol.376.

12. Лобзин Ф. И., Построение многочленов в биинволюции для сингулярных элементов пространства сопряженного этой алгебре Ли // Матем. сб. 2024.

13. Мищенко А. С. Фоменко А. Т., Уравнения Эйлера на конечномерных группах Ли // Изв. АН СССР. 1978. Сер. матем. Т. 42, №2. С. 396–415.

14. Лобзин Ф. И., Проверка обобщенной гипотезы Мищенко–Фоменко для алгебр Ли малой размерности // Чебышевский сб. 2023. Т. 24. №5. Р. 126–135.

REFERENCES

1. Arnold V. I., “Mathematical Methods of Classical Mechanics”.

2. Konyaev A. Yu. 2014, “Classification of Lie algebras with generic orbits of dimension 2 in the coadjoint representation”, *Sb. Math.*, Vol. 205, no. 1, pp. 45-62.

3. Fomenko A. T., Konyaev A. Y. 2014, “Geometry, dynamics and different types of orbits” *J. Fixed Point Theory Appl.*, Vol. 15, pp. 49-66.

4. Bolsinov A. V., Zhang P. 2016, “Jordan–Kronecker invariants of finite–dimensional Lie algebras“, *Transformation Groups.*, Vol. 21, pp. 51-86.

5. Galinski A. 2021, “Some metrics admitting nonpolynomial first integrals of the geodesic equation”, *Physics Letters B.*, Vol. 820, pp.634050.

6. Agapov S., Shubin V. 2021, “Rational integrals of 2-dimensional geodesic flows: new examples”, *Journal of Geometry and Physics.*, Vol. 170, pp. 104389.

7. Humphries J. “Introduction to the theory of Lie algebras and their representations”, *Springer.*

8. Vorontsov A. S. 2009, “Invariants of Lie algebras representable as semidirect sums with a commutative ideal” *Sb. Math.*, Vol. 200, no. 8, pp. 1149–1164.

9. Vorushilov K. S 2017, "Jordan–Kronecker invariants for semidirect sums defined by standard representation of orthogonal or symplectic Lie algebras" *Lobachevskii journal of Mathematics.* Vol. 38, no. 6, pp. 1121–1130.

10. Vorushilov K. S 2019, "Jordan–Kronecker invariants for semidirect sums $\mathrm{sl}(n) + (\mathbb{R}^n)^k$ и $\mathrm{gl}(n) + (\mathbb{R}^n)^k$" *Fundament. i prikl. of matem.* Vol. 22, no. 6, pp. 3–18.

11. Bolsinov A. V., Matveev V. S., Miranda E., Tabachnikov S. 2018 Open problems, questions and challenges in finitedimensional integrable systems // Phil. Trans. R. 2018. vol.376.

12. Lobzin F. I. 2024 "Construction of polynomials in bi-involution for singular elements of the space conjugate to Lie algebra" *Sb. Math.*.

13. Mishchenko A. S. Fomenko A. T. 1978, "Euler equations on finite-dimensional Lie groups", *Math. USSR-Izv.*, Vol. 12, no. 2, pp. 371-389.

14. Lobzin F.Ĩ. 2023, "Verification of the generalized hypothesis of Mishchenko–Fomenko for Lie algebras of small dimension" *Chebyshevskii sbornik*, Vol. 24, no 5, pp. 126–135.

Получено: 12.02.2025
Принято в печать: 07.04.2025

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 26. Выпуск 2.

УДК 517 DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-2-160-175

Неприводимые представления колчанов, ассоциированных с кольцами

Е. Матович

Матович Елена — Белградский университет (г. Белград, Сербия).
e-mail: jmatovic@mas.bg.ac.rs

Аннотация

В этой статье мы представляем текущие исследования по классификации неприводимых представлений следующего колчана или, скорее, диграфа (который в этой статье мы обозначаем через $\mathbb{A}$):

$$\begin{tikzcd} v_1 \arrow[r, "e_1"] & v_0 \arrow[loop right, "e_0"] \end{tikzcd}$$

.

Каждое представление $\mathbb{A}$ задается двумя векторными пространствами W_0 и W_1 и двумя гомоморфизмами $\varphi_0 : W_0 \to W_0$ и $\varphi_1 : W_1 \to W_0$:

$$\begin{tikzcd} W_1 \arrow[r, "\varphi_1"] & W_0 \arrow[loop right, "\varphi_0"] \end{tikzcd}$$

.

Обозначим предыдущее представление через $(W_1, W_0, \varphi_1, \varphi_0)$. Если $\dim(W_0) = n$ и $\dim(W_1) = m$, то можно определить $W_0 = K^n$ и $W_1 = K^m$, и тогда φ_0 и φ_1 отождествляются соответственно с $n \times n$ и $n \times m$ матрицами M_0 и M_1, так что указанное представление определяется четырехкратным (m, n, M_1, M_0). Вычислим неприводимые представления для некоторого m.

Ключевые слова: конечные кольца, направленные графы, колчанные представления

Библиография: 3 названия.

Для цитирования:
Матович Е. Неприводимые представления колчанов, ассоциированных с кольцами // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 2, с. 160–175.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 26. No. 2.

UDC 517 DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-2-160-175

Irreducible representations of quivers associated to rings

J. Matović

Jelena Matović — University of Belgrade (Belgrade, Serbia).
e-mail: jmatovic@mas.bg.ac.rs

Abstract

In this paper we present the ongoing research on classifying irreducible representations of the following quiver, or rather the digraph (which throughout this paper we denote by $\mathbb{A}$):

$$\begin{tikzcd} v_1 \arrow[r, "e_1"] & v_0 \arrow[loop right, "e_0"] \end{tikzcd}.$$

Every representation of $\mathbb{A}$ is given by two vector spaces W_0 and W_1, and two homomorphisms $\varphi_0 : W_0 \to W_0$ and $\varphi_1 : W_1 \to W_0$:

$$\begin{tikzcd} W_1 \arrow[r, "\varphi_1"] & W_0 \arrow[loop right, "\varphi_0"] \end{tikzcd}.$$

We denote the previous representation by $(W_1, W_0, \varphi_1, \varphi_0)$. If $\dim(W_0) = n$ and $\dim(W_1) = m$, we may identify $W_0 = K^n$ and $W_1 = K^m$, and then φ_0 and φ_1 are identified respectively with $n \times n$ and $n \times m$ matrices M_0 and M_1, so the above representation is determined by the quadruple (m, n, M_1, M_0). We calculate irreducible representations for some m.

Keywords: finite rings, directed graphs, quiver representations

Bibliography: 3 titles.

For citation:
Matović, J. 2025, "Irreducible representations of quivers associated to rings" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 2, pp. 160–175.

1. Introduction

We are interested in classifying irreducible representations of the following quiver, or rather the digraph (which throughout this paper we denote by $\mathbb{A}$):

$$\begin{tikzcd} v_1 \arrow[r, "e_1"] & v_0 \arrow[loop right, "e_0"] \end{tikzcd}$$

This digraph appears as a subdigraph of the digraphs associated with commutative rings in the following way (see [2] and [3] for details): For a ring R we define $G_R = (R^2, E)$, where E is given by $E = \{(a, b) \to (a + b, ab) \mid a, b \in R\}$. Now, the digraph $\mathbb{A}$ appears in the following way: For $a \in R$, $a \neq 0$, we always have:

$$\begin{tikzcd} (0,a) \arrow[r] & (a,0) \arrow[loop right] \end{tikzcd}$$

The present work is merely a beginning of a research project of understanding irreducible representations of digraphs G_R.

2. Preliminaries

Throughout, K will *always* be an algebraically closed field.

Definition 1. *Let $G = (V, E)$ be a digraph. For $e \in E$ denote by $s(e) \in V$ and $t(e) \in V$ the starting and the target vertex of the edge e respectively (i.e. $e = (s(e), t(e))$).*

(a) A representation *of the graph G is a collection $\{W_v \mid v \in V\}$ of vector spaces over a field K together with a collection of linear mappings (i.e. vector space-homomorphisms) $\{\varphi_e : W_{s(e)} \to W_{t(e)} \mid e \in E\}$.*

(b) The representation $(\{W_v \mid v \in V\}, \{\varphi_e \mid e \in E\})$ with $W_v = 0$ for all $v \in V$ (and so $\varphi_e = 0$ for all $e \in E$, too) is said to be the zero-representation *of G.*

(c) Two representations $(\{W_v \mid v \in V\}, \{\varphi_e \mid e \in E\})$ and $(\{W'_v \mid v \in V\}, \{\varphi'_e \mid e \in E\})$ are said to be isomorphic *if there is a collection of vector space-isomorphisms $\{\theta_v : W_v \to W'_v \mid v \in V\}$ such that for each $e \in E$ the following diagram commutes:*

$$\begin{tikzcd} W_{s(e)} \arrow[r, "\varphi_e"] \arrow[d, "\theta_{s(e)}"'] & W_{t(e)} \arrow[d, "\theta_{t(e)}"] \\ W'_{s(e)} \arrow[r, "\varphi'_e"'] & W'_{t(e)} \end{tikzcd}$$

i.e. for each $e \in E$, $\varphi'_e \circ \theta_{s(e)} = \theta_{t(e)} \circ \varphi_e$ holds.

(d) The sum *of two representations $(\{W_v \mid v \in V\}, \{\varphi_e \mid e \in E\})$ and $(\{W'_v \mid v \in V\}, \{\varphi'_e \mid e \in E\})$ is the representation given by $W_v \oplus W'_v$ for all $v \in V$ and $\varphi_e \oplus \varphi'_e$ for all $e \in E$.*

(e) A representation $(\{W_v \mid v \in V\}, \{\varphi_e \mid e \in E\})$ is irreducible *if it is not isomorphic to a sum of two non-zero-representations. (see [1] for details)*

Утверждение 5. *(i) Consider the loop-digraph $\mathbb{L} = (\{v_0\}, \{e_0 = v_0 \to v_0\})$:*

$$\begin{tikzcd} v_0 \arrow[loop right, "e_0"] \end{tikzcd}$$

Every irreducible representation of $\mathbb{L}$ is isomorphic to a representation given by $W_{v_0} = K^n$ and $\varphi_{e_0} = J_{n,a}$, where $n \geqslant 1$, $\alpha \neq 0$ and $J_{n,\alpha}$ is the Jordan $(n \times n)$-block matrix:

$$J_{n,\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

Moreover, these representations are mutually non-isomorphic.

(ii) A matrix $A \in GL_n(K)$ commutes with $J_{n,\alpha}$ if and only if A is of the form:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ 0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ 0 & 0 & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_1 \end{bmatrix}, \quad a_1 \neq 0.$$

We now return to the digraph $\mathbb{A}$. Every representation of $\mathbb{A}$ is given by two vector spaces W_0 and W_1, and two homomorphisms $\varphi_0 : W_0 \to W_0$ and $\varphi_1 : W_1 \to W_0$:

$$\begin{tikzcd} W_1 \arrow[r, "\varphi_1"] & W_0 \arrow[loop right, "\varphi_0"] \end{tikzcd}$$

We denote the previous representation by $(W_1, W_0, \varphi_1, \varphi_0)$. If $\dim(W_0) = n$ and $\dim(W_1) = m$, we may identify $W_0 = K^n$ and $W_1 = K^m$, and then φ_0 and φ_1 are identified respectively with $n \times n$ and $n \times m$ matrices M_0 and M_1, so the above representation is determined by the quadruple (m, n, M_1, M_0).

Lemma 1. *Consider a representation determined by (m, n, M_1, M_0).*

(i) If the representation is irreducible, then $m \leqslant n$ and $\operatorname{rank}(M_1) = m$.

(ii) If $m \leqslant n$, $\operatorname{rank}(M_1) = m$ and M_0 is similar to $J_{n,\alpha}$ for some $\alpha \neq 0$, then the representation is irreducible.

Proof. (i) Suppose that the following representation is irreducible:

$$\begin{tikzcd} K^m \arrow[r, "M_1"] & K^n \arrow[loop right, "M_0"] \end{tikzcd}$$

Denote by φ_0 and φ_1 mappings given by M_0 and M_1 respectively.

It suffices to prove that $\varphi_1 : K^m \to K^n$ is injective (which clearly implies both $m \leqslant n$ and $\operatorname{rank}(M_1) = m$). Suppose not; then $\ker\varphi_1$ is non-trivial. Find $W \leqslant K^m$ such that $K^m = \ker\varphi_1 \oplus W$. Then the above representation is (equal to) the sum of non-zero representations $(\ker\varphi_1, 0, 0, 0)$ and $(W, K^n, \varphi_{1\restriction W}, \varphi_0)$. This contradicts the irreducibility of the representation.

(ii) Suppose that $m \leqslant n$, $\operatorname{rank}(M_1) = m$ and M_0 is similar to $J_{n,\alpha}$. If $P \in GL_n(K)$ is such that $M_0 = P^{-1} J_{n,\alpha} P$, note that we have the following isomorphism of the representations given by (m, n, M_1, M_0) and $(m, n, PM_1, J_{n,\alpha})$:

$$\begin{tikzcd} K^n \arrow[loop above, "M_0"] \arrow[r, "P"] & K^n \arrow[loop above, "J_{n,\alpha}"] \\ K^m \arrow[u, "M_1", dash] \arrow[r, "I_m"'] & K^m \arrow[u, "PM_1"'] \end{tikzcd}$$

(I_m is the identity $(m \times m)$-matrix.) Clearly, $\mathrm{rank}(PM_1) = m$, so it suffices to prove irreducibility of the representation given by $(m, n, M, J_{n,\alpha})$ where $m \leqslant n$ and $\mathrm{rank}(M) = m$.

Suppose that we have the following reduction:

$$\begin{tikzcd}
K^n \arrow[loop above, "J_{n,\alpha}"] \arrow[r, "\theta_0"] \arrow[d, dash, "M"'] & W_0' \arrow[loop above, "M_0'"] & \oplus & W_0'' \arrow[loop above, "M_0''"] \\
K^m \arrow[r, "\theta_1"'] & W_1' \arrow[u, "M_1'"] & \oplus & W_1'' \arrow[u, "M_1''"']
\end{tikzcd}$$

where θ_0 and θ_1 are isomorphisms. By Fact 5(i), one of W_0' and W_0'' must be zero, as otherwise the above reduction in particular would give a reduction of a Jordan block representation of the loop graph (which is irreducible by Fact 5(i)). Without loss of generality we may assume W_0'', so the reduction becomes:

$$\begin{tikzcd}
K^n \arrow[loop above, "J_{n,\alpha}"] \arrow[r, "\theta_0"] \arrow[d, dash, "M"'] & W_0' \arrow[loop above, "M_0'"] & \oplus & 0 \arrow[loop above, "0"] \\
K^m \arrow[r, "\theta_1"'] & W_1' \arrow[u, "M_1'"] & \oplus & W_1'' \arrow[u, "0"']
\end{tikzcd}$$

Now, $m \leqslant n$ and $\mathrm{rank}(M) = m$ yield that the homomorphism given by M is injective, so the one given by $M_1' \oplus 0$ on the right-hand side is also injective. This means that $W_1'' = 0$, so the above reduction is in fact trivial. Therefore, our representation is irreducible. $\square$

Although, by the previous lemma, M_0 being a Jordan block matrix is a sufficient condition for irreducibility, it is not a necessary condition as the following easy example shows.

Замечание 1. *Consider the following representation:*

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, dash, "\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}"] & K^2 \arrow[loop right, "\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}"]
\end{tikzcd}$$

If it is reducible, we would have $\lambda, \mu, \alpha, \beta \in K^{\times}$ and $\begin{bmatrix} x & y \\ u & v \end{bmatrix} \in GL_2(K)$ such that the following diagram commutes:

$$\begin{tikzcd}
K^2 \arrow[loop above, "\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}"] \arrow[r, "\begin{bmatrix}x&y\\u&v\end{bmatrix}"] \arrow[d, dash, "\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}"'] & K \arrow[loop above, "\alpha"] & \oplus & K \arrow[loop above, "\beta"] \\
K \arrow[r, "\lambda \oplus 0"'] & K \arrow[u, "\mu"] & \oplus & 0 \arrow[u, "0"']
\end{tikzcd}$$

By commutativity of the "square" part we have $\begin{bmatrix} x & y \\ u & v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu \\ 0 \end{bmatrix} \lambda$, where from we conclude $u + v = 0$, i.e. $v = -u$. Now, by commutativity of the "loop" part we have $\begin{bmatrix} x & y \\ u & -u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ u & -u \end{bmatrix}$, *i.e.* $\begin{bmatrix} x & 2y \\ u & -2u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x & \alpha y \\ \beta u & -\beta u \end{bmatrix}$. *From the bottom row we obtain* $u = \beta u = 2u$, *so* $u = 0$, *and hence* $v = 0$. *This is a contradiction as* $\begin{bmatrix} x & y \\ u & v \end{bmatrix}$ *is regular.*

As a first step in our investigation, we consider the special case of irreducible representations given by Lemma 1(ii). So we aim to classify irreducible representations given by (m, n, M_1, M_0), where $m \leqslant n$, $\operatorname{rank}(M_1) = m$ (this is necessary by Lemma 1(i)), and M_0 is similar to $J_{n,\alpha}$ for some $\alpha \neq 0$. If $M_0 = P^{-1} J_{n,\alpha} P$, then the representation given by (m, n, M_1, M_0) is clearly isomorphic to the one given by $(m, n, PM_1, J_{n,\alpha})$, so we may suppose that $M_0 = J_{n,\alpha}$. For the representation given my $(m, n, M_1, J_{n,\alpha})$ we say that it is *of type* (m, n, α).

3. Irreducible representations of type $(1, n, \alpha)$

Throughout this section, denote by M_i the $(n \times 1)$-matrix:

$$M_i := \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^T$$

with 1 in the i-th row.

Lemma 2. *Suppose that we have the following irreducible representation of type* $(1, n, \alpha)$*:*

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "M"] & K^n \arrow[loop right, "J_{n,\alpha}"] \end{tikzcd}$$

where $M = \begin{bmatrix} m_1 & m_2 & \dots & m_n \end{bmatrix}^T$. *Then if* $i \leqslant n$ *is such that* $m_i \neq 0$ *and* $m_j = 0$ *for all* $i < j \leqslant n$, *the above representation is isomorphic to:*

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "M_i"] & K^n \arrow[loop right, "J_{n,\alpha}"] \end{tikzcd}$$

Proof. We need to find $\lambda \in K^\times$ and $A \in GL_n(K)$ such that the following diagram commutes:

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "M"] \arrow[d, "\lambda"'] & K^n \arrow[loop right, "J_{n,\alpha}"] \arrow[d, "A"] \\ K \arrow[r, "M_i"'] & K^n \arrow[loop right, "J_{n,\alpha}"] \end{tikzcd}$$

i.e. such that $AM = M_i\lambda$ and $AJ_{n,\alpha} = J_{n,\alpha}A$. By Fact 5, A is of the following form:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_1 \end{bmatrix}$$

where $a_1 \neq 0$, so we must show that the following equation (in variables $a_1, \dots, a_n, \lambda$) has a solution:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \lambda \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow i$$

This reduces to the system:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
a_1m_1 & + & a_2m_2 & + & \dots & + & a_{i-1}m_{i-1} & + & a_im_i & = & 0\\
 & & a_1m_2 & + & \dots & + & a_{i-2}m_{i-1} & + & a_{i-1}m_i & = & 0\\
 & & & & & & & & & \vdots & \\
 & & & & & & a_1m_{i-1} & + & a_2m_i & = & 0\\
 & & & & & & & & a_1m_i & = & \lambda
\end{array}$$

so we see that we may take e.g. $\lambda = m_i \in K^\times$, $a_1 = 1$ and recursively find $a_2 = -a_1m_{i-1}/m_i, \dots,$ $a_i = -(a_1m_1 + \dots + a_{i-1}m_{i-1})/m_i$; we may also put $a_{i+1} = \dots = a_n = 0$. $\square$

Lemma 3. *If $1 \leqslant i < j \leqslant n$, then the representations:*

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "M_i"] & K^n \arrow[loop right, "J_{n,\alpha}"] \end{tikzcd} \quad \textit{and} \quad \begin{tikzcd} K \arrow[r, "M_j"] & K^n \arrow[loop right, "J_{n,\alpha}"] \end{tikzcd}$$

are non-isomorphic.

Proof. We have to show that for no $\lambda \in K^\times$ and A of the form:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n\\ 0 & a_1 & \dots & a_{n-1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & a_1 \end{bmatrix}$$

where $a_1 \neq 0$, $AM_i = M_j\lambda$, i.e.

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n\\ 0 & a_1 & \dots & a_{n-1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow i\\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{bmatrix} 0\\ \vdots\\ \lambda\\ \vdots\\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow j\\ \\ \\ \end{matrix}$$

holds. This is obvious as it implies $a_1 \cdot 1 = 0$ as $i < j$. $\square$

As a direct corollary of the previous two lemmas we obtain:

Theorem 1. *Up to isomorphism, all non-isomorphic irreducible representations of type $(1, n, \alpha)$ are given by (for $i \leqslant n$):*

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "M_i"] & K^n \arrow[loop right, "J_{n,\alpha}"] \end{tikzcd}$$

In particular, there are exactly n non-isomorphic representations of type $(1, n, \alpha)$.

4. Irreducible representations of type $(n-1, n, \alpha)$

Throughout this section, denote by M_i the $(n \times (n-1))$-matrix:

$$
M_i := \begin{array}{c}\begin{bmatrix}
1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0\\
0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0\\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0\\
0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1
\end{bmatrix}\end{array}
\begin{array}{c} \\ \\ \\ \leftarrow \quad i-1\\ \leftarrow \quad i\\ \leftarrow \quad i+1\\ \\ \\ \end{array}
$$

so the matrix I_{n-1} with a zero-row added as the i-th row. Moreover, we also fix the following notation. For an $(n \times (n-1))$-matrix M, $\operatorname{rank}_i(M)$ denotes the rank of the matrix obtained by deleting the i-th row from M.

Lemma 4. *Suppose that we have the following irreducible representation of type $(n-1, n, \alpha)$:*

$$
\begin{tikzcd} K^{n-1} \arrow[r, "M"] & K^n \arrow[loop right, "J_{n,\alpha}"] \end{tikzcd}
$$

Then if $i \leqslant n$ is such that $\operatorname{rank}_i(M) = n-1$ and $\operatorname{rank}_j(M) < n-1$ for all $j < i$, the above representation is isomorphic to:

$$
\begin{tikzcd} K^{n-1} \arrow[r, "M_i"] & K^n \arrow[loop right, "J_{n,\alpha}"] \end{tikzcd}
$$

Proof. Suppose that $\operatorname{rank}_i(M) = n-1$ and $\operatorname{rank}_j(M) < n-1$ for all $j < i$. Since $\operatorname{rank}(M_i) = n-1$, by elementary transformations of columns only, we may transform M to the matrix of the following form:

$$
M' := MQ = \begin{bmatrix}
1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0\\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0\\
m_1 & \dots & m_{i-1} & m_i & \dots & m_{n-1}\\
0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0\\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1
\end{bmatrix}
\begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow \quad i-1\\ \leftarrow \quad i\\ \leftarrow \quad i+1\\ \\ \\ \end{array}
$$

where $Q \in GL_{n-1}(K)$ is the product of all elementary matrices used in the transformation. Since elementary transformations of columns don't change the row-rank, $\operatorname{rank}_j(MQ) < n-1$ for all $j < i$ too. From here we directly see that it must be $m_1 = \dots = m_{i-1} = 0$, so:

$$
M' = \begin{bmatrix}
1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0\\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0\\
0 & \dots & 0 & m_i & \dots & m_{n-1}\\
0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0\\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1
\end{bmatrix}
\begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow \quad i-1\\ \leftarrow \quad i\\ \leftarrow \quad i+1\\ \\ \\ \end{array}
$$

Thus we have an isomorphism of representations:

$$\begin{tikzcd} K^{n-1} \arrow[r, "M"] \arrow[d, "Q^{-1}"'] & K^n \arrow[loop right, "J_{n,\alpha}"] \arrow[d, "I_n"] \\ K^{n-1} \arrow[r, "M'"'] & K^n \arrow[loop right, "J_{n,\alpha}"] \end{tikzcd}$$

Now, it suffices to find an isomorphism of representations of the following form:

$$\begin{tikzcd} K^{n-1} \arrow[r, "M'"] \arrow[d, "A"'] & K^n \arrow[loop right, "J_{n,\alpha}"] \arrow[d, "B"] \\ K^{n-1} \arrow[r, "M_i"'] & K^n \arrow[loop right, "J_{n,\alpha}"] \end{tikzcd}$$

So we need $A \in GL_{n-1}(K)$ and $B \in GL_n(K)$ such that $M_iA = BM'$ and $BJ_{n,\alpha} = J_{n,\alpha}B$. Since, $BJ_{n,\alpha} = J_{n,\alpha}B$, by Fact 5(ii), B must be found in the following form:

$$B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ 0 & b_1 & \dots & b_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b_1 \end{bmatrix}, \quad b_1 \neq 0,$$

so we have to check that for such B, $BM' = M_iA$ has a solution (for A and B). Note that the i-th row of M_iA (for any A) is zero, so let us first look at the i-th row of BM'. We have:

$$(BM')_i = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & b_1 & b_2 & \dots & b_{n-i+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & m_i & \dots & m_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

and the i-th row equals:

$$\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & b_1m_i + b_2 & b_1m_{i+1} + b_3 & \dots & b_1m_{n-1} + b_{n-i+1} \end{bmatrix}.$$

Put $b_1 = 1, b_2 = -m_i, b_3 = -m_{i+1}, \dots, b_{n-i+1} = -m_{n-1}$, then the obtained row is zero, and further put $b_{n-i+2} = \dots = b_n = 0$. For the obtained matrix B, BM' has the i-th row zero. Now set A to be BM' after deleting the i-th row. It is easy to see that A is an upper triangular matrix with ones on the diagonal, thus it is regular, and that $BM' = M_iA$. This finishes the proof. □

Lemma 5. *If $1 \leqslant i < j \leqslant n$, then the representations:*

$$K^{n-1} \xrightarrow{M_i} K^n \circlearrowleft J_{n,\alpha} \quad \textit{and} \quad K^{n-1} \xrightarrow{M_j} K^n \circlearrowleft J_{n,\alpha}$$

are non-isomorphic.

Proof. We have to show that there are no $A \in GL_{n-1}(K)$ and $B \in GL_n(K)$ of the form:

$$B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ 0 & b_1 & \dots & b_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b_1 \end{bmatrix}$$

where $b_1 \neq 0$, such that $BM_i = M_jA$. The j-th row of M_jA is zero, while j-th row of BM_i has $b_1 \neq 0$ in the place $(j, j-1)$ (as $j-1 \geqslant i$). Therefore, the two representations are non-isomorphic. $\square$

As a direct corollary of the previous two lemmas we obtain:

Theorem 2. *Up to isomorphism, all irreducible representations of type $(n-1, n, \alpha)$ are given by (for $i \leqslant n$):*

$$K \xrightarrow{M_i} K^n \circlearrowright J_{n,\alpha}$$

In particular, there are exactly n non-isomorphic representations of type $(n-1, n, \alpha)$.

5. Irreducible representations of type $(2, n, \alpha)$

Throughout this section, denote by $M_{m,k}(x_1, \dots, x_{m-1})$ the $(n \times 2)$-matrix:

$$M_{m,k}(x_1, \dots, x_{m-1}) := \left[\begin{array}{ccc} x_1 & 0 & \\ x_2 & 0 & \\ \vdots & \vdots & \\ x_{m-1} & 0 & \\ 1 & 0 & \leftarrow m \\ 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \\ 0 & 1 & \leftarrow k \\ 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \end{array}\right]$$

where $1 \leqslant m < k \leqslant n$ and $x_1, x_2, \dots, x_{m-1} \in K$. For $i < m$ and $x_1, \dots, x_{m-2} \in K$ denote $M_{m,k,i}(x_1, \dots, x_{m-2}) := M_{m,k}(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_{m-2})$.

Lemma 6. *If $(m_1, k_1) \neq (m_2, k_2)$, then the representations:*

$$K^2 \xrightarrow{M_{m_1,k_1}(\vec{x})} K^n \circlearrowright J_{n,\alpha} \quad \text{and} \quad K^2 \xrightarrow{M_{m_2,k_2}(\vec{y})} K^n \circlearrowright J_{n,\alpha}$$

are non-isomorphic for arbitrary $\vec{x}, \vec{y} \in K^{m-1}$.

PROOF. We have to show that there are no $A \in GL_2(K)$ and $B \in GL_n(K)$ of the form:

$$B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ 0 & b_1 & \dots & b_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b_1 \end{bmatrix}$$

where $b_1 \neq 0$, such that $BM_{m_1,k_1} = M_{m_2,k_2}A$. If $k_1 < k_2$, the k_1-th row of BM_{m_1,k_1} has 1 in place $(k_1, 2)$, while the same place in k_1-th row of $M_{m_2,k_2}A$ is 0. If $k_1 = k_2$ and $m_1 < m_2$, then m_2-th row of BM_{m_1,k_1} is zero, while m_2-th row of $M_{m_2,k_2}A$ has 1 in place $(m_2, 1)$. Therefore, the two representations are non-isomorphic. □

Consider an irreducible representation of type $(2, n, \alpha)$:

$$K^2 \xrightarrow{M} K^n \circlearrowleft J_{n,\alpha}$$

Recall that the rank of M is two. Define:

$$k_M := \max\left\{k \leqslant n \colon (\exists m < k) \ \operatorname{rank}\begin{bmatrix} M_m \\ M_k \end{bmatrix} = 2\right\},$$

where M_i denotes the i-th row of M, and then:

$$m_M := \max\left\{m < k_M \colon \operatorname{rank}\begin{bmatrix} M_m \\ M_{k_M} \end{bmatrix} = 2\right\}.$$

From now on we fix the previous representation, i.e. the matrix M, so to simplify the notation, we denote k_M and m_M only by k and m.

LEMMA 7. *There is $\vec{x} \in K^{m-1}$ such that the above representation is isomorphic to the one given by $M_{m,k}(\vec{x})$. Moreover, if $k < 2m$, then the above representation is isomorphic to the one given by $M_{m,k,2m-k}(\vec{x})$ for some $\vec{x} \in K^{m-2}$.*

PROOF. By elementary transformations of columns only, and the fact that m-th and k-th rows are linearly independent, we may transform M to the matrix of the following form:

$$M' := MQ = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \vdots & \vdots \\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} \\ 1 & 0 \\ a_{m+1,1} & a_{m+1,2} \\ \vdots & \vdots \\ a_{k-1,1} & a_{k-1,2} \\ 0 & 1 \\ a_{k+1,1} & a_{k+1,2} \\ \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ \leftarrow m \\ \\ \\ \\ \leftarrow k \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

where $Q \in GL_2(K)$ is the product of all elementary matrices used in the transformation. Recall that elementary transformations of columns don't change the rank of rows. Hence, for $i > k$, by the choice of k, i-th row is linearly dependent with k-th and with m-th row, so we see that $a_{i,1} = a_{i,2} = 0$.

Similarly, for $m < i < k$, by the choice of m now, i-th row is lineary dependent with k-th row, so we see that $a_{i,1} = 0$. Therefore, our matrix M' equals:

$$M' = \left[\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ \vdots & \vdots \\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} \\ 1 & 0 \\ 0 & a_{m+1,2} \\ \vdots & \vdots \\ 0 & a_{k-1,2} \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow m \\ \\ \\ \\ \leftarrow k \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

Clearly, representations given by M and M' are isomorphic. It suffices to find an isomorphism of representations given by M' and $M_{m,k}(\vec{x})$ for some $\vec{x} \in K^{m-1}$. We do that by finding $B \in GL_n(K)$ such that $BM' = M_{m,k}(\vec{x})$ and $BJ_{n,\alpha} = J_{n,\alpha}B$. Since, $BJ_{n,\alpha} = J_{n,\alpha}B$, by Fact 5(ii), B must be found in the following form:

$$B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ 0 & b_1 & \dots & b_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b_1 \end{bmatrix}, \quad b_1 \neq 0. \tag{1}$$

Consider BM':

$$BM' = \left[\begin{array}{cc} \sum_{i=1}^{m-1} b_i a_{i,1} + b_m & \sum_{i=1}^{k-1} b_i a_{i,2} + b_k \\ \sum_{i=1}^{m-2} b_i a_{i+1,1} + b_{m-1} & \sum_{i=1}^{k-2} b_i a_{i+1,2} + b_{k-1} \\ \vdots & \vdots \\ b_1 & \sum_{i=1}^{k-m} b_i a_{i+m-1,2} + b_{k-m+1} \\ 0 & \sum_{i=1}^{k-m-1} b_i a_{i+m,2} + b_{k-m} \\ \vdots & \vdots \\ 0 & b_1 a_{k-1,2} + b_2 \\ 0 & b_1 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow m \\ \\ \\ \\ \leftarrow k \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

It is clear that if we recursively put $b_1 = 1$ and $b_{k-j} = -\sum_{i=1}^{k-j-1} b_i a_{i+m,2}$ for $j = k-2, k-3, \dots, 0$, we obtain the desired zeroes in the second column, i.e. we obtain $M_{m,k}(\vec{x})$, where $\vec{x}$ can be easily calculated.

For the "moreover" part, suppose that $k < 2m$, and set $i = 2m-k$. We prove that $B \in GL_n(K)$ of the form (1), and $\vec{y} \in K^{m-2}$ can be found such that $BM_{m,k}(\vec{x}) = M_{m,k,i}(\vec{y}) \begin{bmatrix} 1 & -x_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; clearly, this finishes the proof. For, put $b_1 = 1$, and consider $BM_{m,k}(\vec{x}) = M_{m,k,i}(\vec{y}) \begin{bmatrix} 1 & -x_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$:

$$\left[\begin{array}{ccl}
\sum_{j=1}^{m-1} b_j x_j + b_m & b_k & \\
\sum_{j=1}^{m-2} b_j x_{j+1} + b_{m-1} & b_{k-1} & \\
\vdots & \vdots & \\
\sum_{j=1}^{m-i+1} b_j x_{j+i-1} + b_{m-i+2} & b_{k-i+2} & \\
\sum_{j=1}^{m-i} b_j x_{j+i-1} + b_{m-i+1} & b_{k-i+1} & \leftarrow\ i \\
\sum_{j=1}^{m-i-1} b_j x_{j+i-1} + b_{m-i} & b_{k-i} & \\
\vdots & \vdots & \\
x_{m-1} + b_2 & b_{k-m+2} & \\
1 & b_{k-m+1} & \leftarrow\ m \\
0 & b_{k-m} & \\
\vdots & \vdots & \\
0 & b_2 & \\
0 & 1 & \leftarrow\ k \\
0 & 0 & \\
\vdots & \vdots & \\
0 & 0 &
\end{array}\right]
=
\left[\begin{array}{ccl}
y_1 & -x_i y_1 & \\
y_2 & -x_i y_2 & \\
\vdots & \vdots & \\
y_{i-1} & -x_i y_{i-1} & \\
0 & 0 & \leftarrow\ i \\
y_i & -x_i y_i & \\
\vdots & \vdots & \\
y_{m-2} & -x_i y_{m-2} & \\
1 & -x_i & \leftarrow\ m \\
0 & 0 & \\
\vdots & \vdots & \\
0 & 0 & \\
0 & 1 & \leftarrow k \\
0 & 0 & \\
\vdots & \vdots & \\
0 & 0 &
\end{array}\right]$$

We first note that we must set $b_2 = \cdots = b_{k-m} = 0$ and $b_{k-m+1} = -x_i$. Now, we calculate that $y_{m-2} = x_{m-1}, \ldots, y_i = x_{i+1}$, and we set $b_{k-m+1} = -x_i y_{m-2}, \ldots, b_{k-i} = -x_i y_i$. Look at the i-th row. On the left hand side, since $m-i = m-2m+k = k-m$ and $m-i+1 = m-2m+k+1 = k-m+1$, we have $x_i + b_{m-i+1} = x_i + b_{k-m+1} = x_i - x_i = 0$ (note that other terms in the sume are zero), so it just remains to set $b_{k-i+1} = 0$. Finally, we can now calculate y_{i-1}, then set $b_{k-i+2} = -x_i y_{i-1}$, calculate b_{k-i+3}, then set $b_{k-i+3} = -x_i y_{i-2}$, etc. $\square$

Lemma 8. *If $k \geqslant 2m$, representation determined by $M_{m,k}(\vec{x})$ and $M_{m,k}(\vec{y})$ are non-isomorphic for distinct $\vec{x}, \vec{y} \in K^{m-1}$. If $k = 2m - i$, representation determined by $M_{m,k,i}(\vec{x})$ and $M_{m,k,i}(\vec{y})$ are non-isomorphic for distinct $\vec{x}, \vec{y} \in K^{m-2}$.*

Proof. We have to show that there are no $A \in GL_2(K)$ and $B \in GL_n(K)$ of the form:

$$B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \ldots & b_n \\ 0 & b_1 & \ldots & b_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & b_1 \end{bmatrix}$$

where $b_1 = 1$, such that $BM_{m,k}(\vec{x}) = M_{m,k}(\vec{y})A$. We have the following equation:

$$\begin{bmatrix} 1 & b_2 & b_3 & \dots & b_{n-1} & b_n \\ 0 & 1 & b_2 & \dots & b_{n-2} & b_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ x_2 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ x_{m-1} & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \leftarrow m \\ \\ \\ \\ \leftarrow k \\ \\ \\ \end{array} \end{array} = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} y_1 & 0 \\ y_2 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ y_{m-1} & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \leftarrow m \\ \\ \\ \\ \leftarrow k \\ \\ \\ \end{array} \end{array} \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Then we have:

$$\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + \dots + b_m & b_k \\ x_2 + b_2x_3 + \dots + b_{m-1} & b_{k-1} \\ \vdots & \vdots \\ x_{m-1} + b_2 & b_{k-m+2} \\ 1 & b_{k-m+1} \\ 0 & b_{k-m} \\ 0 & b_{k-m-1} \\ \vdots & \vdots \\ 0 & b_2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \leftarrow m \\ \\ \\ \\ \\ \leftarrow k \\ \\ \\ \end{array} \end{array} = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} y_1 & y_1b \\ y_2 & y_2b \\ \vdots & \vdots \\ y_{m-1} & y_{m-1}b \\ 1 & b \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \leftarrow m \\ \\ \\ \\ \leftarrow k \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Put $b = b_{k-m+1}$, $b_2 = b_3 = \dots = b_{k-m} = 0$, and we can choose $b_k = y_1 b_{k-m+1}, b_{k-1} = = y_2 b_{k-m+1}, \dots, b_{k-m+2} = y_{m-1} b_{k-m+1}$. For $k \geqslant 2m$ we have $k - m \geqslant m$, and it yields that $x_i = y_i$ for $1 \leqslant i < m$.

In the case $k = 2m - i$ for $1 \leqslant i < m$ we have following equation:

$$
\begin{bmatrix}
1 & b_2 & b_3 & \dots & b_{n-1} & b_n \\
0 & 1 & b_2 & \dots & b_{n-2} & b_{n-1} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & 1 & b_2 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1
\end{bmatrix}
\left[\begin{array}{cc}
x_1 & 0 \\
x_2 & 0 \\
\vdots & \vdots \\
0 & 0 \\
\vdots & \vdots \\
x_{m-1} & 0 \\
1 & 0 \\
0 & 0 \\
0 & 0 \\
\vdots & \vdots \\
0 & 1 \\
0 & 0 \\
\vdots & \vdots \\
0 & 0
\end{array}\right.
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ \\ \\ \\
\leftarrow m \\
\\ \\ \\
\leftarrow k \\
\\ \\ \\
\end{array}
\left.\vphantom{\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}}\right]
=
\left[\begin{array}{cc}
y_1 & 0 \\
y_2 & 0 \\
\vdots & \vdots \\
0 & 0 \\
\vdots & \vdots \\
y_{m-1} & 0 \\
1 & 0 \\
0 & 0 \\
0 & 0 \\
\vdots & \vdots \\
0 & 1 \\
0 & 0 \\
\vdots & \vdots \\
0 & 0
\end{array}\right.
\begin{array}{l}
\\ \\ \\
\leftarrow i \\
\\ \\
\leftarrow m \\
\\ \\ \\
\leftarrow k \\
\\ \\ \\
\end{array}
\left.\vphantom{\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}}\right]
\begin{bmatrix}
1 & b \\
0 & 1
\end{bmatrix}
$$

$$
\left[\begin{array}{cc}
x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_{m-1}x_{m-1} + b_m & b_k \\
x_2 + b_2x_3 + \cdots + b_{m-1} & b_{k-1} \\
\vdots & \vdots \\
b_2x_{i+1} + \cdots + b_{m-i}x_{m-i} + b_{m-i+1} & b_{k-i} \\
\vdots & \vdots \\
x_{m-1} + b_2 & b_{k-m+2} \\
1 & b_{k-m+1} \\
0 & b_{k-m} \\
0 & b_{k-m-1} \\
\vdots & \vdots \\
0 & b_2 \\
0 & 1 \\
0 & 0 \\
\vdots & \vdots \\
0 & 0
\end{array}\right.
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ \\ \\ \\
\leftarrow m \\
\\ \\ \\ \\
\leftarrow k \\
\\ \\ \\
\end{array}
\left.\vphantom{\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}}\right]
=
\left[\begin{array}{cc}
y_1 & y_1b \\
y_2 & y_2b \\
\vdots & \vdots \\
0 & 0 \\
\vdots & \vdots \\
y_{m-1} & y_{m-1}b \\
1 & b \\
0 & 0 \\
0 & 0 \\
\vdots & \vdots \\
0 & 1 \\
0 & 0 \\
\vdots & \vdots \\
0 & 0
\end{array}\right.
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ \\ \\ \\
\leftarrow m \\
\\ \\ \\
\leftarrow k \\
\\ \\ \\
\end{array}
\left.\vphantom{\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}}\right]
$$

Notice that $b_2 = \cdots = b_{k-m} = b_{m-i} = 0$, $b_{k-i} = 0$ $b = b_{k-m+1} = b_{m-i+1}$. Then $\vec{x}_i = \vec{y}_i$ for $\vec{x}, \vec{y} \in K^{m-2}$. This finishes the proof. $\square$

Directly from the previous three lemmas we have:

Theorem 3. *Up to isomorphism, all irreducible representations of type $(2, n, \alpha)$ are given by the following matrices:*

- $M_{m,k}(\vec{x})$ *where* $1 \leqslant m < k \leqslant n$, $k \geqslant 2m$ *and* $\vec{x} \in K^{m-1}$, *and*
- $M_{m,k,2m-k}(\vec{x})$ *where* $1 \leqslant m < k \leqslant n$, $k < 2m$ *and* $\vec{x} \in K^{m-2}$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Barot M. Introduction to the Representation Theory of Algebras. Cham: Springer, 2015. 352 p.
2. Lipkovski A.T. Digraphs associated with finite rings // Publications de l'Institut Mathématique. 2012. Vol. 92, no. 106. P. 35–41.
3. Lipkovski A.T., Matović J. Quivers associated with finite rings — a cohomological approach // Filomat. 2023. Vol. 37, no. 25. P. 8583–8589.

REFERENCES

1. Barot, M., 2015, *Introduction to the Representation Theory of Algebras*, Cham: Springer.
2. Lipkovski, A.T., 2012, "Digraphs associated with finite rings", *Publications de l'Institut Mathématique*, vol. 92, no. 106, pp. 35–41.
3. Lipkovski, A.T., Matović, J., 2023, "Quivers associated with finite rings — a cohomological approach", *Filomat*, vol. 37, no. 25, pp. 8583–8589.

Получено: 12.01.2025
Принято в печать: 07.04.2025

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 26. Выпуск 2.

УДК 517 DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-2-176-185

Новые геодезические в классе Громова – Хаусдорфа, лежащие в облаке вещественной прямой

И. Н. Михайлов

Михайлов Иван Николаевич — Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: ivan.mikhailov@math.msu.ru

Аннотация

В данной работе мы показываем, что кривая вида $A \times_{\ell^1} (tX)$, $t \in [0, \infty)$ для ограниченного пространства X и неограниченного подмножества $A \subset \mathbb{R}$ является геодезической в классе Громова – Хаусдорфа. Также мы показываем, что для произвольных $\lambda > 1$, $n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство $\mathrm{dist}_{GH}\big(\mathbb{Z}^n, \lambda\mathbb{Z}^n\big) \geqslant \frac{1}{2}$. Отсюда следует, во-первых, что кривая $t\mathbb{Z}^n$, $t \in (0, \infty)$ не является непрерывной в классе Громова – Хаусдорфа (в частности, не является геодезической), и, во-вторых, что отображение умножения всех пространств на конечном расстоянии Громова – Хаусдорфа от $\mathbb{R}^n$ на произвольное $\lambda > 0$ не является непрерывным.

Ключевые слова: расстояние Громова – Хаусдорфа, геодезическая, декартово произведение.

Библиография: 12 названий.

Для цитирования:
Михайлов И.Н. Новые геодезические в классе Громова – Хаусдорфа, лежащие в облаке вещественной прямой // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 2, с. 176–185.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 26. No. 2.

UDC 517 DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-2-176-185

New geodesic lines in the Gromov – Hausdorff class lying in the cloud of the real line

I. N. Mikhailov

Mikhailov Ivan Nikolaevich — Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: ivan.mikhailov@math.msu.ru

Abstract

In the paper we prove that, for arbitrary unbounded subset $A \subset R$ and an arbitrary bounded metric space X, a curve $A \times_{\ell^1} (tX)$, $t \in [0, \infty)$ is a geodesic line in the Gromov – Hausdorff class. We also show that, for abitrary $\lambda > 1$, $n \in \mathbb{N}$, the following inequality holds: $\mathrm{dist}_{GH}\big(\mathbb{Z}^n, \lambda\mathbb{Z}^n\big) \geqslant \frac{1}{2}$. We conclude that a curve $t\mathbb{Z}^n$, $t \in (0, \infty)$ is not continuous with respect to the Gromov – Hausdorff distance, and, therefore, is not a gedesic line. Moreover, it follows that multiplication of all metric spaces lying on the finite Gromov – Hausdorff distance from $\mathbb{R}^n$ on some $\lambda > 0$ is also discontinous with respect to the Gromov – Hausdorff distance.

Keywords: Gromov – Hausdorff distance, geodesic line, Cartesian product

Bibliography: 12 titles.

For citation:
Mikhailov, I. N. 2025, “New geodesic lines in the Gromov – Hausdorff class lying in the cloud of the real line” , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 2, pp. 176–185.

1. Введение

Расстояние Громова – Хаусдорфа — важная конструкция метрической геометрии, которая позволяет определить обобщённую псевдометрику на классе всех метрических пространств. Впервые это расстояние было введено Дэвидом Эдвардсом в 1975 году ([3]) и позднее стало знаменитым благодаря работе [4]. С историческими подробностями можно познакомиться в работе [11].

Традиционно, расстояние Громова – Хаусдорфа активно используется для изучения компактных метрических пространств. Пространство всех компактных метрических пространств, наделённое расстоянием Громова – Хаусдорфа, называется *пространством Громова – Хаусдорфа* и хорошо изучено. В частности, оно является полным, сепарабельным, геодезическим метрическим пространством.

В известной монографии [7] Михаил Громов описал некоторые свойства пространства $\mathcal{GH}$ всех, не обязательно компактных, метрических пространств, рассматриваемых с точностью до изометрии, наделённого расстоянием Громова – Хаусдорфа. В частности, Михаил Громов ввёл в рассмотрение классы метрических пространств на конечном расстоянии от некоторого фиксированного метрического пространства (в работе [1] такие классы были названы *облаками*). Он анонсировал, что такие классы являются полными и стягиваемыми. В качестве простого примера было приведено пространство Громова – Хаусдорфа. Для этого метрического класса можно рассмотреть естественное отображение, отправляющее метрическое пространство (X, dist_X) в $(X, \lambda\,\mathrm{dist}_X)$. Если теперь устремить λ к 0, то получится искомое стягивание. Михаил Громов указал, что аналогичными свойствами обладает и класс метрических пространств на конечном расстоянии от $\mathbb{R}^n$.

Тем не менее позднее оказалось, что всё не так просто. Во-первых, при работе с классом $\mathcal{GH}$ возникают теоретико-множественные трудности. Несложно показать, что в рамках теории множеств фон Неймана–Бернайса–Гёделя (NBG) пространство $\mathcal{GH}$, а также любое облако является не множеством, а собственным классом, то есть не может принадлежать никакому другому классу. Чтобы доказать, что облако стягиваемо, нужно определить на нём топологию. Однако невозможно ввести топологию на собственном классе, поскольку любое топологическое пространство является элементом своей топологии, что невозможно для собственного класса по определению. В работе [1] авторы предложили способ определить аналог топологии на классах, фильтрованных множествами, а также непрерывные отображения между ними. Во-вторых, оказалось, что не все облака инварианты относительно умножения всех своих метрических пространств на произвольное число $\lambda > 0$. В работе [1] приведён пример геометрической прогрессии $\{p^n : n \in \mathbb{Z}\}$ для простого числа $p \neq 2$ с метрикой, индуцированной из $\mathbb{N}$, которая отскакивает от себя на бесконечное расстояние Громова – Хаусдорфа при умножении на 2. Наконец, если полнота произвольного облака была аккуратно доказана в работе [1], то стягиваемость не обоснована строго до сих пор даже для облаков таких естественных метрических пространств как $\mathbb{R}^n$. Сложность представляет проверка непрерывности естественного отображения умножения всех пространств данного облака на положительное число $\lambda > 0$.

Другой важной задачей, связанной с геометрией расстояния Громова – Хаусдорфа в классе $\mathcal{GH}$, является задача построения геодезических. В работе [12] предъявлен класс метрических пространств *общего положения*, всюду плотный в $\mathcal{GH}$, любые два пространства которого на конечном расстоянии друг от друга можно соединить линейной геодезической. Тем не менее до сих пор неизвестно, может ли любая пара метрических пространств, находящихся на конечном расстоянии друг от друга, быть соединена некоторой геодезической.

В данной работе мы строим новые геодезические в облаке вещественной прямой. Сначала мы показываем, что если $A \subset \mathbb{R}$ — неограниченное подмножество, $B \subset \mathbb{R}$ — произвольное подмножество, A' — метрическое пространство на конечном расстоянии Громова – Хаусдорфа от A, а X и Y — произвольные ограниченные метрические пространства, то выполнено неравенство $\operatorname{dist}_{GH}\bigl(A' \times_{\ell^1} X,\, B \times_{\ell^1} Y\bigr) \geqslant \frac{\operatorname{diam} X - \operatorname{diam} Y}{2}$. С помощью данной оценки мы доказываем, что для произвольного ограниченного метрического пространства X и неограниченного подмножества A кривая $\Bigl\{A \times_{\ell^1} (tX)\colon t \in [0,\, \infty)\Bigr\}$ является геодезической в классе Громова – Хаусдорфа. После этого мы приводим пример пространства из облака $\mathbb{R}^n$, для которого умножение на $t > 0$ не будет давать геодезическую в классе Громова – Хаусдорфа. А именно, мы доказываем, что для произвольных $n \in \mathbb{N}$, $\lambda > 1$ выполнено неравенство $\operatorname{dist}_{GH}\bigl(\mathbb{Z}^n,\, \lambda\mathbb{Z}^n\bigr) \geqslant \frac{1}{2}$, откуда следует, что $\mathbb{Z}^n$ является искомым контрпримером. Более того, из данного неравенства следует, что отображение умножения всех пространств облака $\mathbb{R}^n$ на произвольное $\lambda > 0$ не является непрерывным. Тем самым мы показываем, что доказательство стягиваемости пространства Громова – Хаусдорфа принципиально не переносится на случай облака $\mathbb{R}^n$. Для простоты изложения в данном месте мы не пользуемся техникой работы с классами, фильтрованными множествами, предложенной в [1]. Под непрерывностью отображения умножения всех пространств облака $[\mathbb{R}^n]$ на $\lambda > 0$ мы подразумеваем следующее естественное свойство: если последовательность метрических пространств $(X_n)_n$ таких, что $X_n \in [\mathbb{R}^n]$, сходится по Громову–Хаусдорфу к метрическому пространству X, то $(\lambda X_n)_n$ сходится по Громову–Хаусдорфу к λX.

2. Основные определения и предварительные результаты

В данном разделе мы приводим определения основных используемых конструкций, вводим обозначения, а также формулируем вспомогательные результаты, которые понадобятся нам при доказательстве основных теорем.

2.1. Расстояние Громова – Хаусдорфа

Метрическим пространством называется произвольная пара $(X,\, \operatorname{dist}_X)$, где X — произвольное множество, $\operatorname{dist}_X\colon X \times X \to [0,\, \infty)$ — некоторая метрика на нём, то есть неотрицательная, симметричная функция, удовлетворяющая неравенству треугольника.

Расстояние между произвольными двумя точками x и y некоторого метрического пространства $(X,\, \operatorname{dist}_X)$, для краткости, мы часто будем обозначать через $|xy|$. Через $U_r^X(a) = \{x \in X\colon |ax| < r\}$, $B_r^X(a) = \{x \in X\colon |ax| \leqslant r\}$ обозначим открытый и замкнутый шары с центром в точке a радиуса r в метрическом пространстве X. В тех случаях, когда понятно, в каком метрическом пространстве X рассматриваются шары, мы будем опускать верхний индекс. Для произвольного подмножества $A \subset X$ метрического пространства пусть

$U_r(A) = \cup_{a\in A} U_r(a)$ — открытая r-окрестность A. Для непустых подмножеств $A \subset X$, $B \subset X$ положим $\operatorname{dist}(A, B) = \inf\bigl\{|ab| : a \in A,\ b \in B\bigr\}$.

Определение 1. *Пусть A и B — непустые подмножества метрического пространства. Расстоянием по Хаусдорфу между A и B называется величина*

$$\operatorname{dist}_H(A, B) = \inf\bigl\{r > 0\colon A \subset U_r(B),\ B \subset U_r(A)\bigr\}.$$

Определение 2. *Пусть X и Y — метрические пространства. Тройку (X', Y', Z), состоящую из метрического пространства Z и двух его подмножеств X' и Y', изометричных X и Y соответственно, назовём* ***реализацией пары*** *(X, Y).*

Определение 3. ***Расстоянием*** *$\operatorname{dist}_{GH}(X, Y)$* ***по Громову-Хаусдорфу*** *между X и Y назовём точную нижнюю грань чисел r, для которых существует реализация (X', Y', Z) пары (X, Y) такая, что $\operatorname{dist}_H(X', Y') \leqslant r$.*

Пусть теперь X, Y — непустые множества.

Определение 4. *Каждое $\sigma \subset X \times Y$ называется* ***отношением*** *между X и Y.*

Обозначим через $\mathcal{P}_0(X, Y)$ множество всех непустых отношений между X и Y.

Положим

$$\pi_X\colon X \times Y \to X,\ \pi_X(x, y) = x,$$
$$\pi_Y\colon X \times Y \to Y,\ \pi_Y(x, y) = y.$$

Определение 5. *Отношение $R \subset X \times Y$ называется* ***соответствием****, если $\pi_X|_R$ и $\pi_Y|_R$ сюръективны.*

Обозначим $\mathcal{R}(X, Y)$ множество соответствий между X и Y.

Определение 6. *Пусть X, Y — метрические пространства, $\sigma \in \mathcal{P}_0(X, Y)$, тогда* ***искажением*** *σ называется величина*

$$\operatorname{dis}\sigma = \sup\Bigl\{\bigl||xx'| - |yy'|\bigr|\colon (x, y),\ (x', y') \in \sigma\Bigr\}.$$

Предложение 1 ([2]). *Для любых метрических пространств X и Y выполняется равенство*

$$2\operatorname{dist}_{GH}(X, Y) = \inf\bigl\{\operatorname{dis} R\colon R \in \mathcal{R}(X, Y)\bigr\}.$$

2.2. Облака

Через $\mathcal{VGH}$ обозначим класс всех непустых метрических пространств, наделённый расстоянием Громова – Хаусдорфа.

Теорема 1 ([2]). *Расстояние Громова – Хаусдорфа является обобщённой псевдометрикой на $\mathcal{VGH}$, обнуляющейся на каждой паре изометричных пространств. А именно, расстояние Громова – Хаусдорфа симметрично, удовлетворяет неравенству треугольника, но, вообще говоря, может быть бесконечно.*

Класс $\mathcal{GH}_0$ получается из $\mathcal{VGH}$ факторизацией по нулевым расстояниям, то есть по отношению эквивалентности: $X \sim_0 Y$, если и только если $\operatorname{dist}_{GH}(X, Y) = 0$.

Определение 7. *Рассмотрим отношение эквивалентности $\sim_1$ на $\mathcal{GH}_0$: $X \sim_1 Y$, если и только если $\operatorname{dist}_{GH}(X, Y) < \infty$. Соответствующие классы эквивалентности называются* ***облаками****.*

Для произвольного метрического пространства X задаваемое им облако мы будем обозначать через $[X]$. Через Δ_1 обозначим метрическое пространство, состоящее из одной точки. Таким образом, $[\Delta_1]$ — это облако, состоящее из классов всех ограниченных пространств на нулевом расстоянии друг от друга.

2.3. Декартово произведение метрических пространств

Определение 8. *Пусть X, Y — два непустых множества. Через $X \times_\rho Y$ будем обозначать декартово произведение X и Y, наделённое метрикой ρ.*

Пусть теперь $(X, \operatorname{dist}_X)$, $(Y, \operatorname{dist}_Y)$ — два произвольных метрических пространства.

Определение 9. *Через $X \times_{\ell^1} Y$ будем обозначать декартово произведение $X \times Y$, наделённое метрикой*

$$\operatorname{dist}\big(p, p'\big) = \operatorname{dist}_X(x, x') + \operatorname{dist}_Y(y, y'),$$

где $p = (x, y)$, $p' = (x', y')$ — произвольные точки $X \times Y$.

Определение 10. *Пусть A_1, A_2, B_1, B_2 — непустые.* ***Декартовым произведением*** *соответствий $R_1 \in \mathcal{R}(A_1, A_2)$ и $R_2 \in \mathcal{R}(B_1, B_2)$ назовём следующее отношение $R_1 \times R_2$ между $A_1 \times B_1$ и $A_2 \times B_2$:*

$$R_1 \times R_2 = \Big\{\big((a_1, b_1), (a_2, b_2)\big) \colon (a_1, a_2) \in R_1,\ (b_1, b_2) \in R_2\Big\}.$$

Лемма 1 ([2], [10]). *Пусть A_1, A_2, B_1, B_2 — произвольные метрические пространства, $R_1 \in \mathcal{R}(A_1, A_2)$ и $R_2 \in \mathcal{R}(B_1, B_2)$. Тогда*

(1) $R_1 \times R_2 \in \mathcal{R}\big(A_1 \times_{\ell^1} B_1, A_2 \times_{\ell^1} B_2\big)$*;*

(2) $\operatorname{dis} R_1 \times R_2 \leqslant \operatorname{dis} R_1 + \operatorname{dis} R_2$.

Нам понадобится следующее несложное утверждение

Лемма 2. *Пусть $A_1, A_2 \in [X]$ и $B_1, B_2 \in [Y]$ для некоторых метрических пространств X, Y. Тогда*

$$\operatorname{dist}_{GH}\big(A_1 \times_{\ell^1} B_1, A_2 \times_{\ell^1} B_2\big) \leqslant \operatorname{dist}_{GH}(A_1, A_2) + \operatorname{dist}_{GH}(B_1, B_2).$$

Доказательство. По условию $\operatorname{dist}_{GH}(A_1, A_2) < \infty$, $\operatorname{dist}_{GH}(B_1, B_2) < \infty$. По предложению 1 для любого $\varepsilon > 0$ найдутся соответствия $R_1 \in \mathcal{R}(A_1, A_2)$ и $R_2 \in \mathcal{R}(B_1, B_2)$ такие, что $\operatorname{dis} R_1 < 2\operatorname{dist}_{GH}(A_1, A_2) + \varepsilon$, $\operatorname{dis} R_2 < 2\operatorname{dist}_{GH}(B_1, B_2) + \varepsilon$. Рассмотрим соответствие $R_1 \times R_2$ между $A_1 \times B_1$ и $A_2 \times B_2$. Согласно лемме 1 выполнено неравенство

$$\operatorname{dis}\big(R_1 \times R_2\big) \leqslant \operatorname{dis} R_1 + \operatorname{dis} R_2 \leqslant 2\big(\operatorname{dist}_{GH}(A_1, A_2) + \operatorname{dist}_{GH}(B_1, B_2)\big) + 2\varepsilon.$$

По предложению 1 в силу произвольности $\varepsilon > 0$ получаем, что

$$\operatorname{dist}_{GH}\big(A_1 \times_{\ell^1} B_1, A_2 \times B_2\big) \leqslant \operatorname{dist}_{GH}(A_1, A_2) + \operatorname{dist}_{GH}(B_1, B_2),$$

что и требовалось доказать. □

2.4. Вспомогательные результаты

В данном разделе мы приведём ещё два утверждения, которые понадобятся нам в доказательствах.

Теорема 2 ([2], [10]). *Кривая tX, $t \in [0, \infty)$ является геодезической классе Громова–Хаусдорфа для произвольного ограниченного метрического пространства X.*

Теорема 3 ([8]). *Для числа $N(t)$ точек с целыми координатами в единичном шаре $B_t(0) \subset \mathbb{R}^n$ справедлива следующая асимптотическая формула*

$$N(t) = \operatorname{Vol} B_1(0) \cdot t^n\big(1 + o(1)\big),\ t \to \infty,$$

где $\operatorname{Vol} B_1(0)$ — объём единичного шара в $\mathbb{R}^n$.

3. Основные результаты

Теорема 4. *Предположим, что* $A' \in [A]$, $A \subset \mathbb{R}$ — *неограниченное подмножество,* $B \subset \mathbb{R}$, X, $Y \in [\Delta_1]$. *Тогда*

$$\operatorname{dist}_{GH}(A' \times_{\ell^1} X,\, B \times_{\ell^1} Y) \geqslant \frac{\operatorname{diam} X - \operatorname{diam} Y}{2}.$$

Доказательство. Положим $P = A' \times_{\ell^1} X$, $Q = B \times_{\ell^1} Y$.

Если $\operatorname{dist}_{GH}(P, Q) = \infty$, то искомое неравенство очевидно.
Предположим, что $\operatorname{dist}_{GH}(P, Q) < \infty$. Выберем произвольное соответствие R между P и Q с конечным искажением $c := \operatorname{dis} R$.

Пусть также x_0, $x_1 \in X$ таковы, что $|x_0x_1| = t$.

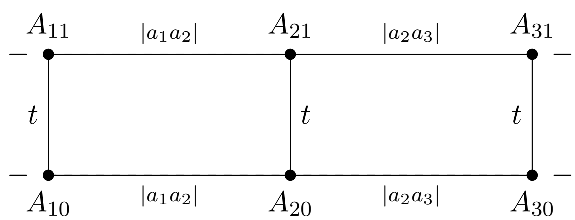
Так как $A' \in [A]$, то найдётся соответствие S между A и A' с искажением $\operatorname{dis} S = w < \infty$.

Поскольку $A \subset \mathbb{R}$ — неограниченное подмножество, существуют точки $p_1 < p_2 < \ldots < p_{2n+1}$ из A такие, что $d_i := |p_ip_{i+1}| > 100(t + c + w + \operatorname{diam} Y)$ для всех $i = 1, \ldots, 2n+1$. Выберем произвольные $a_i \in S(p_i)$.

Положим $A_{ij} = (a_i, x_j) \in A' \times_{\ell^1} X$, $i = 1, \ldots, 2n+1$, $j = 0, 1$.

Заметим, что для всех $1 \leqslant i < k \leqslant 2n+1$, $j \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ выполнены равенства

$$|A_{ij}A_{k\,j+1}| = |a_ia_k| + t, \ |A_{ij}A_{kj}| = |a_ia_k|.$$



Выберем $B_{ij} = (b_{ij}, y_{ij}) \in R(A_{ij})$ произвольным образом.

Заметим, что выполнены неравенства

$$|B_{ik}B_{jl}| \geqslant |b_{ik} - b_{jl}| = |B_{ik}B_{jl}| - \operatorname{dist}_Y(y_{ik}, y_{jl}) \geqslant |B_{ik}B_{jl}| - \operatorname{diam} Y.$$

Лемма 3. *Для произвольных* $1 \leqslant i < j < k \leqslant 2n+1$ *и* α, β, γ *из* $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, *точка* $b_{j\beta}$ *лежит строго между* $b_{i\alpha}$ *и* $b_{k\gamma}$.

Доказательство. По определению искажения выполнены неравенства

$$\begin{aligned}|b_{i\alpha}b_{k\gamma}| \geqslant |B_{i\alpha}B_{k\gamma}| - \operatorname{diam} Y \geqslant |A_{i\alpha}A_{k\gamma}| - (\operatorname{diam} Y + c) \geqslant \\ \geqslant |a_ia_k| - (\operatorname{diam} Y + c) \geqslant |p_ip_k| - (\operatorname{diam} Y + c + w) = \\ = (d_i + \ldots + d_{k-1}) - (\operatorname{diam} Y + c + w).\end{aligned}$$

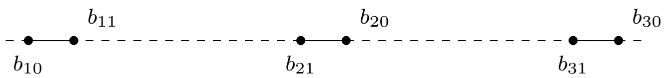
Предположим, что доказываемое утверждение неверно. Тогда

$$\begin{aligned}|b_{i\alpha}b_{k\gamma}| = \big||b_{i\alpha}b_{j\beta}| - |b_{j\beta}b_{k\gamma}|\big| \leqslant \max\big\{|b_{i\alpha}b_{j\beta}|,\, |b_{j\beta}b_{k\gamma}|\big\} \leqslant \max\big\{|B_{i\alpha}B_{j\beta}|,\, |B_{j\beta}B_{k\gamma}|\big\} \leqslant \\ \leqslant \max\big\{|A_{i\alpha}A_{j\beta}| + c,\, |A_{j\beta}A_{k\gamma}| + c\big\} \leqslant \max\big\{|a_ia_j| + t + c,\, |a_ja_k| + t + c\big\} \leqslant \\ \leqslant \max\big\{|p_ip_j| + t + c + w,\, |p_jp_k| + t + c + w\big\} = \\ = \max\big\{(d_i + \ldots + d_{j-1}) + w + t + c,\, (d_j + \ldots + d_{k-1}) + w + t + c\big\} < \\ < (d_i + \ldots + d_{k-1}) - w - c - \operatorname{diam} Y,\end{aligned}$$

где последнее неравенство выполнено, поскольку $d_l > 2(w+c)+t+\operatorname{diam} Y$ для каждого l — противоречие. $\square$

Таким образом, без ограничения общности можно считать, что пары точек $\{b_{ij},\, b_{i\,j+1}\}$ расположены на прямой по возрастанию индексов i.

Выберем индексы $i_1,\, i_2,\, \ldots,\, i_{2n+1} \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ так, что:
1) b_{1i_1} — самая левая точка из всех b_{ij}, $i = 1,\, \ldots,\, 2n+1$, $j = 0,\, 1$;
2) $|A_{ji_j} A_{j+1\, i_{j+1}}| = t + |a_j a_{j+1}|$ для каждого $j = 1,\, \ldots,\, 2n$.



Тогда выполнены неравенства

$$
\begin{aligned}
c + w + (d_1 + \ldots + d_{2n}) &= c + w + |p_1 p_{2n+1}| \geqslant c + |a_{1i_1} a_{2n+1\, i_{2n+1}}| = \\
&= c + |A_{1i_1} A_{2n+1\, i_{2n+1}}| \geqslant |B_{1i_1} B_{2n+1\, i_{2n+1}}| \geqslant |b_{1i_1} b_{2n+1\, i_{2n+1}}| = \sum_{k=1}^{2n} |b_{ki_k} b_{k+1\, i_{k+1}}| \geqslant \\
&\geqslant \sum_{k=1}^{2n} \bigl(|B_{ki_k} B_{k+1\, i_{k+1}}| - \operatorname{diam} Y\bigr) \geqslant \sum_{k=1}^{2n} \bigl(|A_{ki_k} A_{k+1\, i_{k+1}}| - c - \operatorname{diam} Y\bigr) = \\
&= \sum_{k=1}^{2n} |a_k a_{k+1}| + (t - c - \operatorname{diam} Y)\cdot 2n \geqslant |a_{1i_1} a_{2n+1\, i_{2n+1}}| + (t - c - \operatorname{diam} Y)\cdot 2n \geqslant \\
&\geqslant |p_{1i_1} p_{2n+1\, i_{2n+1}}| - w + (t - c - \operatorname{diam} Y)\cdot 2n = (d_1 + \ldots + d_{2n}) - w + (t - c - \operatorname{diam} Y)\cdot 2n.
\end{aligned}
$$

Получаем, что

$$
c + \frac{2w}{2n+1} + \frac{2n}{2n+1} \operatorname{diam} Y \geqslant \frac{2n}{2n+1} t.
$$

В силу того что t можно выбрать сколь угодно близким к $\operatorname{diam} X$, а n — сколь угодно большим, получаем, что $c \geqslant \operatorname{diam} X - \operatorname{diam} Y$.

Теперь в силу произвольности выбранного соответствия R искомая оценка следует из предложения 1. $\square$

Следствие 1. 1) *Предположим, что $A,\, B \subset \mathbb{R}$, $X,\, Y \in [\Delta_1]$, A и B — неограниченные. Тогда*

$$
\operatorname{dist}_{GH}(A \times_{\ell^1} X,\, B \times_{\ell^1} Y) \geqslant \left| \frac{\operatorname{diam} X - \operatorname{diam} Y}{2} \right|.
$$

2) *Если $A \in [\mathbb{R}]$, $X \in [\Delta_1]$, то*

$$
\operatorname{dist}_{GH}\bigl(A \times_{\ell^1} X,\, \mathbb{R}\bigr) \geqslant \frac{\operatorname{diam} X}{2}.
$$

Доказательство. 1) Поскольку $A,\, B \subset \mathbb{R}$ — неограниченные подмножества, согласно теореме 4 выполнены неравенства

$$
\begin{aligned}
\operatorname{dist}_{GH}(A \times_{\ell^1} X,\, B \times_{\ell^1} Y) &\geqslant \frac{\operatorname{diam} X - \operatorname{diam} Y}{2}, \\
\operatorname{dist}_{GH}(B \times_{\ell^1} Y,\, A \times_{\ell^1} X) &\geqslant \frac{\operatorname{diam} Y - \operatorname{diam} X}{2},
\end{aligned}
$$

откуда следует искомое неравенство.

2) Применив неравенство теоремы 4 для пространств $A \times_{\ell^1} X$ и $\mathbb{R} \times_{\ell^1} \Delta_1$, получим искомое неравенство. $\square$

Следствие 2. *Пусть X — ограниченное метрическое пространство, $A \subset \mathbb{R}$ — неограниченное подмножество. Тогда для любых неотрицательных t_1, t_2 выполнено*

$$\operatorname{dist}_{GH}\big(A \times_{\ell^1} (t_1X),\, A \times_{\ell^1} (t_2X)\big) = \frac{|t_1 - t_2|}{2} \operatorname{diam} X.$$

Доказательство. Положим $A_t = A \times_{\ell_1} (tX)$. Из теоремы 4 вытекает, что $\operatorname{dist}_{GH}(A_{t_1}, A_{t_2}) \geqslant \geqslant \frac{|t_1-t_2| \operatorname{diam} X}{2}$. С другой стороны, по теореме 2 верно равенство $\operatorname{dist}_{GH}\big(t_1X, t_2X\big) = = |t_1 - t_2| \operatorname{diam} X$. Тогда из леммы 2 следует, что $\operatorname{dist}_{GH}(A_{t_1}, A_{t_2}) \leqslant \frac{|t_1-t_2| \operatorname{diam} X}{2}$. Следовательно, $\operatorname{dist}_{GH}(A_{t_1}, A_{t_2}) = \frac{|t_1-t_2|}{2} \operatorname{diam} X$, что и требовалось доказать. □

Следствие 3. *Для произвольного ограниченного метрического пространства X кривая $\mathbb{R} \times_{\ell^1} (tX)\colon t \in [0, +\infty)$ является геодезической в классе Громова – Хаусдорфа.*

Пример 7. *Покажем, что для произвольных $P = A \times_{\ell^1} X$ и $Q = B \times_{\ell^1} Y$ таких, что $A, B \in [\mathbb{R}]$, $X, Y \in [\Delta_1]$, оценка $\operatorname{dist}_{GH}(P, Q) \geqslant |\operatorname{diam}(X) - \operatorname{diam}(Y)|/2$, вообще говоря, неверна.*

Рассмотрим $P = (\mathbb{R} + c) \times_{\ell_1} [0,1]$ и $Q = \mathbb{R} \times_{\ell^1} \big([0,1] + c\big)$. Здесь $\mathbb{R} + c$, $[0,1] + c$ — это пространства $\mathbb{R}$, $[0,1]$ с метриками, индуцированными из $\mathbb{R}$ и увеличенными на константу $c > 0$. Пространства P и Q изометричны посредством тождественного отображения, однако разность диаметров их ограниченных множителей равна c.

Теорема 5. *Для произвольных $\lambda > 1$, $n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство*

$$\operatorname{dist}_{GH}\big(\mathbb{Z}^n, \lambda\mathbb{Z}^n\big) \geqslant \frac{1}{2}.$$

Доказательство. Пусть $R \in \mathcal{R}\big(\mathbb{Z}^n, \lambda\mathbb{Z}^n\big)$ — соответствие с искажением $c := \operatorname{dis} R < \infty$. Так как сдвиг $\mathbb{Z}^n$ на целочисленный вектор является изометрией, то без ограничения общности можно считать, что $(0, 0) \in R$.

Предположим, что R биективно. Тогда рассмотрим шар $B = B^{\mathbb{Z}^n}_{\lambda t}(0)$ для некоторого $t > 0$. Заметим, что $R(B) \subset B' = B^{\lambda\mathbb{Z}^n}_{\lambda t + c}(0)$. Через $N(t)$, $N'(t)$ обозначим количества точек в шарах B и B' соответственно. Согласно теореме 3 при $t \to \infty$ выполнены равенства

$$N(t) = \operatorname{Vol} B^{\mathbb{R}^n}_1(0)\lambda^n t^n\big(1 + o(1)\big), \tag{1}$$

$$N'(t) = \operatorname{Vol} B^{\mathbb{R}^n}_1(0)\Big(t + \frac{c}{\lambda}\Big)^n\big(1 + o(1)\big). \tag{2}$$

Поскольку R биективно, то из включения $R(B) \subset B'$ следует, что $N'(t) \geqslant N(t)$. Однако из формул (1), (2) следует, что $\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{N'(t)} = \lambda^n > 1$ — противоречие.

Значит, R не является биективным. Тогда $c \geqslant 1$. В силу произвольности R по предложению 1 получаем искомое неравенство. □

Следствие 4. *Отображение $[\mathbb{R}^n] \times (0; +\infty) \to [\mathbb{R}^n]$, $(A, \lambda) \to \lambda A$ не является непрерывным по λ.*

Следствие 5. *Кривая $\lambda\mathbb{Z}^n$, $\lambda \in (0; \infty)$ не является непрерывной в классе Громова – Хаусдорфа. В частности, она не является геодезической.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Богатый С.А., Тужилин А.А. Класс Громова–Хаусдорфа: полнота и геометрия облаков // ArXiv e-prints. 2021. arXiv:2110.06101.

2. Бураго Д., Бураго Ю., Иванов С. Курс метрической геометрии. М.: МЦНМО, 2004. 512 с. (Пер. с англ.: Burago D., Burago Yu., Ivanov S. A Course in Metric Geometry. Providence: AMS, 2001).

3. Эдвардс Д. Структура суперпространства // Исследования по топологии. М.: Мир, 1979. С. 45–62. (Пер. с англ.: Edwards D. The structure of superspace // Studies in Topology. N.Y.: Academic Press, 1975. P. 89–110).

4. Громов М. Группы полиномиального роста и экспансирующие отображения // Публикации Математического института высших научных исследований. 1981. Т. 53. С. 53–78. (Пер. с фр.: Gromov M. Groups of polynomial growth and expanding maps // Publications Mathematiques I.H.E.S. 1981. Vol. 53. P. 53–78).

5. Громов М. Метрические структуры для римановых многообразий. М.: Мир, 1991. 328 с. (Пер. с фр.: Gromov M. Structures métriques pour les variétés riemanniennes. Paris: Cedic/Fernand Nathan, 1981).

6. Карлссон Г.Э., Мемоли Ф. Характеризация, устойчивость и сходимость методов иерархической кластеризации // Журнал машинного обучения. 2010. Т. 11, № 47. С. 1425–1470. DOI: 10.5555/1756006.1859911. (Пер. с англ.: Carlsson G.E., Memoli F. Characterization, stability and convergence of hierarchical clustering methods // J. Mach. Learn. Res. 2010. Vol. 11. P. 1425–1470).

7. Громов М. Метрические структуры для римановых и неримановых пространств. М.: МЦНМО, 2007. 496 с. (Пер. с англ.: Gromov M. Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces. Boston: Birkhäuser, 1999).

8. Кан Х., Соболев А.В. Распределение точек целочисленной решетки в шаре с центром в диофантовой точке // Математика. 2010. Т. 56, № 1. С. 118–134. (Пер. с англ.: Kang H., Sobolev A.V. Distribution of integer lattice points in a ball centred at a diophantine point // Mathematika. 2010. Vol. 56(1). P. 118–134).

9. Лим С., Мемоли Ф., Смит З. Расстояние Громова–Хаусдорфа между сферами // ArXiv e-prints. 2022. arXiv:2105.00611v5.

10. Тужилин А.А. Лекции по геометрии расстояний Хаусдорфа и Громова–Хаусдорфа. М.: МГУ, 2020. 210 с. // ArXiv e-prints. 2019. arXiv:2012.00756.

11. Тужилин А.А. Кто изобрел расстояние Громова–Хаусдорфа? // Историко-математические исследования. 2017. Т. 18. С. 45–62 // ArXiv e-prints. 2016. arXiv:1612.00728.

12. Вихров А. Плотность метрических пространств в общем положении в классе Громова–Хаусдорфа // Топология и ее приложения. 2024. Т. 342. С. 108771. DOI: 10.1016/j.topol.2024.108771.

REFERENCES

1. Bogaty, S.A., Tuzhilin, A.A., 2021, “Gromov – Hausdorff class: its completeness and cloud geometry”, *ArXiv e-prints*, arXiv:2110.06101.

2. Burago, D., Burago, Yu., Ivanov, S., 2001, *A Course in Metric Geometry*, Graduate Studies in Mathematics 33, AMS.

3. Edwards, D., 1975, “The structure of superspace”, in *Studies in Topology*, Academic Press.

4. Gromov, M., 1981, “Groups of polynomial growth and expanding maps”, *Publications Mathematiques I.H.E.S.*, vol. 53, pp. 53–78.
5. Gromov, M., 1981, *Structures métriques pour les variétés riemanniennes*, Textes Math. 1.
6. Carlsson, G.E., Memoli, F., 2010, “Characterization, stability and convergence of hierarchical clustering methods”, *J. Mach. Learn.*, vol. 11, no. 47, pp. 1425–1470.
7. Gromov, M., 1999, *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces*, Birkhäuser.
8. Kang, H., Sobolev, A.V., 2010, “Distribution of integer lattice points in a ball centred at a diophantine point”, *Mathematika*, vol. 56, no. 1, pp. 118–134.
9. Lim, S., Memoli, F., Smith, Z., 2022, “The Gromov – Hausdorff distance between spheres”, *ArXiv e-prints*, arXiv:2105.00611v5.
10. Tuzhilin, A.A., 2019, *Lectures on Hausdorff and Gromov – Hausdorff distance geometry*, arXiv:2012.00756.
11. Tuzhilin, A.A., 2016, “Who invented the Gromov – Hausdorff Distance?”, *ArXiv e-prints*, arXiv:1612.00728.
12. Vihrov, A., 2024, “Denseness of metric spaces in general position in the Gromov – Hausdorff class”, *Topol. Its Appl.*, vol. 342, 108771.

Получено: 15.12.2024
Принято в печать: 07.04.2025

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 26. Выпуск 2.

УДК 514 DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-2-186-197

О расстоянии Громова – Хаусдорфа между облаком ограниченных метрических пространств и облаком с нетривиальной стационарной группой

Б. А. Нестеров

Нестеров Борис Аркадьевич — Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: nesterov.boris123@gmail.com

Аннотация

В статье обсуждается класс всех метрических пространств, рассматриваемых с точностью до нулевого расстояния Громова – Хаусдорфа между ними. Этот класс разбивается на облака — классы пространств, лежащих на конечном расстоянии от данного. В работе доказывается, что каждое облако является собственным классом. Между облаками естественно определяется расстояние Громова – Хаусдорфа по аналогии с метрическими пространствами. В работе показано, что при некоторых ограничениях расстояние между облаком ограниченных метрических пространств и облаком с нетривиальной стационарной группой равно бесконечности. В частности, посчитано расстояние между облаком ограниченных метрических пространств и облаком, содержащим вещественную прямую.

Ключевые слова: метрические пространства, расстояние Громова – Хаусдорфа, облака, собственный класс.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:
Нестеров Б. А. О расстоянии Громова – Хаусдорфа между облаком ограниченных метрических пространств и облаком с нетривиальной стационарной группой // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 2, с. 186–197.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 26. No. 2.

UDC 514 DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-2-186-197

On the Gromov – Hausdorff distance between the cloud of bounded metric spaces and a cloud with nontrivial stabilizer

B. A. Nesterov

Nesterov Boris Arkadyevich — Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: nesterov.boris123@gmail.com

Abstract

The paper studies the class of all metric spaces considered up to zero Gromov – Hausdorff distance between them. In this class, we examine clouds — classes of spaces situated at finite Gromov – Hausdorff distances from a reference space. The paper proves that all clouds are proper classes. The Gromov – Hausdorff distance is defined for clouds analogous to the case of metric spaces. The paper shows that under certain limitations the distance between the cloud of bounded metric spaces and a cloud with a nontrivial stabilizer is finite. In particular, the distance between the cloud of bounded metric spaces and the cloud containing the real line is calculated.

Keywords: metric spaces, Gromov – Hausdorff distance, clouds, proper class.

Bibliography: 15 titles.

For citation:
Nesterov B. A. 2025, “On the Gromov – Hausdorff distance between the cloud of bounded metric spaces and cloud with nontrivial stabilizer”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 2, pp. 186–197.

1. Введение

Настоящая работа посвящена исследованию расстояния Громова – Хаусдорфа [1, 2, 3], определенному на классе всех непустых метрических пространств. Известно, что на этом классе расстояние является обобщенной псевдометрикой, равной нулю на парах изометричных пространств, причем на неизометричных пространствах расстояние также может быть равно нулю (здесь ”псевдо-” означает, что расстояние может быть равным 0 на неравных элементах, а ”обобщенная” означает, что расстояние может принимать бесконечные значения). Традиционно расстояние Громова – Хаусдорфа изучается на классе компактных метрических пространств, рассматриваемых с точностью до изометрии. Этот класс называется пространством Громова – Хаусдорфа. На нем расстояние становится метрикой. Далее расстояние Громова – Хаусдорфа между пространствами X и Y будем обозначать $d_{GH}(X,Y)$ или $|X,Y|$.

Сам М. Громов использовал расстояние Громова – Хаусдорфа в [2] для доказательства теоремы о группах полиномиального роста. Позднее это расстояние нашло применение в сфере компьютерной геометрии, где было использовано для сопоставления образов и измерения их похожести [4]. Также расстояние Громова – Хаусдорфа может быть использовано в сфере робототехники при планировании перемещений [5]. Измерение расстояния Громова – Хаусдорфа алгоритмически является NP-трудной проблемой, для упрощения расчетов расстояние часто модифицируют, например см. [6].

В [3] М. Громов рассматривал расстояние Громова – Хаусдорфа также и на классах неограниченных пространств, находящихся на конечном расстоянии друг от друга. Данные классы впоследствии стали называться *облаками*, именно они являются основным предметом исследования настоящей работы. Громов утверждал, что все облака полные и стягиваемые, но доказательства этих фактов не приводил [3]. В дальнейшем Богатый С. А. и Тужилин А. А. в [7] доказали полноту облаков. Проблема стягиваемости оказалась существенно сложнее.

Прежде всего отметим, что стягиваемость является топологическим понятием, так как основана на непрерывных отображениях. Напомним, что в аксиоматике фон Неймана–Бернайса–Гёделя (NBG) всякий объект является либо множеством, либо собственным классом. Отличие в том, что собственный класс не может быть элементом другого класса [8, 9, 10]. Для собственных классов нельзя задать топологию в привычном понимании, так как тогда сам класс должен быть ее элементом. В работе [11] для собственного класса обобщения топологии и непрерывного отображения определяются с использованием понятия фильтрации множествами. Если в классе существует такая фильтрация, то такой класс называется топологическим. В настоящей работе доказывается, что каждое облако является собственным классом. Поэтому, для того, чтобы можно было говорить о стягиваемости облаков, необходимо обобщение топологии, что было сделано в [11].

Обобщения топологии оказывается недостаточно. Для того чтобы это продемонстрировать, введем ряд дополнительных понятий. Для всякого метрического пространства можно задать операцию умножения его на вещественное положительное число λ. Под действием этой операции $H_\lambda\colon X \to \lambda X$ все расстояния в метрическом пространстве X умножаются на λ. Кроме того, в случае ограниченных метрических пространств можно доопределить эту операцию в нуле, положив $0\cdot X := \Delta_1$. Хорошо известно, что для любых ограниченных пространств X, Y и вещественных неотрицательных λ, μ выполняется $|\lambda X, \mu X| = |\lambda - \mu|\,|X, \Delta_1| = \frac{1}{2}|\lambda - \mu| \operatorname{diam} X$ и $|\lambda X, \lambda Y| = \lambda |X, Y|$, где Δ_1 — одноточечное метрическое пространство, а $\operatorname{diam} X$ — диаметр пространства X. Исходя из этих свойств несложно показать, что облако ограниченных метрических пространств действительно является стягиваемым. Если же рассматривать облако, содержащее пространство $\mathbb{R}^n$, в них операция H_λ при всех λ переводит облако в себя, но в некоторых точках разрывна. Более того, существуют также пространства, которые при умножении на некоторые положительные вещественные числа переходят в пространства на бесконечном расстоянии Громова – Хаусдорфа [7]. Это означает, что содержащие их облака при таком умножении не переходят в себя.

Из приведенных выше свойств видно, что если при умножении на λ пространство остается в своем облаке, то и все пространства из этого облака также остаются в нем. Более того, если пространство переходит в другое облако, то и все пространства из того же облака переходят туда же. Тем самым операция умножения на λ переносится и на облака. Из сказанного выше вытекает, что это отображение обладает нетривиальными свойствами, что мотивирует интерес к его исследованию. Для изучения операции H_λ было введено понятие стационарной группы облака — мультипликативной группы всех тех положительных λ, для которых H_λ оставляет облако на месте. В [12] было введено понятие центра облака — пространства, переходящего в пространство на нулевом расстоянии от себя под действием преобразований стационарной группы, а также было показано, что в каждом центр существует и единственен с точностью до нулевых расстояний. Понятия стационарной группы и центра облака играют ключевую роль в данной работе.

Настоящая работа в большей степени посвящена исследованию расстояния Громова – Хаусдорфа между облаками, одно из которых — облако ограниченных метрических пространств. Формулируется и доказывается теорема об образе Δ_1 при соответствии с конечным искажением между облаком ограниченных метрических пространств и облаком с нетривиальной стационарной группой. Далее, как следствие доказывается теорема о том, что расстояние от облака ограниченных метрических пространств до облаков специального вида с нетривиальными стационарными группами равно бесконечности. В качестве примера приводится облако, содержащее $\mathbb{R}$.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю, Тужилину А.А. и профессору Иванову А.О. за постановку задачи и плодотворное обсуждение результатов.

2. Основные определения и предварительные результаты

Пусть X и Y — метрические пространства. Тогда между ними можно задать расстояние, называемое расстоянием Громова – Хаусдорфа. Введем два его эквивалентных определения [13].

Определение 1. *Пусть X, Y — метрические пространства.* Соответствием R *между этими пространствами называется сюръективное многозначное отображение между ними. Множество всех соответствий между X и Y обозначается $\mathcal{R}(X,Y)$. Также будем отождествлять соответствие и его график.*

Определение 2. *Пусть R — соответствие между X и Y.* Искажением *соответствия R является величина*

$$\operatorname{dis} R = \sup\Big\{\big||xx'| - |yy'|\big| : (x,y),(x',y') \in R\Big\}.$$

Тогда расстояние Громова – Хаусдорфа $d_{GH}(X,Y)$ *можно определить следующим образом*

$$d_{GH}(X,Y) = \frac{1}{2}\inf\big\{\operatorname{dis} R : R \in \mathcal{R}(X,Y)\big\}.$$

Определение 3. Реализацией *пары метрических пространств (X,Y) назовем тройку метрических пространств (X',Y',Z) таких, что $X' \subset Z$, $Y' \subset Z$, X' изометрично X, Y' изометрично Y.* Расстоянием Громова – Хаусдорфа $d_{GH}(X,Y)$ *между метрическими пространствами X, Y является точная нижняя грань чисел r таких, что существует реализация (X',Y',Z) и $d_H(X',Y') \leqslant r$, где d_H — расстояние Хаусдорфа.*

Далее, расстояние Громова – Хаусдорфа между метрическими пространствами X и Y будет обозначаться $|X,Y|$.

Рассмотрим собственный класс всех метрических пространств и отождествим в нем между собой все метрические пространства, находящиеся на нулевом расстоянии друг от друга. Обозначим получившийся класс $\mathcal{GH}_0$. На нем расстояние Громова – Хаусдорфа будет являться обобщенной метрикой.

Определение 4 ([7]). *В классе $\mathcal{GH}_0$ рассмотрим следующее отношение: $X \sim Y \Leftrightarrow \Leftrightarrow d_{GH}(X,Y) < \infty$. Нетрудно убедиться, что оно будет отношением эквивалентности. Классы этой эквивалентности называются* облаками. *Облако, в котором лежит метрическое пространство X будем обозначать $[X]$.*

Для любого метрического пространства X определена операция умножения его на положительное вещественное число λ: $X \mapsto \lambda X$, а именно $(X,\rho) \mapsto (X,\lambda\rho)$, расстояние между любыми точками пространства изменяется в λ раз.

Замечание 20. *Пусть метрические пространства X, Y лежат в одном облаке. Тогда $d_{GH}(\lambda X, \lambda Y) = \lambda d_{GH}(X,Y) < \infty$, т.е. пространства λX, λY также будут лежать в одном облаке.*

Определение 5. *Определим операцию умножения облака $[X]$ на положительное вещественное число λ как отображение, переводящее все пространства $Y \in [X]$ в пространства λY. По замечанию 20 все полученные пространства будут лежать в облаке $[\lambda X]$.*

При таком отображении облако может как измениться, так и перейти в себя. Для последнего случая вводится специальное определение.

Определение 6 ([12]). *Стационарной группой* $\mathrm{St}\big([X]\big)$ *облака* $[X]$ *называется подмножество* $\mathbb{R}_+$ *такое, что для всех* $\lambda \in \mathrm{St}\big([X]\big)$, $[X] = [\lambda X]$. *Полученное подмножество действительно будет подгруппой в* $\mathbb{R}_+$. *Тривиальной будем называть стационарную группу равную* $\{1\}$.

Приведем несколько примеров облаков и их стационарных групп.

- Пусть Δ_1 — одноточечное метрическое пространство. Тогда $\mathrm{St}\big([\Delta_1]\big) = \mathbb{R}_+$.
- $\mathrm{St}\big([\mathbb{R}]\big) = \mathbb{R}_+$.
- Предположим, что функция $\varphi(n)$ удовлетворяет соотношению $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(n+1)-\varphi(n) = +\infty$. Для $q>1$ зададим пространство $X_q = \big\{q^{\varphi(n)} : n\in\mathbb{N}\big\}$. Тогда выполняется $\mathrm{St}\big([X_q]\big) = \{1\}$[7].
- Для натурального p зададим пространство $X_p = \{p^n : n \in \mathbb{Z}\}$. Для любого простого p выполняется $\mathrm{St}\,[X_p] = \{p^n : n \in \mathbb{Z}\}$[14].

Лемма 1 ([12]). *В каждом облаке с нетривиальной стационарной группой существует единственное пространство* X *такое, что для любого* λ *из стационарной группы выполняется* $X = \lambda X$.

Определение 7. *Пространство из леммы 1 будем называть* центром *облака.*

Замечание 21. *В облаке* $[\Delta_1]$ *для любого пространства* X *выполняется:*

$$|\lambda X, \mu X| = |\lambda - \mu||X, \Delta_1|.$$

Замечание 22 (Ультраметрическое неравенство). *В облаке* $[\Delta_1]$ *для всех пространств* X_1, X_2 *выполняется неравенство:*

$$|X_1, X_2| \leqslant \max\{|X_1, \Delta_1|, |X_2, \Delta_1|\}$$

3. Мощность облаков

Метрические пространства по своему определению являются множествами. Соответственно для переноса конструкции расстояния Громова-Хаусдорфа на облака, необходимо либо установить, что они — множества, либо соответствующим образом изменить определение расстояния.

Воспользуемся леммой о виде множеств кардинальных чисел.

Лемма 2 ([15]). *У любого множества кардинальных чисел есть верхняя грань.*

Для доказательства теоремы нам понадобится следующее следствие.

Следствие 1. *Класс кардиналов, не ограниченных сверху, является собственным.*

Далее, сформулируем и докажем теорему о классе пространств в каждом облаке.

Теорема 1. *Все облака представляют собой собственные классы.*

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно показать, по следствию 1, что в любом облаке лежат пространства сколь угодно большой мощности. Пусть X – метрическое пространство мощности α. Расширим это пространство до пространства большей мощности. Обозначим Δ_β — симплекс мощности β, где $\beta > \alpha$. Обозначим $X_\beta = X \cup \Delta_\beta$. Зафиксируем произвольную точку x пространства X и положим расстояние от нее до любой точки симплекса равным 1. Для точек $x' \in X$, $y \in \Delta_\beta$ определим

$$\rho_{X_\beta}(y, x') = \rho_{X_\beta}(x', y) := \rho_X(x', x) + 1.$$

Расстояния между другими парами точек оставим без изменений. Симметричность и неотрцательность расстояния ρ_{X_β} очевидны. Для того чтобы полученное расстояние являлось метрикой достаточно проверить выполнение неравенства треугольника $\rho_{X_\beta}(x', z') \leqslant \rho_{X_\beta}(x', y') + \rho_{X_\beta}(y', z')$ только в том случае, если точки x', y', z' не лежат одновременно в Δ_β или в X. Случаи $x', z' \in \Delta_\beta$ и $x', z' \in X$ очевидны. Разберем подробнее случаи, когда $x' \in X, z' \in \Delta_\beta$:

$$y' \in X : \rho_{X_\beta}(x', z') = \rho_X(x, x') + 1 \leqslant \rho_X(x, y') + \rho_X(y', x') + 1 = \rho_X(x', y') + \rho_X(y', z')$$

$$y' \in \Delta_\beta : \rho_{X_\beta}(x', z') = \rho_X(x, x') + 1 \leqslant \rho_X(x', x) + 2 = \rho_X(x', y') + \rho_X(y', z')$$

Итак, полученное пространство действительно будет метрическим. Осталось заметить, что если вложить X в X_β, то X_β будет лежать в замкнутой окрестности X радиуса 1, что означает конечность расстояния между ними. $\square$

Замечание 23. *Поскольку все облака являются собственными классами, между любыми двумя облаками существует биекция. Это означает, в частности, что класс соответствий между любыми двумя облаками не пуст.*

Определение 8. *Пусть $\mathcal{R}\big([X],[Y]\big)$ — класс всех соответствий между облаками $[X]$ и $[Y]$. Определим* искажение *соответствия* $\operatorname{dis} R$ *аналогично определению 2.*
Расстоянием Громова – Хаусдорфа между облаками будем называть величину $d_{GH}\big([X],[Y]\big) = \frac{1}{2}\inf\big\{\operatorname{dis} R : R \in \mathcal{R}\big([X],[Y]\big)\big\}$.

4. Теорема об образе центра

Прежде, чем сформулировать теорему, приведем некоторые полезные утверждения о соответствиях.

Лемма 3. *Диаметр образа пространства не превосходит искажение соответствия.*

Доказательство. Если пространства Y_1, Y_2 лежат в образе X, то

$$\operatorname{dis} R \geqslant \big|\,|Y_1, Y_2| - |X, X|\,\big| = |Y_1, Y_2|,$$

откуда $\operatorname{diam} R(X) \leqslant \operatorname{dis} R$. $\square$

Следствие 2. *Если пространства лежат на расстоянии большем, чем искажение соответствия, то они не могут лежать в образе одного пространства.*

Теорема 2. *Пусть M – центр облака $[M]$, имеющего нетривиальную стационарную группу. R – соответствие между $[\Delta_1]$ и $[M]$ с конечным искажением ϵ. Тогда образ пространства Δ_1 лежит от M на расстоянии не большем 2ϵ.*

Доказательство. Нетривиальность стационарной группы $[M]$ означает, что найдется число $l > 1$ такое, что $\{l^j | j \in \mathbb{Z}\}$ является подгруппой в $\mathrm{St}\,[M]$.

Зафиксируем Y из образа Δ_1. Предположим, что $|M, Y| = d > \epsilon$. Обозначим $|Y, kY| = \rho$, $k \geqslant 2$, $k = l^{j_1}$. По неравенству треугольника $\rho + d \geqslant kd$, откуда $\rho \geqslant (k-1)d > (k-1)\epsilon$. Тогда kY лежит в образе $X \neq \Delta_1$. При этом, $\rho - \epsilon \leqslant |X, \Delta_1| \leqslant \rho + \epsilon$.

Возьмем произвольные $\alpha > 0$ и $\beta \in (0, 1)$. Для пространств $(1+\alpha)X, (1-\beta)X$ будут выполняться неравенства:

$$|X, (1+\alpha)X| = \alpha|X, \Delta_1| \leqslant \alpha\rho + \alpha\epsilon,$$

$$|X, (1-\beta)X| = \beta|X, \Delta_1| \leqslant \beta\rho + \beta\epsilon,$$

$$|(1+\alpha)X, (1-\beta)X| = (\alpha+\beta)|X, \Delta_1| \geqslant (\alpha+\beta)\rho - (\alpha+\beta)\epsilon.$$

Существуют $Y_\alpha, Y_\beta \in [M]$ такие, что $kY_\alpha \in R\big((1+\alpha)X\big)$, $kY_\beta \in R\big((1-\beta)X\big)$, и для них выполняются следующие неравенства:

$$|kY, kY_\alpha| \leqslant |X, (1+\alpha)X| + \epsilon \leqslant \alpha\rho + (\alpha+1)\epsilon,$$

$$|kY, kY_\beta| \leqslant |X, (1-\beta)X| + \epsilon \leqslant \beta\rho + (\beta+1)\epsilon,$$

$$|kY_\alpha, kY_\beta| \geqslant |(1+\alpha)X, (1-\beta)X| - \epsilon \geqslant (\alpha+\beta)\rho - (\alpha+\beta+1)\epsilon.$$

Поделим эти неравенства на k:

$$|Y, Y_\alpha| \leqslant \frac{\alpha}{k}\rho + \frac{\alpha+1}{k}\epsilon,$$

$$|Y, Y_\beta| \leqslant \frac{\beta}{k}\rho + \frac{\beta+1}{k}\epsilon,$$

$$|Y_\alpha, Y_\beta| \geqslant \frac{\alpha+\beta}{k}\rho - \frac{\alpha+\beta+1}{k}\epsilon.$$

и возьмем прообразы пространств Y, Y_α, Y_β:

$$|\Delta_1, X_\alpha| \leqslant \frac{\alpha}{k}\rho + \big(\frac{\alpha+1}{k} + 1\big)\epsilon,$$

$$|\Delta, X_\beta| \leqslant \frac{\beta}{k}\rho + \big(\frac{\beta+1}{k} + 1\big)\epsilon,$$

$$|X_\alpha, X_\beta| \geqslant \frac{\alpha+\beta}{k}\rho - \big(\frac{\alpha+\beta+1}{k} + 1\big)\epsilon.$$

Считая, что $\alpha > \beta$ получаем неравенство:

$$\frac{\alpha+\beta}{k}\rho - \big(\frac{\alpha+\beta+1}{k} + 1\big)\epsilon \leqslant \frac{\alpha}{k}\rho + \big(\frac{\alpha+1}{k} + 1\big)\epsilon,$$

$$\Updownarrow$$

$$\rho \leqslant \frac{k}{\beta}\left(\frac{2\alpha+\beta+2}{k} + 2\right)\epsilon,$$

$$\Updownarrow$$

$$\rho \leqslant \left(1 + \frac{2\alpha+2}{\beta} + 2\frac{k}{\beta}\right)\epsilon.$$

Нас интересует оценка сверху для d:

$$d \leqslant \frac{\rho}{k-1} \leqslant \left(\frac{1}{k-1} + \frac{2\alpha+2}{\beta(k-1)} + 2\frac{k}{\beta(k-1)}\right)\epsilon.$$

Последнее слагаемое в скобках строго больше 2 при любых $k > 2$, $\alpha > 0$, $\beta \in (0,1)$, а остальные слагаемые с ростом k стремятся к 0. Так как стационарная группа нетривиальна, в ней есть последовательности чисел стремящихся к 0 и к ∞. Устремив β к 1, а k к бесконечности получаем оценку:

$$|Y, M| \leqslant 2\epsilon,$$

которая завершает доказательство.

□

5. Невыполнение ультраметрического неравенства

Лемма 4. *Если X является подмножеством прямой и в $\mathbb{R} \setminus X$ лежит интервал диаметра $2d$, то X лежит от $\mathbb{R}$ на расстоянии, не меньшем d.*

Доказательство. В $\mathbb{R} \setminus X$ лежит интервал $(a-d, a+d)$. Предположим, что $d_{GH}(\mathbb{R}, X) < d$. Пусть $(\mathbb{R}', X', Y)$ - реализация $(\mathbb{R}, X)$ такая, что $d_H(\mathbb{R}', X') = d' < d$. Обозначим

$$U_1 := \cup_{x \in X', x \leqslant a-d} B\left(x, d' + \frac{d-d'}{2}\right), \quad U_2 := \cup_{x \in X', x \geqslant a+d} B\left(x, d' + \frac{d-d'}{2}\right),$$

то есть $U_1 \cup U_2$ — покрытие X' шарами радиуса $d' + \frac{d-d'}{2}$. Получаем, что U_1, U_2 - два открытых непересекающихся множества, но также $\mathbb{R}' \in U_1 \cup U_2$, что противоречит связности прямой. □
Для облака $[\Delta_1]$, по замечанию 22 справедливо ультраметрическое неравенство. Следующая лемма показывает, что для облака $[\mathbb{R}]$ это неравенство может не выполняться.

Рассмотрим $\mathbb{R}$ как подмножество $\mathbb{R}^2$ и добавим к нему точку $(0,1)$, расстояние до которой будет соответствовать метрике L_1 в $\mathbb{R}^2$. Обозначим это пространство $\widetilde{\mathbb{R}}$.

Теорема 3. *Для пространств $\mathbb{Z}$ и $\widetilde{\mathbb{R}}$ выполняются следующие утверждения:*

(1) *Пространства $\mathbb{Z}$ и $\widetilde{\mathbb{R}}$ находятся от $\mathbb{R}$ на расстоянии не большем $\frac{1}{2}$.*

(2) *Расстояние между $\mathbb{Z}$ и $\widetilde{\mathbb{R}}$ строго больше $\frac{1}{2}$.*

Доказательство. Вложением целых чисел в вещественную прямую получается реализация $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ с расстоянием Хаусдорфа равным $\frac{1}{2}$. Если вложить $\widetilde{\mathbb{R}}$ в $\mathbb{R}^2$ естественным образом, а $\mathbb{R}$ вложить как подмножество $\mathbb{R}^2$, равное $\left\{(x, \frac{1}{2}) : x \in \mathbb{R}\right\}$, расстояние Хаусдорфа между ними также будет равно $\frac{1}{2}$. Таким образом, доказан пункт 1.

Пусть R — соответствие между $\mathbb{Z}$ и $\widetilde{\mathbb{R}}$, с искажением, равным $1+\epsilon$ и в образе точки i из $\mathbb{Z}$ лежит $(0,1)$. По лемме 3 диаметр образа точки не может быть больше искажения соответствия, следовательно, образ i лежит в $(-\epsilon, \epsilon) \cup \left\{(0,1)\right\}$. Это означает, что для x не лежащих в $(-\epsilon, \epsilon)$, пара (i, x) не лежит в R. Обозначим через $\mathcal{N}$ множество всех целых чисел таких, что их образ лежит в $(-\epsilon, \epsilon) \cup \left\{(0,1)\right\}$. Множество $\mathcal{N}$ не пусто и не равно $\mathbb{Z}$, следовательно, по лемме 4, расстояние от $\mathbb{Z} \setminus \mathcal{N}$ до $\mathbb{R}$ будет не меньше 1. Из соответствия R уберем пару $\big(i, (0,1)\big)$, а также все пары (k, x) такие, что $x \in (-\epsilon, \epsilon)$. Получившееся множество обозначим R'. Так как все точки из $\mathbb{R} \setminus (-\epsilon, \epsilon)$ лежат в R только в паре с точками из $\mathbb{Z} \setminus \mathcal{N}$ и наоборот, множество R' будет соответствием между $\mathbb{R} \setminus (-\epsilon, \epsilon)$ и $\mathbb{Z} \setminus \mathcal{N}$. Искажение подмножества соответствия по определению не больше искажения самого соответствия. Получаем цепочку неравенств:

$$1 + \epsilon = \operatorname{dis} R \geqslant \operatorname{dis} R' \geqslant 2 d_{GH}\big(\mathbb{R} \setminus (-\epsilon, \epsilon), \mathbb{Z} \setminus \mathcal{N}\big).$$

По неравенству треугольника

$$2 d_{GH}\big(\mathbb{R} \setminus (-\epsilon, \epsilon), \mathbb{Z} \setminus \mathcal{N}\big) \geqslant 2 \Big| d_{GH}\big(\mathbb{R}, \mathbb{Z} \setminus \mathcal{N}\big) - d_{GH}\big(\mathbb{R} \setminus (-\epsilon, \epsilon), \mathbb{R}\big) \Big| \geqslant 2 - 2\epsilon.$$

Получили неравенство: $1+\epsilon \geqslant 2-2\epsilon$. Из него получаем нижнюю оценку на ϵ:

$$\epsilon \geqslant \frac{1}{3},$$

откуда $\operatorname{dis} R \geqslant \frac{4}{3}$ и $d_{GH}\left(\widetilde{\mathbb{R}}, \mathbb{Z}\right) \geqslant \frac{2}{3} > \frac{1}{2}$, что доказывает пункт 2. □

6. Основная теорема

Приведем лемму о расстоянии между облаками с пересекающимися стационарными группами.

Лемма 5. *Если два облака имеют нетривиальное пересечение стационарных групп, то расстояние между ними может быть равно* 0 *или* ∞.

Доказательство. Для любых облаков $[X],[Y]$ и любого λ из $\mathbb{R}^+$ верно

$$\big|\lambda[X], \lambda[Y]\big| = \lambda\big|[X],[Y]\big|.$$

Отсюда, если $\lambda \neq 1$ лежит в стационарных группах обоих облаков, то

$$\big|[X],[Y]\big| = \big|\lambda[X], \lambda[Y]\big| = \lambda\big|[X],[Y]\big|.$$

Так как $\lambda \neq 1$, величина $\big|[X],[Y]\big|$ может быть равна только 0 или бесконечности. □

Теорема 4. *Пусть у облака* $[Z]$ *нетривиальная стационарная группа, и* Z *является его центром. Также, пусть в этом облаке есть пространства* Y_1, Y_2 *такие, что* $\max\big\{|Y_1,Z|,|Y_2,Z|\big\} = r > 0$, *а* $|Y_1,Y_2| > r$. *Тогда, расстояние между облаками* $[\Delta_1]$ *и* $[Z]$ *равно бесконечности.*

Доказательство. У облаков $[\Delta_1]$ и $[Z]$ стационарные группы имеют нетривиальное пересечение, и, по лемме 5, расстояние между ними может быть равно либо 0, либо ∞.

Для доказательства утверждения теоремы достаточно будет показать, что расстояние между ними не равно 0. Для этого необходимо установить, что между ними не может существовать соответствия со сколь угодно малым искажением. Итак, пусть R — соответствие между $[\Delta_1]$ и $[Z]$, $\operatorname{dis} R = \epsilon < \infty$. Зафиксируем Y из $R(\Delta_1)$. По теореме 2 расстояние между Y и Z не больше 2ϵ.

По условию теоремы выполнено неравенство:

$$\max\big\{|Y_1,Z|,|Y_2,Z|\big\} = r < |Y_1,Y_2|$$

Неравенство означает, что существует $c>0$ такое, что $|Y_1,Y_2| = (1+c)r$. Вместе с Y_1 и Y_2 рассмотрим их прообразы $X_1 \in R^{-1}(Y_1)$, $X_2 \in R^{-1}(Y_2)$. Получаем следующую цепочку неравенств:

$$|X_1,\Delta_1| \leqslant |Y_1,Y| + \epsilon \leqslant |Y_1,\mathbb{R}| + |\mathbb{R},Y| + \epsilon \leqslant r + 2\epsilon + \epsilon = r + 3\epsilon.$$

Аналогичное неравенство имеет место для X_2, при этом

$$|X_1,X_2| \geqslant |Y_1,Y_2| - \epsilon = (1+c)r - \epsilon.$$

По замечанию 22:

$$|X_1,X_2| \leqslant \max\big\{|X_1,\Delta_1|,|X_2,\Delta_1|\big\},$$

$$\Updownarrow$$

$$(1+c)r - \epsilon \leqslant r + 3\epsilon,$$

$$\Updownarrow$$

$$\epsilon \geqslant \frac{cr}{4}.$$

Мы получаем оценку снизу для $\epsilon = \operatorname{dis} R$. Это означает, что искажение не может быть произвольно малым, и, следовательно, расстояние между пространствами не может быть равно 0. Значит, оно равно бесконечности.

$\square$

Тем самым получаем следующее: любое облако с нетривиальной стационарной подгруппой и не выполняющимся ультраметрическим неравенством для центра лежит на бесконечном расстоянии от $[\Delta_1]$. В частности это верно для облака $[\mathbb{R}]$.

Следствие 3. *В облаке $[\mathbb{R}]$ в качестве пространств Y_1, Y_2 можно взять $\mathbb{Z}, \widetilde{\mathbb{R}}$. Для них, по теореме 3 будет выполнено неравенство из условия теоремы 4 с $r = \frac{1}{2}$. Стационарная группа облака $[\mathbb{R}]$ равна $\mathbb{R}^+$, то есть нетривиальна. Получаем, что расстояние между облаками $[\Delta_1]$ и $[\mathbb{R}]$ равно бесконечности.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Edwards D. The Structure of Superspace // Studies in Topology / Ed. by Stavrakas N.M., Allen K.R. New York: Academic Press, 1975. P. 89-110.

2. Gromov M. Structures métriques pour les variétés riemanniennes / Ed. by Lafontaine J., Pansu P. Paris: CEDIC, 1981. 152 p.

3. Gromov M. Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces. Boston: Birkhäuser, 1999. 585 p. ISBN 0-8176-3898-9.

4. Mémoli F., Sapiro G. Comparing point clouds // Proceedings of the 2004 Eurographics/ACM SIGGRAPH symposium on Geometry processing. New York: ACM, 2004. P. 32-40. DOI: 10.1145/1057432.1057436.

5. Sukkar F., Wakulicz J., Lee K.M.B., Zhi W., Fitch R. Multi-query Robotic Manipulator Task Sequencing with Gromov – Hausdorff Approximations // ArXiv e-prints. 2024. arXiv:2209.04800 [cs.RO].

6. Mémoli F. Gromov – Hausdorff distances in Euclidean spaces // 2008 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition Workshops. Anchorage: IEEE, 2008. P. 1-8.

7. Bogatyy S.A., Tuzhilin A.A. Gromov – Hausdorff class: its completeness and cloud geometry // ArXiv e-prints. 2021. arXiv:2110.06101 [math.MG].

8. von Neumann J. Eine Axiomatisierung der Mengenlehre // Journal für die reine und angewandte Mathematik. 1925. Vol. 154. P. 219-240.

9. Bernays P. A System of Axiomatic Set Theory - Part I // The Journal of Symbolic Logic. 1937. Vol. 2, No 1. P. 65-77. DOI: 10.2307/2268862.

10. Gödel K. The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum Hypothesis with the Axioms of Set Theory. Princeton: Princeton University Press, 1940. 72 p. ISBN 978-0-691-07927-1.

11. Borzov S.I., Ivanov A.O., Tuzhilin A.A. Extendability of Metric Segments in Gromov – Hausdorff Distance // ArXiv e-prints. 2020. arXiv:2009.00458 [math.MG].

12. Bogataya S.I., Bogatyy S.A., Redkozubov V.V., Tuzhilin A.A. Clouds in Gromov – Hausdorff Class: their completeness and centers // ArXiv e-prints. 2022. arXiv:2202.07337 [math.MG].

13. Burago D., Burago Yu., Ivanov S. A Course in Metric Geometry. Providence: AMS, 2001. 512 p.

14. Bogataya S.I., Bogatyy S.A. Isometric Cloud Stabilizer // Topology and its Applications. 2023. Vol. 329. P. 108-125.

15. Levy A. Basic set theory. Perspectives in mathematical logic. Berlin: Springer, 1979. 420 p.

REFERENCES

1. Edwards, D., 1975, “The Structure of Superspace”, in *Studies in Topology*, eds. Stavrakas, N.M., Allen, K.R., New York: Academic Press.

2. Gromov, M., 1981, *Structures métriques pour les variétés riemanniennes*, eds. Lafontaine, J., Pansu, P., Paris: CEDIC.

3. Gromov, M., 1999, *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces*, Boston: Birkhäuser. ISBN 0-8176-3898-9.

4. Mémoli, F., Sapiro, G., 2004, “Comparing point clouds”, in *Proceedings of the 2004 Eurographics/ACM SIGGRAPH symposium on Geometry processing*, New York: ACM, pp. 32-40. DOI: 10.1145/1057432.1057436.

5. Sukkar, F., Wakulicz, J., Lee, K.M.B., Zhi, W., Fitch, R., 2024, “Multi-query Robotic Manipulator Task Sequencing with Gromov – Hausdorff Approximations”, *ArXiv e-prints*, arXiv:2209.04800 [cs.RO].

6. Mémoli, F., 2008, “Gromov – Hausdorff distances in Euclidean spaces”, in *2008 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition Workshops*, Anchorage: IEEE, pp. 1-8.

7. Bogatyy, S.A., Tuzhilin, A.A., 2021, “Gromov – Hausdorff class: its completeness and cloud geometry”, *ArXiv e-prints*, arXiv:2110.06101 [math.MG].

8. von Neumann, J., 1925, “Eine Axiomatisierung der Mengenlehre”, *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, vol. 154, pp. 219-240.

9. Bernays, P., 1937, “A System of Axiomatic Set Theory - Part I”, *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 2, no. 1, pp. 65-77. DOI: 10.2307/2268862.

10. Gödel, K., 1940, *The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum Hypothesis with the Axioms of Set Theory*, Princeton: Princeton University Press. ISBN 978-0-691-07927-1.

11. Borzov, S.I., Ivanov, A.O., Tuzhilin, A.A., 2020, “Extendability of Metric Segments in Gromov – Hausdorff Distance”, *ArXiv e-prints*, arXiv:2009.00458 [math.MG].

12. Bogataya, S.I., Bogatyy, S.A., Redkozubov, V.V., Tuzhilin, A.A., 2022, “Clouds in Gromov – Hausdorff Class: their completeness and centers”, *ArXiv e-prints*, arXiv:2202.07337 [math.MG].

13. Burago, D., Burago, Y.D., Ivanov, S.O., 2001, *A Course in Metric Geometry*, Providence: American Mathematical Society.

14. Bogataya, S.I., Bogatyy, S.A., 2023, “Isometric Cloud Stabilizer”, *Topology and its Applications*, vol. 329, pp. 108-125.

15. Levy, A., 1979, *Basic Set Theory*, Berlin: Springer-Verlag.

Получено: 18.12.2024
Принято в печать: 07.04.2025

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 26. Выпуск 2.

УДК 514.853+517.938.5 DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-2-198-217

Топология алгебраически разделимых интегрируемых систем

С. С. Николаенко

Николаенко Станислав Сергеевич — кандидат физико-математических наук, Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет); Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: nikostas@mail.ru

Аннотация

Даётся классификация простейших 3-мерных особенностей регулярных алгебраически разделимых интегрируемых систем. Такие системы представляют собой важный класс интегрируемых по Лиувиллю гамильтоновых систем с двумя степенями свободы и встречаются во многих задачах механики и геометрии. Используемая в статье техника основана на анализе некоторой $\mathbb{Z}_2$-матрицы, однозначно определяемой выражениями исходных фазовых переменных через переменные разделения.

Ключевые слова: интегрируемость по Лиувиллю, алгебраически разделимая система, слоение Лиувилля, топологический инвариант, 3-атом.

Библиография: 18 названий.

Для цитирования:
Николаенко С. С. Топология алгебраически разделимых интегрируемых систем // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 2, с. 198–217.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 26. No. 2.

UDC 514.853+517.938.5 DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-2-198-217

Topology of Algebraically Separable Integrable Systems

S. S. Nikolaenko

Nikolaenko Stanislav Sergeevich — candidate of physical and mathematical sciences, Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University); Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: nikostas@mail.ru

Исследование поддержано Российским научным фондом (проект 24-71-10100) и выполнено в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова.

The work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 24-71-10100) and done at the Lomonosov Moscow State University.

Abstract

We classify the simplest 3-dimensional singularities of regular algebraically separable integrable systems. Such systems form an important class of Liouville integrable Hamiltonian systems with two degrees of freedom and occur in many problems of mechanics and geometry. The techniques elaborated in the paper is based on the analysis of a certain $\mathbb{Z}_2$-matrix uniquely determined by the expressions of the initial phase variables via the separating variables.

Keywords: Liouville integrability, algebraically separable system, Liouville foliation, topological invariant, 3-atom.

Bibliography: 18 titles.

For citation:
Nikolaenko, S. S. 2025, "Topology of algebraically separable integrable systems" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 2, pp. 198–217.

1. Introduction

The theory of topological classification of (Liouville) integrable Hamiltonian systems with two degrees of freedom created by A. T. Fomenko and his co-authors [1, 2, 3, 4] allows to classify such systems up to different types of equivalence, first of all Liouville equivalence. Two integrable Hamiltonian systems are called *Liouville equivalent* if there exists a diffeomorphism between the phase spaces invariant with respect to the Liouville foliations of these systems. For a typical integrable system its Liouville foliation is defined by closures of integral trajectories and is therefore an important topological characteristics of the system. Within the Fomenko theory, the Liouville equivalence class of an integrable system (restricted to some invariant submanifold) is defined by the appropriate invariant (which in most cases has the form of a graph with some numerical marks). However, explicit calculation of such invariants is not an algorithmic task and, for some concrete systems, may happen to be quite a complicated problem. In this paper, we discuss a remarkable class of integrable systems for which the calculation of topological invariants can be done algorithmically. Following M. P. Kharlamov and his co-authors, we call such systems *algebraically separable* (see Definition 6 below). This notion means that the Hamiltonian equations on each leaf of the Liouville foliation can be reduced to separated equations and, what is crucial for the topological analysis, the initial phase variables are expressed via the separating ones in a "nice" way. In other words, the separating variables deliver a good parametrization for integral submanifolds making clear all interesting topological effects. The systems with such properties occur in many classical problems of the rigid body dynamics, integrable geodesic flows, integrable billiards.

The systematic approach to the study of the topology of algebraically separable systems was suggested by M. P. Kharlamov in [5], though some interesting results were known before (it is worth mentioning the work [6] by O. E. Orel). The M. P. Kharlamov's ideas and methods were successfully applied to many integrable systems arising in mechanics and physics (see for example [7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17]). However, determining the topological type of singularities within this approach is usually conducted in terms of the phase space and its initial variables and involves some topological arguments like behavior of certain cycles on integral submanifolds. The main idea of the present paper is as follows. Expressions of the phase variables via the variables of separation define a certain Boolean matrix. Once this matrix is written down, there is no need to address the phase space anymore: all the required topological information is already contained in this matrix!

The paper has the following structure. In Section 2 we recall some definitions and introduce necessary notation. In Section 3 we prove some auxiliary statements, which help to discover the topology of integral submanifolds in terms of the variables of separation. Section 4 is devoted to the description of regular Liouville tori in terms of the variables of separation. Section 5 contains the main results of the paper, namely Theorems 3 and 4 classifying the simplest singularities of algebraically separable systems. The proofs of these theorems clarify the dependance of the topological type of singularities on the Boolean matrix mentioned above. Finally, in Conclusion we give several remarks and outline the directions of further investigations.

2. Necessary definitions ans notations

We start with a brief overview of the main concepts arising in the theory of integrable systems.

Definition 1. *A Hamiltonian system is a triple (M^{2n}, ω, H), where (M^{2n}, ω) is a symplectic (hence orientable) manifold with the symplectic structure ω and H is smooth function on M^{2n} called the Hamiltonian function. The Hamiltonian vector field is defined as $v = \omega^{-1} dH$.*

Definition 2. *A Hamiltonian system is called Liouville integrable if it possesses n smooth first integrals $f_1, \ldots, f_n$ such that:*

- *$f_1, \ldots, f_n$ are functionally independent, i.e., their differentials $df_1, \ldots, df_n$ are linearly independent almost everywhere on M^4;*
- *$f_1, \ldots, f_n$ commute with respect to the Poisson bracket defined by the symplectic structure;*
- *the Hamiltonian vector fields $v_i = \omega^{-1} df_i$ are complete, i.e., the natural parameter on their integral trajectories is defined on the whole real axis.*

Remark 1. *In the above definition we may always assume $f_1 = H$.*

Definition 3. *The Liouville foliation corresponding to the given integrable system is the decomposition of the manifold M^{2n} into connected components (leaves) of common level surfaces of the first integrals $f_1, \ldots, f_n$.*

Studying the topology of the Liouville foliation (in particular, its singularities) is an important part of the topological analysis of an integrable system. According to the classical Liouville theorem, any its compact regular leaf L (regularity means that $df_1, \ldots, df_n$ are linearly independent at any $x \in L$) is diffeomorphic to the n-dimensional torus T^n (the *Liouville torus*) and the Liouville foliation is trivial in a small neighborhood of L. Hence the bifurcations of the Liouville foliation may happen only in neighborhoods of singular leaves.

In the sequel, we assume that $n = 2$, i.e., the system has two degrees of freedom. In this case integrability means the existence of only one additional first integral K of the system functionally independent of H.

Definition 4. *The mapping $\mathcal{F} = (H, K)\colon M^4 \to \mathbb{R}^2$ is called the momentum mapping associated with a Liouville integrable system with two degrees of freedom. The image $\Sigma = \{x \in M^4 \mid \operatorname{rank} d\mathcal{F}(x) < 2\}$ of all critical points of $\mathcal{F}$ is called the bifurcation diagram.*

In a typical case the bifurcation diagram is a union of smooth curves (and maybe isolated points) in $\mathbb{R}^2$, which correspond to certain types of bifurcations of the Liouville foliation. More precisely, take any small enough smooth curve γ intersecting Σ transversally at a single point. Its pre-image $\mathcal{F}^{-1}(\gamma)$ is a 3-dimensional invariant submanifold in M^4, which "pictures" the corresponding bifurcation.

Definition 5. *The submanifold $\mathcal{F}^{-1}(\gamma)$ with the structure of the Liouville foliation viewed up to a fiber diffeomorphism is called a 3-atom.*

All compact 3-atoms turn out to be oriented S^1-fibrations (so called *Seifert fibrations*) over 2-atoms ([1, Theorems 3.2 and 3.3]). By definition, a *2-atom* is a small neighborhood of a critical level line of a Morse function f on a smooth 2-dimensional surface foliated into level lines of f and viewed up to a fiber diffeomorphism. Some examples of 2-atoms are shown in Fig. 1. The 3-atoms obtained as direct products of these 2-atoms and the circle S^1 are denoted by the same symbols.

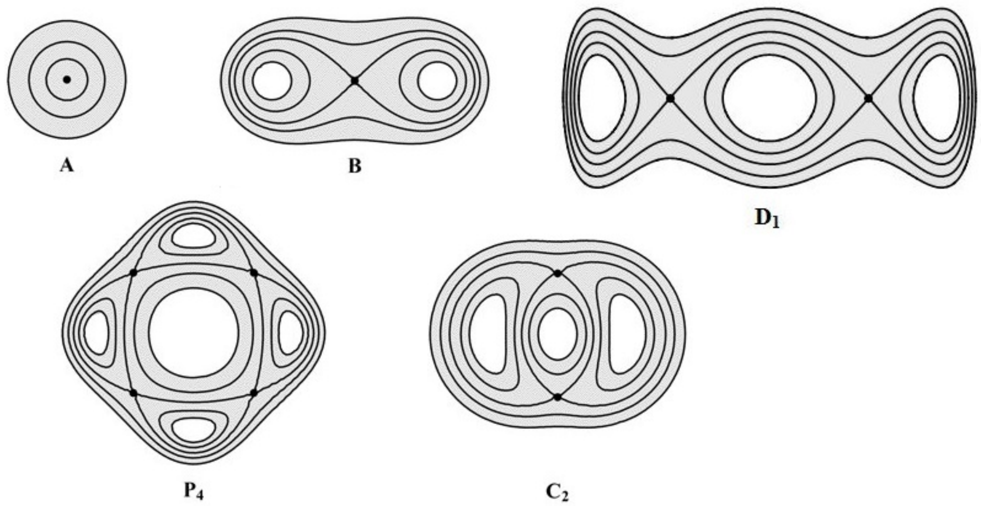


Рис. 1: 2-atoms A, B, D_1, P_4, C_2

For more details about topological invariants in the theory of Liouville integrable systems we address the reader to [1].

Now we define the main notion of this paper (which may be generalized to arbitrary many degrees of freedom).

Definition 6. *We say that a Liouville integrable system with 2 degrees of freedom on a symplectic manifold M^4 (or on its invariant submanifold N) is algebraically separable if the following conditions hold.*

(1) *There exist real smooth functions u_1, u_2 on M^4 (on N) called the variables of separation in which the Hamiltonian equations separate in the form*

$$\dot{u_1} = \sqrt{P_1(u_1)}, \qquad \dot{u_2} = \sqrt{P_2(u_2)} \tag{1}$$

or in the form of the Abel equations

$$\dot{u_1} = \frac{\sqrt{P(u_1)}}{u_1 - u_2}, \qquad \dot{u_2} = \frac{\sqrt{P(u_2)}}{u_1 - u_2}. \tag{2}$$

Here P_1 and P_2 are (maybe coinciding) real polynomials of degree 3 or 4, P is a polynomial of degree 5 or 6. The coefficients of these polynomials depend smoothly on the values h, k of the first integrals H, K of the system.

(2) *The initial phase variables on M^4 (on N) can be expressed via u_1, u_2 as multivalued rational functions on two-valued radicals of the form $\sqrt{u_i - \alpha_j}$, $i = 1, 2$, where α_j are the (complex) roots of P_1, P_2 (or P). The coefficients of these rational functions are smooth functions on u_1, u_2, h, k.*

Remark 2. *This definition is given according to [7]. In [5] such systems are called algebraically solvable.*

Remark 3. *In the classical integrable cases of the rigid body dynamics the phase space M^4 appears as a symplectic leaf in $\mathbb{R}^6$ endowed with an appropriate Poisson structure. In this case the second condition of the above definition implies that the coordinates in $\mathbb{R}^6$ are expressed via u_1, u_2 as indicated above.*

Remark 4. *The second condition of the above definition is crucial for studying the topology of the Liouville foliation of the underlying integrable system. It allows one to describe explicitly the Liouville tori and their bifurcations in terms of the variables u_1, u_2. This distinguishes algebraically separable systems from other types of systems with separating variables.*

Let $R_1, \ldots, R_n$ be the monomials in the rational expressions of the phase variables via u_1, u_2:

$$R_m = \sqrt{\pm(u_1 - \alpha^{(1)}_{m,1}) \ldots (u_1 - \alpha^{(1)}_{m,p(m)})(u_2 - \alpha^{(2)}_{m,1}) \ldots (u_2 - \alpha^{(2)}_{m,q(m)})}, \tag{3}$$

where $\alpha^{(i)}_{m,j}$ are some (maybe complex) roots of the polynomial P (in the case (1) here and further it is convenient to denote by P the least common multiple of P_1 and P_2). It may happen that $\alpha^{(i_1)}_{m_1,j_1} = \alpha^{(i_2)}_{m_2,j_2}$ for some triples $(i_1, m_1, j_1) \neq (i_2, m_2, j_2)$, but $\alpha^{(i)}_{m,j_1} \neq \alpha^{(i)}_{m,j_2}$ for fixed i, m and $j_1 \neq j_2$. Moreover, the set of all the numbers $\alpha^{(i)}_{m,j}$ may be smaller than the set of all the roots of P. Note that the expressions under the radicals in (3) must be real and non-negative which influences the range of u_1, u_2.

Denote by $\pi_{h,k}$ the projection of a certain leaf $L \subset \{x \in M^4 \mid H(x) = h,\ K(x) = k\}$ of the Liouville foliation to the plane $\mathbb{R}^2(u_1, u_2)$. Then $\pi_{h,k}(L) = [\alpha_l, \alpha_r] \times [\alpha_b, \alpha_t]$, where $\alpha_l, \alpha_r, \alpha_b, \alpha_t$ are real roots of P (the indices stand for *left*, *right*, *bottom*, *top*).

Following [5], introduce the sign function $\operatorname{bsgn}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z}_2$:

$$\operatorname{bsgn}(\theta) = \begin{cases} 0, & \theta \geq 0, \\ 1, & \theta < 0. \end{cases}$$

Obviously, $\operatorname{bsgn}(\theta_1\theta_2) = \operatorname{bsgn}(\theta_1) \oplus \operatorname{bsgn}(\theta_2)$ if $\theta_1, \theta_2 \neq 0$ ($\oplus$ is the sum modulo 2).
Set $S_m = \operatorname{bsgn} R_m$, $s^{(i)}_j = \operatorname{bsgn}\sqrt{\pm(u_i - \alpha_j)}$ if $\alpha_j \in \mathbb{R}$, and $s^{(i)}_j = \operatorname{bsgn}\sqrt{(u_i - \alpha_j)(u_i - \overline{\alpha_j})}$ if $\alpha_j \notin \mathbb{R}$ (in the latter case the multipliers $(u_i - \alpha_j)$ and $(u_i - \overline{\alpha_j})$ are both contained or not contained in each radical R_m). Thus we obtain a $\mathbb{Z}_2$-linear mapping $\mathcal{A}\colon \mathbb{Z}_2^{2\theta}(s^{(1)}_1, \ldots, s^{(1)}_\theta, s^{(2)}_1, \ldots, s^{(2)}_\theta) \to$ $\to \mathbb{Z}_2^n(S_1, \ldots, S_n)$, $\theta \leq \deg P$, defined by (3):

$$S_m = s^{(1)}_{m,1} \oplus \ldots \oplus s^{(1)}_{m,p(m)} \oplus s^{(2)}_{m,1} \oplus \ldots \oplus s^{(2)}_{m,q(m)}, \qquad m = \overline{1, n}. \tag{4}$$

Definition 7. *We shall say that an algebraically separable system is regular if the set $(S_1, \ldots, S_n)$ is uniquely determined by a point $x \in M^4$, i. e., different signs of the radicals $R_1, \ldots, R_n$ cannot define (under the same values of u_1, u_2, h, k) the same point in the phase space.*

Let A be the matrix of the linear mapping $\mathcal{A}$. The main idea of the method discussed in this paper is following: for a regular algebraically separable system the matrix A “knows” everything about its Liouville foliation. Topology and singularities of this foliation can be deduced from the matrix A directly.

For given h, k the variables $s^{(i)}_j$ can be divided into two groups: the first one contains the signs which do not change on a fixed leaf L of the Liouville foliation whereas the second group contains the signs changing on L. Accordingly, $A = (B \,|\, C)$, where the columns of the submatrices B and C correspond respectively to the variables of the first and the second groups. Roughly speaking, for given h, k the matrix B influences the number of connected components in $\mathcal{F}^{-1}(h, k)$ (see [5]) whereas the matrix C determines the topological structure of the pre-image $\pi^{-1}_{h,k}([\alpha_l, \alpha_r] \times [\alpha_b, \alpha_t])$

for a fixed leaf. It is convenient to consider $\pi^{-1}_{h,k}$ as a multi-valued mapping of $[\alpha_l,\alpha_r]\times[\alpha_b,\alpha_t]$. We shall call it the *lifting mapping*. In what follows, we study the matrix C and its influence on the topological properties of $\pi^{-1}_{h,k}$ separately for regular and singular values h,k. Note that if the polynomial $P=P_{h,k}$ has no multiple roots, the variables of the second group are solely $s_l^{(1)}, s_r^{(1)}, s_b^{(2)}, s_t^{(2)}$ and the matrix C has 4 columns. In this case the lifting mapping $\pi^{-1}_{h,k}$ defines the structure of a square tiled surface [18] on the leaves in $\pi^{-1}_{h,k}([\alpha_l,\alpha_r]\times[\alpha_b,\alpha_t])$.

At the end of this section we give a formal proof of the well-known principle stating that singularities of the Liouville foliation correspond to multiple roots of the polynomial P.

Theorem 1. *The bifurcation diagram $\Sigma\subset\mathbb{R}^2(h,k)$ of the momentum mapping $\mathcal{F}=(H,K)$ of an algebraically separable system is contained in the discriminant set Δ of the polynomial P, i. e., the set of all points $(h,k)\in\mathbb{R}^2$ such that $P=P_{h,k}$ has multiple roots.*

Доказательство. For $x_0\in M^4$ put $h_0=H(x_0)$, $k_0=K(x_0)$. We shall prove that, if all the roots of the polynomial P_{h_0,k_0} are simple, x_0 is a regular point of the momentum mapping $\mathcal{F}$, i. e., $\operatorname{rank} d\mathcal{F}|_{x_0}=2$.

Let L be the leaf of the Liouville foliation containing x_0, and let $\pi_{h_0,k_0}(L)=[\alpha_l,\alpha_r]\times[\alpha_b,\alpha_t]$. Since $u_1\in[\alpha_l,\alpha_r]$ and $u_2\in[\alpha_b,\alpha_t]$ on L, we may set

$$u_1=\alpha_l\cos^2\varphi+\alpha_r\sin^2\varphi,\qquad u_2=\alpha_b\cos^2\psi+\alpha_t\sin^2\psi,\qquad \varphi,\psi\in[0,2\pi).$$

Then

$$\sqrt{u_1-\alpha_l}=\sqrt{\alpha_r-\alpha_l}\,\sin\varphi,\qquad \sqrt{\alpha_r-u_1}=\sqrt{\alpha_r-\alpha_l}\,\cos\varphi,\tag{5}$$
$$\sqrt{u_2-\alpha_b}=\sqrt{\alpha_t-\alpha_b}\,\sin\psi,\qquad \sqrt{\alpha_t-u_2}=\sqrt{\alpha_t-\alpha_b}\,\cos\psi,\tag{6}$$

where the radicals in the right-hand sides are the non-negative arithmetic square roots. This way, we can take into account the signs $s_l^{(1)}, s_r^{(1)}, s_b^{(2)}, s_t^{(2)}$.

Take any φ_0,ψ_0 such that the equalities (5), (6) are true for $u_1(x_0),u_2(x_0)$. Consider the mapping $\xi\colon U(h_0,k_0)\to M^4$ obtained by substitung (5), (6) with $\varphi=\varphi_0$, $\psi=\psi_0$ in the expressions of the phase variables via u_1,u_2. Here $U(h_0,k_0)$ is a neighborhood of the point (h_0,k_0) in $\mathbb{R}^2(h,k)$. Note that ξ is well defined: the signs of the radicals from the first group (which do not change on the leaf L) are taken the same as on L, and signs from the second group are uniquely determined by $\sin\varphi_0$, $\cos\varphi_0$, $\sin\psi_0$, $\cos\psi_0$. The neighborhood $U(h_0,k_0)\subset\mathbb{R}^2$ is taken small enough so that for any $(h,k)\in U(h_0,k_0)$ all the roots of the polynomial $P=P_{h,k}$ are simple. It is easy to see that ξ is smooth since α_j are smooth functions on h,k. The latter is true due to the implicit function theorem since locally α_j are simple roots of P and $\frac{\partial P}{\partial\alpha_j}\neq 0$.

Now notice that $\mathcal{F}\circ\xi=\operatorname{id}|_{U(h_0,k_0)}$. Taking differentials at (h_0,k_0), we obtain $d\mathcal{F}|_{x_0}\circ d\xi|_{(h_0,k_0)}= =\operatorname{id}|_{\mathbb{R}^2}$ which yields $\operatorname{rank} d\mathcal{F}|_{x_0}\geq\operatorname{rank}(d\mathcal{F}|_{x_0}\circ d\xi|_{(h_0,k_0)})=2$. Hence $\operatorname{rank} d\mathcal{F}|_{x_0}=2$. □

3. Topological properties of the lifting mapping $\pi^{-1}_{h,k}$

In this section we prove auxiliary statements which will help us to study the image of the lifting mapping $\pi^{-1}_{h,k}$ defined on the rectangle $\Pi=[\alpha_l,\alpha_r]\times[\alpha_b,\alpha_t]$. If the signs of the first group (see previous section) are fixed, $\pi^{-1}_{h,k}(\Pi)$ is a single leaf of the Liouville foliation, otherwise we can obtain several leaves. It is easy to see that for each point $y\in\operatorname{int}\Pi$ its image $\pi^{-1}_{h,k}(y)$ consists of $2^{\operatorname{rank}C}$ points in the first case and $2^{\operatorname{rank}A}$ in the second one, where A and C are the $\mathbb{Z}_2$-matrices defined in the previous section.

By $A_j^{(i)}$ denote the column of the matrix A corresponding to the sign $s_j^{(i)}$, $i=1,2$, and by $\hat{A}_j^{(i)}$ the matrix obtained from A by the following procedure: eliminate all the rows of A with entries in

$A_j^{(i)}$ equal to 1 and then eliminate the column $A_j^{(i)}$. By $\hat{A}_{j_1 j_2}^{(i_1 i_2)}$ denote the matrix obtained from A by the same procedure applied twice (with respect to the columns $A_{j_1}^{(i_1)}$ and $A_{j_2}^{(i_2)}$). Obviously, $\hat{A}_j^{(i)}$ is the matrix of the reduced linear mapping $\mathcal{A}$ (obtained when $\sqrt{u_i - \alpha_j} = 0$) and $\hat{A}_{j_1 j_2}^{(i_1 i_2)}$ is the matrix of the linear mapping obtained from $\mathcal{A}$ when $\sqrt{u_{i_1} - \alpha_{j_1}} = \sqrt{u_{i_2} - \alpha_{j_2}} = 0$ (it is natural to assume that $i_1 \neq i_2$). Similar notation will be used for the matrix C.

Lemma 9. *Suppose that for given h, k all the numbers α_j are pairwise distinct. Then*

1) $\operatorname{rank} \hat{A}_j^{(i)} = \operatorname{rank} A - 1$ *for* $(i, j) \in \{(1, l), (1, r), (2, b), (2, t)\}$;

2) $\operatorname{rank} \hat{A}_{j_1 j_2}^{(12)} \geq \operatorname{rank} A - 2$ *for* $(j_1, j_2) \in \{(l, b), (l, t), (r, b), (r, t)\}$.

Доказательство. The image $\pi_{h,k}^{-1}(\Pi)$ consists of $2^{\operatorname{rank} A}$ sheets which are somehow glued together along their boundaries (when some of the radicals vanish). In view of Theorem 1, the result of this gluing is a 2-manifold (one or several Liouville tori), hence the sheets must be glued pairwise over each side of Π. Take for instance the side $\Pi_l = \{(\alpha_l, u_2) \mid \alpha_b < u_2 < \alpha_t\}$. Its image $\pi_{h,k}^{-1}(\Pi_l)$ consists of $2^{\operatorname{rank} \hat{A}_l^{(1)}}$ connected components which must be twice less than $2^{\operatorname{rank} A}$. This exactly means that $\operatorname{rank} \hat{A}_l^{(1)} = \operatorname{rank} A - 1$.

Now consider $\pi_{h,k}^{-1}$ in a neighborhood of a corner of Π, say $\Pi_{lb} = \{(\alpha_l, \alpha_b)\}$. Suppose $A_l^{(1)} \neq A_b^{(2)}$ and fix the signs of all the radicals except $s_l^{(1)}$ and $s_b^{(2)}$. Then we obtain four sheets which differ by the values of $s_l^{(1)}$ and $s_b^{(2)}$. These sheets are glued together pairwise along their boundaries and have a common corner point Z (this is similar to the “corner” of a sheet of paper folded in half twice, Fig. 2). The neighborhood of the point Z in $\pi_{h,k}^{-1}(\Pi)$ is readily homeomorphic to the 2-disk, therefore it should not be glued with any other similar point in $\pi_{h,k}^{-1}(\Pi_{lb})$. This means that the number of different points in $\pi_{h,k}^{-1}(\Pi_{lb})$ (which equals $2^{\operatorname{rank} \hat{A}_{lb}^{(12)}}$) is four times smaller than $2^{\operatorname{rank} A}$ implying $\operatorname{rank} \hat{A}_{lb}^{(12)} = \operatorname{rank} A - 2$.

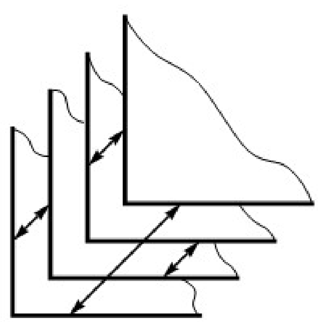


Рис. 2: Gluing of sheets in a neighborhood of a corner point

The case $A_l^{(1)} = A_b^{(2)}$ is treated in a similar way. Here only two sheets are glued along their boundaries resulting in $\operatorname{rank} \hat{A}_{lb}^{(12)} = \operatorname{rank} A - 1$. However, as we shall see below, this case is actually impossible. □

Corollary 1. *Under the conditions of Lemma 9 we also have:*

1) $\operatorname{rank} \hat{C}_j^{(i)} = \operatorname{rank} C - 1$ *for* $(i, j) \in \{(1, l), (1, r), (2, b), (2, t)\}$;

2) $\operatorname{rank} \hat{C}_{j_1 j_2}^{(12)} \geq \operatorname{rank} C - 2$ *for* $(j_1, j_2) \in \{(l, b), (l, t), (r, b), (r, t)\}$.

Remark 5. *Since the matrices A and C are constant, the (in)equalities stated in Lemma 9 and Corollary* 1 *remain true when some of the numbers α_j coincide.*

Lemma 10.

1) *If α_j is not a multiple root of the polynomial $P_{h,k}$, the equality*

$$\operatorname{rank} \hat{A}_j^{(i)} = \operatorname{rank} A - 1, \qquad (i,j) \in \{(1,l),(1,r),(2,b),(2,t)\},$$

is sufficient for each point in $\pi_{h,k}^{-1}(\Pi_j)$ to have a neighborhood in $\pi_{h,k}^{-1}(\Pi)$ homeomorphic to the 2-disk. Here $\Pi_j = \{(\alpha_j, u_2) \mid \alpha_b < u_2 < \alpha_t\}$ if $j \in \{l,r\}$ and $\Pi_j = \{(u_1, \alpha_j) \mid \alpha_l < u_1 < \alpha_r\}$ if $j \in \{b,t\}$.

2) *If $\alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}$ are not multiple roots of the polynomial $P_{h,k}$, the equality*

$$\operatorname{rank} \hat{A}_{j_1 j_2}^{(12)} = \operatorname{rank} A - 2, \qquad (j_1,j_2) \in \{(l,b),(l,t),(r,b),(r,t)\},$$

is sufficient for each point in $\pi_{h,k}^{-1}(\Pi_{j_1 j_2})$, where $\Pi_{j_1 j_2} = \{(\alpha_{j_1}, \alpha_{j_2})\}$, to have a neighborhood in $\pi_{h,k}^{-1}(\Pi)$ homeomorphic to the 2-disk.

Доказательство. The equality in the first statement means that the sheets in $\pi_{h,k}^{-1}(\Pi)$ are glued together pairwise over Π_j. The sheets in each pair differ by the value of $s_j^{(i)}$.

The second statement is readily seen from the proof of Lemma 9. □

Now fix all the signs from the first group. Then $\pi_{h,k}^{-1}(\Pi)$ is a single leaf of the Liouville foliation. Put $\eta = \operatorname{rank} C$. Let $C_{j_1}^{(i_1)}, \ldots, C_{j_\eta}^{(i_\eta)}$ be $\mathbb{Z}_2$-linearly independent columns of C (thus forming the basis in the span of the columns of C). Each sheet in $\pi_{h,k}^{-1}(\operatorname{int}\Pi)$ can be encoded by the values of $s_{j_1}^{(i_1)}, \ldots, s_{j_\eta}^{(i_\eta)}$ if we assign fixed (for instance, zero) values to all the other variables $s_j^{(i)}$ from the second group. The following lemma provides the rule indicating which of these sheets must be glued together over the boundary of Π.

Lemma 11. *For $(i_0,j_0) \in \{(1,l),(1,r),(2,b),(2,t)\}$ let $C_{j_0}^{(i_0)} = C_{j_1}^{(i_1)} \oplus \ldots \oplus C_{j_\nu}^{(i_\nu)}$ $(\nu \le \eta)$ be the decomposition of the column $C_{j_0}^{(i_0)}$ into the sum (modulo 2) of some basic columns. Suppose* $\operatorname{rank} \hat{C}_{j_0}^{(i_0)} = \operatorname{rank} C - 1$. *Then the pairs of sheets that must be glued together over the corresponding side of Π are defined by the following rule: the signs $s_{j_1}^{(i_1)}, \ldots, s_{j_\nu}^{(i_\nu)}$ are different whereas the signs $s_{j_{\nu+1}}^{(i_{\nu+1})}, \ldots, s_{j_\eta}^{(i_\eta)}$ are the same in each pair.*

Доказательство. Suppose $(i_0,j_0) = (1,l)$. It is sufficient to prove that the signs of all non-zero radicals (3) are the same in each pair of sheets provided that $u_1 = \alpha_l$. For each such radical R_m its sign is given by (4). Denote by $a_{mj}^{(i)}$ the element of the matrix A (or C) in the intersection of the m's row and the column $A_j^{(i)}$ (or $C_j^{(i)}$). The variable $s_j^{(i)}$ is present in the right-hand side of (4) iff $a_{mj}^{(i)} = 1$. Since $R_m \ne 0$, $a_{ml}^{(1)} = 0$ which yields $a_{mj_1}^{(i_1)} \oplus \ldots \oplus a_{mj_\nu}^{(i_\nu)} = a_{ml}^{(1)} = 0$. This means that the number of non-zero elements $a_{mj_\beta}^{(i_\beta)}$ $(1 \le \beta \le \nu)$ and, equivalently, the number of variables $s_{j_\beta}^{(i_\beta)}$ present in the right-hand side of (4) are even. Therefore, if we change the values of $s_{j_1}^{(i_1)}, \ldots, s_{j_\nu}^{(i_\nu)}$, the sum in (4) remains the same. □

Remark 6. *In Lemma 11 we do not require α_{j_0} to be a simple root of $P_{h,k}$.*

4. Topology of regular leaves in terms of the lifting mapping $\pi_{h,k}^{-1}$

We are now ready to classify regular Liouville tori through the framework of the lifting mapping $\pi_{h,k}^{-1}$. Let all the numbers α_j be different and all the signs from the first group be fixed, thus $\pi_{h,k}^{-1}(\Pi) = T_{h,k}^2$ is a Liouville torus.

Fix the value of u_2 together with the signs $s_b^{(2)}$, $s_t^{(2)}$ or, equivalently, fix the value of $\psi \in [0, 2\pi)$ in (6). We obtain a closed curve γ_φ in $T_{h,k}^2$ parametrized by φ. The value of φ changes by $\pi/2$ as u_1 changes from α_l to α_r. If the columns $C_l^{(1)}$ and $C_r^{(1)}$ of the matrix C are equal, the radicals $\sqrt{u_1 - \alpha_l}$ and $\sqrt{\alpha_r - u_1}$ always appear in (3) in pair, so φ only appears in (3) as $\cos\varphi \sin\varphi$. Therefore, in the case $C_l^{(1)} = C_r^{(1)}$ the natural range of φ is $[0, \pi)$ and $\pi_{h,k}$ restricted to γ_φ is a 2-fold branched covering of the line segment $\{(u_1, u_2) \mid \alpha_l \le u_1 \le \alpha_r\}$ (Fig. 3). We shall use the notation γ_φ^2 for such curve γ_φ. If $C_l^{(1)} \ne C_r^{(1)}$, the natural range of φ is $[0, 2\pi)$ and $\pi_{h,k}$ restricted to γ_φ is a 4-fold branched covering of the line segment $\{(u_1, u_2) \mid \alpha_l \le u_1 \le \alpha_r\}$ (Fig. 4). In this case we write $\gamma_\varphi = \gamma_\varphi^4$. The curves γ_ψ^2, γ_ψ^4 are defined in a similar way.

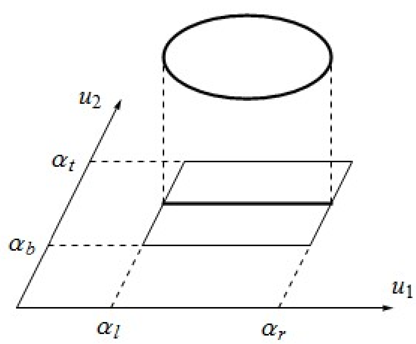


Рис. 3: Curve γ_φ^2

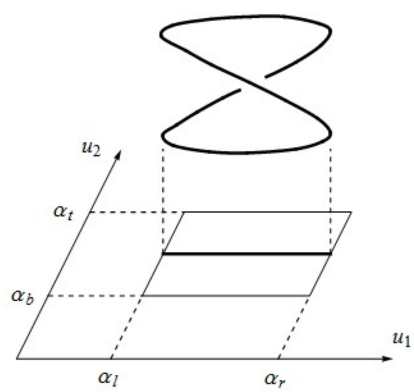


Рис. 4: Curve γ_φ^4

Theorem 2. *In terms of the curves γ_φ, γ_ψ, the Liouville torus $T_{h,k}^2$ can be described in one of the following ways:*

1) $\gamma_\varphi^2 \times \gamma_\psi^2$ *(00-torus);*

2) $\gamma_\varphi^2 \times \gamma_\psi^4$ *(08-torus);*

3) $\gamma^4_\varphi \times \gamma^2_\psi$ *(80-torus);*

4) $\gamma^4_\varphi \times \gamma^4_\psi$ *(88-torus);*

5) $\gamma^2_\varphi \times \gamma^2_\psi / \tau$, *where* τ *is the involution taking* (φ, ψ) *to* $(\varphi + \pi, \psi + \pi)$ *(88/2-torus).*

Доказательство. Consider all principally different (up to symmetries of indices $l \leftrightarrow r$, $b \leftrightarrow t$) cases depending on the rank of the matrix $C = (C^{(1)}_l \, C^{(1)}_r \, C^{(2)}_b \, C^{(2)}_t)$, which obviously does not exceed 4 (the number of columns of C). In each case we have 2, 4, 8, or 16 sheets, which are somehow glued together along their boundaries to form a torus. The rules for the gluing are determined by Lemma 11. If the result of a gluing is not a torus, this means that the corresponding case is impossible. In most figures below we supply each sheet with the values of variables $s^{(i)}_j$ corresponding to basic columns in $\langle C^{(1)}_l, C^{(1)}_r, C^{(2)}_b, C^{(2)}_t \rangle$.

1) $\underline{\operatorname{rank} C = 1.}$ We have two sheets, which are glued together along their boundaries forming the 2-sphere S^2 (Fig. 5).

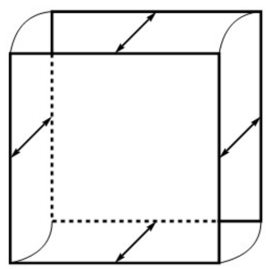


Рис. 5: Gluing of sheets: $\operatorname{rank} C = 1$

2) $\underline{\operatorname{rank} C = 2.}$

2.1) $\underline{C^{(1)}_l = C^{(1)}_r,\ C^{(2)}_b = C^{(2)}_t}$. We obtain the 00-torus (Fig. 6).

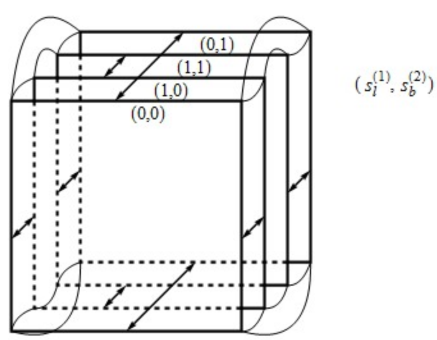


Рис. 6: Gluing of sheets: $\operatorname{rank} C = 2$, $C^{(1)}_l = C^{(1)}_r$, $C^{(2)}_b = C^{(2)}_t$

2.2) $\underline{C^{(1)}_l \neq C^{(1)}_r,\ C^{(2)}_b = C^{(2)}_t}$. We may choose the columns $C^{(1)}_l, C^{(1)}_r$ as basic.

2.2.1) $\underline{C^{(2)}_b = C^{(2)}_t = C^{(1)}_l}$. We obtain the sphere S^2 (Fig. 7).

2.2.2) $\underline{C^{(2)}_b = C^{(2)}_t = C^{(1)}_l \oplus C^{(1)}_r}$. We obtain the Klein bottle KL (Fig. 8).

2.3) $\underline{C^{(1)}_l \neq C^{(1)}_r,\ C^{(2)}_b \neq C^{(2)}_t}$. Again, the columns $C^{(1)}_l, C^{(1)}_r$ are basic.

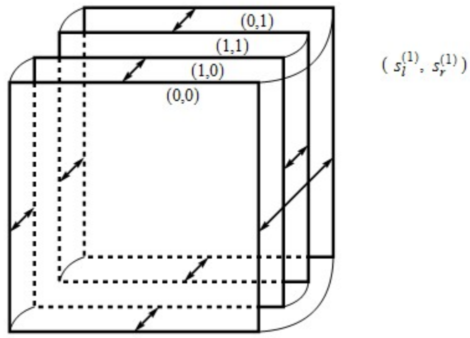


Рис. 7: Gluing of sheets: $\operatorname{rank} C = 2$, $C_l^{(1)} \neq C_r^{(1)}$, $C_b^{(2)} = C_t^{(2)} = C_l^{(1)}$

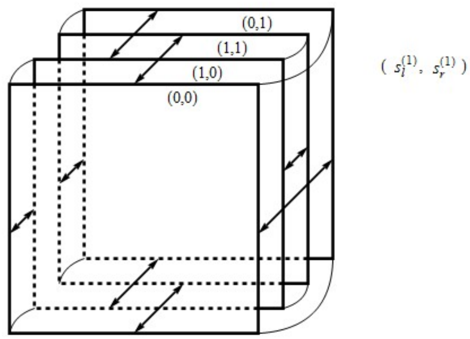


Рис. 8: Gluing of sheets: $\operatorname{rank} C = 2$, $C_l^{(1)} \neq C_r^{(1)}$, $C_b^{(2)} = C_t^{(2)} = C_l^{(1)} \oplus C_r^{(1)}$

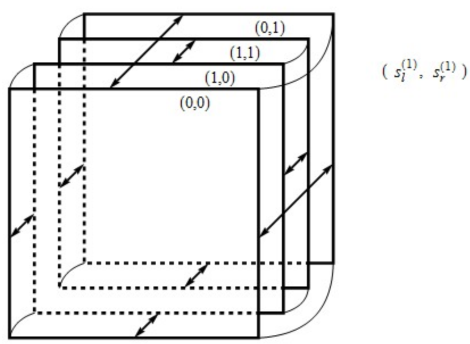


Рис. 9: Gluing of sheets: $\operatorname{rank} C = 2$, $C_l^{(1)} \neq C_r^{(1)}$, $C_b^{(2)} = C_l^{(1)}$, $C_t^{(2)} = C_r^{(1)}$

2.3.1) $\underline{C_b^{(2)} = C_l^{(1)},\ C_t^{(2)} = C_r^{(1)}}$. We have the sphere S^2 (Fig. 9).

2.3.2) $\underline{C_b^{(2)} = C_l^{(1)},\ C_t^{(2)} = C_l^{(1)} \oplus C_r^{(1)}}$. We have the projective plane $\mathbb{R}P^2$ (Fig. 10).

3) $\underline{\operatorname{rank} C = 3.}$ Assume that the columns $C_l^{(1)}, C_r^{(1)}, C_b^{(2)}$ are linearly independent.

3.1) $\underline{C_t^{(2)} = C_b^{(2)}}$. Similarly to the case 2.1), we have the 80-torus (Fig. 11). The 08-torus is obtained in the symmetric case $C_l^{(1)} = C_r^{(1)}$ with linearly independent columns $C_l^{(1)}, C_b^{(2)}, C_t^{(2)}$.

3.2) $\underline{C_t^{(2)} = C_l^{(1)}}$. We obtain the sphere S^2 (Fig. 12).

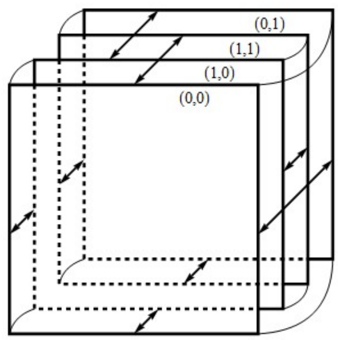


Рис. 10: Gluing of sheets: $\operatorname{rank} C = 2$, $C_l^{(1)} \neq C_r^{(1)}$, $C_b^{(2)} = C_l^{(1)}$, $C_t^{(2)} = C_l^{(1)} \oplus C_r^{(1)}$

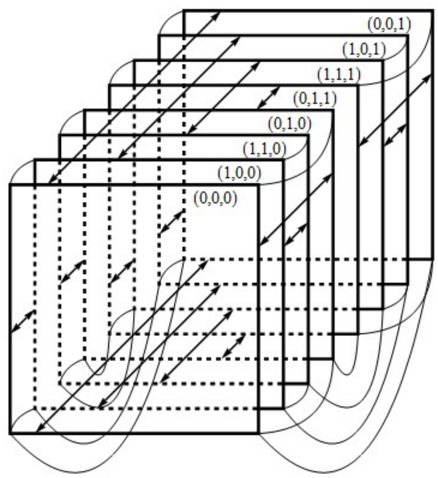


Рис. 11: Gluing of sheets: $\operatorname{rank} C = 3$, $C_t^{(2)} = C_b^{(2)}$

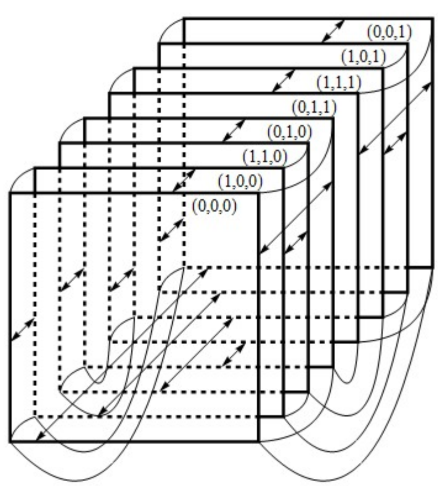


Рис. 12: Gluing of sheets: $\operatorname{rank} C = 3$, $C_t^{(2)} = C_l^{(1)}$

3.3) $\underline{C_t^{(2)} = C_l^{(1)} \oplus C_r^{(1)}}$. We have the Klein bottle KL (Fig. 13).

3.4) $\underline{C_t^{(2)} = C_r^{(1)} \oplus C_b^{(2)}}$. Again the Klein bottle (Fig. 14).

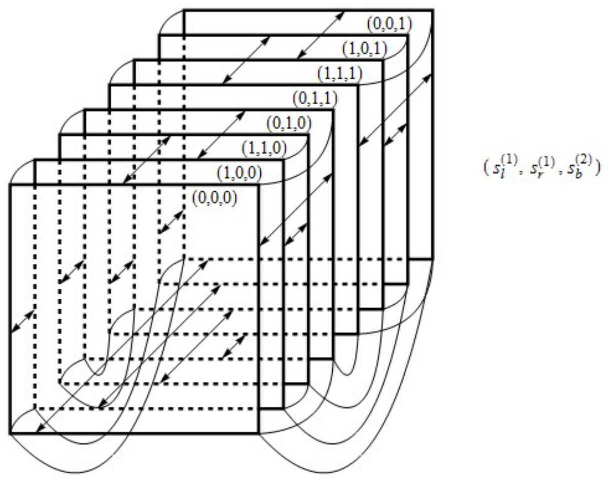


Рис. 13: Gluing of sheets: $\operatorname{rank} C = 3$, $C_t^{(2)} = C_l^{(1)} \oplus C_r^{(1)}$

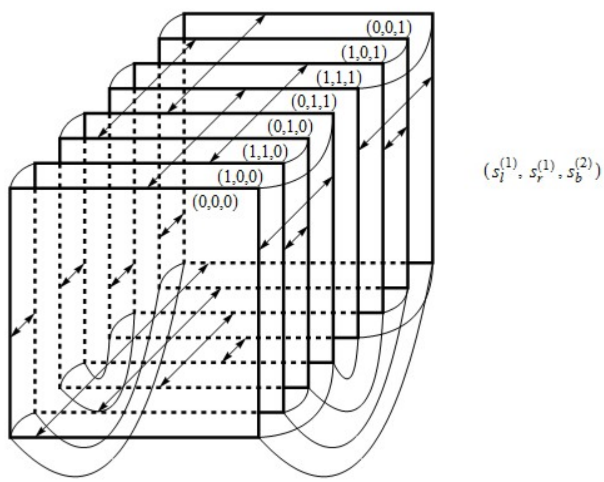


Рис. 14: Gluing of sheets: $\operatorname{rank} C = 3$, $C_t^{(2)} = C_r^{(1)} \oplus C_b^{(2)}$

3.5) $\underline{C_t^{(2)} = C_l^{(1)} \oplus C_r^{(1)} \oplus C_b^{(2)}}$. In this case we obtain the 88/2-torus (Fig. 15).

4) $\underline{\operatorname{rank} C = 4}$. Similarly to the cases 2.1) and 3.1), we obtain a 88-torus.

□

Corollary 2. *If $\pi_{h,k}^{-1}(\Pi)$ is a Liouville torus, the matrix $C = (C_l^{(1)}\, C_r^{(1)}\, C_b^{(2)}\, C_t^{(2)})$ satisfies one of the following conditions:*

1) $\operatorname{rank} C = 2$, $C_l^{(1)} = C_r^{(1)}$, $C_b^{(2)} = C_t^{(2)}$ *(00-torus);*

2) $\operatorname{rank} C = 3$, $C_b^{(2)} = C_t^{(2)}$ *(80-torus);*

3) $\operatorname{rank} C = 3$, $C_l^{(1)} = C_r^{(1)}$ *(08-torus);*

4) $\operatorname{rank} C = 3$, $C_l^{(1)} \oplus C_r^{(1)} \oplus C_b^{(2)} \oplus C_t^{(2)} = \bar{0}$ *(88/2-torus);*

5) $\operatorname{rank} C = 4$ *(88-torus).*

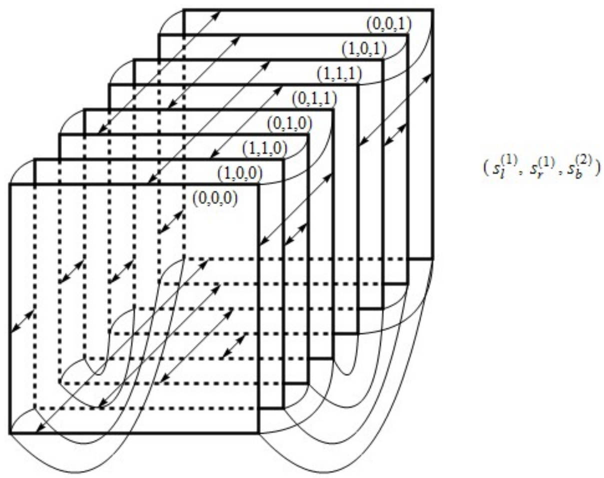


Рис. 15: Gluing of sheets: $\operatorname{rank} C = 3$, $C_t^{(2)} = C_l^{(1)} \oplus C_r^{(1)} \oplus C_b^{(2)}$

5. Classification of bifurcations

Our following aim is to classify the most simple 3-dimensional bifurcations which happen with the Liouville foliations of regular algebraically separable systems.

Consider the isoenergy surface $Q^3_{h_0} = \{x \in M^4 \mid H(x) = h_0\}$. Suppose $(h_0, k_0) \in \Sigma$ is a critical value of the momentum mapping $\mathcal{F} = (H, K)$ and $L_0 \subset \mathcal{F}^{-1}(h_0, k_0)$ is the corresponding singular leaf of the Liouville foliation. Let $U_\varepsilon(L_0)$ be a small invariant 3-dimensional neighborhood of L_0 in $Q^3_{h_0}$ defined by the inequalities $k_0 - \varepsilon \le K \le k_0 + \varepsilon$. Here we assume that (h_0, k_0) is a unique intersection point of the bifurcation diagram Σ with the curve $\{(h_0, k) \mid k_0 - \varepsilon \le k \le k_0 + \varepsilon\}$. Then we may treat $U_\varepsilon(L_0)$ as a 3-dimensional bifurcation of the Liouville foliation (3-atom).

As follows from Theorem 1, the polynomial P_{h_0,k_0} has multiple roots.

Definition 8. *We shall call the bifurcation defined by $U_\varepsilon(L_0)$ simple if it corresponds to a unique multiple root α_j of P_{h_0,k_0}, which has multiplicity 2, and $(\alpha_j, \alpha_j) \notin \pi_{h_0,k_0}(L_0)$, where π_{h_0,k_0} is the projection defined in Section 2.*

The last requirement in this definition means that the bifurcation happens with only one of the cycles $\gamma_\varphi, \gamma_\psi$. In what follows, we assume that it happens with γ_φ, i.e., the line $u_1 = \alpha_j$ intersects the rectangle $\pi_{h_0,k_0}(L_0)$ and the line $u_2 = \alpha_j$ does not.

Remark 7. *The given definition of a simple bifurcation has nothing in common with that of a simple atom given in [1] (Definition 2.4).*

Let $\alpha_{j_1} = \alpha_{j_1}(h, k)$ and $\alpha_{j_2} = \alpha_{j_2}(h, k)$ be two roots of the polynomial $P_{h,k}$ coinciding at (h_0, k_0): $\alpha_{j_1}(h_0, k_0) = \alpha_{j_2}(h_0, k_0)$. There exist two possibilities:

1) $\alpha_{j_1}(h_0, k) = \overline{\alpha_{j_2}(h_0, k)} \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ for $k \in [k_0 - \varepsilon, k_0)$ and $\alpha_{j_1}(h_0, k), \alpha_{j_2}(h_0, k) \in \mathbb{R}$ for $k \in (k_0, k_0 + \varepsilon]$ or vice versa;

2) $\alpha_{j_1}(h_0, k), \alpha_{j_2}(h_0, k) \in \mathbb{R}$ for $k \in [k_0 - \varepsilon, k_0 + \varepsilon]$.

Definition 9. *We shall say that a simple bifurcation is of the first type in the first case and of the second type in the second one.*

The rest of the paper is devoted to the classification of simple bifurcations of the first type that occur in regular algebraically separable systems. Here we list all the required assumptions for this.

(1) The given algebraically separable integrable system is regular.

(2) The isoenergy surface $Q^3_{h_0}$ is regular (i.e., $dH(x) \neq 0$ for any $x \in Q^3_{h_0}$).

(3) The surface $U_\varepsilon(L_0)$ is connected and compact (hence all the leaves $L \subset U_\varepsilon(L_0)$ are compact).

(4) The set $\mathfrak{K}$ of critical points of $\mathcal{F}$ in L is diffeomorphic to a disjoint union of circles and K is a Bott function on $U_\varepsilon(L_0)$, i.e., K is a Morse function on small 2-disks intersecting $\mathfrak{K}$ transversally at each point of $\mathfrak{K}$.

(5) The bifurcation defined by $U_\varepsilon(L_0)$ is simple.

For simple bifurcations of the first type we have again two possibilities.

(1) *(Dis)appearance case.* For any leaf $L \subset \{x \in U_\varepsilon(L_0) \mid K(x) = k\}$ its projection $\pi_{h_0,k}(L)$ lies between the lines $\{u_1 = \alpha_{j_1}(h_0, k)\}$ and $\{u_1 = \alpha_{j_2}(h_0, k)\}$ (Fig. 16).

(2) *Splitting case.* For any leaf $L \subset \{x \in U_\varepsilon(L_0) \mid K(x) = k\}$ its projection $\pi_{h_0,k}(L)$ lies on the left and on the right of the lines $\{u_1 = \alpha_{j_1}(h_0, k)\}$ and $\{u_1 = \alpha_{j_2}(h_0, k)\}$ (Fig. 17).

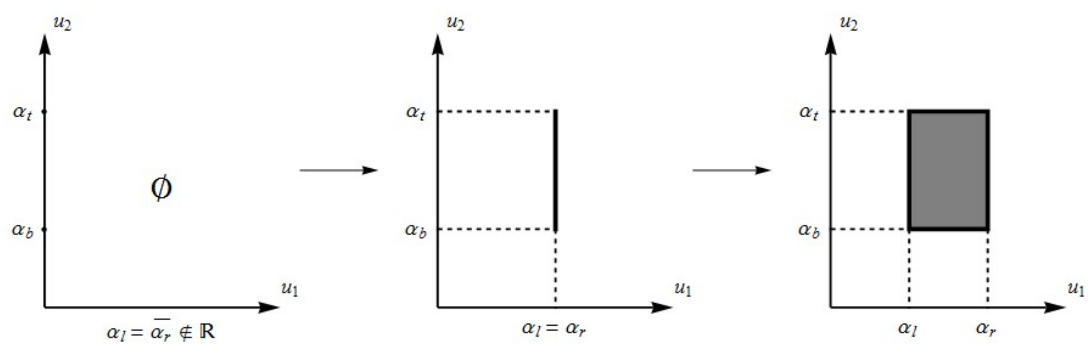


Рис. 16: (Dis)appearance case

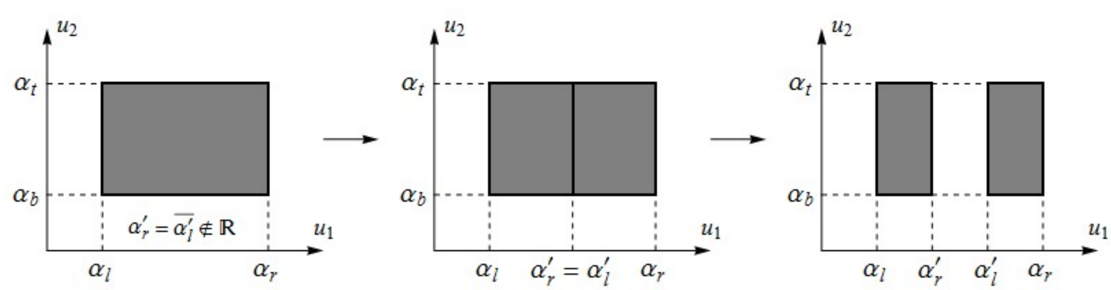


Рис. 17: Splitting case

Consider each of these possibilities separately.

5.1. (Dis)appearance case

Theorem 3. *In the (dis)appearance case, any bifurcation satisfying the above five conditions has the type of the atom A (Fig. 1).*

Доказательство. Since for some values of k α_l is the complex conjugate of α_r, the radicals $\sqrt{u_1-\alpha_l}$ and $\sqrt{\alpha_r-u_1}$ always appear in the expressions (3) in pair. Hence the columns $C_l^{(1)}$ and $C_r^{(1)}$ of the matrix C coincide and $\pi^{-1}_{h_0,k}(\Pi)$ is the 00- or 08-torus when $\alpha_l,\alpha_r\in\mathbb{R}$ and $\alpha_l<\alpha_r$ (here $\Pi=[\alpha_l,\alpha_r]\times[\alpha_b,\alpha_t]$ as above). It follows that the type of bifurcation is totally determined by the evolution of the cycle γ_φ (Fig. 18) and we obviously obtain the atom A.

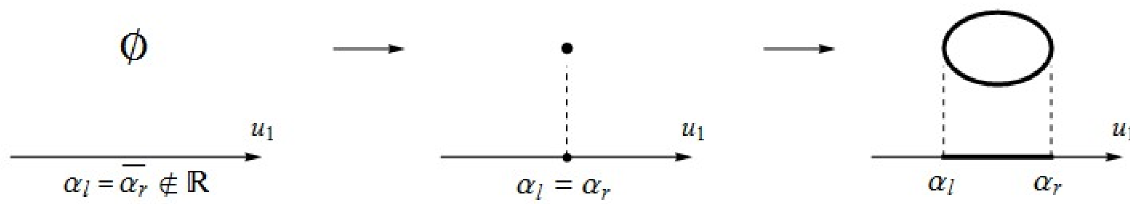


Рис. 18: Evolution of the cycle γ_φ: (dis)appearance case

□

5.2. Splitting case

Theorem 4. *In the splitting case, any bifurcation satisfying the above five conditions has the type of one of the atoms B, C_2, D_1, P_4 (Fig. 1).*

Доказательство. Put $\Pi_1=[\alpha_l,\alpha_r']\times[\alpha_b,\alpha_t]$ and $\Pi_2=[\alpha_l',\alpha_r]\times[\alpha_b,\alpha_t]$ as in Fig. 17. Suppose $\alpha_r'=\overline{\alpha_l'}\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ for $k\in[k_0-\varepsilon,k_0)$ and $\alpha_r',\alpha_l'\in\mathbb{R}$ for $k\in(k_0,k_0+\varepsilon]$. For simplicity, from now on we shall omit the upper indices (1), (2), which stand for the order number of a separation variable, as they are clear from the lower ones. Thus $s_r'=\operatorname{bsgn}(\alpha_r'-u_1)$, A_r' is the column of the matrix A corresponding to s_r' etc.

Put $C=(C_l\,C_r\,C_b\,C_t)$, $C'=(C_l\,C_r'\,C_l'\,C_r\,C_b\,C_t)$, $C_1=(C_l\,C_r'\,C_b\,C_t)$, $C_2=(C_l'\,C_r\,C_b\,C_t)$. Note that the variables $s_l'=\operatorname{bsgn}\sqrt{u_1-\alpha_l'}$, $s_r'=\operatorname{bsgn}\sqrt{u_1-\alpha_r'}$ and hence the columns C_l',C_r' are only well-defined for $k\in[k_0,k_0+\varepsilon]$. As in the previous theorem, we have $C_l'=C_r'$. So instead of s_r' and s_l' it is convenient to introduce the variable $s_{rl}'=\operatorname{bsgn}\sqrt{(u_1-\alpha_r')(u_1-\alpha_l')}$ which is well-defined for any $k\in[k_0-\varepsilon,k_0+\varepsilon]$.

Similar to the proof of Theorem 2, we consider all principally different cases depending on the ranks of the matrices C and C' (the columns $C_l'=C_r'$ of C' may be treated as corresponding to the variable s_{rl}'). Note that the matrices C, C_1, and C_2 corresponding to the rectangles Π, Π_1, and Π_2 satisfy Corollary 2.

1) $\operatorname{rank}C'=\operatorname{rank}C+1$.

- **1.1)** $\operatorname{rank}C=2$, $\operatorname{rank}C'=3$. Two 00-tori differing by the value of s_{rl}' transform into two 80-tori. This corresponds to the atom C_2.
- **1.2)** $\operatorname{rank}C=3$, $\operatorname{rank}C'=4$.
  - **1.2.1)** $C_l=C_r$. This case is similar to the case 1.1): two 08-tori differing by the value of s_{rl}' transform into two 88-tori. Again the atom C_2.
  - **1.2.2)** $C_b=C_t$. Two 80-tori differing by value of s_{rl}' transform into four 80-tori. This corresponds to the atom P_4.
  - **1.2.3)** $C_l\oplus C_r\oplus C_b\oplus C_t=\bar{0}$. A 88/2-torus transforms into two 88-tori. The corresponding atom is the result of the factorization of the atom P_4 from the case 1.3) by the involution acting by central symmetry on the 2-atom P_4 and on the circle S^1. We obtain the atom C_2.

1.3) rank $C = 4$, rank $C' = 5$. This case is similar to the case 1.2.2): two 88-tori differing by the value of s'_{rl} transform into four 88-tori. We obtain the atom P_4.

2) rank C' = rank C.

2.1) rank C' = rank $C = 2$. We have $C_l = A'_r = A'_l = C_r$ and $C_b = C_t$, hence a 00-torus transforms into two 00-tori. This corresponds to the atom B.

2.2) rank C' = rank $C = 3$.

2.2.1) $C_l = C_r$.

2.2.1.1) $A'_l = C_r$. This case is similar to the case 2.1): a 08-torus transforms into two 08-tori. Again the atom B.

2.2.1.2) $A'_l = C_r \oplus C_b \oplus C_t$. A 08-torus transforms into two 88/2-tori. This corresponds to the atom B.

2.2.2) $C_b = C_t$.

2.2.2.1) $A'_l = C_r$. A 80-torus transforms into two 00-tori and a 80-torus. This corresponds to the atom D_1. In the symmetric case $A'_l = C_l$ we also have the atom D_1.

2.2.2.2) $A'_l = C_l \oplus C_r$. The resulting 3-surface is a direct product of a non-orientable 2-atom and the circle. Hence it is non-orientable and does not correspond to a 3-atom. So this case is impossible under our assumptions.

2.2.2.3) $A'_l = C_l \oplus C_r \oplus C_b$. It is easy to see that the critical trajectories on the singular leaf cannot be oriented in the same way. This contradicts the existence of the oriented S^1-fibration in a neighborhood of the singular leaf ([1, Theorems 3.2 and 3.3]). Hence this case is also impossible.

2.2.3) $C_l \oplus C_r \oplus C_b \oplus C_t = \bar{0}$. A 88/2-torus transforms into a 08-torus and a 88-torus. This corresponds to the atom B.

2.3) rank C' = rank $C = 4$.

2.3.1) $A'_l = C_r$. This case is similar to the case 2.2.2.1): a 88-torus transforms into two 08-tori and a 88-torus. We obtain the atom D_1. In the symmetric case $A'_l = C_l$ we also have the atom D_1.

2.3.2) $A'_l = C_l \oplus C_r$. This case is similar to the case 2.2.2.2) and is therefore impossible.

2.3.3) $A'_l = C_l \oplus C_r \oplus C_b$. This case is similar to the case 2.2.2.3) and is also impossible.

2.3.4) $A'_l = C_l \oplus C_r \oplus C_b \oplus C_t$. This case is similar to the cases 2.2.2.2) and 2.3.2). Hence it is impossible.

2.3.5) $A'_l = C_r \oplus C_b \oplus C_t$. A 88-torus transforms into two 88/2-tori and a 88-torus. We obtain the atom D_1.

□

6. Conclusion

As follows from Theorems 3 and 4, the only simple bifurcations of the first type that may occur (and actually do) in regular algebraically separable integrable systems under the five conditions listed above have the type of the 3-atoms A, B, C_2, D_1, and P_4. For instance, all these atoms occur in elliptical billiards with a polynomial potential [14].

Our result was obtained by the direct analysis of the gluing of sheets over the boundaries of the rectangles in the plane $\mathbb{R}^2(u_1, u_2)$, so the techniques demonstrated here can be easily applied for the simple 3-atoms of the second type (which will be the subject of the next paper). Moreover, we may generalize these results to the non-compact case or non-simple 3-atoms.

What is remarkable, for the topological analysis of a concrete regular algebraically separable system, there is no need to parametrize the leaves of the Liouville foliation in terms of the initial phase variables. Given the formulae for the expressions of these variables via the variables of separation, one can write down the corresponding $\mathbb{Z}_2$-matrix and just analyze this matrix for different domains in $\mathcal{F}(M^4) \setminus \Delta$, where $\mathcal{F}$ is the momentum mapping and Δ is the discriminant set of the polynomial P.

It should be emphasized that singularities of algebraically separable systems often occur not due to the coincidence of roots of the polynomial P, but because of degeneration of the Hamiltonian equations written down in the separating variables. In (2) this happens whenever $u_1 = u_2$. The corresponding singularities are much more complicated than those described above. Their topological classification is the subject for future studies.

The author is grateful to his teacher Prof. A. T. Fomenko for constant support and attention to this work; to all the participants of the Seminar "Modern geometry methods", especially Prof. E. A. Kudryavtseva, for fruitful discussions and valuable comments; to Profs. $\boxed{\text{M. P. Kharlamov}}$ and P. E. Ryabov for encouraging to develop the Boolean functions method; to the reviewer of this paper for carefully reading the text and pointing out the connection of the problems discussed here with the theory of square tiled surfaces.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Болсинов А. В., Фоменко А. Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. В 2 т. Ижевск: Изд. дом "Удмуртский университет", 1999. 444 с., 447 с.

2. Фоменко А. Т. Топологические инварианты гамильтоновых систем, интегрируемых по Лиувиллю // Функц. анализ и его прил. 1988. Том 22, №4. С. 38–51.

3. Болсинов А. В., Матвеев С. В., Фоменко А. Т. Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Список систем малой сложности // УМН. 1990. Том 45, №2. С. 49–77.

4. Фоменко А. Т., Цишанг Х. Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1990. Том 54, №3. С. 546–575.

5. Харламов М. П. Топологический анализ и булевы функции: I. Методы и приложения к классическим системам // Нелинейная динам. 2010. Том 6, №4. С. 769–805.

6. Орёл О. Е. Функция вращения для интегрируемых задач, сводящихся к уравнениям Абеля. Траекторная классификация систем Горячева–Чаплыгина // Матем. сб. 1995. Том 186, №2. С. 105–128.

7. Харламов М. П., Савушкин А. Ю. Геометрический подход к разделению переменных в механических системах // Вестник ВолГУ. Сер. 1. 2010. Вып. 13. С. 47–74.

8. Харламов М. П. Топологический анализ и булевы функции: II. Приложения к новым алгебраическим решениям // Нелинейная динам. 2011. Том 7, №1. С. 25–51.

9. Рябов П. Е. Фазовая топология одного частного случая интегрируемости Горячева в динамике твердого тела // Матем. сб. 2014. Том 205, №7. С. 115–134.

10. Харламов М. П., Рябов П. Е. Топологический атлас волчка Ковалевской в двойном поле // Фундамент. и прикл. матем. 2015. Том 20, №2. С. 185–230.

11. Kharlamov M. P., Ryabov P. E., Savushkin A. Yu. Topological Atlas of the Kowalevski–Sokolov Top // Regul. Chaotic Dyn. 2016. Vol. 21, №1. P. 24–65.

12. Кобцев И. Ф. Геодезический поток двумерного эллипсоида в поле упругой силы: топологическая классификация решений // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. 2018. №2. С. 27–33.

13. Кобцев И. Ф. Эллиптический биллиард в поле потенциальных сил: классификация движений, топологический анализ // Матем. сб. 2020. Том 211, №7. С. 93–120.

14. Пустовойтов С. Е. Исследование структуры слоения Лиувилля интегрируемого эллиптического биллиарда с полиномиальным потенциалом // Чебышевский сб. 2024. Том 25, №1. С. 62–102.

15. Николаенко С. С. Топологическая классификация систем Чаплыгина в динамике твердого тела в жидкости // Матем. сб. 2014. Том 205, №2. С. 75–122.

16. Николаенко С. С. Топологическая классификация интегрируемого случая Горячева в динамике твердого тела // Матем. сб. 2016. Том 207, №1. С. 123–150.

17. Nikolaenko S. S. Topological classification of the Goryachev Integrable systems in the rigid body dynamics: non-compact case // Lobachevskii J. Math. 2017. Vol. 38, №6. P. 1050–1060.

18. Zorich A. Square tiled surfaces and Teichmüller volumes of the moduli spaces of Abelian differentials. Rigidity in dynamics and geometry. Springer, Berlin, 2002. P. 459–471.

REFERENCES

1. Bolsinov, A. V. & Fomenko, A. T. 2004, “Integrable Hamiltonian systems. Geometry, topology, classification“, *Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL*, 730 p.

2. Fomenko A. T. 1988, “Topological invariants of Liouville integrable Hamiltonian systems”, *Funct. Anal. Appl.*, vol. 22, no. 4, pp. 286–296.

3. Bolsinov A. V., Matveev S. V. & Fomenko A. T. 1990, “Topological classification of integrable Hamiltonian systems with two degrees of freedom. List of systems of small complexity”, *Russian Math. Surveys*, vol. 45, no. 2, pp. 59–94.

4. Fomenko A. T. & Zieschang H. 1991, “A topological invariant and a criterion for the equivalence of integrable Hamiltonian systems with two degrees of freedom”, *Math. USSR-Izv.*, vol. 36, no. 3, pp. 567–596.

5. Kharlamov M. P. 2010, “Topological analysis and Boolean functions. I. Methods and applications to classical systems”, *Nelin. Dinam.*, vol. 6, no. 4, pp. 769–805. (In Russian).

6. Orel O. E. 1995, “Rotation function for integrable problems reducing to the Abel equations. Orbital classification of Goryachev–Chaplygin systems”, *Sb. Math.*, vol. 186, no. 2, pp. 271–296.

7. Kharlamov M. P. & Savushkin A. Yu. 2010, “Geometrical approach to separation of variables in mechanical systems”, *Vestnik Volgograd. Univ. Ser. 1*, vol. 13, pp. 47–74. (In Russian).

8. Kharlamov M. P. 2011, "Topological analysis and Boolean functions. II. Application to new algebraic solutions", *Nelin. Dinam.*, vol. 7, no. 1, pp. 25–51. (In Russian).

9. Ryabov P. E. 2014, "The phase topology of a special case of Goryachev integrability in rigid body dynamics", *Sb. Math.*, vol. 205, no. 7, pp. 1024–1044.

10. Kharlamov M. P. & Ryabov P. E. 2017, "Topological atlas of the Kovalevskaya top in a double field", *J. Math. Sci.*, vol. 223, no. 6, pp. 775–809.

11. Kharlamov M. P., Ryabov P. E. & Savushkin A. Yu. 2016, "Topological Atlas of the Kowalevski–Sokolov Top", *Regul. Chaotic Dyn.*, vol. 21, no. 1, pp. 24–65.

12. Kobtsev I. F. 2018, "The geodesic flow on a two-dimensional ellipsoid in the field of an elastic force. Topological classification of solutions", *Moscow University Mathematics Bulletin*, vol. 73, no. 2, pp. 64–70.

13. Kobtsev I. F. 2020, "An elliptic billiard in a potential force field: classification of motions, topological analysis", *Sb. Math.*, vol. 211, no. 7, pp. 987–1013.

14. Pustovoitov S. E. 2024, "Research of the structure of the Liouville foliation of an integrable elliptical billiard with polynomial potential", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 25, no. 1, pp. 62–102. (In Russian).

15. Nikolaenko S. S. 2014, "A topological classification of the Chaplygin systems in the dynamics of a rigid body in a fluid", *Sb. Math.*, vol. 205, no. 2, pp. 224–268.

16. Nikolaenko S. S. 2016, "Topological classification of the Goryachev integrable case in rigid body dynamics", *Sb. Math.*, vol. 207, no. 1, pp. 113–139.

17. Nikolaenko S. S. 2017, "Topological Classification of the Goryachev Integrable Systems in the Rigid Body Dynamics: Non-Compact Case", *Lobachevskii J. Math.*, vol. 38, no. 6, pp. 1050–1060.

18. Zorich A. 2002, "Square tiled surfaces and Teichmüller volumes of the moduli spaces of Abelian differentials. Rigidity in dynamics and geometry", *Springer, Berlin*, pp. 459–471.

Получено: 07.12.2024
Принято в печать: 07.04.2025

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 26. Выпуск 2.

УДК 519.173.5 DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-2-218-231

Центральности в классических графах и зависимости между ними

М. А. Тужилин

Тужилин Михаил Алексеевич — кандидат физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: mtu93@mail.ru

Аннотация

В статье доказываются оценки зависимостей между средним кластерным коэффициентом и глобальным кластерным коэффициентом, центральностью по близости, центральностью по посредничеству и центральностью напряжения для простых графов. Также уточняется теорема о зависимости между средним кластерным коэффициентом и радиальной центральностью и проводится подсчет этих центральностей для 3-х бесконечных серий классических графов.

Ключевые слова: сети, центральности, локальные и глобальные характеристики графов, кластерный коэффициент Уоттса – Строгаца, глобальный кластерный коэффициент.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:
Тужилин М.А. Центральности в классических графах и зависимости между ними // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 2, с. 218–231.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 26. No. 2.

UDC 519.173.5 DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-2-218-231

Centralities in classical graphs and relations between them

M. A. Tuzhilin

Tuzhilin Mikhail Alekseevich — candidate of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: mtu93@mail.ru

Abstract

In the paper relations between average clustering coefficient and global clustering coefficient, closeness, betweenness and stress centralities were proved for simple graphs. Also the theorem about the realtion between average clustering coefficient and radiality is clarified and these centralities are calculated for 3 classical series of graphs.

Keywords: networks, centralities, local and global properties of graphs, Watts – Strogatz clustering coefficient, global clustering coefficient.

Bibliography: 15 titles.

For citation:
Tuzhilin, M. A. 2025, “Centralities in classical graphs and relations between them”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 2, pp. 218–231.

1. Введение

Бонакич в статье [1] ввел понятие центральностей, как локальных (по отношению к вершине) или глобальных (по отношению ко всему графу) характеристик графов. Известно множество различных центральностей: локальная эффективность, радиальная центральность, максимальная центральность клики, центральность по близости, центральность по посредничеству, центральность напряжения и др. Анализ центральностей в графах используется для нахождения скрытых характеристик в “реальных” — прикладных задачах [2]–[6]. Одной из таких важнейших центральностей являтеся кластерный коэффициент, который отличает сети, встречающиеся в “реальных” задачах (сети малого мира), от случайно сгенерированных сетей [7].

Известно два определения кластерного коэффициента: средний кластерный коэффициент, или коэффициент Уоттса – Строгаца [7] и глобальный кластерный коэффициент [8]. На примере графов-мельниц было показано [9], что в пределе средний кластерный коэффициент и глобальный кластерный имеют разную асимптотику при увеличении числа вершин графа, а именно, средний кластерный коэффициент стремится к 1, а глобальный кластерный коэффициент — к 0. В данной статье приводится посчет этих коэффициентов также для графов колес [10]–[12] и вложенных треугольников [13]–[14]. Для этих классических графов и для многих других оказывается, что средний кластерный коэффициент больше глобального кластерного коэффициента. В данной статье доказывается теорема об обратной оценке и приводится серия графов, для которых средний кластерный коэффициент меньше глобального кластерного коэффициента. Также доказываются теоремы о зависимости между средним класетрным коэффициентом и другими центральностями, а также эти центральности считаются для этих 3-х серий классических графов, включая графы-мельницы.

В данной статье уточняется теорема, полученная в [15], о зависимости между средним кластерным коэффициентом и радиальной центральностью для случая радиальной центральности, определенной на замкнутой окрестности вершины.

2. Основные определения.

Все последующие определения даются для простого неориентированного графа G без висячих вершин. Также их можно расширить для простого графа с висячими вершинами, если во всех определениях функций, где (степень вершины -1) участвует в знаменателе, доопределить эти функции равными 0 для случая, когда степень вершины равна 1, но в данной статье это будет опущено для краткости.

Введем необходимые обозначения. Обозначим через

- $V(G)$ множество вершин графа, $E(G)$ множество ребер графа, $A = \{a_{ij}\}$ матрицу смежности графа G,
- $N(v)$ множество вершин, смежных с вершиной v,
- $N'(v)$ индуцированный подграф в графе G на вершинах $V\big(N(v)\big)\bigcup\{v\}$,
- $\bar{f}(x_1, x_2, ..., x_k)$, для любой функции $f : V\times V\times ...\times V \to \mathbb{R}$ ограничение этой функции на подграф $N'(v)$ (например $\bar{L}(x, y)$ — среднее кратчайшее расстояние между вершинами x и y в подграфе $N'(v)$),
- $d_i = \deg(v_i)$,
- $n = \|V(G)\|,\ \ m = \|E(G)\|$,

- $X(i) = X(v_i)$ для любого X — функции или множества, соответствующего вершине v_i.

Дадим определения центральностей.

(1) **Диаметр графа** $\mathrm{diam}(G) = \max_{s,t\in V(G)} \mathrm{dist}(s,t)$.

(2) **Длина среднего кратчайшего пути в графе** $L(G) = \frac{1}{n(n-1)} \sum\limits_{s,t\in V(G),\, s\neq t} \mathrm{dist}(s,t)$.

(3) **Локальный кластерный коэффициент**

$c_i = c(i) = \frac{\text{число ребер в подграфе } N(i)}{\text{максимально возможное число ребер в подграфе } N(i)} = \frac{2\|E(N(i)))\|}{d_i(d_i-1)}$.

(4) **Средний кластерный коэффициент графа**

$C_{WS}(G) = \frac{1}{n} \sum\limits_{i\in V(G)} c_i = \frac{1}{n} \sum\limits_{i\in V(G)} \frac{2\|E(N(i)))\|}{d_i(d_i-1)} = \frac{1}{n} \sum\limits_{i\in V(G)} \frac{\sum\limits_{j,k\in V(G)} a_{ij}a_{jk}a_{ki}}{d_i(d_i-1)}$.

(5) **Глобальный кластерный коэффициент графа**

$C(G) = \frac{\text{число замкнутых триплетов в графе } G}{\text{число всех триплетов в } G} = \frac{\sum\limits_{i,j,k\in V(G)} a_{ij}a_{jk}a_{ki}}{\sum\limits_{i\in V(G)} d_i(d_i-1)}$.

(6) **Центральности по посреднечеству** $\mathrm{BC}(i) = \sum\limits_{s,t\in V(G),\, s\neq t\neq i} \frac{\sigma_{st}(i)}{\sigma_{st}}$, где σ_{st} — число кратчайших путей из вершины s в t, и $\sigma_{st}(i)$ — число кратчайших путей из s в t через вершину i.

(7) **Центральность по близости** $\mathrm{Clo}(v) = \frac{n-1}{\sum\limits_{t\in V(G)} \mathrm{dist}(v,t)}$.

(8) **Радиальная центральность** $\mathrm{Rad}(v) = \frac{\sum\limits_{t\in V(G), t\neq v} (\mathrm{diam}(G)+1-\mathrm{dist}(v,t))}{n-1}$.

(9) **Центральность напряжения** $\mathrm{Str}(i) = \sum\limits_{s,t\in V(G),\, s\neq t\neq i} \sigma_{st}(i)$, где $\sigma_{st}(i)$ — число кратчайших путей из s в t через вершину i.

Заметим, что все центральности неотрицательные, а также все кластерные коэффициенты $c_i, C_{WS}, C(G)$ меньше либо равны 1.

Для сравенения среднего кластерного коэффицента и других центральностей, определим “локальные” средний кратчайший путь, центральность по посредничеству и радиальную центральность следующим образом. Обозначим через

(1) $L\big(N(i)\big) = \frac{1}{d_i(d_i-1)} \sum\limits_{v,w\in N(i)} \mathrm{dist}(v,w)$ — среднее кратчайшее расстояние для вершин окрестности $N(i)$, где кратчайшее расстояние определено в объемлющем графе G,

(2) $BC(i, N(i)) = \sum\limits_{s,t\in N(i),\, s\neq t} \frac{\sigma_{st}(i)}{\sigma_{st}}$ — центральность по посредничеству для вершин окрестности $N(i)$, где кратчайшие расстояния рассматриваются по отношению к объемлющему графу G,

(3) $\mathrm{Rad}(v, N(i)) = \frac{\sum\limits_{t\in N(i), t\neq v} \big(\mathrm{diam}(N(i))+1-\mathrm{dist}(v,t)\big)}{d_i-1}$ — радиальную центральность для вершин окрестности $v \in N(i)$, где кратчайшее расстояние и диаметр определены в объемлющем графе G.

3. Три серии классических графов.

Посчитаем центральности для 3-х бесконечных серий графов:

(1) **Графы-мельницы.**
Графом-мельницей $W(n,k)$ называется граф, полученный из n копий полного графа K_k и одной центральной вершины, которая смежна с каждой этих графов (см. рисунок 1).

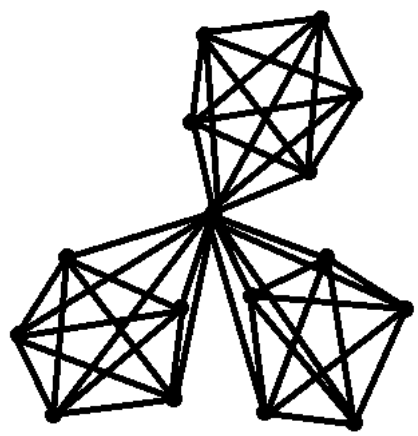


Рис. 1: Граф-мельница $W(3,5)$.

Для такого графа ввиду симметрии для каждой нецентральной вершины все центральности будут одинаковы. Посчитаем основные из них:

(a) $\mathrm{diam}(W(n,k)) = 2$,

(b) Число кратчайших путей, проходящих через центральную вершину, с началом в любой другой равно $(n-1)k$, а также между любыми двумя вершинами существует единственный кратчайший путь, поэтому

$$BC(i,N(i)) = \mathrm{Str}(i) = \begin{cases} n(n-1)k^2 & \text{если } i \text{ центральная вершина,} \\ 0 & \text{в ост.} \end{cases}$$

(c) $c_i = \begin{cases} \frac{k-1}{nk-1} & \text{если } i \text{ центральная вершина,} \\ 1 & \text{в ост.} \end{cases}$

(d) Расстояние между вершинами внутри одного полного графа равно 1, а между вершинами в разных полных графах равно 2, поэтому для центральной вершины i локальное среднее кратчайшее расстояние $L(N(i)) = \frac{nk(1\cdot(k-1)+2\cdot(n-1)k)}{nk(nk-1)} = \frac{k-1+2nk-2k}{nk-1} = \frac{2nk-k-1}{nk-1}$, поэтому

$$L(N(i)) = \begin{cases} \frac{2nk-k-1}{nk-1} & \text{если } i \text{ центральная вершина,} \\ 1 & \text{в ост.} \end{cases}$$

(e) $\mathrm{Clo}(i) = \begin{cases} 1 & \text{если } i \text{ центральная вершина,} \\ \frac{nk}{2nk-k-1+1} = \frac{n}{2n-1} & \text{в ост.} \end{cases}$

(f) $\mathrm{Rad}(v) = \mathrm{diam}(G) + 1 - \frac{1}{\mathrm{Clo}(v)} = \begin{cases} 2 & \text{если } v \text{ центральная вершина,} \\ 3 - \frac{2n-1}{n} = \frac{n+1}{n} & \text{в ост.} \end{cases}$

(g) Если i центральная вершина, то диаметр $N(i)$ определенный по отношению ко всему графу равен $\operatorname{diam}(N'(i)) = 2$, поэтому

$$Rad(v, N(i)) = \begin{cases} 3 - \frac{2nk-k-1}{nk-1} = 1 + \frac{k-1}{nk-1} & \text{если } i \text{ центральная вершина,} \\ 1 & \text{в ост.} \end{cases}$$

(h) Если i центральная вершина, $N'(i) = W(n, k)$, поэтому

$$\overline{Rad}(v) = \begin{cases} \operatorname{Rad}(v) & \text{если } i \text{ центральная вершина,} \\ 1 & \text{в ост.} \end{cases}$$

(2) **Графы колеса.**
Графом колеса $W(k)$ называется граф, полученный из кольца $k \geq 5$ вершин добавлением центральной вершины, смежной с каждой из этих вершин (см. рисунок 2).

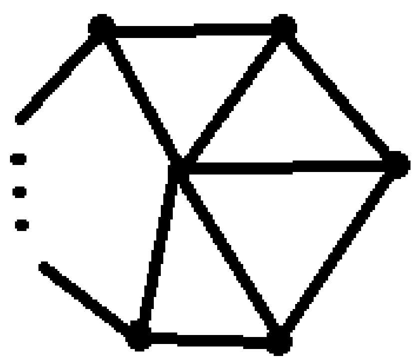


Рис. 2: Граф колеса $W(k)$.

Для такого графа также ввиду симметрии для всех нецентральных вершин все центральности будут одинаковы. Посчитаем их для графа колеса:

(a) $\operatorname{diam}(W(k)) = 2$,

(b) Число кратчайших путей, проходящих через центральную вершину, с началом в любой другой равно $k - 3$ (ко всем, кроме соседних). Также между вершинами кольца через одну существует 1 кратчайший путь в одну сторону и один в обратную, поэтому

$$\operatorname{Str}(i) = \begin{cases} k(k-3) & \text{если } i \text{ центральная вершина,} \\ 2 & \text{в ост.} \end{cases}$$

(c) $c_i = \begin{cases} \frac{2}{k-3} & \text{если } i \text{ центральная вершина,} \\ \frac{1}{3} & \text{в ост.} \end{cases}$

(d) Для центральной вершины $i, BC(i, N(i)) = \sum\limits_{s,t \in N(i), s \neq t} \frac{\sigma_{st}(i)}{\sigma_{st}} = \sum\limits_{t \in N(i)} 2 \cdot 0 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot (k-5) =$ $= k(k-4)$. Для нецентральной вершины $N(i)$ является не замкнутым триплетом и между нецентральными существует 2 кратчайших пути в $W(k)$, поэтому

$$BC(i, N(i)) = \begin{cases} k(k-4) & \text{если } i \text{ центральная вершина,} \\ 1 & \text{в ост.} \end{cases}$$

(e) Расстояние между нецентральными вершинами равно 1 (для смежных) и 2 для остальных, среднее кратчайшее расстояние

$$L(N(i)) = \begin{cases} \frac{k(1\cdot 2+2\cdot(k-3))}{k(k-1)} = \frac{2k-4}{k-1} & \text{если } i \text{ центральная вершина,} \\ \frac{1}{6}(2\cdot 2+1\cdot 4) = \frac{4}{3} & \text{в ост.} \end{cases}$$

(f) $\mathrm{Clo}(i) = \begin{cases} 1 & \text{если } i \text{ центральная вершина,} \\ \frac{k}{2k-4+1} = \frac{k}{2k-3} & \text{в ост.} \end{cases}$

(g) $\mathrm{Rad}(v) = \begin{cases} 2 & \text{если } v \text{ центральная вершина,} \\ 3 - \frac{2k-3}{k} = \frac{k+3}{k} & \text{в ост.} \end{cases}$

(h) Диаметр $N(i)$ определенный по отношению ко всему графу равен $\mathrm{diam}(N'(i)) = 2$ для любой i, поэтому

$$Rad(v, N(i)) = \begin{cases} 3 - \frac{2k-4}{k-1} = 1 + \frac{2}{k-1} & \text{если } i \text{ центральная вершина,} \\ \frac{3}{2} \text{ либо } 2 & \text{в ост.} \end{cases}$$

(i) Если i центральная вершина, $N'(i) = W(k)$, поэтому

$$\overline{Rad}(v) = \begin{cases} \mathrm{Rad}(v) & \text{если } i \text{ центральная вершина,} \\ \frac{5}{3} \text{ либо } 2 & \text{в ост.} \end{cases}$$

(3) **Графы вложенных треугольников.**
Графом вложенных треугольников $T(n)$ называется граф, полученный из n вложенных треугольников вершины которых соединяются с соответствующими вершинами последующего треугольника (см. рисунок 3).

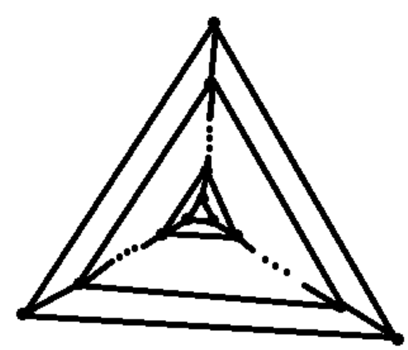


Рис. 3: Граф вложенных треугольников $T(n)$.

Для такого графа также ввиду симметрии для всех вершин одного треугольника все центральности будут одинаковы. Нам эта серия понадобится для сравения кластерных коэффициентов, поэтому посчитаем только их

(a) $\mathrm{diam}(T(n)) = n$,

(b) $c_i = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{для вершин } i \text{ 1-го и } n\text{-го треугольников,} \\ \frac{1}{6} & \text{в ост.} \end{cases}$

(c) $C\big(T(n)\big) = \frac{6}{\frac{1}{2}(36+36n)} = \frac{1}{3(n+1)}$,

(d) $C_{WS}\big(T(n)\big) = \frac{1}{3(n+2)}\Big(6\,\frac{1}{3} + 3n\,\frac{1}{6}\Big) = \frac{n+4}{6(n+2)}$.

4. Средний кластерный коэффициент и глобальный кластерный коэффициент.

Сравним средний кластерный коэффициент и глобальный кластерный коэффициент для этих 3-х серий.

(1) Для графов-мельниц в статье [9] доказывается, что $\lim\limits_{n\to\infty} C_{WS}\big(W(n,k)\big) = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} C\big(W(n,k)\big) = 0$. Покажем также, что $C_{WS}\big(W(n,k)\big) > C\big(W(n,k)\big)$. Сравним эти коэффициенты:

$$C_{WS}\big(W(n,k)\big) \vee C\big(W(n,k)\big)$$

$$\frac{3n\,\left(\frac{k(k-1)}{2} + \frac{k(k-1)(k-2)}{6}\right)}{\frac{1}{2}\big(nk^2(k-1) + nk(nk-1)\big)} = \frac{k-1+n^2k^2-nk}{n^2k^2-1} \vee \frac{1}{nk+1}\left(\frac{k-1}{nk-1} + nk\right) = \frac{k^2-1}{k^2-k+nk-1}$$

$$k^3n^3 - k^3n^2 - k^3n - k^2n^2 + 2k^2n + k^3 - k^2 \vee 0$$

$$k^2(n-1)^2\big(k(n-1)-1\big) \vee 0$$

Для $n \geq 2$ и $k \geq 2 : k^2(n-1)^2\big(k(n-1)-1\big) > 0$. Следовательно, $C_{WS}\big(W(n,k)\big) > C\big(W(n,k)\big)$.

(2) Для графов колес глобальный кластерный коэффициент $C\big(W(k)\big) = \frac{3k}{\frac{1}{2}\big(6k+k(k-1)\big)} = \frac{6}{k+5}$, и средний кластерный коэффициент $C_{WS}\big(W(k)\big) = \frac{1}{k+1}\big(\frac{2n}{k(k-1)} + \frac{2}{3}k\big) = \frac{2(k^2-k+3)}{3(k^2-1)}$, следовательно $\lim\limits_{k\to\infty} C_{WS}\big(W(k)\big) = \frac{2}{3}$, $\lim\limits_{k\to\infty} C\big(W(k)\big) = 0$. Сравним эти коэффициенты:

$$C_{WS}\big(W(k)\big) \vee C\big(W(k)\big),$$

$$\frac{2(k^2-k+3)}{3(k^2-1)} \vee \frac{6}{k+5},$$

$$k^3 - 5k^2 - 2k + 24 \vee 0$$

$$(k^2-k+3)(k+5) \vee 9(k^2-1)$$

$$(k+2)(k-3)(k-4) > 0$$

Поэтому $C_{WS}\big(W(k)\big) > C\big(W(k)\big)$.

(3) Для графов вложенных треугольников $\lim\limits_{n\to\infty} C_{WS}\big(T(n)\big) = \frac{1}{6}$, $\lim\limits_{n\to\infty} C\big(T(n)\big) = 0$. Сравним эти коэффициенты:

$$C_{WS}\big(T(n)\big) \vee C\big(T(n)\big)$$

$$n^2 + 5n + 4 \vee 2n + 4$$

$$n(n+3) > 0$$

Поэтому, $C_{WS}\big(T(n)\big) > C\big(T(n)\big)$.

Мы видим, что для классических графов мельниц, колес, вложенных треугольников и многих других графов $C_{WS}(G) > C(G)$. Докажем, теорему о том, когда выполняется обратное неравенство

Теорема 1. *Если в графе G выполнено $\forall i \le j : d_i \le d_j \Rightarrow c_i \le c_j$, то*

$$C_{WS}(G) \le C(G).$$

Доказательство. Перенумеруем вершины в графе так, что $\forall i \le j : d_i \le d_j$. Заметим, что

$$c_i = \frac{\sum\limits_{j,k \in V(G)} a_{ij}a_{jk}a_{ki}}{d_i(d_i-1)}, \quad C(G) = \frac{\sum\limits_{i,j,k \in V(G)} a_{ij}a_{jk}a_{ki}}{\sum\limits_{i \in V(G)} d_i(d_i-1)}.$$

Действительно,

$$a_{ij}a_{jk}a_{ki} = \begin{cases} 1 & \text{если между вершинами } j \text{ и } k\text{, смежными с вершиной } i\text{, есть ребро,} \\ 0 & \text{в ост.} \end{cases}$$

Следовательно,

$$C_{WS}(G) = \frac{1}{n} \sum_{i \in V(G)} \frac{\sum\limits_{j,k \in V(G)} a_{ij}a_{jk}a_{ki}}{d_i(d_i-1)}.$$

Обозначим $x_i = d_i(d_i-1)$. Так как $\|E(N(i))\| = \frac{1}{2} \sum\limits_{j,k \in V(G)} a_{ij}a_{jk}a_{ki}$ и максимальное число ребер в подграфе $N(i)$ равно $\frac{d_i(d_i-1)}{2}$, то $x_i \ge 2,\ 0 \le c_i \le 1$. Тогда, используя неравенство Чебышёва ($d_i \le d_j \Rightarrow x_i \le x_j$ и $c_i \le c_j$):

$$\frac{1}{n} \sum_{i \in V(G)} x_i\, C_{WS}(G) = (\frac{1}{n} \sum_{i \in V(G)} x_i)(\frac{1}{n} \sum_{i \in V(G)} c_i) \le \frac{1}{n} \sum_{i \in V(G)} x_i c_i = \frac{1}{n} \sum_{i,j,k \in V(G)} a_{ij}a_{jk}a_{ki}.$$

Следовательно,

$$C_{WS}(G) \le \frac{\sum\limits_{i,j,k \in V(G)} a_{ij}a_{jk}a_{ki}}{\sum\limits_{i \in V(G)} d_i(d_i-1)} = C(G).$$

Равенство достигается, когда $\forall i, j \in V(G) : d_i = d_j$, то есть для графа, у которого все степени вершин равны (регулярного графа). Если же существуют $i, j : d_i < d_j$ и $c_i < c_j$, то неравенство будет строгим. □

С помощью этой теоремы легко строится пример серий графов, когда для которых $C_{WS}(G) < C(G)$. Рассмотрим два таких примера:

(1) возьмем полный граф K_n и подклеим к n его ребрам цикл длины 4,

(2) возьмем полный граф K_n и подклеим к каждой его вершине цикл длины 4.

Для таких графов выполнено $d_i > 2$ и $c_i > 0$, если i — вершина полного графа, $d_i = 2, c_i = 0$ для остальных вершин. Следовательно, по предыдущей теореме $C_{WS}(G) < C(G)$.

Следствие 1. *Если в графе G выполнено $\forall i \le j : d_i \le d_j \Rightarrow c_i \ge c_j$, то*

$$C_{WS}(G) \ge C(G).$$

Доказательство такое же, как и в предыдущей теореме.

5. Зависимости между остальными центральностями.

Докажем теорему о связи среднего кластерного коэффициента и центральности напряжения.

Теорема 2.
$$C_{WS}(G) \geq \frac{1}{n} \sum_{i \in V(G)} \Big(1 - \frac{\mathrm{Str}(i)}{d_i(d_i-1)}\Big).$$

Доказательство. Заметим, что $\forall j, k \in N(i) : (j,k) \notin E(N(i))$ кратчайшее расстояние между j и k — это $j \to i \to k$. Тогда,

$$\mathrm{Str}(i) \geq 2\Big(\frac{d_i(d_i-1)}{2} - \|E(N(i))\|\Big),$$

$$\frac{1}{d_i(d_i-1)}\,\mathrm{Str}(i) \geq 1 - c_i,$$

Усреднением по i получаем:

$$C_{WS}(G) \geq \frac{1}{n} \sum_{i \in V(G)} \Big(1 - \frac{\mathrm{Str}(i)}{d_i(d_i-1)}\Big).$$

Заметим, что равенство достигается, если $\mathrm{diam}(G) = 2$. □

Пример 8. *Для графов-мельниц и графов колес* $\mathrm{diam}(G) = 2$, *поэтому* $C_{WS}(G) = \frac{1}{n} \sum\limits_{i \in V(G)} \Big(1 - \frac{\mathrm{Str}(i)}{d_i(d_i-1)}\Big)$, *а также* $Str(i) = d_i(d_i-1)(1-c_i)$.
Действительно $\frac{1}{nk+1}\Big(1 - \frac{n(n-1)k^2}{nk(nk-1)} + nk\Big) = \frac{nk-1-(n-1)k+n^2k^2-nk}{n^2k^2-1} = \frac{k-1+n^2k^2-nk}{n^2k^2-1}$ *для графов-мельниц и* $\frac{1}{k+1}(1 - \frac{k(k-3)}{k(k-1)} + k(1-\frac{2}{6})) = \frac{3(k-1)-3(k-3)+2k(k-1)}{3(k^2-1)} = \frac{2(k^2-k+3)}{3(k^2-1)}$ *для графов колес.*

Докажем теорему о связи среднего кластерного коэффициента и локальной центральности по посредничеству.

Теорема 3.
$$C_{WS}(G) \leq \frac{1}{n} \sum_{i \in V(G)} \Big(1 - \frac{\mathrm{BC}(i, N(i))}{d_i(d_i-1)}\Big).$$

Доказательство. Заметим, что

$$\mathrm{BC}(i, N(i)) = \sum_{j,k \in N(i),\ (j,k) \notin E(N(i))} \frac{1}{\sigma_{jk}} \leq \sum_{j,k \in N(i),\ (j,k) \notin E(N(i))} 1 = d_i(d_i-1) - 2\|E(N(i))\|,$$

$$\frac{\mathrm{BC}(i, N(i))}{d_i(d_i-1)} \leq 1 - c_i.$$

Усреднением по i получаем:

$$C_{WS}(G) \leq \frac{1}{n} \sum_{i \in V(G)} \Big(1 - \frac{\mathrm{BC}(i, N(i))}{d_i(d_i-1)}\Big).$$

Заметим, что равенство достигается, если между любыми двумя вершинами в $N(i)$ существует единственный кратчайший путь, это значит что не существует кратчайших путей длины 2 в графе $N(i)$, следовательно $N(i)$ — объединение полных графов для любой вершины i. □

Пример 9. *Для графов мельниц* $N(i)$ — *объединение полных графов для любой вершины* i, *поэтому* $C_{WS}\big(W(n,k)\big) = \frac{1}{\|W(n,k)\|} \sum\limits_{i \in V(W(n,k))} \Big(1 - \frac{\mathrm{BC}(i,N(i))}{d_i(d_i-1)}\Big)$. *Действительно,* $BC(i,N(i)) =$ $= \mathrm{Str}(i) = d_i(d_i-1)(1-c_i)$. *Для графов колес* $\frac{1}{\|W(k)\|} \sum\limits_{i \in V(W(k))} \Big(1 - \frac{\mathrm{BC}(i,N(i))}{d_i(d_i-1)}\Big) =$ $= \frac{1}{k+1}\Big(1 - \frac{k(k-4)}{k(k-1)} + k\big(1-\frac{1}{6}\big)\Big) = \frac{6(k-1)-6(k-4)+5(k^2-k)}{6(k^2-1)} = \frac{5(k^2-k+18)}{6(k^2-1)} > \frac{2(k^2-k+3)}{3(k^2-1)} = C_{WS}\big(W(k)\big)$.

Из этих двух теорем получаем оценку для среднего кратчайшего расстояния в окрестости вершины i.

Следствие 2.
$$\frac{\mathrm{BC}(i,N(i))}{d_i(d_i-1)} \le L(N(i)) - 1 \le \frac{\mathrm{Str}(i)}{d_i(d_i-1)}.$$

Пример 10. *Для графов мельниц* $L(N(i)) - 1 = \begin{cases} \frac{k(n-1)}{nk-1} & \text{если } i \text{ центральная}, \\ 0 & \text{в ост.} \end{cases} = \frac{\mathrm{Str}(i)}{d_i(d_i-1)}$. *Для графов колес получаем верное неравенство*
$$\begin{cases} \frac{k-4}{k-1} < \frac{2k-4}{k-1} - 1 = \frac{k-3}{k-1} & \text{если } i \text{ центральная}, \\ \frac{1}{6} < \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3} & \text{в ост.} \end{cases}$$

Докажем лемму о связи средней центральности по близости и среднего кратчайшего расстояния в графе.

Утверждение 1.
$$\frac{1}{n} \sum_{v \in V(G)} \mathrm{Clo}(v) \ge \frac{1}{L(G)}.$$

Доказательство. Воспользуемся неравенством о среднем гармоническом и арифметическом:
$$\frac{1}{n} \sum_{v \in V(G)} \mathrm{Clo}(v) = \frac{1}{n} \sum_{v \in V(G)} \frac{n-1}{\sum\limits_{t \in V(G)} \mathrm{dist}(v,t)} \ge \frac{n(n-1)}{\sum\limits_{v,t \in V(G)} \mathrm{dist}(v,t)} = \frac{1}{L(G)}.$$

Заметим, что равенство выполнено, когда все средние кратчайшие расстояния от каждой вершины до всех других равны. □

Пример 11. *Для графов мельниц получаем* $L\big(W(n,k)\big) = \frac{1 \cdot nk + nk(2nk-k-1+1)}{(nk+1)nk} = \frac{2nk-k+1}{nk+1}$. *Тогда* $\frac{1}{\|W(n,k)\|} \sum\limits_{v \in W(n,k)} \mathrm{Clo}(v) = \frac{1 + \frac{nk^2}{2n-1}}{nk+1} = \frac{n^2k+2n-1}{(nk+1)(2n-1)} \vee \frac{nk+1}{2nk-k+1}$. *После приведения слагаемых получаем* $k(n-1)^2 > 0$ *при* $n > 1$. *Для графов колес* $L\big(W(k)\big) = \frac{1 \cdot k + k(2k-4+1)}{(k+1)k} = \frac{2(k-1)}{k+1}$. *Тогда,* $\frac{1}{\|W(k)\|} \sum\limits_{v \in W(k)} \mathrm{Clo}(v) = \frac{1 + \frac{k^2}{2k-3}}{k+1} = \frac{(k-1)(k+3)}{(k+1)(2k-3)} \vee \frac{k+1}{2(k-1)}$. *После приведения слагаемых получаем* $(k-3)^2 > 0$ *при* $k > 3$.

Теорема 4.
$$C_{WS}(G) = \frac{1}{n} \sum_{i \in V(G)} \big(\frac{1}{d_i} \sum_{v \in N(i)} \mathrm{Rad}(v, N(i)) - 1\big) + \frac{\#\{N(i) \text{ явл. полными графами}\}}{n}.$$

Доказательство. В статье [15] доказывалась лемма о связи среднего кратчайшего расстояния с средней радиальной центральностью.

Лемма 1.

$$\frac{1}{n}\sum_{v\in V(G)} \mathrm{Rad}(v) = \mathrm{diam}(G) + 1 - L(G).$$

Воспользуемся этой леммой.

$$\frac{1}{d_i}\sum_{v\in N(i)} \mathrm{Rad}(v, N(i)) = \mathrm{diam}(N(i)) + 1 - L(N(i)) = \mathrm{diam}(N(i)) - 1 + c_i = c_i + 1 - \chi_{K_{d_i}}(N(i)),$$

где $\chi_{K_{d_i}}(N(i)) = \begin{cases} 1 & \text{если } N(i) = K_{d_i}, \\ 0 & \text{в ост.} \end{cases}$. Усреднением этого равенства по i заканчиваем доказательство. □

Докажем теорему о среднем кратчайшем расстоянии в объемлющем графе.

Теорема 5. *Пусть связный простой граф G' получен из графа G добавлением одной вершины и $\|V(G)\| = n$. Тогда*

$$L(G') \geq \frac{n}{n+1} L(G),$$

где $L(G)$ считается по отношению к объемлющему графу G', если G не связен.

Доказательство. Обозначим добавленную вершину за v. Тогда по неравенсту треугольника $\forall s,t \in V(G) : \mathrm{dist}(s,v) + \mathrm{dist}(v,t) \geq \mathrm{dist}(s,t)$, где равенство достигается, когда между s и t не существует пути в G. Следовательно,

$$\sum_{s,t\in V(G), s\neq t} \big(\mathrm{dist}(s,v) + \mathrm{dist}(v,t)\big) \geq \sum_{s,t\in V(G), s\neq t} \mathrm{dist}(s,t)$$

$$\frac{2(n-1)}{n(n-1)} \sum_{t\in V(G)} \mathrm{dist}(v,t) \geq \frac{1}{n(n-1)} \sum_{s,t\in V(G), s\neq t} \mathrm{dist}(s,t)$$

$$\frac{2}{n} \sum_{t\in V(G)} \mathrm{dist}(v,t) \geq L(G)$$

Тогда,

$$L(G') = \frac{1}{(n+1)n} \sum_{s,t\in V(G'), s\neq t} \mathrm{dist}(s,t) = \frac{1}{(n+1)n}\Big(2\sum_{t\in V(G)} \mathrm{dist}(v,t) + \sum_{s,t\in V(G), s\neq t} \mathrm{dist}(s,t)\Big) =$$

$$= \frac{1}{n+1}\frac{2}{n} \sum_{t\in V(G)} \mathrm{dist}(v,t) + \frac{n-1}{n+1} L(G) \geq \frac{n}{n+1} L(G)$$

Заметим, что равенство достигается, когда G состоит из n изолированных вершин. □

Следствие 3. *Пусть связный простой граф G' получен из графа G добавлением k вершин и $\|V(G)\| = n$. Тогда*

$$L(G') \geq \frac{n}{n+k} L(G),$$

где $L(G)$ считается по отношению к объемлющему графу G', если G не связен.

Доказательство. Будум добавлять последовательно вершины к графу G. Обозначим граф, получившийся на i-ом шаге за G_i, тогда по предыдущей теореме

$$L(G') \geq \frac{n+k-1}{n+k} L(G_{k-1}) \geq \frac{n+k-1}{n+k}\frac{n-k-2}{n-k-1} L(G_{k-2}) = \frac{n-k-2}{n+k} L(G_{k-2}) \geq \dots \geq \frac{n}{n+k} L(G)$$

□

Уточним теорему о связи среднего кластерного коэффициента и средней радиальной центральностью из статьи [15].

Теорема 6.

$$C_{WS}(G) \le \frac{1}{n}\sum_{i\in V(G)}\Big(\frac{1}{d_i}\sum_{v\in N(i)}\overline{\mathrm{Rad}}(v)\Big) + \frac{\#\{N(i)\ \textit{явл. полными графами}\}}{n}$$

Доказательство. Как в теореме 4, используя предыдущую теорему, получаем

$$\frac{1}{d_i}\sum_{v\in N(i)}\overline{\mathrm{Rad}}(v) = \mathrm{diam}\big(N'(i)\big) + 1 - \frac{1}{d_i^2}\sum_{v\in N(i)}\sum_{t\in N(i),t\neq v}\mathrm{dist}(s,t) - \frac{1}{d_i}\sum_{t\in N(i)}\mathrm{dist}(i,t) =$$

$$= 3 - \chi_{K_{d_i}}\big(N(i)\big) - \frac{d_i-1}{d_i}L\big(N(i)\big) - 1 \ge 2 - L\big(N(i)\big) - \chi_{K_{d_i}}\big(N(i)\big).$$

По лемме из статьи [15]: $2 - L\big(N(i)\big) = c_i$, и усреднением по i заканчиваем доказательство. □

Пример 12. *Для графов-мельниц*

$$\frac{1}{\|W(n,k)\|}\sum_{i\in V(G)}\Big(\frac{1}{d_i}\sum_{v\in N(i)}\mathrm{Rad}(v,N(i))-1\Big) + \frac{\#\{N(i)\ \textit{явл. полными графами}\}}{\|W(n,k)\|} =$$

$$= \frac{1}{nk+1}\left(\frac{nk\big(1+\frac{k-1}{nk-1}\big)}{nk} - 1 + nk\Big(\frac{k}{k}-1\Big)\right) + \frac{nk}{nk+1} = \frac{k-1+n^2k^2-nk}{n^2k^2-1} = C_{WS}\big(W(n,k)\big),$$

$$\frac{1}{\|W(n,k)\|}\sum_{i\in V(G)}\Big(\frac{1}{d_i}\sum_{v\in N(i)}\overline{\mathrm{Rad}}(v)\Big) + \frac{\#\{N(i)\ \textit{явл. полными графами}\}}{\|W(n,k)\|} =$$

$$= \frac{1}{nk+1}\Big(\frac{nk}{nk}\frac{n+1}{n} + \frac{nk^2}{k}\Big) + \frac{nk}{nk+1} = \frac{n+1+n^2k}{n(nk+1)} \vee \frac{k-1+n^2k^2-nk}{n^2k^2-1}$$

$$n^3k^2 + nk - n - 1 \vee n^3k^2 - n^2k + nk - n$$

Учитывая, что $n^2k > 1$ *получаем верное неравенство.*

Для графов колес

$$\frac{1}{\|W(k)\|}\sum_{i\in V(G)}\Big(\frac{1}{d_i}\sum_{v\in N(i)}\mathrm{Rad}(v,N(i))-1\Big) + \frac{\#\{N(i)\ \textit{явл. полными графами}\}}{\|W(k)\|} =$$

$$= \frac{1}{k+1}\left(\frac{k(1+\frac{2}{k-1})}{k} - 1 + k\Big(\frac{5}{3}-1\Big)\right) + 0 = \frac{2(k^2-k+3)}{3(k^2-1)} = C_{WS}\big(W(k)\big),$$

$$\frac{1}{\|W(k)\|}\sum_{i\in V(G)}\Big(\frac{1}{d_i}\sum_{v\in N(i)}\overline{\mathrm{Rad}}(v)\Big) + \frac{\#\{N(i)\ \textit{явл. полными графами}\}}{\|W(k)\|} =$$

$$= \frac{1}{k+1}\Big(\frac{k}{k}\frac{k+3}{k} + \frac{16k}{9}\Big) = \frac{16k^2+9k+27}{k(k+1)} \vee \frac{2(k^2-k+3)}{3(k^2-1)}$$

После приведения слагаемых получем $46k^3-19k^2+48k-81 = 27k^3+19k(k-1)+48(k-2)+15 > 0$, *при* $k \ge 2$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bonacich P. Factoring and weighting approaches to status scores and clique identification // Journal of mathematical sociology. 1972. Vol. 2, no. 1. P. 113-120.

2. Borgatti S.P., Everett M.G. A graph-theoretic perspective on centrality // Social networks. 2006. Vol. 28, no. 4. P. 466-484.

3. Kiss C., Bichler M. Identification of influencers - measuring influence in customer networks // Decision Support Systems. 2008. Vol. 46, no. 1. P. 233-253.

4. Lee S.H.M., Cotte J., Noseworthy T.J. The role of network centrality in the flow of consumer influence // Journal of Consumer Psychology. 2010. Vol. 20, no. 1. P. 66-77.

5. You J. [et al.] Identity-aware graph neural networks // Proceedings of the AAAI conference on artificial intelligence. 2021. Vol. 35, no. 12. P. 10737-10745.

6. Yuan M.M. [et al.] Climate warming enhances microbial network complexity and stability // Nature Climate Change. 2021. Vol. 11, no. 4. P. 343-348.

7. Watts D.J., Strogatz S.H. Collective dynamics of 'small-world' networks // Nature. 1998. Vol. 393, no. 6684. P. 440-442.

8. Luce R.D., Perry A.D. A method of matrix analysis of group structure // Psychometrika. 1949. Vol. 14, no. 2. P. 95-116.

9. Estrada E. When local and global clustering of networks diverge // Linear Algebra and its Applications. 2016. Vol. 488. P. 249-263.

10. Harary F. Graph Theory. Reading, MA: Addison-Wesley, 1994. 46 p.

11. Pemmaraju S., Skiena S. Computational Discrete Mathematics: Combinatorics and Graph Theory in Mathematica. Cambridge: Cambridge University Press, 2003. P. 248-249.

12. Tutte W.T. Graph Theory. Cambridge: Cambridge University Press, 2005. 340 p.

13. Dolev D., Leighton F.T., Trickey H. Planar embedding of planar graphs // Advances in Computing Research. 1983. Vol. 2. P. 147-161.

14. Frati F., Patrignani M. A note on minimum-area straight-line drawings of planar graphs // Graph Drawing: 15th International Symposium. Berlin: Springer, 2008. P. 339-344.

15. Тужилин М.А. Зависимости между средним кластерным коэффициентом и другими центральностями в графах // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 2024. (В печати).

REFERENCES

1. Bonacich, P., 1972, "Factoring and weighting approaches to status scores and clique identification", *Journal of Mathematical Sociology*, vol. 2, no. 1, pp. 113–120.

2. Borgatti, S.P., Everett, M.G., 2006, "A graph-theoretic perspective on centrality", *Social Networks*, vol. 28, no. 4, pp. 466–484.

3. Kiss, C., Bichler, M., 2008, "Identification of influencers - measuring influence in customer networks", *Decision Support Systems*, vol. 46, no. 1, pp. 233–253.

4. Lee, S.H.M., Cotte, J., Noseworthy, T.J., 2010, “The role of network centrality in the flow of consumer influence”, *Journal of Consumer Psychology*, vol. 20, no. 1, pp. 66–77.

5. You, J., Gomes-Selman, J.M., Ying, R., Leskovec, J., 2021, “Identity-aware graph neural networks”, *Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence*, vol. 35, no. 12, pp. 10737–10745.

6. Yuan, M.M., Guo, X., Wu, L., Zhang, Y.A., Xiao, N., Ning, D., Zhou, J., 2021, “Climate warming enhances microbial network complexity and stability”, *Nature Climate Change*, vol. 11, no. 4, pp. 343–348.

7. Watts, D.J., Strogatz, S.H., 1998, “Collective dynamics of ’small-world’ networks”, *Nature*, vol. 393, no. 6684, pp. 440–442.

8. Luce, R.D., Perry, A.D., 1949, “A method of matrix analysis of group structure”, *Psychometrika*, vol. 14, no. 2, pp. 95–116.

9. Estrada, E., 2016, “When local and global clustering of networks diverge”, *Linear Algebra and its Applications*, vol. 488, pp. 249–263.

10. Harary, F., 1994, *Graph Theory*, Reading, MA: Addison-Wesley, p. 46.

11. Pemmaraju, S., Skiena, S., 2003, “Cycles, Stars, and Wheels”, in *Computational Discrete Mathematics: Combinatorics and Graph Theory in Mathematica*, Cambridge: Cambridge University Press, pp. 248–249.

12. Tutte, W.T., 2005, *Graph Theory*, Cambridge: Cambridge University Press.

13. Dolev, D., Leighton, F.T., Trickey, H., 1983, “Planar embedding of planar graphs”, *Advances in Computing Research*, vol. 2, pp. 147–161.

14. Frati, F., Patrignani, M., 2008, “A note on minimum-area straight-line drawings of planar graphs”, in *Graph Drawing: 15th International Symposium*, Berlin: Springer, pp. 339–344.

15. Tuzhilin, M.A., 2024, “Relations between average clustering coefficient and other centralities in graphs”, *Moscow University Mathematics Bulletin*, in press.

Получено: 29.11.2024
Принято в печать: 07.04.2025

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 26. Выпуск 2.

УДК 514 DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-2-232-253

Тензор инерции твердого тела на плоскости Лобачевского и в псевдо-евклидовом пространстве

А. Ю. Шуберт

Шуберт Анастасия Юрьевна — Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: anastasiia.shubert@math.msu.ru

Аннотация

В работе исследуется тензор инерции твердого тела в трехмерном (псевдо-)евклидовом пространстве (V, g). Конфигурационное многообразие Q системы — шестимерная группа Ли $\mathrm{E}(V, g) \cong V \rtimes \mathrm{Aut}(V, g)$ движений этого пространства, а кинетическая энергия является квадратичной формой $T(\boldsymbol{w}, a)$ на алгебре Ли $\mathfrak{e}(V, g) \cong V + \mathfrak{g}$, где $\mathfrak{g} = \mathfrak{aut}(V, g)$. Это позволяет определить симметрический оператор $J : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^*$ со свойством $T(0, a) = \frac{1}{2}(Ja, a)$, называемый (ковариантным) тензором инерции твердого тела. Для его вычисления введено «псевдо-евклидово векторное произведение» $[,]_g$ в (псевдо-)евклидовом пространстве (V, g) и с помощью этой операции построен изоморфизм $\mu : V \to \mathfrak{g}$. Доказано, что при этом изоморфизме построенная операция $[,]_g$ преобразуется в скобку Ли на алгебре Ли $\mathfrak{g}$, а скалярное произведение — в форму Киллинга–Картана с точностью до скалярного множителя. Получены явные формулы для операции $[,]_g$.

С помощью построенной операции $[,]_g$ определен оператор $\widetilde{\boldsymbol{\omega}} = \mu\boldsymbol{\omega} \in \mathfrak{g}$ мгновенного вращения с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega} \in V$, и для любой точки $\boldsymbol{q} \in V$ определены ее вектор мгновенной скорости $\boldsymbol{v} = \widetilde{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{q} = [\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{q}]_g \in V$, вектор кинетического момента $\boldsymbol{M}^{(\boldsymbol{q})} = [\boldsymbol{q}, m\boldsymbol{v}]_g \in V$ и оператор инерции $\widehat{J}^{(\boldsymbol{q})} : V \to V$, $\boldsymbol{\omega} \mapsto \boldsymbol{M}^{(\boldsymbol{q})}$. Доказаны симметричность оператора инерции $\widehat{J}^{(\boldsymbol{q})}$ и формула $T^{(\boldsymbol{q})} = \frac{1}{2}g(\widehat{J}^{(\boldsymbol{q})}\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega})$ для кинетической энергии точки.

Изучены геометрические свойства оператора инерции $\widehat{J}$ для одноточечных и многоточечных тел. В частности, в псевдо-евклидовом случае ограничение соответствующей квадратичной формы на внутренность светового конуса неотрицательно. Построены примеры 2- и 3-точечных тел, показывающие, что других ограничений на сигнатуру оператора инерции нет. Найдены все возможные сигнатуры для оператора инерции $\widehat{J}$ твердого тела в трехмерном псевдо-евклидовом пространстве. Доказано, что для тел, расположенных внутри светового конуса (например, для «тарелок» на плоскости Лобачевского), оператор инерции имеет сигнатуру $(-, +, +)$ или $(0, +, +)$. Для тел, расположенных снаружи светового конуса, возможны сигнатуры $(-, s, -)$ для всех $s \in \{0, +, -\}$. Остальные сигнатуры $(-, +, 0)$ и $(-, 0, 0)$ также реализуются 2- и 3-точечными телами.

Ключевые слова: тензор инерции, твердое тело, псевдо-евклидово пространство, плоскость Лобачевского, сигнатура, изоморфизм.

Библиография: 28 названий.

Для цитирования:

Шуберт А. Ю. Тензор инерции твердого тела на плоскости Лобачевского и в псевдо-евклидовом пространстве // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 2, с. 232–253.

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ 24-71-10100. Автор является стипендиатом Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС».

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 26. No. 2.

UDC 514 DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-2-232-253

Inertia tensor of a rigid body on the Lobachevsky plane and in pseudo-Euclidean space

A. Yu. Shubert

Shubert Anastasiia Yurievna — Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: anastasiia.shubert@math.msu.ru

Abstract

The paper studies the inertia tensor of a rigid body in three-dimensional (pseudo-)Euclidean space (V, g). The configuration manifold Q of the system is the six-dimensional Lie group $\mathrm{E}(V, g) \cong V \rtimes \mathrm{Aut}(V, g)$ of isometries of this space, and the kinetic energy is a quadratic form $T(\boldsymbol{w}, a)$ on the Lie algebra $\mathfrak{e}(V, g) \cong V + \mathfrak{g}$ where $\mathfrak{g} = \mathfrak{aut}(V, g)$. This allows one to define a symmetric operator $J : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^*$ with the property $T(0, a) = \frac{1}{2}(Ja, a)$, referred to as the (covariant) inertia tensor of the rigid body. To compute this tensor, a "pseudo-Euclidean vector cross product" $[,]_g$ is introduced in the (pseudo-)Euclidean space (V, g), and an isomorphism $\mu : V \to \mathfrak{g}$ is constructed using this operation. It is proved that this isomorphism transforms the operation $[,]_g$ into the Lie bracket on the Lie algebra $\mathfrak{g}$, and the scalar product into the Cartan–Killing form, up to a scalar factor. Explicit formulas for the operation $[,]_g$ are obtained.

Using the operation $[,]_g$, the operator $\widetilde{\boldsymbol{\omega}} = \mu\boldsymbol{\omega} \in \mathfrak{g}$ of instantaneous rotation with angular velocity $\boldsymbol{\omega} \in V$ is defined. For any point $\boldsymbol{q} \in V$, the vector $\boldsymbol{v} = \widetilde{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{q} = [\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{q}]_g \in V$ of instantaneous velocity, the vector $\boldsymbol{M}^{(\boldsymbol{q})} = [\boldsymbol{q}, m\boldsymbol{v}]_g \in V$ of angular momentum and the inertia operator $\widehat{J}^{(\boldsymbol{q})} : V \to V$, $\boldsymbol{\omega} \mapsto \boldsymbol{M}^{(\boldsymbol{q})}$, are defined. The symmetricity of the inertia operator $\widehat{J}^{(\boldsymbol{q})}$ is proved, along with the formula $T^{(\boldsymbol{q})} = \frac{1}{2}g(\widehat{J}^{(\boldsymbol{q})}\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega})$ for the kinetic energy of the point.

Geometric properties of the inertia operator $\widehat{J}$ are studied for single- and multi-point bodies. In particular, in the pseudo-Euclidean case, the restriction of the corresponding quadratic form to the interior of the light cone is shown to be non-negative. Examples of two- and three-point bodies are constructed showing that there are no additional restrictions on the signature of the inertia operator. All possible signatures of the inertia operator $\widehat{J}$ for a rigid body in three-dimensional pseudo-Euclidean space are found. It is proved that, for bodies located within the light cone (e.g., "plates" in the Lobachevsky plane), the inertia operator has a signature of $(-, +, +)$ or $(0, +, +)$. For bodies located outside the light cone, signatures of $(-, s, -)$ are possible for all $s \in \{0, +, -\}$. The remaining signatures $(-, +, 0)$ and $(-, 0, 0)$ are also realized by two- and three-point bodies.

Keywords: inertia tensor, rigid body, pseudo-Euclidean space, Lobachevsky plane, signature, isomorphism.

Bibliography: 28 titles.

For citation:
Shubert, A. Yu. 2025, "Inertia tensor of a rigid body on the Lobachevsky plane and in pseudo-Euclidean space", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 2, pp. 232–253.

1. Введение

Задача о движении твердого тела в евклидовом пространстве является классической [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]. Конфигурационным многообразием этой динамической системы является группа движений E(3) трехмерного евклидова пространства, тесно связанная с группой Ли

SO(3). Более общая постановка приводит к задаче о движении твердого тела на различных группах Ли. Свойства групп и алгебр Ли [8], их линейных представлений [9] и характеров представлений [10] полезны для изучения симметрий движений твердого тела [11], а также для изучения изоморфизмов между задачами о движении твердого тела в разных пространствах [12].

Представляет интерес изучение задач механики в неевклидовых пространствах [13, 14, 15, 16, 17] и в пространствах постоянной кривизны [18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25].

В работе изучается тензор инерции твердого тела в трехмерном (псевдо-)евклидовом пространстве $(V, g) = (\mathbb{R}^3, g)$. Конфигурационное многообразие Q твердого тела в пространстве (V, g) есть 6-мерная группа Ли $\mathrm{E}(V, g) \cong V \rightthreetimes \mathrm{Aut}(V, g)$ движений пространства (V, g) (лемма 1), аналогично евклидову случаю [4, §28 A]. Кинетическая энергия твердого тела есть левоинвариантная (псевдо-)риманова метрика на этой группе Ли (лемма 2) и, тем самым, однозначно определяется своим значением в единице группы, т.е. является квадратичной формой $T(\boldsymbol{w}, a)$ на алгебре Ли $\mathfrak{e}(V, g) \cong V + \mathfrak{aut}(V, g)$ этой группы Ли. Эту квадратичную форму мы выражаем через квадратичную форму $T(a) = T(0, a)$ на алгебре Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{aut}(V, g)$ группы Ли $\mathrm{G} = \mathrm{Aut}(V, g)$, т.е. сводим ее вычисление к случаю волчка (лемма 3). Это позволяет определить симметрическую билинейную форму J на $\mathfrak{g}$, отвечающую этой квадратичной форме, называемую (ковариантным) тензором инерции твердого тела (определение 3 и следствие 1).

Для вычисления тензора инерции твердого тела построена кососимметрическая билинейная операция «псевдо-евклидова векторного произведения»

$$[,]_g : V \times V \to V$$

в трехмерном (псевдо-)евклидовом пространстве (V, g) (определение 4), задающая структуру алгебры Ли на пространстве V (теорема 1). С помощью этой операции построен изоморфизм

$$\mu : V \to \mathfrak{g} = \mathfrak{aut}(V, g), \qquad \mu\boldsymbol{\omega} = \widetilde{\boldsymbol{\omega}} : \boldsymbol{a} \mapsto [\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{a}]_g,$$

между пространством векторов V и алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Доказано, что этот изоморфизм является изоморфизмом алгебр Ли (теорема 1) и является естественным, т.е. эквивариантен по отношению к заменам базиса в пространстве V и индуцированным заменам базиса в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ (теорема 3). Показано, что при этом изоморфизме (псевдо-)евклидово скалярное произведение g на V преобразуется в форму Киллинга – Картана на $\mathfrak{g}$, с точностью до скалярного множителя (теорема 3). Получена явная формула для построенного векторного произведения $[,]_g$ и доказаны его свойства (теорема 1).

С помощью построенной операции $[,]_g$ определены угловая скорость $\boldsymbol{\omega} \in V$ относительно тела, оператор $\widetilde{\boldsymbol{\omega}} : V \to V$ мгновенного вращения относительно тела с данной угловой скоростью, вектор мгновенной скорости $\boldsymbol{v} = [\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{q}]_g$ точки $\boldsymbol{q} \in V$ относительно тела, вектор кинетического момента $\boldsymbol{M}^{(\boldsymbol{q})} = [\boldsymbol{q}, m\boldsymbol{v}]_g$ относительно тела для точки $\boldsymbol{q}$. Определен оператор

$$\widehat{J}^{(\boldsymbol{q})} : V \to V, \qquad \boldsymbol{\omega} \mapsto \boldsymbol{M}^{(\boldsymbol{q})} = [\boldsymbol{q}, m\boldsymbol{v}]_g = [\boldsymbol{q}, m[\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{q}]_g]_g,$$

для точки $\boldsymbol{q} \in V$ массы m. Другими словами, $\widehat{J}^{(\boldsymbol{q})} = -m(\mu\boldsymbol{q})^2$ (следствие 3). Доказана симметричность этого оператора относительно (псевдо-)евклидова скалярного произведения и получена формула $T^{(\boldsymbol{q})} = \frac{1}{2}(\widehat{J}^{(\boldsymbol{q})}\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega})_g$ для кинетической энергии точки (следствия 3 и 4). Это позволило определить оператор инерции точки как указанный симметрический оператор $\widehat{J}^{(\boldsymbol{q})}$. В качестве следствий определен оператор инерции $\widehat{J} : V \to V$ любого твердого тела, получены аналогичная формула для его кинетической энергии (теорема 2) и явные формулы для матрицы оператора инерции $\widehat{J}^{(\boldsymbol{q})}$ точки (следствия 5 и 6 и теорема 4).

В §7 изучается оператор инерции $\widehat{J}$ для одноточечных и многоточечных тел. Так, в теореме 4 установлены геометрические свойства оператора инерции $\widehat{J}^{(\mathbf{q})}$ одноточечного тела: ограничение соответствующей квадратичной формы на прямую $\langle \boldsymbol{q} \rangle$ равно нулю, а ее ограничение на плоскость $\langle \boldsymbol{q}\rangle^{\perp}$, касательную к сфере в точке $\boldsymbol{q}$, пропорционально ограничению метрики g на эту плоскость с коэффициентом пропорциональности $\eta m r^2$, где m — масса точки, $r^2 = g(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q})$. В случае $r^2 \neq 0$ это означает, что оператор инерции $\widehat{J}^{(\boldsymbol{q})}$ пропорционален оператору ортогонального проектирования на плоскость $\langle \boldsymbol{q}\rangle^{\perp}$ с коэффициентом пропорциональности $\eta m r^2$ (теорема 4). В частности, в псевдо-евклидовом случае ограничение указанной квадратичной формы на внутренность светового конуса неотрицательно (теорема 4).

Последнее свойство обобщено на все твердые тела в псевдо-евклидовом пространстве, а именно: мы показываем, что для почти всех твердых тел главные моменты инерции корректно определены и первый главный момент инерции отрицателен (определение 6, теорема 5 (C)). Доказано, что первый главный момент инерции всегда неположителен, и описаны все твердые тела, у которых он равен нулю или некорректно определен (теорема 5 и предложение 2 (iii)); в случае, когда он равен нулю, два других главных момента инерции совпадают и неотрицательны. Построены примеры двухточечных и трехточечных тел, показывающие, что других ограничений на сигнатуру оператора инерции нет. Так, в предложении 1 рассмотрены тела в псевдо-евклидовом пространстве, все точки которых расположены внутри светового конуса (например, «тарелка» на плоскости Лобачевского). Доказано, что для таких тел ковариантный тензор инерции J неотрицательно определен, а оператор инерции $\widehat{J}$ имеет сигнатуру $(-,+,+)$ или $(0,+,+)$. В предложении 2 приведены примеры двухточечных тел, расположенных снаружи светового конуса, для которых оператор инерции $\widehat{J}$ имеет сигнатуры $(-,s,-)$ для всех $s \in \{0,+,-\}$. Остальные сигнатуры $(-,+,0)$ и $(-,0,0)$ также реализуются 2- и 3-точечными телами.

Автор выражает благодарность Е. А. Кудрявцевой за постановку задачи, полезные обсуждения и постоянное внимание к работе, А. А. Ошемкову за ценные комментарии о симметрических операторах в псевдо-евклидовом случае, а также анонимным рецензентам за полезные замечания, способствовавшие улучшению изложения.

2. Основные определения

Пусть $V = \mathbb{R}^3$ и $g : V \times V \to \mathbb{R}$ — невырожденная симметрическая билинейная форма на V, которая задается матрицей

$$G = \operatorname{diag}(\eta, 1, 1) = \begin{pmatrix} \eta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{где} \quad \eta = \pm 1,$$

по отношению к стандартному базису $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ пространства V. Базис пространства V будем называть *ортонормированным*, если по отношению к этому базису форма g задается указанной матрицей. Билинейная форма g порождает линейный оператор

$$\varphi_g : V \to V^*, \tag{1}$$

такой, что $\varphi_g(\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}) = g(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ для всех $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$. Допуская некоторую вольность обозначений, будем иногда обозначать оператор φ_g через g (это не приводит к путанице, так как матрицы формы g и оператора φ_g по отношению к любому базису совпадают).

Билинейную форму g будем называть *евклидовым* или *псевдо-евклидовым скалярным произведением* (при $\eta = +1$ и -1 соответственно) и обозначать $g(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})_g = (\varphi_g \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$. Здесь через $(\,,\,) : V^* \times V \to \mathbb{R}$ обозначено спаривание ковекторов и векторов, т.е. $(\varphi_g \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ есть значение ковектора $\varphi_g \boldsymbol{a} \in V^*$ на векторе $\boldsymbol{b} \in V$. Пусть $|\boldsymbol{q}|_g = \sqrt{(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q})_g}$ — длина вектора $\boldsymbol{q} \in V$ в смысле (псевдо-)евклидова скалярного произведения.

Грубо говоря, твердое тело — это система материальных точек $\boldsymbol{q}_1, \ldots, \boldsymbol{q}_n \in V$, связанных соотношениями вида $|\boldsymbol{q}_i - \boldsymbol{q}_j|_g = r_{ij} = \text{const}$. Пусть m_i — масса i-й точки тела.

Определение 1 (Твердое тело). Твердое тело *в (псевдо-)евклидовом пространстве* (V, g) *задается набором масс* $m_1, \dots, m_n$ *своих материальных точек и набором попарных расстояний между ними. Сам набор точек* $(\boldsymbol{q}_1, \dots, \boldsymbol{q}_n) = (\boldsymbol{q}_i)_{i=1}^n \in V^n$*, удовлетворяющий такой системе соотношений, называется* конфигурацией*, которая характеризует положение твердого тела в объемлющем пространстве. Конфигурационное многообразие данного тела — это множество* Q *всех его конфигураций.* Волчком *называется твердое тело, одна из точек которого, скажем* $\boldsymbol{q}_1$*, фиксирована.*

Рассмотрим группу Ли $\mathrm{G} = \mathrm{Aut}(V, g) = \{A \in \mathrm{GL}(V) \mid A^*\varphi_g A = \varphi_g\}$, где $A^* : V^* \to V^*$ — оператор, сопряженный оператору $A : V \to V$. Сопоставляя линейным операторам их матрицы по отношению к стандартному базису, получаем изоморфизм

$$\mathrm{G} \cong \{A \in \mathrm{GL}(3) \mid A^T G A = G\}$$

между группами Ли G и O(3) или O(2, 1) (при $\eta = +1$ и -1).

Пусть $\mathrm{E}(V, g)$ — группа движений (псевдо-)евклидова пространства (V, g). Эту группу можно описать следующим образом. Определим полупрямое произведение $V \leftthreetimes \mathrm{G}$ групп Ли $(V, +)$ и G как группу Ли, являющуюся многообразием $V \times \mathrm{G}$ с операцией $(\boldsymbol{u}, A)\cdot(\boldsymbol{w}, B) = (\boldsymbol{u}+A\boldsymbol{w}, AB)$, где $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \in V$, $A, B \in \mathrm{G}$. Сопоставляя элементу $(\boldsymbol{u}, A) \in V \leftthreetimes \mathrm{G}$ блочную 4×4-матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \boldsymbol{u} & A \end{pmatrix}$, получаем мономорфизм группы $V \leftthreetimes \mathrm{G}$ в группу GL(4):

$$V \leftthreetimes \mathrm{G} \cong \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \boldsymbol{u} & A \end{pmatrix} \;\middle|\; \boldsymbol{u} \in V,\ A \in \mathrm{G} \right\}, \tag{2}$$

при этом указанная операция в группе $V \leftthreetimes \mathrm{G}$ переходит в умножение блочных матриц в группе GL(4). Определим действия группы $V \leftthreetimes \mathrm{G}$ на пространстве V и на конфигурационном многообразии Q правилом

$$(\boldsymbol{u}, A)\boldsymbol{q} = \boldsymbol{u} + A\boldsymbol{q}, \quad \boldsymbol{q} \in V, \qquad (\boldsymbol{u}, A)(\boldsymbol{q}_i)_{i=1}^n = ((\boldsymbol{u}, A)\boldsymbol{q}_i)_{i=1}^n. \tag{3}$$

Тогда для любых $(\boldsymbol{u}, A)$, $(\boldsymbol{w}, B) \in V \leftthreetimes \mathrm{G}$ и любой точки $\boldsymbol{q} \in V$ имеем

$$(\boldsymbol{u}, A)(\boldsymbol{w}, B)\boldsymbol{q} = \boldsymbol{u} + A(\boldsymbol{w} + B\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{u} + A\boldsymbol{w} + AB\boldsymbol{q} = (\boldsymbol{u} + A\boldsymbol{w}, AB)\boldsymbol{q},$$

тем самым, введенные действия группы $V \leftthreetimes \mathrm{G}$ на пространствах V и Q являются левыми. При изоморфизме (2) и сопоставлении любой точке $\boldsymbol{q} \in V$ столбца $\begin{pmatrix} 1 \\ \boldsymbol{q} \end{pmatrix}$ действие (3) группы $V \leftthreetimes \mathrm{G}$ на пространстве V преобразуется в умножение матрицы на столбец. Получаем изоморфизм

$$\mathrm{E}(V, g) \cong V \leftthreetimes \mathrm{G}.$$

Определение 2. *Пусть в пространстве* V *задана система координат, жестко связанная с телом (т.е. заданы точка* $O \in V$ *— начало координат — и «ортогональный» репер в этой точке). Пусть* $\boldsymbol{q}_i^\circ \in V$ *—* i*-я точка тела в этой системе координат,* $(\boldsymbol{q}_i^\circ)_{i=1}^n$ *— конфигурация (определение 1) в этой системе координат. При движении описать изменение координат точек тела* $\boldsymbol{q}_i = \boldsymbol{q}_i(t)$ *относительно неподвижной системы координат можно формулой* $\boldsymbol{q}_i = (\boldsymbol{u}, A)\boldsymbol{q}_i^\circ = \boldsymbol{u} + A\boldsymbol{q}_i^\circ$*,* $i = 1, \dots, n$*, где* $(\boldsymbol{u}, A) = (\boldsymbol{u}(t), A(t)) \in V \leftthreetimes \mathrm{G}$ *— оператор перехода между подвижной (т.е. жестко связанной с телом) и неподвижной системами координат в момент времени* t*. Любой вектор* $\boldsymbol{a} \in V$ *будем обозначать через* $\boldsymbol{a} = (a^1, a^2, a^3)^T$*. В частности, радиус-вектор точки* $\boldsymbol{q} \in V$ *в теле имеет вид* $\boldsymbol{q} = (q^1, q^2, q^3)^T \in V$*.*

Лемма 1 (см. [4, §28 A] в случае евклидова пространства)**.** Конфигурационное многообразие Q твердого тела *в трехмерном (псевдо-)евклидовом векторном пространстве* (V, g) *является 6-мерным многообразием, гомеоморфным группе Ли* $V \leftthreetimes \mathrm{G} \cong \mathrm{E}(V, g)$*, а в случае волчка — 3-мерным многообразием, диффеоморфным группе Ли* $\mathrm{G} = \mathrm{Aut}(V, g)$*, если только тело не является плоским, содержит три точки не на одной прямой и ограничение скалярного произведения* g *на плоскость, проходящую через эти три точки, невырождено.*

Доказательство. Достаточно построить отображение $Q \to V \leftthreetimes \mathrm{G}$, согласованное с построенным левым действием группы $V \leftthreetimes \mathrm{G}$ на Q, т.е. такое, что если $\boldsymbol{q} \mapsto (\boldsymbol{u}, A)$, то $(\boldsymbol{w}, B)\boldsymbol{q} \mapsto (\boldsymbol{w}, B) \cdot (\boldsymbol{u}, A)$. В случае евклидовой метрики $G = \mathrm{diag}(1, 1, 1)$ это сделано в [4, §28 A]. В псевдо-евклидовом случае в качестве правого ортонормированного репера, связанного с телом, берется ортонормированный репер $\boldsymbol{e}_1 \uparrow\uparrow \boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{q}_1 - \boldsymbol{q}_3$, $\boldsymbol{e}_2 \uparrow\uparrow \boldsymbol{u}_2 - \frac{g(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)}{g(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_1)}\boldsymbol{u}_1$ плоскости, содержащей данные три точки $\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \boldsymbol{q}_3$ (здесь $|\boldsymbol{u}_1|_g \neq 0$ для подходящей нумерации точек, $\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{q}_2 - \boldsymbol{q}_3$), и дополняется вектором $\boldsymbol{e}_3$ длины 1 или i, ортогональным этой плоскости. При этом третий вектор линейно независим с первыми двумя в силу невырожденности ограничения метрики на эту плоскость. $\square$

3. Движение в подвижной системе координат. Тензор инерции

В случае волчка конфигурационное многообразие Q в силу леммы 1 есть 3-мерная группа Ли $Q = \mathrm{G} = \mathrm{Aut}(V, g)$, и соответствующая алгебра Ли

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{aut}(V, g) = \{a \in \mathfrak{gl}(V) \mid a^*\varphi_g^* + \varphi_g a = 0\} = \{\varphi_g^{-1} a_{\mathrm{eucl}} \mid a_{\mathrm{eucl}}^* + a_{\mathrm{eucl}} = 0\} \qquad (4)$$

изоморфна алгебре Ли $\{a \in \mathrm{Mat}(3 \times 3) \mid a^T G + G a = 0\}$, т.е. либо алгебре Ли $\mathfrak{so}(3)$ кососимметрических матриц, либо $\mathfrak{so}(2, 1)$. Последнее равенство в (4) следует из того, что операторы $a : V \to V$ и $\varphi_g a = a_{\mathrm{eucl}} : V \to V^*$ удовлетворяют соотношению $a^*\varphi_g^* + \varphi_g a = a_{\mathrm{eucl}}^* + a_{\mathrm{eucl}}$.

В случае произвольного твердого тела (необязательно волчка) конфигурационное многообразие Q в силу леммы 1 есть 6-мерная группа Ли $V \leftthreetimes \mathrm{G} \cong \mathrm{E}(V, g)$. Алгебра Ли этой группы Ли есть полупрямая сумма $V + \mathfrak{g}$ со скобкой Ли $[(\boldsymbol{u}, a), (\boldsymbol{w}, b)] = (a\boldsymbol{w} - b\boldsymbol{u}, [a, b])$. Эта алгебра Ли изоморфна подалгебре $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \boldsymbol{u} & a \end{pmatrix} \,\middle|\, \boldsymbol{u} \in V,\ a \in \mathfrak{aut}(V, g) \right\}$ алгебры Ли $\mathfrak{gl}(4)$ с операцией коммутатор матриц.

Как описать динамику твердого тела? Как известно, фазовое пространство — это касательное расслоение TQ к конфигурационному многообразию. Пусть $g_{ij}(q)$ — поле квадратичных форм на TQ, которое мы вычислим ниже, обычно являющееся римановой или псевдоримановой метрикой на Q (здесь q^i — локальные координаты на Q, $d = \dim Q \in \{3, 6\}$). Рассмотрим натуральную механическую систему на TQ, заданную функцией Лагранжа $L = T - U$, где

$$T = T(q, \dot q) = \sum_{i,j=1}^{d} g_{ij}(q)\dot q^i \dot q^j$$

Иногда (см., например, [4, §28 A]) в качестве конфигурационного многообразия твердого тела рассматривается связная подгруппа группы Ли $V \leftthreetimes \mathrm{Aut}(V, g)$, а именно $V \leftthreetimes \mathrm{Aut}_+(V, g)$, т.е. одна из двух или четырех (в евклидовом и псевдо-евклидовом случаях) связных компонент этого многообразия, соответствующая определенной ориентации тела (а также разбиению светового конуса на две половины $x^1 < 0$ и $x^1 > 0$ в псевдоевклидовом случае). В псевдо-евклидовом случае группа $\mathrm{Aut}_+(V, g)$ состоит из матриц $A \in \mathrm{Aut}(V, g)$, таких, что при представлении их в блочном виде $A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{pmatrix}$ с диагональными блоками размеров 1×1 и 2×2, соответственно, выполнено $a_1^1 > 0$ и $\det a_2^2 > 0$.

— *кинетическая энергия* тела, $U = U(q)$ — гладкая функция на Q, называемая *потенциалом*, которую мы в данной работе не обсуждаем и для определенности считаем равной нулю, т.е. считаем твердое тело свободным.

Лемма 2 (см. [7, гл. I, теорема 1.5 и §4] в случае волчка в евклидовом пространстве). *Фазовым пространством твердого тела в трехмерном (псевдо-)евклидовом пространстве (V, g) является касательное расслоение TQ к группе Ли $Q = V \leftthreetimes \mathrm{G}$, а в случае волчка — к группе Ли $Q = \mathrm{G}$. Кинетическая энергия T является левоинвариантной (псевдо-)римановой метрикой (возможно, вырожденной) на этой группе Ли.*

Доказательство. По определению 2 конфигурация твердого тела в момент времени t относительно неподвижной системы координат имеет вид $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}(t) = (\boldsymbol{u}, A)\boldsymbol{q}^\circ$, где $(\boldsymbol{u}, A) = (\boldsymbol{u}(t), A(t))$ — некоторый путь в группе Ли $V \leftthreetimes \mathrm{G}$, действие элемента группы на конфигурациях определено в (3). Будем записывать элементы $(\boldsymbol{u}, A) \in V \leftthreetimes \mathrm{G}$ в виде блочных матриц $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \boldsymbol{u} & A \end{pmatrix}$, тогда для i-й точки имеем $\begin{pmatrix} 1 \\ \boldsymbol{q}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \boldsymbol{u} & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \boldsymbol{q}_i^\circ \end{pmatrix}$. Вектор скорости конфигурации $\boldsymbol{q} = (\boldsymbol{q}_i)_{i=1}^n$ можно представить в виде

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \boldsymbol{u} & A \end{pmatrix} \boldsymbol{q}^\circ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \dot{\boldsymbol{u}} & \dot{A} \end{pmatrix} \boldsymbol{q}^\circ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \boldsymbol{u} & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \boldsymbol{w} & a \end{pmatrix} \boldsymbol{q}^\circ,$$

при этом, как нетрудно видеть, $(\boldsymbol{w}, a) = (\boldsymbol{w}(t), a(t))$ — элемент алгебры Ли $V + \mathfrak{g}$ вида

$$(\boldsymbol{w}, a) = (A^{-1}\dot{\boldsymbol{u}}, A^{-1}\dot{A}) \in V + \mathfrak{g}, \tag{5}$$

здесь действие элементов алгебры Ли $V + \mathfrak{g}$ на конфигурациях определяется аналогично (3). Так как $(\boldsymbol{u}, A) \in V \leftthreetimes \mathrm{G} = \mathrm{Aut}(V, g)$ — изометрия в смысле псевдометрики, то длина вектора скорости i-й точки равна $|\dot{\boldsymbol{q}}_i|_g = |(\boldsymbol{w}, a)\boldsymbol{q}_i^\circ|_g = |\boldsymbol{w} + a\boldsymbol{q}_i^\circ|_g$, т.е. определяется только элементом (5) алгебры Ли $V + \mathfrak{g}$, $i = 1, \ldots, n$. Отсюда получаем, что кинетическая энергия (i-й точки и всего тела) есть квадратичная форма от вектора (5):

$$T_i = T_i(\boldsymbol{w}, a) = \frac{1}{2} m_i |\boldsymbol{w} + a\boldsymbol{q}_i^\circ|_g^2, \qquad T = T(\boldsymbol{w}, a) = \sum_{i=1}^n T_i(\boldsymbol{w}, a). \tag{6}$$

Осталось заметить, что вектор (5) получается из касательного вектора $(\dot{\boldsymbol{u}}, \dot{A})$ к группе Ли $V \leftthreetimes \mathrm{G}$ в точке $(\boldsymbol{u}, A) \in V \leftthreetimes \mathrm{G}$ левым сдвигом на элемент группы, обратный элементу $(\boldsymbol{u}, A)$. Это и означает левоинвариантность кинетической энергии T как метрики на группе Ли $V \leftthreetimes \mathrm{G}$. □

Итак, по лемме 2 кинетическая энергия является левоинвариантной метрикой на TQ. Эта левоинвариантная метрика, как правило, невырождена (но необязательно знакоопределена в псевдо-евклидовом случае). Движения по инерции твердого тела являются геодезическими на группе Ли $V \leftthreetimes \mathrm{G}$, снабженной этой левоинвариантной метрикой (это следует из принципа наименьшего действия, если эта метрика положительно определена, а в общем случае геодезические понимаются не как локально кратчайшие кривые, а как геодезические соответствующей аффинной связности Леви-Чивиты).

Возникает задача: изучить зависимость кинетической энергии (6) от элемента (5) алгебры Ли $V + \mathfrak{g}$. Следующая лемма показывает, что случай произвольного твердого тела можно свести к случаю волчка ($\boldsymbol{u} = \boldsymbol{w} = 0$), т.е. к случаю алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Пусть $\boldsymbol{q}_c \in V$ — радиус-вектор центра масс тела, по определению имеющий вид

$$\boldsymbol{q}_c = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \boldsymbol{q}_i, \qquad \text{где} \quad m = \sum_{i=1}^n m_i$$

— масса тела. В обозначениях из определения 2 имеем $\boldsymbol{q}_i = \boldsymbol{u} + A\boldsymbol{q}_i^\circ$, поэтому $\boldsymbol{q}_c = \boldsymbol{u} + A\boldsymbol{q}_c^\circ$.

Лемма 3 (см. теорему Гюйгенса-Штейнера [26], [3, (5.18)] в евклидовом случае). *Пусть система координат в V, жестко связанная с телом, имеет начало координат в центре масс $\boldsymbol{q}_c$. Тогда кинетическая энергия (6) на алгебре Ли $V+\mathfrak{g}$ в этой системе координат, обозначаемая через $T_c(\boldsymbol{w},a)$, имеет вид*

$$T_c(\boldsymbol{w},a)=T_c(0,a)+\frac{1}{2}m|\boldsymbol{w}|_g^2. \tag{7}$$

В произвольной системе координат из определения 2 кинетическая энергия имеет вид

$$T(\boldsymbol{w},a)=T_c(0,a)+\frac{1}{2}m|\boldsymbol{w}+a\boldsymbol{q}_c^\circ|_g^2. \tag{8}$$

Доказательство. В системе координат, связанной с центром масс тела, имеем

$$T_c(\boldsymbol{w},a)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n m_i|\boldsymbol{w}+a\boldsymbol{q}_i^\circ|_g^2=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n m_i(\boldsymbol{w}+a\boldsymbol{q}_i^\circ,\boldsymbol{w}+a\boldsymbol{q}_i^\circ)_g^2=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n m_i\left((\boldsymbol{w},\boldsymbol{w})_g^2+(a\boldsymbol{q}_i^\circ,a\boldsymbol{q}_i^\circ)_g^2+2(\boldsymbol{w},a\boldsymbol{q}_i^\circ)_g\right)=\frac{m|\boldsymbol{w}|_g^2}{2}+T_c(0,a)+m(\boldsymbol{w},a\boldsymbol{q}_c^\circ)_g.$$

Последнее слагаемое в полученном выражении равно нулю, так как в данной системе координат $\boldsymbol{q}_c^\circ=0$. Соотношение (7) доказано.

В произвольной системе координат имеем $\boldsymbol{q}_i=\boldsymbol{u}+A\boldsymbol{q}_i^\circ=\boldsymbol{u}+A\boldsymbol{q}_c^\circ+A(\boldsymbol{q}_i^\circ-\boldsymbol{q}_c^\circ)$. С другой стороны, для системы координат, начало координат которой помещено в центр масс, аналогичная пара $(\boldsymbol{u}_c,A_c)$ удовлетворяет соотношению $\boldsymbol{q}_i=\boldsymbol{u}_c+A_c(\boldsymbol{q}_i^\circ-\boldsymbol{q}_c^\circ)$, поэтому $(\boldsymbol{u}_c,A_c)=(\boldsymbol{u}+A\boldsymbol{q}_c^\circ,A)$. С учетом (5) имеем $(\boldsymbol{w}_c,a_c)=(A_c^{-1}\dot{\boldsymbol{u}}_c,A_c^{-1}\dot{A}_c)=(\boldsymbol{w}+a\boldsymbol{q}_c^\circ,a)$. Получаем соотношение между формулами для кинетической энергии по отношению к этим двум системам координат: $T(\boldsymbol{w},a)=T_c(\boldsymbol{w}_c,a_c)=T_c(\boldsymbol{w}+a\boldsymbol{q}_c^\circ,a)$. Поэтому равенство (7) принимает вид (8). Лемма доказана. □

Согласно лемме 2, кинетическая энергия волчка является квадратичной формой

$$T(a):=T(0,a),\qquad a\in\mathfrak{g}, \tag{9}$$

на алгебре Ли $\mathfrak{g}$. При этом оператор $a\in\mathfrak{g}$ имеет вид (5) и называется *оператором мгновенного вращения относительно тела* (ср. [7, гл. I, определение 4.3]), в то время как оператор $\dot{A}A^{-1}=Ad_Aa\in\mathfrak{g}$ называется *оператором мгновенного вращения в пространстве.* При таком вращении точка $\boldsymbol{q}^\circ\in V$ приобретает *мгновенную скорость относительно тела*

$$\boldsymbol{v}:=a\boldsymbol{q}^\circ\in V \tag{10}$$

(равную $A^{-1}\dot{A}\boldsymbol{q}^\circ=A^{-1}\dot{\boldsymbol{q}}$ в обозначениях доказательства леммы 2).

Определение 3. (Ковариантным) тензором инерции *твердого тела называется симметрический линейный оператор*

$$J:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}^*, \tag{11}$$

связанный с кинетической энергией соотношением $T(a)=\frac{1}{2}(Ja,a)$, $a\in\mathfrak{g}$. Здесь через $(,):\mathfrak{g}^*\times\mathfrak{g}\to\mathbb{R}$ обозначено спаривание ковекторов и векторов, т.е. (Ja,a) есть значение ковектора $Ja\in\mathfrak{g}^*$ на векторе $a\in\mathfrak{g}$; симметричность оператора (11) *означает, что $(Ja,b)=(Jb,a)$ для любых $a,b\in\mathfrak{g}$.*

Такое определение тензора инерции дано в книге [7, гл. I, определение 4.1 и пример 4.2] в случае евклидова пространства и алгебры Ли $\mathfrak{g}=\mathfrak{so}(3)$, где также отмечено, что соответствующая квадратичная форма выполняет роль кинетической энергии. Соответствующий симметрический оператор $-2\eta\varphi_{g_{\mathrm{ad}}}^{-1}J:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ можно было бы назвать *оператором инерции* твердого тела, где $g_{\mathrm{ad}}:\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathbb{R}$ — форма Киллинга – Картана на алгебре Ли $\mathfrak{g}$, т.е. симметрическая билинейная форма вида $g_{\mathrm{ad}}(a,b)=\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_a\circ\mathrm{ad}_b)$ [8, гл. 4, §1.3]. В случае евклидовой метрики оператором инерции одноточечного тела $\boldsymbol{q}$ массы m чаще называется [4, §28 B] оператор $A:V\to V$, определяемый формулой $A\boldsymbol{\omega}=m\boldsymbol{q}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{q})$, где $\times$ — векторное произведение в трехмерном евклидовом пространстве $V=\mathbb{R}^3$. Это определение мы распространим на псевдо-евклидов случай в §4.

Из этого определения и формулы (8) при $\boldsymbol{w} = 0$ сразу получаем

Следствие 1. *Тензор инерции J твердого тела относительно точки O (см. определения 2 и 3) равен сумме тензора инерции J_c этого тела относительно его центра масс $\boldsymbol{q}_c$ и тензора инерции $mJ^{(\boldsymbol{q}_c)}$ одноточечного тела, помещенного в центр масс тела $\boldsymbol{q}_c$ и имеющего массу, равную массе m тела:*

$$J = J_c + mJ^{(\boldsymbol{q}_c)}. \tag{12}$$

При этом для одноточечного тела верна формула $(J^{(\boldsymbol{q}_c)}a, a) = |a\boldsymbol{q}_c^\circ|_g^2$, $a \in \mathfrak{g}$.

Всюду далее мы будем работать только в системе координат пространства V, жестко связанной с телом и, допуская некоторую вольность, будем обозначать точку $\boldsymbol{q}^\circ \in V$ через $\boldsymbol{q}$.

4. Построение векторного произведения в псевдо-евклидовом пространстве. Оператор инерции

Как мы показали в лемме 2, кинетическая энергия волчка есть квадратичная форма $T(a)$, $a \in \mathfrak{g}$, см. (9), от оператора $a : V \to V$ мгновенного вращения относительно тела. Эта квадратичная форма естественно выражается через (ковариантный) тензор инерции (11), являющийся симметрическим оператором $J : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^*$ из алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в коалгебру $\mathfrak{g}^*$.

Возникает задача о получении явных формул для тензора инерции.

В евклидовом случае ($\eta = +1$) решение этой задачи хорошо известно: любой оператор $a \in \mathfrak{g}$ мгновенного вращения в теле можно задать вектором угловой скорости $\omega \in V$ вращения в теле (причем единственным образом, если фиксирована ориентация пространства V), так, что оператор $a = \widetilde{\boldsymbol{\omega}} : V \to V$ имеет вид $\widetilde{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{q} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{q}$, где $\times$ — векторное произведение в евклидовом векторном пространстве $V \cong \mathbb{R}^3$ (отвечающее выбранной ориентации в V). При таком вращении тела точка $\boldsymbol{q} \in V$ приобретает мгновенную скорость

$$\boldsymbol{v} := \widetilde{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{q} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{q} \in V$$

относительно тела, см. (10). При этом для одноточечного тела $\boldsymbol{q}$ массы $m = 1$ верны (ввиду (6) при $\boldsymbol{w} = 0$ и свойств векторного произведения) следующие соотношения:

$$T(\widetilde{\boldsymbol{\omega}}) = \frac{1}{2}|\boldsymbol{v}|_g^2 = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{q}, \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{q})_g = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{q} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{q}))_g = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{M}^{(\boldsymbol{q})})_g = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}, \widehat{J}^{(\boldsymbol{q})}\boldsymbol{\omega})_g, \tag{13}$$

где $\boldsymbol{M}^{(\boldsymbol{q})} := \boldsymbol{q} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{q})$ — *вектор кинетического момента* точки $\boldsymbol{q}$ *относительно тела* (см. [3, §5.1], [4, §28 B], ср. [7, гл. I, §4]), $\widehat{J}^{(\boldsymbol{q})} : V \to V$ — *оператор инерции* точки $\boldsymbol{q}$, определенный формулой $\widehat{J}^{(\boldsymbol{q})}\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{M}^{(\boldsymbol{q})}$. Соответствующий оператор $\varphi_g\widehat{J}^{(\boldsymbol{q})} : V \to V^*$ на V является симметрическим и преобразуется в (ковариантный) тензор инерции $J^{(\boldsymbol{q})} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^*$ из (11) при отождествлении векторных пространств V и $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{so}(3)$ при помощи изоморфизма

$$\mu : V \to \mathfrak{g}, \quad \boldsymbol{\omega} \mapsto \widetilde{\boldsymbol{\omega}}, \quad \widetilde{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{c} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{c}, \quad \boldsymbol{c} \in V \tag{14}$$

(т.е. эти симметрические операторы связаны соотношением $(J^{(\boldsymbol{q})}\mu\boldsymbol{a}, \mu\boldsymbol{b}) = (\varphi_g\widehat{J}^{(\boldsymbol{q})}\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ для любых $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$).

Чтобы распространить это решение на псевдо-евклидов случай ($\eta = -1$), нам нужно построить операцию $[,]_g$ на псевдо-евклидовом пространстве (V, g), аналогичную операции $\times$ векторного произведения, и убедиться в том, что эта операция обладает нужными свойствами по отношению к псевдо-евклидовой метрике g. В частности, эта операция должна задавать изоморфизм векторных пространств V и $\mathfrak{g}$, аналогичный изоморфизму (14).

Оказывается, такую операцию $[,]_g$ действительно можно построить. При этом, как и в евклидовом случае, она будет зависеть от выбора ориентации в пространстве V. Построим ее явно в следующем определении.

Определение 4 (векторное произведение в псевдо-евклидовом пространстве). *Фиксируем ориентацию в трехмерном пространстве V (для определенности будем считать, что стандартный базис пространства V^* положительно ориентирован). Пусть σ — ориентированная форма объема на V, отвечающая этой ориентации и (псевдо-)евклидову скалярному произведению g. Определим («псевдо-евклидово»)* векторное произведение

$$[,]_g : V \times V \to V$$

в (псевдо-)евклидовом пространстве (V, g) следующим условием:

$$([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]_g, \boldsymbol{c})_g = \sigma(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \qquad \text{для любой тройки векторов} \quad \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in V \tag{15}$$

(это условие определяет вектор $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]_g \in V$ однозначно, так как $\sigma \neq 0$ и $\dim V = 3$). Определим (для псевдо-евклидова скалярного произведения g) отображение

$$\mu : V \to \mathfrak{gl}(V), \quad \mu\boldsymbol{\omega} = \widetilde{\boldsymbol{\omega}}, \quad \widetilde{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{q} = [\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{q}]_g \qquad \text{для любых} \quad \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{q} \in V. \tag{16}$$

Из определения 4 операции $[,]_g$ сразу получаем

Следствие 2. *Операция $[,]_g$ на (псевдо-)евклидовом пространстве (V, g) является естественной, т.е. не зависит от выбора ортонормированного базиса в V, т.е. $[A\boldsymbol{a}, A\boldsymbol{b}]_g = \eta_A A[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]_g$ для любых $A \in \mathrm{G}$ и $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$, где $\eta_A = \det A = \pm 1$.*

Как мы показали в (4), алгебра Ли $\mathfrak{g}$ состоит из операторов вида $\varphi_g^{-1} a_{\mathrm{eucl}}$, где $a_{\mathrm{eucl}} \in \mathfrak{so}(3)$ — любая кососимметрическая билинейная форма на V. Мы покажем в теореме 1, что образ отображения μ совпадает с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$, и что это отображение есть изоморфизм вида

$$\mu : V \to \mathfrak{g}, \qquad \mu\boldsymbol{\omega} = \widetilde{\boldsymbol{\omega}} := \eta\varphi_g^{-1}\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{eucl}} \qquad \text{для любого} \quad \boldsymbol{\omega} \in V, \tag{17}$$

где $\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{eucl}} : V \to V^*$ — кососимметрический оператор (отвечающий кососимметрической билинейной форме $-i_{\boldsymbol{\omega}}\sigma$ на пространстве V) вида

$$\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{eucl}} := -\varphi_{i_{\boldsymbol{\omega}}\sigma}, \qquad \text{где} \qquad i_{\boldsymbol{a}}\sigma(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) := \sigma(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \quad \text{для любых} \quad \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in V. \tag{18}$$

По отношению к стандартному базису вектор $\boldsymbol{\omega} \in V$ и билинейная форма $\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{eucl}}$ имеют вид

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{pmatrix} \in V, \qquad \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{eucl}} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega^3 & \omega^2 \\ \omega^3 & 0 & -\omega^1 \\ -\omega^2 & \omega^1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{so}(3). \tag{19}$$

Вектор $\boldsymbol{\omega} \in V$ назовем *угловой скоростью относительно тела* (см. [4, §26 Г], ср. [7, гл. I, определение 4.3]), отвечающей оператору $\widetilde{\boldsymbol{\omega}} = \mu\boldsymbol{\omega} \in \mathfrak{g}$ мгновенного вращения относительно тела (см. (9), (16)). При таком вращении точка $\boldsymbol{q} \in V$ приобретает мгновенную скорость

$$\boldsymbol{v} := \widetilde{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{q} = [\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{q}]_g \in V \tag{20}$$

относительно тела, см. (10). При таком вращении вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ остается неподвижным, как и в евклидовом случае: $\widetilde{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{\omega} = [\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}]_g = 0$, т.е. определяет «ось вращения». Определим для точки $\boldsymbol{q}$ *вектор кинетического момента относительно тела* формулой

$$\boldsymbol{M}^{(\boldsymbol{q})} := [\boldsymbol{q}, m\boldsymbol{v}]_g = m[\boldsymbol{q}, [\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{q}]_g]_g \in V, \tag{21}$$

где m — масса этой точки.

В евклидовом пространстве (V, g) любой размерности такая форма объема хорошо известна: квадрат значения формы объема на произвольном базисе $\boldsymbol{e}_i$ пространства V задается равным определителю матрицы Грама $g(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)$. В псевдо-евклидовом случае она определяется аналогично, при этом берется модуль определителя матрицы Грама. Полилинейность и невырожденность такой формы объема легко проверяются [27].

Для определения операции $[,]_g$ на V можно было использовать любую ориентированную форму объема на V (не обязательно связанную со скалярным произведением g). Такая операция будет обладать всеми свойствами из теоремы 1, кроме первого равенства в (23).

Теорема 1. *На любом (псевдо-)евклидовом пространстве* (V, g) *(псевдо-)евклидово векторное произведение* $[,]_g$ *из* (15) *является билинейным и кососимметрическим, имеют место инвариантность скалярного произведения и правило Лейбница:*

$$([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]_g, \boldsymbol{c})_g = (\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]_g)_g, \qquad [\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]_g]_g = [[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]_g, \boldsymbol{c}]_g + [\boldsymbol{b}, [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}]_g]_g, \tag{22}$$

а оператор μ *из* (16) *удовлетворяет условиям* $\mu(V) = \mathfrak{g}$, (17), (18) *и соотношениям*

$$(\mu \boldsymbol{a})\boldsymbol{b} = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]_g = (a^2b^3 - a^3b^2, \eta(a^3b^1 - a^1b^3), \eta(a^1b^2 - a^2b^1))^T, \qquad \mu[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]_g = [\mu\boldsymbol{a}, \mu\boldsymbol{b}], \tag{23}$$

где $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ *— произвольные вектора из* V, a^j, b^j *— их координаты в стандартном базисе,* $[,]$ *— скобка Ли на алгебре Ли* $\mathfrak{g}$. *В случае евклидовой метрики* ($\eta = +1$) *векторное произведение* $[,]_g$ *совпадает со стандартным векторным произведением* $\times$ *в* $\mathbb{R}^3$.

Эту теорему мы докажем в §5, а пока выведем из нее несколько следствий.

Следствие 3 (см. [4, §28 В] для евклидова случая). *Для любой точки* $\boldsymbol{q} \in V$ *рассмотрим оператор* $\widehat{J}^{(\boldsymbol{q})} : V \to V$, *задаваемый формулой*

$$\widehat{J}^{(\boldsymbol{q})} : V \to V, \qquad \widehat{J}^{(\boldsymbol{q})}\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{M}^{(\boldsymbol{q})}, \tag{24}$$

см. (20), (21). *Этот оператор имеет вид* $\widehat{J}^{(\boldsymbol{q})} = -m(\mu\boldsymbol{q})^2$ *и является симметрическим относительно (псевдо-)евклидова скалярного произведения* g.

Доказательство. Равенство $\widehat{J}^{(\boldsymbol{q})} = -m(\mu\boldsymbol{q})^2$ следует из определения 4. Ввиду первого соотношения в (22), для любых векторов $\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2 \in V$ имеем

$$(\boldsymbol{\omega}_1, \widehat{J}^{(\boldsymbol{q})}\boldsymbol{\omega}_2)_g = (\boldsymbol{\omega}_1, [\boldsymbol{q}, m[\boldsymbol{\omega}_2, \boldsymbol{q}]_g]_g)_g = m([\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{q}]_g, [\boldsymbol{\omega}_2, \boldsymbol{q}]_g])_g,$$

а последнее выражение симметрично относительно $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$. □

Подставляя вместо $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$ вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ и замечая, что $|[\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{q}]_g|_g^2 = |\widetilde{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{q}|_g^2 = |\boldsymbol{v}|_g^2$ в силу (20), получаем

Следствие 4 (см. [4, §28 В] в евклидовом случае). *Кинетическая энергия* $T^{(\boldsymbol{q})}$ *точки* $\boldsymbol{q}$ *в (псевдо-)евклидовом пространстве* (V, g) *есть квадратичная форма от вектора* $\boldsymbol{\omega}$ *угловой скорости относительно тела, имеющая следующий вид:*

$$T^{(\boldsymbol{q})}(\mu\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{2}(\widehat{J}^{(\boldsymbol{q})}\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega})_g = \frac{1}{2}(\boldsymbol{M}^{(\boldsymbol{q})}, \boldsymbol{\omega})_g.$$

Оператор $\widehat{J}^{(\boldsymbol{q})}$ *симметричен.* ■

Если тело состоит из многих точек $\boldsymbol{q}_i$ с массами m_i, то, суммируя, получаем:

Теорема 2 (см. [4, §28 В] в евклидовом случае). *Кинетическая энергия* T *произвольного твердого тела в (псевдо-)евклидовом пространстве* (V, g) *есть квадратичная форма от вектора* $\boldsymbol{\omega}$ *угловой скорости относительно тела, имеющая следующий вид:*

$$T(\mu\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{2}(\widehat{J}\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega})_g = \frac{1}{2}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\omega})_g.$$

Здесь $\boldsymbol{M} = \sum\limits_{i=1}^{n} \boldsymbol{M}^{(\boldsymbol{q}_i)}$ *— сумма кинетических моментов* (24) *точек* $\boldsymbol{q}_i$ *масс* m_i, $\widehat{J} = \sum\limits_{i=1}^{n} \widehat{J}^{(\boldsymbol{q}_i)}$ *— сумма операторов* (24), *отвечающих этим точкам. Оператор* $\widehat{J}$ *симметричен.* ■

Определение 5. *Симметрические операторы* $\widehat{J}^{(\boldsymbol{q})}, \widehat{J} : V \to V$ *из следствия* 3 *и теоремы* 2 *называются* операторами инерции *точки* $\boldsymbol{q}$ *и твердого тела, соответственно. Соответствующие симметрические операторы*

$$J^{(\boldsymbol{q})} = \varphi_g \widehat{J}^{(\boldsymbol{q})} : V \to V^*, \qquad J = \varphi_g \widehat{J} : V \to V^*$$

назовем (ковариантными) тензорами инерции *точки* $\boldsymbol{q}$ *и твердого тела, соответственно. Верны соотношения* $(J^{(\boldsymbol{q})}\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2) = (\widehat{J}^{(\boldsymbol{q})}\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2)_g$, $(J\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2) = (\widehat{J}\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2)_g$ *для любых* $\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2 \in V$.

Следствие 5. *Оператор инерции точки* $\boldsymbol{q}$ *массы* $m=1$ *имеет вид* $\widehat{J}^{(\boldsymbol{q})} = -(\mu\boldsymbol{q})^2 = -(\widetilde{\boldsymbol{q}})^2 = -(\varphi_g^{-1}\widetilde{\boldsymbol{q}}_{\text{eucl}})^2$ *и задается матрицей* $\begin{pmatrix} \eta((q^2)^2+(q^3)^2) & -\eta q^1 q^2 & -\eta q^1 q^3 \\ -q^1 q^2 & (q^1)^2+\eta(q^3)^2 & -\eta q^2 q^3 \\ -q^1 q^3 & -\eta q^2 q^3 & (q^1)^2+\eta(q^2)^2 \end{pmatrix}$.

Доказательство. Вычислим оператор $\widehat{J}^{(\boldsymbol{q})}$, применяя формулу $\boldsymbol{v} = [\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{q}]_g$:

$$\widehat{J}^{(\boldsymbol{q})}\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{M}^{(\boldsymbol{q})} = [\boldsymbol{q}, \boldsymbol{v}]_g = [\boldsymbol{q}, [\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{q}]_g]_g = -[\boldsymbol{q}, [\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\omega}]_g]_g = -[\boldsymbol{q}, \widetilde{\boldsymbol{q}}\boldsymbol{\omega}]_g = -\widetilde{\boldsymbol{q}}\widetilde{\boldsymbol{q}}\boldsymbol{\omega} = -(\widetilde{\boldsymbol{q}})^2\boldsymbol{\omega}.$$

Ввиду (17), имеем $\widetilde{\boldsymbol{q}} = \eta\varphi_g^{-1}\widetilde{\boldsymbol{q}}_{\text{eucl}}$. Формула $\widehat{J}^{(\boldsymbol{q})} = -m(\widetilde{\boldsymbol{q}})^2 = -m(\varphi_g^{-1}\widetilde{\boldsymbol{q}}_{\text{eucl}})^2$ доказана. Найдем матрицу оператора $\widehat{J}^{(\boldsymbol{q})}$ по отношению к стандартному базису пространства V, используя, что матрица кососимметрической билинейной формы $\widetilde{\boldsymbol{q}}_{\text{eucl}}$ имеет вид как в (19):

$$\widehat{J}^{(\boldsymbol{q})} = -m(\widetilde{\boldsymbol{q}})^2 = -m(\varphi_g^{-1}\widetilde{\boldsymbol{q}}_{\text{eucl}})^2 = -m \begin{pmatrix} 0 & q^3 & -q^2 \\ -\eta q^3 & 0 & \eta q^1 \\ \eta q^2 & -\eta q^1 & 0 \end{pmatrix}^2.$$

Возведение матрицы в квадрат дает требуемую матрицу. Следствие доказано. □

5. Доказательство теоремы 1

Выше мы вывели следствия 3, 4, 5 и теорему 2 об операторе инерции $\widehat{J}$ из теоремы 1 о свойствах (псевдо-)евклидова векторного произведения $[\,,]_g$. Приведем доказательство этой теоремы.

Билинейность и кососимметричность операции $[\,,]_g$ следуют из определения 4.

Первое свойство в (22) легко следует из определения 4, симметричности скалярного произведения g и кососимметричности ориентированной формы объема σ:

$$([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]_g, \boldsymbol{c})_g = \sigma(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}), \qquad (\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]_g)_g = ([\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]_g, \boldsymbol{a})_g = \sigma(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}) = \sigma(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}).$$

Докажем равенство $\mu(V) = \mathfrak{g}$. Для доказательства включения $\mu(V) \subseteq \mathfrak{g}$ нужно проверить, что оператор $\widetilde{\boldsymbol{a}} = \mu\boldsymbol{a} \in \mathfrak{gl}(V)$ кососимметричен, т.е. удовлетворяет соотношению $(\widetilde{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})_g + (\boldsymbol{b}, \widetilde{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{c})_g = 0$ для любых $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in V$. Это эквивалентно первому свойству из (22), доказанному выше. Включение $\mu(V) \subseteq \mathfrak{g}$ доказано. Инъективность μ следует из определения 4 и невырожденности формы объема. Так как $\mu : V \to \mathfrak{g}$ инъективно, то оно биективно, ввиду совпадения размерностей $\dim V = \dim \mathfrak{g}$. Значит, это изоморфизм векторных пространств и $\mu(V) = \mathfrak{g}$.

Докажем свойства (17) и (18) и первое равенство в (23). Так как $\mu(V) \subseteq \mathfrak{g}$, то для любого $\boldsymbol{\omega} \in V$ оператор $\widetilde{\boldsymbol{\omega}} = \mu\boldsymbol{\omega} \in \mathfrak{g}$ является кососимметрическим, т.е. имеет вид (17) для некоторой

Отметим, что ковариантный тензор инерции J из определения 3 является отображением $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^*$ со свойством $T(\widetilde{\boldsymbol{\omega}}) = \frac{1}{2}(J\widetilde{\boldsymbol{\omega}}, \widetilde{\boldsymbol{\omega}})$, а тензор J из определения 5 — отображением $V \to V^*$ со свойством $T(\mu\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{2}(J\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega})$. С учетом доказанного изоморфизма $\mu : V \to \mathfrak{g}$ это не приводит к путанице в терминологии и обозначениях.

кососимметрической билинейной формы $\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{eucl}} : V \to V^*$, см. (4). Покажем, что эта форма имеет вид (18). Из (15) имеем $\sigma(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) = ([\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]_g,\boldsymbol{c})_g = (\varphi_g[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]_g,\boldsymbol{c})$. По отношению к стандартномому базису имеем $\sigma(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) = \eta\det(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$, где векторы $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ отождествляются со столбцами своих координат в этом базисе, $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$ — матрица из этих столбцов (указанное равенство следует из построения формы объема σ, см. сноску). Поэтому координаты ковектора $\eta\varphi_g[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]_g$ по отношению к этому базису такие же, как у обычного векторного произведения $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$, т.е. имеют вид $(a^2b^3-a^3b^2, a^3b^1-a^1b^3, a^1b^2-a^2b^1)^T$. Следовательно, координаты вектора $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]_g$ в этом же базисе имеют требуемый вид $(a^2b^3-a^3b^2, \eta(a^3b^1-a^1b^3), \eta(a^1b^2-a^2b^1))^T$. Таким образом, мы доказали первое равенство в (23). Из первого равенства в (23) сразу получаем, что билинейная форма $\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{eucl}}$ из (17) имеет вид (19), а поэтому и (18).

Для доказательства второго равенства в (23) запишем для вектора $\boldsymbol{a} = \sum\limits_{j=1}^{3} a^j\boldsymbol{e}_j \in V$ соответствующий элемент алгебры Ли $\mathfrak{g}$:

$$\mu\boldsymbol{a} = \widetilde{\boldsymbol{a}} = \eta\varphi_g^{-1}\widetilde{\boldsymbol{a}}_{\mathrm{eucl}} = \eta\varphi_g^{-1}\begin{pmatrix} 0 & -a^3 & a^2 \\ a^3 & 0 & -a^1 \\ -a^2 & a^1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -a^3 & a^2 \\ \eta a^3 & 0 & -\eta a^1 \\ -\eta a^2 & \eta a^1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим таким образом коммутатор матриц $\widetilde{\boldsymbol{a}}$ и $\widetilde{\boldsymbol{b}}$ (т.е. операцию скобка Ли на алгебре Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{aut}(V,g)$):

$$[\mu\boldsymbol{a},\mu\boldsymbol{b}] = [\widetilde{\boldsymbol{a}},\widetilde{\boldsymbol{b}}] = \widetilde{\boldsymbol{a}}\widetilde{\boldsymbol{b}} - \widetilde{\boldsymbol{b}}\widetilde{\boldsymbol{a}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \eta a^2b^1 & \eta a^3b^1 \\ a^1b^2 & \lambda_2 & \eta a^3b^2 \\ a^1b^3 & \eta a^2b^3 & \lambda_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda_1 & \eta a^1b^2 & \eta a^1b^3 \\ a^2b^1 & \lambda_2 & \eta a^2b^3 \\ a^3b^1 & \eta a^3b^2 & \lambda_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \eta(a^2b^1-a^1b^2) & \eta(a^3b^1-a^1b^3) \\ a^1b^2-a^2b^1 & 0 & \eta(a^3b^2-a^2b^3) \\ a^1b^3-a^3b^1 & \eta(a^2b^3-a^3b^2) & 0 \end{pmatrix} = \mu[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]_g,$$

при этом последнее равенство следует из того, что указанная матрица совпадает с элементом $\mu[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]_g = \widetilde{[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]_g}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$, отвечающим вектору $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]_g = \begin{pmatrix} a^2b^3-a^3b^2 \\ \eta(a^3b^1-a^1b^3) \\ \eta(a^1b^2-a^2b^1) \end{pmatrix}$. Здесь обозначено $\lambda_1 = -\eta(a^3b^3+a^2b^2)$, $\lambda_2 = -(a^1b^1+\eta a^3b^3)$, $\lambda_3 = -(a^1b^1+\eta a^2b^2)$.

Осталось доказать справедливость второго равенства в (22). Заметим, что, ввиду второго равенства в (23), изоморфизм $\mu : V \to \mathfrak{g}$ преобразует операцию $[,]_g$ в скобку Ли на алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Второе равенство в (22) равносильно тождеству Якоби, которое справедливо для скобки Ли в любой алгебре Ли [11, §1.3]. Значит, это равенство верно и для операции $[,]_g$.

Теорема 1 доказана. ■

Следствие 6 (см. [28, §32] в евклидовом случае). *Ковариантный тензор инерции $J^{(\boldsymbol{q})} = \varphi_g\widehat{J}^{(\boldsymbol{q})} : V \to V^*$ точки $\boldsymbol{q}$ единичной массы (см. определение 5) симметричен и задается матрицей*

$$J^{(\boldsymbol{q})} = \begin{pmatrix} (q^2)^2+(q^3)^2 & -q^1q^2 & -q^1q^3 \\ -q^1q^2 & (q^1)^2+\eta(q^3)^2 & -\eta q^2q^3 \\ -q^1q^3 & -\eta q^2q^3 & (q^1)^2+\eta(q^2)^2 \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Формула для матрицы оператора $J^{(\boldsymbol{q})} = \varphi_g\widehat{J}^{(\boldsymbol{q})}$ следует из формулы для матрицы оператора $\widehat{J}^{(\boldsymbol{q})}$ из следствия 5. □

6. Об изоморфизме алгебр Ли $(V, [,]_g)$ и $\mathfrak{g} = \mathfrak{aut}(V, g)$

В теореме 1 мы показали, что отображение μ из (16) имеет вид $\mu : V \to \mathfrak{g}$ и преобразует операцию «псевдо-евклидова векторного произведения» $[,]_g$ на пространстве V в скобку Ли $[,]$ на алгебре Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{aut}(V, g)$, см. (23), т.е. задает изоморфизм алгебр Ли. Отметим, что этот изоморфизм возможен только в трехмерном случае ($\dim V = 3$), так как в общем случае ($\dim V = n$) оператор инерции задан на алгебре Ли $\mathfrak{g}$,

$$\dim \mathfrak{g} = \frac{1}{2}n(n-1) \neq n = \dim V \qquad \text{при} \quad n \neq 3.$$

Теорема 3. *Изоморфизм $\mu : V \to \mathfrak{g}$ вида* (17), (19) *является естественным, т.е. не зависит от выбора ортонормированного базиса в V, т.е. $\mu \circ A = \eta_A \operatorname{Ad}_A \circ \mu$ для любого $A \in \mathrm{G}$, где $\operatorname{Ad} : \mathrm{G} \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ — присоединенное представление группы Ли $\mathrm{G} = \mathrm{Aut}(V, g)$, $\operatorname{Ad}_A : \widetilde{\boldsymbol{\omega}} \mapsto A\widetilde{\boldsymbol{\omega}}A^{-1}$, $\eta_A = \det A = \pm 1$ (см. [10, §1]). При этом изоморфизме (псевдо-) евклидово скалярное произведение g на V преобразуется в форму Киллинга – Картана $g_{\mathrm{ad}}(\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_1, \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_2) = \operatorname{tr}(\operatorname{ad}_{\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_1} \circ \operatorname{ad}_{\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_2})$ на алгебре Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{aut}(V, g)$, домноженную на коэффициент $-\frac{1}{2}\eta$, т.е. $\mu^* g_{\mathrm{ad}} = -2\eta g$.*

Другими словами, первая часть теоремы 3 утверждает, что изоморфизм $\mu : V \to \mathfrak{g}$ согласован с заменой базиса в пространстве V, отвечающей любому оператору $A \in \mathrm{G} = \mathrm{Aut}(V, g)$, и индуцированной заменой базиса в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, т.е. следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\mu"] & \mathfrak{g} \\ V \arrow[u, "A"] \arrow[r, "\mu"] & \mathfrak{g}. \arrow[u, "\eta_A \operatorname{Ad}_A"'] \end{tikzcd}$$

Доказательство. [Доказательство теоремы 3] Первое утверждение теоремы следует из естественности определения операции $[,]_g$ (см. следствие 2).

Докажем второе утверждение теоремы. Его достаточно доказать только в стандартном базисе $\boldsymbol{e}_i$ пространства V и соответствующем базисе $\widetilde{\boldsymbol{e}}_i = \mu(\boldsymbol{e}_i)$ алгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{aut}(V, g)$.

Нужно посчитать форму Киллинга – Картана для базисных элементов алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Так как $\mu[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]_g = [\mu\boldsymbol{a}, \mu\boldsymbol{b}]$ по теореме 1, то матрица оператора $\boldsymbol{E}_j = \operatorname{ad}_{\widetilde{\boldsymbol{e}}_j} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ в базисе $\widetilde{\boldsymbol{e}}_i$ совпадает с матрицей оператора $\widetilde{\boldsymbol{e}}_j : V \to V$ в базисе $\boldsymbol{e}_i$. Поэтому $g_{\mathrm{ad}}(\widetilde{\boldsymbol{e}}_j, \widetilde{\boldsymbol{e}}_k) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{E}_j \circ \boldsymbol{E}_k) = \operatorname{tr}(\widetilde{\boldsymbol{e}}_j \circ \widetilde{\boldsymbol{e}}_k)$ и

$$g_{\mathrm{ad}}(\widetilde{\boldsymbol{e}}_1, \widetilde{\boldsymbol{e}}_1) = \operatorname{tr}(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\eta \\ 0 & \eta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\eta \\ 0 & \eta & 0 \end{pmatrix}) = \operatorname{tr} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -2,$$

$$g_{\mathrm{ad}}(\widetilde{\boldsymbol{e}}_2, \widetilde{\boldsymbol{e}}_2) = \operatorname{tr}(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\eta & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\eta & 0 & 0 \end{pmatrix}) = \operatorname{tr} \begin{pmatrix} -\eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\eta \end{pmatrix} = -2\eta,$$

$$g_{\mathrm{ad}}(\widetilde{\boldsymbol{e}}_3, \widetilde{\boldsymbol{e}}_3) = \operatorname{tr}(\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}) = \operatorname{tr} \begin{pmatrix} -\eta & 0 & 0 \\ 0 & -\eta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -2\eta,$$

$$g_{\mathrm{ad}}(\widetilde{\boldsymbol{e}}_1, \widetilde{\boldsymbol{e}}_2) \quad = \quad g_{\mathrm{ad}}(\widetilde{\boldsymbol{e}}_1, \widetilde{\boldsymbol{e}}_3) \quad = \quad g_{\mathrm{ad}}(\widetilde{\boldsymbol{e}}_2, \widetilde{\boldsymbol{e}}_3) \quad = \quad 0.$$

То есть, $g_{\mathrm{ad}}(\widetilde{\boldsymbol{e}}_i, \widetilde{\boldsymbol{e}}_j) = -2\eta g(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)$, поэтому $\mu^* g_{\mathrm{ad}} = -2\eta g$. $\square$

7. О сигнатуре оператора инерции $\widehat{J}$ в псевдо-евклидовом случае

Определение 6. *Предположим, что существует базис пространства (V, g), в котором (псевдо-)евклидово скалярное произведение g и оператор инерции $\widehat{J} : V \to V$ твердого тела задаются диагональными матрицами, которые без ограничения общности имеют вид $\operatorname{diag}(\eta, 1, 1)$ и $\operatorname{diag}(J_1, J_2, J_3)$ соответственно. В этом случае будем называть упорядоченную тройку чисел (J_1, J_2, J_3)* главными моментами инерции *твердого тела, а упорядоченную тройку знаков (s_1, s_2, s_3), где $s_i = \operatorname{sgn} J_i \in \{0, +, -\}$, —* сигнатурой оператора инерции. *Если такого базиса не существует, будем говорить, что главные моменты инерции и сигнатура* не являются корректно определенными.

Определение 7. *(Псевдо-)сферой радиуса $r \in \mathbb{C}$ с центром в точке $O \in V$ будем называть множество точек пространства V, удаленных от точки O на расстояние r в смысле (псевдо-)евклидовой метрики $g = \operatorname{diag}(\eta, 1, 1)$.*

Всюду ниже будем предполагать, что центр O сферы совпадает с началом координат. Такие сферы совпадают с орбитами действия группы $\mathrm{G} = \operatorname{Aut}(V, g)$ на V. Через $L^\perp$ будем обозначать ортогональное дополнение к подпространству $L \subset V$ в смысле скалярного произведения g. Как хорошо известно, касательная плоскость к сфере в любой ее точке $\boldsymbol{q}$ есть ортогональное дополнение к радиус-вектору этой точки.

Линейную оболочку векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \dots \in V$ будем обозначать через $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \dots \rangle$.

Теорема 4. *Для любой точки $\boldsymbol{q} \in V \setminus \{O\}$ на (псевдо-)сфере с радиусом $r \in \mathbb{R}_{>0}$ (в евклидовом случае) или $r \in \mathbb{R}_+ \cup i\mathbb{R}_{>0}$ (в псевдо-евклидовом случае) оператор инерции $\widehat{J}^{(\boldsymbol{q})} : V \to V$ одноточечного тела имеет вид*

$$\widehat{J}^{(\boldsymbol{q})}\boldsymbol{\omega} = \eta m \left(r^2\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\omega})_g \boldsymbol{q}\right) = \eta m \left(|\boldsymbol{q}|_g^2 \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\omega})_g \boldsymbol{q}\right), \qquad \boldsymbol{\omega} \in V,$$

где m — масса точки, $r^2 = |\boldsymbol{q}|_g^2$. Прямая $\langle \boldsymbol{q} \rangle$ и плоскость $\langle \boldsymbol{q} \rangle^\perp$, касательная к сфере в точке $\boldsymbol{q}$, инвариантны относительно этого оператора. Его ограничение на эту прямую равно нулю, а ограничение на эту плоскость пропорционально тождественному оператору с коэффициентом пропорциональности $\eta m r^2 = \eta m |\boldsymbol{q}|_g^2$. Этот оператор симметричен, и соответствующая квадратичная форма $\boldsymbol{\omega} \mapsto (\widehat{J}^{(\boldsymbol{q})}\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega})_g$, $\boldsymbol{\omega} \in V$, имеет следующие свойства: ее ограничение на прямую $\langle \boldsymbol{q} \rangle$ равно нулю, а ограничение на плоскость $\langle \boldsymbol{q} \rangle^\perp$ пропорционально ограничению метрики g на эту плоскость с коэффициентом пропорциональности $\eta m r^2 = \eta m |\boldsymbol{q}|_g^2$. Сигнатура оператора инерции равна либо $(0, +, +)$ в случае $r^2 < 0$, либо $(-, 0, -)$ в случае $r^2 > 0$, либо не является корректно определенной в случае $r = 0$.

Доказательство. По построению (20), (21), (24) оператора инерции $\widehat{J}^{(\boldsymbol{q})}\boldsymbol{q} = [\boldsymbol{q}, m[\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}]_g]_g = 0$. Оператор $\widehat{J}^{(\boldsymbol{q})}$ симметричен в силу следствия 3. Поэтому прямая $\langle \boldsymbol{q} \rangle$ и плоскость $\langle \boldsymbol{q} \rangle^\perp$ инвариантны относительно него.

Рассмотрим точки $\boldsymbol{q}_1 = (1, 0, 0)^T$ и $\boldsymbol{q}_2 = (0, 1, 0)^T$. Они лежат на сферах радиусов $\sqrt{\eta}$ и 1 соответственно. Для этих точек утверждение теоремы получается подстановкой точек в формулу из следствия 6. Действуя на эти точки элементами группы $\mathrm{G} = \operatorname{Aut}(V, g)$, получим остальные точки этих сфер. Так как $\widehat{J}^{(\boldsymbol{q})} = -m(\mu \boldsymbol{q})^2$ по следствию 3 и, согласно теореме 3, изоморфизм $\mu : V \to \mathfrak{g}$ является естественным, то требуемые свойства верны для всех точек этих сфер. Применяя гомотетии, получаем, что утверждение верно для всех точек всех сфер ненулевого радиуса. Так как эти точки образуют плотное подмножество в V, то из

В псевдо-евклидовом случае такой базис не обязан существовать. Например, квадратичные формы $g = 2dx^1dx^2$ и $J = (2dx^1 + dx^2)dx^2$ в двумерном векторном пространстве не приводятся одновременно к диагональному виду, так как оператор $g^{-1}J$ задается жордановой матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

соображений непрерывности получаем, что утверждение верно для всех точек. Утверждение о сигнатуре оператора инерции для точек $\boldsymbol{q}_1$, $\boldsymbol{q}_2$ и $\boldsymbol{q}_1+\boldsymbol{q}_2$ следует из явного вида тензора инерции для этих точек, см. табл. 1. Применяя к этим точкам движения и гомотетии, получаем, что утверждение о сигнатуре верно для всех точек, отличных от начала координат. $\square$

Таблица 1: Тензоры инерции некоторых 1-, 2- и 3-точечных тел в псевдо-евклидовом пространстве

Точки тела	Ковариантный тензор инерции	Сигнатура оператора инерции	Условия	Расположение точек
$\boldsymbol{q}_1 = \boldsymbol{e}_1$	$m_1 \operatorname{diag}(0,1,1)$	$(0,+,+)$		$r_1 \in i\mathbb{R}_{>0}$
$\boldsymbol{q}_2 = \boldsymbol{e}_2$	$m_2 \operatorname{diag}(1,0,-1)$	$(-,0,-)$		$r_2 > 0$
$\boldsymbol{q}_3 = \boldsymbol{e}_3$	$m_3 \operatorname{diag}(1,-1,0)$	$(-,-,0)$		$r_3 > 0$
$\boldsymbol{q}_4 = \boldsymbol{e}_2 - \delta \boldsymbol{e}_1$	$m_4 \begin{pmatrix} 1 & \delta & 0 \\ \delta & \delta^2 & 0 \\ 0 & 0 & \delta^2-1 \end{pmatrix}$	$(-,0,-)$ не корр. $(0,+,+)$	$0<\delta<1$ $\delta=1$ $\delta>1$	$r_4>0$ $r_4=0$ $r_4 \in i\mathbb{R}_{>0}$
$\boldsymbol{q}_2, \quad \boldsymbol{q}_3$	$\operatorname{diag}(m, -m_3, -m_2)$	$(-,-,-)$		$r_2,\, r_3 > 0$
$\boldsymbol{q}_1, \quad \boldsymbol{q}_4$ $(a := \delta^2 + \frac{m_1}{m_4})$	$m_4 \begin{pmatrix} 1 & \delta & 0 \\ \delta & a & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix}$	$(-,+,+)$	$\delta > 1$	$r_1,\, r_4 \in i\mathbb{R}_{>0}$
$\boldsymbol{q}_2, \quad \boldsymbol{q}_4$ $(b := \sqrt{1+\frac{m_2}{m_4}})$	$m_4 \begin{pmatrix} b^2 & \delta & 0 \\ \delta & \delta^2 & 0 \\ 0 & 0 & \delta^2-b^2 \end{pmatrix}$	$(-,+,-)$ $(-,+,-)$ $(-,+,-)$ $(-,+,0)$ $(-,+,+)$	$0<\delta<1$ $\delta=1$ $1<\delta<b$ $\delta=b$ $\delta>b$	$r_2>0,\ r_4>0$ $r_2>0,\ r_4=0$ $r_2>0,\ r_4\in i\mathbb{R}_{>0}$ $r_2>0,\ r_4\in i\mathbb{R}_{>0}$ $r_2>0,\ r_4\in i\mathbb{R}_{>0}$
$\boldsymbol{q}_1, \quad \boldsymbol{q}_2, \quad \boldsymbol{q}_3$	$\operatorname{diag}(2m/3, 0, 0)$	$(-,0,0)$	$m_j = m/3$	$r_1 \in i\mathbb{R}_{>0},\, r_2, r_3 > 0$

Теорема 5. *В псевдо-евклидовом случае ($\eta = -1$) квадратичная форма $\boldsymbol{\omega} \mapsto (\widehat{J}\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega})_g$, $\boldsymbol{\omega} \in V$, отвечающая оператору инерции $\widehat{J}$ любого твердого тела, имеет следующие свойства:*

(A) *Ее ограничение на внутренность светового конуса (т.е. на множество времениподобных векторов $\boldsymbol{\omega} \neq 0$) неотрицательно. В частности, если у твердого тела главные моменты инерции корректно определены (определение 6), то первый главный момент инерции неположителен и сигнатура оператора инерции отлична от $(+, s_2, s_3)$.*

(B) *Если $(\widehat{J}\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega})_g = 0$ для какого-либо вектора $\boldsymbol{\omega}$, лежащего внутри светового конуса, то твердое тело содержится в прямой $\langle \boldsymbol{\omega} \rangle$. Если $(\widehat{J}\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega})_g = 0$ для какого-либо вектора $\boldsymbol{\omega} \neq 0$, принадлежащего световому конусу, то твердое тело содержится в касательной плоскости $\langle \boldsymbol{\omega} \rangle^\perp$ к световому конусу в точке $\boldsymbol{\omega}$.*

(C) *Если твердое тело не содержится ни в какой прямой и ни в какой плоскости, описанных в п.* (B)*, то сигнатура оператора инерции корректно определена (определение 6) и имеет вид $(-, s_2, s_3)$, где $s_2, s_3 \in \{0, +, -\}$, при этом $(\widehat{J}\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega})_g > 0$ для любого вектора $\boldsymbol{\omega} \neq 0$ внутри светового конуса или на нем.*

Доказательство. (A) Пусть $\boldsymbol{\omega} = (1,0,0)^T$. Тогда значение $(\widehat{J}\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega})_g$ равно первому диагональному элементу матрицы ковариантного тензора инерции J. Эту матрицу мы нашли в случае одноточечного тела в следствии 6, и по этому следствию ее первый диагональный элемент неотрицателен. Следовательно, $(J^{(\boldsymbol{q})}\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}) \geqslant 0$ для одноточечных тел и, в силу аддитивности тензора инерции, аналогичное неравенство верно и для многоточечных тел. Действуя на вектор $\boldsymbol{\omega}$ поворотами $A \in \mathrm{G}$, получим в силу следствия 3 и теоремы 3, что $(JA\boldsymbol{\omega}, A\boldsymbol{\omega}) \geqslant 0$.

(B) Пусть $\boldsymbol{\omega} = (1,0,0)^T$. Этот вектор лежит внутри светового конуса. Тогда $(\widehat{J}\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\omega})_g$ есть первый диагональный элемент матрицы тензора инерции J. Из следствия 6 получаем, что этот элемент есть сумма неотрицательных чисел $m_i((q_i^2)^2+(q_i^3)^2)$ по всем точкам $\boldsymbol{q}_i$ тела. Если эта сумма равна нулю, то все точки твердого тела должны лежать на прямой $q^2=q^3=0$, которая совпадает с прямой $\langle\boldsymbol{\omega}\rangle$.

Пусть $\boldsymbol{\omega} = (1,1,0)^T$. Этот вектор принадлежит световому конусу. Тогда $(\widehat{J}\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\omega})_g$ есть сумма элементов симметрической матрицы $J=\varphi_g\widehat{J}$, не лежащих в третьем столбце и третьей строке. Из следствия 6 при $\eta=-1$ получаем, что эта сумма равна сумме неотрицательных чисел $m_i(q_i^1-q_i^2)^2$ по всем точкам тела. Если последняя сумма равна нулю, то все точки твердого тела должны лежать в плоскости $q^1=q^2$, которая совпадает с касательной плоскостью $\langle\boldsymbol{\omega}\rangle^\perp$ к световому конусу в точке $\boldsymbol{\omega}$.

Действуя на вектор $\boldsymbol{\omega}$ поворотами $A\in \mathrm{G}$, получим в силу следствия 3 и теоремы 3, что требуемые свойства верны для векторов вида $\boldsymbol{\omega}_1 = A\boldsymbol{\omega}$.

(C) Пусть твердое тело не содержится ни в какой прямой и ни в какой плоскости указанного вида. Рассмотрим пару квадратичных форм $\boldsymbol{\omega}\mapsto|\boldsymbol{\omega}|_g^2$ и $\boldsymbol{\omega}\mapsto(\widehat{J}\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\omega})_g$ на пространстве V.

Из (A) и (B) получаем, что вторая форма положительна на любом ненулевом векторе, лежащем внутри светового конуса или на нем. Выведем отсюда, что найдется базис $\boldsymbol{e}_1',\boldsymbol{e}_2',\boldsymbol{e}_3'\in V$, по отношению к которому эта пара форм имеет диагональный вид. Действительно: нетрудно показать, что внутри светового конуса существует собственный вектор $\boldsymbol{e}_1'$ оператора инерции $\widehat{J}$ (в качестве такого вектора можно взять радиус-вектор точки минимума ограничения функции $\boldsymbol{\omega}\mapsto(\widehat{J}\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\omega})_g$ на сферу радиуса i). Легко проверяется, что плоскость $\langle\boldsymbol{e}_1'\rangle^\perp$ инвариантна относительно оператора инерции $\widehat{J}$ (ввиду равенства $(\widehat{J}\boldsymbol{a},\boldsymbol{e}_1')_g=(\boldsymbol{a},\widehat{J}\boldsymbol{e}_1')_g=0$ для любого вектора $\boldsymbol{a}\in\langle\boldsymbol{e}_1'\rangle^\perp$), т.е. прямая $\langle\boldsymbol{e}_1'\rangle$ и плоскость $\langle\boldsymbol{e}_1'\rangle^\perp$ ортогональны относительно обеих квадратичных форм. Так как на этой плоскости первая форма положительно определена, то в силу теоремы из линейной алгебры в этой плоскости существует базис $\boldsymbol{e}_2',\boldsymbol{e}_3'$, по отношению к которому обе формы имеют диагональный вид.

Без ограничения общности мы можем и будем считать, что по отношению к полученному базису $\boldsymbol{e}_1',\boldsymbol{e}_2',\boldsymbol{e}_3'$ квадратичные формы задаются матрицами $G=\operatorname{diag}(-1,1,1)$ и $J=\operatorname{diag}(-J_1,J_2,J_3)$ соответственно, поэтому оператор инерции имеет вид $\widehat{J}=G^{-1}J=$ $=\operatorname{diag}(J_1,J_2,J_3)$ и его сигнатура (s_1,s_2,s_3) состоит из знаков $s_j=\operatorname{sgn}J_j$.

По доказанному вторая форма положительна на любом векторе из внутренности светового конуса, поэтому первый главный момент инерции $J_1=-(\widehat{J}\boldsymbol{e}_1',\boldsymbol{e}_1')_g<0$. Значит, в сигнатуре первый элемент $s_1=\operatorname{sgn}J_1=-$. $\square$

Итак, для сигнатуры $(s_1,s_2,s_3)=(-,s_2,s_3)$ любого твердого тела из теоремы 5 (C) возможны шесть случаев: $(-,+,+)$, $(-,-,+)$, $(-,-,-)$, $(-,0,+)$, $(-,0,-)$, $(-,0,0)$.

В следующем предложении мы рассматриваем твердые тела, все точки которых лежат внутри светового конуса. Частным случаем такого тела является «тарелка» на плоскости Лобачевского, т.е. подмножество сферы радиуса $r\in i\mathbb{R}_{>0}$ с центром в начале координат.

Предложение 1 (О твердом теле, лежащем внутри светового конуса). *Рассмотрим твердое тело в псевдо-евклидовом пространстве ($\eta=-1$), в котором все точки лежат внутри светового конуса. Если все эти точки лежат на одной прямой, проходящей через начало координат, и $\boldsymbol{v}$ — направляющий вектор этой прямой, то $\boldsymbol{v}\in\ker J$ и ограничение ковариантного тензора инерции $J=\varphi_g\widehat{J}$ на касательную плоскость $\langle\boldsymbol{v}\rangle^\perp$ к сфере в точке $\boldsymbol{v}$ пропорционально ограничению метрики на эту плоскость с коэффициентом пропорциональности $c>0$, т.е.*

$$J|_{\boldsymbol{v}^\perp}=g|_{\boldsymbol{v}^\perp}\cdot c,\qquad \textit{где}\quad c=\eta\sum_i m_i|\boldsymbol{q}_i|_g^2>0,$$

и оператор инерции $\widehat{J}=\sum_i\widehat{J}^{(\boldsymbol{q}_i)}$ имеет сигнатуру $(0,+,+)$, при этом главные моменты *инерции равны* $(0, c, c)$. *Если же не все точки тела лежат на одной прямой, проходящей через начало координат, то ковариантный тензор инерции* $J = \varphi_g \widehat{J}$ *положительно-определен, и сигнатура оператора инерции* $\widehat{J}$ *равна* $(-, +, +)$.

Доказательство. Первая часть предложения следует из теоремы 4 в случае $\eta = -1$ и $r \in i\mathbb{R}_{>0}$ (т.е. $\eta r^2 > 0$), с учетом аддитивности тензора инерции по точкам тела. Вторая часть предложения следует из того, что согласно первой его части квадратичные формы $\boldsymbol{\omega} \mapsto (J^{(\boldsymbol{q}_i)}\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega})$ неотрицательно определены и имеют одномерные ядра $\langle \boldsymbol{q}_i \rangle$, не все из которых совпадают, поэтому сумма таких квадратичных форм положительно определена. $\square$

Предложение 2 (О твердом теле, лежащем снаружи светового конуса и/или на нём). *Рассмотрим твердое тело в псевдо-евклидовом пространстве* ($\eta = -1$), *в котором все точки находятся снаружи светового конуса и/или на нём. Возможны три случая:*

(i) *Если все они лежат на одной прямой, проходящей через начало координат, и* $\boldsymbol{v}$ — *направляющий вектор этой прямой, то* $\boldsymbol{v} \in \ker J$, $J|_{\langle \boldsymbol{v} \rangle^\perp} = g|_{\langle \boldsymbol{v} \rangle^\perp} \cdot c$, $c = -\sum\limits_{i=1}^{n} m_i |\boldsymbol{q}_i|_g^2 \leqslant 0$. *При этом сигнатура оператора инерции* $\widehat{J}$ *равна* $(-, 0, -)$ *в случае, если прямая лежит снаружи светового конуса, и сигнатура не является корректно определенной, если прямая лежит на световом конусе.*

(ii) *Если не все они лежат в одной плоскости, касающейся светового конуса, то сигнатура оператора инерции* $\widehat{J}$ *корректно определена (определение 6) и имеет вид* $(-, s_2, s_3)$ *для некоторых* $s_2, s_3 \in \{0, +, -\}$. *Существуют двухточечные тела указанного вида, имеющие сигнатуры* $(-, -, -)$, $(-, +, -)$.

(iii) *Если все они лежат в одной плоскости, касающейся светового конуса, но не лежат на одной прямой, проходящей через начало координат и расположенной снаружи светового конуса, то сигнатура оператора инерции* $\widehat{J}$ *не является корректно определенной (определение 6).*

Доказательство. Первый пункт предложения доказывается так же, как и первая часть предложения 1 для случая $\eta = -1$ и $r \in \mathbb{R}_{>0}$ (т.е. $\eta r^2 < 0$).

Докажем второй пункт. По теореме 5 (C) сигнатура оператора инерции рассматриваемого тела корректно определена и имеет вид $(-, s_2, s_3)$. Осталось предъявить конкретные примеры двухточечных тех и вычислить сигнатуру для них. Вычислим, используя следствие 6 или теорему 4, явный вид ковариантного тензора инерции $J^{(\boldsymbol{q})} = \varphi_g \widehat{J}^{(\boldsymbol{q})}$ для точек $\boldsymbol{q}_2 = (0, 1, 0)^T$, $\boldsymbol{q}_3 = (0, 0, 1)^T$, $\boldsymbol{q}_4 = (\delta, 1, 0)^T$, где $0 < \delta < 1$, лежащих снаружи светового конуса:

$$J^{(\boldsymbol{q}_2)} = m_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad J^{(\boldsymbol{q}_3)} = m_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J^{(\boldsymbol{q}_4)} = m_4 \begin{pmatrix} 1 & \delta & 0 \\ \delta & \delta^2 & 0 \\ 0 & 0 & \delta^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

Из аддитивности тензора инерции получаем, что для двухточечного тела, состоящего из точек $\boldsymbol{q}_2$ и $\boldsymbol{q}_3$, ковариантный тензор инерции $J = \varphi_g \widehat{J}$ имеет вид $\mathrm{diag}(m, -m_3, -m_2)$, где $m = m_2 + m_3$, откуда оператор инерции $\widehat{J}$ имеет сигнатуру $(-, -, -)$. Для двухточечного тела, состоящего из точек $\boldsymbol{q}_2$ и $\boldsymbol{q}_4$, получаем сигнатуру $(-, +, -)$ (см. табл. 1).

Докажем третий пункт. Предположим противное, т.е. что сигнатура корректно определена, и пусть $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ — соответствующий базис пространства V (см. определение 6). В этом базисе $G = \mathrm{diag}(-1, 1, 1)$ и $J = \mathrm{diag}(-J_1, J_2, J_3)$. Из доказательства теоремы 5 (B) получаем, что для светового вектора $\boldsymbol{v} \neq 0$ равенство $(J\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = 0$ равносильно тому, что тело содержится в плоскости $\langle \boldsymbol{v} \rangle^\perp$. По условию тело содержится в такой плоскости (для некоторого светового вектора $\boldsymbol{v} \neq 0$), поэтому $(J\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = 0$, т.е. $-J_1(v^1)^2 + J_2(v^2)^2 + J_3(v^3)^2 = 0$. Если $v^2 \neq 0$, то равенство $(J\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = 0$ верно сразу для двух световых векторов $\boldsymbol{v}_\pm = (v^1, \pm v^2, v^3)$, поэтому тело содержится в каждой из двух плоскостей $\langle \boldsymbol{v}_\pm \rangle^\perp$, т.е. в их прямой пересечения, лежащей снаружи светового конуса, что противоречит условию. Таким образом, $v^2 = 0$ и аналогично $v^3 = 0$. Поэтому вектор $\boldsymbol{v} = (v^1, 0, 0) \neq 0$ не является световым, получили противоречие. $\square$

Таким образом, в псевдо-евклидовом случае ($\eta = -1$) у «почти любого» твердого тела (а именно, удовлетворяющего условиям теоремы 5 (C)) сигнатура оператора инерции корректно определена (определение 6) и имеет вид $(-, s_2, s_3)$. В частности, первый главный момент инерции отрицателен. Также мы описали все твердые тела, у которых он равен нулю или некорректно определен (теорема 5 и предложение 2 (iii)); в случае, когда он равен нулю, два других главных момента инерции совпадают и неотрицательны. Из теоремы 5 (B) получаем также описание всех тел, оператор инерции которых имеет сигнатуру $(0, 0, 0)$, — это тела, совпадающие с началом координат.

Приведем примеры 1-, 2- и 3-точечных тел в псевдо-евклидовом пространстве, показывающие, что других ограничений на сигнатуру оператора инерции нет. Мы показали, что для тел, лежащих внутри светового конуса (например, для «тарелок» на плоскости Лобачевского), сигнатура имеет вид $(-, +, +)$ и $(0, +, +)$ (предложение 1), а для тел, лежащих снаружи светового конуса, возможны сигнатуры $(-, s_2, -)$ для всех $s_2 \in \{0, +, -\}$ (предложение 2). Сигнатура $(-, +, 0)$ реализуется, например, для двухточечного тела, состоящего из точек $\boldsymbol{q}_1$ и $\boldsymbol{q}_2$ (из доказательства теоремы 4) равных масс, а сигнатура $(-, 0, 0)$ — для трехточечного тела, состоящего из точек $\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2$ и $\boldsymbol{q}_3$ равных масс, однако эти тела содержат как точки, лежащие внутри светового конуса, так и точки, лежащие снаружи него.

Рассмотренные примеры твердых тел приведены в табл. 1, с указанием ковариантного тензора инерции J и сигнатуры оператора инерции $\widehat{J}$ для каждого тела. Как следует из сказанного выше, в этой таблице содержатся все возможные сигнатуры (отличные от $(0, 0, 0)$) оператора инерции твердого тела в трехмерном псевдо-евклидовом пространстве.

Остались открытыми следующие вопросы. Какие из сигнатур $(-, +, +)$, $(-, +, 0)$, $(-, 0, 0)$ возможны для твердых тел, лежащих снаружи светового конуса? К какому виду можно привести (заменой базиса) матрицы скалярного произведения и оператора инерции, если тело имеет вид как в предложении 2 (iii)? Согласно теореме 5 и предложению 2, это в точности те тела, для которых сигнатура оператора инерции не является корректно определенной.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kobb G. Sur le probleme de la rotation d'un corps autour d'un point fixe // Bull. Soc. Math. France. 1895. Vol. XXIII. P. 210–215.

2. De Donder T. Mouvement d'un solide dans un espace Riemannien, 1 and 2 // Bull. Acad. Roy. Belg. 1942. Vol. 28. P. 8–16 and 60–66.

3. Goldstein H. Classical Mechanics. — Reading, Massachusetts: Addison-Wesley, 1950.

4. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. — М.: Наука, 1989.

5. Болсинов А. В., Фоменко А. Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. — Ижевск: Издательский дом «Удмуртский университет», 1999.

6. Борисов А. В., Мамаев И. С. Динамика твердого тела: Гамильтоновы методы, интегрируемость, хаос. — Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005.

7. Арнольд В. И., Хесин Б. А. Топологические методы в гидродинамике. — М.: МЦНМО, 2007.

8. Винберг Э. Б., Онищик А. Л. Семинар по группам Ли и алгебраическим группам. — М.: Наука, 1988.

9. Винберг Э. Б. Линейные представления групп. — М.: Наука, 1985.

10. Кириллов А. А. Характеры унитарных представлений групп Ли // Функц. анализ и его прил. 1968. Т. 2, №2. С. 40–55.

11. Marsden J. E., Ratiu T. Introduction to Mechanics and Symmetry. — N.Y.: Springer-Verlag, 1999.

12. Борисов А. В., Мамаев И. С. Изоморфизмы некоторых интегрируемых систем на плоскости и сфере // Нелинейная динамика. 2007. Т. 3, №1. С. 49–56.

13. Weyl H. Space-Time-Matter. — London: E.P. Dutton and Company, 1922.

14. Blaschke W. Nicht-Euklidische Geometrie und Mechanik, I, II, III. — Leipzig-Berlin: B. G. Teubner, 1942. Hamburger Mathematische Einzelschriften. Vol. 34.

15. Borisov A. V. Mamaev I. S. Rigid body dynamics in non-Euclidean spaces // Russ. J. Math. Phys. 2016. Vol. 23. P. 431–454.

16. Killing W. Die Mechanik in den nicht-Euklidischen Raumformen // J. Reine Angew. Math. 1885. Vol. 98. P. 1–48.

17. Hölder E. Die Dynamik des starren Körpers in einem nicht-Euklidischen Raum // Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg, Springer Berlin Heidelberg. 1956. Vol. 20. P. 242–252.

18. Clifford W. K. Motion of a solid in elliptic space // Math. Papers, Tucker, R. (Ed.), Macmillan, London. 1882. P. 378–384.

19. Жуковский Н. Е. О движении материальной псевдосферической фигуры по поверхности псевдосферы // М.: Полн. Собр. Соч. 1937. Т. 1. С. 490-535.

20. De Francesco D., Sul moto di un corpo rigido in uno spazio di curvatura costante // Math. Ann. 1902. Vol. 55, №4. P. 573–584.

21. Heath R. S. On the dynamics of a rigid body in elliptic space // Philos. Trans. R. Soc. Lond. 1884. Vol. 175. P. 281–324.

22. Nagy P. T. Dynamical invariants of rigid motions on the hyperbolic plane // Geom. Dedicata. 1991. Vol. 37. P. 125–139.

23. Salvai M. On the dynamics of a rigid body in the hyperbolic space // J. Geom. Phys. 2000. Vol. 36, №1–2. P. 126–139.

24. Zitterbarth J. Some remarks on the motion of a rigid body in a space of constant curvature without external forces // Demonstratio Math. 1991. Vol. 24, №3–4. P. 465–494.

25. Буров А. А. О движении тела с плоскостью симметрии по трехмерной сфере под действием сферического аналога ньютоновского притяжения // Прикладная математика и механика. 2008. Т. 72, №1. P. 23–34.

26. Дубошин Г. Н. Небесная механика. Основные методы и задачи. — М.: Наука, 1968.

27. Кострикин А. И., Манин Ю. И. Линейная алгебра и геометрия. — М: Наука, 1986.

28. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. — М.: Физматгиз, 1958. («Теоретическая физика», том I).

REFERENCES

1. Kobb, G. 1895, "Sur le probleme de la rotation d'un corps autour d'un point fixe", *Bull. Soc. Math. France*, vol. XXIII, pp. 210–215.

2. De Donder, T. 1942, "Mouvement d'un solide dans un espace Riemannien, 1 and 2", *Bull. Acad. Roy. Belg.*, vol. 28, pp. 8–16 and 60–66.

3. Goldstein, H. 1950, Classical Mechanics, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts.

4. Arnold, V. I. 1989, Mathematical Methods of Classical Mechanics, Springer, New York.

5. Bolsinov, A. V. & Fomenko, A. T. 2004, Integrable Hamiltonian systems: geometry, topology, classification, Chapman & Hall / CRC, Boca Raton, London, N.Y., Washington.

6. Borisov, A. V., Mamaev, I. S. 2005, Rigid Body Dynamics. Hamiltonian Methods, Integrability, Chaos, Moscow, Institute of computer Science.

7. Arnold, V. I. & Khesin, B. A. 1998, Topological Methods In Hydrodynamics, Springer-Verlag, New York.

8. Vinberg, E. B. & Onishchik, A. L. 1990, Lie Groups and Algebraic Groups, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.

9. Vinberg, E. B. 1989, Linear Representations of Groups, Basler Lehrbücher, Birkhäuser, Basel.

10. Kirillov, A. A. 1968, "The characters of unitary representations of Lie groups", *Functional Analysis and its Applications*, vol. 2, no. 2, pp. 133–146.

11. Marsden, J. E. & Ratiu, T. 1999, Introduction to Mechanics and Symmetry, Springer-Verlag, New York.

12. Borisov, A. V., Mamaev, I. S. 2007, "On isomorphisms of some integrable systems on a plane and a sphere" [in Russian], *Russ. J. Nonlin. Dyn.*, vol. 3, no. 1, pp. 49–56.

13. Weyl, H. 1922, Space-Time-Matter, E.P. Dutton and Company, London.

14. Blaschke, W. 1942, Nicht-Euklidische Geometrie und Mechanik, I, II, III, Hamburger Mathematische Einzelschriften, vol. 34, B. G. Teubner, Leipzig-Berlin.

15. Borisov, A. V., Mamaev, I. S. 2016, "Rigid body dynamics in non-Euclidean spaces", *Russ. J. Math. Phys.*, vol. 23, pp. 431–454.

16. Killing, W. 1885, "Die Mechanik in den nicht-Euklidischen Raumformen", *J. Reine Angew. Math.*, vol. 98, pp. 1–48.

17. Hölder, E. 1956, "Die Dynamik des starren Körpers in einem nicht-Euklidischen Raum", *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, Springer Berlin Heidelberg, vol. 20, pp. 242–252.

18. Clifford, W. K. 1882, "Motion of a solid in elliptic space", in: Math. Papers, Tucker, R. (Ed.), Macmillan, London, pp. 378–384.

19. Zhukovsky, N. E. 1937, On the motion of a material pseudospherical figure on the surface of a pseudosphere [in Russian], *Pol. Sobr. Soch.*, vol. 1, pp. 490–535 [the original in Trudy Otdel. Fiz. Nauk Obshch. Lyubit. Estestvozn., Antropol. Etnogr. XI (2), 1902].

20. De Francesco, D. 1902, "Sul moto di un corpo rigido in uno spazio di curvatura costante", *Math. Ann.*, vol. 55, pp. 573–584.

21. Heath, R. S. 1884, "On the dynamics of a rigid body in elliptic space", *Philos. Trans. R. Soc. Lond.*, vol. 175, pp. 281–324.

22. Nagy, P. T. 1991, "Dynamical invariants of rigid motions on the hyperbolic plane", *Geom. Dedicata*, vol. 37, pp. 125–139.

23. Salvai, M. 2000, "On the dynamics of a rigid body in the hyperbolic space", *J. Geom. Phys.*, vol. 36, no. 1–2, pp. 126–139.

24. Zitterbarth, J. 1991, "Some remarks on the motion of a rigid body in a space of constant curvature without external forces", *Demonstratio Math.*, vol. 24, no. 3–4, pp. 465–494.

25. Burov, A. A. 2008, "Motion of a body with a plane of symmetry on a three-dimensional sphere under the action of a spherical analog of Newtonian attraction", *Prikl. Mat. Mekh.*, vol. 72, no. 1, pp. 23–34.

26. Duboshin, G. N. 1969, Celestial Mechanics. Basic Problems and Methods [in Russian], Nauka, Moscow [Translation Div., Wright-Patterson Air-Force Base, Fairborn, Ohio].

27. Kostrikin, A. I. & Manin, Yu. I. 1989, Linear Algebra and Geometry, CRC Press, London.

28. Landau, L. D. & Lifshitz, E. M. 1976, Mechanics, Volume 1 of Course of Theoretical Physics, Butterworth-Heinemann, Oxford.

Получено: 02.01.2025
Принято в печать: 07.04.2025

РЕДКОЛЛЕГИЯ

Том 26 Выпуск 2

THE EDITORIAL BOARD

Volume 26 Issue 2

TABLE OF CONTENTS

Volume 26 Issue 2

Научное издание

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Научно-теоретический журнал

Том XXVI. Выпуск 2 (98)

Оригинал-макет подготовлен
А. В. Родионовым, А. П. Крыловым.
Технический редактор – И. Е. Агапова.

Регистрационный номер средства массовой информации ПИ № ФС77-80049
от 31 декабря 2020 г. выдан Федеральной службой
по надзору в сфере связи, информационных технологий
и массовых коммуникаций.

Подписано в печать 06.06.2025. Формат 60×84/8.
Бумага офсетная. Печать трафаретная. Усл. печ. л. 30,69.
Тираж 150 экз. (первый завод – 25 экз.). Заказ 25/05.
Цена свободная. Дата выхода в свет 04.07.2025.

Издатель – Тульский государственный педагогический
университет им. Л. Н. Толстого. 300026, Тула, просп. Ленина, 125.

Отпечатано в ТГПУ им. Л. Н. Толстого.
300026, Тула, просп. Ленина, 125.