



ISSN 2226-8383

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

**Научно-теоретический
математический журнал**

www.chebsbornik.ru

**XXVI
Выпуск 1 (97)
2025**

ISSN 2226-8383

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Министерство просвещения Российской Федерации
Российская академия наук
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
Московский педагогический государственный университет
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
Тульский государственный университет

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Научно-теоретический журнал

ТОМ XXVI

ВЫПУСК 1 (97)

Тула
2025

Учредитель: ФГБОУ ВО
«ТГПУ им. Л. Н. Толстого»

Адрес редакции:
300026, г. Тула, пр. Ленина, 125.
Тел: +79065327314

E-mail: cheb@tspu.ru
URL: <http://www.chebsbornik.ru>

Издаётся с 2001 года.
Выходит 5 раз в год.
Регистрационный номер
СМИ: ПИ № ФС77-80049

В журнале публикуются оригинальные статьи по направлениям современной математики: теория чисел, алгебра и математическая логика, теория функций вещественного и комплексного переменного, функциональный анализ, дифференциальные уравнения, математическая физика, геометрия и топология, теория вероятностей и математическая статистика, численные методы, теория оптимизации и др. Также публикуются статьи о памятных датах и юбилеях.

Журнал включен в перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание ученых степеней кандидата наук и доктора наук (перечень ВАК), индексируется и/или реферируется: Scopus, MathSciNet, Zentralblatt MATH, Russian Science Citation Index (RSCI), РЖ Математика, Mathematical Reviews, РИНЦ, Google Scholar Metrics.

Журнал выходит под эгидой Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, Министерства просвещения Российской Федерации, Российской академии наук, Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Московского педагогического государственного университета, Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого, Тульского государственного университета.

Главный редактор

В. Н. Чубариков (Россия, г. Москва)

Ответственные секретари:

Н. Н. Добровольский (Россия, г. Тула)

И. Ю. Реброва (Россия, г. Тула)

Заместители главного редактора:

Н. М. Добровольский (Россия, г. Тула),

А. И. Нижников (Россия, г. Москва)

Редакционная коллегия:

А. И. Боровков (Россия, г. Санкт-Петербург)

В. М. Бухштабер (Россия, г. Москва)

В. А. Быковский (Россия, г. Хабаровск)

С. В. Востоков (Россия, г. Санкт-Петербург)

П. С. Геворкян (Россия, г. Москва)

Д. В. Георгиевский (Россия, г. Москва)

В. И. Горбачев (Россия, г. Москва)

С. А. Гриценко (Россия, г. Москва)

С. С. Демидов (Россия, г. Москва)

В. Г. Дурнев (Россия, г. Ярославль)

А. М. Зубков (Россия, г. Москва)

А. О. Иванов (Россия, г. Москва)

В. И. Иванов (Россия, г. Тула)

М. А. Королёв (Россия, г. Москва)

В. Н. Кузнецов (Россия, г. Саратов)

Ю. В. Матиясевич (Россия, г. Санкт-Петербург)

С. П. Мищенко (Россия, г. Ульяновск)

Ю. В. Нестеренко (Россия, г. Москва)

В. А. Панин (Россия, г. Тула)

У. М. Пачев (Россия, г. Нальчик)

А. Л. Семёнов (Россия, г. Москва)

Л. А. Толоконников (Россия, г. Тула)

А. А. Фомин (Россия, г. Москва)

В. Г. Чирский (Россия, г. Москва)

И. Аллаков (Узбекистан, г. Термез)

А. Я. Белов (Израиль, г. Рамат Ган)

В. И. Берник (Беларусь, г. Минск)

А. Лауринчикас (Литва, г. Вильнюс)

Лю Юнпин (Китай, г. Пекин)

М. Дж. Марданов (Азербайджан, г. Баку)

О. Р. Мусин (США, г. Браунсвилл)

З. Х. Рахмонов (Таджикистан, г. Душанбе)

А. Х. Табари (Таджикистан, г. Куляб)

Л. Фукшанский (США, г. Клермонт)

Д. Шяучюнас (Литва, г. Шяуляй)



СОДЕРЖАНИЕ

Том 26 Выпуск 1

И. В. Добрынина, Н. М. Добровольский, И. Ю. Реброва, Е. В. Манохин, Е. С. Логачева. 85-летие профессора Владимира Николаевича Безверхнего	5
И. М. Буркин, О. И. Кузнецова. Экстремально мультистабильные динамические системы с континуумом скрытых хаотических аттракторов	25
Н. М. Добровольский, А. С. Подолян, Е. М. Рарова, И. Н. Балаба. Алгебраические сетки и их приложение к численному решению линейных интегральных уравнений — II	35
А. Д. Манов. О некоторых экстремальных задачах для целых функций экспоненциального типа	47
У. М. Пачев, А. Х. Кодзоков, М. М. Исакова, М. С. Нирова. Об асимптотиках представлений пары целых чисел суммой квадратов и линейной формой с конгруэнциальным условием специального вида	62
А. М. Пряничников. Классы унарков, близкие к плоским	76
И. Ю. Реброва. Оценки тригонометрических сумм по решениям квадратичных сравнений	88
Е. Н. Смирнова, О. А. Пихтилькова, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский. Гладкое многообразие сдвинутых решёток	99
М. Ш. Шабозов, Д. К. Тухлиев. О поперечниках некоторых классов аналитических функций в пространстве Бергмана	116
В. Т. Шевалдин. О связи между второй разделенной разностью и второй производной в задаче экстремальной интерполяции в среднем	131

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

И. Ахмед. Новые оценки задачи Борсука в пространствах ℓ_p	142
Р. А. Жуков. О формировании норм на основе регрессионных моделей по малым выборкам	149
А. П. Крылов, Н. М. Добровольский, И. Н. Балаба. Гиперболическая дзета-функция диагональных решёток	157

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ И ПРИЛОЖЕНИЯ

Д. В. Горбачев, Д. Р. Лепетков, С. А. Скобельцын. Рассеяние плоской звуковой волны жидким телом сложной формы	164
М. Ю. Соколова, Д. В. Христич, Д. В. Праведников. Об определении вектора Умова – Пойнтинга при распространении акустических волн в гипотупругой среде	181

Л. А. Толоконников, С. Л. Толоконников. Дифракция цилиндрической звуковой волны на многослойном сфероиде	190
М. Ю. Моденов, А. Н. Чуканов, Е. В. Цой. Математическое моделирование системы управления малыми летательными аппаратами самолетного типа с нестандартными аэродинамическими поверхностями	204
М. Ю. Моденов, А. Н. Чуканов, Е. В. Цой. Математическое моделирование идеального контура управления летательным аппаратом нестандартного типа в среде MATLAB ..	218
А. Н. Чуканов, В. А. Коротков, Е. В. Цой, А. А. Яковенко, М. Ю. Моденов. Машинное зрение в оценке in situ параметров неоднородности анизотропных изделий SLM в ходе растяжения	229
ПАМЯТНЫЕ ДАТЫ	
В. А. Быковский, В. Г. Чирский, В. Н. Чубариков, Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Р. А. Дохов. 75-летие профессора Урусби Мухамедовича Пачева	243
Валерий Иванович Иванов (7.07.1951 — 2.03.2025)	258
РЕДКОЛЛЕГИЯ	263
THE EDITORIAL BOARD	267
TABLE OF CONTENTS	271

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 26. Выпуск 1.

УДК 539.12.01

DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-1-5-24

**85-летие профессора
Владимира Николаевича Безверхнего**

И. В. Добрынина, Н. М. Добровольский, И. Ю. Реброва, Е. В. Манохин, Е. С. Логачева

Добрынина Ирина Васильевна — доктор физико-математических наук, Московский технический университет связи и информатики (г. Москва).

e-mail: dobrynirina@yandex.ru

Добровольский Николай Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: dobrovol@tspu.ru

Реброва Ирина Юрьевна — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: i_rebrova@mail.ru

Манохин Евгений Викторович — кандидат физико-математических наук, доцент, Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации (Тульский филиал) (г. Тула).

e-mail: emanfnun@mail.ru

Логачева Елена Сергеевна — кандидат физико-математических наук, Центр образования 38 (Химический лицей) (г. Тула).

e-mail: logacheva-es@mail.ru

Аннотация

В данной статье рассматривается научная и педагогическая деятельность профессора, доктора физико-математических наук Владимира Николаевича Безверхнего, внесшего значительный вклад в исследования алгоритмических проблем теории групп и полугрупп. Освещаются основные периоды жизни известного ученого.

В. Н. Безверхний продолжительное время работал в Тульском государственном педагогическом университете имени Л. Н. Толстого, руководил научным семинаром по алгоритмическим проблемам теории групп и полугрупп и аспирантурой по комбинаторной теории групп.

Продолжая дело профессора М. Д. Гриндлингера, являлся научным руководителем восьми кандидатских и научным консультантом одной докторской диссертаций.

Ключевые слова: группа, подгруппа, образующие, определяющие соотношения, алгоритмические проблемы.

Библиография: 46 названий.

Для цитирования:

Добрынина И. В., Добровольский Н. М., Реброва И. В., Манохин Е. В., Логачева Е. С. 85-летие профессора Владимира Николаевича Безверхнего // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 1, с. 5–24.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 26. No. 1.

UDC 539.12.01

DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-1-5-24

85-th anniversary of professor Vladimir Nikolaevich Bezverkhonii

I. V. Dobrynina, N. M. Dobrovol'skii, I. Y. Rebrova, E. V. Manokhin, E. S. Logacheva

Dobrynina Irina Vasilyevna — doctor of physical and mathematical sciences, Moscow Technical University of Communications and Informatics (Moscow).

e-mail: dobrynirina@yandex.ru

Dobrovol'skii Nikolay Mikhailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: dobrovol@tspu.ru

Rebrova Irina Yuryevna — candidate of physical and mathematical Sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: i_rebrova@mail.ru

Manokhin Evgeny Viktorovich — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, professor, Financial University under the Government of the Russian Federation (Tula Branch) (Tula).

e-mail: emanfinun@mail.ru

Logacheva Elena Sergeevna — candidate of physical and mathematical sciences, Education center 38 (Chemical Lyceum) (Tula).

e-mail: logacheva-es@mail.ru

Abstract

This article examines the scientific and pedagogical activities of Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences Vladimir Nikolaevich Bezverkhonii, who made a significant contribution to the research of algorithmic problems of the theory of groups and semigroups.

The main periods of the famous scientist's life are highlighted.

V. N. Bezverkhonii worked for a long time at Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University, led a scientific seminar on algorithmic problems of the theory of groups and semigroups and a postgraduate course in combinatorial group theory.

Continuing the work of Professor M. D. Grindlinger, he was the supervisor of eight PhD and scientific advisor to one doctoral dissertation.

Keywords: group, subgroup, generators, defining relations, algorithmic problems

Bibliography: 46 titles.

For citation:

Dobrynina, I. V., Dobrovol'skii, N. M., Rebrova, I. Y., Manokhin, E. V., Logacheva, E. S. 2025, 85-th anniversary of professor Vladimir Nikolaevich Bezverkhonii *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 1, pp. 5–24.

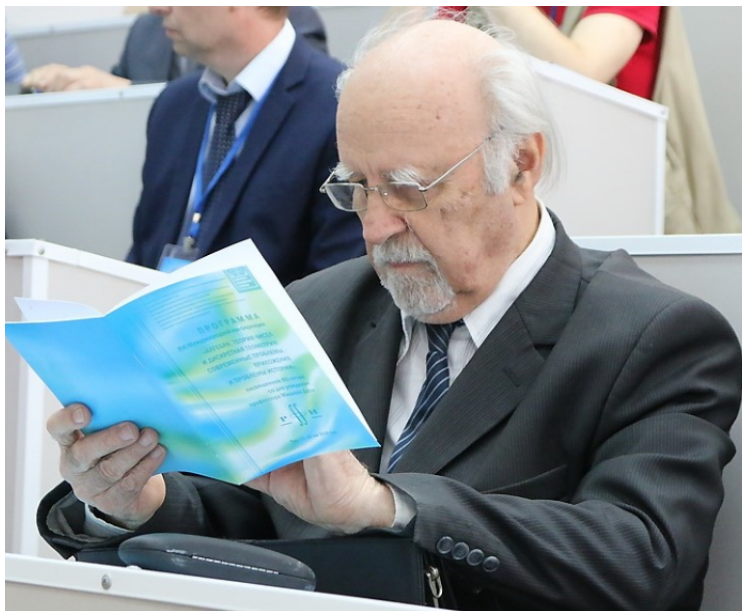


Рис. 1: В. Н. Безверхний

1. Введение

Родился Владимир Николаевич Безверхний 31 января 1940 года в г. Севастополь Крымской области в семье военнослужащего.

С 1947 по 1957 год учился в общеобразовательной школе. Еще в годы учебы проявлял математические способности, хорошо рисовал, увлекался чтением книг и любил музыку, в основном, серьёзную, неплохо знал оперные произведения. После окончания школы два года работал слесарем на судоремонтном заводе в г. Севастополь. С 1959 по 1962 годы служил в рядах Советской Армии. После окончания службы в 1962 году, поступил на математический факультет Тульского государственного педагогического института (ТГПИ) им. Л. Н. Толстого, где был одним из лучших студентов. Учился увлечённо, читал много математической литературы, не ограничиваясь только программным материалом. Был победителем математических олимпиад. Окончил институт в 1966 году.

2. Трудовая и научная деятельность

С сентября 1966 по январь 1968 года работал ассистентом на кафедре высшей математики Рязанского сельскохозяйственного института, после чего перешёл на ту же должность на кафедру высшей математики Тульского политехнического института.

В ноябре 1968 года поступил в аспирантуру при кафедре алгебры и теории чисел Тульского государственного педагогического института им. Л. Н. Толстого, научный руководитель — профессор Мартин Давидович Гриндлингер.

После окончания аспирантуры, с ноября 1971 года, вернулся на кафедру высшей математики Тульского политехнического института на должность ассистента.

В 1974 году защитил кандидатскую диссертацию на тему «Проблемы вхождения и сопряженности слов и подгрупп в некоторых классах групп» в Ленинградском государственном педагогическом институте им. А. И. Герцена.



Рис. 2: М. Д. Гриндлингер

В 1975 году по конкурсу избран на должность старшего преподавателя на кафедру высшей математики Тульского высшего артиллерийского инженерного училища. С 1979 года — доцент этой кафедры, а с 1985 по июнь 1988 года — заведующий кафедрой.

Владимир Николаевич вёл все виды занятий по курсу высшей математики: аналитическую геометрию и линейную алгебру, математический анализ, теорию вероятностей и др.

В. Н. Безверхний активно поддерживал и всячески содействовал изданию в ТГПИ им. Л. Н. Толстого математических сборников научных трудов, тесно сотрудничая с их главным редактором М. Д. Гриндлингером, причем с 1983 года был его заместителем, а в 1994-2001 годах — главным редактором.

Под руководством М. Д. Гриндлингера и В. Н. Безверхнего выпущены:

- Ученые записки математических кафедр (под общей редакцией М. Д. Гриндлингера, 1970 год, 310 стр.);
- Вопросы теории групп и полугрупп (1972 год, 200 стр.);
- Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп (Межвузовский сборник научных трудов, 1981 год, 133 стр.);
- Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп и их приложения (1983 год, 120 стр.);
- Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп (1986 год, 124 стр.);
- Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп (1990 год, 183 стр.);
- Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп (1991 год, 162 стр.);
- Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп (1994 год, 132 стр., отв. редактор — проф. В. Н. Безверхний);
- Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп (2001 год, 200 стр., отв. редактор — проф. В. Н. Безверхний).

С 24 ноября 1988 г. доцент кафедры математического анализа ТГПИ им. Л. Н. Толстого.

2 сентября 1991 г. переведен на должность доцента кафедры алгебры, 25 июня 1992 г. избран на должность профессора этой же кафедры. В 1993 году В. Н. Безверхний стал руководителем аспирантуры по специальности 01.01.06. – математическая логика, алгебра и теория чисел. По его инициативе на факультете появилась традиция приглашать в комиссию по приёму кандидатских экзаменов у аспирантов профессора МГУ А. Л. Шмелькина, что существенно поднимало планку требовательности и качество знаний аспирантов.

Владимир Николаевич установил тесные научные контакты с алгебраистами МГУ им. М. В. Ломоносова, Московского педагогического государственного университета, Ленинградского педагогического университета им. А. И. Герцена, Ярославского государственного университета им. П. Г. Демидова, Ивановского государственного университета.

Благодаря В. Н. Безверхнему (и декану факультета математики и информатики А. Е. Устьяну), к чтению лекций для студентов и аспирантов на математический факультет приглашали известных учёных, докторов наук и профессоров, таких как А. Л. Шмелькин, В. Н. Латышев, В. Н. Чубариков, М. М. Глухов и других.

С 27 июня 1995 г. В. Н. Безверхний был переведён на должность старшего научного сотрудника для завершения докторской диссертации. Основанием служило письмо профессора кафедры высшей алгебры МГУ А. Л. Шмелькина, который считал, что полученные и опубликованные в центральных математических журналах результаты В. Н. Безверхнего по решению проблем вхождения и сопряженности слов и подгрупп в некоторых классах групп составляют не менее 70% докторской диссертации.



Рис. 3: В. Н. Безверхний и А. Л. Шмелькин

Срок пребывания на должности старшего научного сотрудника — с 1 июля 1996 г. по 31 августа 1997 г.

За период творческого отпуска Владимир Николаевич подготовил докторскую диссертацию. Она состоит из шести глав и содержит 400 страниц. Результаты диссертации докладывались на семинаре по теории групп под руководством профессоров А. Л. Шмелькина и А. Ю. Ольшанского, на научно-исследовательском семинаре по алгебре в МГУ, а также на международных конференциях в Новосибирске (1989), Туле (1996), Санкт-Петербурге (1997).



Рис. 4: А. Е. Устьян (слева), В. Н. Безверхний (в центре) и А. Ю. Ольшанский (справа) на XVI Международной конференции, посвященной 80-летию со дня рождения профессора Мишеля Деза

В 1999 году В. Н. Безверхний защитил докторскую диссертацию на тему «Проблемы вхождения и сопряженности слов и подгрупп в некоторых классах групп» в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова.

Степень доктора физико-математических наук присвоена в 1999 году.

С 1 февраля 2001 года по июль 2002 года Владимир Николаевич заведовал кафедрой алгебры и геометрии Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого.

В. Н. Безверхний на посту заведующего кафедрой показал себя исключительным руководителем кафедрой. Он создал на кафедре доброжелательную, отличную рабочую обстановку для работы и творческого роста членов кафедры. Под его руководством кафедра динамично развивалась.

С 8 апреля 2002 года до 2022 года — профессор кафедры высшей математики Академии гражданской защиты МЧС России. Вел курсы по высшей математике, дифференциальным уравнениям, теории вероятностей и математической статистике, до 2024 года продолжал руководить аспирантурой в Тульском государственном педагогическом университете им. Л. Н. Толстого.

В 2004 году В. Н. Безверхнему присуждено ученое звание профессора.

В настоящее время работает профессором кафедры мировой экономики и таможенной статистики в Российской таможенной академии.

Следует отметить талант В. Н. Безверхнего не только как ученого, но и как педагога. Его лекции интересны, содержательны и одновременно построены с большим педагогическим тактом. Удивительна его способность находить талантливых молодых людей и ставить им математические задачи, соответствующие их наклонностям и возможностям.

Интеллигентность, доброжелательность и требовательность, душевные и профессиональные качества снискали уважение не только студентов и преподавателей, но и всех тех, кому довелось сотрудничать с Владимиром Николаевичем.

Награжден грамотой Министерства образования. Отличник народного просвещения.

Руководил проектами № 00-01-00767-а, № 03-01-00198-а, №15-41-03222 р_а, №19-41-710002

р_а, поддержанными РФФИ, а также проектом РД № 02-1.1-209, поддержанным Министерством образования России.

3. Основные научные результаты

Основными алгоритмическими проблемами, поставленными М. Дэном в одной из его работ в 1911 г., являются проблемы равенства и сопряженности слов в конечно определенных группах, а также сформулированная Х. Титце проблема изоморфизма групп.

Исследование этих проблем стимулировало развитие комбинаторных методов в теории групп, что явилось причиной возникновения одного из самых активно развивающихся направлений современной математики — комбинаторной теории групп. В настоящее время имеется целый ряд книг, посвященных данной теме; среди них достаточно назвать монографии А. Карраса, В. Магнуса и Д. Солитэра, а также Р. Линдона и П. Шуппа.

Среди работ, связанных с исследованием алгоритмических проблем, наиболее выдающимися являются работы П. С. Новикова, доказавшего неразрешимость проблемы равенства слов в конечно определенных группах, им же доказана неразрешимость проблемы изоморфизма групп.

С. И. Адяном определено понятие наследственного нетривиального свойства группы и доказано, что не существует алгоритма, позволяющего для произвольной группы с конечным числом образующих и определяющих соотношений распознать выполнимость свойства β , представляющего собой объединение нетривиального наследственного и инвариантного свойства, если только существуют группы, обладающие свойством β .

Из этого результата следует, что практически все проблемы, относящиеся к конечно определенным группам, в общем случае неразрешимы. Сюда относятся, в частности, такие проблемы, как распознавание нильпотентности, конечности, простоты, свободы или единичности группы, включая основные проблемы теории групп.

Отрицательное решение проблемы равенства слов явилось причиной изучения алгоритмических проблем в определенных классах групп.

3.1. Групповые конструкции

Для групп с разрешимой проблемой равенства слов возникает более общая проблема — проблема вхождения, впервые решенная Я. Нильсеном в свободных группах и В. Магнусом в группах с одним определяющим соотношением для так называемых магнусовых подгрупп.

Известно, что проблема вхождения в классе всех конечно определенных групп неразрешима, это непосредственно следует из связи между проблемой вхождения и проблемой равенства слов. Поэтому естественно возникает интерес к изучению рассматриваемой проблемы для каких-то фиксированных классов групп. Как отмечено выше, положительное решение проблемы вхождения в свободных группах следует из результата Нильсена.

К. А. Михайловой этот результат был обобщен на свободное произведение групп, доказано, что если в группах A и B разрешима проблема вхождения, то она разрешима в их свободном произведении.

В отличие от свободного произведения, прямое произведение групп, как доказала К. А. Михайлова, не наследует свойства сомножителей иметь разрешимой проблему вхождения, а именно: в прямом произведении двух свободных групп ранга 2 проблема вхождения неразрешима.

Г. Г. Щепиным, рассмотревшим данную проблему для нильпотентного произведения групп, установлено, что нильпотентное произведение групп в общем случае не наследует свойство сожителей «иметь разрешимой проблему вхождения».

Обозначим через A класс амальгамных групп. В. Н. Безверхним [1], [2] выделен подкласс A_0 групп вида $F_m *_H F_n$, где F_m, F_n — свободные группы, соответственно, рангов m, n , объеди-

ненных по конечно порожденной подгруппе H ; было доказано, что в группах $G = F_m *_C F_n$, где C — бесконечная циклическая подгруппа, проблема вхождения разрешима [1], тем не менее, во всем подклассе A_0 — неразрешима [2]. Указав пример группы вида $F_2 *_H F_2^*$, где $H < F_2$ — конечно порожденная подгруппа ранга 4, ϕ — изоморфизм сомножителей, проблема вхождения в которой неразрешима.

Для свободных произведений групп В. Н. Безверхним [3] была доказана разрешимость проблемы сопряженности подгрупп при условии, что в сомножителях разрешимы проблема вхождения и сопряженности подгрупп.

В. Н. Безверхним [4] доказана алгоритмическая разрешимость проблемы сопряженности подгрупп для свободного произведения свободных групп с циклическим объединением и ее неразрешимость в свободном произведении свободных групп рангов 2, объединенных по подгруппе ранга 4 [5].

А. И. Мальцевым была поставлена проблема о нахождении образующих пересечения конечно порожденных подалгебр данной алгебры. С данной проблемой тесно связано свойство Хаусона подалгебр данной алгебры, а именно, алгебра обладает свойством Хаусона, если пересечение конечно порожденных подалгебр есть конечно порожденная подалгебра.

Для свободных групп проблема А. И. Мальцева о пересечении подгрупп решена В. Н. Безверхним [6].

Конструктивное доказательство теоремы Б. Баумслага, данное в статье [7], позволило решить указанную проблему А. И. Мальцева для свободного произведения групп. Доказано, что если сомножители G_i , $i = 1, 2$, обладают свойством Хаусона и в них разрешимы: (1) проблема А. И. Мальцева о пересечении подгрупп; (2) существует алгоритм, позволяющий для любых двух конечно порожденных подгрупп H_1, H_2 и элемента w_i установить, пусто или непусто $wH_1 \cap H_2$, то в группе $G = G_1 * G_2$ разрешимы проблема Мальцева и проблема (2).

В статье [8] данные результаты были обобщены на свободное произведение групп с объединением и на HNN -расширения групп. Рассмотрим группу

$$G^* = \langle G, t; \text{rel } G, t^{-1}U_1t = \phi(U_1) \rangle,$$

являющуюся HNN -расширением группы G с помощью конечных изоморфных подгрупп U_1, U_{-1} и фиксированного изоморфизма $\phi: \phi(U_1) = U_{-1}$; t — не принадлежащая G правильная проходная буква; группа G называется основой группы G^* , изоморфные подгруппы U_1, U_{-1} группы называются ассоциированными подгруппами G^* .

В. Н. Безверхним введено понятие специального множества [9]. Приведем его ниже.

Конечное множество слов $W = w_{i=1, \overline{N}}$ группы G^* назовем специальным, если оно удовлетворяет следующим условиям:

1) закрытая левая половина слова $w_i \in W$, являющегося нетрансформой, изолирована в W ; если w_i — нетрансформа четной длины, то ее закрытые левая и правая половина изолированы в W ;

2) длину слова $w_j \in W$, являющегося нетрансформой, нельзя уменьшить, умножая слева и справа на слова из подгруппы, порожденной множеством $\{\{w_i\}_{i=1, \overline{N}} w_j\}$; длину произвольного элемента $w_j \in W$ нельзя уменьшить, умножая на слово $v \in \langle \{w_i\}_{i=1, \overline{N}} \rangle$, $L(v) < L(w_j)$;

3) пусть

$$w^\epsilon = t^\alpha l_{1w_j} t^{\epsilon_1} \dots l_{sw_j} t^{\epsilon_s} K_{w_j} t^{s's} r_{sw_j} \dots t^{\epsilon'_1} r_{1w_j} t^\beta,$$

где $\alpha, \beta = 0, \pm 1, \epsilon = \pm 1, w_j$ — нетрансформа из W , имеющая четное число слогов, либо

$$w^\epsilon = t^\alpha l_{1w_j} t^{\epsilon_1} \dots l_{sw_j} h t^{\epsilon_s} r_{sw_j} \dots t^{\epsilon'_1} r_{1w_j} t^\beta,$$

где $\alpha, \beta = 0, \pm 1, \epsilon = \pm 1, w_j$ — нетрансформа из W , имеющая нечетное число слогов и

$$\{w_\gamma^{\nu_\gamma} = t_\gamma^{\alpha_\gamma} l_{1w_\gamma} t^{\epsilon_1} \dots l_{sw_j} h t^{\epsilon_s} r_{sw_j} t^{\epsilon'_{s-1}} \dots r_{i+1}, w_\gamma t^{\epsilon'_i} r_{iw_j} \dots t^{\epsilon'_1} r_{1w_j} t^{\beta_j}\},$$

где $\nu_\gamma = \pm 1, \alpha_\gamma = 0, \pm 1$ есть подмножество нетрансформ из $\{\{w_i\}_{i=\overline{1,N}} \setminus w_j\} \cup \{\{w_i^{-1}\}_{i=\overline{1,N}} \setminus w_j^{-1}\}$, закрытая правая половина которых оканчивается на $t^{\epsilon'_i} r_{iw_j} \dots t^{\epsilon'_1} r_{1w_j} t^{\beta_j}$; тогда если подгруппа

$$H = \langle \{w_i\}_{i=\overline{1,N}} \rangle \cap t^{-\beta} r_{1w_j}^{-1} t^{-\epsilon'_1} \dots t^{-\epsilon'_i} G t^{\epsilon'_i} r_{iw_j} \dots t^{\epsilon'_1} r_{1w_j} t^{\beta} \neq E$$

(E - единичная подгруппа), то $\forall u \in HL(w_j u) \geq L(w_j), L(w_j u w_\gamma^{-\nu_\gamma}) \geq L(w_j)$;

4) пусть

$$w_i^\epsilon = t^{\alpha_1} l_{1w_i} t^{\epsilon_1} \dots l_{pw_i} t^{\epsilon_p} \dots l_{nw_i} t^{\epsilon_n} \dots t^{\epsilon'_i} r_{iw_i} \dots t^{\epsilon'_1} r_{1w_i} t^{\beta_1}$$

$$w_j^\nu = t^{\alpha_2} l_{1w_j} t^{\nu_1} \dots l_{pw_j} t^{\nu_p} \dots l_{nw_j} t^{\nu_n} \dots t^{\nu'_i} r_{iw_j} \dots t^{\nu'_1} r_{1w_j} t^{\beta_2}$$

где $\epsilon = \pm 1, \nu = \pm 1, \alpha_t = 0, \pm 1, \beta_t = 0, \pm 1, t = 1, 2$ - слова из $\{\{w_i\}_{i=\overline{1,N}} \cup \{w_i^{-1}\}_{i=\overline{1,N}}\}$, не обязательно различные, $t^{\alpha_1} l_{1w_i} \dots l_{pw_i} t^{\epsilon_p}$ — начальное подслово закрытой левой половины w_i^ϵ , $t^{\alpha_2} l_{1w_j} t^{\nu_1} \dots l_{pw_j} t^{\nu_p}$ — начальное подслово закрытой левой половины w_j^ν . Если

$$t^{\alpha_1} l_{1w_i} t^{\epsilon_1} \dots t^{\epsilon_{p-1}} l_{pw_i} \neq t^{\alpha_2} l_{1w_j} t^{\nu_1} \dots t^{\nu_{p-1}} l_{pw_j},$$

то не существует слов $w \neq 1, w \in \langle \{w_i\}_{i=\overline{1,N}} \rangle, L(w) < 2p$, такого что

$$w \cdot w_j^\nu = t^{\alpha_1} l_{1w_i} t^{\epsilon_1} \dots t^{\epsilon_{p-1}} l_{pw_i} t^{\nu_p} l'_{p+1,w_j} \dots r_{1w_j} t^{\beta_2}.$$

ТЕОРЕМА 1. *Если в группе G^* ее основа G обладает свойством Хаусона, то и G^* обладает свойством Хаусона.*

Из теоремы Мюллера-Шуппа следует, что группа $G = \langle G_1 * G_2; rel G_i, i = 1, 2, U_i = \phi(U_1) \rangle$, где $U_1 < G_1, U_{-1} = \phi(U_1) < G_2$, изоморфно вкладывается в группу $G^* = \langle G_1 * G_2, t; rel G_i, i = 1, 2, t^{-1} U_1 t = \phi(U_1) \rangle$ с помощью отображения $\psi : \forall g_1 \in G_1, \psi_{g_1} = t^{-1} g_1 t; \forall g_2 \in G \psi(g_2) = g_2$.

Отсюда получается, что понятие специального множества является общим для свободных групповых конструкций и, будучи обобщением нильсеновского множества свободной группы, может быть успешно применено к исследованию различных алгоритмических проблем и различных свойств подгрупп в свободных групповых конструкциях.

Пусть A, B — группы с одним определяющим соотношением и с кручением, и группа $G = A *_C B$ является свободным произведением групп A, B с циклическим объединением C .

ТЕОРЕМА 2. *В группе $G = A *_C B$, являющейся свободным произведением групп A, B с циклическим объединением, где сомножители A, B есть группы с одним определяющим соотношением и с кручением, разрешима проблема степенной сопряженности слов.*

В процессе доказательства данной теоремы, В. Н. Безверхним была доказана алгоритмическая разрешимость проблемы сопряженности слов и проблема степенной сопряженности слов в группах с одним определяющим соотношением и с кручением, а также

ТЕОРЕМА 3. *В группе $G = A *_C B$, являющейся свободным произведением групп A, B с циклическим объединением, где сомножители A, B есть группы с одним определяющим соотношением и с кручением, разрешима проблема сопряженности слов.*

При доказательстве данных теорем для групп с одним определяющим соотношением и с кручением В. Н. Безверхним была доказана алгоритмическая разрешимость ряда других проблем, представляющих самостоятельный интерес, например: пересечение произвольной циклической подгруппы $\langle g \rangle$ и магнусовой подгруппы M ; проблемы пересечения циклических подгрупп; доказано, что для любого $w \in G$ и любой магнусовой подгруппы $M < G$ можно эффективно установить, существует ли $n \in \mathbb{Z}^+$ ($\mathbb{Z}^+$ - множество натуральных чисел) и $z \in G$ такие, что $z^{-1}w^n z \in M$ и другие проблемы.

Обозначим через $\bar{A}$ класс групп вида

$$G = \langle G_1 * G_2; \text{rel} G_i, i = 1, 2; H_1 = \phi(H_1) \rangle,$$

являющихся свободным произведением групп $G_i, i = 1, 2$, с объединением по изоморфным свободным конечно порожденным подгруппам $H_1, H_2 = \phi(H_1), H_i < G_i, i = 1, 2, G_i$ - группы с одним определяющим соотношением и с кручением.

ТЕОРЕМА 4. *В классе групп $\bar{A}$ проблема сопряженности слов алгоритмически неразрешима.*

Тем не менее, В. Н. Безверхним было доказано, что если в качестве объединяемых подгрупп $H_i < G_i, i = 1, 2$, взять изоморфные магнусовы подгруппы, объединенные с помощью конструктивного изоморфизма ϕ , то получим группу G с разрешимой проблемой сопряженности и степенной сопряженности слов.

В работе [10] положительно решена проблема сопряженности слов в древесном произведении свободных групп с ассоциированными циклическими подгруппами. Представленный результат является обобщением известного результата С. Липшуца для свободного произведения двух свободных групп с циклическим объединением. При решении основной проблемы доказывается разрешимость проблемы пересечения конечно порожденной подгруппы данного класса групп с циклической подгруппой, принадлежащей сомножителю основной группы, а так же проблема пересечения смежного класса конечно порожденной подгруппы с циклической подгруппой, принадлежащей сомножителю. В [11] решена проблема степенной сопряженности слов в древесном произведении свободных групп с циклическим объединением.

В работе [12] была установлена разрешимость проблемы сопряженности подгрупп в свободном произведении двух циклических групп с объединением по циклической подгруппе.

3.2. Группы Артина и $C(p) \& T(q)$ -группы

Группа кос задается образующими $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ и определяющими соотношениями:

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, i = 1, \dots, n-1, \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, i, j = 1, \dots, n, |i-j| > 1.$$

Обобщением групп кос являются группы Артина.

Группа Артина — это группа G , заданная копредставлением с системой образующих $a_i, i \in J$, и соотношениями $\langle a_i a_j \rangle^{m_{ij}} = \langle a_i a_j \rangle^{m_{ji}}, i \neq j, i, j \in J$, где слова, стоящие слева и справа, состоят каждое из m_{ij} чередующихся букв a_i, a_j, m_{ij} — элементы матрицы Кокстера $M = (m_{ij})_{i,j \in J}$, соответствующий данной группе G , причем $\forall i \in J, m_{ij} = 1, \forall i, j \in J, i \neq j, m_{ij} \geq 2, m_{ij} = m_{ji}$.

Добавляя к определяющим соотношениям группы Артина G соотношения: $\forall i \in J, a_i^2 = 1$, получим копредставление группы Кокстера $\bar{G}$.

Группа Артина G называется группой Артина конечного типа, если соответствующая ей группа Кокстера $\bar{G}$ конечна. Известно, что группа кос A_n (с n образующими) принадлежит классу групп Артина конечного типа.

Группа Артина G называется неприводимой, если множество ее образующих X нельзя разбить на два непустых множества $X_1, X_2, X_1 \cap X_2 = \emptyset, X = X_1 \cup X_2$, таких, что каждый элемент из X_1 коммутирует с каждым элементом из X_2 .

Каждой неприводимой группе Артина G соответствует связный граф Кокстера Γ , вершины которого соответствуют образующим G . Любые две вершины a и b графа Γ соединены ребром, если $m_{ab} \geq 3$, m_{ab} - элемент матрицы Кокстера, соответствующий данной группе; если вершины c и d соединены путем, состоящим более, чем из одного ребра, то $m_{cd} = 2$.

Неприводимыми группами Артина конечного типа являются следующие группы: группа кос $A_n, n \geq 1; B_n, n \geq 2; D_n, n \geq 4; E_6, E_7, E_8, F_4, G_2, H_3, H_4; J_2(p), p = 5$ или $p \geq 7$.

Известно, что каждая группа Артина конечного типа является либо одной из групп $A_n, B_n, D_n, E_6, E_7, E_8, F_4, G_2, H_3, H_4; J_2(p), p = 5$ или $p \geq 7$, либо прямым произведением неприводимых групп.

В. Н. Безверхним была доказана теорема.

ТЕОРЕМА 5. *В группах Артина конечного типа $B_n, n \geq 4; D_n, n \geq 4; F_4, H_4, E_6, E_7, E_8$ проблема вхождения неразрешима.*

В группах Артина конечного типа $A_2, A_3, B_2, B_3, H_3, G_2, J_2(p)$ проблема вхождения разрешима.

В. Н. Безверхним совместно с В. А. Гринблатом было введено понятие крашеной подгруппы группы Артина конечного типа. Была доказана разрешимость обобщенной проблемы сопряженности слов в крашенных подгруппах групп Артина конечного типа [13].

В статье [14] доказана алгоритмическая неразрешимость проблемы сопряженности подгрупп в группе крашенных кос R_5 .

Совместно с И. В. Добрыниной проведено изучение нормализаторов некоторых классов подгрупп группы кос B_{n+1} [15].

Если $m_{ij} \geq 3$ для всех $i \neq j \in J$, то группа Артина называется группой Артина большого типа. Если $m_{ij} > 3$ для всех $i \neq j \in J$, то группа Артина называется группой Артина экстрабольшого типа.

Для групп Артина большого типа с помощью геометрического метода доказана разрешимость проблемы сопряженности слов [16].

В. Н. Безверхний решил обобщенную проблему сопряженности слов в группах Артина большого типа [17].

Для групп Кокстера большого типа решена проблема обобщенной сопряженности слов, доказано, что централизатор конечно порожденной подгруппы конечно порожден и существует алгоритм, выписывающий его образующие. Показано, что в общем случае централизатор конечно порожденной группы не является циклическим. Построен пример группы данного класса, не являющейся гиперболической группой [18].

Для групп Кокстера экстрабольшого типа предложен алгоритм, который по двум элементам находит порождающий элемент пересечения их циклических подгрупп [19].

Известно, что группы Кокстера являются группами, порожденными отражениями евклидова пространства. Кроме того, группы Артина, а в частности группы кос, непосредственно используются в криптографии.

Совместно с О. В. Инченко в работе [20] дано описание централизатора элементов конечного порядка конечно порожденной группы Кокстера с древесной структурой.

В. Н. Безверхним и О. Ю. Карповой была решена проблема вхождения в циклическую подгруппу в группах Артина с древесной структурой [21].

В работе [22] было рассмотрено решение проблемы степенной сопряженности слов в группах Артина экстрабольшого типа.

С О. Ю. Платоновой была описана структура централизатора элементов в группах Артина с древесной структурой [23].

В работе [24] была доказана теорема о свободных подгруппах для групп Артина с древесной структурой: пусть H — конечно порожденная подгруппа группы Артина G с древесной

структурой, причем для любого $g \in G$ и любой подгруппы $G_{ij}, i \neq j$, выполнено равенство $gHg^{-1} \cap G_{ij} = E$, то H является свободной. В доказательстве основной теоремы использованы идеи В. Н. Безверхнего о приведении множества образующих подгруппы к специальному.

В работе [26] решена проблема вхождения в группе Артина с древесной структурой.

В работе [25] доказано, что в крашенных подгруппах групп Артина с древесной структурой разрешима проблемы сопряженности слов.

В статье [27] В. Н. Безверхний, Н. Б. Безверхняя, И. В. Добрынина, О. В. Инченко, А. Е. Устьян провели анализ результатов по решению алгоритмических проблем в группах Кокстера, полученных членами Тульской алгебраической школы “Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп” под руководством В. Н. Безверхнего. Дан обзор утверждений и теорем, доказанных авторами статьи для различных классов групп Кокстера: групп Кокстера большого и экстрабольшого типов, групп Кокстера с древесной структурой, групп Кокстера с n -угольной структурой. Приводятся основные подходы и методы доказательства, среди которых метод диаграмм, введенный ван Кампеном, переоткрытый Р. Линдоном и усовершенствованный В. Н. Безверхним, в части, введения R -сокращений, специальных R -сокращений, специальных кольцевых сокращений, а также метод графов, метод типов, введенный В. Н. Безверхним, метод специального множества слов, разработанный В. Н. Безверхним на основе обобщения метода Нильсена на свободные конструкции групп. Рассмотренные в статье классы групп включают все группы Кокстера, которые либо принадлежат данным классам групп, либо могут быть представлены как обобщенные древесные структуры групп Кокстера, образованные из групп Кокстера с древесной структурой заменой некоторых вершин соответствующего дерева-графа группами Кокстера большого или экстрабольшого типов, а также группами Кокстера с n -угольной структурой.

В статье [28] рассмотрены обобщенные древесные структуры групп Кокстера, представляющие собой древесные произведения групп Кокстера экстрабольшого типа и групп Кокстера с древесной структурой. Обобщенные древесные структуры групп Кокстера, также как группы Кокстера экстрабольшого типа и группы Кокстера с древесной структурой, относятся к гиперболическим группам, поэтому в них решено большинство алгоритмических проблем, в частности, алгоритмически разрешима проблема обобщенной сопряженности слов. Предлагается оригинальный метод доказательства алгоритмической разрешимости проблемы обобщенной сопряженности слов в обобщенных древесных структурах групп Кокстера. Данный метод использует подход Г. С. Маканина, примененный им для доказательства конечной порожденности нормализатора элемента в группах кос. Кроме того, в данной работе показывается, что централизатор конечно порожденной подгруппы в обобщенной древесной структуре групп Кокстера конечно порожден и существует алгоритм, выписывающий его образующие.

В статье [29] определяются группы Артина с m -угольной структурой.

Группа Артина (Кокстера) называется группой с m -угольной структурой, если соответствующий граф состоит из m -угольников, $m \geq 3$; элементы соответствующей матрицы Кокстера удовлетворяют условиям $m_{ij} \geq 2, i \neq j, m_{ii} = 1$. Доказаны следующие теоремы:

ТЕОРЕМА 6. *В группе Артина с m -угольной структурой, $m > 3$, разрешимы проблемы равенства и сопряженности слов.*

В [30] рассматривалась ширина вербальных подгрупп в классе групп Артина с двумя порождающими.

В статье [31] В. Н. Безверхним и А. Е. Устьяном вводится понятие полугруппы Артина большого (экстрабольшого) типа. Доказывается инъективное вложение этих полугрупп в соответствующие им группы Артина большого (экстрабольшого) типа и разрешимость проблемы сопряженности слов в данном классе полугрупп.

Конечно определенную группу G , множество определяющих соотношений которой образует симметризованное множество, удовлетворяющее условиям $C(p)$ и $T(q)$, является $C(p) \& T(q)$ -

группой.

В зависимости от того, какие значения принимают p и q , получается соответствующий класс групп.

ТЕОРЕМА 7. [32] Пусть H — конечно порожденная подгруппа конечно определенной группы G , принадлежащей классу $C(p)\&T(q)$ -групп. Тогда централизатор $C_G(H)$ подгруппы H конечно порожден и существует алгоритм, выписывающий его образующие.

ТЕОРЕМА 8. В конечно определенной группе, принадлежащей классу $C(p)\&T(q)$ -групп разрешима проблема обобщенной сопряженности слов.

ТЕОРЕМА 9. Существует алгоритм, позволяющий для любого конечно множества слов из конечно определенной групп G класса $C(p)\&T(q)$ выписать образующие их нормализатора.

ТЕОРЕМА 10. Для того, чтобы нормализатор циклически несократимого в свободной группе слова $w \in G$, где G есть $C(p)\&T(q)$ -группа, была расширением циклической группы $\langle w \rangle$ с помощью конечной, необходимо и достаточно существование такого натурального числа $n(w)$, которого не превосходит ширина любой кольцевой неприводимой R -диаграммы сопряженности w с w .

В работе [33] приведено доказательство проблемы степенной сопряженности слов для групп $C(4)\&T(4)$.

Под шириной кольцевой диаграммы понимается число ее слоев.

Совместно с А. Е. Устьяном получено обобщение известной теоремы В. Магнуса об изоморфизме групп с одним определяющим соотношением на группы $C(3)\&T(6)$. Из доказанной теоремы получены следствия на группе с малым сокращением [34]. В работе [35] получены обобщения известной теоремы В. Магнуса об изоморфизме групп с одним определяющим соотношением и теоремы Гриндлингера об изоморфизме групп с условием $C'(\frac{1}{6})$ на группы $C(6)$ и $C(4)\&T(4)$ и $C(3)\&T(6)$. Из доказанной теоремы получены следствия на группе с малым сокращением.

4. Научная школа В. Н. Безверхнего

Фундаментальные результаты по теории групп и полугрупп Владимира Николаевича Безверхнего во многом определили дальнейшее развитие этих областей математики.

В. Н. Безверхний руководил научным семинаром и научной школой «Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп», основанной М. Д. Гриндлингером.

Под руководством В. Н. Безверхнего защищены докторская диссертация [36]:

- Добрынина Ирина Васильевна «Решение алгоритмических проблем в группах Кокстера» (ЯрГУ, 2010);

кандидатские диссертации [37] - [45]:

- Добрынина Ирина Васильевна «О подгруппах в группах крашенных кос и группах Артина конечного типа» (МПГУ, 1997),
- Паршикова Елена Владиславовна «Проблемы степени и степенной сопряженности в группах с условиями $C(4)\&T(4)$ » (МПГУ, 2001),
- Новикова Ольга Александровна «Решение алгоритмических проблем для свободного произведения с коммутирующими подгруппами» (МПГУ, 2002),



Рис. 5: Научный семинар В. Н. Безверхнего

- Безверхняя Наталия Борисовна «Гиперболичность, SQ -универсальность и некоторые другие свойства групп с одним определяющим соотношением» (МПУ, 2002),
- Инченко Оксана Владимировна «Некоторые алгоритмические проблемы в конечно порожденных группах Кокстера с древесной структурой» (МПУ, 2010),
- Кузнецова Анна Николаевна «Некоторые алгоритмические проблемы в группах Артина большого и экстрабольшого типа» (МПУ, 2010),
- Платонова Оксана Юрьевна «Решение некоторых алгоритмических проблем в группах Артина с древесной структурой» (ЯрГУ, 2013),
- Логачева Елена Сергеевна «Проблемы сопряженности слов и подгрупп в свободных конструкциях групп» (ЯрГУ, 2015).

5. Заключение

В настоящее время Владимир Николаевич плодотворно занимается научной деятельностью. Так, он опубликовал работу [33], выступил с пленарным докладом «О пересечении циклических подгрупп в группах $C(4)&T(4)$ » на XXIII Международной конференции «Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории», посвященной 80-летию профессора Александра Ивановича Галочкина и 75-летию профессора Владимира Григорьевича Чирского (Тула, ТГПУ им. Л. Н. Толстого, 29-31 октября 2024 года).

Авторы статьи, коллеги и ученики желают Владимиру Николаевичу здоровья и творческих успехов.

В данной работе авторами использовались материалы из публикации [46].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Безверхний В. Н. Решение проблемы вхождения для одного класса групп // Вопросы теории групп и полугрупп - Тула: Из-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого, 1972. С. 3-86.
2. Безверхний В. Н. О неразрешимости проблемы вхождения для некоторого класса групп // Сб. науч. тр. каф. высш. матем. - Тула: Из-во ТулПИ, 1974. С. 51-54.
3. Безверхний В. Н. Решение проблемы сопряженности подгрупп для свободного произведения групп // IX Всесоюз. алгебр. коллоквиум. Резюме сообщений и докладов. 1971. С. 9-10.
4. Безверхний В. Н. Решение проблемы сопряженности подгрупп для одного класса групп // Современная алгебра. 1977. Вып. 6. С. 16-23, 24-32.
5. Безверхний В. Н. Неразрешимость проблемы сопряженности подгрупп для свободного произведения свободных групп с объединением // Сб. науч. тр. каф. высш. матем. - Тула, 1975. С. 90-94.
6. Безверхний В. Н. О пересечении конечно порожденных подгрупп свободной группы // Сб. науч. тр. каф. высш. матем. - Тула: Изд-во ТулПИ, 1974., С. 51-56.
7. Безверхний В. Н., Роллов Э. В. О подгруппах свободного произведения групп // Современная алгебра. 1974. Вып. 1. С. 16-31.
8. Безверхний В. Н. О пересечении подгрупп в HNN -группах // Фундаментальная и прикладная математика, 1998. Т. 4. №1 С. 199–222
9. Безверхний В. Н. Решение проблемы вхождения в классе HNN -групп // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. Межвуз. сб. научных тр. - Тула, 1981. С. 20-62.
10. Безверхний В. Н., Логачева Е. С., Проблема сопряженности слов в древесном произведении свободных групп с циклическим объединением // Дискретная математика. 2016. Т.28. №1. С. 3–18.
11. Безверхний В. Н., Логачева Е.С. Проблема степенной сопряженности слов в древесном произведении свободных групп с циклическим объединением // Фундаментальная и прикладная математика. 2019. Т. 22. Вып. 4. С. 29–37.
12. Безверхний В. Н., Логачева Е. С. Проблема сопряженности подгрупп в свободном произведении циклических групп с объединением // Чебышевский сборник. Т. 13. Вып. 1. 2012. С. 20–45.
13. Безверхний В. Н., Гринблат В. А. Решение обобщенной проблемы сопряженности слов в крашенных подгруппах групп Артина конечного типа // Математические заметки. 2006. Т. 79. №5. С. 653–661.
14. Безверхний В. Н., Добрынина И. В. О неразрешимости проблемы сопряженности подгрупп в группе крашенных кос R_5 // Математические заметки. 1999. Т. 65. №1. С. 5-22.
15. Безверхний В. Н., Добрынина И. В. О нормализаторах некоторых классов подгрупп в группах кос // Математические заметки. 2003. Т. 74. №1. С. 19–31.
16. Безверхний В. Н. Решение проблемы сопряженности слов в группах Артина и Кокстера большого типа // Алгоритмические проблемы групп и полугрупп: Мужвуз. сб. науч. тр. - Тула, 1986. С. 26-61.

17. Безверхний В. Н. Решение проблемы обобщенной сопряженности слов в группах Артина большого типа // *Фундаментальная и прикладная математика*. 1999. Т. 5. №1. С. 1-38.
18. Безверхний В. Н., Добрынина И. В. Решение проблемы обобщенной сопряженности слов в группах Кокстера большого типа // *Дискретная математика*. 2005. Т. 17. №3. С. 123–145.
19. Безверхний В. Н., Добрынина И. В. Решение проблемы степенной сопряженности слов в группах Кокстера экстрабольшого типа // *Дискретная математика*. 2008. Т.20. №3. С. 101–110.
20. Безверхний В. Н., Инченко О. В. Централизатор элементов конечного порядка конечно порожденной группы Кокстера с древесной структурой // *Чебышевский сборник*. 2008. Т. 9. Вып.1. С. 17–27.
21. Безверхний В. Н., Карпова О. Ю. Проблема вхождения в циклическую подгруппу в группах Артина с древесной структурой // *Чебышевский сборник*. 2008. Т. 9. Вып. 1 С. 30–49.
22. Безверхний В. Н., Кузнецова А. Н. Разрешимость проблемы степенной сопряженности слов в группах Артина экстрабольшого типа // *Чебышевский сборник*. 2008. Т. 9. Вып. 1. С. 50–68.
23. Платонова О. Ю., Безверхний В. Н. О структуре централизатора элементов в группах Артина с древесной структурой // *Чебышевский сборник*. 2013. Т. 14. Вып. 3. С. 100–120.
24. Безверхний В. Н., Добрынина И. В. О свободных подгруппах в группах Артина с древесной структурой // *Чебышевский сборник*. 2014. Т. 15. Вып. 1. С. 32–42.
25. Безверхний В. Н., Безверхняя Н. Б. О проблеме сопряженности слов в некотором классе подгрупп групп Артина // *Чебышевский сборник*. 2021. Т. 22. Вып. 4. С. 88–99.
26. Безверхний В. Н., Безверхняя Н. Б. О разрешимости проблемы вхождения в некотором классе групп Артина” // *Чебышевский сборник*. 2023. Т. 24. Вып. 1. С. 213–218.
27. Безверхний В. Н., Безверхняя Н. Б., Добрынина И. В., Инченко О. В., Устьян А. Е. Об алгоритмических проблемах в группах Кокстера // *Чебышевский сборник*. 2016. Т. 17. Вып. 4. С. 23–50.
28. Безверхний В. Н., Добрынина И. В. О проблеме обобщенной сопряженности слов в обобщенных древесных структурах групп Кокстера // *Чебышевский сборник*. 2018. Т. 19. Вып. 3. С. 135–147.
29. Безверхний В. Н., Безверхняя Н. Б. Решение проблемы равенства и сопряженности слов в некотором классе групп Артина // *Фундаментальная и прикладная математика*. 2019. Т. 22. № 4. С. 9–27.
30. Безверхний В. Н., Добрынина И. В. Решение проблемы конечной ширины в группах Артина с двумя образующими // *Чебышевский сборник*. 2002. Т. 3. Вып. 1. С. 11–16.
31. Безверхний В. Н., Устьян А. Е. О подгруппах Артина // *Фундаментальная и прикладная математика*. 2019. Т. 22. Вып. 4. С. 39–49.
32. Безверхний В.Н. О нормализаторах элементов в $C(p) - T(q)$ -группах // *Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп*. Межвуз. сб. научных тр. - Тула, 1991. С. 4-58.
33. Безверхний, Х.Н., Безверхняя, Н.Б. О степенной сопряженности слов в группах с малым сокращением // *Чебышевский сборник*. 2024. Т. 25, № 5. С. 32–44.

34. Безверхний В. Н., Устьян А. Е. Обобщение одной теоремы Магнуса // Чебышевский сб., 11:3 - 2010. С. 57–62
35. Безверхний В. Н., Устьян А. Е. Обобщения теорем В. Магнуса и М. Д. Гриндлингера // Чебышевский сб. 14:3 - 2013. С. 20–33
36. Добрынина И. В. Решение алгоритмических проблем в группах Кокстера: дисс. . . . д. физ.-мат. наук. Ярославль. 2010
37. Добрынина И. В. О подгруппах в группах крашенных кос и группах Артина конечного типа: дис. . . . канд. физ.-мат. наук. Тула. 1997.
38. Паршикова Е. В. Проблемы степени и степенной сопряженности в группах с условиями $C(4)&T(4)$: дис. . . . канд. физ.-мат. наук. Тула. 2001.
39. Новикова О. А. Решение алгоритмических проблем для свободного произведения с коммутирующими подгруппами: дис. . . . канд. физ.-мат. наук. Тула. 2002.
40. Безверхняя Н. Б. Гиперболичность, SQ-универсальность и некоторые другие свойства групп с одним определяющим соотношением: дис. . . . канд. физ.-мат. наук.. Тула. 2002.
41. Инченко О. В. Некоторые алгоритмические проблемы в конечно порожденных группах Кокстера с древесной структурой: дис. . . . канд. физ.-мат. наук. Тула. 2010.
42. Кузнецова А. Н. Некоторые алгоритмические проблемы в группах Артина большого и экстрабольшого типа: дис. . . . канд. физ.-мат. наук. Тула. 2010.
43. Платонова О. Ю. Решение некоторых алгоритмических проблем в группах Артина с древесной структурой: дис. . . . канд. физ.-мат. наук. Тула. 2013.
44. Логачева Е. С. Проблемы сопряженности слов и подгрупп в свободных конструкциях групп: дис. . . . канд. физ.-мат. наук. Ярославль. 2015.
45. Трубицын Ю. Э. Алгоритмические проблемы и тождества в полугруппах со свойством Черча-Россера: дис. . . . канд. физ.-мат. наук. Москва. 1996.
46. Устьян А. Е., Добрынина И. В., Трубицын Ю. Э., Угаров А. С., Добровольский Н. М., Реброва И. Ю. 80-летие профессора Безверхнего Владимира Николаевича // Чебышевский сборник. 2020. Т. 21. Вып. 3. С. 317–335.

REFERENCES

1. Bezverkhniĭ, V. N. 1972, "Solution of the entry problem for one class of groups", *Questions of the theory of groups and semigroups*, pp. 3-86.
2. Bezverkhniĭ, V. N. 1974, "On the undecidability of the entry problem for a certain class of groups", *Collection of scientific works of the department of higher math*, pp. 51-54.
3. Bezverkhniĭ, V. N. 1971, "Solution of the conjugacy problem of subgroups for a free product of groups", *IX All-Union. algebras. colloquium. Summary of communications and reports*, pp. 9-10.
4. Bezverkhniĭ, V. N. 1977, "Solution of the conjugacy problem of subgroups for one class of groups", *Modern Algebra*. Vol. 6, pp. 16-23, 24-32.

5. Bezverkhniĭ, V. N. 1975, "Unsolvability of the conjugacy problem of subgroups for the free product of free groups with union", *Collection of scientific works of the department of higher matet*, pp. 90-94.
6. Bezverkhniĭ, V. N. 1974, "On the intersection of finitely generated subgroups of a free group", *Collection of scientific works of the department of higher matet.*, pp. 51-56.
7. Bezverkhniĭ, V. N., Rollov E.V. 1974, "On subgroups of a free product of groups", *Modern Algebra*, no. 1., pp. 16-31.
8. Bezverkhniĭ, V. N. 1998, "On the intersection of subgroups in HNN -groups", *Fundam. and adj. Mat.*, Vol. 4, no. 1, pp. 199–222
9. Bezverkhniĭ, V. N. 1981, "Solution of the problem of occurrence in the class of HNN -groups", *Algorithmic problems in the theory of groups and semigroups*, pp. 20-62.
10. Bezverkhniĭ, V. N., Logacheva, E. S. 2016, "The problem of conjugation of words in the tree product of free groups with cyclic union", *Diskr. Mat.*, Vol. 28, no. 1, pp. 3–18
11. Bezverkhniĭ, V. N., Logacheva, E. S. 2019, "The problem of the power conjugacy words in a tree product of free groups with cyclic amalgamation", *Fundamentalnaya i prikladnaya matematika*. Vol. 22. no. 4. pp. 29–37
12. Bezverkhniĭ, V. N., Logacheva, E. S. 2012, "The problem of conjugacy of subgroups in the free product of cyclic groups with a union", *Chebyshevskii Sbornik*, Vol. 13, no. 1, pp. 20–45.
13. Bezverkhniĭ, V. N., Grinblat, V. A. 2006, "Solution of the generalized conjugation problem for words in colored subgroups of Artin groups of finite type", *Matem. Notes*, Vol. 79, no. 5, pp. 653–661.
14. Bezverkhniĭ, V. N., Dobrynina, I. V. 1999, "On the unsolvability of the conjugacy problem for subgroups in the group of colored braids R_5 ", *Mat. notes*, Vol. 65, No. 1, pp. 15-22.
15. Bezverkhniĭ, V. N., Dobrynina, I. V. 2003, "On the normalizers of certain classes of subgroups in braid groups", *Mat. Notes*, Vol. 74, no. 1, pp. 19–31.
16. Bezverkhniĭ, V. N. 1986, "Solution of the word conjugacy problem in large Artin and Coxeter groups", *Algorithmic problems of groups and semigroups*, pp. 26-61.
17. Bezverkhniĭ, V. N. 1999, "Solution of the generalized conjugacy problem in Artin groups of large type", *Fundamental and Applied Mathematics*, Vol. 5, no. 1, pp. 1-38.
18. Bezverkhniĭ, V. N., Dobrynina, I. V. 2005, "Solving the problem of generalized conjugacy of words in large Coxeter groups", *Diskr. Mat.*, Vol. 17, no. 3, pp. 123–145.
19. Bezverkhniĭ, V. N., Dobrynina, I. V. 2008, "Solving the problem of power conjugacy of words in extra-large Coxeter groups", *Diskr. Mat.*, Vol. 20, no. 3, pp. 101–110.
20. Bezverkhniĭ, V. N., Inchenko, O. V. 2008, "Centralizer of finite order elements of a finitely generated Coxeter group with a tree structure", *Chebyshevskii Sbornik*, Vol. 9, no. 1, pp. 17–27.
21. Bezverkhniĭ, V.N., Karpova, O. Yu. 2008, "The problem of joining a cyclic subgroup in Artin groups with a tree structure", *Chebyshevskii Sbornik*, Vol. 9, no. 1, pp. 30–49.
22. Bezverkhniĭ, V. N., Kuznetsova, A. N. 2008, "Solvability of the power conjugacy problem for words in extra-large type Artin groups", *Chebyshevskii Sbornik*, Vol. 9, no. 1, pp. 50–68.

23. Platonova, O. Yu., Bezverkhniy, V. N. 2013, "On the structure of the centralizer of elements in Artin groups with a tree structure", *Chebyshevskii Sbornik*, Vol. 14, no. 3, pp. 100–120
24. Bezverkhniy, V. N., Dobrynina, I. V. 2014, "On free subgroups in Artin groups with a tree structure", *Chebyshevskii Sbornik*, Vol. 15, no. 1, pp. 32–42.
25. Bezverkhniy, V. N., Bezverkhnyaya, N. B. 2021, "On the problem of conjugacy of words in a certain class of subgroups of Artin groups", *Chebyshevskii Sbornik*, Vol. 22, no. 4, pp. 88–99.
26. Bezverkhniy, V. N., Bezverkhnyaya, N. B. 2023, "On the solvability of the occurrence problem in a certain class of Artin groups", *Chebyshevskii Sbornik*, Vol. 24, no. 1, pp. 213–218.
27. Bezverkhniy, V. N., Bezverkhnyaya, N. B., Dobrynina, I. V., Inchenko, O. V., Ustyan, A. E. 2016, "On algorithmic problems in Coxeter groups", *Chebyshevskii Sbornik*, Vol. 17, no. 4, pp. 23–50.
28. Bezverkhniy, V. N., Dobrynina, I. V. 2018, "On the problem of generalized conjugacy of words in generalized tree structures of Coxeter groups", *Chebyshevskii Sbornik*, Vol. 19, no. 3, pp. 135–147.
29. Bezverkhniy, V. N., Bezverkhnyaya, N. B. 2019, "Solving the problem of equality and conjugacy of words in a certain class of Artin groups", *Fundam. and adj. Mat.*, Vol. 22, no. 4, pp. 9–27.
30. Bezverkhniy, V. N., Dobrynina, I. V. 2002, "Solution of a finite width problem in Artin groups with two generators", *Chebyshevsky Collection*. Vol. 3, no. 1, pp. 11–16.
31. Bezverkhniy, V. N., Ustyan, A. E. 2019, "On Artin semigroups", *Fundam. and adj. Mat.*, Vol. 22, no. 4, pp. 39–49.
32. Bezverkhniy, V. N. 1991, "On normalizers in $C(p)&T(q)$ - groups", *Algorithmic problems in the theory of groups and semigroups*, pp. 4–58.
33. Bezverkhniy, V. N., Bezverkhnyaya, N. B. 2024, "On the degree conjugacy of words in groups with small reduction", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 5, pp. 32–44.
34. Bezverkhniy, V. N., Ustyan, A. E. 2010, "A generalization of a Magnus theorem", *Chebyshevskii sbornik*, Vol. 11, no. 3, pp. 57–62
35. Bezverkhniy, V. N., Ustyan, A. E. 2013, "Generalizations of the theorems of V. Magnus and M. D. Grindlinger", *Chebyshevskii sbornik*, Vol. 14, no. 3, pp. 20–33
36. Dobrynina, I. V. 2010, "Solution of algorithmic problems in Coxeter groups": diss. D. Phys.-Math. sciences. Yaroslavl.
37. Dobrynina, I. V. 1997, "On subgroups in colored braid groups and Artin groups of finite type": dis. Cand. Phys.-Math. sciences. Tula.
38. Parshikova, E. V. 2001, "Problems of degree and power conjugacy in groups with conditions $C(4)&T(4)$ ": dis. Cand. Phys.-Math. sciences. Tula.
39. Novikova, O. A. 2002 "Solution of algorithmic problems for free product with commuting subgroups": dis. Cand. Phys.-Math. sciences. Tula.
40. Bezverkhnyaya, N. B. 2002, "Hyperbolicity, SQ-universality, and some other properties of groups with one defining relation": dis. Cand. Phys.-Math. sciences. Tula.

- 41. Inchenko, O. V. 2010, “Some algorithmic problems in finitely generated Coxeter groups with a tree structure”: dis. Cand. Phys.-Math. sciences. Tula.
- 42. Kuznetsova, A. N. 2010, “Some algorithmic problems in Artin groups of large and extra large type”: dis. Cand. Phys.-Math. sciences. Tula.
- 43. Platonova, O. Yu. 2013, “Solution of some algorithmic problems in Artin groups with a tree structure”: dis. Cand. Phys.-Math. sciences. Tula.
- 44. Logacheva, E. S. 2015, “Problems of conjugacy of words and subgroups in free group constructions”: dis. Cand. Phys.-Math. sciences. Yaroslavl.
- 45. Trubitsyn, Yu. E. 1996, “Algorithmic problems and identities in semigroups with the Church-Rosser property”: dis. Cand. Phys.-Math. sciences. Moscow.
- 46. Ustyan, A. E., Dobrynina, I. V., Trubitsyn, Y. E., Ugarov, A. S., Dobrovolskii, N. M., Rebrova, I. Yu. 2020, “The 80-th anniversary of professor V. N. Bezverkhniĭ”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 3, pp. 317–335.

Получено: 14.11.2024

Принято в печать: 10.03.2025

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 26. Выпуск 1.

УДК 517.9

DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-1-25-34

**Экстремально мультистабильные динамические системы с
континуумом скрытых хаотических аттракторов**

И. М. Буркин, О. И. Кузнецова

Буркин Игорь Михайлович — доктор физико-математических наук, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: i-burkin@yandex.ru

Кузнецова Оксана Игоревна — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: oxxy4893@mail.ru

Аннотация

В последние годы многие исследователи сосредоточились на изучении феномена экстремальной мультистабильности динамических систем. Экстремально мультистабильная система содержит бесконечное число сосуществующих аттракторов, определяющихся различными начальными условиями. Последнее обстоятельство вносит чрезвычайную неопределенность в ее поведение и открывает возможность использования такой системы, например, в криптографии и организации защищенной связи в системах коммуникаций. Поэтому особый интерес представляет понимание фундаментального принципа формирования экстремальной мультистабильности. Только поняв этот принцип, мы сможем генерировать системы с нужным поведением. Экстремальная мультистабильность многих известных в настоящее время систем может быть объяснена наличием феномена усиления смещения (offset boosting), предполагающего присутствие в системе параметра смещения. Как оказалось, отмена параметра смещения может привести к наличию в системе континуума сосуществующих аттракторов, которые непрерывно располагаются в фазовом пространстве, и простираются до бесконечности в определенном направлении. Это открытие может стать, например, объяснением возникновения и распространения торнадо и турбулентности. В настоящей работе с использованием приема расширения размерности сконструированы две системы четвертого порядка без состояний равновесия, содержащие континуум сосуществующих скрытых хаотических аттракторов. Первая система построена на основе известной трехмерной системы Спротта, а вторая — на основе предложенной ранее авторами работы трехмерной системы, обладающей единственным скрытым хаотическим аттрактором размерности «почти 3». При этом вторая система содержит 2D решетку, представляющую собой объединение счетного числа полос, каждая из которых содержит континуум аттракторов.

Ключевые слова: динамическая система, экстремальная мультистабильность, хаос, континуум сосуществующих аттракторов, показатели Ляпунова, размерность Каплана — Йорке.

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:

Буркин, И.М., Кузнецова, О. И. Экстремально мультистабильные динамические системы с континуумом скрытых хаотических аттракторов // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 1, с. 25–34.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 26. No. 1.

UDC 517.9

DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-1-25-34

Extremely multistable dynamical systems with a continuum of hidden chaotic attractors

I. M. Burkin, O. I. Kuznetsova

Burkin Igor Mikhailovich — doctor of physical and mathematical sciences, Tula State University (Tula).

e-mail: i-burkin@yandex.ru

Kuznetsova Oksana Igorevna — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: oaxy4893@mail.ru

Abstract

In recent years, many researchers have focused on studying the phenomenon of extreme multistability of dynamic systems. An extremely multistable system contains an infinite number of coexisting attractors determined by different initial conditions. The latter circumstance introduces extreme uncertainty into its behavior and opens up the possibility of using such a system, for example, in cryptography and the organization of secure communication in information transmission systems. Therefore, understanding the fundamental principle of the formation of extreme multistability is of particular interest. Only by understanding this principle we can generate systems with the desired behavior. Extreme multistability of many currently known systems can be explained by the presence of the phenomenon of offset boosting, which suggests the presence of an offset parameter in the system. As it turned out, the cancellation of the offset parameter can lead to the presence of a continuum of coexisting attractors in the system, which are continuously located in the phase space and extend to infinity in a certain direction. This discovery can become, for example, an explanation for the occurrence and propagation of tornadoes and turbulence. In this paper, using the dimension expansion technique, two fourth-order systems without equilibrium states containing a continuum of coexisting hidden chaotic attractors are constructed. The first system is based on the well-known three-dimensional Sprott system, and the second is based on the three-dimensional system proposed earlier by the authors, which has a single hidden chaotic attractor of dimension “almost 3”. The second system contains a 2D lattice, which is a union of a countable number of strips, each of which contains a continuum of attractors.

Keywords: dynamic system, extreme multistability, chaos, continuum of coexisting attractors, Lyapunov exponents, Kaplan – Yorke dimension.

Bibliography: 16 titles.

For citation:

Burkin, I.M., Kuznetsova, O.I. 2025, “Extremely multistable dynamical systems with a continuum of hidden chaotic attractors”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 1, pp. 25–34.

1. Введение

В последние два десятилетия системы, демонстрирующие хаотическое поведение, привлекли пристальное внимание исследователей. Такие системы генерируют хаотический сигнал или последовательность таких сигналов и открывают широкие возможности для приложений на

основе хаоса. Детерминированная псевдослучайность и непредсказуемость хаоса нашли широкое применение в генерировании псевдослучайных чисел [1], криптографии [2], робототехнике [3] и защищенной связи [4-6]. Среди тем, связанных с хаосом, особый интерес представляет мультистабильность или сосуществование нескольких динамических состояний в системе. Мультистабильные хаотические системы помимо желаемого хаотического решения могут производить множество других решений при различных начальных условиях. Такая комплексная система может применяться в различных ситуациях без изменения базовой структуры, и обеспечивает большое удобство для инженеров. В частности, бесконечное число хаотических режимов динамической системы порождает чрезвычайную неопределенность и непредсказуемость. С другой стороны, мультистабильность может представлять некоторые угрозы по той же причине. Упомянутые обстоятельства вызвали большую волну как исследований феномена мультистабильности, так и разработку методов искусственного конструирования мультистабильных систем [7-11]. Для конструирования экстремально мультистабильных хаотических систем, то есть систем, содержащих бесконечное число сосуществующих хаотических аттракторов, было разработано несколько различных подходов. Например, рассмотреть существующую хаотическую систему и изменить ее, добавив дополнительные члены в дифференциальные уравнения, описывающие систему [7], или модифицировать существующий член [8-11], или добавить новые состояния в систему и изменить её порядок [12-14]. Целью всех упомянутых приемов генерирования экстремально мультистабильных систем было построение системы, в которой реализуется эффект усиления смещения (offset boosting), предполагающий присутствие в системе параметра смещения. Усиление смещения означает, что существующий в системе аттрактор перемещается в фазовом пространстве в любом направлении.

Оказалось, что отмена параметра смещения может привести к наличию в системе континуума сосуществующих аттракторов, которые непрерывно располагаются в фазовом пространстве, и простираются до бесконечности в определенном направлении. В работе [16] была продемонстрирована возможность построения системы, обладающей бесконечным числом сосуществующих аттракторов, путем специального расширения размерности существующей системы, имеющей нетривиальный аттрактор. В построенной таким образом системе смещение аттрактора в фазовом пространстве осуществляется только за счет выбора начального условия, что обеспечивает существование континуума сосуществующих аттракторов. В настоящей работе с использованием приема расширения размерности сконструированы две системы четвертого порядка без состояний равновесия, содержащие континуум сосуществующих скрытых хаотических аттракторов.

2. Расширение размерности системы Спротта

В работе [15] построена система третьего порядка

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -z, \\ \dot{y} &= z^2 - a, \\ \dot{z} &= x - yz.\end{aligned}\tag{1}$$

Система (1) не имеет состояний равновесия, и при $a = 1$ она обладает двумя хаотическими аттракторами, которые визуализируются при численном интегрировании с начальными условиями $(2, 0, 3)$ и $(0.34, 0.4, -0.6)$. Эти аттракторы представлены, соответственно, на рисунках 1.а) и 1.б) (проекция на плоскости (x, y) и (x, z)).

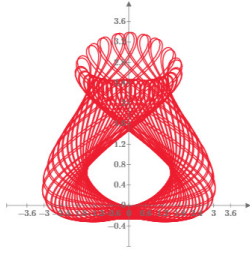


Рис. 1.а)

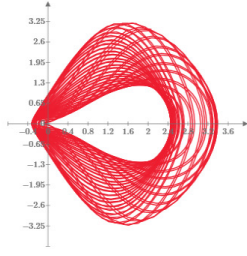
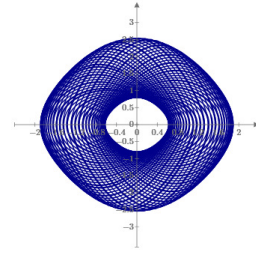
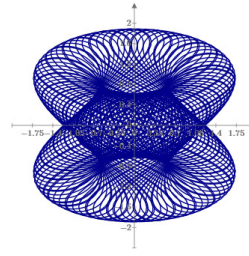


Рис. 1.б)



Пользуясь идеей специального расширения размерности пространства, на основе этой системы сконструируем систему 4-го порядка так, чтобы она обладала континуумом сосуществующих аттракторов. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -z, \\ \dot{y} &= z^2 - a, \\ \dot{z} &= b(x - u) - yz, \\ \dot{u} &= cz.\end{aligned}\tag{2}$$

Система (2) примечательна тем, что вместе с решением с начальным условием (x_0, y_0, z_0, u_0) она имеет и решение с начальным условием $(x_0 + d, y_0, z_0, u_0 + d)$ для любого $d \in \mathbb{R}^1$, так как замена $x \rightarrow x + d, u \rightarrow u + d$ не меняет динамику системы. Если рассматриваемая система имеет нетривиальный аттрактор, то она имеет континуум аттракторов, поскольку аттрактор системы определяется только начальным условием. Континуум аттракторов системы (2), порожденных каждым из аттракторов, представленных на рисунках 1, будем называть далее 1-D полосой.

Значение параметров (a, b, c) системы (2) необходимо подобрать таким образом, чтобы она «наследовала» свойства системы (1), то есть обладала парой скрытых хаотических аттракторов. Исчерпывающий компьютерный поиск позволяет подобрать необходимые значения: $a = 1, b = 0.6, c = 0.3$. На рисунках 2.а)-2.в) представлены проекции фрагмента 1-D полосы аттракторов системы (2) с начальными условиями $(2, 0, 3, 0)$ и $(2 \pm 1.5, 0, 3, 0 \pm 1.5)$, соответственно, на плоскости (x, y) , (y, u) и (x, z) .

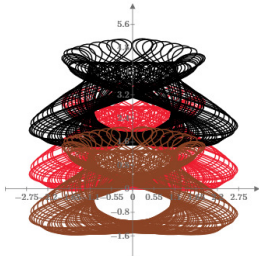


Рис. 2.а)

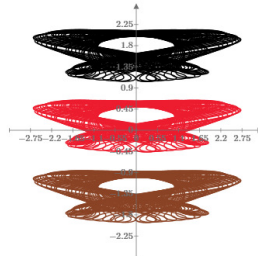


Рис. 2.б)

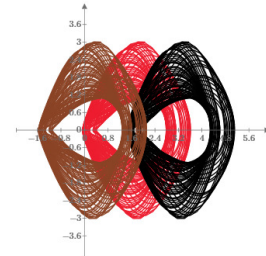


Рис. 2.в)

На рисунках 3.а)-3.в) представлены проекции на те же плоскости фрагмента 1-D полосы аттракторов системы (2) с начальными условиями $(0.34, 0.4, -0.6, 0)$ и $(0.34 \pm 1.5, 0.4, -0.6, 0 \pm 1.5)$.

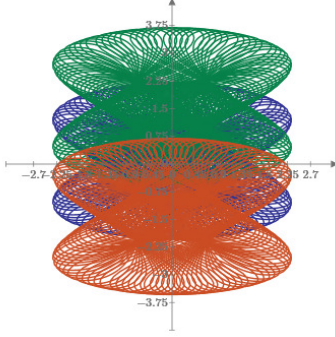


Рис. 3.а)

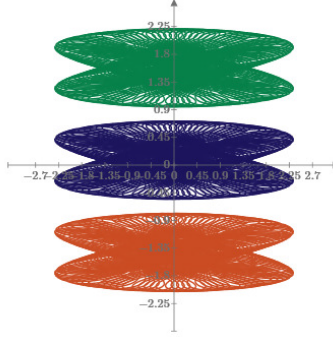


Рис. 3.б)

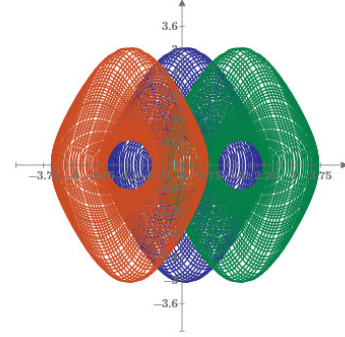


Рис. 3.в)

3. Новая система с континуумом скрытых аттракторов

В работе [11] построена система третьего порядка

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -x - y \arctg(50z), \\ \dot{z} &= y^4 - \frac{a}{1+x^8}.\end{aligned}\tag{3}$$

Эта система не имеет состояний равновесия и содержит скрытый мультифрактальный аттрактор, размерность Каплана-Йорке которого «почти 3». Бассейном притяжения этого аттрактора является почти все фазовое пространство, за исключением аналитического решения системы $x(t) \equiv y(t) \equiv 0, z = z(0) - at$.

На основе этой системы сконструируем систему 4-го порядка так, чтобы она обладала континуумом сосуществующих аттракторов. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -b(x-u) - y \arctg(50z), \\ \dot{z} &= y^4 - \frac{a}{1+(x-u)^8}, \\ \dot{u} &= cy.\end{aligned}\tag{4}$$

Если в системе (4) произвести замену $x \rightarrow (-x), y \rightarrow (-y), u \rightarrow (-u)$, то она не изменится. Поэтому вместе с любым аттрактором системы существует центрально-симметричный ему аттрактор в проекциях на плоскости $(x, y), (x, u), (y, u)$, а также пара симметричных аттракторов в проекциях на плоскости (x, z) и (y, z) . Кроме того очевидно, что проекция любого аттрактора на плоскость (x, u) есть отрезок прямой, и система (4) содержит континуум аналитических решений $x(t) \equiv u(t) \equiv d, y(t) \equiv 0, z = z(0) - at, d \in (-\infty, \infty)$.

Выберем следующие значения параметров системы: $a = 2, b = 2.3, c = 0.1$. Исчерпывающий компьютерный поиск позволил найти пару аттракторов (циклов) системы (4) с начальными условиями $(\pm 0.7947, \mp 0.0326, -1.4305, \pm 0.0791)$ (рис.4; проекция на плоскость (x, z)). Теперь проинтегрируем систему (4), увеличив первую и последнюю координаты начальных условий, например, на ± 0.7 . Тогда при интегрировании системы с начальными условиями $(\pm 0.7947 \pm 0.7, \mp 0.0326, -1.4305, \pm 0.0791 \pm 0.7)$ появляются еще две пары циклов, полученных сдвигом найденных ранее циклов по осям x и u (рис.5; проекция на плоскость (x, z)).

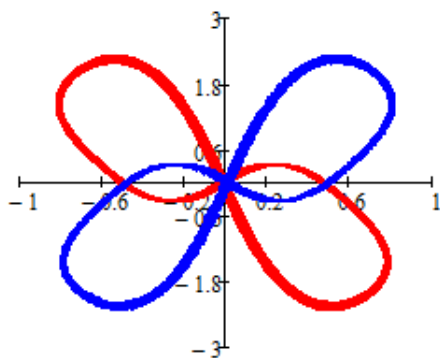


Рис. 4

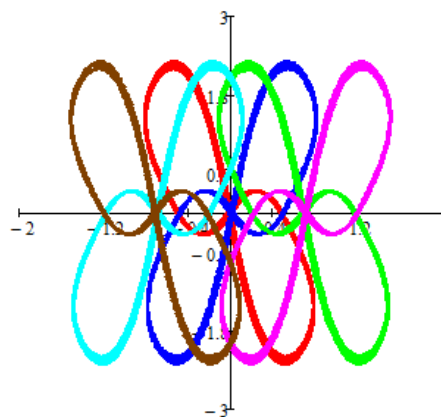


Рис. 5

Бассейны притяжения циклов, представленных на рисунке 5, являются чрезвычайно маленькими. В то же время оказывается, что почти каждая траектория системы (4) с начальным условием, не принадлежащим бассейнам притяжения циклов, притягивается к некоторому хаотическому аттрактору. Таких аттракторов несчетное множество. Все эти аттракторы могут быть получены сдвигом любого из них на одну и ту же величину в направлении осей x и y . На рисунке 6 приведен аттрактор системы (4) с начальным условием $(2, 1, 1, 2)$. На рисунке 7 фрагмент проекции на плоскость (x, y) семейства хаотических аттракторов, визуализированных при интегрировании с начальными условиями $(6, 1, 1, 6)$, $(-2, 1, 1, -2)$, $(-6, 1, 1, -6)$. Отметим, что система (4) не имеет состояний равновесия, поэтому все ее аттракторы являются скрытыми [11].

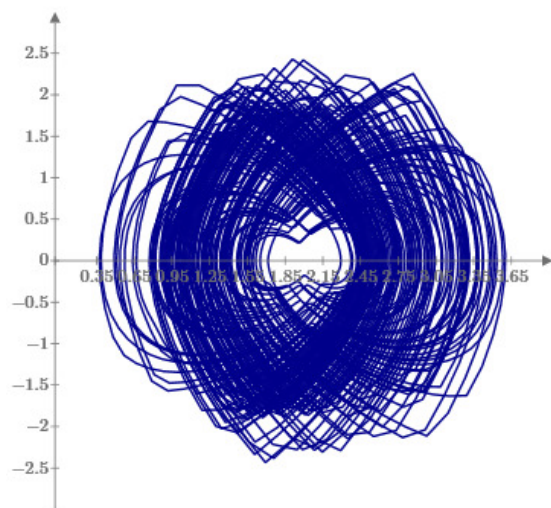


Рис. 6

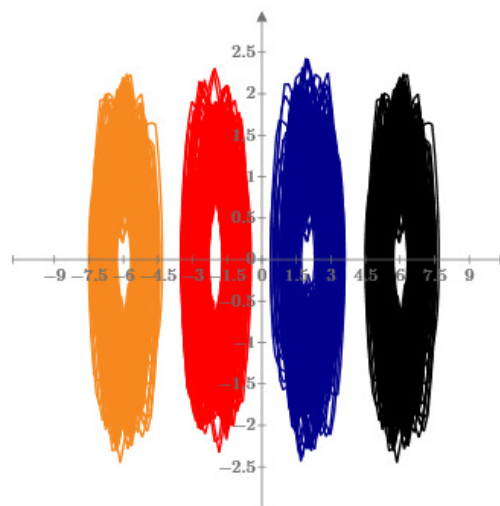


Рис. 7

4. Генерирование 2-D решетки из полос скрытых аттракторов

Система (4) является смещаемой по переменной y (variable-boostable system [15]). Последнее обстоятельство позволяет заменить в системе (4) переменную y на периодическую функцию этой переменной так, чтобы новая система обладала 2-D решеткой полос сосуществующих аттракторов. Эта решетка будет представлять собой объединение счетного числа 1-D полос, каждая из которых содержит континуум сосуществующих аттракторов, аналогичных аттракторам, представленным на рисунках 5 и 7. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \operatorname{tg} \frac{y}{2}, \\ \dot{y} &= -b(x - u) - \operatorname{tg} \frac{y}{2} \arctg(50z), \\ \dot{z} &= \left(\operatorname{tg} \frac{y}{2}\right)^4 - \frac{2}{1 + (x - u)^8}, \\ \dot{u} &= c \operatorname{tg} \frac{y}{2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Легко убедиться, что циклы системы (5) также являются циклами системы (4). В то же время, как показано в [10], эта система также содержит циклы, например, с начальными условиями $(\pm 0.7947 \pm 0.7, \mp 0.0326 + 2\pi k, -1.4305, \pm 0.0791 \pm 0.7)$, $k \in \mathbb{Z}$, то есть она содержит счетное число полос, каждая из которых в свою очередь содержит континуум скрытых циклов. Система (5), кроме того, содержит счетное число полос скрытых хаотических аттракторов. Продемонстрируем на примере феномен самовоспроизведения системой (5) 2-D решетки, состоящей из полос, каждая из которых содержит континуум хаотических аттракторов.

Численное интегрирование системы (5) с начальным условием $(1, 1, 0, 1)$ выводит нас на хаотический аттрактор, представленный на рисунке 8 (проекция на плоскость (y, u)).

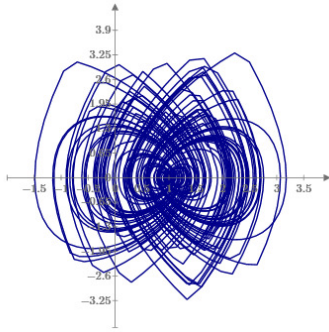


Рис. 8

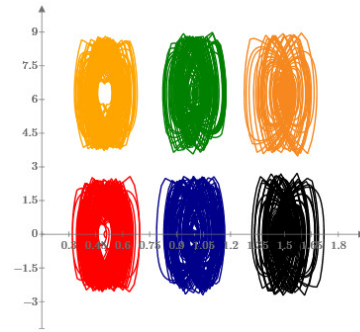


Рис. 9

Этот аттрактор имеет показатели Ляпунова $\Lambda_1 = 0.215$, $\Lambda_2 = -0.009$, $\Lambda_3 = -0.011$, $\Lambda_4 = -0.235$, и размерность Каплана–Йорке $D_{KY} = 3.831$. На рисунке 9 представлен фрагмент 2-D решетки хаотических аттракторов системы (5), полученный «размножением» аттрактора, представленного на рисунке 8. Эти аттракторы визуализированы путем интегрирования с системы начальными условиями $(1, 1, 0, 1)$, $(1, 2\pi + 1, 0, 1)$, $(1.5, 1, 0, 1.5)$, $(0.5, 1, 0, 0.5)$, $(1.5, 2\pi + 1, 0, 1.5)$, $(0.5, 2\pi + 1, 0, 0.5)$ (проекция на плоскость (y, u)).

5. Заключение

Путем расширения размерности трехмерных систем, обладающих хаотическими аттракторами, строятся системы четвертого порядка, содержащие континуум сосуществующих скрытых периодических и хаотических аттракторов. Такого эффекта удастся добиться за счет того, что положение аттрактора в фазовом пространстве сконструированных систем определяется только выбором начального условия в области его притяжения. Континуум сосуществующих хаотических режимов динамической системы порождает чрезвычайную неопределенность и непредсказуемость. Последнее обстоятельство открывает, например, широкие возможности для использования такой системы для скрытия передаваемой информации при организации защищенной связи в системах коммуникаций.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Peng H., Ji'e M., Du X., Duan S., Wang L. Design of pseudorandom number generator based on a controllable multi-double-scroll chaotic system // *Chaos Solitons Fractals*. 2023. Vol. 174. Art. no. 113803.
2. Singh A. K., Chatterjee A., Singh K. An image security model based on chaos and DNA cryptography for IIoT images // *IEEE Trans. Industr. Inf.* 2022. Vol. 19, №2. P. 1957–1964.
3. Petavratzis E., Volos C., Stouboulos I. Experimental study of terrain coverage of an autonomous chaotic mobile robot // *Integration*. 2023. Vol. 90. P. 104–114.
4. Li H., Hua Z., Bao H., Zhu L., Chen M., Bao B. Two-Dimensional Memristive Hyperchaotic Maps and Application in Secure Communication // *IEEE Transactions on Industrial Electronics*. 2021. Vol. 68, №10. P. 9931–9940.
5. Zhong Q., Ren J., Liu B., Li Y., Guo Z., Mao Y., Wu X., Ullah R., Wu Y., Zhao L., Sun T. High-security UPMC optical transmission system of seven-core fiber based on updating the 3D discrete chaotic model // *Opt. Lett.* 2022. Vol. 47. P. 2254–2257.
6. Tamba V. K., Biamou A. L. M., Tagne F. K., Takougang A. C. N., Fotsin H. B. Hidden extreme multistability in a smooth flux-controlled memristor based four-dimensional chaotic system and its application in image encryption // *Phys. Scr.* 2024. Vol. 99, №2. Art. no. 025210.
7. Sprott J. C., Jafari S., Abdul J. M. K., Kapitaniak T. Megastability: Coexistence of a countable infinity of nested attractors in a periodically-forced oscillator with spatially-periodic damping // *Eur. Phys. J. Special Topics*. 2017. Vol. 226. P. 1979–1985.
8. Burkin I. M., Kuznetsova O. I. On some methods for generating extremely multistable systems // *Journal of Physics: Conf. Series*. 2019. Vol. 1368. Art. no. 042050.
9. Burkin I. M., Kuznetsova O. I. Generation of Extremely Multistable Systems Based on Lurie Systems // *Vestnik St. Petersburg University, Mathematics*. 2019. Vol. 52, №4. P. 342–348.
10. Буркин И. М., Кузнецова О. И. Конструирование мегастабильных систем с многомерной решеткой хаотических аттракторов // *Чебышевский сборник*. 2021. Т. 22, Вып. 1, С. 105–117.
11. Буркин И. М., Кузнецова О. И. Новая мегастабильная система с 2-D полосой скрытых аттракторов и аналитическими решениями // *Чебышевский сборник*. 2021. Т. 22, Вып. 4, С. 360–368.

12. Zhang S., Li C., Zheng J., Wang X., Zeng Z., Chen G. Generating Any Number of Diversified Hidden Attractors via Memristor Coupling // *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*. 2021. Vol. 68, №12. P. 4945-4956.
13. Zhang S., Zheng J., Wang X., Zeng Z. A novel no-equilibrium HR neuron model with hidden homogeneous extreme multistability // *Chaos, Solitons & Fractals*. 2021. Vol. 145. Art. no. 110761.
14. Ramakrishnan B., Ahmadi A., Nazarimehr F., Natiq H., Jafari S., Hussain I. Oyster oscillator: a novel megastable nonlinear chaotic system // *Eur. Phys. J. Spec. Top.* 2022. Vol. 231. P. 2143–2151.
15. Chunbiao L., Sprott, J. C. Variable-boostable chaotic flows // *Optik*. 2016. Vol.127. №22. P. 10389-10398.
16. Chunbiao L., Tengfei L., Zuohua L. Offset parameter cancellation produces countless coexisting attractors // *Chaos*. 2022. Vol. 32. Art. no. 121104.

REFERENCES

1. Peng, H., Ji'e, M., Du, X., Duan, S. & Wang, L. 2023, "Design of pseudorandom number generator based on a controllable multi-double-scroll chaotic system", *Chaos Solitons Fractals*, vol. 174, art. no. 113803.
2. Singh, A. K., Chatterjee, A. & Singh K. 2022, "An image security model based on chaos and DNA cryptography for IIoT images", *IEEE Trans. Industr. Inf.*, vol. 19, no. 2, pp. 1957–1964.
3. Petavratzis, E., Volos, C. & Stouboulos, I. 2023, "Experimental study of terrain coverage of an autonomous chaotic mobile robot", *Integration*, vol. 90, pp. 104–114.
4. Li, H., Hua, Z., Bao, H., Zhu, L., Chen M. & Bao B. 2021, "Two-Dimensional Memristive Hyperchaotic Maps and Application in Secure Communication", *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 68, no. 10, pp. 9931–9940.
5. Zhong, Q., Ren, J., Liu, B., Li, Y., Guo, Z., Mao, Y., Wu, X., Ullah, R., Wu, Y., Zhao, L. & Sun T. 2022, "High-security UPMC optical transmission system of seven-core fiber based on updating the 3D discrete chaotic model", *Opt. Lett.*, vol. 47, pp. 2254–2257.
6. Tamba, V. K., Biamou, A. L. M., Tagne, F. K., Takougang, A. C. N. & Fotsin H. B. 2024, "Hidden extreme multistability in a smooth flux-controlled memristor based four-dimensional chaotic system and its application in image encryption", *Phys. Scr.*, vol. 99, no. 2, art. no. 025210.
7. Sprott, J. C., Jafari, S., Abdul, J. M. K. & Kapitaniak, T. 2017, "Megastability: Coexistence of a countable infinity of nested attractors in a periodically-forced oscillator with spatially-periodic damping", *Eur. Phys. J. Special Topics*, vol. 226. pp. 1979–1985.
8. Burkin, I. M. & Kuznetsova, O. I. 2019, "On some methods for generating extremely multistable systems", *J. Phys.: Conf. Ser.*, vol. 1368, art. no. 042050.
9. Burkin, I. M. & Kuznetsova, O. I. 2019, "Generation of Extremely Multistable Systems Based on Lurie Systems", *Vestnik St. Petersburg University, Mathematics*, vol. 52, no. 4, pp. 342–348.
10. Burkin, I. M. & Kuznetsova, O. I. 2021, "Designing megastable systems with multidimensional lattice of chaotic attractors", *Chebyshevskii Sb.*, vol. 22, no. 1, pp. 105–117.

11. Burkin, I. M. & Kuznetsova, O. I. 2021, “New megastable system with 2-D strip of hidden attractors and analytical solutions “, *Chebyshevskii Sb.*, vol. 22, no. 4, pp. 360–368.
12. Zhang, S., Li, C., Zheng, J., Wang, X., Zeng, Z. & Chen, G. 2021, “Generating Any Number of Diversified Hidden Attractors via Memristor Coupling“, *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, vol. 68, no. 12, pp. 4945-4956.
13. Zhang, S., Zheng, J., Wang, X. & Zeng, Z. 2021, “A novel no-equilibrium HR neuron model with hidden homogeneous extreme multistability“, *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 145, art. no. 110761.
14. Ramakrishnan, B., Ahmadi, A., Nazarimehr, F., Natiq, H., Jafari, S. & Hussain, I. 2022, “Oyster oscillator: a novel megastable nonlinear chaotic system“, *Eur. Phys. J. Spec. Top.*, vol. 231, pp. 2143–2151.
15. Chunbiao, L. & Sprott, J. C. 2016, “Variable-boostable chaotic flows“, *Optik*, vol. 127, no. 22, pp. 10389-10398.
16. Chunbiao, L., Tengfei, L. & Zuohua, L. 2022, “Offset parameter cancellation produces countless coexisting attractors“, *Chaos*, vol. 32, art. no. 121104.

Получено: 11.10.2024

Принято в печать: 10.03.2025

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 26. Выпуск 1.

УДК 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-1-35-46

Алгебраические сетки и их приложение к численному решению
линейных интегральных уравнений — II

Н. М. Добровольский, А. С. Подолян, Е. М. Рарова, И. Н. Балаба

Добровольский Николай Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: dobvol@tspu.ru

Подолян Алена Сергеевна — аспирант, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: alena.balabaeva.93@mail.ru

Рарова Елена Михайловна — старший преподаватель, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: rarova82@mail.ru

Балаба Ирина Николаевна — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: ibalaba@mail.ru

Аннотация

Работа является новой редакцией предыдущей работы авторов на эту тему. Существенное улучшение результатов предыдущей статьи связано с использованием весовых функций для перехода от интеграла меньшей размерности к большей.

Такой переход оказался необходимым, чтобы получить новые оценки погрешности приближенного решения интегрального уравнения Фредгольма II рода методом итерации с использованием алгебраических сеток.

Суть этого подхода заключается в том, что при приближённом вычислении решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода используется частичная сумма ряда Неймана, состоящего из интегралов разной кратности. При использовании различных алгебраических сеток, соответствующих различным чисто вещественным полям и одному параметру растяжения, оказывается, что для меньшей размерности будет использоваться меньшее количество узлов алгебраической сетки, а поэтому и точность вычисления будет меньшей. Чтобы не решать сложную задачу оптимизации числа узлов для разных размерностей, в данной работе предложен подход, когда все интегралы сводятся к одному и для него используется единая алгебраическая сетка.

Второй положительный эффект такого подхода связан с минимизацией вычисления значений ядра уравнения Фредгольма II рода за счет применения схемы Горнера. В работе рассмотрены два способа выбора чисто-вещественного алгебраического поля. Первый способ основан на задании неприводимого многочлена с целыми коэффициентами, у которого все корни — вещественные числа. Второй способ основан на использовании башни квадратичных полей.

При обоих способах выбора чисто-вещественного алгебраического поля нам удалось использовать алгебраическую сетку большой размерности для интегрирования функции меньшего числа переменных. Важную роль при этом сыграла весовая функция, которая позволяет заменить интеграл от функции из класса E_s^α по кубу G_s на интеграл от функции из класса $E_s^{\alpha,0}[-1, 1]$ по кубу K_s . При этом важно отметить, что новая функция обращается в ноль на границе этого куба.

Ключевые слова: интегральное уравнение Фредгольма II рода, метод итерации, алгебраические сетки.

Библиография: 8 названий.

Для цитирования:

Добровольский Н. М., Подолян А. С., Рарова Е. М., Балаба И. Н. Алгебраические сетки и их приложение к численному решению линейных интегральных уравнений — II // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 1, с. 35–46.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 26. No. 1.

UDC 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-1-35-46

Algebraic grids and their application to the numerical solution of linear integral equations — II

N. M. Dobrovol'skii, A. S. Podolyan, E. M. Rarova, I. N. Balaba

Dobrovol'skii Nikolai Mihailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: dobrovol@tsput.ru

Podolyan Alyona Sergeevna — postgraduate student, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: alena.balabaeva.93@mail.ru

Rarova Elena Mikhailovna — senior lecturer, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: rarova82@mail.ru

Balaba Irina Nikolaevna — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: ibalaba@mail.ru

Abstract

The paper is a new edition of the authors' previous work on this topic. A significant improvement in the results of the previous article is associated with the use of weight functions for the transition from an integral of lower to higher dimension.

Such a transition turned out to be necessary to obtain new estimates of the error of the approximate solution of the Fredholm integral equation of the second kind by the iteration method using algebraic grids.

The essence of this approach is that in the approximate calculation of the solution of the Fredholm integral equation of the second kind, a partial sum of the Neumann series consisting of integrals of different multiplicities is used. When using different algebraic grids corresponding to different purely real fields and one stretching parameter, it turns out that for a lower dimension, a smaller number of nodes of the algebraic grid will be used, and therefore the accuracy of the calculation will be lower. In order not to solve the complex problem of optimizing the number of nodes for different dimensions, this paper proposes an approach in which all integrals are reduced to one and a single algebraic grid is used for it. The second positive effect of this approach is related to the minimization of the calculation of the values of the kernel of the Fredholm equation of the second kind due to the use of Horner's scheme.

The paper considers two methods for choosing a purely real algebraic field. The first method is based on specifying an irreducible polynomial with integer coefficients, all of whose roots are real numbers. The second method is based on using a tower of quadratic fields.

With both methods of choosing a purely real algebraic field, we were able to use a large-dimensional algebraic grid to integrate a function of a smaller number of variables. An important role in this was played by the weight function, which allows replacing the integral of a function from the class E_s^α over the cube G_s with the integral of a function from the class $E_s^{\alpha,0}[-1,1]$ over the cube K_s . It is important to note that the new function goes to zero on the boundary of this cube.

Keywords: Fredholm integral equation of the second kind, iteration method, algebraic grids.

Bibliography: 8 titles.

For citation:

Dobrovol'skii, N. M., Podolyan, A. S., Rarova, E. M., Balaba, I. N. 2025, "Algebraic grids and their application to the numerical solution of linear integral equations — II", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 1, pp. 35–46.

1. Введение

В работе [2] рассматривался вопрос приложения алгебраических сеток к численному решению линейных интегральных уравнений. В ней отмечалось, что одним из важных классов интегральных уравнений с теоретической и практической точек зрения является уравнение Фредгольма второго рода, то есть уравнение вида

$$\varphi(\vec{t}) = \lambda \iint_{G_s} K_s(\vec{t}, \vec{u}) \varphi(\vec{u}) d\vec{u} + f(\vec{t}), \quad (1)$$

где $G_s = [0; 1]^s$.

Характерная особенность уравнения (1) — его линейность: неизвестная функция φ входит в него линейно и на неё воздействует линейный интегральный оператор с ядром $K_s(\vec{t}, \vec{u})$.

Так как теоретико-числовой метод в приближенном анализе прежде всего предназначен для решения вопросов для периодического случая, то мы будем исследовать уравнение (1) для случая периодических функций, когда свободный член $f(\vec{t})$ и ядро $K_s(\vec{t}, \vec{u})$ этого уравнения принадлежат, соответственно, классам $E_s^\alpha(C_1)$ и $E_{2s}^\alpha(C_2)$ ¹. Ясно, что и решение $\varphi(\vec{t})$ будет являться периодической функцией.

Первые работы по применению теоретико-числовых методов для приближенного решения уравнение (1) принадлежат Н. М. Коробову (см. [3], [4]). Современные результаты в этой области получены в работе [6], на которую мы опирались в работе [2].

Целью данной работы — получить новые вычислительные схемы приближенного решения уравнение Фредгольма второго рода методом итерации с применением алгебраических сеток. Как известно, погрешности приближенного интегрирования для алгебраических сеток имеют на классе E_s^α наилучший порядок, поэтому переход от параллелепипедальных сеток к алгебраическим дает лучшие порядки убывания погрешности. Вторая цель связана с тем, что при использовании башни квадратичных полей приходится использовать алгебраическую сетку большой размерности для интегрирования функции меньшего числа переменных и возникает естественный вопрос, а нельзя ли в этом случае улучшить оценку погрешности интегрирования и упростить саму квадратурную формулу с весами и алгебраической сеткой?

2. Необходимые сведения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Для произвольной решетки Λ обобщенной параллелепипедальной сеткой $M(\Lambda)$ называется множество $M(\Lambda) = \Lambda^* \cap G_s$.

¹Определение классов см. [4] стр. 48 — 49.

Сетка $M_1(\Lambda) = \Lambda^* \cap [-1; 1]^s$.

Обобщенной параллелепипедальной сеткой II рода $M'(\Lambda)$ называется множество

$$M'(\Lambda) = \{\vec{x} \mid \vec{x} = \{\vec{y}\}, \vec{y} \in M_1(\Lambda)\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Весовой функцией порядка r с константой B называется гладкая функция $\rho(\vec{x})$, удовлетворяющая условиям

$$\sum_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s = -1}^0 \rho(\vec{x} + (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s)) = 1 \text{ при } \vec{x} \in G_s, \quad (2)$$

$$\rho(\vec{x}) = 0 \text{ при } \vec{x} \notin (-1; 1)^s, \quad (3)$$

$$\left| \int_{-1}^1 \dots \int_{-1}^1 \rho(\vec{x}) e^{2\pi i(\vec{\sigma}, \vec{x})} d\vec{x} \right| \leq B \cdot (\bar{\sigma}_1 \dots \bar{\sigma}_s)^{-r} \text{ для любого } \vec{\sigma} \in \mathbb{R}^s. \quad (4)$$

Если выполнены условия (2) и (3), то говорим просто о весовой функции $\rho(\vec{x})$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Как указано в работе [5] весовую функцию $\rho(\vec{x})$ нетрудно построить с помощью гладкой функции одной переменной $\rho(x)$ с помощью равенства $\rho(\vec{x}) = \rho(x_1) \dots \rho(x_s)$, если от функции $\rho(x)$ потребовать выполнение следующих условий:

1. $\rho(x) = 0$ при $|x| \geq 1$,
2. $\rho(x) + \rho(x - 1) = 1$ при $0 \leq x \leq 1$,
3. $\left| \int_{-1}^1 \rho(x) e^{2\pi i \sigma x} dx \right| \leq B \cdot (\bar{\sigma})^{-r}$ для любого $\sigma \in \mathbb{R}$.

В этом случае функция $\rho(\vec{x})$ будет весовой функцией порядка r с константой B^s .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Квадратурной формулой с обобщенной параллелепипедальной сеткой II типа и весовой функцией $\rho(\vec{x})$ называется формула вида

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 f(\vec{x}) d\vec{x} = (\det \Lambda)^{-1} \sum_{\vec{x} \in M'(\Lambda)} \rho_{\vec{x}} f(\vec{x}) - R_{N'(\Lambda)}[f],$$

$$\text{где } \rho_{\vec{x}} = \sum_{\vec{y} \in M_1(\Lambda), \{\vec{y}\} = \vec{x}} \rho(\vec{y}), \quad N'(\Lambda) = |M'(\Lambda)|,$$

$R_{N'(\Lambda)}[f]$ — погрешность квадратурной формулы.

Для погрешности квадратурной формулы с обобщенной параллелепипедальной сеткой II рода на классе E_s^α справедлива оценка

$$R_{N'(\Lambda)}[E_s^\alpha(C)] = \sup_{f \in E_s^\alpha(C)} |R_{N'(\Lambda)}[f]| \leq CB \cdot c_1(\alpha)^s \zeta_H(\Lambda|\alpha),$$

$$\text{где } c_1(\alpha) = 2^{\alpha+1} \left(3 + \frac{2}{\alpha-1} \right), \quad \zeta_H(\Lambda|\alpha) = \sum'_{\vec{x} \in \Lambda} (\bar{x}_1 \dots \bar{x}_s)^{-\alpha}.$$

Пусть $\vec{a} = (a_0, a_1, \dots, a_{s-1})$ — целочисленный вектор такой, что многочлен

$$P_{\vec{a}}(x) = \sum_{\nu=0}^{s-1} a_\nu x^\nu + x^s \quad (5)$$

неприводим над полем рациональных чисел и все корни Θ_ν ($\nu = 1, \dots, s$) многочлена (5) действительные.

Обозначим через $T(\vec{a})$ матрицу степеней алгебраически сопряженных целых алгебраических чисел $\Theta_1, \dots, \Theta_s$ — корней многочлена $P_{\vec{a}}(x)$:

$$T(\vec{a}) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \Theta_1 & \dots & \Theta_s \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \Theta_1^{s-1} & \dots & \Theta_s^{s-1} \end{pmatrix}, \quad (6)$$

а через $\vec{\Theta} = (\Theta_1, \dots, \Theta_s)$ — вектор полного набора алгебраически сопряженных чисел — корней многочлена $P_{\vec{a}}(x)$.

Для любого $t > 0$ решётка $\Lambda(t \cdot T(\vec{a}))$ называется алгебраической. Она имеет вид

$$\Lambda(t \cdot T(\vec{a})) = \left\{ \vec{x} = \left(t \sum_{\nu=1}^s \Theta_1^{\nu-1} m_\nu, \dots, t \sum_{\nu=1}^s \Theta_s^{\nu-1} m_\nu \right) = t \cdot \vec{m} \cdot T(\vec{a}) \mid \vec{m} \in \mathbb{Z}^s \right\}.$$

Совокупность $M \subset G_s$ точек $M_k = (\xi_1(k), \dots, \xi_s(k))$ ($k = 1 \dots N$) называется *сеткой* M из N узлов, а сами точки — *узлами квадратурной формулы*. Величины $\rho_k = \rho(M_k)$ называются весами квадратурной формулы.

Рассмотрим уравнение Фредгольма второго рода, то есть уравнение вида

$$\varphi(\vec{t}) = \lambda \iint_{G_s} K_s(\vec{t}, \vec{u}) \varphi(\vec{u}) d\vec{u} + f(\vec{t}), \quad (7)$$

где $G_s = [0; 1]^s$. Мы будем исследовать уравнение (7) для случая периодических функций, когда свободный член $f(\vec{t})$ и ядро $K_s(\vec{t}, \vec{u})$ этого уравнения принадлежат, соответственно, классам $E_s^\alpha(C_1)$ и $E_{2s}^\alpha(C_2)$. Ясно, что и решение $\varphi(\vec{t})$ будет являться периодической функцией.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $q < 1$ и

$$|\lambda| \leq \frac{q}{\|K_s(\vec{t}, \vec{u})\|_{E_s^\alpha} (1 + 2\zeta(2\alpha))^s}. \quad (8)$$

Тогда уравнение Фредгольма (7) имеет единственное решение и для него справедливо представление в виде ряда Неймана

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{t}) &= f(\vec{t}) + \\ &+ \sum_{\vec{k}=1}^{\infty} \lambda^k \iint_{G_{sk}} K_s(\vec{t}, \vec{u}_1) K_s(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \dots K_s(\vec{u}_{k-1}, \vec{u}_k) f(\vec{u}_k) d\vec{u}_1 \dots d\vec{u}_k \end{aligned}$$

и справедливо соотношение

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{t}) &= f(\vec{t}) + \\ &+ \sum_{k=1}^n \lambda^k \iint_{G_{sk}} K_s(\vec{t}, \vec{u}_1) K_s(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \dots K_s(\vec{u}_{k-1}, \vec{u}_k) f(\vec{u}_k) d\vec{u}_1 \dots d\vec{u}_k + \\ &+ \frac{q^{n+1} \cdot \Theta \cdot \|f(\vec{t})\|_{E_s^\alpha}}{1 - q}, \quad \text{где } |\Theta| \leq (1 + 2\zeta(2\alpha))^s. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [6].

Для вычисления кратных интегралов в работе [2] были применены квадратурные формулы с алгебраическими сетками. Для этого были использованы два разных подхода, которые впервые были описаны М. И. Ляминам [8].

Нам потребуется следующая лемма:

ЛЕММА 1. Для любого действительного σ и $1 < \gamma \leq r$ для величины $\psi_{\gamma,r}(\sigma)$, заданной равенством

$$\psi_{\gamma,r}(\sigma) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \overline{m}^{-\gamma} (\overline{m} + \sigma)^{-r},$$

выполняется неравенство

$$\psi_{\gamma,r}(\sigma) \leq \frac{2(1 + \zeta(\gamma)) + (1 + 2\zeta(\gamma))2^\gamma}{(\overline{\sigma})^\gamma}. \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [1].

3. Организация вычислений

В работе [6] был использован интересный подход для сокращения числа вычислений значений ядра уравнения Фредгольма и свободного члена. В этом подходе использовался тот факт, что проекция параллелепипедальной сетки на любую координатную гиперплоскость снова является параллелепипедальной сеткой, но меньшей размерности. Этим свойством алгебраические сетки не обладают.

В работе [2] было сделано следующее замечание:

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Остановимся на вопросе, как применять сетку для размерности 2^l к вычислению интеграла по кубу размерности sk , где $sk < 2^l$.

Пусть нам дана функция $f(\vec{x})$ из класса E_{sk}^α и требуется вычислить интеграл

$$\iint_{G_{sk}} f(\vec{x}) d\vec{x}.$$

Рассмотрим функцию $g(\vec{x}, \vec{y})$, где $\vec{x} \in G_{sk}$, $\vec{y} \in G_{2^l-sk}$, заданную равенством

$$g(\vec{x}, \vec{y}) = f(\vec{x}) \quad \text{для любого } \vec{y} \in G_{2^l-sk}.$$

Ясно, что

$$\iint_{G_{sk}} f(\vec{x}) d\vec{x} = \iint_{G_{2^l}} g(\vec{x}, \vec{y}) d\vec{x} d\vec{y}, \quad g(\vec{x}, \vec{y}) \in E_{2^l}^\alpha.$$

Отсюда следует, как применять сетку большей размерности для вычисления кратного интеграла меньшей размерности.

Оказывается, что в случае алгебраических сеток этот подход можно существенно усилить с большим эффектом по точности вычисления.

Рассмотрим s -мерный куб $K_s = \{\vec{x} | |x_j| \leq 1 (j = 1, \dots, s)\}$.

Определим на кубе K_{2^l} функцию $h(\vec{x}, \vec{y})$, где $\vec{x} \in K_{sk}$, $\vec{y} \in K_{2^l-sk}$, заданную равенством

$$h(\vec{x}, \vec{y}) = f(\vec{x}) \prod_{j=1}^{sk} \rho(x_j) \prod_{j=1}^{2^l-sk} \rho(y_j) \quad \text{для любых } \vec{x} \in K_{sk}, \vec{y} \in K_{2^l-sk}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Функция $f(\vec{x})$ принадлежит классу $E_s^{\alpha,0}[-1,1]$, если она удовлетворяет условиям:

1. $f(\vec{x}) = 0$ при $\vec{x} \notin K_s$,

2. $f(\vec{x}) = 0$ при $\max_{j=1,\dots,s} |x_j| = 1$,

3. $f(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s} c(\vec{m}) e^{\pi i(\vec{m}, \vec{x})}$ и для любого $\vec{m}$ выполняется неравенство

$$|c(\vec{m})| \leq \frac{\|f(\vec{x})\|_{E_s^{\alpha,0}[-1,1]}}{m_1^\alpha \cdot \dots \cdot m_s^\alpha}.$$

ЛЕММА 2. Для любой функции $f(\vec{x}) \in E_{sk}^\alpha$, $\alpha > 1$ и весовой функции $\rho(x)$ порядка $r \geq \alpha$ с константой B функция $h(\vec{x}, \vec{y}) \in E_{2l}^{\alpha,0}[-1,1]$,

$$\|h(\vec{x}, \vec{y})\|_{E_{2l}^{\alpha,0}[-1,1]} \leq \|f(\vec{x})\|_{E_{sk}^\alpha} \cdot B^{2l} (2(1 + \zeta(\alpha)) + (1 + 2\zeta(\alpha)) 2^\alpha)^{sk}$$

и справедливо равенство

$$\iint_{G_{sk}} f(\vec{x}) d\vec{x} = \iint_{K_{2l}} h(\vec{x}, \vec{y}) d\vec{x} d\vec{y}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего докажем равенство интегралов. Действительно,

$$\int_{-1}^1 \rho(x) dx = \int_0^1 (\rho(x) + \rho(x-1)) dx = \int_0^1 dx = 1, \quad \iint_{K_{2l-sk}} \prod_{j=1}^{2l-sk} \rho(y_j) d\vec{y} = 1.$$

Далее имеем:

$$\begin{aligned} \iint_{K_{sk}} f(\vec{x}) \prod_{j=1}^{sk} \rho(x_j) d\vec{x} &= \sum_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s = -1}^0 \iint_{G_{sk}} f(\vec{x} + \vec{\varepsilon}) \prod_{j=1}^{sk} \rho(x_j + \varepsilon_j) d\vec{x} = \iint_{G_{sk}} f(\vec{x}) \prod_{j=1}^{sk} \sum_{\varepsilon=-1}^0 \rho(x_j + \varepsilon) d\vec{x} = \\ &= \iint_{G_{sk}} f(\vec{x}) d\vec{x}, \quad \iint_{K_{2l}} h(\vec{x}, \vec{y}) d\vec{x} d\vec{y} = \iint_{K_{sk}} f(\vec{x}) \prod_{j=1}^{sk} \rho(x_j) d\vec{x} \iint_{K_{2l-sk}} \prod_{j=1}^{2l-sk} \rho(y_j) d\vec{y} = \iint_{G_{sk}} f(\vec{x}) d\vec{x}. \end{aligned}$$

Перейдём теперь к изучению ряда Фурье для функции $h(\vec{x}, \vec{y}) \in E_{2l}^{\alpha}[-1,1]$ по многомерному кубу K_{2l} .

Пусть функция $f(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^{sk}} c(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}$, $c(\vec{m}) = \int \dots \int_{G_{sk}} f(\vec{x}) e^{-2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} d\vec{x}$, $|c(\vec{m})| \leq \frac{\|f(\vec{x})\|_{E_{sk}^\alpha}}{m_1^\alpha \cdot \dots \cdot m_{sk}^\alpha}$.

Тогда $h(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^{sk}, \vec{n} \in \mathbb{Z}^{2l-sk}} c^*(\vec{m}, \vec{n}) e^{\pi i((\vec{m}, \vec{x}) + (\vec{n}, \vec{y}))}$ и $c^*(\vec{m}, \vec{n}) = \int \dots \int_{G_{2l}} h(\vec{x}, \vec{y}) e^{-\pi i((\vec{m}, \vec{x}) + (\vec{n}, \vec{y}))} d\vec{x} d\vec{y}$.

Далее имеем:

$$\begin{aligned} c^*(\vec{m}, \vec{n}) &= \int \dots \int_{G_{2l}} f(\vec{x}) \prod_{j=1}^{sk} \rho(x_j) \left(\prod_{j=1}^{2l-sk} \rho(y_j) \right) e^{-\pi i((\vec{m}, \vec{x}) + (\vec{n}, \vec{y}))} d\vec{x} d\vec{y} = \\ &= \sum_{\vec{a} \in \mathbb{Z}^{sk}} c(\vec{a}) \int \dots \int_{G_{2l}} \prod_{j=1}^{sk} \rho(x_j) \left(\prod_{j=1}^{2l-sk} \rho(y_j) \right) e^{2\pi i(\vec{a}, \vec{x})} e^{-\pi i((\vec{m}, \vec{x}) + (\vec{n}, \vec{y}))} d\vec{x} d\vec{y} = \\ &= \sum_{\vec{a} \in \mathbb{Z}^{sk}} c(\vec{a}) \left(\prod_{j=1}^{sk} \int_{-1}^1 \rho(x_j) e^{\pi i(2a_j - m_j)x_j} dx_j \right) \left(\prod_{j=1}^{2l-sk} \int_{-1}^1 \rho(y_j) e^{-\pi i n_j y_j} dy_j \right). \end{aligned}$$

Пользуясь определением весовой функции, получим

$$\begin{aligned} |c^*(\vec{m}, \vec{n})| &\leq \sum_{\vec{a} \in \mathbb{Z}^{sk}} \frac{\|f(\vec{x})\|_{E_{sk}^\alpha}}{a_1^\alpha \cdot \dots \cdot a_{sk}^\alpha} \left(\prod_{j=1}^{sk} \frac{B}{2a_j - m_j} \right) \left(\prod_{j=1}^{2^l - sk} \frac{B}{n_j} \right) = \\ &= \|f(\vec{x})\|_{E_{sk}^\alpha} B^{2^l} \left(\prod_{j=1}^{sk} \sum_{a_j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{a_j^\alpha 2a_j - m_j} \right) \left(\prod_{j=1}^{2^l - sk} \frac{1}{n_j} \right). \end{aligned}$$

Применим лемму 1 к сомножителям первого произведения, получим:

$$\begin{aligned} |c^*(\vec{m}, \vec{n})| &\leq \|f(\vec{x})\|_{E_{sk}^\alpha} B^{2^l} \prod_{j=1}^{sk} \frac{2(1 + \zeta(\alpha)) + (1 + 2\zeta(\alpha)) 2^\alpha}{m_j^\alpha} \left(\prod_{j=1}^{2^l - sk} \frac{1}{n_j} \right) \leq \\ &\leq \|f(\vec{x})\|_{E_{sk}^\alpha} B^{2^l} (2(1 + \zeta(\alpha)) + (1 + 2\zeta(\alpha)) 2^\alpha)^{sk} \left(\prod_{j=1}^{sk} \frac{1}{m_j^\alpha} \right) \left(\prod_{j=1}^{2^l - sk} \frac{1}{n_j} \right), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. $\square$

4. Выбор чисто-вещественного алгебраического поля — первый подход

Напомним, что первый подход основан на том, что для каждой размерности sk , где $k = 1, 2, \dots, n$, выбирается свой неприводимый полином

$$P_{\vec{a}}(x) = \sum_{\nu=0}^{sk-1} a_\nu x^\nu + x^{sk}, \quad (10)$$

у которого все корни действительные. В качестве такого многочлена можно взять многочлен

$$P_k(x) = x(x-2)(x-4) \dots (x-2sk+2) - 1.$$

Действительно, согласно задаче 47 из [7] стр. 68 имеем

ТЕОРЕМА 2. Пусть $a_1, \dots, a_n$ — различные целые числа. Тогда многочлен

$$P_{1, \vec{a}}(x) = (x - a_1) \dots (x - a_n) - 1$$

неприводим над $\mathbb{Q}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [7] стр. 251.

ЛЕММА 3. Пусть $n = 2m$ — четное, $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ — различные целые числа и выполнены неравенства

$$\prod_{\nu=1}^n \left(a_\nu - \frac{a_{2\mu} + a_{2\mu+1}}{2} \right) > 1 \quad (\mu = 1, \dots, m-1),$$

тогда все корни многочлена $P_{1, \vec{a}}(x)$ — вещественные.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [2]. $\square$

ЛЕММА 4. Пусть $n = 2m + 1$ — нечетное, $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ — различные целые числа и выполнены неравенства

$$\prod_{\nu=1}^n \left(a_\nu - \frac{a_{2\mu-1} + a_{2\mu}}{2} \right) > 1 \quad (\mu = 1, \dots, m),$$

тогда все корни многочлена $P_{1,\vec{a}}(x)$ — вещественные.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [2]. $\square$

ТЕОРЕМА 3. Пусть натуральное $n > 1$, $\varepsilon = 2 \left\{ \frac{n}{2} \right\}$, $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ — различные целые числа, для которых выполнено условие

$$\prod_{\nu=1}^n \left(a_\nu - \frac{a_{2\mu-\varepsilon} + a_{2\mu+1-\varepsilon}}{2} \right) > 1 \quad (\mu = 1, \dots, m + \varepsilon - 1).$$

Тогда многочлен

$$P_{1,\vec{a}}(x) = (x - a_1) \dots (x - a_n) - 1$$

неприводим над $\mathbb{Q}$ и все его корни вещественные.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [2]. $\square$

ТЕОРЕМА 4. Если для приближенного вычисления интеграла

$$\iint_{G_{sk}} K_s(\vec{t}, \vec{u}_1) K_s(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \dots K_s(\vec{u}_{k-1}, \vec{u}_k) f(\vec{u}_k) d\vec{u}_1 \dots d\vec{u}_k$$

использовать квадратурные формулы, соответствующие решетке $\Lambda(t \cdot T(\vec{a}))$ и многочлену $P_{\vec{a}}(x) = P_k(x)$, то погрешность приближенного решения уравнения Фредгольма второго рода будет

$$\|f(\vec{t})\|_{E_s^\alpha} \cdot O \left(\frac{q^{n+1}}{1-q} + \frac{\ln^{s-1} t}{t^{s\alpha}} \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [2]. $\square$

Обозначим через $SN_n(\vec{t})$ n -ую частичную сумму ряда Неймана

$$SN_n(\vec{t}) = f(\vec{t}) + \sum_{k=1}^n \lambda^k \iint_{G_{sk}} K_s(\vec{t}, \vec{u}_1) K_s(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \dots K_s(\vec{u}_{k-1}, \vec{u}_k) f(\vec{u}_k) d\vec{u}_1 \dots d\vec{u}_k.$$

Положим $\rho(\vec{u}) = \prod_{j=1}^s \rho(u_j)$ для $\vec{u} = (u_1, \dots, u_s)$. Тогда частичную сумму ряда Неймана можно переписать в виде

$$SN_n(\vec{t}) = f(\vec{t}) + \iint_{K_{sn}} \sum_{k=1}^n \lambda^k K_s(\vec{t}, \vec{u}_1) \left(\prod_{j=1}^{k-1} K_s(\vec{u}_j, \vec{u}_{j+1}) \right) f(\vec{u}_k) \prod_{j=1}^n \rho(\vec{u}_j) d\vec{u}_1 \dots d\vec{u}_n. \quad (11)$$

Заметим, что сумму

$$\sum_{k=1}^n \lambda^k K_s(\vec{t}, \vec{u}_1) \left(\prod_{j=1}^{k-1} K_s(\vec{u}_j, \vec{u}_{j+1}) \right) f(\vec{u}_k)$$

можно расписать по схеме Горнера

$$\sum_{k=1}^n \lambda^k K_s(\vec{t}, \vec{u}_1) \left(\prod_{j=1}^{k-1} K_s(\vec{u}_j, \vec{u}_{j+1}) \right) f(\vec{u}_k) = \\ = \lambda K_s(\vec{t}, \vec{u}_1) (f(\vec{u}_1) + \lambda K_s(\vec{u}_1, \vec{u}_2) (f(\vec{u}_2) + \dots + \lambda K_s(\vec{u}_{n-1}, \vec{u}_n) f(\vec{u}_n)) \dots).$$

Таким образом, для вычисления одного приближенного значения частичной суммы ряда Неймана интегрального уравнения потребуется вычислить n значений ядра и $n + 1$ значений свободного члена.

Если же использовать определение частичной суммы, то объем вычислений увеличится, а именно, потребуется вычислить $n \frac{n+1}{2}$ значений ядра и $n + 1$ значений свободного члена.

Также заметим, что если использовать квадратурную формулу, соответствующую решетке $\Lambda(t \cdot T(\vec{a}))$ и многочлену $P_{\vec{a}}(x) = P_n(x)$, то погрешность приближенного решения уравнения Фредгольма второго рода будет

$$\|f(\vec{t})\|_{E_s^\alpha} \cdot O\left(\frac{q^{n+1}}{1-q} + \frac{\ln^{sn-1} t}{t^{sn\alpha}}\right).$$

увеличение точности можно объяснить достаточно просто. В теореме 4 в каждом интеграле используется своя квадратурная формула из сетки из $O(t^{sk})$ точек, а применение схемы Горнера и аналога леммы 2 позволяет использовать одну квадратурную формулу из сетки из $O(t^{sn})$ точек.

5. Выбор чисто-вещественного алгебраического поля — второй подход

Напомним, что второй подход связан с использованием башни полей Дирихле:

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}), \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}), \dots, \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{p_m}),$$

где p_m — m -ое простое число и $2^{m-1} < sn \leq 2^m$.

Пусть натуральное l_k выбрано из условия $2^{l-1} < sk \leq 2^l$. Рассмотрим чисто-вещественное кольцо целых алгебраических чисел

$$\mathbb{Z}_l = \mathbb{Z}[\sqrt{2}, \dots, \sqrt{p_l}]$$

и соответствующее чисто-вещественное алгебраическое поле степени 2^l

$$\mathbb{Q}_l = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \dots, \sqrt{p_l}).$$

Через $\Lambda_l(t)$ обозначим алгебраическую решётку

$$\Lambda_l(t) = \{\vec{x} = (t\Theta_1, \dots, t\Theta_{2l}) \mid \Theta = \Theta_1 \in \mathbb{Z}_l\},$$

где $\Theta_1, \dots, \Theta_{2l}$ — алгебраически сопряженные числа.

ТЕОРЕМА 5. Если для приближенного вычисления интеграла

$$\iint_{G_{sk}} K_s(\vec{t}, \vec{u}_1) K_s(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \dots K_s(\vec{u}_{k-1}, \vec{u}_k) f(\vec{u}_k) d\vec{u}_1 \dots d\vec{u}_k$$

использовать квадратурные формулы, соответствующие решетке $\Lambda_l(t)$, то погрешность приближенного решения уравнения Фредгольма второго рода будет

$$\|f(\vec{t})\|_{E_s^\alpha} \cdot O\left(\frac{q^{n+1}}{1-q} + \frac{\ln^{2^m-1} t}{t^{2^m\alpha}}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [2]. $\square$

Для экономного вычисления частичной суммы ряда Неймана при втором подходе формулу (11) необходимо видоизменить в соответствии с леммой 2 следующим образом:

$$SN_n(\vec{t}) = f(\vec{t}) + \\ + \iint_{K_{2^m}} \sum_{k=1}^n \lambda^k K_s(\vec{t}, \vec{u}_1) \left(\prod_{j=1}^{k-1} K_s(\vec{u}_j, \vec{u}_{j+1}) \right) f(\vec{u}_k) \prod_{j=1}^n \rho(\vec{u}_j) \prod_{j=1}^{2^m-sn} \rho(\vec{y}_j) d\vec{u}_1 \dots d\vec{u}_n dy_1 \dots dy_{2^m-sn}.$$

6. Заключение

При обоих способах выбора чисто-вещественного алгебраического поля нам удалось использовать алгебраическую сетку большой размерности для интегрирования функции меньшего числа переменных. Важную роль при этом сыграла весовая функция, которая позволяет заменить интеграл от функции из класса E_s^α по кубу G_s на интеграл от функции из класса $E_s^{\alpha,0}[-1,1]$ по кубу K_s . При этом важно отметить, что новая функция обращается в ноль на границе этого куба.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. А. С. Герцог, Е. Д. Ребров, Е. В. Триколич, “О методе К. К. Фролова в теории квадратурных формул”, Чебышевский сб., 10:2 (2009), 10–54.
2. Н. М. Добровольский, А. С. Подолян. Алгебраические сетки и их приложение к численному решению линейных интегральных уравнений // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 4, с. 162–169.
3. Коробов Н. М. О приближенном решении интегральных уравнений // ДАН СССР. 1959. Т. 128, N 2. С. 235–238.
4. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. (второе издание) М.: МЦНМО, 2004.
5. Е. М. Рарова, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский. Тригонометрические суммы сеток алгебраических решеток с бесконечно дифференцируемыми весами // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22, вып. 3, С. 166–178.
6. Ребров Е. Д., Селиванов С. В. О приближенном решении интегрального уравнения Фредгольма II рода // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. Вып. 2. — Тула: Изд-во ТулГУ, 2012. С. 83 - 92.
7. Садовничий В. А., Григорьян А. А., Конягин С. В. Задачи студенческих математических олимпиад. М.: Изд-во Моск. ун-та. 1987. 310 с.

8. Лямин М.И. Алгебраические сетки и их приложение к численному решению линейных интегральных уравнений // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения: Материалы XIII Международной конференции, посвященной восьмидесятипятилетию со дня рождения профессора Сергея Сергеевича Рышкова, Тула, 25–30 мая 2015 года / Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого. – Тула: Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого, 2015. – С. 351-354.

REFERENCES

1. Gertsog, A.S., Rebrov, E.D., Trikolich, E.V., 2009, “On the method of K.K. Frolov in the theory of quadrature formulas”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 10, no. 2, pp. 10-54.
2. Dobrovol'skii, N.M., Podolyan, A.S., 2022, “Algebraic grids and their application to the numerical solution of linear integral equations”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 4, pp. 162-169.
3. Korobov, N.M., 1959, “On the approximate solution of integral equations”, *Doklady Akademii Nauk SSSR*, vol. 128, no. 2, pp. 235-238 [in Russian].
4. Korobov, N.M., 2004, *Number-theoretic methods in approximate analysis*, 2nd ed., Moscow: ICNMO [in Russian].
5. Rarova, E.M., Dobrovol'skii, N.N., Rebrova, I.Yu., Dobrovol'skii, N.M., 2021, “Trigonometric sums of grids of algebraic lattices with infinitely differentiable weights”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 3, pp. 166-178.
6. Rebrov, E.D., Selivanov, S.V., 2012, “On the approximate solution of the Fredholm integral equation of the II kind”, *Izvestiya Tula State University. Natural sciences*, no. 2, pp. 83-92 [in Russian].
7. Sadovnichy, V.A., Grigoryan, A.A., Konyagin, S.V., 1987, *Problems of student mathematical Olympiads*, Moscow: Moscow University Press, 310 p. [in Russian].
8. Lyamin, M.I., 2015, “Algebraic grids and their application to the numerical solution of linear integral equations”, in *Algebra, number theory and discrete geometry: modern problems and applications: Proceedings of the XIII International Conference*, Tula: Tula State Pedagogical University, pp. 351-354 [in Russian].

Получено: 25.12.2024

Принято в печать: 10.03.2025

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 26. Выпуск 1.

УДК 517.5+519.213

DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-1-47-61

О некоторых экстремальных задачах для целых функций экспоненциального типа¹

А. Д. Манов

Манов Анатолий Дмитриевич — кандидат физико-математических наук, Донецкий государственный университет (г. Донецк); Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук (г. Москва).

e-mail: manov.ad@ro.ru

Аннотация

В статье изучается ряд экстремальных задач для неотрицательных и интегрируемых на вещественной оси целых функций экспоненциального типа $\leq \sigma$ (класс $\mathcal{E}_{1,\sigma}^+$).

Рассматриваемые задачи имеют следующий вид. Пусть Λ_ρ — инвариантный относительно сдвига оператор с локально интегрируемым символом $\rho(x)$, $x \in \mathbb{R}$ таким, что $\rho(x) = \overline{\rho(-x)}$, $x \in \mathbb{R}$. При фиксированном $\sigma > 0$ требуется найти следующие величины:

$$M^*(\rho, \sigma) = \sup\{(\Lambda_\rho f)(0) : f \in \mathcal{E}_{1,\sigma}^+, \|f\|_1 = 2\pi\},$$
$$m^*(\rho, \sigma) = \inf\{(\Lambda_\rho f)(0) : f \in \mathcal{E}_{1,\sigma}^+, \|f\|_1 = 2\pi\}.$$

Данная общая задача сводится к равносильной экстремальной задаче для положительно определённых функций, решение которой известно. Как следствие, нами получены явные значения величин $M^*(\rho, \sigma)$ и $m^*(\rho, \sigma)$ для ряда различных символов ρ . В частности, рассмотрены случаи, когда Λ_ρ — дифференциальный или разностный оператор специального вида.

Ключевые слова: целые функции экспоненциального типа, экстремальные задачи, положительно определённые функции, теорема Бохнера, преобразование Фурье.

Библиография: 19 названий.

Для цитирования:

А. Д. Манов. О некоторых экстремальных задачах для целых функций экспоненциального типа // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 1, с. 47–61.

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-71-30012).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 26. No. 1.

UDC 517.5+519.213

DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-1-47-61

On some extremal problems for entire functions of exponential type

A. D. Manov

Manov Anatoliy Dmitrievich — candidate of physical and mathematical sciences, Donetsk State University (Donetsk); Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences (Moscow).
e-mail: manov.ad@ro.ru

Abstract

In this paper we consider a number of extremal problems for nonnegative and integrable entire functions of exponential type $\leq \sigma$ (the class $\mathcal{E}_{1,\sigma}^+$).

The problems under consideration have the following form. Let Λ_ρ be a translation invariant operator with a locally integrable symbol $\rho(x)$, $x \in \mathbb{R}$, such that $\rho(x) = \overline{\rho(-x)}$, $x \in \mathbb{R}$. For a fixed $\sigma > 0$, it is required to find the following constants:

$$M^*(\rho, \sigma) = \sup\{(\Lambda_\rho f)(0) : f \in \mathcal{E}_{1,\sigma}^+, \|f\|_1 = 2\pi\},$$

$$m^*(\rho, \sigma) = \inf\{(\Lambda_\rho f)(0) : f \in \mathcal{E}_{1,\sigma}^+, \|f\|_1 = 2\pi\}.$$

This general problem reduces to an equivalent extremal problem for positive-definite functions, the solution of which is known. As consequence, we obtained exact values of $M^*(\rho, \sigma)$ and $m^*(\rho, \sigma)$ for a number of different symbols ρ . In particular, we consider cases where Λ_ρ is a differential or difference operator of a special form.

Keywords: entire functions of exponential type, extremal problems, positive-definite functions, Bochner theorem, Fourier transform.

Bibliography: 19 titles.

For citation:

Manov, A. D. 2025, “On some extremal problems for entire functions of exponential type”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 1, pp. 47–61.

1. Введение

1.0 Фиксируем некоторые обозначения: $L_p^{loc}(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq \infty$ — множество функций таких, что для любого компакта $K \subset \mathbb{R}$ их сужение на множество K принадлежит $L_p(K)$, $\tilde{f}(x) := \overline{f(-x)}$, $x \in \mathbb{R}$ и $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)dt$. Кроме того, мы будем использовать следующую пару прямого и обратного преобразования Фурье:

$$(\mathcal{F}f)(t) = \hat{f}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-itx}dx, \quad (\mathcal{F}^{-1}f)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{itx}dx.$$

При такой нормировке преобразования Фурье справедливы равенства:

$$\mathcal{F}^{-1}(f * g) = (\mathcal{F}^{-1}f)(\mathcal{F}^{-1}g), \quad \mathcal{F}^{-1}(f * \tilde{f}) = |\mathcal{F}^{-1}f|^2, \quad f, g \in L_1(\mathbb{R}).$$

1.1 Обозначим символом $\mathcal{E}_{p,\sigma}$ множество ц.ф.э.т. $\leq \sigma$ таких, что их ограничения на $\mathbb{R}$ принадлежат $L_p(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq \infty$, а символом $\mathcal{E}_{p,\sigma}^+$ – подмножество неотрицательных на вещественной оси функций из $\mathcal{E}_{p,\sigma}$. Кроме того, $\mathcal{B}_\sigma := \mathcal{E}_{\infty,\sigma}$.

Пусть $\rho \in L_1^{loc}(\mathbb{R})$. По функции ρ определим на $\mathcal{E}_{1,\sigma}$ следующий оператор:

$$(\Lambda_\rho f)(t) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x) \rho(x) e^{itx} dx, \quad t \in \mathbb{R}, \quad f \in \mathcal{E}_{1,\sigma}.$$

Из теоремы Винера-Пэли вытекает, что $\text{supp } \widehat{f} \subset [-\sigma, \sigma]$, и значит, $\Lambda_\rho f \in \mathcal{B}_\sigma$. Кроме того, несложно проверить, что Λ_ρ – ограниченный оператор из $\mathcal{E}_{1,\sigma}$ в $\mathcal{B}_\sigma$, норма которого удовлетворяет неравенству:

$$\|\Lambda_\rho\| = \sup_{f \in \mathcal{E}_{1,\sigma}, f \neq 0} \frac{\|\Lambda_\rho f\|_\infty}{\|f\|_1} \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\sigma}^{\sigma} |\rho(x)| dx. \quad (1)$$

Нахождение точного значения нормы $\|\Lambda_\rho\|$ в общем случае является сложной задачей и по существу относится к широкому классу экстремальных задач, связанных с нахождением точных констант в неравенствах типа Бернштейна-Никольского.

Рассмотрим “стандартный” пример неравенства типа Бернштейна-Никольского. Пусть $\rho(x) = i^n x^n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $x \in \mathbb{R}$. Тогда $(\Lambda_\rho f)(t) = f^{(n)}(t)$, $t \in \mathbb{R}$ и из неравенства (1) вытекает, что

$$\|f^{(n)}\|_\infty \leq \frac{\sigma^{n+1}}{\pi(n+1)} \|f\|_1, \quad f \in \mathcal{E}_{1,\sigma}, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \quad (2)$$

Стоит отметить, что неравенство (2) также следует из более общих результатов И. И. Ибрагимова, полученных им в 1959 г. (см. [1, следствие 2]).

В случае, когда Λ_ρ – тождественный оператор ($n = 0$) оценки на точную константу в неравенстве (2) были получены Кореваром в 1949 г. (см. [2]). Им было доказано, что $\sigma/(2\pi) \leq \|\Lambda_\rho\| \leq \sigma/\pi$. В рассматриваемом случае проблема вычисления точного значения нормы $\|\Lambda_\rho\|$ имеет приложения в теории чисел (см., например, [3, 4]). На данный момент наиболее точные оценки величины $\|\Lambda_\rho\|$ были найдены L. Hörmander и B. Bernhardsson в 1993 г. в работе [5]. Из их оценок следует, что $\|\Lambda_\rho\| = \sigma L$, где $L \approx 0.172182$.

Более подробную информацию о неравенствах типа Бернштейна-Никольского: их истории, разновидностях и приложениях можно найти в статье Д. В. Горбачева [6].

1.2 В данной работе нас интересует следующая задача, связанная с оценкой нормы оператора Λ_ρ снизу в довольно общем случае.

ЗАДАЧА 1. Пусть $\sigma > 0$, $\rho \in L_1^{loc}(\mathbb{R})$ и $\rho(x) = \tilde{\rho}(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Требуется найти следующие величины:

$$\begin{aligned} M^*(\rho, \sigma) &= \sup\{(\Lambda_\rho f)(0) : f \in \mathcal{E}_{1,\sigma}^+, \|f\|_1 = 2\pi\}, \\ m^*(\rho, \sigma) &= \inf\{(\Lambda_\rho f)(0) : f \in \mathcal{E}_{1,\sigma}^+, \|f\|_1 = 2\pi\}. \end{aligned}$$

Постановка задачи корректна. Действительно, т. к. $\rho = \tilde{\rho}$, то для любой функции $f \in \mathcal{E}_{1,\sigma}^+$ справедливо равенство:

$$\overline{(\Lambda_\rho f)(0)} = \overline{\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x) \rho(x) dx} = \int_{\mathbb{R}} \overline{\widehat{f}(x) \rho(x)} dx = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(-x) \rho(-x) dx = (\Lambda_\rho f)(0),$$

и значит, $(\Lambda_\rho f)(0)$ является действительным числом.

Так как оператор Λ_ρ и множество $\mathcal{E}_{1,\sigma}$ инвариантны относительно сдвигов, т. е.

$$\Lambda_\rho \tau_h = \tau_h \Lambda_\rho \text{ и } f \in \mathcal{E}_{1,\sigma} \Rightarrow \tau_h f \in \mathcal{E}_{1,\sigma}, \text{ где } \tau_h f(\cdot) := f(\cdot + h), \quad h \in \mathbb{R},$$

то для любой функции $f \in \mathcal{E}_{1,\sigma}^+$ справедливы точные неравенства:

$$\begin{aligned} \frac{m^*(\rho, \sigma) \|f\|_1}{2\pi} &\leq (\Lambda_\rho f)(t) \leq \frac{M^*(\rho, \sigma) \|f\|_1}{2\pi}, \quad t \in \mathbb{R}, \\ \|\Lambda_\rho f\|_\infty &\leq \frac{\max\{|m^*(\rho, \sigma)|, |M^*(\rho, \sigma)|\}}{2\pi} \|f\|_1. \end{aligned} \quad (3)$$

Поскольку неравенства выше являются точными, то имеет место следующая нижняя оценка нормы оператора Λ_ρ :

$$\frac{\max\{|m^*(\rho, \sigma)|, |M^*(\rho, \sigma)|\}}{2\pi} \leq \|\Lambda_\rho\|. \quad (4)$$

Ранее автором в работе [7] были доказаны следующие точные неравенства для функций $f \in \mathcal{E}_{1,\sigma}^+$:

$$-\frac{\sigma^2 \sqrt{3}}{12\pi} \|f\|_1 \leq f'(t) \leq \frac{\sigma^2 \sqrt{3}}{12\pi} \|f\|_1, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (5)$$

$$-\frac{\sigma^3(5 + 3\sqrt{5})}{120\pi} \|f\|_1 \leq f''(t) \leq \frac{\sigma^3}{12\pi} \|f\|_1, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (6)$$

1.3 Задачу 1 можно переформулировать в терминах положительно определённых функций. Напомним, что комплекснозначная функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ называется положительно определённой на $\mathbb{R}$ ($f \in \Phi(\mathbb{R})$), если для любого $m \in \mathbb{N}$, для любых точек $\{x_i\}_{i=1}^m \subset \mathbb{R}$, а также для любого набора комплексных чисел $\{c_i\}_{i=1}^m \subset \mathbb{C}$ справедливо неравенство

$$\sum_{i,j=1}^m c_i \overline{c_j} f(x_i - x_j) \geq 0.$$

Пусть $\sigma > 0$. Символом $\mathfrak{F}_\sigma$ обозначим множество функций $\varphi \in \Phi(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$ таких, что $\text{supp } \varphi \subset [-\sigma, \sigma]$ и $\varphi(0) = 1$.

Очевидно, что класс функций $\mathfrak{F}_\sigma$ не пуст. Например, если взять функцию $u \in L_2(\mathbb{R})$, $\|u\|_2 \neq 0$ и $u(x) = 0$ при $|x| \geq \sigma/2$, то следующая функция принадлежит $\mathfrak{F}_\sigma$:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\|u\|_2^2} (u * \tilde{u})(x) = \frac{1}{\|u\|_2^2} \int_{\mathbb{R}} u(x-t) \tilde{u}(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (7)$$

Действительно, $\varphi \in C(\mathbb{R})$ и $\text{supp } \varphi \subset [-\sigma, \sigma]$, положительная определённость функции φ проверяется непосредственно. Если $u(x) = \chi_{[-\sigma/2, \sigma/2]}(x)$, $x \in \mathbb{R}$ – индикатор отрезка, то получим функцию $\varphi(x) = (1 - |x/\sigma|)_+$, $x \in \mathbb{R}$.

Более того, из теоремы Боаса-Каца, Крейна (см., например, [8, Theorem 3.10.2]) следует, что $\mathfrak{F}_\sigma$ исчерпывается функциями вида (7). Рассмотрим следующую задачу.

ЗАДАЧА 2. Пусть $\sigma > 0$, $\rho \in L_1^{\text{loc}}(\mathbb{R})$ и $\rho(x) = \tilde{\rho}(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Требуется найти следующие величины:

$$M(\rho, \sigma) = \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \rho(x) dx : \varphi \in \mathfrak{F}_\sigma \right\}, \quad m(\rho, \sigma) = \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \rho(x) dx : \varphi \in \mathfrak{F}_\sigma \right\}. \quad (8)$$

Хорошо известно (см. следствие 6 в разделе 3 данной работы), что функция $\varphi \in C(\mathbb{R}) \cap L_1(\mathbb{R})$ является положительно определённой тогда и только тогда, когда $(\mathcal{F}^{-1} \varphi)(t) \geq 0$, $t \in \mathbb{R}$. Отсюда и из теоремы Винера-Пэли следует, что преобразование Фурье является биекцией между

множеством функций $f \in \mathcal{E}_{1,\sigma}^+$ таких, что $\|f\|_1 = 2\pi$ и множеством функций $\varphi \in \mathfrak{F}_\sigma$. Таким образом, справедливы равенства:

$$M(\rho, \sigma) = M^*(\rho, \sigma) \quad \text{и} \quad m(\rho, \sigma) = m^*(\rho, \sigma).$$

Отметим также, что если функция $\varphi \in \mathfrak{F}_\sigma$ является экстремальной в задаче 2, то функция $\mathcal{F}^{-1}\varphi$ будет экстремальной в задаче 1 при тех же параметрах ρ и σ .

Если $\rho(x) \equiv 1$, то величина $M(\rho, \sigma)$ была найдена Зигелем [9] в 1935 году и независимо Боасом и Кацом (см. [10, Theorem 5]) в 1945 году. В этом случае $M(\rho, \sigma) = \sigma$ и достигается она на функции $\varphi(x) = (1 - |x/\sigma|)_+$. Отметим также, что Зигелем было получено решение более общей задачи для положительно определённых функций в $\mathbb{R}^n$ с носителем в шаре. Результат Зигеля также был заново открыт Д. В. Горбачевым [11] в 2001 г. другими методами. Кроме того, отметим, что новый способ доказательства результатов Зигеля получен в недавней статье J. P. Gabardo [12].

В случае $\rho(x) \equiv 1$ задача нахождения величины $M(\rho, \sigma)$ относится к классу экстремальных задач типа Турана. Более полную информацию о данном типе задач, а также их приложениях можно найти в статье S. G. Révész [13].

Если $\rho(x) = |x|^{\alpha-1}$, $\alpha > 0$, то задача 2 имеет приложение в проблеме продолжения функций, заданных на $\mathbb{R} \setminus (-a, a)$, $a > 0$, до положительно определённых на $\mathbb{R}$.

В работе автора [7] была доказана следующая теорема, которая даёт решение задачи 2 и как следствие задачи 1.

ТЕОРЕМА А. Пусть $\sigma > 0$, $\rho \in L_1^{loc}(\mathbb{R})$ и $\rho(x) = \tilde{\rho}(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Определим оператор $A_\rho : L_2[-\sigma/2, \sigma/2] \rightarrow L_2[-\sigma/2, \sigma/2]$ следующим образом:

$$(A_\rho u)(t) := \int_{-\sigma/2}^{\sigma/2} \overline{\rho(t-x)} u(x) dx, \quad u \in L_2[-\sigma/2, \sigma/2]. \quad (9)$$

Тогда A_ρ – ограниченный самосопряжённый оператор в $L_2[-\sigma/2, \sigma/2]$ и имеют место следующие равенства:

$$M(\rho, \sigma) = \sup(\text{spec } A_\rho), \quad m(\rho, \sigma) = \inf(\text{spec } A_\rho),$$

где $\text{spec } A_\rho$ – спектр оператора A_ρ .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Теорема А является аналогом теоремы Сасса для неотрицательных тригонометрических многочленов (см. [14, Satz IV]). Метод доказательства теоремы А, по существу, повторяет метод из [14].

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Стоит подчеркнуть, что формулировка теоремы А несколько отличается от формулировки в работе [7]. Здесь при определении оператора A_ρ в (9) мы берём сопряжённую к ρ функцию.

В силу замкнутости множества $\mathfrak{F}_\sigma$ относительно сопряжения (см. раздел 3 ниже) при переходе от функции ρ к $\bar{\rho}$ величины (8) не изменятся, т.е. справедливы равенства:

$$M(\rho, \sigma) = M(\bar{\rho}, \sigma), \quad m(\rho, \sigma) = m(\bar{\rho}, \sigma).$$

При этом, очевидно, что мнимые части экстремальных функций могут отличаться знаком, если эти функции существуют. Поэтому теорема А сформулирована таким образом, что если наибольшее (наименьшее) значение спектра $\text{spec } A_\rho$ является отличным от нуля собственным значением оператора A_ρ , то экстремальной функцией в задаче 2 будет $\varphi(x) = (u * \bar{u})(x) / \|u\|_2^2$, $x \in \mathbb{R}$, где функция $u \in L_2[-\sigma/2, \sigma/2]$ отвечает этому собственному значению. Здесь мы отождествляем пространство $L_2[-\sigma/2, \sigma/2]$ с подпространством функций $u \in L_2(\mathbb{R})$ таких, что $u(x) = 0$ п. в. при $|x| \geq \sigma/2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Определённый в теореме А оператор A_ρ является компактным. Действительно, пусть $\rho_k(x) := \rho(x)\chi_{E_k}(x)$, где $E_k = \{x \in \mathbb{R} : |\rho(x)| \leq k\}$. Тогда $\{A_{\rho_k}\}_{k=1}^\infty$ – последовательность компактных операторов в $L_2[-\sigma/2, \sigma/2]$ и $\|A_{\rho_k} - A_\rho\| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

Таким образом, спектр оператора A_ρ состоит из нуля и отличных от нуля собственных значений. Отсюда следует, что решение задачи 2 по существу сводится к решению интегрального уравнения $A_\rho u = \lambda u$, $\lambda \neq 0$. Отсюда также вытекает, что если экстремальные величины (8) отличны от нуля, то они достигаются, т. е. существуют экстремальные функции.

1.4 В связи с последним замечанием, стоит выделить следующую экстремальную задачу на множестве функций $\mathfrak{F}_\sigma$. Пусть $\sigma > 0$. Требуется найти следующую величину:

$$C(\sigma) = \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}} |\varphi(x)|^2 dx : \varphi \in \mathfrak{F}_\sigma \right\}. \quad (10)$$

Задача (10) была поставлена и тщательно исследована в работе А. Garsia, Е. Rodemich, Н. Rumsey [15] в 1969 г. Как отмечается в [15] задача (10) связана с проблемой оптимизации средней мощности получаемого сигнала при радиолокационном исследовании планет. В Theorem 5.1 работы [15] доказано, что решение задачи (10) равносильно решению интегрального уравнения специального вида.

Отметим, что так как множество $\mathfrak{F}_\sigma$ замкнуто относительно умножения (см. раздел 3 ниже), то справедливо неравенство $C(\sigma) \leq M(1, \sigma) = \sigma$. Последнее неравенство является строгим. На это указывает, например то, что не всякую функцию $\varphi \in \mathfrak{F}_\sigma$ можно представить в виде $\varphi = |\psi|^2$, где $\psi \in \mathfrak{F}_\sigma$. Например, такой функцией является $\varphi(x) = (1 - |x/\sigma|)_+$, $x \in \mathbb{R}$. Это следует из того, что для любой функции $\psi \in \mathfrak{F}_\sigma$ справедливо неравенство $|\psi(\sigma/2)| \leq 1/2$ (см., например, [10]). Алгоритм вычисления константы $C(\sigma)$ с заданной точностью содержится в разделах 7, 8 работы [15]. В частности, $C(1) \approx 0.686981$. Также из раздела 8 работы [15] и теоремы А вытекает следующая связь между задачами (10) и задачей 2:

$$C(\sigma) = \sup \{M(\rho, \sigma) : \rho \in \mathfrak{F}_\sigma\}.$$

Данная статья посвящена исследованию свойств величин $M(\rho, \sigma)$ и $m(\rho, \sigma)$, а также нахождению их в частных случаях. Как следствие, получен ряд точных неравенств для функций $f \in \mathcal{E}_{1,\sigma}^+$. Перейдём к формулировке результатов.

2. Формулировка основных результатов

Нами доказана следующая теорема в которой собраны основные свойства экстремальных величин $M(\rho, \sigma)$ и $m(\rho, \sigma)$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\sigma > 0$, $\rho \in L_1^{loc}(\mathbb{R})$ и $\rho(x) = \tilde{\rho}(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) выполняется неравенство: $m(\rho, \sigma) \leq 0 \leq M(\rho, \sigma)$;
- 2) если $\rho(x) \neq 0$ на некотором множестве $K \subset [-\sigma, \sigma]$ положительной меры, то имеет место неравенство: $m(\rho, \sigma) < M(\rho, \sigma)$;
- 3) если $\operatorname{Re} \rho(x) \equiv 0$, то $m(\rho, \sigma) = -M(\rho, \sigma)$.

В ряде следующих теорем найдены величины $M(\rho, \sigma)$ и $m(\rho, \sigma)$ в частных случаях.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\rho(x) = i^n x^n$, $x \in \mathbb{R}$, где $n \in \mathbb{N}$. Тогда справедливы равенства:

$$M(\rho, \sigma) = \left(\frac{\sigma}{2}\right)^{n+1} \lambda_{\max}, \quad m(\rho, \sigma) = \left(\frac{\sigma}{2}\right)^{n+1} \lambda_{\min},$$

где λ_{max} и λ_{min} – наибольшее и наименьшее собственные значения матрицы:

$$A_n := \left(\frac{(-i)^n (-1)^{k+1} C_n^{k-1} (1 + (-1)^{n+k-j})}{n+1+k-j} \right)_{k,j=1}^{n+1}. \quad (11)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Если $n = 3$, то несложно проверить, что наибольшее и наименьшее собственные значения матрицы A_3 равны:

$$\lambda_{max} = \frac{4}{105} \sqrt{1575 + 84\sqrt{345}}, \quad \lambda_{min} = -\frac{4}{105} \sqrt{1575 + 84\sqrt{345}}.$$

Из замечания выше и неравенств (3) вытекает следующее следствие.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $f \in \mathcal{E}_{1,\sigma}^+$. Тогда справедливы точные неравенства:

$$-\frac{\sigma^4 \sqrt{1575 + 84\sqrt{345}}}{840\pi} \|f\|_1 \leq f'''(t) \leq \frac{\sigma^4 \sqrt{1575 + 84\sqrt{345}}}{840\pi} \|f\|_1, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (12)$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\rho(x) = \xi + \mu e^{ihx}$, $x \in \mathbb{R}$, где $\xi, \mu, h \in \mathbb{R}$ и $h \neq 0$. Тогда справедливы равенства:

$$M(\rho, \sigma) = \max\{\lambda_{max}, 0\}, \quad m(\rho, \sigma) = \min\{\lambda_{min}, 0\},$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_{max} &= \frac{\sigma}{2} \left(\xi + \mu + \sqrt{(\xi + \mu)^2 - 4\xi\mu s(\sigma, h)} \right) \\ \lambda_{min} &= \frac{\sigma}{2} \left(\xi + \mu - \sqrt{(\xi + \mu)^2 - 4\xi\mu s(\sigma, h)} \right), \quad s(\sigma, h) := 1 - \frac{\sin^2\left(\frac{\sigma h}{2}\right)}{\left(\frac{\sigma h}{2}\right)^2}. \end{aligned}$$

Как прямое следствие получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\rho(x) = \xi + \mu e^{ihx}$, $x \in \mathbb{R}$, где $\xi, \mu, h \in \mathbb{R}$ и $h \neq 0$. Тогда справедливы утверждения: 1) Если $\xi = 1$ и $\mu = 1$, то

$$M(\rho, \sigma) = \sigma \left(1 + \left| \frac{\sin\left(\frac{\sigma h}{2}\right)}{\left(\frac{\sigma h}{2}\right)} \right| \right), \quad m(\rho, \sigma) = 0.$$

2) Если $\xi = -1$ и $\mu = 1$, то

$$M(\rho, \sigma) = \sigma \left(1 - \frac{\sin^2\left(\frac{\sigma h}{2}\right)}{\left(\frac{\sigma h}{2}\right)^2} \right)^{1/2}, \quad m(\rho, \sigma) = -\sigma \left(1 - \frac{\sin^2\left(\frac{\sigma h}{2}\right)}{\left(\frac{\sigma h}{2}\right)^2} \right)^{1/2}.$$

3) Если $\xi = \cos \varphi$, $\mu = \sin \varphi$, $\varphi \in \mathbb{R}$ и $h = 2\pi k/\sigma$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ то

$$M(\rho, \sigma) = \begin{cases} \sigma \cos \varphi, & \varphi \in [0, \pi/4] \cup [3\pi/2, 2\pi] \\ \sigma \sin \varphi, & \varphi \in [\pi/4, \pi] \\ 0, & \varphi \in [\pi, 3\pi/2] \end{cases}, \quad m(\rho, \sigma) = \begin{cases} \sigma \cos \varphi, & \varphi \in [\pi/2, 5\pi/4] \\ \sigma \sin \varphi, & \varphi \in [5\pi/4, 2\pi] \\ 0, & \varphi \in [0, \pi/2]. \end{cases}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Несложно найти функции на которых достигаются экстремальные величины в теореме 4. Например, величина $M(\rho, \sigma)$ в утверждении 1) достигается на функции $\varphi(x) = (u * \hat{u})(x)/\|u\|_2^2$, где

$$u(x) = \chi_{[-\sigma/2, \sigma/2]}(x)(a + be^{-ihx}), \quad a, b \in \mathbb{C}, \quad |a| + |b| \neq 0 \quad \text{при } h = \frac{2\pi k}{\sigma}, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},$$

$$u(x) = \chi_{[-\sigma/2, \sigma/2]}(x) \left(1 + \operatorname{sign} \left(\frac{\sin\left(\frac{\sigma h}{2}\right)}{\left(\frac{\sigma h}{2}\right)} \right) e^{-ihx} \right), \quad \text{при } h \neq \frac{2\pi k}{\sigma}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Экстремальные функции для величин из утверждений 2) и 3) мы не приводим ввиду громоздкости их выражений.

Из теоремы 4 и неравенств (3) сразу получаем следующие два следствия.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $f \in \mathcal{E}_{1,\sigma}^+$ и $h \in \mathbb{R}$. Тогда справедливы точные неравенства:

$$0 \leq f(t+h) + f(t) \leq \frac{\sigma}{2\pi} \left(1 + \left| \frac{\sin\left(\frac{\sigma h}{2}\right)}{\left(\frac{\sigma h}{2}\right)} \right| \right) \|f\|_1, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (13)$$

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $f \in \mathcal{E}_{1,\sigma}^+$ и $h \in \mathbb{R}$. Тогда справедливо точное неравенство:

$$|f(t+h) - f(t)| \leq \frac{\sigma}{2\pi} \left(1 - \frac{\sin^2\left(\frac{\sigma h}{2}\right)}{\left(\frac{\sigma h}{2}\right)^2} \right)^{1/2} \|f\|_1, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (14)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Если разделить правую и левую части неравенства (14) на $|h|$, а затем устремить $h \rightarrow 0$, то получим неравенство (5).

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Напомним, что опорная функция непустого множества $K \subset \mathbb{R}^2$ определяется следующим образом:

$$H_K(\varphi) := \sup\{x \cos \varphi + y \sin \varphi : (x, y) \in K\}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Пусть $\sigma > 0$ и $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Рассмотрим множество

$$G := \{(f(0), f(2\pi k/\sigma)) : f \in \mathcal{E}_{1,\sigma}^+, \|f\|_1 = 2\pi\}. \quad (15)$$

Пусть $h = 2\pi k/\sigma$ и $\rho(x) = \cos \varphi + \sin \varphi e^{ihx}$, $x \in \mathbb{R}$. Тогда справедливо равенство:

$$(\Lambda_\rho f)(0) = f(0) \cos \varphi + f(2\pi k/\sigma) \sin \varphi, \quad f \in \mathcal{E}_{1,\sigma}^+.$$

Отсюда и из теоремы 4 вытекает, что

$$H_G(\varphi) = \begin{cases} \sigma \cos \varphi, & \varphi \in [0, \pi/4] \cup [3\pi/2, 2\pi] \\ \sigma \sin \varphi, & \varphi \in [\pi/4, \pi] \\ 0, & \varphi \in [\pi, 3\pi/2] \end{cases}.$$

Так как G является образом выпуклого множества при линейном отображении, то множество G само является выпуклым. Также заметим, что у замкнутого треугольника с вершинами $(0,0)$, $(\sigma,0)$ и $(0,\sigma)$ опорная функция совпадает с H_G . Из теоремы Хана-Банаха вытекает, что два выпуклых компакта совпадают тогда и только тогда, когда совпадают их опорные функции. Отсюда получаем, что замыкание множества G является треугольником с вершинами $(0,0)$, $(\sigma,0)$ и $(0,\sigma)$. Сдвигая подходящим образом следующую функцию

$$f(t) = \frac{\sigma \sin^2\left(\frac{\sigma t}{2}\right)}{\left(\frac{\sigma t}{2}\right)^2}$$

получим, что точки $(0,0)$, $(\sigma,0)$, $(0,\sigma)$ принадлежат множеству G . Отсюда следует, что G является замкнутым множеством.

Таким образом, G – замкнутый треугольник с вершинами $(0,0)$, $(\sigma,0)$ и $(0,\sigma)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Стоит отметить, что по существу используемый способ описания множества G не является новым. В статье P. Delsarte, Y. Genin, Y. Kamp [16] подобный метод использовался при решении некоторых задач, связанных с неотрицательными тригонометрическими многочленами.

Зная описание множества G можно получать различные “нелинейные” неравенства для функций $f \in \mathcal{E}_{1,\sigma}^+$. Например, из того, что функция $g(x, y) = xy$ достигает максимума на G в точке $(\sigma/2, \sigma/2)$ вытекает следующее следствие.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть $f \in \mathcal{E}_{1,\sigma}^+$, $\|f\|_1 = 2\pi$ и $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Тогда справедливы точные неравенства:

$$0 \leq f(t)f(t + 2\pi k/\sigma) \leq \frac{\sigma^2}{4}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (16)$$

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\rho(x) = i \operatorname{sign} x$, $x \in \mathbb{R}$. Тогда справедливы равенства:

$$M(\rho, \sigma) = \frac{2\sigma}{\pi}, \quad m(\rho, \sigma) = -\frac{2\sigma}{\pi}.$$

Кроме того, экстремальные величины достигаются на функциях $\varphi(x)$ и $\overline{\varphi(x)}$, где

$$\varphi(x) = e^{-\frac{i\pi x}{\sigma}} \left(1 - \left|\frac{x}{\sigma}\right|\right)_+, \quad x \in \mathbb{R}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Отметим, что если $\rho(x) = -i \operatorname{sign} x$, $x \in \mathbb{R}$, то оператор Λ_ρ является преобразованием Гильберта $\mathcal{H}$ (см., например, [17]), т. е.

$$(\Lambda_\rho f)(t) = (\mathcal{H}f)(t) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{|x-t|>\varepsilon} \frac{f(x)dx}{t-x}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Из теоремы 5 и неравенств (3) получаем следующее следствие.

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть $f \in \mathcal{E}_{1,\sigma}^+$. Тогда справедливы точные неравенства:

$$-\frac{\sigma}{\pi^2} \|f\|_1 \leq (\mathcal{H}f)(t) \leq \frac{\sigma}{\pi^2} \|f\|_1, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (17)$$

Далее работа устроена следующим образом. В разделе 3 приведены вспомогательные факты и утверждения. В разделах 4, 5, 6 и 7 мы докажем теоремы 1, 2, 3 и 5 соответственно.

3. Вспомогательные факты и утверждения

Отметим следующие свойства функций из $\Phi(\mathbb{R})$. Пусть $f, f_i \in \Phi(\mathbb{R})$. Тогда:

1. $|f(x+y) - f(x)|^2 \leq 2f(0)(f(0) - \operatorname{Re} f(y))$, $x, y \in \mathbb{R}$;
2. $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, \bar{f}, \operatorname{Re} f, f_1 f_2 \in \Phi(\mathbb{R})$, где $\lambda_i \geq 0$;
3. если для всех $x \in \mathbb{R}$ существует конечный предел $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) =: g(x)$, то $g \in \Phi(\mathbb{R})$.

Свойства 1) – 3) хорошо известны (см., например, [8, 18, 19]). В 1932 году Бохнер и независимо Хинчин доказали следующий критерий положительной определённости:

ТЕОРЕМА 6 (Бохнер-Хинчин). Функция $f \in \Phi(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда существует конечная неотрицательная борелевская мера μ на $\mathbb{R}$ такая, что

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{ixt} d\mu(t), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Доказательство этой теоремы можно найти, например, в [8, 18, 19]. Как следствие, мы получаем следующий критерий положительной определённости в терминах неотрицательности преобразования Фурье:

СЛЕДСТВИЕ 6. Если $f \in C(\mathbb{R}) \cap L_1(\mathbb{R})$, то $f \in \Phi(\mathbb{R}) \iff \widehat{f}(t) \geq 0$, $t \in \mathbb{R}$ и в этом случае $\widehat{f} \in L_1(\mathbb{R})$.

4. Доказательство теоремы 1

Докажем утверждение 1). Пусть $\varphi \in \mathfrak{F}_\sigma$. Тогда имеют место неравенства:

$$m(\rho, \sigma) \leq \int_{\mathbb{R}} \varphi\left(\frac{\sigma x}{\varepsilon}\right) \rho(x) dx \leq M(\rho, \sigma), \quad \varepsilon \in (0, \sigma). \quad (18)$$

С другой стороны,

$$\left| \int_{\mathbb{R}} \varphi\left(\frac{\sigma x}{\varepsilon}\right) \rho(x) dx \right| \leq \varphi(0) \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |\rho(x)| dx \rightarrow 0, \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Устремляя $\varepsilon \rightarrow 0$ в неравенствах (18) получим требуемое.

Докажем утверждение 2). Предположим, что $m(\rho, \sigma) = M(\rho, \sigma)$. Тогда из утверждения 1) вытекает, что

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \rho(x) dx = 0 \quad \text{для всех } \varphi \in \mathfrak{F}_\sigma. \quad (19)$$

В частности, равенство (19) выполняется и для функций $\varphi_t(x) = e^{itx}(1 - |x/\sigma|)_+$, $t \in \mathbb{R}$. Отсюда следует, что преобразование Фурье $\mathcal{F}((1 - |\cdot/\sigma|)_+ \rho(\cdot))(t) = 0$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Таким образом, $(1 - |x/\sigma|)_+ \rho(x) = 0$ п. в. на $\mathbb{R}$, и значит, $\rho(x) = 0$ п. в. на $[-\sigma, \sigma]$. Пришли к противоречию.

Докажем утверждение 3). Пусть $\varphi \in \mathfrak{F}_\sigma$ и $\operatorname{Re} \rho(x) \equiv 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \rho(x) dx &= - \int_{\mathbb{R}} \operatorname{Im} \varphi(x) \operatorname{Im} \rho(x) dx + i \int_{\mathbb{R}} \operatorname{Re} \varphi(x) \operatorname{Im} \rho(x) dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}} \operatorname{Im} \varphi(x) \operatorname{Im} \rho(x) dx. \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь мы воспользовались нечётностью функции $\operatorname{Re} \varphi(x) \operatorname{Im} \rho(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Из (20) получаем, что $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \rho(x) dx = - \int_{\mathbb{R}} \overline{\varphi(x)} \rho(x) dx$. Из замкнутости множества $\mathfrak{F}_\sigma$ относительно сопряжения следует справедливость утверждения 3).

Теорема доказана. ■

5. Доказательство теоремы 2

Пусть $\rho(x) = i^n x^n$, $x \in \mathbb{R}$, где $n \in \mathbb{N}$. Несложно проверить, что в этом случае справедливы равенства:

$$M(\rho, \sigma) = \left(\frac{\sigma}{2}\right)^{n+1} M(\rho, 2), \quad m(\rho, \sigma) = \left(\frac{\sigma}{2}\right)^{n+1} m(\rho, 2).$$

Пусть $\sigma = 2$. В этом случае оператор A_ρ конечномерный и имеет вид:

$$\begin{aligned} (A_\rho u)(t) &= (-i)^n \int_{-1}^1 (t-x)^n u(x) dx = (-i)^n \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k+1} C_n^{k-1} t^{n+1-k} s_{k-1}, \quad \text{где} \\ s_p &= \int_{-1}^1 x^p u(x) dx, \quad p = 0, \dots, n. \end{aligned}$$

Найдём все $\lambda \neq 0$ при которых существуют нетривиальные решения уравнения

$$(A_\rho u)(t) = \lambda u(t), \quad -1 \leq t \leq 1. \quad (21)$$

Будем искать функцию $u(x)$ в следующем виде $u(x) = \sum_{l=0}^n a_l x^l$, где $a_l \in \mathbb{C}$.

В этом случае,

$$s_p = \sum_{j=0}^n \frac{1 + (-1)^{n+p-j}}{n+1+p-j} a_{n-j}, \quad p = 0, \dots, n.$$

Приравнявая коэффициенты в равенстве (21), получим систему $A_n \cdot a = \lambda a$, где $a := (a_0, \dots, a_n)$ и

$$A_n := \left(\frac{(-i)^n (-1)^{k+1} C_n^{k-1} (1 + (-1)^{n+k-j})}{n+1+k-j} \right)_{k,j=1}^{n+1}. \quad (22)$$

Пусть $\lambda_{\max}$ и $\lambda_{\min}$ – наибольшее и наименьшее собственные значения матрицы A_n . Покажем, что $\lambda_{\min} < 0$. Предположим, что $\lambda_{\min} \geq 0$. В этом случае $m(\rho, \sigma) = 0$. Тогда для любой функции $\varphi \in \mathfrak{F}_\sigma$ справедливо неравенство

$$\int_{\mathbb{R}} i^n x^n \varphi(x) e^{itx} dx \geq 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Из следствия 6 вытекает, что функция $\psi(x) = i^n x^n \varphi(x)$ является положительно определённой. Так как $|\psi(x)| \leq \psi(0) = 0$, $x \in \mathbb{R}$ то $\varphi(x) \equiv 0$. Пришли к противоречию. Аналогично доказывается, что $\lambda_{\max} > 0$.

Таким образом, справедливы равенства:

$$M(\rho, \sigma) = \left(\frac{\sigma}{2}\right)^{n+1} \lambda_{\max}, \quad m(\rho, \sigma) = \left(\frac{\sigma}{2}\right)^{n+1} \lambda_{\min}.$$

Теорема доказана. ■

6. Доказательство теоремы 3

Пусть $\rho(x) = \xi + \mu e^{ihx}$, $x \in \mathbb{R}$, где $\xi, \mu, h \in \mathbb{R}$ и $h \neq 0$. Если $\xi = 0$ или $\mu = 0$, то утверждение теоремы вытекает из случая $\rho(x) \equiv 1$. Будем предполагать, что $\xi \neq 0$ и $\mu \neq 0$. В этом случае оператор A_ρ имеет вид:

$$\begin{aligned} (A_\rho u)(t) &= \int_{-\sigma/2}^{\sigma/2} (\xi + \mu e^{ih(x-t)}) u(x) dx \\ &= \xi \int_{-\sigma/2}^{\sigma/2} u(x) dx + \mu e^{-iht} \int_{-\sigma/2}^{\sigma/2} e^{ihx} u(x) dx, \quad -\sigma/2 \leq t \leq \sigma/2. \end{aligned}$$

Найдём спектр оператора A_ρ . Так как A_ρ является конечномерным оператором в бесконечномерном пространстве, то спектр состоит из нуля и отличных от нуля собственных значений.

Найдём все $\lambda \neq 0$ при которых существуют нетривиальные решения уравнения $A_\rho u = \lambda u$. Пусть $u(t) = a + b e^{iht}$, $-\sigma/2 \leq t \leq \sigma/2$, где $a, b \in \mathbb{C}$. Тогда

$$\begin{aligned} (A_\rho u)(t) &= \sigma \xi \left(a + \frac{\sin\left(\frac{\sigma h}{2}\right)}{\left(\frac{\sigma h}{2}\right)} b \right) + \sigma \mu e^{-iht} \left(\frac{\sin\left(\frac{\sigma h}{2}\right)}{\left(\frac{\sigma h}{2}\right)} a + b \right) \\ &= \lambda(a + b e^{iht}), \quad -\sigma/2 \leq t \leq \sigma/2. \end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты в равенстве $A_\rho u = \lambda u$ при 1 и e^{iht} , получим систему:

$$\begin{pmatrix} \sigma\xi & \sigma\xi \frac{\sin(\frac{\sigma h}{2})}{(\frac{\sigma h}{2})} \\ \sigma\mu \frac{\sin(\frac{\sigma h}{2})}{(\frac{\sigma h}{2})} & \sigma\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем, следующее характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - \sigma(\xi + \mu)\lambda - 4\xi\mu\sigma^2 s(\sigma, h) = 0, \quad \text{где } s(\sigma, h) := 1 - \frac{\sin^2(\frac{\sigma h}{2})}{(\frac{\sigma h}{2})^2}. \quad (23)$$

Из самосопряжённости оператора A_ρ следует, что уравнение (23) имеет 2 вещественных корня с учётом кратности. Найдём дискриминант:

$$\frac{D}{\sigma^2} = (\xi + \mu)^2 - 4\xi\mu s(\sigma, h) = (\mu + (1 - 2s(\sigma, h))\xi)^2 + 4\xi^2 s(\sigma, h)(1 - s(\sigma, h)) \geq 0.$$

Отсюда получаем, что корнями уравнения (23) являются:

$$\begin{aligned} \lambda_{max} &= \frac{\sigma}{2} \left(\xi + \mu + \sqrt{(\xi + \mu)^2 - 4\xi\mu s(\sigma, h)} \right) \\ \lambda_{min} &= \frac{\sigma}{2} \left(\xi + \mu - \sqrt{(\xi + \mu)^2 - 4\xi\mu s(\sigma, h)} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, $\text{spes } A_\rho = \{0, \lambda_{min}, \lambda_{max}\}$. Из теоремы А вытекает утверждение теоремы 3. ■

7. Доказательство теоремы 5

Несложно проверить, что справедливы равенства:

$$M(\rho, \sigma) = \frac{\sigma}{2} M(\rho, 2), \quad m(\rho, \sigma) = \frac{\sigma}{2} m(\rho, 2).$$

Пусть $\rho(x) = i \operatorname{sign} x$, $x \in \mathbb{R}$ и $\sigma = 2$. В этом случае оператор A_ρ является компактным и имеет вид:

$$(A_\rho u)(t) = i \int_{-1}^1 \operatorname{sign}(t-x) u(x) dx = i \int_{-1}^t u(x) dx - i \int_t^1 u(x) dx, \quad -1 \leq t \leq 1.$$

Найдём все $\lambda \neq 0$ при которых существуют нетривиальные решения уравнения $A_\rho u = \lambda u$, т. е. следующего интегрального уравнения:

$$i \int_{-1}^t u(x) dx - i \int_t^1 u(x) dx = \lambda u(t), \quad -1 \leq t \leq 1. \quad (24)$$

Несложно заметить, что если функция u при некотором $\lambda \neq 0$ удовлетворяет уравнению (24), то $u \in C^\infty(-1, 1)$. Кроме того, подставляя $t = -1$ и $t = 1$ в (24), получаем следующие краевые условия: $u(1) = -u(-1)$. Легко проверить, что функция $u(t)$ является решением уравнения (24) тогда и только тогда, когда она является решением следующей краевой задачи:

$$\begin{cases} \lambda u'(t) - 2iu(t) = 0; \\ u(1) = -u(-1). \end{cases} \quad (25)$$

Общим решением первого уравнения в (25) является функция

$$u(t) = Ce^{\frac{i2t}{\lambda}}, \quad -1 \leq t \leq 1, \quad \text{где } C \in \mathbb{C}.$$

Подставляя краевые условия, получим уравнение $\cos(2/\lambda) = 0$, решением которого являются числа

$$\lambda_k = \frac{2}{\pi/2 + \pi k}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Таким образом,

$$M(\rho, \sigma) = \frac{2\sigma}{\pi}, \quad m(\rho, \sigma) = -\frac{2\sigma}{\pi}.$$

Непосредственным вычислением проверяется то, что величины $M(\rho, \sigma)$ и $m(\rho, \sigma)$ достигаются на паре функций $\varphi(x)$ и $\overline{\varphi(x)}$, где

$$\varphi(x) = e^{-\frac{i\pi x}{\sigma}} \left(1 - \left|\frac{x}{\sigma}\right|\right)_+, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Теорема доказана. ■

8. Заключение

Из универсальности нижней оценки (4) нормы оператора $\Lambda_\rho : \mathcal{E}_{1,\sigma} \rightarrow \mathcal{B}_\sigma$ можно предположить, что в преобладающем большинстве случаев она является грубой. Возникает естественный вопрос, существует ли функция $\rho \in L_1^{loc}(\mathbb{R})$, $\rho(x) = \overline{\rho(-x)}$, $x \in \mathbb{R}$ такая, что неравенство (4) обращается в равенство? И если такая функция существует, то можно ли её задать в “явном” виде?

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ибрагимов И. И. Экстремальные задачи в классе целых функций конечной степени // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1959. Том 23, № 2. С. 243–256.
2. Korevaar J. An inequality for entire functions of exponential type // Nieuw Arch. Wiskunde. 1949. Vol. 23., № 2. P. 55–62.
3. Горбачев Д. В. Интегральная задача Конягина и (C, L) -константы Никольского // Тр. ИММ УрО РАН. 2005. Том 11, № 2. С. 72–91.
4. Carneiro E., Milinovich M. B., Soundararajan K. Fourier optimization and prime gaps // Comment. Math. Helv. 2019. Vol. 94. P. 533–568.
5. Hörmander L., Bernhardsson B. An extension of Bohr’s inequality // Boundary value problems for partial differential equations and applications. RMA Res. Notes Appl. Math. 1993. Vol. 29. P. 179–194.
6. Горбачев Д. В. Точные неравенства Бернштейна – Никольского для полиномов и целых функций экспоненциального типа // Чебышевский сб. 2021. Том 22, № 5. С. 58–110.
7. Манов А. Д. Об одной экстремальной задаче для положительно определённых функций // Чебышевский сб. 2021. Том 22, № 5. С. 161–171.
8. Sasvári Z. Multivariate Characteristic and Correlation Functions. Berlin, Boston: De Gruyter, 2013.

9. Siegel C.L. Über Gitterpunkte in konvexen Körpern und ein damit zusammenhängendes Extremal problem // *Acta Math.* 1935. Vol. 65. P. 307–323.
10. Boas R. P. Jr., Кас М. Inequalities for Fourier transforms of positive functions // *Duke Math. J.* 1945. Vol. 12, № 1. P. 189–206.
11. Горбачев Д. В. Экстремальная задача для периодических функций с носителем в шаре // *Матем. заметки.* 2001. Том 69, № 3. С. 346–352.
12. Gabardo J. P. The Turán Problem and Its Dual for Positive Definite Functions Supported on a Ball in $\mathbb{R}^d$ // *J. Fourier Analysis and Applications.* 2024. Vol. 30, № 11.
13. Révész S. G. Turán’s extremal problem on locally compact abelian groups // *Anal. Math.* 2011. Vol. 37, № 1. P. 15–50.
14. Szász O. Über harmonische Funktionen und L-Formen // *Math. Zeitschr.* 1918. Vol. 1. P. 149–162.
15. Garsia A., Rodemich E., Rumsey H. On Some Extremal Positive Definite Functions // *Journal of Mathematics and Mechanics.* 1969. Vol. 18, № 9, P. 805–834.
16. Delsarte P., Genin Y., Kamp Y. Interpolation Type Problems in the Class of Positive Trigonometric Polynomials of Fixed Order // *Math. Control Signal Systems.* 1989. Vol. 2. P. 171–185.
17. Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973.
18. Sasvári Z. Positive Definite and Definitizable Functions. Berlin: Akad. Verl., 1994.
19. Trigub R. M., Belinsky E. S. Fourier Analysis and Approximation of Functions. Boston, Dordrecht, London: Kluwer-Springer, 2004.

REFERENCES

1. Ibragimov, I. I. 1959. “Extremal problems in a class of entire functions of finite degree”, *Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat.*, vol. 23, no. 2, pp. 243–256. (in Russ.)
2. Korevaar, J. 1949. “An inequality for entire functions of exponential type”, *Nieuw Arch. Wiskunde.*, vol. 23, no. 2, pp. 55–62.
3. Gorbachev, D. V. 2005. “An integral problem of Konyagin and the (C, L) -constants of Nikol’skii”, *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, vol. 11, no. 2, pp. 72–91. (in Russ.)
4. Carneiro, E., Milinovich, M. B. & Soundararajan, K. 2019. “Fourier optimization and prime gaps”, *Comment. Math. Helv.*, vol. 94, pp. 533–568.
5. Hörmander, L. & Bernhardsson, B. 1993. “An extension of Bohr’s inequality”, *Boundary value problems for partial differential equations and applications. RMA Res. Notes Appl. Math.*, vol. 29, pp. 179–194.
6. Gorbachev, D. V. 2021. “Sharp Bernstein–Nikolskii inequalities for polynomials and entire functions of exponential type”, *Chebyshevskii Sb.*, vol. 22, no. 5, pp. 58–110. (in Russ.)
7. Manov, A. D. 2021. “On an extremal problem for positive definite functions”, *Chebyshevskii Sb.*, vol. 22, no. 5, pp. 161–171. (in Russ.)

8. Sasvári, Z. 2013. “Multivariate Characteristic and Correlation Functions”, *De Gruyter*, Berlin–Boston.
9. Siegel, C. L. 1935. “Über Gitterpunkte in konvexen Körpern und ein damit zusammenhängendes Extremal problem”, *Acta Math.*, vol. 65, pp. 307–323.
10. Boas, R. P. Jr. & Kac, M. 1945. “Inequalities for Fourier transforms of positive functions”, *Duke Math. J.*, vol. 12, no. 1, pp. 189–206.
11. Gorbachev, D. V. 2001. “Extremum Problem for Periodic Functions Supported in a Ball”, *Math. Notes.*, vol. 69, no. 3, pp. 313–319.
12. Gabardo, J. P. 2024. “The Turán Problem and Its Dual for Positive Definite Functions Supported on a Ball in $\mathbb{R}^d$ ”, *J. Fourier Analysis and Applications*, vol. 30, no. 11.
13. Révész, S. G. 2011. “Turán’s extremal problem on locally compact abelian groups”, *Anal. Math.*, vol. 37, no. 1, pp. 15–50.
14. Szász, O. 1918. “Über harmonische Funktionen und L-Formen”, *Math. Zeitschr.*, vol. 1, pp. 149–162.
15. Garsia, A., Rodemich, E. & Rumsey, H. 1969. “On Some Extremal Positive Definite Functions”, *Journal of Mathematics and Mechanics*, vol. 18, no. 9, pp. 805–834.
16. Delsarte, P., Genin, Y. & Kamp, Y. 1989. “Interpolation Type Problems in the Class of Positive Trigonometric Polynomials of Fixed Order”, *Math. Control Signal Systems*, vol. 2, pp. 171–185.
17. Stein, E. 1970. “Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions”, *Princeton University Press*.
18. Sasvári, Z. 1994. “Positive Definite and Definitizable Functions”, *Akad. Verl.*, Berlin.
19. Trigub, R. M. & Belinsky, E. S. 2004. “Fourier Analysis and Approximation of Functions”, *Kluwer-Springer*, Boston–Dordrecht–London.

Получено: 19.11.2024

Принято в печать: 10.03.2025

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 26. Выпуск 1.

УДК 511

DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-1-62-75

Об асимптотиках представлений пары целых чисел суммой квадратов и линейной формой с конгруэнциальным условием специального вида

У. М. Пачев, А. Х. Кодзоков, М. М. Исакова, М. С. Нирова

Пачев Урусби Мухамедович — доктор физико-математических наук, профессор, Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова (г. Нальчик).

e-mail: urusbi@rambler.ru

Кодзоков Азамат Хасанович — Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова (г. Нальчик).

e-mail: Kodzoko@mail.ru

Исакова Мариана Малиловна — кандидат физико-математических наук, доцент, Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова (г. Нальчик).

e-mail: isakova2206@mail.ru

Нирова Марина Сефовна — кандидат физико-математических наук, доцент, Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова (г. Нальчик).

e-mail: nirova_m@mail.ru

Аннотация

В работе получены асимптотические формулы с остаточным членом для числа представлений пары целых чисел m и n соответственно суммой квадратов и линейной формой от $s \geq 5$ переменных, причём каждое решение такой диофантовой системы удовлетворяет конгруэнциальному условию специального вида, связанному определенным образом с линейной формой. Асимптотика с остаточным членом для числа решений такой диофантовой системы выводится при $N \rightarrow \infty$, где $N = \Delta m - n^2$, при этом Δ равняется сумме квадратов коэффициентов линейной формы.

Кроме того, получены двусторонние оценки снизу и сверху для особого ряда исследуемой диофантовой системы, опираясь при верхней оценке на формулы для числа решений сравнения второй степени $x_1^2 + \dots + x_s^2 \equiv a \pmod{p^k}$, где p — простое число, a — целое число, k — натуральное число.

Настоящая работа является продолжением ранее проведенного исследования, относящегося к случаю чётного числа переменных.

Ключевые слова: сумма квадратов, линейная форма, диофантова система, конгруэнциальное условие, число решений квадратного сравнения, асимптотическая формула, особый ряд диофантовой системы.

Библиография: 23 названия.

Для цитирования:

Пачев, У. М., Кодзоков, А. Х., Исакова, М. М., Нирова, М. С. Об асимптотиках представлений пары целых чисел суммой квадратов и линейной формой с конгруэнтным условием специального вида // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 1, с. 62–75.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 26. No. 1.

UDC 511

DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-1-62-75

On the asymptotics of representations by a sum of a pair of integers by a sum and a linear form with a congruential condition of a special form

U. M. Pachev, A. Kh. Kodzokov, M. M. Isakova, M. S. Nirova

Pachev Urusbi Mukhamedovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Berbekov Kabardino-Balkarian State University (Nalchik).

e-mail: urusbi@rambler.ru

Azamat Khasanovich Kodzokov — Berbekov Kabardino-Balkarian State University (Nalchik).

e-mail: Kodzoko@mail.ru

Mariana Malilovna Isakova — candidate of physical and mathematical sciences, assistant professor, Berbekov Kabardino-Balkarian State University (Nalchik). *e-mail: isakova2206@mail.ru*

Marina Sefovna Nirova — candidate of physical and mathematical sciences, assistant professor, Berbekov Kabardino-Balkarian State University (Nalchik).

e-mail: nirova_m@mail.ru

Abstract

In the work, asymptotic formulas with a remainder term are obtained for the number of representations of a pair of integers m and n , respectively, as a sum of $s \geq 5$ variables, and each solution of such a Diophantine system satisfies the congruential condition of a special type, associated in a certain way with a linear form.

Asymptotic formulas with a remainder term for the number of solutions of such a Diophantine system are derived for $N \rightarrow \infty$, where $N = \Delta m - n^2$ and Δ equals the sum of the squares on the coefficients on the linear form.

In addition, two-sided lower and upper bounds are obtained for a special series of Diophantine system under study based on the upper bound based on formulas for the number of solutions of a congruence of the second degree modulo the power $x_1^2 + \dots + x_s^2 \equiv a \pmod{p^k}$ of the prime number, where a is natural number.

This work is a continuation of a previous study, relating to the case of an even number of variables.

Keywords: sum of squares, linear form, Diophantine system, congruential condition, number of solutions to quadratic congruence, estimates of a special series.

Bibliography: 23 titles.

For citation:

Pachev, U. M., Kodzokov, A. Kh., Isakova, M. M., Nirova, M. S. 2025, "On the asymptotics of representations by a sum of a pair of integers by a sum and a linear form with a congruential condition of a special form", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 1, pp. 62–75.

1. Введение

Мы рассматриваем вопрос об асимптотике числа решений $r_{g;l_1,\dots,l_s}(m,n)$ диофантовой системы

$$\begin{cases} x_1^2 + \dots + x_s^2 = m, \\ l_1 x_1 + \dots + l_s x_s = n, \\ (x_1, \dots, x_s) \equiv (l_1, \dots, l_s) \pmod{g}, \end{cases} \quad (1)$$

где $s \geq 5$; $m > 0$, n — целые числа; $l_1x_1 + \dots + l_sx_s$ — целочисленная линейная форма; g — натуральное число.

Особенностью системы (1) является то, что значения неизвестных сравнимы по данному модулю g с коэффициентами линейной формы. Выбор такой диофантовой системы представляет интерес тем, что для неё удаётся более точно исследовать её особый ряд.

Говоря об истоках направления, связанного с вопросом о числе решений систем диофантовых уравнений, следует отметить, что первое исследование по асимптотическому подсчёту числа решений систем из двух диофантовых уравнений “варингтовского типа” (по имени английского математика 18^{го} века Варинга) было проведено в 1929 г. И. М. Виноградовым (см. [1, 2]) для системы вида

$$\begin{aligned}x_1^m + \dots + x_r^m &= M, \\x_1^n + \dots + x_r^n &= N\end{aligned}$$

в целых положительных числах $x_1, \dots, x_r$. Пользуясь методом И. М. Виноградова исследование было продолжено его учеником К. К. Марджанишвили [3] в случае систем с несколькими уравнениями варингтовского типа, при этом в неё уже входило также одно линейное уравнение.

В дальнейшем проводились также исследования по точным (не асимптотическим) формулам для числа решений $r_s(m, n)$ диофантовой системы

$$\begin{cases}x_1^2 + \dots + x_s^2 = m, \\x_1 + \dots + x_s = n\end{cases} \quad (2)$$

в случаях $3 \leq s \leq 8$ такими авторами как Г. Полл [4, 5], Н. Клоостерман [6], Н. де-Брейн [7], Р. Bronkhorst [8], ван-дер Блей [9], Г. А. Ломадзе [10].

Но как оказалось (см. Воронецкий А. Б. и Малышев А. В. [11]) при $s \geq 9$ невозможно получить точные формулы для числа решений $r_s(m, n)$ в том смысле, что величина $r_s(m, n)$ может отличной от особого ряда для указанной диофантовой системы (2) (относительно особого ряда, входящего в формулу для числа решений диофантовых уравнений см. напр. [12, 13]).

Ввиду этого представляет дальнейший интерес вопрос о получении асимптотических формул для числа решений $r_s(m, n)$ при $s \geq 9$ для диофантовых систем (1) и (2).

Асимптотическая формула для $r_s(m, n)$ при $sn - m^2 \rightarrow \infty$ была получена А. З. Вальфиш [14].

В дальнейшем эти исследования были продолжены А. А. Вальфиш [15] для диофантовых систем более общего вида, в которых сумма квадратов из [14] была заменена произвольной целочисленной положительной квадратичной формой.

В последнее время У. М. Пачевым и Л. А. Халиловой [16] получено обобщение результатов статьи [15], рассмотрев диофантову систему

$$\begin{cases}f(x_1, \dots, x_s) = m, \\l(x_1, \dots, x_s) = n, \\(x_1, \dots, x_s) \equiv (l_1, \dots, l_s) \pmod{g}\end{cases}$$

с конгруэнциальным условием, где f — целочисленная положительная квадратичная форма, $l(x_1, \dots, x_s)$ — целочисленная линейная форма (при $g = 1$ как частный случай получаются основные результаты [15]). В следующей работе [17] проводилось исследование числа решений системы (1), связанное с верхней оценкой её особого ряда в случае чётного числа неизвестных.

Опираясь на теорему 2 работы [16] и на соответствующие вспомогательные результаты для числа решений квадратных сравнений по модулю степени простого числа из [17, 18] (леммы 1–5), получаем асимптотику числа решений системы (1) вместе с оценками её особого ряда.

2. Сведение исходной системы к системе без конгруэнтного условия

Исходная диофантова система (1) может быть сведена к тому её частному случаю, когда нет конгруэнтного условия

$$(x_1, \dots, x_s) \equiv (l_1, \dots, l_s) \pmod{g}.$$

Лемма 1. *Если*

$$m - 2n + \sum_{i=1}^s l_i^2 \equiv 0 \pmod{g^2} \quad \text{и} \quad n - \sum_{i=1}^s l_i^2 \equiv 0 \pmod{g},$$

то система (1) сводится к системе

$$\begin{cases} y_1^2 + \dots + y_s^2 = a, \\ l_1 y_1 + \dots + l_s y_s = b, \end{cases}$$

где

$$a = \frac{m - 2n + \sum_{i=1}^s l_i^2}{g^2}, \quad b = \frac{n - \sum_{i=1}^s l_i^2}{g}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из сравнения $(x_1, \dots, x_s) \equiv (l_1, \dots, l_s) \pmod{g}$ имеем $x_i \equiv l_i \pmod{g}$, $i = 1, \dots, s$, откуда $x_i = l_i + g y_i$ ($i = 1, \dots, s$), где $y_1, \dots, y_s$ принимают целые значения. Подставляя выражения для x_i в оба уравнения системы (1), будем иметь систему

$$\begin{cases} g^2 \sum_{i=1}^s y_i^2 + 2g \sum_{i=1}^s l_i y_i + \sum_{i=1}^s l_i^2 = m, \\ g \sum_{i=1}^s l_i y_i + \sum_{i=1}^s l_i^2 = n. \end{cases}$$

Преобразуя теперь первое уравнение этой системы с помощью второго уравнения получаем диофантову систему

$$\begin{cases} y_1^2 + \dots + y_s^2 = a, \\ l_1 y_1 + \dots + l_s y_s = b, \end{cases} \quad (3)$$

где

$$a = \frac{m - 2n + \sum_{i=1}^s l_i^2}{g^2}, \quad b = \frac{n - \sum_{i=1}^s l_i^2}{g},$$

ч. т. д. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ. Ясно, что системы (1) и (3) равносильны в том смысле, что между их решениями существует взаимно однозначное соответствие. При этом a и b должны быть целыми числами. Если же хотя бы одно из чисел a и b не является целым, система (1) не имеет решений в целых числах. Согласно [14, 15], асимптотику числа решений полученной системы (3) мы будем рассматривать при $N = \Delta a - b^2 \rightarrow \infty$, где $\Delta = l_1^2 + \dots + l_s^2$.

3. Леммы о числе решений сравнений для суммы квадратов

Для формулировок дальнейших используемых вспомогательных утверждений нужны следующие понятия (см. [18]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть F_q — произвольное конечное поле. Определим целочисленную функцию $v(x)$ на поле F_q с условием

$$v(c) = \begin{cases} -1, & \text{если } c \in F_q^*, \\ q-1, & \text{если } c = 0, \end{cases}$$

где F_q^* — мультипликативная группа поля F_q .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть F_q — конечное поле нечётной характеристики и пусть на его мультипликативной группе F_q^* задана вещественнозначная функция η такая, что $\eta(c) = 1$ для элементов c , таких что являющихся квадратами некоторых элементов группы F_q^* и $\eta(c) = -1$ для всех остальных элементов $c \in F_q^*$. Такая функция $\eta(c)$ называется квадратичным характером поля F_q .

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае $q = p$, где p — простое число, квадратичный характер поля F_q есть символ Лежандра, т. е.

$$\left(\frac{c}{p}\right) = \begin{cases} 1, & \text{если } c \text{ — квадратичный вычет mod } p, \\ -1, & \text{если } c \text{ — квадратичный не вычет mod } p. \end{cases}$$

Ввиду мультипликативности квадратичного характера $\eta(c)$ поля F_q полезно доопределить его на всём поле, полагая $\eta(0) = 0$.

ЛЕММА 2. Пусть f — невырожденная квадратичная форма от чётного числа s переменных над полем F_q , где q — нечётно. Тогда для любого $b \in F_q$ число решений уравнения $f(x_1, \dots, x_s) = b$ в F_q равно

$$q^{s-1} + v(b)q^{\frac{s-2}{2}}\eta((-1)^{\frac{s}{2}}\det f),$$

где η — квадратичный характер поля F_q .

Доказательство даётс в [18].

Переходим теперь к рассмотрению вспомогательных результатов о числе решений сравнений для суммы квадратов от s неизвестных по модулю p^k , где p — простое число, используемых при верхней оценке особых рядов диофантовой системы из леммы 1.

ЛЕММА 3. Пусть $N_s(a \bmod p)$ — число решений сравнения $x_1^2 + \dots + x_s^2 \equiv a \pmod{p}$ от чётного числа s неизвестных, где p — простое число; a — целое число. Тогда

$$1. N_s(u \bmod p) = p^{s-1} \left(1 - h^{\frac{s}{2}}\right), \text{ где } p \nmid u;$$

$$2. N_s(0) = N_s(u) + p^s h^{\frac{s}{2}},$$

$$\text{где } h = \left(\frac{-1}{p}\right) \cdot p^{-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся леммой 2, положив в ней $f = x_1^2 + \dots + x_s^2$; $q = p$ и $b = u$, где $p \nmid u$. Тогда по лемме 2 имеем

$$N_s(u \bmod p) = p^{s-1} + v(u)p^{\frac{s-2}{2}}\eta((-1)^{\frac{s}{2}}\det f).$$

Так как $v(u) = -1$ и $\det f = 1$ и η — символ Лежандра, то

$$\begin{aligned} N_s(u \bmod p) &= p^{s-1} - p^{\frac{s}{2}-1}\eta((-1)^{\frac{s}{2}}) = \\ &= p^{s-1} - p^{\frac{s}{2}-1} \left(\frac{(-1)^{\frac{s}{2}}}{p}\right) = p^{s-1} - p^{\frac{s}{2}-1}h^{\frac{s}{2}} = \\ &= p^{s-1} \left(1 - h^{\frac{s}{2}}\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_s(0 \bmod p) &= p^{s-1} + v(0)p^{\frac{s}{2}-1}\eta((-1)^{\frac{s}{2}}) = \\ &= p^{s-1} + (p-1)p^{\frac{s}{2}-1}\left(\frac{-1}{p}\right)^{\frac{s}{2}} = \\ &= p^{s-1} + (p-1)p^{\frac{s}{2}-1}p^{\frac{s}{2}}\left(\frac{-1}{p}\right)^{\frac{s}{2}}\frac{1}{p^{\frac{s}{2}}} = \\ &= p^{s-1} + (p-1)p^{s-1}h^{\frac{s}{2}} = \\ &= p^{s-1}\left(1 - h^{\frac{s}{2}}\right) + p^s h^{\frac{s}{2}} = \\ &= N_s(u \bmod p) + p^s h^{\frac{s}{2}} \end{aligned}$$

ЛЕММА 4. Если $0 \leq v < k$, то число $N_s(p^v \bmod p^k)$ решений сравнения

$$x_1^2 + \dots + x_s^2 \equiv p^v u \pmod{p^k} \quad (*)$$

$$p^{(s-1)k} \left(1 - h^{\frac{s}{2}}\right) \left(1 + ph^{\frac{s}{2}} + p^2 h^{2\frac{s}{2}} + \dots + p^v h^{v\frac{s}{2}}\right),$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Случай 1. Если $v = 0$, то число решений $N_s(u \bmod p^k)$ сравнения (*) равно

$$p^{(s-1)(k-1)} N_s(u),$$

Действительно, пусть $(\xi_1, \dots, \xi_s) \pmod{p}$ есть любое решение сравнения $\xi_1^2 + \dots + \xi_s^2 \equiv u \pmod{p}$, где $p \nmid u$. Такое решение поднимается в точности до $p^{(s-1)(k-1)}$ решений по модулю p^k . Имеем следующее представление решений сравнения (*):

$$\begin{aligned}\xi_1 &= h_0^{(1)} + h_1^{(1)} p + h_2^{(1)} p^2 + \dots + h_{k-1}^{(1)} p^{k-1}, \\ \xi_2 &= h_0^{(2)} + h_1^{(2)} p + h_2^{(2)} p^2 + \dots + h_{k-1}^{(2)} p^{k-1}, \\ &\vdots \\ \xi_s &= h_0^{(s)} + h_1^{(s)} p + h_2^{(s)} p^2 + \dots + h_{k-1}^{(s)} p^{k-1},\end{aligned}$$

Случай 2. Пусть теперь $v > 1$. Тогда сравнение $\xi_1^2 + \dots + \xi_s^2 \equiv p^v u \equiv 0 \pmod{p}$ как и в случае 1 может иметь решения, для которых не все ξ_i делятся на p . Общее число таких решений равно $N_s(0) - 1$, при этом нулевое решение рассматриваемого сравнения не засчитывается поскольку

все значения неизвестных нулевого решения делятся на p , чем и обусловлено вычитание из $N_s(0)$ числа 1. Тогда согласно рассуждениям случая 1 число решений сравнения $(*)$, в которых не все неизвестные x_i делятся на p , по комбинаторному правилу произведения будет равно

$$p^{(s-1)(k-1)}(N_s(0) - 1).$$

Случай 3. Если $v \geq 2$, то сравнение $(*)$ может иметь решения, для которых все x_i делятся на p , т. е. $x_i = py_i$, и значит, сравнение $(*)$ принимает вид

$$p^2 (y_1^2 + \dots + y_s^2) \equiv p^v u \pmod{p^k},$$

откуда

$$y_1^2 + \dots + y_s^2 \equiv p^{v-2} u \pmod{p^{k-2}}.$$

Учитывая теперь, что лемма 3 даёт базу индукции при $v = 0$, а рассмотренные выше случаи позволяют осуществить шаг индукции, то индукцией по v получаем сформулированный результат, ч. т. д. $\square$

В последнее время было продолжено исследование по асимптотике числа решений диофантовой системы (1) в оставшемся случае нечётного числа неизвестных. С этой целью получен следующий вспомогательный результат о числе решений квадратного сравнения

$$x_1^2 + \dots + x_s^2 \equiv p^v u \pmod{p^k},$$

где s — нечётное число; p — простое число; $p \nmid u$.

ЛЕММА 5. Если $0 \leq v < k$, то для числа решений $N_s(p^v u \pmod{p^k})$ решений сравнения $x_1^2 + \dots + x_s^2 \equiv p^v u \pmod{p^k}$ при нечётном s и $p \nmid u$ справедлива оценка сверху

$$\begin{aligned} N_s(p^v u \pmod{p^k}) &\leq \\ &\leq p^{(s-1)k} \left(1 - h^{\frac{s-1}{2}}\right) \left(1 + ph^{\frac{s-1}{2}} + p^2 h^{2\frac{s-1}{2}} + \dots + p^{v'} h^{v'\frac{s-1}{2}}\right), \end{aligned}$$

где $0 \leq v' < k$, $p \nmid u$; $p^v u - x_s^2 = p^{v'} u'$; $v' = \max_{0 \leq x_s < p^k} \text{ord}_p(p^v u - x_s^2)$; ord_p — порядок целого числа относительно простого числа p , $h = (-1)^{\frac{p-1}{2}} p^{-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим рассматриваемое сравнение в следующем виде

$$x_1^2 + \dots + x_{s-1}^2 \equiv p^v u - x_s^2 \pmod{p^k}.$$

Обозначим $p^v u - x_s^2 = p^{v'} u'$, где $0 \leq v' < k$ и $p \nmid u'$,

$$v' = \max_{0 \leq x_s < p^k} \text{ord}_p(p^v u - x_s^2),$$

где $\text{ord}_p \alpha$ — порядок целого числа α относительно простого числа p . Тогда имеем

$$\begin{aligned} N_s(p^v u \pmod{p^k}) &\leq \sum_{0 \leq x_s < p^k} N_{s-1}((p^v u - x_s^2) \pmod{p^k}) \leq \\ &\leq \sum_{0 \leq x_s < p^k} N_{s-1}(p^{v'} u' \pmod{p^k}) \leq \sum_{0 \leq x_s < p^{k-1}} N_{s-1}(p^{v'} u' \pmod{p^k}) = \\ &= p^k N_{s-1}(p^{v'} u' \pmod{p^k}). \end{aligned}$$

Применяя теперь ввиду чётности числа $s - 1$ лемму 4, получим

$$\begin{aligned} N_s(p^{v'} u' \pmod{p^k}) &\leq \\ &\leq p^k \cdot p^{(s-2)k} \left(1 - h^{\frac{s-1}{2}}\right) \left(1 + ph^{\frac{s-1}{2}} + p^2 h^{2\frac{s-1}{2}} + \dots + p^{v'} h^{v' \frac{s-1}{2}}\right) = \\ &= p^{(s-1)k} \left(1 - h^{\frac{s-1}{2}}\right) \left(1 + ph^{\frac{s-1}{2}} + p^2 h^{2\frac{s-1}{2}} + \dots + p^{v'} h^{v' \frac{s-1}{2}}\right), \end{aligned}$$

ч. т. д. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ. Как отмечается в [19] в случае сравнения $x_1^2 + \dots + x_n^2 \equiv a \pmod{p}$ по нечётному простому модулю p число его решений вычислялось в работе Зигеля [20, с. 344] с помощью остроумного соображения о гауссовых суммах.

4. Результаты об асимптотике числа решений диофантовой системы специального вида

В асимптотических формулах в главном члене для числа решений диофантовых систем уравнений второй степени с несколькими неизвестными при применении кругового метода появляется важная арифметическая функция, называемая особым рядом.

Для диофантовой системы (1) обозначим такой ряд через

$$H_{g;l_1,\dots,l_s}(f, m; l, n),$$

где f — квадратичная форма, l — линейная форма. В силу леммы 1 такой ряд может быть записан ещё в следующем виде $H_{g;l_1,\dots,l_s}(a, b)$, где a и b зависят от m и n , при этом $f = x_1^2 + \dots + x_s^2$. Нужный нам особый ряд определяется равенством

$$H_{g;l_1,\dots,l_s}(a, b) = \prod_p \chi_p(a, b),$$

где

$$a = \frac{m - 2n + \sum_{i=1}^s l_i}{g^2}, \quad b = \frac{n - \sum_{i=1}^s l_i^2}{g}; \quad \chi_p(a, b) = \lim_{t \rightarrow \infty} p^{-(s-2)t} \rho(p^t; a, b);$$

$\rho(p^t; a, b)$ — число решений системы сравнений

$$\begin{cases} x_1^2 + \dots + x_s^2 \equiv a \pmod{p^t}, \\ l_1 x_1 + \dots + l_s x_s \equiv b \pmod{p^t}, \end{cases} \quad (4)$$

произведение берётся по всем простым числам p .

ЛЕММА 6. Пусть $r_{g;l_1,\dots,l_s}(f, m; l, n)$ — число целочисленных решений диофантовой системы

$$\begin{cases} f(x_1, \dots, x_s) = m, \\ l(x_1, \dots, x_s) = n, \\ (x_1, \dots, x_s) \equiv (l_1, \dots, l_s) \pmod{g}, \end{cases}$$

где f — положительная целочисленная квадратичная форма.

Тогда при $N \rightarrow \infty$

$$r_{g;l_1,\dots,l_s}(f, m; l, n) = \frac{\pi^{\frac{s-1}{2}} N^{s-3}}{(g^{s-1} \Delta)^{\frac{s-1}{2}} \Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right)} \cdot H_{g;l_1,\dots,l_s}(F, m_1; l, n_1) + O\left(\Delta^{2s-\frac{5}{4}+\frac{\varepsilon}{2}} N^{\frac{s-2}{4}+\varepsilon}\right),$$

где $N = \frac{m_1 \Delta - g n_1^2 D}{g}$; $F = g f(x_1, \dots, x_s) + l(x_1, \dots, x_s)$; $m_1 = \frac{m - f(b_1, \dots, b_s)}{g^2}$; $n_1 = \frac{n - l(b_1, \dots, b_s)}{g}$; $\Delta = \bar{f}(l_1, \dots, l_s)$, $\bar{f}$ — алгебраически взаимная форме f ; Γ — гамма-функция; $\varepsilon > 0$ — сколь

угодно малое число;

$H_{g;l_1,\dots,l_s}(F, m_1; l, n_1)$ — особый ряд заданной диофантовой системы.

Доказательство этого результата см. в [16].

Опираясь на вышеизложенные вспомогательные факты получаем следующие результаты о числе решений диофантовой системы (1).

ТЕОРЕМА 1. Для числа решений $r_{g;l_1,\dots,l_s}(m, n)$ диофантовой системы

$$\begin{cases} x_1^2 + \dots + x_s^2 = m, \\ l_1 x_1 + \dots + l_s x_s = n, \\ (x_1, \dots, x_s) \equiv (l_1, \dots, l_s) \pmod{g}, \end{cases}$$

при $N \rightarrow \infty$ справедлива формула

$$r_{g;l_1,\dots,l_s}(m, n) = \frac{\pi^{\frac{s-1}{2}} N^{\frac{s-3}{2}}}{(g^{s-1} \Delta)^{\frac{s-1}{2}} \Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right)} \cdot H_{g;l_1,\dots,l_s}(a, b) + O\left(g^{s-1} N^{\frac{s-2}{4} + \varepsilon}\right),$$

где $N = \Delta a - b^2 \rightarrow \infty$; $\Delta = l_1^2 + \dots + l_s^2$.

$$H_{g;l_1,\dots,l_s}(a, b) = \prod_p \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\rho(p^t; a, b)}{p^{(s-2)t}},$$

где $\rho(p^t; a, b)$ — число решений системы сравнений

$$\begin{cases} x_1^2 + \dots + x_s^2 \equiv a \pmod{p^t}, \\ l_1 x_1 + \dots + l_s x_s \equiv b \pmod{p^t}, \end{cases}$$

произведение берётся по всем простым числам p ; $a = \frac{m-2n+\sum_{i=1}^s l_i^2}{g^2}$; $b = \frac{n-\sum_{i=1}^s l_i^2}{g}$.

Доказательство основано на леммах 1 и 6.

Отметим, что этот результат содержится в [17], но здесь он представлен в улучшенной формулировке.

С целью получения более точной информации о числе решений диофантовой системы (1) будем рассматривать двусторонние оценки снизу и сверху особого ряда, входящего в главный член асимптотической формулы для этой системы.

Сначала рассмотрим оценку снизу для особого ряда. Для этого воспользуемся теоремой Е. В. Подсыпанина [21] о сингулярном (особом) ряде в задаче представления системы целых чисел суммой форм одной и той же степени $d \geq 1$ от s переменных.

Поскольку результат работы [21] об особом ряде относится только к однородным уравнениям с одной и той же степенью d , то он не может быть непосредственно применён к нашему случаю диофантовой системы, состоящей из двух уравнений второй и первой степени.

В связи с этим наряду с системой сравнений (4) рассмотрим также систему сравнений вида

$$\begin{cases} y_1^2 + \dots + y_s^2 \equiv a \pmod{p^t}, \\ (l_1 y_1 + \dots + l_s y_s)^2 \equiv b^2 \pmod{p^t}. \end{cases} \quad (5)$$

При этом заметим, что число решений $\rho(p^t; a, b^2)$ системы (5) в 2 раза больше числа решений системы сравнений (4), т. е.

$$\rho(p^t; a, b^2) = 2\rho(p^t; a, b),$$

откуда

$$\rho(p^t; a, b) = \frac{1}{2} \rho(p^t; a, b^2). \quad (6)$$

В нашем случае в обозначениях работы [21] имеем

$$\tau = 2; \quad k = 1; 2.$$

$$\begin{cases} \phi^{(1)}(x_1, \dots, x_s) = x_1^2 + \dots + x_s^2 = n_1 = a, \\ \phi^{(2)}(x_1, \dots, x_s) = (l_1 x_1 + \dots + l_s x_s)^2 = n_2 = b^2. \end{cases} \quad (7)$$

Сформулируем результат работы [21].

ТЕОРЕМА (ПОДСЫПАНИН). Пусть существует целое число $\delta \geq 0$ и индексы $j_1, \dots, j_r$, для которых разрешима система сравнений

$$\Phi^{(k)}(x_1, \dots, x_s) \equiv n_k \pmod{p^{2\tau+2\delta+1}} \quad (k = 1, \dots, r)$$

при условии

$$p^\delta \parallel \Delta_{j_1, \dots, j_r}(x_1, \dots, x_s).$$

Тогда

$$H_p(n_1, \dots, n_r) \geq p^{-(2\tau+2\delta+1)(s-r)}.$$

В этой теореме используются следующие обозначения:

$$\Phi_j^{(k)}(\bar{x}) = \sum_{j_2, \dots, j_d=1}^s \varphi_{j, j_2, \dots, j_d}^{(k)} x_{j_2} \cdot \dots \cdot x_{j_d} \quad (j = 1, \dots, s),$$

$$\Delta_{j_1, \dots, j_r}(\bar{x}) = \det \left(\Phi_{j_g}^{(k)}(\bar{x}) \right)_{g, k=1}^r,$$

$p^\tau \parallel d$ — наивысшая степень простого числа p , делящая число d .

Как обычно, особый ряд $H(n_1, \dots, n_r)$ диофантовой системы представляется в виде бесконечного произведения по всем простым числам, т. е.

$$H(n_1, \dots, n_r) = \prod_p H_p(n_1, \dots, n_r).$$

Тогда в силу теоремы Подсыпанина имеем неравенство

$$H_p(n_1, \dots, n_r) \geq p^{-(2\tau+2\delta+1)(s-r)}.$$

В нашем случае двух уравнений имеем

$$H_p(a, b^2) \geq p^{-(2\tau+2\delta+1)(s-2)}.$$

Но учитывая конгруэнтное условие решений системы, следуя А. В. Малышеву [12], используем также и другое обозначение особого ряда через $H_{g; l_1, \dots, l_s}(a, b)$ в случае нашей диофантовой задачи. Следуя опять работам [12, 21] в силу (6) и (7) получаем

$$H_{g; l_1, \dots, l_s}(a, b) \geq \frac{1}{2} H_{g; l_1, \dots, l_s}(a, b^2) \geq \frac{1}{2} \prod_p H_p(a, b^2) \geq \frac{1}{2} \prod_p p^{-(2\tau+2\delta+1)(s-2)} \gg 1.$$

При этом ещё учитывается одно замечание в [21], относящееся к работе Берча [22], о том, что существует p_0 , для которого

$$\prod_{p \geq p_0} H_p(n_1, \dots, n_r) \gg 1.$$

Таким образом, имеет место следующий вспомогательный результат, относящийся к нижней оценке особого ряда диофантовой системы (1).

ЛЕММА 7. Для особого ряда $H_{g;l_1,\dots,l_s}(m,n)$ диофантовой системы (1) имеет место оценка снизу $H_{g;l_1,\dots,l_s}(m,n) \gg 1$, т. е. $H_{g;l_1,\dots,l_s}(m,n) > 0$.

Более точную информацию о числе решений диофантовой системы (1) в случае чётного числа s переменных даёт следующая

ТЕОРЕМА 2. Для числа решений диофантовой системы (1) при чётном s и $N \rightarrow \infty$ имеет место формула

$$r_{g;l_1,\dots,l_s}(m,n) = \frac{\pi^{\frac{s-1}{2}} N^{\frac{s-3}{2}}}{(g^{s-1} \Delta)^{\frac{s}{2}-1} \Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right)} \cdot H_{g;l_1,\dots,l_s}(a,b) + O\left(g^{s-1} N^{\frac{s}{4}-\frac{1}{2}+\varepsilon}\right),$$

где

$$1 \leq H_{g;l_1,\dots,l_s}(a,b) < \prod_p \left(1 - h^{\frac{s}{2}}\right) \left(1 + ph^{\frac{s}{2}} + p^2 h^s + \dots + p^v h^{v\frac{s}{2}}\right),$$

где $a = p^v$, $p \nmid u$; $h = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \cdot \frac{1}{p}$; $a = \frac{m-2n+\sum_{i=1}^s l_i^2}{g^2}$; $b = \frac{n-\sum_{i=1}^s l_i^2}{g}$.

Доказательство основано на результатах лемм 1, 4, 6 и теоремы 1.

Аналогичный результат о числе решений диофантовой системы (1) в случае нечётного числа s переменных даёт следующая

ТЕОРЕМА 3. Для числа решений диофантовой системы (1) при нечётном s и $N \rightarrow \infty$ имеет место формула

$$r_{g;l_1,\dots,l_s}(m,n) = \frac{\pi^{\frac{s-1}{2}} N^{\frac{s-3}{2}}}{(g^{s-1} \Delta)^{\frac{s}{2}-1} \Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right)} \cdot H_{g;l_1,\dots,l_s}(a,b) + O\left(g^{s-1} N^{\frac{s}{4}-\frac{1}{2}+\varepsilon}\right),$$

$$1 \ll H_{g;l_1,\dots,l_s}(a,b) < \left(1 - h^{\frac{s-1}{2}}\right) \left(1 + ph^{\frac{s-1}{2}} + p^2 h^{2\frac{s-1}{2}} + \dots + p^{v'} h^{v'\frac{s-1}{2}}\right),$$

где $0 \leq v' < k$, $p \nmid u$, $p^v u - x_s^2 = p^{v'} u'$; $v' = \max_{0 \leq x_s < p^k} \text{ord}_p(p^v - x_s^2)$; ord_p — порядок целого числа относительно простого числа p ; $h = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \cdot \frac{1}{p}$.

Доказательство опирается на результаты лемм 1, 5, 6 и теоремы 1.

5. Заключение

Полученные результаты можно обобщить на диофантовы системы, содержащие более одного линейного уравнения. Представляет также интерес перенесение проведенного исследования на случай суммы квадратов с линейной частью (при этом предполагается возможность использования результатов работ [15, 16, 23]). Интересно также исследовать особые ряды для диофантовых систем с диагональной квадратичной формой и линейной формой, удовлетворяющих конгруэнциальному условию.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Виноградов И. М. Об одном классе совокупных диофантовых уравнений // Изв. АН СССР, 1929. С. 355-376.
2. Виноградов И. М. Избранные труды. Изд-во АН СССР. — М., 1952. С. 151-168.
3. Марджанишвили К. К. Об одновременном представлении n чисел суммами полных первых, вторых, ..., n -х степеней // Изв. АН СССР, сер. матем. 1 (1937), С. 609-631.
4. Pall G. Simultaneous quadratic and linear representations. Quart. J. Math. 2 (1931). P. 136-143.

5. Pall G. Simultaneous representations in a quadratic and linear form // Duke Math. J. S. (1941). P. 173-180.
6. Kloosterman H. Simultane Darstellung zweier ganzen Zahlen als Summe von ganzen Zahlen und deren Quadrat-Summe. Math. Ann. 118 (1942). S. 319-364.
7. de Bruijn N. G. Over het aantal oplossingen van het stelsel $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = n$, $x_1 + x_2 + x_3 = m$, Nieuw. Arch. Wisk (2)22 (1943), S. 53-56.
8. Bronkhorst P. Over het aantal oplossingen van het stelsel Diophantische Vergelijkingen $x_1^2 + \dots + x_s^2 = n$, $x_1 + \dots + x_s = m$ voor $s = 6$ en $s = 8$. Diss. Groningen, 1943.
9. Van der Blij. On the theory of simultaneous linear and quadratic representation I-II, Proc. Kon. Acad. V. Wet. 50 (1947), 31-48.
10. Ломадзе Г. А. Об одновременном представлении двух целых чисел суммами целых чисел и их квадратов // Труды Тбилисского матем. ин-та. 18 (1950). С. 153-181,
11. Воронецкий А. Б., Малышев А. В. Об одновременном представлении пары чисел суммами целых чисел и их квадратов // Тр. МИАН СССР, 142 (1976). С. 122-134,
12. Малышев А. В. О представлении целых чисел положительными квадратичными формами // Труды МИАН СССР, Т. 65 (1962), С. 3-212.
13. Малышев А. В. О формулах для количества представлений чисел положительными квадратичными формами // Актуальные проблемы аналитической теории чисел. Минск : Наука и техника, 1974.
14. Вальфиш А. З. О представлении чисел суммами квадратов. Асимптотические Формулы // Успехи матем. наук. 7 (1952), № 6, С. 97-178,
15. Walfisz A. A. Über die simultane Darstellung zweier ganzen Zahlen durch quadratische und lineare Formen // Acta Arithmetica XXXV (1979). S. 289-301.
16. Пачев У. М., Халилова Л. А. Об асимптотике числа представлений пары целых чисел квадратичной и линейной формами с конгруэнциальным условием // Матем. заметки. Т. 111, вып. 5 (2022). С. 726-737.
17. Urusbi Pachev, Rezuan Dokhov, Asamat Kodzokov. On Diophantine Systems with Sum of Squares and Linear Forms Satisfying a Congruential Condition of a Special Form // Current Problems of Applied Mathematics and Computer Systems, 2024, pp. 3-10.
18. Лидл Р., Нидеррайтер Г. Конечные поля. Т. 1. — М. : "Мир". (1988).
19. Милнор Дж., Хьюзмоллер Д. Симметрические билинейные формы. — М. : "Наука". (1986).
20. Siegel C. L. Gesammelte Abhandlungen, I. — Berlin; Heidelberg; Springer-Verlag, 1966, S. 326-405.
21. Подсыпанин Е. В. О сингулярном ряде в задаче представления системы чисел системой форм // Зап. научн. сем. ЛОМИ Т. 50 (1975), С. 130-136.
22. Birch B. J. Forms in many variables. Proc. Roy. Soc., 1962, A. 265, pp. 245-263,
23. Watson G. L. Quadratische Diophantine equations. Phil. Trans. Roy. Soc London A 253, pp. 227-254.

REFERENCES

1. Vinogradov, I. M. 1929. "On one class of aggregate Diophantine equations", *Izv. Academy of Sciences of the USSR*, pp. 355–376.
2. Vinogradov, I. M. 1952, "Selected works", *Publishing house of the USSR Academy of Sciences*, pp. 151–168.
3. Marjanishvili, K. K. 1937, "On the simultaneous representation of complete first second, $\dots$, n -th degrees", *Izv. AN SSSR, ser. Mat.*, 4, pp. 609–634.
4. Pall, G. 1931, "Simultaneous quadratic and linear representations", *Quart. J. Math.*, 2, pp. 136–143.
5. Pall, G. 1941, "Simultaneous representations in a quadratic and linear form", *Duke Math. J. S.*, pp. 173–180.
6. Kloosterman, H. 1942, "Simultane Darstellung zweier ganzen Zahlen al seiner Samme von ganzen Zahlen und deren Quadrat-Summe", *Math. Ann.*, 118, pp. 319–364.
7. de Bruijn, N. G. 1943, "Over het a antal oplossingen van het stelsel $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = n$, $x_1 + x_2 + x_3 = m$ ", *Nieuw. Arch. Wisk*, (2)22, pp. 53–56.
8. Bronkhorst, P. 1943 "Over het a antal oplossingen van het stelsel Diophatische Vergelijkinder $x_1^2 + \dots + x_s^2 = n$, $x_1 + \dots + x_s = m$ vor $s = 6$ en $s = 8$ ", *Diss. Groningen*.
9. Van der Blij. 1947, "On the theory of simultaneous linear and quadratic representation I–II", *Proc. Kon. Acad. V. Wet.*, 50, pp. 31–48.
10. Lomadze, G.A, 1950, "On the simultaneous representation of two integers by sums of integers and their squares", *Proceedings of the Tbilisi Mathematical Institute*, 18, pp. 153–181.
11. Voronetsky, A. B., Malyshev A. V. 1976, "On the simultaneous representation of a pair of numbers by sums of integers and their squares", *Proceedings of the Steklov Mathematical Institute of the USSR*, 142, pp. 122–134.
12. Malyshev, A. V. 1962, "On the representation of integers by positive quadratic forms", *Proceedings of the Steklov Mathematical Institute of the USSR*, V. 65, pp. 3–212.
13. Malyshev, A. V. 1974, "On formulas for the number of representations of numbers by positive quadratic forms", *Actual problems of analytical number theory. Minsk. Science and Technology*.
14. Valfish, A. Z. 1952, "On the representation of squares. Asymptotic formulas", *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, 7, № . 6, pp. 97–178.
15. Walfisz, A. A. 1979, "Über die simultane Darstellung zweier ganzen Zahlen durch quadratische und lineare Formen", *Acta Arithmetica XXXV*, pp. 289–301.
16. Pachev, U. M., Khalilova L, A. 2022, "On the asymptotics on the number of representations of a pair of integers by quadratic and linear forms with a congruent condition", *Mathematical notes*, Vol. 111, Iss. 5, pp. 726–737.
17. Urusbi Pachev, Rezuan Dokhov, Asamat Kodzokov. 2024, "On Diophantine Systems with Sum of Squares and Linear Forms Satisfying a Congruential Condition of a Special Form", *Current Problems of Applied Mathematics and Computer Systems*, pp. 3–10.

18. Lidl, R., Niederreiter G. 1988, “Finite fields”, *M.:Mir*, Vol. 1.
19. Mulnor, J., Huesmoller D, 1986, “Symmetric bilinear forms”, *M.:Science*.
20. Siegel, C. L. 1966, “Gesammelte Abhandlungen, I”, *Berlin; Heidelberg; Springer-Verlag*, pp. 326–405.
21. Podsypanin, E. V. 1975, “On the singular series in the problem of representing a system of numbers by a system”, *Notes of scientific seminars LOMI*, V. 50, pp. 130–136.
22. Birch, B. J. 1962, “Forms in many variables”, *Proc. Roy. Soc. A.*, 265, pp. 245–263,
23. Watson, G. L. “Quadratische Diophantine equations”, *Phil. Trans. Roy. Soc. London A.*, 253, pp. 227–254.

Получено: 27.11.2024

Принято в печать: 10.03.2025

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 26. Выпуск 1.

УДК 512.534.3

DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-1-76-87

Классы унаров, близкие к плоским

А. М. Пряничников

Пряничников Алексей Михайлович — ООО «Квантом» (г. Москва).

e-mail: genary@ya.ru

Аннотация

Данная статья посвящена описанию унаров, удовлетворяющих различным условиям, близким к плоскостности. И.А.Сахаровым было показано, что проективные унары совпадают со свободными и являются копроизведением лучей. Автором ранее были полностью описаны плоские унары. Данная статья продолжает это направление исследований и даёт полное описание унаров, близких к плоским, а именно: коуниверсально плоских, уравнительно плоских, слабо плоских, главно слабо плоских унаров, унаров без кручения, унаров, удовлетворяющих условию (E) или (P), точных, строго точных и регулярных унаров. Показано, что коуниверсально плоские унары совпадают с уравнительно плоскими и являются копроизведением прямых и лучей. Унары, удовлетворяющие условию (P), плоские, слабо плоские, главно слабо плоские и унары без кручения совпадают и являются копроизведением прямых, лучей и циклов. Точные, строго точные, регулярные унары и унары, удовлетворяющие условию (E) совпадают и являются в точности унарами, не содержащими цикл.

Ключевые слова: полигон, полугруппа, унар, плоскостность.*Библиография:* 13 названий.

Для цитирования:

Пряничников, А. М. Классы унаров, близкие к плоским // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 1, с. 76–87.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 26. No. 1.

UDC 512.534.3

DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-1-76-87

Classes of unars that are close to flat ones

A. M. Pryanichnikov

Pryanichnikov Alexey Mikhailovich — LLC “Quantom” (Moscow).

e-mail: genary@ya.ru

Abstract

This paper is devoted to the description of unars satisfying various conditions that are close to flatness. I.A.Sakharov showed that projective unars coincide with free ones and are a coproduct of rays. Previously, the author obtained a complete description of flat unars. This paper continues this line of research and provides a complete description of unars that are close to flat ones, namely: pullback flat, equalizer flat, weakly flat, principally weakly flat, torsion free, unars with conditions (P) or (E), faithful, strongly faithful and regular ones. It is proved that pullback flat and equalizer flat unars coincide and are a coproduct of lines and rays. Unars satisfying condition (P), flat, weakly flat, principally weakly flat and torsion free ones coincide and are a coproduct of lines, rays and cycles. Faithful, strongly faithful, regular unars and unars satisfying condition (E) are exactly unars that do not contain a cycle.

Keywords: act, semigroup, unar, flatness.

Bibliography: 13 titles.

For citation:

Pryanichnikov, A. M. 2025, "Classes of unars that are close to flat ones", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 1, pp. 76–87.

1. Введение

В теории полугрупп большое значение получил метод исследования полугрупп путём изучения характеристик тесно связанных с ними структур – например, полигона над полугруппой. В монографии [1] сделан обзор работ, посвящённых общим свойствам полигонов. В монографии [2] значительную часть занимают гомологические вопросы теории полугрупп, т.е. исследование полугруппы с точки зрения категории полигонов над ней. Центральное место в этой теории занимают инъективные, проективные, плоские полигоны и связанные с ними. Промежуточное положение между модулями и полигонами занимают полумодули над полукольцами. Исследование их плоскостности проводилось в [3]. А именно, было показано, что полумодуль ${}_R A$ над полукольцом R является плоским тогда и только тогда, когда ${}_R A$ является L -плоским (т.е. ${}_R A$ является фильтрованным копределом конечно порождённых свободных полумодулей). Так как описать тот или иной класс полигонов над произвольной полугруппой довольно затруднительно, то имеет смысл рассматривать частные случаи. Одним из таких частных случаев является унар – полигон над свободной циклической полугруппой. Так, в работе [4] были описаны проективные, слабо, квази- и псевдопроективные унары; инъективные, слабо, квази- и псевдоинъективные унары. В работах [5], [6] было обобщено понятие сильной плоскостности полигона и описана связь между плоскими полигонами и полигонами без кручения. В [7] отмечено, что различные обобщения плоскостности будут распространяться на компоненты связности полигона. В работе [8] получено полное описание плоских унаров. В предполагаемой вниманию работе получено полное описание слабо плоских, главно слабо плоских унаров, унаров без кручения, уравнительно плоских, коуниверсально плоских унаров, точных, строго точных, регулярных унаров и унаров, удовлетворяющих условию (E) или (P).

Вообще говоря, унары являются распространённым объектом исследований различных авторов. Например, в монографии [9] дано систематическое изложение теории унаров с особым вниманием к решёткам ретрактов, произведениям, конгруэнциям, гомоморфизмам и многообразиям унаров, а также других алгебраических структур, тесно связанных с унарами. В работе [10] получено полное описание конгруэнций свободного унара с произвольным множеством свободных образующих. Условия дистрибутивности решётки квазимногообразий унаров получены в [11]. В работе [12] получены необходимые и достаточные условия того, чтобы решётка конгруэнций унара являлась цепью, дистрибутивной или модулярной решёткой. В

работе [13] приводится ряд необходимых условий дистрибутивности и модулярности решёток конгруэнций произвольных коммутативных унарных алгебр.

2. Основные определения

Напомним некоторые определения из теории полигонов. Правым *полигоном* над полугруппой S называется множество X с отображением $X \times S \rightarrow X$, $(x, s) \mapsto xs$ таким, что для любых $x \in X$, $s, t \in S$ выполняется равенство $x(st) = (xs)t$. Левый полигон Y над полугруппой S определяется аналогично: это множество Y с отображением $S \times Y \rightarrow Y$ таким, что выполняется равенство $(st)y = s(ty)$ для любых $y \in Y$, $s, t \in S$.

Если S, T – полугруппы, то полигон Z , являющийся одновременно левым S -полигоном и правым T -полигоном с условием $(sz)t = s(zt)$ для любых $z \in Z$, $s \in S$, $t \in T$, называется (S, T) -*биполигоном*. Правые, левые и биполигоны часто обозначают так: X_S , ${}_S Y$ и ${}_S Z_T$.

В случае, когда S – моноид, полигон X_S называется *унитарным*, если $x \cdot 1 = x$ для любого $x \in X$, где 1 – единица моноида S .

Пусть X_S – правый S -полигон. Непустое подмножество $Y \subseteq X$ называется *подполигоном* полигона X , если $ys \in Y$ для любых $y \in Y$, $s \in S$. Левые подполигоны и подбиполигоны определяются аналогично.

Пусть X и Y – соответственно правый и левый полигоны над полугруппой S . *Тензорное произведение* $X_S \otimes {}_S Y$ (или просто $X \otimes Y$) – это фактор-множество $(X \times Y)/\rho$, где ρ – наименьшее отношение эквивалентности, содержащее все пары вида $((xs, y), (x, sy))$ для $x \in X$, $y \in Y$, $s \in S$. Класс, в котором лежит пара (x, y) , обозначается $x \otimes y$. Из определения следует, что для любых $x \in X$, $y \in Y$, $s \in S$ выполняется равенство $xs \otimes y = x \otimes sy$.

Пусть X_S – правый S -полигон, ${}_S Y_T$ – (S, T) -биполигон, тогда $X \otimes Y$ является правым T -полигоном относительно операции

$$(x \otimes y)t = x \otimes yt \quad (x \in X, y \in Y, t \in T)$$

[2, предложение II.5.12].

Копроизведением $\coprod_{i \in I} X_i$ полигонов X_i над одной полугруппой называется их дизъюнктное объединение.

3. Унары

Пусть S – полугруппа. Введём обозначение:

$$S^1 = \begin{cases} S, & \text{если } S \text{ содержит единицу;} \\ S \cup \{1\} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Унар – это множество с одной унарной операцией $f : X \rightarrow X$. Его можно рассматривать как полигон над свободной циклической полугруппой $S = \langle a \rangle = \{a, a^2, a^3, a^4, \dots\}$ либо как унитарный полигон над свободным циклическим моноидом $S^1 = \{1, a, a^2, a^3, a^4, \dots\}$ (категории правых S -полигонов и унитарных правых S^1 -полигонов изоморфны¹). Здесь $f(x) = xa$, $f(f(x)) = xa^2$ и т.д. Далее, букву a мы будем использовать для обозначения образующего элемента свободной циклической полугруппы $S = \langle a \rangle$.

¹Определим функтор $F : \mathbf{Act} - S \rightarrow \mathbf{Act}_1 - S^1$ следующим образом: $F(X_S) = X_{S^1}$, а именно: множества элементов X полигонов X_S и X_{S^1} совпадают, и если $x = x's$ в X_S , то $x = x's$ в X_{S^1} , $s \in S$, $x, x' \in X$. Морфизму $\varphi : X_S \rightarrow Y_S$ будем ставить в соответствие морфизм $F(\varphi) : X_{S^1} \rightarrow Y_{S^1}$. Обратный функтор $G(X_{S^1}) = X_S$ определяется аналогично, его единственность очевидна.

Пусть S – свободная циклическая полугруппа. Так как она коммутативна, то нет разницы между правыми и левыми полигонами над S (см. [2, замечание I.4.3(2)]). Учитывая [2, предложение II.5.12], X и Y можно считать биполигонами над S , поэтому для унар X и Y тензорное произведение $X \otimes Y$ – тоже унар. При этом для любого $x \otimes y \in X \otimes Y$

$$(x \otimes y)a = x \otimes ya = x \otimes ay = xa \otimes y = ax \otimes y = a(x \otimes y).$$

Лучом будем называть свободный унар с одним образующим (см. Рис. 1). Эквивалентное определение: луч – это унар, изоморфный унару $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ с операцией $i \cdot a = i + 1$ при $i \geq 0$.

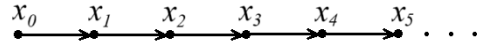


Рис. 1: Свободный унар с единственным образующим x_0 (луч).

Свободный унар с множеством свободных образующих $\{u_i \mid i \in I\}$ – это копроизведение лучей (см. Рис. 2).

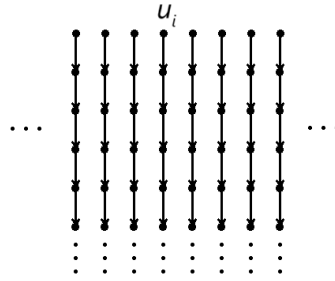


Рис. 2: Свободный унар с множеством свободных образующих $\{u_i \mid i \in I\}$.

Прямая – это унар, изоморфный унару $\mathbb{Z}$ с операцией $i \cdot a = i + 1$ при $i \in \mathbb{Z}$, (см. Рис. 3).



Рис. 3: Прямая (унар).

Циклом $C_n = \{c_0, c_1, \dots, c_{n-1}\}$ длины n называется унар, изоморфный унару $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$ с операцией $i \cdot a = i + 1 \pmod{n}$ (см. Рис. 4).

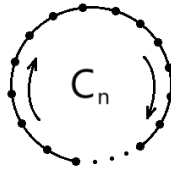


Рис. 4: Цикл C_n длины n .

Унар X называется *связным*, если для любых $x_1, x_2 \in X$ существуют такие i, j , что $x_1 a^i = x_2 a^j$. Очевидно, что связный унар не может содержать два или более циклов.

Примеры связных унар изображены на рисунке 5. В первом случае (Рис. 5, А) унар имеет бесконечную убывающую цепь, во втором (Рис. 5, В) есть цикл C_n .

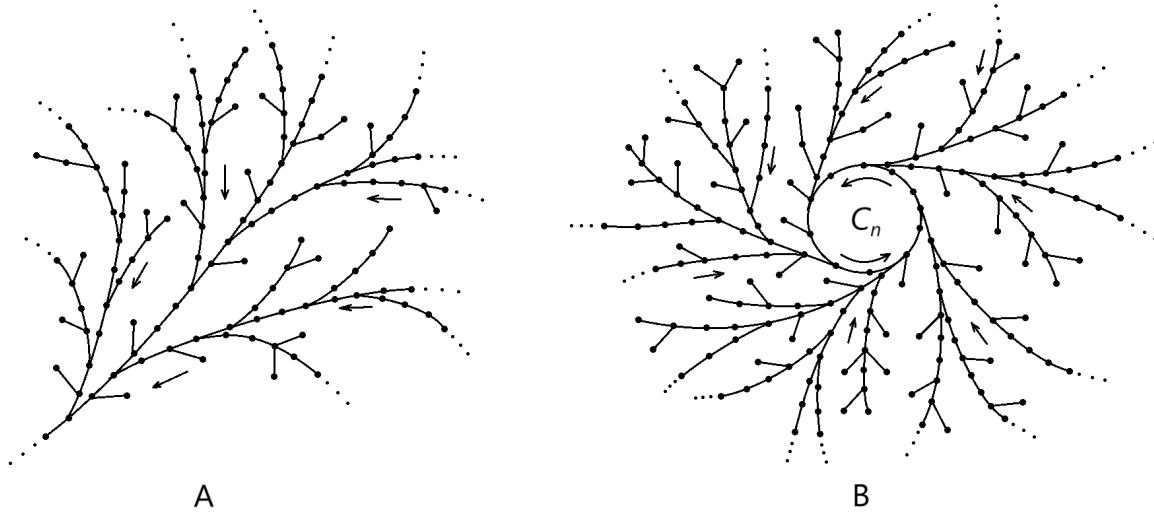


Рис. 5: Связные унары.

Элемент z_0 унара называется *нулём*, если $z_0 s = z_0$ для всех $s \in S$. Если у связного унара есть цикл C_1 , состоящий из одного элемента, то унар называется *нуль-унаром*. То есть, он имеет нуль z_0 и для каждого $x \in X$ существует такое $k \geq 0$, что $xa^k = z_0$.

4. Различные виды плоскостности

Выбор классов полигонов, которые описываются в данной работе основан на [2, таблица III.2]. Утверждения и определения из [2], на которые мы будем ссылаться сейчас и в дальнейшем, приведены в [2] для полигонов над произвольными моноидами. При ссылке на них мы будем приводить их для унаров.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 ([2, определения III.9.1 и III.8.1]). Унар X называется *коуниверсально плоским*, если функтор $X \otimes -$ сохраняет коуниверсальный квадрат;
уравнительно плоским, если функтор $X \otimes -$ сохраняет уравнители;
сильно плоским, если он является коуниверсально плоским и уравнительно плоским;
плоским, если функтор $X \otimes -$ сохраняет мономорфизмы;
слабо плоским, если функтор $X \otimes -$ сохраняет все вложения левых идеалов в S ;
главно слабо плоским, если функтор $X \otimes -$ сохраняет все вложения главных левых идеалов в S ;
унаром без кручения, если $\forall x, x' \in X, \forall s \in S \quad xs = x's \rightarrow x = x'$.²

Приведём некоторые известные утверждения, которые понадобятся нам в дальнейшем.

ЛЕММА 1 ([2, лемма III.9.3 и утверждение III.8.2]). Пусть $X = \coprod_{i \in I} X_i$, где $X_i, i \in I$ – унары. Тогда X обладает каким-либо свойством из определения 1, если и только если для каждого $i \in I$ унар X_i обладает этим свойством.

СЛЕДСТВИЕ 1 ([2, следствие III.16.4]). Коуниверсально плоский унар является уравнительно плоским.

²В оригинальном определении сказано, что данная импликация выполняется для всех сократимых справа элементов полугруппы S . Но, как нетрудно проверить, в свободной циклической полугруппе любой элемент сократим справа, поэтому мы записываем определение унара без кручения в таком упрощённом виде.

ЛЕММА 2 ([2, лемма III.9.2]). Для любого унара X верны следующие импликации:

$$\begin{aligned} \text{сильно плоский} &\Rightarrow \text{коуниверсально плоский} \\ \text{сильно плоский} &\Rightarrow \text{уравнительно плоский} \Rightarrow \text{плоский} \\ &\Rightarrow \text{слабо плоский} \Rightarrow \text{главно слабо плоский}. \end{aligned}$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 1 ([2, утверждение III.10.3]). Главно слабо плоский унар является унаром без кручения.

Разделим основную часть исследования на четыре части. Сначала мы опишем слабо плоские, главно слабо плоские унары и унары без кручения, а в последующем - уравнительно плоские, коуниверсально плоские, точные, строго точные, регулярные унары и унары, удовлетворяющие условию (E).

5. Слабо плоские, главно слабо плоские унары и унары без кручения

ЛЕММА 3. Пусть X – унар. Если x_1, x_2 – различные элементы из X такие, что $x_1a = x_2a$, то унар X не является унаром без кручения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. От противного. Пусть X – унар без кручения. Тогда, по определению, если $x_1a = x_2a$, то $x_1 = x_2$ – противоречие, так как по условию $x_1 \neq x_2$. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 2. Если X – унар без кручения, то его компонентами связности могут быть лишь прямые, лучи и циклы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вначале отметим, что перенос свойства "без кручения" с компонент связности на весь унар и обратно мы получаем из леммы 1.

Теперь предположим, что утверждение следствия не выполнено. Это означает, что унар X – без кручения и при этом обладает компонентой связности X_i , которая не является ни прямой, ни лучом, ни циклом. Это означает, что в такой компоненте X_i будет выполняться $x_1a = x_2a$ при некоторых $x_1 \neq x_2$ из X_i . Тогда по лемме 3 унар X не является унаром без кручения – противоречие. $\square$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Если X – главно слабо плоский, слабо плоский, плоский, уравнительно плоский либо коуниверсально плоский унар, то его компонентами связности могут быть лишь прямые, лучи и циклы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 2, следствия 1 и утверждения 1 мы имеем:

$$\text{коуниверсально плоский} \Rightarrow \text{уравнительно плоский} \Rightarrow \text{плоский} \Rightarrow \text{слабо плоский} \Rightarrow \text{главно слабо плоский} \Rightarrow \text{без кручения}.$$

Поэтому, если X – один из унаров, перечисленных в условии, то он является унаром без кручения. По следствию 2 мы получаем, что компонентами связности X могут быть лишь прямые, лучи и циклы. $\square$

ТЕОРЕМА 1. Для любого унара X верны следующие эквивалентности:

$$\text{плоский} \Leftrightarrow \text{слабо плоский} \Leftrightarrow \text{главно слабо плоский} \Leftrightarrow \text{без кручения}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 2 и утверждения 1 следует, что в этой цепочке эквивалентностей верны импликации $\Rightarrow$. Осталось доказать, что унар без кручения является плоским.

Пусть X – унар без кручения. По следствию 2 его компонентами связности могут быть лишь прямые, лучи и циклы. По [8, теорема] прямая, луч и цикл являются плоскими унарами, а значит, из леммы 1 мы заключаем, что X – плоский. $\square$

6. Уравнительно плоские унары

Следующие условия играют важную роль при исследовании различных типов плоских полигонов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 ([2, определение III.9.4]). Будем говорить, что полигон X над полугруппой S удовлетворяет условию (P), если для него выполняется импликация: если $xs = x's'$ для $x, x' \in X$, $s, s' \in S$, то существуют $x'' \in X$, $u, v \in S$ такие, что $x = x''u$, $x' = x''v$, $us = vs'$ (см. Рис. 6).

Полигон X над полугруппой S удовлетворяет условию (E), если для него выполняется импликация: если $xs = xs'$ для $x \in X$, $s, s' \in S$, то существуют $x' \in X$, $u \in S$ такие, что $x = x'u$, $us = us'$.

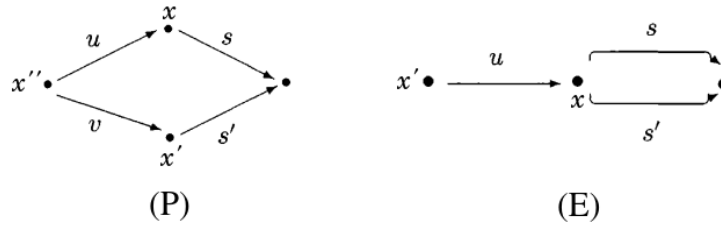


Рис. 6: Условия (P) и (E).

Для описания уравнительно плоских унаров воспользуемся следующим критерием.

ТЕОРЕМА 2 ([2, теорема III.15.8]). Если унар удовлетворяет условиям (E) и (P), то он является уравнительно плоским.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Луч и прямая удовлетворяют условию (E).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть X – луч и будем считать его унитарным полигоном над свободным циклическим моноидом $S^1 = \{1, a, a^2, a^3, \dots\}$. Очевидно, что если $xa^k = xa^m$ для $x \in X$, то $k = m$. Отсюда, если в определении 2 взять $x' = x$ и $u = 1$, то условие (E) будет выполнено.

Так как прямую можно представить как объединение возрастающей последовательности лучей, то для неё тоже будет выполняться условие (E)³. $\square$

Оказывается, что цикл условию (E) не удовлетворяет, как показывает следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Цикл не удовлетворяет условию (E).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть C_n – цикл длины n . Тогда $xa^k = xa^{k+n}$ при всех $x \in C_n$ и некотором $a^k \in S$. Предположим, что цикл удовлетворяет условию (E). Это значит, что существуют такие $x' \in C_n$ и $a^m \in S$, что $x = x'a^m$ и $a^m \cdot a^k = a^m \cdot a^{k+n}$. Тогда $m + k = m + k + n$, откуда следует, что $n = 0$ – противоречие. $\square$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Луч, прямая и цикл удовлетворяют условию (P).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть X – прямая либо цикл и $xa^n = x'a^m$ для $x, x' \in X$, $a^n, a^m \in S$. Без ограничения общности будем считать, что $n \geq m$. Возьмём такой $x'' \in X$, что $x = x''a^k$, $x' = x''a^{k+n-m}$ при некотором $k \geq 0$. Тогда, очевидно, что равенство $a^k \cdot a^n = a^{k+n-m} \cdot a^m$ будет выполняться.

³В этом можно также убедиться, если рассматривать прямую как полигон над свободной циклической полугруппой и проверить для неё выполнение условия (E).

В случае, когда X – луч, то рассуждения выше применимы и к нему, если рассматривать X как полигон над свободным циклическим моноидом. Уточнения требует случай, когда один из элементов $x, x' \in X$ совпадает с образующим элементом полигона X . Если $x, x' \in X$ и x совпадает с образующим элементом X , тогда в качестве x'' можно взять x , а в качестве u – единицу моноида S . Тогда нетрудно увидеть, что условие (Р) будет выполняться. $\square$

ТЕОРЕМА 3. *Унар является уравнительно плоским тогда и только тогда, когда он является копроизведением унаров, являющихся прямыми либо лучами.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть $X = \coprod_{i \in I} X_i$ – уравнительно плоский унар. Тогда, по лемме 2 он является плоским, откуда, по предложению 1 X является копроизведением унаров, являющихся прямыми, лучами либо циклами. Если X_i – цикл, тогда, по [2, утверждение III.15.3] X_i удовлетворяет условию (Е), что противоречит предложению 3. Отсюда получаем, что X является копроизведением унаров, являющихся прямыми либо лучами.

Достаточность. Пусть X – унар и $X = \coprod_{i \in I} X_i$, где X_i – луч либо прямая. По предложениям 2 и 4 X_i удовлетворяет условиям (Р) и (Е), откуда, по теореме 2 X_i является уравнительно плоским унаром. Наконец, по лемме 1 получаем, что X – уравнительно плоский унар. $\square$

7. Точные, регулярные унары и унары, удовлетворяющие условию (Е)

ЛЕММА 4. *Связный унар без цикла удовлетворяет условию (Е).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть X – связный унар без цикла (см. Рис. 5, А) и будем рассматривать его как полигон над свободным циклическим моноидом $S^1 = \{1, a, a^2, a^3, \dots\}$. Пусть $xa^k = xa^m$ для некоторых $a^k, a^m \in S$, $x \in X$. В силу отсутствия циклов $k = m$. Отсюда, если в определении 2 взять $x' = x$ и $u = 1$ ($x' \in X$, $1 \in S$), то условие (Е) будет выполняться. $\square$

ТЕОРЕМА 4. *Унар удовлетворяет условию (Е) тогда и только тогда, когда он не содержит циклов.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть $X = \coprod_{i \in I} X_i$ – унар, удовлетворяющий условию (Е). Связный унар X_i может либо содержать цикл, либо нет (см. Рис. 5). Так как по предложению 3 цикл не удовлетворяет условию (Е), то X_i является связным унаром, не содержащим цикл. Из [2, лемма III.9.5] получаем, что X не содержит циклов.

Достаточность. Пусть X – унар и $X = \coprod_{i \in I} X_i$, где X_i – связный унар, не содержащий цикл. По лемме 4 унар X_i удовлетворяет условию (Е). Из [2, лемма III.9.5] получаем, что X удовлетворяет условию (Е). $\square$

"Точное действие" на языке автоматов означает, что разные входные слова по-разному воздействуют хотя бы на одно из состояний автомата. Действие является строго точным, если разные входные слова по-разному воздействуют на все состояния автомата.

Полигон X_S называется *точным*, если для $s, t \in S$ выполняется импликация: если $xs = xt$ для всех $x \in X$, то $s = t$. Полигон X_S называется *строго точным*, если для $s, t \in S$ выполняется импликация: если $xs = xt$ для некоторого $x \in X$, то $s = t$ (см. [2, определение I.4.8]).

Очевидно, что если полигон является строго точным, то он является точным.

ЛЕММА 5. *Если X – унар без цикла (см. Рис. 5, (А)), то он является строго точным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a^n, a^m \in S$ и пусть $xa^n = xa^m$ для некоторого $x \in X$. В силу отсутствия цикла $n = m$ и $a^n = a^m$. $\square$

Нетрудно увидеть, что если X – связный унар с циклом (Рис. 5, (В)), то он не будет являться точным, а значит, не будет и строго точным.

Пусть X – полигон над моноидом S^1 . Элемент $x \in S$ называется *регулярным*, если существует гомоморфизм $\varphi : xS^1 \rightarrow S^1$ такой, что $x\varphi(x) = x$. Полигон X над моноидом S^1 называется *регулярным* полигоном, если каждый его элемент является регулярным (см. [2, определение III.19.1]).

ЛЕММА 6. *Унар без цикла является регулярным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем рассматривать унар как полигон над свободным циклическим моноидом S^1 . Пусть X – унар без цикла и возьмём $x \in X$. Очевидно, что унар xS^1 является лучом, как и полигон $S^1_{S^1}$. Построим между ними отображение $\varphi : xS^1 \rightarrow S^1$, а именно: положим $\varphi(x) = 1$ ($1 \in S^1$). Тогда получим, что $xS^1 \cong S^1$ (как полигоны). Теперь нетрудно видеть, что $x\varphi(x) = x \cdot 1 = x$, откуда следует, что x – регулярный элемент полигона S . Так как элемент x выбран произвольно, то заключаем, что X – регулярный унар. $\square$

Нетрудно увидеть, что если X – связный унар с циклом, то он не будет являться регулярным в силу того, что построить требуемый изоморфизм невозможно.

ТЕОРЕМА 5. *Для любого унара X верны следующие эквивалентности:*

$$(E) \Leftrightarrow \text{строго точный} \Leftrightarrow \text{точный} \Leftrightarrow \text{регулярный}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть X – унар, удовлетворяющий условию (Е). Из теоремы 4 следует, что он является унаром, не содержащим цикл. Тогда, из леммы 5 следует, что X является строго точным. Если X является строго точным, то он является точным. Из леммы 6 следует, что X является регулярным.

Пусть X – регулярный унар. X может либо содержать цикл, либо нет (см. Рис. 5). Так как из определения нетрудно увидеть, что унар, содержащий цикл не является регулярным, то заключаем, что X – унар, не содержащий цикл. Из теоремы 4 заключаем, что X удовлетворяет условию (Е). $\square$

8. Коуниверсально плоские унары

Для описания коуниверсально плоских унаров воспользуемся следующим критерием.

ТЕОРЕМА 6 ([2, теорема III.16.3]). *Унар является коуниверсально плоским тогда и только тогда, когда он удовлетворяет условиям (Е) и (Р).*

ТЕОРЕМА 7. *Унар является коуниверсально плоским тогда и только тогда, когда он является уравнительно плоским (т.е. является копроизведением прямых и лучей).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость.* Пусть X – коуниверсально плоский унар. Тогда, по следствию 1 он является уравнительно плоским.

Достаточность. Пусть $X = \coprod_{i \in I} X_i$ – уравнительно плоский унар. Из предложения 1 мы получаем, что компоненты связности X_i являются прямыми, лучами либо циклами. Если X_i – цикл, тогда по [2, утверждение III.15.3] X_i удовлетворяет условию (Е), что противоречит предложению 3. Значит, X_i может быть лишь прямой либо лучом. По предложениям 2 и 4 X_i удовлетворяет условиям (Р) и (Е), откуда по теореме 6 X_i является коуниверсально плоским унаром. Наконец, по лемме 1 получаем, что X – коуниверсально плоский. $\square$

9. Следствия

Таким образом, мы можем собрать результаты всех частей данной работы воедино и сформулировать следующие утверждения.

СЛЕДСТВИЕ 3. *Для любого унара X верны следующие эквивалентности:*

$$(P) \Leftrightarrow \text{плоский} \Leftrightarrow \text{слабо плоский} \Leftrightarrow \text{главно слабо плоский} \Leftrightarrow \text{без кручения}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем первую эквивалентность. Пусть X – унар, удовлетворяющий условию (P). Тогда, по [2, утверждение III.13.3] X является плоским унаром. Наоборот, пусть X – плоский унар. Тогда, по предложению 1 его компонентами связности могут быть прямые, лучи либо циклы. По предложению 4 луч, прямая и цикл удовлетворяют условию (P).

Все остальные эквивалентности следуют из теоремы 1. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 4. *Для любого унара X верны следующие импликации:*

$$\begin{aligned} \text{коуниверсально плоский} &\Leftrightarrow \text{уравнительно плоский} \Rightarrow (E) \\ &\Leftrightarrow \text{строго точный} \Leftrightarrow \text{точный} \Leftrightarrow \text{регулярный}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первая эквивалентность следует из теоремы 7.

Если X – уравнительно плоский унар, то по [2, предложение III.15.3] он удовлетворяет условию (E). В обратную сторону эта импликация выполняться не будет, как можно видеть из теоремы 4. Остальные импликации следуют из теоремы 5. $\square$

10. Заключение

Таким образом, в работе полностью описаны коуниверсально плоские, уравнительно плоские, плоские, слабо плоские, главно слабо плоские унары, унары без кручения, унары, удовлетворяющие условию (E) или (P), точные, строго точные и регулярные унары.

Доказано, что коуниверсально плоские унары совпадают с уравнительно плоскими и являются копроизведением прямых и лучей. Унары, удовлетворяющие условию (P), плоские, слабо плоские, главно слабо плоские и унары без кручения совпадают и являются копроизведением прямых, лучей и циклов. Унары, удовлетворяющие условию (E), точные, строго точные и регулярные унары совпадают и являются унарами, не содержащими цикл.

Автор выражает благодарность доктору физико-математических наук, профессору Кожухову Игорю Борисовичу за помощь при написании данной статьи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кожухов И. Б., Михалёв А. В., Тищенко А. В. Избранные вопросы теории полугрупп: представления и многообразия полугрупп. М.: Интуит, 2021. 160 с.
2. Kilp M., Knauer U., Mikhalev A. V. Monoids, acts and categories. Berlin; New York: de Gruyter, 2000. 546 p.
3. Katsov Y. On Flat Semimodules over Semirings // Algebra universalis. 2004. Vol. 51. №2. P. 287–299.
4. Сахаров И. А. Проективные и инъективные унары // Дальневост. матем. журн. 2024. Том 24, №1. С. 107–119.

5. Laan V. Pullbacks and flatness properties of acts I // *Communications in Algebra*. 2001. Vol. 29(2). P. 829–850.
6. Bulman-Fleming S., Kilp M., Laan V. Pullbacks and flatness properties of acts II // *Communications in Algebra*. 2001. Vol. 29(2). P. 851–878.
7. Golchin A. Flatness and coproducts // *Semigroup Forum*. 2006. Vol. 72(3). P. 433–440.
8. Пряничников А. М. Плоские унары // *Известия высших учебных заведений. Математика*. 2025. (в печати)
9. Jakubíková-Studenovská D., Pócs J. Monounary algebras. Košice: UPJŠ Košice, 2009.
10. Будиянская К. В., Кожухов И. Б. Конгруэнции свободного унара // *Чебышевский сборник*. 2023. Том 24(1). С. 15–26.
11. Карташов В. К., Карташова А. В. Характеризация дистрибутивных решеток квазимногообразий унаров // *Чебышевский сборник*. 2021. Том 22(1). С. 177–187.
12. Егорова Д. П. Структура конгруэнций унарной алгебры // *Межвузовский научный сборник «Упорядоченные множества и решётки»*. г. Саратов: Издательство Саратовского университета, 1978. Вып. 5. С. 11–44.
13. Карташов В. К., Карташова А. В., Пономарёв В. Н. Об условиях дистрибутивности и модулярности решеток конгруэнций коммутативных унарных алгебр // *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика*, 2013. Том 13, вып. 4, ч. 2. С. 52–57.

REFERENCES

1. Kozhukhov, I. B., Mikhalev & A. V., Tishenko, A. V. 2021, “Selected issues in semigroup theory: representations and variety of semigroups“, *Intuit: Moscow*, 160 p.
2. Kilp, M., Knauer, U. & Mikhalev, A. V. 2000, “Monoids, acts and categories“, *Berlin; New York: de Gruyter*, 546 p.
3. Katsov, Y. 2004, “On flat semimodules over semirings“, *Algebra universalis*, vol. 51, no. 2, pp. 287–299.
4. Sakharov I. A. 2024, “Projective and injective unars“, *Far Eastern Math. Journal*, vol. 24, no. 1, pp. 107–119.
5. Laan, V. 2001, “Pullbacks and flatness properties of acts I“, *Communications in Algebra*, vol. 29(2), pp. 829–850.
6. Bulman-Fleming, S., Kilp, M. & Laan, V. 2001, “Pullbacks and flatness properties of acts II“, *Communications in Algebra*, vol. 29(2), pp. 851–878.
7. Golchin, A. 2006, “Flatness and coproducts“, *Semigroup Forum*, vol. 72(3), pp. 433–440.
8. Pryanichnikov, A. M. 2025, “Flat unars“, *Russian Mathematics (Iz. VUZ)*, (in print).
9. Jakubíková-Studenovská, D., Pócs, J. 2009, “Monounary algebras“, *Košice: UPJŠ Košice*.
10. Budianskaia, C. V., Kozhukhov, I. B. 2023, “Congruences of a free unar“, *Chebyshevskii Sbornik*, vol 24(1), pp. 15–26.

11. Kartashov, V. K., Kartashova, A. V. 2021, "Characterization of distributive lattices of quasivarieties of unars", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 22(1), pp. 177–187.
12. Egorova, D. P. 1978, "The structure of congruences of unary algebra", *Interuniversity scientific collection "Ordered sets and lattices"*, Saratov: Saratov University Press, issue 5, pp. 11–44.
13. Kartashov, V. K., Kartashova, A. V. & Ponomarjov, V. N. 2013, "On conditions for distributivity or modularity of congruence lattices of commutative unary algebras", *Izv. Sarat. Univ. Math. Mech. Inform.*, vol. 13(4:2), pp. 52–57.

Получено: 16.12.2024

Принято в печать: 10.03.2025

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 26. Выпуск 1.

УДК 517.5+519.213

DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-1-88-98

Оценки тригонометрических сумм по решениям квадратичных сравнений

И. Ю. Реброва

Реброва Ирина Юрьевна — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: rebrova@tolstovsky.ru

Аннотация

В 1963 году, опираясь на оценки специальных тригонометрических сумм, Хули впервые доказал асимптотическую формулу для среднего числа делителей квадратичного полинома со степенным понижением в остаточном члене по сравнению с главным. Позднее эти оценки были улучшены.

В работе доказываются новые, более сильные результаты в этом направлении исследований аналитической теории чисел.

Ключевые слова: тригонометрические суммы, квадратичные сравнения.

Библиография: 12 названий.

Для цитирования:

Реброва, И. Ю. Оценки тригонометрических сумм по решениям квадратичных сравнений // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 1, с. 88–98.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 26. No. 1.

UDC 517.5+519.213

DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-1-88-98

Estimates of trigonometric sums from solutions of quadratic congruences

I. Yu. Rebrova

Rebrova Irina Yurevna — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: rebrova@tolstovsky.ru

Abstract

In 1963, relying on estimates of special trigonometric sums, Hawley first proved an asymptotic formula for the average number of divisors of a quadratic polynomial with a power-law reduction in the remainder term compared to the principal term. Later, these estimates were improved.

The paper proves new stronger results in this area of research in analytical number theory.

Keywords: trigonometric sums, quadratic congruences.

Bibliography: 12 titles.

For citation:

Rebrova, I. Yu. 2025, “Estimates of trigonometric sums from solutions of quadratic congruences”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 1, pp. 88–98.

Введение

Пусть d, q — натуральные числа и для целого a

$$\delta_q(a) = \frac{1}{q} \sum_{b(\bmod q)} e^{2\pi i \frac{ab}{q}} = \begin{cases} 1, & \text{если } a \equiv 0(\bmod q), \\ 0, & \text{если } a \not\equiv 0(\bmod q) \end{cases}$$

— символ Коробова. Далее, для целого m

$$S_d(q; m) = \sum_{b(\bmod 2q)} \delta_{4q}(b^2 - d) e^{2\pi i \frac{mb}{2q}}$$

— тригонометрическая сумма, ассоциированная со сравнением

$$b^2 - d \equiv 0(\bmod 4q); \quad b(\bmod q). \quad (1)$$

Начиная с этого момента и в дальнейшем d — отрицательное число и

$$d \equiv 0, 1(\bmod 4),$$

так как из сравнения (1) следует, что оно неразрешимо для $d \not\equiv 0, 1(\bmod 4)$.

В работе [1] впервые была получена оценка

$$\sum_{1 \leq q \leq P} S_d(q; m) \ll_{\varepsilon, d} P^{\frac{3}{4} + \varepsilon} + |m|^{\frac{4}{3} + \varepsilon}$$

для $d \equiv 0(\bmod 4)$ и всех целых $m \neq 0$. В [2], [3], [4] она была улучшена с

$$P^{\frac{2}{3} + \varepsilon} + P^{\frac{1}{2} + \varepsilon} |m|^{\frac{1}{4}} + |m|^{\frac{2}{3} + \varepsilon}$$

в правой части. Опираясь на методы, предложенные в вышеупомянутых работах, мы получаем новые результаты в этом направлении аналитической теории чисел.

Автор благодарит Быковского В. А. за обсуждение полученных результатов и полезные советы.

1. Верхняя полуплоскость и бинарные положительно определенные квадратичные формы

Согласно традиционным обозначениям, $GL_2(\mathbb{R})$ — мультипликативная группа матриц вида

$$M = \begin{pmatrix} u & v \\ r & t \end{pmatrix} \quad (2)$$

с вещественными u, v, r, t и $\det(M) \neq 0$. Для таких матриц и любого комплексного числа

$$z = x + it, \quad x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z$$

с $rz + t \neq 0$ выполняется равенство

$$\operatorname{Im} \left(\frac{uz + v}{rz + t} \right) = \det(M) \cdot \frac{\operatorname{Im} z}{|rz + t|^2}. \quad (3)$$

Группа $GL_2(\mathbb{R})$ действует слева на $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ посредством дробно-линейных преобразований

$$z \rightarrow Mz = \frac{uz + v}{rz + t}.$$

Левое действие означает, что для любых матриц M_1 и M_2 из $GL_2(\mathbb{R})$

$$(M_1 M_2)z = M_1(M_2 z) \quad \forall z \in \overline{\mathbb{C}}.$$

Из равенства (3) следует, что подгруппа

$$GL_2^{(+)}(\mathbb{R}) = \{M \in GL_2(\mathbb{R}) \mid \det(M) > 0\}$$

действует на верхней полуплоскости

$$\mathbb{H} = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid y > 0\}.$$

Так как матрицы $\pm M$ действуют на $\mathbb{H}$ одинаково, то их обычно отождествляют и работают с

$$PGL_2^{(+)}(\mathbb{R}) = GL_2^{(+)}(\mathbb{R}) / \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Соответственно, для

$$SL_2(\mathbb{R}) = \{M \in PGL_2(\mathbb{R}) \mid \det(M) = 1\},$$

$$PSL_2(\mathbb{R}) = SL_2(\mathbb{R}) / \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Инвариантные относительно действия $PSL_2(\mathbb{R})$ метрика ds^2 и мера $d\mu$ определяются по формулам

$$ds^2(z) = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}, \quad d\mu(z) = \frac{dx dy}{y^2}.$$

Четверка

$$(\mathbb{H}, PGL_2(\mathbb{R}), ds^2, d\mu)$$

— модель Пуанкаре плоскости Лобачевского.

Положим для $d < 0$

$$\mathbb{K}_{\mathbb{R}}(d) = \{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \mid \beta^2 - 4\alpha\gamma = d, \alpha > 0, \gamma > 0\}.$$

Элементы $\mathbb{K}_{\mathbb{R}}(d)$ параметризуют положительно определенные квадратичные формы

$$Q(x, y) = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2$$

дискриминанта d . В дальнейшем

$$\mathbb{K}_{\mathbb{Z}}(d) = \{(a, b, c) \in \mathbb{K}_{\mathbb{R}}(d) \mid a, b, c \in \mathbb{Z}\}$$

— множество положительно определенных бинарных квадратичных форм дискриминанта d с целыми коэффициентами.

Группа $PSL_2(\mathbb{R})$ действует слева на $\mathbb{K}_{\mathbb{R}}(d)$ по правилу

$$M : \begin{pmatrix} \alpha & \beta/2 \\ \beta/2 & \gamma \end{pmatrix} \rightarrow M \begin{pmatrix} \alpha & \beta/2 \\ \beta/2 & \gamma \end{pmatrix} M^t = \begin{pmatrix} \alpha(M) & \beta(M)/2 \\ \beta(M)/2 & \gamma(M) \end{pmatrix}.$$

Оно соответствует линейной замене переменных x и y для квадратичных форм

$$\begin{aligned} Q(x, y) &= \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 \rightarrow \\ &\rightarrow MQ(x, y) = Q(ux + ry, vx + ty) = \alpha(M)x^2 + \beta(M)xy + \gamma(M)y^2 \end{aligned}$$

с матрицей M вида (2). При этом

$$M(\alpha, \beta, \gamma) = (\alpha u^2 + \beta uv + \gamma v^2, 2\alpha ur + \beta(ut + vr) + 2\gamma vt, \alpha r^2 + \beta rt + \gamma t^2).$$

В нашем случае $d < 0$ соответствие

$$(\alpha, \beta, \gamma) \rightarrow z = \frac{\beta}{2\gamma} + \frac{\sqrt{d}}{2\gamma}$$

определяет биекцию $\mathcal{P}_d : \mathbb{K}_{\mathbb{R}}(d) \rightarrow \mathbb{H}$ с обратной к ней

$$\mathcal{P}_d^{-1}(z) = \left(\frac{\sqrt{|d|}}{2} \frac{|z|^2}{\operatorname{Im} z}, \sqrt{|d|} \frac{\operatorname{Re} z}{\operatorname{Im} z}, \frac{\sqrt{|d|}}{2} \frac{1}{\operatorname{Im} z} \right).$$

Пусть M матрица вида (2) и

$$Q(x, y) = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 = \gamma(zx + y)(\bar{z}x + y).$$

Тогда

$$\begin{aligned} MQ(x, y) &= Q(ux + ry, vx + ty) = \\ &= \gamma(z(ux + ry) + vx + ty)(\bar{z}(ux + ry) + vx + ty) = \\ &= \gamma|rz + t|^2 (M(z)x + y)(\overline{M(z)}x + y) = \alpha(M)x^2 + \beta(M)xy + \gamma(M)y^2. \end{aligned}$$

Поэтому $\mathcal{P}_d(M(\alpha, \beta, \gamma)) = M(z)$. Следовательно, для любой матрицы M из $PSL_2(\mathbb{R})$ диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}_{\mathbb{R}}(d) & \xrightarrow{M} & \mathbb{K}_{\mathbb{R}}(d) \\ \mathcal{P}_d \downarrow & & \downarrow \mathcal{P}_d \\ \mathbb{H} & \xrightarrow{M} & \mathbb{H} \end{array}$$

коммутативна.

2. Спектральная теория автоморфных функций

Подробности и ссылки по поводу приводимых ниже сведений можно найти в [5] и [6].

Группа $PGL_2^{(+)}(\mathbb{R})$ действует на функции $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ по правилу

$$\begin{pmatrix} u & v \\ r & t \end{pmatrix} f(z) = f\left(\frac{uz + v}{rz + t}\right).$$

При этом

$$(M_1 M_2)f(z) = f(M_1 M_2(z)) = M_2(M_1 f)(z) \quad \forall M_1, M_2 \in PGL_2^{(+)}(\mathbb{R}).$$

Более удобно пользоваться обозначением

$$Mf(z) = (f|M)(z).$$

В таком случае,

$$(f|M_1 M_2)(z) = f(M_1 M_2(z)) = (f|M_1)M_2(z) = (f|M_1|M_2)(z).$$

То есть, мы определили правое действие $PGL_2^{(+)}(\mathbb{R})$ на функции $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$.

Пусть

$$\Delta = -y^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$$

— дифференциальный оператор второго порядка. Для любой матрицы M из $PGL_2^{(+)}(\mathbb{R})$ и любой дважды дифференцируемой функции $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ по переменным x и y ($z = x + iy$) выполняется равенство

$$\Delta(f|M)(z) = (\Delta f)M(z). \quad (4)$$

Это означает, что Δ является $PGL_2^{(+)}(\mathbb{R})$ -инвариантным оператором.

Линейное пространство автоморфных функций относительно полной модулярной группы

$$\Gamma = PSL_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PGL_2(\mathbb{R}) \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}$$

состоит из всех функций $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$, для которых

$$f|M = f \quad \forall M \in \Gamma.$$

Из (4) следует, что оператор Δ переводит автоморфные функции снова в автоморфные.

Обозначим через $\Gamma \backslash \mathbb{H}$ фундаментальную область в $\mathbb{H}$ относительно Γ , состоящую из объединения двух множеств

$$\left\{ z \in \mathbb{H} \mid -\frac{1}{2} < \operatorname{Re} z < 0, |z| > 1 \right\}, \left\{ z \in \mathbb{H} \mid 0 \leq \operatorname{Re} z \leq \frac{1}{2}, |z| \geq 1 \right\} \quad (5)$$

Фундаментальность $\Gamma \backslash \mathbb{H}$ означает, что внутренние области $M(\Gamma)$ по всем $M \in \Gamma$ не пересекаются и

$$\bigcup_{M \in \Gamma} M(\Gamma \backslash \mathbb{H}) = \mathbb{H}.$$

Пусть

$$\Gamma_z = \{ M \in \Gamma \mid M(z) = z \}$$

— стабилизатор точки $z \in \mathbb{H}$ в Γ . При этом

$$\Gamma_i = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

и для $\rho = \exp(\pi i/3) = 1/2 + (\sqrt{3}/2)i$

$$\Gamma_\rho = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Для остальных $z \in \Gamma \backslash \mathbb{H}$ группа состоит из единичного элемента.

Множествам из (5) соответствуют подмножества из $\mathbb{K}_{\mathbb{Z}}(d)$, выделяемые парой условий

$$-c < b < 0 \text{ и } c < a, \quad 0 \leq b \leq c \text{ и } c \leq a.$$

В таком случае говорят, что форма $Q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ приведена. Таких форм конечное число и они составляют набор

$$(a_1, b_1, c_1), \dots, (a_{h(d)}, b_{h(d)}, c_{h(d)})$$

элементов из $\Gamma \setminus \mathbb{K}_{\mathbb{Z}}(d)$, а $h(d)$ — число классов форм дискриминанта d , которое совпадает с числом точек из $\Gamma \setminus \mathbb{H}(d)$.

Определим на линейном пространстве Γ -автоморфных функций $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ линейный функционал

$$\Omega_d(f) = \left(\frac{4}{|d|}\right)^{1/4} \cdot \sum_{z \in \Gamma \setminus \mathbb{H}(d)} \frac{1}{|\Gamma z|} f(z).$$

На этом пространстве для любого натурального n действуют операторы Гекке $T(n)$ по формуле

$$T(n)f(z) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{n_1 n_2 = n} \sum_{0 \leq m < n_2} f\left(\frac{n_1 z + m}{n_2}\right).$$

Они удовлетворяют соотношению мультипликативности

$$T(n_1)T(n_2) = \sum_{l \mid \text{НОД}(n_1, n_2)} T\left(\frac{n_1 n_2}{l^2}\right),$$

из которого следует, что операторы Гекке коммутируют между собой.

3. Разложения по спектру Δ и их применения

Пусть $L_2(\Gamma \setminus \mathbb{H})$ — гильбертово пространство, состоящее из Γ -автоморфных функций $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$, для которых

$$\iint_{\Gamma \setminus \mathbb{H}} |f(z)|^2 \frac{dx dy}{y^2} < \infty$$

со скалярным произведением

$$\langle f, g \rangle = \iint_{\Gamma \setminus \mathbb{H}} f(z) \overline{g(z)} \frac{dx dy}{y^2}.$$

Обозначим через $L_2^{(0)}(\Gamma \setminus \mathbb{H})$ линейное подпространство в $L_2(\Gamma \setminus \mathbb{H})$, состоящее из функций f с

$$\int_0^1 f(x + iy) dx = 0$$

Из собственных функций оператора Δ в $L_2^{(0)}(\Gamma \setminus \mathbb{H})$ можно выбрать ортонормированный базис

$$u_1(z), u_2(z), \dots, u_j(z), \dots$$

с

$$\Delta u_j = \lambda_j u_j, \quad \frac{1}{4} < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_j \leq \dots$$

При этом (см. по этому поводу [9])

$$\lambda_j = 12j + o(j), \quad j \rightarrow \infty.$$

Так как Δ коммутирует с операторами Гекке, то u_j можно считать собственными функциями последних и для них

$$T(n)u_j = \lambda_j(n)u_j, \tag{6}$$

при этом $\lambda_j \in \mathbb{R}$. Гипотеза Рамануджана–Петерссона утверждает, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\lambda_j(n) \ll_{\varepsilon} n^{\theta+\varepsilon} \quad (7)$$

с $\theta = 0$. Наилучшая на сегодняшний день оценка получена в [10] с

$$\theta = \frac{7}{64} = \frac{1}{8} - \frac{1}{64}.$$

Ряды Эйзенштейна также являются собственными функциями операторов Гекке с

$$T(n)E(\dots; s) = \tau_s(n)E(\dots; s), \quad \tau_s(n) = \sum_{n_1 n_2 = n} \left(\frac{n_1}{n_2} \right)^{s-\frac{1}{2}}.$$

В соответствии со стандартными обозначениями (см. [11])

$$K_s(z) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} t^{s-1} \exp \left(-\frac{z}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right) \right) dt$$

— функция Макдональда (модифицированная функция Бесселя второго рода), экспоненциально убывающая при вещественном $z \rightarrow \infty$. Принимая во внимание равенство (периодичность по x с периодом 1)

$$u_j(z+1) = \left(u_j \left| \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right. \right) (z) = u_j(z),$$

и равенство (6), получим разложение в ряд Фурье по переменной x

$$u_j(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \rho_j(n) \sqrt{y} K_{i\chi_j}(2\pi|n|y) \exp^{2\pi i n x},$$

с

$$\chi_j = \sqrt{\lambda_j - \frac{1}{4}}.$$

и

$$\rho_j(-n) = \rho_j(-1)\lambda_j(n), \quad \rho_j(n) = \rho_j(1)\lambda_j(n)$$

для натурального $n > 0$. Оператор отражения

$$(T_{-1}f)(z) = f(-\bar{z})$$

коммутирует с Δ и операторами Гекке. Поэтому

$$T_{-1}u_j = \eta_j u_j, \quad \eta_j = \pm 1.$$

Если $\eta_j = 1$, то u_j называется четной, а для $\eta_j = -1$ — нечетной. Ряды Эйзенштейна являются четными автоморфными функциями и для них справедливо следующее разложение в ряд Фурье по x

$$\begin{aligned} E(z; s) &= y^s + \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(s - \frac{1}{2})\zeta(2s-1)}{\Gamma(s)\zeta(2s)} y^{1-s} + \\ &+ \frac{2\pi^s}{\Gamma(s)\zeta(2s)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tau_s(|n|) \sqrt{y} K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi|n|y) e^{2\pi i n x}, \end{aligned}$$

где

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

— дзета-функция Римана. Отметим также, что из соотношения мультипликативности для операторов Гекке следуют равенства

$$\begin{aligned} \lambda_j(n_1)\lambda_j(n_2) &= \sum_{l \setminus \text{НОД}(n_1, n_2)} \lambda_j\left(\frac{n_1 n_2}{l^2}\right), \\ \tau_s(n_1)\tau_s(n_2) &= \sum_{l \setminus \text{НОД}(n_1, n_2)} \tau_s\left(\frac{n_1 n_2}{l^2}\right). \end{aligned}$$

Следующее утверждение доказано в [5].

ТЕОРЕМА 1. Пусть d — отрицательный дискриминант и $\psi : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ произвольная функция, для которой при некотором $\delta > 0$

$$\psi(y) \ll y^{\frac{1}{2}+\delta}, \quad y \rightarrow 0.$$

Тогда для любого целого $m \neq 0$

$$\Omega_d(\Psi_m) = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{q}} S_d(q; m) \psi\left(\frac{\pi|m|\sqrt{|d|}}{q}\right),$$

где

$$\Psi_m(z) = \sum_{M \in \Gamma_{\infty} \setminus \Gamma} \text{Im}^{\frac{1}{2}} M(z) \psi(2\pi|m|\text{Im} M(z)) e^{2\pi i m \text{Re} M(z)},$$

и для $m = 0$

$$\Omega_d(\Psi_0) = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{q}} S_d(q; m) \psi\left(\frac{\sqrt{|d|}}{2q}\right),$$

где

$$\Psi_0(z) = \sum_{M \in \Gamma_{\infty} \setminus \Gamma} \text{Im}^{\frac{1}{2}} M(z) \psi(\text{Im} M(z)).$$

В той же работе [5] доказано еще одно утверждение

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\psi : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ непрерывная функция, для которой при некотором $\delta > 0$

$$\psi(y) \ll y^{\frac{1}{2}+\delta} \quad (y \rightarrow 0), \quad \psi(y) \ll y^{-\delta} \quad (y \rightarrow \infty),$$

а также для любого вещественного t

$$v(t) = ch \frac{\pi t}{2} \int_0^{\infty} \psi(y) K_{it}(y) \frac{dy}{y} \ll (1 + |t|)^{-2-\delta}.$$

Тогда для любого целого $m \neq 0$ и $z \in \mathbb{H}$

$$\begin{aligned} & \sum_{M \in \Gamma_{\infty} \setminus \Gamma} \text{Im}^{\frac{1}{2}} M(z) \psi(2\pi|m|\text{Im} M(z)) e^{2\pi i m \text{Re} M(z)} = \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} v(\chi_j) \overline{\rho_j(m)} \frac{1}{ch \frac{\pi \chi_j}{2}} u_j(z) + \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} v(t) \overline{\pi^{it} \tau_{\frac{1}{2}+it}(|m|)} \frac{E\left(z; \frac{1}{2} + it\right)}{ch \frac{\pi t}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2} + it\right) \zeta(1 + 2it)} dt. \end{aligned}$$

Из теоремы (2) непосредственно следует утверждение:

ТЕОРЕМА 3. Пусть ψ и v такие же, как в теореме (2). Тогда для любого отрицательного дискриминанта d и любого целого $m \neq 0$

$$\begin{aligned} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{q}} S_d(q; m) \psi \left(\frac{\pi |m| \sqrt{|d|}}{q} \right) &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{v(\chi_j)}{\operatorname{ch} \frac{\pi \chi_j}{2}} \overline{\rho_j(m)} \Omega_d(u_j) + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(t)}{\operatorname{ch} \frac{\pi t}{2}} \overline{\left(\frac{\pi^{it} \tau_{\frac{1}{2}+it}(|m|)}{\Gamma(\frac{1}{2}+it) \zeta(1+2it)} \right)} \Omega_d \left(E \left(\dots; \frac{1}{2} + it \right) \right) dt. \end{aligned}$$

Теперь докажем главный результат работы.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\psi : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ бесконечно дифференцируемая функция с компактным носителем. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ и целого $m \neq 0$

$$\sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{q}} S_d(q; m) \psi \left(\frac{2\pi |m| \sqrt{|d|}}{q} \right) \ll_{\varepsilon} |d|^{\frac{3}{16}+\varepsilon} |m|^{\frac{1}{8}-\frac{1}{64}+\varepsilon}.$$

Доказательство. Напомним интегральное представление для функции Макдональда

$$K_{\nu}(y) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re} s = \sigma > |\operatorname{Re} \nu|} \Gamma \left(\frac{s+\nu}{2} \right) \Gamma \left(\frac{s-\nu}{2} \right) \left(\frac{y}{2} \right)^{-s} ds.$$

Воспользовавшись им, получим

$$\begin{aligned} v(t) &= \operatorname{ch} \frac{\pi t}{2} \int_0^{\infty} \psi(y) K_{it}(y) \frac{dy}{y} = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \operatorname{ch} \frac{\pi t}{2} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re} s = \sigma > 0} \int_0^{\infty} \psi(y) \Gamma \left(\frac{s+it}{2} \right) \Gamma \left(\frac{s-it}{2} \right) \left(\frac{y}{2} \right)^{-s} dy ds = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \operatorname{ch} \frac{\pi t}{2} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re} s = \sigma > 0} 2^s \Gamma \left(\frac{s+it}{2} \right) \Gamma \left(\frac{s-it}{2} \right) \hat{\psi}(s) ds, \end{aligned}$$

где

$$\hat{\psi}(s) = \int_0^{\infty} \psi(y) y^{-s} dy.$$

Интегрированием по частям для $0 < \operatorname{Re} s = \sigma < 1$ и любого $A > 0$ получаем оценку

$$\hat{\psi}(s) \ll_A (1 + |s|)^{-A}.$$

Поэтому $\forall t \in \mathbb{R}$

$$v(t) \ll_A (1 + |t|)^{-A}.$$

Применяя оценки (7) и (см. [12])

$$\Omega_d(u_j) \ll_{\varepsilon} \chi_j^{\frac{15}{2}} |d|^{\frac{3}{16}+\varepsilon},$$

получим утверждение теоремы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hooley C. On the number of divisors of quadratic polynomials. *Acta Math.*, 1963, V.110, № 1–2, p. 97–114 (Русский перевод: сб. Математика, 1968, 12:5, с. 3–18.)
2. Быковский В. А. Асимптотические свойства целых точек (a_1, a_2) , удовлетворяющих сравнению $a_1 a_2 \equiv l \pmod{q}$. В кн.: Записки научных семинаров ЛОМИ. Л.: Наука, 1981, т. 112, с. 5–25.
3. Быковский В. А. Об одной формуле суммирования в спектральной теории автоморфных функций и ее применения в аналитической теории чисел. Докл. АН СССР, 1982, т. 264, Т. 2, с. 275–277.
4. Быковский В. А. Спектральные разложения некоторых автоморфных функций и их теоретико-числовые приложения. В кн.: Записки научных семинаров ЛОМИ. Л.: Наука, 1984, с. 15–33.
5. Быковский В. А. Арифметические средние и L -ряды автоморфных форм. Хабаровск, Издательство ТОГУ, 2017 г., 68 с.
6. Zagier D. Eisenstein series and the Riemann zeta-function, *Automorphic Forms, Representation Theory and Arithmetic*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1979. pp. 275–301.
7. Гаусс К.Ф. Труды по теории чисел. М., 1950, 979 с.
8. Дирихле П. Лекции по теории чисел. М., Л., 1936, 404 с.
9. Иванец Х., Ковальский Э. Аналитическая теория чисел. М.: МЦНМО, 2014 (Перевод с английского: Iwaniec H., Kowalski E. *Analytic Number Theory*, Colloquium publications (AMS), v. 53, 2004).
10. Kim H. and Sarnak P. Refined estimates towards the Ramanujan and Selberg conjectures. *G. Amer. Math. Soc.*, 16, 2003, p. 175–181.
11. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, Т.1 (1973); Т.2 (1974). (Перевод с английского: Bateman H. and Erdelyi, *Higher Transcendental functions*, Mc Graw-Hill BOOK COMPANY, vol. 1, 2, 1953).
12. Liu S. and Hasri R. The average of the divisor function over values of quadratic polynomial. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 143, 2015, p. 4143–4160.

REFERENCES

1. Hooley, C. 1963, “On the number of divisors of quadratic polynomials”, *Acta Math.*, 110(1–2), 97–114. (Russian translation: collection Mathematics, 1968, 12:5, pp. 3–18.)
2. Bykovsky, V. A. 1981, “Asymptotic properties of integer points (a_1, a_2) satisfying the relation $a_1 a_2 \equiv l \pmod{q}$ ”, In *Notes of Scientific Seminars of LOMI*, L.: Nauka, 112, pp. 5–25.
3. Bykovsky, V. A. 1982, “On a summation formula in the spectral theory of automorphic functions and its applications in analytic number theory”, *Dokl. AN USSR*, 264(2), pp. 275–277.
4. Bykovsky, V. A. 1984, “Spectral decompositions of some automorphic functions and their number-theoretic applications”, In *Notes of Scientific Seminars of LOMI*, L.: Nauka, pp. 15–33.

5. Bykovsky, V. A. 2017, “Arithmetic means and L -series of automorphic forms”, *Khabarovsk: Publishing House of TOGU*, 68 p.
6. Zagier, D. 1979, “Eisenstein series and the Riemann zeta-function”, In *Automorphic Forms, Representation Theory and Arithmetic*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, pp. 275–301.
7. Gauss, K. F. 1950, “Works on number theory”, *M: Nauka*, 979 p.
8. Dirichlet, P. 1936, “Lectures on number theory”, *M: Leningrad*, 404 p.
9. Iwaniec, H., & Kowalski, E. 2004, “Analytic Number Theory”, *Colloquium Publications* (AMS), 53.
10. Kim, H., & Sarnak, P. 2003, “Refined estimates towards the Ramanujan and Selberg conjectures”, *G. Amer. Math. Soc.*, 16, pp. 175–181.
11. Bateman, H., & Erdelyi, A. 1953, “Higher Transcendental Functions”, *McGraw-Hill Book Company*, Vol. 1, 2.
12. Liu, S., & Hasri, R. 2015, “The average of the divisor function over values of quadratic polynomial”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 143, pp. 4143–4160.

Получено: 14.12.2024

Принято в печать: 10.03.2025

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 26. Выпуск 1.

УДК 511.42

DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-1-99-115

Гладкое многообразие сдвинутых решёток¹

Е. Н. Смирнова, О. А. Пихтилькова, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва,
Н. М. Добровольский

Смирнова Елена Николаевна — Оренбургский государственный университет (г. Оренбург).

e-mail: helenash@mail.ru

Пихтилькова Ольга Александровна — кандидат физико-математических наук, доцент, Российский технологический университет МИРЭА (г. Москва).

e-mail: opikhtilkova@mail.ru

Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Реброва Ирина Юрьевна — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: i_rebrova@mail.ru

Добровольский Николай Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: dobrovol@tsput.ru

Аннотация

В предыдущей работе авторов заложены основы теории гладких многообразий теоретико-числовых решёток. Рассмотрен случай произвольных многомерных решёток.

В данной статье рассмотрен общий случай сдвинутых многомерных решёток.

Отметим, что геометрия метрического пространств многомерных решёток гораздо сложнее, чем геометрия обычного евклидова пространства. Это видно из парадокса неаддитивности длины отрезка в пространстве сдвинутых одномерных решёток. Из наличия этого парадокса следует, что стоит открытой проблема описания геодезических линий в пространствах многомерных решёток, а также в нахождении формулы для длины дуг линий в этих пространствах. Естественно, что было бы интересно не только описание этих объектов, но и получение теоретико-числовой интерпретации этих понятий.

Дальнейшим направлением исследований может быть изучение аналитического продолжения гиперболической дзета-функции на пространствах сдвинутых многомерных решёток. Как известно, аналитическое продолжение гиперболической дзета-функции решётки построено для произвольной декартовой решётки. Не изучен даже вопрос о непрерывности этих аналитических продолжений в левой полуплоскости на пространствах решёток. Всё это, на наш взгляд, актуальные направления дальнейших исследований.

Ключевые слова: алгебраические решётки, метрическое пространство решёток.

Библиография: 25 названий.

¹Работа выполнена по гранту РФФИ № 23-21-00317 «Геометрия чисел и диофантовы приближения в теоретико-числовом методе в приближенном анализе»

Для цитирования:

Смирнова, Е. Н., Пихтилькова, О. А., Добровольский, Н. Н., Реброва, И. Ю., Добровольский, Н. М. Гладкое многообразие сдвинутых решёток // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 1, с. 99–115.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 26. No. 1.

UDC 511.42

DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-1-99-115

Smooth variety of lattices

Е. Н. Смирнова, О. А. Пихтилькова, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский

Smirnova Elena Nikolaevna — Orenburg State University (Orenburg).

e-mail: helenash@mail.ru

Pikhtilkova Olga Alexandrovna — candidate of physics and mathematics sciences, docent, Russian technological University MIREA (Moscow).

e-mail: opikhtilkova@mail.ru

Dobrovol'skii Nikolai Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University, Tula State University (Tula).

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Rebrova Irina Yuryevna — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: i_rebrova@mail.ru

Dobrovol'skii Nikolai Mihailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: dobrovol@tspu.ru

Abstract

In the previous work of the authors, the foundations of the theory of smooth manifolds of number-theoretic lattices were laid. The case of arbitrary multidimensional lattices was considered.

This article considers the general case of shifted multidimensional lattices.

Note that the geometry of the metric spaces of multidimensional lattices is much more complicated than the geometry of ordinary Euclidean space. This is evident from the paradox of non-additivity of the length of a segment in the space of shifted one-dimensional lattices. From the presence of this paradox it follows that the problem of describing geodesic lines in spaces of multidimensional lattices remains open, as well as finding a formula for the length of arcs of lines in these spaces. Naturally, it would be interesting not only to describe these objects, but also to obtain a number-theoretic interpretation of these concepts.

A further direction of research may be the study of the analytic continuation of the hyperbolic zeta function on the spaces of shifted multidimensional lattices. As is known, the analytic continuation of the hyperbolic zeta functions of lattices are constructed for an arbitrary Cartesian lattice. Even the question of the continuity of these analytical continuations in the left half-plane on the space of lattices has not been studied. All of these, in our opinion, are relevant directions for further research.

Keywords: algebraic lattices, a metric space lattices.

Bibliography: 25 titles.

For citation:

Smirnova, E. N., Pikhtilkova, O. A., Dobrovol'skii, N. N., Rebrova, I. Yu., Dobrovol'skii, N. M. 2025, "Smooth variety of lattices", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 1, pp. 99–115.

1. Введение

В предыдущих работах авторов [20]–[22] заложены основы теории гладких многообразий теоретико-числовых решёток. Рассмотрены: простейший случай одномерных решёток, случай одномерных сдвинутых решёток и случай произвольных многомерных решёток.

Как известно (см. [14], стр. 165), множество всех s -мерных решёток PR_s является полным метрическим пространством относительно метрики

$$\rho(\Lambda, \Gamma) = \max(\ln(1 + \mu), \ln(1 + \nu)) = \ln(1 + \max(\mu, \nu)), \quad (1)$$

где

$$\mu = \inf_{\Gamma=A \cdot \Lambda} \|A - I\|, \quad \nu = \inf_{\Lambda=B \cdot \Gamma} \|B - I\|.$$

Целью данной работы является рассмотрение общего случая гладкого многообразия сдвинутых многомерных решёток.

На протяжении всей работы через $I = I_s$ будем обозначать единичную квадратную матрицу порядка $s \geq 1$, $\mathfrak{M}_s(\mathbb{R})$ множество всех вещественных квадратных матриц порядка s , а $\mathfrak{M}_s^*(\mathbb{R})$ — подмножество невырожденных матриц. Значение порядка s каждый раз будет видно из контекста.

2. Метрики на пространстве сдвинутых решёток

Обозначим через CPR_s множество всех сдвинутых решёток

$$\Lambda(\vec{x}) = \Lambda + \vec{x},$$

где $\Lambda \in PR_s$ — произвольная s -мерная вещественная решётка и $\vec{x} \in R^s$ — произвольный вектор.

Из свойств решётки непосредственно вытекает, что $\Lambda(\vec{x} + \vec{y}) = \Lambda(\vec{x})$ для любого $\vec{y} \in \Lambda$.

Приведём без доказательства несколько лемм и теорем из монографии [7].

ЛЕММА 1. Если

$$\Lambda_1 + \vec{x}_1 = \Lambda_2 + \vec{x}_2, \quad (2)$$

то $\Lambda_1 = \Lambda_2$ и $\vec{x}_1 - \vec{x}_2 \in \Lambda_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [7], стр. 59. $\square$

Для задания структуры метрического пространства на множестве CPR_s определим для произвольного $a \neq 0$ вложение

$$\varphi_a : CPR_s \rightarrow PR_{s+1}$$

следующим образом.

Пусть $\Lambda \in PR_s$, $\vec{\lambda}_j = (\lambda_{j1}, \dots, \lambda_{js})$ ($j = 1, 2, \dots, s$) — ее базис и $\vec{x} = (x_1, \dots, x_s) \in R^s$ — произвольный вектор. решётку $\varphi_a(\Lambda + \vec{x})$ зададим базисом $\vec{\lambda}'_j$ ($j = 1, \dots, s+1$), где $\vec{\lambda}'_j = (\lambda_{j1}, \dots, \lambda_{js}, 0)$ ($j = 1, 2, \dots, s$), $\vec{\lambda}'_{s+1} = (x_1, \dots, x_s, a)$.

ЛЕММА 2. Решётка $\varphi_a(\Lambda + \vec{x})$ определена однозначно и не зависит от выбора базиса $\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_s$ или замены вектора $\vec{x}$ на $\vec{x} + \vec{y}$, где $\vec{y} \in \Lambda$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [7], стр. 60. $\square$

Обозначим через $PR_{s+1}(a)$ множество всех решёток $\Lambda(a)$ таких, что для любой точки $\vec{x} \in \Lambda(a)$ имеем $x_{s+1} = n \cdot a$, $n \in \mathbb{Z}$ и найдется хотя бы одна ненулевая точка $\vec{x} \in \Lambda(a)$ такая,

что $x_{s+1} = a$. Будем говорить, что решётка $\Lambda(a)$ имеет канонический базис, если её базисная матрица имеет вид

$$A(\Lambda(a)) = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \dots & \lambda_{s1} & x_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \lambda_{1s} & \dots & \lambda_{ss} & x_s \\ 0 & \dots & 0 & a \end{pmatrix}.$$

ЛЕММА 3. Пусть $\vec{\lambda}_1 = (\lambda_{11}, \dots, \lambda_{1s}, n_1a)$ и $\vec{\lambda}_2 = (\lambda_{21}, \dots, \lambda_{2s}, n_2a)$ два линейно независимых вектора и $n_1 = qn_2 + r$, $0 \leq r < |n_2|$, тогда вектора $\vec{\lambda}_2$ и $\vec{\lambda}_3 = \vec{\lambda}_1 - q\vec{\lambda}_2 = (\lambda_{31}, \dots, \lambda_{3s}, ra)$ линейно независимы и справедливо равенство решёток $\Lambda(\vec{\lambda}_1, \vec{\lambda}_2) = \Lambda(\vec{\lambda}_3, \vec{\lambda}_2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, $\vec{\lambda}_1 = \vec{\lambda}_3 + q\vec{\lambda}_2$. Отсюда следуют утверждения леммы. $\square$

ЛЕММА 4. Любая решётка $\Lambda(a) \in PR_{s+1}(a)$ имеет канонический базис и является образом сдвинутой решётки $\Lambda + \vec{x} \in CPR_s$ при отображении $\varphi_a(\Lambda + \vec{x})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, пусть решётка $\Lambda(a) \in PR_{s+1}(a)$ имеет базис с базисной матрицей

$$B(\Lambda(a)) = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \dots & \lambda_{s1} & \lambda_{s+11} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \lambda_{1s} & \dots & \lambda_{ss} & \lambda_{s+1s} \\ n_1a & \dots & n_sa & n_{s+1}a \end{pmatrix}.$$

Без ограничения общности можно считать, что все величины n_j неотрицательные ($j = 1, \dots, s+1$). Обозначим через $n(B(\Lambda(a)))$ минимальное значение ненулевых значений n_j . Без ограничения общности можно считать, что $n = n_{s+1}$. Ясно, что $n > 0$, так как в противном случае вектора $\vec{\lambda}_j$ ($j = 1, \dots, s+1$) были бы линейно зависимые.

Нетрудно видеть, что $(n_1, \dots, n_{s+1}) = 1$, так как иначе при $(n_1, \dots, n_{s+1}) = d > 1$ все точки решётки $\vec{x} \in \Lambda(a)$ будут иметь вид $x_{s+1} = nda$, $n \in \mathbb{Z}$, что противоречит определению решётки $\Lambda(a) \in PR_{s+1}(a)$. Отсюда следует, что найдутся целые $c_1, \dots, c_{s+1}$ такие, что $c_1n_1 + \dots + c_{s+1}n_{s+1} = 1$.

Пусть $n_j = q_jn + r_j$, $0 \leq r_j < n$ ($j = 1, \dots, s$), тогда по лемме 3 базисом решётки $\Lambda(a)$ будет система векторов $\vec{\lambda}'_j = \vec{\lambda}_j - q_j\vec{\lambda}_{s+1} = (\lambda_{j1} - q_j\lambda_{s+11}, \dots, \lambda_{js} - q_j\lambda_{s+1s}, r_ja)$, ($j = 1, \dots, s$), $\vec{\lambda}'_{s+1} = \vec{\lambda}_{s+1}$. Нетрудно видеть, что либо базисная матрица²

$$B'(\Lambda(a)) = \begin{pmatrix} \vec{\lambda}'_1{}^\top & \dots & \vec{\lambda}'_{s+1}{}^\top \end{pmatrix}$$

задает канонический базис в случае $r_1 = \dots = r_s = 0$, тогда обязательно $n = n_{s+1} = 1$, либо величина $n(B'(\Lambda(a))) < n(B(\Lambda(a)))$. Отсюда следует, что, повторяя конечное число раз операцию приведения базисной матрицы, мы придём к базисной матрице, задающей канонический базис. $\square$

Из доказанной леммы следует, что каждая решётка из $PR_{s+1}(a)$ является образом сдвинутой решётки при отображении $\varphi_a : CPR_s \rightarrow PR_{s+1}$. Следовательно, можно рассмотреть обратное отображение

$$\varphi_a^{-1} : PR_{s+1}(a) \rightarrow CPR_s.$$

ЛЕММА 5. Решётка $\varphi_a(\Lambda + \vec{x})$ определена однозначно и не зависит от выбора базиса $\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_s$ или замены вектора $\vec{x}$ на $\vec{x} + \vec{y}$, где $\vec{y} \in \Lambda$.

²Здесь и далее $\vec{x}^\top$ обозначает вектор-столбец, а $A^\top$ — транспонированную матрицу.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [7], стр. 60. $\square$

Теперь для любого $a \neq 0$ на пространстве CPR_s можно задать метрику $\rho_a(\Lambda + \vec{x}, \Gamma + \vec{y})$ с помощью вложения φ_a и метрики $\rho(\cdot, \cdot)$ на пространстве PR_{s+1} равенством

$$\rho_a(\Lambda + \vec{x}, \Gamma + \vec{y}) = \rho(\varphi_a(\Lambda + \vec{x}), \varphi_a(\Gamma + \vec{y})). \quad (2)$$

ТЕОРЕМА 1. Функция $\rho_a(\Lambda + \vec{x}, \Gamma + \vec{y})$ задает метрику на пространстве CPR_s .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [7], стр. 61–62. $\square$

После введения метрики на пространстве сдвинутых решёток сразу возникает вопрос о вычислении расстояния между двумя сдвигами одной и той же решётки. Второй естественный вопрос: как согласована метрика в пространстве сдвинутых решёток с уже имеющейся метрикой на подпространстве решёток. Перейдем к решению этих вопросов.

ЛЕММА 6. Если решётка $\Lambda \in PR_s$ задана s -мерной невырожденной матрицей $A : \Lambda = A \cdot \mathbb{Z}^s$, то решётка $\varphi_a(\Lambda + \vec{x})$ переводится в решётку $\varphi_a(\Lambda + \vec{y})$ линейным преобразованием с блочной матрицей

$$B(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{pmatrix} & \frac{y_1 - x_1}{a} \\ & \vdots \\ & \frac{y_s - x_s}{a} \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

где I — единичная s -мерная матрица.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [7], стр. 63. $\square$

Лемма 6 допускает простое обобщение.

ЛЕММА 7. Если решётки Λ и $\Gamma \in PR_s$ заданы s -мерными невырожденными матрицами A и B , соответственно:

$$\Lambda = A \cdot \mathbb{Z}^s, \quad \Gamma = B \cdot \mathbb{Z}^s,$$

то решётка $\varphi_a(\Lambda + \vec{x})$ переводится в решётку $\varphi_a(\Gamma + \vec{y})$ линейным преобразованием с блочной матрицей

$$C(A, B, \vec{x}, \vec{y}) = \begin{pmatrix} & (\vec{z})_1 \\ & \vdots \\ & (\vec{z})_s \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{где } \vec{z} = \frac{-BA^{-1}\vec{x} + \vec{y}}{a}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [7], стр. 64. $\square$

Рассмотрим множество блочных матриц $\mathfrak{MP}_{s+1}$, заданное равенством

$$\mathfrak{MP}_{s+1} = \left\{ M \mid M \in \mathfrak{M}_{s+1}(\mathbb{R}), M = \begin{pmatrix} M_1 & \vec{z} \\ \vec{0} & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

где невырожденная матрица $M = M(M_1, \vec{z})$ имеет вид

$$M(M_1, \vec{z}) = \begin{pmatrix} & (\vec{z})_1 \\ & \vdots \\ & (\vec{z})_s \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det M_1 \neq 0, \quad M_1 \in \mathfrak{M}_s^*(\mathbb{R}), \quad \vec{z} \in \mathbb{R}^s.$$

Ясно, что $I_{s+1} \in \mathfrak{MP}_{s+1}$. Нам также потребуется множество $\mathfrak{M}_{s \times (s+1)}(\mathbb{R})$ прямоугольных матриц порядка $s \times (s+1)$ таких, что любая матрица $M \in \mathfrak{MP}_{s+1}$ будет иметь вид $M = \begin{pmatrix} M_1 & \vec{z} \\ \vec{0} & 1 \end{pmatrix}$, где $M_2 = \begin{pmatrix} M_1 & \vec{z} \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{s \times (s+1)}(\mathbb{R})$. Нетрудно видеть, что задано отображение $\sigma : \mathfrak{MP}_{s+1} \rightarrow \mathfrak{M}_{s \times (s+1)}(\mathbb{R})$ по формуле $\sigma(M) = M_2 = (m_{2ij})_{1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq s+1}$. Обратное преобразование $\sigma^{-1} : \mathfrak{M}_{s \times (s+1)}(\mathbb{R}) \mathfrak{MP}_{s+1} \rightarrow \mathfrak{MP}_{s+1}$ задаётся для матрицы $M_2 = \begin{pmatrix} M_1 & \vec{z} \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{s \times (s+1)}(\mathbb{R})$ равенством

$$\sigma^{-1}(M_2) = \begin{pmatrix} M_1 & \vec{z} \\ \vec{0} & 1 \end{pmatrix}.$$

Пространство $\mathfrak{M}_{s \times (s+1)}(\mathbb{R})$ является нормированным вещественным пространством размерности $s^2 + s$ с нормой

$$\|M_2\| = (s+1) \cdot \max_{1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq s+1} |m_{2ij}|.$$

Следовательно и пространство $\mathfrak{MP}_{s+1}$ является нормированным вещественным пространством размерности $s^2 + s$.

ЛЕММА 8. *Для любой матрицы $M \in \mathfrak{MP}_{s+1}$ пространство решёток $PR_{s+1}(a)$ переходит в себя под действием линейного преобразования с матрицей M .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, пусть $\Lambda(a)$ произвольная решётка из $PR_{s+1}(a)$ с базисной матрицей

$$A(\Lambda) = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \dots & \lambda_{s1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{1s} & \dots & \lambda_{ss} \end{pmatrix}, \quad A(\Lambda(a)) = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \dots & \lambda_{s1} & x_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \lambda_{1s} & \dots & \lambda_{ss} & x_s \\ 0 & \dots & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & & x_1 \\ & A(\Lambda) & & \vdots \\ & & & x_s \\ 0 & \dots & 0 & a \end{pmatrix},$$

тогда

$$M \cdot A(\Lambda(a)) = \begin{pmatrix} & (M_1 \cdot \vec{x})_1 + a \cdot (\vec{z})_1 \\ M_1 \cdot A(\Lambda) & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & (M_1 \cdot \vec{x})_s + a \cdot (\vec{z})_s \\ & & & a \end{pmatrix},$$

что и доказывает утверждение леммы. $\square$

Для дальнейшего нам потребуется общее свойство метрики на PR_s , позволяющее, в принципе, за конечное число операций вычислять расстояние между двумя решётками, заданными своими базисными матрицами. Обозначим через $U_s(\rho)$ множество матриц W из $SL_s(\mathbb{Z})$ с $\|W\| \leq \rho$.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть решётки Λ и Γ заданы своими матрицами A и B , соответственно:*

$$\Lambda = A \cdot \mathbb{Z}^s, \quad \Gamma = B \cdot \mathbb{Z}^s,$$

и величины μ_1 и ν_1 вычисляются по формулам:

$$\mu_1 = \|B^{-1}\| \cdot \|A\| \cdot (\|BA^{-1} - I\| + 1),$$

$$\nu_1 = \|A^{-1}\| \cdot \|B\| \cdot (\|AB^{-1} - I\| + 1),$$

тогда

$$\rho(\Lambda, \Gamma) = \max(\ln(1 + \mu), \ln(1 + \nu)) \leq$$

$$\leq \max(\ln(1 + \|BA^{-1} - I\|), \ln(1 + \|AB^{-1} - I\|)),$$

где

$$\mu = \min_{W \in U_s(\mu_1)} \|BWA^{-1} - I\|, \quad \nu = \min_{W \in U_s(\nu_1)} \|AWB^{-1} - I\|,$$

и найдутся матрицы $A(\Lambda, \Gamma)$, $B(\Lambda, \Gamma)$ такие, что

$$\Gamma = A(\Lambda, \Gamma) \cdot \Lambda, \quad \Lambda = B(\Lambda, \Gamma) \cdot \Gamma,$$

$$\rho(\Lambda, \Gamma) = \max(\ln(1 + \|A(\Lambda, \Gamma) - I\|), \ln(1 + \|B(\Lambda, \Gamma) - I\|)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [7], стр. 65, 66. $\square$

Теорема 2 позволяет решить вопрос о вычислении расстояния между сдвинутыми решётками в ε -окрестности для достаточно малого ε . Для этого прежде всего введем следующие обозначения.

Пусть $M_{s,\varepsilon}(\mathbb{R})$ — множество всех вещественных квадратных матриц A порядка s с операторной нормой $\|A\| = s \cdot \max_{1 \leq i, j \leq s} |a_{ij}| \leq \varepsilon$.

Так как при $0 < \varepsilon < 1$ для любого $A \in M_{s,\varepsilon}(\mathbb{R})$ матрица $I + A$ обратима и

$$(I + A)^{-1} = I + A + A^2 + \dots + A^n + \dots = I + A^*, \quad \|A^*\| \leq \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon},$$

то при $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ через $M_{s,\varepsilon}^*(\mathbb{R})$ обозначим множество всех вещественных матриц A порядка s таких, что $\|A\| \leq \varepsilon$ и $\|A^*\| \leq \varepsilon$, где $A^* = (I + A)^{-1} - I$. Из определения следует, что $M_{s,\varepsilon}^*(\mathbb{R}) \subset M_{s,\varepsilon}(\mathbb{R})$.

Как обычно, для любого действительного числа x расстояние до ближайшего целого обозначается через $\|x\|$. Эта величина выражается через дробную часть x по формуле

$$\|x\| = \min(\{x\}, 1 - \{x\}).$$

Непрерывная периодическая функция $\|x\|$ задает метрику на окружности $T = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ единичной длины. Аналогично, на s -мерном торе $T^s = \mathbb{R}^s/\mathbb{Z}^s$ можно задать метрику

$$\rho((\vec{x}), (\vec{y})) = \max_{1 \leq j \leq s} \|x_j - y_j\|,$$

где через $(\vec{x})$ обозначена сдвинутая фундаментальная решётка $\vec{x} + \mathbb{Z}^s$ — класс эквивалентности, порожденный точкой $\vec{x} \in \mathbb{R}^s$. Окрестность радиуса ε точки $(\vec{x})$ на T^s обозначим через

$$T^s(\vec{x}, \varepsilon) = \{(\vec{y}) \mid \max_{1 \leq j \leq s} \|x_j - y_j\| \leq \varepsilon\}.$$

Рассмотрим наряду с решёткой Λ ее взаимную решётку

$$\Lambda^* = \{\vec{x} \mid (\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{Z}, \vec{y} \in \Lambda\}.$$

Как известно, если

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \dots & \lambda_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{s1} & \dots & \lambda_{ss} \end{pmatrix}$$

— матрица из базисных векторов $\vec{\lambda}_j = (\lambda_{j1}, \dots, \lambda_{js})$, то

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_{11}^* & \dots & \lambda_{1s}^* \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{s1}^* & \dots & \lambda_{ss}^* \end{pmatrix}$$

— матрица из базисных векторов $\vec{\lambda}_j^* = (\lambda_{1j}^*, \dots, \lambda_{sj}^*)$ взаимного базиса взаимной решётки Λ^* , который определяется условием

$$(\vec{\lambda}_j, \vec{\lambda}_j^*) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

Определим величину

$$M(\Lambda) = \min_{\Lambda = A^T \cdot \mathbb{Z}^s} \|A\| \cdot \|A^{-1}\|,$$

которую по аналогии с мерой обусловленности системы линейных уравнений будем называть мерой обусловленности решётки. В силу дискретности специальной группы $SL_s(\mathbb{Z})$ существует матрица $A(\Lambda)$ такая, что $\Lambda = A(\Lambda)^T \cdot \mathbb{Z}^s$ и $M(\Lambda) = \|A(\Lambda)\| \cdot \|A(\Lambda)^{-1}\|$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $0 < \varepsilon < \frac{1}{3 \cdot M(\Lambda)}$ и отображение ψ_Λ задано на $M_{s,\varepsilon}^*(\mathbb{R})$ по правилу

$$\psi_\Lambda(B) = (I + B) \cdot \Lambda, \quad B \in M_{s,\varepsilon}^*(\mathbb{R}),$$

тогда $\psi_\Lambda(B)$ — взаимнооднозначное отображение $M_{s,\varepsilon}^*(\mathbb{R})$ на $U(\Lambda, \ln(1 + \varepsilon))$, где

$$U(\Lambda, \delta) = \{\Gamma \in PR_s \mid \rho(\Lambda, \Gamma) \leq \delta\},$$

и для любого $B \in M_{s,\varepsilon}^*(\mathbb{R})$ справедливо равенство

$$\rho(\Lambda, \psi_\Lambda(B)) = \max(\ln(1 + \|B\|), \ln(1 + \|B^*\|)),$$

где $B^* = (I + B)^{-1} - I$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [7], стр. 68, 69. $\square$

ЛЕММА 9. Для меры обусловленности решётки $\varphi_a(\Lambda + A(\Lambda) \cdot \vec{x}) \in PR_{s+1}$, где $\vec{x} \in [0; 1]^s$ справедливо неравенство

$$M(\varphi_a(\Lambda + A(\Lambda) \cdot \vec{x})) \leq (s + 1)^2 \cdot \max\left(\frac{M(\Lambda)}{s}, 1, \frac{\|A(\Lambda)\|}{a}, \frac{M(\Lambda) \cdot a}{s \cdot \|A(\Lambda)\|}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [7], стр. 69, 70. $\square$

При фиксированных $\Lambda \in PR_s$, $\vec{x} \in G_s$ и $a > 0$ на декартовом произведении $M_{s,\varepsilon}^*(\mathbb{R}) \times T^s(\vec{0}, \varepsilon)$ зададим отображение $\Theta_{\Lambda, \vec{x}}$ в CPR_s по правилу

$$\Theta_{\Lambda, \vec{x}}(B, \vec{y}) = (I + B) \cdot (\Lambda + A(\Lambda) \cdot (\vec{x} + \vec{y})),$$

$$B \in M_{s,\varepsilon}^*(\mathbb{R}), \quad \vec{y} \in T^s(\vec{0}, \varepsilon).$$

Через $U(\Lambda + \vec{z}, \delta)$ обозначим δ – окрестность сдвинутой решётки $\Lambda + \vec{z}$:

$$U(\Lambda + \vec{z}, \delta) = \{\Gamma + \vec{w} \in CPR_s \mid \rho_\alpha(\Lambda + \vec{z}, \Gamma + \vec{w}) \leq \delta\}.$$

Зададим две блочные вещественные квадратные матрицы порядка $s + 1$ формулами

$$C(B, \vec{y}) = \begin{pmatrix} & & z_1 \\ & I + B & \vdots \\ & & z_s \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\vec{z} = (z_1, \dots, z_s)^T = \frac{(I + B) \cdot A(\Lambda) \cdot \vec{y}}{a},$$

$$C^*(B, \vec{y}) = \begin{pmatrix} & & w_1 \\ & (I + B)^{-1} & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\vec{w} = (w_1, \dots, w_s)^T = -\frac{(I + B)^{-1} \cdot A(\Lambda) \cdot \vec{y}}{a}.$$

ТЕОРЕМА 4. При

$$0 < \varepsilon < \frac{\min\left(\frac{1}{2}, \frac{a}{2 \cdot (s+1) \|A(\Lambda)\|}\right)}{3 \cdot M(\varphi_a(\Lambda + A(\Lambda) \cdot \vec{x}))}$$

справедливы вложения

$$\begin{aligned} U(\Lambda + A(\Lambda) \cdot \vec{x}, \delta_1) &\subset \Theta_{\Lambda, \vec{x}}(M_{s, \varepsilon}^*(\mathbb{R}) \times T^s(\vec{0}, \varepsilon)) \subset \\ &\subset U(\Lambda + A(\Lambda) \cdot \vec{x}, \delta_2) \end{aligned}$$

для любых δ_1 и δ_2 , удовлетворяющих условиям:

$$\begin{aligned} \delta_1 &\leq \ln \left(1 + \min \left(\frac{(s+1) \cdot s \cdot a}{\|A(\Lambda)\|}, \frac{(s+1) \cdot a}{\|A(\Lambda)\| + a}, \frac{(s+1) \cdot \varepsilon}{\|2 \cdot a \cdot A(\Lambda)^{-1}\|} \right) \right), \\ \delta_2 &\geq \ln \left(1 + (s+1) \max \left(\frac{\varepsilon}{s}, \frac{\|A(\Lambda)\|}{a} \cdot (\varepsilon + \varepsilon^2) \right) \right) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} &\rho_a(\Lambda + A(\Lambda) \cdot \vec{x}, (I + B) \cdot (\Lambda + A(\Lambda) \cdot (\vec{x} + \vec{y}))) = \\ &= \max \left(\ln \left(1 + (s+1) \max \left(\frac{\|B\|}{s}, \frac{\|(I + B) \cdot A(\Lambda) \cdot \vec{y}\|}{a} \right) \right) \right), \\ &\ln \left(1 + (s+1) \max \left(\frac{\|B^*\|}{s}, \frac{\|(I + B^*) \cdot A(\Lambda) \cdot \vec{y}\|}{a} \right) \right). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [7], стр. 71–75. $\square$

Обозначим через $DM_{s, \varepsilon}(\mathbb{R})$ множество всех диагональных матриц $D(d_1, \dots, d_s)$ с

$$\|D(d_1, \dots, d_s)\| \leq \varepsilon,$$

а через $DM_{s, \varepsilon}^*(\mathbb{R})$ — множество всех диагональных матриц $D(d_1, \dots, d_s)$ с

$$\|D(d_1, \dots, d_s)\| \leq \varepsilon, \quad \text{и} \quad \left\| D \left(\frac{-d_1}{1+d_1}, \dots, \frac{-d_s}{1+d_s} \right) \right\| \leq \varepsilon.$$

Так как $DM_{s, \varepsilon}^*(\mathbb{R})$ — компактное подмножество множества $M_{s, \varepsilon}^*(\mathbb{R})$, а $T^s(0, \varepsilon)$ — компактное подмножество тора, то для любой сдвинутой решётки $\Lambda + \vec{x}$ ее замкнутая ε — окрестность траектории $D_s(\mathbb{R}) \cdot (\Lambda + \vec{x})$ при достаточно малом ε будет полным метрическим пространством.

3. Топология на пространстве сдвинутых решёток

Пусть $s \geq 2$. Рассмотрим пространство CPR_s всевозможных сдвинутых полных вещественных решёток $\Lambda + \vec{x}$ в вещественном арифметическом пространстве $\mathbb{R}^s$. Таким образом, произвольная сдвинутая решётка $\Lambda + \vec{x} \in CPR_s$ имеет базис $\vec{\lambda}_1 = (\lambda_{11}, \dots, \lambda_{1s}), \dots, \vec{\lambda}_s = (\lambda_{s1}, \dots, \lambda_{ss})$ решётки Λ , где вектора $\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_s$ образуют линейно независимую систему векторов. Обозначим через $A(\Lambda)$ базисную матрицу решётки Λ :

$$A(\Lambda) = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \dots & \lambda_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{s1} & \dots & \lambda_{ss} \end{pmatrix},$$

тогда любая решётка Λ с базисной матрицей $A(\Lambda)$ получается из фундаментальной решётки $\mathbb{Z}^s$ с помощью линейного преобразования с матрицей $A(\Lambda)$:

$$\Lambda = \mathbb{Z}^s \cdot A(\Lambda), \quad \vec{y} = (y_1, \dots, y_s) = (m_1, \dots, m_s) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \dots & \lambda_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{s1} & \dots & \lambda_{ss} \end{pmatrix} \in \Lambda, \quad \vec{m} = (m_1, \dots, m_s) \in \mathbb{Z}^s.$$

Образ сдвинутой решётки $\Lambda + \vec{x} \in CPR_s$ при отображении $\varphi_a : CPR_s \rightarrow PR_{s+1}$ задается базисной матрицей $A(\Lambda, \vec{x})$:

$$A(\Lambda, \vec{x}) = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \dots & \lambda_{1s} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \lambda_{s1} & \dots & \lambda_{ss} & 0 \\ x_1 & \dots & x_s & a \end{pmatrix}, \quad \varphi_a(\Lambda + \vec{x}) = \mathbb{Z}^{s+1} \cdot A(\Lambda, \vec{x}) = A(\Lambda, \vec{x})^\top \cdot \mathbb{Z}^{s+1}.$$

Хорошо известно, что фундаментальная решётка $\mathbb{Z}^{s+1}$ имеет при $s \geq 1$ бесконечно много различных базисов, задаваемых базисными матрицами M из расширенной специальной линейной группы целочисленных матриц порядка $s+1$: $SL_{s+1}^*(\mathbb{Z})$. Расширенная специальная линейная группа целочисленных матриц порядка $s+1$ состоит из всех целочисленных матриц M порядка $s+1$ с $\det M = \pm 1$. Отсюда следует, что все базисные матрицы образа сдвинутой решётки $\Lambda + \vec{x}$ выражаются через любую базисную матрицу $A(\Lambda, \vec{x})$ и матрицу перехода $M \in SL_{s+1}^*(\mathbb{Z})$ по формулам $A_1(\Lambda, \vec{x}) = M \cdot A(\Lambda, \vec{x})$.

Будем говорить, что для произвольного $\mu > 0$, $\mu < 1$ множество $\mathbb{L}_\mu(M + \vec{y})$ сдвинутых решёток $\Lambda + \vec{x} \in CPR_s$ является *открытой μ -окрестностью* сдвинутой решётки $M + \vec{y} \in CPR_s$, если оно состоит из всех сдвинутых решёток

$$\varphi_a(\Lambda + \vec{x}) = \varphi_a(M + \vec{y}) \cdot B, \quad (3)$$

для которых невырожденная матрица $B \in \mathfrak{MP}_{s+1}$ удовлетворяет соотношению³

$$\|B - I_{s+1}\| < \mu. \quad (4)$$

Условие $\mu < 1$ гарантирует, что все матрицы B с условием (4) будут невырожденные (см. [14], стр. 158).

Нам потребуется величина $M(\Lambda + \vec{x})$, которая задается равенством

$$M(\Lambda + \vec{x}) = \min_{\varphi_a(\Lambda + \vec{x}) = \mathbb{Z}^{s+1} \cdot A} \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

³Матричная норма для $s+1$ -мерной матрицы $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq s+1}$ задается равенством $\|B\| = (s+1) \cdot \max_{1 \leq i, j \leq s+1} |b_{ij}|$.

и по аналогии с мерой обусловленности систем линейных уравнений называется мерой обусловленности сдвинутой решётки. В силу дискретности расширенной специальной линейной группы $SL_{s+1}^*(\mathbb{Z})$ целочисленных матриц порядка $s+1$ существует матрица $A(\Lambda + \vec{x})$ такая, что $\varphi_a(\Lambda + \vec{x}) = \mathbb{Z}^{s+1} \cdot A(\Lambda + \vec{x})$ и $M(\Lambda + \vec{x}) = \|A(\Lambda + \vec{x})\| \cdot \|A^{-1}(\Lambda + \vec{x})\|$. Из равенства $I_{s+1} = A \cdot A^{-1}$ и неравенства $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ следует, что всегда $M(\Lambda + \vec{x}) \geq s+1$.

Пусть $MP_{s+1,\varepsilon}(\mathbb{R})$ — множество всех вещественных квадратных матриц B порядка $s+1$ из $\mathfrak{MP}_{s+1}$ с нормой $\|B\| < \varepsilon$ и при $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ через $MP_{s+1,\varepsilon}^*(\mathbb{R})$ обозначим множество всех вещественных матриц $B, B^* \in MP_{s+1,\varepsilon}(\mathbb{R})$, где $B^* = (I_{s+1} + B)^{-1} - I_{s+1}$. Согласно лемме 1 из монографии [14] (см. стр. 158) имеем $\|B^*\| \leq \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$. Отсюда следует, что $MP_{s+1,\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}}(\mathbb{R}) \subseteq MP_{s+1,\varepsilon}^*(\mathbb{R})$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $0 < \varepsilon < \frac{1}{3 \cdot M(\Lambda + \vec{x})}$ и отображение ψ_Λ задано на $MP_{s+1,\varepsilon}^*(\mathbb{R})$ по правилу

$$\psi_\Lambda(B) = \Lambda \cdot (I_{s+1} + B), \quad B \in MP_{s+1,\varepsilon}^*(\mathbb{R}),$$

тогда $\psi_\Lambda(B)$ — взаимнооднозначное отображение $MP_{s+1,\varepsilon}^*(\mathbb{R})$ на $U(\Lambda, \ln(1 + \varepsilon))$, где

$$U(\Lambda, \delta) = \{\Gamma \in PR_{s+1}(a) \mid \rho(\Lambda, \Gamma) \leq \delta\},$$

где метрика $\rho(\cdot, \cdot)$ задана равенством (1), и для любого $B \in MP_{s+1,\varepsilon}^*(\mathbb{R})$ справедливо равенство

$$\rho(\Lambda, \psi_\Lambda(B)) = \max(\ln(1 + \|B\|), \ln(1 + \|B^*\|)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [7], теорема 19, стр. 68. $\square$

Очевидно, что $M_{s+1,\varepsilon}(\mathbb{R})$ и $M_{s+1,\varepsilon}^*(\mathbb{R})$ являются открытыми множествами в $s^2 + s$ -мерном вещественном арифметическом пространстве $\mathbb{R}^{s^2+s}$, которое имеет естественную структуру евклидова пространства.

Рассмотрим множество $\mathfrak{P}_{s+1}$ всевозможных открытых μ -окрестностей всевозможных сдвинутых решёток $M + \vec{y} \in CPR_s$ с условием $\mu \leq \frac{1}{3 \cdot M(\Lambda + \vec{x})}$. Так как, очевидно, что $\mathfrak{P}_{s+1}$ покрывает всё пространство s -мерных сдвинутых решёток CPR_s , то множество $\mathfrak{P}_{s+1}$ можно рассматривать как предбазу топологии $\mathfrak{T}_{s+1}$ на всём пространстве CPR_s . А именно, если множество $\mathfrak{B}_{s+1}$ получено из $\mathfrak{P}_{s+1}$ добавлением произвольных конечных пересечений его элементов, то $\mathfrak{B}_{s+1}$ будет базой топологии $\mathfrak{T}_{s+1}$, в которой всякое открытое множество $U \in \mathfrak{T}_{s+1}$ представимо как объединение открытых μ -окрестностей: существует некоторое множество A элементов из $\mathfrak{B}_{s+1}$ такое, что

$$\{U_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \mathfrak{B}_{s+1} : U = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha.$$

Таким образом, на CPR_s задана структура топологического пространства

$$T_{s+1} = (CPR_s, \mathfrak{T}_{s+1}),$$

где $\mathfrak{T}_{s+1}$ — множество всех открытых множеств $\mathbb{L}$. Топологическое пространство

$$T_{s+1} = (CPR_s, \mathfrak{T}_{s+1})$$

имеет счетную базу $\mathbb{B}$, состоящую из всех μ -окрестностей рациональных сдвинутых решёток M с рациональными μ , и является сепарабельным топологическим пространством, так как роль счетного всюду плотного его подмножества выполняет множество CPQ_s всех рациональных сдвинутых решёток, т.е. сдвинутых решёток M с рациональной базисной матрицей $A(M)$ и с рациональным сдвигом $\vec{y}$.

Из предыдущего следует, что хаусдорфово топологическое пространство

$$CT_s = (CPR_s, \mathfrak{T}_{s+1})$$

является локально евклидовым пространством размерности $s^2 + s$.

4. Дифференцируемая структура на локально евклидовом пространстве

Рассмотрим произвольную сдвинутую решётку $\Lambda + \vec{x} \in CPR_s$ и открытое множество сдвинутых решёток $U(\Lambda + \vec{x}, \ln(1 + \varepsilon_{\Lambda+\vec{x}}))$, где $\varepsilon_{\Lambda+\vec{x}} = \frac{1}{3 \cdot M(\Lambda+\vec{x})}$. Взаимнооднозначное отображение $\psi_\Lambda(B) = \Lambda \cdot (I_s + B)$ переводит $M_{s,\varepsilon_\Lambda}^*(\mathbb{R})$ в $U(\Lambda, \ln(1 + \varepsilon_\Lambda))$, а обратное отображение $\psi_\Lambda^{-1}(\Gamma) = A^{-1}(\Lambda)A(\Gamma) - I_s$ переводит $U(\Lambda, \ln(1 + \varepsilon_\Lambda))$ в $M_{s,\varepsilon_\Lambda}^*(\mathbb{R})$. Согласно терминологии из монографии [23] (см. стр. 13) $\psi_\Lambda^{-1}(\Gamma)$ — координатное отображение, функции $x_i = r_i \circ \psi_\Lambda^{-1}$ — координатные функции, пара $U(\Lambda, \ln(1 + \varepsilon_\Lambda)), \psi_\Lambda^{-1}$ (обозначающую через $(U(\Lambda, \ln(1 + \varepsilon_\Lambda)), x_1, \dots, x_{s^2})$) — система координат. Нетрудно видеть, что началом данной системы координат является решётка Λ .

Мы имеем очевидное равенство

$$\bigcup_{\Lambda \in PR_s} U(\Lambda, \ln(1 + \varepsilon_\Lambda)) = PR_s.$$

Рассмотрим $\psi_\Lambda^{-1} \circ \psi_\Gamma$.

Так как $\psi_\Lambda^{-1} : U(\Lambda, \ln(1 + \varepsilon_\Lambda)) \mapsto M_{s,\varepsilon_\Lambda}^*(\mathbb{R})$, а $\psi_\Gamma : M_{s,\varepsilon_\Gamma}^*(\mathbb{R}) \mapsto U(\Gamma, \ln(1 + \varepsilon_\Gamma))$, то

$$\psi_\Lambda^{-1} \circ \psi_\Gamma : \psi_\Gamma^{-1} \left(U(\Lambda, \ln(1 + \varepsilon_\Lambda)) \cap U(\Gamma, \ln(1 + \varepsilon_\Gamma)) \right) \mapsto M_{s,\varepsilon_\Lambda}^*(\mathbb{R}).$$

Из определения множеств $U(\Lambda, \ln(1 + \varepsilon_\Lambda))$ и $U(\Gamma, \ln(1 + \varepsilon_\Gamma))$ следует, что

$$U(\Lambda, \ln(1 + \varepsilon_\Lambda)) \cap U(\Gamma, \ln(1 + \varepsilon_\Gamma)) = \{\Delta \in PR_s \mid \rho(\Lambda, \Delta) \leq \ln(1 + \varepsilon_\Lambda), \rho(\Gamma, \Delta) \leq \ln(1 + \varepsilon_\Gamma)\}.$$

Таким образом, если

$$\Delta \in U(\Lambda, \ln(1 + \varepsilon_\Lambda)) \cap U(\Gamma, \ln(1 + \varepsilon_\Gamma)),$$

то $\Delta = \Gamma \cdot B = \Lambda \cdot D$, $\Gamma = \Delta \cdot B_1$, $\Lambda = \Delta \cdot D_1$ и $\max(\|B - I_s\|, \|B_1 - I_s\|) \leq \varepsilon_\Gamma$, $\max(\|D - I_s\|, \|D_1 - I_s\|) \leq \varepsilon_\Delta$. Отсюда следует, что $B = I_s + C$, $B_1 = I_s + C_1$, $B \cdot B_1 \in SL_s^*(\mathbb{Z})$, $\|B \cdot B_1\| = \|I_s + C + C_1 + C \cdot C_1\|$, $\|C + C_1 + C \cdot C_1\| \leq 2\varepsilon_\Gamma + \varepsilon_\Gamma^2 \leq \frac{5}{4}$. Матрица $C + C_1 + C \cdot C_1$ — целочисленная, поэтому, если она ненулевая, то $\|C + C_1 + C \cdot C_1\| \geq s \geq 2$, что приводит к противоречию. Следовательно $B_1 = B^{-1}$. Аналогично получим, что $D_1 = D^{-1}$. Отсюда вытекает, что $\Gamma = \Lambda \cdot D \cdot B_1$, $\Lambda = \Gamma \cdot B \cdot D_1$ и

$$\begin{aligned} & U(\Lambda, \ln(1 + \varepsilon_\Lambda)) \cap U(\Gamma, \ln(1 + \varepsilon_\Gamma)) = \\ & = \{\Delta = \Gamma \cdot B = \Lambda \cdot D \mid \|D - I_s\|, \|D_1 - I_s\| \leq \varepsilon_\Lambda, \|B - I_s\|, \|B_1 - I_s\| \leq \varepsilon_\Gamma\}. \end{aligned}$$

Применяя ψ_Γ^{-1} к $U(\Lambda, \ln(1 + \varepsilon_\Lambda)) \cap U(\Gamma, \ln(1 + \varepsilon_\Gamma))$ получим

$$\begin{aligned} & \psi_\Gamma^{-1} \left(U(\Lambda, \ln(1 + \varepsilon_\Lambda)) \cap U(\Gamma, \ln(1 + \varepsilon_\Gamma)) \right) = \\ & = \{A^{-1}(\Gamma)A(\Gamma \cdot B) - I_s \mid \Gamma \cdot B = \Lambda \cdot D, \|D - I_s\|, \|D_1 - I_s\| \leq \varepsilon_\Lambda, \|B - I_s\|, \|B_1 - I_s\| \leq \varepsilon_\Gamma\}. \end{aligned}$$

Далее находим

$$\begin{aligned} \psi_\Lambda^{-1} \circ \psi_\Gamma(A^{-1}(\Gamma)A(\Gamma \cdot B) - I_s) &= \psi_\Lambda^{-1}(\Gamma \cdot A^{-1}(\Gamma)A(\Gamma \cdot B)) = \psi_\Lambda^{-1}(\mathbb{Z}^s \cdot A(\Gamma \cdot B)) = \\ &= \psi_\Lambda^{-1}(\mathbb{Z}^s \cdot A(\Lambda \cdot D)) = \psi_\Lambda^{-1}(\Lambda \cdot D) = A^{-1}(\Lambda)A(\Lambda \cdot D) - I_s. \end{aligned}$$

Для матриц D из малой окрестности единичной матрицей I_s введём обозначение $\varepsilon(D)$, где $\varepsilon(D) = \max(\|D - I_s\|, \|D^{-1} - I_s\|) = \max(\|D - I_s\|, \|D_1 - I_s\|)$.

ЛЕММА 10. Пусть $\varepsilon(D) \leq \varepsilon_\Lambda$, тогда справедливо неравенство

$$|M(\Lambda \cdot D) - M(\Lambda)| \leq (2\varepsilon(D) + \varepsilon(D)^2) \min(M(\Lambda \cdot D), M(\Lambda)) \leq \frac{13}{18}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению матрицы $A(\Lambda)$ она удовлетворяет соотношениям $\Lambda = \mathbb{Z}^s \cdot A(\Lambda)$ и $M(\Lambda) = \min_{\Lambda = \mathbb{Z}^s \cdot A} \|A\| \cdot \|A^{-1}\| = \|A(\Lambda)\| \cdot \|A^{-1}(\Lambda)\|$. Аналогично, имеем $\Lambda \cdot D = \mathbb{Z}^s \cdot A(\Lambda \cdot D)$, $M(\Lambda \cdot D) = \min_{\Lambda \cdot D = \mathbb{Z}^s \cdot A \cdot D} \|A \cdot D\| \cdot \|(A \cdot D)^{-1}\| = \|A(\Lambda \cdot D)\| \cdot \|A^{-1}(\Lambda \cdot D)\|$. Для любой невырожденной матрице A имеем:

$$\begin{aligned} \|A \cdot D\| &= \|A + A \cdot (D - I_s)\| \leq \|A\| \cdot (1 + \varepsilon(D)), \\ \|(A \cdot D)^{-1}\| &= \|D_1 \cdot A^{-1}\| \leq \|A^{-1}\| \cdot (1 + \varepsilon(D)), \\ \|A\| &= \|A \cdot D - A \cdot D \cdot (I_s - D_1)\| \leq \|A \cdot D\| \cdot (1 + \varepsilon(D)), \\ \|A^{-1}\| &= \|D_1 \cdot A^{-1} + (D - I_s) \cdot (A \cdot D)^{-1}\| \leq \|(A \cdot D)^{-1}\| \cdot (1 + \varepsilon(D)). \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$M(\Lambda \cdot D) \leq \|A(\Lambda) \cdot D\| \cdot \|D_1 \cdot A^{-1}(\Lambda)\| \leq M(\Lambda) \cdot (1 + \varepsilon(D))^2.$$

Аналогично, имеем

$$M(\Lambda) \leq \|A(\Lambda \cdot D) \cdot D_1\| \cdot \|D \cdot A^{-1}(\Lambda \cdot D)\| \leq M(\Lambda \cdot D) \cdot (1 + \varepsilon(D))^2.$$

Отсюда следует, что

$$|M(\Lambda \cdot D) - M(\Lambda)| \leq (2\varepsilon(D) + \varepsilon(D)^2) \min(M(\Lambda \cdot D), M(\Lambda)).$$

Так как $\varepsilon(D) \leq \varepsilon_\Lambda = \frac{1}{3 \cdot M(\Lambda)}$, то

$$|M(\Lambda \cdot D) - M(\Lambda)| \leq \frac{2}{3} + \frac{1}{9 \cdot M(\Lambda)} \leq \frac{13}{18}.$$

Таким образом, неравенство для $|M(\Lambda \cdot D) - M(\Lambda)|$ доказано. $\square$

Из доказанной леммы мы получаем равенство $\psi_\Lambda^{-1} \circ \psi_\Gamma(B - I_s) = D - I_s$ и матрицы B и D связаны равенством $B = A^{-1}(\Gamma)A(\Lambda)D$. Так как матрицы B и D связаны линейным соотношением, то отображение $\psi_\Lambda^{-1} \circ \psi_\Gamma$ — бесконечно дифференцируемое и тем самым задано гладкое многообразие s -мерных решёток (см. [23], стр. 14).

5. Об основных функциях на решётках

К числу основных функций на решётках мы относим детерминант решётки, гиперболический параметр решётки, меру обусловленности сдвинутой решётки, гиперболическую дзета-функцию решётки и гиперболическую дзета-функцию сдвинутой решётки.

Непрерывность детерминанта решётки очевидна и следует из равенства $\det \Lambda = |\det A(\Lambda)|$. Непрерывность гиперболического параметра решётки на метрическом пространстве решёток доказана в работе [24].

Непрерывность меры обусловленности сдвинутой решётки следует из леммы 10.

Непрерывность гиперболической дзета-функции решётки в правой полуплоскости $\sigma > 1$ доказана в работе [10].

И наконец, непрерывность гиперболической дзета-функции сдвинутой решётки доказана в работе [18].

Вопрос об их дифференцируемости мы рассмотрим в последующих статьях.

6. Заключение

В данной работе построено гладкое многообразие сдвинутых решёток. Несомненно, что открывается новое направление исследований, которое может дать много неожиданных результатов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука. 1975. — 240 с.
2. Л. П. Добровольская, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский Гиперболические дзета-функции сеток и решёток и вычисление оптимальных коэффициентов // Чебышевский сборник 2012. Т. 13, вып. 4(44). С. 4–107.
3. Н. М. Добровольский Оценки отклонений обобщенных параллелепипедальных сеток. Деп. в ВИНТИ 24.08.84. № 6089–84.
4. Н. М. Добровольский О квадратурных формулах на классах $E_s^\alpha(c)$ и $H_s^\alpha(c)$. Деп. в ВИНТИ 24.08.84. № 6091–84.
5. Добровольский Н. М. Гиперболическая дзета функция решёток. Деп. в ВИНТИ 24.08.84, № 6090–84.
6. Добровольский Н. М. Многомерные теоретико-числовые сетки и решетки и их приложения к приближенному анализу // Сб. IV Международная конференция „Современные проблемы теории чисел и ее приложения“ посвященная 180-летию П. Л. Чебышева и 110-летию И. М. Виноградова. Тула, 10–15 сентября, 2001 Актуальные проблемы Ч. I. М. МГУ, 2002. С. 54–80.
7. Добровольский Н. М. Многомерные теоретико-числовые сетки и решётки и их приложения / Н. М. Добровольский. — Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2005.
8. Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский, В. Н. Соболева, Д. К. Соболев, Л. П. Добровольская, О. Е. Бочарова. О гиперболической дзета-функции Гурвица, Чебышевский сб., 2016, том 17, вып. 3, С. 72–105.
9. Добровольский Н. М., Манохин Е. В., Реброва И. Ю., Рощеня А. Л. О непрерывности дзета-функции сетки с весами // Известия ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. Т. 7, вып. 1. — Тула, 2001. С. 82–86.
10. Добровольский Н. М., Реброва И. Ю., Рощеня А. Л. Непрерывность гиперболической дзета-функции решёток // Мат. заметки. Т. 63. Вып. 4. 1998. С. 522–526.
11. Добровольский Н. М., Рощеня А. Л. О числе точек решётки в гиперболическом кресте // Алгебраические, вероятностные, геометрические, комбинаторные и функциональные методы в теории чисел: Сб.тез. докл. II Междунар. конф. Воронеж, 1995. С. 53.
12. Добровольский Н. М., Рощеня А. Л. О непрерывности гиперболической дзета-функции решёток // Изв. Тул. гос. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. Т. 2. Вып. 1. Тула: Изд-во ТулГУ, 1996. С. 77 — 87.
13. Добровольский Н. М., Рощеня А. Л. О числе точек решётки в гиперболическом кресте // Мат. заметки. Т. 63. Вып. 3. 1998. С. 363–369.

14. Касселс Дж. В. С. Введение в геометрию чисел. — М.: Мир, 1965. — 420 с.
15. А. Н. Кормачева. Приближение квадратичных алгебраических решёток целочисленными решётками — II // Чебышевский сборник, 2019, т. 21, вып. 3, с. 215–222.
16. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. М.: Физматгиз, 1963.
17. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. (второе издание) М.: МЦНМО, 2004. 288 с.
18. Реброва И. Ю. Непрерывность обобщенной гиперболической дзета-функции решёток и ее аналитическое продолжение // Изв. ТулГУ. Сер. Механика. Математика. Информатика. Тула, 1998. Т.4. Вып.3. С. 99–108.
19. Е. Н. Смирнова, О. А. Пихтилькова, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский. Алгебраические решётки в метрическом пространстве решёток // Чебышевский сб. 2017. Т. 18, вып. 4. С. 326–338.
20. Е. Н. Смирнова, О. А. Пихтилькова, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский. Гладкое многообразие одномерных решёток // Чебышевский сборник. 2020. Т. 21, вып. 3, С. 165–185.
21. Е. Н. Смирнова, О. А. Пихтилькова, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, А. В. Родионов, Н. М. Добровольский. Гладкое многообразие одномерных сдвинутых решёток // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22, вып. 3, С. 196–231.
22. Е. Н. Смирнова, О. А. Пихтилькова, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, А. В. Родионов, Н. М. Добровольский. Гладкое многообразие решёток // Чебышевский сборник. 2023. Т. 24, вып. 4, С. 299–301.
23. Уорнер Ф. Основы теории гладких многообразий и группы Ли. — М.: Мир, 1987. — 304 с.
24. Т. С. Шмелева. Непрерывность гиперболического параметра решеток // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2009. Вып. 3. С. 92–99.
25. L. P. Dobrovolskaya, M. N. Dobrovolsky, N. M. Dobrovol'skii, N. N. Dobrovolsky. On Hyperbolic Zeta Function of Lattices. In: Continuous and Distributed Systems. Solid Mechanics and Its Applications. Vol. 211. 2014. P. 23–62. DOI:10.1007/978-3-319-03146-0_2.

REFERENCES

1. Arnold V. I., 1975, “Ordinary differential equations”, M.: Science, 240 p.
2. Dobrovol'skaya, L. P., Dobrovol'skii, M. N., Dobrovol'skii, N. M. & Dobrovol'skii, N. N. 2012, “The hyperbolic Zeta function of grids and lattices, and calculation of optimal coefficients”, Chebyshevskij sbornik, vol. 13, no. 4(44), pp. 4–107.
3. Dobrovol'skii, N. M. 1984, “Evaluation of generalized variance parallelepipedal grids”, Dep. v VINITI, no. 6089–84.
4. Dobrovol'skii, N. M. 1984, “On quadrature formulas in classes $E_s^\alpha(c)$ and $H_s^\alpha(c)$ ”, Dep. v VINITI, no. 6091–84.
5. Dobrovolskiy N. M. Hyperbolic zeta function of lattices. Dep. in VINITI 08.24.84, no. 6090-84.

6. Dobrovolsky N. M. “Multidimensional number-theoretic grids and lattices and their applications to approximate analysis”, Sb. IV International conference glqq Modern problems of number theory and its applications grqq dedicated to the 180th anniversary of P. L. Chebyshev and 110th anniversary of I. M. Vinogradov. Tula, 10 — 15 September, 2001 Actual problems Ch. I. M. MGU, 2002. p. 54–80.
7. Dobrovol'skii, N. M. 2005, *Mnogomernye teoretiko-chislovye setki i reshyotki i ikh prilozheniya* [Multidimensional number-theoretic grids and lattices and their applications], Izdatel'stvo Tul'skogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta imeni L.N.Tolstogo, Tula, Russia.
8. N. M. Dobrovolsky, N. N. Dobrovolsky, V. N. Soboleva, D. K. Sobolev, L. P. Dobrovol'skaya, O. E. Bocharova, 2016, “On hyperbolic Hurwitz zeta function”, *Chebyshevskii sbornik*, vol 17, no. 3, P. 72–105.
9. Dobrovol'skii N.M., Manokhin E.V., Rebrova I. Yu., Roshchenya A.L., 2001, “On the continuity of the zeta function of a grid with weights”, *Izvestiya TulGU. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika*, vol. 7, no. 1, pp. 82–86.
10. Dobrovol'skij, N.M., Rebrova, I.YU. & Roshhenya, A.L. 1998, “Continuity of the hyperbolic zeta function of lattices“, *Matematicheskie zametki* (Mathematical Notes), vol. 63, no. 4, pp. 522–526.
11. N. M. Dobrovol'skii, A. L. Roshchenya, “Number of lattice points in the hyperbolic cross”, *Math. Notes*, 63:3 (1998), 319–324.
12. Dobrovolskiy N. M., Roshchenya A. L., 1995, “On the number of points of a lattice in a hyperbolic cross”, *Algebraic, probabilistic, geometric, combinatorial and functional methods in number theory: Collected tez. report II Int. conf. Voronezh*, p. 53.
13. Dobrovol'skii N. M., Roshchenya A. L., 1996, “On the continuity of the hyperbolic zeta-function of lattices”, *Izv. Toole. state un-that. Ser. Mathematics. Mechanics. Computer science. T. 2. Issue 1. Tula: Publishing house of Tula State University*, p. 77–87.
14. Kassels, D. 1965, *Vvedenie v geometriyu chisel*, [Introduction to the geometry of numbers], Mir, Moscow, Russia.
15. A. N. Kormacheva, 2020, “Approximation of quadratic algebraic lattices by integer lattices — II”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 3, pp. 215–222.
16. Korobov, N.M. 1963, *Teoretiko-chislovye metody v priblizhenom analize* [Number-theoretic methods in approximate analysis], Fizmat-giz, Moscow, Russia.
17. Korobov, N.M. 2004, *Teoretiko-chislovye metody v priblizhenom analize* [Number-theoretic methods in approximate analysis], 2nd ed, MTSNMO, Moscow, Russia.
18. Rebrova, I. YU. 1998, “The continuity of the generalized hyperbolic zeta lattice function and its analytic continuation“, *Izvestiya TulGU. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika*, vol. 4, no. 3, pp. 99–108.
19. E. N. Smirnova, O. A. Pikhtilkova, N. N. Dobrovolsky, N. M. Dobrovolsky., 2017, “Algebraic lattices in the metric space of lattices”, *Chebyshev sb.*, vol. 18, no. 4, p. 326–338.
20. E. N. Smirnova, O. A. Pikhtil'kova, N. N. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, N. M. Dobrovol'skii, 2020, “Smooth manifold of one-dimensional lattices”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 3, pp. 165–185.

21. E. N. Smirnova, O. A. Pikhtil'kova, N. N. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, A. V. Rodionova, L. D. Sitnikova, N. M. Dobrovol'skii, 2021, "Smooth manifold of one-dimensional shifted lattices", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 3, pp. 196–231.
22. E. N. Smirnova, O. A. Pikhtil'kova, N. N. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, N. M. Dobrovol'skii, 2023, "Smooth diversity of lattices", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 4, pp. 299–310.
23. Warner F. Foundations of the theory of smooth manifolds and Lie groups. — M.: Mir, 1987. — 304 p.
24. Shmeleva, T. S., 2009, "Continuity of the hyperbolic parameter of lattices", *Izvestiya Tula State University. Natural sciences*, Issue 3. pp. 92–99.
25. L. P. Dobrovol'skaya, M. N. Dobrovolsky, N. M. Dobrovol'skii, N. N. Dobrovolsky, 2014, "On Hyperbolic Zeta Function of Lattices". In: *Continuous and Distributed Systems. Solid Mechanics and Its Applications*. Vol. 211. P. 23–62. DOI:10.1007/978-3-319-03146-0_2.

Получено: 10.12.2024

Принято в печать: 10.03.2025

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 26. Выпуск 1.

УДК 517.5

DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-1-116-130

О поперечниках некоторых классов аналитических функций в пространстве Бергмана

М. Ш. Шабозов, Д. К. Тухлиев

Шабозов Мирганд Шабозович — доктор физико-математических наук, профессор, Таджикский национальный университет (г. Душанбе).

e-mail: shabozov@mail.ru

Тухлиев Дилшод Камаридинович — кандидат физико-математических наук, Худжандский государственный университет им. Б. Гафурова (г. Худжанд).

e-mail: dtukhliev@mail.ru

Аннотация

В работе изучаются экстремальные задачи, связанные с наилучшим полиномиальным приближением аналитических в единичном круге функций, принадлежащих пространству Бергмана B_2 , с конечной нормой

$$\|f\|_2 = \left(\frac{1}{\pi} \iint_{|z|<1} |f(z)|^2 d\sigma \right)^{1/2} < \infty.$$

Пусть

$$B_2^{(r)} := \left\{ f \in B_2 : \|f^{(r)}\|_2 < \infty \right\}, r \in \mathbb{Z}_+ \quad (f^{(0)} \equiv f).$$

Доказана точная теорема между величиной наилучшего приближения $E_{n-1}(f)_2$ и усреднённым с весом $\sin(\pi t/h)$ ($0 < h \leq \pi/n$) значением модуля непрерывности m -го порядка $\omega_m(f^{(r)}, t)_2$ функций $f \in B_2^{(r)}$. Выясняется связь доказанной теоремы с поведением точных констант в неравенстве Джексона-Стечкина для модулей непрерывности $\omega_m(f^{(r)}, t)_2$. Для класса функций $W_m^{(r)}(\Phi)_2$, определённой заданной монотонно возрастающей мажорантой Φ , удовлетворяющей некоторым ограничениям, вычислены точные значения различных n -поперечников в пространстве B_2 .

Ключевые слова: модуль непрерывности, неравенства Джексона – Стечкина, n -поперечники, пространство Бергмана.

Библиография: 24 названия.

Для цитирования:

Шабозов, М. Ш., Тухлиев, Д. К. О поперечниках некоторых классов аналитических функций в пространстве Бергмана // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 1, с. 116–130.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 26. No. 1.

UDC 517.5

DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-1-116-130

On the diameters of some classes of analytic functions in Bergman space

M. Sh. Shabozov, D. K. Tukhliev

Shabozov Mirgand Shabozovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tajik National University (Dushanbe).

e-mail: shabozov@mail.ru

Tukhliyev Dilshod Kamaridinovich — candidate of physical and mathematical sciences, Khujand State University named after academician Bobojon Gafurov (Khujand).

e-mail: dtukhliev@mail.ru

Abstract

The paper studies extremal problems related to the best polynomial approximation of functions that are analytic in the unit disk and belong to the Bergman space B_2 with a finite norm

$$\|f\|_2 = \left(\frac{1}{\pi} \iint_{|z|<1} |f(z)|^2 d\sigma \right)^{1/2} < \infty.$$

Let

$$B_2^{(r)} := \left\{ f \in B_2 : \|f^{(r)}\|_2 < \infty \right\}, r \in \mathbb{Z}_+ \quad (f^{(0)} \equiv f).$$

An exact theorem is proved between the value of the best approximation $E_{n-1}(f)_2$ and the value of the modulus of continuity of the m th order $\sin(\pi t/h)$ ($0 < h \leq \pi/n$) of functions $\omega_m(f^{(r)}, t)_2$ averaged with the weight $f \in B_2^{(r)}$. The connection between the proven theorem and the behavior of exact constants in the Jackson-Stechkin inequality for moduli of continuity $\omega_m(f^{(r)}, t)_2$ is clarified. For the class of functions $W_m^{(r)}(\Phi)_2$, given a given monotonically increasing moharant Φ , satisfying some restrictions, the exact values of various n -widths in B_2 space are calculated.

Keywords: modulus of continuity, Jackson – Stechkin inequalities, n -widths, Bergman space.

Bibliography: 24 titles.

For citation:

Shabozov, M. Sh., Tukhliev, D. K. 2025, “On the diameters of some classes of analytic functions in Bergman space”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 1, pp. 116–130.

1. Введение и постановка задачи

Экстремальным задачам наилучшего полиномиального приближения аналитических в круге функций в различных нормированных пространствах посвящена обширная литература (см., например, работы [1-15] и приведенную там литературу). В данной работе мы решаем ряд экстремальных задач в пространстве Бергмана B_2 , являющихся продолжением недавно опубликованных работ [18, 20, 21].

Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{C}$ — соответственно множество натуральных, целых неотрицательных и комплексных чисел, $U := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ — единичный круг, $\mathcal{A}(U)$ — множество функций, аналитических в круге U .

Говорят [10], что аналитическая в круге U функция

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) z^k, \quad z = \rho e^{it}, \quad 0 < \rho \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad (1)$$

принадлежит пространству Бергмана B_2 , если

$$\|f\|_2 := \|f\|_{B_2} = \left(\frac{1}{\pi} \iint_{(U)} |f(z)|^2 d\sigma \right)^{1/2} < \infty,$$

где интеграл понимается в смысле Лебега, $d\sigma$ — элемент площади.

Производную r -го порядка функции $f \in \mathcal{A}(U)$ определим, как обычно равенством

$$f^{(r)}(z) := \frac{d^r f}{dz^r} = \sum_{k=r}^{\infty} \alpha_{k,r} c_k(f) z^{k-r}, \quad r \in \mathbb{Z}_+, \quad (f^{(0)} \equiv f),$$

где положено

$$\alpha_{k,r} := k!/(k-r)!, \quad k \in \mathbb{N}, \quad r \in \mathbb{Z}_+, \quad k > r, \quad \alpha_{k,0} \equiv 1.$$

Символом $B_2^{(r)}$ ($r \in \mathbb{Z}_+$, $B_2^{(0)} = B_2$) обозначим множество функций $f \in \mathcal{A}(U)$, принадлежащих пространству B_2 , производная r -го порядка $f^{(r)}$, которых также принадлежит B_2 :

$$B_2^{(r)} := \{f \in B_2 : \|f^{(r)}\|_2 < \infty\}.$$

Величину

$$E_{n-1}(f)_2 := E(f, \mathcal{P}_{n-1})_2 = \inf \{ \|f - p_{n-1}\|_2 : p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1} \},$$

где $\mathcal{P}_{n-1}$ — множество комплексных алгебраических многочленов степени $\leq n-1$, называют наилучшим среднеквадратическим полиномиальным приближением функции $f \in B_2$. Хорошо известно, что для произвольной функции $f \in B_2$

$$E_{n-1}(f)_2 = \|f - S_{n-1}(f)\|_2 = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|}{k+1} \right\}^{1/2}, \quad (2)$$

где $S_{n-1}(f)$ — частичная сумма порядка $n-1$ ряда (1).

Запишем норму (1) в виде

$$\|f\|_2 = \left(\frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho |f(\rho e^{it})|^2 d\rho dt \right)^{1/2}$$

и равенством

$$\omega_m(f, \tau)_2 := \sup \{ \|\Delta_h^m(f)\|_2 : |h| \leq \tau \},$$

где

$$\Delta_h^m f(\rho e^{it}) = \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \binom{m}{k} f(\rho e^{i(t+kh)})$$

обозначим модуль непрерывности m -го порядка функции $f \in B_2$.

В [18] доказано, что для произвольной функции $f \in B_2^{(r)}$ ($r \in \mathbb{Z}_+$) справедливо равенство

$$\omega_m^2(f^{(r)}, \tau)_2 = 2^m \sup_{|h| \leq \tau} \sum_{k=r+1}^{\infty} \alpha_{k,r}^2 \frac{|c_k(f)|^2}{k-r+1} (1 - \cos(k-r)h)^m, \quad (3)$$

а в [19] для $f \in B_2^{(r)}$ доказано неравенство

$$E_{n-1}(f)_2 \leq \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \cdot E_{n-r-1}(f^{(r)}), \quad (4)$$

которое для $f_0(z) = z^n \in B_2^{(r)}$, $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n > r$ обращается в равенство.

Имеет место следующая

ТЕОРЕМА 1. Для любой функции $f \in B_2^{(r)}$ при любых $n, m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n > r$ и $h \in (0, \pi/(n-r)]$ справедливо неравенство

$$E_{n-1}^2(f)_2 \leq \frac{1}{2^m \alpha_{n,r}^2} \cdot \frac{n-r+1}{n+1} \cdot \frac{\int_0^h \omega_m^2(f^{(r)}, t)_2 \sin \frac{\pi}{h} t dt}{\int_0^h (1 - \cos(n-r)t)^m \sin \frac{\pi}{h} t dt}. \quad (5)$$

Существует функция $f \in B_2$, для которой (5) обращается в равенство.

Доказательство. В силу определения модуля непрерывности (3), имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^h \omega_m^2(f^{(r)}, t)_2 \sin \frac{\pi}{h} t dt \geq \\ & \geq 2^m \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k-r+1} \cdot \alpha_{k,r}^2 \int_0^h (1 - \cos(k-r)t)^m \sin \frac{\pi}{h} t dt = \\ & = 2^m \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} \cdot \frac{k+1}{k-r+1} \alpha_{k,r}^2 \int_0^h (1 - \cos(k-r)t)^m \sin \frac{\pi}{h} t dt = \\ & = 2^m \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} \cdot \varphi(k), \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\varphi(x) = \frac{x+1}{x-r+1} \alpha_{x,r}^2 \int_0^h (1 - \cos(x-r)t)^m \sin \frac{\pi}{h} t dt. \quad (7)$$

Учитывая формулу (7), рассмотрим поведение функции φ при $x \geq n > r$. Дифференцируя функцию $\varphi(x)$, находим

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \frac{x+1}{x-r+1} \alpha_{x,r}^2 \left(\frac{2(x+1)-r}{(x+1)(x-r+1)} + 2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \dots + \frac{1}{x-r+2} \right) \right) \times \\ & \quad \times \int_0^h (1 - \cos(x-r)t)^m \cdot \sin \frac{\pi}{h} t dt + \\ & \quad + \frac{x+1}{x-r+1} \alpha_{x,r}^2 \int_0^h \frac{d}{dx} (1 - \cos(x-r)t)^m \sin \frac{\pi}{h} t dt. \end{aligned} \quad (8)$$

Используя тождество

$$\frac{d}{dx} (1 - \cos(x-r)t)^m = \frac{t}{x-r} \cdot \frac{d}{dt} (1 - \cos(x-r)t)^m$$

и вычисляя интеграл во втором слагаемом равенстве (1) после некоторых простых вычислений и упрощений получаем

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \frac{x+1}{x-r+1} \cdot \alpha_{x,r}^2 \int_0^h (1 - \cos(x-r)t)^m \left[\frac{2(x+1)-r}{2(x+1)(x-r+1)} + \right. \\ &+ 2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \dots + \frac{1}{x-r+2} \right) - \frac{1}{x-r} \cdot \left(1 + \frac{\pi t}{h} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi t}{h} \right) \left. \right] \sin \frac{\pi t}{h} dt \geq 0, \end{aligned}$$

откуда следует, что функция $\varphi(x)$ в области $x \geq n > r$ монотонно возрастает. Следовательно

$$\begin{aligned} \inf\{\varphi(x) : x \geq n > r\} &= \varphi(n) = \\ &= \frac{n+1}{n-r+1} \alpha_{n,r}^2 \int_0^h (1 - \cos(n-r)t)^m \sin \frac{\pi t}{h} dt. \end{aligned} \quad (9)$$

Учитывая (1), из (1) получаем

$$\begin{aligned} &\int_0^h \omega_m^2(f^{(r)}, t)_2 \sin \frac{\pi}{h} t dt \geq \\ &\geq 2^m \frac{n+1}{n-r+1} \alpha_{n,r}^2 \int_0^h (1 - \cos(n-r)t)^m \sin \frac{\pi}{h} t dt \cdot \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} = \\ &= 2^m \frac{n+1}{n-r+1} \alpha_{n,r}^2 \int_0^h (1 - \cos(n-r)t)^m \sin \frac{\pi}{h} t dt \cdot E_{n-1}^2(f)_2, \end{aligned}$$

откуда сразу следует соотношение

$$E_{n-1}^2(f)_2 \leq \frac{1}{2^m \alpha_{n,r}^2} \cdot \frac{n-r+1}{n+1} \cdot \frac{\int_0^h \omega_m^2(f^{(r)}, t)_2 \sin \frac{\pi}{h} t dt}{\int_0^h (1 - \cos(n-r)t)^m \sin \frac{\pi}{h} t dt}$$

и неравенство (5) доказано.

Докажем точность неравенство (5) для функции $f_0(z) = z^n \in B_2^{(r)}$, $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n > r$. Так как для f_0 в силу равенств (2) и (3)

$$E_{n-1}^2(f_0)_2 = \frac{1}{n+1}, \quad \omega_m^2(f_0^{(r)}, t)_2 = 2^m \frac{\alpha_{n,r}^2}{n-r+1} (1 - \cos(n-r)t)^m,$$

то мы запишем

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2^m \alpha_{n,r}^2} \cdot \frac{n-r+1}{n+1} \cdot \frac{\int_0^h \omega_m^2(f_0^{(r)}, t)_2 \sin \frac{\pi}{h} t dt}{\int_0^h (1 - \cos(n-r)t)^m \sin \frac{\pi}{h} t dt} = \\ &= \frac{1}{2^m \alpha_{n,r}^2} \cdot \frac{n-r+1}{n+1} \cdot \frac{2^m (\alpha_{n,r}^2 / (n-r+1)) \int_0^h (1 - \cos(n-r)t)^m \sin \frac{\pi}{h} t dt}{\int_0^h (1 - \cos(n-r)t)^m \sin \frac{\pi}{h} t dt} = \\ &= \frac{1}{n+1} = E_{n-1}^2(f_0)_2, \end{aligned}$$

чем и завершаем доказательство теоремы 1.

Из теоремы 1 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1. В условиях теоремы 1 справедливо равенство

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{f \in B_2^{(r)} \\ f \notin \mathcal{P}_r}} \frac{2^m \alpha_{n,r}^2 [(n+1)/(n-r+1)] E_{n-1}^2(f)_2}{\int_0^h \omega_m^2(f^{(r)}, t)_2 \sin \frac{\pi}{h} t dt} = \\ = \left(\int_0^h (1 - \cos(n-r)t)^m \sin \frac{\pi}{h} t dt \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (10)$$

В частности, из (1) при $h = \pi/(n-r)$, $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n > r$ вытекает равенство

$$\sup_{f \in B_2^{(r)}} \frac{\alpha_{n,r} \sqrt{(n+1)/(n-r+1)} \cdot E_{n-1}(f)_2}{\left(\frac{n-r}{2} \int_0^{\pi/(n-r)} \omega_m^2(f^{(r)}, t)_2 \sin(n-r)t dt \right)^{1/2}} = \frac{\sqrt{m+1}}{2^m}. \quad (11)$$

ТЕОРЕМА 2. При любых $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n > r$ имеет место равенство

$$\sup_{f \in B_2^{(r)}} \frac{\alpha_{n,r} \cdot \sqrt{(n+1)/(n-r+1)} \cdot E_{n-1}(f)_2}{\left(\frac{n-r}{2} \cdot \int_0^{\pi/(n-r)} \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, t)_2 \sin(n-r)t dt \right)^{m/2}} = \frac{1}{2^{m/2}}. \quad (12)$$

Доказательство. Для произвольной функции $f \in B_2$ справедливо неравенство [16]

$$E_{n-1}^2(f)_2 - \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} \cdot \cos kt \leq \frac{1}{2} \cdot E_{n-1}^{2-2/m}(f)_2 \cdot \omega_m^{2/m}(f, t)_2. \quad (13)$$

Умножая обе стороны (13) на $\sin nt$ и интегрируя по отрезку $[0, \pi/n]$ по переменному t получаем

$$\begin{aligned} \frac{2}{n} \cdot E_{n-1}^2(f)_2 - \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} \cdot \int_0^{\pi/n} \cos kt \sin ntdt \leq \\ \leq \frac{1}{2} \cdot E_{n-1}^{2-2/m}(f)_2 \cdot \int_0^{\pi/n} \omega_m^{2/m}(f, t)_2 \sin ntdt. \end{aligned} \quad (14)$$

Так как [17, с. 239]

$$\int_0^{\pi/n} \cos kt \sin ntdt \leq 0,$$

то из (14) следует, что

$$\frac{2}{n} \cdot E_{n-1}^2(f)_2 \leq \frac{1}{2} \cdot E_{n-1}^{2-2/m}(f)_2 \cdot \int_0^{\pi/n} \omega_m^{2/m}(f, t)_2 \sin ntdt$$

или, что тоже

$$E_{n-1}(f)_2 \leq \left(\frac{n}{4} \cdot \int_0^{\pi/n} \omega_m^{2/m}(f, t)_2 \sin ntdt \right)^{m/2}. \quad (15)$$

Заменяя в (15) функцию f на производную $f^{(r)}$ и число n на $n-r$, получаем

$$E_{n-r-1}(f^{(r)})_2 \leq \left(\frac{n-r}{4} \cdot \int_0^{\pi/(n-r)} \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, t)_2 \sin(n-r)t dt \right)^{m/2}. \quad (16)$$

Учитывая (16) и применяя неравенство (4), получаем

$$E_{n-1}(f)_2 \leq \frac{1}{2^{m/2} \cdot \alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \cdot \left(\frac{n-r}{2} \cdot \int_0^{\pi/(n-r)} \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, t)_2 \sin(n-r)t dt \right)^{m/2}. \quad (17)$$

Так как неравенство (17) справедливо для любой функции $f \in B_2^{(r)}$, то из него следует оценка сверху для величины расположенной в левой части равенства (12):

$$\sup_{f \in B_2^{(r)}} \frac{\alpha_{n,r} \cdot \sqrt{(n+1)/(n-r+1)} \cdot E_{n-1}(f)_2}{\left(\frac{n-r}{2} \cdot \int_0^{\pi/(n-r)} \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, t)_2 \sin(n-r)t dt \right)^{m/2}} \leq \frac{1}{2^{m/2}}. \quad (18)$$

С целью получения аналогичной оценки снизу введем в рассмотрение функцию $f_0(z) = z^n \in B_2^{(r)}$, $n > r$ для которой

$$E_{n-1}(f_0)_2 = \frac{1}{\sqrt{n+1}}, \quad \omega_m^2(f_0^{(r)}, t) = \frac{2^m \cdot \alpha_{n,r}}{n-r+1} \cdot (1 - \cos(n-r)t)^m,$$

$$\left(\frac{n-r}{2} \cdot \int_0^{\pi/(n-r)} \omega_m^{2/m}(f_0^{(r)}, t)_2 \sin(n-r)t dt \right)^{m/2} = 2^{m/2} \cdot \frac{\alpha_{n,r}}{\sqrt{n-r+1}}.$$

Пользуясь этими равенствами, запишем оценку снизу указанной величины

$$\begin{aligned} & \sup_{f \in B_2^{(r)}} \frac{\alpha_{n,r} \cdot \sqrt{(n+1)/(n-r+1)} \cdot E_{n-1}(f)_2}{\left(\frac{n-r}{2} \cdot \int_0^{\pi/(n-r)} \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, t)_2 \sin(n-r)t dt \right)^{m/2}} \geq \\ & \geq \frac{\alpha_{n,r} \cdot \sqrt{(n+1)/(n-r+1)} \cdot E_{n-1}(f_0)_2}{\left(\frac{n-r}{2} \cdot \int_0^{\pi/(n-r)} \omega_m^{2/m}(f_0^{(r)}, t)_2 \sin(n-r)t dt \right)^{m/2}} = \frac{1}{2^{m/2}}. \end{aligned} \quad (19)$$

Требуемое равенство (12) получаем из сопоставлении неравенств (18) и (19). Теорема 2 доказана.

2. Связь теоремы 1,2 с поведением точных констант в неравенстве Джексона-Стечкина для модуля непрерывности m -го порядка на классах $B_2^{(r)}$, $r \in \mathbb{Z}_+$

В этом пункте выясним связь результата теоремы 1,2 с исследованием поведения констант в неравенствах типа Джексона-Стечкина следующего вида

$$E_{n-1}(f)_2 \leq \chi \cdot \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \omega_m \left(f^{(r)}, \frac{\pi}{n-r} \right)_2. \quad (20)$$

Точнее, требуется найти точное значение величины

$$\chi_{n,r,m(\gamma)} := \chi_{n,r}(\omega_m, \gamma)_2 := \sup_{\substack{f \in B_2^{(r)} \\ f \notin \mathcal{P}_r}} \frac{\alpha_{n,r} \sqrt{(n+1)/(n-r+1)} E_{n-1}(f)_2}{\omega_m(f^{(r)}, \gamma/(n-r))_2}, \quad (21)$$

где $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $f^{(0)} \equiv f$, $B_2^{(0)} \equiv B_2$, $\gamma \in (0, \pi]$.

Чтобы найти точное значение константы (21) или получить удовлетворительную оценку сверху константы χ в (20), воспользуемся неравенством

$$E_{n-1}(f)_2 \leq \frac{\sqrt{m+1}}{2^m} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,r}} \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \left(\frac{n-r}{2} \int_0^{\pi/(n-r)} \omega_m^2(f^{(r)}, t)_2 \sin(n-r)t dt \right)^{1/2}, \quad (22)$$

вытекающим из соотношения (11) и верным для произвольной функции $f \in B_2^{(r)}$, $r \in \mathbb{Z}_+$. Пользуясь свойством монотонности $\omega_m(f^{(r)}, t)$ из (2), получаем

$$\begin{aligned} E_{n-1}(f)_2 &\leq \frac{\sqrt{m+1}}{2^m} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \times \\ &\times \left(\omega_m^2 \left(f^{(r)}, \frac{\pi}{n-r} \right)_2 \frac{n-r}{2} \int_0^{\pi/(n-r)} \sin(n-r)t dt \right)^{1/2} = \\ &= \frac{\sqrt{m+1}}{2^m} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \omega_m \left(f^{(r)}, \frac{\pi}{n-r} \right)_2, \end{aligned} \quad (23)$$

и таким образом мы получили неравенство Джексона-Стечкина вида (20) с константой

$$\chi_{n,r,m}(\pi) \leq \frac{\sqrt{m+1}}{2^m}. \quad (24)$$

Докажем, что если функция $\omega_m^2(f^{(r)}, t)$ на отрезке $[0, \pi/2(n-r)]$ удовлетворяет условию

$$\omega_m^2(f^{(r)}, t)_2 + \omega_m^2 \left(f^{(r)}, \frac{\pi}{n-r} - t \right)_2 \leq 2 \omega_m(f^{(r)}, \pi/2(n-r))_2, \quad (25)$$

в частности, если она выпукла вверх на $[0, \pi/2(n-r)]$, то неравенство (2) можно уточнить. В этом случае справедливо следующее

СЛЕДСТВИЕ 2. На множестве функций $f \in B_2^{(r)}$, у которых функция $\omega_m^2(f^{(r)}, t)_2$ удовлетворяет условию (25), справедливо неравенство

$$E_{n-1}(f)_2 \leq \frac{\sqrt{m+1}}{2^m} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \omega_m \left(f^{(r)}, \frac{\pi}{2(n-r)} \right)_2. \quad (26)$$

Доказательство. В самом деле, если функция $\omega_m^2(f^{(r)}, t)$ при всех $t \in [0, \pi/2(n-r)]$ удовлетворяет неравенству (24), то оценивая интеграл в правой части (2) получаем

$$\begin{aligned} &\frac{n-r}{2} \int_0^{\pi/(n-r)} \omega_m^2(f^{(r)}, t)_2 \sin(n-r)t dt = \\ &= \frac{n-r}{2} \left(\int_0^{\pi/2(n-r)} + \int_{\pi/2(n-r)}^{\pi/(n-r)} \right) \omega_m^2(f^{(r)}, t)_2 \sin(n-r)t dt = \\ &= \frac{n-r}{2} \int_0^{\pi/2(n-r)} \left[\omega_m^2(f^{(r)}, t)_2 + \omega_m^2 \left(f^{(r)}, \frac{\pi}{n-r} - t \right)_2 \right] \sin(n-r)t dt \leq \\ &\leq (n-r) \int_0^{\pi/2(n-r)} \omega_m^2(f^{(r)}, \pi/2(n-r))_2 \sin(n-r)t dt = \end{aligned}$$

$$= \omega_m^2(f^{(r)}, \pi/2(n-r))_2. \quad (27)$$

Подставляя полученную оценку (2) в (2), приходим к неравенству (26). Следствие 2 доказано.

В этом случае для константы Джексона-Стечкина имеет место оценка

$$\chi_{n,r,m}\left(\frac{\pi}{2}\right) \leq \frac{\sqrt{m+1}}{2^m}. \quad (28)$$

Вопрос о точности оценок (24) и (28) при всех $m, n \in \mathbb{N}$ и $r \in \mathbb{Z}_+$ остаётся открытым. При $m = 1$ и любых $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n > r$ оценка (28) является точной. Чтобы установить этот факт снова рассмотрим функцию $f_0(z) = z^n \in B_2^{(r)}$, $n > r$. В силу равенств (2) и (3) (при $m = 1$), имеем

$$E_{n-1}(f_0)_2 = \frac{1}{\sqrt{n+1}}; \quad \omega_1(f_0^{(r)}, t)_2 = \sqrt{2} \cdot \frac{\alpha_{n,r}}{\sqrt{n-r+1}} (1 - \cos(n-r)t)^{1/2},$$

$$\omega_1\left(f_0^{(r)}, \frac{\pi}{2(n-r)}\right)_2 = \sqrt{2} \cdot \frac{\alpha_{n,r}}{\sqrt{n-r+1}}.$$

Учитывая эти равенства, запишем оценки снизу

$$\chi_{n,r,1}\left(\frac{\pi}{2}\right) \geq \frac{\alpha_{n,r} \sqrt{(n+1)/(n-r+1)} \cdot E_{n-1}(f_0)_2}{\omega_1(f_0^{(r)}, \pi/2(n-r))_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (29)$$

С другой стороны, из (28) при $m = 1$ следует, что

$$\chi_{n,r,1}\left(\frac{\pi}{2}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (30)$$

Из сопоставления неравенств (29) и (30) получаем

$$\chi_{n,r,1}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad r \in \mathbb{Z}_+, \quad n > r.$$

Таким образом доказано, что на множестве функций $f \in B_2^{(r)}$, у которых функция $\omega_m^2(f^{(r)}, t)_2$ выпукла вверх, оценка (28) при любых $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n > r$ и $m = 1$ не улучшаема.

3. Точные значения n -поперечников классов функций $W_{2,m}^{(r)}(\Phi)$ в B_2

Прежде чем сформулировать остальные результаты, напомним необходимые в дальнейшем понятия и определения.

Пусть $S := \{\varphi : \|\varphi\|_2 \leq 1\}$ — единичный шар в B_2 , $\mathfrak{M}$ — выпуклое центрально-симметричное множество из B_2 , $\mathcal{L}_n \subset B_2$ — n -мерное подпространство, $\mathcal{L}^n \subset B_2$ — подпространство коразмерности n ; $\Lambda : B_2 \rightarrow \mathcal{L}_n$ — непрерывный линейный оператор, $\Lambda^\perp : B_2 \rightarrow \mathcal{L}_n$ — непрерывный оператор линейного проектирования. Величины

$$b_n(\mathfrak{M}, B_2) = \sup \{ \sup \{ \varepsilon > 0 : \varepsilon S \cap \mathcal{L}_{n+1} \subset \mathfrak{M} \} : \mathcal{L}_{n+1} \subset B_2 \},$$

$$d_n(\mathfrak{M}, B_2) = \inf \{ \sup \{ \inf \{ \|\varphi - g\|_2 : g \in \mathcal{L}_n \} : \varphi \in \mathfrak{M} \} : \mathcal{L}_n \subset B_2 \},$$

$$\delta_n(\mathfrak{M}, B_2) = \inf \{ \inf \{ \sup \{ \|\varphi - \Lambda\varphi\|_2 : \varphi \in \mathfrak{M} \} : \Lambda B_2 \subset \mathcal{L}_n \} : \mathcal{L}_n \subset B_2 \},$$

$$d^n(\mathfrak{M}, B_2) = \inf \{ \sup \{ \|\varphi\|_2 : \varphi \in \mathfrak{M} \cap \mathcal{L}_n \} : \mathcal{L}_n \subset B_2 \},$$

$$\Pi_n(\mathfrak{M}, B_2) = \inf \left\{ \inf \left\{ \sup \left\{ \|\varphi - \Lambda^\perp \varphi\|_2 : \varphi \in \mathfrak{M} \right\} : \Lambda^\perp B_2 \subset \mathcal{L}_n \right\} : \mathcal{L}_n \subset B_2 \right\}$$

называют соответственно *бернштейновским*, *колмогоровским*, *линейным*, *гельфандовским*, *проекционным n -поперечниками* подмножества $\mathfrak{M}$ в B_2 . Поскольку B_2 — гильбертово пространство, то между перечисленными величинами имеют место соотношения [22, 23]:

$$b_n(\mathfrak{M}, B_2) \leq d^n(\mathfrak{M}, B_2) \leq d_n(\mathfrak{M}, B_2) = \delta_n(\mathfrak{M}, B_2) = \Pi_n(\mathfrak{M}, B_2). \quad (31)$$

Отметим, что вычислению в пространстве B_2 точных значений n -поперечников классов аналитических в круге функций, определённых при помощи модулей непрерывности различных порядков и иных характеристик гладкости функций, посвящены работы [4, 5, 10–14, 18, 20, 21].

Пусть $\Phi(u)$, $u \in \mathbb{R}_+$ — есть непрерывная монотонно возрастающая функция такая, что $\Phi(0) = 0$. Для любых $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ и $u \in [0, 2\pi]$ определим в $B_2^{(r)}$ следующие классы функций:

$$W_{2,m}^{(r)}(\Phi) := \left\{ f \in B_2^{(r)} : \frac{\pi}{2u} \int_0^u \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, t) \sin \frac{\pi t}{u} dt \leq \Phi^2(u) \right\}.$$

Положим ещё

$$(1 - \cos \theta)_* := \begin{cases} 1 - \cos \theta, & \text{если } 0 \leq \theta \leq \pi; \\ 2, & \text{если } \theta > \pi. \end{cases}$$

Нам понадобится следующее утверждение.

Лемма 1. Для произвольного полинома $p_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k \in \mathcal{P}_n$ при любых $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n > r$, $t \geq 0$ выполняется неравенство

$$\omega_m^2(p_n^{(r)}, t)_2 \leq 2^m \alpha_{n,r}^2 \frac{n+1}{n-r+1} (1 - \cos(n-r)t)_*^m \cdot \|p_n\|_2^2. \quad (32)$$

Доказательство. Учитывая формулу (3) для произвольного полинома $p_n \in \mathcal{P}_n$, запишем

$$\begin{aligned} \omega_m^2(p_n^{(r)}, t)_2 &= 2^m \sup_{|h| \leq t} \sum_{k=r+1}^n \alpha_{k,r}^2 \frac{|a_k|^2}{k-r+1} (1 - \cos(k-r)h)^m = \\ &= 2^m \sup_{|h| \leq t} \sum_{k=r+1}^n \frac{k+1}{k-r+1} \alpha_{k,r}^2 \cdot \frac{|a_k|^2}{k+1} (1 - \cos(k-r)h)^m. \end{aligned} \quad (33)$$

Заметив, что

$$\max_{r+1 \leq k \leq n} \frac{k+1}{k-r+1} \cdot \alpha_{k,r}^2 = \frac{n+1}{n-r+1} \alpha_{n,r}^2,$$

и при любых $t \geq 0$ и $r+1 \leq k \leq n$

$$(1 - \cos(k-r)t)^m \leq (1 - \cos(n-r)t)_*^m$$

из равенства (3) получаем

$$\begin{aligned} \omega_m^2(p_n^{(r)}, t)_2 &\leq 2^m \alpha_{n,r}^2 \frac{n+1}{n-r+1} (1 - \cos(n-r)t)_*^m \sum_{k=r+1}^n \frac{|a_k|^2}{k+1} = \\ &= 2^m \alpha_{n,r}^2 \frac{n+1}{n-r+1} (1 - \cos(n-r)t)_*^m \cdot \|p_n\|_2^2, \end{aligned}$$

и неравенство (32) доказано.

ТЕОРЕМА 3. Пусть функция Φ при любых $\mu > 0$, $u \in (0, 2\pi]$ и $m \in \mathbb{N}$ удовлетворяет условию

$$\Phi^2\left(\frac{u}{\mu}\right) \int_0^{\mu\pi} (1 - \cos v)_* \sin \frac{v}{\mu} dv \leq 2\mu\Phi^2(u). \quad (34)$$

Тогда при любых $n \in \mathbb{N}$ и $r \in \mathbb{Z}_+$, $n > r$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} \lambda_n(W_m^{(r)}(\Phi)_2, B_2) &= d_n(W_m^{(r)}(\Phi)_2, B_2) = E_{n-1}(W_m^{(r)}(\Phi))_2 = \\ &= \frac{1}{2^{m/2}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n-r}\right), \end{aligned}$$

где

$$E_{n-1}(\mathfrak{M})_2 := \sup\{E_{n-1}(f)_2 : f \in \mathfrak{M}\},$$

а $\lambda_n(\cdot)$ — любой из перечисленных выше n -поперечников.

Доказательство. В силу определения класса $W_m^{(r)}(\Phi)_2$ из неравенства (17), получим оценку сверху всех перечисленных n -поперечников:

$$\begin{aligned} \lambda_n(W_m^{(r)}(\Phi)_2, B_2) &\leq d_n(W_m^{(r)}(\Phi)_2, B_2) \leq E_{n-1}(W_m^{(r)}(\Phi))_2 \leq \\ &\leq \frac{1}{2^{m/2}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n-r}\right). \end{aligned} \quad (35)$$

С целью получения оценки снизу рассматриваемых n -поперечников класса $W_m^{(r)}(\Phi)_2$, в силу соотношения (31), достаточно оценить снизу бернштейновского n -поперечника. Для этого в подпространстве комплексных полиномов $p_n \in \mathcal{P}_n \cap B_2$ зафиксируем $(n+1)$ -мерный шар

$$S_{n+1} := \left\{ p_n : \|p_n\|_2 \leq \frac{1}{2^{m/2}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n-r}\right) \right\}$$

и докажем, что $S_{n+1} \subset W_m^{(r)}(\Phi)_2$. Таким образом, требуется доказать, что для любого $p_n \in S_{n+1}$, $u \in (0, 2\pi]$ выполняется неравенство

$$\frac{\pi}{2u} \int_0^u \omega_m^{2/m}(p_n^{(r)}, t)_2 \sin \frac{\pi}{u} t dt \leq \Phi^2(u).$$

Для этого умножим обе части неравенства (32) на функцию $\frac{\pi}{2u} \sin \frac{\pi}{u} t$ и проинтегрируем по t на отрезке $[0, u]$, затем сделаем замену переменной $u = \mu\pi/(n-r)$ в правой части и заменяем норму полинома по формуле радиуса сферы S_{n+1} . В итоге после всех этих операций, с учётом (34), получаем

$$\begin{aligned} &\frac{\pi}{2u} \int_0^u \omega_m^{2/m}(p_n^{(r)}, t)_2 \sin \frac{\pi}{u} t dt \leq \\ &\leq \frac{\pi}{2u} \Phi^2\left(\frac{\pi}{n-r}\right) \int_0^u (1 - \cos(n-r)t)_* \sin \frac{\pi}{u} t dt = \\ &= \frac{n-r}{2\mu} \Phi^2\left(\frac{u}{\mu}\right) \int_0^{\pi\mu/(n-r)} (1 - \cos(n-r)t)_* \sin \frac{(n-r)t}{\mu} dt = \\ &= \frac{1}{2\mu} \Phi^2\left(\frac{u}{\mu}\right) \int_0^{\mu\pi} (1 - \cos t)_* \sin \frac{t}{\mu} dt \leq \Phi^2(u) \end{aligned}$$

и тем самым включение $S_{n+1} \in W_m^{(r)}(\Phi)_2$ доказано. В силу определения бернштейновского n -поперечника, запишем оценку снизу

$$\begin{aligned} b_n(W_m^{(r)}(\Phi)_2, B_2) &\geq b_n(S_{n+1}, B_2) = \\ &= \frac{1}{2^{m/2}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n-r}\right). \end{aligned} \quad (36)$$

Сопоставляя неравенства (3) и (3) с учётом соотношения (31), получим утверждение теоремы 3.

В завершении статьи отметим, что функция Φ , удовлетворяющая условию (34) существует [24]. Этому условию удовлетворяет, например, функция $\Phi_*(t) = t^\alpha$, где $\alpha = \frac{\pi^2}{8}$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Смирнов В. И., Лебедев Н. А. Конструктивная теория функций комплексного переменного. —М.—Л.: Наука. 1964. 440 с.
2. Бабенко К. И. О наилучших приближениях одного класса аналитических функций // Изв.АН СССР, сер. матем. 1958. Т. 22. № 5. С.631-640.
3. Тихомиров В. М. Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений // УМН. 1960. Т.15. № 3. С.81-120.
4. Тайков Л. В. О наилучших линейных методах приближения функций классов $\mathcal{B}^r$ и H^r // УМН. 1963. Т.18. № 4. С.183-189.
5. Тайков Л. В. О наилучшем приближении в среднем некоторых классов аналитических функций // Матем. заметки. 1967. Т.1. № 2. С.155-162.
6. Sheik J. T. Polynomial Approximation of functions analytic in a disc // Proc. Amer. Math. Soc. 1966. Т.17. № 6. С.1238-1243.
7. Белый В. И., Двейрин М. З. О наилучших линейных методах приближения на классах функций, определяемых союзными ядрами. Метрические вопросы теории функций и отображений // Из-во, "Науково думка". 1971. вып.2. С.37-54.
8. Двейрин М. З., Чебаненко И. В. О полиномиальной аппроксимация в банаховых пространствах аналитических функций // Теория отображений и приближение функций. Наукова думка. Киев. 1983. С.63-73.
9. Фарков Ю. А. Поперечники классов Харди и Бергмана в шаре из $\mathbb{C}^n$ // УМН. 1990. Т.45. № 3. С.197-198.
10. Вакарчук С. Б. Наилучшие линейные методы приближения и поперечники классов аналитических в круге функций // Матем. заметки. 1995. Т.57. № 1. С.30-39.
11. Вакарчук С. Б. О наилучших линейных методах приближения и поперечниках некоторых классов аналитических функций // Матем. заметки. 1999. Т.65. № 2. С.186-193.
12. Вакарчук С. Б., Забутная В. И. О наилучших линейных методах приближений функций классов Л. В. Тайкова в пространствах Харди $H_{q,\rho}$ $q \geq 1, 0 < \rho \leq 1$ // Матем. заметки. 2009. Т.85. № 3. С.323-329.

13. Вакарчук С. Б., Шабозов М. Ш. О поперечниках классов функций, аналитических в круге // Мат. сборник. 2010. Т. 201. № 8. С. 3-22.
14. Шабозов М. Ш., Лангаршоев М. Р. О наилучших линейных методах приближения некоторых классов аналитических в единичном круге функций // Сиб. мат. журнал. 2019. Т. 60. № 6. С. 1414-1423.
15. Шабозов М. Ш., Юсупов Г. А., Заргаров Дж. Дж. О наилучшей совместной полиномиальной аппроксимации функций и их производных в пространстве Харди // Труд. ИММ УрО РАН. 2021. Т. 27. № 4. С. 239-254.
16. Шалаев В. В. О поперечниках в L_2 классов дифференцируемых функций, определяемых модулями непрерывности высших порядков // Укр. матем. журнал. 1991. Т. 43. № 1. С. 125-129.
17. Корнейчук Н. П. Экстремальные задачи теории приближения. — М.: Наука. 1976. 320 с.
18. Шабозов М. Ш. О наилучшем совместном приближении функций в пространстве Бергмана B_2 // Матем. заметки. 2023. Т. 114. № 3. С. 435-446.
19. Шабозов М. Ш., Саидусайнов М. С. Верхние грани приближения некоторых классов функций комплексной переменной рядами Фурье в пространстве L_2 и значения n -поперечников // Матем. заметки. 2018. Т. 103. № 4. С. 617-631.
20. Шабозов М. Ш., Хуромонов Х. М. О наилучшем приближении в среднем функций комплексного переменного рядами Фурье в пространстве Бергмана // Изв. вузов. Матем. 2020. № 2. С. 74-92.
21. Хуромонов Х. М. О наилучшем совместном приближении функций в пространстве Бергмана B_2 // Известия вузов. Матем. 2023. № 5. С. 71-81.
22. Pinkus A. n -Widths by Approximation Theory. — Berlin: Springer. 1985. 312 p.
23. Тихомиров В. М. Некоторые вопросы теории приближений. — МГУ. 1976. 325 с.
24. Айнуллоев Н. Значение поперечников некоторых классов дифференцируемых функций в L_2 // Докл. АН ТаджССР. 1984. Т. 29. № 8. С. 415-418.

REFERENCES

1. Smirnov, V. I., Lebedev, N. A. 1964, "Constructive theory of functions of complex analysis". — Moscow; Leningrad: Nauka, 440 p.
2. Babenko, K. I. 1958, "On the best approximations of one class of analytic functions", *Izvestiya Academy Nauk SSSR*, vol. 22, no. 5, pp. 631-640.
3. Tikhomirov, V. M. 1960, "Diameters of sets in function spaces and the theory of best approximations", *UMN*, vol. 15, no. 3, pp. 81-120.
4. Taikov, L. V. 1963, "On the best linear methods for approximating functions of the classes $\mathcal{B}^r$ and H^r ", *UMN*, vol. 18, no. 4, pp. 183-189.
5. Taikov, L. V. 1967, "Best approximation in the mean of certain classes of analytic functions", *Math. Notes*, vol. 1, no. 2, pp. 155-162.

6. Sheik, J. T. 1966, "Polynomial Approximation of functions analytic in a disc", *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 17, no. 6, pp. 1238-1243.
7. Belyi, V. I., Dvejrin, M. Z. 1971, "On the best linear approximation methods on classes of functions defined by allied kernels. Metric questions in the theory of functions and mappings", *Publ. "Naukovo dumka"*, vol. 2, pp. 37-54.
8. Dvejrin, M. Z., Chebanenko, I. V. 1983, "On polynomial approximation in Banach spaces of analytic functions", *Map theory and function approximation. Naukovo dumka. Kyiv.*, pp. 63-73.
9. Farkov, Yu. A. 1990, "Diameters of the Hardy and Bergman classes in a ball of $\mathbb{C}^n$ ", *UMN*, vol. 45, no. 3, pp. 197-198.
10. Vakarchuk, S. B. 1995, "Best linear methods of approximation and widths of classes of analytic functions in a disk", *Math. Notes*, vol. 57, no. 1, pp. 30-39.
11. Vakarchuk, S. B. 1999, "On the best linear approximation methods and the widths of certain classes of analytic functions", *Math. Notes*, vol. 65, no. 2, pp. 186-193.
12. Vakarchuk, S. B., Zabutnaya, V. I. 2009, "Best Linear Approximation Methods for Functions of Taikov Classes in the Hardy spaces $H_{q,\rho}$ $q \geq 1, 0 < \rho \leq 1$ ", *Math. Notes*, vol. 85, no. 3, pp. 323-329.
13. Vakarchuk, S. B., Shabozov, M. Sh. 2010, "The widths of classes of analytic functions in a disc", *Sb. Math.*, vol. 201, no. 8, pp. 3-22.
14. Shabozov, M. Sh., Langarshoev, M. R. 2019, "Best linear approximation methods for some classes of analytic functions on the unit disk", *Siberian Math. J.*, vol. 60, no. 6, pp. 1414-1423.
15. Shabozov, M. Sh., Yusupov, G. A., Zargarov, J. J. 2021, "On the best simultaneous polynomial approximation of functions and their derivatives in Hardy spaces", *Trudy IMM Uro RAN.*, vol. 27, no. 4, pp. 239-254.
16. Shalaev V. V. 1991, "On the cross-sections in L_2 of classes of differentiable functions defined by higher-order continuity modules", *Ukrainian Math. J.*, vol. 43, no. 1, pp. 125-129.
17. Korneychuk, N. P. 1976, "Extremal problems approximation theory", *Moscow.: Nauka.* 320 p.
18. Shabozov, M. Sh. 2023, "On the Best Simultaneous Approximation in the Bergman Space B_2 ", *Math. Notes*, vol. 114, no. 3, pp. 435-446.
19. Shabozov, M. Sh., Saidusajnov, M. S. 2018, "Upper Bounds for the Approximation of Certain Classes of Functions of a Complex Variable by Fourier Series in the Space L_2 and n -Widths", *Math. Notes*, vol. 103, no. 4, pp. 617-631.
20. Shabozov, M. Sh., Khuromonov, Kh. M. 2020, "On the best approximation in the mean of functions of a complex variable by Fourier series in the Bergman space", *Russian Math. (Iz. VUZ).*, no. 2, pp. 74-92.
21. Khuromonov, Kh. M. 2023, "On the best joint approximation of functions in Bergman space B_2 ", *Russian Math. (Iz. VUZ).*, no. 5, pp. 71-81.
22. Pinkus, A. 1985, " n -Widths by Approximation Theory", —*Berlin: Springer.* 312 p.

23. Tikhomirov, V. M. 1976, “Some questions of approximation theory“, —*Moscow State University* 325 p.
24. Ainulloev, N. 1984, “The value of the diameters of some classes of differentiable functions in L_2 “, *Doklady AN TajSSR.*, vol. 29, no. 8, pp. 415-418.

Получено: 22.12.2024

Принято в печать: 10.03.2025

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 26. Выпуск 1.

УДК 517.5

DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-1-131-141

О связи между второй разделенной разностью и второй производной в задаче экстремальной интерполяции в среднем¹

В. Т. Шевалдин

Шевалдин Валерий Трифонович — доктор физико-математических наук, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН (г. Екатеринбург).

e-mail: valerii.shevaldin@imm.uran.ru

Аннотация

В работе на произвольной сетке $\Delta = \{x_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ числовой оси сформулирована общая задача экстремальной функциональной интерполяции в среднем действительных функций, имеющих на оси почти всюду производную n -го порядка. Требуется найти наименьшее значение нормы этой производной в пространстве L_{∞} для функций f , интерполирующих в среднем (с интервалами усреднения длины $2h$) любую заданную последовательность $y = \{y_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ действительных чисел, для класса последовательностей Y , у которых все разделенные разности n -го порядка на такой сетке узлов ограничены сверху. В данной работе задача решается в случае $n = 2$. Для величины второй производной в терминах шагов $h_k = x_{k+1} - x_k$ сетки Δ получены оценки сверху и снизу, если выполнено неравенство $2h \leq \underline{h} = \inf_k h_k$. Работа является продолжением исследований Ю. Н. Субботина, автора и С. И. Новикова в известной задаче Яненко — Стечкина экстремальной функциональной интерполяции, поставленной в начале 60-х годов прошлого века для равномерной сетки узлов.

Ключевые слова: интерполяция в среднем, производная, разделенная разность, ось, произвольная сетка узлов, сплайн.

Библиография: 17 названий.

Для цитирования:

Шевалдин, В. Т. О связи между второй разделенной разностью и второй производной в задаче экстремальной интерполяции в среднем // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 1, с. 131–141.

¹Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (номер соглашения 075-02-2023-913).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 26. No. 1.

UDC 517.5

DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-1-131-141

On the relationship between the second divided difference and the second derivative in the problem of extremal interpolation in the mean

V. T. Shevaldin

Shevaldin Valerii Trifonovich — doctor of physical and mathematical sciences, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences (Yekaterinburg).

e-mail: valerii.shevaldin@imm.uran.ru

Abstract

In the paper, the general problem of extremal functional interpolation in the mean for real functions that have derivative of order n almost everywhere is formulated on an arbitrary partition $\Delta = \{x_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ of the real axis. It is required to find the smallest value of the L_{∞} -norm of the n -derivative among functions that interpolate in the mean (with averaging intervals of length $2h$) any sequence of real numbers $y = \{y_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ from a class Y of sequences whose divided differences of order n are bounded from above on such a grid. In this paper, the problem is considered in the case of $n = 2$. We give the above and below estimates for the L_{∞} -norm of the second derivative in terms of grid steps $h_k = x_{k+1} - x_k$ provided that $2h \leq \underline{h} = \inf_k h_k$. The obtained results are developments of research of Yu. N. Subbotin, the author and S. I. Novikov in the well-known Yanenko—Stechkin problem of extremal functional interpolation. This problem was put in the early 60-s years of the last century for the case of the uniform grid.

Keywords: interpolation in the mean, derivative, divided difference, axis, grid of nodes, spline.

Bibliography: 17 titles.

For citation:

Shevaldin, V. T. 2025, “On the relationship between the second divided difference and the second derivative in the problem of extremal interpolation in the mean”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 1, pp. 131–141.

1. Введение

Пусть n — произвольное натуральное число, и на оси $\mathbb{R} = (-\infty; +\infty)$ задана бесконечная в обе стороны сетка узлов $\Delta = \{x_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ вида

$$-\infty < \dots < x_k < x_{k+1} < x_{k+2} < \dots < +\infty.$$

На эту сетку наложим следующее ограничение: $\underline{h} = \inf_k h_k > 0$, где $h_k = x_{k+1} - x_k$. Пусть $y = \{y_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ — произвольная последовательность действительных чисел. Разделенная разность порядка n на сетке Δ определяется рекуррентно как обычно с помощью равенств

$$\begin{aligned} [y_k] &= y_k, \quad [y_{k+1}, y_k] = \frac{[y_{k+1}] - [y_k]}{x_{k+1} - x_k}, \dots, \\ [y_{k+n}, y_{k+n-1}, \dots, y_k] &= \frac{[y_{k+n}, \dots, y_{k+1}] - [y_{k+n-1}, \dots, y_k]}{x_{k+n} - x_k} \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned} \quad (1)$$

Определим класс последовательностей

$$Y = \left\{ y = \{y_k\}_{k=-\infty}^{\infty} : \sup_k |[y_{k+n}, y_{k+n-1}, \dots, y_k]| \leq 1 \right\}.$$

Пусть $h : 0 < h < \underline{h}/2$. Для любой последовательности $y \in Y$ рассмотрим класс функций

$$F(y) = \left\{ f : f^{(n-1)} \in AC, f^{(n)} \in L_{\infty}(\mathbb{R}), \frac{1}{2h} \int_{-h}^h f(x_k + t) dt = y_k \quad (k \in \mathbb{Z}) \right\}.$$

Здесь, как обычно, AC — класс локально абсолютно непрерывных функций и $L_{\infty} = L_{\infty}(\mathbb{R})$ — класс функций, существенно ограниченных на $\mathbb{R}$ с обычным определением нормы

$$\|f\|_{\infty} = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|.$$

Задача экстремальной интерполяции в среднем заключается в точном нахождении величины

$$A_n = A_n(\Delta, h) = \sup_{y \in Y} \inf_{f \in F(y)} \|f^{(n)}\|_{\infty}. \quad (2)$$

Для равномерной сетки узлов $\overline{\Delta}_H = \{kH\}_{k=-\infty}^{\infty}$ ($H = x_{k+1} - x_k$ для всех $k \in \mathbb{Z}$) и конечных разностей n -го порядка

$$\Delta^n y_k = \sum_{s=0}^n (-1)^{n-s} C_n^s y_{k+s}$$

эта задача известна, как задача Яненко—Стечкина (см. работы Ю. Н. Субботина [1]–[5] и большой обзор [6] по этой тематике и родственным задачам). Для произвольной сетки узлов близкую по постановке задачу на отрезке числовой оси при $h = 0$ (этот случай соответствует обычной интерполяции в точках сетки, и $y_k = f(x_k)$) первым в 1940 году сформулировал и доказал ограниченность нормы n -й производной в пространстве L_{∞} французский математик Ж. Фавар [7] (см. также [8]–[10]). Дальнейшее развитие данная задача получила для произвольной сетки узлов, $h = 0$ и оператора n -кратного дифференцирования в недавних работах [11]–[14]. В случае интерполяции в среднем (т. е. при $h \neq 0$) задача (2) рассматривалась ранее только для равномерной сетки узлов (см. [3]–[5] для оператора n -кратного дифференцирования и [15]–[17] — для произвольного линейного дифференциального оператора n -го порядка с постоянными коэффициентами в более общей постановке). Следует отметить, что Ю. Н. Субботин в первых своих работах [1]–[3] предложил оригинальный метод решения подобных задач для равномерной сетки узлов, который, как оказалось, можно с небольшими изменениями применить и для произвольной сетки.

Настоящая работа посвящена только случаю $n = 2$. Переформулируем при $n = 2$ и $0 \leq h \leq H/2$ (т. е. при непересекающихся интервалах усреднения) основной результат Ю. Н. Субботина (см. [3]) для равномерной сетки узлов $\overline{\Delta}_H = \{kH\}_{k=-\infty}^{\infty}$ в терминах разделенных разностей (1) (Ю. Н. Субботин для простоты изложения рассматривал в своих работах только случай $H = 1$), вычисляя соответствующие определенные интегралы от совершенных сплайнов, которые возникли в его работах.

ТЕОРЕМА 1 (Ю. Н. Субботин [3]). *При $0 \leq h \leq H/2$ имеет место следующее равенство:*

$$A_2(\overline{\Delta}_H, h) = \frac{4}{1 - \frac{4h^2}{3H^2}}.$$

СЛЕДСТВИЕ 1. *При $0 \leq h \leq H/2$ имеем*

$$A_2(\overline{\Delta}_H, 0) = 4 \leq A_2(\overline{\Delta}_H, h) = A_2\left(\overline{\Delta}_H, \frac{H}{2}\right) = 6.$$

Ю.Н. Субботин [3], [4] вычислил величину $A_n(\overline{\Delta}_H, h)$ при всех значениях $n \in \mathbb{N}$ и $0 \leq h \leq H$ (случай $H/2 < h \leq H$ приводит к пересекающимся интервалам усреднения). Мы не формулируем здесь все его точные результаты, поскольку они не имеют непосредственного отношения к дальнейшему содержанию работы, замечая только, что в случае пересекающихся интервалов усреднения данная задача оказалась гораздо сложнее.

Для любой сетки $\Delta = \{x_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ введем следующие величины:

$$A = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{4N} \sum_{k=-N+1}^N \frac{1}{\left(\frac{h_{k-1}}{h_k} + 2 + \frac{h_{k+1}}{h_k}\right)} \left(\frac{1 + \frac{h_{k-1}}{h_k}}{1 + \frac{h_{k+1}}{h_k}} + \frac{1 + \frac{h_{k+1}}{h_k}}{1 + \frac{h_{k-1}}{h_k}} \right) \right]^{-1},$$

$$B = 2 \left[\inf_{k \in \mathbb{Z}} \left(1 - \frac{2(1 + \frac{h_k}{h_{k+1}})}{\left(\frac{h_k}{h_{k+1}} + 2 + \frac{h_{k+2}}{h_{k+1}}\right)^2} - \frac{2(1 + \frac{h_{k+1}}{h_k})}{\left(\frac{h_{k-1}}{h_k} + 2 + \frac{h_{k+1}}{h_k}\right)^2} \right) \right]^{-1}.$$

ТЕОРЕМА 2 ([11]). Для любой сетки узлов Δ при $h = 0$ имеет место двойное неравенство

$$A \leq A_2(\Delta, 0) \leq B,$$

причем $A \geq 2$, $B \leq 18$.

Оценка сверху для величины $A_2(\Delta, 0)$ в сформулированной теореме была уточнена (см. [13, 14]): $A_2(\Delta, 0) \leq 4$. При этом оказалось, что

$$2 = \inf_{\Delta} A_2(\Delta, 0) \leq \sup_{\Delta} A_2(\Delta, 0) = \max_{\Delta} A_2(\Delta, 0) = 4,$$

причем верхняя оценка реализуется на равномерной сетке $\overline{\Delta}_H$ (H — любое положительное число).

Основным результатом настоящей работы является следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3. Для любой сетки узлов Δ при любом $h : 0 < h < \underline{h}/2$ ($\underline{h} = \inf_k h_k$) имеет место неравенство

$$A \leq A_2(\Delta, h) \leq \frac{4}{\inf_{k \in \mathbb{Z}} \left(1 - \frac{4h^2}{3h_k h_{k+1}} \right)} \leq 6.$$

2. Оценка снизу величины $A_2(\Delta, h)$

Пусть в задаче (2) $n = 2$ и h — любое положительное число. Для любой последовательности $y \in Y$ функцию $f \in F(y)$ запишем по формуле Тейлора в виде

$$f(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) + \int_{x_k}^x (x - t)f''(t) dt. \quad (3)$$

Поскольку

$$y_k = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h f(x_k + x) dx, \quad y_{k+1} = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h f(x_{k+1} + x) dx, \quad y_{k+2} = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h f(x_{k+2} + x) dx,$$

то из (3) и определения (1) разделенной разности $[y_{k+2}, y_{k+1}, y_k]$, учитывая, что она аннулирует линейные функции на произвольной сетке узлов, получим

$$[y_{k+2}, y_{k+1}, y_k] = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \left[\int_{x_k}^{x_{k+2}+x} \frac{x_{k+2} + x - t}{h_{k+1}(h_k + h_{k+1})} f''(t) dt - \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{x_k}^{x_{k+1}+x} \frac{x_{k+1} + x - t}{h_k h_{k+1}} f''(t) dt + \int_{x_k}^{x_k+x} \frac{x_k + x - t}{h_k(h_k + h_{k+1})} f''(t) dt \Big] dx = \\
& = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \left[\int_{x_k+x}^{x_{k+2}+x} \frac{x_{k+2} + x - t}{h_{k+1}(h_k + h_{k+1})} f''(t) dt - \int_{x_k+x}^{x_{k+1}+x} \frac{x_{k+1} + x - t}{h_k h_{k+1}} f''(t) dt \right] dx.
\end{aligned}$$

Из этого равенства следует первое представление для второй разделенной разности в случае интерполяции в среднем:

$$\begin{aligned}
[y_{k+2}, y_{k+1}, y_k] &= \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \left[\int_{x_{k+1}+x}^{x_{k+2}+x} \frac{x_{k+2} + x - t}{h_{k+1}(h_k + h_{k+1})} f''(t) dt + \right. \\
& \quad \left. + \int_{x_k+x}^{x_{k+1}+x} \frac{t - x_k - x}{h_k(h_k + h_{k+1})} f''(t) dt \right] dx. \tag{4}
\end{aligned}$$

После замены переменных выводим второе представление для этой разности:

$$\begin{aligned}
[y_{k+2}, y_{k+1}, y_k] &= \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \left[\int_{x_{k+1}}^{x_{k+2}} \frac{x_{k+2} - z}{h_{k+1}(h_k + h_{k+1})} f''(x + z) dz + \right. \\
& \quad \left. + \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{z - x_k}{h_k(h_k + h_{k+1})} f''(x + z) dz \right] dx. \tag{5}
\end{aligned}$$

Для получения оценки снизу для величины $A_2(\Delta, h)$, следуя методу работ [1]–[3] Ю. Н. Субботина, рассмотрим произвольную последовательность $y^* = \{y_k^*\}_{k=-\infty}^{\infty} \in Y$, удовлетворяющую условию

$$[y_{k+2}^*, y_{k+1}^*, y_k^*] = (-1)^k \quad (k \in \mathbb{Z}). \tag{6}$$

Из (5) и (6) при любом натуральном $N \geq 2$ имеем

$$\begin{aligned}
2N + 1 &= \sum_{k=-N}^N (-1)^k [y_{k+2}^*, y_{k+1}^*, y_k^*] = \\
&= \sum_{k=-N}^N \frac{(-1)^k}{2h(h_k + h_{k+1})} \int_{-h}^h \left[\int_{x_{k+1}}^{x_{k+2}} \frac{x_{k+2} - z}{h_{k+1}} f''(x + z) dz + \right. \\
& \quad \left. + \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{z - x_k}{h_k} f''(x + z) dz \right] dx = S_1 + S_2, \tag{7}
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
S_1 &= \frac{(-1)^N}{2h(h_N + h_{N+1})} \int_{-h}^h dx \int_{x_{N+1}}^{x_{N+2}} \frac{x_{N+2} - z}{h_{N+1}} f''(x + z) dz + \\
& \quad + \frac{(-1)^N}{2h(h_{-N} + h_{-N+1})} \int_{-h}^h dx \int_{x_{-N}}^{x_{-N+1}} \frac{z - x_{-N}}{h_{-N}} f''(x + z) dz, \\
S_2 &= \sum_{k=-N+1}^N \frac{(-1)^k}{2h} \int_{-h}^h dx \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_k(z) f''(x + z) dz, \\
\varphi_k(z) &= \frac{z - x_k}{h_k(h_k + h_{k+1})} - \frac{x_{k+1} - z}{h_{k+1}(h_k + h_{k+1})} \quad (z \in [x_k, x_{k+1}]), \quad k = \overline{-N+1, N}. \tag{8}
\end{aligned}$$

Из (8) имеем

$$|S_1| \leq \left[\frac{1}{h_{N+1}(h_N + h_{N+1})} \int_{x_{N+1}}^{x_{N+2}} (x_{N+2} - z) dz + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{h_{-N}(h_{-N} + h_{-N+1})} \int_{x_{-N}}^{x_{-N+1}} (z - x_{-N}) dz \Big] \cdot \sup_{x \in \mathbb{R}} |f''(x)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |f''(x)|, \\
|S_2| & \leq \left[\sum_{k=-N+1}^N \int_{x_k}^{x_{k+1}} |\varphi_k(z)| dz \right] \cdot \sup_{x \in \mathbb{R}} |f''(x)|.
\end{aligned} \tag{9}$$

После несложных вычислений получаем

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} |\varphi_k(z)| dz = \frac{h_k}{2(h_{k-1} + 2h_k + h_{k+1})} \left(\frac{h_k + h_{k+1}}{h_{k-1} + h_k} + \frac{h_{k-1} + h_k}{h_k + h_{k+1}} \right). \tag{10}$$

Следует заметить, что формула (10) ранее была доказана в работе [11]. Таким образом, из (7)–(10) для любого натурального числа $N \geq 2$ следует неравенство

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f''(x)| \geq \frac{2N+1}{|S_1| + |S_2|} \geq \frac{2N+1}{K}, \tag{11}$$

где

$$K = 1 + \frac{1}{2} \sum_{k=-N+1}^N \frac{1}{\left(\frac{h_{k-1}}{h_k} + 2 + \frac{h_{k+1}}{h_k} \right)} \left(\frac{1 + \frac{h_{k+1}}{h_k}}{1 + \frac{h_{k-1}}{h_k}} + \frac{1 + \frac{h_{k-1}}{h_k}}{1 + \frac{h_{k+1}}{h_k}} \right).$$

Устремляя число N к бесконечности, из неравенства (11) для величины $A_2(\Delta, h)$, получаем следующую оценку снизу, зависящую от шагов сетки Δ и не зависящую от длины $2h$ интервала усреднения:

$$A_2(\Delta, h) \geq A, \tag{12}$$

в которой константа A была определена во введении к настоящей работе.

3. Оценка сверху величины $A_2(\Delta, h)$

Наряду с сеткой $\Delta = \{x_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ рассмотрим еще одну сетку узлов Δ' в точках $x_{k+0,5} = (x_k + x_{k+1})/2$ ($k \in \mathbb{Z}$), и пусть $\underline{h} = \inf_k h_k > 0$, $0 < h \leq \underline{h}/2$. Покажем, что для любой последовательности $y \in Y$ существует функция $f \in F(y)$, которая является интерполяционным параболическим сплайном с узлами в точках сетки Δ' , который интерполирует в среднем значения последовательности y , а именно удовлетворяет условиям

$$\frac{1}{2h} \int_{-h}^h f(x_k + x) dx = y_k \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

и для него справедлива оценка

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f''(x)| \leq \frac{4}{\inf_{k \in \mathbb{Z}} \left(1 - \frac{4h^2}{3h_k h_{k+1}} \right)}.$$

Для любого числа $k \in \mathbb{Z}$ полагаем

$$f''(x) = Z_k, \quad x_{k-0,5} \leq x < x_{k+0,5}, \tag{13}$$

где числа $Z = \{Z_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ подлежат дальнейшему определению.

Из равенства (4) с учетом того, что число h достаточно мало ($0 < h \leq \underline{h}/2$), меняя порядок интегрирования, тогда получим разностное уравнение с трехленточной матрицей вида

$$[y_{k+2}, y_{k+1}, y_k] = a_k Z_{k+2} + b_k Z_{k+1} + c_k Z_k \quad (k \in \mathbb{Z}), \tag{14}$$

где

$$\begin{aligned}
 a_k &= \frac{1}{2h} \int_{x_{k+2}-h}^{x_{k+2}+h} dt \int_{t-x_{k+2}}^h \frac{x_{k+2} + x - t}{h_{k+1}(h_k + h_{k+1})} dx + \frac{1}{2h} \int_{x_{k+1,5}}^{x_{k+2}-h} dt \int_{-h}^h \frac{x_{k+2} + x - t}{h_{k+1}(h_k + h_{k+1})} dx, \\
 b_k &= \frac{1}{2h} \int_{x_{k+1}-h}^{x_{k+1}+h} dt \int_{-h}^{t-x_{k+1}} \frac{x_{k+2} + x - t}{h_{k+1}(h_k + h_{k+1})} dx + \frac{1}{2h} \int_{x_{k+1}+h}^{x_{k+1,5}} dt \int_{-h}^h \frac{x_{k+2} + x - t}{h_{k+1}(h_k + h_{k+1})} dx + \\
 &\quad + \frac{1}{2h} \int_{x_{k+1}-h}^{x_{k+1}+h} dt \int_{t-x_{k+1}}^h \frac{t - x - x_k}{h_k(h_k + h_{k+1})} dx + \frac{1}{2h} \int_{x_{k+0,5}}^{x_{k+1}-h} dt \int_{-h}^h \frac{t - x - x_k}{h_k(h_k + h_{k+1})} dx, \\
 c_k &= \frac{1}{2h} \int_{x_k-h}^{x_k+h} dt \int_{-h}^{t-x_k} \frac{t - x - x_k}{h_k(h_k + h_{k+1})} dx + \frac{1}{2h} \int_{x_k+h}^{x_{k+0,5}} dt \int_{-h}^h \frac{t - x - x_k}{h_k(h_k + h_{k+1})} dx.
 \end{aligned}$$

Вычисляя интегралы, получим

$$\begin{aligned}
 a_k &= \frac{h^2}{6h_{k+1}(h_k + h_{k+1})} + \frac{h_{k+1}}{8(h_k + h_{k+1})}, \\
 b_k &= \frac{3h_{k+1}h - 2h^2}{3h_{k+1}(h_k + h_{k+1})} + \frac{3h_{k+1}^2 - 8h_{k+1}h + 4h^2}{8h_{k+1}(h_k + h_{k+1})} + \frac{3h_k h - 2h^2}{8h_k(h_k + h_{k+1})} + \frac{3h_k^2 - 8h_k h + 4h^2}{8h_k(h_k + h_{k+1})}, \\
 c_k &= \frac{h^2}{6h_k(h_k + h_{k+1})} + \frac{h_k}{8(h_k + h_{k+1})}.
 \end{aligned} \tag{15}$$

ЛЕММА 1. При $0 < h \leq \underline{h}/2$ имеют место следующие соотношения:

- 1) $0 < a_k < 7/48$, $b_k > 0$, $0 < c_k < 7/48$,
- 2) $2a_k + 2b_k + 2c_k = 1$,
- 3) $4a_k + 4c_k = \frac{1}{2} + \frac{2h^2}{3h_k h_{k+1}} \leq \frac{2}{3}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пункты 1) и 2) легко проверяются с помощью непосредственных вычислений. Докажем пункт 3). Из (15) имеем

$$\begin{aligned}
 4a_k + 4c_k &= \frac{4h_k}{8(h_k + h_{k+1})} + \frac{4h_{k+1}}{8(h_k + h_{k+1})} + \frac{4h^2}{6(h_k + h_{k+1})} \left(\frac{1}{h_k} + \frac{1}{h_{k+1}} \right) = \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{2h^2}{3h_k h_{k+1}} \leq \frac{1}{2} + \frac{2h_k h_{k+1}}{12h_k h_{k+1}} = \frac{2}{3}.
 \end{aligned}$$

Лемма 1 полностью доказана.

Изучим разностное уравнение (14) для определения чисел $Z = \{Z_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$.

ЛЕММА 2. При $0 < h \leq \underline{h}/2$ для любой последовательности $y \in Y$ разностное уравнение (14) имеет ограниченное решение, и это решение единственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Автором в [13, § 5] (см. также [14]) лемма 2 при $h = 0$ (т.е. в случае обычной интерполяции в точках сетки Δ) доказана по методу [11, лемма 2]. В случае интерполяции в среднем приведем аналогичное доказательство с помощью теоремы о неподвижной точке.

Равенство (14) с учетом второго утверждения леммы 1 переписывается в виде

$$2a_k(Z_{k+1} - Z_{k+2}) + 2c_k(Z_{k+1} - Z_k) + 2[y_{k+2}, y_{k+1}, y_k] = Z_{k+1}.$$

Рассмотрим нелинейный оператор $T : l_\infty(\mathbb{Z}) \rightarrow l_\infty(\mathbb{Z})$, который ставит в соответствие произвольной последовательности $Z = \{Z_k\}_{k=-\infty}^\infty \in l_\infty(\mathbb{Z})$ последовательность

$$\{2a_k(Z_{k+1} - Z_{k+2}) + 2c_k(Z_{k+1} - Z_k) + 2[y_{k+2}, y_{k+1}, y_k]\}_{k=-\infty}^\infty \in l_\infty(\mathbb{Z}).$$

В силу леммы 1 и неравенств

$$\begin{aligned} \|TZ^{(1)} - TZ^{(2)}\|_{l_\infty} &= \sup_{k \in \mathbb{Z}} |2a_k(Z_{k+2}^{(2)} - Z_{k+2}^{(1)}) + 2a_k(Z_{k+1}^{(1)} - Z_{k+1}^{(2)}) + \\ &\quad + 2c_k(Z_k^{(2)} - Z_k^{(1)}) + 2c_k(Z_{k+1}^{(1)} - Z_{k+1}^{(2)})| \leq \\ &\leq \left(2 \sup_{k \in \mathbb{Z}} a_k + 2 \sup_{k \in \mathbb{Z}} c_k + 2 \sup_{k \in \mathbb{Z}} (a_k + c_k)\right) \|Z^{(1)} - Z^{(2)}\|_{l_\infty} < \frac{11}{12} \|Z^{(1)} - Z^{(2)}\|_{l_\infty} \end{aligned}$$

этот оператор является сжимающим оператором в полном метрическом пространстве $l_\infty(\mathbb{Z})$ с константой сжатия $11/12 < 1$. Здесь $Z^{(1)} = \{Z_k^{(1)}\}_{k=-\infty}^\infty$ и $Z^{(2)} = \{Z_k^{(2)}\}_{k=-\infty}^\infty$. Поэтому по теореме функционального анализа о сжимающем операторе уравнение $TZ = Z$ (т. е. разностное уравнение (14)) имеет ограниченное решение, и это решение единственно. Лемма 2 доказана.

Поскольку разностное уравнение (14) в силу леммы 1 имеет доминирующую главную диагональ, легко получить оценку сверху для его единственного решения, хотя само решение явно выписать не удастся.

ЛЕММА 3. *При $0 < h \leq \underline{h}/2$ для решения разностного уравнения (14) имеет место следующая оценка:*

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}} |Z_k| \leq \frac{2}{\inf_{k \in \mathbb{Z}} (1 - 4a_k - 4c_k)}.$$

При $h = 0$ лемма 3 доказана в [13, лемма 5.1]. При $0 < h \leq \underline{h}/2$ доказательство [13] повторяется почти дословно. Из леммы 3 и леммы 1 вытекает следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 2. *При $0 < h \leq \underline{h}/2$ имеет место оценка*

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}} |Z_k| \leq \frac{4}{\inf_{k \in \mathbb{Z}} (1 - \frac{4h^2}{3h_k h_{k+1}})} \leq 6.$$

Из леммы 3 и следствия 2 с учетом равенства (13) получаем оценку сверху величины $A_2(\Delta, h)$ при $0 < h \leq \underline{h}/2$:

$$A_2(\Delta, h) \leq \frac{4}{\inf_{k \in \mathbb{Z}} (1 - \frac{4h^2}{3h_k h_{k+1}})} \leq 6. \quad (16)$$

Таким образом, из оценок (12) и (16) следует, что теорема 3 полностью доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 10. *При $0 < h \leq \underline{h}/2$ имеет место равенство*

$$\sup_{\Delta} A_2(\Delta, h) = A_2(\bar{\Delta}_H, h) = \frac{4}{1 - \frac{4h^2}{3H^2}}.$$

Данное утверждение вытекает из оценки сверху в теореме 3 при $h_k = H$ ($k \in \mathbb{Z}$) и теоремы 1 (см. введение), доказанной Ю. Н. Субботиным [3] для равномерной сетки узлов $\bar{\Delta}_H$ с шагом H .

4. Заключение

Условие $\underline{h} > 0$ не позволяет рассматривать исследуемую задачу на конечном промежутке, если число узлов сетки бесконечно. Ограничение на шаг усреднения h в теореме 3 объясняется тем, что при $h > h_k$ для некоторого числа $k \in \mathbb{Z}$ разностное уравнение (14) не будет иметь трехленточной структуры с доминирующей главной диагональю, и для доказательства существования решения, а также для его оценки надо привлекать другие методы. В этом случае интервалы усреднения при интерполяции в среднем могут пересекаться, и как показывают исследования Ю. Н. Субботина [4], [5] и автора [16], [17] для равномерной сетки узлов при пересекающихся интервалах усреднения задача экстремальной интерполяции становится гораздо сложнее. Большую трудность при решении этой задачи для произвольного числа $n \in \mathbb{N}$ вызывает отсутствие общей теории решения разностных уравнений с переменными коэффициентами.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Субботин Ю. Н. О связи между конечными разностями и соответствующими производными // Труды МИАН СССР. 1965. Т. 78. С. 24–42.
2. Субботин Ю. Н. Функциональная интерполяция в среднем с наименьшей n -й производной // Труды МИАН СССР. 1967. Т. 88. С. 30–60.
3. Субботин Ю. Н. Экстремальные задачи функциональной интерполяции и интерполяционные в среднем сплайны // Труды МИАН СССР. 1975. Т. 138. С. 118–173.
4. Субботин Ю. Н. Экстремальная функциональная интерполяция в среднем с наименьшим значением n -й производной при больших интервалах усреднения // Матем. заметки. 1996. Т. 59, № 1. С. 114–132. doi: 10.4213/mzm1699.
5. Субботин Ю. Н. Экстремальная в L_p интерполяция в среднем при пересекающихся интервалах усреднения // Известия РАН. Серия математическая. 1997. Т. 61, № 1. С. 177–198. doi: 10.4213/im110.
6. Субботин Ю. Н., Новиков С. И., Шевалдин В. Т. Экстремальная функциональная интерполяция и сплайны // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2018. Т. 24, № 3. С. 200–225. doi: 10.21538/0134-4889-2018-24-3-200-225.
7. Favard J. Sur interpolation // J. Math. Pures Appl. 1940. Vol. 19, no. 9. P. 281–306.
8. de Boor C. How small can one make the derivatives of an interpolating function? // J. Approx. Theory, 1975. Vol. 13, no. 2. P. 105–116.
9. de Boor C. A smooth and local interpolant with small k -th derivative. Numerical solutions of boundary value problems for ordinary differential equations. N.-Y: Acad. Press. 1975. P. 177–197.
10. Kunkle Th. Favard's interpolation problem in one or more variables // Constructive Approxim. 2002. Vol. 18, no. 4. P. 467–478. doi: 10.1007/s00365-001-0015-7.
11. Новиков С. И., Шевалдин В. Т. О связи между второй разделенной разностью и второй производной // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2020. Т. 26, № 2. С. 216–224. doi: 10.21538/0134-4889-2020-26-2-216-224.

12. Новиков С.И., Шевалдин В.Т. Экстремальная интерполяция на полуоси с наименьшим значением нормы третьей производной // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2020. Т. 26, № 4. С. 210–223. doi: 10.21538/0134-4889-2020-26-4-210-223.
13. Шевалдин В.Т. Экстремальная интерполяция с наименьшим значением нормы второй производной в пространстве $L_p(\mathbb{R})$ // Известия РАН. Серия математическая. 2022. Т. 86, № 1. С. 219–236. doi: <https://doi.org/10.4213/im9125>.
14. Волков Ю.С. Замечание о связи между второй разделенной разностью и второй производной // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2021. Т. 27, № 1. С. 19–21. doi: 10.21538/0134-4889-2021-27-1-19-21.
15. Шевалдин В.Т. Некоторые задачи экстремальной интерполяции в среднем для линейных дифференциальных операторов // Тр. МИАН СССР. 1983. Т. 164. С. 203–240.
16. Шевалдин В.Т. Экстремальная интерполяция в среднем при перекрывающихся интервалах усреднения и $\mathcal{L}$ -сплайны // Изв. РАН. Сер. матем. 1998. Т. 62, № 4. С. 201–224. doi: 10.4213/im193.
17. Шевалдин В.Т. Экстремальная интерполяция в среднем при перекрывающихся интервалах усреднения с наименьшим значением нормы линейного дифференциального оператора // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2023. Т. 29, № 1. С. 219–232. doi: 10.21538/0134-4889-2023-29-1-219-232.

REFERENCES

1. Subbotin Yu.N. “On the connection between finite differences and corresponding derivatives”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1965, vol. 78, pp. 24–42 (in Russian).
2. Subbotin Yu.N. “Functional interpolation in the mean with smallest n -derivative”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1967, vol. 88, pp. 31–63.
3. Subbotin Yu.N. “Extremal problem of functional interpolation, and mean interpolation splines”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1977, vol. 138, pp. 127–185.
4. Subbotin Yu.N. “Extremal functional interpolation in the mean with least value of thenth derivative for large averaging intervals”, *Math. Notes*, 1996, vol. 59, no. 1, pp. 83–96. doi: 10.1007/BF02312469.
5. Subbotin Yu.N. “Extremal L_p interpolation in the mean with intersecting averaging intervals”, *Izv. Math.*, 1997, vol. 61, no. 1, pp. 183–205. doi: 10.1070/im1997v061n01ABEH000110.
6. Subbotin Yu.N., Novikov S.I., Shevaldin V.T. “Extremal function interpolation and splines”, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2018, vol. 24, no. 3, pp. 200–225. doi: 10.21538/0134-4889-2018-24-3-200-225 (in Russian).
7. Favard J. “Sur interpolation”, *J. Math. Pures Appl.*, 1940, vol. 19, no. 9, pp. 281–306.
8. de Boor C. “How small can one make the derivatives of an interpolating function?” *J. Approx. Theory*, 1975, vol. 13, no. 2, pp. 105–116.
9. de Boor C. “A smooth and local interpolant with small k -th derivative”, *Numerical solutions of boundary value problems for ordinary differential equations*. N.-Y: Acad. Press, 1975, pp. 177–197.

10. Kunkle Th. “Favard’s interpolation problem in one or more variables”, *Constructive Approx.*, 2002, vol. 18, no. 4, pp. 467–478. doi: 10.1007/s00365-001-0015-7.
11. Novikov S. I., Shevaldin V. T. “On the connection between the second divided difference and the second derivative”, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2020, vol. 26, no. 2, pp. 216–224. doi: 10.21538/0134-4889-2020-26-2-216-224 (in Russian).
12. Novikov S. I., Shevaldin V. T. “Extremal interpolation on the semiaxis with the smallest norm of the third derivative”, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2020, vol. 26, no. 4, pp. 210–223. doi: 10.21538/0134-4889-2020-26-4-210-223 (in Russian).
13. Shevaldin V. T. “Extremal interpolation with the least value of the norm of the second derivative in $L_p(\mathbb{R})$ ”, *Izvestiya: Mathematics*, 2022, vol. 86, no. 1, pp. 203–219. doi: 10.1070/IM9125.
14. Volkov Yu. S. “A remark on the connection between the second divided difference and the second derivative”, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2021, vol. 27, no. 1, pp. 19–21. doi: 10.21538/0134-4889-2021-27-1-19-21 (in Russian).
15. Shevaldin V. T. “Some problems of extremal interpolation in the mean for linear differential operators”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1985, vol. 164, pp. 233–273.
16. Shevaldin V. T. “Extremal interpolation in the mean with overlapping averaging intervals and $\mathcal{L}$ -splines”, *Izv. Math.*, 1998, vol. 62, no. 4, pp. 201–224. doi: 10.4213/im193.
17. Shevaldin V. T. “Extremal interpolation in the mean with overlapping averaging intervals and the smallest norm of a linear differential operator”, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2023, vol. 29, no. 1, pp. 219–232. doi: 10.21538/0134-4889-2023-29-1-219-232 (in Russian).

Получено: 26.11.2024

Принято в печать: 10.03.2025

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 26. Выпуск 1.

УДК 514.17

DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-1-142-148

Новые оценки задачи Борсука в пространствах ℓ_p ¹

И. Ахмед

Ахмед Ислам — аспирант, Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет) (г. Москва).

email: eslamabdelrahman1221@gmail.com

Аннотация

В 2013 году Андрей Бондаренко сконструировал двумерное множество на единичной сфере $S^{64} \subset \mathbb{R}^{65}$, состоящее из 416 точек, которое нельзя разрезать на 83 части меньшего диаметра. В данной статье мы показываем, что эта конструкция работает не только в евклидовом пространстве, но и во всех ℓ_p -пространствах.

Ключевые слова: гипотеза Борсука, двумерные множества, сильно регулярные графы, пространства ℓ_p , комбинаторная геометрия.

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:

Ахмед, И. Новые оценки задачи Борсука в пространствах ℓ_p // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 1, с. 142–148.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 26. No. 1.

UDC 514.17

DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-1-142-148

New bounds on Borsuk's problem in ℓ_p -spaces

I. Ahmed

Ahmed Islam — postgraduate student, Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University) (Moscow).

email: eslamabdelrahman1221@gmail.com

Abstract

In 2013, Andriy Bondarenko constructed a two-distance set on the unit sphere $S^{64} \subset \mathbb{R}^{65}$, consisting of 416 points that cannot be partitioned into 83 parts of smaller diameter. In this paper, we show that this construction works not only for the Euclidean space but for all ℓ_p -spaces.

Keywords: Borsuk's conjecture, Two-distance sets, Strongly regular graphs, ℓ_p spaces, Combinatorial geometry.

Bibliography: 16 titles.

For citation:

Ahmed, I. 2025, "New bounds on Borsuk's problem in ℓ_p -spaces", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 1, pp. 142–148.

¹Работа выполнена при поддержке гранта РФФ 22-11-00177.

1. Introduction

For the Euclidean space $\mathbb{R}^n$, we define $b(\mathbb{R}^n)$ to be Borsuk's number, which is the minimum number such that any bounded non-singleton set in $\mathbb{R}^n$ can be partitioned into $n+1$ parts of smaller diameter. In 1933, Karol Borsuk [2] proposed his conjecture, which states that $b(\mathbb{R}^n) = n+1$. Borsuk proved in the same paper that this conjecture holds for $n = 2$. Later, it was proved true for $n = 3$ by Eggleston [8], and with a simpler proof provided by Grünbaum [3].

The conjecture remained open and widely believed to be true for a long time. However, in 1993, Kahn and Kalai [4] disproved it for $n = 1325$ and for all $n \geq 2015$. Subsequently, many mathematicians improved the lowest dimension where the conjecture is false, see [5] [6] [7], culminating in 2013 when Bondarenko [1], found a counterexample using two-distance set for dimension $n = 65$. In 2014, T. Jenrich A. E. Brouwer [9] modified it for $n = 64$, which is the best result known for the low dimensions of the conjecture so far. conjecture remains open for $4 \leq n \leq 63$.

For an n -dimensional normed Minkowski space M^n , its Borsuk's number is denoted by $b(M^n)$. This conjecture was first studied in Minkowski spaces by Grünbaum [10], who proved that $b(M^2) = 4$, when the unit ball of M^2 is a parallelogram; otherwise, $b(M^2) \leq 3$. Later, the conjecture was studied by Gohberg and Boltyanskii [11] in higher dimensions, and they conjectured that $b(M^n) \leq 2^n$.

In this article, we focus on ℓ_p -spaces equipped with the ℓ_p -norm. where, Yu and Zong [12] proved that $b(M^n) \geq 2^n$ holds true for all ℓ_p^n -spaces for $n = 3$, and Wang and Xue [13] proved it for $n = 4$. so far The last result we know for higher dimensions of $b(\ell_p^n)$ was provided by Raigorodskii and Sagdeev [14]. Here in this paper, we generalize Bondarenko's technique to show the following:

2. Main Body of the Paper

THEOREM. For $p \geq 1$ There is a point set $\mathbf{y}_i^* = y_{i,j} \in \ell_p^{65}$ where $i, j \in V$ the set of vertices of the strongly regular graph Γ , such that $\left\| y_i^* - y_j^* \right\|_p^p = a$ or b , for $i \neq j$, where a, b are integers, which cannot be partitioned into less than 84 parts of smaller diameter.

Hence,

$$b(\ell_p^{65}) \geq b_2(\ell_p^{65}) \geq 84.$$

COROLLARY. For integers $n \geq 1$ and $k \geq 0$, and $p \geq 1$, we have

$$b_2(\ell_p^{66n+k}) \geq 84n + k + 1.$$

2.1. strongly regular graph

A strongly regular graph Γ with parameters (v, k, λ, μ) is an undirected regular graph on v vertices of valency k , such that each pair of adjacent vertices has λ common neighbors, and each pair of nonadjacent vertices has μ common neighbors.

2.1.1. The Euclidean representation:

A graph $\Gamma = (V, E)$ is denoted by $\text{srg}(v, k, \lambda, \mu)$, where The $(0,1)$ -adjacency matrix of a $\text{srg}(v, k, \lambda, \mu)$, has an eigenvalue k with multiplicity 1, and two more eigenvalues:

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{2} \left((\lambda - \mu) + \sqrt{(\lambda - \mu)^2 + 4(k - \mu)} \right) \\ s &= \frac{1}{2} \left((\lambda - \mu) - \sqrt{(\lambda - \mu)^2 + 4(k - \mu)} \right) \end{aligned} \quad (1)$$

With multiplicities:

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{2} \left((\lambda - \mu) - \frac{(v-1)(\lambda - \mu) + 2k}{\sqrt{(\lambda - \mu)^2 + 4(k - \mu)}} \right) \\ g &= \frac{1}{2} \left((\lambda - \mu) + \frac{(v-1)(\lambda - \mu) + 2k}{\sqrt{(\lambda - \mu)^2 + 4(k - \mu)}} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

Respectively.

The given properties of the eigenvalues imply that $\dim P(V) = f$, the properties of the graph and its vectors configurations that is made with eigenvalues of the adjacency matrix can be found in [15].

We use these notations: I is the identity matrix of size v , $y = A - sI$, y_i where $i \in V$ are the columns of y , and $y_{i,j}$ where $i, j \in V$, are the entries of y , and for any $W \subseteq V$, the corresponding point set $P(W)$ is $\{y_i : i \in W\}$.

For $i, j \in V$

$$y_{i,j} = \begin{cases} -s & \text{if } i = j \\ 1 & \text{if } (i, j) \in E \\ 0 & \text{if } i \neq j \end{cases}$$

For $i \in V$: y_i consists of one s at position i , 1 at k positions, and 0 at $(v - k - 1)$ positions, elsewhere. its Euclidean norm is the square root of $s^2 + k$

For different $i, j \in V$

$$\|y_i - y_j\|^2 = \begin{cases} 2(k - \lambda - 1 + (-s - 1)^2) & \text{if } (i, j) \in E \\ 2(k - \mu + s^2) & \text{otherwise} \end{cases}$$

The distance for the non-adjacent case exceeds the distance for the adjacent case by:

$$2(\lambda - \mu - 2s) = 2\sqrt{(\lambda - \mu)^2 + 4(k - \mu)}$$

If the graph is not complete, this excess is positive, and we can conclude: For any two different $i, j \in V$, the distance between y_i and y_j is smaller than the diameter of the complete vector set if and only if i and j are neighbors. Thus, for each $W \subseteq V$, the diameter of the corresponding point set $P(W)$ is smaller than that of $P(V)$ if and only if W is a clique. Furthermore, $P(V)$ can be divided into x parts of smaller diameter if and only if V can be divided into x cliques.

2.1.2. the representation in ℓ_p -spaces:

The vectors $\mathbf{y}_i = (y_{i1}, y_{i2}, y_{i3}, \dots, y_{in}) \in \mathbb{R}^n$ will have ℓ_p - norms as follows:

$$\|y_i\|_p = \left(\sum_{j=1}^n |y_{i,j}|^p \right)^{\frac{1}{p}}, p \geq 1, i \in V.$$

We map every $\mathbf{y}_i$ to $\mathbf{y}_i^* = y_{i,j} \in \ell_p^n, j = 1, \dots, n$

For $i \in V$: y_i^* consists of one s at position i , 1 at k positions, and 0 at $v - k - 10$ positions. its norm is:

$$\|\mathbf{y}_i^*\|_p^p = |-s|^p + k|1|^p + (v - k - 1)|0|^p = |s|^p + k$$

For different $i, j \in V$, we have the distance as:

$$\|\mathbf{y}_i^* - \mathbf{y}_j^*\|_p = \begin{cases} 2(k - \lambda - 1 + |-s - 1|^p) & \text{if } (i, j) \in E \\ 2(k - \mu + |-s|^p) & \text{otherwise} \end{cases}$$

which is positive in case of a non-empty or complete graph, the diameter of this graph is the distance when i, j are non-adjacent, which is obviously the maximum distance among them.

2.2. Proof of the main theorem:

Consider the point set $\{y_i^* : y_i \in A - sI\}$ of the strongly regular graph $\Gamma - (416, 100, 36, 20)$, by (2) we get $f = 65$, and since $\lambda > \mu$, and by (1) $s = -4$, we have that:

$$2(k - \mu + |-s|^p) > 2(k - \lambda - 1 + |-s - 1|^p)$$

then the diameter of this set is the distance between y_i^*, y_j^* where i, j are non-adjacent.

Then this point set can't be partitioned into less than v/m , where m is the clique number of this graph Γ , in [16] [1] you can see the construction of the strongly regular graph $(416, 100, 36, 20)$, this graph is member of so called Suzuki tower, also called $G_2(4)$ graph.

1-its local graph is the Hall-Janko graph $(100, 36, 14, 12)$ with maximal clique size 4.

2-The local graph of the Hall-Janko graph $(36, 14, 4, 6)$ is the graph $U_3(3) = G_2(2)$ (with maximal clique 3 since its local graph is bipartite)

3-The first subconstituent of $U_3(3) = G_2(2)$ is the point-line non-incidence graph Δ of the Fano plane on $v = 14$ (has no triangles). See (10.68, 10.32, 10.14) in [16]

hence, the maximal clique in this graph is of size 5, then the point set $\{y_i^* : y_i \in A - sI\}$ can't be partitioned into less than 84 parts of smaller diameter.

□

2.3. Proof of the Corollary

For $k = 0$ and $n \in \mathbb{N}$, we put $m = 66n$, we construct vectors $y \in \mathbb{R}^m$

$$y = (y_1, \dots, y_n | a_1, \dots, a_n)$$

where $y_k \in \mathbb{R}^{65}$ and $a_k \in \mathbb{R}$ for $k = 1, \dots, n$, now we take this set of vectors that lie in $\mathbb{R}^m : S = s_{ij}$. where

$$s_{ik} = (0, \dots, 0, y_i^*, 0, \dots, 0 | 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

where $y_i^* \in \ell_p^{66n}$, now these s_{ij} vectors have only two nonzero coordinates y_k (one coordinate in the subvectors) and a_k (one coordinate in the scalars), now we can measure the distance between higher-order vectors as follows:

$$d_p(s_{ik}, s_{jk}) = \left(\sum_{k=1}^n \|y_{ik}^* - y_{jk}^*\|_p^p \right)^{1/p} \quad (1)$$

where, $\|y_{ik}^* - y_{jk}^*\|_p^p$ is the $\mathcal{L}_p$ distance between the vectors y_i^* and y_j^* , then in our case:

$$\begin{aligned} \|s_{ik} - s_{jk}\|_p^p &= \left(\|y_i^* - y_j^*\|_p^p \right)^{1/p} \\ &= \begin{cases} (2(k - \lambda - 1 + (-s - 1)^2))^{1/p} & \text{if } (i, j) \in E \\ (2(k - \mu + s^2))^{1/p} & \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned}$$

and that shows that the set S is a two-distance set of $416n$ vectors. By our main theorem, this set cannot be partitioned into fewer than $84n$ pieces of smaller diameter. by adding one more vector that is at distance R from each vector in S , we get a set of $416n + 1$ vectors that span at most $66n$, so they lie in $\mathbb{R}^{66n}$. Then, $b_2(\ell_p^{66n}) \geq 84n + 1$. Again, adding one more vector that has the same R

distance from each of these $416n + 1$ vectors, we get a set of $416n + 2$ vectors that lie in $\mathbb{R}^{66n+1}$, giving $b_2(\ell_p^{66n+1}) \geq 84n + 2$. Inductively applying this procedure, we get the desired result:

$$b_2(\ell_p^{66n+k}) \geq 84n + k + 1$$

□

3. Conclusion

In this paper, we extended Bondarenko's construction to ℓ_p -spaces and established new lower bounds for Borsuk's problem in these settings. By utilizing strongly regular graphs, we proved that in dimension 65, the Borsuk number satisfies $b(\ell_p^{65}) \geq 84$ for all $p \geq 1$, improving upon known results. Furthermore, for a general formula for the higher dimensions, we proved that $b_2(\ell_p^{66n+k}) \geq 84n+k+1$ for all $p \geq 1$, meaning that Borsuk's conjecture has a negative answer for all dimensions $n \geq 65$ in ℓ_p -spaces.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бондаренко, А. 2014. О гипотезе Борсука для множеств с двумя расстояниями // Дискретная вычислительная геометрия.
2. Борсук, К. 1933. Три теоремы о n -мерной евклидовой сфере // Фундаментальная математика. Т. 20. С. 177–190.
3. Грюнбаум, Б. 1957. Простой доказательство гипотезы Борсука в трех измерениях // Труды Кембриджского философского общества. Т. 53. С. 776–778.
4. Кахн, Ж. & Калай, Г. 1993. Контрпример к гипотезе Борсука // Вестник Американского математического общества (новая серия). Т. 29. С. 60–62.
5. Нилли, А. 1994. О проблеме Борсука // В: Иерусалимская комбинаторика, 1993. С. 209–210. Американское математическое общество, Провиденс.
6. Райгородский, А.М. 2008. Вокруг гипотезы Борсука // Журнал математических наук. Т. 154(4). С. 604–623.
7. Райгородский, А.М. 2001. Проблема Борсука и хроматические числа некоторых метрических пространств // Российские математические обзоры. Т. 56(1). С. 103–139.
8. Эгглстон, Н.Г. 1955. Покрытие трехмерного множества множествами меньшего диаметра // Журнал Лондонского математического общества (новая серия). Т. 30. С. 11–24.
9. Брауэр, А.Е. & Енрих, Т. 2014. 64-мерный контрпример к гипотезе Борсука // Электронный журнал комбинаторики. Т. 24(4). #Р4.29.
10. Грюнбаум, Б. 1957. Гипотеза о разбиении Борсука в пространстве Минковского // Бюллетень исследовательского совета Израиля. Сек. Ф. Т. 7F. С. 25–30.
11. Болтянский, В.Г. & Гоуберг, И.Т. 1965. Результаты и проблемы в комбинаторной геометрии. Кембриджский университет, Кембридж.
12. Юй, Л. & Цзун, Ч. 2009. О блокирующем числе и числе покрытия выпуклого тела // Прогресс в геометрии. Т. 9(1). С. 13–29.

13. Ван, Ж. & Сюэ, Ф. 2022. Проблема разбиения Борсука в четырехмерном ℓ_p пространстве // Препринт. Режим доступа: <http://dx.doi.org/10.48550/arXiv.2210.06264>.
14. Райгородский, А.М. & Сагдеев, А. 2024. Замечание о проблеме Борсука в пространствах Минковского // Доклады математики. Т. 109. С. 80–83. Режим доступа: <https://doi.org/10.1134/S1064562424701849>.
15. Кэмерон, П. 2004. Сильно регулярные графы. В: Темы в алгебраической теории графов. Кембриджский университет, Кембридж. С. 203–221.
16. Брауэр, А.Е. & Ван Мальдегем, Х. 2022. Сильно регулярные графы. Кембриджский университет.

REFERENCES

1. Bondarenko, A. 2014, “On Borsuk’s Conjecture for Two-Distance Sets”, *Discrete Comput. Geom.*
2. Borsuk, K. 1933, “Drei Sätze über die n-dimensionale Euklidische Sphäre”, *Fundamenta Math.*, vol. 20, pp. 177–190.
3. Grünbaum, B. 1957, “A simple proof of Borsuk’s conjecture in three dimensions”, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, vol. 53, pp. 776–778.
4. Kahn, J. & Kalai, G. 1993, “A counterexample to Borsuk’s conjecture”, *Bull. Am. Math. Soc. (New Ser)*, vol. 29, pp. 60–62.
5. Nilli, A. (1994), “On Borsuk’s problem”, in **Jerusalem Combinatorics, 1993**, pp. 209–210, American Mathematical Society, Providence.
6. Raigorodskii, A.M. 2008, “Around Borsuk’s conjecture”, *J. Math. Sci.*, vol. 154(4), pp. 604–623.
7. Raigorodskii, A.M. 2001, “Borsuk’s problem and the chromatic numbers of some metric spaces”, *Russian Mathematical Surveys*, vol. 56(1), pp. 103–139.
8. Eggleston, H.G. 1955, “Covering a three-dimensional set with sets of smaller diameter”, *J. London Math. Soc. (New Ser)*, vol. 30, pp. 11–24.
9. Brouwer, A.E. & Jenrich, T. 2014, “A 64-dimensional counterexample to Borsuk’s conjecture”, *The Electronic Journal of Combinatorics*, vol. 24(4), #P4.29.
10. Grünbaum, B. 1957, “Borsuk’s partition conjecture in Minkowski space”, *Bull. Res. Council Israel Sec. F*, vol. 7F, pp. 25–30.
11. Boltyanskii, V.G. & Gohberg, I.T. 1965, *Results and Problems in Combinatorial Geometry*, Cambridge Univ. Press, Cambridge.
12. Yu, L. & Zong, C. 2009, “On the blocking number and the covering number of a convex body”, *Adv. Geom.*, vol. 9(1), pp. 13–29.
13. Wang, J. & Xue, F. 2022, “Borsuk’s partition problem in four-dimensional ℓ_p space”, *Preprint*. Available at: <http://dx.doi.org/10.48550/arXiv.2210.06264>.
14. Raigorodskii, A.M. & Sagdeev, A. 2024, “A note on Borsuk’s problem in Minkowski spaces”, *Doklady Mathematics*, vol. 109, pp. 80–83. Available at: <https://doi.org/10.1134/S1064562424701849>.

15. Cameron, P. 2004, “Strongly regular graphs. In: Topics in Algebraic Graph Theory”, Cambridge Univ. Press, Cambridge, pp. 203–221.
16. Brouwer, A.E. & Van Maldeghem, H. 2022, “Strongly regular graphs”, Cambridge University Press.

Получено: 06.12.2024

Принято в печать: 10.03.2025

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 26. Выпуск 1.

УДК 519.2

DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-1-149-156

О формировании норм на основе регрессионных моделей по малым выборкам¹

Р. А. Жуков

Жуков Роман Александрович — доктор экономических наук, кандидат физико-математических наук, доцент, Тульский филиал Финансового университета при Правительстве РФ (г. Тула).

e-mail: pluszh@mail.ru

Аннотация

Представлено расширение метода формирования нормативов для структурных элементов сложной системы, основанное на методологии байесовских интеллектуальных измерений и эконометрического моделирования на малых выборках. Реализация метода продемонстрирована на примере сельского хозяйства Тульской области.

Ключевые слова: плотность распределения вероятностей, байесовские интеллектуальные измерения, нормы, эконометрическое моделирование, регрессия, сложная система.

Библиография: 17 названий.

Для цитирования:

Жуков, Р. А. О формировании норм на основе регрессионных моделей по малым выборкам // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 1, с. 149–156.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 26. No. 1.

UDC 519.2

DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-1-149-156

On the formation of norms based on regression models for small samples

R. A. Zhukov

Zhukov Roman Aleksandrovich — doctor of economic sciences, candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, Financial University under the Government of the Russian Federation (Tula Branch) (Tula).

e-mail: pluszh@mail.ru

¹Статья подготовлена по результатам исследований, выполненных за счет бюджетных средств по государственному заданию Финансового университета

Abstract

The extension of the method of forming norms for structural elements of a complex system based on the methodology of Bayesian intelligent measurements and econometric modeling in small samples is presented. The implementation of the method is demonstrated using the example of agriculture in the Tula region.

Keywords: probability distribution density, Bayesian intelligent measurements, norms, econometric modeling, regression, complex system.

Bibliography: 17 titles.

For citation:

Zhukov, R. A. 2025, "On the formation of norms based on regression models for small samples", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 1, pp. 149–156.

1. Введение

Для оценки соответствия функционирования сложных систем заданным режимам, которые идентифицируются набором норм на основе стандартов [1], экспертных оценок [2] или специальных методик [3], в том числе на основе экономико-математического моделирования [4], возникает необходимость учета условий (факторов), которые влияют на результативность таких систем. При этом характер и степень влияния факторов, представленных малыми выборками, и которые обладают значительной информационной неопределенностью, существенно усложняют процесс построения адекватных норм. В этом аспекте применение байесовского подхода [5, 6] и мягких норм [7] в рамках регуляризующего байесовского подхода [8] является целесообразным, в том числе при учете характера и степени влияния факторов как на результаты функционирования структурных элементов системы, так и на их нормативы. Следует отметить, что данные обладают относительно небольшой глубиной по времени, а, следовательно, выборка оказывается малой, что не позволяет методологически обоснованно применять методы математической статистики для построения регрессионных моделей [6], которые могут быть использованы для конструирования нормативов для результатов функционирования структурных элементов системы.

2. Методология и материалы исследования

В исследовании будем опираться на методологию байесовских интеллектуальных измерений (БИИ) [8], а также на результаты, полученные в [9] и их расширение на нормы различных типов [7]

Пусть имеется k_i структурный элемент системы, характеризуемый в период времени t ($t = 1, \dots, T \in N$) значениями результативного $y_{k,i}(t)$ и факторных $x_{k,i,j}(t)$ признаков – условий функционирования k_i – влияющих факторов ($k = 1, \dots, K_k \in N$, $i = 1, \dots, I \in N$, $j = 1, \dots, J \in N$). Каждые результативный и факторные признаки характеризуются наборами пар чисел $(h_{(\cdot),l}(t); p_{(\cdot),l}^{ap}(t))$: $h_{(\cdot),l}(t)$ – значение признака $(\cdot)(t)$, которое соответствует положению репера на числовой шкале с диапазоном динамических ограничений ($l = 1, \dots, L_r \in N$) и положению на сопряженной с числовой – лингвистической шкале ($l = 1, \dots, L_c \in N$, $c = 9$ – классы: от предельно ниже нормы до предельно выше нормы); $p_{(\cdot),l}^{ap}(t)$ – вероятность, того, что значение $(\cdot)(t) = h_{(\cdot),l}(t)$. В данном случае $(\cdot)(t)$ есть $y_{k,i}(t)$ или $x_{k,i,j}(t)$.

Тогда норма для результативного признака может быть определена набором пар чисел $(h_{(\cdot),l}(t); \bar{p}_{(\cdot),l}^{ap}(t))$, где апостериорная вероятность $\bar{p}_{(\cdot),l}^{ap}(t)$ определяется по формуле [10], аналогичной [7]:

$$\bar{p}_{(\cdot),l}^{ap}(t) = \frac{P_{y_{k,i},l}^a(h_{y_{k,i},l}(t-1))P(\tilde{h}_{y_{k,i},l}(t))}{\sum_{j=1}^L P_{y_{k,i},j}^a(h_{y_{k,i},j}(t-1))P(\tilde{h}_{y_{k,i},j}(t))}, \quad (1)$$

где $h_{y_{k,i},l}(t-1)$, $\tilde{h}_{y_{k,i},l}(t)$ – значение положения репера (класса) и его оценка соответственно; a – обозначение априорной вероятности; ap – обозначение апостериорной вероятности; $t-1$ означает, что априорные значения вероятности получены в предыдущем периоде.

Априорная вероятность $P_{y_{k,i},l}^a(h_{y_{k,i},l}(t-1))$ на первом шаге принимается одинаковой $\forall l$ и определяется как:

$$P_{y_{k,i},l}^a(h_{y_{k,i},l}(t-1)) = \frac{1}{L_r}, P_{y_{k,i},l}(h_{y_{k,i},l}(t-1)) = \frac{1}{L_c}. \quad (2)$$

Вероятность $P(\tilde{h}_{y_{k,i},l}(t))$ можно вычислить по рекуррентному соотношению [10], аналогичному модифицированной байесовской свертке [11]:

$$P(\tilde{h}_{y_{k,i},l}(t)) = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J P_{x_{k,i,j},l}^{ap}(h_{x_{k,i,j},l}(t) | \bigcup_{s=1}^J h_{x_{k,i,s},l}(t)). \quad (3)$$

Для двух влияющих факторов апостериорную вероятность $P_{x_{k,i,j},l}^{ap}(h_{x_{k,i,j},l}(t) | \bigcup_{s=1}^J h_{x_{k,i,s},l}(t))$ можно представить как:

$$P_{x_{k,i,j},l}^{ap}(h_{x_{k,i,1},l}(t) | h_{x_{k,i,2},l}(t)) = P(\tilde{h}_{y_{k,i},l}(t)) = \frac{\sum_{q=1}^Q P^{ap}(H_{x_{k,i,1},l}|S) P^{ap}(H_{x_{k,i,2},q}|S)}{\sum_{l=1}^L \sum_{q=1}^Q P^{ap}(H_{x_{k,i,1},l}|S) P^{ap}(H_{x_{k,i,2},q}|S)}, \quad (4)$$

где L, Q – значимые альтернативные значения для первого и второго фактора соответственно; S – событие – совместное появление оценок $\tilde{h}_{(\cdot),l}(t)$ для $(\cdot)$; $H_{(\cdot),l}$ – набор гипотез или альтернативных решений.

Для преобразования мягкой нормы к единственному значению рассчитывается средневзвешенное значение [10]:

$$\bar{y}_{k,i} = \sum_{l=1}^L \tilde{h}_{y_{k,i},l}(t) \cdot \bar{p}_{y_{k,i},l}^{ap}(t). \quad (5)$$

Применение формул (1)–(5) учитывает влияние факторов, характеризующих условия функционирования структурного элемента системы, но не учитывает степень влияния каждого из них на результативный признак. С целью учета такого влияния формулу (3) можно дополнить весовыми коэффициентами:

$$P(\tilde{h}_{y_{k,i},l}(t)) = \frac{\sum_{j=1}^J w_{k,i,j} \cdot P_{x_{k,i,j},l}^{ap}(h_{x_{k,i,j},l}(t) | \bigcup_{s=1}^J h_{x_{k,i,s},l}(t))}{\sum_{j=1}^J w_{k,i,j}}, \quad (6)$$

где $w_{k,i,j}$ – весовой коэффициент для значений фактора $x_{k,i,j}(t)$.

Связь между результативным признаком и фактором в простейшем случае можно представить в виде:

$$y_{k,i}^*(t) = w_{i,1} \cdot x_{k,i,1}^*(t) + \epsilon_{k,i,1}^*(t), \quad (7)$$

где $w_{i,1}$ – параметры функции $f_i(\cdot) = \hat{y}_i^*$; “*” – стандартизованные (центрированные и нормированные) значения результативного и факторного признаков.

Из эконометрики известно, что в случае наличия только одного факторного признака, $w_{i,1}$ – есть не что иное, как парный коэффициент корреляции между переменными $y_{k,i}$ и $x_{k,i,1}$.

Поэтому, с целью учета силы влияния факторов, в первом приближении можно использовать корреляционные коэффициенты в качестве весов в формуле (6).

В случае наличия нескольких факторов в качестве весовых коэффициентов могут выступать коэффициенты стандартизированной регрессионной модели, представляющей собой преобразованную производственную функцию (ПФ) [4]:

$$\hat{y}_{k,i}^* = \sum_{j=1}^J w_{i,j} \cdot x_{k,i,j}^* \quad (8)$$

Тогда весовые коэффициенты будут соответствовать стандартизованным коэффициентам ПФ, найденным по малым выборкам [12].

Для получения выборки достаточного объема (число точек должно быть не менее 7000 [6]) для каждого из 9 классов сопряженной лингвистической шкалы генерируется выборка по треугольному распределению для каждого из значений влияющих факторов $x_{k,i,j}(t)$ периода(ов) t , представленных набором пар чисел $(h_{(\cdot),i}(t); p_{(\cdot),i}^{ap}(t))$ на сопряженной числовой шкале. Для результативного признака генерация может осуществляться в двух вариантах: 1) по мягким нормам, полученным с помощью (1)–(4); 2) по представлениям $y_{k,i}(t)$. Сгенерированная таким образом выборка по малым выборкам будет обладать достаточной мощностью, чтобы методологически обоснованно применить методы математической статистики для нахождения параметров модели, в частности метод наименьших квадратов (МНК), для расчета норм по формуле (6).

В случае, если коэффициент $w_{i,j} < 0$, то осуществляется реверсия вероятностей значений фактора $x_{k,i,j}(t)$ относительно нормы $(h_{(\cdot),i}(t); rev_{norm}(p_{(\cdot),i}^{ap}(t)))$, а в формулу (8) подставляется модуль $|w_{i,j}|$.

3. Результаты

Представленный метод был апробирован на примере Тульской области. В качестве результативного признака был выбран объем валового регионального продукта (ВРП) для раздела А (сельское хозяйство) по ОКВЭД 2. В качестве факторных признаков были использованы стоимость основных фондов ($x_{1,1}$), среднегодовая численность занятых ($x_{1,2}$), инвестиции в основной капитал ($x_{1,3}$) по соответствующему разделу, а также внесение минеральных (x_3) и органических удобрений (x_4). Источником данных послужила информация Росстата, полученная из открытых источников [13] за 2017–2022 гг. Стоимостные показатели были скорректированы на уровень инфляции [14] и приведены к 2017 году. Для построения мягких норм была использована программная платформа «Инфоаналитик 2.0» [15]; применены модуль генерации выборки с заданным законом распределения [16] (генерировались данные для каждого периода, $N_{i,j}=7000$ наблюдений), а также программный комплекс «ЭФРА» [17] для поиска параметров стандартизованных моделей (использовались выборки для каждого периода и объединенная по t выборка). В качестве ПФ была выбрана степенная мультипликативная функциональная форма модели.

Результаты представлены на рис. 1.

Первое значение в ячейках соответствует коэффициентам, полученным по выборке, построенной по мягким нормам, вычисленным с помощью (1)–(4), второе значение – по выборке, построенной по представлениям $y_{k,i}(t)$. Последний столбец соответствует объединенной выборке за 2017–2022 гг. Последние 2 строки включают значения коэффициента детерминации R^2 и среднюю относительную ошибку аппроксимации E_{otn} соответственно, которые свидетельствуют о значимости коэффициентов (значения близки к 1, модели качественные) и высокой точности моделей.

Параметры / Период выборки	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2017-2022
$x_{1,1}$	0,140/-0,017	0,058/0,441	0,294/0,182	0,198/0,045	0,242/0,040	0,135/0,045	0,260/0,558
$x_{1,2}$	0,198/0,401	0,295/0,016	0,307/0,057	0,243/0,474	0,175/0,048	0,106/0,605	0,309/-0,129
$x_{1,3}$	0,131/0,030	0,234/0,063	0,120/0,100	0,125/0,223	0,248/0,538	0,352/0,080	0,232/-0,134
x_3	0,137/0,180	0,031/0,429	0,078/0,449	0,305/0,116	0,19/0,259	0,088/-0,001	0,195/0,456
x_4	0,396/0,357	0,380/0,034	0,195/0,210	0,137/0,129	0,146/0,102	0,311/0,259	0,267/0,113
R^2	0,922/0,852	0,924/0,923	0,917/0,941	0,928/0,905	0,924/0,914	0,901/0,921	0,918/0,897
$E_{tot}, \%$	5,566/5,527	3,178/3,647	3,740/2,258	3,963/2,671	3,600/2,320	5,156/2,551	4,769/6,453

Рис. 1: Значения стандартизованных коэффициентов с базовыми статистическими характеристиками

Полученные значения стандартизованных коэффициентов были подставлены в «Инфоаналитик 2.0», что позволило сформировать мягкие нормы для результативного признака (ВРП, раздел А), для каждой из которых по формуле (5) были получены единственные значения норм.

При фактическом значении скорректированного объема ВРП 47750,899 млн руб. в 2022 г. норма по первому варианту (нормативная регрессия) составила 46532,881 млн руб.; по второму варианту (фактическая регрессия) – 43002,843 млн руб.; по регрессиям, построенным по объединенным выборкам значения соответственно составили 46356,170 млн руб. и 42710,388. То есть расчет по первому варианту дает более высокие нормы по сравнению со вторым вариантом. В случае использования коэффициентов корреляции в качестве весовых коэффициентов значение в 2022 году оказалось равным 46280,667 млн руб., без учета весовых коэффициентов (формула (4)) – 45862,205 млн руб., что ниже, чем норма, полученная по первому варианту.

На рис. 2 представлена оценка фактического значения скорректированного ВРП (раздел А) по норме, рассчитанной по первому варианту на основе построенной нормативной регрессии по сгенерированным данным для 2022 г.

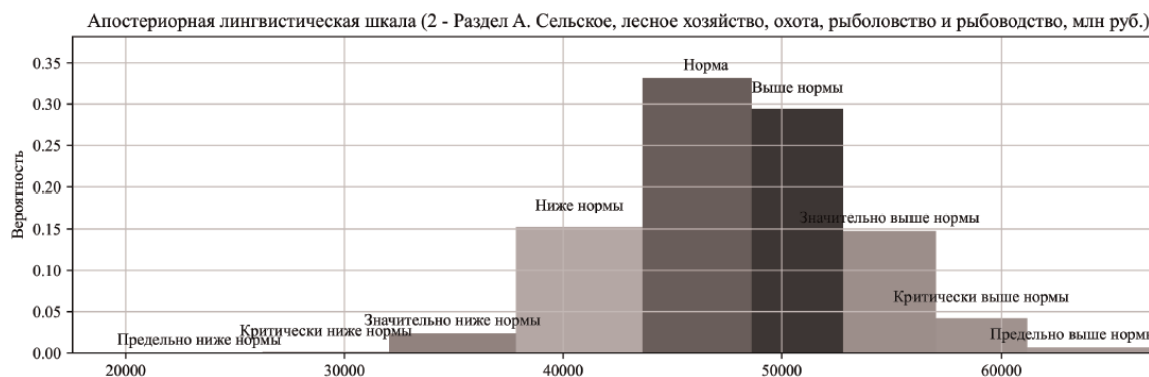


Рис. 2: Оценка ВРП Раздел А Тульской области в 2022 г. на основе нормативной регрессии, млн руб.

Из рис. 2 видно, что функционирование элемента системы, характеризуемого скорректированным объемом ВРП по разделу А, находится в классе «норма» с вероятностью 0,332; в классе «выше нормы» с вероятностью 0,294; «ниже нормы» – 0,153; «значительно выше нормы» – 0,148 (что ниже заданного порога значимости 0,150).

Таким образом, представленный метод учитывает силу влияния факторов – условий функционирования структурных элементов системы, что расширяет возможности ранее разработанного метода, широко используемого в подобных исследованиях.

4. Заключение

Представленный и апробированный на примере Тульской области метод формирования норм на основе регрессионных моделей, построенных по малым выборкам, может выступать в качестве составляющей оценки результативности функционирования элемента сложной системы, действующей в условиях информационной неопределенности. Метод может быть применен для систем различного типа, в том числе технических, информационных и социо-эколого-экономических систем.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Техническое регулирование: технические регламенты и стандартизация : учебное пособие / сост. И. Ю. Матушкина, Л. А. Онищенко. — Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2018. 208 с.
2. Мадера А. Г. Моделирование и оптимизация бизнес-процессов и процессных систем в условиях неопределенности // Бизнес-информатика. 2017. № 4. С. 74–82.
3. Trung D. D. Development of data normalization methods for multi-criteria decision making: Applying for MARCOS method // Manufacturing Review. 2022. Vol. 9. No. 22.
4. Жуков Р. А. Метод оценки результатов функционирования иерархических социально-экономических систем на основе агрегированной производственной функции // Экономика и математические методы. 2021. Т. 57. № 3. С. 17-31.
5. Айвазян С. А. Байесовский подход в эконометрическом анализе // Прикладная эконометрика. 2008. № 1 (9). С. 93-130.
6. Прокопчина С. В. Байесовские интеллектуальные технологии в задачах моделирования закона распределения в условиях неопределенности: монография. М.: ИД «НАУЧНАЯ БИБЛИОТЕКА», 2020. 292 с.
7. Прокопчина С. В. Основы теории шкалирования в экономике: учебное пособие. — М.: ИД «НАУЧНАЯ БИБЛИОТЕКА», 2021. 272 с.
8. Прокопчина С. В. Байесовские интеллектуальные измерения. — М.: ИД «НАУЧНАЯ БИБЛИОТЕКА», 2021. 495 с.
9. Жуков Р. А., Прокопчина С. В. О Формировании мягких норм для оценки функционирования сложных систем // Чебышевский сборник. 2024. Т. 25. № 3 (94). С. 351-358.
10. Жуков Р. А., Прокопчина С. В., Плинская М. А., Желуница М. А. Построение системы динамических нормативов для оценки функционирования сложных систем на примере субъектов Центрального федерального округа // Бизнес-информатика. 2024. Т. 18. № 4. С. 46-60.
11. Прокопчина С. В., Щербаков Г. А., Ефимов Ю. В. Моделирование социально-экономических систем в условиях неопределенности: учебное пособие. — М.: ИД «НАУЧНАЯ БИБЛИОТЕКА», 2019. 508 с.
12. Жуков Р. А., Прокопчина С. В., Плинская М. А., Желуница М. А. Моделирование функциональных связей региональных экономических систем по малым выборкам на основе байесовских интеллектуальных измерений // Journal of Applied Economic Research. 2024. Т. 23. № 3. С. 721-750.

13. Федеральная служба государственной статистики Российской Федерации.
URL: <https://gks.ru>.
14. Таблицы уровней инфляции. URL: <https://уровень-инфляции.рф/таблицы-инфляции>
15. Жуков Р. А., Прокопчина С. В. Программный комплекс «Инфоаналитик 2.0». Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ No 2024617544 от 03.04.2024.
URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=65627372>
16. Жуков Р. А., Прокопчина С. В., Гиниятов И. А., Николина Е. М. Применение библиотеки «Байесовская математическая статистика» в программном комплексе «Инфоинтегратор» // Мягкие измерения и вычисления. 2022. Т. 54. № 5. С. 99-108.
17. Жуков Р. А. Подход к оценке функционирования иерархических социально-экономических систем и принятию решений на базе программного комплекса «ЭФРА» // Бизнес-информатика. 2020. Т. 14. № 3. С. 82-95.

REFERENCES

1. Matushkina, I. Y., Onishchenko L. A., 2018, "Technical regulation: technical regulations and standardization: a textbook", *Yekaterinburg, Ural University Publishing House*, 208 p.
2. Madera, A. G. 2017, "Modeling and optimization of business processes and process systems under conditions of uncertainty", *Business Informatics*, no. 4, pp. 74–82.
3. Trung, D. D. 2022, "Development of data normalization methods for multi-criteria decision making: Applying for MARCOS method", *Manufacturing Review*, vol. 9, no. 4, pp. 15.
4. Zhukov, R. A. 2021, "Method for assessing the results of hierarchical socio-economic systems' functioning based on the aggregated production function", *Economics and Mathematical Methods*, vol. 57, no. 3, pp. 17-31.
5. Ayvazyan, S. A. 2008, "Bayesian approach in econometric analysis", *Applied Econometrics*, no. 1 (9), pp. 93-130.
6. Prokopchina, S. V. 2020, "Bayesian intelligent technologies in problems of modeling the distribution law under uncertainty: monograph", *M., Publishing house "SCIENTIFIC LIBRARY"*, 292 p.
7. Prokopchina, S. V. 2021, "Fundamentals of the theory of scaling in economics: textbook", *M., Publishing house "SCIENTIFIC LIBRARY"*, 272 p.
8. Prokopchina, S. V. 2021, "Bayesian intellectual measurements", *M., Publishing house "SCIENTIFIC LIBRARY"*, 495 p.
9. Zhukov, R. A., Prokopchina, S. V. 2024, "On the formation of soft norms for evaluating the functioning of complex systems", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 25, no. 3 (94), pp. 351-358.
10. Zhukov, R. A., Prokopchina, S. V., Plinskaya, M. A., Zhelunitsina, M. A. 2024, "Building a system of dynamic norms for evaluating the functioning of complex systems on the example of the regions of the Central Federal District", *Business Informatics*, vol. 18, no. 4, pp. 46-60.
11. Prokopchina, S. V., Shcherbakov, G. A., Efimov, Yu. V. 2019, "Modeling of socio-economic systems in conditions of uncertainty", *M., Publishing house "SCIENTIFIC LIBRARY"*, 508 p.

12. Zhukov, R. A., Prokopchina, S. V., Plinskaya, M. A., Zhelunitsina, M. A. 2024, ‘Modeling of functional relationships of regional economic systems based on small samples based on Bayesian intelligent measurements’, *Journal of Applied Economic Research*, vol. 23, no. 3, pp. 721-750.
13. Federal State Statistics Service of the Russian Federation. URL: <https://gks.ru>.
14. Tables of inflation rates. URL: <https://xn--ctbjnaatncev9av3a8f8b.xn-p1ai/>
15. Zhukov R.A., Prokopchina S.V. The Infoanalyst 2.0 software package. Certificate of state registration of the computer program No. 2024617544 dated 04/03/2024.
URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=65627372>
16. Zhukov, R. A., Prokopchina, S. V., Giniatov, I. A., Nikolina, E. M. 2022, “Application of the Bayesian Mathematical Statistics Library in the Infointegrator Software Package”, *Soft Measurement and Computing*, vol. 54, no. 5, pp. 99–108.
17. Zhukov R. A. 2020, “An approach to assessing the functioning of hierarchical socio-economic systems and decision-making based on the EFRA software package”, *Business Informatics*, vol. 14, no. 3, pp. 82-95.

Получено: 19.12.2024

Принято в печать: 10.03.2025

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 26. Выпуск 1.

УДК 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-1-157-163

Гиперболическая дзета-функция диагональных решёток

А. П. Крылов, Н. М. Добровольский, И. Н. Балаба

Крылов Александр Петрович — аспирант, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: alek.krylov@gmail.com

Добровольский Николай Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: dobrovol@tspu.ru

Балаба Ирина Николаевна — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: ibalaba@mail.ru

Аннотация

В работе изучаются свойства гиперболической дзета-функции диагональных решёток. Доказывается теорема об аналитическом продолжении этой функции.

Ключевые слова: гиперболическая дзета-функция решёток, метрическое пространство решёток, унимодулярные решётки, диагональные решетки, фундаментальные решётки.

Библиография: 5 названий.

Для цитирования:

Крылов А. П., Добровольский Н. М., Балаба И. Н. Гиперболическая дзета-функция диагональных решёток // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 1, с. 157–163.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 26. No. 1.

UDC 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-1-157-163

Hyperbolic zeta function of diagonal lattices

A. P. Krylov, N. M. Dobovol'skii, I. N. Balaba

Krylov Alexander Petrovich — postgraduate student, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: alek.krylov@gmail.com

Dobovol'skii Nikolai Mikhailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: dobrovol@tspu.ru

Balaba Irina Nikolaevna — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: ibalaba@mail.ru

Abstract

The paper studies the properties of the hyperbolic zeta function of diagonal two-dimensional unimodular lattices. A theorem on the analytic continuation of this function is proved.

Keywords: hyperbolic zeta function of lattices, metric lattice space, unimodular lattices, diagonal lattices, fundamental lattices.

Bibliography: 5 title.

For citation:

Krylov, A. P., Dobrovolskii, N. M., Balaba, I. N. 2025, “Hyperbolic zeta function of diagonal lattices”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 1, pp. 157–163.

1. Введение

В работе [4] была доказана полнота метрического пространства диагональных унимодулярных решёток. Каждая диагональная унимодулярная решётка является декартовой решёткой, а, следовательно, гиперболическая дзета-функция этой решётки имеет аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость за исключением точки $\alpha = 1$, где у неё полюс s -ого порядка. (см. [1], [5]).

Для дальнейшего нам потребуется функциональное уравнение для дзета-функции Римана:

$$\zeta(\alpha) = M(\alpha)\zeta(1-\alpha), \quad M(\alpha) = \frac{2\Gamma(1-\alpha)}{(2\pi)^{1-\alpha}} \sin \frac{\pi\alpha}{2} - \text{множитель Римана}, \quad \alpha = \sigma + it, \quad \sigma < 0.$$

Здесь $\Gamma(x)$ — гамма функция Эйлера.

Цель нашей работы — изучить свойства аналитического продолжения гиперболической дзета-функции диагональных решёток в левой полуплоскости.

2. Метрика Касселса

Как известно (см. [2], стр. 165), множество всех s -мерных решёток PR_s является полным метрическим пространством относительно метрики

$$\rho(\Lambda, \Gamma) = \max(\ln(1 + \mu), \ln(1 + \nu)) = \ln(1 + \max(\mu, \nu)), \quad (1)$$

где

$$\mu = \inf_{\Gamma=A\cdot\Lambda} \|A - I\|, \quad \nu = \inf_{\Lambda=B\cdot\Gamma} \|B - I\|.$$

Рассмотрим пространство $\mathbb{R}_+^s = (0, \infty)^s$ и введем на нём новую метрику $\rho(\vec{x}, \vec{y})$, заданную следующим образом:

$$\rho(\vec{x}, \vec{y}) = \max(\ln(1 + \mu), \ln(1 + \nu)) = \ln(1 + \max(\mu, \nu)), \quad (2)$$

где

$$\mu = \max_{j=1, \dots, s} \left| 1 - \frac{x_j}{y_j} \right|, \quad \nu = \max_{j=1, \dots, s} \left| 1 - \frac{y_j}{x_j} \right|,$$

которую назовём метрикой Касселса. Нетрудно видеть, что

$$\rho(\vec{x}, \vec{y}) = \max_{j=1, \dots, s} \max \left(\ln \left(1 + \left| 1 - \frac{x_j}{y_j} \right| \right), \ln \left(1 + \left| 1 - \frac{y_j}{x_j} \right| \right) \right). \quad (3)$$

Очевидно, что $\rho(\vec{x}, \vec{x}) = 0$ для любого $\vec{x} \in \mathbb{R}_+^s$ и $\rho(\vec{x}, \vec{y}) = \rho(\vec{y}, \vec{x}) = 0$ для любых $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}_+^s$. Так как $\frac{x}{y} = \frac{x}{z} \cdot \frac{z}{y}$, то при $\beta = \frac{x}{z} - 1$, $\gamma = \frac{z}{y} - 1$, $\delta = \frac{x}{y} - 1$ имеем: $\delta = \beta + \gamma + \beta \cdot \gamma$, $|\delta| \leq |\beta| + |\gamma| + |\beta| \cdot |\gamma|$,

$1 + \left|1 - \frac{x}{y}\right| \leq 1 + \left|1 - \frac{x}{z}\right| + \left|1 - \frac{z}{y}\right| + \left|1 - \frac{x}{z}\right| \cdot \left|1 - \frac{z}{y}\right| \leq (1 + \left|1 - \frac{x}{z}\right|) \left(1 + \left|1 - \frac{z}{y}\right|\right)$. Отсюда следует неравенство треугольника: $\ln \left(1 + \left|1 - \frac{x}{y}\right|\right) \leq \ln \left(1 + \left|1 - \frac{x}{z}\right|\right) + \ln \left(1 + \left|1 - \frac{z}{y}\right|\right)$, $\rho(\vec{x}, \vec{y}) \leq \rho(\vec{x}, \vec{z}) + \rho(\vec{z}, \vec{y})$.

Будем через RC^s обозначать пространство $\mathbb{R}_+^s = (0, \infty)^s$ и называть его пространством Касселса. Ясно, что оно гомеоморфно пространству диагональных решёток.

3. Дзета-функция диагональных унимодулярных решёток

Диагональные решётки — самый простой класс решёток. Они получаются растяжением по координатам фундаментальной решётки $\mathbb{Z}^s$: $\Lambda(d_1, \dots, d_s) = \{(d_1 m_1, \dots, d_s m_s) | m_1, \dots, m_s \in \mathbb{Z}\}$, $(d_1, \dots, d_s > 0)$.

Диагональная унимодулярная решётка $\Lambda U(d_1, \dots, d_{s-1}) = \Lambda \left(d_1, \dots, d_{s-1}, \frac{1}{d_1 \dots d_{s-1}}\right)$, $d_1, \dots, d_{s-1} > 0$.

Всякая решётка при $s \geq 2$ имеет бесконечно много базисов. Действительно, если $GL_s(\mathbb{Z})$ — линейная унимодулярная группа, состоящая из квадратных матриц порядка s

$$M = \begin{pmatrix} m_{1,1} & \dots & m_{1,s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{s,1} & \dots & m_{s,s} \end{pmatrix}, \quad m_{i,j} \in \mathbb{Z} \quad (i, j = 1, \dots, s), \quad \det M = \pm 1,$$

то для любого базиса $\vec{\lambda}_1 = (\lambda_{1,1}, \dots, \lambda_{1,s}), \dots, \vec{\lambda}_s = (\lambda_{s,1}, \dots, \lambda_{s,s})$ решётки Λ все базисы имеют вид $\vec{\lambda}'_1 = \vec{\lambda}_1 \cdot M, \dots, \vec{\lambda}'_s = \vec{\lambda}_s \cdot M$, где $M \in GL_s(\mathbb{Z})$.

Отсюда следует, что произвольная базисная матрица $M(d_1, \dots, d_{s-1})$ диагональной унимодулярной решётки $\Lambda U(d_1, \dots, d_{s-1})$ имеет вид

$$M(d_1, \dots, d_{s-1}) = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{d_1 \dots d_{s-1}} \end{pmatrix} \cdot M = \begin{pmatrix} d_1 m_{1,1} & \dots & \dots & d_1 m_{1,s} \\ d_2 m_{2,1} & \dots & \dots & d_2 m_{2,s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{m_{s,1}}{d_1 \dots d_{s-1}} & \dots & \dots & \frac{m_{s,s}}{d_1 \dots d_{s-1}} \end{pmatrix},$$

$M \in GL_s(\mathbb{Z})$.

В работе [4] доказана лемма о расстояниях (определение метрики на пространстве решёток см. [2], стр.165).

ЛЕММА 1. Пусть $D_1 = \max \left(\frac{d_1}{d'_1}, \dots, \frac{d_{s-1}}{d'_{s-1}}, \frac{d'_1 \dots d'_{s-1}}{d_1 \dots d_{s-1}} \right)$, $D_2 = \max \left(\frac{d'_1}{d_1}, \dots, \frac{d'_{s-1}}{d_{s-1}}, \frac{d_1 \dots d_{s-1}}{d'_1 \dots d'_{s-1}} \right)$ и $D_1 \geq D_2$, тогда $D_2 \geq 1$ и $\rho(\Lambda U(d_1, \dots, d_{s-1}), \Lambda U(d'_1, \dots, d'_{s-1})) \leq \ln(s D_1 + 1 - s)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [4]. $\square$

ЛЕММА 2. Пусть $D_1 = \max \left(\frac{d_1}{d'_1}, \dots, \frac{d_{s-1}}{d'_{s-1}}, \frac{d'_1 \dots d'_{s-1}}{d_1 \dots d_{s-1}} \right)$, $D_2 = \max \left(\frac{d'_1}{d_1}, \dots, \frac{d'_{s-1}}{d_{s-1}}, \frac{d_1 \dots d_{s-1}}{d'_1 \dots d'_{s-1}} \right)$ и $D_1 \geq D_2$, если $\Lambda U(d_1, \dots, d_{s-1}) = A \cdot \Lambda U(d'_1, \dots, d'_{s-1})$ и $\|A - E_s\| \leq \delta < \frac{1}{D_2}$, тогда $d_\nu = d'_\nu(1 + \delta_{\nu,\nu})$, $1 \leq \nu \leq s-1$, $d'_1 \dots d'_{s-1} = (1 + \delta_{s,s}) d_1 \dots d_{s-1}$, где $0 \leq |\delta_{\nu,\nu}| \leq \frac{\delta}{s D_2}$ ($\nu = 1, \dots, s$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [4]. $\square$

Положим $d_s = \frac{1}{d_1 \dots d_{s-1}}$, тогда $d_1 \dots d_s = 1$ и $D = \max(d_1, \dots, d_s) \geq 1$, $D_1 = \min(d_1, \dots, d_s) \leq 1$.

Гиперболическая дзета-функция диагональной унимодулярной решётки $\Lambda U(d_1, \dots, d_{s-1})$ имеет вид:

$$\zeta_H(\Lambda U(d_1, \dots, d_{s-1})|\alpha) = \sum_{\vec{m} \in \mathbb{Z}} \frac{1}{d_1 m_1^\alpha \cdot \dots \cdot d_{s-1} m_{s-1}^\alpha \cdot \left(\frac{m_s}{d_1 \dots d_{s-1}}\right)^\alpha} \quad (\alpha = \sigma + it, \quad \sigma > 1).$$

Без ограничения общности, будем считать, что $d_1 \geq \dots \geq d_k > 1 = d_{k+1} = \dots = d_{n-1} > d_n \geq \dots \geq d_s$. Ясно, что если $\Lambda(d_1, \dots, d_s) \neq \mathbb{Z}^s$, то $1 \leq k < n \leq s$.

Нетрудно видеть, что $\zeta_H(\mathbb{Z}^s|\alpha) = (1 + 2\zeta(\alpha))^s - 1$. Отсюда следует функциональное уравнение

$$\zeta_H(\mathbb{Z}^s|\alpha) = (1 + 2M(\alpha)\zeta(1 - \alpha))^s - 1, \quad \alpha = \sigma + it, \quad \sigma < 0. \quad (4)$$

Для $d \geq 1$ введём обозначение

$$f(d|\alpha) = \sum_{1 \leq m < d} \left(1 - \frac{1}{\left(\frac{1}{d}m\right)^\alpha}\right) = \sum_{1 \leq m < d} \left(1 - \frac{d^\alpha}{m^\alpha}\right),$$

получим при $\Lambda(d_1, \dots, d_s) \neq \mathbb{Z}^s$

$$\zeta_H(\Lambda(d_1, \dots, d_s)|\alpha) = \prod_{j=1}^k \left(1 + \frac{2}{d_j^\alpha} \zeta(\alpha)\right) (1 + 2\zeta(\alpha))^{n-1-k} \prod_{j=n}^s \left(1 + \frac{2}{d_j^\alpha} \zeta(\alpha) + 2f\left(\frac{1}{d_j} \middle| \alpha\right)\right) - 1. \quad (5)$$

Так как при $0 < d \leq 1$ имеем равенство $f(d|\alpha) = 0$, то равенство (5) можно переписать в виде

$$\zeta_H(\Lambda(d_1, \dots, d_s)|\alpha) = \prod_{j=1}^s \left(1 + \frac{2}{d_j^\alpha} \zeta(\alpha) + 2f\left(\frac{1}{d_j} \middle| \alpha\right)\right) - 1. \quad (6)$$

Это равенство можно переписать по степеням дзета-функции Римана. Получим

$$\begin{aligned} \zeta_H(\Lambda(d_1, \dots, d_s)|\alpha) &= \prod_{j=1}^s \left(1 + 2f\left(\frac{1}{d_j} \middle| \alpha\right)\right) - 1 + \sum_{k=1}^s 2^k \zeta(\alpha)^k \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq s} \prod_{\nu=1}^k \frac{1}{d_{j_\nu}^\alpha} \\ &\quad \cdot \prod_{j=1, j \neq j_1, \dots, j_k}^s \left(1 + 2f\left(\frac{1}{d_j} \middle| \alpha\right)\right). \end{aligned}$$

Нам потребуется ещё значение $f(d|1) = \sum_{1 \leq m < d} \left(1 - \frac{d}{m}\right)$. Заметим, что $f(d|\alpha)$ — непрерывная функция от $d > 0$ при любом значении α .

4. Непрерывность гиперболической дзета-функции решёток на пространстве диагональных унимодулярных решёток

Как было отмечено во введении, диагональная унимодулярная решётка является декартовой и поэтому имеет аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость.

ЛЕММА 3. Для гиперболической дзета-функции диагональной решётки справедливо функциональное уравнение

$$\zeta_H(\Lambda(d_1, \dots, d_s)|\alpha) = \prod_{j=1}^s \left(1 + \frac{2}{d_j^\alpha} M(\alpha)\zeta(1 - \alpha) + 2f\left(\frac{1}{d_j} \middle| \alpha\right)\right) - 1. \quad (7)$$

при $\alpha = \sigma + it, \quad \sigma < 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, функция $f(d|\alpha)$ является аналитической на всей комплексной плоскости, поэтому, подставляя в выражение для гиперболической дзета-функции диагональной унимодулярной решётки функциональное уравнение для дзета-функции Римана, получим утверждение леммы. $\square$

ТЕОРЕМА 1. Для любой диагональной решётки $\Lambda(d_1, \dots, d_s)$ гиперболическая дзета-функция $\zeta_H(\Lambda(d_1, \dots, d_s)|\alpha)$ является аналитической функцией на всей комплексной плоскости кроме точки $\alpha = 1$, в которой у неё полюс s -ого порядка с вычетом

$$\begin{aligned} \text{Res}_1 \zeta_H(\Lambda(d_1, \dots, d_s)|\alpha) = & 2 \sum_{1 \leq j_1 \leq s} \frac{1}{d_{j_1}} \prod_{j=1, j \neq j_1}^s \left(1 + 2f\left(\frac{1}{d_j} \middle| 1\right) \right) + \sum_{k=2}^s 2^k \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq s} \prod_{\nu=1}^k \frac{1}{d_{j_\nu}} \\ & \cdot \prod_{j=1, j \neq j_1, \dots, j_k}^s \left(1 + 2f\left(\frac{1}{d_j} \middle| 1\right) \right) \sum_{j=1}^{\frac{k+1}{2}} C_k^j C_{k-j}^{j-1} \gamma^{k-2j+1} (-\gamma_1)^{j-1}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как известно, дзета-функция Римана мероморфна с единственным полюсом первого порядка при $\alpha = 1$ и раскладывается в ряд Лорана в точке $\alpha = 1$

$$\zeta(\alpha) = \frac{1}{\alpha - 1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma_n}{n!} (1 - \alpha)^n,$$

где

$$\gamma_n = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\left(\sum_{k=1}^m \frac{(\ln k)^n}{k} \right) - \frac{(\ln m)^{n+1}}{n+1} \right)$$

— константы Стильеса, а $\gamma_0 = \gamma$ — константа Эйлера.

Таким образом, для дзета-функции Римана справедливо равенство

$$\zeta(\alpha) = \frac{1}{\alpha - 1} + \gamma + r(\alpha), \quad r(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{n!} (1 - \alpha)^n = (\alpha - 1)r_1(\alpha), \quad r_1(\alpha) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{n!} (1 - \alpha)^{n-1}$$

и функции $r(\alpha)$ и $r_1(\alpha)$ — голоморфные функции на всей комплексной области. Для дальнейшего потребуется важное равенство $r_1(1) = -\gamma_1$.

В частности, для вычета дзета-функции Римана имеем хорошо известное равенство $\text{Res}_1 \zeta(\alpha) = 1$.

Отсюда следует, что при $k \geq 2$

$$\begin{aligned} \zeta^k(\alpha) = & \frac{1}{(\alpha - 1)^k} + \sum_{j=0}^{k-1} C_k^j \frac{1}{(\alpha - 1)^j} (\gamma + r(\alpha))^{k-j} = \frac{1}{(\alpha - 1)^k} + \\ & + \sum_{j=1}^{k-1} C_k^j \frac{1}{(\alpha - 1)^j} (\gamma + (\alpha - 1)r_1(\alpha))^{k-j} + (\gamma + r(\alpha))^k = \frac{1}{(\alpha - 1)^k} + \sum_{j=1}^{k-1} C_k^j \frac{\gamma^{k-j}}{(\alpha - 1)^j} + \\ & + \sum_{j=1}^{k-1} C_k^j \sum_{m=0}^{k-j} C_{k-j}^m \frac{\gamma^{k-j-m} r_1(\alpha)^m}{(\alpha - 1)^{j-m}} + (\gamma + r(\alpha))^k = \sum_{j=1}^k C_k^j \frac{\gamma^{k-j}}{(\alpha - 1)^j} + \sum_{j=2}^{k-1} C_k^j \cdot \\ & \cdot \sum_{m=0}^{\min(k-j, j-2)} C_{k-j}^m \frac{\gamma^{k-j-m} r_1(\alpha)^m}{(\alpha - 1)^{j-m}} + \frac{1}{\alpha - 1} \sum_{j=1}^{\frac{k+1}{2}} C_k^j C_{k-j}^{j-1} \gamma^{k-2j+1} r_1(\alpha)^{j-1} + \\ & + \sum_{j=1}^{\frac{k}{2}} C_k^j \sum_{m=j}^{k-j} C_{k-j}^m \gamma^{k-j-m} r_1(\alpha)^m (\alpha - 1)^{m-j} + (\gamma + r(\alpha))^k. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\operatorname{Res}_1 \zeta^k(\alpha) = \sum_{j=1}^{\frac{k+1}{2}} C_k^j C_{k-j}^{j-1} \gamma^{k-2j+1} r_1(1)^{j-1} = \sum_{j=1}^{\frac{k+1}{2}} C_k^j C_{k-j}^{j-1} \gamma^{k-2j+1} (-\gamma_1)^{j-1}.$$

Так как все функции, стоящие в правой части равенства (6) являются либо голоморфными, либо мероморфными кроме точки $\alpha = 1$, то и левая часть является мероморфной функцией на всей комплексной плоскости кроме точки $\alpha = 1$, в которой у неё полюс s -ого порядка. Для вычета в этой точке имеем равенство

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_1 \zeta_H(\Lambda(d_1, \dots, d_s) | \alpha) &= 2 \sum_{1 \leq j_1 \leq s} \frac{1}{d_{j_1}} \prod_{j=1, j \neq j_1}^s \left(1 + 2f \left(\frac{1}{d_j} \middle| 1 \right) \right) + \sum_{k=2}^s 2^k \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq s} \prod_{\nu=1}^k \frac{1}{d_{j_\nu}} \\ &\cdot \prod_{j=1, j \neq j_1, \dots, j_k}^s \left(1 + 2f \left(\frac{1}{d_j} \middle| 1 \right) \right) \sum_{j=1}^{\frac{k+1}{2}} C_k^j C_{k-j}^{j-1} \gamma^{k-2j+1} (-\gamma_1)^{j-1}. \end{aligned}$$

и теорема полностью доказана. $\square$

ТЕОРЕМА 2. *На метрическом пространстве диагональных решёток гиперболическая дзета-функция $\zeta_H(\Lambda(d_1, \dots, d_s) | \alpha)$ и её вычет в точке $\alpha = 1$ являются непрерывными функциями, как функции от параметров $d_1, \dots, d_s$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Все функции, стоящие в правой части равенства (6) являются непрерывными функциями от $d_1, \dots, d_s$ при $d_1, \dots, d_s > 0$, поэтому и левая часть будет непрерывной функцией от $d_1, \dots, d_s$.

Аналогично, имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_1 \zeta_H(\Lambda(d_1, \dots, d_s) | \alpha) &= 2 \sum_{1 \leq j_1 \leq s} \frac{1}{d_{j_1}} \prod_{j=1, j \neq j_1}^s \left(1 + 2f \left(\frac{1}{d_j} \middle| 1 \right) \right) + \sum_{k=2}^s 2^k \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq s} \prod_{\nu=1}^k \frac{1}{d_{j_\nu}} \\ &\cdot \prod_{j=1, j \neq j_1, \dots, j_k}^s \left(1 + 2f \left(\frac{1}{d_j} \middle| 1 \right) \right) \sum_{j=1}^{\frac{k+1}{2}} C_k^j C_{k-j}^{j-1} \gamma^{k-2j+1} (-\gamma_1)^{j-1}, \end{aligned}$$

поэтому вычет в точке $\alpha = 1$ является непрерывной функцией от $d_1, \dots, d_s$.

Так как метрическое пространство диагональных решёток гомеоморфно пространству $\mathbb{R}_+^s = (0, \infty)^s$, то теорема полностью доказана. $\square$

Так как множество диагональных унимодулярных решёток является подпространством всех диагональных решёток, то утверждение теоремы 2 справедливо и для гиперболической дзета-функции диагональных унимодулярных решёток.

5. Заключение

Из доказанных теорем возникает вопрос о дифференциальных свойствах гиперболической дзета-функции диагональных унимодулярных решёток на пространстве всех диагональных решёток. Ответ на этот вопрос будет темой нашей следующей работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Л. П. Добровольская, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, И. Н. Добровольский Гиперболические дзета-функции сеток и решёток и вычисление оптимальных коэффициентов // Чебышевский сборник 2012. Т. 13, вып. 4(44). С. 4–107.

2. Касселс Д. Введение в геометрию чисел. М.: Мир, 1965. 422 с.
3. А. П. Крылов, Н. М. Добровольский. Метрическое пространство двумерных диагональных унимодулярных решёток // Записки научных семинаров Тульской школы теории чисел. 2022. Вып. 1, С. 37–41.
4. А. П. Крылов. Метрическое пространство диагональных унимодулярных решёток // Записки научных семинаров Тульской школы теории чисел. 2025. Вып. 3, С. .
5. Dobrovolskaya L. P., Dobrovolsky M. N., Dobrovol'skii N. M., Dobrovolsky N. N. On Hyperbolic Zeta Function of Lattices // Continuous and Distributed Systems. Solid Mechanics and Its Applications. Vol. 211. 2014. P. 23–62. doi: 10.1007/978-3-319-03146-0_2.

REFERENCES

1. Dobrovol'skaya, L. P., Dobrovol'skii, M. N., Dobrovol'skii, N. M. & Dobrovol'skii, N. N. 2012, "The hyperbolic Zeta function of grids and lattices, and calculation of optimal coefficients", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 13, no. 4(44), pp. 4 – 107.
2. Kassels, D. 1965, "Vvedenie v geometriyu chisel", [Introduction to the geometry of numbers], *Mir, Moscow*, (Russia).
3. Krylov, A. P., Dobrovolsky, N. M. 2022, "Metric space of two-dimensional diagonal unimodular lattices", *Notes of scientific seminars of the Tula School of Number Theory*, Iss. 1, pp. 37 – 41.
4. Krylov, A.P., 2025, "Metric space of diagonal unimodular lattices", *Proceedings of Scientific Seminars of Tula School of Number Theory*, vol. 3, pp. 37 – 41.
5. Dobrovol'skaya, L. P., Dobrovol'skii, M. N., Dobrovol'skii, N. M. & Dobrovol'skii, N. N. 2014, "On Hyperbolic Zeta Function of Lattices", *Continuous and Distributed Systems. Solid Mechanics and Its Applications*, vol. 211, pp. 23 – 62.

Получено: 18.11.2024

Принято в печать: 10.03.2025

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 26. Выпуск 1.

УДК 534.2

DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-1-164-180

**Рассеяние плоской звуковой волны жидким телом
сложной формы¹**

Д. В. Горбачев, Д. Р. Лепетков, С. А. Скобельцын

Горбачев Дмитрий Викторович — доктор физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: dv@mail@mail.ru

Лепетков Даниил Русланович — аспирант, Тульский государственный университет; Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: Lepetkov@ya.ru

Скобельцын Сергей Алексеевич — доктор физико-математических наук, Тульский государственный университет; Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: skbl@rambler.ru

Аннотация

Рассматривается задача рассеяния плоской гармонической звуковой волны на препятствии в виде жидкого тела с неканонической формой и кусочно-гладкой поверхностью, которая аппроксимируется полигональной сеткой. Модель процесса строится на базе уравнений гидродинамики идеальной жидкости. Для решения задачи сравниваются два численно-аналитических подхода, основанных на методе конечных элементов (МКЭ) и методе граничных элементов (МГЭ). В первом подходе препятствие заключается в сферу, область внутри которой с учетом поверхности препятствия разбивается на пространственные (3D) конечные элементы. В этой области задача решается МКЭ, что дает значения потенциала на сфере, которые используются для нахождения коэффициентов сферического разложения потенциала рассеянной волны. Во втором подходе при помощи пространственной функции Грина для уравнения Гельмгольца задача сводится к системе интегральных уравнений по поверхности препятствия. Также применяется метод Бертона и Миллера для исключения неединственности решения и регуляризация сингулярных интегралов на основе тождеств для статической функции Грина. В МГЭ достаточно использовать разбиение поверхности на граничные (2D) элементы. Приводятся основные соотношения для применения численных методов и результаты решения задачи рассеяния звука на примере жидкого тела, имеющего форму объединения двух шаров одинакового радиуса. Установлено, что для достижения приемлемой точности расчета рассеянного поля метод МГЭ требует существенно меньших вычислительных затрат по сравнению с МКЭ.

Ключевые слова: рассеяние звука, жидкое тело, акустический потенциал, метод конечных элементов (МКЭ), метод граничных элементов (МГЭ), функция Грина.

Библиография: 29 названий.

Для цитирования:

Горбачев, Д. В., Лепетков, Д. Р., Скобельцын, С. А. Рассеяние плоской звуковой волны жидким телом сложной формы // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 1, с. 164–180.

¹Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства просвещения РФ соглашение № 073-00033-24-01 от 09.02.2024 тема научного исследования «Теоретико-числовые методы в приближенном анализе и их приложения в механике и физике».

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 26. No. 1.

UDC 534.2

DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-1-164-180

Scattering of a plane sound wave by a liquid body of complex shape

D. V. Gorbachev, D. R. Lepetkov, S. A. Skobel'tsyn

Gorbachev Dmitry Viktorovich — doctor of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: dv@mail@mail.ru

Lepetkov Daniil Ruslanovich — postgraduate student, Tula State University; Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: Lepetkov@ya.ru

Skobel'tsyn Sergey Alekseevich — doctor of physical and mathematical sciences, Tula State University; Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: skbl@rambler.ru

Abstract

The problem of scattering of a plane harmonic sound wave by an obstacle in the form of a liquid body with a non-canonical shape and a piecewise-smooth surface, approximated by a polygonal mesh, is considered. The process model is based on the equations of hydrodynamics for an ideal fluid. Two numerical-analytical approaches to solving the problem are compared: the finite element method (FEM) and the boundary element method (BEM). In the first approach, the obstacle is enclosed within a sphere, and the domain inside, taking into account the surface of the obstacle, is divided into spatial (3D) finite elements. In this domain, the problem is solved using FEM, which provides the potential values on the sphere. These values are then used to determine the coefficients of the spherical expansion of the scattered wave potential. In the second approach, using the spatial Green's function for the Helmholtz equation, the problem is reduced to a system of integral equations over the surface of the obstacle. The Burton-Miller method is also applied to eliminate the non-uniqueness of the solution, and singular integrals are regularized using identities for the static Green's function. In the BEM, it is sufficient to divide the surface into boundary (2D) elements. The main equations for applying the numerical methods and the results of solving the sound scattering problem for a liquid body in the form of two spheres of equal radius are presented. It is established that to achieve acceptable accuracy in calculating the scattered field, the BEM requires significantly fewer computational resources compared to the FEM.

Keywords: sound scattering, liquid body, acoustic potential, finite element method (FEM), boundary element method (BEM), Green's function.

Bibliography: 29 titles.

For citation:

Gorbachev, D. V., Lepetkov, D. R., Skobel'tsyn, S. A. 2025, "Scattering of a plane sound wave by a liquid body of complex shape", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 1, pp. 164–180.

Введение

Решение задачи рассеяния звука объектами сложной формы представляет интерес как с теоретической, так и с практической точек зрения. В теоретическом аспекте важно получить

решения новых задач с оценкой влияния параметров среды, падающей волны, формы препятствия, а также используемых методов и алгоритмов на точность решения. В практическом аспекте необходимо создать основу для разработки инженерных технологий, применяемых в задачах обнаружения, идентификации, диагностики и дефектоскопии.

Прямые и обратные задачи дифракции звука на акустических объектах в жидкой среде исследовались, например, в работах [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]. В последние годы значительное внимание уделяется случаям, когда акустические препятствия обладают неоднородной структурой. Подобные задачи рассматриваются в работах [1, 4, 5, 6, 9]. Статьи [3, 5, 8, 10] посвящены решению обратных задач, основная сложность которых заключается в определении геометрических и материальных параметров рассеивающих акустических областей.

В сборнике [9] представлены работы, посвященные решению различных задач рассеяния ультразвука на биологических тканях, которые в механическом смысле моделируются как акустические среды, характеризующиеся плотностью и скоростью звука.

В данной работе рассматривается задача рассеяния плоской гармонической звуковой волны жидким телом сложной неканонической формы (раздел 1). Модель процесса формируется на основе уравнений гидродинамики идеальной жидкости (см. раздел 1). Проводится сравнение двух численно-аналитических методов решения, основанных на методе конечных элементов (МКЭ) и методе граничных элементов (МГЭ). Описание и ключевые соотношения для применения численных методов в случае МКЭ даны в разделе 2, а для МГЭ — в разделе 3. Также в разделах 1 и 3 приведено известное аналитическое решение задачи рассеяния для шара, полученное разными способами, которое использовалось для теоретического и численного обоснования методов. В разделе 4 приведены результаты решения задачи рассеяния, полученные обоими методами, и их сравнение на примере жидкого тела, состоящего из объединения двух сфер одинакового радиуса (см. рис. 1).

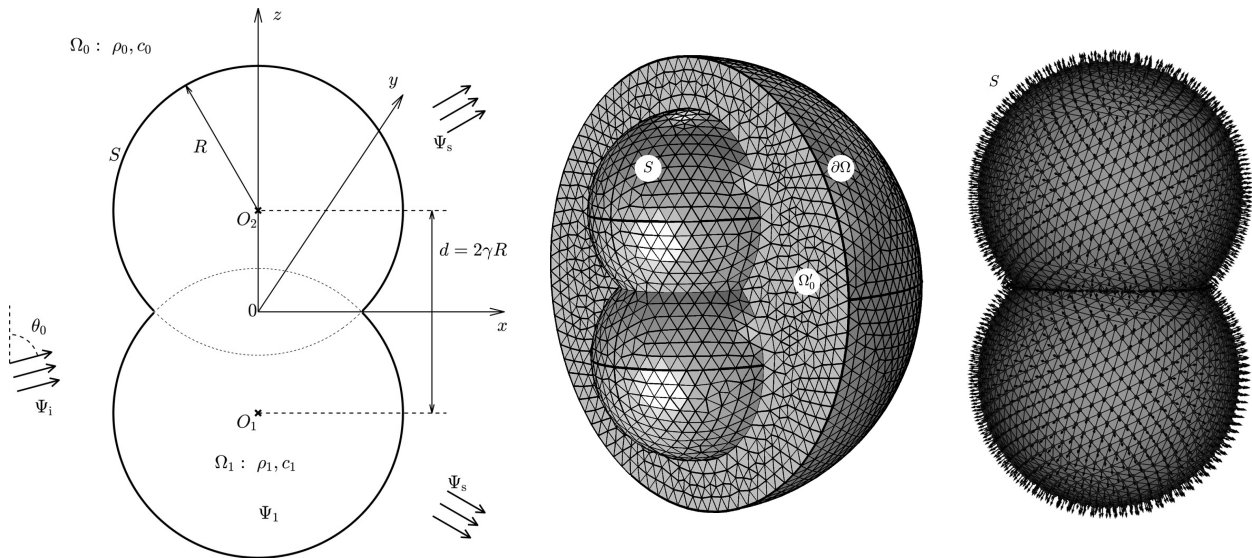


Рис. 1: Пример геометрии из объединения двух сфер. Слева математическая сцена, посередине ее аппроксимация для МКЭ, а справа — для МГЭ

1. Основные сведения о задаче

Обозначения. Пусть в неограниченной области идеальной жидкости $\Omega_0 = \mathbb{R}^3$ с плотностью ρ_0 и скоростью звука c_0 находится препятствие (или включение) — область Ω_1 другой идеальной жидкости с параметрами ρ_1 и c_1 .

Считается, что область Ω_1 имеет достаточно общую форму. Пусть $S = \partial\Omega_1$ — граница Ω_1 , $n = n_x$ — внешняя нормаль к S в точке $x \in S$. Поверхность S предполагается кусочно-гладкой класса C^2 в точках гладкости.

Пусть $x \cdot y$ — скалярное произведение векторов $x, y \in \mathbb{R}^3$, $|x| = (x \cdot x)^{1/2}$, $\hat{x} = x/|x|$, $\partial_x = \partial/\partial x$, $\partial_{x,x'}^2 = \partial_x \partial_{x'}$.

Предполагается, что в области Ω_0 распространяется плоская (падающая или первичная) гармоническая звуковая волна с потенциалом скорости Ψ_i . Волну Ψ_i будем характеризовать единичным направлением d и волновым числом $k_0 = \omega/c_0$, где ω — круговая частота волны.

В результате рассеяния волны Ψ_i препятствием Ω_1 образуются два вторичных звуковых поля — рассеянная волна в Ω_0 и поле звуковых колебаний в Ω_1 (см. [11]). Потенциал скорости рассеянной волны будем обозначать Ψ_s и пусть $\Psi_0 = \Psi_i + \Psi_s$ — суммарный потенциал в Ω_0 . Потенциал скорости звуковых колебаний в препятствии Ω_1 обозначим Ψ_1 .

Основная задача. Найти потенциал рассеянной волны Ψ_s .

Акустические уравнения. Для решения данной проблемы представим потенциал скорости в падающей плоской звуковой волне в виде

$$\Psi_i = \exp[i(k_0 d \cdot x - \omega t)], \quad (1)$$

где t — время. Без ограничения общности амплитуда падающей волны полагается равной единице.

В связи с вынужденным характером колебательных процессов и тем, что рассматривается установившийся режим колебаний, все величины, изменяющиеся со временем, будут зависеть от t аналогично функции Ψ_i . Поэтому любую функцию $\Phi(x, t)$ можно представить в виде $\Phi(x)e^{-i\omega t}$. В дальнейшем множитель $e^{-i\omega t}$ будем опускать.

Потенциалы скоростей для рассеянного и возбужденного внутри объема Ω_1 полей звуковых колебаний удовлетворяют уравнениям Гельмгольца [12]

$$\Delta \Psi_s + k_0^2 \Psi_s = 0, \quad x \in \Omega_0, \quad (2)$$

$$\Delta \Psi_1 + k_1^2 \Psi_1 = 0, \quad x \in \Omega_1, \quad (3)$$

где $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ — оператор Лапласа, $k_1 = \omega/c_1$ — волновое число для Ω_1 .

Акустическое давление и скорость частиц акустической среды в Ω_0 и Ω_1 определяются соответственно выражениями

$$p_0 = i\rho_0\omega\Psi_0, \quad u_0 = \nabla\Psi_0, \quad (4)$$

$$p_1 = i\rho_1\omega\Psi_1, \quad u_1 = \nabla\Psi_1. \quad (5)$$

На поверхности S должны выполняться условия равенства нормальных скоростей и акустических давлений в средах Ω_0 и Ω_1 :

$$u_{1n} = u_{0n}, \quad p_1 = p_0, \quad x \in S. \quad (6)$$

где величины слева записаны для Ω_1 , а справа — для Ω_0 , $u_{jn} = u_j \cdot n$, $j = 0, 1$.

Кроме того, потенциал скорости рассеянной волны должен удовлетворять условиям излучения на бесконечности [11]

$$\Psi_s = O(|x|^{-1}), \quad \partial_{|x|}\Psi_s - ik_0\Psi_s = O(|x|^{-2}), \quad |x| \rightarrow \infty, \quad (7)$$

а потенциал скорости в препятствии должен быть ограничен:

$$\Psi_1 = O(1), \quad x \in \Omega_1. \quad (8)$$

Таким образом, для нахождения Ψ_s нужно решить уравнения (2), (3) с учетом (1), (4), (5) и условий (6), (7), (8).

Случай шара. При тестировании методов применяется известное аналитическое решение задачи рассеяния для сферической формы Ω_1 радиуса R с центром в начале координат. Данное решение можно найти в работе [13]. Приведем его.

Решаем уравнение (2) методом разделения переменных в сферической системе координат $x = r(\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \theta)$, $\hat{x} = \hat{x}(\varphi, \theta)$ с учетом условий излучения на бесконечности (7). Тогда потенциал скорости рассеянной волны представляется в виде сферического разложения

$$\Psi_s = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_{lm} h_l(k_0 r) Y_{lm}(\hat{x}), \quad (9)$$

где h_l — сферические функции Ханкеля первого рода, $Y_{lm}(\varphi, \theta) = P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi}$ — ненормированные сферические гармоники, P_l^m — присоединенные функции Лежандра, $P_l^0 = P_l$ — многочлены Лежандра, A_{lm} — неизвестные коэффициенты потенциала Ψ_s . Соответственно, в силу (8) решение уравнения (3) имеет вид

$$\Psi_1 = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l B_{lm} j_l(k_1 r) Y_{lm}(\hat{x}), \quad (10)$$

где j_l — сферические функции Бесселя.

Разложим по сферическим гармоникам также падающую волну (1). Пусть направляющий вектор d имеет сферические координаты $(\varphi, \theta) = (0, \theta_0)$. Тогда согласно [11]

$$\Psi_i = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \gamma_{lm} j_l(k_0 r) Y_{lm}(\hat{x}), \quad \gamma_{lm} = \frac{i^l (2l+1)(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(\cos \theta_0). \quad (11)$$

Далее штрих для функций обозначает дифференцирование по аргументу. Для выражений, входящих в граничные условия (6), имеем следующие разложения:

$$\begin{aligned} u_{0r} &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l k_0 (\gamma_{lm} j'_l(k_0 r) + A_{lm} h'_l(k_0 r)) Y_{lm}(\hat{x}), \\ p_0 &= i \rho_0 \omega \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l (\gamma_{lm} j_l(k_0 r) + A_{lm} h_l(k_0 r)) Y_{lm}(\hat{x}), \\ u_{1r} &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l k_1 B_{lm} j'_l(k_1 r) Y_{lm}(\hat{x}), \\ p_1 &= i \rho_1 \omega \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l B_{lm} j_l(k_1 r) Y_{lm}(\hat{x}). \end{aligned}$$

Подставляя данные разложения в равенства (6), учитывая, что $|x| = R$ на S , из ортогональности сферических гармоник получаем систему линейных уравнений

$$\begin{aligned} k_1 B_{lm} j'_l(k_1 R) &= k_0 (\gamma_{lm} j'_l(k_0 R) + A_{lm} h'_l(k_0 R)), \\ \rho_1 B_{lm} j_l(k_1 R) &= \rho_0 (\gamma_{lm} j_l(k_0 R) + A_{lm} h_l(k_0 R)). \end{aligned}$$

Решая эту систему приходим к следующему утверждению.

Предложение 1 ([13]). Для случая жидкого шара Ω_1 радиуса R с центром в нуле имеем следующие коэффициенты в рядах (9), (10):

$$\begin{aligned} A_{lm} &= \gamma_{lm} \frac{k_0 \rho_1 j'_l(k_0 R) j_l(k_1 R) - k_1 \rho_0 j_l(k_0 R) j'_l(k_1 R)}{k_1 \rho_0 h_l(k_0 R) j'_l(k_1 R) - k_0 \rho_1 h'_l(k_0 R) j_l(k_1 R)}, \\ B_{lm} &= \gamma_{lm} \frac{h_l(k_0 R) j'_l(k_0 R) - h'_l(k_0 R) j_l(k_0 R)}{k_1 \rho_0 h_l(k_0 R) j'_l(k_1 R) - k_0 \rho_1 h'_l(k_0 R) j_l(k_1 R)}. \end{aligned}$$

2. Комбинированный метод конечных элементов

Сформулированную в разделе 1 задачу рассеяния звука можно решить численно-аналитическим методом с использованием метода конечных элементов [16] на основе подхода, предложенного в работах [14, 15].

В соответствии с этим подходом в жидкости, прилегающей к препятствию Ω_1 , выделяется сферическая поверхность S_0 радиуса R_0 такого, чтобы внутри этой поверхности оказалось Ω_1 и некоторая область содержащей среды Ω'_0 , такая что $S_0 = \partial\Omega'_0$ (см. рис. 1 посередине). При этом минимальное расстояние от S до S_0 должно иметь порядок характерного размера Ω_1 . Тогда область $\Omega = \Omega'_0 \cup \Omega_1$ можно рассматривать как некоторое неоднородное сферическое препятствие для падающей волны Ψ_i .

Решение уравнений движения во всей области такого неоднородного препятствия будем выполнять с помощью МКЭ. Для этого к уравнениям (2), (3) надо добавить уравнение, описывающие колебания жидкости в Ω'_0 . Введем новую неизвестную переменную Ψ — потенциал скорости в Ω'_0 . Поскольку в Ω'_0 находится та же жидкость, что и во всей области Ω_0 , то потенциал Ψ должен удовлетворять волновому уравнению вида (2):

$$\Delta\Psi + k_0^2\Psi = 0, \quad x \in \Omega'_0. \quad (12)$$

При этом акустическое давление и скорость частиц акустической среды в Ω'_0 будут определяться соотношениями

$$p = i\rho_0\omega\Psi, \quad u = \nabla\Psi.$$

Немного изменится вид граничных условий (6) на поверхности S . В них надо заменить u_{0n} и p_0 на $n \cdot \nabla\Psi$ и $i\rho_0\omega\Psi$ соответственно.

Далее будем использовать сферическую систему координат с началом в центре Ω . На сферической внешней поверхности S_0 области Ω надо ввести условия согласования параметров движения жидкости в Ω'_0 и во внешней среде Ω_0 :

$$\partial_r\Psi = \partial_r\Psi_0, \quad \Psi = \Psi_0, \quad r = R_0. \quad (13)$$

Здесь первое условие выражает требование равенства нормальных скоростей в частицах, расположенных по обе стороны S_0 , а второе — требование равенства давлений.

Разобьем все подобласти шара Ω на конечные элементы в форме тетраэдров. Иллюстрация этой процедуры представлена на рис. 1 посередине, где для наглядности показана только половина слоя Ω'_0 .

Неизвестные функции в Ω представляются в виде линейных комбинаций координатных функций узлов. Тогда для потенциалов Ψ , Ψ_1 можно записать

$$\Psi(x) \approx \sum_{k=1}^K \psi_k f_k(x), \quad x \in \Omega'_0, \quad (14)$$

$$\Psi_1(x) \approx \sum_{k=1}^K \psi_{1k} f_k(x), \quad x \in \Omega_1,$$

где ψ_k — узловые значения потенциала Ψ в области Ω'_0 , ψ_{1k} — узловые значения потенциала Ψ_1 в области Ω_1 , f_k — координатные функции конечно-элементной модели, K — общее количество узлов. Для удобства считаем, что индексы $k = 1, 2, \dots, K$ соответствуют узлам всей сетки конечных элементов области Ω , причем индексы $1, 2, \dots, K_0$ при $K_0 < K$ нумеруют узлы, отвечающие поверхности S_0 . Полагаем $\psi_k \equiv 0$ и $\psi_{1k} \equiv 0$ для не относящихся к Ω'_0 и Ω_1 узлов соответственно.

Вне области Ω'_0 потенциал скорости Ψ_s рассеянной волны будем искать в виде разложения по сферическим гармоникам (9). Для потенциала скорости Ψ_i возьмем разложение (11).

Подставляя (9), (11), (14) во второе граничное условие (13) и используя ортогональность сферических гармоник, находим выражения коэффициентов A_{lm} через узловые значения ψ_k на поверхности $r = R_0$:

$$A_{lm} = -\gamma_{lm} \frac{j_l(k_0 r)}{h_l(k_0 r)} + \frac{1}{h_l(k_0 r) N_{lm}} \sum_{j=1}^{K_0} \psi_j \langle f_j, Y_{lm} \rangle, \quad (15)$$

где

$$\langle f_j, Y_{lm} \rangle = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f_j(r, \theta, \varphi) \overline{Y_{lm}(\theta, \varphi)} \sin \theta \, d\varphi \, d\theta, \quad N_{lm} = \langle Y_{lm}, Y_{lm} \rangle = \frac{4\pi(l+m)!}{(2l+1)(l-m)!}.$$

Теперь подставим выражение (15) для A_{lm} в первое граничное условие (13). В результате граничные условия (6) и первое из (13) будут содержать в качестве неизвестных только узловые значения функций Ψ и Ψ_1 из ограниченной области Ω .

Далее решаем краевую задачу для уравнений (3), (12) с указанными граничными условиями при помощи стандартной технологии МКЭ [16] для конечной области Ω . В результате решения находим узловые значения неизвестных функций ψ_k , $k = 1, 2, \dots, K$. Подставляя функции ψ_j , $j = 1, 2, \dots, K_0$, в (15), вычисляем коэффициенты A_{lm} потенциала скорости в рассеянном поле (9), что решает основную задачу.

3. Метод граничных элементов

Основные уравнения. Методу граничных элементов, в том числе в контексте акустических проблем, посвящено большое число работ, см., например, [17, 18, 19, 20, 21]. Воспользуемся данными источниками, цитируя только отдельные места.

Из результатов раздела 1 следует, что потенциал $\Psi_0 = \Psi_i + \Psi_s$ удовлетворяет внешней краевой задаче для уравнения Гельмгольца, а потенциал Ψ_1 — внутренней краевой задаче. Поэтому для $x \in \Omega_0$ имеем интегральные уравнения

$$C(x)\Psi_0(x) = \int_S [\partial_{n'} G_{k_0}(x', x)\Psi_0(x') - G_{k_0}(x', x)\partial_{n'}\Psi_0(x')] \, dx' + \Psi_i(x), \quad (16)$$

$$(C(x) - 1)\Psi_1(x) = \int_S [\partial_{n'} G_{k_1}(x', x)\Psi_1(x') - G_{k_1}(x', x)\partial_{n'}\Psi_1(x')] \, dx', \quad (17)$$

где $dx' = dS(x')$, $n' = n_{x'}$, $G_k(x, y) = (4\pi r)^{-1} e^{ikr}$, $r = |x - y|$, — функция Грина для уравнения Гельмгольца в $\mathbb{R}^3$, удовлетворяющая условию Зоммерфельда для уходящих волн (7), функция $C(x) = 0$ внутри Ω_1 , $C(x) = 1$ снаружи Ω_1 и $C(x)$ на поверхности $x \in S$ — положительный кусочно-постоянный геометрический коэффициент, зависящий от скачка нормали, в частности, $C(x) = 1/2$ в точках гладкости S .

При $x \in S$ уравнения (16), (17) переходят в граничные интегральные уравнения метода граничных элементов. Для нахождения неизвестных граничных значений потенциалов в них присоединяем граничные условия (6)

$$\partial_n \Psi_0(x) = \partial_n \Psi_1(x), \quad \rho_0 \Psi_0(x) = \rho_1 \Psi_1(x), \quad x \in S. \quad (18)$$

Как показано в работе [17], решение граничного уравнения (16) неединственно для волновых чисел k_0 , для которых $-k_0^2$ — собственное значение оператора Лапласа Δ во внутренней

задаче. Чтобы избежать этого, воспользуемся идеей Бертона и Миллера [17] и запишем комбинированное уравнение. Оно получается, если тождество (16) при $x \in S$ продифференцировать по нормали n_x , умножить результат на комплексный параметр α и прибавить его к исходному уравнению. Тогда с учетом кусочного постоянства $C(x)$ находим

$$C(x)\partial_n\Psi_0(x) = \int_S [\partial_{n',n}^2 G_{k_0}(x',x)\Psi_0(x') - \partial_n G_{k_0}(x',x)\partial_{n'}\Psi_0(x')] dx' + \partial_n\Psi_i(x)$$

и комбинированное уравнение Бертона–Миллера

$$C(x)T_\alpha(\Psi_0(x)) = \int_S [T_\alpha(\partial_{n'}G_{k_0}(x',x))\Psi_0(x') - T_\alpha(G_{k_0}(x',x))\partial_{n'}\Psi_0(x')] dx' + T_\alpha(\Psi_i(x)),$$

где оператор $T_\alpha(f) = f + \alpha\partial_n f$ берется по x . Обычно полагают $\alpha = i/k_0$, что обосновано модельным случаем шара [22]. К уравнению (17) метод Бертона–Миллера мы не применяем.

При вычислении поверхностных интегралов с функцией Грина и ее производными нужно учитывать их сингулярность. При $r \rightarrow 0$ имеем $G_k = O(r^{-1})$ и в точках гладкости поверхности $\partial_{n'}G_k = O(r^{-1})$, $\partial_n G_k = O(r^{-1})$, $\partial_{n,n'}^2 G_k = O(r^{-2})$. Поэтому в первых трех случаях интеграл будет слабо сингулярным, а в четвертом — гиперсингулярным. Слабо сингулярный интеграл сходится в смысле Коши, а для гиперсингулярного интеграла нужно применить регуляризацию. Заметим, что регуляризация, если она доступна, также полезна в слабо сингулярном случае для увеличения точности численного интегрирования. Для интегралов с производными функции Грина в уравнениях выше регуляризация делается на основе следующих тождеств для статической функции Грина [23]:

$$\begin{aligned} \int_S \partial_{n'}G_0(x',x) dx' &= -C(x), \quad \int_S \partial_{n,n'}^2 G_0(x',x) dx' = 0, \\ \int_S \partial_{n,n'}^2 G_0(x',x)(x' - x) dx' &= \int_S \partial_n G_0(x',x)n' dx' - C(x)n. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\int_S \partial_{n'}G_k(x',x)\Psi(x') dx' = \int_S [\partial_{n'}G_k(x',x)\Psi(x') - \partial_{n'}G_0(x',x)\Psi(x)] dx' - C(x)\Psi(x), \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \int_S \partial_{n,n'}^2 G_k(x',x)\Psi(x') dx' &= \int_S [\partial_{n,n'}^2 G_k(x',x)\Psi(x') - \partial_{n,n'}^2 G_0(x',x)L_\Psi(x',x)] dx' \\ &\quad + \int_S \partial_n G_0(x',x)\nabla_S\Psi(x) \cdot n' dx', \quad (20) \end{aligned}$$

$$L_\Psi(x',x) = \Psi(x) + \nabla_S\Psi(x) \cdot (x' - x)_n,$$

где $(x)_n = x - (x \cdot n)n$ — проекция вектора на касательную плоскость, $\nabla_S\Psi = (\nabla\Psi)_n$ — поверхностный градиент. Теперь интегралы справа в (19), (20) не более чем слабо сингулярные. Для функции Грина G_k в общем случае формул, аналогичных (19) и (20), нет, поэтому вычисление интегралов с ней представляет определенную проблему (см., например, [24]).

Сведем задачу к системе из двух граничных интегральных уравнений, положив на основе граничных условий (18)

$$\Psi_1 = \rho_{01}\Psi_0, \quad \partial_n\Psi_1 = \partial_n\Psi_0, \quad \rho_{01} = \frac{\rho_0}{\rho_1}.$$

В итоге получаем следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Для неизвестных граничных значений Ψ_0 , $\partial_n \Psi_0$ при $x \in S$

$$C(x)T_\alpha(\Psi_0(x)) = \int_S [T_\alpha(\partial_{n'} G_{k_0}(x', x))\Psi_0(x') - T_\alpha(G_{k_0}(x', x))\partial_{n'} \Psi_0(x')] dx' + T_\alpha(\Psi_i(x)), \quad (21)$$

$$(C(x) - 1)\rho_{01}\Psi_0(x) = \int_S [\partial_{n'} G_{k_1}(x', x)\rho_{01}\Psi_0(x') - G_{k_1}(x', x)\partial_{n'} \Psi_0(x')] dx', \quad (22)$$

где для сингулярных интегралов с производными функции Грина применяется регуляризация на основе тождеств (19), (20).

По поводу доказательства гладкости (как минимум $C^{1,\beta}$) и единственности решения задачи (21), (22) см. [25].

Потенциал рассеянной волны во внешности Ω_1 вычисляется на основе (16):

$$\Psi_s(x) = \int_S [\partial_{n'} G_{k_0}(x', x)\Psi_0(x') - G_{k_0}(x', x)\partial_{n'} \Psi_0(x')] dx', \quad x \in \Omega_0 \setminus (\Omega_1 \cup S). \quad (23)$$

Здесь в дальней зоне интегралы регулярные.

Решение задачи (21), (22) для шара. Найдем аналитическое решение задачи рассеяния на основе предложения 2 для шара, чтобы сравнить его с решением из предложения 1 и использовать в тестировании МГЭ.

Пусть для удобства Ω_1 — единичный шар с центром в нуле. Тогда S — единичная сфера с центром в нуле и $C(x) = 1/2$ на ней. Напомним, что d — направляющий вектор, $|d| = 1$. Далее положим $r = |x|$. Запишем сферическое разложение падающего потенциала Ψ_i в эквивалентном (11) виде

$$\Psi_i(x) = e^{ik_0 d \cdot x} = \sum_{l=0}^{\infty} \gamma_l j_l(k_0 r) P_l(d \cdot \hat{x}), \quad \gamma_l = (2l+1)i^l.$$

Тогда решение задачи (21), (22) ищем в виде разложений

$$\Psi_0 = \sum_{l=0}^{\infty} U_l P_l(d \cdot \hat{x}), \quad \partial_n \Psi_0 = \sum_{l=0}^{\infty} V_l P_l(d \cdot \hat{x}),$$

где

$$U_l = \gamma_l j_l(k_0) + A_l h_l(k_0), \quad \Psi_s = \sum_{l=0}^{\infty} A_l h_l(k_0) P_l(d \cdot \hat{x}).$$

Наша цель — найти коэффициенты A_l потенциала Ψ_s .

Воспользуемся следующим сферическим разложением Джексона для функции Грина [26]:

$$G_k(x', x) = ik \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{4\pi} j_l(kr_<) h_l(kr_>) P_l(\hat{x}' \cdot \hat{x}),$$

где $r_< = \min(r, r')$, $r_> = \max(r, r')$, $r' = |x'|$.

Производные по нормали функции Грина на сфере берем в смысле главного значения (как среднее при $r \rightarrow 1$ изнутри $r < r' < 1$ и снаружи $1 < r' < r$). Тогда

$$\partial_{n'} G_k(x', x) = \partial_n G_k(x', x) = \frac{ik^2}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{4\pi} [j_l(k)h'_l(k) + j'_l(k)h_l(k)] P_l(\hat{x}' \cdot \hat{x})$$

$$\partial_{n,n'}^2 G_k(x', x) = ik^3 \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{4\pi} j'_l(k)h'_l(k) P_l(\hat{x}' \cdot \hat{x})$$

Здесь и далее ряды считаем формальными, чтобы не испытывать проблем со сходимостью. При выводе аналитического решения можно не использовать регуляризацию, так как она основана на добавлении и вычитании одинаковых, но по-разному вычисляемых слагаемых.

Учтем соотношение ортогональности для многочленов Лежандра

$$\frac{2l+1}{4\pi} \int_{|x'|=1} P_l(d \cdot x') P_{l'}(x \cdot x') dx' = P_l(d \cdot x) \delta_{ll'}, \quad |x| = 1.$$

Тогда, опуская несложные выкладки, для (21), (22) получаем следующую систему уравнений для нахождения коэффициентов U_l , V_l :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (U_l + \alpha V_l) &= \left(\frac{ik_0^2}{2} [j_l(k_0)h'_l(k_0) + j'_l(k_0)h_l(k_0)] + \alpha ik_0^3 j'_l(k_0)h'_l(k_0) \right) U_l \\ &\quad - \left(ik_0 j_l(k_0)h_l(k_0) + \alpha \frac{ik_0^2}{2} [j_l(k_0)h'_l(k_0) + j'_l(k_0)h_l(k_0)] \right) V_l + \gamma_l (j_l(k_0) + \alpha k_0 j'_l(k_0)), \\ -\frac{1}{2} \rho_{01} U_l &= \frac{ik_1^2}{2} [j_l(k_1)h'_l(k_1) + j'_l(k_1)h_l(k_1)] \rho_{01} U_l - ik_1 j_l(k_1)h_l(k_1) V_l. \end{aligned}$$

Соберем слагаемые при одинаковых коэффициентах и упростим, воспользовавшись вронскианом для функций Бесселя

$$j_l(k)h'_l(k) - j'_l(k)h_l(k) = \frac{i}{k^2}. \quad (24)$$

Имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} - \frac{ik_0^2}{2} [j_l(k_0)h'_l(k_0) + j'_l(k_0)h_l(k_0)] - \alpha ik_0^3 j'_l(k_0)h'_l(k_0) \\ = -ik_0^2 j_l(k_0)h'_l(k_0) - \alpha ik_0^3 j'_l(k_0)h'_l(k_0) = -ik_0^2 h'_l(k_0)(j_l(k_0) + \alpha k_0 j'_l(k_0)), \\ \alpha \left(\frac{1}{2} + \frac{ik_0^2}{2} [j_l(k_0)h'_l(k_0) + j'_l(k_0)h_l(k_0)] \right) + ik_0 j_l(k_0)h_l(k_0) \\ = \alpha ik_0^2 j'_l(k_0)h_l(k_0) + ik_0 j_l(k_0)h_l(k_0) = ik_0 h_l(k_0)(j_l(k_0) + \alpha k_0 j'_l(k_0)), \\ \frac{1}{2} + \frac{ik_1^2}{2} [j_l(k_1)h'_l(k_1) + j'_l(k_1)h_l(k_1)] = ik_1^2 j'_l(k_1)h_l(k_1). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} (j_l(k_0) + \alpha k_0 j'_l(k_0))[-ik_0^2 h'_l(k_0)U_l + ik_0 h_l(k_0)V_l] &= (j_l(k_0) + \alpha k_0 j'_l(k_0))\gamma_l, \\ ik_1 h_l(k_1)[-k_1 j'_l(k_1)\rho_{01}U_l + j_l(k_1)V_l] &= 0. \end{aligned}$$

Суть метода Бертона–Миллера для уравнения (16) в данном случае состоит в том, что при $\text{Im } \alpha \neq 0$ множитель $j_l(k_0) + \alpha k_0 j'_l(k_0) \neq 0$. Причем выбор $\alpha = i/k_0$ можно считать оптимальным [22]. Если взять $\alpha = 0$, что отвечает граничному уравнению в стандартной постановке, то при $j_l(k_0) = 0$ (тогда $-k_0^2$ собственное значение Δ) получим неоднозначность. Кроме того, $h_l(k_1) \neq 0$, что иллюстрирует, почему метод Бертона–Миллера не применялся к уравнению (17). В итоге после сокращений получаем

$$\begin{aligned} -ik_0^2 h'_l(k_0)U_l + ik_0 h_l(k_0)V_l &= \gamma_l, \\ -k_1 j'_l(k_1)\rho_0 U_l + j_l(k_1)\rho_1 V_l &= 0. \end{aligned}$$

Подставим сюда $U_l = \gamma_l j_l(k_0) + A_l h_l(k_0)$. После несложных вычислений с учетом вронскиана (24) находим

$$\begin{aligned} -k_0 h'_l(k_0) h_l(k_0) A_l + h_l(k_0) V_l &= \gamma_l k_0 j'_l(k_0) h_l(k_0), \\ -k_1 j'_l(k_1) h_l(k_0) \rho_0 A_l + j_l(k_1) \rho_1 V_l &= \gamma_l k_1 j'_l(k_1) j_l(k_0) \rho_0 \end{aligned}$$

и коэффициенты

$$A_l = -\gamma_l \frac{k_0 j'_l(k_0) j_l(k_1) \rho_1 - k_1 j'_l(k_1) j_l(k_0) \rho_0}{k_0 h'_l(k_0) j_l(k_1) \rho_1 - k_1 j'_l(k_1) h_l(k_0) \rho_0},$$

что согласуется с предложением 1 для $R = 1$ и направления $d(0, \theta_0)$, если учесть формулу сложения для сферических гармоник.

Численный метод решения задачи (21), (22). Мы отталкиваемся от случая, когда поверхность S аппроксимирована равномерным треугольным мешем — полигональной сеткой, состоящей из вершин $\{x_i\}_{i=1}^N \subset \mathbb{R}^3$ с нормальными $\{n_i\}_{i=1}^N$ и треугольных граней приблизительно одинакового малого размера (см. рис. 1 справа). Функции на меше интерполируются кусочно-линейными функциями с точками интерполяции в вершинах меша. Для приближенного вычисления интегралов по поверхности применяется следующая (масс-)формула:

$$\int_S f(x) dx \approx \sum_{i=1}^N w_i f(x_i), \quad (25)$$

где w_i — площади ячеек Вороного S_i (граничных элементов) с центрами в вершинах x_i , на которые разбивается меш [27]. Так как интеграл от функции по треугольнику равен среднему от значений функции в вершинах треугольника, то для равномерного меша формула (25) имеет первый порядок точности.

В данной ситуации для решения задачи (21), (22) удобно использовать метод коллокаций [20]. Напомним, что

$$\begin{aligned} \Psi_i(x) &= e^{ik_0 d \cdot x}, \quad G_k(x', x) = (4\pi)^{-1} e^{k' r t}, \\ k' &= ik, \quad y = x' - x, \quad r = |y|, \quad t = r^{-1}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \partial_n \Psi_i &= ik_0 e^{ik_0 d \cdot x} d \cdot n, \quad \partial_{n'} r = ty \cdot n', \quad \partial_n r = -ty \cdot n, \\ \partial_{n'} G_k &= G_k(k' - t) \partial_{n'} r, \quad \partial_n G_k = G_k(k' - t) \partial_n r, \\ \partial_{n, n'}^2 G_k &= k'^2 G_k \partial_{n'} r \partial_n r - G_k(k' - t) t (n' \cdot n + 3 \partial_{n'} r \partial_n r). \end{aligned}$$

Здесь полагаем $t = 0$ для $r = 0$, так как слабо сингулярные интегралы с функцией Грина в окрестности особой точки стремятся к нулю при стягивании окрестности в точку. Однако для увеличения точности необходимо учесть приближенную формулу

$$I_i = \int_{S_i} G_k(x', x_i) dx_i \approx \sqrt{\frac{w_i}{4\pi}}$$

вместо $I_i = 0$. Эта формула выводится с учетом малости S_i путем сравнения I_i с интегралом по кругу площади w_i с центром в вершине x_i и лежащего в плоскости с нормалью n_i .

Сопоставим (x, n, x', n') с (x_i, n_i, x_j, n_j) и положим $f^{(i)} = f(x_i)$, $f^{(i, j)} = f(x_i, x_j)$. Тогда дискретная версия задачи (21), (22) с учетом регуляризации (19), (20) и формулы интегрирования (25) запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} 2C^{(i)} \Psi_0^{(i)} + C^{(i)} \alpha \partial_{n_i} \Psi_0^{(i)} &= \sum_{j=1}^N w_j [\partial_{n_j} G_{k_0}^{(j, i)} \Psi_0^{(j)} - \partial_{n_j} G_0^{(j, i)} \Psi_0^{(i)} - T_\alpha(G_{k_0}^{(j, i)}) \partial_{n_j} \Psi_0^{(j)}] + T_\alpha(\Psi_i^{(i)}) \\ &+ \alpha \sum_{j=1}^N w_j [\partial_{n_i, n_j}^2 G_{k_0}^{(j, i)} \Psi_0^{(j)} - \partial_{n_i, n_j}^2 G_0^{(j, i)} L_{\Psi_0}^{(j, i)} + \partial_{n_i} G_0^{(j, i)} \nabla_S \Psi_0^{(i)} \cdot n_j], \quad (26) \end{aligned}$$

$$(2C^{(i)} - 1)\rho_{01}\Psi_0^{(i)} = \sum_{j=1}^N w_j [\rho_{01}(\partial_{n_j} G_{k_1}^{(j,i)} \Psi_0^{(j)} - \partial_{n_j} G_0^{(j,i)} \Psi_0^{(i)}) - G_{k_1}^{(j,i)} \partial_{n_j} \Psi_0^{(j)}], \quad (27)$$

где

$$T_\alpha(G_{k_0}^{(j,i)}) = G_{k_0}^{(j,i)} + \alpha \partial_{n_i} G_{k_0}^{(j,i)}, \quad T_\alpha(\Psi_i^{(i)}) = \Psi_i^{(i)} + \alpha \partial_{n_i} \Psi_i^{(i)},$$

$$L_{\Psi_0}^{(j,i)} = \Psi_0^{(i)} + \nabla_S \Psi_0^{(i)} \cdot (x_j - x_i)_{n_i}.$$

Для оценки поверхностного градиента используется тот факт, что приближенно $L_{\Psi_0}^{(i',i)} \approx \Psi_0^{(i')}$, если вершина $x_{i'}$ близка к x_i . Отсюда получаем линейную систему

$$(x_{i'} - x_i)_{n_i} \cdot \nabla_S \Psi_0^{(i)} = \Psi_0^{(i')} - \Psi_0^{(i)}, \quad i' \in R_i.$$

где R_i — множество индексов соседних с x_i вершин. Система записывается в виде $Ug = f$, где $g = \nabla_S \Psi_0^{(i)}$ — неизвестный вектор. Она переопределенная, поэтому $g = U^+ f$, где U^+ — псевдообратная матрица. Эта матрица быстро рассчитывается в каждой вершине, так как у вершин равномерного меша обычно около 6 соседей.

Таким образом, приходим к следующему утверждению.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Неизвестные значения $\Psi_0^{(i)}$, $\partial_{n_i} \Psi_0^{(i)}$, $i = 1, \dots, N$, находятся из системы линейных уравнений размера $2N$, получаемой из уравнений (26), (27).*

Обоснование сходимости метода коллокаций можно провести по аналогии с [28]. Ключевую роль здесь играет единственность и липшицева $C^{1,\beta}$ -гладкость решения, а также оценки интегралов со слабо сингулярным ядром. Данные оценки схожи с оценками из книги [29], которые применялись для доказательства компактности интегральных операторов простого и двойного слоя.

Для приближенного вычисления потенциала рассеянной волны и, как следствие, решения основной задачи используем дискретный вариант (23)

$$\Psi_s(x) \approx \sum_{j=1}^N w_j [\partial_{n_j} G_{k_0}^{(j,i)} \Psi_0^{(j)} - G_{k_0}^{(j,i)} \partial_{n_j} \Psi_0^{(j)}],$$

где x лежит снаружи меша на отдалении.

Отметим, что для увеличения точности интегрирования и одновременного уменьшения размера системы линейных уравнений мы используем подробный меш, мелкие ячейки которого объединяются в более крупные области Вороного, которые выступают в роли граничных элементов. В качестве центров элементов, в которых вычисляются потенциалы, используются вершины упрощенного меша. Этот меш получается либо равномерным сэмплированием на основе диска Пуассона, либо адаптивным методом схлопывания ребер по квадрикам. Сами элементы строятся алгоритмом построения областей Вороного на графе по реберному геодезическому расстоянию.

4. Результаты и сравнение

С использованием подходов, изложенных в разделах 2 и 3, было проведено решение задачи, геометрия которой представлена на рис. 1.

Для проверки алгоритмов решения задачи рассеяния был проведен ряд численных экспериментов для составного тела Ω_1 в виде объединения двух шаров ($R = 1$, $\gamma = 0.7$) со следующими значениями материальных параметров сред: $\rho_0 = 1000$ кг/м³, $c_0 = 1485$ м/с. Частота падающей волны задавалась волновым размером $k_0 a = 5$, где a — радиус шара B_a ,

объем которого равен объему тела Ω_1 . Результаты МКЭ и МГЭ оказались практически идентичными.

На рис. 2 приведены диаграммы рассеяния в дальней зоне по амплитуде. Графики МКЭ и МГЭ сливаются, поэтому оставлен только график МКЭ. Сплошная линия отвечает препятствию Ω_1 , пунктирная линия — шару B_a .

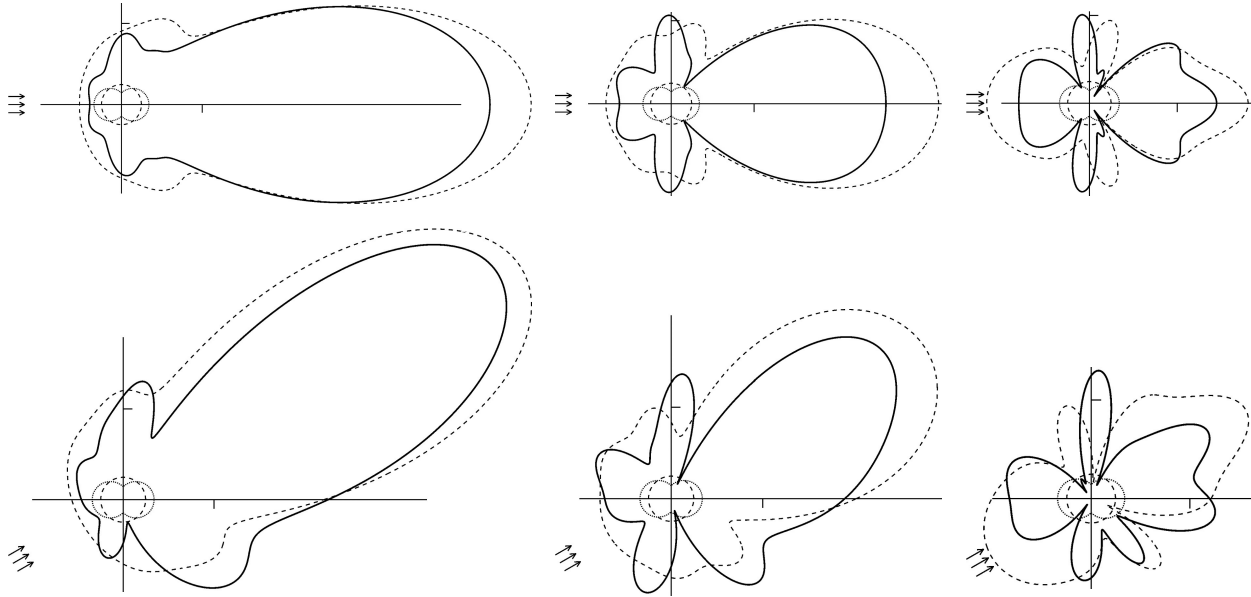


Рис. 2: Верхний ряд построен для $\theta_0 = 0^\circ$ и параметров $(\rho_1/\rho_0, c_1/c_0) = (1, 4), (3, 3), (4, 1)$ соответственно, нижний ряд отвечает $\theta_0 = 30^\circ$ и тем же параметрам

Для МКЭ использовалось 248942 узлов сетки, размер матрицы 248942×248942 , ее плотность 0.00387 (особенность МКЭ), время счета около 700 с. Для МГЭ использовалось 1000 граничных элементов (получаемых из 20000 вершин меша), размерность матрицы 2000×2000 , ее плотность 1.0 (особенность метода коллокаций для МГЭ), время счета около 10 с.

Заключение

В работе решена задача рассеяния плоской гармонической звуковой волны на препятствии в форме жидкого тела с неканонической формой и кусочно-гладкой поверхностью, аппроксимируемой полигональной сеткой. Рассмотрены и сравнены два подхода к численно-аналитическому решению: метод конечных элементов (МКЭ) и метод граничных элементов (МГЭ). Для МКЭ процесс расчета включает разбиение области, содержащей препятствие, на пространственные элементы с последующим вычислением сферического разложения потенциала. Для МГЭ задача сводится к системе интегральных уравнений, решаемой с учетом метода Бертон и Миллера, а также регуляризации сингулярных интегралов.

Проведенный анализ на примере тела в форме объединения двух одинаковых шаров показал, что метод граничных элементов обладает значительными преимуществами по вычислительным затратам при сохранении приемлемой точности расчета рассеянного звукового поля. При этом каждое из рассмотренных решений имеет свои особенности: преимуществом МКЭ является вариативность, позволяющая решать в области Ω'_0 широкий класс задач, включая пространственные эффекты. В свою очередь, МГЭ отличается высокой скоростью, но меньшей универсальностью, поскольку применим только для поверхностных эффектов.

Таким образом, выбор подхода определяется задачей: МГЭ предпочтителен для быстрого и точного расчета рассеянного поля, тогда как МКЭ позволяет решать более универсальные

задачи в сложных областях.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Frisk G.V., DeSanto J.A. Scattering by spherically symmetric inhomogeneities // J. Acoust. Soc. Amer. 1970. Vol. 47, № 1B. P. 172–180.
2. Überall H., George J., Farhan A.R., Mezzorani G., Nagl A., Sage K.A., Murphy J.D. Dynamics of acoustic resonance scattering from spherical targets: Application to gas bubbles in fluids // J. Acoust. Soc. Amer. 1979. Vol. 66. P. 1161–1172.
3. Буров В.А., Румянцева О.Д. Единственность и устойчивость решения обратной задачи акустического рассеяния // Акуст. журн. 2003. Том. 49. № 5. С. 590–603.
4. Martin P.A. Acoustic scattering by inhomogeneous obstacles // SIAM J. Appl. Math. 2003. Vol. 64, № 1. P. 297–308.
5. Буров В.А., Попов А.Ю., Сергеев С.Н., Шуруп А.С. Акустическая томография океана при использовании нестандартного представления рефракционных неоднородностей // Акуст. журн. 2005. Том. 51. № 5. С. 602–613.
6. Алексеенко Н.В., Буров В.А., Румянцева О.Д. Решение трехмерной обратной задачи акустического рассеяния на основе алгоритма Новикова-Хенкина // Акуст. журн. 2005. Том. 51. № 4. С. 437–446.
7. Hasheminejad S.M., Sanaei R. Ultrasonic scattering by a fluid cylinder of elliptic cross section, including viscous effects // IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control. 2008. Vol. 55, № 2. P. 391–404.
8. Буров В.А., Шмелев А.А. Численное и физическое моделирование процесса томографии на основе акустических нелинейных эффектов третьего порядка // Акуст. журн. 2009. Том. 55. № 4–5. С. 466–480.
9. Duck F.A., Baker A.C., Starritt H.C. (ed.) Ultrasound in medicine. Boca Raton: CRC Press, 2020.
10. Li P., Zhai J., Zhao Y. Stability for the acoustic inverse source problem in inhomogeneous media // SIAM J. Appl. Math. 2020. Vol. 80, № 6. P. 2547–2559.
11. Skudrzyk E. The foundations of acoustics basic mathematics and basic acoustics. New York, Wien: Springer-Verlag, 1971.
12. Исакович М.А. Общая акустика. М.: Наука, 1973.
13. Anderson V.C. Sound scattering from a fluid sphere // J. Acoust. Soc. Amer. 1950. Vol. 22, № 4. P. 426–431.
14. Иванов В.И., Скобельцын С.А. Моделирование решений задач акустики с использованием МКЭ // Известия ТулГУ. Естественные науки. 2008. Вып. 2. С. 132–145.
15. Скобельцын С.А. Некоторые обратные задачи дифракции звуковых волн на неоднородных анизотропных упругих телах // Дисс. ... докт. физ.-мат. наук. Тула, ТулГУ, 2020.
16. Ihlenburg F. Finite element analysis of acoustic scattering. New York: Springer, 2013.

17. Burton A.J., Miller G.F. The application of integral equation methods to the numerical solution of some exterior boundary-value problems // *Proc. R. Soc. Lond. A. Math. Phys. Sci.* 1971. Vol. 323, № 1553. P. 201–210.
18. Бреббия К. Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов / Пер. с англ. М.: Мир, 1987.
19. Chen K., Cheng J., Harris P.J. A new study of the Burton and Miller method for the solution of a 3D Helmholtz problem // *IMA J. Appl. Math.* 2009. Vol. 74, № 2. P. 163–177.
20. Chen G., Zhou J. Boundary element methods with applications to nonlinear problems / 2nd ed. Springer: Dordrecht, 2010.
21. Simpson R.N., Scott M.A., Taus M., Thomas D.C., Lian H. Acoustic isogeometric boundary element analysis // *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 2014. Vol. 269. P. 265–290.
22. Amini S. On the choice of the coupling parameter in boundary integral formulations of the exterior acoustic problem // *Appl. Anal.* 1990. Vol. 35. P. 75–92.
23. Liu Y.J., Rudolph T.J. Some identities for fundamental-solutions and their applications to weakly-singular boundary element formulations // *Eng. Anal. Bound. Elem.* 1991. Vol. 8, № 6. P. 301–311.
24. Wilton D.R., Rao S.M., Glisson A.W., Schaubert D.H., Al-Bundak O.M., Butler C.M. Potential integrals for uniform and linear source distributions on polygonal and polyhedral domains // *IEEE Trans. Antennas Propagat.* 1984. Vol. 32, no. 3. P. 276–281.
25. Lin T.C. A proof for the Burton and Miller integral equation approach for the Helmholtz equation // *J. Math. Anal. Appl.* 1984. Vol. 103, № 2. P. 565–574.
26. Jackson J.D. Classical electrodynamics / 3rd ed. N.Y.: Wiley City, 1999.
27. Meyer M., Desbrun M., Schröder P., Barr A.H. Discrete differential-geometry operators for triangulated 2-manifolds // In: H.-C. Hege, K. Polthier (eds) *Visualization and Mathematics III. Mathematics and Visualization*. Berlin–Heidelberg: Springer, 2003.
28. Халилов Э.Г. Обоснование метода коллокации для интегрального уравнения смешанной краевой задачи для уравнения Гельмгольца // *ЖВМ и МФ*. 2016. Том. 56. № 7. С. 1340–1348.
29. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М.: Мир, 1987.

REFERENCES

1. Frisk, G.V. & DeSanto, J.A. 1970, “Scattering by spherically symmetric inhomogeneities”, *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 47, no. 1B, pp. 172–180.
2. Überall, H., George, J., Farhan, A.R., Mezzorani, G., Nagl, A., Sage, K.A. & Murphy, J.D. 1979, “Dynamics of acoustic resonance scattering from spherical targets: Application to gas bubbles in fluids”, *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 66, pp. 1161–1172.
3. Burov, V.A. & Rumyantseva, O.D. 2003, “Uniqueness and stability of the solution to an inverse acoustic scattering problem”, *Acoust. Phys.*, vol. 49, no. 5, pp. 496–507.

4. Martin, P.A. 2003, “Acoustic scattering by inhomogeneous obstacles”, *SIAM J. Appl. Math.*, vol. 64, no. 1, pp. 297–308.
5. Burov, V.A., Popov, A.Y., Sergeev, S.N. & Shurup, A.S. 2005, “Ocean acoustic tomography with a nonstandard representation of refractive inhomogeneities”, *Acoust. Phys.*, vol. 51, no. 5, pp. 513–523.
6. Alekseenko, N.V., Burov, V.A. & Rumyantseva, O.D. 2005, “Solution of the three-dimensional inverse acoustic scattering problem on the basis of the Novikov–Henkin algorithm”, *Acoust. Phys.*, vol. 51, no. 4, pp. 367–375.
7. Hasheminejad, S.M. & Sanaei, R. 2008, “Ultrasonic scattering by a fluid cylinder of elliptic cross section, including viscous effects”, *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control.*, vol. 55, no. 2, pp. 391–404.
8. Burov, V.A. & Shmelev, A.A. 2009, “Numerical and physical modeling of the tomography process based on third-order nonlinear acoustic effects”, *Acoust. Phys.*, vol. 55, no. 4, 482–495.
9. Duck, F.A., Baker, A.C. & Starritt, H.C. (eds). 2020, “Ultrasound in medicine”, CRC Press, Boca Raton.
10. Li, P., Zhai, J. & Zhao, Y. 2020, “Stability for the acoustic inverse source problem in inhomogeneous media”, *SIAM J. Appl. Math.*, vol. 80, no. 6, pp. 2547–2559.
11. Skudrzyk, E. 1971, “The foundations of acoustics basic mathematics and basic acoustics”, Springer-Verlag, New York, Wien.
12. Isakovich, M.A. 1973, “General acoustics”, Nauka, Moscow. (In Russ.)
13. Anderson, V.C. 1950, “Sound scattering from a fluid sphere”, *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 22, no. 4, pp. 426–431.
14. Ivanov, V.I. & Skobel'tsyn, S.A. 2008, “Modeling solutions to acoustics using FEM”, *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no. 2, pp. 132–145. (In Russ.)
15. Skobel'tsyn, S.A. 2020, “Some inverse problems of diffraction of sound waves on inhomogeneous anisotropic elastic bodies”, Diss. . . . doc. physics and mathematics Sci., Tula State University, Tula. (In Russ.).
16. Ihlenburg, F. 2013, “Finite element analysis of acoustic scattering”, Springer, New York.
17. Burton, A.J. & Miller, G.F. 1971, “The application of integral equation methods to the numerical solution of some exterior boundary-value problems”, *Proc. R. Soc. Lond. A. Math. Phys. Sci.*, vol. 323, no. 1553, pp. 201–210.
18. Brebbia, C.A., Telles, J.C.F. & Wrobel, L.C. 1984, “Boundary element techniques, theory and applications in engineering”, Springer, Berlin.
19. Chen, K., Cheng, J. & Harris, P.J. 2009, “A new study of the Burton and Miller method for the solution of a 3D Helmholtz problem”, *IMA J. Appl. Math.*, vol. 74, no. 2, pp. 163–177.
20. Chen, G. & Zhou, J. 2010, “Boundary element methods with applications to nonlinear problems”, 2nd ed., Springer, Dordrecht.
21. Simpson, R.N., Scott, M.A., Taus M., Thomas D.C. & Lian H. 2014, “Acoustic isogeometric boundary element analysis”, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 269, pp. 265–290.

22. Amini, S. 1990, “On the choice of the coupling parameter in boundary integral formulations of the exterior acoustic problem”, *Appl. Anal.*, vol. 35, pp. 75–92.
23. Liu, Y.J. & Rudolphi, T.J. 1991, “Some identities for fundamental-solutions and their applications to weakly-singular boundary element formulations”, *Eng. Anal. Bound. Elem.*, vol. 8, no. 6, pp. 301–311.
24. Wilton, D.R., Rao, S.M., Glisson, A.W., Schaubert, D.H., Al-Bundak, O.M. & Butler, C.M. 1984, “Potential integrals for uniform and linear source distributions on polygonal and polyhedral domains”, *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 32, no. 3, pp. 276–281.
25. Lin, T.C. 1984, “A proof for the Burton and Miller integral equation approach for the Helmholtz equation”, *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 103, no. 2, pp. 565–574.
26. Jackson, J.D. 1999, “Classical electrodynamics”, 3rd ed., Wiley City, New York.
27. Meyer, M., Desbrun, M., Schröder, P. & Barr, A.H. 2003, “Discrete differential-geometry operators for triangulated 2-manifolds”, In: H.-C. Hege, K. Polthier (eds) *Visualization and Mathematics III. Mathematics and Visualization*, Springer, Berlin–Heidelberg.
28. Khalilov, E.H. 2016, “Justification of the collocation method for the integral equation for a mixed boundary value problem for the Helmholtz equation”, *Comput. Math. Math. Phys.*, vol. 56, no. 7, pp. 1310–1318.
29. Colton, D. & Kress, R. 2013, “Integral equation methods in scattering theory”, SIAM, Philadelphia.

Получено: 23.12.2024

Принято в печать: 10.03.2025

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 26. Выпуск 1.

УДК 539.3

DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-1-181-189

Об определении вектора Умова – Пойнтинга при распространении акустических волн в гипопругой среде¹

М. Ю. Соколова, Д. В. Христич, Д. В. Праведников

Соколова Марина Юрьевна — доктор физико-математических наук, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: m.u.sokolova@gmail.com

Христич Дмитрий Викторович — доктор физико-математических наук, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: dmitrykhristich@rambler.ru

Праведников Даниил Вячеславович — аспирант, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: zumastral@mail.ru

Аннотация

Для гипопругих сред с начальными напряжениями распространение акустических волн рассматривается с точки зрения наложения малых возмущений на конечные деформации. Начальное состояние среды характеризуется однородными полями конечных деформаций и напряжений, распространение волны описывается малыми возмущениями поля перемещений. В статье получены линеаризованная в окрестности начального состояния формулировка теоремы об изменении кинетической энергии среды и, как ее следствие, формулировка акустической теоремы Пойнтинга для гипопругой среды. Выписано выражение для вектора Умова–Пойнтинга для гипопругой среды через обобщенный тензор истинных напряжений.

Для плоских монохроматических волн определено изменение тензора напряжений, связанное с прохождением волны в среде с начальными напряжениями, получено выражение для вектора Умова – Пойнтинга через второй тензор Кристоффеля и начальные напряжения, действующие в среде. Получено выражение для вектора лучевой скорости, учитывающее действующие в среде начальные напряжения. Показано, что при действии начальных напряжений вектор Умова – Пойнтинга отклоняется от вектора лучевой скорости. Этот результат не позволяет использовать вектор лучевой скорости для определения направления потоков энергии при распространении акустических волн в гипопругих средах с начальными напряжениями.

Ключевые слова: гипопругая среда, начальные напряжения, акустические волны, анизотропные материалы, «снос» энергии, акустическая теорема Пойнтинга, вектор Умова – Пойнтинга, вектор лучевой скорости.

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:

Соколова, М. Ю., Христич, Д. В., Праведников, Д. В. Об определении вектора Умова – Пойнтинга при распространении акустических волн в гипопругой среде // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 1, с. 181–189.

¹Работа выполнена при поддержке госзадания Минобрнауки РФ (шифр FEWG-2023-0002).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 26. No. 1.

UDC 539.3

DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-1-181-189

On the determination of the Umov – Poynting vector in the propagation of acoustic waves in a hypoelastic medium

M. Yu. Sokolova, D. V. Khristich, D. V. Pravednikov

Sokolova Marina Yurievna — doctor of physical and mathematical sciences, Tula State University (Tula).

e-mail: m.u.sokolova@gmail.com

Khristich Dmitrii Viktorovich — doctor of physical and mathematical sciences, Tula State University (Tula).

e-mail: dmitrykhristich@rambler.ru

Pravednikov Daniil Vyacheslavovich — postgraduate student, Tula State University (Tula).

e-mail: zumastral@mail.ru

Abstract

For hypoelastic media with initial stresses, the propagation of acoustic waves is considered from the point of view of superposition of small perturbations on finite strains. The initial state of the medium is characterized by homogeneous fields of finite strains and stresses, wave propagation is described by small perturbations of the displacement field. In the article, the formulation of the theorem on the change in the kinetic energy of the medium, linearized in the vicinity of the initial state, and, as a consequence, the formulation of the acoustic Poynting theorem for a hypoelastic medium are obtained. An expression for the Umov – Poynting vector for a hypoelastic medium is written in terms of a generalized true stress tensor.

For plane monochromatic waves, the change in the stress tensor associated with the passage of a wave in a medium with initial stresses is determined, and an expression for the Umov–Poynting vector is obtained through the second Christoffel tensor and the initial stresses acting in the medium. An expression for the radial velocity vector that takes into account the initial stresses acting in the medium is obtained. It is shown that under the action of initial stresses, the Umov – Poynting vector deviates from the radial velocity vector. This result does not allow to use the radial velocity vector to determine the direction of energy flows during the propagation of acoustic waves in hypoelastic media with initial stresses.

Keywords: hypoelastic medium, initial stresses, acoustic waves, anisotropic materials, energy “drift”, acoustic Poynting theorem, Umov – Poynting vector, radial velocity vector.

Bibliography: 16 titles.

For citation:

Sokolova, M. Yu., Khristich, D. V., Pravednikov, D. V. 2025, “On the determination of the Umov – Poynting vector in the propagation of acoustic waves in a hypoelastic medium”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 1, pp. 181–189.

Введение

Модели гипопругих материалов часто используются для анализа поведения различных сред, таких как композиты, полимеры, грунты, биологические ткани, особенно в тех случаях, когда они работают в области больших деформаций. Для определения свойств и структуры

таких материалов, проведения неразрушающего контроля в изделиях из них применяются методы акустоупругости, связанные с распространением звуковых волн.

Особенности распространения акустических волн в изотропных гипопругих материалах рассматривались в работах [1, 2, 3, 4, 5]. В работах [6, 7, 8, 9, 10] предложена приближенная теория распространения акустических волн в анизотропных гипопругих средах с начальными напряжениями. В работах [5, 6, 7] получены линеаризованные в окрестности начального состояния динамические уравнения распространения акустических волн, а в статьях [8, 9] получены динамические уравнения, записанные относительно поля скоростей, и представление для акустического тензора среды с начальными напряжениями. На основе этих уравнений на примере анизотропного материала с симметрией свойств, присущей кристаллам кубической сингонии, в работах [8, 9] проанализировано влияние начальных напряжений на фазовые скорости распространения волн, а также на ориентацию векторов поляризации, векторов лучевых скоростей и векторов рефракции (при отражении от жесткой стенки) относительно вектора волновой нормали. В работе [10] рассмотрено распространение акустических волн в трансверсально-изотропных средах и средах с симметрией свойств, присущей кристаллам гексагональной сингонии.

Известным является факт, что в волновых процессах не происходит перенос массы, они сопровождаются переносом энергии. В линейной теории распространения упругих волн полагают, что направление переноса энергии определяется лучевым вектором [11, 12, 13]. В случае изотропных материалов лучевой вектор совпадает с направлением распространения волны, а в анизотропных материалах происходит так называемый «снос» энергии. При этом оказывается, что направления лучевого вектора и вектора волновой нормали не совпадают. В связи с этим представляет интерес определение направления потоков энергии, переносимой волной, в средах с начальными напряжениями. В настоящей статье для плоских монохроматических волн, распространяющихся в гипопругой среде с начальными напряжениями, будут получены выражения для составляющих вектора Умова–Пойнтинга, характеризующего по величине и направлению перенос энергии.

1. Акустическая теорема Пойнтинга для гипопругой среды с начальными напряжениями

Будем считать, что среда, в которой распространяются акустические волны, является гипопругой. Определяющие соотношения для гипопругой среды устанавливают связь между объективной производной обобщенного тензора истинных напряжений $\Sigma = J\mathbf{S}$ и тензором деформации скорости $\mathbf{W}$:

$$\Sigma^\Delta = \mathbf{N} \cdot \mathbf{W}, \quad (1.1)$$

где $\mathbf{N}$ — тензор четвертого ранга, определяемый свойствами среды, $\mathbf{S}$ — тензор истинных напряжений Коши, $J = \det \Phi$ — определитель аффинора деформаций Φ , характеризующий относительное изменение объема: $J = \frac{dV}{dV_0}$, двумя точками обозначено двойное скалярное произведение.

В качестве объективной производной в (1.1) используем полярную производную [14]:

$$\Sigma^\Delta = \dot{\Sigma} + \Omega \cdot \Sigma - \Sigma \cdot \Omega, \quad \Omega = \mathbf{R}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{R}}, \quad (1.2)$$

где Ω — тензор спина, $\mathbf{R}$ — тензор поворота, входящий в полярное разложение аффинора деформаций.

Полярная производная Σ^Δ (1.2) определяет скорость изменения тензора Σ относительно полярного базиса, вращающегося со скоростью Ω относительно неподвижного базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Полная производная тензора Σ определяет скорость его изменения относительно неподвижного базиса.

Рассмотрим три конфигурации среды: отсчетную, соответствующую моменту времени $t = t_0$, начальную ($t = t_1$) и конечную ($t > t_1$) [15]. Считаем, что в отсчетной конфигурации материал находится в естественном состоянии, т.е. в нем отсутствуют напряжения и деформации. В результате движения среда переходит в начальное состояние, которое характеризуется полем перемещений $\mathbf{u}_1(\mathbf{x}_0, t_1)$ и аффинором деформаций $\Phi_1 = \mathbf{E} + \nabla_0 \mathbf{u}_1$, где $\nabla_0() = \mathbf{e}_i \frac{\partial ()}{\partial x_0^i}$ — набла-оператор отсчетного состояния, $\mathbf{E}$ — единичный тензор, $\mathbf{x}_0 = x_0^i \mathbf{e}_i$ — радиус-вектор точки в отсчетном состоянии.

Напряжения характеризуются тензором истинных напряжений Коши $\mathbf{S}_1$, поля деформаций и напряжений в начальном состоянии однородны. Положение частиц среды определяется вектором $\mathbf{x}_1(\mathbf{x}_0, t_1) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{u}_1(\mathbf{x}_0, t_1)$.

В момент времени $t = t_1$ возникает возмущение поля перемещений, определяемое вектором $\mathbf{u}_{12}$ и связанное с прохождением акустической волны. В конечной конфигурации поле перемещений определяется выражением

$$\mathbf{u}_2(\mathbf{x}_1, t) = \mathbf{u}_1(\mathbf{x}_0, t_1) + \mathbf{u}_{12}(\mathbf{x}_1, \tau), \quad (1.3)$$

где $\tau = t - t_1$, а поле напряжений характеризуется тензором

$$\mathbf{S}_2(\mathbf{x}_2, t) = \mathbf{S}_1(\mathbf{x}_1, t_1) + \mathbf{S}_{12}(\mathbf{x}_1, \tau), \quad (1.4)$$

где $\mathbf{S}_{12}(\mathbf{x}_1, \tau)$ — изменение поля напряжений, вызванное возмущением перемещений $\mathbf{u}_{12}(\mathbf{x}_1, \tau)$.

Напряжения (1.4) удовлетворяют уравнениям движения, Эйлерова форма которых имеет вид

$$\nabla_2 \cdot \mathbf{S}_2 = \rho_2 \ddot{\mathbf{u}}_2, \quad \nabla_2() = \mathbf{e}_i \frac{\partial ()}{\partial x_2^i}, \quad \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1 + \mathbf{u}_{12}. \quad (1.5)$$

При рассмотрении акустических волн принято считать, что перемещения $\mathbf{u}_{12}$ и их градиенты малы [15, 16]. В рамках этого предположения в работе [8] получены линеаризованные в окрестности начального состояния уравнения распространения малых возмущений поля перемещений в виде:

$$\nabla_1 \cdot (J_1 \mathbf{S}_{12}) = \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}_{12}. \quad (1.6)$$

Перейдем в уравнениях (1.6) к обобщенному тензору напряжений, который входит в определяющие соотношения (1.1). Обозначим изменение обобщенного тензора напряжений, вызванное возмущением перемещений $\mathbf{u}_{12}(\mathbf{x}_1, \tau)$, через

$$\Sigma_{12}(\mathbf{x}_1, \tau) = \Sigma_2(\mathbf{x}_2, t) - \Sigma_1(\mathbf{x}_1, t_1), \quad (1.7)$$

где $\Sigma_1 = J_1 \mathbf{S}_1$, $\Sigma_2 = J_2 \mathbf{S}_2$. В этом случае уравнения (1.6) приводятся к виду:

$$\nabla_1 \cdot \Sigma_{12} - \Sigma_1 \cdot \nabla_1 \nabla_1 \cdot \mathbf{u}_{12} = \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}_{12}. \quad (1.8)$$

В работе [8] также получена связь между возмущениями тензоров истинных и обобщенных напряжений, линеаризованная в окрестности начального состояния:

$$J_1 \mathbf{S}_{12} = \Sigma_{12} - (\nabla_1 \cdot \mathbf{u}_{12}) \Sigma_1. \quad (1.9)$$

Для определения энергии, переносимой волной, запишем для произвольного объема V среды теорему об изменении кинетической энергии [14] в виде

$$\frac{d}{dt} \int_V \frac{\rho v^2}{2} dV = \int_V \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dV + \int_{\Sigma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{v} d\Sigma - \int_V \mathbf{S} \cdot \cdot \mathbf{v} \nabla dV, \quad (1.10)$$

где $v^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$, $\mathbf{F}$ — плотность массовых сил, $\mathbf{n}$ — единичная внешняя нормаль к замкнутой поверхности Σ , ограничивающей объем V .

В соответствии с (1.10) скорость изменения кинетической энергии среды, заключенной в объеме V , равна мощности внешних массовых и поверхностных сил и мощности напряжений. Известно, что скорость изменения кинетической энергии может быть записана в виде $\frac{d}{dt} \int_V \frac{\rho v^2}{2} dV = \int_V \frac{\rho}{2} \frac{dv^2}{dt} dV$ [14]. В дальнейшем считаем, что внешние массовые силы отсутствуют ($\mathbf{F} = \mathbf{0}$). Запишем теорему (1.10) в окрестности начального состояния, учитывая малость градиентов перемещений $\mathbf{u}_{12}$ и представляя напряжения в виде (1.4). Получим

$$\int_{V_1} \frac{\rho_1}{2} \frac{dv^2}{dt} dV = - \int_{V_1} (\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_{12}) \cdot \mathbf{v} \nabla_1 dV + \int_{\Sigma_1} \mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_{12}) \cdot \mathbf{v} d\Sigma. \quad (1.11)$$

Применяя теорему Остроградского в правой части (1.11), получим

$$\begin{aligned} & - \int_{V_1} \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{v} \nabla_1 dV + \int_{\Sigma_1} \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{v} d\Sigma = \\ & = - \int_{V_1} \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{v} \nabla_1 dV + \int_{V_1} \nabla_1 \cdot (\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{v}) dV = \int_{V_1} \mathbf{v} \cdot (\nabla_1 \cdot \mathbf{S}_1) dV = 0 \end{aligned}$$

в силу однородности поля начальных напряжений. Тогда линеаризованная форма теоремы об изменении кинетической энергии в окрестности начального состояния имеет вид

$$\int_{V_1} \frac{\rho_1}{2} \frac{dv^2}{dt} dV + \int_{V_1} \mathbf{S}_{12} \cdot \mathbf{v} \nabla_1 dV = - \int_{\Sigma_1} \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{U} d\Sigma, \quad (1.12)$$

где $\mathbf{U} = -\mathbf{S}_{12} \cdot \mathbf{v}$ — вектор Умова – Пойнтинга — вектор, поток которого через поверхность Σ_1 равен скорости изменения кинетической энергии среды в объеме V_1 за вычетом мощности напряжений.

В линейной теории упругости вектор Умова – Пойнтинга используется для определения направления переноса энергии при распространении акустических волн и по величине равен механической (сумме кинетической и потенциальной) энергии, переносимой через единицу площади поверхности в единицу времени [11, 12].

Подставим в уравнения (1.12) представление для напряжений (1.9) и после преобразований получим

$$\int_{V_1} \rho_1 \left(\frac{1}{2} \frac{dv^2}{dt} + \frac{1}{\rho_0} \mathbf{S}_{12} \cdot \mathbf{v} \nabla_1 - \frac{1}{\rho_0} \mathbf{v} \cdot \mathbf{S}_1 \cdot \nabla_1 \nabla_1 \cdot \mathbf{u}_{12} \right) dV = - \int_{\Sigma_1} \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{U} d\Sigma. \quad (1.13)$$

В уравнении (1.13) напряжения $\mathbf{S}_{12}$ определяются в соответствии с соотношениями (1.1). Если напряжения $\mathbf{S}_{12}$ имеют потенциал, то второе слагаемое в интеграле по объему можно рассматривать как потенциальную энергию деформаций, возникающих при прохождении волны. Третье слагаемое можно трактовать как наведенную мощность массовых сил $\mathbf{S}_1 \cdot \nabla_1 \nabla_1 \cdot \mathbf{u}_{12}$, возникающую при действии начальных напряжений. Теорема об изменении кинетической энергии, записанная в форме (1.12) или (1.13), представляет собой обобщение акустической теоремы Пойнтинга [12] на случай распространения упругих волн в среде с начальными напряжениями.

В соответствии с определением вектор Умова – Пойнтинга задается выражением

$$\mathbf{U} = -J_1^{-1} \mathbf{v} \cdot (\mathbf{S}_{12} - (\nabla_1 \cdot \mathbf{u}_{12}) \mathbf{S}_1). \quad (1.14)$$

Выражение (1.14) показывает, что действие в среде начальных напряжений приводит к изменению вектора Умова – Пойнтинга как по величине, так и по направлению.

2. Определение потоков энергии при распространении монохроматических волн

Установим связь между вектором Умова – Пойнтинга и основными характеристиками монохроматических волн. Для этого умножим (1.12) на малый интервал времени Δt и обозначим через $\Delta \xi = \left(\frac{\rho_1}{2} \frac{dv^2}{dt} + \mathbf{S}_{12} \cdot \mathbf{v} \nabla_1 \right) \Delta t$ величину изменения кинетической энергии за вычетом работы напряжений в единице объема среды за малый промежуток времени. Если напряжения $\mathbf{S}_{12}$ имеют потенциал, то величина $\Delta \xi$ представляет собой изменение объемной плотности механической энергии. Тогда соотношения (1.12) могут быть записаны в виде

$$\int_{V_1} \Delta \xi dV = - \int_{\Sigma_1} \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{U} \Delta t d\Sigma. \quad (2.1)$$

В качестве V_1 выберем малый объем, ограниченный поверхностями фронта волны площадью $\Delta \Sigma_1$ в моменты времени t_1 и $t_1 + \Delta t$, и боковой поверхностью, нормаль к которой в каждой точке перпендикулярна вектору Умова – Пойнтинга. Нормаль к фронту волны $\mathbf{n}$ (волновой вектор) определяет направление распространения волны. Скорость распространения волны определяется фазовой скоростью c . За время Δt фронт волны смещается на величину $c \Delta t$. На площадке $\Delta \Sigma_1$ внешняя нормаль $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}$. Количество энергии, переносимой волной через площадку $\Delta \Sigma_1$ за время Δt ввиду малости рассматриваемого объема определяется выражением $\Delta \xi c \Delta t \Delta \Sigma_1 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{U} \Delta t \Delta \Sigma_1$ или $\Delta \xi c = \mathbf{n} \cdot \mathbf{U}$.

Известно, что фазовую скорость можно определить как произведение лучевой (групповой) скорости и вектора волновой нормали: $c = \mathbf{n} \cdot \mathbf{w}$, где $\mathbf{w} = \frac{d\omega}{dk}$ — лучевая скорость, ω — частота, $\mathbf{k} = k\mathbf{n}$ — волновой вектор, k — волновое число [11, 12, 13]. Тогда

$$c = \mathbf{n} \cdot \mathbf{w} = \frac{1}{\Delta \xi} \mathbf{n} \cdot \mathbf{U}, \quad (2.2)$$

что означает равенство проекций вектора лучевой скорости и вектора Умова – Пойнтинга, деленного на величину $\Delta \xi$, на направление вектора волновой нормали.

Для плоской монохроматической волны возмущение поля перемещений определяется функцией

$$\mathbf{u}_{12}(\mathbf{x}_1, \tau) = A \mathbf{p} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_1 - \omega \tau)}, \quad (2.3)$$

где A — амплитуда, $\mathbf{p}$ — вектор поляризации единичной длины ($\mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = 1$).

Определим вектор Умова – Пойнтинга в соответствии с выражением (1.14). В соответствии с определяющими соотношениями (1.1) и определением полярной производной (1.2) полная производная от обобщенного тензора истинных напряжений записывается в виде:

$$\dot{\Sigma} = \mathbf{N} \cdot \dot{\Sigma} - \Omega \cdot \Sigma + \Sigma \cdot \Omega, \quad (2.4)$$

тогда напряжения Σ_{12} можно определить, интегрируя (2.4) в предположении малости перемещений $\mathbf{u}_{12}$ и их градиентов [8]. В результате получаем

$$\Sigma_{12} = \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{12} - \Omega_{12} \cdot \Sigma_1 + \Sigma_1 \cdot \Omega_{12}, \quad (2.5)$$

где введены обозначения

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{12} = \frac{1}{2}(\nabla_1 \mathbf{u}_{12} + \mathbf{u}_{12} \nabla_1), \quad \Omega_{12} = \frac{1}{2}(\nabla_1 \mathbf{u}_{12} - \mathbf{u}_{12} \nabla_1).$$

После вычисления градиента перемещений (2.3) получим

$$\nabla_1 \mathbf{u}_{12} = iA\omega e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_1 - \omega \tau)} \mathbf{m} \mathbf{p}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{12} = iA\omega e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_1 - \omega \tau)} \frac{1}{2}(\mathbf{m} \mathbf{p} + \mathbf{p} \mathbf{m}), \quad \Omega_{12} = iA\omega e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_1 - \omega \tau)} \frac{1}{2}(\mathbf{m} \mathbf{p} - \mathbf{p} \mathbf{m}),$$

где $\mathbf{m} = \frac{\mathbf{n}}{c}$ — вектор рефракции [11]. Тогда напряжения (2.5) принимают вид

$$\Sigma_{12} = iA\omega e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_1 - \omega\tau)} \left[\mathbf{m} \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{p} - \frac{1}{2}(\mathbf{m}\mathbf{p} - \mathbf{p}\mathbf{m}) \cdot \Sigma_1 + \frac{1}{2}\Sigma_1 \cdot (\mathbf{m}\mathbf{p} - \mathbf{p}\mathbf{m}) \right]. \quad (2.6)$$

Вектор скорости частиц среды определяется по перемещениям (2.3) $\mathbf{v} = -iA\omega \mathbf{p} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_1 - \omega\tau)}$ и является комплексным вектором. Введем сопряженный комплексный вектор $\mathbf{v}^* = iA\omega \mathbf{p} e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_1 - \omega\tau)}$, так что скалярное произведение $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}^* = v^2$. Вектор $\mathbf{v}^*$ удобно использовать при записи акустической теоремы Пойнтинга в комплексной форме [12] и определении вектора Умова – Пойнтинга вместо вектора $\mathbf{v}$. Непосредственное вычисление вектора Умова – Пойнтинга по формуле (1.14) с учетом (2.6) в случае плоской монохроматической волны приводит к следующему представлению:

$$\mathbf{U} = J_1^{-1} A^2 \omega^2 \left[\mathbf{P} \cdot \mathbf{m} - \frac{3}{2}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{p}) \mathbf{p} \cdot \Sigma_1 + \frac{1}{2}(\mathbf{m} \cdot \Sigma_1 + \mathbf{m} \cdot \Sigma_1 \cdot \mathbf{p} \mathbf{p} - \mathbf{p} \cdot \Sigma_1 \cdot \mathbf{p} \mathbf{m}) \right], \quad (2.7)$$

где $\mathbf{P} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{p}$ — второй тензор Кристоффеля [11, 12, 13] для гипотупругого материала.

В линейной теории распространения упругих волн [11, 12, 13] поток энергии считают направленным вдоль вектора лучевой скорости $\mathbf{w}$. В работе [9] получено выражение для этого вектора для гипотупругой среды с начальными напряжениями:

$$\mathbf{w} = \mathbf{c} + (\mathbf{E} - \mathbf{nn}) \cdot \mathbf{s}, \quad \mathbf{s} = \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial \mathbf{n}} = \frac{1}{\rho_0} (\mathbf{P} \cdot \mathbf{m} - \mathbf{p} \cdot \Sigma_1 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{m})),$$

что после преобразований приводит к представлению вектора лучевой скорости в виде

$$\mathbf{w} = \mathbf{s} + \frac{c^2}{2\rho_0} \left(\mathbf{m} \cdot \Sigma_1 \cdot \mathbf{m} - \frac{1}{c^2} \mathbf{p} \cdot \Sigma_1 \cdot \mathbf{p} - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{m}) \mathbf{p} \cdot \Sigma_1 \cdot \mathbf{m} \right) \mathbf{m}. \quad (2.8)$$

Пусть начальное состояние среды совпадает с отсчетным, а начальные напряжения отсутствуют: $\Sigma_1 = \mathbf{0}$. В этом случае векторы (2.7), (2.8) имеют вид:

$$\mathbf{U}|_{\Sigma_1=0} = A^2 \omega^2 \mathbf{P} \cdot \mathbf{m}, \quad \mathbf{w}|_{\Sigma_1=0} = \mathbf{s}|_{\Sigma_1=0} = \frac{1}{\rho_0} \mathbf{P} \cdot \mathbf{m}.$$

Из полученных выражений следует, что при отсутствии начальных напряжений, как и в линейной теории распространения упругих волн, вектор Умова – Пойнтинга и вектор лучевой скорости коллинеарны. При действии в среде начальных напряжений векторы (2.7) и (2.8) оказываются неколлинеарны, однако, легко проверить, что равенство (2.2) остается справедливым: $\mathbf{n} \cdot \mathbf{U} = \rho_1 A^2 \omega^2 \mathbf{n} \cdot \mathbf{w} = c \rho_1 A^2 \omega^2$. Таким образом, при распространении монохроматических волн в гипотупругой среде с начальными напряжениями поток энергии, переносимой волной, определяется вектором Умова – Пойнтинга, но не вектором групповой скорости.

Заключение

На основании линеаризованной в окрестности начального состояния теоремы об изменении кинетической энергии получено выражение для вектора Умова – Пойнтинга (1.14), записанное через обобщенный тензор истинных напряжений. Для плоской монохроматической волны показано, что этот вектор зависит от начальных напряжений, действующих в среде. Сравнение выражений (2.7) и (2.8) показывает, что действие начальных напряжений приводит к тому, что векторы лучевой скорости и Умова – Пойнтинга перестают быть коллинеарными. В изотропной среде, когда вектор $\mathbf{P} \cdot \mathbf{m}$ направлен вдоль вектора волновой нормали, оказывается, что наличие начальных напряжений приводит к «сносу» энергетических потоков

так же, как и в анизотропных материалах. Таким образом, изотропные среды приобретают анизотропию акустических свойств. Полученный результат является особенно важным для определения энергетических коэффициентов отражения и преломления акустических волн на границе раздела анизотропных и изотропных сред.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rushchitsky J. J. Nonlinear plane waves in hypoelastic materials // Nonlinear elastic waves in materials. Foundations of Engineering Mechanics. Springer, Cham, 2014.
2. Rushchitsky J. J. On the types and number of plane waves in hypoelastic materials // International Applied Mechanics. 2005. V. 41. No. 11. P. 1288-1298.
3. Demidov V. N. Acoustic properties of isotropic hypoelastic materials with residual technological stresses // Key Engineering Materials. 2016. V. 712. P. 384-389.
4. Демидов В. Н. О расщеплении волн сдвига в изотропных гипопругих материалах // Физическая мезомеханика. 2000. Т. 3. № 2. С. 15-36.
5. Соколова М. Ю., Христич Д. В. Акустические волны в гипопругих телах. I. Изотропные материалы // Чебышевский сборник. 2024. Т. 25. В. 2. С. 318-333.
6. Соколова М. Ю., Христич Д. В. Акустические волны в гипопругих телах. II. Анизотропные материалы // Чебышевский сборник. 2024. Т. 25. В. 2. С. 334-349.
7. Маркин А. А., Соколова М. Ю. Динамические уравнения распространения акустических волн в предварительно деформированных материалах // Известия РАН. Механика твердого тела. 2024. № 2. С. 166-182.
8. Соколова М. Ю., Маркин А. А. Влияние начальных напряжений на распространение звуковых волн в гипопругих анизотропных материалах // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 91. С. 113-124.
9. Соколова М. Ю., Христич Д. В., Праведников Д. В. Влияние начальных напряжений на основные характеристики упругих волн в анизотропных средах // Чебышевский сборник. 2024. Т. 25. В. 5. С. 292-306.
10. Соколова М. Ю., Христич Д. В., Бурцев А. Ю. Упругие волны в твердых кристаллических породах // Известия Тульского государственного университета. Науки о Земле. 2024. Вып. 4. С. 548-564.
11. Федоров Ф. И. Теория упругих волн в кристаллах. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1965. 383 с.
12. Auld B. A. Acoustic Fields and Waves in Solids. Volume 1. John Wiley & Sons, Inc., 1973. 430 p.
13. Сиротин Ю. И., Шаскольская М. П. Основы кристаллофизики. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979. 640 с.
14. Маркин А. А., Соколова М. Ю. Термомеханика упругопластического деформирования. М.: Физматлит, 2013. 320 с.
15. Haupt P., Pao Y.-H., Hutter K. Theory of incremental motion in a body with initial elasto-plastic deformation // Journal of Elasticity. 1992. V. 28. P. 93-221.

16. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980. 512 с.

REFERENCES

1. Rushchitsky J. J. 2014, “Nonlinear plane waves in hypoelastic materials”, *Nonlinear elastic waves in materials. Foundations of Engineering Mechanics*. Springer, Cham.
2. Rushchitsky J. J. 2005, “On the types and number of plane waves in hypoelastic materials”, *International Applied Mechanics*, vol. 41, no. 11, p. 1288-1298.
3. Demidov V. N. 2016, “Acoustic properties of isotropic hypoelastic materials with residual technological stresses”, *Key Engineering Materials*, vol. 712, p. 384-389.
4. Demidov V. N. 2000, “On the splitting of shear waves in isotropic hypoelastic materials”, *Physical Mesomechanics*, vol. 3, no. 2, p. 15-36 [in Russian].
5. Sokolova, M. Yu. & Khristich, D. V. 2024, “Acoustic waves in hypoelastic solids. I. Isotropic materials”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 25, no. 2, p. 318-333 [in Russian].
6. Sokolova, M. Yu. & Khristich, D. V. 2024, “Acoustic waves in hypoelastic solids. II. Anisotropic materials”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 25, no. 2, p. 334-349 [in Russian].
7. Markin, A. A. & Sokolova, M. Yu. 2024, “Dynamic equations for the propagation of acoustic waves in pre-deformed materials”, *Mechanics of Solids*, vol. 59, no. 2, p. 679-688.
8. Sokolova, M. Yu. & Markin, A. A. 2024 “The influence of initial stresses on the propagation of sound waves in hypoelastic anisotropic materials”, *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]*, vol. 91, p. 113-124 [in Russian].
9. Sokolova, M. Yu., Khristich, D. V. & Pravednikov, D. V. 2024 “The effect of initial stresses on the main characteristics of elastic waves in anisotropic media”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 5, p. 2-16 [in Russian].
10. Sokolova, M. Yu., Khristich, D. V. & Burtsev, A. Yu. 2024 “Elastic waves in solid crystalline rocks”, *Izvestia Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Nauki o Zemle [Proceedings of Tula State University. Earth Sciences]*, no. 4, p. 548-564 [in Russian].
11. Fedorov, F. I. 2012, “Theory of Elastic Waves in Crystals”, *Springer*.
12. Auld, B. A. 1973, “Acoustic Fields and Waves in Solids. Volume 1”, *John Wiley & Sons, Inc.*
13. Sirotnin, Yu. I. & Shaskol'skaya, M. P. 1982, “Fundamentals of Crystal Physics”, *Mir Publishers*, Moscow.
14. Markin, A. A. & Sokolova, M. Yu. 2015, “Thermomechanics of elastoplastic deformation”, *Cambridge International Science Publishing*, Cambridge.
15. Haupt, P., Pao, Y-H. & Hutter, K. 1992, “Theory of incremental motion in a body with initial elasto-plastic deformation”, *Journal of Elasticity*, vol. 28, p. 93-221.
16. Lurie, A. I. 2012, “Non-linear theory of elasticity”, *North Holland*.

Получено: 25.11.2024

Принято в печать: 10.03.2025

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 26. Выпуск 1.

УДК 539.3:534.26

DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-1-190-203

Дифракция цилиндрической звуковой волны на многослойном сфероиде

Л. А. Толоконников, С. Л. Толоконников

Толоконников Лев Алексеевич — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: TolokonnikovLA@mail.ru

Толоконников Сергей Львович — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: tols@mail.ru

Аннотация

В статье рассматривается задача о дифракции гармонической цилиндрической звуковой волны на многослойном сфероиде, состоящем из абсолютно жесткого сфероид и окружающих его однородных сфероидальных слоев идеальной сжимаемой жидкости. Предполагается, что сфероид находится в безграничной идеальной жидкости. Цилиндрическая волна излучается бесконечно длинным линейным источником, параллельным оси вращения сфероид.

Задача решается в вытянутой сфероидальной системе координат. Получено аналитическое решение задачи. Рассмотрен частный случай двухслойного сфероид.

Ключевые слова: дифракция, звуковые волны, цилиндрическая волна, многослойный сфероид, идеальная жидкость.

Библиография: 47 названий.

Для цитирования:

Толоконников, Л. А., Толоконников, С. Л. Дифракция цилиндрической звуковой волны на многослойном сфероиде // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 1, с. 190–203.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 26. No. 1.

UDC 539.3:534.26

DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-1-190-203

Diffraction of a cylindrical sound wave on a multilayered spheroid

L. A. Tolokonnikov, S. L. Tolokonnikov

Tolokonnikov Lev Alexeevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State University (Tula).

e-mail: TolokonnikovLA@mail.ru

Tolokonnikov Sergei Lvovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: tols@mail.ru

Abstract

The article considers the problem of diffraction of a harmonic cylindrical sound wave on a multilayered spheroid is considered. The multilayered spheroid consist from an absolutely rigid spheroid and surroundштт homogeneous spheroidal layers of an ideal compressible liquid. It is assumed that the spheroid is in an infinite ideal liquid. A cylindrical wave is emitted by an infinitely long linear source parallel to the axis of rotation of the spheroid.

The problem is solved in an elongated spheroidal coordinate system. An analytical solution of the problem has been obtained. A special case of a two-layer spheroid is considered.

Keywords: diffraction, sound waves, cylindrical wave, multilayered spheroid, ideal fluid.

Bibliography: 47 titles.

For citation:

Tolokonnikov, L. A., Tolokonnikov, S. L. 2025, "Diffraction of a cylindrical sound wave on a multilayered spheroid" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 1, pp. 190–203.

1. Введение

Сфероидальной гнометрией охватывается большое разнообразие форм. Многие реальные объекты хорошо аппроксимируются телами, имеющими форму сфероида. В предельных случаях сфероид превращается в сферу, диск, сигарообразное тело. Изучению проблемы дифракции звуковых волн на сфероидах посвящено большое количество работ.

Дифракция плоских звуковых волны на идеальных (абсолютно жестких и акустически мягких) сфероидах рассматривалась в работах [1 – 8]. Низкочастотные аппроксимации решений таких дифракционных задач построены в [9 – 13], а высокочастотные — в [14 – 17].

Задачи дифракции цилиндрических и сферических звуковых волн на идеальных сфероидах рассмотрены в [18 – 21].

Дифракции звука на сфероидальных телах со смешанными граничными условиями изучалась в [22 – 24]. В [22, 23] падающая волна полагалась плоской, а в [24] — цилиндрической и сферической.

В [25 – 28] получены решения задач о рассеянии плоских звуковых волн на проницаемых (жидких) сфероидах.

Дифракция плоских звуковых волн на однородных упругих сфероидах исследовалась в [29 – 37], а сферических и цилиндрических — в [38, 39].

В [40] получено решение задачи о рассеянии плоской волны на твердом вытянутом сфероиде, окруженном конфокальной оболочкой из акустического материала. Задача о рассеянии сферической волны на многослойном проницаемом сфероиде с жестким включением решена в [41]. На основе полученного решения рассмотрен случай одного сфероидального жидкого слоя, окружающего жесткий сфероид [42].

В настоящей работе рассматривается дифракция цилиндрических звуковых волн на многослойном проницаемом сфероиде с абсолютно жестким сфероидальным включением.

2. Постановка задачи

Рассмотрим многослойный сфероид, состоящий из абсолютно жесткого сфероида и N окружающих его однородных сфероидальных слоев идеальной сжимаемой жидкости или подобным жидкости материалов, в которых не распространяются сдвиговые волны. Каждый j – й слой ($j = 1, 2, \dots, N$) характеризуется плотностью ρ_j и скоростью распространения звука c_j . На многослойный сфероид, находящийся в безграничной однородной идеальной жидкости с плотностью ρ и скоростью звука c , падает гармоническая цилиндрическая волна, излучаемая

бесконечно длинным линейным источником с временной зависимостью $e^{-i\omega t}$, где ω — круговая частота; t — время (в дальнейшем временной множитель будем опускать). Ось источника параллельна оси вращения сфероида. Определим акустическое поле, рассеянное сфероидом.

3. Аналитическое решение задачи

Для решения задачи введем прямоугольную декартову систему координат x, y, z с началом в центре сфероида, ось z которой является осью вращения сфероида. Для определенности будем считать сфероидальное тело вытянутым.

Свяжем с координатами x, y, z вытянутые сфероидальные координаты ξ, η, φ [43]

$$x = h [(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)]^{1/2} \cos \varphi, \quad y = h [(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)]^{1/2} \sin \varphi, \quad z = h\xi\eta$$

$$(1 \leq \xi < \infty, \quad -1 \leq \eta \leq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi),$$

где h — половина межфокусного расстояния сфероида.

Фокусы сфероидальной системы координат, жесткого сфероида и каждого сфероидального слоя полагаются общими.

В системе координат ξ, η, φ поверхности j -го жидкого слоя ($\xi_{j-1} \leq \xi \leq \xi_j$) определяются уравнениями $\xi = \xi_{j-1}$ и $\xi = \xi_j$ ($j = 1, 2, \dots, N$), а уравнение поверхности абсолютно жесткого сфероида записывается в виде $\xi = \xi_0$.

В вытянутой сфероидальной системе координат поверхность $\xi = \xi_* = \text{const}$ является вытянутым эллипсоидом вращения с большой осью, равной $2h\xi_*$, и малой осью, равной $2h(\xi_*^2 - 1)^{1/2}$.

Ведem дополнительную цилиндрическую систему координат r, φ, z , связанную с рассеивателем. Линейный источник параллелен оси z и в системе координат r, φ, z имеет цилиндрические координаты (r_0, φ_0) .

Потенциал скоростей падающей волны имеет вид

$$\Psi_0 = AH_0(kR), \quad R = [r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0)]^{1/2}$$

где A — амплитуда падающей волны; $H_0(x)$ — цилиндрическая функция Ганкеля первого рода нулевого порядка; $k = \omega/c$ — волновое число жидкости, окружающей многослойный сфероид; R — расстояние от источника до произвольной точки внешнего пространства.

Цилиндрическая волна может быть представлена разложением [44]

$$\Psi_0 = A \sum_{m=0}^{\infty} (2 - \delta_{0m}) \cos m(\varphi - \varphi_0) \begin{cases} J_m(kr)H_m(kr_0), & r < r_0 \\ J_m(kr_0)H_m(kr), & r > r_0, \end{cases} \quad (1)$$

где $J_m(x)$ и $H_m(x)$ — цилиндрические функции Бесселя и Ганкеля первого рода порядка m , δ_{0m} — символ Кронекера.

Движение идеальной жидкости в установившемся режиме колебаний описывается уравнением Гельмгольца [45].

Во внешней области потенциал скорости полного акустического поля Ψ удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\Delta \Psi + k^2 \Psi = 0, \quad (2)$$

где $\Psi = \Psi_0 + \Psi_s$; Ψ_s — потенциал скорости рассеянной волны.

Потенциал скорости акустического поля в j -ом слое $\Psi^{(j)}$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta \Psi^{(j)} + k_j^2 \Psi^{(j)} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (3)$$

где $k_j = \omega/c_j$ — волновое число в j -ом слое.

При этом скорость частиц жидкости и акустическое давление во внешней среде и в слоях определяются по формулам

$$\mathbf{v} = \text{grad}\Psi, \quad p = i\rho\omega\Psi,$$

$$\mathbf{v}^{(j)} = \text{grad}\Psi^{(j)}, \quad p^{(j)} = i\rho\omega\Psi^{(j)}, \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

В вытянутой сфероидальной системе координат оператор Лапласа Δ имеет вид

$$\Delta = \frac{1}{H_\xi H_\eta H_\varphi} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{H_\eta H_\varphi}{H_\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{H_\xi H_\varphi}{H_\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{H_\xi H_\eta}{H_\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \right],$$

где $H_\xi = h \left(\frac{\xi^2 - \eta^2}{\xi^2 - 1} \right)^{1/2}$, $H_\eta = h \left(\frac{\xi^2 - \eta^2}{1 - \eta^2} \right)^{1/2}$, $H_\varphi = h [(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)]$ — коэффициенты Ламе системы координат ξ, η, φ .

Потенциал Ψ_s должен удовлетворять граничным условиям на внешней поверхности $\xi = \xi_N$, которые заключаются в равенстве акустических давлений и нормальных скоростей частиц во внешней среде и в N -ом слое

$$p|_{\xi=\xi_N} = p^{(N)}|_{\xi=\xi_N}, \quad v_n|_{\xi=\xi_N} = v_n^{(N)}|_{\xi=\xi_N}.$$

Учитывая, что нормальные скорости определяются через потенциалы выражениями

$$v_n = \frac{1}{H_\xi} \frac{\partial \Psi}{\partial \xi}, \quad v_n^{(j)} = \frac{1}{H_\xi} \frac{\partial \Psi^{(j)}}{\partial \xi},$$

граничные условия на поверхности $\xi = \xi_N$ запишем в виде

$$\rho(\Psi_0 + \Psi_s)|_{\xi=\xi_N} = \rho_N \Psi^{(N)}|_{\xi=\xi_N}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(\Psi_0 + \Psi_s) \Big|_{\xi=\xi_N} = \frac{\partial}{\partial \xi} \Psi^{(N)} \Big|_{\xi=\xi_N}. \quad (5)$$

Потенциал Ψ_s должен удовлетворять условиям излучения на бесконечности [45].

Граничные условия на границах раздела слоев $\xi = \xi_j$ ($j = 1, 2, \dots, N-1$) заключаются в непрерывности акустических давлений и нормальных скоростей частиц жидкостей

$$\rho_{j+1} \Psi^{(j+1)}|_{\xi=\xi_j} = \rho_j \Psi^{(j)}|_{\xi=\xi_j}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \Psi^{(j+1)} \Big|_{\xi=\xi_j} = \frac{\partial}{\partial \xi} \Psi^{(j)} \Big|_{\xi=\xi_j}. \quad (7)$$

Граничное условие на поверхности жесткого сфероида состоит в равенстве нулю нормальной скорости частиц жидкости

$$\frac{\partial \Psi^{(1)}}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_0} = 0. \quad (8)$$

Акустические поля во внешней области и в каждом слое симметричны относительно плоскости, проходящей через линейный источник и ось z . Поэтому потенциал скорости рассеянной волны Ψ_s , являющийся решением уравнения (2), при учете условий излучения на бесконечности будем искать в виде

$$\Psi_s = \sum_{n=m}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_{mn} S_{mn}(q, \eta) R_{mn}^{(3)}(q, \xi) \cos m(\varphi - \varphi_0), \quad (9)$$

а потенциалы скорости в j -ом слое — в виде

$$\Psi^{(j)} = \sum_{n=m}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left[B_{mn}^{(j)} R_{mn}^{(1)}(q_j, \xi) + C_{mn}^{(j)} R_{mn}^{(3)}(q_j, \xi) \right] S_{mn}(q_j, \eta) \cos m(\varphi - \varphi_0), \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (10)$$

Здесь $S_{mn}(q, \eta)$ — вытянутая угловая сфероидальная функция первого рода порядка m степени n ; $R_{mn}^{(i)}(q, \xi)$ — вытянутая радиальная сфероидальная i -го рода ($i = 1, 3$); $q = kh$ — волновой размер сфероида.

Коэффициенты A_{mn} , $B_{mn}^{(j)}$, $C_{mn}^{(j)}$ ($j = 1, 2, \dots, N$) подлежат определению из граничных условий (4–8).

Прежде всего получим интегральные соотношения между цилиндрическими и сфероидальными функциями, которые будут использованы при удовлетворении граничных условий (4) и (5).

Воспользуемся соотношением [43]

$$J_m \left[q(\xi^2 - 1)^{1/2} (1 - \eta^2)^{1/2} \right] = 2 \sum_{n=m}^{\infty} i^{n-m} N_{mn}^{-1} S_{mn}(q, 0) S_{mn}(q, \eta) R_{mn}^{(1)}(q, \xi), \quad (11)$$

где $N_{mn}(q)$ — норма угловой сфероидальной функции;

$$S_{mn}(q, 0) = \frac{(-1)^{\frac{n-m}{2}} (n+m)!}{2^n \left(\frac{n-m}{2} \right)! \left(\frac{n+m}{2} \right)!} \text{ при } (n-m) \text{ — четное,}$$

$$S_{mn}(q, 0) = 0 \text{ при } (n-m) \text{ — нечетное.}$$

Умножим левую и правую части (11) на $S_{mn}(q, \eta)$ и проинтегрируем по η в пределах от -1 до 1. Учитывая условие ортогональности угловых сфероидальных функций [43]

$$\int_{-1}^1 S_{mn}(q, \eta) S_{mk}(q, \eta) d\eta = \delta_{mk} N_{mn}, \quad (12)$$

получаем следующее выражение:

$$\int_{-1}^1 J_m \left[q(\xi^2 - 1)^{1/2} (1 - \eta^2)^{1/2} \right] S_{mn}(q, \eta) d\eta = 2i^{n-m} S_{mn}(q, 0) R_{mn}^{(1)}(q, \xi). \quad (13)$$

Дифференцируя (12) по ξ , получаем

$$\int_{-1}^1 \frac{q\xi(1-\eta^2)^{1/2}}{(\xi^2-1)^{1/2}} J'_m \left[q(\xi^2 - 1)^{1/2} (1 - \eta^2)^{1/2} \right] S_{mn}(q, \eta) d\eta = 2i^{n-m} S_{mn}(q, 0) R_{mn}^{(1)'}(q, \xi). \quad (14)$$

Подставим разложения (1), (9) и (10) при $j = N$ в граничные условия (4) и (5), заменив в (1) цилиндрическую координату r ее выражением в сфероидальных координатах

$$r = h[(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)]^{1/2}.$$

Учитывая ортогональность тригонометрических функций $\cos m(\varphi - \varphi_0)$, получаем для каждого значения m следующие соотношения:

$$\rho \sum_{n=m}^{\infty} A_{mn} S_{mn}(q, \eta) R_{mn}^{(3)}(q, \xi_N) - \rho_N \sum_{n=m}^{\infty} \left[B_{mn}^{(N)} R_{mn}^{(1)}(q_N, \xi_N) + C_{mn}^{(N)} R_{mn}^{(3)}(q_N, \xi_N) \right] S_{mn}(q_N, \eta) =$$

$$= -A\rho(2 - \delta_{0m})J_m \left[q(\xi_N^2 - 1)^{1/2}(1 - \eta^2)^{1/2} \right] H_m(kr_0), \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=m}^{\infty} A_{mn} S_{mn}(q, \eta) R_{mn}^{(3)'}(q, \xi_N) - \sum_{n=m}^{\infty} \left[B_{mn}^{(N)} R_{mn}^{(1)'}(q_N, \xi_N) + C_{mn}^{(N)} R_{mn}^{(3)'}(q_N, \xi_N) \right] S_{mn}(q_N, \eta) = \\ = -A \frac{q\xi_N(1 - \eta^2)^{1/2}}{(\xi_N^2 - 1)^{1/2}} (2 - \delta_{0m}) J_m' \left[q(\xi_N^2 - 1)^{1/2}(1 - \eta^2)^{1/2} \right] H_m(kr_0). \end{aligned} \quad (16)$$

Умножим левую и правую части уравнений (15) и (16) на $S_{mk}(q, \eta)$ и проинтегрируем по η в пределах от -1 до 1. Учитывая (12 – 14), получаем

$$\begin{aligned} \rho A_{mn} N_{mn}(q) R_{mn}^{(3)}(q, \xi_N) - \rho_N \sum_{k=m}^{\infty} \left[B_{mk}^{(N)} R_{mk}^{(1)}(q_N, \xi_N) + C_{mk}^{(N)} R_{mk}^{(3)}(q_N, \xi_N) \right] < S_{mk}^{(N)}, S_{mn} > = \\ = -2A\rho(2 - \delta_{0m}) H_m(kr_0) i^{n-m} S_{mn}(q, 0) R_{mn}^{(1)}(q, \xi_N), \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} A_{mn} N_{mn}(q) R_{mn}^{(3)'}(q, \xi_N) - \sum_{k=m}^{\infty} \left[B_{mk}^{(N)} R_{mk}^{(1)'}(q_N, \xi_N) + C_{mk}^{(N)} R_{mk}^{(3)'}(q_N, \xi_N) \right] < S_{mk}^{(N)}, S_{mn} > = \\ = -2A(2 - \delta_{0m}) H_m(kr_0) i^{n-m} S_{mn}(q, 0) R_{mn}^{(1)'}(q, \xi_N), \end{aligned} \quad (18)$$

где $< S_{mk}^{(N)}, S_{mn} > = \int_{-1}^1 S_{mk}(q_N, \eta) S_{mn}(q, \eta) d\eta$.

Теперь подставим разложения (10) в граничные условия (6) и (7) на поверхности $\xi = \xi_j$ ($j = 1, 2, \dots, N - 1$). Получаем для каждого значения m следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \rho_{j+1} \sum_{n=m}^{\infty} \left[B_{mn}^{(j+1)} R_{mn}^{(1)}(q_{j+1}, \xi_j) + C_{mn}^{(j+1)} R_{mn}^{(3)}(q_{j+1}, \xi_j) \right] S_{mn}(q_{j+1}, \eta) = \\ = \rho_j \sum_{n=m}^{\infty} \left[B_{mn}^{(j)} R_{mn}^{(1)}(q_j, \xi_j) + C_{mn}^{(j)} R_{mn}^{(3)}(q_j, \xi_j) \right] S_{mn}(q_j, \eta), \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=m}^{\infty} \left[B_{mn}^{(j+1)} R_{mn}^{(1)'}(q_{j+1}, \xi_j) + C_{mn}^{(j+1)} R_{mn}^{(3)'}(q_{j+1}, \xi_j) \right] S_{mn}(q_{j+1}, \eta) = \\ = \sum_{n=m}^{\infty} \left[B_{mn}^{(j)} R_{mn}^{(1)'}(q_j, \xi_j) + C_{mn}^{(j)} R_{mn}^{(3)'}(q_j, \xi_j) \right] S_{mn}(q_j, \eta), \end{aligned} \quad (20)$$

Умножим левую и правую части уравнений (19) и (20) на $S_{mk}(q_{j+1}, \eta)$ и проинтегрируем по η в пределах от -1 до 1. Получаем

$$\begin{aligned} \rho_{j+1} N_{mn}(q_{j+1}) \left[B_{mn}^{(j+1)} R_{mn}^{(1)}(q_{j+1}, \xi_j) + C_{mn}^{(j+1)} R_{mn}^{(3)}(q_{j+1}, \xi_j) \right] - \\ - \rho_j \sum_{k=m}^{\infty} \left[B_{mk}^{(j)} R_{mk}^{(1)}(q_j, \xi_j) + C_{mk}^{(j)} R_{mk}^{(3)}(q_j, \xi_j) \right] < S_{mk}^{(j)}, S_{mn}^{(j+1)} > = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N - 1, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} N_{mn}(q_{j+1}) \left[B_{mn}^{(j+1)} R_{mn}^{(1)'}(q_{j+1}, \xi_j) + C_{mn}^{(j+1)} R_{mn}^{(3)'}(q_{j+1}, \xi_j) \right] - \\ - \sum_{k=m}^{\infty} \left[B_{mk}^{(j)} R_{mk}^{(1)'}(q_j, \xi_j) + C_{mk}^{(j)} R_{mk}^{(3)'}(q_j, \xi_j) \right] < S_{mk}^{(j)}, S_{mn}^{(j+1)} > = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N - 1, \end{aligned} \quad (22)$$

где $< S_{mk}^{(j)}, S_{mn}^{(j+1)} > = \int_{-1}^1 S_{mk}(q_j, \eta) S_{mn}(q_{j+1}, \eta) d\eta$.

Коэффициенты A_{mn} , $B_{mn}^{(1)}$, $C_{mn}^{(1)}$ определяются из системы уравнений (17) и (18), записанных для $N = 1$, и (23).

Из уравнения (23) выразим $C_{mn}^{(1)}$ через $B_{mn}^{(1)}$. Получаем

$$C_{mn}^{(1)} = -\frac{R_{mn}^{(1)'}(q_1, \xi_0)}{R_{mn}^{(3)'}(q_1, \xi_0)} B_{mn}^{(1)}. \quad (25)$$

Подставим (25) в (17) и (18), записанных для $N = 1$. Будем иметь

$$\begin{aligned} & A_{mn} N_{mn}(q) R_{mn}^{(3)}(q, \xi_1) - \\ & - \frac{\rho_1}{\rho} \sum_{k=m}^{\infty} \left[R_{mk}^{(3)'}(q_1, \xi_0) \right]^{-1} \left[R_{mk}^{(1)}(q_1, \xi_1) R_{mk}^{(3)'}(q_1, \xi_0) - R_{mk}^{(3)}(q_1, \xi_1) R_{mk}^{(1)'}(q_1, \xi_0) \right] B_{mk}^{(1)} < S_{mk}^{(1)}, S_{mn} > = \\ & = -2A(2 - \delta_{0m}) H_m(kr_0) i^{n-m} S_{mn}(q, 0) R_{mn}^{(1)}(q, \xi_1), \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} & A_{mn} N_{mn}(q) R_{mn}^{(3)'}(q, \xi_1) - \\ & - \sum_{k=m}^{\infty} \left[R_{mk}^{(3)'}(q_1, \xi_0) \right]^{-1} \left[R_{mk}^{(1)'}(q_1, \xi_1) R_{mk}^{(3)'}(q_1, \xi_0) - R_{mk}^{(3)'}(q_1, \xi_1) R_{mk}^{(1)'}(q_1, \xi_0) \right] B_{mk}^{(1)} < S_{mk}^{(1)}, S_{mn} > = \\ & = -2A(2 - \delta_{0m}) H_m(kr_0) i^{n-m} S_{mn}(q, 0) R_{mn}^{(1)'}(q, \xi_1). \end{aligned} \quad (27)$$

Из (26) выразим A_{mn} . Получаем

$$\begin{aligned} A_{mn} &= \frac{\rho_1}{\rho} \left[N_{mn}(q) R_{mn}^{(3)}(q, \xi_1) \right]^{-1} \times \\ & \times \sum_{k=m}^{\infty} \left[R_{mk}^{(3)'}(q_1, \xi_0) \right]^{-1} \left[R_{mk}^{(1)}(q_1, \xi_1) R_{mk}^{(3)'}(q_1, \xi_0) - R_{mk}^{(3)}(q_1, \xi_1) R_{mk}^{(1)'}(q_1, \xi_0) \right] < S_{mk}^{(1)}, S_{mn} > B_{mk}^{(1)} - \\ & - 2A \frac{(2 - \delta_{0m})}{N_{mn}(q)} H_m(kr_0) i^{n-m} S_{mn}(q, 0) \frac{R_{mn}^{(1)}(q, \xi_1)}{R_{mn}^{(3)}(q, \xi_1)}. \end{aligned} \quad (28)$$

Подставляя (28) в (27), получаем бесконечную систему линейных уравнений для определения коэффициентов B_{mn} для каждого фиксированного значения m ($m = 0, 1, \dots$) при всех значениях n ($n = m + 1, m + 2, \dots$)

$$\sum_{k=m}^{\infty} \alpha_{mnk} B_{mk} = \beta_{mn},$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_{mnk} &= \frac{1}{R_{mk}^{(3)'}(q_1, \xi_0)} \left\{ \frac{\rho_1}{\rho} \frac{R_{mn}^{(3)'}(q, \xi_1)}{R_{mn}^{(3)}(q, \xi_1)} \left[R_{mk}^{(1)}(q_1, \xi_1) R_{mk}^{(3)'}(q_1, \xi_0) - R_{mk}^{(3)}(q_1, \xi_1) R_{mk}^{(1)'}(q_1, \xi_0) \right] - \right. \\ & \left. - \left[R_{mk}^{(1)'}(q_1, \xi_1) R_{mk}^{(3)'}(q_1, \xi_0) - R_{mk}^{(3)'}(q_1, \xi_1) R_{mk}^{(1)'}(q_1, \xi_0) \right] \right\} < S_{mk}^{(1)}, S_{mn} >; \\ \beta_{mn} &= 2A(2 - \delta_{0m}) H_m(kr_0) i^{n-m} \frac{S_{mn}(q, 0)}{R_{mn}^{(3)}(q, \xi_1)} \left[R_{mn}^{(1)}(q, \xi_1) R_{mn}^{(3)'}(q, \xi_1) - R_{mn}^{(1)'}(q, \xi_1) R_{mn}^{(3)}(q, \xi_1) \right]. \end{aligned}$$

Используя выражение для вронскиана для вытянутых сфероидальных функций [47]

$$R_{mn}^{(1)}(q, \xi) R_{mn}^{(3)'}(q, \xi) - R_{mn}^{(1)'}(q, \xi) R_{mn}^{(3)}(q, \xi) = \frac{i}{q(\xi^2 - 1)},$$

будем иметь

$$\beta_{mn} = 2A(2 - \delta_{0m})H_m(kr_0)i^{n-m+1} \frac{S_{mn}(q, 0)}{q(\xi_1^2 - 1)R_{mn}^{(3)}(q, \xi_1)}.$$

После вычисления коэффициентов B_{mn} находим по формуле (28) коэффициенты A_{mn} , которые подставляем в разложение (9). В результате определяем акустическое поле, рассеянное двухслойным сфероидом.

5. Заключение

В настоящей работе получено аналитическое решение задачи задачи дифракции цилиндрической звуковой волны на многослойном проницаемом сфероиде. Полученное решение можно распространить на случай сплюснутого сфероидального тела, если провести формальную замену ξ на $i\xi$ и h на $-ih$, переводящую вытянутую сфероидальную систему координат в сплюснутую.

Из полученного решения задачи дифракции цилиндрической волны можно получить решение задачи для случая, когда падающая волна является плоской и распространяется перпендикулярно оси вращения сфероида. Для этого, считая, что расстояние между источником и рассеивателем достаточно велико ($kr_0 \gg 1$), следует заменить в (17), (18) функцию $H_m(kr_0)$ ее асимптотическим выражением, используя асимптотическую формулу [47]

$$H_m(x) \sim \sqrt{2/(\pi x)} \exp[i(x - m\pi/2 - \pi/4)].$$

В результате получим решение задачи дифракции плоской волны, амплитуда которой равна $\sqrt{2/(\pi kr_0)} \exp[i(kr_0 - \pi/4)]$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Spence R.D., Granger S. The scattering sound from a prolate spheroid // Acoust. Soc. Amer. 1951. Vol. 23. No. 6. P. 701 – 706.
2. Einspruch N.G., Barlow C.A. Scattering of a compressional wave by a prolate spheroid // Quart. J. Appl. Math. 1961. Vol. 19. No. 3. P. 253 – 258.
3. Senior T.B.A. The scattering from acoustically hard and soft prolate spheroids for axial incidence // Can. J. Phys. 1966. Vol. 44. No. 3. P. 657 – 667.
4. Клещев А.А., Шейба Л.С. Рассеяние звуковой волны идеальными вытянутыми сфероидом // Акуст. журн. 1970. Т. 16. № 2. С. 264 – 268.
5. Андебур В.А., Осташевский А.Л. Рассеяние звука жесткими вытянутыми сфероидом // Акуст. журн. 1974. Т. 20. № 2. С. 179 – 183.
6. Varadan V.K., Varadan V.V., Dragonette L.R., Flax L. Computation of rigid body scattering by prolate spheroids using the T-matrix approach. // J. Acoust. Soc. Amer. 1982. Vol. 71. No. 1. P. 22 – 25.
7. Barton J.P., Wolf N.L., Zhang H., Tarawneh C. Near-field calculations for a rigid spheroid with an arbitrary incident acoustic field // J. Acoust. Soc. Amer. 2003. Vol. 113. No. 3. P. 1216 – 1222.
8. Роумелиотис Дж. А., Котсис А. Д., Колезас Дж. Рассеяние звука на непроницаемом сфероиде // Акуст. журн. 2007. Т. 53. № 4. С. 500 – 513.

9. Senior T.B.A. Scalar diffraction by a prolate spheroid at low frequencies // Can. J. Phys. 1960. Vol. 38. No. 12. P. 1632 – 1641.
10. Burke J. E. Low-frequency scattering by soft spheroids // J. Acoust. Soc. Amer. 1966. Vol. 39. No. 5. P. 826 – 831.
11. Burke J. E. Long-wavelength scattering by hard spheroids // J. Acoust. Soc. Amer. 1966. Vol. 40. No. 2. P. 325 – 330.
12. Asvestas J.S., Kleinman R.E. Low frequency scattering by spheroids and disks. 1. Dirichlet problem for a prolate spheroid // J. Inst. Math. Appl. 1969. Vol. 6. No. 1. P. 42 – 56.
13. Asvestas J.S., Kleinman R.E. Low frequency scattering by spheroids and disks. 2. Neumann problem for a prolate spheroid // J. Inst. Maths. Appl. 1969. Vol. 6. No. 1. P. 57 – 75.
14. Гаткин Н.Г., Парамонова С.Н., Пьянов В.М. Рассеяние звука жесткими вытянутыми сфероидами // Акуст. журн. 1971. Т. 17. № 3. С. 371 — 378.
15. Sammelmann G.S., Trivett D.H., Hackmann R.H. High-frequency scattering from rigid prolate spheroids // J. Acoust. Soc. Amer. 1988. Vol. 83. No. 1. P. 46 – 54.
16. Lauchle G.C. Short-wavelength acoustic diffraction by prolate spheroids // J. Acoust. Soc. Amer. 1975. Vol. 58. No. 3. P. 568 – 575.
17. Lauchle G.C. Short-wavelength acoustic backscattering by a prolate spheroid // J. Acoust. Soc. Amer. 1975. Vol. 58. No. 3. P. 576 – 580.
18. Толоконников Л.А. Рассеяние цилиндрических звуковых волн на сфероиде // Прикладная математика. 1975. Вып. 3. С. 3 – 9. Тула: Изд-во Тульск. политехн. ин-та.
19. Клещев А.А. Рассеиватель в поле точечного источника // Акуст. журн. 1973. Т. 19. № 3. С. 455 – 457.
20. Blake W.K., Wilson G.A. Short-wavelength diffracted surface pressures on a rigid prolate spheroid // J. Acoust. Soc. Amer. 1977. Vol. 61. No. 6. P. 1419 – 1426.
21. German A., Lauchle G.C. Axisymmetric scattering of spherical waves by a prolate spheroid // J. Acoust. Soc. Amer. 1979. Vol. 65. No. 5. P. 1322 – 1327.
22. Клещев А.А. Дифракция звука на телах со смешанными граничными условиями // Акуст. журн. 1974. Т. 20. № 4. С. 632 – 634.
23. Толоконников Л.А. Рассеяние звука на сфероиде со смешанными граничными условиями // Известия Тульского гос. ун-та. Серия Математика. Механика. Информатика. 1998. Т. 4. Вып. 1. С. 139 – 142.
24. Толоконников Л.А. Рассеяние цилиндрических и сферических звуковых волн сфероидом со смешанными граничными условиями // Известия Тульского гос. ун-та. Серия Математика. Механика. Информатика. 2005. Т. 11. Вып. 5. С. 201 – 207.
25. Yeh C. Scattering of acoustic waves by a penetrable prolate spheroid. I. Liquid prolate spheroid // J. Acoust. Soc. Amer. 1967. Vol. 42. No. 2. P. 518 – 521.
26. Burke J.E. Scattering by penetrable spheroids // J. Acoust. Soc. Amer. 1968. Vol. 43. No. 4. P. 871 – 875.

27. Родионова Г.А., Толоконников Л.А. Рассеяние звука вращающимся сфероидом // Акуст. журн. 1989. Т. 35. № 5. С. 895 – 899.
28. Котсис А. Д., Роумелиотис Дж. А. Рассеяние звука на проницаемом сфероиде // Акуст. журн. 2008. Т. 54. № 2. С. 189 – 204.
29. Flax L., Dragonette L., Varadan V.K., Varadan V.V. Analysis and computation of the acoustic scattering by an elastic prolate spheroid obtained from the T-matrix formulation // J. Acoust. Soc. Amer. 1982. Vol.71. No. 5. P. 1077 – 1082.
30. Клещев А.А. Трехмерные и двумерные (осесимметричные) характеристики упругих сфероидальных рассеивателей // Акуст. журн. 1986. Т.32. № 2. С. 268 – 271.
31. Клещев А.А., Ростовцев Д.М. Рассеяние звука упругой и жидкой эллипсоидальными оболочками вращения // Акуст. журн. 1986. Т.32. № 5. С. 691 – 694.
32. Werby M., Graunard G. Classification of resonances in the scattering from submerged spheroidal shells insonified at arbitrary angles of incidence // J. Acoust. Soc. Amer. 1987. Vol.82. No. 4. P. 1369 – 1377.
33. Hackman R.H., Sammelmann G.S., Williams K.L., Trivett D.H. A reanalysis of the acoustic scattering from elastic spheroids // J. Acoust. Soc. Amer. 1988. Vol. 83. No. 4. P. 1255 – 1266.
34. Рождественский К.Н., Толоконников Л.А. О рассеянии звуковых волн на упругом сфероиде // Акуст. журн. 1990. Т.36. № 5. С. 927 – 930.
35. Толоконников Л.А., Скобельцын С.А. Дифракция плоской звуковой волны на упругом сфероиде при наклонном падении // Дифф. уравнения и прикл. задачи. 1991. С. 113 – 119. Тула: Изд-во Тульск. политехн. ин-та.
36. Bao X L., Uherall H., Niemiec J. Experimental study of sound scattering by elastic spheroids // J. Acoust. Soc. Amer. 1997. Vol. 102. No. 2. P. 933 – 942.
37. Толоконников Л.А. Дифракция плоской звуковой волны на упругом сфероиде со сферической полостью, расположенной произвольным образом // Известия Тульского гос. ун-та. Естеств. науки. 2011. Вып. 2. С. 169 – 175.
38. Hackman R.H., Werby M.F. Nearfield effects in acoustic scattering // J. Acoust. Soc. Amer. 1984. Vol. 75. No. 3. P. 1001 – 1003.
39. Толоконников Л.А. Рассеяние цилиндрических и сферических звуковых волн упругим сфероидом с произвольно расположенной сфероидальной полостью // Вестник ТулГУ. Серия Математика. Механика. Информатика. 2011. Т.17. Вып.1. С. 78 – 84.
40. Yeh C. Scattering by liquid-coated prolate spheroids // J. Acoust. Soc. Amer. 1969. Vol. 46. No. 3. P. 797 – 801.
41. Charalambopoulos A., Dassios G., Fotiadis D.I., Massalas C.V.: Scattering of a point generated field by a multilayered spheroid // Acta Mech. 2001. Vol. 150. No. 2. P. 107 – 119.
42. Charalambopoulos A., Fotiadis D.I., Massalas C.V. Scattering of a point generated field by kidney stones // Acta Mech. 2002. Vol. 153. No. 1. P. 63 – 77.
43. К. Фламмер. Таблицы волновых сфероидальных функций. М.: ВЦ АН СССР, 1062. 140 с.
44. Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики Т.2. М.: ИЛ, 1960. 886 с.

45. Шендеров Е. Л. Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 352 с.
46. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. М.: Физматгиз, 1962. 708 с.
47. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. М.: Физматгиз, 1963. 358 с.

REFERENCES

1. Spence, R. D., Granger, S. 1951, "The scattering sound from a prolate spheroid", *Acoust. Soc. Amer.*, vol. 23, no. 6, pp. 701 – 706.
2. Einspruch, N. G., Barlow, C. A. 1961, "Scattering of a compressional wave by a prolate spheroid", *Quart. J. Appl. Math.*, vol. 19, no. 3, pp. 253 – 258.
3. Senior, T. B. A. 1966, "The scattering from acoustically hard and soft prolate spheroids for axial incidence", *Can. J. Phys.*, vol. 44, no. 3, pp. 657 – 667.
4. Kleshchev, A. A., Sheiba, L. S. 1970, "Scattering of a sound wave by ideal prolate spheroids", *Soviet Phys. Acoust.*, vol. 16, no. 2, pp. 219 – 222.
5. Andebura, V. A., Ostashevskii, A. P. 1974, "Scattering of sound by rigid prolate spheroids", *Akust. Zhurn.*, vol. 20, no. 2, pp. 179 – 183, [in Russian].
6. Varadan, V. K., Varadan, V. V., Dragonette, L. R., Flax L. 1982, "Computation of rigid body scattering by prolate spheroids using the T-matrix approach", *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 71, no. 1, pp. 22 – 25.
7. Barton, J. P., Wolf, N. L., Zhang, H., Tarawneh, C. 2003, "Near-field calculations for a rigid spheroid with an arbitrary incident acoustic field", *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 113, no. 3, pp. 1216 – 1222.
8. Roumeliotis, J. A., Kotsis, A. D., Kolezas G. 2007, "Acoustic Scattering by an Impenetrable Spheroid", *Akust. Zhurn.*, vol. 53, no. 4, pp. 500 – 513, [in Russian].
9. Senior, T. B. A. 1960, "Scalar diffraction by a prolate spheroid at low frequencies", *Can. J. Phys.*, vol. 38, no. 12, pp. 1632 – 1641.
10. Burke, J. E. 1966, "Low-frequency scattering by soft spheroids", *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 39, no. 5, pp. 826 – 831.
11. Burke, J. E. 1966, "Long-wavelength scattering by hard spheroids", *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 40, no. 2, pp. 325 – 330.
12. Asvestas, J. S., Kleinman, R. E. 1969, "Low frequency scattering by spheroids and disks. 1. Dirichlet problem for a prolate spheroid", *J. Inst. Math. Appl.*, vol. 6, no. 1, pp. 42 – 56.
13. Asvestas, J. S., Kleinman, R. E. 1969, "Low frequency scattering by spheroids and disks. 2. Neumann problem for a prolate spheroid", *J. Inst. Maths. Appl.*, vol. 6, no. 1, pp. 57 – 75.
14. Gatkin, N. G., Paramonova, S. N., P'yanov, V. M. 1971, "Scattering of sound by rigid prolate spheroids", *Akust. Zhurn.*, vol. 17, no. 3, pp. 371 – 378, [in Russian].
15. Sammelmann, G. S., Trivett, D. H., Hackmann, R. H. 1988, "High-frequency scattering from rigid prolate spheroids", *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 83, no. 1, pp. 46 – 54.

16. Lauchle, G. C. 1975, "Short-wavelength acoustic diffraction by prolate spheroids", *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 58, no. 3, pp. 568 – 575.
17. Lauchle, G. C. 1975, "Short-wavelength acoustic backscattering by a prolate spheroid", *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 58, no. 3, pp. 576 – 580.
18. Tolokonnikov, L. A. 1975, "Scattering of cylindrical sound waves on a spheroid", *Applied Mathematics*, no. 3, pp. 3 – 9, Tula Politech. Inst., Tula, [in Russian].
19. Kleshev, A. A. 1973, "Scatterer in the field of a point source", *Akust. Zhurn.*, vol. 19, no. 3, pp. 455 – 457, [in Russian].
20. Blake, W. K., Wilson, G. A. 1977, "Short-wavelength diffracted surface pressures on a rigid prolate spheroid", *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 61, no. 6, pp. 1419 – 1426.
21. German A., Lauchle, G. C. 1979, "Axisymmetric scattering of spherical waves by a prolate spheroid", *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 65, no. 5, pp. 1322 – 1327.
22. Kleshchev, A. A. 1974, "Diffraction of sound on bodies with mixed boundary conditions", *Akust. Zhurn.*, vol. 20, no. 4, pp. 632 – 634, [in Russian].
23. Tolokonnikov, L. A. 1998, "Sound scattering on a spheroid with mixed boundary conditions", *Izv. Tul. Gos. Univ. Ser. Math. Mech. Inform.*, vol. 4, no. 1, pp. 139 – 142, [in Russian].
24. Tolokonnikov, L. A. 2005, "Scattering of cylindrical and spherical sound waves by a spheroid with mixed boundary conditions", *Izv. Tul. Gos. Univ. Ser. Math. Mech. Inform.*, vol. 11, no. 5, pp. 201 – 207, [in Russian].
25. Yeh, C. 1967, "Scattering of acoustic waves by a penetrable prolate spheroid. I. Liquid prolate spheroid", *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 42, no. 2, pp. 518 – 521.
26. Burke, J. E. 1968, "Scattering by penetrable spheroids", *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 43, no. 4, pp. 871 – 875.
27. Rodionova, G. A., Tolokonnikov, L. A. 1989, "Sound scattering by a rotating spheroid", *Akust. Zhurn.*, vol. 35, no. 5, pp. 895 – 899, [in Russian].
28. Kotsis, A. D., Roumeliotis, J. A. 2008, "Acoustic Scattering by a Penetrable Spheroid", *Akust. Zhurn.*, vol. 54, no. 2, pp. 189 – 204, [in Russian].
29. Flax, L., Dragonette, L., Varadan, V. K., Varadan, V. V. 1982, "Analysis and computation of the acoustic scattering by an elastic prolate spheroid obtained from the T-matrix formulation", *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 71, no. 5, pp. 1077 – 1082.
30. Kleshchev, A. A. 1986, "Three dimensional and two-dimensional (axis symmetrical) characteristics of elastic spheroidal scatterers", *Akust. Zhurn.*, vol. 32, no. 2, pp. 268 – 270, [in Russian].
31. Kleshchev, A. A., Rostovtsev, D. M. 1986, "Sound scattering by solid and liquid ellipsoidal shells of revolution", *Akust. Zhurn.*, vol. 32, no. 5, pp. 691 – 694, [in Russian].
32. Werby, M., Graunard, G. 1987, "Classification of resonances in the scattering from submerged spheroidal shells insonified at arbitrary angles of incidence", *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 82, no. 4, pp. 1369 – 1377.
33. Hackman, R. H., Sammelmann, G. S., Williams, K. L., Trivett, D. H. 1988, "A reanalysis of the acoustic scattering from elastic spheroids", *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 83, no. 4, pp. 1255 – 1266.

34. Rozhdestvenskii, K. N., Tolokonnikov, L. A. 1990, "Acoustic scattering by an elastic spheroid", *Soviet Physics. Acoustics*, vol. 36, no. 5, pp. 515 – 516.
35. Tolokonnikov, L. A., Skobel'tsyn, S. A. 1991, "Diffraction of a plane sound wave on an elastic spheroid at an inclined incidence", *Differ. equations and appl. probl.*, pp. 113 – 119, Tula Politech. Inst., Tula, [in Russian].
36. Bao, X. L., Uherall, H., Niemiec, 1997, J. "Experimental study of sound scattering by elastic spheroids", *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 102, no. 2, pp. 933 – 942.
37. Tolokonnikov, L. A. 2011, "Diffraction of a plane sound wave on an elastic spheroid with an arbitrary located spherical cavity", *Izv. Tul. Gos. Univ. Ser. Estestv. Nauki*, no. 2, pp. 169 – 175, [in Russian].
38. Hackman, R. H., Werby, M. F. 1984, "Nearfield effects in acoustic scattering", *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 75, no. 3, pp. 1001 – 1003.
39. Tolokonnikov, L. A. 2011, "Scattering of cylindrical and spherical sound waves by a elastic spheroid with an arbitrary located spheroidal cavity", *Vest. Tul. Gos. Univ. Ser. Math. Mech. Inform.*, vol. 17, no. 1, pp. 78 – 84, [in Russian].
40. Yeh, C. 1969, "Scattering by liquid-coated prolate spheroids", *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 46, no. 3, pp. 797 – 801.
41. Charalambopoulos, A., Dassios, G., Fotiadis, D. I., Massalas, C. V. 2001, "Scattering of a point generated field by a multilayered spheroid", *Acta Mech.*, vol. 150, no. 2, pp. 107 – 119.
42. Charalambopoulos, A., Fotiadis, D. I., Massalas, C. V. 2002, "Scattering of a point generated field by kidney stones", *Acta Mech.*, vol. 153, no. 1, pp. 63 – 77.
43. Flammer, C. 1957, "Spheroidal Wave Functions", *Stanford University Press, Stanford*, 220 p.
44. Mors, P. M., Feshbach, H. 1953, "Methods of Theoretical Physics", *vol. 2, McGraw-Hill, New York*, 1001 p.
45. Shenderov, E. L. 1972, "Wave problems of underwater acoustics", *Sudostroenie, Leningrad*, 352 p. [in Russian].
46. Kantorovich, L. V., Krilov, V. I. 1962, "Approximate methods of higher analysis", *Fizmatgiz, Moscow*, 708 p., [in Russian].
47. Lebedev, N. N. 1963, "Special Functions and their Applications", *Fizmatgiz, Moscow*, 358 p., [in Russian].

Получено: 14.12.2024

Принято в печать: 10.03.2025

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 26. Выпуск 1.

УДК 004.94

DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-1-204-217

Математическое моделирование системы управления малыми летательными аппаратами самолетного типа с нестандартными аэродинамическими поверхностями¹

М. Ю. Моденов, А. Н. Чуканов, Е. В. Цой

Моденов Михаил Юрьевич — генеральный директор, ООО «Тульские мехатронные системы» (г. Тула).

e-mail: m.modenov@yandex.ru

Чуканов Александр Николаевич — доктор технических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: alexchukanov@yandex.ru

Цой Евгений Владимирович — старший преподаватель, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: tsoyev@tolstovsky.ru

Аннотация

Описано проектирование математической системы управления малым летательным аппаратом самолетного типа с нестандартными аэродинамическими поверхностями. В процессе исследования был проведен анализ комплекса факторов, влияющих на динамику летательных аппаратов, представляющих собой набор дифференциальных уравнений. Проведен поиск и подбор параметров, необходимых для создания математической модели нестандартной системы управления, способной выдавать и формировать команды для исполнительных механизмов, отвечающих за аэродинамические поверхности, расположенные по уникальной схеме. Созданная математическая модель системы управления предполагает управление инновационными бесколлекторными электродвигателями отечественного производства с учетом их технологических особенностей. Работа математической модели была проверена в программном комплексе MATLAB с помощью дополнения SIMULINK с учетом различных условий эксплуатации. Итогом работы стала апробация системы управления и математической модели на реальном устройстве, что позволило управлять беспилотными летательными аппаратами с нестандартными аэродинамическими схемами инновационного типа.

Ключевые слова: математическое моделирование, дифференциальные уравнения, системы управления, летательные аппараты, MATLAB, сервоприводы, робототехника, печатные платы, полетный контроллер.

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:

Моденов, М.Ю., Чуканов, А.Н., Цой, Е.В. Математическое моделирование системы управления малыми летательными аппаратами самолетного типа с нестандартными аэродинамическими поверхностями // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 1, с. 204–217.

¹Представленные в данной статье исследования выполнены на средства гранта Правительства Тульской области в сфере науки и техники 2023 г. «Разработка замкнутой системы управления для работы с бесколлекторными инновационными двигателями» (договор № ДС/121 от 27.09.2023 г.).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 26. No. 1.

UDC 004.94

DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-1-204-217

Mathematical modeling of a control system for small fixed-wing aircraft with non-standard aerodynamic surfaces

M. Y. Modenov, A. N. Chukanov, E. V. Tsoi

Modenov Mikhail Yuryevich — general director, Tula Mechatronic Systems LLC (Tula).*e-mail: m.modenov@yandex.ru***Chukanov Alexander Nikolaevich** — doctor of technical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).*e-mail: alexchukanov@yandex.ru***Tsoi Evgeny Vladimirovich** — senior lecturer, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).*e-mail: tsoyev@tolstovsky.ru***Abstract**

This title describes the development of a mathematical control system for a small fixed-wing aircraft with unconventional aerodynamic surfaces. The research process involved an analysis of the complex factors influencing the dynamics of aircraft, represented by a set of differential equations. The study focused on identifying and selecting the parameters necessary for creating a mathematical model of a non-standard control system. This system is designed to generate and deliver commands to actuators responsible for the aerodynamic surfaces, which are arranged in a unique configuration. The developed mathematical model incorporates the control of innovative, domestically produced brushless electric motors, taking into account their specific technological characteristics. The efficiency of the mathematical model was validated in the MATLAB software environment using the Simulink toolbox, considering various operational conditions. The culmination of the work was the experimental testing of the control system and the mathematical model on a physical prototype, enabling the control of unmanned aerial vehicles with innovative, non-standard aerodynamic configurations.

Keywords: mathematical modeling, differential equations, control systems, aircraft, MATLAB, servos, robotics, printed circuit boards, flight controller.

Bibliography: 16 titles.

For citation:

Modenov, M.Y., Chukanov, A.N., Tsoi, E.V. 2025, "Mathematical modeling of a control system for small fixed-wing aircraft with non-standard aerodynamic surfaces", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 1, pp. 204–217.

1. Введение

Для автоматического управления малыми летательными аппаратами необходимо анализировать большое количество данных с датчиков положения управляющих механизмов. В процессе полета требуется анализировать такие параметры как: ускорение, скорость движения, пройденный путь, скорость ветра по двум осям, магнитное поле земли, тягу двигателя, положение управляющих механизмов и вес летательного аппарата.

На сегодняшний день большинство летательных аппаратов управляется с помощью таких программных продуктов как: ARDUPILLOT, INAV, Betaflight и др. Эти программные продукты опираются на типовые математические модели, основанные на стандартных аэродинамических решениях. Данные программные продукты не позволяют создать и встроить математическую модель и полностью оптимизировать динамику полета при разработке и апробации новых технических решений для летательных аппаратов. Также нет возможности использования специфических алгоритмов обработки сигналов датчиков, в том числе и нестандартных, и применять уникальные разработанные типы датчиков и инерциальные системы. Также при создании нестандартных аэродинамических схем нет возможности управлять сервоприводами для обеспечения полета.

Недостатком стандартных систем управления типа является совокупность факторов таких как: открытая среда разработки с возможностью внесения изменений без уведомления пользователей и эксплуатантов, перегруженность системы управления из-за универсальности устройства, отсутствие глубокого анализа работы системы нижнего уровня, внесение собственных разработок возможно только встраиванием lua скриптов. Применение стандартных алгоритмов обработки не позволяет применить специфические алгоритмы работы и провести математического моделирование конкретного типа разработанного летательного аппарата. Из-за этого падает быстродействие системы, нет возможности создать уникальную систему выработки команд на основе всех датчиков, применяемых на борту и интегрировать дополнительные дифференциальные уравнения выработки команд на управляющие поверхности.

Все вышеизложенные обстоятельства актуализировали потребность в разработке собственной системы, основанной на математической модели позволяющей менять параметры управления летательным аппаратом, применять дополнительные методы фильтрации и обработки данных с различных датчиков, установленных на борту.

При формулировании цели исследования учитывали, что система управления должна совмещать в себе возможность использования как типовых решений, так и возможность применения уникальных разрабатываемых датчиков и систем.

Цель исследования – создание математической модели обработки датчиков летательного аппарата, с возможностью применения различных фильтров и высокоскоростных систем обработки, подходящей для проектирования микропроцессорной системы управления различными исполнительными механизмами. Функционал разрабатываемой системы: управление аэродинамическими поверхностями нестандартной конструкции с помощью сервоприводов; управление ходовыми электродвигателями с контролем тяги; возможность аппаратного управления электродвигателями в векторном режиме с системой точного позиционирования летательных аппаратов с нестандартными аэродинамическими схемами; анализ внешних воздействий среды, с целью коррекции динамики полета и выработки скорректированных команд управления для аэродинамических поверхностей.

2. Математическое моделирование системы управления в Matlab

2.1. Системы координат, пространственное положение и уравнения движения летательных аппаратов

Рассматривая динамические характеристики движения летательного аппарата (ЛА), используют три системы координат (СК): базовую (земную) ($OX_gY_gZ_g$), связанную ($OXYZ$) и скоростную СК ($OX_aY_aZ_a$).

Начало всех трех СК должно совпадать с центром масс ЛА. Положение осей связанной СК определяется углами рыскания ψ , тангажа ν и крена γ . Эти углы ориентации ЛА называют углами Эйлера-Крылова. Скоростная СК связана непосредственно с вектором линейной скорости $\vec{V}$. Ориентация связанной СК относительно скоростной определяется углами сколь-

жения β и атаки α [1]. Базовая, связанная и скоростная СК графически представлены на рис. 1.

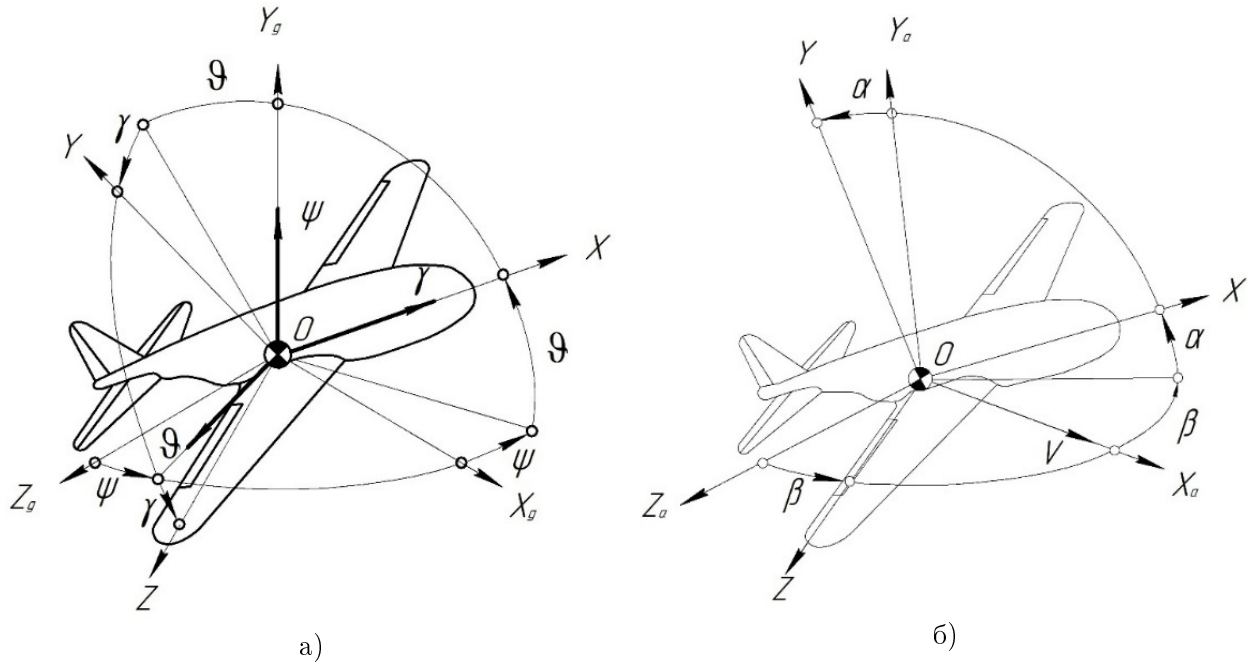


Рис. 1: Базовая, связанная и скоростная СК: а – нормальная и связанная, б – связанная и скоростная

В основе разработанной математической модели лежат базовые уравнения системы движения и имеют вид:

$$\begin{cases} \frac{dV_x}{dt} = \frac{X}{m} - w_y * V_z + w_z * V_y \\ \frac{dV_y}{dt} = \frac{Y}{m} - w_z * V_x + w_x * V_z \\ \frac{dV_z}{dt} = \frac{Z}{m} - w_x * V_y + w_y * V_x \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \frac{dw_x}{dt} = \frac{M_x}{J_x} - \frac{J_z - J_y}{J_x} w_y w_z \\ \frac{dw_y}{dt} = \frac{M_y}{J_y} - \frac{J_x - J_z}{J_y} w_x w_z \\ \frac{dw_z}{dt} = \frac{M_z}{J_z} - \frac{J_y - J_x}{J_z} w_y w_x \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} F_x = -c_x q S - G \sin \vartheta \\ F_y = +c_y q S - G \cos \vartheta \cos \gamma \\ F_z = +c_z q S + G \cos \vartheta \sin \gamma \end{cases} \quad (3)$$

где F_x , F_y , F_z , M_x , M_y , M_z , V_x , V_y , V_z , w_x , w_y , w_z – проекции вектора сил, моментов, скорости центра масс и угловой скорости соответственно на оси связанной системы координат;

m , J_x , J_y , J_z – масса и главные моменты инерции;

$G = mg$ – сила тяжести;

c_x , c_y , c_z – аэродинамические коэффициенты.

Проекции главного момента внешних сил могут быть представлены в виде:

$$\begin{cases} M_x = m_x q S l_x \\ M_y = m_y q S l_y \\ M_z = m_z q S l_z \end{cases} \quad (4)$$

где $q = \frac{1}{2}\rho V^2$ – скоростной напор, ρ – массовая плотность воздуха, V – скорость набегающего потока, m_x , m_y , m_z – аэродинамические коэффициенты моментов, l_x , l_y , l_z – характерные длины [1].

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = V \cos \theta \cos \psi \\ \frac{dy}{dt} = V \sin \theta \\ \frac{dz}{dt} = -V \cos \theta \sin \psi \end{cases} \quad (5)$$

где x , y , z – координаты центра масс ЛА в земной системе координат;
 θ – угол наклона траектории;
 ψ – угол рысканья;
 γ_c – скоростной угол крена;
 γ – угол крена;
 φ – угол поворота траектории;
 ϑ – угол тангажа;
 α – угол атаки;
 β – угол скольжения.

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{F_y \cos \gamma_c - F_z \sin \gamma_c}{m} \quad (6)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = -\frac{F_y \sin \gamma_c - F_z \cos \gamma_c}{m V \cos \theta} \quad (7)$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = w_y \sin \gamma + w_z \cos \gamma \quad (8)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{\cos \vartheta} (w_y \cos \gamma - w_z \sin \gamma) \quad (9)$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = w_x - tg \vartheta (w_y \cos \gamma - w_z \sin \gamma) \quad (10)$$

$$\alpha = \arcsin \left[[\sin(\psi - \varphi) \cos \theta \sin \gamma - (\sin \theta \cos \vartheta - \cos(\psi - \varphi) \cos \theta \sin \vartheta) \cos \gamma] \frac{1}{\cos \beta} \right] \quad (11)$$

$$\beta = \arcsin \left[[\sin(\varphi - \psi) \cos \theta \sin \vartheta - \sin \theta \cos \vartheta] \sin \gamma + \sin(\varphi - \psi) \cos \theta \cos \gamma \right] \quad (12)$$

$$\gamma_c = \arcsin \left[\frac{\sin \theta \sin \beta + \cos \vartheta \sin \gamma}{\cos \beta \cos \theta} \right] \quad (13)$$

Для решения нашей задачи моделирования движения планера можно использовать уравнения движения 1–13, которые представляют собой комплекс дифференциальных уравнений (далее ДУ). Данные ДУ необходимо упростить с помощью операционного преобразования Лапласа (ОПЛ). ОПЛ обычно используется для получения аналитических решений ДУ. Данное интегральное преобразование связывает функции комплексных переменных с функциями вещественных переменных. Решение ДУ значительно упрощается при использовании ОПЛ. При этом каждой временной функции $x(t)$ или $y(t)$ соответствует функция $X(p)$ или $Y(p)$ (комплексной переменной $p = c + j\omega$, где p – оператор преобразования Лапласа). ОПЛ выполняется по формуле:

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{(-pt)} dt \quad (14)$$

где $f(t)$ – оригинал функции;

$F(p)$ – изображение функции по Лапласу.

Переход от оригинала к изображению называется прямым преобразованием Лапласа и имеет символическую запись: $F(p) = L\{f(t)\}$ [2 – 5].

В результате ОПЛ указанных выше ДУ были получены передаточные функции каждого звена. Звеном называют составную часть структурной схемы автоматических систем управления, представляющую собой алгоритм преобразования сигнала (математическая или логическая операция). Передаточная функция звена – это отношение изображений Лапласа выходной и входной величин звена при нулевых начальных условиях, она обозначается $W(p)$.

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} \quad (15)$$

Между ДУ и $W(p)$ существует однозначная связь. Формально $W(p)$ звено можно представить как отношение операторных многочленов правой и левой частей уравнения звена.

Также звено характеризуется переходными функциями, частотными характеристиками, амплитудно-частотными характеристиками (АЧХ), фазо-частотными характеристиками (ФЧХ), амплитудно-фазовыми частотными характеристиками (АФЧХ) и логарифмическими частотными характеристиками. Звенья подразделяются на несколько типов: дифференцирующее звено, идеальное усилительное (безынерционное) звено, инерционное звено 1-го порядка (апериодическое звено), колебательное звено и реальное дифференцирующее звено [6-10].

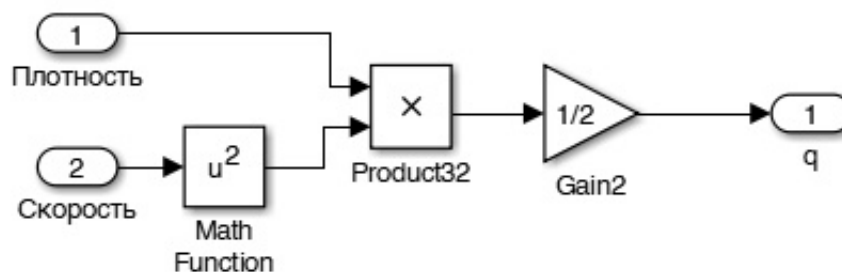


Рис. 2: Подсистема структурной схемы разработанной в Matlab Simulink «Вычисление воздушного потока»

Структурная схема, состоящая из подобных звеньев (рис. 2), является математической моделью, описывающей необходимые условия полета. Данная математическая модель позволила разработать контур управления и блок выработки команд, которые описывают динамику полета и могут передавать выработанные команды на исполнительные механизмы. Структурная схема контура управления и блока выработки команд была разработана среде моделирования и проектирования динамических систем Matlab Simulink.

2.2. Реализация модели в Matlab Simulink

Программа в данной среде представляется в виде, похожем на блок-схемы, что дает наглядное представление способа функционирования реализованной модели. Для более точного моделирования полета планера без двигателя в Simulink, была использована модель, которая учитывает дополнительные факторы, такие как изменение величины ускорения свободного падения и изменение плотности воздуха в зависимости от высоты.

Модель включает в себя следующие блоки:

- блоки Integrator, которые отвечают за интегрирование;

- блоки Constant, в которых задается начальное значение высоты, скорости планера, массы и др.;
- блоки Trigonometric Function, в которых рассчитываются углы в соответствии с уравнениями;
- блоки Gain, в которых устанавливаются значения коэффициентов лобового сопротивления и подъемной силы и др.;
- блоки Product, где производится умножение;
- блоки Sum;
- блоки Saturation, которые ограничивают величину угла отклонения органов управления и др [15].

Одним из важнейших этапов разработки было моделирование полета планера без двигателя. Дополнительные факторы, которые необходимо было учитывать, включают в себя:

1. Маневренность. У планеров может быть различная маневренность, в зависимости от их конструкции. Это может влиять на то, как они выигрывают высоту или ускоряются при полете.
2. Турбулентность. Турбулентность воздуха может создавать непредсказуемые колебания и изменения скорости планера. Моделирование этого фактора может быть очень сложным и может потребовать использования стохастических методов моделирования.
3. Эффект близости к поверхности Земли. Планеры могут использовать эффект близости к поверхности Земли, чтобы улучшить свою подъемную силу. Это может быть учтено в модели с помощью корректировки подъемной силы в зависимости от высоты.
4. Влияние термических потоков. Воздух может нагреваться неравномерно в разных местах, создавая термические потоки, которые планеры могут использовать для взлета и подъема. Для моделирования этого фактора может потребоваться учет метеорологических условий и термических карт.
5. Воздействие солнечной радиации. Воздействие солнечной радиации на крылья и тело планера может вызвать изменение их термических свойств, что может влиять на аэродинамические свойства планера и его динамику полета.
6. Влияние погодных условий. Прогноз погоды может быть важным фактором, который нужно учитывать при моделировании полета планера без двигателя. Это может включать в себя учет ветра, турбулентности и т.д. [11-14].

Разработка систем учитывающих подобный перечень факторов требует более сложного математического и физического анализа, а также использования более продвинутых методов моделирования, таких как физико-статистические методы или методы гидродинамики. С учетом перечисленных факторов, была создана математическая модель, которая позволяет разрабатывать более эффективные и безопасные планеры инновационного типа, в том числе с нестандартными аэродинамическими поверхностями.

Некоторые структурные составляющие полученной в Simulink модели, приведены на рисунках 3-6.

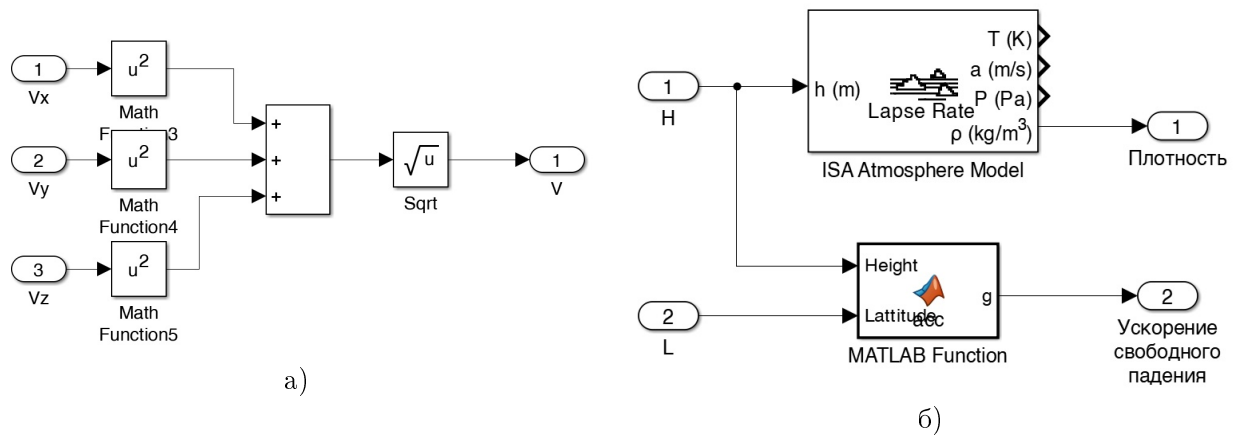


Рис. 3: Подсистемы: а - «Вычисление скорости», б - «Среда»

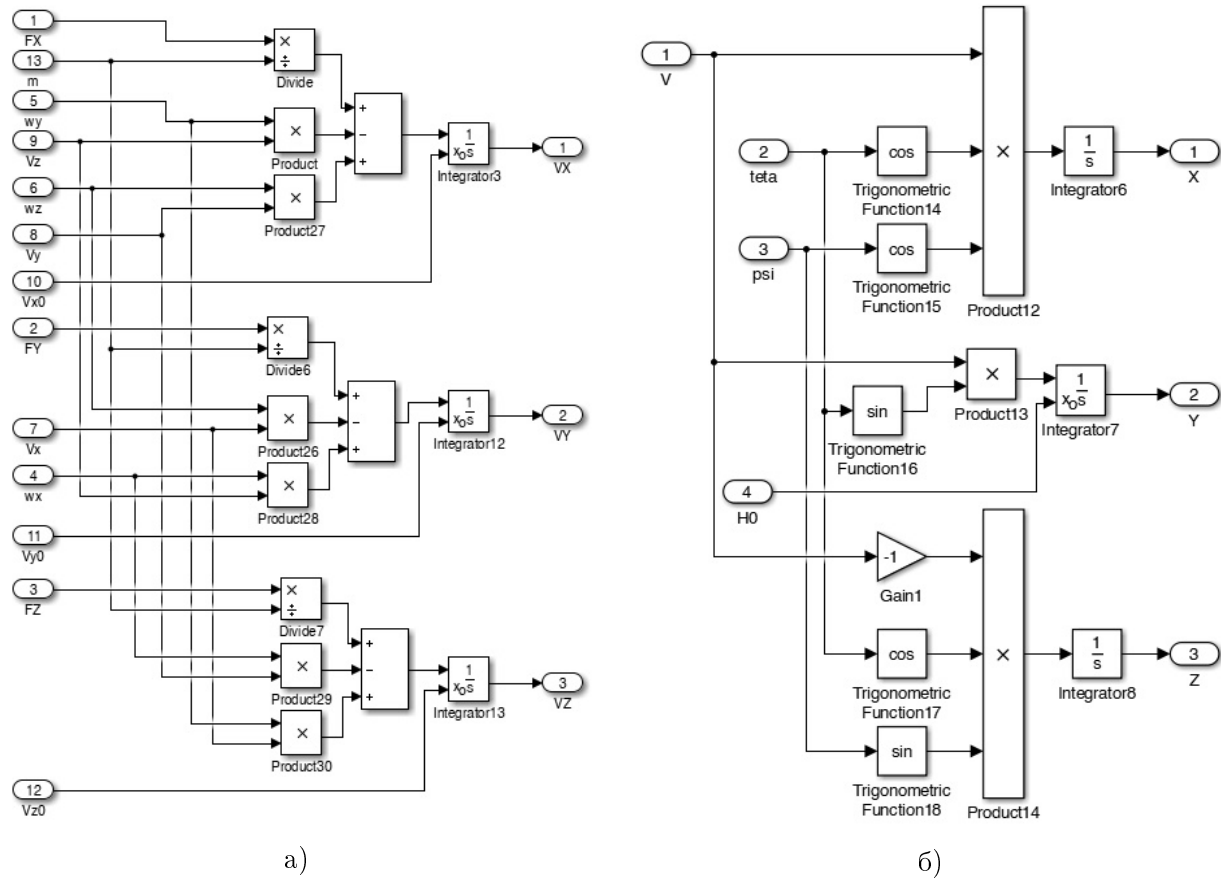


Рис. 4: Подсистемы: а - «Уравнения скоростей»; б - «Вычисление координат»

В результате моделирования беспилотного планера при начальной высоте 7 метров и начальной скорости 15 м/с были получены графики, приведенные ниже.

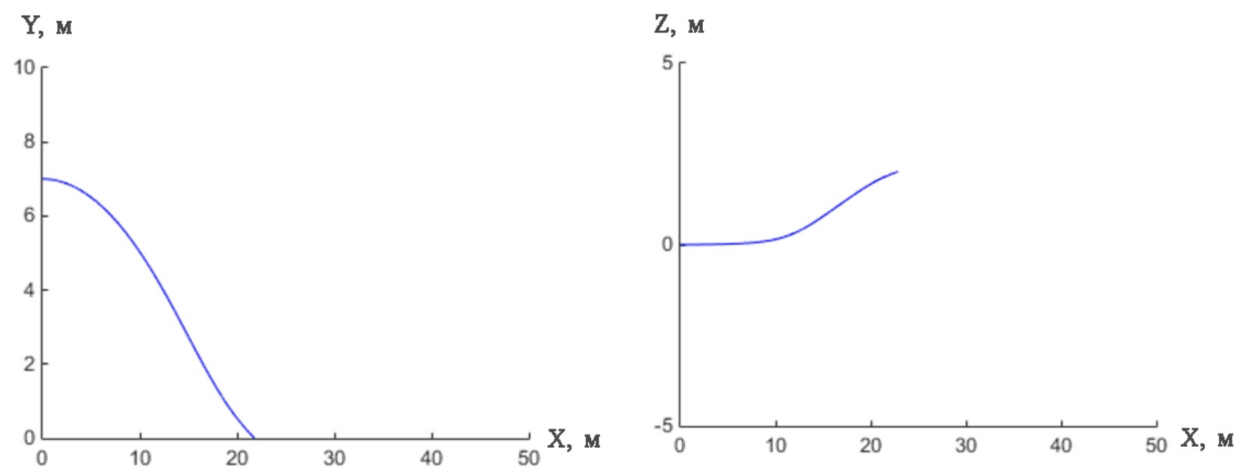


Рис. 5: Траектория движения беспилотного планера в плоскостях O_{xy} и O_{xz} при начальной высоте 7 метров и начальной скорости 15 м/с

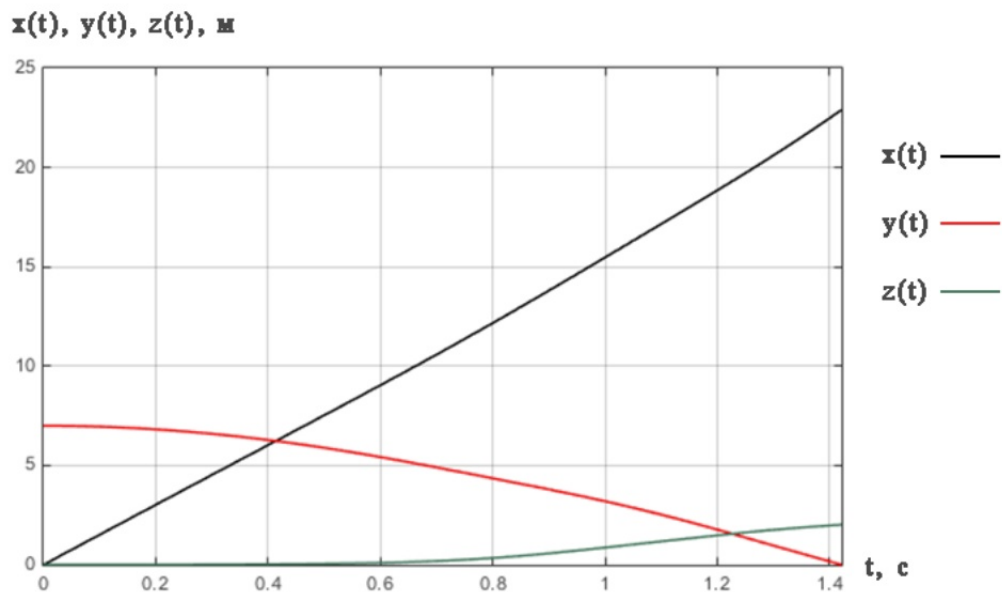


Рис. 6: График изменения координат $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ при начальной высоте 7 метров и начальной скорости 15 м/с

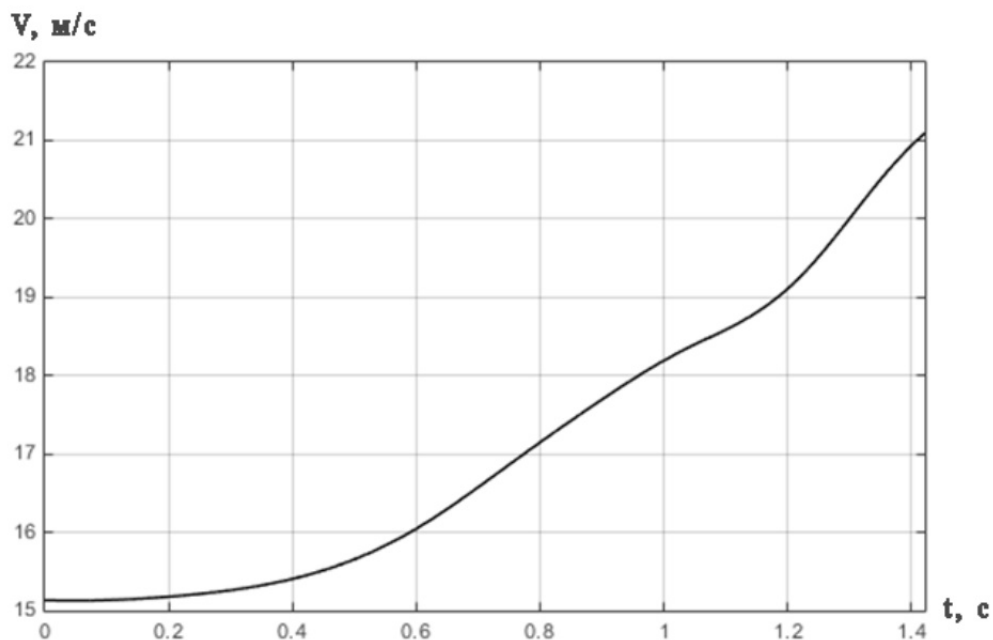


Рис. 7: График изменения скорости $V(t)$ при начальной высоте 7 метров и начальной скорости 15 м/с

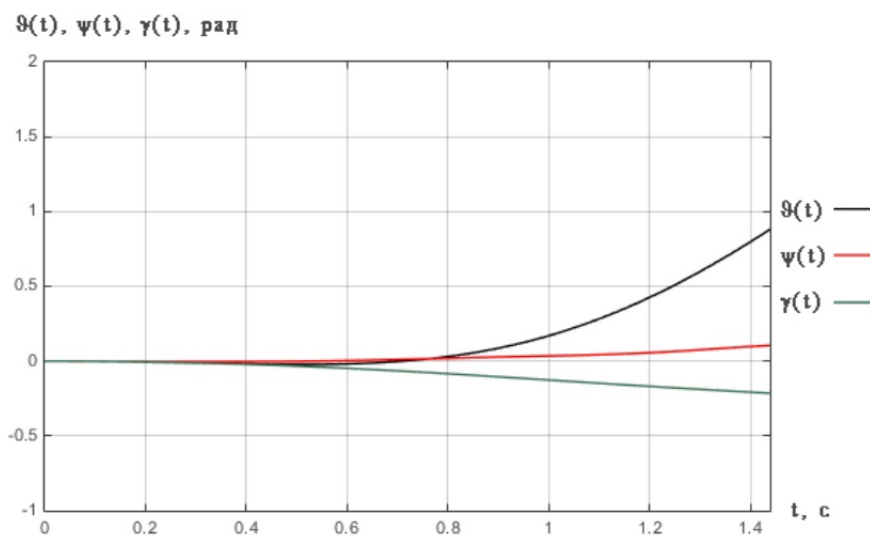


Рис. 8: График изменения углов $\vartheta(t)$, $\psi(t)$, $\gamma(t)$ при начальной высоте 7 метров и начальной скорости 15 м/с

В результате моделирования беспилотного планера при начальной высоте 90 метров и начальной скорости 60 м/с получены графики, приведенные на рисунках 9 – 11.

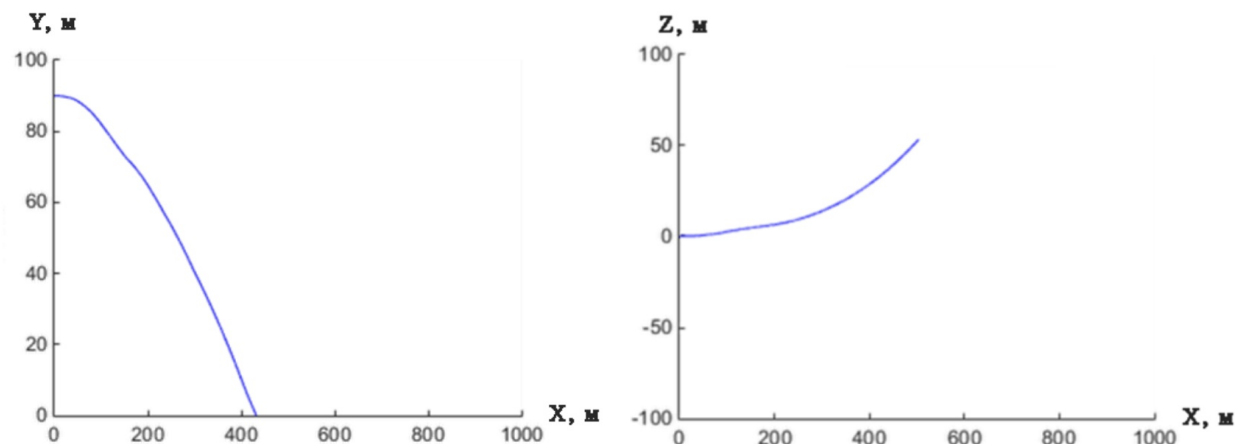


Рис. 9: Траектория движения беспилотного планера в плоскостях O_{xy} и O_{xz} при начальной высоте 90 метров и начальной скорости 60 м/с

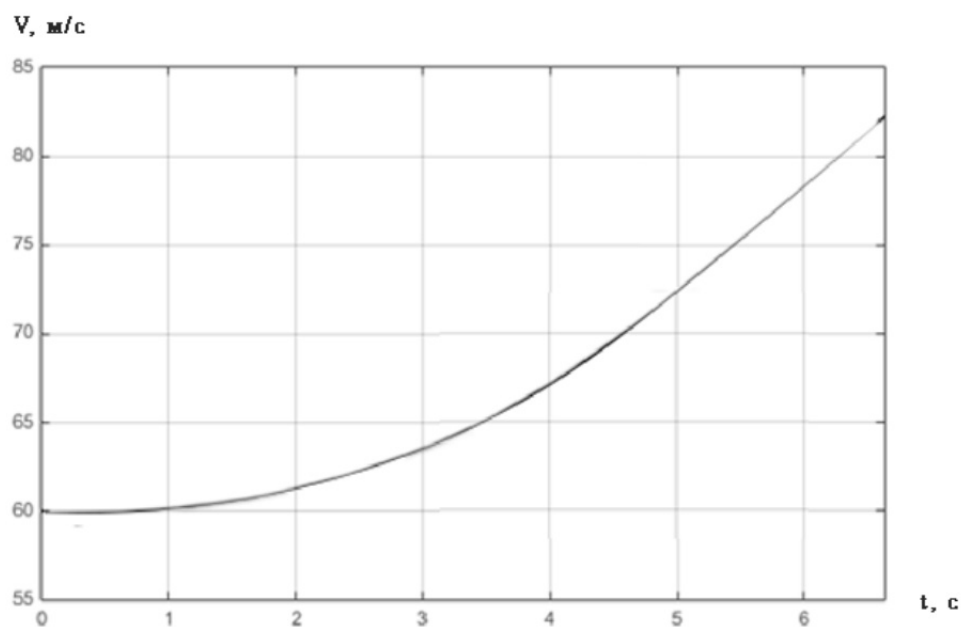


Рис. 10: График изменения скорости $V(t)$ при начальной высоте 90 метров и начальной скорости 60 м/с

При действии возмущения (боковой ветер 2 м/с) планер отклоняется в плоскости O_{xz} по оси z на 2,5 метра на высоте 7 метров. Для уменьшения отклонения по направлению и стабилизации по углу крена вводится управление, содержащее ПИД регулятор. Использование математического моделирования с использованием инструментов Matlab Simulink по подобному алгоритму стало основой для проектирования микропроцессорной системы управления летательным аппаратом с нестандартными аэродинамическими характеристиками.

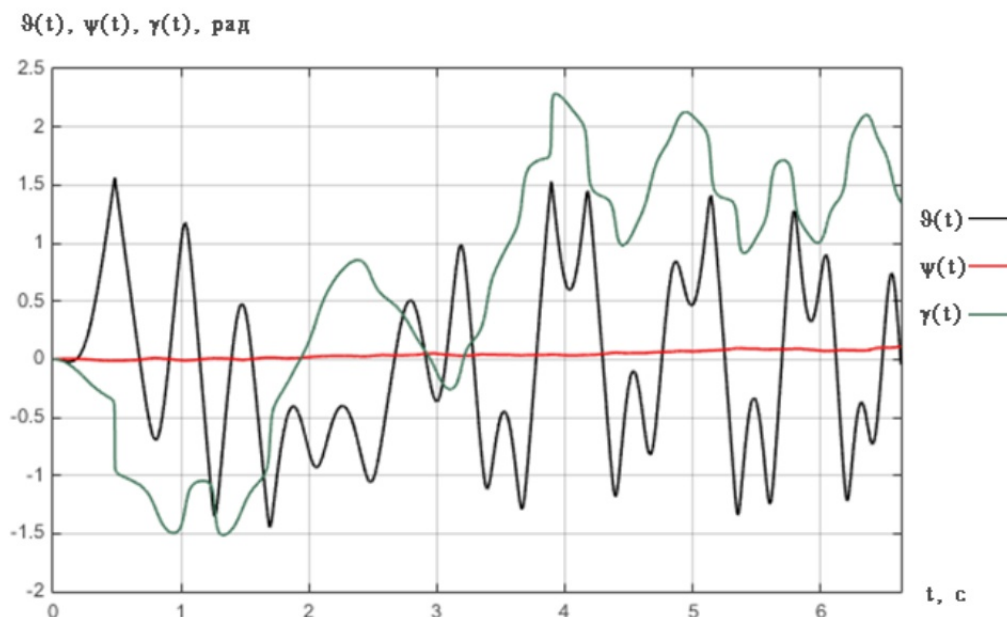


Рис. 11: График изменения углов $\vartheta(t)$, $\psi(t)$, $\gamma(t)$ при начальной высоте 80 метров и начальной скорости 70 м/с

3. Заключение

Результатом работы стала математическая модель, которая может быть скорректирована и оптимизирована под различные типы инновационных летательных аппаратов с нестандартной аэродинамической схемой. Проведен анализ работы математической модели системы управления. Полученные данные описали динамику полета, благодаря чему можно вводить различные математические методы коррекции и выработки команд. Для апробации математической модели и тестирования отработки системы была создана микропроцессорная система управления с платой обработки и выработки команд, которая позволяет использовать набор большого количества датчиков различного назначения [16].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алалуев Р.В., Ладонкин А.В., Малютин Д.М., Матвеев В.В., Машнин М.Н., Парамонов П.П., Погорелов М.Г., Распопов В.Я., Сабо Ю.И., Телухин С.В., Товкач С.Е., Шведов А.П., Шукалов А.В. Микросистемы ориентации беспилотных летательных аппаратов / Под. ред. В.Я. Распопова. - М.: Машиностроение, 2011. - 184 с.
2. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического управления. М. - Изд. 4-е, перераб. и доп. - СПб.: Профессия, 2004. - 752 с.
3. Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. Введение в теорию бесплатформенных инерциальных навигационных систем. М.: Наука, 1992. 280 с.
4. Журавлев Д.О., Зау Х.Н. Эволюция систем управления беспилотных летательных аппаратов: от появления до наших дней. // Достижения и перспективы современной науки. Матер. межд. (заочной) НПК (Астана, Казахстан. 07.02.2017 г.) / Научно-издательский центр «Мир науки» – Астана, Казахстан. 2017. – С. 57–87.

5. Матвеев В.В., Распопов В.Я. Основы построения бесплатформенных инерциальных навигационных систем. СПб ОАО «Концерн «ЦНИИ Электронприбор», 2009. 280 с.
6. Маркелов М.К., Ишков А.С., Новичков Д.А., Борисов Н.А. Пример реализации радиоэлектронной системы беспилотного летательного аппарата // Вестник Пензенского государственного университета. 2022г., вып. 4. С. 96–100.
7. Jordan, J.W. An Accurate Strapdown Direction Cosine Algorithm / Jordan, J. W. / NASATN-D-5384, September 1969.
8. Paul G. Savage. Coning Algorithm Design by Explicit Frequency Shaping // Journal of Guidance Control and Dynamics. Vol. 33.No. 4.July– August 2010. P. 1123–1132.
9. Savage, P. G. Strapdown Inertial Navigation System Integration Algorithm Design Part 1-Attitude Algorithms // Journal of Guidance Control, and Dynamics.Vol. 21. No. 1. Jan.–Feb. 1998. P. 19–28.
10. Kelly M. Roscoe. Equivalency Between Strapdown Inertial Navigation Coning and Sculling Integrals //Algorithms, Journal of Guidance Control, and Dynamics. Vol. 24.No. 2. March–April 2001.
11. Моденов М.Ю. Периферийный блок системы точного позиционирования для преобразования сигналов СКВТ. В сб.: Современные технологии в задачах управления, автоматики и обработки информации. Сб. трудов XXIX Международной научно-технической конференции. Москва, 2020. С. 88–89.
12. Моисеев В.С. Прикладная теория управления беспилотными летательными аппаратами: М. – Казань: ГБУ «Республиканский центр мониторинга качества образования» (Серия «Современная прикладная математика и информатика»).2013 г. – 768 с.
13. Распопов В.Я. Микросистемная авионика: уч. пособие. Тула: «Гриф и К», 2010. 248 с.
14. Распопов В.Я., Малютин Д.М., Алалуев Р.В., Погорелов М.Г., Шведов А.П. Системы ориентации МБПЛА. Справочник. Инженерный журнал. ГОУ ВПО «Тульский государственный университет» 2010 г. Номер: 11 (164). С. 51–56.
15. Черных И. В. Моделирование электротехнических устройств в MATLAB, SimPowerSystems и Simulink. // М.: ДМК Пресс; СПб.: Питер, 2008. – 288 с.
16. Чуканов А.Н., Моденов М.Ю., Цой Е.В. Проектирование, отладка и изготовление платы аппаратно-программного комплекса. Информационные технологии в управлении, автоматизации и мехатронике. Сб. научн. ст. 4-й Международной НТК. Отв. редактор М.С. Разумов. Курск, 2022. С. 205-209.

REFERENCES

1. Alaluev, R.V., Ladonkin, A.V., Malyutin, D.M., Matveev, V.V., Mashnin, M.N., Paramonov, P.P., Pogorelov, M.G., Raspopov, V.Ya., Sabo, Yu.I., Telukhin, S.V., Tovkach, S.E., Shvedov, A.P., Shukalov, A.V. 2011, “Microsystems of orientation of unmanned aerial vehicles”, Edited by V.Ya. Raspopov, *Moscow: Mashinostroenie Publ.*, 184 p.
2. Besekersky, V.A., Popov, E.P. 2004, “Theory of automatic control systems”, *Moscow - 4th ed., revised and enlarged - St. Petersburg: Profession*, 752 p.

3. Branets, V.N., Shmyglevsky, I.P. 1992, "Introduction to the Theory of Strapdown Inertial Navigation Systems", *Moscow: Nauka*, 280 p.
4. Zhuravlev, D.O., Zau, H.N. 2017, "Evolution of control systems of unmanned aerial vehicles: from the emergence to the present day", *Achievements and prospects of modern science. Proceedings of the international (correspondence) scientific and practical conference (Astana, Kazakhstan. 07.02.2017)*. Scientific and Publishing Center "World of Science" - Astana, Kazakhstan. pp. 57–87.
5. Matveev, V.V., Raspopov, V.Ya. 2009, "Fundamentals of constructing strapdown inertial navigation systems", *St. Petersburg JSC "Concern "TsNII Elektropribor""*, 280 p.
6. Markelov, M.K., Ishkov, A.S., Novichkov, D.A., Borisov, N.A. 2022, "An example of the implementation of the radio-electronic system of an unmanned aerial vehicle", *Vestnik of Penza State University*. Iss. 4, pp. 96–100.
7. Jordan, J.W. 1969, "An Accurate Strapdown Direction Cosine Algorithm", *Jordan, J. W. NASATN-D-5384*, 80 p.
8. Paul G. Savage. 2010, "Coning Algorithm Design by Explicit Frequency Shaping", *Journal of Guidance Control and Dynamics*, Vol. 33, № 4. pp. 1123–1132.
9. Savage, P. G. 1998, "Strapdown Inertial Navigation System Integration Algorithm Design Part 1-Attitude Algorithms", *Journal of Guidance Control, and Dynamics*, Vol. 21, No. 1. P. 19–28.
10. Kelly M. Roscoe. 2001, "Equivalency Between Strapdown Inertial Navigation Coning and Sculling Integrals". Algorithms, *Journal of Guidance Control, and Dynamics*. Vol. 24.No.2. p. 201-205.
11. Modenov, M.Yu. 2020, "Peripheral unit of the precision positioning system for converting SCVT signals", In: Modern technologies in control, automation and information processing problems. Collection of proceedings of the XXIX International Scientific and Technical Conference. Moscow, pp. 88-89.
12. Moiseev, V.S. 2013, "Applied Theory of Control of Unmanned Aerial Vehicles", *M. – Kazan: State Budgetary Institution "Republican Center for Monitoring the Quality of Education" (Series "Modern Applied Mathematics and Computer Science")*, 768 p.
13. Raspopov, V.Ya. 2010, "Microsystem avionics: study guide", *Tula: Grif and K*, 248 p.
14. Raspopov, V.Ya., Malyutin, D.M., Alaluev R.V., Pogorelov M.G., Shvedov A.P. 2010, "Orientation systems of UAVs", *Handbook. Engineering journal. State Educational Institution of Higher Professional Education "Tula State University"*, Issue: 11 (164), pp. 51-56.
15. Chernykh, I. V. 2008, "Modeling of electrical devices in MATLAB, SimPowerSystems and Simulink", *M.: DMK Press; St. Petersburg: Piter*, 288 p.
16. Chukanov, A.N., Modenov, M.Yu., Tsoi, E.V. 2022, "Design, debugging and manufacturing of a hardware-software complex board", *Information technologies in control, automation and mechatronics. Coll. scientific. art. of the 4-th International STC. Responsible. editor M.S. Razumov. Kursk*, pp. 205-209.

Получено: 17.09.2024

Принято в печать: 10.03.2025

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 26. Выпуск 1.

УДК 004.94

DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-1-218-228

Математическое моделирование идеального контура управления летательным аппаратом нестандартного типа в среде MATLAB¹

М. Ю. Моденов, А. Н. Чуканов, Е. В. Цой

Моденов Михаил Юрьевич — генеральный директор, ООО «Тульские мехатронные системы» (г. Тула).

e-mail: m.modenov@yandex.ru

Чуканов Александр Николаевич — доктор технических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: alexchukanov@yandex.ru

Цой Евгений Владимирович — старший преподаватель, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: tsoyev@tolstovsky.ru

Аннотация

Описан метод анализа идеального контура летательного аппарата (ЛА), который необходим для проектирования ЛА с нестандартными аэродинамическими поверхностями. Аэродинамические поверхности ЛА считаются каналом управления, на который формирует воздействие блок выдачи команд. Для создания идеального контура управления был проведен расчет частотных, фазовых характеристик. Работа математической модели была проверена в программном комплексе MATLAB с помощью дополнения SIMULINK с учетом различных условий эксплуатации.

В процессе работы была оптимизирована переходная характеристика процесса отработки управляющего воздействия системы с помощью разработанной математической модели летательного аппарата в среде MATLAB SIMULINK.

Итогом работы стала апробация идеального контура управления на реальном устройстве при сохранении запаса устойчивости и стабильности полета с различными задержками вычислительного модуля.

Ключевые слова: контур управления, MATLAB, дифференциальный фильтр, коэффициент управления, математическая модель, управляющее воздействие.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:

Моденов, М.Ю., Чуканов, А.Н., Цой, Е.В. Математическое моделирование идеального контура управления летательным аппаратом нестандартного типа в среде MATLAB // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 1, с. 218–228.

¹Представленные в данной статье исследования выполнены на средства гранта Правительства Тульской области в сфере науки и техники 2023 г. «Разработка замкнутой системы управления для работы с бесколлекторными инновационными двигателями» (договор № ДС/121 от 27.09.2023 г.).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 26. No. 1.

UDC 004.94

DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-1-218-228

Mathematical modeling of an ideal control loop for a non-standard type aircraft in the MATLAB environment

M. Y. Modenov, A. N. Chukanov, E. V. Tsoi

Modenov Mikhail Yuryevich — general director, Tula Mechatronic Systems LLC (Tula).*e-mail: m.modenov@yandex.ru***Chukanov Alexander Nikolaevich** — doctor of technical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).*e-mail: alexchukanov@yandex.ru***Tsoi Evgeny Vladimirovich** — senior lecturer, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).*e-mail: tsoyev@tolstovsky.ru***Abstract**

A method for analyzing the ideal contour of an aircraft, which is necessary for designing aircraft with non-standard aerodynamic surfaces, is described. The aerodynamic surfaces of the aircraft can be considered a control channel, which is influenced by the command output unit. To create an ideal control loop, the frequency and phase characteristics were calculated. The mathematical model was tested in the MATLAB software package using the SIMULINK add-on, taking into account various operating conditions.

In the course of the work, the transient characteristic of the process of testing the control action of the system was optimized using the developed mathematical model of the aircraft in the MATLAB SIMULINK environment.

The result of the work was the testing of an ideal control loop on a real device, while maintaining a margin of stability and flight stability with various delays of the computing module.

Keywords: control loop, MATLAB, differential filter, control coefficient, mathematical model, control action.

Bibliography: 15 titles.

For citation:

Modenov, M.Y., Chukanov, A.N., Tsoi, E.V. 2025, "Mathematical modeling of an ideal control loop for a non-standard type aircraft in the MATLAB environment", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 1, pp. 218–228.

1. Введение

Для построения идеального контура управления летательным аппаратом необходимо построить математическую модель реальной системы с учетом множества входных воздействий, вводить дифференцирующий фильтр (далее ДФ) и выполнить подбор коэффициентов. При работе динамического контура необходимо учитывать такие параметры как: значения разности ДФ, запаздывание рулевых механизмов, коэффициент управления летательного аппарата, скорость летательного аппарата (ЛА), максимальный модуль внешних возмущений, модуль допустимого промаха начальная скорость [1-3]. Выполнение подобных задач осуществимо в

программной среде Matlab Simulink с помощью блоков на основе операторного представления дифференциальных уравнений. Создание с помощью данного программного обеспечения модели контура управления ЛА, учитывающей все необходимые коэффициенты и внешние воздействия, и ее анализ позволяет достичь высокого быстродействия, низкого перерегулирования, и обеспечить оптимальное управляющее воздействие, для отсутствия перегрузок на управляющие механизмы. Передаточные функции системы являются отношением изображения по Лапласу выходного сигнала $Y(p)$ к такому же изображению входного сигнала $X(p)$ при нулевых начальных условиях. Передаточные функции описывают состояние физического объекта (процесса) показывая такие свойства системы управления как частотная, фазовая и амплитудная характеристика системы управления и вычисление фазового запаса устойчивости системы при отсутствии обратной связи (разомкнутая система) [4,5].

Цель исследования - выявление динамических особенностей контура управления ЛА при его коррекции дифференцирующим фильтром (ДФ) в системе математического моделирования MATLAB Simulink.

Для достижения цели были поставлены следующие задачи:

1. Построить структурную схему идеального контура управления ЛА на основе применения ДФ;
2. Определить диапазон изменения параметров ДФ, при которых обеспечиваются требуемые характеристики;
3. Проанализировать влияние параметров ДФ на качество переходного процесса вывода ЛА на линию заданную траекторию с начального отклонения.

Решение данных задач и практика обеспечения устойчивости переходного процесса с применением корректирующего фильтра, обеспечивающего фазовое опережение в районе частоты среза контура управления описаны ниже.

2. Математическое моделирование идеального контура управления в Matlab

Контур управления ЛА без корректирующего устройства является структурно неустойчивой системой. Для обеспечения устойчивости и требуемого качества переходного процесса необходимо применение корректирующего фильтра, обеспечивающего фазовое опережение в районе частоты среза контура управления [6-8].

Для исследования особенностей коррекции ДФ была создана математическая модель идеального контура управления ЛА. В основе этой математической модели лежат динамические характеристики движения ЛА. Упростив с помощью операционного преобразования Лапласа эти уравнения, можно связать функции комплексных переменных с функциями вещественных переменных и получить передаточные функции звеньев структурной схемы идеального контура управления ЛА.

Простейшей реализацией такой коррекции является применение фильтра с передаточной функцией следующего вида:

$$W_{\Phi}(p) = k_{\Phi} \frac{T_{\Phi}(p) + 1}{\frac{T_{\Phi}}{n} p + 1}, \quad (1)$$

где k_{Φ} , T_{Φ} , n - соответственно коэффициент усиления, постоянная времени и разнос фильтра.

В практике проектирования систем управления рассматриваемого класса фильтр при $n > 1$ принято называть дифференцирующим (ДФ).

Для выявления особенностей коррекции ДФ необходимо рассмотреть его работу на примере формирования идеального контура управления ЛА. Базовая структурная схема идеального контура управления ЛА представлена на рис. 1.

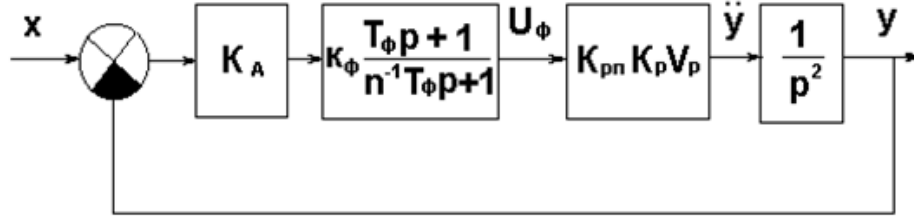


Рис. 1: Базовая структурная схема идеального контура управления ЛА.

$K_a, K_{рп}, K_p$ – коэффициенты скорости передачи данных, рулевого привода и ЛА соответственно; V_p – скорость ЛА; $U_Ф$ – управляющее напряжение; y и $\ddot{y}$ – соответственно отклонение и ускорение ЛА в траекторной системе координат, $T_Ф$ – постоянная времени ДФ, n – значение разности ДФ.

Введенная идеализация предполагает отсутствие перекрестных связей между каналами управления и безынерционность составляющих звеньев (достаточно потребовать независимость искажений амплитуды и фазы сигнала от частоты), линейность их статических характеристик и постоянство коэффициентов передачи по времени.

Как следует из рис. 1, наибольший корректирующий эффект от применения ДФ достигается в том случае, когда максимум фазовой характеристики фильтра приходится на частоту среза разомкнутой системы скорректированного контура управления. Можно считать, что выполнение сформулированного условия обеспечивается следующими соотношениями [9-11]:

$$T_Ф = \sqrt{\frac{\sqrt{n}}{k_0 V_p}}; n = \frac{1 + \sin \Delta \theta}{1 - \sin \Delta \theta}, \quad (2)$$

где $k_0 = k_a \cdot k_Ф \cdot k_{рп} \cdot k_p$, а $\Delta \theta$ – требуемый запас по фазе.

Необходимое значение коэффициента усиления по разомкнутому контуру можно определить из условия обеспечения точности в установившемся режиме:

$$k_0 V_p = \frac{|\bar{\omega}_k|}{|\Delta \bar{y}_\delta|}, \quad (3)$$

где $\Delta \bar{y}_\delta$ – вектор допустимого отклонения от траектории.

Выражения аналитически решают задачу формирования контура управления ЛА с ДФ в идеальном приближении при заданных ограничениях на запас устойчивости по фазе и допустимое отклонение от траектории при известном максимальном значении вектора возмущений.

Для проверки показателей качества переходного процесса (перерегулирования и времени «входа» ЛА в контур истинного значения координат на входе системы) моделировали контур управления в Matlab Simulink. Ориентировочную оценку величины перерегулирования осуществили по следующей приближенной формуле [12-14]:

$$\sigma = \exp\left(-\pi t g \frac{\Delta \theta}{2}\right). \quad (4)$$

Расчёт по требуемому запасу по фазе в среде MATLAB выглядит следующим образом (программный код в среде MATLAB SIMULINK):

```
d_tetta= pi/4;% - приемлемый запас-устойчивости по фазе
n= (1+ sin(d_tetta))/ (1- sin(d_tetta)); % - значения разноса диффильтра
% K0Vp — коэф. разомкнутой цепи умноженный на скорость
% Все коэф. приравняем 1, для упрощения расчёта, кроме Kf
% Тогда K0Vp = Kf
Ka= 1; % - КУ аппаратуры выделения координат
Krp= 1; % - КУ рулевого привода
Kr= 1; % - КУ летательного аппарата
Vp= 1; % - Скорость ЛА (const);
wx= 10; % - Максимальный модуль внешних возмущений
delta_y= 1; % - Модуль допустимого промаха
Kf= wx/ delta_y; % - КУ ДФ и также РС (в данном случае)
Tf= sqrt(sqrt(n)/ Kf); % - Постоянная времени ДФ
sigma= exp(-pi* tan(d_tetta/2))* 100; % - Ориентировочная оценка перерегулирования:
fprintf('Перерегулирование = %0.1f%%\n', sigma);
y0= [2, 0]; % - Начальные условия (координата | скорость)
```

Разработанная в MATLAB SIMULINK структурная схема идеального контура управления ЛА представлена на рис. 2.

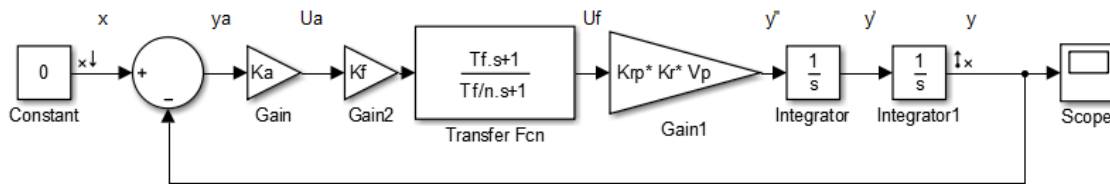
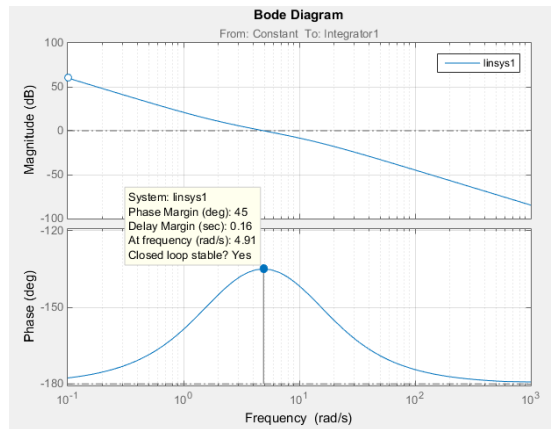


Рис. 2: Структурная схема идеального контура управления ЛА, разработанная в среде Matlab Simulink.

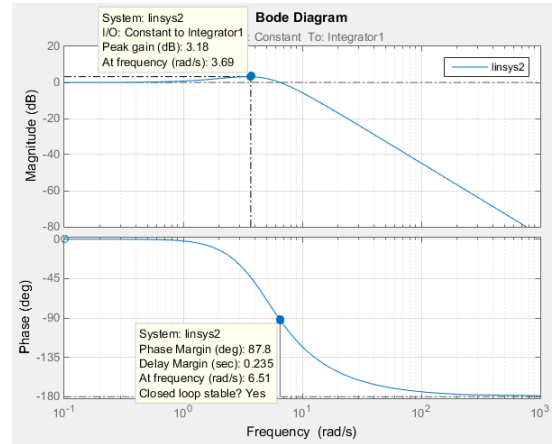
K_a , K_f , K_{rp} – коэффициенты скорости передачи данных, рулевого привода и ЛА соответственно; V_p – скорость ЛА; y_a – отклонение ЛА в лучевой системе координат; U_f – управляющее напряжение; U – ускорение и отклонение ЛА в траекторной системе координат.

С помощью разработанной модели Simulink можно снять частотную характеристику контура управления, вычислить эмпирически запас по фазе необходимый для устойчивости системы, посмотреть скорость отработки системы на единичное воздействие при заданных начальных условиях. Также немаловажным аспектом является возможность увидеть резонансную частоту контура управления, в котором система не стабильно работает.

В результате анализа разработанной модели идеального контура управления ЛА получили логарифмическую амплитудно-фазовую частотную характеристику (ЛАФЧХ) представленную на рис. 3-4. По графикам определяли частоту среза системы, резонансную частоту, вычислили запас устойчивости системы по фазе.



а)



б)

Рис. 3: ЛАФЧХ: а – разомкнутая система, б – замкнутая система.

По графику б система удовлетворяет необходимому запасу по фазе, и он составляет более 30 градусов. На графике, а приведена ЛАФЧХ с параметрами системы. Вычислили частоту среза система (4.91 рад секунда) при этом фаза составляет 45 градусов.

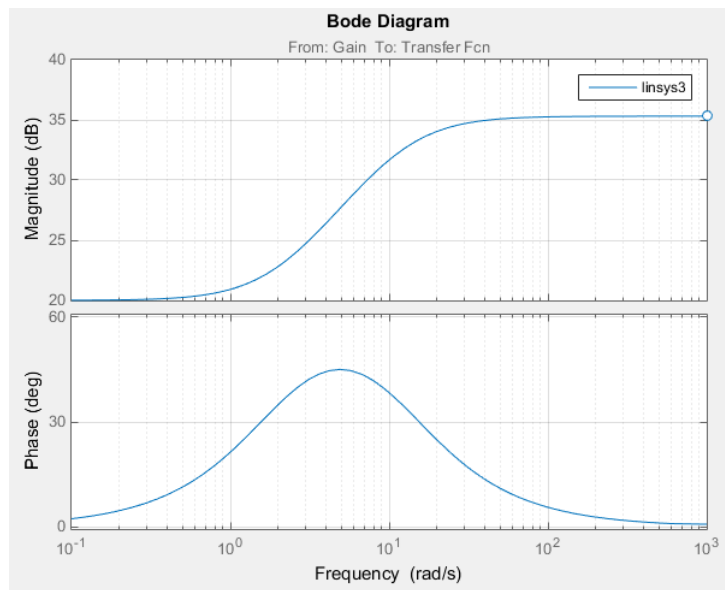


Рис. 4: ЛАФЧХ дифференцирующего фильтра.

В результате моделирования получили ЛАФЧХ дифференцирующего фильтра при этом максимальное воздействие составило 30 дБ/дек и фазу 45 градусов.

Исследование влияния разнота ДФ (Дифференцирующего фильтра) в MATLAB SIMULINK выглядело следующим образом:

% K0Vp — коэф. разомкнутой цепи умноженный на скорость

% Все коэф. приравняем 1, кроме Kf

% Тогда K0Vp = Kf

Ka = 1; % - КУ аппаратуры выделения координат

Krp = 1; % - КУ рулевого привода

Kr = 1; % - КУ летательного аппарата

Vp = 1; % - Скорость ЛА (const);

```

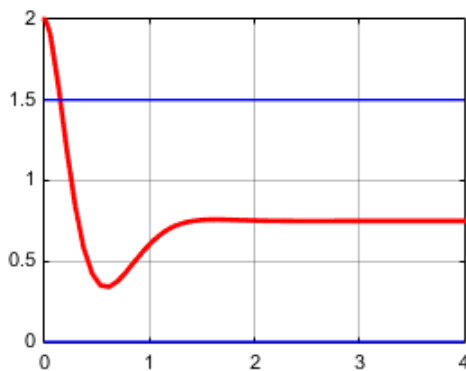
wx= 10; % - Максимальный модуль внешних возмущений
delta_y= 1; % - Модуль допустимого промаха
Kf= wx/ delta_y; % - КУ ДФ и также РС
n= 6; % - выбираем значения разнosa ДФ
y0= [2, 0]; % - устанавливаем начальные условия (координата | скорость)
Tf= sqrt(sqrt(n)/ Kf); % - Считаем постоянную времени ДФ
d_tetta= asin((n- 1)/ (n+ 1)); % - Считаем запас по фазе
sigma= exp(-pi* tan(d_tetta/2))* 100; % - Ориентировочная оценка перерегулирования:
d_tetta= d_tetta* 180/ pi; % - Перевод в градусы
% Вывод
fprintf('n= %i; Tf= %0.3f; dO= %0.1f градусов\n y0= %i; Перерегулирование= %0.1f%%\n',...
n, Tf, d_tetta, y0(1), sigma);
y0= [2, 0]; % - Начальные условия (координата | скорость)

```

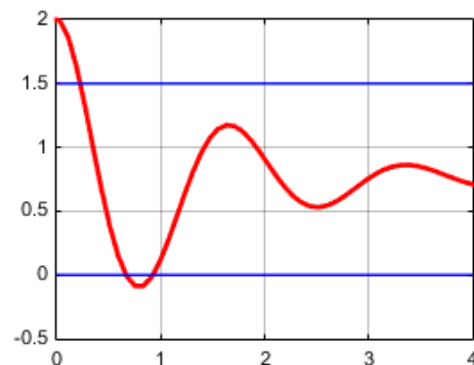
Проанализировав систему с разными разнosaми ДФ (n), получили следующие результаты (таб. 1):

Таблица 1: Таблица результатов анализа системы с разными разнosaми (n)

$n, \%$	T_{Φ} (секунды)	$\Delta\theta$	y_0 (м/с)	$\sigma, \%$	$t_{\text{рег.}}$ *секунды	Попадание в диапазон управления
6 %	0.495 с	45.6°	2 м/с	26.7%	0.15 с	Попадание в диапазон управления
			4 м/с	26.7%	0.94 с	*
4 %	0.447 с	36.9°	2 м/с	35.1%	0.17 с	Попадание в диапазон управления
			4 м/с	35.1%	0.94 с	*
2 %	0.376 с	19.5°	2 м/с	58.3%	0.92 с	*
			4 м/с	58.3%	1.87 с	*



а)



б)

Рис. 5: Графики устойчивости системы и попадания в диапазон перерегулирования (по оси x – частота в логарифмических единицах, по оси y – отклонение работы системы). а – $n=6$, $y_0=2$; б – $n=2$, $y_0=2$.

Исследование показало, что система попадает в диапазон управления с разносоми $\Delta\Phi_n = 6\%$ и $n = 4\%$, при начальной скорости $y_0 = 2$ м/с соответственно.

Исследование влияния начальных условий по скорости на качество выхода ЛА в контуре управления показало следующие результаты (таб. 2):

Таблица 2: Таблица результатов анализа системы с разными разносоми (n)

$n, \%$	T_Φ (секунды)	$\Delta\theta$	y_0 (м/с)	$\sigma, \%$	$t_{\text{рег.}}$ *секунды	Примечание
4	0.447	36.9	-8	35.1	0.95	*
			0		0.77	*
			2		0.94	*
			15		0.57	Попадание в диапазон управления

Также была проанализирована реакция системы на единичное ступенчатое воздействие при положительных начальных условиях по скорости и разносо $\Delta\Phi_n = 4\%$.

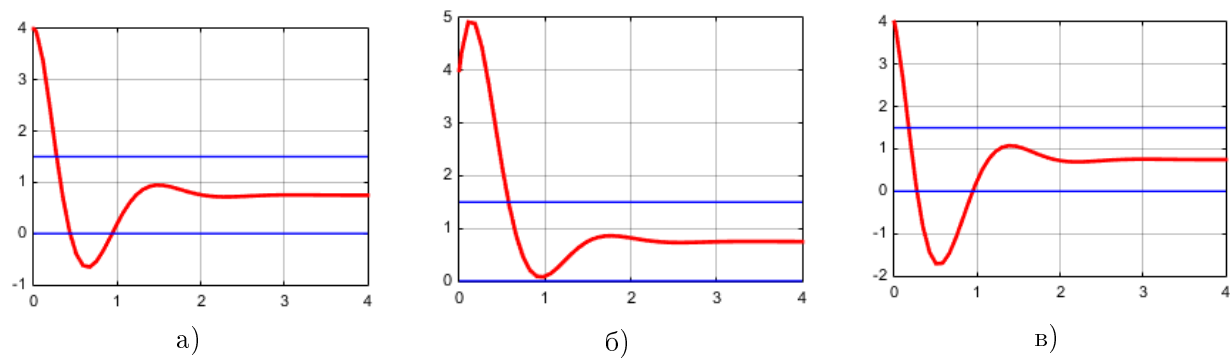


Рис. 6: Графики устойчивости системы и попадания в диапазон перерегулирования по скорости и разносо $\Delta\Phi_n = 4\%$. а - $y'_0=0$; б - $y'_0=15$; в - $y'_0=-8$.

По графикам видно, что система находится в допуске по перерегулированию, колебательности и скорости отработки на ступенчатое воздействие с различными начальными условиями. Отрицательные начальные условия по скорости ухудшают показатель перерегулирования и немного улучшают время регулирования. Положительные начальные условия по скорости до определенной величины улучшают показатель перерегулирования. Время регулирования при положительных начальных условиях по скорости незначительно ухудшается.

Благодаря анализу системы и подбору коэффициентов $\Delta\Phi$, удалось достичь оптимальных показателей управляемости, перерегулированию и скорости отработки входных сигналов. Полученные результаты применимы для создания микропроцессорной системы автоматического управления ЛА с нестандартными аэродинамическими поверхностями.

3. Заключение

В результате работы были проведены исследования идеального контура управления при определённых начальных воздействиях, были вычислены такие параметры как перерегулирование, рассчитан оптимальный запас по фазе для отработки команд за данный промежуток времени, который удовлетворяет диапазону перерегулирования по координатам управления летательного аппарата. Был разработан контур системы управления, который на основе начальных условий работы исполнительных механизмов, скорости полета, скорости выработки команд управления, показывает устойчивость системы, её колебательность, запас стабильности по фазовому запаздыванию. После получения логарифмической амплитудно-фазовой частотной характеристики можно подобрать устройство выработки команд, которое обеспечит переходный процесс системы управления, не выходя за запас устойчивости промоделированной системы. Был приведен пример расчета постоянной времени ДФ, запас по фазе и ориентировочная оценка перерегулирования. Данная методика была использована в разработке полетного контроллера (платы управления) ЛА с нестандартными аэродинамическими поверхностями [15].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического управления // М. - Изд. 4-е, перераб. и доп. - СПб.: Профессия, 2004. - 752 с.
2. Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. Введение в теорию бесплатформенных инерциальных навигационных систем // М.: Наука, 1992. 280 с.
3. Воробьев В.А., Илюхин А.В., Марсов В.И., Минцаев М.Ш., Попов В.П. Теория, логическое проектирование, измерение, контроль и диагностика в системах автоматического управления // М.: РИА, 2009. – 790 с.
4. Гаркушенко В.И., Дягтерев В.Л. Теория автоматического управления // Учебное пособие. Казань: Изд-во Казан. гос. техн. ун-та, 2010. 274 с.
5. Журавлев Д.О., Зау Х.Н. Эволюция систем управления беспилотных летательных аппаратов: от появления до наших дней. // Достижения и перспективы современной науки. Матер. межд. (заочной) НПК (Астана, Казахстан. 07.02.2017 г.) / Научно-издательский центр «Мир науки» – Астана, Казахстан. 2017. – С. 57-87.
6. Марсов В.И., Марсова Е.В., Илюхин А.В., Джабраилов Х.А., Чантиева М.Э. Теория автоматического управления: учеб. пособие // М.: МАДИ, 2023. – 104 с.
7. Маркелов М.К., Ишков А.С., Новичков Д.А., Борисов Н.А. Пример реализации радиоэлектронной системы беспилотного летательного аппарата // Вестник Пензинского государственного университета. 2022 г., вып. 4. С. 96-100.
8. Jordan, J.W. An Accurate Strapdown Direction Cosine Algorithm // Jordan, J. W., NASATN-D-5384, September 1969.
9. Paul G. Savage. Coning Algorithm Design by Explicit Frequency Shaping // Journal of Guidance Control and Dynamics. Vol. 33. No. 4. July–August 2010. P. 1123-1132.
10. Savage, P. G. Strapdown Inertial Navigation System Integration Algorithm Design Part 1- Attitude Algorithms // Journal of Guidance Control and Dynamics. Vol. 21. No. 1. Jan.–Feb. 1998. P. 19–28.

11. Kelly M. Roscoe. Equivalency Between Strapdown Inertial Navigation Coning and Sculling Integrals // Algorithms, Journal of Guidance Control and Dynamics. Vol. 24. No. 2. March–April 2001.
12. Моденов М.Ю. Периферийный блок системы точного позиционирования для преобразования сигналов СКВТ // В сб.: Современные технологии в задачах управления, автоматики и обработки информации. Сб. трудов XXIX Международной научно-технической конференции. Москва, 2020. С. 88-89.
13. Моисеев В.С. Прикладная теория управления беспилотными летательными аппаратами // М. – Казань: ГБУ «Республиканский центр мониторинга качества образования» (Серия «Современная прикладная математика и информатика»), 2013. — 768 с.
14. Черных И. В. Моделирование электротехнических устройств в MATLAB, SimPowerSystems и Simulink / И. В. Черных. — Москва: ДМК Пресс; Санкт-Петербург: Питер, 2008. — 288 с.
15. Чуканов А. Н., Моденов М. Ю, Цой Е. В. Проектирование, отладка и изготовление платы аппаратно-программного комплекса // Информационные технологии в управлении, автоматизации и мехатронике: сб. науч. ст. 4-й Междунар. НТК / отв. ред. М. С. Разумов. — Курск, 2022. — С. 205–209.

REFERENCES

1. Besekersky, V.A., Popov, E.P. 2004, “Theory of automatic control systems”, *Moscow - 4th ed., revised and enlarged - St. Petersburg: Profession*, 752 p.
2. Branets, V.N., Shmyglevsky, I.P. 1992, “Introduction to the Theory of Strapdown Inertial Navigation Systems”, *Moscow: Nauka*, 280 p.
3. Vorobyov, V.A. Ilyukhin, A.V., Marsov, V.I., MintsaeV, M.Sh., Popov, V.P. 2009, “Theory, logic design, measurement, control and diagnosis in automatic control systems”, *M.: RIA*, 790 p.
4. Garkushenko, V.I., Dyagterev, V.L. 2010, “Theory of automatic control. Textbook”, *Kazan: Publishing house of Kazan state technical university*, 274 p.
5. Zhuravlev, D.O., Zau, H.N. 2017, “Evolution of control systems of unmanned aerial vehicles: from the emergence to the present day”, *Achievements and prospects of modern science. Proceedings of the international (correspondence) scientific and practical conference (Astana, Kazakhstan. 07.02.2017). Scientific and Publishing Center “World of Science” - Astana, Kazakhstan.* pp. 57–87.
6. Marsov, V.I., Marsova, E.V., Ilyukhin, A.V., Dzhabrailov, H.A., Chantieva, M.E. 2023, “Automatic control theory: textbook”, *M.: MADI*, 104 p.
7. Markelov, M.K., Ishkov, A.S., Novichkov, D.A., Borisov, N.A. 2022, “An example of the implementation of the radio-electronic system of an unmanned aerial vehicle”, *Vestnik of Penza State University*, Iss. 4. pp. 96–100.
8. Jordan, J.W. 1969, “An Accurate Strapdown Direction Cosine Algorithm”. Jordan, J. W. NASATN-D-5384, 80 p.
9. Paul G. Savage. 2010, “Coning Algorithm Design by Explicit Frequency Shaping”. Journal of Guidance Control and Dynamics. Vol. 33. No. 4. pp. 1123–1132.

10. Savage, P. G. 1998, "Strapdown Inertial Navigation System Integration Algorithm Design Part 1-Attitude Algorithms", *Journal of Guidance Control, and Dynamics*. Vol. 21. No. 1. pp. 19–28.
11. Kelly, M. Roscoe. 2001, "Equivalency Between Strapdown Inertial Navigation Coning and Sculling Integrals", *Algorithms, Journal of Guidance Control, and Dynamics*, Vol. 24, No.2, pp. 201–205.
12. Modenov, M.Yu. 2020, "Peripheral unit of the precision positioning system for converting SCVT signals", *Modern technologies in control, automation and information processing problems. Collection of proceedings of the XXIX International Scientific and Technical Conference*, Moscow, pp. 88–89.
13. Moiseev, V.S. 2013, "Applied Theory of Control of Unmanned Aerial Vehicles", *M. – Kazan: State Budgetary Institution "Republican Center for Monitoring the Quality of Education" (Series "Modern Applied Mathematics and Computer Science")*, 768 p.
14. Chernykh, I. V. 2008, "Modeling of electrical devices in MATLAB, SimPowerSystems and Simulink", *M.: DMK Press; St. Petersburg: Piter*, 288 p.
15. Chukanov, A.N., Modenov, M.Yu., Tsoi, E.V. 2022, "Design, debugging and manufacturing of a hardware-software complex board". Information technologies in control, automation and mechatronics. Coll. scientific. art. of the 4th International STC. Responsible. editor M.S. Razumov. Kursk, pp. 205-209.

Получено: 17.09.2024

Принято в печать: 10.03.2025

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 26. Выпуск 1.

УДК 621.763:621.77:539.3

DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-1-229-242

Машинное зрение в оценке in situ параметров неоднородности анизотропных изделий SLM в ходе растяжения¹

А. Н. Чуканов, В. А. Коротков, Е. В. Цой, А. А. Яковенко, М. Ю. Моденов

Чуканов Александр Николаевич — доктор технических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: alexchukanov@yandex.ru

Коротков Виктор Анатольевич — кандидат технических наук, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: vak-2003@mail.ru

Цой Евгений Владимирович — старший преподаватель, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: tsoyev@tolstovsky.ru

Яковенко Александра Александровна — кандидат технических наук, инженер-технолог, ООО «Металлург-Туламаш» (г. Тула).

e-mail: dispozitsya100@mail.ru

Моденов Михаил Юрьевич — аспирант, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: m.modenov@yandex.ru

Аннотация

Предложена оригинальная методика расчёта in situ характеристик неоднородности анизотропных материалов на базе технологии машинного зрения (фотограмметрии). Объектами являлись образцы порошковых сплавов 316L и Inconel 718, изготовленные по технологии селективного лазерного сплавления (SLM) и подвергнутые равномерному одноосному растяжению.

Методика базируется на совместном использовании в расчёте параметров кривых упрочнения, построенных по результатам определения in situ интенсивностей истинных напряжений и деформаций в отдельных микрообъёмах образцов. В качестве таких микрообъёмов использовали поперечные сечения делительной сетки, нанесенной на поверхность образцов. Информацию о геометрии ячеек делительной сетки, изменяющуюся в процессе растяжения, получали в измерительном блоке из результатов фотограмметрии — измерений цифровых изображений делительной сетки, полученных в ходе фотофиксации образца при растяжении.

В расчётном блоке с помощью методики получены уравнения зависимостей показателя неоднородности материала по механическим свойствам и характеристики неравномерности его пластической деформации от интенсивностей действующих напряжений и деформаций.

Применение математических алгоритмов оптимизации фотограмметрии и программирование блока расчётов на языке высокого уровня Python позволит автоматизировать процесс расчёта полученных уравнений с входящими в них параметрами и в итоге создавать базы данных характеристик анизотропии и неоднородности свойств изделий, изготовленных методом SLM. Это обеспечит разработку теоретических основ для углублённого

¹Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда, проект № 23-29-00433 «Волновая деформация и ее взаимосвязь с ортотропией структуры и физико-механических свойств в изделиях селективного лазерного сплавления» ([https://rscf.ru/project/№ 23-29-00433/](https://rscf.ru/project/№%2023-29-00433/)).

анализа и обоснованного прогнозирования влияния технологической анизотропии и неоднородности свойств изделий SLM на их работоспособность *in situ*.

Ключевые слова: 316L, Inconel 718, SLM, фотограмметрия, коэффициент анизотропии, кривые упрочнения, неоднородность механических свойств, неравномерность пластической деформации.

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:

Чуканов, А.Н., Коротков, В.А., Цой, Е.В., Яковенко, А.А., Моденов М.Ю. Машинное зрение в оценке *in situ* параметров неоднородности анизотропных изделий SLM в ходе растяжения // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 1, с. 229–242.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 26. No. 1.

UDC 621.763:621.77:539.3

DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-1-229-242

Machine vision in *in situ* estimation of inhomogeneity parameters of anisotropic SLM products during tensile behaviour

A. N. Chukanov, V. A. Korotkov, E. V. Tsoi, A. A. Yakovenko, M. Yu. Modenov

Chukanov Alexander Nikolaevich — doctor of technical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: alexchukanov@yandex.ru

Korotkov Viktor Anatolievich — candidate of technical sciences, Tula State University (Tula).

e-mail: vak-2003@mail.ru

Tsoi Evgeny Vladimirovich — senior lecturer, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: tsojev@tolstovsky.ru

Yakovenko Alexandra Aleksandrovna — candidate of technical sciences, technologist, Metallurg-Tulamash LLC (Tula).

e-mail: dispozicya100@mail.ru

Modenov Mikhail Yurievich — postgraduate student, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: m.modenov@yandex.ru

Abstract

An original method for calculating *in situ* characteristics of inhomogeneity of anisotropic materials based on machine vision technology (photogrammetry) is proposed. The objects were samples of powder alloys 316L and Inconel 718, manufactured using selective laser fusion (SLM) technology and subjected to static stretching.

The technique is based on the joint use of hardening curves in the calculation of parameters, based on the results of *in situ* determination of the intensities of true stresses and deformations in individual micro-volumes of samples. Cross sections of a dividing grid applied to the surface of the samples were used as such micro-volumes.

Information about the geometry of the cells of the dividing grid, which changed during stretching, was obtained in the measuring unit from the results of photogrammetry - measurements of digital images of the dividing grid obtained during photofixation of the sample during stretching. In the calculation block, the equations of dependence of the material

heterogeneity index on mechanical properties and the characteristics of the unevenness of its plastic deformation on the intensity of acting stresses and deformations are obtained using the technique.

The use of mathematical algorithms for optimizing photogrammetry and programming the calculation block in Python JAVA will automate the process of calculating the obtained equations and their parameters and, as a result, create an extensive database of anisotropy characteristics and heterogeneity of properties of products manufactured by the SLM method. This will ensure the creation of theoretical foundations for in-depth analysis and reasonable forecasting of the impact of technological anisotropy and heterogeneity of the properties of SLM products on their in situ performance.

Keywords: Inconel 718, SLM, photogrammetry, anisotropy coefficient, hardening curves, heterogeneity of mechanical properties, unevenness of plastic deformation.

Bibliography: 16 titles.

For citation:

Chukanov, A.N., Korotkov, V.A., Tsoi, E.V., Yakovenko, A.A., Modenov M.Yu. 2025, "Machine vision in in situ estimation of inhomogeneity parameters of anisotropic SLM products during tensile behaviour", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 1, pp. 229–242.

1. Введение

Характеристики, описывающие развитие анизотропии механических свойств текстурированных металлических полуфабрикатов и готовых изделий (листового и калиброванного проката, изделий аддитивных технологии (*SLM*)) крайне важны для оптимизации режимов их обработки и эксплуатации [1-4]. В соответствии с ГОСТ 11701-84 («Металлы. Методы испытаний тонких листов на растяжение») к таким характеристикам относят коэффициент пластической анизотропии R (параметр Ланкфорда) и неравномерность пластической деформации A . При испытаниях на растяжение указанные характеристики рассчитывают на основе однократных измерений геометрии рабочей части испытываемых образцов (выполненных штангенциркулем и микрометром) в начале и по окончании (разрушении) стандартных испытаний и данных графиков «нагрузка-удлинение».

Авторами разработана оригинальная методика определения характеристик анизотропии in situ, непосредственно в ходе испытаний. В предлагаемой методике однократные приборные измерения (до и после испытаний) заменены серией измерений. Они выполняются с помощью разновидности технологии машинного зрения [5] (*DIC*-технологии) фотограмметрии - измерений геометрии ячеек делительной сетки, нанесённой на поверхность образца, выполненных на цифровых фотоизображениях указанной сетки [6,7].

Преимуществом такого подхода является более детальное определение параметров анизотропии и неоднородности механических свойств в режиме in situ. Оно достигается за счёт использования в расчётах R и A , вместо единичных значений истинных напряжений и деформаций, массивов значений интенсивностей истинных напряжений и деформаций, полученных из анализа цифровых изображений, сделанных с заданным шагом в режиме in situ, непосредственно в ходе испытания [8].

Анализ in situ динамики R при помощи фотограмметрии локальных деформаций [8-10] позволяет изучать характер и скорость упрочнения, как во всём изделии, так и в его отдельных микрообъёмах [11]. Помимо этого, описанная методика даёт возможность оценить влияние анизотропии на характер формирования неоднородности механических свойств анизотропного материала и пластическую деформацию в макро- и микрообъёмах изделия [10,11].

Цель работы – экспериментальное подтверждение эффективности разработанной методики расчёта in situ характеристик анизотропии, неоднородности материала и неравномерно-

сти пластической деформации анизотропных материалов при растяжении, а также выявление возможных направлений её совершенствования.

Материал и методика испытаний. Объекты исследования - образцы (расчётной длиной 100x10x2мм) порошковых сплавов 316L и *Inconel* 718, изготовленные по технологии *SLM* в различной ориентации относительно платформы 3d-принтера *SLM* 280HL.

Характеристики анизотропии и неоднородности механических свойств образцов, созданных *SLM*, оценивали *in situ* в ходе нагружения. Образцы подвергали статическому одноосному растяжению в испытательной машине Р5-ПК (ГОСТ 11701-84) с максимальным номинальным усилием 50 *kH* на воздухе при комнатной температуре со скоростью перемещения захватов 5 мм/мин и с записью кривой «нагрузка-перемещение».

Предварительно на расчётной длине образцов наносили делительную сетку [12] с ячейками 1x1 мм (рис.1).

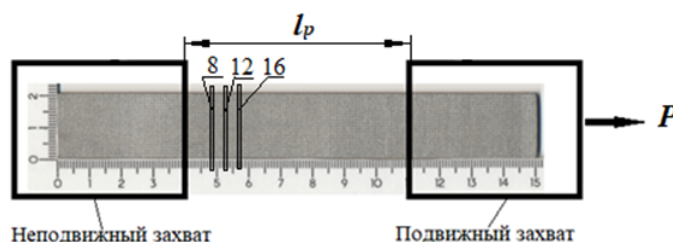


Рис. 1: Расчётная длина l_p образца с делительной сеткой и микрообъёмами различных поперечных сечений между захватами машины

Каждый ряд ячеек рассматривали как поперечное сечение, начальная площадь и размеры которого известна. Номер поперечного сечения (№ № 8,12,16) соответствовал расстоянию этого сечения от неподвижного захвата испытательной машины в миллиметрах (рис.1). Исследовали локальный участок образца объёмом, равным начальной площади поперечного сечения, умноженной на размер ячеек ряда в продольном направлении. Каждое поперечное сечение образца имело 10 ячеек по ширине и одну по длине.

Процесс нагружения образцов до разрушения фиксировали с помощью специализированного комплекса: цифровой камеры *Canon EOS 5D Mark IV* с 35-миллиметровой полнокадровой матрицей, с фокусным расстоянием 24-105 мм разрешением 20.1 Мпикс и объектива *Ef 24-105 f/4*. Данная система обеспечила получение цифровых изображений с плотностью пикселей 900 пикс/мм². Съёмку проводили в программном режиме с интервалом в 5 и 10 сек. Фотофиксацию синхронизировали с записью машинной кривой растяжения. В графическом редакторе *Adobe Photoshop* определяли размеры по длине и ширине отдельных ячеек делительной сетки в пикселях и методом аналогово-цифрового преобразования (АЦП) устанавливали их размеры в единицах длины [6,8].

В данной работе описанные преобразования выполнялись оператором. Для их автоматизации далее планируется использовать классические алгоритмы распознавания линий (*LSD*) такие как преобразование Радона [13]. Оно позволяет по интегралам вдоль прямых линий сетки восстанавливать значение функции. При этом используют обратное преобразование Фурье. Однако при работе с реальными растровыми изображениями эта задача является некорректной поскольку изображение является двумерной проекцией трёхмерного объекта. Возникает искажение перспективы и зашумленность изображения. Для решения этих проблем требуются новые подходы.

В последние годы были разработаны ряд алгоритмов, ориентированных на работу с реальными изображениями. Например, *SCAD* (*Sum of Gradient Angle Differences*) [14]. Высокопроизводительный статистический алгоритм отсекающий нормально распределённый шум,

базируясь на простейших линейных преобразованиях. *LCNN* [15]. Нейронная сеть для поиска прямых линий на изображении. *MCMLSD* (*Markov Chain Marginal Line Segment Detector*) [16]. Использование подобных алгоритмов позволит полностью автоматизировать предложенную методику, и создаст предпосылки для её объединения с универсальными *CAE*-системами комплексного моделирования и инженерного прочностного анализа материалов и конструкций *Ansys*, *Logos*, *Fidesys* [17].

В течение интервала фотосъёмки испытаний (~130 сек) фиксировали изменение размеров ячеек поперечных сечений образца шириной b , толщиной S и длиной l (рис. 2).

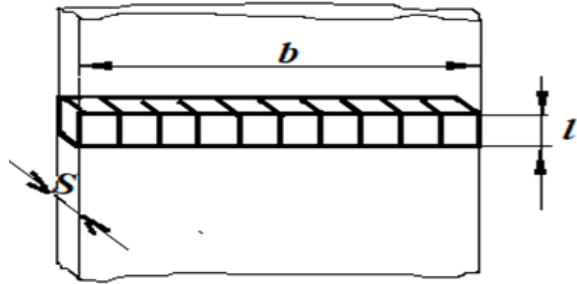


Рис. 2: Размеры локального участка образца с поперечным сечением объёмом $V = bsl$

При синхронизации моментов фотофиксации размеров ячеек с графиком «нагрузка-перемещение» учитывали особенности деформирования различных поперечных сечений, расположенных на разных участках расчётной длины образца. Для поперечных сечений, расположенных вне области образования локального утонения («шейки») в месте разрушения считали, что деформации прекращаются одновременно с началом формирования «шейки». В области образования самой «шейки» пластическое течение образца считали продолжавшимся до его разрушения. Учитывая эту особенность пластического деформирования, на графике «нагрузка-удлинение» (рис. 3) откладывали отрезок перемещения подвижного захвата, зафиксированный от начала пластической деформации до момента образования шейки, и делили его на интервалы перемещения подвижного захвата через каждые 10 сек.

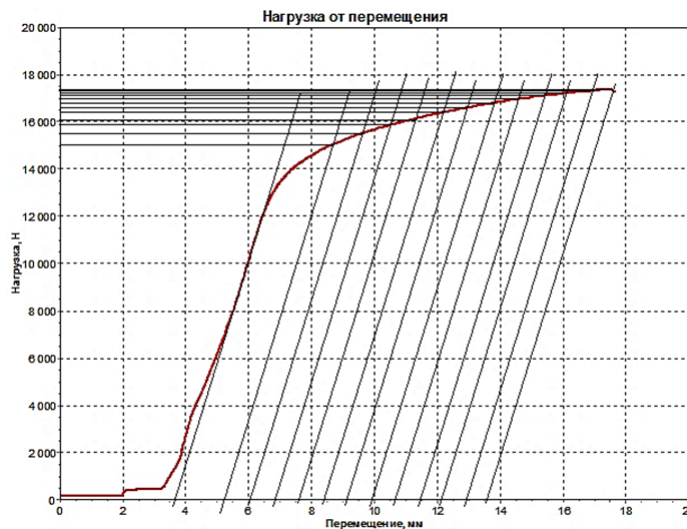


Рис. 3: График «нагрузка-перемещение» растяжения образца *Inconel 718*

По оси нагрузки (рис. 3) определяли её величину P_i для каждого интервала времени растяжения. Длительность пластического растяжения определяли, сопоставляя скорость машины

(5 мм/мин) с величиной перемещения подвижного захвата испытательной машины в диапазоне пластического деформирования образца (9,85 мм). Она, в соответствии с рис.3, составила 1,97 мин или 118 сек. Деление этого интервала с шагом в 10 сек позволяло определять текущую нагрузку.

Развитие анизотропии *in situ* в процессе деформирования оценивали расчётом коэффициента анизотропии (параметра Ланкфорда R). Его определяли на основе начальных (до растяжения) по ширине b_o и длине l_o и конечных b_k и l_k размеров ячеек индивидуальных сечений с интервалом 10 сек [17,18]. С их учётом рассчитывали истинные деформации в поперечных сечениях $\varepsilon_{bi} = \ln \frac{b_o}{b_i}$, $\varepsilon_{li} = \ln \frac{l_o}{l_i}$ и, в соответствии с условием неразрывности деформаций Сен-Венана [9], определяли деформации по толщине $\varepsilon_{si} = -\varepsilon_{li} - \varepsilon_{bi}$ [18]. По полученным значениям ε_{si} находили текущую толщину s_i и площадь F_i исследованных поперечных сечений в зависимости от времени растяжения.

Коэффициенты анизотропии R в заданных сечениях рассчитывали по формуле (1) [19]

$$R = \frac{\varepsilon_{bi}}{(\varepsilon_{li} - \varepsilon_{bj})} \quad (1)$$

где $\varepsilon_{bi} = \ln \frac{b_o}{b_i}$, и $\varepsilon_{li} = \ln \frac{l_o}{l_i}$ истинные деформации сечений в продольном и поперечном направлениях, соответственно.

В процессе растяжения образца происходит упрочнение его материала. Характер деформационного упрочнения исследовали на основе анализа кривых упрочнения, построенных в координатах: интенсивность напряжения σ_i^* и интенсивность деформации ε_i^* , которые рассчитывали в соответствии с [19] по зависимостям (2,3):

$$\sigma_i^* = \sqrt{\frac{3}{2} \left(\frac{1+R}{2+R} \right)} \sigma_i \quad (2)$$

$$\varepsilon_i^* = \sqrt{\frac{2}{3} \left(\frac{2+R}{1+R} \right)} \varepsilon_i, \quad (3)$$

где σ_i и ε_i истинные напряжение и деформации, соответственно, определяемые как отношения нагрузки, измеренной по графику «нагрузка-перемещение», к площади поперечного сечения образца F_i в процессе растяжения, а деформация - по зависимости $\varepsilon_i = \ln \frac{F_o}{F_i}$.

Регрессионный анализ кривых упрочнения позволил получить уравнения их аппроксимации. Их коэффициенты использовали в расчёте характеристик анизотропии и неоднородности свойств при заданных интенсивностях деформаций.

Материал образцов считали однородным (свойства одинаковые в различных частях образца), если при заданных значениях ε_i^* значения $\sigma_i^* = \text{const}$. В противном случае материал считали неоднородным.

Известно, что неоднородность механических свойств материала приводит к неравномерности его пластической деформации [18,19]. То есть, в микрообъёме образца с меньшими значениями σ_i^* пластическая деформация протекает с большей скоростью, чем в микрообъёме с большими σ_i^* . С учётом этого, характеристики неоднородности материала вместо одного параметра A оценивали двумя предложенными авторами показателями: 1 - показателем неоднородности материала по механическим свойствам $H_{\varepsilon_i}^{\sigma}$, который определяли по формуле (4) с учётом дисперсии значений интенсивности напряжения $\sigma_{imax}^* - \sigma_{imin}^*$ при фиксированной (заданной) деформации, и 2 - показателем неравномерности пластической деформации материала $H_{\sigma_i}^{\varepsilon}$, который определяли по формуле (5) с учётом дисперсии значений интенсивности деформации $\varepsilon_{imax}^* - \varepsilon_{imin}^*$ при фиксированных значениях интенсивности напряжений [20]. В работе указанные характеристики рассчитывали по зависимостям (4,5):

$$H_{\varepsilon i}^{\sigma} = \left| \frac{\sigma_{imax}^* - \sigma_{imin}^*}{\sigma_{icp}^*} \right| \times 100\%, \quad (4)$$

$$H_{\sigma i}^{\varepsilon} = \left| \frac{\varepsilon_{imaxi}^* - \varepsilon_{imin}^*}{\varepsilon_{icp}^*} \right| \times 100\%, \% \quad (5)$$

Неравномерность пластической деформации при растяжении на микроуровне дополнительно оценивали распределением по длине образца и времени испытаний локальных относительных удлинений (δ) [10,11], а также суммарными истинными деформациями ячеек ε_i в заданных поперечных сечениях [21]. Строили зависимости распределения δ по длине (l_i) образца ($\delta = f(l_i)$) и в течении времени (t) испытаний ($\delta = f(t)$).

Результаты экспериментов. После измерения ячеек делительной сетки в микрообъёмах исследованных поперечных сечений № № 8,12,16 (рис.1) были рассчитаны общие размеры этих микрообъёмов (рис.2) в поперечном и продольном направлении. Установили, что размеры каждого из сечений индивидуальны и монотонно уменьшаются по ширине и возрастают по длине в процессе растяжения (рис.4).

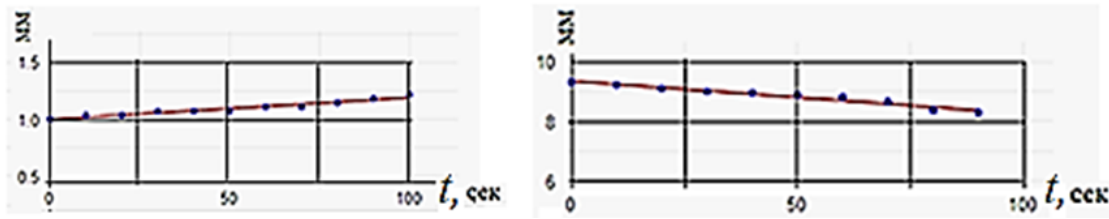


Рис. 4: Изменение размеров поперечного сечения № 8: в продольном (слева) и поперечном (справа) направлениях от времени растяжения

Проведённая с использованием метода наименьших квадратов статистическая обработка результатов измерений позволила определить уравнения изменения размеров каждого поперечного сечения.

Анализ результатов экспериментов. Из рис. 4 видно, что в процессе растяжения длина ячеек l_i монотонно и равномерно увеличивается, а в поперечном направлении ширина поперечного сечения b_i уменьшается. Зафиксированные на рис. 4 зависимости с аппроксимировали линейными уравнениями (6-11) со средней погрешностью $\sim 1\%$.

$$\text{Для сечения № 8} \quad l_i = 0,0019t + 1 \quad (6)$$

$$b_i = 9,3446 - 0,0109t \quad (7)$$

$$\text{Для сечения № 12} \quad l_i = 0,0017t + 1,0016. \quad (8)$$

$$b_i = 9,3486 - 0,0101t \quad (9)$$

$$\text{Для сечения № 16} \quad l_i = 0,0018t + 1,0032. \quad (10)$$

$$b_i = 9,3284 - 0,0112t \quad (11)$$

Полученные уравнения позволяют с использованием фотограмметрии определять истинные деформации сечений № 8,12,16 в любой момент растяжения в продольном направлении ε_{li} с использованием уравнений (12-14):

$$\text{в сечении № 8} \quad \varepsilon_{l8} = \ln \frac{l_i}{1} = \ln \frac{0,0019t + 1}{1}, \quad (12)$$

$$\text{в сечении № 12} \quad \varepsilon_{l12} = \ln \frac{l_i}{1,0016} = \ln \frac{0,0017t + 1,0016}{1,0016}, \quad (13)$$

$$\text{в сечении № 16} \quad \varepsilon_{l16} = \ln \frac{l_i}{1,0032} = \ln \frac{0,0018t + 1,0032}{1,0032}. \quad (14)$$

и поперечном направлении ε_{bi} с использованием уравнений (15-17):

$$\text{в сечении № 8} \quad \varepsilon_{b8} = \ln \frac{b_o}{b_i} = \frac{9,3446}{9,3446 - 0,0109t}, \quad (15)$$

$$\text{в сечении № 12} \quad \varepsilon_{b12} = \ln \frac{b_o}{b_i} = \frac{9,3486}{9,3486 - 0,0101t}, \quad (16)$$

$$\text{в сечении № 16} \quad \varepsilon_{b16} = \ln \frac{b_o}{b_i} = \frac{9,3284}{9,3284 - 0,0112t}. \quad (17)$$

На основе результатов расчёта коэффициентов анизотропии в соответствии с (1) в поперечных сечениях в моменты растяжения с интервалом времени 10 сек строили зависимости R_i от истинной деформации ε_i в микрообъёмах заданных поперечных сечений. Статистической обработкой этих графиков получали уравнения их аппроксимации (рис. 5).

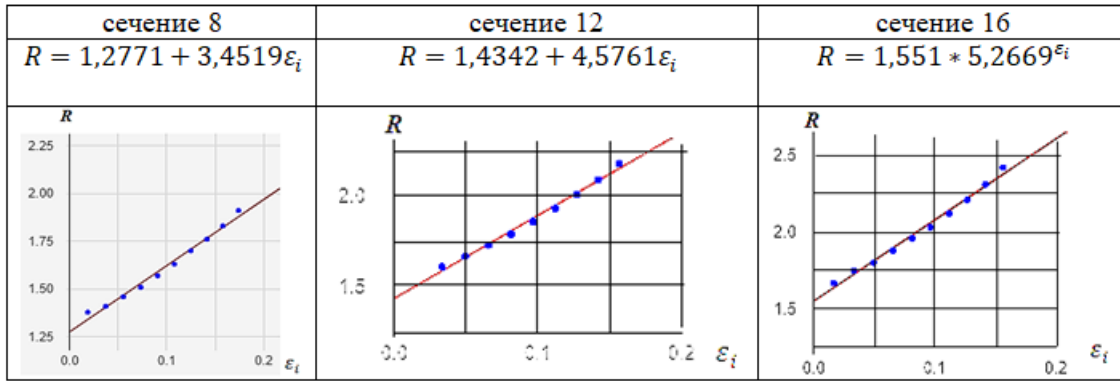


Рис. 5: Изменение коэффициента анизотропии R в поперечных сечениях в зависимости от деформации

Из графика «нагрузка-перемещение» (рис. 3) определяли величины нагрузок, соответствующих моментам фоторегистрации процесса растяжения. По полученным размерам ячеек поперечных сечений (толщины s_i , ширины b_i и площади F_i) рассчитывали величины истинных напряжений, формировавшихся в каждом микрообъёме поперечных сечений в определённый момент процесса растяжения.

Для построения и анализа кривых упрочнения помимо истинных напряжений и деформаций по уравнениям (2) и (3) определяли интенсивности напряжений и деформаций σ_i^* и ε_i^* . На их основе строили кривые упрочнения. Их анализ позволил оценить характер упрочнения материала в отдельных микрообъёмах поперечных сечений № 8,12,16 образца (рис. 6).

Кривых упрочнения (с погрешностью $\tilde{1}\%$) аппроксимировали линейными уравнениями (рис.6). Их коэффициенты были индивидуальны для каждого поперечного сечения и зависели от расстояния сечения до места разрыва образца («шейки»).

Для определения показателя неоднородности материала по механическим свойствам $H_{\varepsilon_i}^\sigma$ на основе уравнений аппроксимации кривых упрочнения (рис.5) определяли значения интенсивностей напряжений σ_i^* при заданных интенсивностях деформаций ε_i^* .

Из анализа полученных значений следует, что при заданных величинах интенсивностей деформации ε_i^* значения интенсивностей напряжений σ_i^* в разных микрообъёмах поперечных

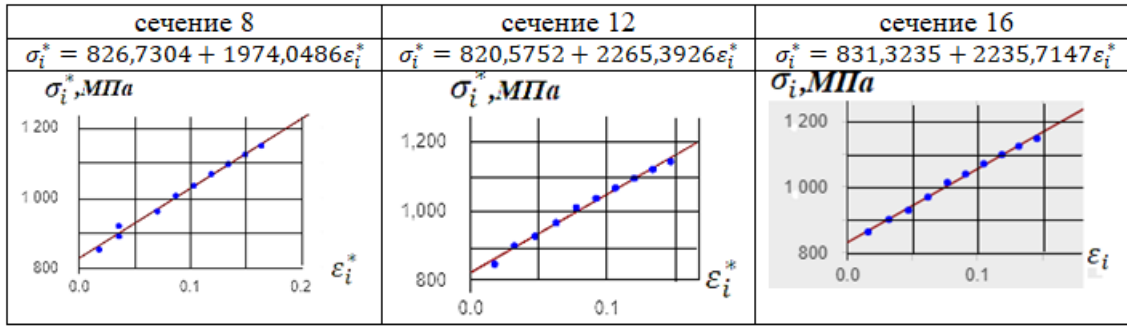


Рис. 6: Кривые упрочнения материала в поперечных сечениях

сечений различны. Следовательно, материал образца имеет неоднородность по механическим свойствам, которую оценивали по уравнению (4) показателем неоднородности $H_{\varepsilon i}^{\sigma}$ [21]. Определили значения показателя неоднородности материала в макрообъёме между поперечными сечениями № 8 и № 16. Установили, что с приращением интенсивности деформации $\Delta\varepsilon_i^* = 0,05$ приращение напряжений $\Delta\sigma_i^*$ постоянно в каждом поперечном сечении, но индивидуально по величине. Так, в поперечном сечении № 8 $\Delta\sigma_i^* = 98,7$ МПа, а в поперечном сечении № 16 $\Delta\sigma_i^* = 111,8$ МПа, что на 13,3% больше. При этом показатель неоднородности механических свойств растёт.

На рис. 7 показан характер изменения показателя неоднородности в зависимости от интенсивности деформации.

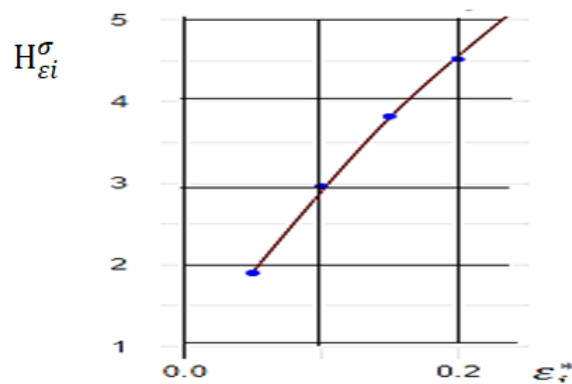


Рис. 7: Изменение показателя неоднородности механических свойств $H_{\varepsilon i}^{\sigma}$ от интенсивности деформации ε_i^* [21]

Зависимость, представленная на рис. 7, описывается степенным уравнением (18)

$$H_{\varepsilon i}^{\sigma} = 12,493 \varepsilon_i^{*0,63}. \quad (18)$$

Далее исследовали влияние выявленной неоднородности механических свойств на распределение истинных деформаций при пластической деформации. Для этого, используя уравнения аппроксимации кривых упрочнения (рис. 5), решали их относительно интенсивности деформаций ε_i^* . Рассчитывали полученные ε_i^* при заданных интенсивностях напряжений σ_i^* . Результаты расчётов приведены на рис. 8.

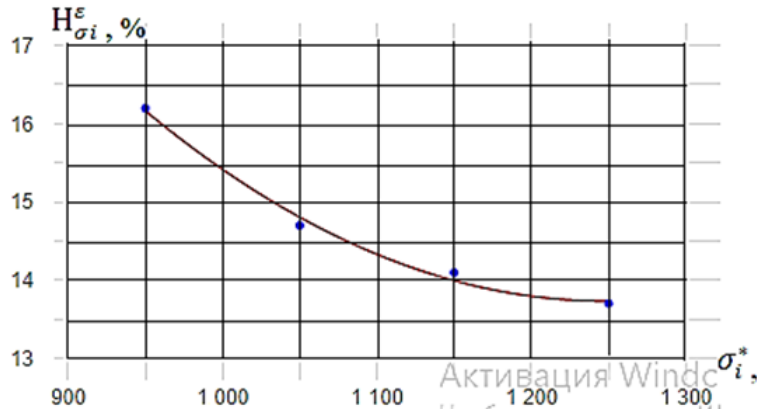


Рис. 8: Зависимость неравномерности пластической деформации от интенсивности напряжения [21]

Установили, что относительная характеристика неравномерности пластической деформации $H_{\sigma i}^{\varepsilon}$ исследованных сплавов уменьшается с ростом интенсивности напряжений. Статистическая обработка по методу наименьших квадратов показала, что с погрешностью аппроксимации $\bar{0},5\%$ полученная зависимость (рис. 8) описывается уравнением (19):

$$H_{\sigma i}^{\varepsilon} = 56,52 - 0,0686\sigma_i^* + 0,0000275 \sigma_i^{*2} \quad (19)$$

Таким образом, скорости развития неоднородности материала по свойствам и неравномерность пластической деформации в его отдельных микрообъёмах при растяжении близки и имеют нелинейный характер изменения в области высоких интенсивностей напряжений и деформаций (рис. 7,8).

При анализе рис. 7 и 8 выявили наличие взаимосвязи (примерное равенство) между величинами отношений приращений интенсивностей напряжений и деформаций (20):

$$\frac{\Delta \varepsilon_{imax}^*}{\Delta \varepsilon_{imin}^*} \approx \frac{\Delta \sigma_{imax}^*}{\Delta \sigma_{imin}^*} \approx H_{\sigma i}^{\varepsilon}(13,3 \dots 14,7) \quad (20)$$

Для полной автоматизации всего цикла выполненных расчётов представленной методики и их графической интерпретации авторами разрабатывается программная реализация расчётного блока (определение R , $H_{\varepsilon i}^{\sigma}$, $H_{\sigma i}^{\varepsilon}$ и их зависимостей).

Выводы. В результате проведённых исследований установлено следующее:

1. На примере образцов сплавов 316L и Inconel 718 технологии SLM показана работоспособность разработанной методики в оценке влияния анизотропии текстурированных материалов на показатели неоднородности их механических свойств и неравномерность пластической деформации.
2. Получены аналитические выражения, позволяющие вычислять перечисленные характеристики интерполированием в диапазонах напряжений и деформаций, реализуемых при проведении стандартных испытаний на одноосное растяжения по ГОСТ 1497-84 и 11701-84, и прогнозировать их величины экстраполированием за пределами указанных диапазонов.
3. В исследованных сплавах выявлен нелинейный рост показателя неоднородности механических свойств материала образца $H_{\varepsilon i}^{\sigma}$ в зависимости от интенсивности деформации и нелинейное снижение показателя неравномерности пластической деформации $H_{\sigma i}^{\varepsilon}$ с ростом интенсивности напряжений.

4. Установлена зависимость показателя неоднородности материала от величины дисперсии коэффициентов анизотропии $\Delta R = R_{max} - R_{min}$ в поперечных сечениях образцов.
5. Показано, что технология фотограмметрии обеспечивает возможность с высокой точностью реализовывать методику определения коэффициента анизотропии, показателя неоднородности механических свойств и неравномерности пластической деформации исследованных сплавов в процессе растяжения.
6. Ведётся программная реализация расчётного блока (определение R , $H_{\varepsilon i}^{\sigma}$, $H_{\sigma i}^{\varepsilon}$ и их зависимостей) для полной автоматизации всего цикла расчётов представленной методики и их графической интерпретации.
7. Применение математических алгоритмов оптимизации фотограмметрии (*LSD*, *SCAD*, *LCNN*, *MCMLSD*) и программирование блока расчётов в языке высокого уровня *Python* позволит автоматизировать процесс расчёта полученных уравнений и входящих в них параметров, что обеспечит интеграцию предложенной методики в универсальные *CAE*-системы комплексного моделирования и инженерного прочностного анализа материалов и конструкций *Ansys*, *Logos*, *Fidesys*, *KiSSAM*.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kunze, K., Etter, T., Grdsslin, J., Shklover, V. Texture, anisotropy in microstructure and mechanical properties of IN738LC alloy processed by selective laser melting (SLM) // Mater. Sci. Eng. A. 2015. Vol. 620. P. 213-222.
2. Song, B., Dong, S., Coddet, P., Liao, H., Coddet C. Fabrication of NiCr alloy parts by selective laser melting: columnar microstructure and anisotropic mechanical behavior // Mater. and Design. 2014. Vol. 53. P. 1-7.
3. Popovich, A. A., Sufiarov, V.Sh., Borisov, E.V., Polozov, I.A. Microstructure and mechanical properties of Inconel 718 produced by SLM and subsequent heat treatment // Key Eng. Mater. 2015. Vol. 651-653 Pp. 665-670.
4. Чуканов, А.Н. Анизотропия физико-механических свойств при послойном лазерном синтезе // «Современные проблемы и направления развития металловедения и термической обработки металлов и сплавов», посвящ. 150-ю акад. А.А. Байкова: Сб. научн. статей МНПК. (18.09.2020 г); Курск: Юго-Зап. гос. ун-т, 2020. - 271 с. - С. 244-247.
5. Чуканов, А.Н., Терёшин, В.А., Цой, Е.В., Матвеева, А.В. Машинное зрение в анализе волновых спектров деформации аддитивных изделий SLM-технологии // «Перспективные материалы науки, технологий и производства», Межд. научно-практич. конф. (24 мая 2022 года); Сб. научн. статей Юго-Зап. гос. ун-т. Курск: Юго-Зап. гос. ун-т, 2022. - 377 с.- С. 325-329.
6. Чуканов, А.Н., Цой, Е.В., Яковенко, А.А., Малий, Д.В., Гончаров, С.С. Фотограмметрия в фиксации и анализе локализованной деформации 3d образцов // 4 МНПК «Современные проблемы и направления развития металловедения и термической обработки металлов и сплавов», посвященная памяти академика А.А. Байкова (СМП-04).- Сб. научн. тр. (15.09.2023 г).- Юго-Зап. гос. ун-т, Курск: ЮЗГУ, 2023. - С. 168 – 173.
7. Чуканов, А.Н., Цой, Е.В., Фролов, А.А. Использование фотограмметрии в технологической подготовке обучающихся вузов // Современные материалы, техника и технологии, 2024. - № 2(53). – С. 43-48.

8. Чуканов, А.Н., Цой, Е.В., Фролов, А.А. Разработка технологии регистрации и анализа локализованной деформации материалов // Современные материалы, техника и технологии, 2024. - № 2(53). - С. 49-51.
9. Чуканов, А.Н., Яковенко, А.А., Цой, Е.В., Гончаров, С.С. Коэффициент Ланкфорда и скорость деформации в изделиях селективного лазерного сплавления // 2 Всеросс. нац. научно-техн. конф. «Перспективы развития технологий обработки и оборудования в машиностроении (ТМ-05)» Сб. научн. тр. (11-12.04.2024 г.).- Воронежский гос. техн. ун-т, г. Воронеж: ВГТУ, 2024. 425 с. - С. 382-387.
10. Чуканов, А.Н., Добровольский, Н.Н., Цой, Е.В., Яковенко, А.А. Математические методы наблюдения волновых процессов при деформации изделий 3d технологии» // Известия Юго-Западного государственного университета. Техника и технологии. - 2023. - Т.13 (4). - С. 32 - 42.
11. Чуканов, А.Н., Цой, Е.В., Фролов, А.А. Разработка технологии регистрации и анализа локализованной деформации материалов // Современные материалы, техника и технологии, 2024. - № 2(53). - С. 49-51.
12. Чуканов, А.Н., Коротков, В.А., Яковенко, А.А., Цой, Е.В., Фролов, А.А. Определение коэффициента анизотропии и скорости локальной деформации в аддитивных сплавах // Известия ТулГУ. Серия: Технические науки. -2024. Вып. 3. – С. 224 - 229.
13. Моськин, Г.В., Никитенков, В.Л., Ситкарев, Г.А. Синтез матрицы преобразования перспективы // Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1. Математика. Механика. Информатика. 2013. № 17. С.127-134.
14. Suyoung, Seo. Line-Detection Based on the Sum of Gradient // Angle Differences Applied Sciences, Vol. 10, Iss. 1, 2019. <https://doi.org/10.3390/app10010254>
15. Yichao Zhou, Haozhi Qi, Yi Ma, End-to-End Wireframe Parsing // arXiv.org. 2021. [Текст электронный]: 04.05.2021. URL: <https://arxiv.org/abs/1905.03246>. (Дата обращения 10.08.2023).
16. James H. Elder, Emilio J. Almazan, Yiming Qian, Ron Tai. MCMLSD: A Probabilistic Algorithm and Evaluation Framework for Line Segment Detection // arXiv.org. 2020. [Текст электронный:] URL: <https://arxiv.org/abs/2001.01788> (Дата обращения 10.08.2023).
17. Басалов, Ю.А., Чуканов, А.Н., Цой, Е.В. Анализ видеоизображений в рамках задачи вычисления локальных деформаций при растяжении//Матер. XXII Межд. конф. «Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории», посвящ. 120-летию со дня рожд. акад. А.Н. Колмогорова и 60-летию со дня открытия школы-интернат № 18 при Московском университете. - Тула, 26-29.09.2023 г.- Тула: Тул. гос. пед. ун-т им. Л.Н. Толстого. - 350 с.-Тула, 2023. С. 370-373.
18. Механика неоднородных тел: уч. пос./ В.И. Андреев, М.: Изд-во «Юрайт». 2015, 255 с.
19. Ковка и штамповка: Справочник. В 4-х Т./Ред. совет: Е.И. Семёнов и др.– Т.1. Материалы и нагрев. Испытания технологических свойств листовых материалов- А.Д. Матвеев. – М.: Машиностроение, 1985. 568 с. С. 154-163.
20. Чуканов, А.Н., Коротков, В.А., Яковенко, А.А., Цой, Е.В., Фролов, А.А. Характер упрочнения аддитивных сплавов высокой прочности // Известия ТулГУ. Серия: Технические науки. -2024. Вып. 4. – С. 421 - 426.

21. Чуканов, А.Н., Коротков, В.А., Яковенко, А.А., Цой, Е.В., Фролов, А.А. Влияние анизотропии на характер упрочнения в аддитивных сплавах высокой прочности // Известия Юго-Западного государственного университета. Серия: Техника и технологии. 2024. Т.14, № 3. С. 19–29. <https://doi.org/10.21869/2223-1528-2024-14-3-19-29>

REFERENCES

1. Kunze, K., Etter, T., Gräßlin, J., Shklover, V. 2015, “Texture, anisotropy in microstructure and mechanical properties of IN738LC alloy processed by selective laser melting (SLM)”, *Mater. Sci. Eng. A.*, Vol. 620. pp. 213–222.
2. Song, B., Dong, S., Coddet, P., Liao, H., Coddet, C. 2014, “Fabrication of NiCr alloy parts by selective laser melting: columnar microstructure and anisotropic mechanical behavior”, *Mater. and Design*, Vol. 53, pp. 1–7.
3. Popovich, A. A., Sufiarov, V.Sh., Borisov, E.V., Polozov, I.A. 2015, “Microstructure and mechanical properties of Inconel 718 produced by SLM and subsequent heat treatment”, *Key Eng. Mater.*, Vol. 651–653, pp. 665–670.
4. Chukanov, A.N. 2020, “Anisotropy of physico-mechanical properties in layered laser synthesis”, “*Modern problems and directions of development of metallurgy and heat treatment of metals and alloys*”, dedicated to The 150-th Academy of A.A. Baykov: Collection of scientific articles of the MNPC. (09/18/2020); Kursk: Yugo-Zapad. State University, 271 p., pp. 244–247.
5. Chukanov, A.N., Tereshin, V.A., Tsoi, E.V., Matveeva, A.V. 2022, “Machine vision in the analysis of wave spectra of deformation of additive products of SLM-technology”, “*Promising materials of science, technology and production*”, International Scientific and Practical Conference (May 24, 2022); Collection of scientific. articles of the South-West State University. Kursk: Yugo-Zapad. state University, 2022, 377 p., pp. 325–329.
6. Chukanov, A.N., Tsoi, E.V., Yakovenko, A.A., Maliy, D.V., Goncharov, S.S. 2023, “Photogrammetry in fixation and analysis of localized deformation of 3d samples”, “*4 MNPK Modern problems and directions of development of metallurgy and heat treatment of metals and alloys, dedicated to the memory of Academician A.A. Baykov (SMP-04)*”.- Collection of scientific tr. (09/15/2023). Yugo-Zapad. State University, Kursk: Southwestern State University, 2023, pp. 168–173.
7. Chukanov, A.N., Tsoi, E.V., Frolov, A.A. 2024, “The use of photogrammetry in technological training of university students”, *Modern materials, equipment and technologies*, № 2(53), pp. 43–48.
8. Chukanov, A.N., Tsoi, E.V., Frolov, A.A. 2024, “Development of technology for registration and analysis of localized deformation of materials”, *Modern materials, technique and technologies*, № 2(53), pp. 49–51.
9. Chukanov, A.N., Yakovenko, A.A., Tsoi, E.V., Goncharov, S.S. 2024, “The Lankford coefficient and the deformation rate in selective laser fusion products”, *2 All-Russian National Scientific and Technical Conf. “Prospects for the development of processing technologies and equipment in mechanical engineering (TM-05)”*, Collection of scientific tr. (11-12.04.2024).- Voronezh State Technical University. Univ., Voronezh: VSTU, 425 p. - pp. 382–387.
10. Chukanov, A.N., Dobrovolskii, N.N., Tsoi, E.V., Yakovenko, A.A. 2023, “Mathematical methods for observing wave processes during deformation of 3d technology products”, *Izvestiya Yugo-Zapadnogo gosudarstvennogo universiteta. Engineering and technology*, Vol.13(4), pp. 32–42.

11. Chukanov, A.N., Tsoi, E.V., Frolov, A.A. 2024, "Development of technology for registration and analysis of localized deformation of materials", *Modern materials, technique and technologies*, № 2(53), pp. 49–51.
12. Chukanov, A.N., Korotkov, V.A., Yakovenko, A.A., Tsoi, E.V., Frolov, A.A. 2024, "Determination of the anisotropy coefficient and the rate of local deformation in additive alloys", *Izvestiya TulSU. Series: Technical Sciences*, Iss. 3, pp. 224–229.
13. Moskin, G.V., Nikitenkov, V.L., Sitkarev, G.A. 2013, "Synthesis of the perspective transformation matrix", *Bulletin of Syktyvkar University. Series 1. Mathematics. Mechanics. Computer science*, № 17, pp. 127–134.
14. Suyoung Seo. 2019, "Line-Detection Based on the Sum of Gradient", *Angle Differences Applied Sciences*, Vol. 10, Iss. 1. <https://doi.org/10.3390/app10010254>
15. Yichao Zhou, Haozhi Qi, Yi Ma. 2021, "End-to-End Wireframe Parsing". arXiv.org. [Electronic text:]: 05/04/2021. URL: <https://arxiv.org/abs/1905.03246>. (Accessed 08/10/2023).
16. James H. Elder, Emilio J. Almazan, Yiming Qian, Ron Tai. 2020, "MCMLSD: A Probabilistic Algorithm and Evaluation Framework for Line Segment Detection". arXiv.org. [Electronic text:] URL: <https://arxiv.org/abs/2001.01788> (Accessed 08/10/2023).
17. Basalov, Yu.A., Chukanov, A.N., Tsoi, E.V. 2023, "Analysis of video images in the framework of the problem of calculating local strains under tension" *Mater. XXII International Conference "Algebra, number theory, discrete geometry and multiscale modeling: modern problems, applications and problems of history", dedicated. The 120-th anniversary of his birth. Academician A.N. Kolmogorov and the 60-th anniversary of the opening of boarding school No. 18 at Moscow University*, Tula, 26-29.09.2023- Tula: Tula State Pedagogical University. L.N. Tolstoy Univ. - 350 p.-Tula, pp. 370–373.
18. Mechanics of inhomogeneous bodies: uch. pos./ V.I. Andreev, M.: Publishing house "Yurayt". 2015, 255 p. 19.
19. Forging and stamping: A reference book. In 4 Volumes/Ed. Tip: E.I. Semenov et al. – Vol. 1. *Materials and heating. Tests of technological properties of sheet materials* - A.D. Matveev. – M.: Mashinostroenie, 1985. 568 S. S. 154–163.
20. Chukanov, A.N., Korotkov, V.A., Yakovenko, A.A., Tsoi, E.V., Frolov, A.A. 2024, "The nature of hardening of additive alloys of high strength" *News of TulSU. Series: Technical Sciences*, Iss. 4, pp. 421–426.
21. Chukanov, A.N., Korotkov, V.A., Yakovenko, A.A., Tsoi, E.V., Frolov, A.A. "The effect of anisotropy on the character of hardening in high-strength additive alloys", *Proceedings of the Southwestern State University. Series: Engineering and Technology*, Vol.14, № 3, pp. 19–29. <https://doi.org/10.21869/2223-1528> - 2024-14-3-19-29.

Получено: 14.10.2024

Принято в печать: 10.03.2025

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 26. Выпуск 1.

УДК 51(09)

DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-1-243-257

**75-летие профессора
Урусби Мухамедовича Пачева**

В. А. Быковский, В. Г. Чирский, В. Н. Чубариков, Н. М. Добровольский,
Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Р. А. Дохов

Быковский Виктор Алексеевич — доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: Bykovskyva@tolstovsky.ru

Чирский Владимир Григорьевич — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, РАНХиГС (г. Москва).

e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Чубариков Владимир Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: chubarik2020@mail.ru

Добровольский Николай Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: dobrovol@tspu.ru

Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Реброва Ирина Юрьевна — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: i_rebrova@mail.ru

Дохов Резуан Ауесович — кандидат физико-математических наук, Северо-Кавказский центр математических исследований (г. Ставрополь).

e-mail: rezuan.dokhov@yandex.ru

Аннотация

В данной статье рассматривается научная и педагогическая деятельность профессора, доктора физико-математических наук Урусби Мухамедовича Пачева, внесшего значительный вклад в исследования по аналитической теории чисел и геометрии чисел. Освещаются основные периоды жизни известного ученого.

У. М. Пачев продолжительное время работает в Кабардино-Балкарском государственном университете им. Х. М. Бербекова, руководит научным семинаром по теории чисел.

Продолжая дело профессора А. В. Малышева, являлся научным руководителем четырёх аспирантов по кандидатским диссертациям.

Ключевые слова: дискретный эргодический метод, представление чисел квадратичными формами, гипотеза Минковского.

Библиография: 33 названия.

Для цитирования:

Быковский, В. А., Чирский, В. Г., Чубариков, В. Н., Добровольский, Н. М., Добровольский, Н. Н., Реброва, И. Ю., Р. А. Дохов. 75-летие профессора Урусби Мухамедовича Пачева // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 1, с. 243–257.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 26. No. 1.

UDC 51(09)

DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-1-243-257

**75-th Anniversary of Professor
Urusbi Mukhamedovich Pachev**

V. A. Bykovskii, V. G. Chirsky, V. N. Chubarikov, N. M. Dobrovolskii,
N. N. Dobrovolskii, I. Yu. Rebrova, R. A. Dokhov

Bykovskii Viktor Alekseevich — doctor of physical and mathematical sciences, corresponding member of the Russian Academy of Sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: Bykovskyya@tolstovsky.ru

Chirskii Vladimir Grigorievich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Lomonosov Moscow State University, RANEPa (Moscow).

e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Chubarikov Vladimir Nikolaevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: chubarik2020@mail.ru

Dobrovolskiy Nikolay Mikhailovich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: dobrovol@tspu.ru

Dobrovolsky Nikolay Nikolaevich — candidate of physical-mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Rebrova Irina Yuryevna — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: i_rebrova@mail.ru

Dokhov Rezuan Auesovich — candidate of physical and mathematical sciences, North-Caucasus Federal University (Stavropol).

e-mail: rezuan.dokhov@yandex.ru

Abstract

This article examines the scientific and pedagogical activities of Professor, Doctor of Physical and Mathematical Sciences Urusbi Mukhamedovich Pachev, who made a significant contribution to research on analytical number theory and geometry of numbers. The main periods of the famous scientist's life are covered.

U. M. Pachev has been working for a long time at the Kabardino-Balkarian State University named after Kh. M. Berbekov, and heads a scientific seminar on number theory.

Continuing the work of Professor A. V. Malyshev, he was the scientific supervisor of four postgraduate students on candidate dissertations.

Keywords: discrete ergodic method, representation of numbers by quadratic forms, Minkowski hypothesis.

Bibliography: 33 titles.

For citation:

Bykovskii, V. A., Chirsky, V. G., Chubarikov, V. N., Dobrovolskii, N. M., Dobrovolskii, N. N., Rebrova, I. Yu, R. A. Dokhov. 75-th Anniversary of Professor Urusbi Mukhamedovich Pachev *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 1, pp. 243–257.



Рис. 1: У. М. Пачев

1. Введение

Биография Пачева Урусби Мухамедовича

Пачев У. М. родился 1-го марта 1950 г. в селении Нартан Чегемского района КБАССР. Его отец Мухамед Цутович работал водителем на дальних рейсах, а мать Гашаляна Исуфовна была домохозяйкой. У него прекрасная семья: жена Зухра Ахметовна, дочь Заира и сын Артур.

С 1957 г. по 1960 г. Урусби учился в средней школе с. Нартан. Затем семья переехала в 1961 г. в г. Нальчик, где он продолжил обучение в средней школе № 11. Интерес к математике у Урусби Мухамедовича появился в 6-ом классе, в связи с переходом к буквенным обозначениям алгебраических выражений.

Среднюю школу Урусби Пачев окончил с одной четвёркой, но в том 1969 г. серебряные медали не выдавали. После окончания средней школы Урусби Мухамедович в 1969 г. поступил в КБГУ на физико-математический факультет (отделение математики), который окончил в 1974 году с отличием. На математические способности студента 1-го курса Урусби Пачева обратил внимание преподаватель кафедры геометрии и высшей алгебры Шокуев Владимир Нухович, в то время уже кандидат физико-математических наук, который в дальнейшем защитил докторскую диссертацию.

На первом курсе Урусби Мухамедович принимал также активное участие в кружке по математике, руководителем которого был доцент кафедры математического анализа Скворцов П. Г.

Дипломная работа Пачева У. была посвящена теории чисел. После окончания КБГУ Урусби Мухамедович был направлен по распределению учителем математики в среднюю школу с. Старый Черек. После того как он проработал там два года в школе, Урусби Пачева отозвали обратно в университет для прохождения аспирантуры по целевому направлению в Ленинградском государственном университете. Выбор ЛГУ был не случайным. Именно в то время на математико-механическом факультете ЛГУ работал деканом Борович Зенон Иванович – всемирно известный математик. Его биография интересна тем, что он одно время (с 1929 г. по 1939 г.) проживал в Нальчике, куда его семья переехала из Житомирской области (Украина).



Рис. 2: З. И. Борович

Окончив школу в Нальчике в 1939 г., Зенон Иванович поступил на математико-механический факультет Ленинградского государственного университета. В дальнейшем он в 1967 г. защитил докторскую диссертацию, а затем долгое время работал деканом этого факультета. Урусби Пачева рекомендовал в аспирантуру в ЛГУ доцент кафедры геометрии и высшей алгебры Лион Исмаилович Шидов, связавшись с Боровичем З. И., и тем самым был ускорен процесс поступления Пачева У. М. в аспирантуру ЛГУ.

Урусби Пачев, успешно сдав все экзамены, поступил в аспирантуру ЛГУ по рекомендации З. И. Боровича к профессору А. В. Малышеву – специалисту по теории чисел, одному из создателей, наряду с академиком Ю. В. Линником, дискретного эргодического метода (ДЭМ) в теории чисел.



Рис. 3: А. В. Малышев

В совместной работе А. В. Малышева и У. М. Пачева в 1979 г. был построен новый вариант дискретного эргодического метода. В дальнейшем У. М. Пачеву в 1980 г. удалось развить данный метод, что позволило применить его к вопросам представимости целых чисел неопределёнными тернарными квадратичными формами специального вида. В результате активной научно-исследовательской работы У. М. Пачеву удалось в установленный срок представить кандидатскую диссертацию, которая была защищена в 1980 г. в ЛГУ.

На защите его кандидатской диссертации выступили известные математики, член корр. АН СССР Фаддеев Д. К. и профессор Борович З. И., высоко оценившие полученные Пачевым У. М. научные результаты. Учёная степень к.ф.-м.н. Пачеву У. М. присуждена решением

Совета в ЛГУ им. А. А. Жданова от 9 октября 1980 г.



Рис. 4: Д. К. Фаддеев

После аспирантуры Пачев У. М. работал на следующих должностях в КБГУ:

- с 1980 г. по 1985 г. ассистентом кафедры геометрии и высшей алгебры;
- с 1985 г. по 1993 г. старшим преподавателем данной кафедры;
- в 1993 г. присвоено звание доцента по кафедре геометрии и высшей алгебры; аттестат ДЦ № 009611;
- с 1993 г. по 2011 г. – доцент кафедры геометрии и высшей алгебры.

Докторская диссертация «Приложения дискретного эргодического метода к арифметике бинарных и изотропных тернарных квадратичных форм» представлена в 2008 г. к защите. Докторскую диссертацию Урусби Мухамедович защитил в 2009 г. в Диссертационном совете Д212.154.32 при Московском педагогическом государственном университете. Его оппонентами были член-корреспондент РАН В. А. Быковский, профессор С. А. Гриценко и профессор Е. П. Голубева.



Рис. 5: Е. П. Голубева

На защите докторской диссертации Пачева У. М. его официальный оппонент член-корреспондент РАН Быковский Виктор Алексеевич отметил, что все результаты этой диссертации в совокупности могут рассматриваться как завершение построения дискретного эргодического метода для изотропных тернарных квадратичных форм.



Рис. 6: С. А. Гриценко

Учёная степень доктора физико-математических наук присуждена Пачеву У. М. решением ВАК от 12 марта 2010 г. № 10д/41 серия ДДН № 013074 г. Москва.

— с 2011 г. по 2021 г. Пачев У. М. — профессор кафедры алгебры и дифференциальных уравнений;

— с 2021 г. по 2024 г. — старший научный сотрудник кафедры алгебры и дифференциальных уравнений;

— с 18.11.2024 г. — главный научный сотрудник кафедры алгебры и дифференциальных уравнений КБГУ.

Наряду с научно-исследовательской работой Пачев У. М. уделяет большое внимание и педагогической работе. Он читает общие курсы «Алгебра», «Линейная алгебра и геометрия», «Теория чисел», «Аналитическая геометрия», «Дискретная математика», а также спецкурсы: «Теория групп», «Избранные главы теории чисел», «Арифметика квадратичных форм», «Дискретный эргодический метод в теории чисел». Руководит курсовыми и дипломными работами, а также магистерскими диссертациями. Его ученик Дохов Р. А. в 2016 г. защитил кандидатскую диссертацию по аналитической теории квадратичных форм.

На ранних этапах педагогической деятельности обучал студентов подготовительного отделения, для которых выпустил замечательную по методическому построению разработку по элементарной математике.

Большое значение Пачев У. М. придаёт и НИР студентов. Так дипломная работа студента Адрианова В. И. (1984 г.), выполненная под его руководством, рекомендована в печать и признана одной из лучших выпускных работ.

С 1981 г. по 2010 г. проводил кружок по математике для студентов 1-2 курсов физико-математического факультета. Он также долгое время работал завучем воскресной математической школы при Кабардино-Балкарском университете, организованной В. Н. Шокуевым для школьников старших классов.

Более 40 лет Пачев У. М. являлся организатором студенческих олимпиад по математике. Читал в 15-ой, 17-ой и 30-ой средних школах г. Нальчика спецкурсы для 10-х классов по углублённому изучению математики.

У. М. Пачев интересуется не только теорией чисел. В частности, у него есть публикации по теории конечных групп, ввиду чего его также можно считать специалистом по теории групп.

У Урусби Мухамедовича развито особое чутьё и в методических проблемах, например, в вопросах частной школьной и вузовской методик, что редко встречается среди учёных-математиков. Пачев У. М. является членом редколлегии журнала «Чебышевский сборник».

Пачеву У. М. присвоено почётное звание «Почётный работник науки и высоких технологии РФ» (Приказ Минобрнауки России от 11 октября 2022 г. № 710 к/н).

Руководство магистерскими диссертациями:

1. Жанатаевой Рузаны Артуровны «О многочленах и уравнениях над конечным полем». Дата защиты: г. Нальчик. 15.05.2017 г.
2. Гелоевой Фатимы Заурбиевны «Сравнения по двойному модулю и их связь с конечными полями». Дата защиты: г. Нальчик. 15.05.2017 г.
3. Максидовой Карины Аслановны «О рациональных и квадратично иррациональных корнях алгебраических уравнений». Дата защиты: г. Нальчик. 15.05.2017 г.
4. Алачева Беслана Маюновича «О числе решений сравнений с несколькими неизвестными по простому модулю». Дата защиты: г. Нальчик. 2018 г.
5. Эсмурзиевой Сильжаны Даудовны «О гауссовых коэффициентах».
6. Шебзуховой Асият Адальбиевны «О квадратичных формах над конечным полем». г. Нальчик. 2015 г.
7. Самимуллах Мияхель «Пифагоровы тройки с дополнительными условиями». г. Нальчик. 2022 г.

Список аспирантов Пачева У. М.:

1. Дохов Резуан Ауесович – к.ф.-м.н. Тема диссертации: «Двойные суммы Гаусса и распределение целых точек на гиперболических поверхностях». Защита: г. Душанбе. 16.06.2017 г.
2. Шакова Татьяна Анатольевна «Об арифметике обобщённых кватернионов в связи с задачей представления чисел анизотропными тернарными квадратичными формами». (Научный доклад об основных результатах подготовленной диссертации). г. Нальчик. 2020 г.
3. Шакова Милана Тлепшуковна «Представление целых чисел квадратичными формами в связи с гипотезами L -функции Дирихле». (Научный доклад об основных результатах подготовленной диссертации). г. Нальчик, 2021 г.
4. Халилова Ляна Аниуаровна Представление целых чисел квадратичными формами с линейным соотношением переменных». (Научный доклад об основных результатах подготовленной диссертации). г. Нальчик, 2021 г.

Пачев У. М. являлся официальным оппонентом по диссертациям:

1. Шевцовой Марии Витальевны «Распределение простых чисел в арифметической прогрессии, разность которой является степенью простого числа» (кандидатская диссертация), 2011 г., 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел. Место защиты: Московский педагогический государственный университет (МПГУ).
2. Куртовой Лилианы Николаевны «Бинарные аддитивные задачи с квадратичными формами» (кандидатская диссертация). 2014 г. Место защиты: г. Ульяновск.

3. Рахимова Алишера Орзуходжаевича «Асимптотическая формула в проблеме Эстермана четвёртой степени с почти равными слагаемыми» (к.ф.-м.н.) Место защиты: г. Душанбе. 16.06.2017. Диссертационный совет: Д047.007.02.
4. Замонова Бехрузы Маликасроровича «Короткие кубические тригонометрические суммы с функцией Мёбиуса» (к.ф.-м.н.) (отзыв Пачева У.М. от ведущей организации КБГУ). Место защиты: г. Душанбе. 2017 г. 01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел. Диссертационный совет: Д047.007.02.
5. Матвеева Владимира Юрьевича «Свойства элементов прямых произведений полей» (кандидатская диссертация). Дата защиты: 16.10.2020 г. МГУ.
6. Крупицына Евгения Станиславовича «Арифметические свойства рядов некоторых классов» (кандидатская диссертация). Дата защиты: 16.10.2020 г. МГУ.
7. Самсонова Алексея Сергеевича «Арифметические свойства элементов прямых произведений полей с неархимедовыми нормированиями» (кандидатская диссертация). Дата защиты: г. Красноярск. 12.12.2024 г.
8. Хайруллоева Шамсулло Амруловича «Нули производных функций Харди и Дэвенпорта-Хейльбронна, лежащих в коротких промежутках критической прямой» (докторская диссертация). Дата защиты: г. Душанбе. 2022 г. Диссертационный совет: Д047.007.02.
9. Собирова Абдушукур Абдурасуловича «Асимптотическая формула в проблеме Эстермана для кубов простых чисел с почти равными слагаемыми» (кандидатская диссертация). Дата защиты: г. Душанбе. 10.02.2023 г. Диссертационный совет: Д047.007.02.

2. Научная деятельность

После окончания Кабардино-Балкарского государственного университета им. Х. М. Бербекова в 1975 г., как уже писалось выше, Пачев У. М. был направлен в целевую аспирантуру в Ленинградском государственном университете им. А. А. Жданова.

После успешной сдачи вступительных экзаменов он поступил в аспирантуру, а его научным руководителем стал Александр Васильевич Малышев — крупный специалист по теории чисел.

Активная научная деятельность Урусби Мухамедовича Пачева началась в совместной работе [32], которая была важным этапом в исследованиях под руководством профессора А. В. Малышева.

На первоначальном этапе А. В. Малышев предложил У. М. Пачеву принять участие в исследовательской работе по геометрии чисел при решении одной гипотезы Минковского о критическом определителе двумерной области $|x|^p + |y|^p \leq 1$ при различных значениях вещественного параметра $p \geq 1$ для $5 \leq p \leq 6$. При этом рассматривается вспомогательная вещественная переменная σ , меняющаяся от 1 до $\sigma_p = (2^p - 1)^{\frac{1}{p}}$.

У. М. Пачев установил в этой задаче границы изменения этого параметра σ , а именно

$$1 + \frac{1}{5p} \leq \sigma \leq 1 + \frac{1,28}{\sqrt{p}}$$

и

$$1 + \frac{1,28}{\sqrt{p}} \leq \sigma \leq \sigma_p,$$

при этом коэффициент 1,28 оказался подходящим значением для случая $5 \leq p \leq 6$ в гипотезе Минковского, причем А. В. Малышев сохранил указанный коэффициент при публикации совместной статьи (см. [32]). Позднее на завершающем этапе к этим исследованиям подключились Н. М. Глазунов и А. С. Голованов — ученики А. В. Малышева.

В итоге в 1986 г. А. В. Малышев, опираясь на отдельные результаты своих учеников, полностью доказал гипотезу Минковского из геометрии чисел.

Как указывали У. М. Пачев и Е. В. Подсыпанин — ученики Александра Васильевича в своей юбилейной статье [29], Александр Васильевич Малышев гордился, что в этом цикле работ удалось полностью доказать гипотезу Минковского.

В дальнейшем А. В. Малышев окончательно определил направление исследований для аспиранта У. М. Пачева, связанное с приложениями дискретного эргодического метода (ДЭМ) к вопросам представления чисел тернарными квадратичными формами. Основы этого метода были заложены академиком Ю. В. Линником в 1940 г., который развивал этот метод совместно со своим учеником А. В. Малышевым для изучения распределения целых точек на сфере $x^2 + y^2 + z^2 = n$ при $n \rightarrow \infty$ (название этого метода взято Ю. В. Линником из эргодической теории, рассматривая ее дискретные аналоги для потоков целых точек на сфере и на других поверхностях второго порядка). При построении своего метода Ю. В. Линник использовал замечательные исследования Б. А. Венкова по теории поворотов кватернионов, связанные с изучением целых точек на сфере заданного радиуса [1]–[7].

Но вначале при применении ДЭМ Ю. В. Линнику удавалось получать только оценки для числа представлений целых чисел положительными тернарными квадратичными формами.

По ходу исследований А. В. Малышевым были внесены в ДЭМ значительные усовершенствования, позволяющие получать вместо оценок числа представлений чисел тернарными квадратичными формами уже асимптотические формулы для числа целых точек не только на сферах, но и на эллипсоидах как по областям на них, так и по классам вычетов по данному модулю.

Следующая принципиальная совместная работа У. М. Пачева и А. В. Малышева [27] вышла уже в 1979 году. Она во многом определила всю дальнейшую научную судьбу Урусби Мухамедовича.

В дальнейшем, начиная с 1979 г. ДЭМ А. В. Малышевым и У. М. Пачевым применялся как к положительным, так и к неопределенным тернарным квадратичным формам (случаи целых точек на эллипсоидах и гиперboloидах). Так в их большой совместной работе [28] была построена арифметика целочисленных матриц второго порядка, используемая при приложении ДЭМ к задаче представления целых чисел неопределенными тернарными квадратичными формами.

При этом на целые примитивные вектор-матрицы

$$L = \begin{pmatrix} b & -a \\ c & -b \end{pmatrix}$$

с нулевым следом и заданной нормы была перенесена теория Венкова Б. А. поворотов кватернионов (см. [1]–[7]).

Теория поворотов вектор-матриц второго порядка для простейшей неопределенной тернарной квадратичной формы $xy - z^2$ была построена Ю. В. Линником и развита А. В. Малышевым совместно с У. М. Пачевым (см. [28]).

Теория поворотов позволяет строить потоки целых векторов-матриц L нормы m , при этом используется характерное для ДЭМ условие: символ Лежандра $\left(\frac{-m}{p}\right) = 1$, где p — простой делитель заданного нечетного числа q , связанного с матричным разложением

$$l + L = Q_1 Q_2 \cdot \dots \cdot Q_s U,$$

где $\det Q = q$; l — скаляр, L — вектор-матрица, U — некоторая целая матрица. При этом для любого целого $s > 0$ найдется число l , что $l^2 + m \equiv 0 \pmod{q^s}$. Это позволяет строить все цепочки вектор-матриц длины s в нужном количестве

$$L \rightarrow L^{(1)} \rightarrow L^{(2)} \rightarrow \dots \rightarrow L^{(s)},$$

при этом s есть величина порядка $\log t$ и векторам-матриц сопоставляются целые точки, лежащие в заданной области на соответствующем гиперboloиде. Затем доказывается так называемая эргодическая теорема для потоков целых вектор-матриц, из которой уже получается асимптотика целых точек в заданной области гиперboloида.

В кандидатской диссертации У. М. Пачева, защищенной в 1980 г. в Ленинградском государственном университете, результаты Ю. В. Линника о простейшей тернарной квадратичной форме $f_0(x_1, x_2, x_3) = x_1x_3 - x_2^2$ перенесены на неопределенные тернарные квадратичные формы довольно общего вида, а именно на формы вида

$$f(x_1, x_2, x_3) = f_0 \left(\sum_{i=1}^3 c_{1i}x_i, \sum_{i=1}^3 c_{2i}x_i, \sum_{i=1}^3 c_{3i}x_i \right),$$

где c_{ij} — целые числа и $\det(c_{ij}) \neq 0$.

Арифметика квадратичных форм является одним из активно разрабатываемых разделов современной теории чисел. В настоящее время наибольший интерес представляет случай целочисленных тернарных квадратичных форм, поскольку к ним не применимы те аналитические методы, которыми удалось полностью исследовать случай квадратичных форм от четырех и более переменных. Важнейшие результаты в рассматриваемой тематике получили акад. Ю. В. Линник и его школа. Ю. В. Линник для изучения вопроса о представлении целых чисел тернарными квадратичными формами разработал своеобразный аналитико-алгебраический метод, использующий некоммутативную арифметику, и названный впоследствии дискретным эргодическим методом (ДЭМ). Проблема представления чисел тернарными квадратичными формами, поставленная Ю. В. Линником, и имеющая связь и с другими важными проблемами математики, еще далека от своего завершения, хотя в последнее время в этом направлении получен ряд новых результатов, относящихся к случаю изотропных неопределенных тернарных квадратичных форм.

Дальнейшие как самостоятельные результаты У. М. Пачева относились к различным аспектам ДЭМ. В 1994 г. У. М. Пачевым найдено одно интересное применение ДЭМ к вопросу о числе классов гауссова рода, арифметический минимум которых делится на квадрат заданного нечетного числа (Математические заметки, 1994, [25]).

Несколько позднее У. М. Пачев обратил внимание на исследования А. В. Малышева со своим вьетнамским аспирантом Нгуен Нгор Гоем, относящихся к случаю распределения целых точек на некоторых однополостных гиперboloидах, обобщившим результаты Б. Ф. Скубенко — известного специалиста по теории чисел. Кроме того, У. М. Пачеву приглянулась еще одна статья А. Н. Карпова в Записках семинаров ЛОМИ, 1986 г. [33], в которой дается обобщение результатов Ю. В. Линника и У. М. Пачева на случай изотропных гиперboloидов, но при этом случай Скубенко однополостных гиперboloидов остался вне рассмотрения.

В дальнейшем появилась также статья: Малышев А.В., Широков Б.М. Вестник Ленингр. ун-та, 1991, вып. 2, с.34-40, в которой было дано доказательство ключевой леммы ДЭМ для вектор-матриц второго порядка, относящейся к случаям, исследованным Ю. В. Линником и Б. Ф. Скубенко.

Под влиянием этих двух работ Пачев У. М. предпринимает проведение исследования по применению ДЭМ к изотропным тернарным квадратичным формам, охватывающего оба вида гиперboloидов как двуполостного, так и однополостного. Пользуясь результатами А. В. Малышева и Б. М. Широкова по ключевой лемме ДЭМ У. М. Пачеву удалось полностью завершить исследование, относящееся к случаю всех изотропных гиперboloидов. Соответствующие результаты были опубликованы У. М. Пачевым в журнале Изв.РАН-2006. Серия матем. [24].

Но еще остается более сложный случай анизотропных тернарных квадратичных форм.

Кроме того, У. М. Пачевым проведен также цикл исследований по асимптотике числа приведенных бинарных квадратичных форм, опубликованных в журналах ПОМИ РАН, «Сибирь»

ский математический журнал» [23], «Чебышевский сборник», [21], «Математические заметки».

По результатам проведенных исследований по применениям ДЭМ в теории чисел У. М. Пачевым в 2009 г. была защищена докторская диссертация в Московском педагогическом государственном университете.

В этой диссертации с помощью ДЭМ У. М. Пачевым получено полное решение задачи об асимптотике числа представлений целых чисел произвольной целой изотропной тернарной квадратичной формой как по областям так и по классам вычетов по заданному модулю.

В дальнейшем У. М. Пачевым была опубликована обзорная статья по применению ДЭМ в теории чисел в журнале «Чебышевский сборник» в 2010 г. [22].

В последнее время У. М. Пачев проводил также исследования и по другим вопросам теории чисел. Так, например, вместе со своим учеником Доховым Р. А. проводилось исследование о взвешенном числе целых точек на некоторых многомерных гиперboloидах, в которых используется метод Харди-Литтлвуда.

С аспирантом Шаковой Т. А. один результат о единицах анизотропной тернарной квадратичной формы опубликован в журнале Чебышевский сборник в 2019 г. [13]. Наряду с этим получен также результат о преобразовании подобия анизотропных вектор-матриц и появляется некоторая уверенность в успешном исследовании анизотропных тернарных квадратичных форм.

Проводилось также исследование по асимптотике числа представлений пары целых чисел квадратичной и линейной формой с конгруэнциальным условием. Такая задача поставленная специалистами долгое время не удавалось решить. Полученные результаты по этой задаче опубликованы в журналах [30] и [31]. У У. М. Пачева имеются и другие публикации по некоторым арифметическим вопросам комбинаторики.

3. Заключение

В настоящее время Урусби Мухамедович продолжает плодотворно заниматься научной деятельностью, смотри например работу [31].

Авторы статьи, коллеги и ученики желают Урусби Мухамедовичу здоровья и творческих успехов.

В данной работе авторами использовались материалы из юбилейных публикаций, которые вышли в г. Нальчик.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Венков Б. А. Об арифметике кватернионов. Пятое сообщение // Известия Академии наук СССР. VII серия. Отделение физико-математических наук. – 1929. – № 7. – С. 607–622.
2. Венков Б. А. Об арифметике кватернионов. Четвертое сообщение // Известия Академии наук СССР. VII серия. Отделение физико-математических наук. – 1929. – № 6. – С. 535–562.
3. Венков Б. А. Об арифметике кватернионов. Третье сообщение // Известия Академии наук СССР. VII серия. Отделение физико-математических наук. – 1929. – № 5. – С. 489–504.
4. Венков Б. А. О числе классов бинарных квадратичных форм отрицательных определителей. Часть вторая // Известия Академии наук СССР. VII серия. Отделение физико-математических наук. – 1928. – № 5. – С. 455–480.
5. Венков Б. А. О числе классов бинарных квадратичных форм отрицательных определителей. Часть первая // Известия Академии наук СССР. VII серия. Отделение физико-математических наук. – 1928. – № 4. – С. 375–392.

6. Венков Б. Об арифметике кватернионов. (Второе сообщение) // Известия Российской Академии Наук. VI серия. – 1922. – Т. 16. – С. 221–246.
7. Венков Б. Об арифметике кватернионов. (Первое сообщение) // Известия Российской Академии Наук. VI серия. – 1922. – Т. 16. – С. 205–220.
8. Пачев У. М., Кодзоков А. Х., Езаова А. Г., Токбаева А. А., Гучаева З. Х. Об одном способе решения линейных уравнений над евклидовым кольцом // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. – 2024. – Т. 46, № 1. – С. 9–21.
9. Пачев У. М., Дохов Р. А., Кодзоков А. Х., Нирова М. С. О некоторых арифметических применениях к теории симметрических групп // Чебышевский сборник. – 2023. – Т. 24, № 4. – С. 252–263.
10. Пачев У. М., Халилова Л. А. Об асимптотике числа представлений пары целых чисел квадратичной и линейной формами с конгруэнциальным условием // Математические заметки. – 2022. – Т. 111, № 5. – С. 726–737.
11. Дохов Р. А., Пачев У. М. О числе примитивных неассоциированных матриц третьего порядка заданного определителя // Чебышевский сборник. – 2021. – Т. 22, № 5. – С. 129–137.
12. Пачев У. М., Исакова М. М. О числе циклических подгрупп простого порядка в группе диагональных матриц над круговым полем // Математические заметки. – 2020. – Т. 107, № 3. – С. 479–480.
13. Пачев У. М., Шакова Т. А. О единицах кватернионного порядка неопределённой анизотропной тернарной квадратичной формы // Чебышевский сборник. – 2019. – Т. 20, № 4. – С. 270–280.
14. Пачев У. М., Дохов Р. А. Об особых функциях в задаче о взвешенном числе целых точек на многомерных гиперboloидах специального вида // Математические заметки. – 2019. – Т. 105, № 2. – С. 278–293.
15. Пачев У. М. Об алгебре и арифметике биномиальных и гауссовых коэффициентов // Чебышевский сборник. – 2018. – Т. 19, № 3. – С. 257–269.
16. Пачев У. М., Исакова М. М. О циклических подгруппах полной линейной группы третьей степени над полем нулевой характеристики // Владикавк. математический журнал. – 2018. – Т. 20, № 2. – С. 62–68.
17. Пачев У. М. Эргодические свойства потоков целых точек на некоторых гиперboloидах в связи с гипотезами для L-функции Дирихле // Чебышевский сборник. – 2016. – Т. 17, № 1. – С. 171–186.
18. Пачев У. М., Дохов Р. А. О числе целых точек с условием делимости первых координат на гиперboloидах специального вида // Математические заметки. – 2016. – Т. 100, № 6. – С. 881–886.
19. Дохов Р. А., Пачев У. М. О взвешенном числе целых точек на некоторых многомерных гиперboloидах // Чебышевский сборник. – 2015. – Т. 16, № 3. – С. 219–245.
20. Пачев У. М. О числе примитивных неассоциированных матриц второго порядка определителя n , делящихся на заданную матрицу // Владикавк. математический журнал. – 2015. – Т. 17, № 2. – С. 62–67.

21. Пачев У. М. О распределении приведенных неопределенных бинарных квадратичных форм с условием делимости первых коэффициентов по классам вычетов // Чебышевский сборник. – 2013. – Т. 14, № 2. – С. 139–150.
22. Пачев У. М. Обзор исследований по дискретному эргодическому методу в теории чисел // Чебышевский сборник. – 2010. – Т. 11, № 1. – С. 217–233.
23. Пачев У. М. Об асимптотике числа приведенных целочисленных бинарных квадратичных форм с условием делимости первых коэффициентов // Сибирский математический журнал. – 2007. – Т. 48, № 2. – С. 376–388.
24. Пачев У. М. Представление целых чисел изотропными тернарными квадратичными формами // Известия РАН. Серия математики. – 2006. – Т. 70, № 3. – С. 167–184.
25. Пачев У. М. О числе классов гауссова рода, арифметический минимум которых делится на квадрат заданного нечетного числа // Математические заметки. – 1994. – Т. 55, № 2. – С. 118–127.
26. Жемухова М. З., Пачев У. М. Циклические подгруппы полной линейной группы второй степени над полем нулевой характеристики // Владикавк. математический журнал. – 2011. – Т. 13, № 3. – С. 17–21.
27. Малышев А. В., Пачев У. М. О представлении целых чисел положительными тернарными квадратичными формами (новый вариант дискретного эргодического метода) // Записки научных семинаров ЛОМИ. – 1979. – Т. 82. – С. 33–87.
28. Малышев А. В., Пачев У. М. Об арифметике матриц второго порядка // Записки научных семинаров ЛОМИ. – 1980. – Т. 93. – С. 41–86.
29. Пачев У. М., Подсыпанин Е. В. Александр Васильевич Малышев и его исследования в теории чисел // Чебышевский сборник. – 2019. – Т. 20, № 3. – С. 27–42.
30. Пачев У. М., Халилова Л. А. Об асимптотике числа представлений пары целых чисел квадратичной и линейной формами с конгруэнциальным условием // Математические заметки. – 2022. – Т. 111, № 5. – С. 726–737.
31. Пачев У. М., Кодзоков А. Х., Исакова М. М., Нирова М. С. Об асимптотиках представлений пары целых чисел суммой квадратов и линейной формой с конгруэнтным условием специального вида // Чебышевский сборник. – 2025. – Т. 26, вып. 1.
32. Гришмановская К. И., Малышев А. В., Пачев У. М., Фидарова А. М. Доказательство гипотезы Минковского о критическом определителе области $|x|^p + |y|^p < 1$ в случае $5 \leq p \leq 6$ // Записки научных семинаров ЛОМИ. – 1977. – Т. 67. – С. 95–107.
33. Карпов А. Н. О представлении чисел целыми изотропными квадратичными формами // Записки научных семинаров ЛОМИ. – 1986. – Т. 151. – С. 66–67.

REFERENCES

1. Venkov, B.A., 1929, “On the arithmetic of quaternions. Fifth communication”, *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Seriya Fiziko-Matematicheskikh Nauk*, no. 7, pp. 607–622 [in Russian].
2. Venkov, B.A., 1929, “On the arithmetic of quaternions. Fourth communication”, *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Seriya Fiziko-Matematicheskikh Nauk*, no. 6, pp. 535–562 [in Russian].

3. Venkov, B.A., 1929, "On the arithmetic of quaternions. Third communication", *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Seriya Fiziko-Matematicheskikh Nauk*, no. 5, pp. 489-504 [in Russian].
4. Venkov, B.A., 1928, "On the number of classes of binary quadratic forms with negative determinants. Part two", *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Seriya Fiziko-Matematicheskikh Nauk*, no. 5, pp. 455-480 [in Russian].
5. Venkov, B.A., 1928, "On the number of classes of binary quadratic forms with negative determinants. Part one", *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Seriya Fiziko-Matematicheskikh Nauk*, no. 4, pp. 375-392 [in Russian].
6. Venkov, B., 1922, "On the arithmetic of quaternions. (Second communication)", *Izvestiya Rossiyskoy Akademii Nauk. Seriya VI*, vol. 16, pp. 221-246 [in Russian].
7. Venkov, B., 1922, "On the arithmetic of quaternions. (First communication)", *Izvestiya Rossiyskoy Akademii Nauk. Seriya VI*, vol. 16, pp. 205-220 [in Russian].
8. Pachev, U.M., Kodzokov, A.Kh., Ezova, A.G., Tokbaeva, A.A., Guchaeva, Z.Kh., 2024, "On a method for solving linear equations over a Euclidean ring", *Vestnik KRAUNTs. Fiziko-Matematicheskie Nauki*, vol. 46, no. 1, pp. 9-21 [in Russian].
9. Pachev, U.M., Dokhov, R.A., Kodzokov, A.Kh., Nirova, M.S., 2023, "On some arithmetic applications to the theory of symmetric groups", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 24, no. 4, pp. 252-263 [in Russian].
10. Pachev, U.M., Khalilova, L.A., 2022, "On the asymptotics of the number of representations of a pair of integers by quadratic and linear forms with a congruence condition", *Matematicheskie Zametki*, vol. 111, no. 5, pp. 726-737 [in Russian].
11. Dokhov, R.A., Pachev, U.M., 2021, "On the number of primitive non-associated matrices of the third order with a given determinant", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 22, no. 5, pp. 129-137 [in Russian].
12. Pachev, U.M., Isakova, M.M., 2020, "On the number of cyclic subgroups of prime order in the group of diagonal matrices over a cyclotomic field", *Matematicheskie Zametki*, vol. 107, no. 3, pp. 479-480 [in Russian].
13. Pachev, U.M., Shakova, T.A., 2019, "On the units of a quaternion order of an indefinite anisotropic ternary quadratic form", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 20, no. 4, pp. 270-280 [in Russian].
14. Pachev, U.M., Dokhov, R.A., 2019, "On special functions in the problem of the weighted number of integer points on multidimensional hyperboloids of a special form", *Matematicheskie Zametki*, vol. 105, no. 2, pp. 278-293 [in Russian].
15. Pachev, U.M., 2018, "On the algebra and arithmetic of binomial and Gaussian coefficients", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 19, no. 3, pp. 257-269 [in Russian].
16. Pachev, U.M., Isakova, M.M., 2018, "On cyclic subgroups of the general linear group of degree three over a field of zero characteristic", *Vladikavkazskii Matematicheskii Zhurnal*, vol. 20, no. 2, pp. 62-68 [in Russian].
17. Pachev, U.M., 2016, "Ergodic properties of flows of integer points on some hyperboloids in connection with hypotheses for Dirichlet L-functions", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 17, no. 1, pp. 171-186 [in Russian].

18. Pachev, U.M., Dokhov, R.A., 2016, "On the number of integer points with divisibility condition of first coordinates on hyperboloids of special form", *Matematicheskie Zametki*, vol. 100, no. 6, pp. 881-886 [in Russian].
19. Dokhov, R.A., Pachev, U.M., 2015, "On the weighted number of integer points on some multidimensional hyperboloids", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 16, no. 3, pp. 219-245 [in Russian].
20. Pachev, U.M., 2015, "On the number of primitive non-associated matrices of second order with determinant n , divisible by a given matrix", *Vladikavkazskii Matematicheskii Zhurnal*, vol. 17, no. 2, pp. 62-67 [in Russian].
21. Pachev, U.M., 2013, "On the distribution of reduced indefinite binary quadratic forms with divisibility condition of first coefficients by residue classes", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 14, no. 2, pp. 139-150 [in Russian].
22. Pachev, U.M., 2010, "Review of research on the discrete ergodic method in number theory", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 11, no. 1, pp. 217-233 [in Russian].
23. Pachev, U.M., 2007, "On the asymptotics of the number of reduced integer binary quadratic forms with divisibility condition of first coefficients", *Sibirskii Matematicheskii Zhurnal*, vol. 48, no. 2, pp. 376-388 [in Russian].
24. Pachev, U.M., 2006, "Representation of integers by isotropic ternary quadratic forms", *Izvestiya RAN. Seriya Matematicheskaya*, vol. 70, no. 3, pp. 167-184 [in Russian].
25. Pachev, U.M., 1994, "On the number of classes of the Gaussian genus whose arithmetic minimum is divisible by the square of a given odd number", *Matematicheskie Zametki*, vol. 55, no. 2, pp. 118-127 [in Russian].
26. Zhemukhova, M.Z., Pachev, U.M., 2011, "Cyclic subgroups of the general linear group of degree two over a field of zero characteristic", *Vladikavkazskii Matematicheskii Zhurnal*, vol. 13, no. 3, pp. 17-21 [in Russian].
27. Malyshev, A.V., Pachev, U.M., 1979, "On the representation of integers by positive ternary quadratic forms (new version of the discrete ergodic method)", *Zapiski Nauchnykh Seminarov LOMI*, vol. 82, pp. 33-87 [in Russian].
28. Malyshev, A.V., Pachev, U.M., 1980, "On the arithmetic of second-order matrices", *Zapiski Nauchnykh Seminarov LOMI*, vol. 93, pp. 41-86 [in Russian].
29. Pachev, U.M., Podsypanin, E.V., 2019, "Alexander Vasilievich Malyshev and his research in number theory", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 20, no. 3, pp. 27-42 [in Russian].
30. Pachev, U.M., Khalilova, L.A., 2022, "On the asymptotics of the number of representations of a pair of integers by quadratic and linear forms with a congruence condition", *Matematicheskie Zametki*, vol. 111, no. 5, pp. 726-737 [in Russian].
31. Pachev, U.M., Kodzokov, A.Kh., Isakova, M.M., Nirova, M.S., 2025, "On asymptotics of representations of a pair of integers by sum of squares and linear form with congruence condition of special form", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 26, no. 1 [in Russian].
32. Grishmanovskaya, K.I., Malyshev, A.V., Pachev, U.M., Fidarova, A.M., 1977, "Proof of Minkowski's conjecture on the critical determinant of the domain $|x|^p + |y|^p < 1$ in the case $5 \leq p \leq 6$ ", *Zapiski Nauchnykh Seminarov LOMI*, vol. 67, pp. 95-107 [in Russian].

33. Karpov, A.N., 1986, "On the representation of numbers by integer isotropic quadratic forms", *Zapiski Nauchnykh Seminarov LOMI*, vol. 151, pp. 66-67 [in Russian].

Получено: 12.11.2024

Принято в печать: 10.03.2025

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 26. Выпуск 1.

DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-1-259-263

Валерий Иванович Иванов
(7.07.1951 — 2.03.2025)



Ушёл из жизни выдающийся российский математик, специалист по теории приближений, видный деятель высшего математического образования, талантливый организатор научных исследований Валерий Иванович Иванов.

Математическая и педагогическая общественность Тулы и Тульской области с глубоким прискорбием 3 марта восприняла известие ректората Тульского государственного университета о кончине после тяжёлой продолжительной болезни доктора физико-математических наук, профессора, Почётного работника высшего профессионального образования Российской Федерации, член-корреспондента Международной академии информатизации Валерия Ивановича Иванова (7 июля 1951 — 2 марта 2025).

Валерий Иванович родился в Киреевске Тульской области. В 1973 году окончил механико-математический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова по специальности «Математика». Учился в аспирантуре Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР под руководством профессора С. Б. Стечкина. В 1977 году там же защитил диссертацию на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук.

С Тульским государственным университетом профессиональная деятельность Валерия Ивановича была связана с 1976 года на протяжении 49 лет. Начинал ассистентом, затем работал доцентом кафедры «Высшая математика», а с 1980 года — доцентом кафедры «Вычислительная математика».

В 1983-1984 проходил научную стажировку в Будапештском университете им. Этвеша Лоранда.

С 1988 года был заведующим кафедрой «Прикладная математика» (с 1993 года «Прикладная математика и информатика»).

В 1994 году в Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН защитил диссертацию на соискание учёной степени доктора физико-математических наук (научный консультант профессор С. Б. Стечкин).

С 1996 по 2014 год Валерий Иванович возглавлял механико-математический факультет в Тульском государственном университете, был его основателем и бессменным руководителем

на протяжении всего времени существования факультета, закрытого в связи с реорганизацией в ТулГУ.

С его именем в ТулГУ связано важное научное направление «Теория функций и теория приближений» (рук. проф., д-р физ.-мат. наук Иванов В. И.)

Исследования по указанному направлению проводятся с 1980 года под руководством В. И. Иванова. Область его научных интересов — представление функций рядами и экстремальные задачи (неравенства Джексона) теории приближений. Вопросы представления измеримых функций рядами, и в частности ортогональными, занимают важное место в теории функций и теории общих ортогональных рядов. Разработка этого направления была начата основоположником Московской математической школы академиком Н. Н. Лузиным и продолжена член-корреспондентом Д. Е. Меньшовым. Этой тематике посвящены многочисленные работы профессора Н. К. Бари, член-корреспондента П. Л. Ульянова, академика Академии наук Армении А. А. Талаляна, академика Б. С. Кашина, академика С. В. Конягина и многих других ученых. Экстремальные задачи теории приближений (точные константы в неравенствах Джексона в пространствах L_p) привлекали внимание многих математиков. Важные результаты получены в работах академика Национальная академия наук Украины Н. П. Корнейчука, профессоров Н. И. Черных, В. А. Юдина, академика Академии наук высшей школы Украины А. А. Лигуна, академика В. И. Бердышева, профессора А. Г. Бабенко и других.

Валерий Иванович продолжил и развил научное направление своего учителя профессора С. Б. Стечкина по изучению наилучших приближений непрерывных функций.

Валерий Иванович Иванов защитил докторскую диссертацию "Представление и приближение функций в среднем" (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, 1994). В докторской диссертации описаны системы представления в метрических симметричных пространствах без линейных непрерывных функционалов. Охарактеризованы пространства, в которых по любой полной ортонормированной системе существуют универсальные ряды; пространства, в которых существуют универсальные ортогональные ряды; пространства, в которых системой представления является кратная тригонометрическая система со спектром в полупространстве. В пространствах L_p на компактных абелевых группах для приближений по системам характеров получены оценки снизу для наименьших констант Джексона и оценки сверху уклонений для некоторых линейных интегральных операторов, учитывающие строгую выпуклость пространств. Доказаны неравенства Джексона с точной константой в пространствах L_p на m -мерном торе и нульмерных группах.

В начале 1990-х годов на кафедре «Прикладная математика и информатика» начинает работать под руководством В. И. Иванова математический семинар, открывается аспирантура по специальности «Математический анализ»; вокруг семинара группируется талантливая молодежь (Д. В. Горбачев, А. В. Московский, О. И. Смирнов и др.).

Валерий Иванович Иванов был выдающимся организатором науки и высшего математического образования. В 1995 — 1996 годах коллективом авторов в составе В. И. Иванова (руководитель), В. В. Глаголева, Д. В. Горбачева, А. В. Московского, О. И. Смирнова выполняется проект РФФИ № 95-01-00657 «Некоторые экстремальные задачи в пространствах L_p . Константы Джексона, Джексона — Стечкина, Юнга». По итогам выполнения проекта опубликованы одна монография и 24 научные работы. Участниками проекта сделаны 10 докладов на сессиях Воронежской зимней математической школы (1995, 1997), на Международных конференциях «Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ» (1995), «Современные проблемы теории чисел и ее приложения» (1996) и на Международной конференции по теории приближения функций, посвященной памяти профессора Коровкина П. П. (1996).

В 1997 году в Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН Смирнов О. И. защитил кандидатскую диссертацию «Константы Джексона в пространстве L_2 на нуль-мерных и конечных группах». В диссертации вычислены константы Джексона в пространстве L_2 на прямых произведениях конечных циклических групп и в пространстве Хемминга.

В условиях острой научной конкуренции заявки В. И. Иванова неоднократно побеждали в конкурсах РФФИ и РНФ, что свидетельствовало о выдающихся достижениях Тульской школы Теории функций и теории приближений.

В 1997-1999 годах коллективом авторов: Иванов В.И. (руководитель), Васильев К.Г., Горбачев Д.В., Московский А.В., Смирнов О.И., Тюрюканов А.А. выполнялся проект РФФИ № 97-01-00318 «Экстремальные задачи теории приближений. Константы Джексона. Приближение многомерных классов сверток». Исследования направлены на решение фундаментальных проблем теории приближений: вычисление в пространствах L_p на сильно однородных метрических компактах констант Джексона в неравенствах между наилучшими приближениями подпространствами, на которых действуют эвклидовы представления группы движений компакта, и модулем непрерывности, определяемым с помощью обобщенного сдвига; нахождение точных или асимптотически точных верхних граней норм функций и уклонений для некоторых линейных методов в пространстве C на классах функций многих переменных, определяемых с помощью сверток.

Основные результаты опубликованы в 24 научных работах. Участниками проекта сделано 14 докладов на сессии Воронежской ней математической школы «Современные методы теории функций и смежные проблемы прикладной математики и механики (1997), на школьно-конференции «Алгебра и анализ» (г. Казань), на 9-й зимней Саратовской математической школе (1998), на международной конференции «Теория приближений и гармонический анализ» (г. Тула, 1998), на Международной летней научной школе по теории функций (Ильменский заповедник, г. Миасс Челябинской области, 1998).

В Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН Горбачев Д. В. защитил кандидатскую диссертацию «Равномерное приближение непрерывных функций многих переменных» (1999). Решена важная задача о многомерном аналоге известной в теории приближений леммы Корнейчука — Стечкина, не поддававшаяся решению в течение 25 лет и неоднократно ставившаяся на конференциях.

В Новосибирском государственном университете Московский А. В. защитил кандидатскую диссертацию «Теоремы Джексона в пространствах L_p и некоторые экстремальные свойства полиномов и сплайнов» (1999). В диссертации доказаны точные неравенства Джексона в пространствах L_p на n -мерном евклидовом пространстве, установлены теоремы сравнения перестановок дифференцируемых периодических функций, полиномов и сплайнов на произвольных отрезках.

В 1998-1999 годах коллективом авторов: В. И. Иванов (руководитель), Н. Н. Андреев (МГУ имени М. В. Ломоносова), К. Г. Васильев, Д. В. Горбачев, А. В. Московский, О. И. Смирнов, А. А. Тюрюканов, В. А. Юдин (МЭИ) выполнялся научный проект, поддержанный министерством образования РФ, «Фундаментальное естествознание» № 97-0-1.4-78 «Некоторые экстремальные задачи на однородных пространствах». Проект был направлен на решение следующих фундаментальных проблем дискретной математики и теории приближений: получение новых оценок мощности кодов, дизайнов, контактных чисел, плотности упаковок сильно однородных пространств M и вычисление в пространствах $L_p(M)$ констант Джексона.

В 1998 году кафедра Прикладной математики и информатики под руководством В. И. Иванова совместно с Математическим институтом В. А. Стеклова РАН и Московским государственным университетом имени М. В. Ломоносова провела Международную конференцию «Теория приближений и гармонический анализ». Этим была продолжена традиция проведения в нашей стране международных конференций по теории приближений. В конференции приняли участие 152 ученых из Азербайджана, Беларуси, Израиля, Казахстана, России, Украины. Конференция подтвердила авторитет и высокий уровень исследований тульских математиков по теории приближений.

Профессор Иванов руководил разработками учебных планов и рабочих программ многоуровневой подготовки по направлению и специальности «Прикладная математика и инфор-

матика». Именно он инициировал подготовку по специальностям «Математика», «Механика», «Математические методы в экономике» на мехмате.

По его инициативе с 2000 года в ТулГУ проводились всероссийские и международные научные конференции «Современные проблемы математики, механики, информатики».

Валерий Иванович Иванов — известный специалист по теории функций и теории приближений. Достижения В. И. Иванова охватывают широкий круг тем в области гармонического анализа, теории приближений и интегральных преобразований. Его научные работы посвящены развитию и обобщению преобразований типа Фурье, а также решению экстремальных задач для многочленов и целых функций. В последние годы В. И. Иванов сосредоточил внимание на изучении обобщённых интегральных преобразований, включая одномерное и многомерное преобразование Данкля. Им были исследованы их ключевые свойства, сформулированы прямые и обратные задачи теории приближений, а также рассмотрены операторы, связанные с этими преобразованиями, такие как свёртка и потенциал Рисса. В частности, он доказал, что сферическое среднее обобщённого оператора сдвига Данкля представляет собой положительный ограниченный оператор сдвига. Это позволило получить обобщённые неравенства Юнга и провести оценку потенциала Рисса в контексте преобразования Данкля. Проведённые исследования существенно обогатили гармонический анализ. Работы Валерия Ивановича получили широкое признание как в России, так и за её пределами, активно цитируются и высоко оцениваются специалистами в соответствующей области.

Руководил 10 грантами РФФИ.

Подготовил 8 кандидатов и 2 докторов наук.

Только за последние 5 лет он опубликовал 2 монографии и 32 статьи, из которых 6 в журналах Q1 и 10 в Q2. Все статьи были размещены в базах данных Web of Science и Scopus.

Руководил подготовкой выпускных квалификационных работ: 11 бакалавров и 10 магистров, докторской диссертации одного соискателя. Председатель диссертационного совета в ТулГУ.

В 2018-2022 годах Валерий Иванович Иванов занимал должность главного научного сотрудника ТулГУ и возглавлял коллектив, выполнявший грант Российского научного фонда на проведение исследований отдельными научными группами.

С 2023 года трудился ведущим научным сотрудником лаборатории «Многомерная аппроксимация и приложения» на механико-математическом факультете МГУ имени М. В. Ломоносова и участвовал в выполнении гранта РНФ на проведение исследований лабораториями мирового уровня.

Кроме этого, с 2023 по 2024 годы Валерий Иванович плодотворно работал в должности ведущего научного сотрудника в ТГПУ им. Л. Н. Толстого в Молодежной лаборатории "Теоретико-числовые методы в приближенном анализе". Деятельность этой лаборатории была одобрена экспертизой РАН.

Валерий Иванович был членом оргкомитета ежегодной Международной научной Школы-конференции С. Б. Стечкина по теории функций, проводимой Институтом математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН и Уральским федеральным университетом им. первого Президента России Б. Н. Ельцина. Как приглашенный докладчик выступал на Международных научных конференциях в МИАН им. В. А. Стеклова, МГУ имени М. В. Ломоносова, Математическом институте им. Альфреда Реньи Венгерской академии наук (г. Будапешт).

Валерий Иванович был также членом редколлегий математических журналов «Математические заметки», «Чебышевский сборник» (Россия), «Analysis Mathematica» (г. Будапешт, Венгрия, 2016-2022), «Вестник Евразийского национального университета им. Л. Н. Гумилева. Серия «Математика. Компьютерные науки. Механика» (г. Астана, Казахстан). Участвовал в научных программах в Математическом центре «Centre de Recerca Matemàtica» (г. Барселона, Испания), Институте математики Исаака Ньютона (г. Кембридж, Великобритания).

Профессор Иванов — лауреат премии им. С. И. Мосина. Был награждён в 2000 г. медалью

ордена «За заслуги перед Отечеством» II степени, в 2005 г. медалью ордена «За заслуги перед Отечеством» I степени, медалью Минобрнауки России «За вклад в реализацию государственной политики в области образования» и Почётной грамотой Тульской областной Думы.

Валерий Иванович Иванов прожил достойную жизнь.

Обладавший пытливым умом и широким кругозором, он явил собою яркий пример настоящего исследователя, умеющего увлечь свой коллектив для достижения поставленной научной цели.

Валерия Ивановича отличали природная скромность и чуткость. Он пользовался заслуженным уважением у коллег и студентов.

Память об этом светлом человеке навсегда останется в наших сердцах!

Выражаем соболезнование родным и близким покойного!

Б. С. Кашин, С. В. Конягин, В. Н. Темляков, В. Н. Чубариков, Л. А. Толоконников, Н. Н. Добровольский, А. А. Кочетыгов, И. М. Буркин, В. П. Баранов, С. А. Скобелъцин, Н. В. Ларкин, Д. В. Горбачёв, О. И. Смирнов, Н. М. Добровольский, И. Ю. Реброва

РЕДКОЛЛЕГИЯ

Том 26 Выпуск 1

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Чубариков Владимир Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математических и компьютерных методов анализа, президент механико-математического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.

e-mail: chubarik2020@mail.ru

ЗАМЕСТИТЕЛИ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

Добровольский Николай Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор; профессор кафедры алгебры, математического анализа и геометрии Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого.

e-mail: dobrovol@tspu.ru

Нижников Александр Иванович — доктор педагогических наук, профессор, заведующий кафедрой математической физики Московского педагогического государственного университета, заслуженный работник высшей школы РФ.

e-mail: ainizhnikov@mail.ru, nizhnikov.ai@mail.ru

ОТВЕТСТВЕННЫЕ СЕКРЕТАРИ

Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник кафедры алгебры, математического анализа и геометрии Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого.

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Реброва Ирина Юрьевна — кандидат физико-математических наук; декан физико-математического факультета; доцент кафедры алгебры, математического анализа и геометрии Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого.

e-mail: i_rebrova@mail.ru

ЧЛЕНЫ РЕДКОЛЛЕГИИ

Боровков Алексей Иванович — доктор технических наук, профессор, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого.

e-mail: borovkov@spbstu.ru

Бухштаб Виктор Матвеевич — доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН, главный научный сотрудник отдела геометрии и топологии Математического института имени В.А. Стеклова Российской академии наук.

e-mail: buchstab@mi.ras.ru

Быковский Виктор Алексеевич — доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, профессор кафедры алгебры, математического анализа и геометрии Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого.

e-mail: vab@iam.khv.ru

Востоков Сергей Владимирович — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры алгебры и теории чисел Санкт-Петербургского университета, президент фонда им. Л. Эйлера.

e-mail: sergei.vostokov@gmail.com

Геворкян Павел Самвелович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа имени академика П.С. Новикова Московского педагогического государственного университета.

e-mail: ps.gevorkyan@mpgu.su

Георгиевский Дмитрий Владимирович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теории упругости механико-математического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.

e-mail: georgiev@mech.math.msu.su

Горбачёв Владимир Иванович — доктор физико-математических наук, профессор, механико-математический факультет Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.

e-mail: vigorby@mail.ru

Гриценко Сергей Александрович — доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики 1-го Финансового университета при Правительстве РФ; профессор механико-математического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.

e-mail: s.gritsenko@gmail.com

Демидов Сергей Сергеевич — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры теории вероятностей механико-математического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова; заведующий кабинетом истории и методологии математики и механики, заведующий отделом истории физико-математических наук Института истории естествознания и техники РАН; главный редактор журнала «Историко-математические исследования»; президент Международной академии истории науки.

e-mail: serd42@mail.ru

Дурнев Валерий Георгиевич — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой компьютерной безопасности и математических методов обработки информации Ярославского государственного университета.

e-mail: durnev@univ.uniya.ac.ru

Зубков Андрей Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математической статистики и случайных процессов механико-математического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова; заведующий отделом дискретной математики Математического института им. В. А. Стеклова РАН.

e-mail: zubkov@mi.ras.ru

Иванов Александр Олегович — доктор физико-математических наук, механико-математический факультет Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.

e-mail: aoiva@mech.math.msu.su

Королёв Максим Александрович — доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Математического института им. В. А. Стеклова РАН.

e-mail: korolevma@mi-ras.ru

Кузнецов Валентин Николаевич — доктор технических наук, профессор, Саратовский государственный технический университет им. Ю. А. Гагарина.

e-mail: kuznetsovvn@info.sgu.ru

Матиясевич Юрий Владимирович — доктор физико-математических наук, профессор, академик Российской академии наук, советник РАН Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова РАН, президент Санкт-Петербургского математического общества.

e-mail: yumat@pdmi.ras.ru

Мищенко Сергей Петрович — доктор физико-математических наук, профессор, Ульяновский государственный университет.

e-mail: mishchenkosp@mail.ru

Нестеренко Юрий Валентинович — доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН, заведующий кафедрой теории чисел механико-математического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.

e-mail: nester@mi.ras.ru

Панин Владимир Алексеевич — доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН, действительный член Академии информатизации образования.

e-mail: tgpu@tula.net

Пачев Урусби Мухамедович — доктор физико-математических наук, профессор кафедры алгебры и дифференциальных уравнений Кабардино-Балкарского государственного университета им. Х. М. Бербекова.

e-mail: urusbi@rambler.ru

Семёнов Алексей Львович — доктор физико-математических наук, профессор, академик Российской академии наук, академик Российской академии образования, заведующий кафедрой математической логики и теории алгоритмов Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.

e-mail: alsemno@ya.ru

Толоконников Лев Алексеевич — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет.

e-mail: tolokonnikovla@mail.ru

Чирский Владимир Григорьевич — доктор физико-математических наук, доцент, профессор механико-математического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ.

e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Аллаков Исмаил — доктор физико-математических наук, профессор, профессор Термезского государственного университета (Узбекистан).

e-mail: iallakov@mail.ru

Белов Алексей Яковлевич — доктор физико-математических наук, федеральный профессор математики, профессор университета Бар-Илана (Израиль).

e-mail: Kanelster@gmail.com

Берник Василий Иванович — доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Института математики НАН Беларуси (Белоруссия).

e-mail: bernik@im.bas-net.by

Лауринчикас Антанас — доктор физико-математических наук, профессор, действительный член АН Литвы, заведующий кафедрой теории вероятностей и теории чисел Вильнюсского университета (Литва).

e-mail: antanas.laurincikas@mif.vu.lt

Лю Юнпин — доктор наук, профессор, руководитель Исследовательского центра современного математического анализа Пекинского педагогического университета (Китай).

e-mail: ypliu@bnu.edu.cn

Мисир Джумаил оглы Марданов — доктор физико-математических наук, профессор, директор Института математики и механики Национальной академии наук Азербайджана (Азербайджан).

e-mail: rmi@lan.ab.az

Мусин Олег Рустамович — доктор физико-математических наук, профессор факультета математики Техасского университета в Браунсвилле (США).

e-mail: oleg.musin@utb.edu, omusin@gmail.com

Рахмонов Зарулло Хусейнович — доктор физико-математических наук, профессор, академик Национальной академии наук Таджикистана, главный научный сотрудник Института математики имени А. Джураева (Таджикистан).

e-mail: zarullo-r@rambler.ru, zarullo.rakhmonov@gmail.com

Салиба Холем Мансур — кандидат физико-математических наук, доцент факультета естественных и прикладных наук университета Нотр-Дам-Луэз (Ливан).

e-mail: qwe123@rocketmail.com

Табари Абдулло Хабибулло — доктор физико-математических наук, профессор, член корреспондент Академии наук Таджикистана; ректор Кулябского государственного университета им. Абуабдуллаха Рудаки (Таджикистан).

e-mail: rektor@kgu.tj

Фукшанский Леонид Евгеньевич — доктор математических наук, профессор, Колледж Клермонт Маккенна (США).

e-mail: lenny@cmc.edu

Шяучюнас Дарюс — доктор математических наук, профессор, старший научный сотрудник Научного института Шяуляйского университета (Литва).

e-mail: darius.siauciunas@su.lt

THE EDITORIAL BOARD

Volume 26 Issue 1

THE MAIN EDITOR

Chubarikov Vladimir Nikolaevich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Chair of Mathematical and Computer Methods of Analysis, President of the Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

e-mail: chubarik2020@mail.ru

THE ASSISTANTS OF THE MAIN EDITOR:

Dobrovolsky Nikolai Mihailovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Professor of the Chair of Algebra, Mathematical Analysis and Geometry, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University.

e-mail: dobrovol@tspu.ru

Nijnikov Alexander Ivanovich — Dr. Sci. in Pedagogy, Professor, Head of the Chair of Mathematical Physics, Moscow Pedagogical State University; Honored Worker of Higher Education of the Russian Federation.

e-mail: ainizhnikov@mail.ru, nizhnikov.ai@mail.ru

EXECUTIVE SECRETARIES

Dobrovolsky Nikolai Nikolaevich — PhD in Physics and Mathematics, Senior Researcher of the Chair of Algebra, Mathematical Analysis and Geometry, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University.

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Rebrova Irina Yuryevna — PhD in Physics and Mathematics, Dean of the Faculty of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Chair of Algebra, Mathematical Analysis and Geometry, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University.

e-mail: i_rebrova@mail.ru

EDITORIAL BOARD

Borovkov Aleksey Ivanovich — Dr. Sci. in Engineering, Professor, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University.

e-mail: borovkov@spbstu.ru

Buchshtaber Victor Matveyevich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Chief Scientific Researcher, the Department of Geometry and Topology of the V.A. Steklov Mathematical Institute of the Russian Academy of Sciences.

e-mail: buchstab@mi.ras.ru

Bykovsky Victor Alekseevich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Professor of the Chair of Algebra, Mathematical Analysis and Geometry, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University.

e-mail: vab@iam.khv.ru

Vostokov Sergey Vladimirovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Professor of the Chair of Algebra and Number Theory, St. Petersburg State University, President of Euler Foundation.

e-mail: sergei.vostokov@gmail.com

Gevorkyan Pavel Samvelovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Department of Mathematical Analysis named after Academician P.S. Novikov at Moscow Pedagogical State University.

e-mail: ps.gevorkyan@mpgu.su

Georgievsky Dmitry Vladimirovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Chair of Elasticity Theory, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

e-mail: georgiev@mech.math.msu.su

Gorbachev Vladimir Ivanovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

e-mail: vigorby@mail.ru

Gritsenko Sergey Alexandrovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor of the Chair of Mathematics, Financial University; Professor, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

e-mail: s.gritsenko@gmail.com

Demidov Sergey Sergeyivich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Professor of the Chair of Probability Theory, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University; Head of the Department of History and Methodology of Mathematics and Mechanics, Head of the Department of History of Physics and Mathematics, S.I. Vavilov Institute for the History of Science and Technology, RAS (IHST RAS); Editor-in-chief of the journal «Istoriko-Matematicheskie Issledovaniya»; President of the International Academy of the History of Science.

e-mail: serd42@mail.ru

Durnev Valery Georgievich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Chair of Computer Security and Mathematical Methods of Information Processing, P.G. Demidov Yaroslavl State University.

e-mail: durnev@univ.uniya.ac.ru

Zubkov Andrey Mihailovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Chair of Mathematical Statistics and Random Processes, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University; Head of the Department of Discrete Mathematics, Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences.

e-mail: zubkov@mi.ras.ru

Ivanov Aleksandr Olegovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

e-mail: aoiva@mech.math.msu.su

Korolev Maxim Aleksandrovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Leading Researcher, Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences.

e-mail: korolevma@mi-ras.ru

Kuznetsov Valentin Nikolaevich — Dr. Sci. in Engineering, Professor, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov.

e-mail: kuznetsovvn@info.sgu.ru

Matiyasevich Yuri Vladimirovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Academician of the Russian Academy of Sciences, Adviser at the Russian Academy of Sciences, St. Petersburg Department of Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, President of the St. Petersburg Mathematical Society.

e-mail: yumat@pdmi.ras.ru

Mishchenko Sergey Petrovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Ulyanovsk State University.

e-mail: mishchenkosp@mail.ru

Nesterenko Yury Valentinovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Head of the Chair of Number Theory, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

e-mail: nester@mi.ras.ru

Panin Vladimir Alexeyevich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Corresponding Member of the Russian Academy of Natural Sciences, Full Member of the Academy of Informatization of Education.

e-mail: tgpu@tula.net

Pachev Urusbi Mukhamedovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor of the Chair of Algebra and Differential Equations, Kabardino-Balkarian State University named after H. M. Berbekov.

e-mail: urusbi@rambler.ru

Semenov Alexey Lvovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Academician of the Russian Academy of Sciences, Academician of the Russian Academy of Education, Head of the Chair of Mathematical Logic and Theory of Algorithms, Lomonosov Moscow State University.

e-mail: alsemno@ya.ru

Tolokonnikov Lev Alekseevich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Tula State University.

e-mail: tolokonnikovla@mail.ru

Fomin Aleksandr Aleksandrovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Department of Algebra of the Moscow Pedagogical State University.

Chirsky Vladimir Grigoryevich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Associate Professor, Professor of the Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University, The Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration.

e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Allakov Ismail — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Professor of Termez Davlat University (Uzbekistan).

e-mail: iallakov@mail.ru

Belov Alexey Yakovlevich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Federal Professor of Mathematics, Professor, Bar-Ilan University (Israel).

e-mail: Kanelster@gmail.com

Bernik Vasily Ivanovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Principal Researcher of the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (Belarus).

e-mail: bernik@im.bas-net.by

Laurinchikas Antanas — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Full Member of the Lithuanian Academy of Sciences, Head of the Chair of Probability Theory and Number Theory, Vilnius University (Lithuania).

e-mail: antanas.laurincikas@mif.vu.lt

Liu Yongping — Dr. Sci., Professor, Head of the Research Center for Modern Mathematical Analysis (School of Mathematical Sciences), Beijing Normal University (China).

e-mail: ypliu@bnu.edu.cn

Mardanov Misir Jumayil oglu — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Director of the Institute of Mathematics and Mechanics, Azerbaijan National Academy of Science (Azerbaijan).

e-mail: rmi@lan.ab.az

Musin Oleg Rustamovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Department of Mathematics, University of Texas Rio Grande Valley (UTRGV) (USA).

e-mail: oleg.musin@utb.edu, omusin@gmail.com

Rakhmonov Zarullo Huseinovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Academician of the National Academy of Sciences of Tajikistan, Chief Scientific Associate of the A. Juraev Institute of Mathematics (Tajikistan).

e-mail: zarullo-r@rambler.ru, zarullo.rakhmonov@gmail.com

Mansour Saliba Holem — PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor, Faculty of Natural and Applied Sciences, Notre Dame University–Louaize (Lebanon).

e-mail: qwe123@rocketmail.com

Habibullo Abdullo — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Corresponding Member of the Academy of Sciences of Tajikistan; Rector of Higher education institution «Kulob State University named after Abuabdullo Rudaki» (Tajikistan).

e-mail: rektor@kgu.tj

Fukshansky Leonid — Dr. Sci. in Mathematics, Professor, Claremont McKenna College (USA).

e-mail: lenny@cmc.edu

Šiaučiūnas Darius — Professor, Dr. Sci. in Mathematics, Senior Researcher, Institute of Regional Development, Šiauliai University (Lithuania).

e-mail: darius.siauciunas@su.lt

TABLE OF CONTENTS

Volume 26 Issue 1

I. V. Dobrynina, N. M. Dobrovol'skii, I. Y. Rebrova, E. V. Manokhin, E. S. Logacheva. 85-th anniversary of professor Vladimir Nikolaevich Bezverkhni	5
I. M. Burkin, O. I. Kuznetsova. Extremely multistable dynamical systems with a continuum of hidden chaotic attractors	25
N. M. Dobrovol'skii, A. S. Podolyan, E. M. Rarova, I. N. Balaba. Algebraic grids and their application to the numerical solution of linear integral equations — II	35
A. D. Manov. On some extremal problems for entire functions of exponential type	47
U. M. Pachev, A. Kh. Kodzokov, M. M. Isakova, M. S. Nirova. On the asymptotics of representations by a sum of a pair of integers by a sum and a linear form with a congruential condition of a special form	62
A. M. Pryanichnikov. Classes of unars that are close to flat ones	76
I. Yu. Rebrova. Estimates of trigonometric sums from solutions of quadratic congruences	88
E. N. Smirnova, O. A. Pikhtil'kova, N. N. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, N. M. Dobrovol'skii. Smooth variety of lattices	99
M. Sh. Shabozov, D. K. Tukhliev. On the diameters of some classes of analytic functions in Bergman space	116
V. T. Shevaldin. On the relationship between the second divided difference and the second derivative in the problem of extremal interpolation in the mean	131
BRIEF MESSAGE	
I. Ahmed. New bounds on Borsuk's problem in ℓ_p -spaces	142
R. A. Zhukov. On the formation of norms based on regression models for small samples	149
A. P. Krylov, N. M. Dobrovol'skii, I. N. Balaba. Hyperbolic zeta function of diagonal unimodular lattices	157
HISTORY OF MATHEMATICS AND APPLICATIONS	
D. V. Gorbachev, D. R. Lepetkov, S. A. Skobel'tsyn. Scattering of a plane sound wave by a liquid body of complex shape	164
M. Yu. Sokolova, D. V. Khristich, D. V. Pravednikov. On the determination of the Umov – Poynting vector in the propagation of acoustic waves in a hypoelastic medium	181
L. A. Tolokonnikov, S. L. Tolokonnikov. Diffraction of a cylindrical sound wave on a multilayered spheroid	190
M. Y. Modenov, A. N. Chukanov, E. V. Tsoi. Mathematical modeling of a control system for small fixed-wing aircraft with non-standard aerodynamic surfaces	204

M. Y. Modenov, A. N. Chukanov, E. V. Tsoi. Mathematical modeling of an ideal control loop for a non-standard type aircraft in the MATLAB environment	218
A. N. Chukanov, V. A. Korotkov, E. V. Tsoi, A. A. Yakovenko, M. Yu. Modenov. Machine vision in in situ estimation of inhomogeneity parameters of anisotropic SLM products during tensile behaviour	229
MEMORIAL DATES	
V. A. Bykovskii, V. G. Chirsky, V. N. Chubarikov, N. M. Dobrovol'skii, N. N. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, R. A. Dokhov. 75-th anniversary of professor Urusbi Mukhamedovich Pachev	243
Valery Ivanovich Ivanov (7.07.1951 — 2.03.2025)	259
РЕДКОЛЛЕГИЯ	264
THE EDITORIAL BOARD	268
TABLE OF CONTENTS	272

Научное издание

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Научно-теоретический журнал

Том XXVI. Выпуск 1 (97)

Оригинал-макет подготовлен
А. В. Родионовым, А. П. Крыловым.
Технический редактор – И. Е. Агапова.

Регистрационный номер средства массовой информации ПИ № ФС77-80049
от 31 декабря 2020 г. выдан Федеральной службой
по надзору в сфере связи, информационных технологий
и массовых коммуникаций.

Подписано в печать 26.05.2028. Формат 60×84/8.
Бумага офсетная. Печать трафаретная. Усл. печ. л. 31,85.
Тираж 150 экз. (первый завод – 25 экз.). Заказ 25/04.
Цена свободная. Дата выхода в свет 16.06.2025.

Издатель – Тульский государственный педагогический
университет им. Л. Н. Толстого. 300026, Тула, просп. Ленина, 125.

Отпечатано в ТГПУ им. Л. Н. Толстого.
300026, Тула, просп. Ленина, 125.