ISSN 2226-8383

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Министерство просвещения Российской Федерации
Российская академия наук
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
Московский педагогический государственный университет
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
Тульский государственный университет

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Научно-теоретический журнал

Том XXV

Выпуск 3 (94)

Тула
2024

Учредитель: ФГБОУ ВО
«ТГПУ им. Л. Н. Толстого»

Адрес редакции:
300026, г. Тула, пр. Ленина, 125.
Тел. +79156812638
8(4872)374051
Адрес редакции: 300026,
E-mail: cheb@tsput.ru
URL: http://www.chebsbornik.ru

Издается с 2001 года.
Выходит 5 раз в год.
Регистрационный номер
СМИ: ПИ № ФС77-80049

В журнале публикуются оригинальные статьи по направлениям современной математики: теория чисел, алгебра и математическая логика, теория функций вещественного и комплексного переменного, функциональный анализ, дифференциальные уравнения, математическая физика, геометрия и топология, теория вероятностей и математическая статистика, численные методы, теория оптимизации и др. Также публикуются статьи о памятных датах и юбилеях.

Журнал включен в перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание ученых степеней кандидата наук и доктора наук (перечень ВАК), индексируются и/или реферируются: Scopus, MathSciNet, Zentralblatt MATH, Russian Science Citation Index (RSCI), РЖ Математика, Mathematical Reviews, РИНЦ, Google Scholar Metrics.

Журнал выходит под эгидой Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, Министерства просвещения Российской Федерации, Российской академии наук, Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Московского педагогического государственного университета, Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого, Тульского государственного университета

Главный редактор
В. Н. Чубариков (Россия, г. Москва)

Ответственные секретари:
Н. Н. Добровольский (Россия, г. Тула)
И. Ю. Реброва (Россия, г. Тула)

Заместители главного редактора:
Н. М. Добровольский (Россия, г. Тула)
А. И. Нижников (Россия, г. Москва)

Редакционная коллегия:

А. И. Боровков (Россия, г. Санкт-Петербург)
В. А. Быковский (Россия, г. Хабаровск)
С. В. Востоков (Россия, г. Санкт-Петербург)
Д. В. Георгиевский (Россия, г. Москва)
В. И. Горбачев (Россия, г. Москва)
С. А. Гриценко (Россия, г. Москва)
С. С. Демидов (Россия, г. Москва)
В. Г. Дурнев (Россия, г. Ярославль)
А. М. Зубков (Россия, г. Москва)
А. О. Иванов (Россия, г. Москва)
В. И. Иванов (Россия, г. Тула)
М. А. Королёв (Россия, г. Москва)
В. Н. Кузнецов (Россия, г. Саратов)
Ю. В. Матиясевич (Россия, г. Санкт-Петербург)
С. П. Мищенко (Россия, г. Ульяновск)
Ю. В. Нестеренко (Россия, г. Москва)
В. А. Панин (Россия, г. Тула)
У. М. Пачев (Россия, г. Нальчик)
А. Л. Семёнов (Россия, г. Москва)
Л. А. Толоконников (Россия, г. Тула)
А. А. Фомин (Россия, г. Москва)
В. Г. Чирский (Россия, г. Москва)
И. Аллаков (Узбекистан, г. Термез)
А. Я. Белов (Израиль, г. Рамат Ган)
В. И. Берник (Беларусь, г. Минск)
А. Лауринчикас (Литва, г. Вильнюс)
Лю Юнпин (Китай, г. Пекин)
М. Дж. Марданов (Азербайджан, г. Баку)
О. Р. Мусин (США, г. Браунсвилл)
З. Х. Рахмонов (Таджикистан, г. Душанбе)
А. Х. Табари (Таджикистан, г. Куляб)
Л. Фукшанский (США, г. Клермонт)
Д. Шяучюнас (Литва, г. Шяуляй)

12+

СОДЕРЖАНИЕ

Том 25 Выпуск 3

А. И. Шафаревич, Е. И. Деза, Н. М. Добровольский, А. О. Иванов, А. И. Козко, Е. С. Крупицын, В. Ю. Матвеев, Ю. В. Нестеренко, А. Л. Семёнов, В. Н. Чубариков, М. В. Шамолин, Н. Н. Добровольский. Владимир Григорьевич Чирский (к 75-летию со дня рождения) 5

И. Аллаков, Б. Х. Эрдонов. Об одновременном представлении чисел суммой пяти простых чисел 11

П. Бал, Р. Дас, С. Саркар. О компактности сильно звездных идеалов топологических пространств 37

П. В. Гранин, Н. С. Калинин, А. С. Саакян. Песочные паттерны на регулярном графе с вершинами степени восемь 47

А. И. Денисов, И. В. Денисов. Решение неравенств с помощью коренных и примыкающих функций 70

В. К. Захаров, Т. В. Родионов. Характеризация дедекиндова и счётно-дедекиндова расширения решёточного линейного пространства непрерывных ограниченных функций посредством порядковых границ 86

А. О. Иванов, О. С. Щербаков. Существование неприводимых мультиобходов кратности 2 101

А. В. Казакова. Точные обёртывающие кольца нильтреугольного кольца типа G_2 и их автоморфизмы 118

А. В. Качкина. Оператор Штурма – Лиувилля с быстро растущим потенциалом и асимптотика его спектра 143

А. С. Кашина, Л. М. Цыбуля. Задача Аполлония для двух объектов и её исследование 158

А. И. Козко. Оценки приближений функций тригонометрическими полиномами в пространствах с несимметричной нормой и знакочувствительным весом 177

А. И. Козко, Л. М. Лужина, А. Ю. Попов, В. Г. Чирский. Сведение математической модели некоторых задач математической экономики к системам дифференциальных уравнений, допускающим решение в квадратурах 187

О. Э. Мирзаев, Т. Г. Хасанов. Изоспектральные и частично-изоспектральные операторы Дирака на конечном отрезке 201

А. И. Нижников, О. Э. Яремко, Н. Н. Яремко. Полиномы Аппеля, ассоциированные с преобразованиями Фурье, и их применение для дифференциальных уравнений 213

С. В. Тихонов. Алгебры кватернионов с унитарными инволюциями, имеющие одинаковые подполя 226

А. С. Угаров, И. В. Добрынина. О проблеме обобщенной сопряженности слов в обобщенных древесных структурах групп Артина 236

А. С. Угаров, И. В. Добрынина. Об алгоритме решения проблемы степенной сопряженности слов в обобщенных древесных структурах групп Артина 248

В. Г. Чирский. Арифметические свойства значений расходящихся в поле $\mathbb{C}$ рядов 259

М. В. Шамолин. Тензорные инварианты динамических систем пятого порядка с диссипацией 270

Р. Р. Шефрукова. О справедливости закона 0 или 1 для неглубоких свойств первого порядка сильно разреженного случайного графа 299

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Ю. В. Андрианова, В. Б. Шерстюков. Об одной формуле Лиувилля 335

В. А. Горелов, К. И. Орлов, П. Е. Волков. Об одном уравнении типа Брио – Буке 343

Р. А. Жуков, С. В. Прокопчина. О формировании мягких норм для оценки функционирования сложных систем 351

Е. С. Крупицын. Мера трансцендентности числа Лиувилля в p-адической области 359

В. Ю. Матвеев. Бесконечная алгебраическая независимость некоторых почти полиадических чисел 365

Ю. Н. Штейников. О специальных экстремальных множествах, связанных с таблицей умножения П. Эрдёша 373

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ И ПРИЛОЖЕНИЯ

Н. В. Ларин, А. Э. Белкин. Нестационарное рассеяние звука упругим цилиндром с непрерывно-неоднородным покрытием 381

Н. А. В., Мир, Н. Л. Поляков. О канонической рамсеевской теореме Эрдёша и Радо: короткое доказательство с использованием теории ультрафильтров 396

Л. А. Толоконников, С. Л. Толоконников. Рассеяние плоской звуковой волны цилиндром с неоднородным упругим покрытием в движущейся среде 408

РЕДКОЛЛЕГИЯ 419

THE EDITORIAL BOARD 423

TABLE OF CONTENTS 427

УДК 51(091)+511.46 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-259-269

Владимир Григорьевич Чирский (к 75-летию со дня рождения)

А. И. Шафаревич, Е. И. Деза, Н. М. Добровольский, А. О. Иванов, А. И. Козко, Е. С. Крупицын, В. Ю. Матвеев, Ю. В. Нестеренко, А. Л. Семенов, В. Н. Чубариков, М. В. Шамолин, Н. Н. Добровольский



Владимир Григорьевич Чирский родился в Москве 30 июня 1949 года. Его родителями были Григорий Михайлович Чирский, начальник одного из управлений МПС и Елена Ивановна Фирстова, преподаватель английского языка на Госкурсах «Иняз». Его брат, Алексей Григорьевич Чирский, 1932 года рождения, был горным инженером. У него прекрасная семья, жена – Галина Владимировна, две дочери, Наталья и Ольга, четыре внука и две внучки.

Владимир Григорьевич окончил среднюю школу № 710 с серебряной медалью. Он учился на механико-математическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова и на третьем курсе начал изучать теорию чисел под руководством профессора А. Б. Шидловского, заведующего кафедрой теории чисел МГУ. По окончании факультета был рекомендован в аспирантуру отделения математики. К этому моменту им были опубликованы 4 статьи. С 1973 года начал работать на кафедре математического анализа сначала почасовиком, с 1975 года ассистентом кафедры. Защитил кандидатскую диссертацию в 1978 году и с 1983 года работал доцентом кафедры математического анализа. После защиты в 2000 году докторской диссертации работает профессором этой кафедры с 2003 года по настоящее время. С 1998 г. по 2006 г. работал заместителем декана механико-математического факультета по учебной работе. С 2007 года до 2020 года исполнял обязанности заведующего кафедрой теории чисел МПГУ, с 2006 года работает профессором в РАНХиГС. Кроме того, он был редактором раздела «Теория чисел» РЖ «Математика» ВИНИТИ РАН.

В. Г. Чирский преподавал и читал лекции на различных факультетах МГУ: механико-математическом, химическом, геологическом, факультете психологии. Он является ответственным на кафедре за преподавание на химическом факультете. Он участвовал в издании ряда учебных пособий по математическому анализу и приложениям математики к задачам естествознания. Кроме того, он многие годы был старшим экзаменатором на вступительных экзаменах по математике на различных факультетах МГУ. Опыт этих экзаменов нашел отражение в пособиях по элементарной математике. Под его руководством защищены четыре кандидатские диссертации, он был научным консультантом по докторской диссертации, подготовлены к защите диссертации еще двух его учеников.

Научные интересы В. Г. Чирского относятся к теории трансцендентных чисел в p-адических полях и прямых произведениях этих полей. Используемый им метод представляет собой некоторую модификацию метода Зигеля – Шидловского в теории трансцендентных чисел. В работах В. Г. Чирского был введён в рассмотрение новый класс степенных рядов, к которому удалось применить метод Зигеля – Шидловского для исследования глобальных соотношений. Это – класс $F-$рядов т. е. рядов вида

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n\cdot n!\cdot z^n,$$

коэффициенты которых – алгебраические числа, удовлетворяющие некоторым условиям. Известным примером $F-$ряда является ряд Эйлера $\sum_{n=0}^{\infty} n!\cdot(-z)^n$. Разумеется, если такой ряд отличен от многочлена, он имеет в поле $\mathbb{C}$ нулевой радиус сходимости.

В. Г. Чирский доказал теоремы для $F-$рядов, которые представляют собой некоторые аналоги основных теорем А. Б. Шидловского для $E-$функций.

Полученные им результаты допускают формулировку в следующих терминах. Рассмотрим множество точек вида:

$$(x_1,x_2,\dots,x_n,\dots),$$

образующих бесконечномерное пространство. Это пространство представляет собой прямое произведение полей $p-$адических чисел. Именно, координата с номером n этого вектора представляет собой p_n-адическое число, где p_n-простое число с номером n. Это прямое произведение имеет структуру коммутативного кольца с единицей (и с делителями нуля). Его принято называть кольцом полиадических чисел. Элементы $\mathfrak{a}$ кольца целых полиадических чисел имеют каноническое представление в виде

$$\mathfrak{a}=\sum_{m=1}^{\infty} a_m m!, a_m\in\mathbb{N}, 0\leqslant\ a_m\leqslant m.$$

Сумму этого ряда в поле $\mathbb{Q}_p$ обозначаем $\mathfrak{a}^{(p)}$. Как отмечено выше, полиадическое число $\mathfrak{a}$ можно рассматривать, как точку бесконечномерного пространства с координатами $\mathfrak{a}^{(p_n)}$, где p_n-простое число с номером n. Следует отметить, что ряды вида $\sum_{n=0}^{\infty} a_n n!,\quad a_n\in\mathbb{Q}$ могут сходиться не во всех полях $\mathbb{Q}_p$. В случае, когда такой ряд расходится лишь в конечном множестве полей $\mathbb{Q}_p$, мы говорим о *почти полиадических* числах и отождествляем их с элементами прямого произведения всех полей $\mathbb{Q}_p$, кроме упомянутого выше конечного множества.

Можно рассмотреть и прямое произведение полей $\mathbb{K}_\nu$, где ν продолжает $p-$адическое нормирование поля $\mathbb{Q}$ на поле $\mathbb{K}$ алгебраических чисел конечной степени $\varkappa$. Если ν продолжает $p-$адическое нормирование, то поле $\mathbb{K}_\nu$ представляет собой алгебраическое расширение поля $p-$адических чисел $\mathbb{Q}_p$ степени $\varkappa_\nu$ и справедливо равенство $\sum_\nu \varkappa_\nu=\varkappa$, где суммирование производится по всем нормированиям ν, продолжающим $p-$адическое нормирование. При этом мы будем говорить о $\mathbb{K}-$ *полиадических* и, соответственно, о $\mathbb{K}-$ *почти полиадических* числах. Для элемента $\mathfrak{a}$ этого прямого произведения обозначаем $\mathfrak{a}^{(\nu)}$ его координату в поле $\mathbb{K}_\nu$.

Если существует $P(x)-$ многочлен с рациональными коэффициентами, отличный от тождественного нуля такой, что $P(\mathfrak{a})=0$ (иными словами, $P\left(\mathfrak{a}^{(\nu)}\right)=0$ в каждом поле $\mathbb{K}_\nu$ этого прямого произведения), то говорим, что $\mathfrak{a}$ – *алгебраический элемент*. Если элемент $\mathfrak{a}$ не является алгебраическим, то его называют *трансцендентным*. Трансцендентность элемента означает, что для любого $P(x)-$ многочлена с рациональными коэффициентами, отличного от тождественного нуля, существует простое число p и нормирование v поля $\mathbb{K}$, продолжающее $p-$адическое нормирование поля $\mathbb{Q}$ такие, что $P\left(\mathfrak{a}^{(\nu)}\right)\neq 0$ в поле $\mathbb{K}_\nu$. Назовём элемент $\mathfrak{a}$ *бесконечно трансцендентным*, если для любого $P(x)$ – многочлена с рациональными коэффициентами, отличного от тождественного нуля, существует бесконечное множество простых

чисел p, для каждого из которых есть нормирование ν поля $\mathbb{K}$, продолжающее $p-$адическое нормирование такое, что $P\left(\mathfrak{a}^{(\nu)}\right) \neq 0$ в поле $\mathbb{K}_\nu$. Элемент $\mathfrak{a}$ называется *глобально трансцендентным*, если для любого $P(x)$ – многочлена с рациональными коэффициентами, отличного от тождественного нуля, неравенство $P\left(\mathfrak{a}^{(\nu)}\right) \neq 0$ выполняется во всех полях $\mathbb{K}_\nu$ рассматриваемого прямого произведения.

В. Г. Чирским получены теоремы о бесконечной линейной и бесконечной алгебраической независимости совокупности значений F$-$рядов, удовлетворяющих системе линейных дифференциальных уравнений, в алгебраических точках. Эти теоремы представляют собой некоторые аналоги фундаментальных теорем А. Б. Шидловского для $E-$функций.

Общие теоремы метода Зигеля – Шидловского и его модификации имеют приложения к обобщенным гипергеометрическим рядам.

Для множества действительных чисел $S = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r; \beta_1, \ldots, \beta_s\}$, относительно которых предполагаем, что числа $\beta_1, \ldots, \beta_s$ – не целые ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n \ldots (\alpha_r)_n}{(\beta_1)_n \ldots (\beta_s)_n n!} z^n$$

называют обобщённым гипергеометрическим рядом. Эти ряды относятся к так называемым рядам Жевре порядка $s+1-r$.

Если $r-s \leqslant 0$, то рассматриваемый ряд представляет собой целую функцию. При условии рациональности чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_r; \beta_1, \ldots, \beta_s$ он, после некоторой замены переменной, входит в класс $E-$функций Зигеля и к исследованию их значений применим известный метод Зигеля – Шидловского в теории трансцендентных чисел. Применению этого метода к гипергеометрическим $E-$ функциям посвящены работы В. Х. Салихова, в которых получено близкое к полному решение проблемы. При $r-s=1$ ряд имеет конечный радиус сходимости. При условии рациональности чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_r; \beta_1, \ldots, \beta_s$ он входит в класс $G-$функций Зигеля и исследованию таких рядов посвящены работы А. И. Галочкина, Г. В. Чудновского, Э. Бомбьери, И. Андре и др. Если же $r-s>1$, то ряд, отличный от многочлена, имеет нулевой радиус сходимости в поле $\mathbb{C}$. При рациональных параметрах получаются $F-$ряды. Таким образом, в случае рациональных параметров применимы общие теоремы метода Зигеля – Шидловского и его модификации.

В случае, когда среди параметров рассматриваемых гипергеометрических рядов содержатся иррациональные алгебраические числа, используются аппроксимации Эрмита – Паде. В случаях $r-s \leqslant 1$ рассмотреть трансцендентные значения параметров не удаётся.

Однако при $r-s>1$ можно рассмотреть такие ряды с некоторыми трансцендентными параметрами. Эти вопросы В. Г. Чирский рассмотрел в статьях в приведённом ниже списке. Трансцендентные параметры в упомянутых работах представляют собой полиадические числа Лиувилля. Полиадическое число $\mathfrak{a}$ называется *полиадическим числом Лиувилля*, если для любых натуральных чисел n, P существует целое число A такое, что для всех простых чисел $p \leqslant P$ выполняется неравенство $\left|\mathfrak{a}^{(p)} - A\right|_p < |A|^{-n}$. Установлена бесконечная линейная независимость значений рядов вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\mu_1)_n \ldots (\mu_m)_n z^n,$$

среди параметров которых есть полиадические числа Лиувилля определённого вида. Доказано, что для некоторых полиадических чисел Лиувилля μ существует бесконечное множество простых чисел p таких, что в каждом поле $\mathbb{Q}_p$ хотя бы одно из $p-$адических чисел $\sum_{n=0}^{\infty} (\mu)_n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} (\mu+1)_n$ является трансцендентным. Кроме того, доказано, что это утверждение выполняется в поле $\mathbb{Q}_2$ и указан способ проверки этого утверждения для конкретных простых чисел p.

В статье «Владимир Григорьевич Чирский(к 70-летию)», опубликованной в журнале *Чебышевский сборник,2019, том 20, выпуск 2, с.587-598* приведён список работ, опубликованных В. Г. Чирским до 2019 года включительно. Поэтому здесь будут указаны лишь научные работы за последние 5 лет. Они сгруппированы по темам.

СПИСОК ИЗБРАННЫХ ПУБЛИКАЦИЙ В. Г. ЧИРСКОГО

1. Чирский В. Г. Product formula, global relations and polyadic integers // Russian Journal of Mathematical Physics, 2019, том 26, № 3, с. 286-305.

2. Чирский В. Г. Arithmetic properties of Generalized Hypergeometric Series // Russian Journal of Mathematical Physics, 2020, том 27, № 2, с. 175-184.

3. Чирский В. Г. Арифметические свойства рядов эйлерова типа с параметром - лиувиллевым полиадическим числом // Доклады Академии наук, 2020, том 494, с. 65-67 (перевод Chirskii V.G. Arithmetic Properties of Euler-Type Series with a Liouvillean Polyadic Parameter // Doklady Math, 102, № 2, с. 68-70).

4. Чирский В. Г. Арифметические свойства значений в полиадической лиувиллевой точке рядов эйлерова типа с полиадическим лиувиллевым параметром // Чебышевский сборник, 2021, том 22, № 2, с. 304-312.

5. Chirskii V. G. Arithmetic Properties of an Euler-Type Series with Polyadic Liouville Parameter // Russian Journal of Mathematical Physics, 2021, том 28, № 3, с. 293-302.

6. Чирский В. Г. Полиадические числа Лиувилля // Чебышевский сборник, 2021, том 22, № 3, с. 245-255.

7. Чирский В. Г.Бесконечная линейная независимость с ограничениями на подмножество простых чисел значений рядов эйлерова типа с полиадическим лиувиллевым парамером // Чебышевский сборник, 2022, том 23, № 1, с. 153-166.

8. Чирский В. Г. Новые задачи теории трансцендентных полиадических чисел // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления, 2022, том 505, с. 63-65.(перевод: New problems in the theory of transcendental polyadic numbers // 2022, том 106, № 1, с. 265-267).

9. Чирский В. Г. Арифметические свойства значений обобщённых гипергеометрических рядов с полиадическими трансцендентными параметрами// Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления, 2022, том 506, с. 95-107. (перевод: Arithmetic Properties of the Values of Generalized Hypergeometric Series with Polyadic Transcendental Parameters // Doklady Mathematics,2022, том 106, № 2, с. 386-397).

10. Chirskii V. G. Estimates of Linear Forms and Polynomials in Polyadic Numbers// Doklady Mathematics, том 106, № Suppl.2, с. S131-S133.

11. Chirskii V. G. Polyadic Estimates for $F-$Series // Doklady Mathematics, 2022, том 106, № Suppl.2, с. S134-S136.

12. Chirskii V. G. Polyadic Liouville Numbers // Doklady Mathematics, 2022, том 106, № S2, с. S137-S141.

13. Chirskii V. G. Arithmetic Properties of Polyadic Integers // Doklady Mathematics, 2022, том 106, № S2, с. S142-S146.

14. Chirskii V. G. Infinite Linear Independence with Constraints on a Subset of Prime Numbers for Values of Euler-Type Series with Polyadic Liouville Parameter // Doklady Mathematics, 2022, том 106, № S2, с. S154-S160.

15. Chirskii V. G. On Transformations of Periodic Sequences // Doklady Mathematics, 2022, том 106, № S2, с. S147-S149.

16. Chirskii V. G. Arithmetic Properties of Polyadic Integers // Doklady Mathematics, 2022 , том 106, № S2, с. S142-S146.

17. Chirskii V. G. Arithmetic Properties of Values at Polyadic Liouville Points of Euler-Type Series with Polyadic Liouville Parameter // Doklady Mathematics, 2022, том 106, № S2, с. S150-S153.

18. Chirskii V. G. On Polyadic Liouville Numbers // Doklady Mathematics, 2022, том 106, № S2, с. S161-S164.

19. Чирский В. Г. Трансцендентность p-адических значений обобщённых гипергеометрических рядов с трансцендентными полиадическими параметрами // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления, 2023, том 510, с. 29-32. (перевод: Transcendence of p-Adic Values of Generalized Hypergeometric Series with Transcendental Polyadic Parameters // Doklady Mathematics, 2023 том 107, № 2, с. 109-111.)

20. Чирский В. Г. О полиадических числах // Чебышевский сборник, 2023, том 24, № 2, с. 276-283.

21. Chirskii V. G. Algebraic properties of points of some infinite-dimensional metric space // Journal of Mathematical Sciences, 2023 том 276, № 3, с. 430-436.

22. Чирский В. Г. Трансцендентность некоторых 2-адических чисел // Чебышевский сборник, 2023, том 24, № 5, с. 194-200.

Публикации о математических моделях экономических задач

23. Козко А. И., Лужина Л. М., Попов А. Ю., Чирский В. Г. Оценка необходимого начального экономического ресурса в задаче Рамсея-Касса-Купманса // Чебышевский сборник, 2019, том 20, № 4(72), с. 66-75.

24. Козко А. И., Лужина Л. М., Попов А. Ю., Чирский В. Г. Оптимальная экспонента в задаче Рамсея-Касса-Купманса // Чебышевский сборник, 2019, том 20, № 4(72), с. 76-85.

25. Козко А. И., Лужина Л. М., Попов А. Ю, Чирский В. Г. О задаче Рамсея - Касса - Купманса для потребительского выбора // Итоги науки и техники. Серия "Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры том 182, с. 39-44.

26. Козко А. И., Лужина Л. М., Попов А. Ю., Чирский В. Г. Локализация показателя оптимальной экспоненты задачи Рамсея - Касса - Купманса стремящейся к бесконечности степенной функции полезности // Чебышевский сборник, 2021, том 22, с. 121-134.

27. Козко А. И., Лужина Л. М., Попов А. Ю., Чирский В. Г. Функция потребления в модели экономического роста Рамсея - Касса - Купманса в случае стационарности функции сбережения // Чебышевский сборник,2022, том 23, № 1, с. 116-127.

28. Козко А. И., Лужина Л. М., Попов А. Ю., Чирский В. Г. Метод приближенного решения системы дифференциальных уравнений из модели Рамсея - Касса - Купманса, основанный на решении в квадратурах одного класса сходных систем // Чебышевский сборник, 2022, том 23, № 4(85), с. 110-120.

29. Kozko A. I., Luzhina L. M., Popov A. Yu, Chirskii V. G. On the Ramsey–Cass–Koopmans Problem for Consumer Choice // Journal of Mathematical Sciences, 2023, том 277, № 5, с. 745-749.

30. Козко А. И., Лужина Л. М., Попов Антон Юрьевич, Чирский В. Г. Об идеальной экономической ситуации - росте капитала и функции потребления в некоторых моделях экономического роста // Чебышевский сборник, 2023, том 24, № 2, с. 256-265.

Другие работы

31. Василий Ильич Нечаев. К 100-летнему юбилею. Чубариков В. Н., Чирский В. Г., Деза Е. И., Баулина Ю. Н., Котова Л. В., Неискашова Е. В., Ванькова В. С., Добровольский Н. М., Реброва И. Ю., Рощеня А. Л. // Чебышевский сборник, 2020, том 21, № 1, с. 383-393.

32. Памяти Вячеслава Александровича Артамонова. Шафаревич А. И., Чубариков В. Н., Орлов Д. О., Иванов А .О., Михалёв А. В., Чирский В. Г., Ольшанский А. Ю., Зайцев М. В., Кожухов И. Б., Канель-Белов А. Я., Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н., Реброва И. Ю., Балаба И. Н. // Чебышевский сборник,2021, том 22, № 5, с. 417-418.

33. Юрий Валентинович Нестеренко(к 75-летию). Шафаревич А. И., Фоменко А. Т., Чубариков В. Н., Иванов А. О., Чирский В. Г., Берник В. И., Быковский В. А., Галочкин А. И., Демидов С. С., Гашков С. Б., Нижников А. И., Фомин А. А., Деза Е. И., Канель-Белов А. Я., Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н., Реброва И. Ю., Салихов В. Х. // Чебышевский сборник, 2022, том 23, № 1(82), с. 10-20.

34. Из истории кафедры теории чисел: к 150-летию Московского педагогического государственного университета. Деза Е. И., Добровольский Н. М., Иконникова Т. К., Котова Л. В., Крупицын Е. С., Реброва И. Ю., Чанга М. Е., Чирский В. Г. // Чебышевский сборник, 2022, том 23, № 3(84), с. 282-303.

35. Василий Иванович Берник (к 75-летию). Нестеренко Ю. В., Быковский В. А., Бухштабер В. М., Чирский В. Г., Чубариков В. Н., Лауринчикас А., Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н., Реброва И. Ю., Бударина Н. В., Бересневич В., Владимирович В. Д., Иванович К. Н. // Чебышевский сборник, 2022, том 23, № 1, с. 6-9 .

36. К 55-летию профессора М. В. Шамолина. Аграчев А. А., Гамкрелидзе Р. В., Козлов В. В., Журавлев Ю. И., Михалёв А. В., Овчинников А. В., Орлов Д. О., Попов В. Л., Романов В. Г., Семёнов А. Л., Чирский В. Г., Шамолин В. А. // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры, 2022, том 210, с. 3-5.

37. Сергей Сергеевич Демидов (к 80-летию со дня рождения). Шафаревич А. И., Чубариков В. Н., Семенов А. Л., Бухштабер В. М., Иванов А. О., Тихомиров В. М., Визгин Вл. П., Чирский В. Г., Козлов В. В., Козлов М. В., Зайцев Е. А., Смирнова Г. С., Чиненова В. Н., Добровольский Н. М. // Чебышевский сборник, 2023, том 24, № 1, с. 334-355.

38. Александр Иванович Галочкин (к 80-летию со дня рождения). Ю. В. Нестеренко, В. А. Быковский, В. Н. Чубариков, В. Г. Чирский, О. Н. Герман, Н. М. Добровольский // Чебышевский сборник, 2024, том 25, № 2, с. 20-29.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 25. Выпуск 3.

УДК 511.325 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-11-36

Об одновременном представлении чисел суммой пяти простых чисел

И. Аллаков, Б. Х. Эрдонов

Аллаков Исмаил — доктор физико-математических наук, профессор, Термезский государственный университет (г. Термез, Узбекистан).
e-mail: iallakov@mail.ru
Эрдонов Бекмурод Холбой оглы — базовый докторант, Термезский государственный университет (г. Термез, Узбекистан).
e-mail: bekmurod.erdonov@mail.ru

Аннотация

Пусть $X-$ достаточно большое действительное число, b_1, b_2, b_3- целые числа с условием $1 \leqslant b_1, b_2, b_3 \leqslant X,\ a_{ij}, (i = 1, 2, 3;\ j = \overline{1.5})$ целые положительные числа, $p_1, ..., p_5-$ простые числа. Положим $B = max\{3|a_{ij}|\},\ (i = 1, 2, 3;\ j = \overline{1.5}), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3),\ K = 36\sqrt{3}B^5|\vec{b}|,$ $E_{3,5}(X) = card\{b_i|1 \leqslant b_i \leqslant X,\ b_i \neq a_{i1}p_1 + \cdots + a_{i5}p_5,\ i = 1, 2, 3\}$. В работе доказано, что система $b_i = a_{i1}p_1 + \cdots + a_{i5}p_5,\ (i = 1, 2, 3)$ разрешимо в простых числах $p_1, \cdots, p_5$, для всех троек $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3),\ 1 \leqslant b_1, b_2, b_3 \leqslant X$, за исключением не более чем $E_{3,5}(X) < X^{3-\varepsilon}$ троек из них, а также получена оценка снизу для $R(\vec{b})-$количество решений этой системы, то есть доказано справедливости неравенство $R(\vec{b}) >> K^{2-\varepsilon}(\log K)^{-5}$, для всех $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ за исключением не более чем $X^{3-\varepsilon}$ троек из них.

Ключевые слова: оценка, положительная разрешимость, конгруэнт разрешимость, постоянная Эйлера, эффективная константа, фиксированное число, простое число, система линейных уравнений, степенная оценка, сравнения.

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:
Аллаков, И., Эрдонов, Б.Х. Об одновременном представлении чисел суммой пяти простых чисел // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 3, с. 11–36.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 25. No. 3.

UDC 511.325 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-11-36

On the simultaneous representation of numbers by the sum of five prime numbers

I. Allakov, B. Kh. Erdonov

Allakov Ismail — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Termez State University (Termez, Uzbekistan).
e-mail: iallakov@mail.ru
Erdonov Bekmurod Kholboy ugli — basic doctoral student, Termez State University (Termez, Uzbekistan).
e-mail: bekmurod.erdonov@mail.ru

Abstract

Let $X-$be a sufficiently large real number, b_1, b_2, b_3-be integers with the condition $1 \leqslant b_1, b_2, b_3 \leqslant X$, $a_{ij}, (i = 1, 2, 3;\ j = \overline{1.5})$ positive integers, $p_1, ..., p_5-$prime numbers. Let us set $B = max\{3|a_{ij}|\}$, $(i = 1, 2, 3;\ j = \overline{1.5}), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $K = 36\sqrt{3}B^5|\vec{b}|, E_{3,5}(X) = card\{b_i|1 \leqslant b_i \leqslant X,\ b_i \neq a_{i1}p_1 + \cdots + a_{i5}p_5,\ i = 1, 2, 3\}$. In the paper it is proved that the system $b_i = a_{i1}p_1 + \cdots + a_{i5}p_5$, $(i = 1, 2, 3)$ is solvable in prime numbers $p_1, \cdots, p_5$, for all triples $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $1 \leqslant b_1, b_2, b_3 \leqslant X$, with the exception of no more than $E_{3,5}(X)$ triples of them, and a lower bound is obtained for the $R(\vec{b})-$number of solutions of this system, that is, the inequality $R(\vec{b}) >> K^{2-\varepsilon}(\log K)^{-5}$ is proved to be true, for all (b_1, b_2, b_3) with the exception of no more than $X^{3-\varepsilon}$ triples of them.

Keywords: estimate, positive solvability, congruent solvability, Euler's constant, effective constant, fixed number, prime number, system of linear equations, power estimate, comparisons.

Bibliography: 16 titles.

For citation:
Allakov, I., Erdonov, B.Kh. 2024, "On the simultaneous representation of numbers by the sum of five prime numbers" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 3, pp. 11–36.

1. Введение

Рассмотрим системы линейных уравнений

$$b_i = a_{i1}p_1 + a_{i2}p_2 + \cdots + a_{im}p_m, \quad (i = 1, 2, \ldots,\ s), \tag{1}$$

где $b_1, b_2, \ldots, b_s-$натуральные числа, $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{im}-$ целые коэффициенты, $p_1, p_2, \ldots, p_m-$простые числа (см. §1, гл. III, [1]). Обозначим через $U_{s,m}(X)-$ множество наборов $(b_1, b_2, \ldots, b_s)$, $1 \leqslant b_1, b_2, \ldots, b_s \leqslant X$, для которых система (1) неразрешима в простых числах, т.е. $U_{s,m}(X) = \{(b_1, b_2, \ldots, b_s),\ 1 \leqslant b_1, b_2, \ldots, b_s \leqslant X,\ b_i \neq a_{i1}p_1 + a_{i2}p_2 + \cdots + a_{im}p_m\}$ и пусть $E_{s,m}(X) = card\ U_{s,m}(X)$ – количество элементов в множестве $U_{s,m}(X)$.

При $m \geqslant 2s+1$ Wu Fang [2], исследуя системы (1), в некоторых дополнительных условиях, получил асимптотическую формулу для числа решений системы (1).

M. C. Liu и K. M. Tsang [3] рассмотрели, частный случай системы (1) при $s = 2,\ m = 3$ и доказали степенную оценку $E_{2,3}(X) \leqslant X^{2-\varepsilon}$, где X- достаточно большое действительные число, ε - абсолютная, эффективно вычисляемая, положительная малая постоянная.

И. Аллаков [4] улучшил, а затем в [5] обобщил эти результаты для системы (1) при $s = n$, $m = n + 1$.

Разрешимость системы (1) связана следующими двумя условиями [1, 6]:

a) для любого простого p существуют такие целые числа $l_1, \ldots, l_m$ с условиями $1 \leqslant \leqslant l_1, \ldots, l_m \leqslant p - 1$, которые удовлетворяют систему линейных сравнений:

$$a_{i1}l_1 + a_{i2}l_2 + \ldots + a_{im}l_m \equiv b_i\,(modp)\,,\ \ (i = 1, \ldots, s);$$

b) существуют такие действительные положительные числа $y_1, \ldots, y_m$ для которых выполняются равенства $a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \ldots + a_{im}y_m = b_i,\ (i = 1, ..., s)$.

Обозначим $W_{s,m}(X)$–множество векторов $\vec{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_s)$, $1 \leqslant b_1, b_2, \ldots, b_s \leqslant X$, которые удовлетворяют условиям a) и b).

Далее, И. Аллаков и Б. Х. Абраев [7, 8] изучали системы (1) при $s = 2$ и $m = 4$.

Из выше изложенного следует, что вопрос исследования системы (1) при $s = 3$, $m = 5$ и $s = 3$, $m = 6$ остаётся открытым.

В данной статье рассматриваем именно тот случай, когда $s = 3$, $m = 5$. Полагая $s = 3,\ m = 5$ из (1) получим следующую систему:

$$b_i = a_{i1}p_1 + a_{i2}p_2 + a_{i3}p_3 + a_{i4}p_4 + a_{i5}p_5,\ \ (i = 1, 2, 3)\,. \tag{2}$$

Отметим, что работе [9] нами доказано, что если для действительных положительных чисел $y_1, ..., y_5$ выполняется неравенство

$$a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + a_{i3}y_3 + a_{i4}y_4 + a_{i5}y_5 > 0,\quad (i = 1, 2, 3), \tag{3}$$

тогда справедлива оценка

$$card W_{3,5}(X) \gg X^3 B^{-28} (\log\log B)^{-1}.$$

Из этой оценки следует, что векторы $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)\,,\ \ 1 \leqslant b_1, b_2, b_3 \leqslant X$, которые удовлетворяют условиям a) и b) достаточно много.

Для удобства введем следующие обозначения:

$$\Delta_{ijk} = det \begin{pmatrix} a_{1i} & a_{1j} & a_{1k} \\ a_{2i} & a_{2j} & a_{2k} \\ a_{3i} & a_{3j} & a_{3k} \end{pmatrix},\ \ 1 \leqslant i, j, k \leqslant 5,\ \ i \neq j \neq k.$$

Обозначим, через $\Delta_{bjk}, \Delta_{ibk},\ \Delta_{ijb}$ - определитель, полученный из Δ_{ijk} заменой i, j, k-столбца столбцом свободных членов $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, соответственно. Чтобы избежать тривиальности наложим на коэффициенты следующие условия:

$$\Delta_{123}\Delta_{124}\Delta_{125}\Delta_{134}\Delta_{135}\Delta_{145}\Delta_{234}\Delta_{235}\Delta_{245}\Delta_{345} \neq 0,$$

$$\text{НОД}\,(\Delta_{123}, \Delta_{124}, \Delta_{125}, \Delta_{134}, \Delta_{135}, \Delta_{145}, \Delta_{234}, \Delta_{235}, \Delta_{245}, \Delta_{345}) = 1. \tag{4}$$

В дальнейшем рассмотрим только те (b_1, b_2, b_3), которые удовлетворяют этим двум условиям. В настоящей работе доказано:

Теорема. *Если $\varepsilon > 0$ достаточно малое действительное число, тогда:*
a) существует положительное постоянное A, такое, что при $X > B^A$ справедлива оценка

$E_{3,5}(X) < X^{3-\varepsilon}$;
b) пусть $K = 36\sqrt{3}B^5\left|\vec{b}\right|$ *и* $R(\vec{b})$ *– количество представлений* $1 \leqslant b_1, b_2, b_3 \leqslant X$ *в виде* (2), *тогда для* $R(\vec{b})$ *при заданном* $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $1 \leqslant b_1, b_2, b_3 \leqslant X$ *справедлива оценка* $R\left(\vec{b}\right) >> K^{2-\varepsilon}(\log K)^{-5}$, *для всех* (b_1, b_2, b_3) *за исключением не более чем* $X^{3-\varepsilon}$ *троек из них.*

2. Обозначения и идея доказательства теоремы

Пусть a_{ij} $\left(i = 1, 2, 3;\ j = \overline{1.5}\right)$ целые числа удовлетворяющие условие (3), $c_1, c_2, ...-$ эффективно вычисляемые положительные константы и δ достаточно малое эффективно вычисляемое положительное постоянное. $\mathbb{R}-$ множество действительных чисел и пусть $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}}_{n}$.

Для любого целого $q \geqslant 1$ через $\sum\limits_{(q)}$ обозначим суммирование по всем $l_1, ..., l_5$ удовлетворяющим условиям $1 \leqslant l_j \leqslant q$, $(l_j, q) = 1$, $\sum\limits_{j=1}^{5} a_{ij}l_j \equiv b_i \,(\mathrm{mod} q)$, $(i = 1, 2, 3)$ и пусть

$$N(q) = \sum_{(q)} 1. \tag{5}$$

Определим X и N так чтобы выполнялось соотношении

$$X \geqslant B^{\exp\left(\delta^{-2}\right)},\ \ N = 108B^5X. \tag{6}$$

Положим:

$$Q := N^{\delta},\ \ L := NQ^{-1/90},\ \ T = Q^{1/\sqrt{\delta}}. \tag{7}$$

Из (6) следует, что

$$B \leqslant Q^{\delta}. \tag{8}$$

Через $\chi(\mathrm{mod} q)$ и $\chi_0(\mathrm{mod} q)$ обозначим произвольный характер Дирихле и главный характер Дирихле по модулю q, соответственно. Известно [10], что существует постоянное c_1 такое, что $L-$ функции $L(s, \chi)$-могут иметь только один вещественный нуль $\tilde{\beta}$ для одного вещественного примитивного характера $\tilde{\chi}(\mathrm{mod}\tilde{r})$ по модулю $\tilde{r}$ $(\tilde{r} \leqslant T)$, в области $\sigma > 1 - c_1(\log T)^{-1}$, $|t| \leqslant T$. Если такой нуль $\tilde{\beta}$ существует, то он единственный и такой нуль функции $L(s, \tilde{\chi})$ назовем исключительным нулем $L(s, \chi)$ функции, а $\tilde{\chi}(\mathrm{mod}\tilde{r})$ назовем исключительным характером. Если существует такой нуль, то он удовлетворяет соотношению [11]

$$\frac{c_2}{\tilde{r}^{1/2}\log^2\tilde{r}} \leqslant 1 - \tilde{\beta} \leqslant \frac{c_1}{\log T}. \tag{9}$$

Пусть

$$\omega = \begin{cases} \left(1 - \tilde{\beta}\right)\log T, \text{ если существует исключительный нуль } \tilde{\beta} \\ 1, \qquad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Для произвольного $y \in \mathbb{R}$ и положительного целого q определим $e(y) = e^{2\pi i y}$ и $e_q(y) = e\left(\frac{y}{q}\right)$,

$$\begin{cases} S(y) := \sum\limits_{L<n\leqslant N} \Lambda(n)\, e(ny), \quad S_\chi(y) := \sum\limits_{L<n\leqslant N} \Lambda(n)\,\chi(n)\, e(ny), \\ I(y) := \int\limits_L^N e(xy)\, dx, \qquad\qquad \tilde{I}(y) := \int\limits_L^N x^{\tilde{\beta}-1} e(xy)\, dx, \\ I_\chi(y) := \int\limits_L^N e(xy) \sum\limits_{|\gamma|\leqslant T}{}' x^{\rho-1} dx, \end{cases} \tag{10}$$

где $\sum\limits_{|\gamma|\leqslant T}{}'$ – означает, что суммирование ведётся по всем нулям $\rho = \beta + i\gamma$ функции $L(s,\chi)$ в области $\frac{1}{2} \leqslant \beta \leqslant 1 - c_1 \log^{-1} T$, $|\gamma| \leqslant T$ (кроме исключительного нуля $\tilde{\beta}$) и $\Lambda(n)$ –функция Мангольдта. Пусть

$$\tau = N^{-1} T^{1/6}. \tag{11}$$

Для произвольных целых чисел h_1, h_2, h_3, q с условием

$$1 \leqslant h_1, h_2, h_3 \leqslant q \leqslant Q, \;\; (h_1, h_2, h_3, q) = 1 \tag{12}$$

определим куб $m(h_1, h_2, h_3, q)$ равенством

$$m(h_1, h_2, h_3, q) = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \;\; \left| x_i - \frac{h_i}{q} \right| \leqslant \frac{\tau}{q}, \;\; i = 1, 2, 3 \right\}, \tag{13}$$

а M_1 и M_2 определим равенством

$$M_1 = \cup m(h_1, h_2, h_3, q), \quad M_2 = [\tau,\; 1+\tau]^3 \backslash M_1. \tag{14}$$

В равенстве (14) объединение берётся по всем h_1, h_2, h_3, q которые удовлетворяют условию (12).

Нетрудно видеть, что эти трёхмерные кубы $m(h_1, h_2, h_3, q)$ взаимно не пересекаются и лежат в $[\tau,\; 1+\tau]^3$.

Для произвольных $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3) \in W_{3,5}(X)$ и $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ положим

$$\bar{x}_b = b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3, \bar{x}_j = a_{1j} x_1 + a_{2j} x_2 + a_{3j} x_3, \quad \left(j = \overline{1.5}\right) \tag{15}$$

и

$$I\left(\vec{b}\right) = \sum \Lambda(n_1) \ldots \Lambda(n_5). \tag{16}$$

Здесь суммирование ведётся по всем n_j, которые удовлетворяют условиям $L < n_1, \ldots n_5 \leqslant N$ и $\sum\limits_{j=1}^{5} a_{ij} n_j = b_i$, $(i = 1, 2, 3)$. В силу (10), (14) и (16) имеем

$$I\left(\vec{b}\right) = \int\limits_\tau^{\tau+1} \int\limits_\tau^{\tau+1} \int\limits_\tau^{\tau+1} e(-\bar{x}_b) \prod_{j=1}^{5} S(\bar{x}_j)\, dx_1\, dx_2\, dx_3 =$$

$$= \left(\iiint\limits_{M_1} + \iiint\limits_{M_2} \right) e(-\bar{x}_b) \prod_{j=1}^{5} S(\bar{x}_j)\, dx_1\, dx_2\, dx_3 = I_1\left(\vec{b}\right) + I_2\left(\vec{b}\right). \tag{17}$$

Из (17) следует, что $I\left(\vec{b}\right) > I_1\left(\vec{b}\right) - \left|I_2\left(\vec{b}\right)\right|$. Теперь если мы покажем, что $I\left(\vec{b}\right) > 0$, то можно будет утверждать система (2) разрешимо в простых числах. Доказательство теоремы следует из следующих двух лемм:

Лемма 2.1. *Для всех троек* (b_1, b_2, b_3), $(1 \leqslant b_1, b_2, b_3 \leqslant X)$, *за исключением не более чем* $X^2Q^{-1/37}$ *троек из них, справедлива оценка* $I_2\left(\vec{b}\right) < N^2Q^{-1/9}$.

Лемма 2.2. *Для всех троек* $(b_1, b_2, b_3) \in W_{3,5}(X)$, *за исключением не более чем* $X^3Q^{-1/101}$ *троек из них, справедлива оценка* $I_1\left(\vec{b}\right) \gg N^2Q^{-51/466}$.

Теперь докажем эти леммы.

3. Доказательство леммы 2.1

При $n = 3$ из леммы 3.3.1 работы И. Аллакова [1] имеем: Если $(x_1, x_2, x_3) \in M_2$, то справедлива оценка

$$\min\left\{S(\bar{x}_1), S(\bar{x}_2), S(\bar{x}_3)\right\} \ll NB^{1/2}Q^{-1/8}\log^4 N. \tag{18}$$

Прежде всего, согласно определению $S(y)$ в (10) для произвольного $\Delta_{ijk} \neq 0$ имеем

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 |S(\bar{x}_i)|^2|S(\bar{x}_j)|^2|S(\bar{x}_k)|^2|S(\bar{x}_l)|^2\,dx_1\,dx_2\,dx_3 =$$

$$= \sum_{\substack{L<n_1,\ldots,n_8\leqslant N\\ n_1=n_2,\ldots,n_7=n_8}} \Lambda(n_1)\ldots\Lambda(n_8) \ll (N\log N)^4. \tag{19}$$

Используя тождества Парсеваля (см. [12], стр. 152) и оценку (18) имеем:

$$\sum_{b_1=-\infty}^{\infty}\sum_{b_2=-\infty}^{\infty}\sum_{b_3=-\infty}^{\infty}\left|I_2\left(\vec{b}\right)\right|^2 \ll \left(NQ^{-\frac{1}{8}}B^{\frac{1}{2}}\log^4 N\right)^2\int_0^1\int_0^1\int_0^1\Big(|S(\bar{x}_1)|^2|S(\bar{x}_2)|^2|S(\bar{x}_4)|^2|S(\bar{x}_5)|^2+$$

$$+|S(\bar{x}_1)|^2|S(\bar{x}_3)|^2|S(\bar{x}_4)|^2|S(\bar{x}_5)|^2 + |S(\bar{x}_2)|^2|S(\bar{x}_3)|^2|S(\bar{x}_4)|^2|S(\bar{x}_5)|^2\Big)\,dx_1dx_2dx_3 \ll$$

$$\ll N^6Q^{-1/4}B\log^{12}N$$

Таким образом, количество $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ не более чем $\left(N^6Q^{-1/4}B\log^{12}N\right)N^{-4}Q^{2/9} < X^2Q^{-1/37}$, для которых справедлива оценка $\left|I_2\left(\vec{b}\right)\right| \geqslant N^2Q^{-1/9}$. Так как $B \leqslant Q^{\delta}$. Таким образом доказана лемма 2.1. □

4. Большие дуги. Упрощение интеграла $I_1\left(\vec{b}\right)$

Для произвольного характера $\chi(\mathrm{mod}q)$ обозначим

$$C_\chi(m) := \sum_{1\leqslant l\leqslant q}\chi(l)e_q(ml) \quad \text{и} \quad C_q(m) = C_{\chi_0}(m).$$

Очевидно, что $|C_\chi(m)| \leqslant \varphi(q)$. Если для произвольного $(x_1, x_2, x_3) \in m(h_1, h_2, h_3, q)$ обозначим $x_j = \frac{h_j}{q} + \eta_j$, $(j = 1, 2, 3)$, то в силу (13) справедливо неравенство

$$|\eta_j| < \frac{\tau}{q}, \quad (j = 1, 2, 3). \tag{20}$$

По аналогии (15) обозначим:

$$\begin{cases} \bar{h}_j := a_{1j}h_1 + a_{2j}h_2 + a_{3j}h_3, \quad \bar{h}_b := b_1h_1 + b_2h_2 + b_3h_3, \\ \bar{\eta}_j := a_{1j}\eta_1 + a_{2j}\eta_2 + a_{3j}\eta_3, \quad \bar{\eta}_b := b_1\eta_1 + b_2\eta_2 + b_3\eta_3, \quad (j = \overline{1.5}) \end{cases} \tag{21}$$

тогда $\bar{x}_j = \frac{\bar{h}_j}{q} + \bar{\eta}_j$, $(j = \overline{1.5})$. Используя свойство ортогональности характеров [10, 11], сумму $S(\bar{x}_j)$ определенную в (10) можем представить в следующем виде:

$$S(\bar{x}_j) = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi(\bmod q)} C_{\tilde{\chi}}\left(\bar{h}_j\right) S_{\chi}(\bar{\eta}_j) + O\left(\log^2 N\right). \tag{22}$$

Далее при $1 \leqslant j \leqslant 5$ обозначим

$$\begin{cases} G_j\left(\bar{h}, q, \bar{\eta}\right) := \sum\limits_{\chi(\bmod q)} C_{\tilde{\chi}}\left(\bar{h}_j\right) I_{\chi}(\bar{\eta}_j) \quad \text{и} \\ H_j\left(\bar{h}, q, \bar{\eta}\right) := C_q\left(\bar{h}_j\right) I(\bar{\eta}_j) - \delta_q C_{\tilde{\chi}\chi_0}\left(\bar{h}_j\right) \tilde{I}(\bar{\eta}_j) - G_j\left(\bar{h}, q, \bar{\eta}\right) \end{cases} \tag{23}$$

где если $\tilde{r}|q$, то $\delta_q = 1$ и если $\tilde{r} \nmid q$, то $\delta_q = 0$.

Используя лемму 3.1 работы [13], из (22) получим:

$$S(\bar{x}_j) = \frac{1}{\varphi(q)} \left[H_j\left(\bar{h}, q, \bar{\eta}\right) + O\left(\varphi(q) NBT^{-5/6}\log^2 N\right)\right],$$

так как, согласно равенствам (21), (11) и (20) имеет место неравенство $|\eta_j| N \leqslant 3BT^{1/6}q^{-1}$. Согласно утверждению а) леммы 6.3 работы [3], для $H_j\left(\bar{h}, q, \overline{\eta}\right)$ имеет место тривиальная оценка $\ll N\varphi^2(q)$, которая играет доминирующую роль в остаточном члене "O". Таким образом, для произвольных $(x_1, x_3, x_3) \in m(h_1, h_3, h_3, q)$ справедлива оценка

$$\prod_{j=1}^{5} S(\bar{x}_j) = \frac{1}{\varphi^5(q)} \prod_{j=1}^{5} H_j\left(\bar{h}, q, \overline{\eta}\right) + O\left(\varphi^4(q) N^5 BT^{-5/6}\log^2 N\right). \tag{24}$$

Обозначим через $\sum\limits_{\bar{h}}'$ сумму, по h_1, h_2, h_3, удовлетворяющих условию (12). Тогда согласно (17), (14) и (24) имеет место равенства

$$I_1\left(\vec{b}\right) = \sum_{q \leqslant Q} \varphi^{-5}(q) \sum_{\bar{h}}{}' e_q\left(-\bar{h}_b\right) \iiint\limits_{\left[-\frac{\tau}{q}; \frac{\tau}{q}\right]^3} e_q\left(-\bar{\eta}_b\right) \prod_{j=1}^{5} H_j\left(\bar{h}, q, \overline{\eta}\right) d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3 +$$

$$+ O\left(N^2 Q^5 BT^{-\frac{1}{3}}\log^2 N\right). \tag{25}$$

Заметим, что согласно (23) при раскрытии произведения

$$\prod_{j=1}^{5} H_j\left(\bar{h}, q, \overline{\eta}\right) = \left(F_1^{(1)} - F_2^{(1)} - F_3^{(1)}\right) \cdots \left(F_1^{(5)} - F_2^{(5)} - F_3^{(5)}\right)$$

появляется 243 слагаемых вида $F = F_1F_2F_3F_4F_5$, где $F_j^{(k)}$ $(k = \overline{1.5},\ j = \overline{1.3})$ равен одному из этих $C_q\left(\bar{h}_j\right) I(\bar{\eta}_j)$ или $-\delta_q C_{\tilde{\chi}\chi_0}\left(\bar{h}_j\right) \tilde{I}(\bar{\eta}_j)$ или $C_{\tilde{\chi}}\left(\bar{h}_j\right) \tilde{I}_{\chi}(\bar{\eta}_j)$.

Далее, расширим пределы интегрирование в (25) от куба $\left[-\frac{\tau}{q};\,\frac{\tau}{q}\right]^3$ до всего пространства $\mathbb{R}^3$. Обозначим $D_1 := \left[-\frac{1}{2};\,\frac{1}{2}\right]^3 \backslash \left[-\frac{\tau}{q};\,\frac{\tau}{q}\right]^3$ и $D_2 := \mathbb{R}^3 \backslash \left[-\frac{1}{2};\,\frac{1}{2}\right]^3$ и оцениваем интегралы по D_1 и D_2. Покажем, что

$$\iiint\limits_{D_1} Fe\left(-\bar{\eta}_b\right) d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3 \ll N^2 Q^{-4} \tag{26}$$

за исключением не более чем $X^3 Q^{-1}$ троек (b_1, b_2, b_3) в рассматриваемом интервале. Также

$$\iiint\limits_{D_2} Fe\left(-\bar{\eta}_b\right) d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3 \ll N^2 Q^{-4} \tag{27}$$

для всех $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $1 \leqslant b_1, b_2, b_3 \leqslant X$.

Используя эти две оценки из (27) получим лемму.

Лемма 4.1. *В рассматриваемом интервале справедливо равенство*

$$I_1\left(\vec{b}\right) = \sum_{q \leqslant Q} \varphi^{-5}(q) \sum_{\bar{h}}{}' e_q\left(-\bar{h}_b\right) \iiint\limits_{\mathbb{R}^3} e_q\left(-\bar{\eta}_b\right) \prod_{j=1}^{5} H_j\left(\bar{h}, q, \bar{\eta}\right) d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3 + O\left(N^2 Q^{-1}\right)$$

за исключением не более чем $X^3 Q^{-1}$ троек $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ из них.

Сначало докажем (26). Рассмотрим сумму по всем b_1, b_2, b_3 трехкратного интеграла $\iiint\limits_{D_1}$. Тогда согласно тождеству Парсеваля имеем

$$\sum_{b_1=-\infty}^{\infty} \sum_{b_2=-\infty}^{\infty} \sum_{b_3=-\infty}^{\infty} \iiint\limits_{D_1} \left|Fe\left(-\bar{\eta}_b\right)\right|^2 d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3 = \iiint\limits_{D_1} |F|^2 d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3. \tag{28}$$

Для любого $(\eta_1, \eta_2, \eta_3) \in D_1$ согласно равенству (21) справедливо неравенство $\frac{\tau}{q} < \max\{|\eta_1|, |\eta_2|, |\eta_3|\} \leqslant 6B^2 \max\{|\bar{\eta}_1|, |\bar{\eta}_2|, |\bar{\eta}_3|\}$. Поскольку согласно (7) и (11) имеет место неравенство $\max\{|\bar{\eta}_1|, |\bar{\eta}_2|, |\bar{\eta}_3|\} > \frac{\tau}{6qB^2} = \frac{T^{1/6}}{6qB^2N} > N^{-1}$ и в части а) леммы 6.3 работы [3] самая слабая оценка $I_\chi(y) \ll N\left(L|y|\right)^{-1/2}$, поэтому

$$\min\{|F_i|, |F_j|, |F_k|\} \ll \varphi(q) N L^{-1/2} T^{-1/12} \left(6QB^2N\right)^{1/2}, \;\; (i, j, k = 1, 2, 3).$$

Из этого и применив результаты работы И.Аллакова (см.[1] стр. 88) при $n = 3$, в правой части (28) получим оценка:

$$\iiint\limits_{D_1} |F|^2 d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3 \ll \left(\min\{|F_1|, |F_2|, |F_3|\}\right)^2 \iiint\limits_{D_1} \Big(|F_1|^4 |F_4|^2 |F_5|^2 + |F_2|^4 |F_4|^2 |F_5|^2 +$$

$$+ |F_3|^4 |F_4|^2 |F_5|^2\Big) d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3 \ll Q^{12} N^{12} B^4 L^{-5} T^{-1/3} \log^3 N. \tag{29}$$

Согласно (7) и (8) для правой части (29) справедливо $\ll X^3 N^4 Q^{-9} = \left(N^2 Q^{-4}\right)^2 \left(X^3 Q^{-1}\right)$. Тогда путем не сложных рассуждений из (28) можем получить (26).

Теперь докажем (27). Так как для произвольных $(\eta_1, \eta_2, \eta_3) \in D_2$ выполняется неравенство $\max\{|\bar{\eta}_1|, |\bar{\eta}_2|, |\bar{\eta}_3|\} \geqslant \frac{1}{6B^2} \max\{|\eta_1|, |\eta_2|, |\eta_3|\} \gg B^{-2}$, то из части а) леммы 6.3 работы [3] и из неравенства $|\bar{\eta}_j| \gg B^{-2} \gg T(\pi L)^{-1}$ получим

$$\min\{|F_i|, |F_j|, |F_k|\} \ll \varphi(q) B^2, \;\; (1 \leqslant i < j < k \leqslant 5). \tag{30}$$

Известно, что $|F| = |F_1F_2F_3F_4F_5| \ll |F_1F_2F_3|^{\frac{5}{3}} + ... + |F_3F_4F_5|^{\frac{5}{3}}$. Согласно (30) справедливо

$$\iiint\limits_{D_2} |F| d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3 \ll (\min\{|F_i|, |F_j|, |F_k|\})^{\frac{1}{6}} \iiint\limits_{\mathbb{R}^3} \Big(|F_i|^{\frac{3}{2}} |F_4|^{\frac{5}{3}} |F_5|^{\frac{5}{3}} + |F_j|^{\frac{3}{2}} |F_4|^{\frac{5}{3}} |F_5|^{\frac{5}{3}} +$$

$$+ |F_k|^{\frac{3}{2}} |F_4|^{\frac{5}{3}} |F_5|^{\frac{5}{3}} \Big) d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3 \ll \left(\varphi(q) B^2\right)^{\frac{1}{6}} (QN)^{\frac{29}{6}} L^{-3} T^{\frac{5}{12}} \log^3 N, \tag{31}$$

так как согласно части b) леммы 6.3 работы [3] справедлива оценка

$$\iiint\limits_{\mathbb{R}^3} |F_i|^{\frac{3}{2}} |F_j|^{\frac{5}{3}} |F_k|^{\frac{5}{3}} d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3 = \Delta_{ijk}^{-1} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} |F_i|^{\frac{3}{2}} d\bar{\eta}_i \right) \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} |F_j|^{\frac{5}{3}} d\bar{\eta}_j \right) \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} |F_k|^{\frac{5}{3}} d\bar{\eta}_k \right) \ll$$

$$\ll \left(Q^{\frac{3}{2}} N^{\frac{3}{2}} L^{-1} T^{\frac{1}{4}} \log N \right) \left(Q^{\frac{5}{3}} N^{\frac{5}{3}} L^{-1} T^{\frac{1}{6}} \log N \right)^2.$$

Из равенства (31) с учетом (7) непосредственно следует (27).

5. Сингулярный ряд

Для произвольного целого $q \geqslant 1$ и для любых простых p обозначим

$$A(q) := \frac{1}{\varphi^5(q)} \sum_{\bar{h}}{}' e_q\left(-\bar{h}_b\right) \prod_{j=1}^{5} C_q\left(\bar{h}_j\right), \tag{32}$$

$$s(p) := 1 + A(p). \tag{33}$$

Принимая во внимание определение $N(q)$ в (5) и для вектор $\vec{b}$ из $W_{3,5}(X)$, для всех простых p выполняется $N(p) > 0$.

Вводим некоторые арифметические свойства функции $A(q)$, $s(p)$ и $N(q)$.

Лемма 5.1. *a) функции $A(q)$ и $N(q)$ мультипликативные относительно q;*
b) для любого натурального числа $k \geqslant 2$ имеем $A\left(p^k\right) = 0$.
c) $N\left(p^k\right) = p^{2k-2} N(p)$ справедливо для любого натурального числа;
d) $s(p) = p^3 \varphi^{-5}(p) N(p)$ и следовательно $s(p) > 0$ для всех p.
e) для простого p и натурального q справедливо равенство $q^3 \varphi^{-5}(q) N(q) = \prod\limits_{p|q} s(p)$.

Доказательство утверждение а). Используем идею L.K.Hua [14] при введенную на странице 100. Пусть $(m, n) = 1$. Тогда существуют целые u, v такие, что для которых выполняется равенство $mu + nv = 1$. Отсюда положим $h_i = k_i n + l_i m$, где $k_i = v h_i,\ l_i = u h_i,\ (i = 1, 2, 3)$. Из (32)

$$\bar{h}_b = \bar{k}_b n + \bar{l}_b m,\ \bar{h}_j = (a_{1j}k_1 + a_{2j}k_2 + a_{3j}k_3) n + (a_{1j}l_1 + a_{2j}l_2 + a_{3j}l_3) m = \bar{k}_j n + \bar{l}_j m$$

и с учетом $C_{mn}\left(\bar{h}_j\right) = C_m\left(\bar{k}_j\right) C_n\left(\bar{l}_j\right)$ получим

$$A(mn) = \frac{1}{\varphi^5(m)\varphi^5(n)} \sum_{\bar{h}}{}' e^{-2\pi i \frac{\bar{k}_b n + \bar{l}_b m}{mn}} \prod_{j=1}^{5} C_m\left(\bar{k}_j\right) C_n\left(\bar{l}_j\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{\varphi^5(m)} \sum_{\bar{k}}{}' e_m\left(-\bar{k}_b\right) \prod_{j=1}^{5} C_m\left(\bar{k}_j\right) \right) \left(\frac{1}{\varphi^5(n)} \sum_{\bar{l}}{}' e_m\left(-\bar{l}_b\right) \prod_{j=1}^{5} C_n\left(\bar{l}_j\right) \right) = A(m) A(n).$$

Если учесть

$$N(q)=\frac{1}{q^3}\sum_{1\leqslant h_1,h_2,h_3\leqslant q}{}'e_q\left(-\bar{h}_b\right)\prod_{j=1}^{5}C_q\left(-\bar{h}_j\right)$$

мультипликативность $N(q)$ следует из мультипликативности $A(q)$. □

Доказательство утверждение в). Известно, что справедливо равенство (см. H.Hasse [15] теорема 272)

$$C_q(m)=\mu\left(\frac{q}{(q,m)}\right)\varphi(q)\,\varphi^{-1}\left(\frac{q}{(q,m)}\right) \tag{34}$$

где $\mu(m)$ −функция Мёбиуса. Предположим, что $k\geqslant 2$. Если $\prod_{j=1}^{5}C_{p^k}\left(\bar{h}_j\right)\neq 0$, то согласно определению μ в (34), убедимся, что p должен делить все $\bar{h}_j=a_{1j}h_1+a_{2j}h_2+a_{3j}h_3,\ \left(j=\overline{1.5}\right)$. По определению $A\left(p^k\right)$ в (32) $(h_1,h_2,h_3,p)=1$ поскольку следует, что простые числа p должны делить все Δ_{ijk}. Но это противоречит условию (4). Значит $A\left(p^k\right)=0$ для всех $k\geqslant 2$. □

Доказательство утверждение с). Согласно (4) мы можем положить $p\nmid\Delta_{123}$. Система сравнений $\sum_{j=1}^{5}a_{ij}l_j\equiv b_i\left(\mathrm{mod}p^k\right),\ (i=1,2,3)$ эквивалентна системе

$$\begin{cases}\Delta_{123}l_1+\Delta_{423}l_4+\Delta_{523}l_5\equiv\Delta_{b23}\left(\mathrm{mod}p^k\right)\\ \Delta_{123}l_2+\Delta_{143}l_4+\Delta_{153}l_5\equiv\Delta_{1b3}\left(\mathrm{mod}p^k\right)\\ \Delta_{123}l_3+\Delta_{124}l_4+\Delta_{125}l_5\equiv\Delta_{12b}\left(\mathrm{mod}p^k\right)\end{cases}.$$

Это означает, что $N\left(p^k\right)$ равно количеству l_4,l_5 удовлетворяющего условию

$$1\leqslant l_4,l_5\leqslant p^k,\ \ p\nmid l_4,\ \ p\nmid l_5\ \text{и}\ \begin{cases}\Delta_{423}l_4+\Delta_{523}l_5\not\equiv\Delta_{b23}\left(\mathrm{mod}p^k\right)\\ \Delta_{143}l_4+\Delta_{153}l_5\not\equiv\Delta_{1b3}\left(\mathrm{mod}p^k\right)\\ \Delta_{124}l_4+\Delta_{125}l_5\not\equiv\Delta_{12b}\left(\mathrm{mod}p^k\right)\end{cases} \tag{35}$$

положим $l_4=pt_1+s_1$ и $l_5=pt_2+s_2$, где $1\leqslant s_1\leqslant p-1,\ 0\leqslant t_1<p^{k-1}$ и $1\leqslant s_2\leqslant p-1$, $0\leqslant t_2<p^{k-1}$. Тогда сравнение (35) можем написать в виде

$$\begin{cases}s_1\Delta_{423}+s_2\Delta_{523}\not\equiv\Delta_{b23}\left(\mathrm{mod}p^k\right)\\ s_1\Delta_{143}+s_2\Delta_{153}\not\equiv\Delta_{1b3}\left(\mathrm{mod}p^k\right)\\ s_1\Delta_{124}+s_2\Delta_{125}\not\equiv\Delta_{12b}\left(\mathrm{mod}p^k\right)\end{cases}.$$

Отсюда следует $N\left(p^k\right)=p^{2k-2}N(p)$. □

Доказательство утверждение d). На основании (33)

$$s(p)=\frac{1}{\varphi^5(p)}\sum_{l_1,\ldots,l_5\leqslant p}\chi_0(l_1)\ldots\chi_0(l_5)\sum_{h_1,h_2,h_3\leqslant p}e_p\left(\left(a_{11}h_1+a_{21}h_2+a_{31}h_3\right)l_1+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\left(a_{15}h_1+a_{25}h_2+a_{35}h_3\right)l_5-\left(b_1h_1+b_2h_2+b_3h_3\right)\right)=$$

$$= \frac{1}{\varphi^5(p)} \left(\sum_{\substack{l_1,\ldots,l_5 \leqslant p \\ \sum_{j=1}^{5} a_{ij} l_j = b_j,\, i=1,2,3}}{}' 1 \right) p^3 = \frac{p^3}{\varphi^5(p)} N(p).$$

□

Доказательство утверждение e). Пусть $q = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$. Тогда, согласно утверждениям a), c) и d) имеем нижеследующее:

$$\frac{q^3}{\varphi^5(q)} N(q) = \prod_{i=1}^{k} \frac{p_i^3}{\varphi^5(p_i)} N(p_i) = \prod_{p|q} \frac{p^3}{\varphi^5(p)} N(p).$$

Таким образом доказана лемма 5.1 полностью. □

В наших последующих исследованиях нужны более точные оценки для некоторых произведений и сумм, включающих в себя $s(p)$ и $A(q)$. В частности, установим сходимость $\prod_p s(p)$ и $\sum_q |A(q)|$. Чтобы достичь этого исключаем из рассмотрения те тройки $(b_1, b_2, b_3) \in W_{3,5}(X)$ из $[1, X]^3$, для которых $\Delta_{12b}\Delta_{13b}\Delta_{14b}\Delta_{15b}\Delta_{23b}\Delta_{24b}\Delta_{25b}\Delta_{34b}\Delta_{35b}\Delta_{45b} = 0$. Известно, что число таких элементов не превышает $10X^2$ и эти элементы можно включить в множество $U_{3,5}(X)$.

Теперь простые числа разделим на две части следующим образом:

$$P_B = \left\{ p: \ p | \underbrace{\Delta_{123}\ldots\Delta_{345}\Delta_{12b}\ldots\Delta_{45b}}_{20} \right\} \text{ и } P_G = \{p: \ p \nmid P_B\}.$$

Легко видеть, что $2 \in P_B$ и $N(3) > 0$ означает $3 \in P_B$.

Лемма 5.2. *Для $(b_1, b_2, b_3) \in W_{3,5}(X)$ удовлетворяющие условие $\Delta_{12b}\Delta_{13b}\Delta_{14b}\Delta_{15b}\Delta_{23b}\Delta_{24b}\Delta_{25b}\Delta_{34b}\Delta_{35b}\Delta_{45b} \neq 0$ имеем:*
a) $-\frac{68}{p^2} \leqslant A(p) \leqslant \frac{14}{p}$ для всех p, и если $p \in P_G$ то $-\frac{4}{p^2} \leqslant A(p) < 0$;
b) для всех p, $\prod_p (1 + |A(p)|) \ll \prod_p (1 + A(p)) \ll (\log\log N)^{14}$;
c) $\prod_p s(p)$ сходится абсолютно и $\prod_p s(p) > c_4 > 0$;
d) Для любых $y \geqslant 1$

$$\sum_{q \geqslant y} |A(q)| \ll y^{-1} N^{c_5/\log\log N} \log^{68}(y+2).$$

Доказательство. a) согласно (33) и леммы 5.1 d) имеем

$$A(p) = p^3 \varphi^{-5}(p) N(p) - 1 \tag{36}$$

Исходя из условий (4), можем предполагать, что $p \nmid \Delta_{123}$. Так как $N(p)$ - количество наборов $(l_1, \ldots, l_5)$, удовлетворяющих условиям $1 \leqslant l_1, \ldots, l_5 \leqslant p-1$ и $\sum_{j=1}^{5} a_{ij} l_j \equiv b_i \pmod{p}$, $(i = 1, 2, 3)$, то решая эти сравнения относительно l_1, l_2, l_3 находим

$$\begin{cases} l_1 \equiv \dfrac{1}{\Delta_{123}} (\Delta_{b23} - \Delta_{423} l_4 - \Delta_{523} l_5) \pmod{p} \\ l_2 \equiv \dfrac{1}{\Delta_{123}} (\Delta_{1b3} - \Delta_{143} l_4 - \Delta_{153} l_5) \pmod{p} \\ l_3 \equiv \dfrac{1}{\Delta_{123}} (\Delta_{12b} - \Delta_{124} l_4 - \Delta_{125} l_5) \pmod{p} \end{cases}.$$

А из этого следует, что $N(p)$- количество l_4, l_5 с условиями
1) $1 \leqslant l_4, l_5 \leqslant p-1$,
2) $\Delta_{b23} \not\equiv \Delta_{423} l_4 + \Delta_{523} l_5 \pmod{p}$,
3) $\Delta_{1b3} \not\equiv \Delta_{143} l_4 + \Delta_{153} l_5 \pmod{p}$,
4) $\Delta_{12b} \not\equiv \Delta_{124} l_4 + \Delta_{125} l_5 \pmod{p}$.
Согласно принципу включения и исключения для $N(p)$ имеем

$$N(p) = (p-1)^2 - M(\alpha) - M(\beta) - M(\gamma) + M(\alpha,\beta) + M(\beta,\gamma) + M(\alpha,\gamma) - M(\alpha,\beta,\gamma), \quad (37)$$

где $M(\alpha), M(\beta), \ldots$ означает количество l_4, l_5 удовлетворяющие соответствующим условиям:
$\alpha)$ $1 \leqslant l_4, l_5 \leqslant p-1$, $\quad \Delta_{b23} \equiv \Delta_{423} l_4 + \Delta_{523} l_5 \pmod{p}$,
$\beta)$ $1 \leqslant l_4, l_5 \leqslant p-1$, $\quad \Delta_{1b3} \equiv \Delta_{143} l_4 + \Delta_{153} l_5 \pmod{p}$,
$\gamma)$ $1 \leqslant l_4, l_5 \leqslant p-1$, $\quad \Delta_{12b} \equiv \Delta_{124} l_4 + \Delta_{125} l_5 \pmod{p}$.
Очевидно, что $N(p) \leqslant (p-1)^2$, и согласно (36) для всех p следует неравенство $A(p) \leqslant$
$\leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^3 - 1 \leqslant \frac{14}{p}$.

Согласно вышеуказанным условиям 2), 3) и 4) $N(p) > 0$ означает, что $p \nmid (\Delta_{b23}, \Delta_{423}, \Delta_{523})$ $(\Delta_{1b3}, \Delta_{143}, \Delta_{153})(\Delta_{12b}, \Delta_{124}, \Delta_{125})$. Поскольку, если $p | \Delta_{124}$ и $p | \Delta_{125}$, то должна быть $p \nmid \Delta_{12b}$, тогда условия $\gamma)$ не могут выполнятся. Если $p \not| \Delta_{124}$, $p | \Delta_{125}$ или $p | \Delta_{124}$, $p \not| \Delta_{125}$, то условиям $\gamma)$ удовлетворяют $p-1$ значений, вне зависимости от того, что $p | \Delta_{12b}$ или $\Delta_{12b} \not| p$. Отсюда $M(\gamma) \leqslant p-1$. Аналогично мы можем видеть, что $M(\beta) \leqslant p-1$ и $M(\alpha) \leqslant p-1$. Тогда из (37) заключаем, что $N(p) \geqslant (p-1)(p-4)$. Таким образом, из (36) получим неравенства

$$A(p) \geqslant \frac{p^3(p-4)}{(p-1)^4} - 1 = \frac{-6p^2+4p-1}{(p-1)^4} \geqslant -\frac{68}{p^2}.$$

Теперь рассмотрим $p \in P_G$. В силу определения P_G мы можем видеть, что $M(\alpha) = M(\beta) =$
$= M(\gamma) = p-1$, $M(\alpha,\beta) = M(\beta,\gamma) = M(\alpha,\gamma) = 1$ и $M(\alpha,\beta,\gamma) = 0$. Поэтому $N(p) =$
$= (p-1)^2 - 3(p-1) + 3$ при $p \geqslant 5$ имеем

$$A(p) = \frac{p^3\left(p^2-5p+7\right)}{(p-1)^5} - 1 = \frac{-3p^3+10p^2-5p+1}{(p-1)^5}$$

и следует неравенство $-\frac{4}{p^2} \leqslant A(p) \leqslant 0$. Таким образом, вытекает утверждение a) леммы 5.2.

Теперь рассмотрим случай b) и c). Сначала докажем, что $\prod\limits_p (1+|A(p)|) \ll \prod\limits_p (1+A(p))$.
В случае $A(p) > 0$, это очевидно. Пусть $A(p) < 0$, то в силу утверждения a)

$$\prod_p (1+|A(p)|) = \prod_p (1+A(p)-2A(p)) \ll \prod_p \left(1+A(p)+\frac{2\cdot 68}{p^2}\right) =$$

$$= \prod_p (1+A(p)) \prod_p \left(1+\frac{2\cdot 68}{p^2(1+A(p))}\right).$$

Здесь, $(1+A(p))p^2 \geqslant \left(1-\frac{68}{p^2}\right)p^2$ и $\prod\limits_p \left(1+\frac{136}{p^2(1+A(p))}\right) \leqslant \prod\limits_p \left(1+\frac{136}{\left(1-\frac{68}{p^2}\right)p^2}\right) \ll 1$, так что
$\prod\limits_p (1+|A(p)|) \ll \prod\limits_p (1+A(p))$.

Предполагаем, что $< P_G >$ и $< P_B >$ множества положительных целых свободных от квадратов, простые делители которых принадлежат P_G и P_B соответственно. Тогда для числа $t > 0$ выполнено неравенство

$$\sum_{q \leqslant t} |A(q)| \leqslant \sum_{q_1 \in < P_B >} |A(q_1)| \sum_{q_2 \in < P_G >} |A(q_2)| \leqslant \prod_{p \in P_B} (1+A(p)) \prod_{\substack{p \in P_G \\ p \leqslant t}} (1+A(p)) \leqslant$$

$$\leqslant \prod_{p\in P_B}\left(1+\frac{14}{p}\right)\prod_{p\leqslant t}\left(1+\frac{4}{p^2}\right) \ll \prod_{p\in P_B}\left(1+\frac{14}{p}\right) \ll \prod_{p\in P_B}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-14}.$$

Таким образом, ряд $\sum\limits_{q=1}^{\infty}|A(q)| = \prod\limits_{p} s(p)$, сходится и $\prod\limits_{p\in P_B}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-14} = \prod\limits_{p\in P_B}\left(\frac{\varphi(p)}{p}\right)^{-14} =$ $= \left(\frac{\varphi(\mathcal{K})}{\mathcal{K}}\right)^{-14} \ll (\log\log N)^{14}$, где $\mathcal{K} = \prod\limits_{p\in P_B} p \leqslant \left(6B^3\right)^{20} \ll N$.

Следовательно, мы доказали утверждения b) и первую часть c). Вторая часть c), т.е. $\prod\limits_{p} s(p) > c_4 > 0$ следует из первой части c) и леммы 5.1 d).

Утверждение d) доказывается аналогично утверждению 4) из леммы 4.4 в работе M.C.Liu, K.M.Tsang [13]. □

Пусть $\chi_j \pmod{r_j}$, $\left(j=\overline{1.5}\right)$- примитивные характеры и $r=[r_1,...,r_5]$ наибольший общий делитель чисел $r_1,...,r_5$. В дальнейшим нам необходимо иметь оценку выражений суммы вида:

$$Z(q) = Z(q,\chi_1,...,\chi_5) = \sum_{\bar{h}}{}' e_q\left(-\bar{h}_b\right)\prod_{j=1}^{5} C_{\chi_j\chi_0}\left(\bar{h}_j\right), \tag{38}$$

где число q кратное числа r, а χ_0 - главный характер по модулю q.

Лемма 5.3. *Имеют место следующие утверждения:*

a) $Z(r) = r^3\sum\limits_{(r)}{}'\prod\limits_{j=1}^{5}\chi_j(l_j)$;

b) пусть $r|q$ *и* $q=q'q''$, $(r,q'')=1$ *и каждый простой делитель числа* q' *делит* r, *тогда* $Z(q) = Z(q')\varphi^5(q'')A(q'')$ *и* $Z(q')=0$ *если* $q'>r$;

c) справедлива оценка $\sum\limits_{q\leqslant Q,\, r|q}\varphi^{-5}(q)Z(q) \ll \prod\limits_{p} s(p)$.

Доказательство. a) при $q=r$ из (38) получим

$$Z(r) = \sum_{\bar{h}}{}' e_r\left(-\bar{h}_b\right)\prod_{j=1}^{5} C_{\chi_j\chi_0}\left(\bar{h}_j\right) = \sum_{\bar{h}}{}' e_r\left(-\bar{h}_b\right) C_{\chi_1\chi_0}\left(\bar{h}_1\right)...C_{\chi_5\chi_0}\left(\bar{h}_5\right) =$$

$$= \sum_{1\leqslant l_1,...,l_5\leqslant r}\prod_{j=1}^{5}\chi_j(l_j)\sum_{1\leqslant h_1,h_2,h_3\leqslant r}{}' e_r\left(\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{5}\left(a_{ij}l_j-b_i\right)h_i\right). \tag{39}$$

Если

$$\sum_{j=1}^{5} a_{ij}l_j = b_i, \quad (i=1,2,3) \tag{40}$$

то можно не учитывать условие $(h_1,h_2,h_3,r)=1$, и тогда из (39) естественно следует утверждение a) леммы. Условие (40) выполняется в силу определения суммы $\sum\limits_{(r)}$.

Теперь покажем, что в этом случае можно не учитывать условие $(h_1,h_2,h_3,r)=1$. Пусть $\chi \pmod{q}$ индуцирован примитивным характером $\chi^* \pmod{r^*}$ и $q_1 = q/(q,m)$, тогда справедливо равенство (см. стр. 450, [16])

$$C_\chi(m) = \begin{cases} \bar{\chi}^*\left(\dfrac{m}{(m,q)}\right)\dfrac{\varphi(q)}{\varphi(q_1)}\mu\left(\dfrac{q_1}{r^*}\right)\chi^*\left(\dfrac{q_1}{r^*}\right)C_{\chi^*}(1), & \text{если } r^*|q\ ; \\ 0, & \text{если } r^*\not| q. \end{cases} \tag{41}$$

Пусть $(h_1,h_2,h_3,r)>1$ и $p|(h_1,h_2,h_3,r)$. Так как $r=[r_1,...,r_5]$, то мы можем полагать $p\not|\frac{r}{r_1}$. Поэтому $r_1\not| r\left(r,\ a_{11}h_1+...+a_{31}h_3\right)^{-1}$ и следовательно, в силу (41) $C_{\chi_1\chi_0}\left(\bar{h}_1\right)=0$. Таким

образом, если $(h_1,h_2,h_3,r)>1$, то $\prod\limits_{j=1}^{5}C_{\chi_j\chi_0}\left(\bar{h}_j\right)=0$. Части b) и c) леммы доказываются рассуждениями, аналогичными рассуждениям, которые использованы в леммах 4.5 и 4.6 в работах M.C.Liu, K.M.Tsanga [13]. □

6. Особый интеграл задачи

Относительно особого интеграла задачи справедлива следующая лемма.

Лемма 6.1. *Если ρ_j $\left(j=\overline{1.5}\right)$ произвольные комплексные числа с условием $0<\operatorname{Re}\rho_j\leqslant 1$, то справедливо равенство*

$$\iiint\limits_{\mathbb{R}^3}\left(\prod_{j=1}^{5}\int\limits_{L}^{N}x^{\rho_j-1}e\left(\bar{\eta}_jx\right)dx\right)e\left(-\bar{\eta}_b\right)d\eta_1d\eta_2d\eta_3=N^2|\Delta_{345}|^{-1}\iint\limits_{D}\prod_{j=1}^{5}\left(Nx_j\right)^{\rho_j-1}dx_1dx_2 \tag{42}$$

где x_3,x_4,x_5 и область интегрирования D определяются следующими равенствами:

$$\begin{cases}x_3=\Delta_{345}^{-1}\left(\Delta_{b45}N^{-1}-\Delta_{145}x_1-\Delta_{245}x_2\right)\\ x_4=\Delta_{345}^{-1}\left(\Delta_{3b5}N^{-1}-\Delta_{315}x_1-\Delta_{325}x_2\right)\\ x_5=\Delta_{345}^{-1}\left(\Delta_{34b}N^{-1}-\Delta_{341}x_1-\Delta_{342}x_2\right)\end{cases} \tag{43}$$

и

$$D=\left\{x_1,x_2:\ LN^{-1}\leqslant x_3,x_4,x_5\leqslant 1\right\}. \tag{44}$$

Кроме того, если $(b_1,b_2,b_3)\in W_{3,5}\left(X\right)$, то за исключением не более чем $X^3Q^{-1/101}$ значений (b_1,b_2,b_3)справедлива оценка

$$\iint\limits_{D}dx_1dx_2\gg Q^{-1/50}. \tag{45}$$

Доказательство. Очевидно, что

$$\iiint\limits_{\mathbb{R}^3}\left(\prod_{j=1}^{5}\int\limits_{L}^{N}x_j^{\rho_j-1}e\left(\bar{\eta}_jx_j\right)dx_j\right)e\left(-\bar{\eta}_b\right)d\eta_1d\eta_2d\eta_3=\lim_{y\to\infty}\int\limits_{-y}^{y}\int\limits_{-y}^{y}\int\limits_{-y}^{y}e\left(-\bar{\eta}_b\right)\times$$

$$\times\left(\prod_{j=1}^{5}\int\limits_{L}^{N}x_j^{\rho_j-1}e\left(\bar{\eta}_jx_j\right)dx_j\right)d\eta_1d\eta_2d\eta_3=\lim_{y\to\infty}N^2\int\limits_{L/N}^{1}...\int\limits_{L/N}^{1}\left(\prod_{j=1}^{5}\left(Nx_j\right)^{\rho_j-1}\right)\times$$

$$\times\left(\prod_{i=1}^{3}\frac{\sin\left(2\pi\left(a_{i1}x_1+...+a_{i5}x_5-b_iN^{-1}\right)y\right)}{\pi\left(a_{i1}x_1+...+a_{i5}x_5-b_iN^{-1}\right)}\right)dx_1...dx_5=\lim_{y\to\infty}N^2J\left(y\right). \tag{46}$$

Теперь введем следующие обозначения:

$$t_i=a_{i1}x_1+...a_{i5}x_5-b_iN^{-1},\quad (i=1,2,3);$$

$$D\left(x_1,x_2\right)=\left\{\vec{t}=(t_1,t_2,t_3)\mid t_i=\sum_{j=1}^{5}a_{ij}x_j-b_iN^{-1},\ i=1,2,3;\ LN^{-1}\leqslant x_3,x_4,x_5\leqslant 1\right\}. \tag{47}$$

Тогда

$$\begin{cases}x_3=\Delta_{345}^{-1}\left(\Delta_{t45}+\Delta_{b45}N^{-1}-\Delta_{145}x_1-\Delta_{245}x_2\right)\\ x_4=\Delta_{345}^{-1}\left(\Delta_{3t5}+\Delta_{3b5}N^{-1}-\Delta_{315}x_1-\Delta_{325}x_2\right).\\ x_5=\Delta_{345}^{-1}\left(\Delta_{34t}+\Delta_{34b}N^{-1}-\Delta_{341}x_1-\Delta_{342}x_2\right)\end{cases} \tag{48}$$

Используя эти обозначения и из (46) имеем:

$$\lim_{y\to\infty} N^2 J(y) = \lim_{y\to\infty} N^2 \int\limits_{L/N}^{1}\int\limits_{L/N}^{1} (Nx_1)^{\rho_1-1}(Nx_2)^{\rho_2-1}\times$$

$$\times\left(\iint\limits_{Q(x_1,x_2)} \frac{1}{|\Delta_{345}|}\prod_{j=3}^{5}(Nx_j)^{\rho_j-1}\frac{\sin 2\pi t_{j-2}y}{\pi t_{j-2}}dt_{j-2}\right)dx_1dx_2. \tag{49}$$

На правый части (49) применим теорему Жордана об интеграле Дирихле (см. [12], стр. 408). В силу теоремы, если функция $g(t)$ интегрируема и дифференцируема в интервале $\mu\leqslant t\leqslant\lambda$, тогда справедливо равенство

$$\lim_{y\to\infty}\int\limits_{\mu}^{\lambda} g(t)\frac{\sin(2\pi ty)}{\pi t}dt = \begin{cases} g(0), \text{ если } \mu\leqslant 0<\lambda; \\ \dfrac{1}{2}g(0), \text{ если } \mu=0 \text{ или } \lambda=0; \\ 0, \text{ в остальных случаях.}\end{cases}$$

Так как $\vec{t}=(0,0,0)$ принадлежит $D(x_1,x_2)$, поэтому из этой теоремы и из равенства (44), (49) вытекает (42), т.е. получим

$$\lim_{y\to\infty} N^2 J(y) = \frac{N^2}{|\Delta_{345}|}\iint\limits_{D}\prod_{j=1}^{5}(Nx_j)^{\rho_j-1}dx_1dx_2$$

Из (47) и (48) при $\vec{t}=(0,0,0)$ соответственно следует (44) и (43).

Теперь докажем (45). В зависимости от знака определителя Δ_{345} доказательство оценки (45) делим на два случая.

1-случай. Пусть $\Delta_{345}>0$. Согласно (43) и (44) кратный интеграл равен сумме подинтервалов

$$\begin{cases} \dfrac{LN^{-1}\Delta_{345}-\Delta_{b45}N^{-1}+\Delta_{245}LN^{-1}}{-\Delta_{145}}\leqslant x_1\leqslant\dfrac{\Delta_{345}+\Delta_{245}-\Delta_{b45}N^{-1}}{-\Delta_{145}}; \\ \dfrac{LN^{-1}\Delta_{345}-\Delta_{b45}N^{-1}+\Delta_{145}LN^{-1}}{-\Delta_{245}}\leqslant x_2\leqslant\dfrac{\Delta_{345}+\Delta_{145}-\Delta_{b45}N^{-1}}{-\Delta_{245}}; \\ \dfrac{LN^{-1}\Delta_{345}-\Delta_{3b5}N^{-1}+\Delta_{325}LN^{-1}}{-\Delta_{315}}\leqslant x_1\leqslant\dfrac{\Delta_{345}+\Delta_{325}-\Delta_{3b5}N^{-1}}{-\Delta_{315}}; \\ \dfrac{LN^{-1}\Delta_{345}-\Delta_{3b5}N^{-1}+\Delta_{315}LN^{-1}}{-\Delta_{325}}\leqslant x_2\leqslant\dfrac{\Delta_{345}+\Delta_{315}-\Delta_{3b5}N^{-1}}{-\Delta_{325}}; \\ \dfrac{LN^{-1}\Delta_{345}-\Delta_{34b}N^{-1}+\Delta_{342}LN^{-1}}{-\Delta_{341}}\leqslant x_1\leqslant\dfrac{\Delta_{345}+\Delta_{342}-\Delta_{34b}N^{-1}}{-\Delta_{341}}; \\ \dfrac{LN^{-1}\Delta_{345}-\Delta_{34b}N^{-1}+\Delta_{341}LN^{-1}}{-\Delta_{342}}\leqslant x_2\leqslant\dfrac{\Delta_{345}+\Delta_{341}-\Delta_{34b}N^{-1}}{-\Delta_{342}}; \end{cases} \tag{50}$$

на области $\left[LN^{-1},\ 1\right]^2$, здесь мы считаем, что $-\Delta_{145},-\Delta_{245},-\Delta_{315},-\Delta_{325},-\Delta_{341},-\Delta_{342}$ положительны. Это всегда возможно, в противном случае мы можем переобозначить индексы коэффициентов a_{ij}. Для $(b_1,b_2,b_3)\in W_{3,5}(X)$ имеем $|\Delta_{ijb}|\leqslant 6B^2X$ и согласно (6), (7) и (8) нижняя граница интервала в (50) удовлетворяет неравенство

$$\leqslant\left(12B^3Q^{-1/90}+6B^2XN^{-1}\right)|\Delta_{145}|^{-1}\leqslant\left(17B^3\right)^{-1},$$

а верхняя граница интервала удовлетворяет неравенству

$$\geqslant \left(1-6B^2XN^{-1}\right)|\Delta_{145}|^{-1} \geqslant \frac{1}{6B^3}-\frac{1}{108B^6} \geqslant \frac{1}{12B^3}\left(2-\frac{1}{9B^3}\right) \geqslant \left(12B^3\right)^{-1}.$$

Таким образом, первый интервал в (50) содержит под интервал $\left[\left(17B^3\right)^{-1},\ \left(12B^3\right)^{-1}\right]$, совершенно аналогично можно показать, что второй интервал в (50) тоже содержит под интервал $\left[\left(17B^3\right)^{-1},\ \left(12B^3\right)^{-1}\right]$. Поверхность, созданная первой областью $\gg B^{-6}$, содержит эту область. Совершенно аналогично можно показать, что это утверждение справедливо и для остальных интервалов в (50). Так что для всех $(b_1,b_2,b_3)\in W_{3,5}(X)$ и при $\delta<\frac{1}{300}$ выполняется неравенство $\iint\limits_D dx_1dx_2 \gg B^{-6} \gg Q^{-6\delta} \gg Q^{-1/50}$.

2-случай. Пусть $\Delta_{345}<0$. В этом случае тоже интеграл $\iint\limits_D dx_1dx_2$ равен сумме площадей следующих под интервалов в $\left[LN^{-1},\ 1\right]^2$

$$\begin{cases} \dfrac{\Delta_{345}-\Delta_{b45}N^{-1}+\Delta_{245}LN^{-1}}{-\Delta_{145}} \leqslant x_1 \leqslant \dfrac{LN^{-1}\Delta_{345}-\Delta_{b45}N^{-1}+\Delta_{245}}{-\Delta_{145}}; \\ \dfrac{\Delta_{345}-\Delta_{b45}N^{-1}+\Delta_{145}LN^{-1}}{-\Delta_{245}} \leqslant x_2 \leqslant \dfrac{LN^{-1}\Delta_{345}-\Delta_{b45}N^{-1}+\Delta_{145}}{-\Delta_{245}}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\Delta_{345}-\Delta_{b45}N^{-1}+\Delta_{325}LN^{-1}}{-\Delta_{315}} \leqslant x_1 \leqslant \dfrac{LN^{-1}\Delta_{345}-\Delta_{b45}N^{-1}+\Delta_{325}}{-\Delta_{315}}; \\ \dfrac{\Delta_{345}-\Delta_{b45}N^{-1}+\Delta_{315}LN^{-1}}{-\Delta_{325}} \leqslant x_2 \leqslant \dfrac{LN^{-1}\Delta_{345}-\Delta_{b45}N^{-1}+\Delta_{315}}{-\Delta_{325}}; \end{cases} \tag{51}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\Delta_{345}-\Delta_{b45}N^{-1}+\Delta_{342}LN^{-1}}{-\Delta_{341}} \leqslant x_1 \leqslant \dfrac{LN^{-1}\Delta_{345}-\Delta_{b45}N^{-1}+\Delta_{342}}{-\Delta_{341}}; \\ \dfrac{\Delta_{345}-\Delta_{b45}N^{-1}+\Delta_{341}LN^{-1}}{-\Delta_{342}} \leqslant x_2 \leqslant \dfrac{LN^{-1}\Delta_{345}-\Delta_{b45}N^{-1}+\Delta_{341}}{-\Delta_{342}}. \end{cases}$$

Так как $(b_1,b_2,b_3)\in W_{3,5}(X)$, тогда согласно определению $W_{3,5}(X)$ система линейных уравнений

$$\begin{cases} \Delta_{345}y_3=\Delta_{b45}+\Delta_{415}y_1+\Delta_{425}y_2 \\ \Delta_{345}y_4=\Delta_{3b5}+\Delta_{135}y_1+\Delta_{235}y_2 \\ \Delta_{345}y_5=\Delta_{34b}+\Delta_{431}y_1+\Delta_{432}y_2 \end{cases}$$

имеет решение в положительных вещественных числах $y_1,...,y_5$. Отсюда следует $\Delta_{4b5}>0$, $\Delta_{b35}>0$, $\Delta_{43b}>0$. Для каждого $k\geqslant 1$ существует не более, чем X^2 значений (b_1,b_2,b_3) в $[1;\ X]^3$ таких, что $k=\Delta_{4b5}$. Поэтому $(b_1,b_2,b_3)\in W_{3,5}(X)$ и удовлетворяющих условию $-\Delta_{b45}\Delta_{415}^{-1}\leqslant NQ^{-1/100}$ и $-\Delta_{b45}\Delta_{425}^{-1}\leqslant NQ^{-1/100}$ существует не более $\leqslant \max\{\Delta_{415},\ \Delta_{425}\}X^2NQ^{-1/100}$ значений троек. Применяя те же рассуждения к $-\Delta_{3b5}\Delta_{135}^{-1}$, $-\Delta_{3b5}\Delta_{235}^{-1}$ и $-\Delta_{34b}\Delta_{431}^{-1}$, $-\Delta_{34b}\Delta_{432}^{-1}$ получим

$$-\Delta_{b45}(N\Delta_{415})^{-1}>Q^{-1/100},\cdots,-\Delta_{34b}(N\Delta_{432})^{-1}>Q^{-1/100}. \tag{52}$$

Здесь

$$\left[\max\{\Delta_{415},\ \Delta_{425}\}+\max\{\Delta_{135},\ \Delta_{235}\}+\max\{\Delta_{431},\ \Delta_{432}\}\right]X^2NQ^{-1/100}\leqslant$$
$$\leqslant 18B^3X^2NQ^{-1/100}\leqslant X^3Q^{-1/101},$$

$\Delta_{345}<0$, $\left|\Delta_{ijb}N^{-1}\right|\leqslant\left(18B^3\right)^{-1}$ и согласно (6) имеем следующее:

$$\Delta_{345}-\Delta_{b45}N^{-1}+\Delta_{245}LN^{-1}<0,\cdots,\Delta_{345}-\Delta_{b45}N^{-1}+\Delta_{341}LN^{-1}<0$$

т.е. нижняя граница в (51) отрицательна и также согласно (52) и (7) для его верхней границы выполняется неравенство

$$\geqslant Q^{-1/100} - 12B^3Q^{-1/90} > \frac{1}{2}Q^{-1/100}.$$

Это означает, что выражение

$$\iint\limits_{(D)} dx_1dx_2 \geqslant \left(\frac{1}{2}Q^{-1/100} - LN^{-1}\right)^2 \gg Q^{-1/50}$$

справедливо для всех троек, кроме $X^2Q^{-1/101}$ троек, принадлежащих $(b_1, b_2, b_3) \in W_{3,5}(X)$. Таким образом доказана лемма 6.1. □

7. Доказательство леммы 2.2 и теоремы

В силу (23) при раскрытии произведения $\prod\limits_{j=1}^{5} H_j\left(\bar{h}, q, \bar{\eta}\right)$ получается 243 слагаемых. Их можно разделить на три группы следующим образом:

T_1) $\prod\limits_{j=1}^{5} C_q\left(\bar{h}_j\right) I\left(\bar{h}_j\right)$;

T_2) 211 слагаемых, каждый из которых имеет по крайней мере один множитель $G_j\left(\bar{h}, q, \bar{\eta}\right)$;

T_3) оставшиеся 31 слагаемых.

Для удобства определим:

$$M_i := \sum_{q\leqslant Q} \varphi^{-5}(q) \sum_{\bar{h}}{}' e_q\left(-\bar{h}_b\right) \iiint\limits_{\mathbb{R}^3} T_i e\left(-\bar{\eta}_b\right) d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3, \quad (i = 1, 2, 3) \tag{53}$$

Легко заметить, что M_i- является вещественным числом. Используя обозначение (53), в силу леммы 4.4 для всех рассмотренных троек $(b_1, b_2, b_3) \in W_{3,5}(X)$, за исключением X^3Q^{-1} значений из них, можем написать в виде:

$$I_1\left(\vec{b}\right) = M_1 + M_2 + M_3 + O\left(N^2Q^{-1}\right). \tag{54}$$

Пусть

$$M_0 = \frac{N^2}{|\Delta_{345}|} \prod_p s(p) \iint\limits_D dx_1dx_2. \tag{55}$$

Тогда в силу утверждения c) леммы 5.2 и леммы 6.1 справедлива оценка

$$M_0 \gg N^2B^{-3}Q^{-1/50} \tag{56}$$

за исключением не более чем $X^3Q^{-1/101}$ значений $(b_1, b_2, b_3) \in W_{3,5}(X)$.

Лемма 7.1. *Для всех $(b_1, b_2, b_3) \in W_{3,5}(X)$ справедливо равенство $M_1 = M_0 + O\left(N^2Q^{-4/5}\right)$.*

Доказательство. Полагая в (42) $\rho_j = 1$ и используя лемму 5.2 d) из (53) находим

$$M_1 = \sum_{q\leqslant Q} \varphi^{-5}(q) \sum_{\bar{h}}{}' e_q\left(-\bar{h}_b\right) \prod_{j=1}^{5} C_q\left(\bar{h}_j\right) \iiint\limits_{\mathbb{R}^3} \left(\prod_{j=1}^{5} \int\limits_L^N e\left(\bar{\eta}_j x\right) dx\right) e\left(-\bar{\eta}_b\right) d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3 =$$

$$= N^2|\Delta_{345}|^{-1} \iint\limits_{(D)} dx_1dx_2 \left(\sum_{q\leqslant Q} A(q)\right) = N^2|\Delta_{345}|^{-1} \iint\limits_{(D)} dx_1dx_2 \left(\sum_{q=1}^{\infty} A(q)\right) +$$

$$+O\left(N^2Q^{-1}N^{c_5/\log\log N}\log^{68}Q\right). \tag{57}$$

В силу леммы 5.1 a), b) и (33)

$$\sum_{q=1}^{\infty}A(q)=\prod_{p}(1+A(p))=\prod_{p}s(p)$$

и ясно, что $N^{c_5/\log\log N}\log^{68}Q<Q^{1/5}$. Из этого и равенств (55), (57) следует доказываемая лемма. □

Теперь оценим M_3. Пусть $m_1,m_2,...$ различные целые числа из множества $\{1,2,3,4,5\}$ и

$$G(m_1,m_2,...):=\sum_{(\tilde{r})}\tilde{\chi}(l_{m_1})\tilde{\chi}(l_{m_2})... \tag{58}$$

$$P(m_1,m_2,...):=\iint\limits_{D}(Nx_{m_1})^{\tilde{\beta}-1}(Nx_{m_2})^{\tilde{\beta}-1}...\,dx_1dx_2 \tag{59}$$

где область D определена в (44). Очевидно,

$$|P(m_1,m_2,...)|\leqslant 1. \tag{60}$$

Лемма 7.2. *Имеют место следующие оценки:*
a) $|G(m_1,m_2,...)|\leqslant N(\tilde{r})\leqslant\varphi^2(\tilde{r})$;
b) $G(m_1,m_2,...)\ll B^{30}\tilde{r}^{5/4}$ *за исключением не более, чем* $X^3\tilde{r}^{-1/2}$ *значений* $(b_1,b_2,b_3)\in\in[1,\ X]^3$.

Доказательство. Утверждение a) следует из определения функции $N(\tilde{r})$ и его мультипликативности, если учитывать лемму 5.1. c).

Докажем b). Для удобства рассмотрим конкретный набор из $\{1,2,3,4,5\}$, например 1,2,3, то есть $G(1,2,3)$. Согласно (58) $G(1,2,3)$ можно представить в виде [1]

$$G(1,2,3)=\frac{1}{\tilde{r}^3}\sum_{1\leqslant h_1,h_2,h_3\leqslant\tilde{r}}e_{\tilde{r}}\left(-\bar{h}_b\right)C_{\tilde{\chi}}\left(\bar{h}_1\right)C_{\tilde{\chi}}\left(\bar{h}_2\right)C_{\tilde{\chi}}\left(\bar{h}_3\right)C_{\tilde{r}}\left(\bar{h}_4\right)C_{\tilde{r}}\left(\bar{h}_5\right).$$

Используя тождество Парсеваля получим:

$$\sum_{1\leqslant b_1,b_2,b_3\leqslant\tilde{r}}|G(1,2,3)|^2=\frac{1}{\tilde{r}^3}\left|\sum_{1\leqslant h_1,h_2,h_3\leqslant\tilde{r}}C_{\tilde{\chi}}\left(\bar{h}_1\right)...C_{\tilde{\chi}}\left(\bar{h}_3\right)C_{\tilde{r}}\left(\bar{h}_4\right)C_{\tilde{r}}\left(\bar{h}_5\right)\right|^2.$$

Так как $\tilde{\chi}-$является примитивным характером, то справедливо равенство $C_{\tilde{\chi}}(m)=$ $=\tilde{\chi}(m)C_{\tilde{\chi}}(1)$ и $C_{\tilde{\chi}}(1)=\sqrt{\tilde{r}}$. Поэтому

$$\sum_{1\leqslant b_1,b_2,b_3\leqslant\tilde{r}}|G(1,2,3)|^2\leqslant\sum_{\substack{1\leqslant h_1,h_2,h_3\leqslant\tilde{r}\\(h_1,h_2,h_3,\tilde{r})=1}}\left|\,C_{\tilde{r}}\left(\bar{h}_4\right)C_{\tilde{r}}\left(\bar{h}_5\right)\right|^2. \tag{61}$$

Известно, что модуль квадратичного характера $\tilde{\chi}$ должен иметь вид $\tilde{r}=\nu_1\nu_2...\nu_k$ (здесь $\nu_1=2^t,\ t=\{0,2,3\}$ и $\nu_2<\nu_3<...<\nu_k$ нечетные простые числа).

Пусть $U_1=\{\nu_j|\ \nu_j\not|\Delta_{123}\Delta_{124}...\Delta_{345},\ j\geqslant 2\}$ и $U_2=\{\nu_j|\ \nu_j\notin U_1\}$, а также обозначим $u_i=\prod\limits_{\nu_j\in U_i}\nu_j,\ (i=1,2)$. Тогда имеет место $\tilde{r}=u_1u_2$ и

$$u_2=\prod_{\nu_j\in U_2}\nu_j=\nu_1\prod_{\nu_j\in U_2\setminus\{\nu_1\}}\nu_j\leqslant 8\underbrace{|\Delta_{123}\Delta_{124}...\Delta_{345}|}_{10}\ll B^{30}. \tag{62}$$

Подобным способом, который был использован при доказательстве леммы 5.1 а) нетрудно показать, что

$$\sum_{\substack{1\leqslant h_1,h_2,h_3\leqslant \tilde{r}\\(h_1,h_2,h_3,\tilde{r})=1}} \left| C_{\tilde{r}}\left(\bar{h}_4\right) C_{\tilde{r}}\left(\bar{h}_5\right)\right|^2 = \prod_{j=1}^{k}\left\{ \sum_{\substack{1\leqslant h_1,h_2,h_3\leqslant \nu_j\\(h_1,h_2,h_3,\nu_j)=1}} \left| C_{\nu_j}\left(\bar{h}_4\right) C_{\nu_j}\left(\bar{h}_5\right)\right|^2 \right\}. \tag{63}$$

Фиксируем $\nu_j \in U_1$ и рассмотрим соответствующую сумму в правой части равенства (63)

$$C_{\nu_j}\left(\bar{h}_i\right) = \sum_{l\leqslant \nu_j}{}' e\left(\frac{l\bar{h}_i}{\nu_j}\right) = \begin{cases} \varphi\left(\nu_j\right), & \text{если } \nu_j|\bar{h}_i\ , \\ -1, & \text{если } \nu_j \not| \bar{h}_i\ , \end{cases} \qquad (i=4,5).$$

Также существуют $\nu_j - 1$ значений h_1, h_2, h_3, для которых $\nu_j|\bar{h}_i,\ (i=4,5)$. Поэтому из (63) для всех $\nu_j \in U_1$ находим

$$\sum_{\substack{1\leqslant h_1,h_2,h_3\leqslant \nu_j\\(h_1,h_2,h_3,\nu_j)=1}} \left| C_{\nu_j}\left(\bar{h}_4\right) C_{\nu_j}\left(\bar{h}_5\right)\right|^2 \leqslant \varphi^5\left(\nu_j\right). \tag{64}$$

Если $\nu_j \in U_2$, очевидно, что выражений левой части неравенства (64) не больше ν_j^7 . Из (61)-(64) следует

$$\sum_{1\leqslant b_1,b_2,b_3\leqslant \tilde{r}} |G\left(1,2,3\right)|^2 \ll \prod_{\nu_j\in U_1}\varphi^5\left(\nu_j\right)\prod_{\nu_j\in U_2}\nu_j^7 \leqslant \tilde{r}^5 u_2^2 \ll \tilde{r}^5 B^{60}.$$

Последняя оценка показывает, что количество наборов b_1, b_2, b_3 принадлежащих $[1,\ \tilde{r}]^3$, для которых $G\left(1,2,3\right) \gg \tilde{r}^{5/4}B^{30}$ не превосходит $\tilde{r}^{5/2}$. Ясно, что $G\left(1,2,3\right)$ зависит от классов вычетов по модулю $\tilde{r}$. Таким образом для не более, чем $\left(\frac{X}{\tilde{r}}\right)^3\tilde{r}^{5/2} = X^3\tilde{r}^{-1/2}$ исключительных значений $(b_1,b_2,b_3)\in[1,\ \tilde{r}]^3$, имеет место

$$G\left(1,2,3\right) \ll \tilde{r}^{5/4}B^{30}. \tag{65}$$

Для остальных наборов чисел $m_1, m_2, ...$ из $\{1,2,3,4,5\}$ функция $G\left(m_1,m_2,...\right)$ оценивается аналогично и (65) остается в силе. □

Лемма 7.3. *Для M_3 определяемой равенством* (53) *справедливо равенство*

$$M_3 = \frac{N^2\tilde{r}^3}{|\Delta_{345}|\,\varphi^5\left(\tilde{r}\right)}\left(\sum_{\substack{q\leqslant Q/\tilde{r}\\(\tilde{r},q)=1}} A\left(q\right)\right)\left[-\sum_{j=1}^{5} G\left(j\right)P\left(j\right) + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant 5} G\left(i,j\right)P\left(i,j\right) - \right.$$

$$- \sum_{1\leqslant i_1<i_2<i_3\leqslant 5} G\left(i_1,i_2,i_3\right)P\left(i_1,i_2,i_3\right) + \sum_{1\leqslant i_1<i_2<i_3<i_4\leqslant 5} G\left(i_1,i_2,i_3,i_4\right)P\left(i_1,i_2,i_3,i_4\right) -$$

$$\left. - G\left(1,2,3,4,5\right)P\left(1,2,3,4,5\right)\right]. \tag{66}$$

Доказательство. Каждый из слагаемых в T_3 принадлежит одному из следующих типов

$$(-1)^m\delta_q\sum_{j=1}^{m} C_{\tilde{\chi}\chi_0}\left(\bar{h}_j\right)\tilde{I}\left(\bar{\eta}_j\right)\prod_{j=m+1}^{5} C_q\left(\bar{h}_j\right)I\left(\bar{\eta}_j\right), \quad (m=1,2,3,4,5).$$

Обозначая вклад такого члена в M_3 через $M_{3,m}$, оценим его. Для этого напишем $M_{3,m}$ следующим образом:

$$M_{3,m}=(-1)^m\sum_{q\leqslant Q}\frac{1}{\varphi^5(q)}\sum_{\bar{h}}{}'e_q\left(-\bar{h}_b\right)\prod_{j=1}^{m}C_{\tilde{\chi}\chi_0}\left(\bar{h}_j\right)\prod_{j=m+1}^{5}C_q\left(\bar{h}_j\right)\times$$

$$\times\iiint\limits_{\mathbb{R}^3}e\left(-\bar{\eta}_b\right)\prod_{j=1}^{m}\tilde{I}\left(\bar{\eta}_j\right)\prod_{j=m+1}^{5}I\left(\bar{\eta}_j\right)d\eta_1d\eta_2d\eta_3=(-1)^mW_m\cdot U_m \tag{67}$$

где через U_m обозначен кратный интеграл по $\mathbb{R}^3$ и

$$W_m=\sum_{\substack{q\leqslant Q\\ \tilde{r}|q}}\frac{1}{\varphi^5(q)}\sum_{\bar{h}}{}'e_q\left(-\bar{h}_b\right)\prod_{j=1}^{m}C_{\tilde{\chi}\chi_0}\left(\bar{h}_j\right)\prod_{j=m+1}^{5}C_q\left(\bar{h}_j\right).$$

Из (10), (59) и (42) (считая $\rho_j=\tilde{\beta}$ или $\rho_j=1$) находим

$$U_m=\frac{N^2}{|\Delta_{345}|}\iint\limits_{D}\prod_{j=1}^{m}(Nx_j)^{\tilde{\beta}-1}dx_1dx_2=\frac{N^2}{|\Delta_{345}|}P(1,2,...,m). \tag{68}$$

Полагая в (38) $\chi_1=...=\chi_m=\tilde{\chi}\,(\mathrm{mod}\tilde{r})$ и $\chi_{m+1}=...=\chi_5=\chi_0\,(\mathrm{mod}1)$ получим

$$W_m=\sum_{\substack{q\leqslant Q\\ \tilde{r}|q}}\varphi^{-5}(q)\,Z(q). \tag{69}$$

В силу леммы 5.3. a), b) функцию $Z(q)$можем написать в виде

$$Z(q)=Z(\tilde{r})\,A\left(q''\right)\varphi^5\left(q''\right)=\tilde{r}^3\sum_{(\tilde{r})}\prod_{j=1}^{5}\tilde{\chi}(l_j)\,A\left(q''\right)\varphi^5\left(q''\right) \tag{70}$$

где $q=\tilde{r}q''$, $(\tilde{r},q'')=1$ из равенств (58), (69) и (70) имеем

$$W_m=Z(\tilde{r})\,\varphi^{-5}(\tilde{r})\sum_{\substack{q''\leqslant Q/\tilde{r}\\ (\tilde{r},q'')=1}}A\left(q''\right)=\tilde{r}^3\varphi^{-5}(\tilde{r})\,G(1,2,...,m)\sum_{\substack{q''\leqslant Q/\tilde{r}\\ (\tilde{r},q'')=1}}A\left(q''\right).$$

Подставляя это выражение и (68) в (67) получим

$$M_{3,m}=\frac{N^2\tilde{r}^3}{|\Delta_{345}|\,\varphi^5(\tilde{r})}\sum_{\substack{q''\leqslant Q/\tilde{r}\\ (\tilde{r},q'')=1}}A\left(q''\right)\left((-1)^mG(1,2,...,m)\,P(1,2,...,m)\right).$$

Собирая выражение при $m=1,2,...,5$ имеем равенство приведенное в лемме. □

Если $Q/\tilde{r}$ достаточно "большое" сумма $\sum\limits_{\substack{q\leqslant Q/\tilde{r}\\ (\tilde{r},q)=1}}A(q)$ в (66) является достаточно длинной и в силу леммы 5.2 d) мы можем представить ее в виде:

$$\sum_{\substack{q\leqslant Q/\tilde{r}\\ (\tilde{r},q)=1}}A(q)=\prod_{p\nmid\tilde{r}}s(p)+O\left(\tilde{r}Q^{-9/10}\right). \tag{71}$$

Обозначая через $A(G,P)$ выражение, стоящее в квадратной скобке в (66) и используя (71), находим

$$M_3=\frac{N^2\tilde{r}^3}{|\Delta_{345}|\,\varphi^5(\tilde{r})}\left(\prod_{p\nmid\tilde{r}}s(p)+O\left(\tilde{r}Q^{-9/10}\right)\right)A(G,P).$$

Из этого и (60) из леммы 7.2 a) получим

$$M_3=\frac{N^2\tilde{r}^3}{|\Delta_{345}|\,\varphi^5(\tilde{r})}\prod_{p\nmid\tilde{r}}s(p)A(G,P)+O\left(N^2\tilde{r}Q^{-9/10}(\log\log Q)^3\right). \tag{72}$$

С другой стороны, согласно лемме 5.1 e) имеет место равенство

$$\prod_{p\nmid\tilde{r}}s(p)=\tilde{r}^3\varphi^{-5}(\tilde{r})\sum_{(\tilde{r})}1. \tag{73}$$

Поэтому из леммы 7.1 и равенства (55) получим

$$M_1=\frac{N^2}{|\Delta_{345}|}\prod_{p\nmid\tilde{r}}s(p)\frac{\tilde{r}^3}{\varphi^5(\tilde{r})}\sum_{(\tilde{r})}\iint\limits_D dx_1dx_2+O\left(N^2Q^{-4/5}\right). \tag{74}$$

Из (72) и (74) следует

$$M_1+M_3=\frac{N^2\tilde{r}^3}{|\Delta_{345}|\,\varphi^5(\tilde{r})}\prod_{p\nmid\tilde{r}}s(p)\sum_{(\tilde{r})}\iint\limits_D\prod_{j=1}^{5}\left(1-\tilde{\chi}(l_j)(Nx_j)^{\tilde{\beta}-1}\right)dx_1dx_2+O\left(N^2\tilde{r}Q^{-4/5}\right). \tag{75}$$

В силу (44) $Nx_j>L$ так что

$$\prod_{j=1}^{5}\left(1-\tilde{\chi}(l_j)(Nx_j)^{\tilde{\beta}-1}\right)\geqslant\left(\left(1-\tilde{\beta}\right)\log T\right)^5=\omega^5. \tag{76}$$

Таким образом, из равенства (76) и неравенства (73), (75) приходим к заключению

$$M_1+M_3\geqslant\omega^5M_0-O\left(N^2\tilde{r}Q^{-4/5}\right). \tag{77}$$

В случае, когда $Q/\tilde{r}$ является "малым" для суммы $\sum\limits_{\substack{q\leqslant Q/\tilde{r}\\(\tilde{r},q)=1}}A(q)$ мы не сможем получить оценку, типа (71). В этом случае в силу утверждения леммы 5.2 b) получим оценку для рассматриваемой суммы. Из (66) для M_3 имеем

$$M_3\ll N^2\tilde{r}^3\varphi^{-5}(\tilde{r})\,A(G,P).$$

В силу леммы 7.2 b) и (60) имеем оценку $A(G,P)\ll B^3\tilde{r}^{5/4}$ справедливую за исключением $X^3\tilde{r}^{-1/2}$ наборов $(b_1,b_2,b_3)\in[1,\ X]^3$. Поэтому

$$M_3\ll\frac{N^2\tilde{r}^3}{\varphi^5(\tilde{r})}B^{30}\tilde{r}^{5/4}(\log\log N)^{14}\ll N^2\tilde{r}^{-3/4}B^{30}(\log\log N)^{19}. \tag{78}$$

Теперь оценим M_2.

Лемма 7.4. *Для всех* $(b_1,b_2,b_3)\in[1,\ X]^3$ *справедлива оценка* $M_2\ll M_0\omega^5\exp\left(-c_3\delta^{-1/2}\right)$.

Доказательство. Слагаемые, содержащиеся в T_2 имеют вид

$$(-1)^m \prod_{j=1}^{l} G_j\left(\bar{h}, q, \bar{\eta}\right) \prod_{j=l+1}^{m} \delta_q C_{\tilde{\chi}\chi_0}\left(\bar{h}_j\right) \tilde{I}\left(\bar{\eta}_j\right) \prod_{j=m+1}^{5} C_q\left(\bar{h}_j\right) I\left(\bar{\eta}_j\right)$$

или

$$(-1)^m \prod_{j=1}^{l} G_j\left(\bar{h}, q, \bar{\eta}\right) \prod_{j=l+1}^{m} C_q\left(\bar{h}_j\right) I\left(\bar{\eta}_j\right) \prod_{j=m+1}^{5} \delta_q C_{\tilde{\chi}\chi_0}\left(\bar{h}_j\right) \tilde{I}\left(\bar{\eta}_j\right),$$

$1 \leqslant l \leqslant m \leqslant 5$. Эти выражения оценивается одинаково, поэтому ограничимся рассмотрением первого из них. Его вклад в M_2 обозначим через $M_2(m,l)$, тогда из (53) находим

$$M_2(m,l) = (-1)^m \sum_{q\leqslant Q, \tilde{r}|q} \frac{1}{\varphi^5(q)} \sideset{}{'}\sum_{\bar{h}} e_q\left(-\bar{h}_b\right) C_{\tilde{\chi}\chi_0}\left(\bar{h}_{l+1}\right) ... C_{\tilde{\chi}\chi_0}\left(\bar{h}_m\right) C_q\left(\bar{h}_{m+1}\right) ... C_q\left(\bar{h}_5\right) \times$$

$$\times \sum_{\chi_1} ... \sum_{\chi_l} C_{\bar{\chi}_1}\left(\bar{h}_1\right) ... C_{\bar{\chi}_l}\left(\bar{h}_l\right) \iiint\limits_{\mathbb{R}^3} I_{\chi_1}\left(\bar{\eta}_1\right) ... I_{\chi_l}\left(\bar{\eta}_l\right) \tilde{I}_{\chi_l}\left(\bar{\eta}_{l+1}\right) ... \tilde{I}_{\chi_l}\left(\bar{\eta}_m\right) \times$$

$$\times I_{\chi_1}\left(\bar{\eta}_{m+1}\right) ... I_{\chi_l}\left(\bar{\eta}_5\right) d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3.$$

Интеграл по $\mathbb{R}^3$ обозначим через J , тогда в силу (10) и (42) имеем

$$J = \frac{N^2}{|\Delta_{345}|} \sideset{}{'}\sum_{|\gamma_1|\leqslant T} ... \sideset{}{'}\sum_{|\gamma_l|\leqslant T} \iint\limits_D \prod_{j=1}^{l} (Nx_j)^{\rho_j - 1} \prod_{j=l+1}^{m} (Nx_j)^{\tilde{\beta}-1} dx_1 dx_2.$$

Следовательно,

$$M_2(m,l) = -\frac{N^2}{|\Delta_{345}|} \iint\limits_D \prod_{j=l+1}^{m} (Nx_j)^{\tilde{\beta}-1} \left(\prod_{j=l+1}^{m} \sum_{r_j\leqslant Q} \sum_{\chi_j (\bmod r_j)} {}^{*} \sum_{|\gamma_j|\leqslant T} (Nx_j)^{\rho_j - 1} \right) \times$$

$$\times \sum_{\substack{q\leqslant Q \\ [\tilde{r}, r_1, ..., r_l]|q}} \varphi^{-5}(q) Z\left(q; \bar{\chi}_1, ..., \bar{\chi}_l, \tilde{\chi}_{l+1}, ..., \tilde{\chi}_m, \chi^o_{m+1}, ..., \chi^o_5\right) dx_1 dx_2,$$

где $\tilde{\chi}_{l+1} = ... = \tilde{\chi}_m = \tilde{\chi}$ и $\chi^0_{m+1} = ... = \chi^0_5 = \chi_0$.

Поскольку $Nx_j \geqslant L \geqslant \sqrt{N}$, мы используем лемму 4.2 для вычисления тройной суммы, стоящей в скобках, а лемму 5.3 c) для оценки последней суммы по q и тогда получим

$$M_2(m,l) \ll M_0\left(\omega^5 \exp\left(-c_3\delta^{-1/2}\right)\right)^l \ll M_0\left(\omega^5 \exp\left(-c_3\delta^{-1/2}\right)\right).$$

Собирая вклад всех таких слагаемых, получим утверждение леммы. □

Теперь мы можем доказать лемму 2.2. Рассмотрим следующие три случая.

1-случай. Пусть не существует исключительный ноль $\tilde{\beta}$, тогда отсутствует M_3 и из (54) за исключением не более чем $X^3 Q^{-1/101}$ значений $(b_1, b_2, b_3) \in W_{3,5}(X)$ справедлива оценка

$$I_1\left(\vec{b}\right) = M_1 + M_2 + O\left(N^2 Q^{-1}\right) = M_0 + M_2 + O\left(N^2 Q^{-1}\right) + O\left(N^2 Q^{-4/5}\right) \gg$$

$$\gg N^2 B^{-3} Q^{-1/50} \left(1 - c_6 \exp\left(-\frac{c_3}{\delta^{1/2}}\right) - B^3 Q^{-\frac{4}{5}+\frac{1}{50}}\right) \gg N^2 B^{-3} Q^{-1/50}.$$

2-случай. Существует исключительный ноль $\tilde{\beta}$ и пусть $\tilde{r} \leqslant Q^{1/28}$. Тогда в силу леммы 7.4 и из (54), (55), (77) имеем:

$$I_1\left(\vec{b}\right) \gg M_0\left(1-\exp\left(-c_3\delta^{-1/2}\right)\right)\omega^5 + O\left(N^2Q^{-107/140}\right) \tag{79}$$

за исключением не более чем X^3Q^{-1} значений $(b_1,b_2,b_3) \in W_{3,5}(X)$.

Поскольку, $\tilde{r} \leqslant Q^{1/28}$ следует $\omega = \left(1-\tilde{\beta}\right)\log T \geqslant c_2\left(\sqrt{\delta}Q^{1/56}\log Q\right)^{-1}$ в (9) для нижней границы $1-\tilde{\beta}$. Теперь используя (56) и из (79) вытекает оценка

$$I_1\left(\vec{b}\right) \gg N^2\left(B^5Q^{\frac{1}{50}+\frac{5}{56}}\log^5 Q\right)^{-1} + O\left(N^2Q^{-107/140}\right) \gg N^2Q^{-51/466}$$

за исключением не более чем $X^3Q^{-1/101}$ значений $(b_1,b_2,b_3) \in W_{3,5}(X)$ из них.

3-случай. Существует исключительный ноль $\tilde{\beta}$ и пусть $\tilde{r} > Q^{1/28}$. В этом случае применим лемму 7.1 на (78) и лемму 7.4 на (54) имеем

$$I_1\left(\vec{b}\right) = M_1 + M_2 + M_3 + O\left(N^2Q^{-1}\right) = M_0 + M_2 + M_3 + O\left(N^2Q^{-4/5}\right) =$$

$$= M_0\left(1+O\left(\omega^5\exp\left(-c_3\delta^{-1/2}\right)\right)\right) + O\left(N^2Q^{-1/38}\right)$$

за исключением не более чем $X^3Q^{-1/56}$ значений $(b_1,b_2,b_3) \in [1,\ X]^3$ из них.

Как и в предыдущих двух случаях, требуемая нижняя оценка $I_1\left(\vec{b}\right)$ следует из (56):

$$I_1\left(\vec{b}\right) = M_0\left(1+O\left(\omega^5\exp\left(-c_3\delta^{-1/2}\right)\right)\right) + O\left(N^2Q^{-1/38}\right) \gg N^2Q^{-51/466}. \tag{80}$$

Поэтому, на основании (80) и леммы 2.1 из (17) имеем следующую оценку:

$$I\left(\vec{b}\right) > c_{10}N^2Q^{-51/466} - N^2Q^{-1/9} \gg N^2Q^{-51/466}.$$

То есть оценка $I\left(\vec{b}\right) > 0$ справедлива для всех $(b_1,b_2,b_3) \in W_{3,5}(X)$ за исключением не более, чем $X^3Q^{-1/101} + X^3Q^{-1} + X^3Q^{-1/56} \leqslant X^{3-\varepsilon}$ значений из них.

Таким образом, мы доказали лемму 2.2 и утверждение а) теоремы.

Теперь оценим, количество решений $\vec{b} = (b_1,b_2,b_3)$ системы (2). Пусть $R\left(\vec{b}\right)$ – количество решений системы (2) в простых числах с условием $p_j \leqslant N$ и $\frac{X}{2} < b_1,b_2,b_3 \leqslant X$, то есть

$$R\left(\vec{b}\right) = \sum_{\substack{p_j\leqslant N \\ a_{i1}p_1+\ldots+a_{i5}p_5=b_i}} 1$$

. Известно, что в (16) суммирование ведётся по всем n_j для которых выполняются условия $L < n_1,\ldots,n_5 \leqslant N$ и $a_{i1}n_1+\ldots+a_{i5}n_5 = b_i\ \ (i=1,2,3)$. Тогда из (16) имеем

$$I\left(\vec{b}\right) \leqslant \log^5 N \sum_{\substack{p_1,\ldots,p_5\leqslant N \\ a_{i1}p_1+\ldots+a_{i5}p_5=b_i}} 1 + \sum_{k\geqslant 2} \sum_{\substack{p_1^k,\ldots,p_5^k\leqslant N \\ a_{i1}p_1+\ldots+a_{i5}p_5=b_i}} \log p_1 \ldots \log p_5 =$$

$$= \log^5 N R\left(\vec{b}\right) + O\left(N^{\frac{1}{2}}\log^4 N\right)$$

из этого неравенства и из равенства (17) получим

$$I_1\left(\vec{b}\right) + I_2\left(\vec{b}\right) \leqslant \log^5 N R\left(\vec{b}\right) + O\left(N^{1/2}\log^4 N\right).$$

Здесь, учитывая лемму 2.1 мы получим оценку

$$R\left(\vec{b}\right) \geqslant \frac{I_1\left(\vec{b}\right)}{\log^5 N} - \frac{N^2Q^{-1/9}}{\log^5 N} - O\left(\frac{N^{1/2}}{\log N}\right) = \frac{I_1\left(\vec{b}\right)}{\log^5 N} - O\left(\frac{N^2Q^{-1/9}}{\log N}\right)$$

для количества решений системы (2). Теперь, для $I_1\left(\vec{b}\right)$, мы воспользуемся леммой 2.2, мы получим оценку

$$R\left(\vec{b}\right) \geqslant \frac{N^2Q^{-51/466}}{\log^5 N} - O\left(\frac{N^2Q^{-1/9}}{\log N}\right) \gg \frac{N^{2-\frac{51\delta}{466}}}{\log^5 N}$$

для всех (b_1, b_2, b_3) за исключением не более, чем $X^{3-\varepsilon}$ значений $1 \leqslant b_1, b_2, b_3 \leqslant X$ из них. Здесь, учитывая, что $\left|\vec{b}\right| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} \leqslant \sqrt{3}X$ и $N = 108B^5X \geqslant 36\sqrt{3}B^5\left|\vec{b}\right|$ то следует часть b) теоремы.

8. Заключение

Из выше изложенного следует, что система (2) разрешима в простых числах для всех троек $(b_1, b_2, b_3), 1 \leqslant b_1, b_2, b_3 \leqslant X$, за исключением не более чем $X^{3-\varepsilon}$ троек из них. Метод использованный при доказательстве этого утверждения дает возможность доказать аналогичное утверждение для системы $b_i = a_{i1}p_1 + ... + a_{i6}p_6,\ i = 1, 2, 3$. Тем самым, исследование исключительного множества системы (1) при $s = 3$ и $m = 5$, а также при $s = 3$ и $m = 6$ завершается с учетом работ Wu Fang [2], M.C.Liu, K.M.Tsang [3] и И.Аллакова [1].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аллаков, И. Оценка тригонометрических сумм и их приложения к решению некоторых аддитивных задач теории чисел. – Термез: Сурхон нашр. 2021. 160 с.
2. Wu Fang. On the solutions of the systems of linear equations with prime variables. Acta Math.Sinica.-1957.-V.7.-P.102-121.
3. Liu, M. C., Tsang, K. M. On pairs of linear equations in three prime variables and an application to Goldbach's problem, J. reine angew. Math. 399 (1989), 109-136.
4. Аллаков, И. Об условиях разрешимости системы линейных диофантовых уравнений в простых числах, Изв. вузов. Матем., 2006, № 9. с. 10-16.
5. Аллаков, И., Исраилов, М. И. О разрешимости системы линейных уравнений в простых числах. Докл. АН РУз. –Ташкент, 1992. - № 10-11. с. 12-15.
6. Хуа Ло-Кен. Аддитивная теория простых чисел, Тр. Матем. ин-та им. В.А.Стеклова, 1947, том 22, с. 3-179.
7. Abrayev, B.Kh., Allakov, I. On solvability conditions of a pair of linear equations with four unknowns in prime numbers. Uzbek Mathematical journal. Tashkent. 2020. № 3. p. 16-24.
8. Аллаков, И., Абраев, Б.Х. Об исключительном множестве одной системы линейных уравнений с простыми числами. Чебышевский сборник т.24 № 2. 2023. с.15-37.
9. Эрдонов, Б.Х., Об условиях разрешимости системы линейных уравнений состоящей из трёх уравнений с пяты неизвестными в простых числах. Научный вестник НамГУ, 2024. № 4. с. 116-121.

10. Карацуба, А.А. Основы аналитической теории чисел. -М.: Наука, 1983. -240 с.

11. Davenport, H. Multiplicative number theory. Third edition. Springer.-2000. 177 p.

12. Колмогоров, А.Н., Фоми,н С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», М., 1976 г. 543 с.

13. Liu, M. C., Tsang, K. M. Small prime solutions of linear equations. Proc. Intern. Number. Th. Conf. 1987. Laval University. Cand. Math. Soc. Berlin-New York. 1989. p. 595-624.

14. Hua, L. K. Additive Theory of Prime Numbers, Transl. of Math. Monographs 13, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1965. 190 p.

15. Hasse, H. Vorlesungen über Zahlentheorie, Grundlehren Math. Wiss. 59, Berlin-Heidelberg-New York 1964. 520 p.

16. Hardy, G. H., Wright, E. M. An Introduction to the Theory of Numbers, 5th ed., Oxford 1979. 621 p.

REFERENCES

1. Allakov, I., 2021, "Estimation of trigonometric sums and their applications to the solution of some additive problems in number theory", *Termez: Surxon nashr.* 160 p.

2. Wu Fang. 1957, "On pairs of linear equations in three prime variables and an application to Goldbach's problem", *J.reine angew. Math.*, vol.399. pp. 102–121.

3. Liu, M. C. & Tsang, K. M. 1989, "On the solutions of the systems of linear equations with prime variables", *Acta Math.Sinica.*, vol.7. pp. 109–136.

4. Allakov, I. 2006, "On conditions for the solvability of a system of linear Diophantine equations in prime numbers", *Izv. universities Mat.*, vol.9. pp. 10–16.

5. Allakov, I., Israilov, M.I. 1992, "On the solvability of a system of linear equations in prime numbers", *Dokl. AN RUz.– Tashkent*, vol.10. pp. 12–15.

6. Hua Lo-Ken. 1947, "Additive prime number theory", *Tr. Math. Institute named after V.A. Steklova*, vol.22. pp. 3–179.

7. Abrayev, B.Kh., Allakov, I. 2020, "On solvability conditions of a pair of linear equations with four unknowns in prime numbers", *Uzbek Mathematical journal. Tashkent*, vol.3. pp. 16–24.

8. Allakov, I., Abrayev, B.Kh. 2023, "On the exceptional set of one system of linear equations with prime numbers", *Chebyshevskii Sbornik*, vol.24 № 2. pp. 15–37.

9. Erdonov, B.X. 2024, "On the conditions of solvability of a system of linear equations consisting of three equations with five unknowns in prime numbers", *Scientific bulletin of NamSU* № 4. pp. 116–121.

10. Karatsuba, A.A. 1983, "Fundamentals of analytic number theory", *Main editorial office of physical and mathematical literature publishing house, Nauka, M.*, 543 p.

11. Davenport, H. 2000, "Multiplicative number theory. Third edition", *Springer*, 177 p.

12. Kolmogorov, A.N., Fomin, S.V. 1976, "Elements of the theory of functions and functional analysis", *Nauka, M.*, 240 p.

13. Liu, M. C., Tsang, K. M. 1989, "Small prime solutions of linear equations", *Proc. Intern. Number. Th. Conf. 1987. Laval University. Cand. Math. Soc. Berlin-New York.*, pp. 595–624.

14. Hua, L. K. 1965, "Additive Theory of Prime Numbers", *Transl. of Math. Monographs 13, Amer. Math. Soc., Providence, R.I.*, 190 p.

15. Hasse, H. 1964, "Vorlesungen über Zahlentheorie", *Grundlehren Math. Wiss. 59, Berlin-Heidelberg-New York*, 520 p.

16. Hardy, G. H. 1979, "An Introduction to the Theory of Numbers", *Wright E. M. , 5th ed., Oxford*, 621 p.

Получено: 13.03.2024
Принято в печать: 04.09.2024

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 25. Выпуск 3.

УДК 517 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-37-46

О компактности сильно звездных идеалов топологических пространств

П. Бал, Р. Дас, С. Саркар

Бал Прасенджит — доктор математики, Институт дипломированных финансовых аналитиков Индийского университета Трипура (г. Камалгхат, Индия).
e-mail: balprasenjit177@gmail.com
Дас Ракхал — доктор математики, Институт дипломированных финансовых аналитиков Индийского университета Трипуры (г. Камалгхат, Индия).
e-mail: rakhaldas95@gmail.com
Саркар Сусмита — магистр, Институт дипломированных финансовых аналитиков Индийского университета Трипуры (г. Камалгхат, Индия).
e-mail: susmitamsc94@gmail.com

Аннотация

В этой статье мы вводим понятие сильно звездной I-компактности и изучаем некоторые ее топологические особенности. Мы представляем некоторые свойства конечных пересечений как для I-компактных пространств, так и для сильно звездных I-компактных пространств. Наконец, мы устанавливаем связь между счетно I_{fin}-компактным пространством и сильно звездным I_{fin}-компактным пространством. Для того чтобы выявить разницу между различными версиями компактности, мы приводим несколько контрпримеров. Также в статье поставлены некоторые открытые проблемы.

Ключевые слова: Звездный идеал, звездный I-компакт, I_{fin}-компактное пространство.

Библиография: 21 названий.

Для цитирования:
Бал, П., Дас, Р., Саркар, С. О компактности сильно звездных идеалов топологических пространств // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 3, с. 37–46.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 25. No. 3.

UDC 517 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-37-46

On strongly star ideal compactness of topological spaces

P. Bal, R. Das, S. Sarkar

Bal Prasenjit — Ph.D. in Mathematics, The Institute of Chartered Financial Analysts of India University Tripura (Kamalghat, India).
e-mail: balprasenjit177@gmail.com
Das Rakhal — Ph.D. in Mathematics, The Institute of Chartered Financial Analysts of India University Tripura (Kamalghat, India).
e-mail: rakhaldas95@gmail.com
Sarkar Susmita — M.Sc. in Mathematics, The Institute of Chartered Financial Analysts of India University Tripura (Kamalghat, India).
e-mail: susmitamsc94@gmail.com

Abstract

In this article we introduce the concept of strongly star I-compactness and study some of its topological features. We represent some finite intersection like properties for both I-compact spaces and strongly star I-compact spaces. Lastly we establish a relation between the countably I_{fin}-compact space and the strongly star I_{fin}-compact space. In order to identify the difference between the different versions of compactness we represent some counter examples. And some open problems are also posed in this article.

Keywords: Star Ideal, Star I-compact, I_{fin}-compact space.

Bibliography: 21 titles.

For citation:
Bal, P., Das, R., Sarkar, S. 2024, "On Strongly Star Ideal compactness of Topological Spaces", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 3, pp. 37–46.

1. Introduction

The the year 1933, the concept of ideals in topological spaces were considered by Kuratowski [15] and has been studied extensively by Vaidyanathaswamy [21] in the year 1946. An ideal I in a topological space (X, τ) is a non empty family of subsets of X which satisfies the following properties :

(i) $X \notin I$,
(i) $A, B \in I \Rightarrow A \cup B \in I$,
(ii) $A \in I$ and $B \subseteq A \Rightarrow B \in I$.

If I is an ideal in a topological space (X, τ), then the ordered triplet (X, τ, I) is called an ideal topological space (in short ideal space). If $I \cap \tau = \{\emptyset\}$, then I is called a condensed ideal or a boundary ideal [10]. Some simple ideals on a space (X, τ) are $\{\emptyset\}$, $P(X)$ (power set of X) and I_{fin}, collection of all finite subset of X The concept of compactness modulo an ideal (also called I-compactness) was first established by Newcomb [17] in the year 1967. Recently this generalization of compactness has attracted a lot of mathematicians in this field [12, 20].

On the other hand, Douwen et. al. [9] generalized compactness with the help of the star operator. In a topological space (X,τ), if $M \subseteq X$ and $\mathcal{U}$ is a collection of subsets of X then star of M with respect to $\mathcal{U}$ is denoted by $St(M,\mathcal{U})$ and is defined as $St(M,\mathcal{U}) = \{U \in \mathcal{U} : U \cap M \neq \emptyset\}$. If $M = \{x\}$, we write $St(x,\mathcal{U})$ instead of $St(\{x\},\mathcal{U})$. In recent days, this operator is being used in the study of selection principles [1, 3, 14], covering properties [2, 4, 5, 8, 6, 7, 19]. In this paper we will use the concept of ideal and star operator simultaneously to generalize the study of compactness of an ideal space.

2. Preliminaries

If $A \subseteq X$, $\overline{A}$ will denote closure of A. For general symbols and notation of topology, we follow [11].

A subset A of a space (X,τ) is said to be a g-closed [16] set if $\overline{A} \subseteq U$, whenever $A \subseteq U \in \tau$. Every closed set is a g-closed set but converse may not be true.

Proposition 1. *[17] If $f : (X,\tau,I) \to (Y,\sigma)$ is a function, then $f(I) = \{f(I_1) : I_1 \in I\}$ is an ideal of Y.*

Proposition 2. *[17] If I is an ideal of subsets of X and $Y \subseteq X$, then $I_Y = \{Y \cap I_1 : I_1 \in I\}$ is an ideal of subsets of Y.*

Although Newcomb [17] introduced the concept of I-compactness, Rancin [18], Hamlett and Jankovic [13] studied the concept extensively.

Definition 1. *[17] A subset A of an ideal space (X,τ,I) is said to be compact modulo I or I-compact subset, if for every τ-open cover $\{U_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ of A there exists a finite subset $\{U_{\alpha_i} : i = 1,2,3,\dots k\}$ such that $X \setminus \bigcup_{i=1}^{k} U_{\alpha_i} \in I$. If X itself is a I-compact subset, then (X,τ,I) is called an I-compact space.*

Definition 2. *[9] A topological space (X,τ) is called a strongly star compact space if for every open cover $\mathcal{U}$ of X, there exists a finite subset $F \subseteq X$ such that $St(F,\mathcal{U}) = X$.*

3. I-compactness

Since $\emptyset \in I$ for every ideal I of X, every compact space is an I-compact space.

Remark 1. *There exists an ideal space (X,τ,I) which is I compact but not compact.*

Let $X = N, A = \{1,3,5,...\}, \tau = \{\emptyset, X\} \cup \{X/P : p \in P(A)\}$ and $I = P(A)$.

Clearly (X,τ,I) is an ideal space. Let $\mathcal{U}$ be an arbitrary non-trivial open cover of X and $\mathcal{U}' = \{u_1,u_2,...,u_k\}$ is a finite subset of $\mathcal{U}$. Then there exist $p_n \in P(A)$ such that $U_n = X/P_n \ \ \forall n \in \{1,2,3,...,k\}$ and $\mathcal{U}' = \bigcup_{n=1}^{k} u_n = \bigcup_{n=1}^{k}(X/P_n) = X/(\bigcap_{n=1}^{k} P_n) = X/(\cap_{n=1}^{k} P_n)$ Therefore, $X/\cup\mathcal{U}' = \cap_{n=1}^{k} P_n \in P(A) = I$.

Hence (X,τ,I) is an I-compact space.

Now consider the countable open cover $\mathcal{V} = \{V_n : n \in N\}$, where $V_n = X/\{2n-1, 2n+1, 2n+3, ...\}$.

If possible let $\mathcal{V}' = \{V_{n_1}, V_{n_2}, V_{n_3}..., V_{n_k}\}$ is a finite sub cover of X. Then there exists $n_{max} = \{n_1, n_2, n_3, ...n_k\} \in N$.

Therefore, $\cup\mathcal{V} = V_{n_{max}} = X/\{2_{n_{max}} - 1, 2_{n_{max}} + 1, 2_{n_{max}} + 3, ...\} \neq X$

So, $\mathcal{V}$ can not have finite sub cover. Hence (X,τ,I) can not a compact space.

Definition 3. *In an ideal space (X,τ,I), a family $\{H_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ is said to have idealized finite intersection property if for every finite subset $\Lambda_0 \in \Lambda, \bigcap_{\alpha\in\Lambda_0} H_\alpha \notin I$*

Theorem 1. *For an ideal space (X,τ,I), following statements are equivalent:*

1. *Every family $\mathcal{H}$ of closed sets having idealized finite intersection property have $\bigcap\mathcal{H}\neq\emptyset$*
2. *(X,τ,I) is I-compact.*

Proof.

(1) $\Rightarrow$ (2)

Let condition (1) holds and $\mathcal{U}=\{U_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ is an open cover of the ideal space (X,τ,I) Therefore, $\mathcal{H}=\{H_\alpha=X/U_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ is a family of closed sets and

$\bigcap\mathcal{H}=\bigcap_{\alpha\in\Lambda}H_\alpha=\bigcap_{\alpha\in\Lambda}(X/U_\alpha)=X/\bigcup_{\alpha\in\Lambda}U_\alpha=X/X=\emptyset$

Therefore by condition (1), the family $\mathcal{H}$ of closed sets must not have IFI property. Thus there exists a finite subset $\Lambda_0\subseteq\Lambda$

Such that. $\bigcap_{\alpha\in\Lambda_o}H_\alpha\in I$

$\Rightarrow\bigcap_{\alpha\in\Lambda_o}(X/U_\alpha)\in I\Rightarrow X/\bigcup_{\alpha\in\Lambda_o}(U_\alpha)\in I$

So,$\{U_\alpha:\alpha\in\Lambda_0\}$ is a finite subset of $\mathcal{U}$ such that $X/\bigcup_{\alpha\in\Lambda_o}(U_\alpha)\in I$. Hence (X,τ,I) is an I-compact space.

(2) $\Rightarrow$ (1)

Let (X,τ,I) is an I-compact space and $\mathcal{H}=\{H_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ is a family of closed sets having finite intersection property. If possible let $\cap\mathcal{H}=\emptyset$.

Then $\mathcal{U}=\{U_\alpha=X/H_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ is a family of open sets such that

$\mathcal{U}=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}(X/H_\alpha)=X/\bigcap_{\alpha\in\Lambda}H_\alpha=X/\emptyset=X.$

$\mathcal{U}$ is an open cover of X. But (X,τ,I) is I compact.

Therefore, there exists a finite subset $\Lambda_0\subseteq\Lambda$ Such that $X/\bigcup_{\alpha\in\Lambda_0}U_\alpha\in I$

So, $\{H_\alpha:\alpha\in\Lambda_0\}$ is a finite subset of $\mathcal{H}$ and $\bigcap_{\alpha\in\Lambda_0}\mathcal{H}_\alpha\in I$ which is a contradiction to the fact that H has IFI property. Hence, $\bigcap\mathcal{H}\neq\emptyset$ □

4. Strongly star I-compact space

Definition 4. *In an ideal space (X,τ,I), a subset $B\subseteq X$ is said to be strongly star I-compact subset if for every τ-open cover of B, there exists a finite subset $M\subseteq B$ Such that $X/St(M,\mathcal{U})\in I$. If X it self is strongly star I-compact, then we say that (X,τ,I) is a strongly star I-compact space.*

Since $\emptyset\in I$, every strongly star compact space is a strongly star I-compact space. But the converse may not true.

Remark 2. *There exists a strongly star I-compact space which is not strongly star compact. Let $X=N$, $\beta=\{\emptyset\}\cup\{\{n\}:n\in 2N\}\cup\{\{1,2n-1\}:n\in N\}, I=\mathcal{P}(2N)$ and τ be the topology generated by β.*

Let $\mathcal{U}$ be an arbitrary open cover of X. Then for $F=\{1\}$, $N/2N\subseteq St(F,\mathcal{U})\Rightarrow X/St(F,\mathcal{U})\subseteq$ $\subseteq 2N\Rightarrow X/St(F,\mathcal{U})\in I$.

Therefore, (X,τ,I) is a strongly star I-compact space Now, consider the basic open cover β, then for every finite subset $F\subseteq X$,

$St(F,\beta)\subseteq F\cup(N/2N)\neq X$

Therefore, (X,τ,I) can not be a strongly star compact space.

Proposition 3. *Every I-compact space is a strongly star I-compact space.*

$\Rightarrow$ Let (X,τ,I) is an I-compact space and $\mathcal{U}$ be an arbitrary open cover of X. Then there exists a finite subset $\mathcal{U}'=\{U_1,U_2,U_3,...,U_k\}\subseteq\mathcal{U}$ such that $X/\cup_{i=1}^k U_k\in I$

If we take $x_i\in U_i,\forall i=1,2,3,...,k$ then $F=\{x_1,x_2,x_3,...,x_k\}\subseteq X$ is finite and $\cup_{i=1}^k U_k\subseteq St(F,\mathcal{U})$

$\Rightarrow X/St(F,\mathcal{U})\subseteq X/\cup_{i=1}^k U_k\in I$

Therefore, $X/St(F,\mathcal{U}) \in I$

Hence (X,τ,I) *is strongly star* I*-compact space. But the converse of the above proposition may not be true.*

Remark 3. *There exists a strongly star* I*-compact space which is not strongly star compact. Let* $X = N$, $\beta = \{\emptyset\} \cup \{2N\} \cup \{\{1, 2n-1\} : n \in N\}$, $I = \mathbf{P}(2N)$ *and* τ *be the topology generated by* β. *Clearly, for every open cover* $\mathcal{U}$ *of* X, *if we take* $F = \{1\}$, *then* $N/2N \subseteq St(F,\mathcal{U})$
$\Rightarrow X/St(F,\mathcal{U}) \subseteq 2N$
$\Rightarrow X/St(F,\mathcal{U}) \in I$ *Therefore* (X,τ,I) *is a strongly star* I*-compact.*

Now consider the countable open cover $\mathcal{U} = \{U_n : n \in N\}$ *Where* $U_n = 2N \cup \{1, 3, 5, ..., 2n-1\}$

Suppose that $\{U_{n_1}, U_{n_2}, U_{n_3}, ..., U_{n_k}\}$ *is a finite subset of* X. *Then there exists a* n_{max} *such that* $n_{max} = max\{n_1, n_2, ..., n_k\}$.

Therefore, $\cup_{i=1}^{k} U_{n_i} = U_{n_{max}} = 2N \cup \{1, 3, 5, ..., 2n_{max} - 1\}$
$\Rightarrow X/\cup_{i=1}^{k} U_{n_i} = \{2n_{max} + 1, 2n_{max} + 3, 2n_{max} + 5, ...\}$
$\Rightarrow X/\cup_{i=1}^{k} U_{n_i} \notin I$ $\mathcal{U}$ *can not have a finite subset* $\mathcal{U}'$ *such that* $X/\cup\mathcal{U}' \in I$.

Therefore (X,τ,I) *is not* I*-compact.*

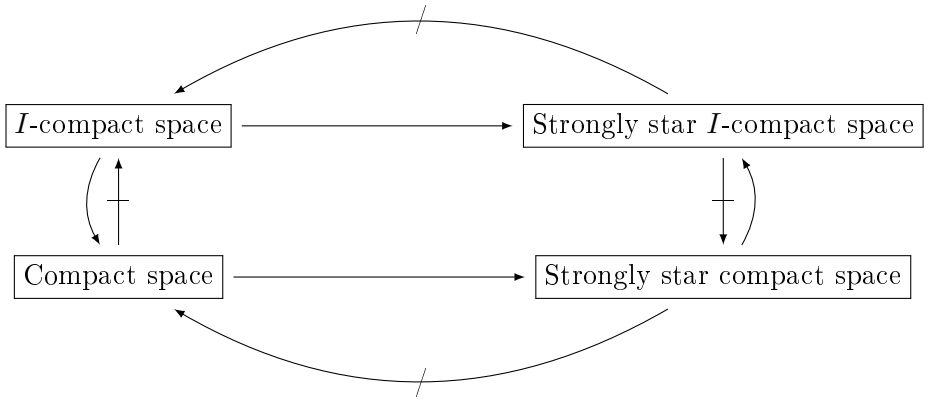


Рис. 1: Relation among several variations of compactness.

Theorem 2. *g-closed subset of a strongly star* I*-compact space is strongly star* I*-compact subset.*

Proof. Let B be a g-closed subset of a strongly star I-compact space (X,τ,I), and let
$\mathcal{U}$ be a τ-open cover of B. i.e., $B \subseteq \cup\mathcal{U}$. But B is a g-closed. Therefore, $\overline{B} \subseteq \cup\mathcal{U}$.
So, $X/(\cup\mathcal{U}) \subseteq X/\overline{B}$.

Now, $\mathcal{V} = \mathcal{U} \cup (X/\overline{B})$ become an open cover of X. But X is a strongly star I-compact space.

Therefore, there exists a finite subset $F \subseteq X$ Such that $X/St(F,\mathcal{V}) \in I$.
$\Rightarrow X/(St(F,\mathcal{U}) \cup (X/\overline{B})) \in I$ or $X/St(F,\mathcal{U}) \in I$.
$\Rightarrow (X/St(F,\mathcal{U})) \cap \overline{B})) \in I$ or $B/St(F,\mathcal{U}) \subseteq X/St(F,\mathcal{U}) \in I$.
$\Rightarrow (X/St(F,\mathcal{U})) \cap B)) \in I$ or $B/St(F,\mathcal{U}) \in I$.
$\Rightarrow B/St(F,\mathcal{U}) \in I$ or $B/St(F,\mathcal{U}) \in I$.
$\Rightarrow B/St(F,\mathcal{U}) \in I$ Therefore, B is a strongly star I-compact subset.
□

Corollary 1. *Every closed subset of a strongly star* I*-compact space is a strongly star* I*-compact subset.*

Theorem 3. *If* A *and* B *be two strongly star* I*-compact subset in an ideal space* (X,τ,I) *then* $A \cup B$ *is also an strongly star* I*-compact subset.*

Proof. Let $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ be an τ-open cover of $A \cup B$, where A and B are strongly star I-compact subset in the ideal space (X, τ, I).

Therefore, $\mathcal{U}$ is an τ-open cover of A as well as for B. Thus there exists a finite sets

$M \subseteq A$ and $N \subseteq B$ such that $A/St(M,\mathcal{U}) = I_1 \in I$ and $B/St(N,\mathcal{U}) = I_2 \in I$.

Therefore, $A = St(M,\mathcal{U}) \cup I_1$ and $B = St(N,\mathcal{U}) \cup I_2$.

$\Rightarrow A \cup B = St(M,\mathcal{U}) \cup St(N,\mathcal{U}) \cup (I_1 \cup I_2)$

$\Rightarrow A \cup B = St(M \cup N,\mathcal{U}) \cup (I_1 \cup I_2)$

$\Rightarrow A \cup B/St(M \cup N,\mathcal{U}) = (I_1 \cup I_2) \in I$

Since M and N are finite, Hence $M \cup N \subseteq A \cup B$ is also finite.

Hence $A \cup B$ is a strongly star I-compact subset of X.

□

Corollary 2. *Finite union of strongly star I-compact subset is a strongly star I-compact subset.*

Theorem 4. *In a strongly star I-compact space (X, τ, I) if $B \subseteq X$ is a clopen subset of X, then (B, τ_B, I_B) is a strongly star I_B-compact space.*

Proof. $\Rightarrow$Let (X, τ, I) is strongly star I-compact space and $B \subseteq X$ is cl-open. Let $\mathcal{U}$ be a τ_B open cover of B. But B is open, therefore, $\mathcal{U} \subseteq \tau$. Also B is closed. Hence $\mathcal{V} = \mathcal{U} \cup \{X/B\}$ is a τ open cover of X. But (X, τ, I) is strongly star I-compact. Therefore, there exists a finite subset $M \subseteq X$ such that $X/St(M, \mathcal{V}) \in I \Rightarrow B/St(M, \mathcal{V}) \in I_B$. We take $P = M \cap B \subseteq B$ Which is a finite subset of B.

Now $St(M, \mathcal{V}) = St(P,\mathcal{U}) \cup (X/B)$ or $St(M, \mathcal{V}) = St(P,\mathcal{U})$ In both cases $B/St(P,\mathcal{U}) =$
$= St(M, \mathcal{V}) \in I_B$ Hence, (B, τ_B, I_B) is strongly star I_B-compact space. □

Theorem 5. *$f : (X, \tau, I) \to (Y, \sigma)$ be function from a strongly star I-compact space to a topological space (Y, σ) If f is continuous then $f(x)$ is strongly star $f(I)$ compact subset of Y.*

Proof.

Let $f : (X, \tau, I) \to (Y, \sigma)$ is a continuous function and (X, τ, I) is strongly star I-compact.

Let, $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ be σ open cover of $f(X)$.

Therefore, $\mathcal{V} = \{f^{-1}(U_\alpha) : \alpha \in \Lambda\}$ is an open cover of X. But X is strongly star I-compact. Therefore there exists a finite set $F \subseteq X$, such that $X/St(F, \mathcal{V} \in I. \Rightarrow f(X/St(F, \mathcal{V})) \in f(I)$

$\Rightarrow f(X)/f(St(F, \mathcal{V})) \subseteq f(X/St(F, \mathcal{V})) \in f(I)$

$\Rightarrow f(X)/f(\cup\{f^{-1}(U_\alpha) \in \mathcal{V} : F \cap f^{-1}(U_\alpha) \neq \emptyset\}) \in f(I)$

$\Rightarrow f(X)/ \cup \{U_\alpha \in \mathcal{U} : f(F) \cap U_\alpha \neq \emptyset\} \in f(I)$

$\Rightarrow f(X/St(F,\mathcal{U})) \in f(I)$

Here, $|f(F)| \leq |F|$, therefore $f(F)$ is finite. Hence, $f(X)$ is a strongly star $f(I)$-compact space.

□

5. Modified and idealized finite intersection property:

In an ideal space (X, τ, I), a family $\mathcal{H}$ of subsets of X is said to have MIFIP if for every finite subset $P \subseteq X$, if $\cap\{H \in \mathcal{H} : P \cap (X/H) \neq \emptyset\} \notin I$

Theorem 6. *In an ideal space (X, τ, I), following statements are equivalent:*

1. *Every family of closed sets having MIFIP has non empty intersection.*
2. *(X, τ, I) is strongly star I-compact space.*

Proof. (1) $\Rightarrow$ (2)

Let condition 1 holds and $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ is an open cover of X. Then $\mathcal{H} = \{X/U_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ is a family of closed sets such that $\cap\mathcal{H} = X/\bigcup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha = X/X = \emptyset$.

Since, intersection is empty. The family $\mathcal{H}$ Must not have MIFIP. Therefore there exists a finite set $P \subseteq X$ such that

$\bigcap\{H \in \mathcal{H} : P \cap (X/H) \neq \emptyset\} \in I$

$\Rightarrow \bigcap\{X/U_\alpha : \alpha \in \Lambda \text{ and } P \cap U_\alpha \neq \emptyset\} \in I$

$\Rightarrow X/\bigcup\{U_\alpha : \alpha \in \Lambda \text{ and } P \cap U_\alpha \neq \emptyset\} \in I$

$\Rightarrow X/St(P,\mathcal{U}) \in I$.

Therefore (X, τ, I) is a strongly star I-compact space.

(2) $\Rightarrow$ (1) Let (X, τ, I) is a strongly star I-compact space and $\mathcal{H} = \{H_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ be a family of closed sets having MIFIP. If possible assume that cap $\mathcal{H} = \emptyset$.

Then for the family $\mathcal{U} = \{U_\alpha = X/H_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ is a family of open sets and $\cup\mathcal{U} = X/(\cap_{\alpha\in\Lambda} H_\alpha) = X/\emptyset = X$.

Therefore, $\mathcal{U}$ is an open cover of X. But X is strongly star I-compact space. So, there exists a finite subset $P \subseteq X$ such that $X/St(P,\mathcal{U} \in I$.

$\Rightarrow X/\bigcup\{U \in \mathcal{U} : P \cap U \neq \emptyset\} \in I$.

$\Rightarrow \bigcap\{X/U : U \in \mathcal{U} \text{ and } P \cap U \neq \emptyset\} \in I$.

$\Rightarrow \bigcap\{H \in \mathcal{H} : P \cap (X/H) \neq \emptyset\} \in I$, which is a contradiction to the fact that the family $\mathcal{H}$ has MIFIP. Therefore, $\cap\mathcal{H} \neq \emptyset$ □

6. Countably I-compact

Definition 5. *An ideal space (X, τ, I) is called an countably I-compact space if for every countable open cover $\mathcal{U}$, there exists a finite subset $\{U_1, U_2, U_3, ..., U_k\} \subseteq \mathcal{U}$ such that $X/(\cup_{i=1}^k U_i) \in I$*

Theorem 7. *Every closed subspace of a countably I-compact space is countably I-compact.*

Proof. Let (A, τ_A) be a closed subspace of a countably I-compact space (X, τ, I).

Let, $\mathcal{U}_A = \{U_{A_n} : n \in N\}$ be a τ_A-open cover of A.

Therefore, for every $U_A \in \mathcal{U}_A$ there exist $U \in \tau$ such that $U_A = U \cap A$.

Assume that $\mathcal{U} = \{U_n : U_n \cap A \in \mathcal{U}_A\}$

Clearly, $\mathcal{V} = \mathcal{U} \cup (X/A)$ is an open cover of X. But X is countably I-compact.

Therefore, it has finite subset $\{X/A, V_1, V_2, V_3, ..., V_K\} \subseteq \mathcal{V}$ such that $X/((\cup_{i=1}^k V_i) \cup (X/A)) = = I_1 \in I$

$(\cup_{i=1}^k V_i) \cup (X/A) \cup I_1 = X$

$A \cap \{(\cup_{i=1}^k V_i) \cup (X/A) \cup I_1\} = A$

$\Rightarrow (A \cap (\cup_{i=1}^k V_i)) \cup (A \cap (X/A)) \cup (A \cap I_1) = A$

$\Rightarrow \cup_{i=1}^k (A \cap V_i)) \cup \emptyset \cup (A \cap I_1) = A$

$\Rightarrow \cup_{i=1}^k U_{A_i} \cup (A \cap I_1) = A$

$\Rightarrow A/\cup_{i=1}^k U_{A_i} = A \cap I_1 \in I_A$

Therefore $(A, \tau_A)$is an countable compact subspace of (X, τ, I). □

Theorem 8. *Every countably I_{fin}-compact space is strongly star I_{fin}-compact space.*

Proof. Suppose that (X, τ, I) is countably I-compact but not strongly star I_{fin}-compact. Let $\mathcal{U}$ be an arbitrary open cover of X then for every finite subset $B \subseteq X$, $X/St(B,\mathcal{U}) \notin I_{fin}$. i.e. $X/St(B,\mathcal{U}) \neq \emptyset$

Consider a point $x_0 \in X$

Set other points as $x_n \in X/St(\{x_0, x_1, ..., x_{n-1}\},\mathcal{U})$ and construct a countable open cover $\mathcal{V} = \{V_n = St(x_{n-1},\mathcal{U}) : n \in N\}$

Let, $A = \{x_{n-1} :\in N\}$. If $y \in \overline{A}$, we have an open set $U \in \mathcal{U}$ (since $\mathcal{U}$ is an open cover)such that $y \in U$. But $y \in \overline{A}$, therefore, $A \cap U \neq \emptyset$.

Let, $x_{k-1} \in A \cap U \Rightarrow U \subseteq St(x_{k-1},\mathcal{U}) \Rightarrow y \in St(x_{k-1},\mathcal{U}) \Rightarrow y \in V_k$ for some $k \in N$.

Therefore, $\mathcal{V}$ is a countable cover of $\overline{A}$. But $\overline{A}$ is a closed subspace of (X, τ, I), $\overline{A}$ is also countably I_{fin}-compact (by Theorem 7). Therefore, there exists finite subset $\{V_{n_1}, V_{n_2}, V_{n_3}, ..., V_{n_p}\} \subseteq \mathcal{V}$ such that
$\overline{A}/(\bigcup_{i=1}^{p} V_{n_i}) = I_1 \in I_{fin}$
$\Rightarrow (\bigcup_{i=1}^{p} V_{n_i}) \cup I_1 = \overline{A}$
$\Rightarrow A \subseteq (\bigcup_{i=1}^{p} V_{n_i}) \cup I_1$.
But the construction of $\mathcal{V}$, each V_{n_i} can contain only one element of A also I, is a finite subset of X which contradicts the fact that A is a countable infinite set.
Hence, (X, τ, I) is an strongly star I_{fin}-compact space.

□

Open Problem Does there exists a strongly star I_{fin}-compact space which is not countably I_{fin}-compact.

7. Conclusion

Strongly star I-compactness has a very unique structure in comparison to other variations of compactness. This covering property can also be expressed in terms of family of closed sets by means of modified and idealized finite intersection property. All countably I_{fin}-compact spaces are strongly star I_{fin}-compact space although their structures are very different. These topological properties can further be used in the study of selection principles and topological games involbing ideals.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бал П., Бхоумик С. Принцип выбора звезд. Еще одно новое направление // Журнал Индийского Мат. Сообщ.-2017.-81(1-2).-01-06.

2. Бал П., Бхоумик С. О пространствах R-Стар-Линделёфа // Палестинский математический журнал.-2017.-6(2).-480-186.

3. Бал П., Бхоумик С. Некоторые новые принципы выбора звезд в топологии // Филомат.-2017.-31(13).-4041-4050.

4. Бал П., Бхоумик С. Галд Д. О селективных свойствах Стар-Линделёфа // Журнал Индийского Мат. Сообщ.-2018.-85(3-4).-291-304.

5. Бал П., Кочинац Л.Д.Р. О селективных звездчатых пространствах // Прикладная топология.-2020.-281.-107181.

6. Бал П., Де Р. О сильно звездной полукомпактности топологических пространств // Математический журнал Хайяма.-2023.-9(1).-54–60.

7. Бал П. О классе I-γ-открытых накрытий И I-St-γ-открытых накрытий // Журнал математики и статистики Хаджеттепе (принято).

8. Бонанзинга М., Маесано Ф. Некоторые свойства, определяемые относительными версиями свойств звездных покрытий// Топология и ее приложения.-2022.-306.-107923.

9. Дувен Е.К.В., Рид Г.М., Роско А.В., Три И.Ж.. Свойства покрытий звезд // Прикладная топология.-1991.-30(1).-71-103.

10. Деви В. Р, Сиврадж, Челвам Т. Т. Коденсированные и полностью коденсированные идеалы. Венгерская математическая академия.-2005.-108(3).-197-205.

11. Энгелькинг Р. Общая топология // Серия Сигма по чистой математике. Пересмотренное и дополненное издание.-Берлин: Хельдерманн.-1980.

12. Гупта А., Каур Р. Компактные пространства относительно идеала // Международный журнал теоретической и прикладной математики.-2014.-92(3).-443-8.

13. Янкович Д, Хэмлетт Т. Р. Новые топологии из старых через идеалы // Американский ежемесячник математики.-1990.-97.-295-310.

14. Kocinac L. D. Принципы выбора звезд: Обзор. Математический журнал Хайяма.-2015.-1(1).-82–106.

15. Куратовски К. Топологии I, Варшава.-1933.

16. Левин Н. Обобщенные замкнутые множества в топологии. Доклады Математического кружка Палермо.-1970.-19.-89-96.

17. Ньюкомб Р. Л. Топологии, которые компактны по модулю идеала. Диссертация на соискание степени доктора наук, Университет штата Калифорния. Санта-Барбара.-1967.

18. Ранчин Д. В. Компактность по модулю идеала, Советская математика. Доклады.-1972.-13.-193-197.

19. Сонг Й. К., Сюань В. Ф. Еще о селективно звездно-кубических пространствах // Топология и ее приложения.-2019.-268.-106905.

20. Тягиа Б. К., Сингх С., Бхардвадж М. Идеальные аналоги некоторых вариантов свойства Гуревича // Филомат.-2019.-33(9).-2725-2734.

21. Вайдьянатхасвами Р. Топология множеств. Издательский комплекс «Челси».-1946.

REFERENCES

1. Bal, P., Bhowmik, S. 2017, “Star-Selection Principle. Another New Direction”, *Journal of the Indian Math. Soc.*, 81(1-2): 01-06.

2. Bal, P., Bhowmik, S. 2017, “On R-Star-Lindelöf Spaces”, *Palestine Journal of Mathematics*, 6(2): 480-186.

3. Bal, P., Bhowmik, S. 2017, “Some New Star-Selection Principles in topology”, *Filomat*, 31(13): 4041-4050.

4. Bal, P., Bhowmik, S., Gauld D. 2018, “On Selectively Star-Lindelöf Properties”, *Journal of the Indian Math. Soc.*, 85(3-4): 291-304.

5. Bal, P., LDR Kočinac. 2020, “On Selectively Star-ccc Spaces”, *Topology Appl.*, 281: 107181

6. Bal, P., De, R. 2023, “On strongly star semi-compactness of topological spaces”, *Khayyam Journal of Mathematics*, 9(1): 54–60.

7. Bal, P. “On the class of I-γ-open cover AND I-St-γ-open cover”, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics* (accepted).

8. Bonanzinga, M., Maesano, F. 2022, "Some properties defined by relative versions of star-covering properties", *Topology and its Applications*, 306: 107923.

9. Douwen, E.K.V., Reed, G.M., Roscoe, A.W., Tree, I.J. 1991, "Star covering properties", *Topology Appl.*, 30(1): 71-103.

10. Devi, V.R., Sivraj, Chelvam, T.T. 2005, "Codense and completely codense ideals", *Acta. Math. Hungar.*, 108(3): 197-205.

11. Engelking, R. 1980, "General Topology", *Sigma Series in Pure Mathematics*. Revised and complete ed Berlin: Heldermann, 1980.

12. Gupta, A., Kaur, R. 2014, "Compact spaces with respect to an ideal", *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 92(3) : 443-8.

13. Jankovic, D., Hamlett, T.R. 1990, "New Topologies from old via ideals", *Amer. Math. Monthly*, 97: 295-310.

14. Kocinac, L.D. 2015, "Star selection principles: A survey", *Khayyam Journal of Mathematics*, 1(1); 82–106.

15. Kuratowski, K. 1933, "Topologie I", *Warszawa*.

16. Levin, N. 1970, "Generalised closed sets in topology", *Rend, Circ. Mat. Palermo*, 19: 89-96.

17. Newcomb, R.L. Topologies which are compact modulo an ideal. Ph.D. Thesis, Uni. Of Cal. At Santa Barbara, 1967.

18. Rancin, D. V. 1972, "Compactness modulo an ideal", *Soviet Math. Dokl.*, 13: 193-197.

19. Song, Y. K., Xuan, W. F. 2019, "More on selectively star-ccc spaces", *Topology and its Applications*, 268 : 106905.

20. Tyagia, B. K., Singh, S., Bhardwaj, M. 2019, "Ideal Analogues of Some Variants of the Hurewicz Property", *Filomat*, 33(9): 2725–2734.

21. Vaidyanathaswamy, R. 1946, "Set Topology", *Chelsea Publishing Complex*.

Получено: 28.02.2024
Принято в печать: 04.09.2024

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 25. Выпуск 3.

УДК 519.1 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-47-69

Песочные паттерны на регулярном графе с вершинами степени восемь[1]

П. В. Гранин, Н. С. Калинин, А. С. Саакян

Гранин Павел Витальевич — Санкт-Петербургский государственный университет (г. Санкт-Петербург).
e-mail: granininfo@gmail.com
Калинин Никита Сергеевич — Гуандун-Технион (Шаньтоу, Китай); Технион (г. Хайфа, Израиль).
e-mail: nikaanspb@gmail.com
Саакян Артур Суренович — Санкт-Петербургский государственный университет (г. Санкт-Петербург).
e-mail: hckray@vladloh.com

Аннотация

Система находится в критическом состоянии, если даже небольшое возмущение может привести к глобальным изменениям. Таковы, например, любые фазовые переходы: в воде, охлаждённой до нуля градусов, один центр кристаллизации быстро разрастается до большого кластера. Впервые концепцию самоорганизующейся критичности предложили Бэк, Тэнг и Вайзенфелд в 1987 году. В своей работе они описали систему, ставшую классической моделью самоорганизующейся критичности: на квадратной сетке в некоторых узлах лежат песчинки, суммарно конечное число. Если в одном из узлов лежит более трёх песчинок, происходит обвал: четыре песчинки из этого узла перераспределяется на соседние узлы, это может вызвать обвалы в них, потом в их соседях... Обвалы будут лавинообразно происходить до тех пор, пока система вновь не вернется в равновесное состояние, этот процесс называется релаксацией.

В настоящей статье представлены результаты экспериментального и теоретического исследования следующей задачи. Рассмотрим регулярный граф, вершинами которого являются точки плоскости, обе координаты которых целые, и каждая вершина соединена с 8 ближайшими вершинами. В точку (0,0) положим большое числе песчинок и произведём релаксацию. Результат релаксации имеет очевидную фрактальную структуру, видимую в компьютерных экспериментах, и части этой структуры могут быть описаны.

Мы классифицируем некоторые возникающие паттерны и предлагаем гипотезы о их устройстве (опираясь на похожие результаты для других регулярных графов). Доказаны оценки на среднее число песка в появляющихся паттернах.

Ключевые слова: песочные модели, экспериментальная математика.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:
Гранин, П. В., Калинин, Н. С., Саакян, А. С. Песочные паттерны на регулярном графе с вершинами степени восемь // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 3, с. 47–69.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 20-71-00007).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 25. No. 3.

UDC 519.1 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-47-69

Sandpile patterns on a regular graph of degree eight

P. V. Granin, N. S. Kalinin, A. S. Saakyan

Granin Pavel Vital'evich — Saint Petersburg State University (St. Petersburg).
e-mail: granininfo@gmail.com
Kalinin Nikita Sergeevich — Guangdong Technion Israel Institute of Technology (Shantou, China); Technion-Israel Institute of Technology (Haifa, Israel).
e-mail: nikaanspb@gmail.com
Saakyan Artur Surenovich — Saint Petersburg State University (St. Petersburg).
e-mail: hckray@vladloh.com

Abstract

The system is in critical condition if even a small disturbance can lead to global changes. These are, for example, any phase transitions: in water cooled to zero degrees, one crystallization center rapidly grows to a large cluster. The concept of self-organizing criticality was first proposed by Back, Tang and Weisenfeld in 1987. In their work, they described a system that has become a classic model of self-organizing criticality: on a square grid, in some nodes, there are grains of sand, a finite number in total. If there are more than three grains of sand in one of the nodes, a toppling occurs: four grains of sand from this node are redistributed to neighboring nodes, this can cause topplings in them, then in their neighbors... Collapses will occur in an avalanche-like manner until the system returns to an equilibrium state, this process is called relaxation.

This article presents the results of an experimental and theoretical study of the following problem. Consider a regular graph whose vertices are points in the plane, both coordinates of which are integers, and each vertex is connected to the 8 nearest vertices. Put a large number of grains of sand at the point (0,0) and relax. The relaxation result has an obvious fractal structure, visible in computer experiments, and parts of this structure can be described.

We classify some emerging patterns and propose hypotheses about their structure (based on similar results for other regular graphs). Estimates for the average number of sand in the emerging patterns are proved.

Keywords: sandpile models, experimental math.

Bibliography: 15 titles.

For citation:
Granin, P. V., Kalinin, N. S., Saakyan, A. S. 2024. "Sandpile patterns on a regular graph of degree eight" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 3, pp. 47–69.

1. Общие определения, мотивация и план статьи

Работа посвящена изучению песочной модели на некотором регулярном графе. Приведем основные определения.

Определение 1. *Состоянием песочной модели на графе $G = (V, E)$ будем называть функцию $\phi\colon V \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Мы интерпретируем $\phi(x)$ как количество песчинок в вершине $x \in V$.*

Если для $x \in V$ верно $\phi(x) \geq \deg(x)$ (число песчинок в вершине не менее степени вершины), то мы называем эту вершину нестабильной и разрешаем сделать в ней обвал. В результате такого обвала получается новое состояние ϕ' по следующему правилу:

$$\begin{cases} \phi'(y) = \phi(y) - \deg(y), & \text{если } y = x, \\ \phi'(y) = \phi(y) + 1, & \text{если } (x, y) \in E, \\ \phi'(y) = \phi(y), & \text{иначе.} \end{cases}$$

При обвале происходит перераспределение песка в графе — из нестабильной вершины в каждого соседа уходит по одной песчинке.

Состояние ϕ называется стабильным, если все вершины в графе являются стабильными, то есть для любой вершины $x \in V$ выполнено $\phi(x) < \deg(x)$.

Релаксацией называется выполнение обвалов в вершинах, пока эти обвалы возможны. Результат релаксации состояния ϕ будем обозначать ϕ°. Если существует конечная релаксация (а для состояний с конечным суммарным числом песчинок на связном бесконечном графе это всегда так), то состояние ϕ называется *стабилизируемым* или *релаксируемым* и определена функция числа обвалов, или *одометр*, $u\colon V \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$, для каждой вершины x равная количеству обвалов в x во время релаксации. Несложно показать [3], что число обвалов в вершине не зависит от порядка выполнения обвалов в вершинах. Из этого следует, что результат релаксации ϕ° не зависит от того, в каком порядке мы выполняли обвалы.

Иногда рассматривают песочные модели со «стоками» — выделенными вершинами графа, при попадании в которые песок «исчезает», или, что эквивалентно, в стоках запрещено делать обвалы. Наличие подобных вершин существенно для конечных графов, поскольку иначе процесс релаксации может не закончиться. Например, если суммарное количество песчинок во всех вершинах больше суммарной степени всех вершин. Нашим основным объектом изучения будет песочная модель на связном бесконечном графе (но с конечным суммарным числом песчинок), стоков в нашей модели не будет.

Определение 2. *Для функции $f\colon V \to \mathbb{Z}$ на графе G, определим её дискретный лапласиан следующим образом:*

$$\Delta_G f(x) = \sum_{y|(y,x)\in E} \big(f(y) - f(x)\big) = \sum_{y|(y,x)\in E} f(y) - \deg(x) \cdot f(x).$$

Обычно будет понятно о каком графе идёт речь, поэтому нижний индекс лапласиана мы будем опускать.

Если состояние η стабилизируемо, то результат его релаксации η° и одометр u любой релаксации связаны тождеством

$$\forall x \in V, 0 \leq \eta(x) + \Delta u(x) = \eta^\circ(x) < \deg(x).$$

Для доказательства тождества достаточно для каждой вершины x рассмотреть количество прибывших в неё песчинок во время релаксации, и количество убывших из неё песчинок.

Предложение 1 (Принцип наименьшего действия, [4]). *Если $\eta\colon V \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ и $w\colon V \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ удовлетворяют условию $\eta(x) + \Delta w(x) < \deg(x)$ для всякого $x \in V$, тогда состояние η стабилизируемо, и его одометр u удовлетворяет условию $u \leq w$.*

Рассмотрим граф G_8 — регулярный граф на вершинах $\mathbb{Z}^2$ степени 8, в котором точки (x_1, x_2) и (y_1, y_2) соединены ребром тогда и только тогда, когда $|x_1 - y_1| \leq 1$ и $|x_2 - y_2| \leq 1$.

Известно [16], что если в начало координат на пустой плоскости насыпать n песчинок и провести релаксацию, то полученная картинка растёт со скоростью $\sqrt{n}$. Поэтому разумно сжать полученное состояние в $n^{1/2}$ раз, и уже потом переходить к пределу.

Определение 3. *Определим состояние* $\gamma_n \colon \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ *следующим образом:*

$$\begin{cases} \gamma_n(x_1, x_2) = n, & \text{если } x_1 = x_2 = 0, \\ \gamma_n(x_1, x_2) = 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Обозначим за s_n *результат релаксации этого состояния, то есть* $s_n = \gamma_n^\circ$. *Нашей основной мотивацией является описание* s_n *(Рис. 1).*

Определим функцию $\overline{s}_n \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$$\overline{s}_n(x) = s_n([n^{1/2}x]),$$

где $[x]$ *означает ближайшую целую точку решётки. Если ближайших точек несколько, можно выбрать любую из них, и, поскольку множество*

$$\{x \mid n^{1/2}x \text{ имеет несколько ближайших точек решётки}\}$$

имеет меру 0 на плоскости $\mathbb{R}^2$, *то наш выбор не повлияет на слабую* сходимость, о которой далее пойдёт речь.*

Известно, что у $\overline{s}_n$ есть предел в $*$-слабой топологии. Первые экспериментальные результаты про этот предел были получены в [12].

План статьи. Наша работа посвящена изучению паттернов на Рис. 1. В следующей секции мы обсудим известные результаты [9, 13, 10] для аналогичной картинки на регулярном графе степени 4 на $\mathbb{Z}^2$. Мы переносим методы этих статей на наш случай. Мы определяем множество конусов Γ_8, которое предположительно кодирует устройство паттернов, изучаем его экспериментально и теоретически. В конце статьи мы приводим гипотезы о устройстве Γ_8, которые мы наблюдаем на экспериментальных данных.

На Рис. 2 приведены области, замощённые повторяющимися паттернами, для каждой области – свой паттерн (детали ниже). Каждой области соответствует вершина конуса в Рис. 6 и паттерны для некоторых вершин указаны в Таблице 13.

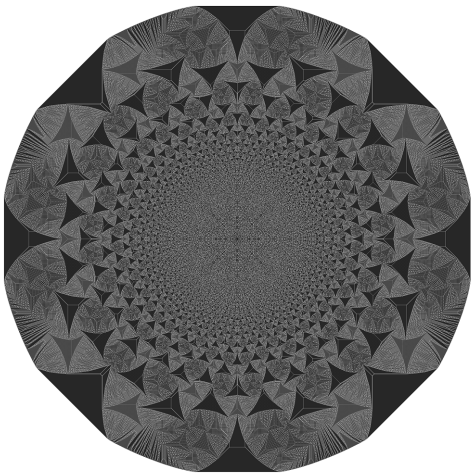


Рис. 1: Результат релаксации состояния с 10^7 песчинок в начале координат. Оттенок серого отражает количество песка в вершине. Белому и чёрному цвету сопоставлено 0 и 7 песчинок соответственно.

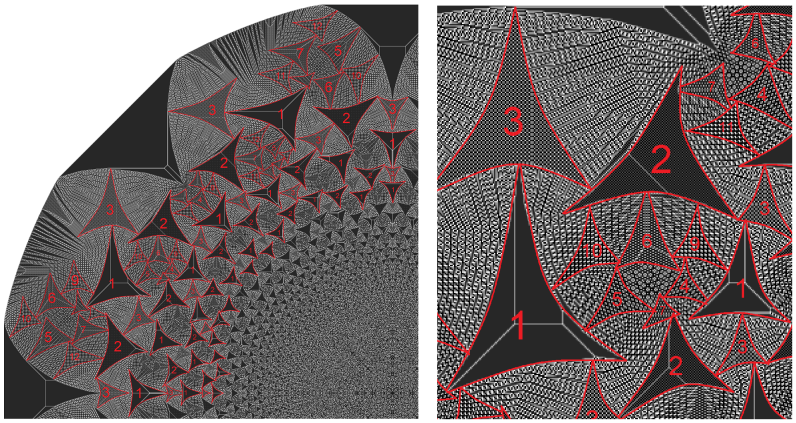


Рис. 2: Результат релаксации состояния с 10^7 песчинок в начале координат на G_8 с отмеченными областями с паттернами из Таблицы 13.

2. Существующие результаты для стандартной решётки $\mathbb{Z}^2$

В статьях [9, 13, 10] рассматривается граф $G_4 = (\mathbb{Z}^2, E)$, вершины $(x_1, x_2), (y_1, y_2)$ в нём соединены ребром тогда и только тогда, когда $|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| = 1$.

Теорема 1. *[13] В обозначениях предыдущей главы $\overline{s}_n$ сходится слабо* к некоторой $s_\infty \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ при $n \to \infty$. Более того, выполняются следующие условия: носитель s_∞ лежит внутри некоторого круга, $\int_{\mathbb{R}^2} s_\infty dx = 1$, $0 \le s_\infty \le 3$.*

Мы наблюдаем, что аналогичный результат верен для графа G_8 и строго докажем это в другой статье (доказательство параллельно изложенному в [13]). В этой статье мы сосредоточимся на других аспектах задачи: частично опишем фрактальную структуру предела.

Предел s_∞ для G_4 имеет фрактальную структуру, которая была хорошо описана. Для этого рассматривалось множество Γ_4 *стабилизируемых* вещественных симметричных матриц размера 2×2.

Определение 4. *Матрица A называется стабилизируемой, если существует* **целозначная** *функция $u\colon \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$ такая, что*

$$u(x) \geq \frac{1}{2} x^t A x, \quad \Delta u(x) \leq 3 \quad \forall x \in \mathbb{Z}^2,$$

где Δ — дискретный лапласиан функции u на графе G_4.

Если задавать симметричные матрицы 2×2 тремя параметрами следующим образом:

$$M_4(a,b,c) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} c+a & b \\ b & c-a \end{pmatrix},$$

то множество $\Gamma_4' = \{(a,b,c) \mid M_4(a,b,c) \in \Gamma_4\}$ является объединением замкнутых конусов над ковром Аполлония, см. Рис. 3.

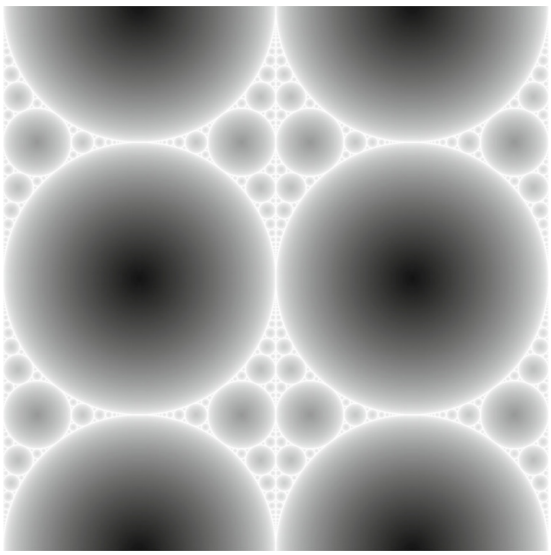


Рис. 3: Граница множества Γ_4'. Оттенок серого в точке $(a,b) \in [0,4]\times[0,4]$ отражает наибольшее $c \in [2,3]$ такое, что $(a,b,c) \in \Gamma_4'$. Белый и чёрный цвет соответствуют значениям $c=2$ и $c=3$ соответственно.

Обозначим за P_4 множество троек чисел (a,b,c), соответствующих пикам конусов. Каждой тройке $(a,b,c) \in P_4$ соответствует область предела s_∞, и на этой области предел s_∞ будет выглядеть как периодичный паттерн, определяемый функцией вида $\Delta\lceil \frac{1}{2} x^t M_4(a,b,c) x + b_{(a,b,c)} x \rceil$, где $b_{a,b,c} x$ — некоторая линейная функция.

Классификация паттернов на G_4 позволяет описать структуру единицы песочной группы на подходящих эллипсах [11]. При этом граница носителя s_∞ до сих пор никак не описана, но есть оценки для похожих песочных моделей [2, 1]. Интересна связь песочных моделей с гармоническими функциями со значениями в окружности [15, 8], а также с тропическими кривыми [5, 7, 6].

3. Множество Γ_8 и его граница для регулярного графа G_8

В дальнейшем мы рассматриваем только граф G_8.

Матрицы размера 2×2 мы параметризуем иначе:

$$M_8(a,b,c) = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} c+a & b \\ b & c-a \end{pmatrix}.$$

Константа 1/6 выбрана таким образом, чтобы получить удобную формулировку Теоремы 2.

Мы построим аналогичное множество Γ_8 стабилизируемых матриц и предъявим аналогичные гипотезы.

Определение 5. *Будем называть матрицу A стабилизируемой, если существует функция $u\colon \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$ такая, что*

$$u(x) \geq \frac{1}{2}x^t Ax, \quad \Delta u(x) \leq 7 \quad \forall x \in \mathbb{Z}^2. \tag{1}$$

Здесь и далее под Δ подразумевается Δ_{G_8}, определённый в Разделе 1.

Пусть Γ_8 — множество вещественных симметричных стабилизируемых матриц 2×2.

Определение 6. *Пусть $q\colon \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}$, тогда за $\lceil q \rceil$ будем обозначать функцию на $\mathbb{Z}^2$, определённую следующим образом*

$$\lceil q \rceil (x_1, x_2) = \lceil q(x_1, x_2) \rceil ,$$

где $\lceil\ \rceil$ — это округление до целого числа вверх.

Лемма 1. *$A \in \Gamma_8$ тогда и только тогда, когда состояние $\Delta \lceil q_A \rceil$ стабилизируемо, где*

$$q_A(x) = \frac{1}{2}x^t Ax.$$

Доказательство. Пусть $A \in \Gamma_8$, тогда существует u, удовлетворяющая Определению 5. Подставим в Предложение 1 $\eta = \Delta \lceil q_A \rceil$, $w = u - \lceil q_A \rceil$, и сразу получим, что η стабилизируемое состояние.

Пусть состояние $\Delta \lceil q_A \rceil$ стабилизируемо, пусть v — его одометр. Тогда функция $u = v + \lceil q_A \rceil$ подходит под условие Определения 5, а значит $A \in \Gamma_8$. □

Определение 7. *Рассмотрим порядок на матрицах: $A \leq B$ тогда и только тогда, когда $x^t Ax \leq x^t Bx$ для любого x.*

Предложение 2. *Если $B \in \Gamma_8$ и $A \leq B$, то $A \in \Gamma_8$.*

Доказательство. $B \in \Gamma$, значит состояние $\Delta \lceil q_B \rceil$ стабилизируемо, то есть существует $u\colon \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ такая, что $0 \leq \Delta \lceil q_B \rceil + \Delta u < 8$. Но

$$\Delta \lceil q_B \rceil + \Delta u = \Delta \left(\lceil q_B \rceil + u \right) = \Delta \lceil q_A \rceil + \Delta(u + \lceil q_B \rceil - \lceil q_A \rceil),$$

при этом $\lceil q_B \rceil - \lceil q_A \rceil \geq 0$, так как $B \geq A$, а значит состояние $\Delta \lceil q_A \rceil$ релаксируемо по Предложению 1. □

Определение 8. *Определим множество $\Gamma_8' = \{(a, b, c) \mid M_8(a, b, c) \in \Gamma_8\} \subset \mathbb{R}^3$.*

Предложение 3. *Если $(a, b, c) \in \Gamma_8'$, то для любых $\phi \in [0, 2\pi], r > 0$ выполнено $(a + r\cos(\phi), b + r\sin(\phi), c - r) \in \Gamma_8'$, а также $(a, b, c - r) \in \Gamma_8'$.*

Первое условие говорит о том, что если (a, b, c) лежит в Γ_8', то в Γ_8' лежит и граница конуса с вертикальной осью, углом $\pi/2$ и вершиной (a, b, c). Второе условие гарантирует то, что вместе с точкой (a, b, c) лежит не только граница, но и весь конус.

Доказательство. Для начала вспомним результат Предложения 2, так что достаточно доказать, что для всякого $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2$ верно

$$x^t \begin{pmatrix} c+a & b \\ b & c-a \end{pmatrix} x \geq x^t \begin{pmatrix} c-r+a+r\cos(\phi) & b+r\sin(\phi) \\ b+r\sin(\phi) & c-r-a-r\cos(\phi) \end{pmatrix} x,$$

это равносильно

$$x_1^2(r - r\cos(\phi)) - 2x_1x_2(r\sin(\phi)) + x_2^2(r + r\cos(\phi)) \geq 0.$$

Заметить, что

$$\left(x_1\sqrt{1-\cos(\phi)} \pm x_2\sqrt{1+\cos\phi}\right)^2 =$$
$$x_1^2(1-\cos(\phi)) \pm 2x_1x_2|\sin(\phi)| + x_2^2(1+\cos(\phi)),$$

а значит мы получили нужное неравенство.

Разберёмся со вторым утверждением, для него нам необходимо показать

$$x^t \begin{pmatrix} c+a & b \\ b & c-a \end{pmatrix} x \geq x^t \begin{pmatrix} c-r+a & b \\ b & c-r-a \end{pmatrix} x,$$

а это равносильно условию

$$x_1^2 r + x_2^2 r \geq 0.$$

□

Предложение 4. *Граница множества Γ'_8 непрерывна.*

Доказательство. Для начала отметим, что $\partial\Gamma'_8$ непусто. Это так, поскольку $(0,0,0) \in \Gamma'_8$, $(0,0,60) \notin \Gamma'_8$.

Пусть $(a_0, b_0, c_0) \in \partial\Gamma'_8$. Докажем, что множество

$$\mathrm{V}_{(a_0,b_0,c_0)} = \{(a,b,c) \mid c > c_0,\ (a-a_0)^2 + (b-b_0)^2 < (c-c_0)^2\}$$

не пересекается с Γ'_8. Множество $\mathrm{V}_{(a_0,b_0,c_0)}$ — это открытый конус с углом $\pi/2$, направленный вверх по оси z, с вершиной (a_0, b_0, c_0). Пусть это не так и существует $(x,y,z) \in \mathrm{V}_{(a_0,b_0,c_0)} \cap \Gamma'_8$. Тогда, по Предложению 3, во множестве Γ'_8 целиком лежит конус

$$\Lambda_{(x,y,z)} = \{(a,b,c) \mid c < z,\ (a-x)^2 + (b-y)^2 \leq (c-z)^2\}.$$

Но из $(x,y,z) \in \mathrm{V}_{(a_0,b_0,c_0)}$ следует, что $(a_0, b_0, c_0) \in \operatorname{int}\Gamma'_8$. В таком случае точка (a_0, b_0, c_0) не могла лежать на границе Γ'_8, пришли к противоречию.

По аналогичным соображениям из условия $(a_0, b_0, c_0) \in \partial\Gamma'_8$ можно вывести, что открытый конус

$$\Lambda_{(a_0,b_0,c_0)} = \{(a,b,c) \mid c < c_0,\ (a-a_0)^2 + (b-b_0)^2 < (c-c_0)^2\}$$

принадлежит множеству Γ'_8.

Из этих двух фактов мы получаем, что для всяких $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ существуют $Z_0, Z_1 \in \mathbb{R}$ такие, что $\forall z < Z_0$ $(x,y,z) \in \Gamma'_8$, $\forall z > Z_1$ $(x,y,z) \notin \Gamma'_8$. Определим $z_0 = \sup\{z \mid (x,y,z) \in \Gamma'_8\}$. Понятно, что $(x,y,z_0) \in \partial\Gamma'_8$, более того, не существует $z_1 \neq z_0$ такого, что $(x,y,z_1) \in \partial\Gamma'_8$. Пусть существует, пусть, не умаляя общности, $z_0 < z_1$, тогда множеству Γ'_8 принадлежит открытый конус

$$\Lambda_{(x,y,z_1)} = \{(a,b,c) \mid c < z_1,\ (a-x)^2 + (b-y)^2 < (c-z_1)^2\}.$$

Но $(x, y, z_0) \in \Lambda_{(x,y,z_1)} \subset \operatorname{int} \Gamma'_8$, пришли к противоречию с тем, что $(x, y, z_0) \in \partial\Gamma'_8$.

Таким образом мы показали, что $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ существует единственный $z \in \mathbb{R}$ такой, что $(x, y, z) \in \partial\Gamma'_8$. Также мы поняли, что если $(x, y, z) \in \partial\Gamma'_8$, то $\Lambda_{(x,y,z)} \cap \partial\Gamma'_8 = \emptyset$ и $\mathrm{V}_{(x,y,z)} \cap \partial\Gamma'_8 = \emptyset$, где $\Lambda_{(x,y,z)}$ и $\mathrm{V}_{(x,y,z)}$ — открытые конусы с вершиной (x, y, z), направленные вниз и вверх по оси z соответственно.

Из этого следует, что граница множества Γ'_8 непрерывна. □

Значит, для определения его границы достаточно проверять на принадлежность множеству Γ'_8 только тройки рациональных чисел. Или, что равносильно, для определения структуры множества Γ_8 достаточно проверять на принадлежность ему лишь рациональных матриц.

Алгоритм для определения принадлежности множеству Γ_8.

Определение 9. *Будем называть функцию s на $\mathbb{Z}^2$ n-периодической, если $s(x+y) = s(x)$ для всяких $x \in \mathbb{Z}^2, y \in n\mathbb{Z}^2$.*

Лемма 2. *Если коэффициенты A лежат в $\frac{1}{n}\mathbb{Z}$ для $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, то состояние $\Delta \lceil q_A \rceil$ $2n$-периодическое.*

Доказательство. Если $y \in 2n\mathbb{Z}^2$, тогда $Ay \in 2\mathbb{Z}^2$, так что

$$q_A(x + y) - q_A(x) = \left(x^t + \frac{1}{2}y^t\right) Ay \in \mathbb{Z}.$$

Из этого следует, что функция $\lceil q_A \rceil - q_A$ будет $2n$-периодической. Теперь запишем

$$\Delta \lceil q_A \rceil = \Delta(\lceil q_A \rceil - q_A) + \Delta q_A.$$

Теперь $2n$-периодичность $\Delta \lceil q_A \rceil$ следует из $2n$-периодичности $\Delta(\lceil q_A \rceil - q_A)$ и того, что Δq_A — константа (это же лапласиан, хоть и дискретный, квадратичной функции). □

Лемма 3. *Пусть $u, v \colon \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$, определим функцию $w(x) = \min\{u(x), v(x)\}$. Если для некоторого x имеем $w(x) = u(x)$, то $\Delta w(x) \leq \Delta u(x)$.*

Аналогично, минимум из счётного множества дискретных супергармонических функций (если он поточечно существует) – тоже супергармоническая функция.

Лемма 4. *n-периодическое состояние $\eta \colon \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ стабилизируемо тогда и только тогда, когда оно стабилизируемо на торе $T_n = \mathbb{Z}^2/n\mathbb{Z}^2$.*

Доказательство. Пусть η стабилизируемо на торе T_n с одометром $\overline{v}$, продолжим $\overline{v}$ до n-периодической функции v на $\mathbb{Z}^2$ естественным образом. Легко видеть, что тогда $\eta + \Delta v \leq 7$, а значит η стабилизируемо на $\mathbb{Z}^2$ по Предложению 1.

Теперь пусть η стабилизируемо на $\mathbb{Z}^2$ с одометром $w \colon \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Определим функцию $\overline{w} \colon \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ следующим образом

$$\overline{w}(x) = \min\{w(x + y) \mid y \in n\mathbb{Z}^2\}.$$

Функция $\overline{w}$ будет n-периодической, а также будет удовлетворять условию $\eta + \Delta\overline{w} \leq 7$, это следует из предыдущей леммы. Обозначим $\hat{w}$ спуск функции $\overline{w}$ на T_n, $\hat{w}$ удовлетворяет $\eta + \Delta_{T_n}\hat{w} \leq 7$. Следовательно, по Предложению 1, состояние η будет стабилизируемо на торе T_n. □

Теперь мы знаем, что для того, чтобы посмотреть на структуру множества Γ_8, можно определять принадлежность ему только рациональных матриц. А это, как мы показали выше, алгоритмизуемая задача, так что мы написали программу, которая с некоторой точностью вычислила границу Γ_8, проверяя для рациональных a, b, c релаксируемость соответствующего состояния на торе.

4. Периодичность Γ_8, оценка на среднее количество песка для стабилизируемых матриц

Теорема 2. *Пусть $A = M_8(a, b, c)$, тогда среднее количество песка в состоянии $\Delta\lceil q_A\rceil$ равно c.*

Доказательство. Для доказательства мы будем считать среднее количества песка в подграфе на вершинах $V_n = [-n, n] \times [-n, n]$ и устремим n к бесконечности.

Обозначим общее количество песка на V_n за S_n.

$$S_n = \sum_{x\in V_n} \Delta\lceil q_A\rceil(x) = \sum_{x\in V_n}\left(\sum_{y\sim x}\lceil q_A\rceil(y) - 8\lceil q_A\rceil(x)\right).$$

Видно, что в этой сумме почти все члены сокращаются, остаются только значения около границы множества V_n. Для краткости обозначим $f(a, b) = \lceil q_A\rceil(a, b)$. Таким образом

$$\begin{aligned}
S_n = 3\sum_{t\in[-n+1,n-1]} &\big(f(-n-1,t) + f(n+1,t) + f(t,-n-1) + f(t,n+1)\big) + \\
&+ 2\big(f(-n-1,n) + f(-n,n+1) + f(n,n+1) + f(n+1,n) + \\
&+ f(n+1,-n) + f(n,-n-1) + f(-n,-n-1) + f(-n-1,-n)\big) + \\
&+ \big(f(-n-1,-n-1) + f(-n-1,n+1) + f(n+1,-n-1) + f(n+1,n+1)\big) - \\
&- 3\sum_{t\in[-n+1,n-1]} \big(f(t,n) + f(t,-n) + f(n,t) + f(-n,t)\big) - \\
&- 5\big(f(n,n) + f(-n,n) + f(n,-n) + f(-n,-n)\big).
\end{aligned}$$

Вспомним, что нас интересует $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{(2n+1)^2}$. Для начала отметим, что в выражении для S_n лишь линейное по n количество членов, так что мы можем функцию $\lceil q_A\rceil$ заменить на q_A, предел не поменяется.

Также отметим, что $q_A(a, b)$ отличается от $q_A(a\pm1, b\pm1)$ лишь на линейный член по n. Так что если мы из всех членов в выражении для S_n, не находящихся под знаками суммирования, уберём ±1, то предел опять же не изменится. И в таком случае произойдёт много сокращений.

После этих умозаключений нас уже интересует предел $\lim_{n\to\infty}\frac{S'_n}{(2n+1)^2}$, где

$$\begin{aligned}
S'_n = 3\sum_{t\in[-n+1,n-1]} \Big(&q_A(-n-1,t) + q_A(n+1,t) + q_A(t,-n-1) + q_A(t,n+1) - \\
&- q_A(t,n) - q_A(t,-n) - q_A(n,t) - q_A(-n,t)\Big).
\end{aligned}$$

Осталось наконец воспользоваться тем, как определено q_A.

$$\begin{aligned}
q_A(-n-1,t) - q_A(-n,t) &= \frac{1}{12}\big((c+a)(-n-1)^2 + 2b(-n-1)t + (c-a)t^2\big) - \\
&- \frac{1}{12}\big((c+a)(-n)^2 + 2b(-n)t + (c-a)t^2\big) = \frac{1}{12}\big((c+a)(2n+1) - 2bt\big), \\
q_A(n+1,t) - q_A(n,t) &= \frac{1}{12}\big((c+a)(2n+1) + 2bt\big), \\
q_A(t,-n-1) - q_A(t,-n) &= \frac{1}{12}\big((c-a)(2n+1) - 2bt\big), \\
q_A(t,n+1) - q_A(t,n) &= \frac{1}{12}\big((c-a)(2n+1) + 2bt\big).
\end{aligned}$$

Теперь собираем это всё вместе и получаем

$$S'_n = 3 \sum_{t\in[-n+1,n-1]} \frac{1}{6}\Big((c+a)(2n+1)+(c-a)(2n+1)\Big) = c(2n-1)(2n+1).$$

Следовательно $\lim_{n\to\infty} \frac{S'_n}{(2n+1)^2} = c$. □

Следствие 1. *Пусть* $a, b, c \in \mathbb{Q}$.
Если $c > 7$, *то* $M_8(a,b,c) \notin \Gamma_8$.
Если $c < 4$, *то* $M_8(a,b,c) \in \Gamma_8$.

Доказательство. По Лемме 1 мы знаем, что нам надо проверить стабилизируемость состояния $\lceil q_A \rceil$. При этом, так как $A = M_8(a,b,c)$, и эти коэффициенты рациональные, то мы можем рассматривать стабилизируемость не на всём множестве $\mathbb{Z}^2$, а только на торе подходящего размера. А это уже состояние на конечном графе со средним числом песчинок c и степенью всех вершин 8.

Теперь первое утверждение совсем тривиально (при релаксации на торе общее число песка не меняется, значит, всегда будут вершины с более чем семью песчинками), необходимо разобраться со вторым. И он верен, так как если в состоянии на конечном связном графе песчинок меньше, чем рёбер, то это состояние стабилизируемо. Этот факт доказан в диссертации [14]. □

Гипотеза. *Результаты компьютерных вычислений указывают на более сильное свойство: если* $c > 6$, *то* $M_8(a,b,c) \notin \Gamma_8$.

Лемма 5. $\Delta x^2 = \Delta y^2 = 6$, $\Delta xy = \Delta x = \Delta y = \Delta 1 = 0$.

Предложение 5.
Пусть $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$, $A = M_8(a,b,c)$, $A' = M_8(a+12k_1, b+6k_2, c)$. *Тогда* $\Delta\lceil q_A\rceil = \Delta\lceil q_{A'}\rceil$.
Таким образом, для вычисления Γ_8 *достаточно будет рассматривать лишь матрицы с* $(a,b) \in [0,12]\times[0,6]$.

Доказательство.

$$\Delta\lceil q_{A'}\rceil = \Delta\left\lceil \frac{1}{12}\Big((c+a+12k_1)x^2 + 2(b+6k_2)xy + (c-a-12k_1)y^2\Big)\right\rceil =$$
$$\Delta\left\lceil \frac{1}{12}\Big((c+a)x^2+2bxy+(c-a)y^2\Big) + \Big(k_1x^2+k_2xy-k_1y^2\Big)\right\rceil =$$
$$\Delta\left(\left\lceil \frac{1}{12}\Big((c+a)x^2+2bxy+(c-a)y^2\Big)\right\rceil + \Big(k_1x^2+k_2xy-k_1y^2\Big)\right) =$$
$$\Delta\lceil q_A\rceil + \Delta\Big(k_1x^2+k_2xy-k_1y^2\Big) = \Delta\lceil q_A\rceil + 6k_1 + 0\cdot k_2 - 6k_1 = \Delta\lceil q_A\rceil.$$

□

5. Примеры паттернов, соответствующих видимым вершинам конусов в Γ_8

Мы провели следующие вычисления на компьютере: взяли все пары рациональных чисел $(a,b) \in [0,12]\times[0,6]$ со знаменателем 256, и для каждой такой пары посчитали $\sup\{c \mid M_8(a,b,c) \in \Gamma_8\}$ с точностью до $1/256$. После этого, пользуясь периодичностью, эти данные продолжили на квадрат $[0,12]\times[0,12]$ по Предложению 5. Таким образом мы получили результат, отражённый на Рис. 4.

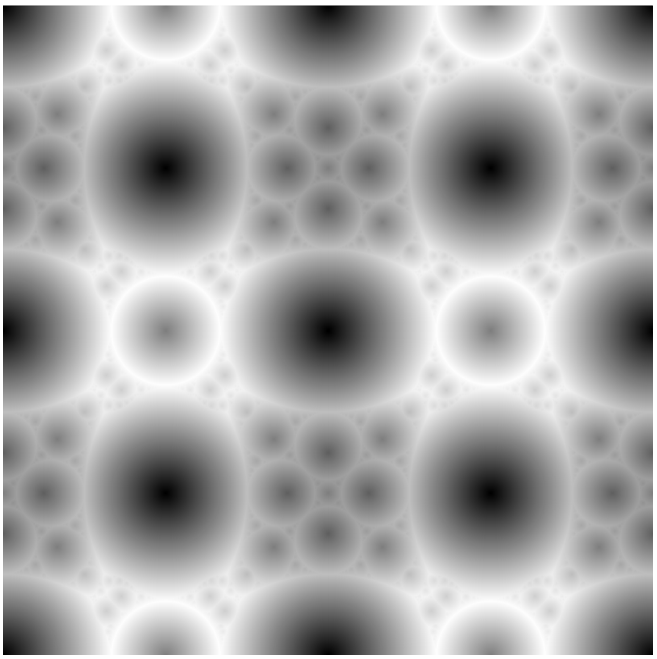


Рис. 4: Граница множества Γ'_8. Оттенок серого в точке $(a,b) \in [0,12] \times [0,12]$ отражает наибольшее $c \in [4,6]$ такое, что $(a,b,c) \in \Gamma'_8$. Белый и чёрный цвет соответствуют значениям $c=4$ и $c=6$ соответственно.

Предложение 6. *Если $c > 6 + \frac{1}{128}$, то для всяких $a,b \in \mathbb{R}$ выполнено $(a,b,c) \notin \Gamma'_8$.*

Доказательство. Произведённые вычисления показали, что для любых $n,m \in \mathbb{Z}$ выполнено $\left(\frac{n}{256}, \frac{m}{256}, 6 + \frac{1}{256}\right) \notin \Gamma'_8$.

Допустим, что существует тройка (a,b,c) такая, что $c > 6 + \frac{1}{128}$ и $(a,b,c) \in \Gamma'_8$. Возьмём $n = [256 \cdot a]$, $m = [256 \cdot b]$. Обозначим $D = \operatorname{dist}\left((a,b), \left(\frac{n}{256}, \frac{m}{256}\right)\right)$. Оценим D сверху:

$$D \le \left|a - \frac{n}{256}\right| + \left|b - \frac{m}{256}\right| = \frac{1}{256}\left(|256 \cdot a - n| + |256 \cdot b - m|\right) \le \frac{1}{256}.$$

По Предложению 3 из $(a,b,c) \in \Gamma'_8$ следует, что $\left(\frac{n}{256}, \frac{m}{256}, c - D\right) \in \Gamma'_8$. При этом $c - D > 6 + \frac{1}{256}$, пришли к противоречию с имеющимися результатами вычислений. □

В ситуации с G_4 большую роль играли локальные максимумы на аналогичной картинке, они отвечали некоторым паттернам на областях в искомом пределе.

Также компьютер вычислил результат релаксации состояния, в котором в начале координат находится 10^7 песчинок, а в остальных вершинах песчинок нет, результат отражён на Рис. 1.

Из вычислений мы видим, какие тройки (a,b,c) будут точками локального максимума(относительно c), а также какой паттерн будет им соответствовать.

Далее для обозначения вершины с 0 песчинок будем использовать □, для 1 — ▨, для 2 — ▨, для 3 — ▨, для 4 — ▨, для 5 — ▨, для 6 — ▨, для 7 — ■.

Составим таблицу из вершин и соответствующим им паттернам, см. Рис 13.

Теперь в этих паттернах отметим границу, то есть путь по вершинам с 6 или 7 песчинками. Такие пути разделяют область на повторяющиеся паттерны.

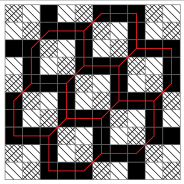
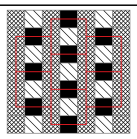
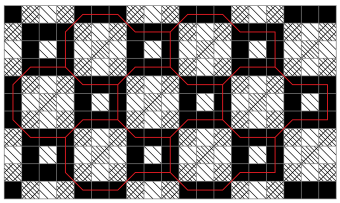
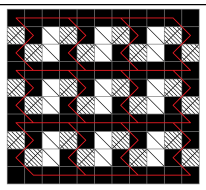
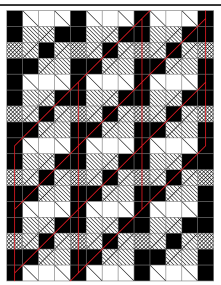
номера вершин из таблицы выше	паттерн с отмеченной границей
4, 5	
6, 7	
8	
9, 10, 11, 12	
13, 14, 15, 16	

Рис. 5: Таблица 1

Мы взяли результат релаксации состояния с 10^7 песчинок в начале координат и отметили на нём области с паттернами из Таблицы 13, результат отражён на Рис. 2.

Заметим, что паттерны 13, 14, 15, 16 отличаются поворотом и зеркальной симметрией, аналогичным свойством обладают паттерны 9, 10, 11, 12. Рис. 6 даёт этому некоторое объяснение. Совпадают пары паттернов 4, 5 и 6, 7 (но разнятся между собой, хотя можно было бы предположить, что из симметрии Рис.6 они должны совпадать).

6. Гипотезы, основанные на экспериментальных фактах

По имеющемуся приближению множества Γ'_8 мы построили трёхмерную модель этого множества. И это дало ощутимый толчок в постановке гипотез о фрактальной структуре этого множества. Эта модель, вместе с номерами конусов, соответствующими таблице выше, приведена на Рис. 6.

Ранее мы показали, что вместе с точкой (a, b, c) множество Γ'_8 будет содержать и целый конус с вершиной в этой точке. Первое и одно из самых важный предположений (оно подтвер-

ждается компьютерными вычислениями, а также было строго доказано для G_4) — множество Γ'_8 является объединением счётного числа конусов, и вершины этих конусов имеют некоторую фрактальную структуру, которую мы стремимся описать.

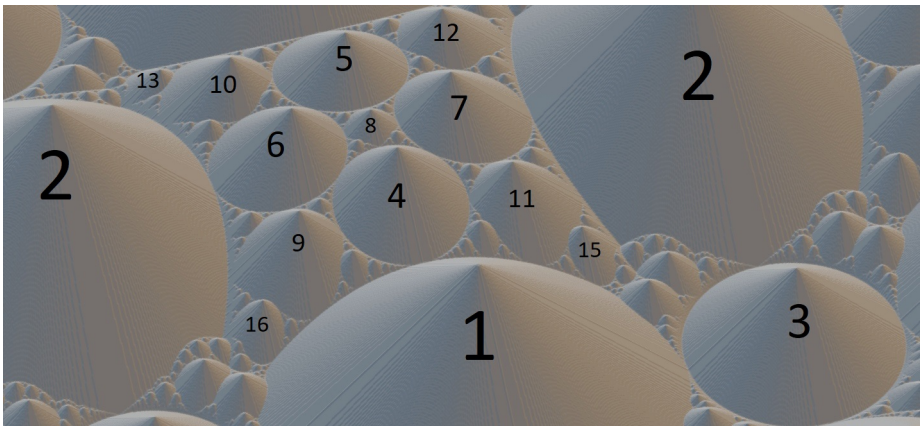


Рис. 6: 3d-модель множества Γ'_8, номера соответствуют Таблице 13. Угол при вершинах всех конусов равен прямому, конус является поверхностью вращения вокруг вертикальной прямой. На изображении углы в вершинах конусов кажутся больше прямого, потому что мы смотрим "сверху".

По Рис. 4 и Рис. 6 видно, что «граница» конусов 4, 5, 6, 7 очень похожа на эллипс. В предположении, что это эллипс, мы сможем написать его уравнение. Сделаем это для конуса №7.

Гипотеза (Граница конуса №7)**.**

Предположим, что граница конуса №7 — эллипс, полученный при пересечении конуса с вершиной $(6.75, 3, 5.25)$ *и какой-то гиперплоскости. Мы можем понять, что это за гиперплоскость, поскольку мы можем точно посчитать пересечения конусов 7 и 8 (зная координаты их вершин и то, что угол при вершине конуса прямой), а также конусов 7 и 2, это точки* $(6.25, 3, 4.75)$ *и* $(7.5, 3, 4, 5)$ *соответственно. А эти две точки проходят через гиперплоскость* $x = 30 - 5z$*. Возникает предположение, что в уравнение гиперплоскости не входит* y*.*

Таким образом искомый эллипс — это пересечение конуса и гиперплоскости, то есть решение системы уравнений:

$$\begin{cases} (z - 5.25)^2 = (x - 6.75)^2 + (y - 3)^2 \\ x = 30 - 5z \end{cases}$$

Этот эллипс мы отметили на Рис. 7.

Аналогичным образом можно получить уравнение на границу конусов 4, 5, 6, мы ими в дальнейшем будем пользоваться, но выписывать не будем, иначе это будет слишком громоздко.

Теперь обратим внимание на область между конусами 5, 7, 8. Крупнее и с дополнительными обозначениями она изображена на Рис. 8.

На Рис. 8 уже отчётливо видна последовательность конусов, сходящихся к точке пересечения конусов 7 и 8 (точнее, к точке пересечения их границ-эллипсов), а именно к $(45/7, 24/7, 33/7)$. Опишем, что это за последовательность. Первое предположение — все вершины конусов из этой последовательности лежат в гиперплоскости $x - 3 = y$.

Следующее предположение вытекает из некоторого построения. В оригинальных статьях (про G_4) вершинам (a, b, c) сопоставлялись окружности на плоскости с центром (a, b) и радиусом $c - 2$, таким образом и получался ковёр Аполлония. Мы будем сопоставлять нашим

вершинам (a, b, c) окружности с центром (a, b) и радиусом $c - 4$. Иначе говоря, посмотрим на пересечение конусов с плоскостью $c = 4$.

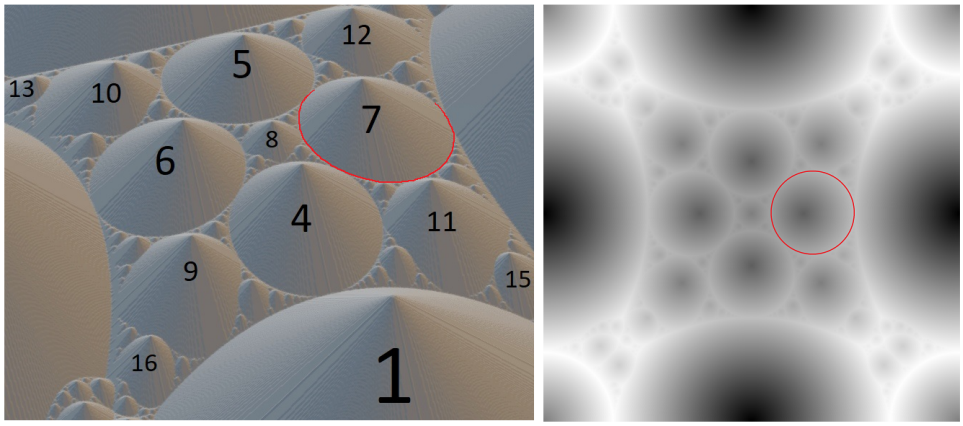


Рис. 7: Области из Рис. 6 и Рис. 4 с отмеченным эллипсом — границей конуса №7

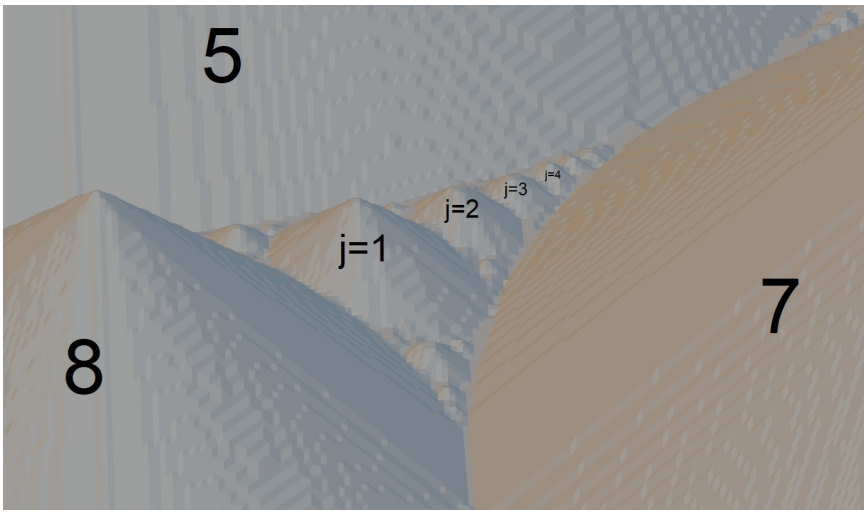


Рис. 8: Область между конусами 5, 7, 8

На Рисунке 9 изображены такие окружности для всех конусов из Таблицы 13, а также окружности для некоторых конусов, находящихся между конусами номер 1, 2, 3, 12. На рисунке отмечены точки A, B, C, D, их координаты равны $(6, 4), (7, 3), (6, 2), (5, 3)$ соответственно. Окружности, соответствующие конусам №1 имеют чёрный цвет и проходят через точки A, C. Окружности, соответствующие конусам №2 — синий цвет и проходят через B, D. Окружности, соответствующие конусам №3 — фиолетовый цвет, они находятся в углах первой области. Окружности для №4, №5 — оранжевый цвет, проходят через B, D. Окружности для №6, №7 — зелёный цвет, проходят через A, C. Окружность для №8 проходит через все четыре точки. Окружности для №9, №10, №11, №12 — красный цвет, проходят через пары точек $(C, D), (A, D), (C, B), (A, B)$ соответственно. Окружности для №13, №14, №15, №16 имеют светло-зелёный цвет.

Обозначим за $C_{(x,y)}(r)$ окружность с центром (x, y) и радиусом r. Пусть $E_5 = C_{(6,3.75)}(1.25)$, $E_7 = C_{(6.75,3)}(1.25)$, $E_8 = C_{(6,3)}(1)$ — это окружности, сопоставленные вершинам конусов 5, 7, 8.

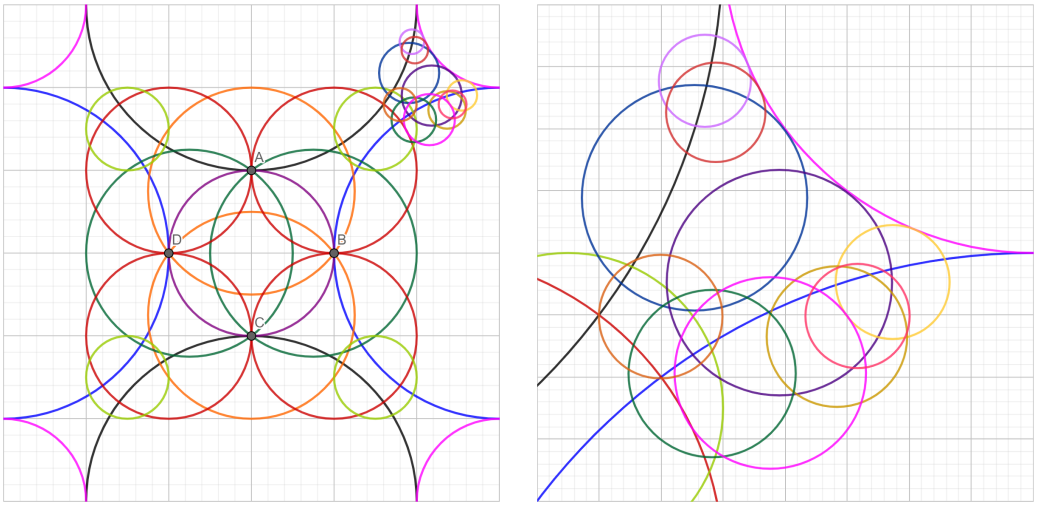


Рис. 9: Окружности, получаемые пересечением некоторых конусов плоскостью $c = 4$, на областях $[3, 9] \times [0, 6]$ и $[7.4, 9] \times [4.2, 5.8]$ соответственно.

Гипотеза. *Пусть искомая последовательность вершин конусов — это* $\{(a_j, b_j, c_j)\}_{j\in\mathbb{N}}$. *Можно считать, что* $(a_0, b_0, c_0) = (6, 3, 5)$, *это вершина конуса 8.*

Пока что мы предположили, что $a_j - 3 = b_j$, *и что* $(a_j, b_j, c_j) \to (a_\infty, b_\infty, c_\infty) = (45/7, 24/7, 33/7)$. *Теперь обозначим* $P_j = C_{(a_j,b_j)}(c_j - 4)$, $P_\infty = C_{(a_\infty,b_\infty)}(c_\infty - 4)$. *Отметим, что* $E_8 = P_0$.

Окружности E_5 *и* E_8 *пересекаются в точке* $(7, 3)$ *(конечно есть ещё одна точка пересечения, она скорее относится к фрактальной структуре участка между конусами 5, 6, 10, и сейчас мы ей заниматься не будем). Окружности* E_7 *и* E_8 *пересекаются в точке* $(6, 4)$. *И компьютерные вычисления позволяют нам предположить, что для всякого* $j \in \mathbb{N}$ *окружности* E_5 *и* P_j *пересекаются в точке* $(7, 3)$, *а окружности* E_7 *и* P_j *— в точке* $(6, 4)$. *На Рис. 10 изображены эти окружности.*

Также в поддержку этого предположения выступает то, что окружность P_∞ *в некотором смысле оказывается предельной для последовательности* $\{P_j\}_{j\in\mathbb{N}}$. *Эта окружность тоже проходит через точки* $(7, 3)$, $(6, 4)$. *Более того,* P_∞ *касается* E_5 *и* E_7 *в этих точках, но это не удивительно, поскольку точка* $(a_\infty, b_\infty, c_\infty)$ *лежит на границе двух конусов, а значит и касается двух соответствующих окружностей.*

Для полного описания этой последовательности нам осталось понять, какие радиусы этих окружностей, либо какие у них центры. Однако нам не удалось получить формулу для радиусов или центров, зависящую от j.

Также интересно себя ведут окружности, соответствующие сходящейся последовательности к пересечению конусов 2 и 7, со стороны конуса 12. На Рис. 11 изображена область множества Γ'_8 между конусами 2, 7, 12. Окружности, соответствующие этим конусам, изображены на Рис. 12.

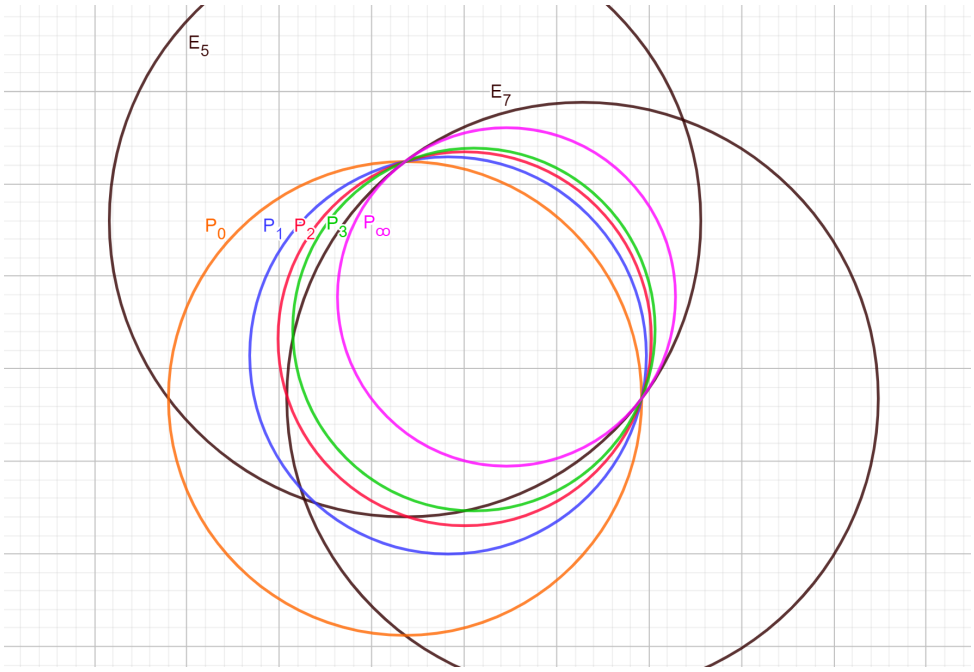


Рис. 10: Окружности, соответствующие конусам из Рис. 8.

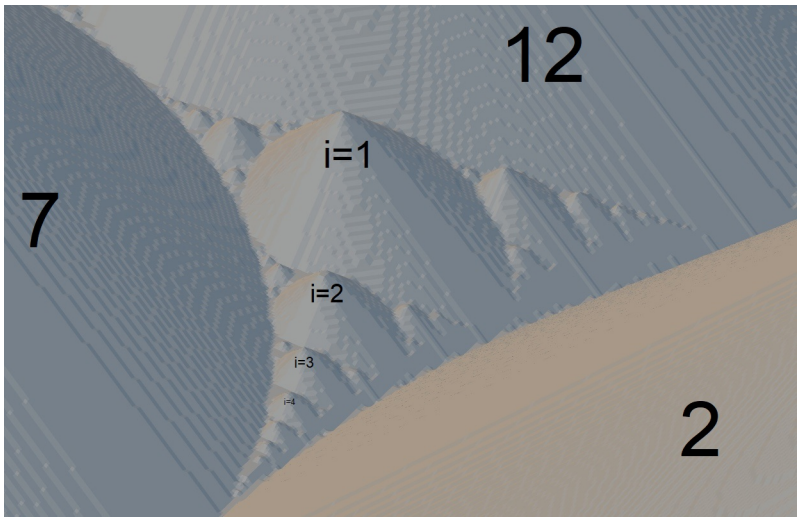


Рис. 11: Область между конусами 2, 7, 12

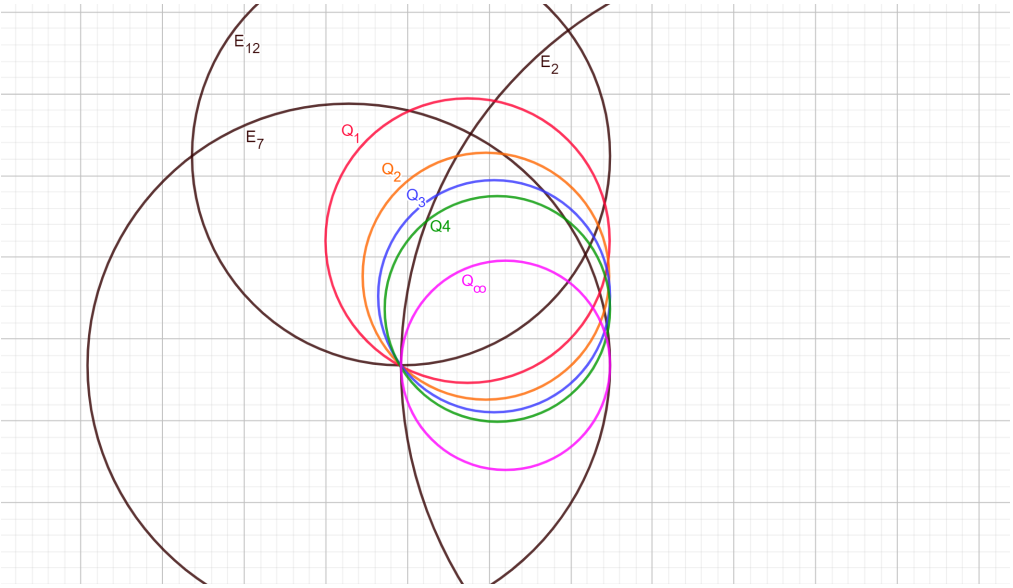


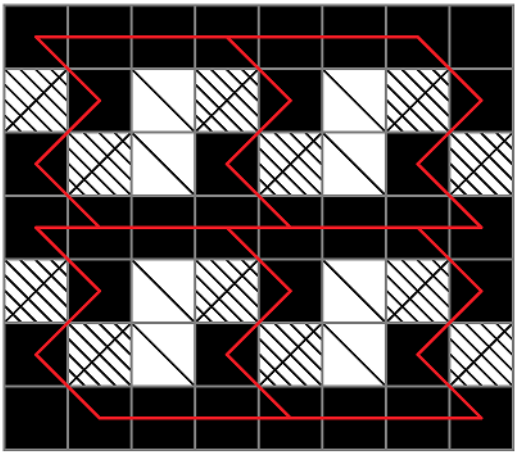
Рис. 12: Окружности, соответствующие конусам из Рис. 11.

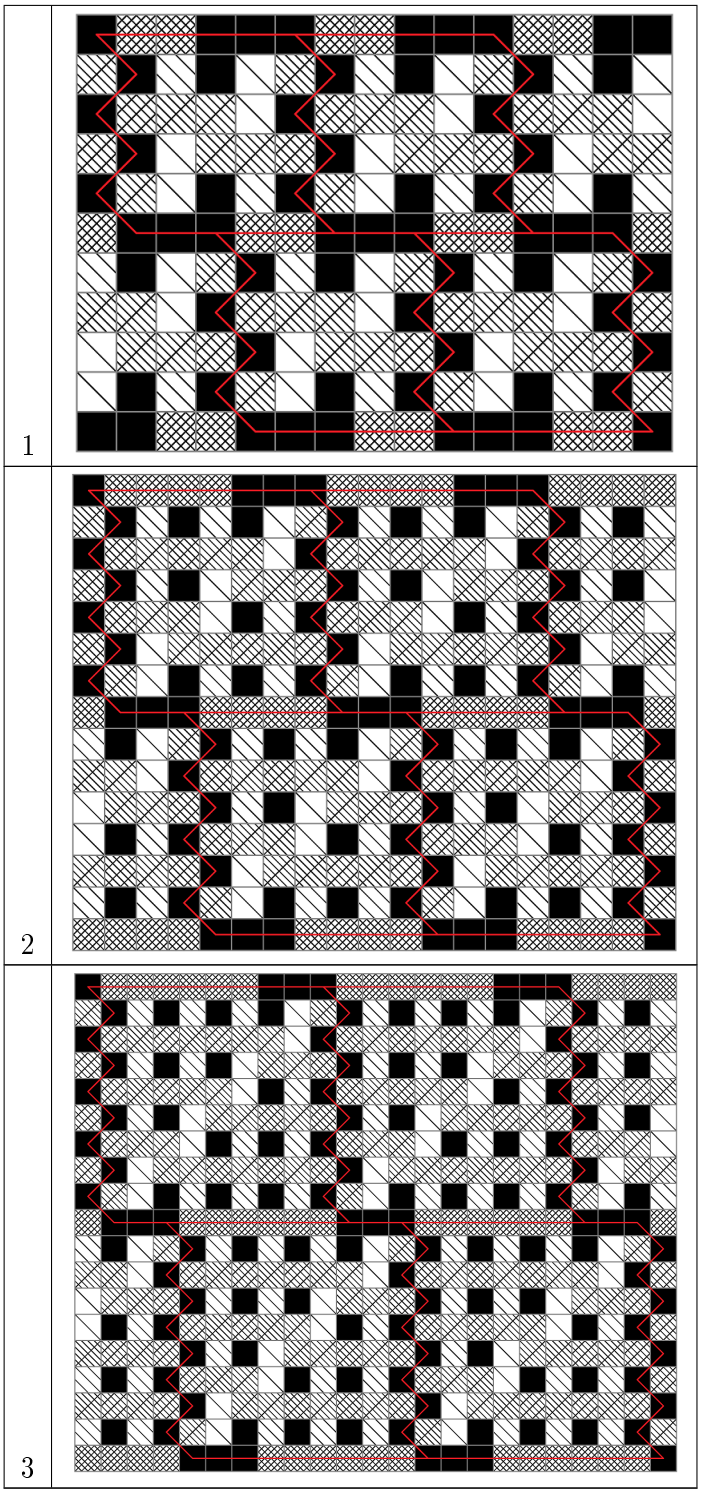
Гипотеза. *Последовательность окружностей* $\{Q_i\}_{i=1}^{\infty}$, *представленная на Рис. 12, описывается следующим образом:* $Q_i = C_{(x_i,y_i)}(r_i)$, *где*

$$x_i = \frac{15}{2} - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{2i+3}\right)^2, \quad y_i = 3 + \frac{3}{2i+3}, \quad r_i = 8 - x_i = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{2i+3}\right)^2 + \frac{1}{2}.$$

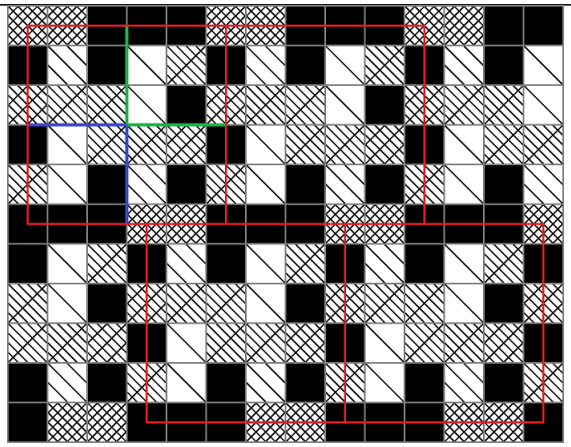
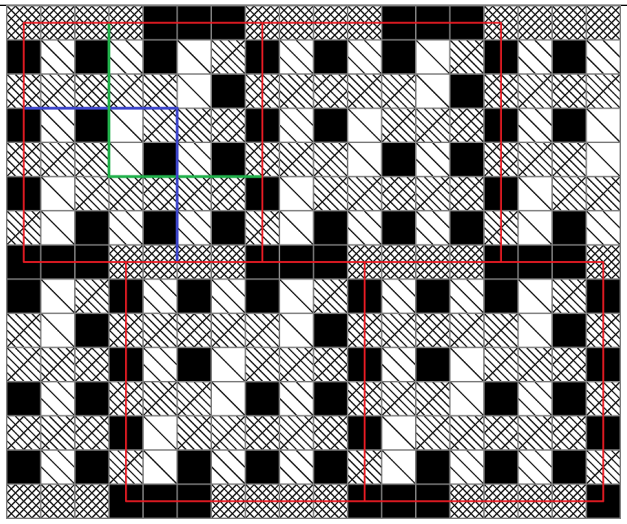
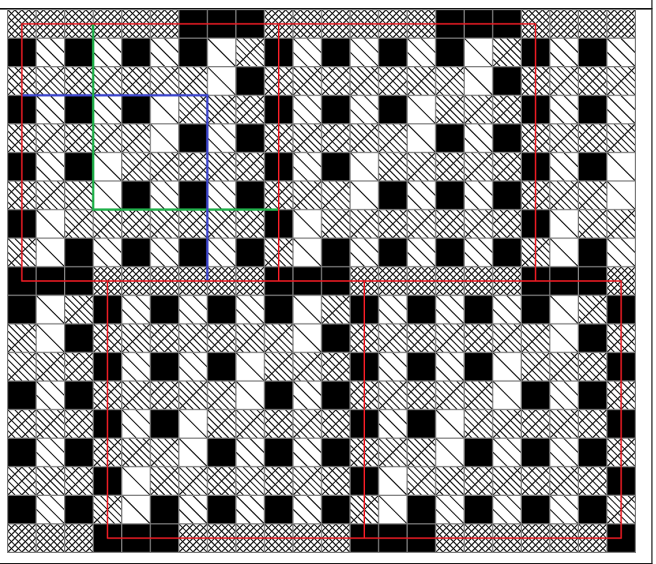
При этом окружность, соответствующая конусу 12, совпадает с Q_0.

Или, другими словами, во множестве Γ_8' *лежит последовательность конусов с вершинами* $\{(x_i, y_i, r_i + 4)\}_{i=0}^{\infty}$. *Соответствующие некоторым из этих вершин паттерны, вместе с границей, проведённой по вершинам с количеством песчинок 6 или 7, представлены в Таблице 6.*

i	паттерн, соответствующий этой вершине
0	



Теперь мы сменим границу на прямоугольную и отметим красным и синим цветом участки на паттерне вершины Q_i, совпадающий с внутренней частью паттерна вершины Q_{i-1}. Соответствующие рисунки отражены в Таблице 6.

i	паттерн, соответствующий этой вершине
1	
2	
3	

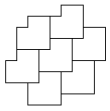
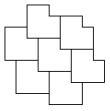
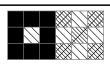
№	(a, b, c)	паттерн, или же tile odometer	его расположение
1	$(0, 0, 6)$, $(6, 0, 6)$		
2	$(3, 3, 6)$, $(9, 3, 6)$		
3	$(3, 0, 5)$, $(9, 0, 5)$		
4	$(0, 2.25, 5.25)$, $(6, 2.25, 5.25)$		
5	$(0, 3.75, 5.25)$, $(6, 3.75, 5.25)$		
6	$(5.25, 3, 5.25)$, $(11.25, 3, 5.25)$		
7	$(6.75, 3, 5.25)$, $(0.75, 3, 5.25)$		
8	$(6, 3, 5)$, $(0, 3, 5)$		
9	$(5, 2, 5)$, $(11, 2, 5)$		
10	$(5, 4, 5)$, $(11, 4, 5)$		
11	$(7, 2, 5)$, $(1, 2, 5)$		
12	$(7, 4, 5)$, $(1, 4, 5)$		
13	$(4.5, 4.5, 4.5)$, $(10.5, 4.5, 4.5)$		
14	$(7.5, 4.5, 4.5)$, $(1.5, 4.5, 4.5)$		
15	$(7.5, 1.5, 4.5)$, $(1.5, 1.5, 4.5)$		
16	$(4.5, 1.5, 4.5)$, $(10.5, 1.5, 4.5)$		

Рис. 13: Таблица с паттернами для самых высоких пиков конусов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. I. Alevy and S. Mkrtchyan. The limit shape of the leaky abelian sandpile model // arXiv preprint arXiv:2010.01946, 2020.

2. A. Bou-Rabee. A shape theorem for exploding sandpiles. // arXiv preprint arXiv:2102.04422, 2021.

3. D. Dhar. Self-organized critical state of sandpile automaton models // Phys. Rev. Lett., 64(14):1613–1616, 1990.

4. A. Fey, L. Levine, and Y. Peres. Growth rates and explosions in sandpiles // J. Stat. Phys., 138(1-3):143–159, 2010.

5. N. Kalinin and M. Shkolnikov. Tropical curves in sandpiles // Comptes Rendus Mathematique, 354(2):125–130, 2016.

6. N. Kalinin and M. Shkolnikov. Introduction to tropical series and wave dynamic on them // Discrete & Continuous Dynamical Systems-A, 38(6):2843–2865, 2018.

7. N. Kalinin and M. Shkolnikov. Sandpile solitons via smoothing of superharmonic functions. Communications in Mathematical Physics, 378(3):1649–1675, 2020.

8. M. Lang and M. Shkolnikov. Harmonic dynamics of the abelian sandpile // Proceedings of the National Academy of Sciences, 116(8):2821–2830, 2019.

9. L. Levine, W. Pegden, and C. K. Smart. Apollonian structure in the Abelian sandpile // Geom. Funct. Anal., 26(1):306–336, 2016.

10. L. Levine, W. Pegden, and C. K. Smart. The Apollonian structure of integer superharmonic matrices // Ann. of Math. (2), 186(1):1–67, 2017.

11. A. Melchionna. The sandpile identity element on an ellipse // arXiv preprint arXiv:2007.05792, 2020.

12. S. Ostojic. Patterns formed by addition of grains to only one site of an abelian sandpile // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 318(1):187–199, 2003.

13. W. Pegden and C. K. Smart. Convergence of the Abelian sandpile // Duke Math. J., 162(4):627–642, 2013.

14. D. Rossin. Proprietes combinatoires de certaines familles d'automates cellulaires // PhD thesis, Ph. D. Thesis, École Polytechnique, 2000.

15. K. Schmidt and E. Verbitskiy. Abelian sandpiles and the harmonic model // Communications in Mathematical Physics, 292(3):721–759, 2009.

16. Aliev, A.A., Kalinin, N.S. Convergence of a sandpile on a triangular lattice under rescaling // Matematicheskii Sbornik.- 2023.- vol. 214.- iss. 12.- pp. 3–25.

REFERENCES

1. Alevy, I. & Mkrtchyan, S. 2020, "The limit shape of the leaky abelian sandpile model", *arXiv preprint arXiv:2010.01946*.

2. Bou-Rabee. A. 2021, "A shape theorem for exploding sandpiles", *arXiv preprint arXiv:2102.04422.*

3. Dhar, D. 1990, "Self-organized critical state of sandpile automaton models", *Phys. Rev. Lett.*, 64(14):1613–1616.

4. Fey, A., Levine, L. & Peres, Y. 2010, "Growth rates and explosions in sandpiles", *J. Stat. Phys.*, 138(1-3):143–159.

5. Kalinin, N. & Shkolnikov, M. 2016, "Tropical curves in sandpiles", *Comptes Rendus Mathematique*, 354(2):125–130.

6. Kalinin, N. & Shkolnikov, M. 2018, "Introduction to tropical series and wave dynamic on them", *Discrete & Continuous Dynamical Systems-A*, 38(6):2843–2865.

7. Kalinin, N. & Shkolnikov, M. 2020, "Sandpile solitons via smoothing of superharmonic functions", *Communications in Mathematical Physics*, 378(3):1649–1675.

8. Lang, M. & Shkolnikov, M. 2019, "Harmonic dynamics of the abelian sandpile", *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 116(8):2821–2830.

9. Levine, L., Pegden, W. & Smart, C. K. 2016, "Apollonian structure in the Abelian sandpile", *Geom. Funct. Anal.*, 26(1):306–336.

10. Levine, L., Pegden, W. & Smart, C. K. 2017, "The Apollonian structure of integer superharmonic matrices", *Ann. of Math.*, (2), 186(1):1–67.

11. Melchionna, A. 2020, "The sandpile identity element on an ellipse", *arXiv preprint arXiv:2007.05792.*

12. Ostojic, S. 2003, "Patterns formed by addition of grains to only one site of an abelian sandpile", *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 318(1):187–199.

13. Pegden, W. & Smart, C. K. 2013, "Convergence of the Abelian sandpile", *Duke Math. J.*, 162(4):627–642.

14. Rossin, D. 2000, "Proprietes combinatoires de certaines familles d'automates cellulaires", *PhD thesis, Ph. D. Thesis, École Polytechnique.*

15. Schmidt, K. & Verbitskiy, E. 2009, "Abelian sandpiles and the harmonic model", *Communications in Mathematical Physics*, 292(3):721–759.

16. Aliev, A. A., Kalinin, N. S. 2023, "Convergence of a sandpile on a triangular lattice under rescaling", *Sbornik: Mathematics*, vol. 214, iss. 12, pp. 3-–25.

Получено: 05.10.2023
Принято в печать: 04.09.2024

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 25. Выпуск 3.

УДК 517.9 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-70-85

Решение неравенств с помощью коренных и примыкающих функций

А. И. Денисов, И. В. Денисов

Денисов Алексей Игоревич — аспирант, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: den_ tspu@mail.ru
Денисов Игорь Васильевич — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: den_ tspu@mail.ru

Аннотация

В рамках нелинейного метода угловых пограничных функций существование решений нелинейных краевых задач доказывается через построение барьерных функций. Барьерные функции конструируются через выделенные специальным образом опорные барьеры. Сами опорные барьеры также могут выступать в роли барьерных функций. При этом приходится доказывать выполнение определенных неравенств, которые представляют самостоятельный функциональный интерес. Исследование этих неравенств приводит к громоздким выкладкам. В настоящей работе предлагается способ, существенно упрощающий получение результатов. Возможные решения неравенств строятся в виде многочленов. Начальный этап предполагает выделение многочлена наивысшей интересующей степени. Такой многочлен называется коренным. Далее к коренному многочлену последовательно добавляются многочлены низших степеней, называемые примыкающими многочленами.

Ключевые слова: нелинейные краевые задачи, барьерные функции, функциональные неравенства.

Библиография: 8 названий.

Для цитирования:
Денисов, А. И., Денисов, И. В. Решение неравенств с помощью коренных и примыкающих функций // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 3, с. 70–85.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 25. No. 3.

UDC 517.9 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-70-85

Solving inequalities using radical and adjacent functions

A. I. Denisov, I. V. Denisov

Denisov Alexey Igorevich — postgraduate student, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: den_ tspu@mail.ru
Denisov Igor Vasil'evich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: den_ tspu@mail.ru

Abstract

Within the framework of the nonlinear method of angular boundary functions, the existence of solutions to nonlinear boundary value problems is proven through the construction of barrier functions. Barrier functions are constructed through specially designated support barriers. The support barriers themselves can also act as barrier functions. In this case, it is necessary to prove the fulfillment of certain inequalities that are of independent functional interest. The study of these inequalities leads to cumbersome calculations. This paper proposes a method that significantly simplifies obtaining results. Possible solutions to inequalities are constructed in the form of polynomials. The initial stage involves identifying the polynomial of the highest degree of interest. Such a polynomial is called radical. Next, polynomials of lower degrees, called adjacent polynomials, are successively added to the radical polynomial.

Keywords: nonlinear boundary value problems, barrier functions, functional inequalities.

Bibliography: 8 titles.

For citation:
Denisov, A. I., Denisov, I. V. 2024, "Solving inequalities using radical and adjacent functions", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 3, pp. 70–85.

1. Введение

Развитие нелинейного метода угловых пограничных функций привело к необходимости исследовать задачи с нелинейностями различного вида. Такие исследования проводились с двух противоположных направлений. С одной стороны, были рассмотрены квадратичные нелинейности, а затем и кубические (см. [1]–[5]). Для доказательства разрешимости соответствующих нелинейных задач строились верхние и нижние барьеры, что предполагало исследование различных неравенств. С другой стороны, предметом исследований становились сами неравенства и изучались классы функций, удовлетворяющих таким неравенствам (см. [6], [7]).

Первое направление привело к рассмотрению многочленов $F(u)$, обладающих двумя свойствами:

1) $F(\bar{u}_0) = 0$;

2) $F'(u) > 0$ для $u \in [\bar{u}_0, \varphi]$;

(применяемые обозначения используются в других работах, поэтому принимаются и в настоящей). Кроме этого, были выделены три опорные барьерные функции (см. [8]), которые привели к неравенствам вида

$$F(\bar{u}_0 + s + t) - F(\bar{u}_0 + s) - F(\bar{u}_0 + t) \geq 0, \tag{1}$$

$$F\left(\bar{u}_0 + s + t - \frac{st}{\varphi - \bar{u}_0}\right) - \left(1 - \frac{s}{\varphi - \bar{u}_0}\right) F(\bar{u}_0 + t) - \left(1 - \frac{t}{\varphi - \bar{u}_0}\right) F(\bar{u}_0 + s) \geq 0 \tag{2}$$

и

$$F\left(\bar{u}_0 + s + t - 2\sqrt{st}\right) - \frac{\sqrt{s}}{t\sqrt{t}} \int_0^t F(\bar{u}_0 + u)du - \left(1 - \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{t}}\right) F\left(\bar{u}_0 + t\right) - \left(1 - \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{s}}\right) F\left(\bar{u}_0 + s\right) \leq 0, \tag{3}$$

где s и t принадлежат промежутку $(0, \varphi - \bar{u}_0]$. Исследование этих неравенств приводит к громоздким выкладкам.

Второе направление, с одной стороны, вывело исследования на произвольные функции, а с другой стороны, возвращение к многочленам привело к иному взгляду на рассматриваемые неравенства. Первое, на что было обращено внимание, это линейность всех трех неравенств относительно искомых функций. Применительно к многочленам был сделан вывод о том, что при описании класса многочленов n-й степени, удовлетворяющих такому неравенству,

можно, опираясь на конкретный многочлен n-й степени, все возможное разнообразие свести к многочленам $(n-1)$-й степени. Так появились коренные и примыкающие многочлены.

В настоящей работе предлагается способ исследования неравенств (1)–(3), использующий коренные и примыкающие многочлены.

2. О функциях, удовлетворяющих неравенству (1)

Введем следующие понятия.

Определение $\{F\}$. *Функция F принадлежит классу $\{F\} = \{F, [\bar{u}_0, \varphi]\}$, если*

1) $F(\bar{u}_0) = 0$;

2) $\bar{u}_0 < \varphi$;

3) *функция $F(u)$ дважды непрерывно дифференцируема и ее первая производная $F'(u) > 0$ на промежутке $[\bar{u}_0, \varphi]$.*

В классе $\{F, [\bar{u}_0, \varphi]\}$ определим подкласс $\{F_1, [\bar{u}_0, \varphi]\}$.

Определение $\{F_1\}$. *Функция F из класса $\{F, [\bar{u}_0, \varphi]\}$ принадлежит подклассу $\{F_1, [\bar{u}_0, \varphi]\}$, если для этой функции выполняется неравенство (1):*

$$F(\bar{u}_0 + s + t) - F(\bar{u}_0 + s) - F(\bar{u}_0 + t) \geq 0,$$

где s и t принадлежат промежутку $(0, \varphi - \bar{u}_0]$.

Подкласс $\{F_1, [\bar{u}_0, \varphi]\}$ не пуст, так как ему принадлежат линейные функции вида

$$F(u) = A(u - \bar{u}_0), \quad A > 0,$$

для которых выполнение неравенства (1) очевидно:

$$F(\bar{u}_0 + s + t) - F(\bar{u}_0 + s) - F(\bar{u}_0 + t) = A(s + t) - As - At = 0.$$

При проверке неравенства (1) для нелинейных функций удобно пользоваться свойствами функций, принадлежащих подклассу $\{F_1, [\bar{u}_0, \varphi]\}$. Приведем эти свойства.

Свойство $\{F_1\}\_1$. *Подкласс $\{F_1\}$ является собственным подмножеством класса $\{F\}$.*

Пример $\{F_1\}\_1$. Функция

$$F(u) = \begin{cases} 2 + 3u + u^2, & \text{если} \quad u \leq 0 \\ 2 + 3u + u^2 - 3u^3, & \text{если} \quad u \geq 0 \end{cases}$$

принадлежит классу $\{F, [-1; 0, 5]\}$, но не принадлежит подклассу $\{F_1, [-1; 0, 5]\}$.

Свойство $\{F_1\}\_2$. *Если функция F принадлежит подклассу $\{F_1, [\bar{u}_0, \varphi]\}$, то для любого $u \in (\bar{u}_0, \varphi]$ производная $F'(u) > F'(\bar{u}_0)$.*

В частности, из свойства $\{F_1\}\_2$ следует, что график функции $F(u)$ на промежутке $[\bar{u}_0, \varphi]$ располагается выше касательной, проведенной в точке с абсциссой $u = \bar{u}_0$.

Пример $\{F_1\}\_2$. Выполнение неравенства $F'(u) \geq F'(\bar{u}_0)$ на промежутке $[\bar{u}_0, \varphi]$ не является достаточным условием принадлежности функции класса $\{F\}$ подклассу $\{F_1\}$. Примером является функция из примера $\{F_1\}\_1$.

Свойство $\{F_1\}\_3$. *Если функция F принадлежит подклассу $\{F_1, [\bar{u}_0, \varphi]\}$, то существует число u_1 такое, что на промежутке $u \in [\bar{u}_0, u_1]$ вторая производная $F''(u) \geq 0$.*

Пример $\{F_1\}\_3$. Положительность второй производной на промежутке $[\bar{u}_0, u_1]$, где $u_1 < \varphi$, не является достаточным условием принадлежности функции F подклассу $\{F_1, [\bar{u}_0, \varphi]\}$. Так функция из примера $\{F_1\}\_1$ принадлежит классу $\{F, [-1; 0.5]\}$, имеет положительную вторую производную на промежутке $[-1, 0]$, но не принадлежит подклассу $\{F_1, [-1; 0.5]\}$.

Свойство $\{F_1\}_-4$. *Если функция F принадлежит классу $\{F,[\bar u_0,\varphi]\}$ и $F''(u)\ge 0$ на промежутке $u\in[\bar u_0,u_1]$, где u_1 – некоторое число, большее, чем $\bar u_0$, то функция F принадлежит подклассу $\{F_1,[\bar u_0,\frac{\bar u_0+u_1}{2}]\}$.*

В частности, если функция F принадлежит классу $\{F,[\bar u_0,\varphi]\}$ и $F''(u)\ge 0$ на промежутке $[\bar u_0,\bar u_0+2(\varphi-\bar u_0)]$, то эта функция принадлежит подклассу $\{F_1,[\bar u_0,\varphi]\}$.

Пример $\{F_1\}_-4$. Принадлежность функции F подклассу $\{F_1,[\bar u_0,\varphi]\}$ не является достаточным условием положительности второй производной $F''(u)$ на всем промежутке $[\bar u_0,\varphi]$. Так функция

$$F(u)=\begin{cases} -u^3+3u^2+u, & \text{если} \quad u\in[0;1] \\ \frac{1}{6}u^4-\frac{4}{3}u^3+3u^2+\frac{4}{3}u-\frac{1}{6}, & \text{если} \quad u\in[1;9/4] \end{cases}$$

принадлежит подклассу $\{F_1,[0;9/4]\}$, дважды непрерывно дифференцируема на промежутке $[0;9/4]$, а ее вторая производная

$$F''(u):\begin{cases} >0, & \text{если} \quad u\in[0;1) \\ =0, & \text{если} \quad u=1 \\ <0, & \text{если} \quad u\in(1;9/4] \end{cases}.$$

3. О функциях, удовлетворяющих неравенству (2)

Будем считать, что функции F принадлежат классу $\{F\}$. При φ, достаточно близком к $\bar u_0$, левая часть неравенства (2) является положительной величиной. При удалении φ от $\bar u_0$ это неравенство может оказаться неверным для данной функции.

Определение $\{F_2\}$. *Функция $F(u)$ из класса $\{F,[\bar u_0,\varphi]\}$ принадлежит подклассу $\{F_2,[\bar u_0,\varphi]\}$, если для этой функции выполняется неравенство (2):*

$$F\left(\bar u_0+s+t-\frac{st}{\varphi-\bar u_0}\right)-\left(1-\frac{s}{\varphi-\bar u_0}\right)F(\bar u_0+t)-\left(1-\frac{t}{\varphi-\bar u_0}\right)F(\bar u_0+s)\ge 0,$$

где s и t принадлежат промежутку $(0,\varphi-\bar u_0]$.

Подкласс $\{F_2,[\bar u_0,\varphi]\}$ не пуст, так как ему принадлежат линейные функции вида

$$F(u)=A(u-\bar u_0),\quad A>0,$$

для которых выполнение неравенства (2) очевидно:

$$F\left(\bar u_0+s+t-\frac{st}{\varphi-\bar u_0}\right)-\left(1-\frac{s}{\varphi-\bar u_0}\right)F(\bar u_0+t)-\left(1-\frac{t}{\varphi-\bar u_0}\right)F(\bar u_0+s)=$$

$$=A\left(s+t-\frac{st}{\varphi-\bar u_0}\right)-\left(1-\frac{s}{\varphi-\bar u_0}\right)At-\left(1-\frac{t}{\varphi-\bar u_0}\right)As=\frac{Ast}{\varphi-\bar u_0}\ge 0.$$

При проверке неравенства (2) для нелинейных функций также удобно пользоваться свойствами функций, принадлежащих подклассу $\{F_2,[\bar u_0,\varphi]\}$. Однако, проверку неравенства (2) можно упростить, если входящие в него выражения преобразовать к следующему виду:

$$\bar u_0+s+t-\frac{st}{\varphi-\bar u_0}=\varphi-(\varphi-\bar u_0)\left(1-\frac{s}{\varphi-\bar u_0}\right)\left(1-\frac{t}{\varphi-\bar u_0}\right),$$

$$\bar u_0+s=\varphi-(\varphi-\bar u_0)\left(1-\frac{s}{\varphi-\bar u_0}\right),$$

$$\bar u_0+t=\varphi-(\varphi-\bar u_0)\left(1-\frac{t}{\varphi-\bar u_0}\right).$$

Множеством значений всех трех величин является промежуток $(\bar{u}_0, \varphi]$, на котором производные $F'(u)$ должны быть положительными.

Рассмотрим функцию

$$g(x) = F\left(\varphi - (\varphi - \bar{u}_0)x\right), \quad 0 \leq x \leq 1, \tag{4}$$

относительно которой неравенство (2) примет более простой вид

$$g(xy) - xg(y) - yg(x) \geqslant 0, \quad x, y \in [0, 1), \tag{5}$$

где

$$x = 1 - \frac{s}{\varphi - \bar{u}_0}, \quad y = 1 - \frac{t}{\varphi - \bar{u}_0}. \tag{6}$$

Для $xy \neq 0$ неравенство (6) имеет вид

$$\frac{g(x)}{x} + \frac{g(y)}{y} \leqslant \frac{g(xy)}{xy},$$

допускающий геометрическое толкование: если рассмотреть радиус-вектор точки $(x,\, g(x))$ графика функции $g(x)$, то отношение $g(x)/x$ является тангенсом угла наклона радиус-вектора к положительному направлению оси Ox.

График функции $y = g(x)$ получается из графика функции $v = F(u)$ в результате следующих преобразований в системе координат Ouv.

1) Сначала из графика функции $v = F(u)$ симметрией относительно оси ординат Ov получается график функции $v = F(-u)$.

2) Далее из графика функции $v = F(-u)$ растяжением в $(\varphi - \bar{u}_0)$ раз вдоль оси ординат Ov получается график функции $v = F(-(\varphi - \bar{u}_0)u)$.

3) Затем из графика функции $v = F(-(\varphi - \bar{u}_0)u)$ параллельным переносом вдоль оси абсцисс Ou на φ единиц вправо получается график функции $v = F(\varphi - (\varphi - \bar{u}_0)u)$.

4) Переобозначаем оси координат: u – на x, v – на y, и получаем график функции

$$y = g(x) = F(\varphi - (\varphi - \bar{u}_0)x).$$

В связи с такой геометрией положительность производной $F'(u)$ на промежутке $[\bar{u}_0,\, \varphi]$ влечет отрицательность производной $g'(x)$ на промежутке $[0,\, 1]$. Характер выпуклости функции $g(x)$ на промежутке $[0,\, 1]$ оказывается таким же, как у функции $F(u)$ на промежутке $[\bar{u}_0,\, \varphi]$.

Точка u из области определения функции $F(u)$ переходит в точку x области определения функции $g(x)$ по правилу

$$x = \frac{\varphi - u}{\varphi - \bar{u}_0}. \tag{7}$$

Обратный переход от функции $g(x)$ к функции $F(u)$ происходит по формуле

$$F(u) = g\left(\frac{\varphi - u}{\varphi - \bar{u}_0}\right). \tag{8}$$

Переход от функций $F(u)$ к функциям $g(x)$ позволяет трансформировать класс $\{F\}$ и подкласс $\{F_2\}$ соответственно в класс $\{G\}$ и подкласс $\{G_2\}$.

Определение $\{G\}$. *Функция $g(x)$ принадлежит классу $\{G\}$, если*

1) *значение $g(1) = 0$;*

2) *функция $g(x)$ дважды непрерывно дифференцируема и ее первая производная $g'(x) < 0$ на промежутке $[0, 1]$.*

Определение $\{G_2\}$. *Функция $g(x)$ из класса $\{G\}$ принадлежит подклассу $\{G_2\}$, если для этой функции выполняется неравенство (5).*

Приведем свойства функций из подклассов $\{G_2\}$ и $\{F_2\}$.

Свойство $\{G_2\}\_1$. *Если $g(x)$ – функция класса $\{G\}$ и ее вторая производная $g''(x) \geqslant 0$ для $x \in [0,\,1]$, то $g(x)$ принадлежит подклассу $\{G_2\}$.*

Свойство $\{F_2\}\_1$. *Если $F(u)$ – функция класса $\{F\}$ и ее вторая производная $F''(u) \geqslant 0$ для $u \in [\bar{u}_0, \varphi]$, то $F(u)$ принадлежит подклассу $\{F_2\}$.*

Принадлежность функции подклассу $\{F_2\}$ не гарантирует положительности второй производной на каком-либо промежутке. Более того, подклассу $\{F_2\}$ принадлежат функции, вторая производная которых всюду отрицательна, например, квадратичные функции с отрицательной второй производной (см. [1]).

Свойство $\{G_2\}\_2$. *Подкласс $\{G_2\}$ является собственным подмножеством класса $\{G\}$.*

Например, кубические функции вида

$$g(x) = F\left(\varphi - (\varphi - \bar{u}_0)x\right) = \left(\varphi - (\varphi - \bar{u}_0)x\right)^3 - \bar{u}_0^3, \quad \bar{u}_0 < 0,$$

при условии, что $\varphi > \bar{u}_0/2$, принадлежат классу $\{G\}$, но не принадлежат подклассу $\{G_2\}$.

Свойство $\{F_2\}\_2$. *Подкласс $\{F_2\}$ является собственным подмножеством класса $\{F\}$.*

Например, кубические функции вида

$$F(u) = u^3 - \bar{u}_0^3, \quad \bar{u}_0 < 0,$$

при условии, что $\varphi > \bar{u}_0/2$, принадлежат классу $\{F, [\bar{u}_0, \varphi]\}$, но не принадлежат подклассу $\{F_2, [\bar{u}_0, \varphi]\}$.

4. Сравнение подклассов $\{F_1\}$ и $\{F_2\}$

Свойство $\{F\}\_1$. *Пересечение подклассов $\{F_1, [\bar{u}_0, \varphi]\}$ и $\{F_2, [\bar{u}_0, \varphi]\}$ не пусто.*

Например, обоим подклассам принадлежат функции с положительной на промежутке $[\bar{u}_0, \bar{u}_0 + 2(\varphi - \bar{u}_0)]$ второй производной.

Свойство $\{F\}\_2$. *Подкласс $\{F_2\}$ не включается в $\{F_1\}$.*

Например, подклассу $\{F_2\}$ принадлежат квадратичные функции вида

$$F(u) = -A(u - \bar{u}_0)(u - \beta), \quad A > 0, \quad \bar{u}_0 < \varphi < \frac{\bar{u}_0 + \beta}{2} < \beta,$$

но такие функции не принадлежат подклассу $\{F_1\}$.

Замечание. Вопрос о невключении подкласса $\{F_1\}$ в $\{F_2\}$ остается открытым.

5. О кубических многочленах, удовлетворяющих неравенству (2)

Важными представителями нелинейных функций, для которых стоит задача соответствия неравенствам (1)–(3), являются многочлены. Квадратичные функции класса $\{F\}$ полностью рассмотрены в работе [1]. А вот для кубических функций

$$F(u) = \pm A(u - \bar{u}_0)\left(u^2 + pu + q\right), \quad A > 0,$$

несмотря на значительные усилия (см. [2]–[5]), остаются "белые пятна".

В случае отрицательного коэффициента единственно возможным является случай

$$F(u) = -A(u - \bar{u}_0)(u - \alpha)(u - \beta), \tag{9a}$$

где

$$A > 0, \quad \beta < \bar{u}_0 < \varphi < \frac{\alpha + \bar{u}_0}{2} < \alpha. \tag{9b}$$

Для таких функций нелинейный метод угловых пограничных функций ранее не применялся из-за возникавших технических трудностей.

Соответствующие функции $g(x)$ имеют вид

$$g(x) = F\left(\varphi - (\varphi - \bar{u}_0)x\right) =$$

$$= -A(\varphi - (\varphi - \bar{u}_0)x - \bar{u}_0)(\varphi - (\varphi - \bar{u}_0)x - \alpha)(\varphi - (\varphi - \bar{u}_0)x - \beta) =$$

$$= A(\varphi - \bar{u}_0)^3(x-1)\left(x - \frac{\varphi - \alpha}{\varphi - \bar{u}_0}\right)\left(x - \frac{\varphi - \beta}{\varphi - \bar{u}_0}\right),$$

то есть

$$g(x) = A(\varphi - \bar{u}_0)^3(x-1)(x-a)(x-b), \tag{10a}$$

где

$$A > 0, \quad a = \frac{\varphi - \beta}{\varphi - \bar{u}_0}, \quad b = \frac{\varphi - \alpha}{\varphi - \bar{u}_0}, \quad a < \frac{a+1}{2} < 0 < 1 < b. \tag{10b}$$

Можно доказать следующее утверждение.

Предложение 1. *Многочлен $g(x)$ класса $\{G\}$ вида (10) принадлежит подклассу $\{G_2\}$ тогда и только тогда, когда точка перегиба этого многочлена не принадлежит промежутку* $(0; 1/3)$.

Переформулируем предложение 1 для функций класса $\{F, [\bar{u}_0, \varphi]\}$ с учетом того, что точка перегиба λ функции $g(x)$ переходит в точку перегиба γ функции $F(u)$ по формуле

$$\gamma = \varphi - \lambda(\varphi - \bar{u}_0). \tag{11}$$

Значению $\lambda = 0$ соответствует значение $\gamma = \varphi$, а значению $\lambda = 1/3$ – значение $\gamma = \varphi - (\varphi - \bar{u}_0)/3$.

Предложение 2. *Многочлен $F(u)$ класса $\{F, [\bar{u}_0, \varphi]\}$ вида (9) принадлежит подклассу $\{F_2, [\bar{u}_0, \varphi]\}$ тогда и только тогда, когда точка перегиба этого многочлена не принадлежит промежутку* $(\varphi - (\varphi - \bar{u}_0)/3;\ \varphi)$.

Далее будем рассматривать кубические многочлены класса $\{F, [\bar{u}_0, \varphi]\}$ вида

$$F(u) = A(u - \bar{u}_0)\left(u^2 + pu + q\right), \quad A > 0. \tag{12}$$

Соответствующие многочлены $g(x)$ класса $\{G\}$ имеют вид

$$g(x) = F\left(\varphi - (\varphi - \bar{u}_0)x\right) =$$

$$= A(\varphi - (\varphi - \bar{u}_0)x - \bar{u}_0)\left[(\varphi - (\varphi - \bar{u}_0)x)^2 + p(\varphi - (\varphi - \bar{u}_0)x) + q\right] =$$

$$= -A(\varphi - \bar{u}_0)^3(x-1)\left[x^2 - \frac{2\varphi + p}{\varphi - \bar{u}_0}x + \frac{q + p\varphi + \varphi^2}{(\varphi - \bar{u}_0)^2}\right],$$

то есть

$$g(x) = -A(\varphi - \bar{u}_0)^3(x-1)(x^2 + p_1 x + q_1),$$

где

$$p_1 = -\frac{2\varphi + p}{\varphi - \bar{u}_0}, \quad q_1 = \frac{\varphi^2 + p\varphi + q}{(\varphi - \bar{u}_0)^2}.$$

Здесь $\varphi^2 + p\varphi + q > 0$, так как в противном случае $F(\varphi) = A(\varphi - \bar{u}_0)(\varphi^2 + p\varphi + q) \le 0$. Поэтому $q_1 > 0$.

Классификацию многочленов $g(x)$ проведем по взаимному расположению корня $x = 1$ и точки перегиба. Многочленам $g(x)$ с точкой перегиба, расположенной правее корня $x = 1$,

соответствуют многочлены $F(u)$ с точкой перегиба, расположенной левее корня $u = \bar{u}_0$. Такой случай исследован в работах [2], [3].

Интерес представляют многочлены $F(u)$, у которых точка перегиба расположена правее корня $u = \bar{u}_0$. У соответствующих многочленов $g(x)$ точка перегиба λ будет находиться левее корня $x = 1$:

$$\lambda = \frac{1 - p_1}{3} < 1,$$

откуда получаем $p_1 > -2$. Таким образом, рассматриваем многочлены класса $\{G\}$ вида

$$g(x) = -A(\varphi - \bar{u}_0)^3(x-1)(x^2 + p_1 x + q_1), \quad A > 0, \quad p_1 > -2, \quad q_1 > 0. \tag{13}$$

Такие многочлены имеют один из следующих трех видов.

1) Если дискриминант $D = p_1^2 - 4q_1 > 0$, то

$$g(x) = -A(\varphi - \bar{u}_0)^3(x-1)(x-a)(x-b), \tag{14a}$$

где

$$a = \frac{-p_1 - \sqrt{D}}{2}, \quad b = \frac{-p_1 + \sqrt{D}}{2}, \quad a < b < \frac{b+1}{2} < 0, \quad . \tag{14b}$$

2) Если дискриминант $D = p_1^2 - 4q_1 = 0$, то

$$g(x) = -A(\varphi - \bar{u}_0)^3(x-1)(x-a)^2, \tag{15a}$$

где

$$a = -\frac{p_1}{2}, \quad a < \frac{a+1}{2} < 0. \tag{15b}$$

3) Если дискриминант $D = p_1^2 - 4q_1 < 0$, то

$$g(x) = -A(\varphi - \bar{u}_0)^3(x-1)(x^2 + p_1 x + q_1), \tag{16a}$$

где

$$\lambda = \frac{1 - p_1}{3} < 0, \quad g'(0) = -A(\varphi - \bar{u}_0)^3(q_1 - p_1) < 0. \tag{16b}$$

Предложение 3. *Многочлены класса $\{G\}$ вида (13) принадлежат подклассу $\{G_2\}$ тогда и только тогда, когда*

$$q_1 - p_1 \geq 3. \tag{17}$$

Переформулируем предложение 3 для многочленов $F(u)$ вида (12), у которых точка перегиба γ расположена правее корня $u = \bar{u}_0$:

$$\gamma = \frac{\bar{u}_0 - p}{3} > \bar{u}_0.$$

Условия (14)–(16) зависят от знака дискриминанта

$$D = p_1^2 - 4q_1 = \left(\frac{2\varphi + p}{\varphi - \bar{u}_0}\right)^2 - 4\,\frac{\varphi^2 + p\varphi + q}{(\varphi - \bar{u}_0)^2} = \frac{p^2 - 4q}{(\varphi - \bar{u}_0)^2},$$

поэтому для функций $F(u)$ получаются следующие три вида, соответствующие условиям (14)–(16).

1) Если $p^2 - 4q > 0$, то

$$g(x) = -A(\varphi - \bar{u}_0)^3(x-1)(x-a)(x-b),$$

$$F(u) = g\left(\frac{\varphi-u}{\varphi-\bar{u}_0}\right) = -A(\varphi-\bar{u}_0)^3\left(\frac{\varphi-u}{\varphi-\bar{u}_0}-1\right)\left(\frac{\varphi-u}{\varphi-\bar{u}_0}-a\right)\left(\frac{\varphi-u}{\varphi-\bar{u}_0}-b\right) =$$
$$= A(u-\bar{u}_0)(u-\alpha)(u-\beta),$$

где

$$\alpha = \varphi - b(\varphi-\bar{u}_0), \quad \beta = \varphi - a(\varphi-\bar{u}_0).$$

Таким образом, виду (14) соответствует

$$F(u) = A(u-\bar{u}_0)(u-\alpha)(u-\beta), \quad A>0, \tag{18a}$$

где

$$\bar{u}_0 < \varphi < \frac{\bar{u}_0+\alpha}{2} < \alpha < \beta. \tag{18b}$$

2) Если $p^2-4q=0$, то

$$g(x) = -A(\varphi-\bar{u}_0)^3(x-1)(x-a)^2,$$

$$F(u) = -A(\varphi-\bar{u}_0)^3\left(\frac{\varphi-u}{\varphi-\bar{u}_0}-1\right)\left(\frac{\varphi-u}{\varphi-\bar{u}_0}-a\right)^2 = A(u-\bar{u}_0)(u-\alpha)^2,$$

где

$$\alpha = \varphi - a(\varphi-\bar{u}_0).$$

Таким образом, виду (15) соответствует

$$F(u) = A(u-\bar{u}_0)(u-\alpha)^2, \quad A>0, \tag{19a}$$

где

$$\bar{u}_0 < \varphi < \frac{\bar{u}_0+\alpha}{2} < \alpha. \tag{19b}$$

3) Если $p^2-4q<0$, то

$$g(x) = -A(\varphi-\bar{u}_0)^3(x-1)\left(x^2+p_1x+q_1\right),$$

$$F(u) = -A(\varphi-\bar{u}_0)^3\left(\frac{\varphi-u}{\varphi-\bar{u}_0}-1\right)\left(\left(\frac{\varphi-u}{\varphi-\bar{u}_0}\right)^2+p_1\left(\frac{\varphi-u}{\varphi-\bar{u}_0}\right)+q_1\right) =$$
$$= A(u-\bar{u}_0)\left(u^2+pu+q\right),$$

где

$$p = (\varphi-u)p_1 - 2\varphi, \quad q = q_1(\varphi-\bar{u}_0)^2 - p_1\varphi(\varphi-\bar{u}_0)+\varphi^2.$$

Таким образом, виду (16) соответствует

$$F(u) = A(u-\bar{u}_0)\left(u^2+pu+q\right), \quad A>0, \tag{20a}$$

с условиями, что точка перегиба γ функции $F(u)$ должна располагаться правее значения φ и значение производной $F'(\varphi)$ должно быть положительным:

$$\gamma = \frac{\bar{u}_0-p}{3} > \varphi, \quad F'(\varphi) = A(3\varphi^2+2(p-\bar{u}_0)\varphi+q-\bar{u}_0p) > 0. \tag{20b}$$

Теперь можно переформулировать предложение 3, если учесть, что условие (17) переходит в условие

$$q_1-p_1 = \frac{q+p\varphi+\varphi^2}{(\varphi-\bar{u}_0)^2} + \frac{2\varphi+p}{\varphi-\bar{u}_0} = \frac{q+p\varphi+\varphi^2+(2\varphi+p)(\varphi-\bar{u}_0)}{(\varphi-\bar{u}_0)^2} \geq 3,$$

которое эквивалентно неравенству

$$q + p\varphi + \varphi^2 + (2\varphi + p)(\varphi - \bar{u}_0) \geq 3(\varphi - \bar{u}_0)^2,$$

или

$$2(p + 2\bar{u}_0)(\varphi - \bar{u}_0) + \bar{u}_0^2 + p\bar{u}_0 + q \geq 0.$$

Так как

$$\gamma = \frac{\bar{u}_0 - p}{3} > \bar{u}_0,$$

то $2\bar{u}_0 + p < 0$ и условию (17) соответствует условие

$$\varphi - \bar{u}_0 \leq \frac{\bar{u}_0^2 + p\bar{u}_0 + q}{-2(2\bar{u}_0 + p)}. \tag{21}$$

Здесь $\bar{u}_0^2 + p\bar{u}_0 + q > 0$, так как в противном случае значения функции

$$F(u) = A(u - \bar{u}_0)\left(u^2 + pu + q\right), \quad A > 0,$$

при $u > \bar{u}_0$ и достаточно близких к $\bar{u}_0$ будут отрицательными.

Предложение 4. *Многочлены класса* $\{F, [\bar{u}_0, \varphi]\}$

$$F(u) = A(u - \bar{u}_0)\left(u^2 + pu + q\right), \quad A > 0,$$

вида (18)–(20) принадлежат подклассу $\{F_2, [\bar{u}_0, \varphi]\}$ *тогда и только тогда, когда выполняется условие (21).*

6. О функциях, удовлетворяющих неравенству (3)

Рассмотрим неравенство (3):

$$F\left(\bar{u}_0 + s + t - 2\sqrt{st}\right) - \frac{\sqrt{s}}{t\sqrt{t}}\int_0^t F(\bar{u}_0 + u)du - \left(1 - \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{t}}\right)F\left(\bar{u}_0 + t\right) - \left(1 - \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{s}}\right)F\left(\bar{u}_0 + s\right) \leq 0,$$

где s и t принадлежат промежутку $(0, \varphi - \bar{u}_0]$.

Определение $\{F_3\}$. *Функция F из класса $\{F, [\bar{u}_0, \varphi]\}$ принадлежит подклассу $\{F_3, [\bar{u}_0, \varphi]\}$, если для этой функции выполняется неравенство (3).*

Подкласс $\{F_3, [\bar{u}_0, \varphi]\}$ не пуст, так как ему принадлежат линейные функции вида

$$F(u) = A(u - \bar{u}_0), \quad A > 0,$$

для которых выполнение неравенства (3) очевидно:

$$F\left(\bar{u}_0 + s + t - 2\sqrt{st}\right) - \frac{\sqrt{s}}{t\sqrt{t}}\int_0^t F(\bar{u}_0 + u)du - \left(1 - \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{t}}\right)F\left(\bar{u}_0 + t\right) - \left(1 - \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{s}}\right)F\left(\bar{u}_0 + s\right) =$$

$$= A\left(s + t - 2\sqrt{st}\right) - \frac{\sqrt{s}}{t\sqrt{t}}\int_0^t Audu - A\left(1 - \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{t}}\right)t - A\left(1 - \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{s}}\right)s = -\frac{1}{2}A\sqrt{st} \leq 0.$$

7. О коренных и примыкающих функциях

Решения неравенств (1)–(3) обладают следующим общим свойством.

Свойство 1. *Класс* $\{F\}$ *является линейным пространством, а подклассы* $\{F_1\}$, $\{F_2\}$ *и* $\{F_3\}$ *– его подпространства.*

Такое же свойство справедливо и для функций класса $\{G\}$: *класс* $\{G\}$ *является линейным пространством, а подкласс* $\{G_2\}$ *– его подпространство.*

Свойство 1 лежит в основе метода коренных и примыкающих функций. Метод позволяет строить решение каждого неравенства типа (1)–(3) в виде суммы $F_1 + F_2$, где функции F_1 и F_2 принадлежат одному и тому же подклассу, но одна из них значительно проще другой. Например, если нужно найти многочлены n-й степени, удовлетворяющие неравенству (1), то достаточно выбрать конкретный многочлен n-й степени, удовлетворяющий неравенству (1). Такой многочлен назовем *коренным*. Широкий класс многочленов n-й степени из подкласса $\{F_1\}$ будет определяться через многообразие многочленов из подкласса $\{F_1\}$ меньшей степени. Такме многочлены назовем *примыкающими*.

Предложение 5. *Многочлены вида*

$$F(u) = (u - \bar{u}_0)(u - \alpha), \qquad \textit{где} \qquad \alpha \le \bar{u}_0 - 1,$$

принадлежат подклассу $\{F_1\}$.

Доказательство. Очевидно, что рассматриваемые многочлены принадлежат классу $\{F\}$. Будут ли они принадлежать подклассу $\{F_1\}$?

Фиксируем число $\beta \in (\bar{u}_0 - 1, \bar{u}_0)$ и коренной многочлен 2-й степени

$$F_1(u) = (u - \bar{u}_0)(u - \beta).$$

Так как вторая производная $F_1''(u) > 0$ на промежутке $[\bar{u}_0, \bar{u}_0 + 2(\varphi - \bar{u}_0)]$, то по свойству 4.1 функция $F_1(u)$ принадлежит подклассу $\{F_1, [\bar{u}_0, \varphi]\}$.

Примыкающими будут многочлены 1-й степени

$$F_2(u) = (\beta - \alpha)(u - \bar{u}_0).$$

Такие многочлены принадлежат подклассу $\{F_1\}$ при $\beta - \alpha > 0$.

По свойству 1 сумма

$$F_1(u) + F_2(u) = F(u)$$

будет многочленом подкласса $\{F_1\}$ при любых $\alpha \le \bar{u}_0 - 1$. *Предложение 5 доказано.*

Предложение 6. *Многочлены вида*

$$F(u) = (u - \bar{u}_0)\left(u^2 + \bar{u}_0 u + q\right), \quad \bar{u}_0 > 0, \quad q > \bar{u}_0^2,$$

принадлежат подклассу $\{F_2, [\bar{u}_0, \varphi]\}$.

Доказательство. Имеем

$$F(u) = (u - \bar{u}_0)\left[\left(u^2 + \bar{u}_0 u + \bar{u}_0^2\right) + (q - \bar{u}_0^2)\right] = \left(u^3 - \bar{u}_0^3\right) + (q - \bar{u}_0^2)(u - \bar{u}_0).$$

Фиксируем коренной многочлен 3-й степени

$$F_1(u) = u^3 - \bar{u}_0^3, \quad \bar{u}_0 > 0.$$

Вторая производная $F_1''(u) > 0$ на промежутке $[\bar{u}_0, \varphi]$, поэтому по свойству 2.2 функция $F_1(u)$ принадлежит подклассу $\{F_2, [\bar{u}_0, \varphi]\}$.

Примыкающими будут многочлены 1-й степени

$$F_2(u) = (q - \bar{u}_0^2)(u - \bar{u}_0).$$

Они принадлежат подклассу $\{F_2, [\bar{u}_0, \varphi]\}$ при условии $q > \bar{u}_0^2$.

По свойству 1 сумма

$$F_1(u) + F_2(u) = F(u)$$

будет многочленом подкласса $\{F_2, [\bar{u}_0, \varphi]\}$ при условии $q > \bar{u}_0^2$. *Предложение 6 доказано.*

Предложение 7. *Многочлены вида*

$$F(u) = (u - \bar{u}_0)\left(u^2 + \bar{u}_0 u + q\right), \quad \bar{u}_0 > 0, \quad q > \bar{u}_0^2,$$

принадлежат подклассу $\{F_2, [\bar{u}_0, \varphi]\}$.

Доказательство. Как и выше, имеем

$$F(u) = \left(u^3 - \bar{u}_0^3\right) + (q - \bar{u}_0^2)(u - \bar{u}_0).$$

Фиксируем коренной многочлен 3-й степени

$$F_1(u) = u^3 - \bar{u}_0^3, \quad \bar{u}_0 > 0.$$

Докажем, что он принадлежит подклассу $\{F_3, [\bar{u}_0, \varphi]\}$. Проверка неравенства (3) значительно упрощается, если в нем отбросить последнее слагаемое и рассмотреть более сильное неравенство

$$F_1\left(\bar{u}_0 + s + t - 2\sqrt{st}\right) - \left(1 - \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{t}}\right) F_1(\bar{u}_0 + t) - \left(1 - \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{s}}\right) F_1(\bar{u}_0 + s) \le 0,$$

или

$$-\sqrt{st}\left(\frac{1}{s}F_1(\bar{u}_0 + s) + \frac{1}{t}F_1(\bar{u}_0 + t)\right) - F_1\left(\bar{u}_0 + s + t - 2\sqrt{st}\right) + F_1(\bar{u}_0 + s) + F_1(\bar{u}_0 + t) \ge 0. \quad (21)$$

Левая часть полученного неравенства является функцией, симметричной относительно s и t. Ее можно привести к переменным

$$u = \sqrt{st} \in (0, \varphi - \bar{u}_0], \quad v = \frac{s+t}{2} \in (0, \varphi - \bar{u}_0]. \quad (22)$$

Имеем

$$F_1(\bar{u}_0 + u) = (\bar{u}_0 + u)^3 - \bar{u}_0^3 = u\left[(\bar{u}_0 + u)^2 + \bar{u}_0(\bar{u}_0 + u) + \bar{u}_0^2\right] = u\left(u^2 + 3\bar{u}_0 u + 3\bar{u}_0^2\right),$$

$$F_1(\bar{u}_0 + s) + F_1(\bar{u}_0 + t) = \left(s^3 + 3\bar{u}_0 s^2 + 3\bar{u}_0^2 s\right) + \left(t^3 + 3\bar{u}_0 t^2 + 3\bar{u}_0^2 t\right) =$$

$$= (s+t)^3 - 3st(s+t) + 3\bar{u}_0(s+t)^2 - 6\bar{u}_0 st + 3\bar{u}_0^2(s+t) = 8v^3 - 6u^2 v + 12\bar{u}_0 v^2 - 6\bar{u}_0 u^2 + 6\bar{u}_0^2 v,$$

$$\frac{1}{t}F(\bar{u}_0 + t) + \frac{1}{s}F(\bar{u}_0 + s) = \left(t^2 + 3\bar{u}_0 t + 3\bar{u}_0^2\right) + \left(s^2 + 3\bar{u}_0 s + 3\bar{u}_0^2\right) =$$

$$= (s+t)^2 - 2st + 3\bar{u}_0(s+t) + 6\bar{u}_0^2 = 4v^2 - 2u^2 + 6\bar{u}_0 v + 6\bar{u}_0^2,$$

$$F\left(\bar{u}_0 + s + t - 2\sqrt{st}\right) = F(\bar{u}_0 + 2v - 2u).$$

В результате замены (22) неравенство (21) примет вид

$$-u(4v^2 - 2u^2 + 6\bar{u}_0 v + 6\bar{u}_0^2) - F(\bar{u}_0 + 2v - 2u) + 8v^3 - 6u^2 v + 12\bar{u}_0 v^2 - 6\bar{u}_0 u^2 + 6\bar{u}_0^2 v \ge 0,$$

или

$$H := 8v^3 - 6u^2v + 12\bar{u}_0v^2 - 6\bar{u}_0u^2 + 6\bar{u}_0^2v - 4uv^2 + 2u^3 - 6\bar{u}_0uv - 6\bar{u}_0^2u - F(\bar{u}_0 + 2v - 2u) \geq 0. \quad (23)$$

Найдем образ квадрата $G:\ (0, \varphi - \bar{u}_0] \times (0, \varphi - \bar{u}_0]$ при отображении

$$(s,t) \to \left(\sqrt{st}, \frac{s+t}{2}\right) = (u,v).$$

Так как

$$\frac{s+t}{2} \geq \sqrt{st},$$

то точки (s,t) квадрата G отображаются в точки (u,v) сектора $v > u > 0$. Две стороны квадрата G:

$$s = 0,\ t \in (0, \varphi - \bar{u}_0], \quad \text{и} \quad t = 0,\ s \in (0, \varphi - \bar{u}_0],$$

переходят в один и тот же отрезок

$$u = 0, \quad v \in \left(0, \frac{\varphi - \bar{u}_0}{2}\right]. \quad (24)$$

Диагональ квадрата G: $t = s$, $s \in (0, \varphi - \bar{u}_0]$, переходит в отрезок биссектрисы

$$v = u, \quad u \in (0, \varphi - \bar{u}_0]. \quad (25)$$

И, наконец, оставшиеся две стороны квадрата G:

$$s = \varphi - \bar{u}_0,\ t \in (0, \varphi - \bar{u}_0], \quad \text{и} \quad t = \varphi - \bar{u}_0,\ s \in (0, \varphi - \bar{u}_0],$$

переходят в один и тот же кусок параболы

$$v = \frac{u^2}{2(\varphi - \bar{u}_0)} + \frac{\varphi - \bar{u}_0}{2}, \quad u \in (0, \varphi - \bar{u}_0]. \quad (26)$$

Образом квадрата G является криволинейный треугольник Γ, ограниченный линиями (24)–(26) и накрываемый дважды.

Исследуем функцию H, определенную в (23), на экстремумы в треугольнике Γ. Необходимые условия экстремума

$$\frac{\partial H}{\partial u} = -12uv - 12\bar{u}_0u - 4v^2 + 6u^2 - 6\bar{u}_0v - 6\bar{u}_0^2 + 2F'(\bar{u}_0 + 2v - 2u) = 0,$$

$$\frac{\partial H}{\partial v} = 24v^2 - 6u^2 + 24\bar{u}_0v + 6\bar{u}_0^2 - 8uv - 6\bar{u}_0u - 2F'(\bar{u}_0 + 2v - 2u) = 0,$$

приводят к соотношениям

$$F'(\bar{u}_0 + 2v - 2u) = 6uv + 6\bar{u}_0u + 2v^2 - 3u^2 + 3\bar{u}_0v + 3\bar{u}_0^2 = 12v^2 - 3u^2 + 12\bar{u}_0v + 3\bar{u}_0^2 - 4uv - 3\bar{u}_0u,$$

которые выполняются только при $v = u$. Поэтому внутри треугольника Γ точек экстремума нет. Остается проверить выполнение неравенства (23) на границе треугольника Γ.

1) На стороне

$$u = 0, \quad v \in \left(0, \frac{\varphi - \bar{u}_0}{2}\right],$$

значения

$$H(0,v) = 8v^3 + 12\bar{u}_0v^2 + 6\bar{u}_0^2v - F(\bar{u}_0 + 2v) = F(\bar{u}_0 + 2v) - F(\bar{u}_0 + 2v) = 0 \geq 0.$$

2) На стороне

$$v = u,\ u \in (0, \varphi - \bar{u}_0],$$

значения

$$H(u,u) = 8u^3 - 6u^3 + 12\bar{u}_0u^2 - 6\bar{u}_0u^2 + 6\bar{u}_0^2u - 4u^3 + 2u^3 - 6\bar{u}_0u^2 - 6\bar{u}_0^2u - F(\bar{u}_0) = 0 \geq 0.$$

3) Для проверки неравенства (23) на стороне

$$v = \frac{u^2}{2(\varphi - \bar{u}_0)} + \frac{\varphi - \bar{u}_0}{2}, \quad u \in (0, \varphi - \bar{u}_0],$$

удобнее вернуться к переменным (s,t) и рассмотреть одну из двух сторон квадрата G

$$s = \varphi - \bar{u}_0,\ t \in (0, \varphi - \bar{u}_0], \quad \text{или} \quad t = \varphi - \bar{u}_0,\ s \in (0, \varphi - \bar{u}_0].$$

Для определенности рассмотрим сторону $t = \varphi - \bar{u}_0,\ s \in (0, \varphi - \bar{u}_0]$. Запишем неравенство (21) в виде

$$\left(1 - \sqrt{\frac{s}{t}}\right) F(\bar{u}_0 + t) + \left(1 - \sqrt{\frac{t}{s}}\right) F(\bar{u}_0 + s) - F\left((\bar{u}_0 + (\sqrt{t} - \sqrt{s})^2\right) \geq 0.$$

Его нужно доказать при $t = \varphi - \bar{u}_0$:

$$\left(1 - \sqrt{\frac{s}{\varphi - \bar{u}_0}}\right) F(\varphi) + \left(1 - \sqrt{\frac{\varphi - \bar{u}_0}{s}}\right) F(\bar{u}_0 + s) - F\left((\bar{u}_0 + (\sqrt{\varphi - \bar{u}_0} - \sqrt{s})^2\right) \geq 0?$$

Сделаем замену

$$z = \sqrt{\frac{s}{\varphi - \bar{u}_0}}, \quad 0 < z \leq 1. \tag{27}$$

В результате получим неравенство

$$(1-z)F\left(\bar{u}_0 + (\varphi - \bar{u}_0)\right) - \frac{1-z}{z}F\left(\bar{u}_0 + (\varphi - \bar{u}_0)z^2\right) - F\left(\bar{u}_0 + (\varphi - \bar{u}_0)(1-z)^2\right) \geq 0.$$

Здесь

$$F(\bar{u}_0 + u) = u\left(u^2 + 3\bar{u}_0u + 3\bar{u}_0^2\right),$$

или

$$F(\bar{u}_0 + u) = uh(u), \quad \text{где} \quad h(u) = u^2 + 3\bar{u}_0u + 3\bar{u}_0^2.$$

Соответственно нужно доказать неравенство

$$(1-z)(\varphi-\bar{u}_0)h(\varphi-\bar{u}_0) - (1-z)(\varphi-\bar{u}_0)zh\left((\varphi-\bar{u}_0)z^2\right) - (\varphi-\bar{u}_0)(1-z)^2h\left((\varphi-\bar{u}_0)(1-z)^2\right) \geq 0,$$

которое после деления на $(1-z)(\varphi-\bar{u}_0)$ принимает вид

$$h(\varphi-\bar{u}_0) - zh\left((\varphi-\bar{u}_0)z^2\right) - (1-z)h\left((\varphi-\bar{u}_0)(1-z)^2\right) \geq 0. \tag{28}$$

Заменим $\varphi-\bar{u}_0$ на a и будем считать его параметром. Преобразуем левую часть неравенства (28):

$$h(a) - zh\left(az^2\right) - (1-z)h\left(a(1-z)^2\right) = \left(a^2 + 3\bar{u}_0a + 3\bar{u}_0^2\right) - z\left(a^2z^4 + 3\bar{u}_0az^2 + 3\bar{u}_0^2\right) -$$

$$- \left[a^2(1-z)^4 + 3\bar{u}_0a(1-z)^2 + 3\bar{u}_0^2\right] + z\left[a^2(1-z)^4 + 3\bar{u}_0a(1-z)^2 + 3\bar{u}_0^2\right] =$$

$$= a\left[a + 3\bar{u}_0 - a(1-z)^4 - 3\bar{u}_0(1-z)^2 + a(4z^4 - 6z^3 + 4z^2 - z) + 3\bar{u}_0(2z^2 - z)\right].$$

Поэтому неравенство (28) эквивалентно неравенству

$$g := a + 3\bar{u}_0 - a(1-z)^4 - 3\bar{u}_0(1-z)^2 + a\left(4z^4 - 6z^3 + 4z^2 - z\right) + 3\bar{u}_0\left(2z^2 - z\right) \geq 0. \qquad (29)$$

Изучим зависимость значений g от параметра a на промежутке $a > 0$. Производная

$$\frac{\partial g}{\partial a} = 1 - (1-z)^4 + 4z^4 - 6z^3 + 4z^2 - z = z\left(3z^3 - 2z^2 - 2z + 3\right) > 0,$$

поэтому g возрастает на промежутке $a > 0$ и ее значения

$$g(a) > g(0) = 3\bar{u}_0 - 3\bar{u}_0(1-z)^2 + 3\bar{u}_0\left(2z^2 - z\right) = 3\bar{u}_0\left(z^2 + z\right) > 0.$$

Таким образом, неравенство (29) верно. Вместе с ним верно и (23) при $t = \varphi - \bar{u}_0$. Это завершает доказательство неравенства (21), и можно утверждать, что функция $F_1(u)$ принадлежит подклассу $\{F_3, [\bar{u}_0, \varphi]\}$.

Примыкающими будут многочлены 1-й степени

$$F_2(u) = (q - \bar{u}_0^2)(u - \bar{u}_0).$$

Как показано выше, они принадлежат подклассу $\{F_3, [\bar{u}_0, \varphi]\}$ при условии $q > \bar{u}_0^2$. Поэтому сумма

$$F_1(u) + F_2(u) = F(u)$$

будет многочленом подкласса $\{F_3, [\bar{u}_0, \varphi]\}$ при условии $q > \bar{u}_0^2$. *Предложение 7 доказано.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Денисов, И. В. Угловой пограничный слой в краевых задачах для сингулярно возмущенных параболических уравнений с квадратичной нелинейностью // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. – Т.57. - № 2. 2017. - С. 255–274. (English transl.: Denisov I.V. Angular Boundary Layer in Boundary Value Problems for Singularly Perturbed Parabolic Equations with Quadratic Nonlinearity // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2017. Vol. 57. № 2. pp. 253-271.)

2. Денисов, И. В. Угловой пограничный слой в краевых задачах для сингулярно возмущенных параболических уравнений с кубическими нелинейностями // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. – Т.61. №2. 2021. - С. 256–267. (English transl.: Denisov I.V. Corner Boundary Layer in Boundary Value Problems for Singularly Perturbed Parabolic Equations with Cubic Nonlinearities // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2021. Vol. 61. №2. pp. 242–253.)

3. Денисов, А. И., Денисов, И. В. Нелинейный метод угловых пограничных функций для сингулярно возмущенных параболических задач с кубическими нелинейностями // Чебышевский сборник.- 2024.- т. 25.- вып. 1.- С. 25-–40.

4. Денисов, И. В. Угловой пограничный слой в краевых задачах с нелинейностями, имеющими стационарные точки // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. – Т.61. №11. 2021. - С. 1894-1903. (English transl.: Denisov I.V. Corner Boundary Layer in Boundary Value Problems with Nonlinearities Having Stationary Points // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2021. Vol. 61. №11. pp. 1855-1863.)

5. Денисов, А. И., Денисов, И. В. Нелинейный метод угловых пограничных функций в задачах с кубическими нелинейностями // Чебышевский сборник.- 2023.- т. 24.- вып. 1.- С. 27–39.

6. Денисов, И. В. О классах функций, определяемых функциональными неравенствами // Известия Тульского государственного университета. Серия «Математика. Механика. Информатика».- 2000.- т.6.- вып. 1.- С. 79–84.

7. Денисов, И. В. О некоторых классах функций // Чебышевский сборник.- 2009.- т. 10.- вып. 2 (30).– С. 79–108.

8. Денисов, А. И., Денисов, И. В. Опорные барьерные функции для нелинейных параболических задач // Чебышевский сборник.- 2024.- т. 25.- вып. 2.- С. 235–242.

REFERENCES

1. Denisov, I. V., 2017, “Angular Boundary Layer in Boundary Value Problems for Singularly Perturbed Parabolic Equations with Quadratic Nonlinearity”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, Vol. 57. No. 2. pp. 253–271.

2. Denisov, I. V., 2021 “Corner Boundary Layer in Boundary Value Problems for Singularly Perturbed Parabolic Equations with Cubic Nonlinearities”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, Vol. 61. No. 2. pp. 242-–253.

3. Denisov, A. I., Denisov, I. V., 2024, “Nonlinear method of angular boundary functions for singularly perturbed parabolic problems with cubic nonlinearities”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 25, no. 1, pp. 25–40.

4. Denisov, I. V., 2021, “Corner Boundary Layer in Boundary Value Problems with Nonlinearities Having Stationary Points”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, Vol. 61. No. 11. pp. 1855–1863.

5. Denisov, A. I., Denisov, I. V., 2023, “Nonlinear method of angular boundary functions in problems with cubic nonlinearities”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 24, no. 1, pp. 27–39.

6. Denisov, I. V., 2000, “On classes of functions defined by functional inequalities”, *Izvestiya of Tula State University. Series “Mathematics. Mechanics. Computer Science”*, vol. 6. no. 1, pp. 79–84.

7. Denisov, I. V., 2009, “About some classes of functions”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 10, no. 2, pp. 79–108.

8. Denisov, A. I., Denisov, I. V., 2024, “The support barrier functions for nonlinear parabolic problems”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 25, no. 1, pp. 235–242.

Получено: 06.03.2024
Принято в печать: 04.09.2024

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 25. Выпуск 3.

УДК 512.56, 517.982.272 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-86-100

Характеризация дедекиндова и счётно-дедекиндова расширения решёточного линейного пространства непрерывных ограниченных функций посредством порядковых границ

В. К. Захаров, Т. В. Родионов

Захаров Валерий Константинович — доктор физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: zakharov_ valeriy@list.ru
Родионов Тимофей Викторович — кандидат физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: rodionovtv@mail.ru

Аннотация

В 1872 году Р. Дедекиндом была построено множество вещественных чисел $\mathbb{R}$ как некоторое расширение множества рациональных чисел $\mathbb{Q}$ способом взятия счётных порядковых регулярных сечений. Этот способ был обобщён и применён Г. Макнейлом к некоторым упорядоченным математическим системам. В данной статье способ Дедекинда – Макнейла применяется к математической системе C, порождённой семейством $C_b(T, \mathcal{G})$ всех непрерывных ограниченных функций $f\colon T \longrightarrow \mathbb{R}$ на тихоновском топологическом пространстве $(T, \mathcal{G})$.

Рассматривается *дедекиндово расширение* $C \rightarrowtail D(C)$, а также *счётно-дедекиндово расширение* $C \rightarrowtail D^0(C)$, как более близкий аналог классического расширения $\mathbb{Q} \rightarrowtail \mathbb{R}$. Даются функционально-факторные описания указанных расширений через семейства равномерных функций относительно ансамблей подмножеств множества T, обладающих свойством Стоуна и конуль-свойством Стоуна.

Даются характеризации указанных расширений как некоторых пополнений решёточного линейного пространства C, наделённого некоторой *локальной структурой идеального измельчения*.

Функциональное описание и характеризация счётно-дедекиндова расширения $C \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow D^0(C)$ оказываются удивительным образом совпадающим с функциональным описанием и характеризацией риманова расширения $C \rightarrowtail R_\mu$, порождённого фактор-семейством всех функций на тихоновском пространстве $(T, \mathcal{G})$, μ-интегрируемых по Риману относительно положительной ограниченной радоновской меры μ.

Ключевые слова: равномерные функции, латлинеалы, cr_b-пополнение.

Библиография: 17 названий.

Для цитирования:
Захаров, В.К., Родионов, Т.В. Характеризация дедекиндова и счётно-дедекиндова расширений решёточного линейного пространства непрерывных ограниченных функций посредством порядковых границ // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 3, с. 86–100.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 25. No. 3.

UDC 512.56, 517.982.272 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-86-100

Characterization of the Dedekind and countably Dedekind extensions of the lattice linear space of continuous bounded functions by means of order boundaries

V. K. Zakharov, T. V. Rodionov

Zakharov Valeriy Konstantinovich — doctor of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: zakharov_valeriy@list.ru
Rodionov Timofey Victorovich — candidate of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: rodionovtv@mail.ru

Abstract

In 1872 R. Dedekind constructed the set of real numbers $\mathbb{R}$ as a certain extension of the set of rational numbers $\mathbb{Q}$ by taking countable order regular cuts. This method was generalized and applied by G. MacNeille to some ordered mathematical systems. In this article the Dedekind – MacNeille method is applied to the mathematical system C generated by the family $C_b(T,\mathcal{G})$ of all continuous bounded functions $f\colon T \longrightarrow \mathbb{R}$ on the Tikhonov topological space $(T,\mathcal{G})$.

We consider *Dedekind extension* $C \rightarrowtail D(C)$, and also *countably Dedekind extension* $C \rightarrowtail D^0(C)$ as a closer analogue of the classical extension $\mathbb{Q} \rightarrowtail \mathbb{R}$. Functional-factor descriptions of these extensions are given through families of functions uniform with respect to ensembles of subsets of the set T having the Stone property and the Stone cozero property.

Characterizations of these extensions are given as some completions of the lattice linear space C endowed with some *local structure of ideal refinement*.

The functional description and characterization of the countable Dedekind extension $C \rightarrowtail D^0(C)$ turn out to be surprisingly similar with the functional description and characterization of the Riemannian extension $C \rightarrowtail R_\mu$ generated by the factor-family of all functions on the Tikhonov space $(T,\mathcal{G})$ μ-Riemann integrable with respect to a positive bounded Radon measure μ.

Keywords: uniform functions, latlineals, cr_b-completions.

Bibliography: 17 titles.

For citation:
Zakharov, V.K., Rodionov, T.V., 2024, "Characterization of the Dedekind and countably Dedekind extensions of the lattice linear space of continuous bounded functions by means of order boundaries" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 3, pp. 86–100.

1. Введение

Ещё в 1872 году Р. Дедекиндом была построено множество вещественных чисел $\mathbb{R}$ как некоторое расширение множества рациональных чисел $\mathbb{Q}$ способом взятия счётных порядковых сечений. В 1937 году этот способ был обобщён и применён Г. Макнейлом к произвольным упорядоченным множествам и решёткам [1]. Затем способ Дедекинда – Макнейла был распространён на упорядоченные абелевы группы и на решёточные линейные пространства.

Напомним, что *решёточным линейным пространством* (короче *латлинеалом*) называется такая математическая система $(A,\mathbb{R},0,+,\cdot_{\mathbb{R}},\vee,\wedge)$, что:

- $|A, \mathbb{R}, 0, +, \cdot_{\mathbb{R}}|$ является линейным пространством над полем $\mathbb{R}$;
- $|A, \vee, \wedge|$ является решёткой;
- $\forall a, b, c \in A\ (a \vee b + c = (a + c) \vee (b + c)$ и $\forall a, b, c \in A\ (a \wedge b + c = (a + c) \wedge (b + c))$;
- $\forall r \in \mathbb{R}_+\ \forall a, b \in A\ (r(a \vee b) = ra \vee rb$ и $\forall r \in \mathbb{R}_+\ \forall a, b \in A\ (r(a \wedge b) = ra \wedge rb)$.

В латлинеале A вводится *отношение порядка*: $a \leq b$, если $a \wedge b = a$. Если $a \in A$, то $a_+ \equiv a \vee 0$ и $a_- \equiv a \wedge 0$. В латлинеале выполнены равенства $a = a_+ + a_-$ и $|a| \equiv a \vee (-a) = a_+ - a_-$.

Пара подмножеств (P, Q) упорядоченного множества $(A, \leqslant)$ называется *сечением в* A, если $p \leqslant q$ для всех $p \in P$ и $q \in Q$. Сечение (P, Q) называется *сечением Макнейла* или *регулярным*, если $Q = P^u \equiv \{h \in A \mid \forall p \in P\ (h \geqslant p)\}$ и $P = Q^l \equiv \{g \in A \mid \forall q \in Q\ (g \leqslant q)\}$. В [1] было построено *расширение Дедекинда – Макнейла* $w\colon A \rightarrowtail D(A)$, в котором $D(A)$ является упорядоченным множеством всех регулярных сечений упорядоченного множества $(A, \leqslant)$, к которым добавлены множества A^l и A, а $w(a) \equiv (\{a\}^{ul}, \{a\}^u)$ для любого $a \in A$.

Кроме классического расширения $w\colon \mathbb{Q} \rightarrowtail D(\mathbb{Q})$ особый интерес представляет *дедекиндово расширение* $w\colon C \rightarrowtail D(C)$ *семейства* $C \equiv C_b(T, \mathcal{G})$ *всех непрерывных ограниченных функций* $f : T \longrightarrow \mathbb{R}$ на тихоновском (вполне регулярном) топологическом пространстве $(T, \mathcal{G})$ с ансамблем открытых подмножеств $\mathcal{G}$.

Долгое время функциональное описание абстрактного дедекиндова расширения $w\colon C \rightarrowtail D(C)$ через какие-либо функции на T было неизвестно. Краткие изложения этого описания были даны в работе [2] в общем виде, а в работе [3] — через фактор-семейство Z равномерных функций относительно ансамбля $\mathcal{SP}$ подмножеств множества T со свойством Стоуна. Полное изложение этого функционального описания даётся в разделе 2 настоящей статьи.

После нахождения функционального описания $D(C) \approx Z$ возникла *задача характеризации дедекиндова расширения* $u\colon C \rightarrowtail Z$ математической системы C в терминах структур $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$, $+$, $\cdot$, $\cdot_{\mathbb{R}}$, $\vee$, $\wedge$, аналогичная *задаче характеризации классического дедекиндова расширения* $u\colon \mathbb{Q} \rightarrowtail \mathbb{R}$ *математической системы рациональных чисел* $\mathbb{Q}$ в терминах структур 0, 1, $+$, $\cdot$, $\vee$, $\wedge$.

Построение классического дедекиндова расширения $u\colon \mathbb{Q} \rightarrowtail \mathbb{R}$ обладает одной важной особенностью: регулярные сечения (P, Q) в $\mathbb{R}$ являются *счётными*. Поэтому в качестве более близкого аналога расширения $u\colon \mathbb{Q} \rightarrowtail \mathbb{R}$ в разделе 2.3 для семейства C рассматривается *счётно-дедекиндово расширение* $u\colon C \rightarrowtail D^0(C)$ и даётся функциональное описание множества $D^0(C)$ всех счётно-тесных сечений семейства C через фактор-семейство Z^0 равномерных функций относительно ансамбля $\mathcal{SP}^0$ подмножеств множества T с конуль-свойством Стоуна.

Указанные выше структуры для системы C разделяются на две принципиально разные части. Если брать только кольцевые структуры $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$, $+$, $\cdot$, то они связаны дистрибутивным **равенством** $a(b + c) = ab + ac$. Если же брать только структуры решёточного линейного пространства $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$, $+$, $\cdot_{\mathbb{R}}$, $\vee$, $\wedge$, то они связаны лишь дистрибутивным **неравенством** $a \wedge (b + c) \leqslant a \wedge b + a \wedge c$. По этой причине работа с последними структурами является концептуально более сложной, чем с первыми.

Поэтому вначале в работах [5] – [9] была дана характеризация функционально-факторных расширений $u\colon C \rightarrowtail Z$ и $u\colon C \rightarrowtail Z^0$ как некоторых делимых оболочек $u\colon C \rightarrowtail A$ кольца C.

Наличие у решёточных линейных пространств только дистрибутивного неравенства $a \wedge \wedge (b + c) \leqslant a \wedge b + a \wedge c$ вместо дистрибутивного равенства $a(b + c) = ab + ac$ у колец приводит к тому, что кажущийся на первый взгляд параллелизм между свойством *кольцевой делимости*, как хорошего продолжения гомоморфизма $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(D, A)$ для идеала D в A до гомоморфизма $\psi \in \mathrm{Hom}_A(A, A)$, и свойством порядковой полноты, как существования хорошей *зазорной границы* $P \leqslant a \leqslant Q$ для сечения $P \leqslant Q$ в A, на некотором этапе теряется. Поэтому долгое

время не удавалось найти свойство, характеризующее *узость зазора* в сечении $P \leqslant Q$ и позволяющее создать в этом зазоре указанный элемент $a \in A$. Такое свойство было найдено в работе [10] (см. также [11]).

Раздел 3 данной работы посвящён характеризации функционально-факторных расширений $u\colon C \rightarrowtail Z$ и $u\colon C \rightarrowtail Z^0$ как некоторых порядковых пополнений $u\colon C \rightarrowtail A$ решёточного линейного пространства C. Представленная характеризация была анонсирована в [12].

В данной работе систематически используются понятия и обозначения из книг [13] и [14].

2. Функциональное описание дедекиндова расширения семейства непрерывных ограниченных функций. Счётно-дедекиндово расширение

2.1. Функциональное описание дедекиндова расширения

Через $\mathcal{U}$ обозначим подансамбль ансамбля $\mathcal{G}$, состоящий из всех всюду плотных открытых множеств U. Рассмотрим идеальный ансамбль [14, 2.1.4] $\mathcal{R} \equiv \{R \subset T \mid \exists U \in \mathcal{U}\ (R \subset T \setminus U)\}$, состоящий из всех подмножеств нигде не плотных замкнутых множеств. Рассмотрим ансамбль $\mathcal{SP} \equiv \{P \subset T \mid \exists G \in \mathcal{G}\ \exists R \in \mathcal{R}\ (P = G \cup R)\}$ всех множеств из T *со свойством Стоуна*.

Рассмотрим семейство $U(T, \mathcal{SP})$ всех *$\mathcal{SP}$-равномерных функций*, т. е. таких функций, что для любого $n \in \mathbb{N}$ существует конечное покрытие $(S_k \in \mathcal{SP} \mid k \in K)$ множества T, для которого колебание $\omega(f, S_k) \equiv \sup\{|f(t) - f(s)| \mid s, t \in S_k\}$ меньше $1/n$ для любого $k \in K$ [14, 2.4.1]. Фактор-семейство $U(T, \mathcal{SP})/\mathcal{R}$ по идеальному ансамблю $\mathcal{R}$ [14, 2.2.6] обозначим через Z. Определим инъективное отображение $u\colon C \rightarrowtail Z$, полагая $uc \equiv \bar{c} \bmod \mathcal{R}$.

Обозначим через $SC_b^l(T, \mathcal{G})$ и $SC_b^u(T, \mathcal{G})$ подсемейства всех полунепрерывных снизу и, соответственно, сверху функций семейства $F_b(T)$ всех ограниченных вещественнозначных функций $f\colon T \longrightarrow \mathbb{R}$. Имеет место вложение $SC_b^l(T, \mathcal{G}) \cup SC_b^u(T, \mathcal{G}) \subset U(T, \mathcal{SP})$.

Если (P, Q) — сечение в C, то ему можно сопоставить функции $g \equiv \sup P$ и $h \equiv \inf Q$, где супремум и инфимум берутся в упорядоченном множестве $F_b(T)$ относительно поточечного порядка. Легко проверить, что $g \in SC_b^l(T, \mathcal{G})$, $h \in SC_b^u(T, \mathcal{G})$ и $g \leqslant h$.

Теорема 1. *Пусть $(T, \mathcal{G})$ — тихоновское пространство и $C = C_b(T, \mathcal{G})$. Тогда*:

1) *если $(P, Q) \in D(C)$ то для определённых выше функций g и h имеет место равенство $\bar{g} \bmod \mathcal{R} = \bar{h} \bmod \mathcal{R}$ в фактор-множестве Z*;

2) *отображение $v\colon D(C) \longrightarrow Z$, такое что $v(P, Q) \equiv a \equiv \bar{g} \equiv \bar{h}$, является биективным*;

3) *$(v \circ w)c = \bar{c}$ для любой функции $c \in C$.*

Доказательство. Рассмотрим множества $U_n \equiv \{t \in T \mid \exists p \in P \exists q \in Q (q(t) - p(t) > 1/n), n \in \mathbb{N}\}$. Предположим, что $S \equiv T \setminus \operatorname{cl} U_n \neq \varnothing$. Тогда $q(t) - p(t) \geqslant 1/n$ для любых p и q и любого $t \in S$. Так как наше пространство тихоновское, существует такая ненулевая функция $x \in C_+$, что $\operatorname{coz} x \subset S$, $x \leqslant \mathbf{1}/(3n)$ и $S_x \equiv \{t \in S \mid x(t) = 1/(3n)\} \neq \varnothing$.

Рассмотрим функции $\widetilde{q} \equiv q - x$. Ясно, что $\widetilde{q} \geqslant p$ для любой $p \in P$. По условию $\widetilde{q} \in P^u = Q$. Следовательно, для $t \in S_x$ имеем $\widetilde{h}(t) \equiv \inf(\widetilde{q}(t) \mid q \in Q) = \inf(q(t) \mid q \in Q) - x(t) = h(t) - 1/(3n) < h(t)$ (см. лемму 1 в [13, 1.4.5]). С другой стороны, в силу регулярности сечения, из $\widetilde{q} \in P^u = Q$ вытекает $\widetilde{h}(t) \geqslant h(t)$. Из полученного противоречия следует $R = \varnothing$, т. е. $U_n \in \mathcal{U}$.

Если $t \in U_n$, то $h(t) - g(t) \leqslant q(t) - p(t) < 1/n$. Значит, $R_n \equiv \{t \in T \mid h(t) - g(t) \geqslant 1/n\} = T \setminus U_n \in \mathcal{R}$ влечёт $R_n \in \mathcal{R}$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Поэтому $g \sim h \bmod \mathcal{R}$.

По теореме 1 из [14, 2.5.2] имеем $g, h \in QU_b(T, \mathcal{G}, \mathcal{R})$, где последнее семейство определяется как множество ограниченных функций $(f\colon T \longrightarrow \mathbb{R})$, таких что для любого $\varepsilon > 0$ существуют множество $R \in \mathcal{R}$ и конечная коллекция $((G_i \in \mathcal{G} \mid i \in I))$, для которых коллекция

$((G_i \cap D \mid i \in I))$ является покрытием множества $(D \equiv T \setminus R)$ и $(\omega(F, G_i \cap D) < \varepsilon)$ для каждого $(i \in I)$. По предложению 5 из [14, 2.5.2] $QU_b(T, \mathcal{G}, \mathcal{R}) = U(T, \mathcal{SP})$. Поэтому $\bar{g} = \bar{h} \in Z$.

Таким образом, регулярному сечению (P, Q) мы сопоставили элемент $a \equiv \bar{g} = \bar{h} \in Z$. Отображение $(P, Q) \longmapsto a$ из $D(C)$ в Z обозначим через v.

Убедимся в сюръективности отображения v. Пусть $a \equiv \bar{f} \in Z$. По теореме 1 из [14, 2.5.2] существуют такие функции $g \in SC_b^l(T, \mathcal{G})$ и $h \in SC_b^u(T, \mathcal{G})$, что $g \leqslant f \leqslant h$ и $\bar{g} = a = \bar{f}$. По предложению 2 из [14, 2.3.8] для функций g и h существуют такие множества P и Q в C, что $g = \sup P$ и $q = \inf Q$ в $F_b(T)$.

Поскольку сечение (P, Q) не обязательно регулярно, рассмотрим пару (P', Q') в C, где $P' \equiv \{p \in C \mid p \leqslant h\}$ и $Q' \equiv \{q \in Q \mid g \leqslant q\}$.

Если $p \in P'$ и $q \in Q'$, то $p \leqslant h$ и $q \geqslant g$. Поэтому $q - p \geqslant g - h$ влечёт $q(t) - p(t) \geqslant g(t) - h(t) > -1/n$ для любого $t \in U_n$, откуда в силу непрерывности функций p и q и плотности множества U_n следует, что $q(t) - p(t) \geqslant -1/n$ для всех $t \in T$. Далее, в силу архимедовости $\mathbb{R}$ и произвольности n получаем $q(t) \geqslant p(t)$ и $q \geqslant p$. Следовательно, (P', Q') является сечением.

Проверим его регулярность. Пусть $y \in P'^u$, т. е. $y \in C$ и $p \leqslant h$ влечёт $y \geqslant p$. Если $p \in P$, то $p \leqslant g \leqslant h$ влечёт $y \geqslant p$, т. е. $y \geqslant g$. Следовательно, $y \in Q'$. Таким образом, $P'^u \subset Q'$. Пусть $y \in Q'$, т. е. $g \leqslant y$. Пусть $p \in P'$, т. е. $p \in C$ и $p \leqslant h$. Для $t \in U_n$ имеем $h(t) - g(t) < 1/n$. Следовательно, $y(t) \geqslant g(t) > h(t) - 1/n \geqslant p(t) - 1/n$. В силу плотности U_n и непрерывности функций y и p получаем $y(t) \geqslant p(t) - 1/n$ для всех $t \in T$, т. е. $y \geqslant p$. Поэтому $y \in P'^u$. Таким образом, $Q' \subset P'^u$. В итоге $P'^u = Q'$.

Пусть теперь $z \in Q'^l$, т. е. $z \in C$ и $q \geqslant g$ влечёт $z \leqslant q$, т. е. $z \leqslant h$. Следовательно, $z \in P'$. Таким образом, $Q'^l \subset P'$. Пусть $z \in P'$, т. е. $z \leqslant h$. Пусть $q \in Q'$, т. е. $q \in C$ и $g \leqslant q$. Для $t \in U_n$ имеем $h(t) - g(t) < 1/n$. Следовательно, $z(t) \leqslant h(t) < g(t) + 1/n \leqslant q(t) + 1/n$. Как и выше это неравенство влечёт неравенство $z \leqslant q$. Поэтому $z \in Q'^l$. Таким образом, $P' \subset Q'^l$. В итоге $Q'^l = P'$.

Для регулярного сечения (P', Q') рассмотрим соответствующие функции $g' \equiv \sup P'$ и $h' \equiv \inf Q'$ в $F_b(T)$. Ясно, что $g' \leqslant h'$.

Пусть $p \in P$. Тогда $p \leqslant g \leqslant h$ влечёт $p \in P'$. Значит, $P \subset P'$. Пусть $q \in Q$. Тогда $g \leqslant h \leqslant q$ влечёт $q \in Q'$. Значит, $Q \subset Q'$.

Отсюда следует, что $g \leqslant g'$ и $h \geqslant h'$. Поэтому неравенство $g \leqslant g' \leqslant h' \leqslant h$ означает, что $a = \bar{g}' = \bar{h}'$, т. е. $a = v(P', Q')$.

Проверим, что отображение v инъективно. Пусть (P_1, Q_1) и (P_2, Q_2) — такие регулярные сечения, что $\bar{g}_1 = \bar{h}_1$, $\bar{g}_2 = \bar{h}_2$ и $\bar{g}_1 = \bar{g}_2$. Тогда существуют такие плотные открытые множества U_n^1, U_n^2 и V_n, что $h_1(t) - g_1(t) < 1/n$ для любого $t \in U_n^1$, $h_2(t) - g_2(t) < 1/n$ для любого $t \in U_n^2$ и $|g_1(t) - g_2(t)| < 1/n$ для любого $t \in V_n$. Рассмотрим плотные открытые множества $W_n \equiv U_n^1 \cap U_n^2 \cap V_n$. Пусть $p_1 \in P_1$ и $t \in W_n$. Тогда $p_1(t) \leqslant h_1(t) \leqslant g_1(t) + 1/n < g_2(t) + 2/n \leqslant h_2(t) + 2/n \leqslant q_2(t) + 2/n$ для любой $q_2 \in Q_2$. По плотности W_n и непрерывности p_1 и q_2 заключаем, что $p_1(t) \leqslant q_2(t) + 2/n$ для всех $t \in T$. В силу архимедовости $\mathbb{R}$ заключаем, что $p_1 \leqslant q_2$, т. е. $p_1 \in Q_2^l = P_2$. Значит, $P_1 \subset P_2$. Подобным образом устанавливается и обратное включение. Таким образом, $P_1 = P_2$. Тогда $Q_1 = P_1^u = P_2^u = Q_2$. В итоге получем равенство $(P_1, Q_1) = (P_2, Q_2)$. $\square$

По лемме 1 из [14, 2.4.3] латлинеал $U(T, \mathcal{SP})$ является равномерно полным. По следствию 2 леммы 5 из [14, 2.2.7] семейство Z является банаховым латлинеалом и банаховой латалгеброй с единицей $\bar{\mathbf{1}}$ и нормой $\|\bar{f}\|_{\bar{\mathbf{1}}} \equiv \inf\{x \in \mathbb{R}_+ \mid |\bar{f}| \leqslant x\bar{\mathbf{1}}\}$. Легко проверить, что равномерная сходимость в Z и сходимость по норме $\|\cdot\|_{\bar{\mathbf{1}}}$ равносильны. Поэтому Z является c-латлинеалом и c-латалгеброй с единицей $\bar{\mathbf{1}}$.

Определим c-расширение $u\colon C \rightarrowtail Z$, полагая $uc \equiv \bar{c}$ для $c \in C$. Назовём его *дедекиндовым расширением c-латлинеала и c-латалгебры C*.

2.2. Переход к тесным сечениям

Свойство регулярности сечения (P,Q) является слишком сильным. Для того, чтобы дать характеризацию дедекиндова расширения $u\colon C \rightarrowtail Z$ среди всех c-расширений $u\colon C \rightarrowtail A$, рассмотрим более слабое свойство.

Сечение (P,Q) в латлинеале A с единицей 1, такой что $\forall a \in A\ \exists n \in \mathbb{N}\ (|a| \leqslant n\mathbf{1})$, назовём *тесным* или *t-сечением* ("t" от слова "tight"), если для любого $x \in A_+$ и любого $n \in \mathbb{N}$ из свойства $\forall p \in P\ \forall q \in Q\ ((1/n + p - q)_+ \wedge x = 0)$ следует равенство $x = 0$.

Лемма 1. *Пусть $|A,\nVdash|$ — c-латлинеал и (P,Q) — регулярное сечение в A. Тогда сечение (P,Q) является тесным.*

Доказательство. Обозначим упорядоченное множество всех максимальных собственных идеалов латлинеала A через T. По теореме Крейнов–Какутани [15, XII.5] латлинеал A изоморфен латлинеалу $C \equiv C_b(T,\mathcal{G})$. Поэтому будем считать, что $A = C$. Рассмотрим плотные открытые множества $U_n \equiv \{t \in T \mid \exists p \in P\ \exists q \in Q\ (q(t) - p(t) < 1/n)\}$ из доказательства теоремы 1. Пусть $\forall p \in P\ \forall q \in Q\ ((\mathbf{1} + p - q)_+ \wedge x = 0)$ для $x \in C_+$.

Предположим, что $x > 0$. Тогда для любого $t \in \operatorname{coz} x \in \mathcal{G}$ и для любых p и q имеет место равенство $(1/n + p(t) - q(t))_+ = 0$. Поскольку множество U_n плотно, существует $t \in \operatorname{coz} x \cap U_n$. Тогда имеет место неравенство $q(t) - p(t) < 1/n$ для некоторых p и q. Из полученного противоречия следует, что $x = 0$. □

Лемма 2. *Пусть (P,Q) — сечение в C и $g \equiv \sup P$ и $q \equiv \inf Q$ — точные верхняя и нижняя границы множеств P и Q в $F_b(T)$. Тогда следующие заключения равносильны*:

1) *сечение (P,Q) является тесным*;

2) $g \sim h \bmod \mathcal{R}$;

3) $g \sim h \bmod \mathcal{R}$ *и* $g,h \in U(T,\mathcal{SP})$.

Доказательство. 1) $\vdash$ 2). Рассмотрим открытые множества $U_n \equiv \{t \in T \mid \exists p \in P\ \exists q \in Q\ (q(t) - p(t) < 1/n)\}$. Тогда $h(t) - g(t) < 1/n$ для каждого $t \in U_n$. Поэтому $h(t) - g(t) \geqslant 1/n$ для любого $t \in R_n \equiv T \setminus U_n$. Предположим, что $R_n \notin \mathcal{R}$, т. е. $S \equiv T \setminus \operatorname{cl} U_n \neq \varnothing$. Поскольку наше пространство является тихоновским, существует такая ненулевая функция $x \in C_+$, что $\operatorname{coz} x \subset S$. Тогда для любых p и q и $t \in \operatorname{coz} x$ верно $1/n + p(t) - q(t) \leqslant 1/n + g(t) - h(t) \leqslant 0$, т. е. $(1/n + p(t) - q(t))_+ = 0$. Следовательно, $(1/n + p(t) - q(t))_+ \wedge x(t) = 0$. Если же $t \notin \operatorname{coz} x$, то также $(1/n + p(t) - q(t))_+ \wedge x(t) = 0$. Поэтому $\forall p \in P\ \forall q \in Q\ ((\mathbf{1}/n + p - q)_+ \wedge x = 0)$ и $x > 0$. Но это противоречит тесноте (P,Q). Значит, $R_n \in \mathcal{R}$. В итоге $g \sim h \bmod \mathcal{R}$.

2) $\vdash$ 1). Пусть $x \in C_+$ и $\forall p \in P\ \forall q \in Q\ ((\mathbf{1}/n + p - q)_+ \wedge x = 0)$. Поскольку $g \sim h \bmod \mathcal{R}$, множество U_n является плотным. Возьмём $t \in U_n$. Тогда найдутся такие p и q, что $q(t) - p(t) < 1/n$. Поэтому $(1/n + p(t) - q(t))_+ > 0$. Из условия на x теперь следует, что $x(t) = 0$. Значит, $\operatorname{coz} x \cap U_n = \varnothing$ и $\operatorname{coz} x \in \mathcal{G}$. Из плотности U_n вытекает $\operatorname{coz} x = \varnothing$ и $x = 0$.

2) $\vdash$ 3). По теореме 1 из [14, 2.5.2] функции g и h принадлежат $QU_b(T,\mathcal{G},\mathcal{R})$. По предложению 5 из [14, 2.5.2] имеем $QU_b(T,\mathcal{G},\mathcal{R}) = U(T,\mathcal{SP})$.

3) $\vdash$ 2). Эта выводимость очевидна. □

2.3. Счётно-дедекиндово расширение и его функциональное описание

Отказ от регулярных сечений и переход к тесным сечениям в латлинеалах с единицами позволяет ввести понятие счётно-дедекиндова расширения латлинеала $|A,\mathbb{1}|$.

Сечение (P,Q) в A назовём *подсечением сечения* (P',Q'), если $P \subset P'$ и $Q \subset Q'$.

Сечение (P', Q') в A назовём *счётно-тесным*, если у него существует такое счётное подсечение (P, Q) со свойствами $\operatorname{card} P \leqslant \omega_0$ и $\operatorname{card} Q \leqslant \omega_0$, что сечения (P, Q), (P', Q) и (P, Q') являются тесными.

Рассмотрим подмножество $D^0(A)$ множества $D(A)$, состоящее из всех счётно-тесных сечений латлинеала $|A, \mathbb{1}|$.

Пусть $a \in A$. Рассмотрим множества $P_a \equiv \{p \in A \mid p \leqslant a\}$ и $Q_a \equiv P_a^u$. Пара (P_a, Q_a) является регулярным сечением, причём $wa = (P_a, Q_a)$, где w — вложение Дедекинда – Макнейла из введения и теоремы 1. Сечение $(\{a\}, \{a\})$ является счётным подсечением сечения (P_a, Q_a). Поскольку сечения $(\{a\}, \{a\})$, $(\{a\}, Q_a)$ и $(P_a, \{a\})$ являются тесными, сечение (P_a, Q_a) является счётно-тесным. Поэтому $wa \in D^0(A)$.

Таким образом, вложение $w[A] \subset D^0(A)$ означает, что мы можем рассмотреть более узкое расширение $w_0 \colon A \rightarrowtail D^0(A)$. Назовём его *счётно-дедекиндовым расширением латлинеала* $|A, \mathbb{1}|$.

Для нас интерес представляет *счётно-дедекиндово расширение* $w_0 \colon C \rightarrowtail D^0(C)$ *латлинеала* $|C, \mathbf{1}|$.

Дадим его функциональное описание. Через $\mathcal{G}^0$ обозначим ансамбль конуль-множеств $\operatorname{coz} f \equiv \{t \in T \mid f(t) \neq 0\} \in \mathcal{G}$ всех функций $f \in C$. Через $\mathcal{U}^0$ обозначим подансамбль ансамбля $\mathcal{G}^0$, состоящий из всех плотных в T конуль-множеств $U \in \mathcal{G}^0$. Рассмотрим идеальный ансамбль $\mathcal{R}^0 \equiv \{R \subset T \mid \exists U \in \mathcal{U}^0 \ (R \subset T \setminus U)\}$, состоящий из всех подмножеств нигде не плотных нуль-множеств $\mathrm{z}\, f \equiv \{t \in T \mid f(t) = 0\}$ функций $f \in C$. Рассмотрим ансамбль $\mathcal{SP}^0 \equiv \{P \subset T \mid \exists G \in \mathcal{G}^0 \ \exists R \in \mathcal{R}^0 \ (P = G \cup R)\}$.

Рассмотрим семейство $U(T, \mathcal{SP}^0)$ всех $\mathcal{SP}^0$-равномерных функций. Фактор-семейство $U(T, \mathcal{SP}^0)/\mathcal{R}^0$ обозначим через Z^0.

Лемма 3. *Пусть (P, Q) — счётное сечение в C и $g \equiv \sup P$ и $q \equiv \inf Q$ — точные верхняя и нижняя границы множеств P и Q в $F_b(T)$. Тогда следующие заключения равносильны*:

1) *сечение (P, Q) является тесным*;

2) $g \sim h \bmod \mathcal{R}^0$;

3) $g \sim h \bmod \mathcal{R}^0$ *и* $g, h \in U(T, \mathcal{SP}^0)$.

Доказательство. 1) $\vdash$ 2). Рассмотрим множества $U_n \equiv \{t \in T \mid \exists p \in P \ \exists q \in Q \ (q(t) - p(t) < 1/n)\}$. По утверждению 6) предложения 1 из [14, 2.2.5] имеем $U_n \in \mathcal{G}^0$. Далее доказательство проводится так же, как в выводе 1) $\vdash$ 2) из доказательства леммы 2.

2) $\vdash$ 1). Вывод полностью совпадает с выводом 2) $\vdash$ 1) из доказательства леммы 2 при замене $\mathcal{R}$ на $\mathcal{R}^0$.

2) $\vdash$ 3). По теореме 1 из [14, 2.5.2] функции g и h принадлежат $QU_b(T, \mathcal{G}^0, \mathcal{R}^0)$. По предложению 5 из [14, 2.5.2] имеем $QU_b(T, \mathcal{G}^0, \mathcal{R}^0) = U(T, \mathcal{SP}^0)$.

3) $\vdash$ 2). Эта выводимость очевидна. $\square$

Лемма 4. *Пусть (P', Q') — счётно-тесное регулярное сечение в C и $g' \equiv \sup P'$ и $h' \equiv \inf Q'$ в $F_b(T)$. Тогда существуют такие функции $g \in SC_b^l(T, \mathcal{G}^0)$ и $h \in SC_b^u(T, \mathcal{G}^0)$, что $g \leqslant g' \leqslant h' \leqslant h$, $g \sim h \bmod \mathcal{R}^0$ и $g, h \in U(T, \mathcal{SP}^0)$.*

Доказательство. По условию существует такое счётное подсечение (P, Q) сечения (P', Q'), что сечения (P, Q), (P', Q) и (P, Q') являются тесными. Рассмотрим функции $g \equiv \sup P$ и $h \equiv \inf Q$ в $F_b(T)$. По предложению 1 из [14, 2.3.6] имеем $C = M(T, \mathcal{G}^0)$. Поэтому, в силу предложения 1 из [14, 2.3.8], $g \in SC_b^l(T, \mathcal{G}^0)$ и $h \in SC_b^u(T, \mathcal{G}^0)$. По лемме 3 имеем $g \sim h \bmod \mathcal{R}^0$ и $g, h \in U(T, \mathcal{SP}^0)$. $\square$

Для каждого сечения $d \equiv (P', Q') \in D^0(C)$ рассмотрим множество F_d тех функций $f \in U(T, \mathcal{SP}^0)$, для которых существуют такие функции $g \in SC_b^l(T, \mathcal{G}^0) \cap U(T, \mathcal{SP}^0)$

и $h \in SC_b^u(T, \mathcal{G}^0) \cap U(T, \mathcal{SP}^0)$, что $f \sim g \bmod \mathcal{R}^0$, $g \leqslant g' \leqslant h' \leqslant h$, $g \sim h \bmod \mathcal{R}^0$. По лемме 4 оно не пусто. Если $f_1, f_2 \in F_d$, то из $f_1 \sim g' \bmod \mathcal{R}^0$ и $f_2 \sim g' \bmod \mathcal{R}^0$ следует $f_1 \sim f_2 \bmod \mathcal{R}^0$. Поэтому множество F_d содержится в некотором классе эквивалентности $X \in Z^0$. Если $x \in X$, то $x \sim f \bmod \mathcal{R}^0$ для некоторого $f \in F_d$. Возьмём для функции f функции $g \leqslant g' \leqslant h' \leqslant h$ из определения F_d. Тогда $x \sim g \bmod \mathcal{R}^0$ влечёт $x \in F_d$. Значит, $x \in F_d$, т. е. $F_d = X \in Z^0$.

Поэтому мы можем определить отображение $v_0 \colon D^0(C) \rightarrowtail Z^0$, полагая $v_0 d \equiv F_d$.

Следующая теорема даёт функциональное описание счётно-дедекиндова множества $D^0(C)$.

Теорема 2. *Отображение $v_0 \colon D^0(C) \longrightarrow Z^0$ биективно.*

Доказательство. Установим сначала инъективность v_0. Пусть $d_1 \equiv (P_1', Q_1')$ и $d_2 \equiv (P_2', Q_2')$ — элементы из $D^0(C)$, для которых $v_0 d_1 = v_0 d_2$. Возьмём соответствующие функции $g_1' \equiv \sup P_1'$ и $g_2' \equiv \sup P_2'$ из $F_b(T)$. По определению отображения v имеем $v d_1 = \bar{g}_1' \bmod \mathcal{R}$ и $v d_2 = \bar{g}_2' \bmod \mathcal{R}$. Поскольку $v_0 d_1 = v_0 d_2$, существует такая функция f из этого множества, что $f \sim g_1' \bmod \mathcal{R}^0$ и $f \sim g_2' \bmod \mathcal{R}^0$. Следовательно, $g_1' \sim g_2' \bmod \mathcal{R}^0$. Из $\mathcal{R}^0 \subset \mathcal{R}$ вытекает, что $v d_1 = \bar{g}_1' \bmod \mathcal{R}^0 = \bar{g}_2' \bmod \mathcal{R}^0 = v d_2$. По теореме 1 отображение v инъективно. Поэтому $d_1 = d_2$.

Проверим теперь сюръективность v_0. Пусть $a \in Z^0$. Возьмём $f \in a$, т. е. $f \in U(T, \mathcal{SP}^0)$.

По предложению 5 из [14, 2.5.2] имеем $f \in QU_b(T, \mathcal{G}, \mathcal{R})$. По утверждению 5) предложения 1 из [14, 2.2.5] ансамбль $\mathcal{G}^0$ является отделимой совершенной σ-основой. Поэтому, согласно теореме 2 из [14, 2.5.2], для f существуют такие счётные коллекции $\pi \equiv (p_i \in C \mid i \in I)$ и $\varkappa \equiv (q_j \in C \mid j \in J)$, что $p_i \leqslant f \leqslant q_j$ и $g \sim h \bmod \mathcal{R}^0$, где $g \equiv \sup \pi$ и $h \equiv \inf \varkappa$. Рассмотрим множества $P \equiv \{p_i \mid i \in I\}$ и $Q \equiv \{q_j \mid j \in J\}$ в C. По лемме 3 сечение (P, Q) является тесным.

Рассмотрим множества $P'' \equiv \{u \in C \mid u \leqslant f\}$ и $Q'' \equiv \{v \in C \mid f \leqslant v\}$. Для них $P \subset P''$ и $Q \subset Q''$. Возьмём функции $g'' \equiv \sup P'' \in SC_b^l(T, \mathcal{G})$ и $h'' \equiv \inf Q'' \in SC_b^u(T, \mathcal{G})$. Тогда из $g \leqslant g'' \leqslant f \leqslant h'' \leqslant h$ и $g \sim h \bmod \mathcal{R}$ вытекает $g'' \sim f \sim h'' \bmod \mathcal{R}$. Поскольку сечение (P'', Q'') не обязательно регулярно, рассмотрим пару (P', Q'), где $P' \equiv \{p' \in C \mid p' \leqslant h''\}$ и $Q' \equiv \{q' \in C \mid g'' \leqslant q'\}$. Так же, как это было сделано в доказательстве теоремы 1, проверяется, что (P', Q') является регулярным сечением, $P'' \subset P'$ и $Q'' \subset Q'$.

Рассмотрим функции $g' \equiv \sup P'$ и $h' \equiv \inf Q'$ в $F_b(T)$. Для них $g'' \leqslant g'$ и $h' \leqslant h''$. Поэтому неравенство $g \leqslant g'' \leqslant g' \leqslant h' \leqslant h'' \leqslant h$ и эквивалентность $g \sim h \bmod \mathcal{R}^0$ означают, что все эти функции эквивалентны. Кроме того, $P \subset P'' \subset P'$ и $Q \subset Q'' \subset Q$. Следовательно, (P, Q) является счётным подсечением регулярного сечения (P', Q').

Поскольку $g \sim h'$ и $g' \sim h$, по лемме 2 сечения (P, Q') и (P', Q) являются тесными. Поэтому $d \equiv (P', Q') \in D^0(C)$.

По построению $g \in SC_b^l(T, \mathcal{G}^0) \cap U(T, \mathcal{SP}^0)$, $h \in SC_b^u(T, \mathcal{G}^0) \cap U(T, \mathcal{SP}^0)$ и $g \leqslant f \leqslant h$. Поскольку $g \sim h \bmod \mathcal{R}^0$, имеем $f \sim g \bmod \mathcal{R}^0$. Поэтому $f \in F_d$. В итоге $v_0 d \equiv F_d = \bar{f} \bmod \mathcal{R}^0 = a$. $\square$

Для латлинеала $|A, \mathbb{1}|$ можно построить его *канторово секвенциальное пополнение* $C_s(A)$ точно так же, как это делается для $\mathbb{Q}$ (см. [13, 1.4.3]). Из теоремы 2 и статьи [16] следует, что счётно-дедекиндово расширение $C \rightarrowtail D^0(C)$ совпадает с его канторовым секвенциальным пополнением $C \rightarrowtail C_s(C)$.

Кроме того, для кольца $|C, \mathbf{1}|$ можно взять его *классическое кольцо частных* $Q^{cl}(C)$ (см. [16]) и в нём взять его *ограниченную часть* $Q_b^{cl}(C)$. Поскольку латалгебра $Q_b^{cl}(C)$ не замкнута относительно $\bar{\mathbf{1}}$-равномерной сходимости последовательностей, можно взять её $\bar{\mathbf{1}}$-равномерное пополнение $\overline{Q}_b^{cl}(C)$. В указанной работе было дано его функциональное описание в виде изоморфизма $\overline{Q}_b^{cl}(C) \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow Z^0$.

Более того, для кольца $|C, \mathbf{1}|$ можно взять его *рационально-полное кольцо частных* $Q(C)$ (см. [5] и [7]) и в нём взять его ограниченную часть $Q_b(C)$. Поскольку латалгебра $Q_b(C)$ не замкнута относительно $\bar{\mathbf{1}}$-равномерной сходимости последовательностей, можно взять её $\bar{\mathbf{1}}$-равномерное пополнение $\overline{Q}_b(C)$. В работе [5] было дано его функциональное описание в виде $\overline{Q}_b(C) \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow Z$.

3. Характеризация дедекиндова и счётно-дедекиндова расширений c-латлинеала непрерывных ограниченных функций

В разделе 2 были даны функциональные описания множеств $D(C)$ и $D^0(C)$ в виде функционально-факторных семейств Z и Z^0. На этих семействах можно рассматривать естественные структуры $\bar{\mathbf{0}}, \bar{\mathbf{1}}, +, \cdot, \cdot_{\mathbb{R}}, \vee, \wedge$. Эти структуры разделяются на две принципиально разные части. Кольцевые структуры $+$ и $\cdot$ связаны дистрибутивным равенством $a(b+c) = ab+ac$. В то же время латлинеальные структуры $+$ и $\wedge$ связаны лишь дистрибутивным неравенством $a\wedge(b+c) \le a\wedge b+a\wedge c$. По этой причине работа с последними структурами является концептуально более сложной, чем с первыми. Поэтому нахождение латлинеальных аналогов важных кольцевых свойств и работа с ними занимают гораздо больше времени.

В частности, ещё в 1956 году Ю. Утуми [17] расширил понятие классической делимости в кольцах и определил понятие *делимости относительно плотного идеала* D кольца A. Это позволило в статье [7] дать кольцевые характеризации расширений $u\colon C \rightarrowtail Z$ и $u_0\colon C \rightarrowtail Z^0$.

Латлинеальный аналог "горизонтального" свойства плотности идеала D в кольце A в виде "вертикального" свойства плотности сечения (P, Q) в c-латлинеале $|A, \mathbb{1}|$ был найден в статье [3] и в виде более общего "вертикального" свойства плотности сечения (P, Q) в произвольном латлинеале $|A, \mathbb{1}|$ был найден в статье [11].

3.1. Привлечение локальных свойств

Далее будем рассматривать только *c-расширения* $u\colon |C, \mathbf{1}| \rightarrowtail |A, \mathbb{1}|$, т. е. инъективные отображения $u\colon C \rightarrowtail A$, сохраняющие все c-латлинеальные структуры c-латлинеалов $|C, \mathbf{1}|$ и $|A, \mathbb{1}|$.

Ещё в статьях [7, 6, 3] было показано, что для характеризации расширений $u\colon C \rightarrowtail Z$ и $u_0\colon C \rightarrowtail Z^0$ общих латлинеальных свойств недостаточно и нужно привлекать "локальные" свойства, определяемые через структуру *измельчения*.

Идеал B латлинеала $|A, \mathbb{1}|$ называется *замкнутым*, если для любого элемента $a \in A$ и для любой последовательной $(b_n \in B \mid n \in \mathbb{N})$ из условия $\forall k \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N}\ \forall p \in \mathbb{N}\ (p \ge n \Rightarrow |a - b_p| < 1/k)$ вытекает принадлежность $a \in B$. Ансамбль всех замкнутых идеалов в A обозначим через $\mathcal{C}(A)$.

Далее Λ_b будет обозначать некоторую выделенную открытую π-базу в пространстве $(T, \mathcal{G})$, т. е. подансамбль ансамбля $\mathcal{G}$ такой, что $\forall\ G \in \mathcal{G}\ \exists E \in \Lambda_b\ (E \subset G)$. Наделим его порядком по вложению. Элемент $E \in \Lambda_b$ называется *вершиной коллекции* $(E_\xi \in \Lambda_b \mid \xi \in \Xi)$, если $E_\xi \subset E$ для любого ξ и для любого $L \in \Lambda_b$, такого, что $\varnothing \ne L \subset E$, существуют ξ_0 и $M \subset \Lambda_b$, такие, что $\varnothing \ne M \subset L$ и $M \subset E_{\xi_0}$ (см. [7]). Обозначим это свойство через $E = \operatorname{top}(E_\xi \mid \xi \in \Xi)$.

Коллекция $\mathcal{A} \equiv (A_E \in \mathcal{C}(A) \mid E \in \Lambda_b)$ называется *базисным измельчением c-латлинеала* A, если:

а) $A_E = A$, если и только если $E = \varnothing$;

б) $\bigcap(A_E \mid E \in \Sigma_b) = \{0\}$;

в) $E_1 \subset E_2$ влечёт $A_{E_1} \subset A_{E_2}$;

г) $E = \operatorname{top}(E_\xi \mid \xi \in \Xi)$ влечёт $A_E = \bigcap(A_{E_\xi} \mid \xi \in \Xi)$.

c-Латлинеал A с базисным измельчением $\mathcal{A}$ назовём *cr_b-латлинеалом* (буква "r" от слова "refinement") и обозначим через $|A, \mathcal{A}|$.

На исходном c-латлинеале C рассмотрим исходное выделенное базисное измельчение $\mathcal{L}_b \equiv (C_E \in \mathcal{C}(C) \mid E \in \Lambda_b)$, в котором $C_E \equiv \{c \in C \mid \operatorname{cl} E \cap \operatorname{coz} c = \varnothing\}$.

c-Расширение $u\colon C \rightarrowtail A$, в котором $|A,\mathfrak{A}|$ является cr_b-латлинеалом, называется *cr_b-расширением cr_b-латлинеала* $|C,\mathfrak{L}_b|$, если: а) $u[C_E] \subset A_E$ для любого $E \in \Lambda_b$ и б) $uc \in A_E$ влечёт $c \in C_E$. Такое расширение обозначим через $u\colon |C,\mathfrak{L}_b| \rightarrowtail |A,\mathfrak{A}|$.

Пусть $B \subset A$. Рассмотрим множество $B^\perp \equiv \{a \in A \mid \forall b \in B\ (|a| \wedge |b| = 0)\}$. Коллекция $\mathfrak{A}$ называется *насыщенной*, если для любого непустого множества $E \in \Lambda_b$ и для любого дизъюнктно замкнутого множества $B = B^{\perp\perp}$, такого что $B^\perp \not\subset A_E$, существует такое множество $F \in \Lambda_b$, что $\varnothing \neq F \subset E$ и $B \subset A_F$. cr_b-Расширение $u\colon |C,\mathfrak{L}_b| \rightarrowtail |A,\mathfrak{A}|$ называется *насыщенным*, если измельчение $\mathfrak{A}$ является насыщенным.

Далее, для того, чтобы дать параллельные определения и для Z, и для Z^0, будем использовать значок $\theta \in \{\varnothing, 0\}$. Если $\theta = \varnothing$, то $Z^\theta \equiv Z$, если $\theta = 0$, то $Z^\theta \equiv Z^0$. Этот значок в том же смысле будем использовать и в других местах.

На c-латлинеале Z^θ рассмотрим базисное измельчение $\mathfrak{A}_b^\theta \equiv (Z_E^\theta \in \mathcal{C}(Z^\theta) \mid E \in \Lambda_b)$, такое что $Z_E^\theta \equiv \{\bar{f} \in Z^\theta \mid \forall n \in \mathbb{N}\ (\operatorname{cl} E \cap \operatorname{coz}_n f \in \mathcal{R}^\theta)\}$, где $\operatorname{coz}_n f \equiv \{t \in T \mid |f(t)| > 1/n\}$ (см. [14, 2.2.5]). Тогда исходное дедекиндово расширение $u\colon C \rightarrowtail Z^\theta$ превращается в *cr_b-расширение* $u\colon |C,\mathfrak{L}_b| \rightarrowtail |Z^\theta,\mathfrak{A}_b^\theta|$.

Пусть $u\colon C \rightarrowtail A$ и $\widetilde{u}\colon C \rightarrowtail \widetilde{A}$ являются c-расширениями c-латлинеала C. *Морфизмом из c-расширения $u\colon C \rightarrowtail A$ в c-расширение $\widetilde{u}\colon C \rightarrowtail \widetilde{A}$* называется гомоморфизм $v\colon |A,\mathbb{1}| \mapsto |\widetilde{A},\widetilde{\mathbb{1}}|$ латлинеалов с единицами, такой, что $v \circ u = \widetilde{u}$. *Морфизмом из cr_b-расширения $u\colon |C,\mathfrak{L}_b| \rightarrowtail |A,\mathfrak{A}|$ в cr_b-расширение $\widetilde{u}\colon |C,\mathfrak{L}_b| \rightarrowtail |\widetilde{A},\widetilde{\mathfrak{A}}|$* назовём такой морфизм v из $u\colon C \rightarrowtail A$ в $\widetilde{u}\colon C \rightarrowtail \widetilde{A}$, что $v[A_E] \subset \widetilde{A}_E$ для любого $E \in \Lambda_b$. Морфизм v из u в $\tilde{u}$ назовём *биморфизмом*, если отображение множеств $v\colon A \longrightarrow \widetilde{A}$ является биективным и системное отображение $v^{-1}\colon |\widetilde{A},\widetilde{\mathfrak{A}}| \rightarrowtail |A,\mathfrak{A}|$ является морфизмом из $\tilde{u}$ в u.

Если вдобавок отображение v инъективно и $va \in \widetilde{A}_E$ влечёт $a \in A_E$, то скажем, что второе cr_b-расширение *больше* первого или первое cr_b-расширение *вкладывается* во второе.

3.2. Свойства полноты и граничности типа $Z^{\theta c}$

Пусть сначала $|A,\mathbb{1}|$ — латлинеал с единицей.

Элемент $a \in A$ назовём *t-мажорантой множества* P, если пара $(P,\{a\})$ является t-сечением. Обозначим это свойство через $a = \text{t-maj}\, P$. Элемент $a \in A$ назовём *t-минорантой множества* Q, если пара $(\{a\},Q)$ является t-сечением. Обозначим это свойство через $a = \text{t-min}\, Q$.

Лемма 5. *Пусть (P,Q) — t-сечение в A, $a \in A$ и $p \leq a \leq q$ для любых $p \in P$ и $q \in Q$. Тогда $a = \text{t-maj}\, P$ и $a = \text{t-min}\, Q$.*

Доказательство. Пусть $\forall p \in P\ ((1/n + p - a)_+ \wedge x = 0)$ для некоторого $x \in A_+$. Так как $a \leq q$, то $\forall p \in P\ \forall q \in Q\ ((1/n + p - q)_+ \wedge x = 0)$. Значит, $a = \text{t-maj}\, P$. Второе равенство выводится таким же образом. □

Пусть теперь $|A,\mathfrak{A}|$ — cr_b-латлинеал. Сечение (P,Q) назовём *r-тесным*, если для любого $E \in \Lambda_b$, любого $x \in A_+$ и любого $n \in \mathbb{N}$ из $\forall p \in P\ \forall q \in Q\ ((1/n + p - q)_+ \wedge x \in A_E)$ следует $x \in A_E$. Из второго свойства измельчения следует, что r-тесное сечение является тесным. r-Тесное сечение назовём также *rt-сечением*.

Элемент $a \in A$ назовём *r-тесной мажорантой* или *rt-мажорантой множества* $P \subset A$, если пара $(P,\{a\})$ является rt-сечением. Обозначим это свойство через $a = \text{rt-maj}\, P$. Элемент $a \in A$ назовём *r-тесной минорантой* или *rt-минорантой множества* Q, если пара $(\{a\},Q)$ является rt-сечением. Обозначим это свойство через $a = \text{rt-min}\, Q$.

Лемма 6. *Пусть $|A,\mathfrak{A}|$ — cr_b-латлинеал, (P,Q) — rt-сечение в A, $a \in A$ и $p \leq a \leq q$ для любых $p \in P$ и $q \in Q$. Тогда $a = \text{rt-maj}\, P$ и $a = \text{rt-min}\, Q$.*

Доказательство. Пусть $\forall p \in P\ ((1/n + p - a)_+ \wedge x \in A_E)$ для некоторого $x \in A_+$. Так как $a \le q$, то $\forall p \in P\ \forall q \in Q\ ((1/n + p - q)_+ \wedge x \in A_E)$. Значит, $a = \text{rt-maj}\, P$. Второе равенство выводится таким же образом. □

Далее будем использовать введённый ранее значок $\theta \in \{\varnothing, 0\}$. Скажем, что сечение (P, Q) в A является *сечением типа* θ, если при $\theta = \varnothing$ множества P и Q имеют произвольные мощности, а при $\theta = 0$ сечение (P, Q) является счётным.

Пусть в cr_b-латлинеале $|A, \mathcal{A}|$ выделено подмножество B. Множество всех rt-сечений (P, Q) типа θ в A, таких, что $P \subset B$ и $Q \subset B$, обозначим через $\mathcal{C}ut^\theta(B, A)$.

cr_b-Латлинеал $|A, \mathcal{A}|$ назовём *полным типа* $Z^{\theta c}$ *относительно* B, если для любого rt-сечения $(P, Q) \in \mathcal{C}ut^\theta(B, A)$ существует элемент $a \in A$, такой, что $a = \text{rt-maj}\, P = \text{rt-min}\, Q$. При $B = A$ получим определение (*абсолютно*) *полного типа* ${}^aZ^{\theta c}$ cr_b-*латлинеала* $|A, \mathcal{A}|$. cr_b-Расширение $u\colon |C, \mathcal{L}_b| \rightarrowtail |A, \mathcal{A}|$ назовём *полным типа* $Z^{\theta c}$, если cr_b-латлинеал $|A, \mathcal{A}|$ является полным типа $Z^{\theta c}$ относительно подмножества $u[C]$. cr_b-Расширение $u\colon |C, \mathcal{L}_b| \rightarrowtail |A, \mathcal{A}|$ назовём (*абсолютно*) *полным типа* ${}^aZ^{\theta c}$, если cr_b-*латлинеал* $|A, \mathcal{A}|$ является полным типа ${}^aZ^{\theta c}$.

Элемент $a \in A$ назовём *граничным типа* $Z^{\theta c}$ *относительно* B, если существует rt-сечение $(P, Q) \in \mathcal{C}ut^\theta(B, A)$, такое, что $a = \text{rt-maj}\, P = \text{rt-min}\, Q$. Рассмотрим в A его c-подлатлинеал $Z^{\theta c}(B, A)$, порождённый множеством всех граничных элементов типа $Z^{\theta c}$ относительно B. cr_b-Расширение $u\colon |C, \mathcal{L}_b| \rightarrowtail |A, \mathcal{A}|$ назовём *граничным* cr_b-*расширением типа* $Z^{\theta c}$ cr_b-*латлинеала* $|C, \mathcal{L}_b|$, если $A = Z^{\theta c}(u[C], A)$.

cr_b-*Пополнением типа* $Z^{\theta c}|{}^aZ^{\theta c}$ cr_b-*латлинеала* $|C, \mathcal{L}_b|$ назовём насыщенное cr_b-расширение $u\colon |C, \mathcal{L}_b| \rightarrowtail |A, \mathcal{A}|$, которое является:

а) наибольшим из всех граничных cr_b-расширений типа $Z^{\theta c}$ cr_b-латлинеала $|C, \mathcal{L}_b|$;

б) наименьшим из всех полных cr_b-расширений типа $Z^{\theta c}$ cr_b-латлинеала $|C, \mathcal{L}_b|$;

в) полным типа ${}^aZ^{\theta c}$.

Теорема 3. *θ-Дедекиндово cr_b-расширение $u\colon |C, \mathcal{L}_b| \rightarrowtail |Z^\theta, \mathcal{A}_b^\theta|$ является единственным (с точностью до биморфизма cr_b-расширений cr_b-латлинеала $|C, \mathcal{L}_b|$) cr_b-пополнением типа $Z^{\theta c}|{}^aZ^{\theta c}$ cr_b-латлинеала $|C, \mathcal{L}_b|$.*

Доказательство этой теоремы проводится практически так же, как доказательство теоремы характеризации *риманова* cr_μ-*расширения* $|C, \mathcal{L}_\mu| \rightarrowtail |R_\mu, \mathcal{A}_\mu|$, изложенное в [10].

3.3. Равносильность свойств тесноты и плотности сечений в c-латлинеалах

В работах [3] и [4] характеризация θ-дедекиндовых расширений $u\colon C \rightarrowtail Z$ и $u_0\colon C \rightarrowtail Z^0$ была дана не через свойство тесноты сечений, а через свойство их плотности.

Покажем, что для c-латлинеалов эти свойства равносильны.

Пусть A — латлинеал. Сечение (P, Q) в A будем называть *плотным*, если $\inf\{q - p \mid p \in P \wedge q \in Q\} = 0$.

Предложение 1. *Пусть $|A, \mathbb{1}|$ — c-латлинеал и (P, Q) — сечение в A. Тогда следующие заключения равносильны:*

1) *сечение (P, Q) является тесным;*

2) *сечение (P, Q) является плотным.*

Доказательство. По упомянутой в доказательстве леммы 1 теореме Крейнов–Какутани c-латлинеал A изоморфен c-латлинеалу $C \equiv C_b(T, \mathcal{G})$ для некоторого тихоновского пространства $(T, \mathcal{G})$. Поэтому будем считать, что $A = C$.

1) $\vdash$ 2). Рассмотрим открытые множества $U_n \equiv \{t \in T \mid \exists p \in P\ \exists q \in Q\ (q(t) - p(t) < 1/n)\}$. Так же как в доказательстве леммы 2 проверяется, что множества U_n являются плотными.

Пусть $a \in C$ и $a \leqslant q - p$ для любых p и q. Тогда $a(t) \leqslant q(t) - p(t) < 1/n$ для некоторых p и q и всех $t \in U_n$. Из плотности U_n и непрерывности a следует неравенство $a(t) \leqslant 1/n$ для любого $t \in T$. Из архимедовости $\mathbb{R}$ следует, что $a(t) \leqslant 0$ для любого $t \in T$, т. е. $a \leqslant 0$. Таким образом, имеет место 2).

2) $\vdash$ 1). Пусть $x \in C_+$ и $(\mathbf{1}/n + p - q)_+ \wedge x = 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и любых p и q. Предположим, что $x > 0$, т. е. $\varnothing \neq G \equiv \operatorname{coz} x \in \mathcal{G}^0$. Если $t \in G$, то $(1/n + p(t) - q(t))_+ = 0$ влечёт $1/n + p(t) - q(t) \leqslant 0$, т. е. $q(t) - p(t) \geqslant 1/n$. Возьмём $0 < y \equiv x \wedge (\mathbf{1}/n) \in C_+$. Тогда $q(t) - p(t) \geqslant y(t)$ для любого $t \in G$ и $q(t) - p(t) \geqslant 0 = y(t)$ для любого $t \in T \setminus G$. Значит, $q - p \geqslant y$ для любых p и q. Поскольку сечение (P, Q) является плотным, $y \leqslant 0$. Из полученного противоречия следует, что $x = 0$. $\square$

Следствие 1. *Пусть $|A, \mathbb{1}|$ — c-латлинеал и $P, Q \subset A$, $a \in A$. Тогда следующие заключения равносильны*:

1) $a = \text{t-maj}\, P$ $[a = \text{t-min}\, Q]$;

2) $a = \sup P$ $[a = \inf Q]$.

Доказательство. 1) $\vdash$ 2). Пусть $a = \text{t-maj}\, P$, т. е. пара $(P, \{a\})$ является тесным сечением. По предложению 1 сечение $(P, \{a\})$ плотно, т. е. $\inf\{a - p \mid p \in P\} = 0$. Отсюда $0 = a + \inf\{-p \mid p \in P\} = a - \sup\{p \mid p \in P\} = a - \sup P$, т. е. $a = \sup P$.

2) $\vdash$ 1). Пусть $a = \sup P$. Тогда как и выше $\inf\{a - p \mid p \in P\} = 0$. Отсюда по предложению 1 вытекает, что сечение $(P, \{a\})$ является тесным, т. е. $a = \text{t-maj}\, P$. $\square$

Предложение 2. *Пусть $|A, \mathbb{1}|$ — c-латлинеал и I — замкнутый идеал в A. Тогда $\overline{A} \equiv A/I$ является c-латлинеалом.*

Доказательство. Рассмотрим норму $\|a\|_{\mathbb{1}} \equiv \inf\{x \in \mathbb{R}_+ \mid |a| \leqslant x\mathbb{1}\}$. Далее мы будем опираться на сведения из пункта 2.2.7 книги [14]. Система $|\overline{A}, \|\cdot\|_{\mathbb{1},\overline{A}}|$ является банаховым пространством. Латлинеал $|\overline{A}, \bar{\mathbb{1}}|$ является архимедовым, где $\bar{\mathbb{1}} \equiv \bar{1} \bmod I$. Легко проверяется, что он является ограниченным.

Имеем $\|\cdot\|_{\mathbb{1},\overline{A}} = \|\cdot\|_{\bar{\mathbb{1}}}$. Поэтому система $|\overline{A}, \bar{\mathbb{1}}|$ является банаховым пространством. Поскольку $\bar{\mathbb{1}}$ является единицей, латлинеал $|\overline{A}, \bar{\mathbb{1}}|$ является равномерно полным относительно равномерной сходимости последовательностей. Следовательно, $|\overline{A}, \bar{\mathbb{1}}|$ является c-латлинеалом. $\square$

Далее для $B \subset A$ и $a \in A$ образы $\pi[B]$ и $\pi(a)$ в $\overline{A}$ при фактор-отображении $\pi\colon A \twoheadrightarrow A/I$ обозначаются кратко через $\overline{B}$ и $\bar{a}$ без указания I и π.

Следствие 2. *Пусть $|A, \mathbb{1}|$ — c-латлинеал, I — замкнутый идеал в A, $\overline{A} \equiv A/I$ и (P, Q) — сечение в A. Тогда для c-латлинеала $|\overline{A}, \bar{\mathbb{1}}|$ следующие заключения равносильны*:

1) *сечение $(\overline{P}, \overline{Q})$ в $\overline{A}$ является тесным*;

2) *сечение $(\overline{P}, \overline{Q})$ в $\overline{A}$ является плотным.*

Доказательство. Утверждение следует из предложений 2 и 1. $\square$

Следствие 3. *Пусть $|A, \mathbb{1}|$ — c-латлинеал, I — замкнутый идеал в A, $\overline{A} \equiv A/I$, $P, Q \subset A$ и $a \in A$. Тогда для c-латлинеала $|\overline{A}, \bar{\mathbb{1}}|$ следующие заключения равносильны*:

1) $\bar{a} = \text{t-maj}\, \overline{P}$ $[\bar{a} = \text{t-min}\, \overline{Q}]$;

2) $\bar{a} = \sup \overline{P}$ $[\bar{a} = \inf \overline{Q}]$.

Доказательство. Утверждение следует из предложения 2 и следствия 1 предложения 1. □

Пусть теперь $|A,\mathcal{A}|$ — cr_b-латлинеал. Для $E \in \Lambda_b$ будем рассматривать фактор-c-линеал A/A_E по замкнутому идеалу A_E и фактор-отображение $\pi_E\colon A \twoheadrightarrow A/A_E$.

Сечение (P,Q) в A назовём r-плотным, если $\inf\{\pi_E(Q)-\pi_E(P) \mid p \in P \wedge q \in Q\} = 0$ в A/A_E для любого $E \in \Lambda_b$.

Предложение 3. *Пусть $|A,\mathcal{A}|$ — cr_b-латлинеал и (P,Q) — сечение в A. Тогда следующие заключения равносильны*:

1) *сечение (P,Q) является r-тесным*;

2) *сечение (P,Q) является r-плотным.*

Доказательство. Утверждение следует из предложений 2 и 1. □

Пусть $|A,\mathcal{A}|$ — cr_b-латлинеал. Элемент $a \in A$ назовём *r-супремумом множества $P \subset A$* [*r-инфимумом множества $Q \subset A$*], если $\pi_E(a) = \sup \pi_E[P]$ [$\pi_E(a) = \inf \pi_E[Q]$] в c-латлинеале A/A_E для любого $E \in \Lambda_b$. Обозначим это свойство через $a = \text{r-sup}\, P$ [$a = \text{r-inf}\, Q$].

Предложение 4. *Пусть $|A,\mathcal{A}|$ — cr_b-латлинеал, $P,Q \subset A$ и $a \in A$. Тогда следующие заключения равносильны*:

1) $a = \text{rt-maj}\, P$ [$a = \text{rt-min}\, Q$];

2) $a = \text{r-sup}\, P$ [$a = \text{r-inf}\, Q$].

Доказательство. Утверждение вытекает из следствия 1 предложения 1 и следствия 3 предложения 2. □

Из предложений 3 и 4 следует, что введённые выше понятия полноты и граничности можно равносильно переопределить не через свойство r-тесноты сечений, а через свойство их r-плотности. Тогда теорема 3 приобретёт вид, приведённый в статье [3].

4. Заключение

Теорема 3 и теорема характеризации, упомянутого в разделе 3.2 риманова cr_μ-расширения $|C,\mathcal{L}_\mu| \rightarrowtail |R_\mu,\mathcal{A}_\mu|$, изложенная в статье [10], показывают удивительное сходство между возникшими в разных областях математики и в разное время θ-дедекиндовым расширением $C \rightarrowtail Z^\theta$ и римановым расширением $C \rightarrowtail R_\mu$ c-латлинеала C. А именно, счётно-дедекиндово расширение $C \rightarrowtail Z^0$ и риманово расширение $C \rightarrowtail R_\mu$ обладают одинаковыми общими латлинеальными свойствами. Они отличаются только локальными свойствами, выражаемыми через отличные друг от друга cr_b-измельчения и cr_μ-измельчения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. H. M. MacNeille, Partially ordered sets // Trans. AMS, 42:4 (1937), 416–460.

2. V. K. Zakharov, Functional characterization of absolute and Dedekind completion // Bull. de l'Academia Polonais des Sci. Ser. math., 39:5-6 (1981), 293–297.

3. В. К. Захаров, Описание некоторых расширений семейства непрерывных функций посредством порядковых границ // Доклады РАН, 400:4 (2005), 444–448. EDN: OONKMB.

4. В. К. Захаров, Характеризация классических расширений семейства непрерывных функций как некоторых дедекиндовых оболочек // Доклады РАН, 411:4 (2006), 444–448. EDN: HZIUEP.

5. V. K. Zakharov, On functions connected with absolute, Dedekind completion, and divisible envelope // Periodica Math. Hungar, 18:1 (1987), 17–26.

6. В. К. Захаров, Связь между классическим кольцом частных кольца непрерывных функций и функциями, интегрируемыми по Риману // Фундам. и прикл. матем., 1:1 (1995), 161–176.

7. В. К. Захаров, Расширения кольца непрерывных функций, порождённые классическим, рациональным и регулярным кольцами частных как делимые оболочки // Матем. сб., 186:12 (1995), 81–118.

8. V. K. Zakharov, Classical extensions of the ring of continuous functions and the corresponding preimages of a completely regular space // J. of Math. Sciences, 73:1 (1995), 114–139.

9. В. К. Захаров, Связи между расширением Римана и классическим кольцом частных и между прообразом Семадени и секвенциальным абсолютом // Труды Моск. матем. об-ва, 57 (1996), 254–279.

10. В. К. Захаров, Характеризация расширения решеточного линейного пространства непрерывных ограниченных функций, порождённого функциями, μ-интегрируемыми по Риману, посредством порядковых границ // Алгебра и анализ, 35:4 (2023), 135–166. EDN: OSCXNS.

11. V. K. Zakharov, Characterization of the extension of lattice linear space of continuous bounded functions generated by μ-Riemann-integrable functions by means of order boundaries // Lobachevskii Journal of Math., 43:11 (2022), 3315–3334. DOI: 10.1134/S1995080222140384.

12. В. К. Захаров, Т. В. Родионов, Характеризация счетно-дедекиндова расширения решеточного линейного пространства непрерывных ограниченных функций посредством порядковых границ // Межд. конфер. “Математика в созвездии наук”. К юбилею ректора МГУ, акад. В. А. Садовничего. Тезисы докладов, М.: Издательский дом МГУ, 2024, 51–52.

13. V. K. Zakharov, T. V. Rodionov, Sets, Functions, Measures. Vol. I: Fundamentals of Set and Number Theory, *De Gruyter Studies in Mathematics*, vol. 68/1, Berlin: de Gruyter, 2018. DOI: 10.1515/9783110550948.

14. V. K. Zakharov, T. V. Rodionov, A. V. Mikhalev, Sets, Functions, Measures. Vol. II: Fundamentals of Function and Measure Theory, *De Gruyter Studies in Mathematics*, vol. 68/2, Berlin: de Gruyter, 2018. DOI: 10.1515/9783110550962.

15. К. Иосида, Функциональный анализ, Москва: Мир, 1967.

16. V. K. Zakharov, On functions connected with sequential absolute, Cantor completion, and classical ring of quotients // Periodica Math. Hungar, 19:2 (1987), 113–133.

17. Yu. Utumi, On quotient rings // Osaka Math. J., 8:1 (1956), 1–18.

REFERENCES

1. MacNeille, H. M., 1937. “Partially ordered sets”, *Trans. AMS*, vol. 42, no. 4, pp. 416–460. DOI: 10.2307/1989739.

2. Zakharov, V. K., 1981. “Functional characterization of absolute and Dedekind completion”, *Bull. de l’Academia Polonais des Sci. Ser. math.*, vol. 39, no. 5-6, pp. 293–297.

3. Zakharov, V. K., 2005. "Description of extensions of families of continuous functions by means of order boundaries", *Doklady Math.*, vol. 71, no. 1, pp.80–83.

4. Zakharov, V. K., 2006. "Characterization of the classical extensions of the family of continuous functions as Dedekind hulls", *Doklady Math.*, vol. 74, no. 3, pp.849–853. DOI: 10.1134/S1064562406060160.

5. Zakharov, V. K., 1987. "On functions connected with absolute, Dedekind completion, and divisible envelope" *Periodica Math. Hungar.*, vol. 18, no. 1, pp. 17–26.

6. Zakharov, V. K., 1995. "Connection between the classical ring of quotients of the ring of continuous functions and Riemann integrable functions", *Fundam. Prikl. Mat.*, vol. 1, no. 1, pp. 161–176 (in Russian).

7. Zakharov, V. K., 1995. "Extensions of the ring of continuous functions generated by the classical, rational, and regular rings of fractions as divisible hulls" *Sb. Math.*, vol. 186, no. 12, pp. 1773–1809.

8. Zakharov, V. K., 1995. "Classical extensions of the ring of continuous functions and the corresponding preimages of a completely regular space", *J. of Math. Sciences*, vol. 73, no. 1, pp. 114–139.

9. Zakharov, V. K., 1996. "Relationships between the Riemann extension and the classical ring of quotients and between the Semadeni preimage and the sequential absolute", *Trans. Moscow Math. Soc.*, vol. 57, pp. 223–243.

10. Zakharov, V. K., 2023. "Characterization of the extension of the lattice linear space of continuous bounded functions, generated by Riemann μ-integrable functions, by means of order boundaries" // *St. Petersburg Math. Journal*, vol. 35, no. 4.

11. Zakharov, V. K., Rodionov, T. V., 2024. "Characterization of the countably Dedekind extension of the lattice linear space of continuous bounded functions by means of order boundaries", *Int. confer. «Mathematics in the Constellation of Sciences», dedicated to the 85th anniversary of V. A. Sadovnichii. Abstracts*, MSU, Moscow, pp. 51–52 (in Russian).

12. Zakharov, V. K., Rodionov, T. V., 2018. "Sets, Functions, Measures. Vol. I: Fundamentals of Set and Number Theory", *De Gruyter Studies in Mathematics*, vol. 68/1, *de Gruyter, Berlin.* DOI: 10.1515/9783110550948.

13. Zakharov, V. K., Rodionov, T. V., Mikhalev, A. V., 2018. "Sets, Functions, Measures. Vol. II: Fundamentals of Function and Measure Theory", *De Gruyter Studies in Mathematics*, vol. 68/2, *de Gruyter, Berlin.* DOI: 10.1515/9783110550962.

14. Zakharov, V. K., 2022. "Characterization of the extension of lattice linear space of continuous bounded functions generated by μ-Riemann-integrable functions by means of order boundaries", *Lobachevskii Journal of Math.*, vol. 43, no. 11, pp. 3315–3334. DOI: 10.1134/S1995080222140384.

15. Yosida, K., 1965. "Functional Analysis", *Springer Verlag, Berlin.*

16. Zakharov, V. K., 1987. "On functions connected with sequential absolute, Cantor completion, and classical ring of quotients", *Periodica Math. Hungar.*, vol. 19, no. 2, pp. 113–133.

17. Utumi, Yu., 1956. "On quotient rings", *Osaka Math. J.*, vol. 8, no. 1, pp. 1–18.

Получено: 01.04.2024
Принято в печать: 04.09.2024

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 25. Выпуск 3.

УДК 515.124.4+519.852.3 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-101-117

Существование неприводимых мультиобходов кратности 2

А. О. Иванов, О. С. Щербаков

Иванов Александр Олегович — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова; Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана (г. Москва).
e-mail: aoiva@mech.math.msu.su

Щербаков Олег Сергеевич — Университетская гимназия, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова; Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана (г. Москва).
e-mail: shcherbakovos@yandex.ru

Аннотация

Ивановым и Тужилиным была предложена одномерная проблема Громова о минимальном заполнении конечных метрических пространств, где в качестве заполнений рассматриваются взвешенные графы с неотрицательными весами ребер. Они показали, что задача редуцируется к случаю так называемых бинарных деревьев — деревьев у которых вершины имеют только степени 1 и 3. Ерёминым была получена минимаксная формула веса минимального заполнения. Формула Ерёмина использует понятие минимального параметрического заполнения — фиксируется граф (параметризация или тип); он показал, что вес минимального параметрического заполнения равен максимальному значению так называемого мультипириметра среди всех неприводимых мультиобходов.

Сложность структуры бинарного дерева можно измерять количеством так называемых усов — пар граничных вершин с общей смежной вершиной. Настоящая работа посвящена изучению мультиобходов бинарных деревьев с тремя усами. Найдена линейная рекуррентная формула для числа бинарных деревьев с тремя усами. Установлена связь между неприводимостью мультиобходов и включениями мультиграфов мультиобходов для фиксированного бинарного дерева.

Недавно Щербаковым было доказано, что кратность неприводимого мультиобхода для бинарного дерева с тремя усами не превосходит 2, в этой работе доказано существование таких неприводимых мультиобходов у любого такого бинарного дерева.

Недавно Иванов и Тужилин предложили вычислять вес минимального параметрического заполнения, находя вершины многомерного многогранника допустимых значений переменных двойственной задачи линейного программирования с помощью компьютера. Разработанная в настоящей работе техника позволяет найти все неприводимые мультиобходы у бинарного дерева с 6 граничными вершинами и 3 усами без использования компьютерных вычислений.

Ключевые слова: конечное метрическое пространство, минимальное параметрическое заполнение, линейное программирование, многогранник бинарного дерева, мультициклический порядок, неприводимый мультиобход, мультиграф мультиобхода.

Библиография: 18 названий.

Для цитирования:
Иванов, А. О., Щербаков, О. С. Существование неприводимых мультиобходов кратности 2 // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 3, с. 101–117.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 25. No. 3.

UDC 515.124.4+519.852.3 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-101-117

Existence of irreducible multitours of multiplicity 2

A. O. Ivanov, O. S. Shcherbakov

Ivanov Alexandr Olegovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Lomonosov Moscow State University; Bauman Moscow State Technical University (Moscow).
e-mail: aoiva@mech.math.msu.su
Shcherbakov Oleg Sergeevich — University Gymnasium, Lomonosov Moscow State University; Bauman Moscow State Technical University (Moscow).
e-mail: shcherbakovos@yandex.ru

Abstract

Ivanov and Tuzhilin stated the problem of one-dimensional Gromov minimal filling of finite metric spaces, where the filling is considered as a weighted connected graph containing the metric space as a subset of its vertex set. They shown that the problem can be always reduced to the case of so-called binary trees — trees whose vertices have degrees 1 and 3 only. Later Eremin obtained a minimax formula for the weight of the minimal filling. Eremin's formula uses the concept of minimum parametric filling, i.e. the filling with a fixed graph (parameterization or type), and the weight of the minimal parametric filling turns out to be equal to the maximum value of so-called multi-perimeters over all irreducible multi-tours.

Moustaches of a binary tree is a pair of its vertices of degree 1 having a common adjacent vertex. The number of moustaches can measure complexity of binary trees. In this paper the multi-tours of binary trees with 3 moustaches are investigated. A linear recurrent formula is found for the number of such binary trees. For a fixed binary tree a connection is established between the irreducibility of multi-tours and inclusions of multi-tours multi-graphs.

Recently Shcherbakov proved that the multiplicity of an irreducible multi-tour for a binary tree with 3 moustaches does not exceed 2; in this paper the existence of such irreducible multi-tour for any binary tree with 3 moustaches is proved.

Ivanov and Tuzhilin proposed to calculate the weight of a minimal parametric filling by finding the vertices of a multidimensional polyhedron of feasible variable values of the dual linear programming problem. These their results are based on computer calculations. The technique developed in this paper permits to find all irreducible multi-tours of a binary tree with 6 boundary vertices and 3 moustaches without a computer.

Keywords: finite metric space, minimal parametric filling, linear programming, convex polytops of binary tree, irreduceble multi-torus, multigraph of multi-torus.

Bibliography: 18 titles.

For citation:
Ivanov, A. O., Shcherbakov, O. S. 2024, "Existence of irreducible multitours of multiplicity 2", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 3, pp. 101–117.

1. Введение

Задача о минимальном заполнении конечного метрического пространства появилась в [1] (см. краткое введение в [2], [3] или [4]). Она возникла как обобщение задачи Штейнера о кратчайшей сети (см. например [5]) и задачи Громова о минимальном заполнении гладкого

риманова многообразия [6]. Развитию этого сюжета посвящены работы [7], [8], [9], [11]. Так, например, теория минимальных заполнений позволила получить ряд продвижений в задаче об оценке отношения Штейнера, см. [10], [18].

Напомним общую постановку задачи. Пусть X — конечное метрическое пространство. Требуется найти взвешенное (с неотрицательной весовой функцией w на рёбрах) дерево G наименьшего веса такое, что выполнены условия: 1) множество X вкладывается в множество вершин дерева G; 2) для любых двух точек i и j метрического пространства X вес d_{ij} единственного пути Γ_{ij}, соединяющего их в дереве, не меньше расстояния ρ_{ij} между этими точками в метрическом пространстве.

Бинарными деревьями мы называем деревья у которых степени вершин могут принимать только значения 1 и 3. В [1] показано, что всегда вместо рассмотрения произвольных деревьев, можно ограничится рассмотрением бинарных деревьев, причем множество X совпадает при вложении с множеством вершин степени 1. При изучении минимальных заполнений естественно возникает задача о минимальном параметрическом заполнении. В такой постановке фиксируется дерево G (тип заполнения) и минимизируется весовая функция на ребрах графа в сделанных выше предположениях. В этом случае оказалось удобным перейти к так называемым *обобщённым заполнениям*, разрешив весовой функции w принимать отрицательные значения. В работе [12] доказано, что вес минимального заполнения совпадает с весом обобщённого заполнения для псевдометрического пространства.

В работе Еремина [4] получена формула веса обобщенного минимального параметрического заполнения в терминах так называемых *неприводимых мультиобходов*, и показано, что таких мультиобходов конечное число. Полученная в [4] оценка на число неприводимых мультиобходов для m-точечного метрического пространства равна $C^{2m-3}_{m(m-1)/2}$. Например, для 10-точечного метрического пространства означает $C^{17}_{45} \approx 1,1 \cdot 10^{12}$, а для 15-точечного — $C^{27}_{105} \approx 8,77 \cdot 10^{24}$, что делает перебор невозможным на практике.

В [2] поиск формулы веса минимального параметрического заполнения осуществляется так: задача о поиске минимального параметрического заполнения для бинарного дерева G рассматривается как задача линейного программирования, далее следует переход к двойственной задаче. Допустимое множество в двойственной задаче — некоторый многогранник $\mathbf{X}(G)$, он не зависит от метрического пространства, а зависит только от типа заполнения. От метрического пространства зависит только целевая функция в двойственной задаче. Согласно принципу двойственности минимум целевой функции исходной задачи совпадает с максимумом целевой функции двойственной задачи, поэтому вес минимального параметрического заполнения можно найти как максимум значений целевой функции в вершинах многогранника $\mathbf{X}(G)$. В [2] также установлено соответствие между рациональными точками многогранника $\mathbf{X}(G)$ и мультиобходами дерева G.

В [13] установлена биекция, между вершинами многогранника $\mathbf{X}(G)$ и неприводимыми мультиобходами, показано, что максимум целевой функции в двойственной задаче может достигаться на любой из вершин многогранника $\mathbf{X}(G)$, что означает, что для поиска формулы веса минимального параметрического заполнения в виде максимума значений целевой функции в вершинах многогранника $\mathbf{X}(G)$ необходимо найти все вершины $\mathbf{X}(G)$.

В [13] найдены все вершины многогранника $\mathbf{X}(G)$ для бинарных деревьев с 2 усами (так называемые деревья типа “змея”) и тем самым найдена формула веса минимального параметрического заполнения для этого случая. В [14] доказано, что кратность неприводимого мультиобхода бинарного дерева с 3 усами не превосходит 2. В настоящей работе устанавливается существование неприводимых мультиобходов кратности 2 у всех бинарных деревьев с 3 усами.

2. Необходимые определения и предварительные результаты

В настоящей работе *бинарным деревом* называется связный ацикличный простой конечный граф (т.е. дерево), у которого все вершины имеют степень 1 или 3. Вершины степени 3 называются *внутренними*, вершины степени 1 — *граничными* или *листьями*. Далее $G = (V, E)$ — бинарное дерево, V — множество его вершин, E — множество рёбер. Множество граничных вершин дерева G обозначим через M, а их число $|M|$ — через m. Обозначим $d = C_m^2$ — число неупорядоченных пар вершин из M, число рёбер бинарного дерева G обозначим r, тогда $r = 2m - 3$.

Бинарные деревья будем рассматривать с точностью до изоморфизма графов.

Мультициклический порядок кратности l на множестве $M = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ из m элементов — это отображение $\sigma : \mathbb{Z}_{lm} \longrightarrow M$, такое, что

$$1)\ \forall k \in \mathbb{Z}_{lm} \quad \sigma(k+1) \neq \sigma(k); \qquad\qquad 2)\ \forall v \in M \quad |\sigma^{-1}(v)| = l.$$

Мультициклический порядок на множестве $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ обозначим $(v_{i_1} v_{i_2} \dots v_{i_{lm}})$, где $v_{i_{k+1}} = \sigma(k)$, а когда обозначения вершин не важны, будем писать $(i_1 i_2 \dots i_{lm})$.

Путь, соединяющий граничные вершины i и j в дереве G, обозначим Γ_{ij} и будем называть *граничным*. Пути Γ_{ij} и Γ_{ji} отождествляем. По мультициклическому порядку σ построим *мультимножество* Γ^σ *граничных путей*:

$$\Gamma^\sigma := \{\Gamma_{\sigma(0)\sigma(1)}, \Gamma_{\sigma(1)\sigma(2)}, \dots, \Gamma_{\sigma(lm-1)\sigma(0)}\}.$$

Согласно *предложению 2.4* из [4] *мультиобходом* σ кратности l бинарного древа G будем называть такой мультициклический порядок на множестве его граничных вершин M, что через каждое ребро дерева G проходит ровно $2l$ его граничных путей из Γ^σ.

По Γ^σ построим вектор $w^\sigma = (\sigma_{12}, \dots, \sigma_{(m-1)m}) \in \mathbb{R}^{C_m^2}$, положив координату σ_{ij} равной количеству включений граничного пути Γ_{ij} в Γ^σ. Полученный вектор w^σ будем называть *вектором мультиобхода* σ.

Лемма 1. *([4], Предложение 2.5) Для всякого l-обхода σ через каждую пару смежных рёбер дерева G проходит ровно l граничных путей из Γ^σ.*

Мультиобходы σ и σ' бинарного дерева G назовём *эквивалентными*, если $w^\sigma = w^{\sigma'}$. Эквивалентность мультиобходов обозначим так: $\sigma \cong \sigma'$.

По бинарному дереву G построим матрицу A размера $r \times d$ (см. [2]): строки индексированы рёбрами G, столбцы — парами из M, элемент a_{ij}^k матрицы A определён условием:

$$a_{ij}^k = \begin{cases} 1, & \text{если } e_k \in \Gamma_{ij}; \\ 0, & \text{если } e_k \notin \Gamma_{ij}; \end{cases} \qquad 1 \leq k \leq r, \quad 1 \leq i < j \leq m.$$

Вектор-столбец $d \times 1$, все координаты которого равны 1, обозначим $\mathbb{I}$. В [2] каждому бинарному дереву G сопоставляется выпуклый многогранник

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(G) := \big\{x = (x_{12}, \dots, x_{(m-1)m}) \in \mathbb{R}^d \,:\, Ax = \mathbb{I}, \quad x_{ij} \geq 0, 1 \leq i < j \leq m\big\}. \tag{1}$$

Теорема 1. *([4], Теорема 3.3) Для всякого вектора w с целыми неотрицательными координатами, такого, что $Aw = 2l\mathbb{I}$, существует мультиобход σ, для которого данный вектор является вектором мультиобхода.*

По всякому l-обходу σ можно построить точку x многогранника $\mathbf{X}$, следующим образом: $x = \frac{1}{2l} w$, эту точку будем обозначать x^σ.

Неприводимые мультиобходы введены в [4] для формулы веса минимального параметрического заполнения. В работе [13] показано, что существует биекция между множеством вершин многогранника $\mathbf{X}$ и неприводимыми мультиобходами, опираясь на этот результат дадим следующее

Определение 1. *Мультиобход σ кратности l назовём* ***неприводимым****, если $x^\sigma = \frac{1}{2l}w^\sigma$ — вершина многогранника, и все координаты вектора w^σ взаимнопросты в совокупности, в противном случае мультиобход называется* ***приводимым****.*

Напомним, что *усы* бинарного дерева — это пара его граничных вершин, имеющих общую смежную вершину. Также усами называется соответствующая пара соседних ребер, инцидентных этим граничным вершинам.

Лемма 2. *([13], Лемма 4) Если пара вершин v_iv_j бинарного дерева G образуют усы, то соответственная координата x_{ij} точки многогранника $\mathbf{X}(G)$ равна $\frac{1}{2}$.*

Следствие 1. *Для любого l-обхода σ бинарного дерева G, если пара вершин v_iv_j образуют усы, то для вектора мультиобхода w^σ соответствующая координата $\sigma_{ij} = l$.*

Лемма 3. *Рассмотрим мультиобходы σ, ζ и τ кратностей l, k и t соответственно. Если для векторов мультиобходов для некоторого $n \in \mathbb{N}$ выполнено равенство:*

$$nw^\sigma = w^\zeta + w^\tau, \tag{2}$$

то мультиобход σ приводим, причём кратности связаны соотношением $nl = k + t$.

Доказательство. Из равенства (2), применив к обоим частям матрицу A, получаем $nl = k + t$. Разделим обе части равенства (2) на $2nl$, получим

$$x^\sigma = \frac{1}{2nl}\left(\frac{2k}{2k}w^\zeta + \frac{2t}{2t}w^\tau\right) = \frac{k}{nl}x^\zeta + \frac{t}{nl}x^\tau.$$

Значит точка x^σ лежит между точками x^ζ и x^τ, то есть не является вершиной многогранника $\mathbf{X}$, откуда следует приводимость σ по определению 1. □

2.1. Мультиграфы

В настоящей работе под *мультиграфом* понимается простой граф, каждому ребру которого сопоставлено целое неотрицательное число, называемое *кратностью*. Считаем, что несмежные вершины — то же что и вершины, связанные ребром кратности 0.

Определим *произведение мультиграфа G на натуральное число l*, как мультиграф lG у которого множество вершин совпадает с множеством вершин графа G, а кратности всех рёбер увеличены в l раз.

Пусть у мультиграфов G_1 и G_2 совпадают множества вершин: $V_1 = V_2 = V$. Определим *сумму мультиграфов* как мультиграф $G_1 + G_2$, множество вершин которого V, а кратность ребра, связывающего вершины v_i и v_j, равна сумме кратностей этого ребра в G_1 и G_2.

Обозначим через $K(M)$ полный граф с множеством вершин M. Напомним, что последовательность смежных вершин и рёбер, такая, что все рёбра различны, называется *цепью*. Ясно, что для задания цепи в простом графе достаточно указывать только вершины.

Последовательность вершин $v_{i_1}v_{i_2}\dots v_{i_k}$ множества M, где соседние вершины различны, представляет собой цепь в графе $nK(M)$ для некоторого n. Вершины v_{i_1} и v_{i_k} назовем *концами* цепи. Если концы цепи совпадают ($v_{i_1} = v_{i_k}$), то будем говорить что цепь *замкнута*, то есть является *циклом*, и писать $(v_{i_1}v_{i_2}\dots v_{i_{k-1}})$.

Иногда, вместо $v_{i_1}v_{i_2}\dots v_{i_k}$ будем писать $i_1i_2\dots i_k$, если ясно о каких вершинах идёт речь.

Мультициклический порядок $(v_{i_1}\dots v_{i_{lm}})$ можно рассматривать как замкнутую цепь в графе $lK(M)$. Если мультициклический порядок имеет вид $\sigma = (\dots \underbrace{ijk}_{A} \dots)$, то будем говорить что цепь $A = ijk$ *входит* в σ и т.п. Заметим, что 1-обходу соответствует гамильнотов цикл в полном графе $K(M)$.

Цепи $i_1i_2\dots i_n$ соответствует последовательность граничных путей $\Gamma_{i_1i_2}$, $\Gamma_{i_2i_3}$, …, $\Gamma_{i_{n-1}i_n}$.

По l-обходу σ определим мультиграф G^σ: в качестве множества вершин графа G^σ возьмём M, каждую пару вершин i и j соединим ребром кратности σ_{ij}. Ясно, что $G^\sigma \subset lK(M)$.

2.2. Побеги и обходы

Начнем с описания вспомогательной конструкцию так называемого побега.

Процедура приклеивания усов. Рассмотрим бинарное дерево G с граничной вершиной w. Добавим к множеству вершин этого дерева ещё две вершины v_1 и w_1 и соединим каждую из них ребром с вершиной w, получим бинарное дерево G_1 с усами (v_1, w_1). Будем говорить, что дерево G_1 получено из бинарного дерева G путём *приклеивания усов* (v_1, w_1) *к вершине* w.

Процедура выращивания побега из p листьев ($p \geq 2$). Рассмотрим бинарное дерево G с граничной вершиной w, переобозначим её через w_p. Приклеим усы (v_p, w_{p-1}) к бинарному дереву G по вершине w_p, получим бинарное дерево G_1, далее из G_1 приклеиванием усов (v_{p-1}, w_{p-2}) к вершине w_{p-1}, получим бинарное дерево G_2, и так далее. На последнем $(p-1)$-м шаге к дереву G_{p-2} с усами (v_3, w_2), приклеенными на предыдущем шаге, приклеиваем усы (v_2, v_1) к вершине w_2, получаем дерево G_{p-1}.

Наименьшее бинарное поддерево A дерева G_{p-1}, содержащие все вершины $(v_1, \dots v_p)$, назовём *побегом*. Вершину v_p будем называть *концевой вершиной побега*. Если $p = 2$, то побег, по определению, состоит из одних лишь усов.

Будем говорить, что дерево G_{p-1} получено из дерева G путём *выращивания побега A из p листьев из вершины w*. Пусть e — единственное ребро, смежное с w в дереве G, и o — другая вершина этого ребра, тогда e и o входят в побег, ибо побег мы определили как бинарное поддерево. Вершину o мы будем называть *корнем* побега.

Пусть бинарное дерево G содержит побег A из p листьев (рис. 1), а нумерация первых p вершин дерева G совпадает с нумерацией вершин побега A.

Лемма 4. *([14], Лемма 1) Для любого l-обхода σ дерева G справедливо:*

$$\sigma \cong (\dots * A_1 * \dots * A_2 * \quad \dots \quad * A_l * \dots), \tag{3}$$

где $A_k, k = \overline{1..l}$, представляют собой цепи вида

$$A_k = J_k 1 I_k, \tag{4}$$

где

$$J_k = j^k_{q_k} \dots j^k_2 j^k_1 \quad \text{и} \quad I_k = i^k_1 i^k_2 \dots i^k_{r_k}, \qquad q_k + r_k = p - 1,$$

$$\left\{j^k_{q_k}, \dots, j^k_2, j^k_1\right\} \sqcup \left\{i^k_1, i^k_2, \dots, i^k_{r_k}\right\} = \{2, 3, 4, \dots, p\}, \quad j^k_{q_1} > \dots > j^k_2 > j^k_1 \quad \text{и} \quad i^k_1 < i^k_2 < \dots < i^k_{r_k}.$$

Символом $*$ обозначены какие-то граничные вершины, не входящие в побег A.

Цепь A_i будем называть так же *путём по побегу A*.

2.3. Бинарные деревья с тремя усами

Множество бинарных деревьев ровно с тремя усами будем обозначать через $\mathfrak{B}_3$. Через Y обозначим единственное бинарное дерево с 3 граничными вершинами.

Лемма 5. *([14] Лемма 2) Всякое бинарное дерево G из $\mathfrak{B}_3$ состоит из 3 побегов с общим корнем. Побеги выращены из граничных вершин дерева Y, а их корень — единственная внутренняя вершина Y.*

Заметим, что количество граничных вершин в побегах однозначно определяют дерево из $\mathfrak{B}_3$.

Рассмотрим бинарное дерево из $\mathfrak{B}_3$ и обозначим его побеги через A, B и C. Следующая теорема объединяет результаты теорем 1, 2 и следствия 3 из [14]:

Теорема 2. *Неприводимые мультиобходы бинарного дерева из $\mathfrak{B}_3$, с точностью до эквивалентности, состоят из путей A_k, B_k, C_k по побегам A, B, C и могут быть только такими*:

$$\text{а)} \quad \sigma \cong (A_1B_1C_1) \qquad \text{или} \qquad \text{б)} \quad \sigma \cong (A_1B_1C_1A_2B_2C_2), \tag{5}$$

причём в случае б) если a_p — концевая вершина побега A, то $A_1 = a_pA_1'$ и $A_2 = A_2'a_p$ или $A_1 = A_1'a_p$ и $A_2 = a_pA_2'$, аналогично для побегов B и C.

Следствие 2. *([14], Теорема 3) У бинарного дерева из $\mathfrak{B}_3$ существует не более чем $2^{2(m-5)}$ неприводимых 2-обходов.*

2.4. Оценка на число вершин многогранника

Напомним критерий (см. например [15] Теорема 2.1) того, что точка многогранника заданного условиями (1), является его вершиной (угловой точкой).

Столбцы матрицы A обозначим $A_{12}, A_{13} \ldots, A_{(m-1)m}$ (в соответствии с парами вершин), условие $Ax = \mathbb{I}$ переписывается в виде

$$A_{12}x_{12} + A_{13}x_{13} + \ldots + A_{(m-1)m}x_{(m-1)m} = \mathbb{I}.$$

Как показано в [2] (Лемма 2.2), матрица A имеет максимальный ранг $r = 2m - 3$.

Теорема 3. *Для того, чтобы точка x была угловой для множества $\mathbf{X}$, необходимо и достаточно, чтобы нашлось $r = \operatorname{rang} A$ линейно-независимых столбцов $A_{\varkappa_1}, A_{\varkappa_2}, \ldots A_{\varkappa_r}$ матрицы A, таких что*:

$$A_{\varkappa_1}x_{\varkappa_1} + A_{\varkappa_2}x_{\varkappa_2} + \ldots + A_{\varkappa_r}x_{\varkappa_r} = \mathbb{I}, \tag{6}$$

причём $x_{\varkappa_s} \geq 0$, $s = 1, \ldots, r$, а все остальные $x_{ij} = 0$.

Как показано в [13], число неприводимых мультиобходов бинарного дерева в точности совпадает с числом вершин многогранника бинарного дерева, это число обозначим через $\nu(G)$. Число неприводимых мультиобходов кратности k дерева G будем обозначать через $\nu_k(G)$.

В работе [4] (следствие 3.25) была получена верхняя оценка на число неприводимых мультиобходов бинарного дерева: $\nu(G) \leq C_d^r$. Она получена как число выборок r столбцов матрицы A размера $r \times d$. Эту оценку можно улучшить.

Предложение 1. *Пусть y — количество усов бинарного дерева, тогда $\nu(G) \leq C_{d-y}^{r-y}$.*

Доказательство. Если вершины с номерами i и j образуют усы, то по лемме 2 $x_{ij} = \frac{1}{2}$, значит все столбцы A_{ij} соответствующие усам бинарного дерева должны участвовать в выборке столбцов в правой части равенства (6), таких столбцов y откуда получаем указанную оценку. □

Отметим, что при $m = 10$ для нахождения вершин многогранника перебором с помощью теоремы 3 число выборок столбцов матрицы A составляло $C_{45}^{17} \approx 1,1 \times 10^{12}$, с учётом предложения 1 получаем для бинарного дерева с 4 усами $C_{41}^{13} \approx 1,76 \times 10^{10}$, что прмерно в 62,6 раза меньше; а для 5 усов $C_{40}^{12} \approx 5,6 \times 10^9$, что почти в 200 раз меньше.

3. Число бинарных деревьев с 3 усами и m листьями

При доказательстве следующего предложения используются диаграммы Юнга, позволяющие наглядно представлять разбиения натурального числа в сумму натуральных слагаемых (см. необходимые определения например в [16], [17]).

Предложение 2. *Пусть λ_m — число бинарных деревьев из $\mathfrak{B}_3$ с m листьми, тогда $m \geq 6$ и выполнено линейное рекуррентное соотношение*

$$\lambda_m = \lambda_{m-1} + \lambda_{m-2} - \lambda_{m-4} - \lambda_{m-5} + \lambda_{m-6},$$

с начальными условиями $\lambda_6 = 1$, $\lambda_7 = 1$, $\lambda_8 = 2$, $\lambda_9 = 3$, $\lambda_{10} = 4$.

Доказательство. Согласно лемме 5 всякое дерево из $\mathfrak{B}_3$ состоит из трёх побегов, причем дерево определяется длинами этих побегов с точностью до изоморфизма. Пусть p, q, r — число листьев в каждом из побегов. Тройку натуральных чисел всегда можно упорядочить по убыванию, будем считать, что $p \geq q \geq r \geq 2$. Введем обозначения: $\tilde{p} := p - 2$, $\tilde{q} := q - 2$, $\tilde{r} := r - 2$. Получаем, что бинарные деревья из $\mathfrak{B}_3$ задаются однозначно тройкой чисел $(\tilde{p}, \tilde{q}, \tilde{r})$. Числа $\tilde{p}$, $\tilde{q}$, $\tilde{r}$ это числа вершин степени 1 не входящих в усы в побегах A, B, C соответственно.

Поскольку $\tilde{p} \geq \tilde{q} \geq \tilde{r} \geq 0$, то каждому элементу из $\mathfrak{B}_3$ взаимно-однозначно соответствует диаграмма Юнга $(\tilde{p}, \tilde{q}, \tilde{r})$. Вес такой диаграммы $n = \tilde{p} + \tilde{q} + \tilde{r} = p + q + r - 6 = m - 6$. Ясно, что все такие диаграммы Юнга лежат в полосе шириной 3 клетки. Число диаграмм Юнга веса n в такой полосе обозначим λ_n его можно найти с помощью производящей функции ([16], п.2.3):

$$\Lambda(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k s^k = \frac{1}{(1-s^3)(1-s^2)(1-s)} =$$
$$= 1 + s + 2s^2 + 3s^3 + 4s^4 + 5s^5 + 7s^6 + 8s^7 + 10s^9 + 12s^{10} + 14s^{11} + 16s^{12} + \ldots$$

Поскольку многочлен, стоящий в знаменателе производящей функции, имеет вид:

$$(1-s^3)(1-s^2)(1-s) = 1 - s - s^2 + s^4 + s^5 + s^6,$$

получаем (см. например [17], п.2.3) рекуррентное соотношение:

$$\lambda_n = \lambda_{n-1} + \lambda_{n-2} - \lambda_{n-4} - \lambda_{n-5} + \lambda_{n-6}.$$

Учитывая первые пять коэффициентов производящей функции $\Lambda(s)$ и то, что $m = n + 6$, получаем утверждение. □

4. Существование мультиобходов

Лемма 4 утверждает, что всякий мультиобход эквивалентен мультиобходу вида (3). В работе [14] *a priori* не ясно, каждое ли выражение вида (3) соответствует некоторому мультиобходу. Оказывается, ответ положительный, см. теорему 4 ниже.

Лемма 6. *Пусть G — бинарное дерево с границей M, и A — некоторый его побег. Пусть σ — мультициклический порядок кратности l на M, имеющий вид $\sigma = (\ldots * A_1 * \ldots * A_l * \ldots)$, где пути A_k, $k = \overline{1..l}$, по побегу A определены равенством* (4). *Тогда через каждое ребро побега A проходит ровно $2l$ граничных путей из Γ^σ.*

Доказательство. Пусть σ — мультициклический прядок заданный формулой (3), и номер каждой граничной вершины в правой части (3) содержится ровно l раз, значит через каждое ребро $e_1, e_2, \ldots, e_p$ проходит ровно $2l$ граничных путей (см. рис. 1). Остаётся показать, что через все рёбра $f_2, \ldots, f_p$ проходит ровно $2l$ путей.

Обозначим внутренние вершины $w_2, w_3 \ldots w_p$ побега A как на рисунке 1 (w_i смежна v_i, $w_{p+1} = o$ — корень побега), тогда $f_k = \{w_k w_{k+1}\}$. Граничный путь Γ_{ij}, $2 \le i < j \le p$, проходит через рёбра $e_i, f_i, f_{i+1}, \ldots, f_{j-1}, e_j$. Граничный путь Γ_{k*}, $k \ge 2$, связывающий вершину v_k и вершину $* \notin A$ проходит через ребра $e_k, f_k, f_{k+1}, \ldots, f_p$ в побеге A. Для граничных путей вида Γ_{1j} и Γ_{1*} имеем последовательности рёбер $e_1, f_2, \ldots, f_{j-1}, e_j$ и $e_1, f_2, \ldots, f_p$ соответственно.

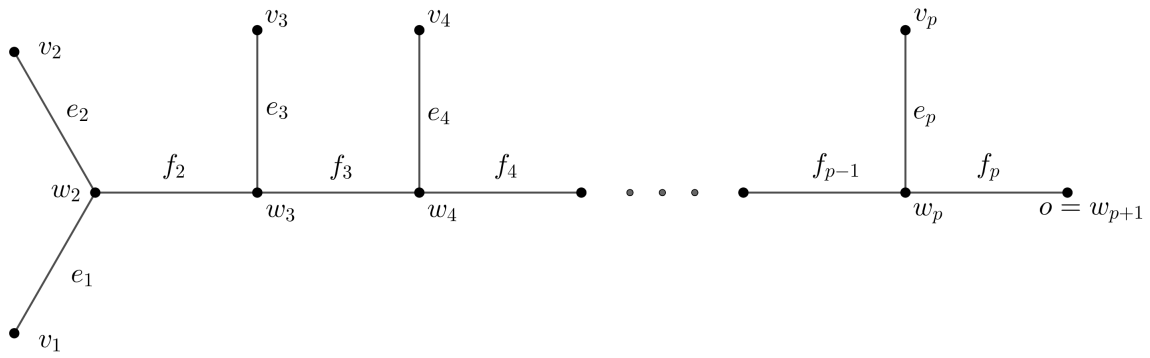


Рис. 1: Побег A

Каждая цепь A_k имеет вид (4), значит она разбивается на две цепи $j_q j_{q-1} \ldots j_1 1$ и $1 i_1 i_2 \ldots i_r$ которые пересекаются по вершине a_1. Так цепи $1 i_1 i_2 \ldots i_r$ соответствует последовательность граничных путей $\Gamma_{1i_1}, \Gamma_{i_1 i_2}, \ldots \Gamma_{i_{r-1} i_r}, \Gamma_{i_r *}$. Каждое ребро f_i $i = \overline{2 \ldots p}$ ровно 1 раз встречается в этой последовательности, тоже верно для цепи $j_q j_{q-1} \ldots j_1 1$. Значит для каждой цепи A_k через каждое ребро f_i проходит пара граничных путей, и поскольку $k = \overline{1..l}$, то таких путей $2l$. Если граничный путь в дереве проходит через ребро побега, то не менее одной его граничной вершины принадлежит этому побегу. Заметим, что никакое ребро f_i не может быть включено больше чем $2l$ раз в множество граничных путей Γ^σ, ибо это означало бы что в σ больше чем $2l$ вершин побега A, что невозможно. □

Теорема 4. *Правые части в формулах* (5) *— это мульциклические порядки, которые являются мультиобходами соответствующего дерева из $\mathfrak{B}_3$.*

Доказательство. Правые части в формулах (5) представляют собой мультициклические порядоки кратностей $l = 1$ и $l = 2$ по определению. Через каждое ребро побега A по лемме 6 проходит ровно $2l$ граничных путей, тоже верно для побегов B и C. Значит через каждое ребро дерева из $\mathfrak{B}_3$ проходит $2l$ граничных путей, откуда σ — мультиобход по определению. □

Теорема 5. *Для бинарного дерева из $\mathfrak{B}_3$ с m граничными вершинами $\nu_1 = 2^{m-3}$.*

Доказательство. Пусть бинарное дерево $G \in \mathfrak{B}_3$ состоит из побегов A, B, C из p, q и r листьев соответственно. По теореме 2 произвольный 1-обход σ имеет вид $(A_1B_1C_1)$. Цепь $A_1 = J_1 1 I_1$, цепи J_1 и I_1 строятся разбиением множества на 2 подмножества множества $\{a_2, a_3, \dots a_p\}$, ясно, что таких разбиений возможно 2^{p-1}. Аналогично для B_1 и C_1. Подпишем число возможных разбиений под каждой цепью:

$$(\underbrace{A_1}_{2^{p-1}}\ \underbrace{B_1}_{2^{q-1}}\ \underbrace{C_1}_{2^{r-1}}),$$

Заметим, что разным разбиениям соответствуют различный набор граничных путей, а значит и различные обходы. Согласно теореме 4 все они существуют, откуда: $\nu_1 = 2^{p+q+r-3} = 2^{m-3}$. □

5. Существование неприводимых 2-обходов

По теореме 4 все мультициклические порядки вида (5) являются мультиобходами. Как показываает следующий пример, нельзя утверждать, что каждый 2-обход вида (5) неприводим.

5.1. Важный пример

Рассмотрим бинарное дерево $G \in \mathfrak{B}_3$, состоящее из побегов с листьями: $(1, 2)$, $(3, 4)$ и $(5, 6, 7, 8)$, расположенными как рисунке 2.

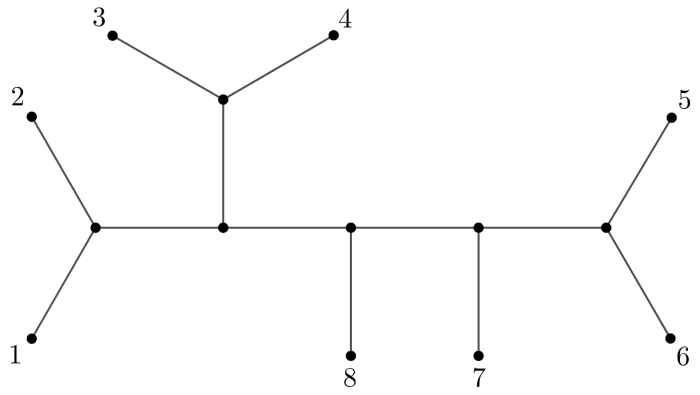


Рис. 2: Одно из двух бинарных деревьев из $\mathfrak{B}_3$ с 8 граничными вершинами

Рассмотрим мультиобходы σ, τ, ζ и их векторы мультиобходов w^σ, w^τ, w^ζ. Имеем:

$$\sigma = (\underbrace{12}_{A_1}\ \underbrace{43}_{B_1}\ \underbrace{7658}_{C_1}\ \underbrace{21}_{A_2}\ \underbrace{34}_{B_2}\ \underbrace{8657}_{C_2}),$$

$$w^\sigma = (2,1,0,0,0,1,0,0,1,0,0,0,1,2,0,0,1,0,0,0,0,1,2,1,1,1,1,0),$$

$$\tau = (\underbrace{12}_{A_1}\ \underbrace{43}_{B_1}\ \underbrace{7568}_{C_1}\ \underbrace{21}_{A_2}\ \underbrace{34}_{B_2}\ \underbrace{8657}_{C_2}),$$

$$w^\tau = (2,1,0,0,0,1,0,0,1,0,0,0,1,2,0,0,1,0,0,0,0,1,2,2,0,0,2,0),$$

$$\zeta = (\underbrace{12}_{A_1}\ \underbrace{43}_{B_1}\ \underbrace{7658}_{C_1}\ \underbrace{21}_{A_2}\ \underbrace{34}_{B_2}\ \underbrace{8567}_{C_2}),$$

$$w^\zeta = (2,1,0,0,0,1,0,0,1,0,0,0,1,2,0,0,1,0,0,0,0,1,2,0,2,2,0,0).$$

Ясно, что данные мультиобходы имеют вид (5). Но по лемме 2 мультиобход σ приводим, ибо $2w^\sigma = w^\tau + w^\zeta$, а это легко видеть из их координатных записей (координаты всех трёх векторов отличаются лишь в последних 5 знаках).

Отметим, что для координат точек многогранника $\mathbf{X}(G)$, имеем:

$$x^\sigma = \frac{1}{2}x^\tau + \frac{1}{2}x^\zeta$$

То есть точка x^σ — середина отрезка $[x^\tau, x^\zeta]$.

5.2. Мультиграфы мультиобходов и приводимость мультиобходов

Лемма 7. *Пусть дан l-обход σ бинарного дерева G у которого более 2 вершин. Тогда для вектора $w^\sigma = (\sigma_{12}, \ldots, \sigma_{(m-1)m})$ мультиобхода σ для всех координат выполнено $\sigma_{ij} \le l$.*

Доказательство. Рассмотрим вершину v_i, обозначим смежное ей ребро e, а пару рёбер смежных ребру e обозначим через f_1 и f_2 (рис. 3). Граничный путь Γ_{ij}, связывающий вершины v_i и v_j, проходит только через одно из этих рёбер: или через f_1, или через f_2. Пусть это ребро f_1. По лемме 1 ровно l граничных путей в мультиобходе проходит через пару рёбер (e, f_1). Значит граничных путей в мультиобходе σ из v_i в v_j не более чем l. □

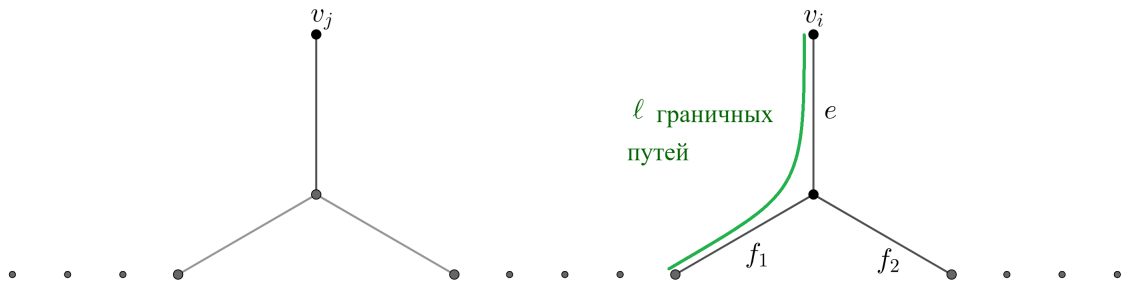


Рис. 3: Дерево G

Следствие 3. *В мультиграфе G^σ мультиобхода σ кратности l бинарного дерева G с числом рёбер $r \ge 3$ каждое ребро имеет кратность не более чем l.*

Заметим, что $G^\sigma \subset G^\tau$ эквивалентно тому, что $\sigma_{ij} \le \tau_{ij}$ для всех ij.

Теорема 6. *Пусть l-обход σ приводим, причём для соответствующей точки многогранника $\mathbf{X}(G)$ выполнено:*

$$x^\sigma = \lambda_1 x^{\xi^1} + \ldots + \lambda_n x^{\xi^n}, \qquad \lambda_k > 0,\ k = \overline{1..n}, \quad \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1, \tag{7}$$

где $\xi^1, \ldots, \xi^n$ — мультиобходы кратностей $l_1, \ldots, l_n$, а $x^{\xi^1}, \ldots x^{\xi^n}$ — соответствующие точки многогранника $\mathbf{X}(G)$. Тогда имеют место следующие включения мультиграфов соответствующих мультиобходов:

$$1)\ G^{\xi^k} \subset l_k G^\sigma, \qquad 2)\ G^\sigma \subset l(G^{\xi^1} + \ldots + G^{\xi^n}).$$

Доказательство. 1) Рассмотрим $\xi = \xi^k$ — мультиобход из правой части (7). Требуется показать, что $\xi_{ij} \le l_k \sigma_{ij}$ для всех ij. Пусть вершины i и j связаны ребром в G^ξ кратности

$\xi_{ij} \geq 1$. Поскольку $\lambda_k > 0$, получаем, что ij-координата в правой части равенства (7) отлична от 0. Для левой части (7) это означает, что $x^\sigma_{ij} > 0$. Далее $x^\sigma_{ij} = \frac{1}{2l}\sigma_{ij} > 0$, но $\sigma_{ij} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, значит $\sigma_{ij} \geq 1$, откуда $l_k\sigma_{ij} \geq l_k$. Осталось заметить, что кратность мультиобхода $\xi = \xi^k$ равна l_k по предположению, откуда по лемме 7 получим $\xi_{ij} \leq l_k \leq l_k\sigma_{ij}$.

2) Требуется доказать, что $\sigma_{ij} \leq l(\xi^1_{ij} + \xi^2_{ij} + \ldots + \xi^n_{ij})$ для всех ij. Для ij-координаты равенство (7) запишется в виде:

$$\frac{1}{2l}\sigma_{ij} = \lambda_1\frac{1}{2l_1}\xi^1_{ij} + \lambda_2\frac{1}{2l_2}\xi^2_{ij} + \ldots + \lambda_n\frac{1}{2l_n}\xi^n_{ij}.$$

Пусть $\sigma_{ij} > 0$, тогда и правая часть строго больше 0, следовательно найдётся такой мультиобход ξ^k, что $\xi^k_{ij} > 0$, значит $\xi^k_{ij} \geq 1$, откуда $l\xi^k_{ij} \geq l$. Отсаётся заметить, что $\sigma_{ij} \leq l$ в силу леммы 7. □

Следствие 4. *Если $\xi = \xi^k$ — 1-обход в условиях предыдущей теоремы, то $G^\xi \subset G^\sigma$.*

5.3. Неприводимые мультиобходы кратности 2 дерева с 3 усами и 6 граничными вершинами

В этом разделе $G \in \mathfrak{B}_3$ и имеет 6 граничных вершин.

В работе [2] полностью разобран случай (раздел 3.3) дерева G: найдены все вершины многогранника этого бинарного дерева, все неприводимые мультиобходы и соответствующие мультиграфы. Для этого в [2] с помощью компьютера найдены все вершины допустимого множества — многогранника $\mathbf{X}(G)$. При таком подходе нужно решить 5005 (или 924, с учётом предложения 1) систем линейных уравнений 9×9, что делает ручную проверку практически невозможной.

Разработанная в данной работе техника позволяет решить задачу о поиске всех неприводимых мультиобходов дерева G, не прибегая к компьютерным вычислениям. Для этого будем использовать теорему 2, ограничивающую кратность неприводимых мультиобходов и теорему 4, устанавливающую существование мультиобходов указанного вида.

Построим всевозможные мультиобходы для G, которые могут быть неприводимы в теореме 2 и докажем их неприводимость. Начнём с построения 1-обходов. Согласно теореме 2 обходы имеют вид: $(A_1B_1C_1)$, где для цепи A_1 возможно 2 варианта: $A_1 = 12$ или $A_1 = 21$. Для B_1 возможно $B_1 = 34$ или $B_1 = 43$ и $C_1 = 56$ или $C_1 = 65$. Итого получаем $2^3 = 8$ возможных 1-обходов:

$$\xi^1 \cong (123456), \quad \xi^2 \cong (123465), \quad \xi^3 \cong (124356), \quad \xi^4 \cong (124365),$$

$$\xi^5 \cong (213456), \quad \xi^6 \cong (213465), \quad \xi^7 \cong (214356), \quad \xi^8 \cong (214365).$$

Построим мультиобходы кратности 2. Согласно теореме 2 их не более 4, далее по теореме 2 они имеют вид $(A_1B_1C_1A_2B_2C_2)$. Для цепей A_i, B_i, C_i $(i = 1, 2)$ возможен такой же выбор как и для цепей A_1, B_1, C_1 в случае 1-обходов. По теореме 2 две цепи в неприводимом 2-обходе, соответствующие одному побегу, не могут обе сразу начинаться или заканчиваться концевой вершиной побега, то есть случаи когда $A_1 = A_2$ дают приводимые мультиобходы. Для побега из 2 листьев это означает, что цепь A_2 полностью определена цепью A_1, и тоже справедливо для B_i и C_i. Итого получается $2^3 = 8$ вариантов для построения мультиобхода. В доказательстве теоремы 2 в [14] отмечено, что мультиобходы вида $(A_1B_1C_1A_2B_2C_2)$ и $(A_2B_2C_2A_1B_1C_1)$ совпадают, из двух возможных вариантов выбора A_1 будем выбирать тот у которого $A_1 = 12$, значит остаётся всего 4 мультиобхода, которые могут быть неприводимы:

$$\sigma^1 = (123456214365),\ \sigma^2 = (124356213465),\ \sigma^3 = (123465213456),\ \sigma^4 = (124365213456). \quad (8)$$

Мультиобходу ξ кратности l соответствует замкнутая цепь в $lK(M)$, проходящая через каждую вершину ровно l раз , в частности при $l = 1$ эта цепь представляет собой гамильтононов цикл в $K(M)$ состоящий из рёбер графа G^{ξ}.

Рассмотрим граф Δ на рисунке 4. Пусть E — множество рёбер графа Δ, а $E' := \{(12), (34), (56)\} \subset E$.

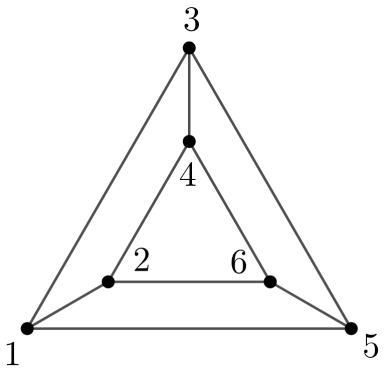


Рис. 4: Граф Δ

Лемма 8. *В графе Δ не существует гамильтонового цикла, проходящего через все рёбра из E'.*

Доказательство. От противного, пусть такой гамильтонов цикл существует. Прохождение по ребру из E' меняет чётность номера вершины, а прохождение по ребру из $E\backslash E'$ нет. В таком цикле 6 рёбер, ровно 3 из E', значит чётность меняется 3 раза, что невозможно. □

Далее нам понадобится мультиграф Δ', вершины которого такие же как у графа Δ, рёбра из E' имеют кратность 2, а рёбра из $E\backslash E'$ — кратность 1. Лемма 8 легко обобщается на случай мультиграфа Δ'.

Теорема 7. *Для бинарного дерева $G \in \mathfrak{B}_3$ с 6 граничными вершинами, его 2-обходы σ^i, $i = \overline{1..4}$ неприводимы.*

Доказательство. Для мультиобходов σ^i, $i = \overline{1..4}$ рассмотрим их мультиграфы: G^{σ^i}, $i = \overline{1..4}$ (рис. 5). Несложно видеть, что все они изоморфны графу Δ'.

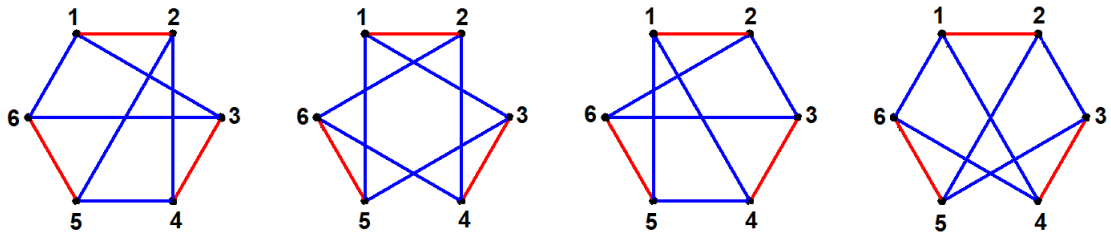


Рис. 5: Мультиграфы мультиобходов σ^1, σ^2, σ^3, σ^4 соответственно (красные рёбра имеют кратность 2, синие — кратность 1.)

Положим $\sigma^i = \tau$ для некоторого финансированного i, а оставшиеся 3 мультиобхода σ^j обозначим как σ, η, ζ.

Пусть $\mathbf{X}^1$ — выпуклая оболочка всех точек многогранника $\mathbf{X}$, соответствующих 1-обходам. Заметим, что таких точек 8, по теореме об 1-обходах, обозначим их $x^{\xi^1}, \dots x^{\xi^8}$. Поскольку мультиобход τ имеет кратность 2, по определению точки многогранника x^{τ}, получаем $x^{\tau} = \frac{1}{4} w^{\tau}$.

Покажем, что $x^\tau \notin \operatorname{conv}\{\mathbf{X}^1, \sigma, \eta, \zeta\}$. От противного, тогда

$$x^\tau = \lambda_1 x^{\xi^1} + \ldots + \lambda_8 x^{\xi^8} + \lambda_9 x^\sigma + \lambda_{10} x^\eta + \lambda_{11} x^\zeta, \qquad \lambda_k \geq 0,\ k = \overline{1..11}, \quad \sum_{k=1}^{11} \lambda_k = 1. \tag{9}$$

Сначала покажем, что $\lambda_1 = \ldots = \lambda_8 = 0$. От противного, рассмотрим такой $\xi = \xi^k$ при котором коэффициент $\lambda_k > 0$, из следствия 4 получаем включение $G^\xi \subset G^\tau$. С другой стороны пары вершин $(1,2)$, $(3,4)$ и $(5,6)$ образуют усы. По следствию 1 получаем $\xi_{12} = \xi_{34} = \xi_{56} = 1$, и все ребра из E' входят в G^ξ. По лемме 8 гамильтонов цикл, соответствующий ξ, не может содержаться в G^τ, то есть $G^\xi \not\subset G^\tau$ — противоречие.

Далее рассмотрим 4 точки x^{σ^i}, $i = \overline{1..4}$, соответствующие мультиобходам σ^i:

$$x^{\sigma^1} = \frac{1}{2}(2,0,1,1,0,1,0,0,1,2,0,1,1,0,2), \qquad x^{\sigma^2} = \frac{1}{2}(2,1,0,1,0,0,1,0,1,2,1,0,0,1,2),$$
$$x^{\sigma^3} = \frac{1}{2}(2,0,1,0,1,1,0,1,0,2,1,0,0,1,2), \qquad x^{\sigma^4} = \frac{1}{2}(2,1,0,0,1,0,1,1,0,2,0,1,1,0,2).$$

Рассмотрим векторы $u_j = x^{\sigma^j} - x^{\sigma^4}$, $j = 1,2,3$:

$$u_1 = \frac{1}{2}(0,-1,1,1,-1,1,-1,-1,1,0,0,0,0,0,0),$$
$$u_2 = \frac{1}{2}(0,0,0,1,-1,0,0,-1,1,0,1,-1,-1,1,0),$$
$$u_3 = \frac{1}{2}(0,-1,1,0,0,1,-1,0,0,0,1,-1,-1,1,0).$$

Эти векторы линейно независимы, значит 4 точки x^{σ^i}, $i = \overline{1..4}$, аффинно независимы, следовательно равенство (9) невыполнимо, следовательно мультиобходы $\sigma^1, \ldots, \sigma^4$ кратности 2 неприводимы. □

5.4. Существование неприводимого мультиобхода у бинарного дерева с 3 усами

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема 8. *У всякого дерева G из $\mathfrak{B}_3$ существуют неприводимые мультиобходы кратности* 2.

Доказательство. От противного, в силу теоремы 2, кратность неприводимых мультиобходов ≤ 2, тогда неприводимы только 1-обходы дерева G, которые существуют по теореме 4. Значит многогранник $\mathbf{X}$ бинарного дерева G совпадает с $\mathbf{X}^1$ — выпуклой оболочкой точек вида x^ξ, где ξ — 1-обходы. Тогда для любого 2-обхода σ соответствующая точка x^σ принадлежит $\mathbf{X}^1$. Рассмотрим мультициклический порядок

$$\sigma \cong (a_1 a_2 \ldots a_p b_q b_{q-1} \ldots b_1 c_1 c_2 \ldots c_s a_p a_{p-1} \ldots a_1 b_1 b_2 \ldots b_q c_s c_{s-1} \ldots c_1).$$

По теореме 4 он задаёт мультиобход. Построим мультиграф G^σ для этого мультиобхода (рис. 6).

Рассмотрим произвольный 1-обход ξ графа G. Как и ранее покажем, что $G^\xi \not\subset G^\sigma$. Сделаем переобозначение: $\hat{a}_2 = a_p$, $\hat{b}_2 = b_q$, $\hat{c}_2 = c_s$. Графу G^ξ соответствует гамильтонов цикл в $K(M)$. Предположим, что в G^σ существует гамильтонов цикл, соответсвующий обходу ξ. Пара вершин (a_1, a_2) образует усы, по следствию 2 получаем $\xi_{12} = 1$, то есть ребро $(a_1 a_2)$ входит в гамильтонов цикл. Поскольку у вершины a_2 только две смежные вершины в G^σ — вершины



Рис. 6: Граф G^σ

a_1 и a_3, то в нём есть и вершина a_3, продолжая рассуждение, получаем, что этот цикл должен содержать всю цепь $a_1 \dots \hat{a}_2 = a_1 a_2 \dots a_{p-1}\hat{a}_2$. Аналогично в него входят цепи $b_1 \dots \hat{b}_2$ и $c_1 \dots \hat{c}_2$. Остаётся заметить, что цикл, проходя по каждой из вышеуказанных цепей меняет чётность нижнего индекса вершины (после переобозначения), а прохождение по оставшимся рёбрам G^σ нет, то есть чётность в цикле меняется 3 раза, что невозможно. Откуда $x^\sigma \notin \mathbf{X}^1$, противоречие. □

6. Результаты компьютерных экспериментов

В заключение данной работы приведем таблицу, в которой указано количество неприводимых мультиобходов (с точностью до эквивалентности) для деревьев из $\mathfrak{B}_3$ с небольшим количеством m граничных вершин. Напомним, что такое дерево задается длинами трех побегов, каждый из которых содержит усы, поэтому имеет длину не меньше двух.

№	m	Длины побегов	1-обходы	2-обходы	Всего
1	6	$(2,2,2)$	8	4	12
2	7	$(2,2,3)$	16	16	32
3	8	$(2,2,4)$	32	56	88
4	8	$(2,3,3)$	32	64	96
5	9	$(3,3,3)$	64	256	320
6	9	$(2,2,5)$	64	164	248
7	9	$(2,3,4)$	64	224	288

Из данной таблицы видно, что верхняя оценка на число 2-обходов достигается для случаев 1, 2, 4, 5, но не точна для остальных случаев.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иванов, А.О., Тужилин, А.А. Одномерная проблема Громова о минимальном заполнении // Матем. сб. 2012. Т. 203, № 5.С. 65-118.

2. Ivanov, A., Tuzhilin, A. Dual Linear Programming Problem and One-Dimensional Gromov Minimal Fillings of Finite Metric Space // Differential Equations on Manifolds and Mathematical Physics. Trends in Mathematics. Birkhauser, Cham. 2022. pp. 165-182.

3. Ivanov, A.O., Tuzhilin, A.A. Minimal fillings of finite metric spaces: The state of the art // Discrete Geometry and Algebraic Combinatorics. - Vol. 625 of Contemporary Mathematics. - United States: AMS Press, 2014. pp. 9-35.

4. Еремин, А.Ю. Формула веса минимального заполнения конечного метрического пространства. Матем. сб. 2013. Т.204, № 9. С.51-72.

5. Иванов, А.О., Тужилин, А.А. Задача Штейнера на плоскости или плоские минимальные сети, Матем. сб. 1991. Т. 182, № 12, с.1813–1844

6. Gromov, M. Filling Riemanian Manifolds // J.Differential Geom. 1983. vol.18, № 1. pp.1-147.

7. Беднов, Б.Б., Бородин, П.А. Банаховы пространства, реализующие минимальные заполнения. Матем. сб. 2014. т.205 № 4, 3–20;

8. Степанова, Е.И. Бифуркации минимальных деревьев Штейнера и минимальных заполнений для невыпуклых четырехточечных границ и суботношение Штейнера на евклидовом плоскости // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 2016, № 2. С.48-51.

9. Степанова, Е.И. Бифуркации минимальных заполнений для четырех точек евклидовой плоскости // Фундамент. и прикл. матем. 2019. Т. 22, № 6. С. 253–261.

10. Рублева, О.В. Критерий аддитивности конечного метрического пространства и минимальные заполнения // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 2012. № 2. С.8-11.

11. Овсянников, З.Н. Открытое семейство множеств, для которых минимальное заполнение не единственно // Фунд. и прикл. матем. 2013. Т.18, № 2. С.153-156.

12. Иванов, А.О., Овсянников, З.Н., Стрелкова, Н.П., Тужилин, А.А. Одномерные минимальные заполнения с ребрами отрицательного веса // Вестн. Моск. унив., Матем. Мех. 2012. № 5. С.3-8.

13. Щербаков, О.С. Многогранники бинарных деревьев, строение многогранника дерева типа «змея». Чебышёвский сб. 2022. Т.23, № 85. С.136-151.

14. Щербаков, О.С. Оценки на кратности неприводимых мультиобходов некоторых бинарных деревьев. Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. 2025, № 2.

15. Васильев, Ф.П., Иваницкий, А.Ю. Линейное программирование. М.: МЦНМО, 2020.

16. Смирнов, Е.Ю. Диаграммы Юнга, плоские разбиения и знакочередующиеся матрицы. М: МЦНМО, 2014.

17. Ландо, С.К. Введение в дискретную математику. М: МЦНМО, 2014.

18. Пахомова, А.С. Оценки для суботношения Штейнера и отношения Штейнера–Громова, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. 2014. № 1, С.17–25.

REFERENCES

1. Ivanov, A.O., Tuzhilin, A.A. 2012, “One-dimensional Gromov minimal filling problem”, *Sbornik: Mathematics*, Vol. 203, № 5.pp. 65–118.

2. Ivanov, A., Tuzhilin, A. 2022, “Dual Linear Programming Problem and One-Dimensional Gromov Minimal Fillings of Finite Metric Space”, *Differential Equations on Manifolds and Mathematical Physics. Trends in Mathematics*. Birkhäuser, Cham, pp. 165–182.

3. Ivanov, A.O., Tuzhilin, A.A. 2014, "Minimal fillings of finite metric spaces: The state of the art", *Discrete Geometry and Algebraic Combinatorics*, Vol. 625 of Contemporary Mathematics. - United States: AMS Press, pp. 9–35.

4. Eremin, A.Yu. 2013, "A formula for the weight of a minimal filling of a finite metric space", *Sbornik: Mathematics*, Vol. 204, № 9. pp.51–72.

5. Ivanov, A.O., Tuzhilin, A.A. 1993, "The Steiner problem in the plane or in plane minimal nets", *Math. USSR-Sb*, Vol. 74, № 2. pp. 555—582.

6. Gromov, M. 1983, "Filling Riemanian Manifolds", *J.Differential Geom*, Vol.18, № 1. pp.1–147.

7. Bednov, B.B., Borodin, P.A. 2014, "Banach spaces that realize minimal fillings", *Sb. Math.*, Vol.205, № 4. pp. 459–475.

8. Stepanova, E.I. 2016, "Bifurcations of Steiner minimal trees and minimal fillings for non-convex four-point boundaries and Steiner subratio for the Euclidean plane", *Moscow University Mathematics Bulletin*, Vol.71 № 2. pp.79–81.

9. Stepanova, E.I. 2019, "Bifurcations of minimal fillings for four points on the Euclidean plane", *Fundamental and Applied Mathematics*, Vol.22. № 6. pp. 253–261.

10. Rubleva, O.V. 2012, "The additivity criterion for finite metric spaces and minimal fillings", *Moscow University Mathematics Bulletin*, Vol.67. № 2. pp. 52–54.

11. Ovsyannikov, Z.N. 2013, "An open family of sets that have several minimal fillings", *Fundamental and Applied Mathematics*, Vol.18. № 2. pp.153–156.

12. Ivanov, A.O., Ovsyannikov, Z.N., Strelkova, N.P., Tuzhilin, A.A. 2012, "One-dimensional minimal fillings with negative edge weights", *Moscow University Mathematics Bulletin*, 2012. Vol.67. № 5-6, pp.189–194.

13. Shcherbakov, O.S. 2022, "Polytops of Binary Trees, Structure of the Polytop for the "Snake-type"-Tree", *Chebyshevskii sbornik*, Vol. 23. № 4. pp.136–151.

14. Shcherbakov, O.S. 2025, "Estimates of the multiplicity of irreducible multitours for some binary trees", *Moscow University Mathematics Bulletin*, Vol. 82. № 2.

15. Vasilyev, F.P., Ivanitskiy A.Y. 2001, "In-Depth Analysis of Linear Programming", *Dordrecht: Springer*.

16. Smirnov, E.Yu. 2014, "Young Diagrams, Plane Partitions and Alternating-sign Matrices", *Moscow: MCCME*.

17. Lando, S.K. 2014, "Introduction to Discrete Mathematics", *Moscow: MCCME*.

18. Pahkomova A.C. 2014, "Estimates of Steiner subratio and Steiner–Gromov ratio", *Moscow University Mathematics Bulletin*, Vol. 69. № 1. pp. 16–23.

Получено: 10.04.2024
Принято в печать: 04.09.2024

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 25. Выпуск 3.

УДК 512.554 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-118-142

Точные обёртывающие кольца нильтреугольного кольца типа G_2 и их автоморфизмы[1]

А. В. Казакова

Казакова Алёна Викторовна — Сибирский федеральный университет (г. Красноярск).
e-mail: alvkazakova@gmail.com

Аннотация

Строение алгебры Шевалле над полем или кольцом K, ассоциированной с неразложимой системой корней Ф, существенно зависит от ее нильтреугольной подалгебры $N\Phi(K)$. Для $N\Phi(K)$ оказалось естественным использовать введенную в 2018 году точную обёртывающую алгебру R, имеющую один с $N\Phi(K)$ базис. Известно, что изоморфность колец Ли $N\Phi(K)$ не зависит от выбора знаков структурных констант $N_{r,s}$. Однако, для точных обёртывающих колец R это свойство нарушается. Поэтому вопрос описания их автоморфизмов был расширен до нахождения всех неизоморфных точных обёртывающих колец $N\Phi(K)$ типа G_2 над K, и только затем нахождения явного описания их автоморфизмов. Для классических типов найдено описание автоморфизмов колец R над любым ассоциативно-коммутативным кольцом K с единицей [13]. В статье перечислены все неизоморфные точные обёртывающие кольца $N\Phi(K)$ типа G_2 над произвольным ассоциативно-коммутативным кольцом K с единицей. Также найдено явное описание их автоморфизмов.

Ключевые слова: алгебра Ли, алгебра Шевалле, точная обёртывающая алгебра, нильтреугольная подалгебра, стандартный автоморфизм, верхний центральный ряд, гиперцентральный автоморфизм.

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:
Казакова, А. В. Точные обёртывающие кольца нильтреугольного кольца типа G_2 и их автоморфизмы // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 3, с. 118–142.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 25. No. 3.

UDC 512.554 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-118-142

The faithful enveloping rings of the nil-triangular ring of type G_2 and their automorphisms

A. V. Kazakova

Kazakova Alyona Viktorovna — Siberian Federal University (Krasnoyarsk).
e-mail: alvkazakova@gmail.com

[1]Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ (Соглашение 075-02-2024-1429).

Abstract

The structure of the Chevalley algebra over a field or ring K, associated with an indecomposable root system Φ, essentially depends on its nil-triangular subalgebra $N\Phi(K)$. It turned out to be natural for $N\Phi(K)$ to use the faithful enveloping algebra R, introduced in 2018, which has the same basis as $N\Phi(K)$. It is known that the isomorphism of the Lie rings $N\Phi(K)$ does not depend on the choice of signs of the structure constants $N_{r,s}$. However, for faithful enveloping rings R this property is violated. Therefore, the question of describing their automorphisms was extended to finding all non-isomorphic faithful enveloping rings $N\Phi(K)$ of type G_2 over K, and only then finding an explicit description of their automorphisms.

Keywords: Lie algebra, Chevalley algebra, faithful enveloping algebra, nil-triangular subalgebra, standard automorphism, upper central series, hypercentral automorphism.

Bibliography: 16 titles.

For citation:
Kazakova, A. V. 2024, "The faithful enveloping rings of the nil-triangular ring of type G_2 and their automorphisms" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 3, pp. 118–142.

1. Введение

Ассоциативное кольцо R всегда превращается в кольцо Ли $R^{(-)}$, если определим новое умножение $x * y = xy - yx$, сохраняя сложение. Кольцо $R^{(-)}$ будем сопоставлять произвольному (не обязательно ассоциативному) кольцу R. Алгебра R называется *точной обёртывающей алгебры Ли* L, если $R^{(-)}$ и L изоморфны, т.е. их можно построить на одном линейном пространстве. Близкое понятие *Ли-допустимой алгебры* связывал с алгебрами Ли А. Альберт [1], см. также [2], [3]

Алгебру Шевалле над полем или ассоциативно-коммутативным кольцом K характеризуют системой корней Φ и базисом Шевалле, который составляют подходящий базис подалгебры Картана и вектора e_r, $r \in \Phi$. Подалгебру с базизом $\{e_r \mid r \in \Phi^+\}$ для системы Φ^+ положительных корней как и в [4] обозначим через $N\Phi(K)$ и назовём *нильтреугольной*.

Автоморфизмы алгебры Ли $N\Phi(K)$ при ограничениях $K = 2K = 3K$ на кольцо K описаны в 2007 году в [5]. Известно, что автоморфизмы алгебры $N\Phi(K)$ являются и автоморфизмами множества $N\Phi(K)$, рассматриваемого как кольцо. При переходе от алгебр к кольцам Ли группа автоморфизмов расширяется, поскольку в кольце не обязано сохраняться умножение на скаляр. Добавляются кольцевые автоморфизмы, индуцированные автоморфизмами основного кольца.

Впервые вопрос описания автоморфизмов колец Ли $N\Phi(K)$ был решён в В.М. Левчуком [4] в 1983 году для типа A_n взаимосвязано с описанием группы автоморфизмов унитреугольной группы U над любым ассоциативно-коммутативным кольцом K с единицей. Автоморфизмы кольца Ли $N\Phi(K)$ выявлены в [6] также для типа D_4 над коммутативным кольцом K с единицей. В работах [7], [8] и [9] их описание редуцировано к исключительным типам G_2 и F_4. Автоморфизмы кольца Ли $N\Phi(K)$ типа G_2, когда K есть область целостности и $K = 2K = 3K$ или $3K = 0$ были получены в [10] и, когда K – поле и $2K = 0$ – в [11]. Помимо стандартных автоморфизмов появляются исключительные автоморфизмы. В [12] и [5] появляется только один тип исключительных автоморфизмов. Оказывается, когда $Ann_2 \neq 0$ появляются разнообразные исключительные автоморфизмы, что потребовало в [6] ввести для их систематизации обобщение центральных автоморфизмов – гиперцентральные автоморфизмы.

Автоморфизм группы или кольца Ли L, единичный по модулю m-го гиперцентра и неединичный по модулю $(m-1)$-го гиперцентра, называют *гиперцентральным высоты* m (кратко, *гиперцентральным*, когда L не совпадает с m-м гиперцентром).

Основные операции кольца $R^{(-)}$ являются производными от операций в R. Поэтому известно [13, лемма 2], что автоморфизмы любого кольца R образуют подгруппу в группе автоморфизмов $Aut\ R^{(-)}$. Отсюда естественно возник вопрос описания автоморфизмов точных обёртывающих колец R. Известно, что изоморфность колец Ли $N\Phi(K)$ не зависит от выбора знаков структурных констант $N_{r,s}$. Однако, для точных обёртывающих алгебр R это свойство нарушается. Поэтому вопрос описания их автоморфизмов расширяется до нахождения всех неизоморфных точных обёртывающих колец $N\Phi(K)$ типа G_2 над K, и только затем нахождения явного описания их автоморфизмов.

Для классических типов описаны автоморфизмы колец R в [13] над любым ассоциативно-коммутативным кольцом K с единицей. Знаки структурных констант там зафиксированы в соответствии с [14, предложение 4.2.2]. Неклассические типы остаются неисследованными. В данной статье получено описание автоморфизмов всех неизоморфных точных обёртывающих колец R типа G_2 над K.

2. Стандартные и гиперцентральные автоморфизмы. Точные обёртывающие кольца

Для описания автоморфизмов колец нам потребуются определённые характеристические идеалы. Аннулятором множества M в произвольном кольце R называем множество

$$Ann_R(M) = \{\alpha \in R \mid M\alpha = \alpha M = 0\}.$$

В произвольном кольце Ли $R = (R, +, *)$, аналогично группам, вводят *гиперцентральный* или *верхний* центральный ряд

$$0 = Z_0 \subseteq Z_1 \subseteq \ldots \subseteq Z_i \subseteq Z_{i+1} \subseteq \ldots,$$

$$Z_{i+1} := \{g \in R \mid g * R \subseteq Z_i\} \quad (i \geq 0),$$

и *нижний* центральный ряд

$$R = \Gamma_1 \supseteq \Gamma_2 \supseteq \ldots \supseteq \Gamma_n \supseteq \ldots, \quad \Gamma_{n+1} := \Gamma_n * R \ \ (n \geq 1).$$

Пусть Φ^+ – множество положительных корней системы Φ, а $\Pi = \{r_1, ..., r_l\}$ – её фундаментальная система простых корней из Φ. Для любого $r \in \Phi$ через $ht(r)$ обозначим высоту корня r. По определению при $r = a_1 r_1 + ...a_l r_l$ полагаем $ht(r) = a_1 + ...a_l$. Согласно теореме о базисе алгебры Шевалле [14, теорема 4.2.1], для произвольных корней $r, s \in \Phi^+$ имеем $e_r * e_s = 0$ при $r + s \notin \Phi$ и

$$e_r * e_s = N_{r,s} e_{r+s}, \quad N_{s,r} = -N_{r,s} \ \ (r + s \in \Phi), \tag{1}$$

где структурные константы $N_{r,s} = \pm 1, \pm 2$ или ± 3, причём равенство $N_{r,s} = \pm 3$ возможно только для для Φ типа G_2.

В [14] выделяются специальные пары положительных корней (r, s) с суммой $r + s \in \Phi^+$, а среди них – экстраспециальные пары. Известно, что знаки структурных констант $N_{r,s}$ можно выбирать произвольно, только когда пара r, s – экстраспециальная. Для специальных пар, не являющихся экстраспециальными, знаки вычисляются по формулам из [14].

Лемма 1. *[13] Точной обёртывающей алгебры Ли $N\Phi(K)$ является K- алгебра R с базисом $\{e_r \mid r \in \Phi^+\}$ и умножением: $e_r e_s = 0$ при $r + s \notin \Phi$, а если $r, s, r + s \in \Phi^+$ и $N_{r,s} \geq 1$, то $e_r e_s = e_{r+s}$ и $e_s e_r = (1 - N_{r,s}) e_{r+s}$.*

Известно, что изоморфность алгебр $N\Phi(K)$ не зависит от выбора знаков структурных констант $N_{r,s}$. Однако, для точных обёртывающих алгебр R это свойство нарушается.

В алгебре Шевалле типа Φ над K подалгебра $N\Phi(K)$ характеристична относительно каждого *корневого* автоморфизма $x_r(t)$ $(r \in \Phi, t \in K)$, [14, §4.3]. Его ограничение даёт автоморфизм подалгебры $N\Phi(K)$

$$x_r(t) : e_r \longrightarrow e_r, \quad e_s \longrightarrow \sum_{i=0}^{q} M_{r,s,i} t^i e_{ir+1} \quad (s \in \Phi^+ \backslash \{r\}),$$

$$M_{r,s,0} := 1, \quad M_{r,s,i} := (1/i!) N_{r,s} N_{r,r+s} \dots N_{r,(i-1)r+s}.$$

Все корневые автоморфизмы $x_r(t)$ порождают подгруппу J *внутренних* автоморфизмов алгебры Ли $N\Phi(K)$. Известно, что она изоморфна фактор-группе унипотентной группы $U = U\Phi(K)$ по центру.

Диагональный автоморфизм $h(\chi) : e_r \longrightarrow \chi(r) e_r$ $(r \in \Phi^+)$ алгебры Ли $N\Phi(K)$ сопоставляют любому K-характеру χ решётки корней, то есть гомоморфизму подгруппы $\langle \Phi \rangle^+$ аддитивной группы V^+ в мультипликативную группу K^* обратимых элементов кольца K [14, §7.1]. Хорошо известно, что χ определяется однозначно значениями на простых корнях.

Кольцевые автоморфизмы кольца Ли $N\Phi(K)$ выделяем по аналогии с [14]. Произведения внутренних, диагональных, кольцевых и центральных автоморфизмов называют *стандартными*.

В [14] введен *стандартный* центральный ряд алгебры Ли $N\Phi(K)$, где

$$L_1 \supset L_2 \supset \dots \supset L_{h-1} \supset L_h = 0,$$

$$L_i := \langle K e_r \mid r \in \Phi^+, ht(r) \geq i \rangle \quad (1 \leq i \leq h-1).$$

По определению, *степень* R^m аддитивно порождают все произведения элементов из R конечной длины $\geq m$ с любыми расстановками скобок.

Известно, что характеристичность L_m в кольце Ли $N\Phi(K)$ может нарушаться, когда в кольце K элемент 2 или (тип G_2) 3 необратим [13]. Однако, для точных обёртывающих колец R типа G_2 верна [13]

Лемма 2. *Идеалы L_m в кольце R характеристичны и $L_m = R^m$.*

Описание верхних и нижних центральных рядов для колец $N\Phi(K)$ над произвольным ассоциативно-коммутативным кольцом K с единицей завершено в [8], [9] для классических типов, в [10] для типа G_2 и для F_4 см. [15].

В статье перечислены автоморфизмы неизоморфных точных обёртывающих колец R типа G_2. Пусть a, b простые корни для Φ типа G_2, корень a — короткий и $|a| < |b|$. Тогда

$$\Phi^+ = \{a, b, a+b, 2a+b, 3a+b, 3a+2b\}.$$

3. Изоморфизм точных обёртывающих колец R

Далее установим критерии изоморфизма точных обёртывающих колец R колец Ли $N\Phi(K)$ над произвольным ассоциативно-коммутативным кольцом K с единицей. Далее нам потребуются следующие две леммы, первая из которых очевидна.

Лемма 3. *В кольце с 1 для любого $x \in K$ из равенства $xK = K$ следует обратимость в K элемента x.*

Лемма 4. *Пусть R_1, R_2 – произвольные изоморфные кольца, ϕ – изоморфизм из R_1 в R_2: $\phi(R_1) = R_2$, $N_i \subseteq R_i$, $M_i \subseteq R_i$ ($i = 1$ или 2), $\phi(N_1) = N_2$, $\phi(M_1) = M_2$. Тогда под действием ϕ сохраняются идеалы:*

$$C^r_{\mathrm{mod}N}(M) := \{\gamma \in R \mid \alpha\gamma = 0 \mathrm{mod} N, \alpha \in M\},$$
$$C^l_{\mathrm{mod}N}(M) := \{\gamma \in R \mid \gamma\alpha = 0 \mathrm{mod} N, \alpha \in M\},$$
$$Ann^r(M), Ann^l(M).$$

Доказательство. Пусть $x \in C^r_{\mathrm{mod}N_1}(M_1)$ – правому централизатору множества M_1 по модулю множества N_1. Тогда $\phi(0 \mathrm{mod} N_1) = \phi(M_1 \cdot x) = M_2 \cdot \phi(x) \subseteq N_2$, следовательно, $\phi(x) \in C^r_{\mathrm{mod}N_2}(M_2)$, откуда $\phi(C^r_{\mathrm{mod}N_1}(M_1)) \subseteq C^r_{\mathrm{mod}N_2}(M_2)$. Так как ϕ – изоморфизм, то $\phi(C^r_{\mathrm{mod}N_1}(M_1)) = C^r_{\mathrm{mod}N_2}(M_2)$. Аналогичное доказательство для левого централизатора кольца R_1.

Пусть $x \in Ann^r_{N_1}(M_1)$, тогда $0 = \phi(0) = \phi(M_1 \cdot x) = M_2 \cdot \phi(x)$, откуда $\phi(x) \in Ann^r_{N_2}(M_2)$. Так как ϕ – изоморфизм, то $\phi(Ann^r_{N_1}(M_1)) = Ann^r_{N_2}(M_2)$. Аналогичное доказательство для левого аннулятора кольца R_1. □

Теорема 1. *Если char $K \neq 3$, то два точных обёртывающих кольца R_1 и R_2 изоморфны тогда и только тогда, когда $N_{a,b}(R_1) = N_{a,b}(R_2)$, $N_{a,2a+b}(R_1) = N_{a,2a+b}(R_2)$, $N_{b,3a+b}(R_1) = N_{b,3a+b}(R_2)$. А при char $K = 3$ необходимо и достаточно выполнения условий: $N_{a,b}(R_1) = N_{a,b}(R_2)$, $N_{b,3a+b}(R_1) = N_{b,3a+b}(R_2)$.*

Доказательство. Пусть ϕ – произвольный изоморфизм точных обёртывающих колец R_1 и R_2. Рассмотрим действие ϕ при различном выборе знаков структурных констант $N_{r,s}$.
I. $N_{a,b}(R_1) = 1$, $N_{a,b}(R_2) = -1$.

1) $N_{b,3a+b}(R_1) = N_{b,3a+b}(R_2) = -1$, но $N_{a,a+b}(R_i)$, $N_{a,2a+b}(R_i)$ выбираются произвольно для любых $i = 1, 2$. Найдём левые аннуляторы колец R_1 и R_2:

$$Ann^l R_1 = Ke_b + Ke_{3a+2b},\ Ann^l R_2 = Ke_{3a+2b}.$$

Из того, что идеалы $Ann^l R_i$ ($i = 1, 2$) и $AnnR = Ke_{3a+2b}$ сохраняются под действием произвольного изоморфизма ϕ и выполняются равенства

$$\phi(Ke_b + Ke_{3a+2b}) = \phi(Ann^l R_1) = Ann^l R_2 = Ke_{3a+2b} = \phi(AnnR) = \phi(Ke_{3a+2b}),$$

следует, что ϕ – не изоморфизм.

2) $N_{b,3a+b}(R_1) = N_{b,3a+b}(R_2) = 1$, но $N_{a,a+b}(R_i)$, $N_{a,2a+b}(R_i)$ выбираются произвольно для любых $i = 1, 2$. Найдём правые аннуляторы колец R_1 и R_2:

$$Ann^r R_1 = \Delta_2 t Ke_{2a+b} + Ke_{3a+2b},\ Ann^r R_2 = Ke_b + Ke_{3a+2b},$$

где $t = 1$ при $N_{a,2a+b}(R_i) = -3$ и $i = 1, 2$, в остальных случаях $t = 0$. Из того, что идеалы L_3, $Ann^r R_i$ ($i = 1, 2$) сохраняются под действием произвольного изоморфизма ϕ и выполняются равенства

$$Ke_b + Ke_{3a+2b} = Ann^r R_2 = \phi(Ann^r R_1) = \phi(\Delta_2 t Ke_{2a+b} + Ke_{3a+2b}) \subseteq \phi(L_3) = L_3,$$

но $Ke_b + Ke_{3a+2b} \not\subseteq L_3$. Отсюда следует, что ϕ – не изоморфизм.

3) $N_{b,3a+b}(R_1) = 1, N_{b,3a+b}(R_2) = -1$, но $N_{a,a+b}(R_i)$, $N_{a,2a+b}(R_i)$ выбираются произвольно для любых $i = 1, 2$. Определим правые степени колец $R^k := \{(R^{k-1} * R)\} (k \geq 1)$. Очевидно, что ϕ сохраняет степени колец R_1 и R_2. Найдём R_1^5 и R_2^5:

$$R_1^5 = 0,\ R_2^5 = mKe_{3a+2b},$$

где $m=-2$ при $N_{a,2a+b}(R_2)=3$ и в остальных случаях $m=1$. При $m=1$, очевидно, что ϕ – не изоморфизм. Рассмотрим случай, когда $m=-2$. Из равенства $2K=0$ следует, что $charK=2$. Вычислим правые аннуляторы идеала L_2 для каждого из R_i

$$Ann_{R_1}(L_2)=Ke_b\mathrm{mod}L_2,\ Ann_{R_2}(L_2)=\Delta_2Ke_{a+b}+Ke_{3a+2b}.$$

Учитывая, что идеалы $L_2, Ann_{R_i}(L_2)$ сохраняются под действием ϕ, и выполняются равенства

$$\phi(Ann_{R_1}(L_2))=\phi(Ke_b\mathrm{mod}L_2)=Ann_{R_2}(L_2)\subseteq L_2=\phi(L_2),$$

но $Ke_b\not\subseteq L_2$, следовательно, ϕ – не изоморфизм.

4) $N_{b,3a+b}(R_1)=-1, N_{b,3a+b}(R_2)=1$, но $N_{a,a+b}(R_i)$, $N_{a,2a+b}(R_i)$ выбираются произвольно для любых $i=1,2$. Найдём левые аннуляторы колец R_1 и R_2:

$$Ann^lR_1=Ke_b+Ke_{3a+2b},\ Ann^lR_2=L_4,$$

Из того, что идеалы L_4, Ann^lR_i сохраняются под действием произвольного изоморфизма ϕ и выполняются равенства

$$\phi(L_4)=L_4=Ann^lR_2=\phi(Ann^lR_1)=\phi(Ke_b+Ke_{3a+2b}),$$

следует, что ϕ – не изоморфизм.

II. $N_{a,b}(R_1)=N_{a,b}(R_2)=1$.

1) $N_{b,3a+b}(R_1)=N_{b,3a+b}(R_2)=-1$, но $N_{a,a+b}(R_i)$, $N_{a,2a+b}(R_i)$ выбираются произвольно для любых $i=1,2$.

Проверим действие изоморфизма ϕ, используя идеалы $C^r_{\mathrm{mod}L_3}(R_1)=Ke_a+L_2=C^r_{\mathrm{mod}L_3}(R_2)$ и $Ann^l(R_1)=Ke_b+Ke_{3a+b}=Ann^l(R_2)$. В силу того, что ϕ сохраняет множества L_2 и L_3, то ϕ действует

$$\phi(xe_a)=x^\sigma e_a\mathrm{mod}L_2,\quad \phi(ye_b)=y^\lambda e_b\mathrm{mod}L_4,$$

где $\sigma,\lambda\in End\,K^+$. Сюръективность σ,λ, то есть выполнение равенств $K^\sigma=K=K^\lambda$, следует из того, что ϕ сохраняет идеалы $C^r_{\mathrm{mod}L_3}(R_1), Ann^l(R_1), L_5$ и двух серий равенств

$$Ke_a+L_2=C^r_{\mathrm{mod}L_3}(R_2)=\phi(C^r_{\mathrm{mod}L_3}(R_1))=\phi(Ke_a)+L_2=K^\sigma e_a\mathrm{mod}L_2,$$

$$Ke_b+L_5=Ann^l(R_2)=\phi(Ann^l(R_1))=\phi(Ke_b)+L_5=K^\lambda e_b\mathrm{mod}L_5.$$

Обратимость в K элементов $1^\sigma, 1^\lambda$ следует из леммы 3 и равенств

$$L_2=\phi(L_2)=\phi(Ke_{a+b}+L_3)=\phi(Ke_{a+b})+L_3=\phi(Ke_a\cdot 1e_b)+L_3=$$
$$\phi(1e_a\cdot Ke_b)+L_3=K^\sigma 1^\lambda e_{a+b}\mathrm{mod}L_3=1^\sigma K^\lambda e_{a+b}\mathrm{mod}L_3.$$

Исследуем действие эндоморфизмов σ,λ, проверив все соотношения изоморфизма ϕ. Пусть

$$\phi(e_ae_b)=\phi(e_{a+b})=1^\sigma 1^\lambda e_{a+b}\mathrm{mod}AnnR,$$
$$\phi(e_ae_{a+b})=\phi(k_1e_{2a+b})=k_21^\sigma 1^\sigma 1^\lambda e_{2a+b}\mathrm{mod}AnnR,$$

при $k_i=1$ при $N_{a,a+b}(R_i)=2$, $k_i=-1$ при $N_{a,a+b}(R_i)=-2$, где $i=1$ или 2. В любом из случаев

$$\phi(e_ak_1e_{2a+b})=\phi(k_1l_1e_{3a+b})=k_2l_21^\sigma 1^\sigma 1^\sigma 1^\lambda e_{3a+b}\mathrm{mod}AnnR, \tag{2}$$
$$\phi(k_1e_{2a+b}e_a)=\phi(k_1l_2e_{3a+b})=k_2l_11^\sigma 1^\sigma 1^\sigma 1^\lambda e_{3a+b}\mathrm{mod}AnnR, \tag{3}$$

где $l_i = 1$ при $N_{a,2a+b}(R_i) = 3$, $l_i = -2$ при $N_{a,2a+b}(R_i) = -3$, где $i = 1$ или 2. При одинаковых $N_{a,2a+b}(R_i)$ для каждой из R_i изоморфизм получается тривиально. Проверим действие ϕ для разных $N_{a,2a+b}(R_i)$, то есть $l_1 \neq l_2$. Пусть $l_1 = 1$, тогда $l_2 = -2$. Домножив на -2 в (2), получим

$$\phi(-2k_1e_ae_{2a+b}) = \phi(-2k_1e_{3a+b}) = 4k_21^\sigma1^\sigma1^\sigma1^\lambda e_{3a+b}\mathrm{mod}AnnR. \tag{4}$$

Из равенства (3) и (4), обратимости элементов 1^σ и 1^λ получим, что $3 = 0$, то есть $charK = 3$. Аналогичные вычисления проводятся для случая $l_1 = -2$ и $l_2 = 1$ и произвольных $N_{2a+b}(R_i)$. Остальные соотношения проверяются тривиально. Откуда ϕ – изоморфизм тогда и только тогда, когда $charK = 3$.

2) $N_{b,3a+b}(R_1) = N_{b,3a+b}(R_2) = 1$, но $N_{a,a+b}(R_i)$, $N_{a,2a+b}(R_i)$ выбираются произвольно для любых $i = 1, 2$. При равных $N_{a,2a+b}(R_i)$ изоморфизм получается тривиально. Проверим действие ϕ при $N_{a,2a+b}(R_1) = 3$, $N_{a,2a+b}(R_2) = -3$.

Проверим действие изоморфизма ϕ, используя идеалы $C^r_{\mathrm{mod}L_3}(R_1) = Ke_a + L_2 = C^r_{\mathrm{mod}L_3}(R_2)$, $C^l_{\mathrm{mod}AnnR}(R_1) = Ke_b + \Delta_2 Ke_{2a+b} + L_4$ и $C^l_{\mathrm{mod}AnnR}(R_2) = Ke_b + L_4$. В силу того, что ϕ сохраняет множества L_2 и L_3, то ϕ действует

$$\phi(xe_a) = x^\sigma e_a \mathrm{mod}L_2, \quad \phi(ye_b) = y^\lambda e_b \mathrm{mod}L_3,$$

где $\sigma, \lambda \in End\ K^+$. Сюръективность σ, λ, то есть выполнение равенств $K^\sigma = K = K^\lambda$, следует из двух серий равенств

$$Ke_a + L_2 = C^l_{\mathrm{mod}L_3}(R_2) = \phi(C^l_{\mathrm{mod}L_3}(R_1)) =$$
$$\phi(Ke_a + L_2) = \phi(Ke_a) + L_2 = K^\sigma e_a \mathrm{mod}L_2,$$

$$Ke_b \mathrm{mod}L_3 = C^l_{\mathrm{mod}AnnR}(R_2) = \phi(C^l_{\mathrm{mod}AnnR}(R_1)) = K^\lambda e_b \mathrm{mod}L_3.$$

Обратимость в K элементов $1^\sigma, 1^\lambda$ следует из леммы 3 и равенств

$$L_2 = \phi(L_2) = \phi(Ke_{a+b} + L_3) = \phi(Ke_{a+b}) + L_3 = \phi(Ke_a \cdot 1e_b) + L_3 =$$
$$\phi(1e_b \cdot Ke_a) + L_3 = K^\sigma 1^\lambda e_{a+b} \mathrm{mod}L_3 = 1^\sigma K^\lambda e_{a+b} \mathrm{mod}L_3.$$

Исследуем действие эндоморфизмов σ, λ, проверив все соотношения изоморфизма ϕ. Пусть

$$\phi(e_ae_b) = \phi(e_{a+b}) = 1^\sigma 1^\lambda e_{a+b} \mathrm{mod}L_4,$$
$$\phi(e_ae_{a+b}) = \phi(k_1e_{2a+b}) = k_21^\sigma1^\sigma1^\lambda e_{2a+b} \mathrm{mod}AnnR,$$

при $k_i = 1$ при $N_{a,a+b}(R_i) = 2$, $k_i = -1$ при $N_{a,a+b}(R_i) = -2$, где $i = 1$ или 2. В любом из случаев

$$\phi(e_ak_1e_{2a+b}) = \phi(k_1l_1e_{3a+b}) = k_2l_21^\sigma1^\sigma1^\sigma1^\lambda e_{3a+b}\mathrm{mod}AnnR, \tag{5}$$
$$\phi(k_1e_{2a+b}e_a) = \phi(k_1l_2e_{3a+b}) = k_2l_11^\sigma1^\sigma1^\sigma1^\lambda e_{3a+b}\mathrm{mod}AnnR, \tag{6}$$

где $l_i = 1$ при $N_{a,2a+b}(R_i) = 3$, $l_i = -2$ при $N_{a,2a+b}(R_i) = -3$, где $i = 1$ или 2. Домножим на -2 в (5), получим

$$\phi(-2k_1e_ae_{2a+b}) = \phi(-2k_1e_{3a+b}) = 4k_21^\sigma1^\sigma1^\sigma1^\lambda e_{3a+b}\mathrm{mod}AnnR. \tag{7}$$

Из равенства (6) и (7), обратимости элементов 1^σ и 1^λ получим, что $3 = 0$, то есть $charK = 3$. Остальные соотношения проверяются тривиально. Откуда ϕ – изоморфизм тогда и только тогда, когда $charK = 3$.

3) $N_{b,3a+b}(R_1) = -1, N_{b,3a+b}(R_2) = 1$, но $N_{a,a+b}(R_i)$, $N_{a,2a+b}(R_i)$ выбираются произвольно для любых $i = 1, 2$. Найдём левые аннуляторы колец R_1 и R_2:

$$Ann^l R_1 = Ke_b + Ke_{3a+2b},\ Ann^l R_2 = \Delta_2 tKe_{2a+b} + Ke_{3a+b} + Ke_{3a+2b},$$

где $t = 1$ при $N_{a,2a+b}(R_1) = -3$ и $t = 0$ в остальных случаях. Из того, что идеалы $AnnR$, R_i, и $Ann^l R_i$ при $i = 1, 2$ сохраняются под действием произвольного изоморфизма ϕ и выполяются равенства

$$\phi(Ke_{a+b} + Ke_{3a+2b}) = \phi(R_1 \cdot (Ke_b + Ke_{3a+2b})) = \phi(R_1 \cdot Ann^l R_1) =$$
$$R_2 \cdot Ann^l R_2 = Ke_{3a+2b} = AnnR = \phi(AnnR) = \phi(Ke_{3a+2b}),$$

следует, что ϕ – не изоморфизм.

III. $N_{a,b}(R_1) = N_{a,b}(R_2) = -1$.

1) $N_{b,3a+b}(R_1) = N_{b,3a+b}(R_2) = -1$, но $N_{a,a+b}(R_i)$, $N_{a,2a+b}(R_i)$ выбираются произвольно для любых $i = 1, 2$. При одинаковых $N_{a,2a+b}(R_i)$ для каждой из R_i изоморфизм получается тривиально. Проверим действие ϕ для разных $N_{a,2a+b}(R_i)$. Пусть $N_{a,2a+b}(R_1) = 3$, $N_{a,2a+b}(R_2) = -3$.

Учитывая, что ϕ сохраняет идеалы L_2, L_3 и L_4 проверим действие изоморфизма ϕ, используя идеалы $C^r_{\mathrm{mod}L_4}(R_1) := \{\gamma \in R \mid \alpha\gamma = 0 \mathrm{mod} L_4 \ \ \forall \alpha \in R_1\} = Ke_b + L_3 = C^r_{\mathrm{mod}L_4}(R_2)$ и $C^l_{\mathrm{mod}L_3}(R_1) = Ke_a + L_2 = C^l_{\mathrm{mod}L_3}(R_2)$. Кольца R_i порождаются аддитивными подгруппами Ke_a и Ke_b, поэтому действие на них характеризует ϕ

$$\phi(xe_a) = x^\sigma e_a \mathrm{mod} L_2, \quad \phi(ye_b) = y^\lambda e_b \mathrm{mod} L_3,$$

где $\sigma, \lambda \in End\ K^+$. Сюръективность σ, λ, то есть выполнение равенств $K^\sigma = K = K^\lambda$, следует из того, что ϕ сохраняет идеалы $C^r_{\mathrm{mod}L_4}(R_1), C^l_{\mathrm{mod}L_3}(R_1)$ и двух серий равенств

$$Ke_a + L_2 = C^l_{\mathrm{mod}L_3}(R_2) = \phi(C^l_{\mathrm{mod}L_3}(R_1)) = \phi(Ke_a) + L_2 = K^\sigma e_a \mathrm{mod} L_2,$$

$$Ke_b + L_3 = C^r_{\mathrm{mod}L_4}(R_2) = \phi(C^r_{\mathrm{mod}L_4}(R_1)) = \phi(Ke_b) + L_3 = K^\lambda e_b \mathrm{mod} L_3.$$

В силу того, что ϕ сохраняет множества L_2 и L_3, то имеем

$$L_2 = \phi(L_2) = \phi(Ke_{a+b} + L_3) = \phi(Ke_{a+b}) + L_3 = \phi(Ke_b \cdot 1e_a) + L_3 =$$
$$\phi(1e_b \cdot Ke_a) + L_3 = K^\lambda 1^\sigma e_{a+b} \mathrm{mod} L_3 = 1^\lambda K^\sigma e_{a+b} \mathrm{mod} L_3.$$

Откуда и из леммы 3 следует обратимость в K элементов $1^\sigma, 1^\lambda$. Исследуем действие эндоморфизмов σ, λ, проверив все соотношения изоморфизма ϕ. Пусть

$$\phi(e_b e_a) = \phi(e_{a+b}) = 1^\lambda 1^\sigma e_{a+b} \mathrm{mod} L_3,$$
$$\phi(e_a e_{a+b}) = \phi(k_1 e_{2a+b}) = k_2 1^\sigma 1^\lambda 1^\sigma e_{2a+b} \mathrm{mod} AnnR,$$

при $k_i = 1$ при $N_{a,a+b}(R_i) = 2$, $k_i = -1$ при $N_{a,a+b}(R_i) = -2$, где $i = 1$ или 2. В любом из случаев

$$\phi(e_a k_1 e_{2a+b}) = \phi(k_1 e_{3a+b}) = (-2) k_2 1^\sigma 1^\sigma 1^\lambda 1^\sigma e_{3a+b} \mathrm{mod} AnnR, \tag{8}$$
$$\phi(k_1 e_{2a+b} e_a) = \phi(-2k_1 e_{3a+b}) = k_2 1^\sigma 1^\sigma 1^\lambda 1^\sigma e_{3a+b} \mathrm{mod} AnnR. \tag{9}$$

Домножив на -2 в (8), получим

$$\phi(-2k_1 e_a e_{2a+b}) = \phi(-2k_1 e_{3a+b}) = 4k_2 1^\sigma 1^\sigma 1^\sigma 1^\lambda e_{3a+b} \mathrm{mod} AnnR. \tag{10}$$

Из равенства (9) и (10), обратимости элементов 1^σ и 1^λ получим, что $3=0$, то есть $charK=3$. Остальные соотношения проверяются тривиально. Откуда ϕ – изоморфизм тогда и только тогда, когда $charK=3$.

2) $N_{b,3a+b}(R_1)=N_{b,3a+b}(R_2)=1$, но $N_{a,a+b}(R_i)$, $N_{a,2a+b}(R_i)$ выбираются произвольно для любых $i=1,2$. При одинаковых $N_{a,2a+b}(R_i)$ для каждой из R_i изоморфизм получается тривиально. Проверим действие ϕ для разных $N_{a,2a+b}(R_i)$. Пусть $N_{a,2a+b}(R_1)=3$, $N_{a,2a+b}(R_2)=-3$.

Проверим действие изоморфизма ϕ, используя идеалы $C^l_{\mathrm{mod}L_3}(R_1)=Ke_a+L_2=C^l_{\mathrm{mod}L_3}(R_2)$ и $Ann^r(R_1)=Ke_b+AnnR=Ann^r(R_2)$. В силу того, что ϕ сохраняет идеалы $C^l_{\mathrm{mod}L_3}(R_1)$, $Ann^r(R_1), L_2$ и $AnnR$, то ϕ действует

$$\phi(xe_a)=x^\sigma e_a \mathrm{mod}L_2, \quad \phi(ye_b)=y^\lambda e_b \mathrm{mod}AnnR,$$

где $\sigma,\lambda\in End\,K^+$. Сюръективность σ,λ, то есть выполнение равенств $K^\sigma=K=K^\lambda$, следует из следующих двух серий равенств

$$Ke_a+L_2=C^l_{\mathrm{mod}L_3}(R_2)=\phi(C^l_{\mathrm{mod}L_3}(R_1))=\phi(Ke_a)+L_2=K^\sigma e_a \mathrm{mod}L_2,$$

$$Ke_b+AnnR=Ann^r(R_2)=\phi(Ann^r(R_1))=\phi(Ke_b)+AnnR=K^\lambda e_b \mathrm{mod}AnnR.$$

Обратимость в K элементов $1^\sigma, 1^\lambda$ следует из леммы 3 и равенств

$$L_2=\phi(L_2)=\phi(Ke_{a+b}+L_3)=\phi(Ke_{a+b})+L_3=\phi(Ke_b\cdot 1e_a)+L_3=$$
$$\phi(1e_b\cdot Ke_a)+L_3=K^\lambda 1^\sigma e_{a+b}\mathrm{mod}L_3=1^\lambda K^\sigma e_{a+b}\mathrm{mod}L_3.$$

Исследуем действие эндоморфизмов σ,λ, проверив все соотношения изоморфизма ϕ. Пусть

$$\phi(e_be_a)=\phi(e_{a+b})=1^\lambda 1^\sigma e_{a+b}\mathrm{mod}AnnR,$$
$$\phi(e_ae_{a+b})=\phi(k_1e_{2a+b})=k_2 1^\sigma 1^\lambda 1^\sigma e_{2a+b}\mathrm{mod}AnnR,$$

при $k_i=1$ при $N_{a,a+b}(R_i)=2$, $k_i=-1$ при $N_{a,a+b}(R_i)=-2$, где $i=1$ или 2. В любом из случаев

$$\phi(e_ak_1e_{2a+b})=\phi(k_1l_1e_{3a+b})=k_2l_2 1^\sigma 1^\sigma 1^\lambda 1^\sigma e_{3a+b}\mathrm{mod}AnnR, \tag{11}$$
$$\phi(k_1e_{2a+b}e_a)=\phi(k_1l_2e_{3a+b})=k_2l_1 1^\sigma 1^\sigma 1^\lambda 1^\sigma e_{3a+b}\mathrm{mod}AnnR, \tag{12}$$

Домножив на -2 в (11), получим

$$\phi(-2k_1e_ae_{2a+b})=\phi(-2k_1e_{3a+b})=4k_2 1^\sigma 1^\sigma 1^\lambda 1^\sigma e_{3a+b}\mathrm{mod}AnnR. \tag{13}$$

Из равенства (12) и (13), обратимости элементов 1^σ и 1^λ получим, что $3=0$, то есть $charK=3$. Остальные соотношения проверяются тривиально. Откуда ϕ – изоморфизм тогда и только тогда, когда $charK=3$.

3) $N_{b,3a+b}(R_1)=-1$, $N_{b,3a+b}(R_2)=1$, но $N_{a,a+b}(R_i)$, $N_{a,2a+b}(R_i)$ выбираются произвольно для любых $i=1,2$. Найдём правые аннуляторы колец R_1 и R_2:

$$Ann^rR_1=\Delta_2 tKe_{2a+b}+Ke_{3a+b}+Ke_{3a+2b},\ Ann^rR_2=Ke_b+Ke_{3a+2b},$$

где $t=1$ при $N_{a,2a+b}=-2$, $t=0$ при $N_{a,2a+b}=2$. Из того, что идеалы Ann^rR_i $(i=1,2)$, $AnnR$ сохраняются под действием произвольного изоморфизма ϕ и выполняются равенства

$$Ke_{a+b}\mathrm{mod}AnnR=Ann^rR_2\cdot R_2=\phi(Ann^rR_1\cdot R_1)\subseteq L_3=\phi(L_3),$$

следует, что ϕ – не изоморфизм. □

Следствие 1. *Число неизоморфных точных обёртывающих колец при char $K\neq 3$ равно 8, при char $K=3$ равно 4.*

4. Автоморфизмы точных обёртывающих колец R типа G_2

Выделим нестандартные автоморфизмы точного обёртывающего кольца R алгебры Ли $N\Phi(K)$ типа G_2 при $t \in K$ следующих трёх типов.

$$\begin{aligned}\xi_1(t) : e_a &\longrightarrow e_a + te_{a+b}, \quad e_{3a+b} \longrightarrow e_{3a+b} + te_{3a+2b},\\ e_r &\longrightarrow e_r \quad \text{для остальных } r \in \Phi^+.\end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}\xi_2(t) : \quad e_a &\longrightarrow e_a + te_{3a+b}, \quad e_{a+b} \longrightarrow e_{a+b} + te_{3a+2b},\\ e_r &\longrightarrow e_r \quad \text{для остальных } r \in \Phi^+.\end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}\xi_3(t) : e_a &\longrightarrow e_a + te_{a+b}, \quad e_{3a+b} \longrightarrow e_{3a+b} - 2te_{3a+2b},\\ e_r &\longrightarrow e_r \quad \text{для остальных } r \in \Phi^+.\end{aligned} \tag{16}$$

Автоморфизм (14) является внутренним автоморфизмом кольца Ли $NG_2(K)$. Автоморфизмы (15) и (16) являются гиперцентральными автоморфизмами кольца Ли $NG_2(K)$ высоты 2 и 4 соответственно.

Исследуем автоморфизмы точных обёртывающих колец R кольца Ли $N\Phi(K)$ типа G_2.

Теорема 2. *Произвольный автоморфизм точного обёртывающего кольца R – есть произведение стандартного автоморфизма и одного из наборов автоморфизмов соответственно:*

1. *вида* (14)*, если $Ke_b \subseteq Ann^l R$ или $Ann^r R$;*
2. *вида* (15) *и вида* (16) *в остальных случаях.*

Доказательство. Пусть R – точное обёртывающее кольцо кольца Ли $NG_2(K)$ и $\phi \in AutR$. Кольцо R порождается аддитивными подгруппами Ke_a, Ke_b. Поэтому действие ϕ на них определяет автоморфизм ϕ однозначно. Используя определение (1) и лемму 1, находим, что $Ann\ R = Ke_{3a+2b}$ для любого точного обёртывающего кольца.

1. Случай $N_{a,b} = 1, N_{a,2a+b} = 3, N_{b,3a+b} = 1$.

Ясно, что централизаторы идеалов $L_i,\ i = 1,2,3,4,5$ характеристичны, в частности, централизатор $C(L_4) = Ke_a + L_2$. По лемме 4 идеал $Ke_b + L_3 = C^l_{\mathrm{mod}L_4}(R)$ тоже является характеристичным. Учитывая характеристичность этих идеалов и $L_i,\ i = 1,2,3,4,5$, получаем

$$(xe_a)^\phi = x^\sigma e_a \mathrm{mod} L_2,$$

$$(ye_b)^\phi = y^\lambda e_b \mathrm{mod} L_3,$$

для подходящих эндоморфизмов σ, λ аддитивной группы K^+ кольца K (пользуемся тем, что ϕ сохраняет сложение в R).

Сюръективность σ, λ, то есть выполнение равенств $K^\sigma = K = K^\lambda$, следует из характеристичности идеалов $C(R^4)$, $C^l_{\mathrm{mod}L_4}(R), L_2, L_3$ и двух серий равенств

$$Ke_a + L_2 = C(L_4) = (C(L_4))^\phi = (Ke_a)^\phi + (L_2)^\phi = K^\sigma e_a \mathrm{mod} L_2,$$

$$Ke_b + L_3 = C^l_{\mathrm{mod}L_4}(R) = (C^l_{\mathrm{mod}L_4}(R))^\phi = (Ke_b)^\phi + (L_3)^\phi = K^\lambda e_b \mathrm{mod} L_3.$$

Докажем инъективность σ. Пусть $x, y \in K$ и $x \neq y$, тогда

$$(xe_a)^\phi = x^\sigma e_a \mathrm{mod} L_2,$$

$$(ye_a)^\phi = y^\sigma e_a \mathrm{mod} L_2.$$

Предположим, что $x^\sigma = y^\sigma = c$, тогда

$$(xe_a)^\phi = ce_a + Y_1,\ Y_1 \in L_2,$$

$$(ye_a)^\phi = ce_a + Y_2,\ Y_2 \in L_2.$$

Пусть $Y_1 - Y_2 = Y \in L_2$ и $A = ce_a + Y_1,\ B = ce_a + Y_2$, откуда

$$1)\ (A-B)^{\phi^{-1}} = A^{\phi^{-1}} - B^{\phi^{-1}} = (x-y)e_a.$$

$$2)\ (A-B)^{\phi^{-1}} = Y^{\phi^{-1}} \in L_2.$$

Учитывая характеристичность L_2 и 1), из 2) получаем, что $Y^{\phi^{-1}} = 0$, откуда $x = y$. Инъективность σ доказана. Аналогичное доказательство для $\lambda \in End\ K^+$. Отсюда вытекает включение $\sigma, \lambda \in Aut\ K^+$.

По модулю L_3 справедливы две серии равенств

$$Ke_{a+b} = (Ke_{a+b})^\phi = (Ke_a)^\phi * e_b^\phi = K^\sigma \cdot 1^\lambda e_{a+b},$$

$$Ke_{a+b} = (Ke_{a+b})^\phi = e_a^\phi * (Ke_b)^\phi = 1^\sigma \cdot K^\lambda e_{a+b},$$

откуда $K^\sigma \cdot 1^\lambda = K$ и $1^\sigma \cdot K^\lambda = K$. Обратимость в K элементов 1^σ и 1^λ следует из того, что $K^\sigma = K$, $K^\lambda = K$, соотношений, указанных выше, а также леммы 3.

Умножая ϕ на диагональный автоморфизм, мы получим $1^\sigma = 1^\lambda = 1$. Далее, ϕ-инвариантность основных соотношений кольца R даёт

$$(xe_a * e_b)^\phi = (xe_a)^\phi * e_b^\phi = x^\sigma \cdot 1^\lambda e_{a+b} \mathrm{mod} L_3,$$

$$(xe_a * e_b)^\phi = e_a^\phi * (xe_b)^\phi = 1^\sigma \cdot x^\lambda e_{a+b} \mathrm{mod} L_3,\ (x \in K).$$

Поэтому $x^\lambda = x^\sigma$ для любого $x \in K$, то есть $\lambda = \sigma$. Кроме того, для любых $x, y \in K$, $\sigma \in Aut\ R$, в силу равенств (по модулю L_3)

$$x^\sigma \cdot y^\sigma e_{a+b} = (x^\sigma e_a) * (y^\sigma e_b) = (xe_a)^\phi * (ye_b)^\phi = (xye_a * e_b)^\phi = (xy)^\sigma e_{a+b}.$$

Умножая ϕ, если необходимо, на кольцевой автоморфизм $\hat{\sigma}^{-1}$, получим $\sigma = 1$, откуда

$$(xe_r)^\phi = xe_r \mathrm{mod} Q(r) \quad (r \in \Phi^+),$$

где $Q(r) := \sum\limits_{s>r} Ke_s$. Считаем, что $s > r$, если коэффициенты разложения $s - r$ по базе $\Pi(\Phi^+)$ положительны. Кроме того,

$$(xe_a)^\phi = xe_a + x^{\sigma'} e_{a+b} + x^{\sigma''} e_{2a+b} + x^{\sigma'''} e_{3a+b} \mathrm{mod} Ann\ R,$$

$$(xe_b)^\phi = xe_b + x^{\lambda'} e_{2a+b} + x^{\lambda''} e_{3a+b} \mathrm{mod} Ann\ R,$$

для некоторых $\sigma', \sigma'', \sigma''', \lambda', \lambda'' \in End\ K^+$. Проверим действие этих эндоморфизмов

$$0 = 0^\phi = (xe_a * e_a)^\phi = (l_1 x 1^{\sigma'} + l_2 x^{\sigma'})e_{2a+b} + (x1^{\sigma''} - 2x^{\sigma''})e_{3a+b} \mathrm{mod} AnnR, \tag{17}$$

где $l_1 = -l_2$ и $l_1 = 1$ при $N_{a,a+b} = 2$ или $l_1 = -1$ при $N_{a+b,a} = -2$. Отсюда $x^{\sigma'} = x1^{\sigma'}$.

$$\begin{aligned}(xe_{a+b})^\phi &= (xe_a * e_b)^\phi = xe_{a+b} + x1^{\lambda'} e_{3a+b} \mathrm{mod} Ann\ R,\\ (xe_{a+b})^\phi &= (e_a * xe_b)^\phi = xe_{a+b} + x^{\lambda'} e_{3a+b} \mathrm{mod} Ann\ R,\end{aligned} \tag{18}$$

откуда $x1^{\lambda'} = x^{\lambda'}$.

$$\begin{aligned}(l_2 xe_{2a+b})^\phi &= (xe_{a+b} * e_a)^\phi = l_2 xe_{2a+b} + x1^{\sigma''} e_{3a+2b},\\ (l_2 xe_{2a+b})^\phi &= (e_{a+b} * xe_a)^\phi = l_2 xe_{2a+b} + x^{\sigma''} e_{3a+2b},\end{aligned} \tag{19}$$

аналогично предыдущим случаям $x1^{\sigma''} = x^{\sigma''}$.

$$0 = 0^\phi = (e_b * xe_b)^\phi = x^{\lambda''} e_{3a+2b}, \tag{20}$$

откуда $x^{\lambda''} = 0$, то есть $\lambda'' = 0$ для всех $x \in K$. Из (17)-(20) следует, что $\sigma', \sigma'', \lambda' \in End\ K^+$ действуют как умножения на скаляр.

Умножением ϕ на автоморфизм вида (14) при $t = -1^{\sigma'}$ получим

$$\begin{aligned}(xe_a)^\phi &= xe_a + x^{\sigma''} e_{2a+b} + x^{\sigma'''} e_{3a+b} \mathrm{mod} Ann\ R,\\ (xe_b)^\phi &= xe_b + x^{\lambda'} e_{2a+b} \mathrm{mod} Ann\ R.\end{aligned}$$

Откуда

$$0 = 0^\phi = (e_b * xe_a)^\phi = (-2) \cdot 1^{\lambda'} xe_{3a+b} + x^{\sigma'''} e_{3a+2b},$$

из чего следует, что $x^{\sigma'''} = 0$, то есть $\sigma''' = 0$ для всех $x \in K$.

$$0 = 0^\phi = (xe_a * e_a)^\phi = (x1^{\sigma''} - 2 \cdot x^{\sigma''})e_{3a+b},$$

откуда $x^{\sigma''} = 0$, то есть $\sigma'' = 0$ для всех $x \in K$. Далее, из равенств $0 = 0^\phi = (e_{a+b} * xe_b)^\phi = x^{\lambda'} e_{3a+2b}$, получаем равенство $\lambda' = 0$.

Умножаем на центральный автоморфизм из леммы [16, лемма 1.1.] вида $(1+\zeta)(e_a) = e_a + se_{3a+2b},\ (1+\zeta)(e_b) = e_b + te_{3a+2b}(s,\ t \in K),\ (1+\zeta)(e_r) \longrightarrow e_r$ для остальных $r \in \Phi^+$, получаем $(xe_a)^\phi = xe_a,\ (xe_b)^\phi = xe_b$.

2. Случай $N_{a,b} = 1, N_{a,2a+b} = 3, N_{b,3a+b} = -1$.

По лемме 4 идеалы $C(L_4) = Ke_a + L_2$ и $Ann^l R = Ke_b + AnnR$ являются характеристичными. Учитывая характеристичность этих идеалов и $L_2, AnnR$, получаем

$$(xe_a)^\phi = x^\sigma e_a \mathrm{mod} L_2,$$

$$(ye_b)^\phi = y^\lambda e_b \mathrm{mod} AnnR,$$

для подходящих эндоморфизмов σ, λ аддитивной группы K^+ кольца K (пользуемся тем, что ϕ сохраняет сложение в R).

Сюръективность σ, λ, то есть выполнение равенств $K^\sigma = K = K^\lambda$, следует из характеристичности идеалов $C(L_4),\ Ann^l R, L_2, AnnR$ и двух серий равенств

$$Ke_a + L_2 = C(L_4) = (C(L_4))^\phi = (Ke_a)^\phi + (L_2)^\phi = K^\sigma e_a \mathrm{mod} L_2,$$

$$Ke_b + AnnR = Ann^l R = (Ann^l R)^\phi = (Ke_b)^\phi + (AnnR)^\phi = K^\lambda e_b \mathrm{mod} AnnR.$$

Инъективность $\sigma, \lambda \in End\ K^+$ доказывается аналогично случаю 1. Отсюда вытекает включение $\sigma, \lambda \in Aut\ K^+$.

По модулю L_3 справедливы две серии равенств

$$Ke_{a+b} = (Ke_{a+b})^\phi = (Ke_a)^\phi * e_b^\phi = K^\sigma \cdot 1^\lambda e_{a+b},$$

$$Ke_{a+b} = (Ke_{a+b})^\phi = e_a^\phi * (Ke_b)^\phi = 1^\sigma \cdot K^\lambda e_{a+b},$$

откуда $K^\sigma \cdot 1^\lambda = K$ и $1^\sigma \cdot K^\lambda = K$. Обратимость в K элементов 1^σ и 1^λ следует из того, что $K^\sigma = K$, $K^\lambda = K$, соотношений, указанных выше, а также леммы 3.

Умножая ϕ на диагональный автоморфизм, мы получим $1^\sigma = 1^\lambda = 1$. Далее, ϕ-инвариантность основных соотношений кольца R даёт

$$(xe_a * e_b)^\phi = (xe_a)^\phi * e_b^\phi = x^\sigma \cdot 1^\lambda e_{a+b} \mathrm{mod} L_3,$$

$$(xe_a * e_b)^\phi = e_a^\phi * (xe_b)^\phi = 1^\sigma \cdot x^\lambda e_{a+b} \mathrm{mod} L_3,\ (x \in K).$$

Поэтому $x^\lambda = x^\sigma$ для любого $x \in K$, то есть $\lambda = \sigma$. Кроме того, для любых $x, y \in K$, $\sigma \in Aut\ R$, в силу равенств (по модулю L_3)

$$x^\sigma \cdot y^\sigma e_{a+b} = (x^\sigma e_a) * (y^\sigma e_b) = (xe_a)^\phi * (ye_b)^\phi = (xye_a * e_b)^\phi = (xy)^\sigma e_{a+b}.$$

Умножая ϕ, если необходимо, на кольцевой автоморфизм $\hat{\sigma}^{-1}$, получим $\sigma = 1$, откуда

$$(xe_r)^\phi = xe_r \mathrm{mod} Q(r) \quad (r \in \Phi^+),$$

где $Q(r) := \sum\limits_{s>r} Ke_s$. Кроме того,

$$(xe_a)^\phi = xe_a + x^{\sigma'} e_{a+b} + x^{\sigma''} e_{2a+b} + x^{\sigma'''} e_{3a+b} \mathrm{mod} Ann\ R,$$

$$(xe_b)^\phi = xe_b \mathrm{mod} Ann\ R,$$

для некоторых $\sigma', \sigma'', \sigma''' \in End\ K^+$. Проверим действие этих эндоморфизмов

$$0 = 0^\phi = (xe_a * e_a)^\phi = (l_1 x 1^{\sigma'} + l_2 x^{\sigma'}) e_{2a+b} + (x 1^{\sigma''} - 2x^{\sigma''}) e_{3a+b} \mathrm{mod} AnnR, \tag{21}$$

где $l_1 = -l_2$ и $l_1 = 1$ при $N_{a,a+b} = 2$ или $l_1 = -1$ при $N_{a+b,a} = -2$. Отсюда $x^{\sigma'} = x1^{\sigma'}$.

$$\begin{aligned} (l_1 xe_{2a+b})^\phi &= (e_a * xe_{a+b})^\phi = l_1 xe_{2a+b} + x1^{\sigma''} e_{3a+2b}, \\ (l_1 xe_{2a+b})^\phi &= (xe_a * e_{a+b})^\phi = l_1 xe_{2a+b} + x^{\sigma''} e_{3a+2b}, \end{aligned} \tag{22}$$

аналогично предыдущим случаям $x1^{\sigma''} = x^{\sigma''}$. Из (21),(22) следует, что $\sigma', \sigma'' \in End\ K^+$ действуют как умножения на скаляр. Умножением ϕ последовательно на автоморфизмы вида (15) при $t = -1^{\sigma'''}$ и (16) при $t = -1^{\sigma'}$ получим

$$\begin{aligned} (xe_a)^\phi &= xe_a + x^{\sigma''} e_{2a+b} \mathrm{mod} Ann\ R, \\ (xe_b)^\phi &= xe_b \mathrm{mod} Ann\ R. \end{aligned}$$

Откуда

$$0 = 0^{\phi} = (xe_a * e_a)^{\phi} = (x1^{\sigma''} - 2 \cdot x^{\sigma''})e_{3a+b},$$

откуда $x^{\sigma''} = 0$, то есть $\sigma'' = 0$ для всех $x \in K$.

Умножаем на центральный автоморфизм из леммы [16, лемма 1.1.] вида $(1+\zeta)(e_a) = e_a + se_{3a+2b},\ (1+\zeta)(e_b) = e_b + te_{3a+2b}(s,\ t \in K),\ (1+\zeta)(e_r) \longrightarrow e_r$ для остальных $r \in \Phi^+$, получаем $(xe_a)^{\phi} = xe_a,\ (xe_b)^{\phi} = xe_b$.

3. Случай $N_{a,b} = 1, N_{a,2a+b} = -3, N_{b,3a+b} = 1$. Ясно, что централизаторы идеалов $L_i,\ i = 1,2,3,4,5$ характеристичны, в частности, централизатор $C(L_4) = Ke_a + L_2$. По лемме 4 идеал $C^l_{\mathrm{mod}AnnR}(R) = Ke_b + L_4$ тоже является характеристичным. Учитывая характеристичность этих идеалов и L_2, L_4, получаем

$$(xe_a)^{\phi} = x^{\sigma}e_a \mathrm{mod} L_2,$$

$$(ye_b)^{\phi} = y^{\lambda}e_b \mathrm{mod} L_4,$$

для подходящих эндоморфизмов σ, λ аддитивной группы K^+ кольца K (пользуемся тем, что ϕ сохраняет сложение в R).

Сюръективность σ, λ, то есть выполнение равенств $K^{\sigma} = K = K^{\lambda}$, следует из характеристичности идеалов $C(R^4)$, $C^l_{\mathrm{mod}AnnR}(R), L_2, L_4$ и двух серий равенств

$$Ke_a + L_2 = C(L_4) = (C(L_4))^{\phi} = (Ke_a)^{\phi} + (L_2)^{\phi} = K^{\sigma}e_a \mathrm{mod} L_2,$$

$$Ke_b + L_4 = C^l_{\mathrm{mod}AnnR}(R) = (C^l_{\mathrm{mod}AnnR}(R))^{\phi} = (Ke_b)^{\phi} + (L_4)^{\phi} = K^{\lambda}e_b \mathrm{mod} L_4.$$

Инъективность $\sigma, \lambda \in End\ K^+$ доказывается аналогично случаю 1. Отсюда вытекает включение $\sigma, \lambda \in Aut\ K^+$.

По модулю L_3 справедливы две серии равенств

$$Ke_{a+b} = (Ke_{a+b})^{\phi} = (Ke_a)^{\phi} * e_b^{\phi} = K^{\sigma} \cdot 1^{\lambda}e_{a+b},$$

$$Ke_{a+b} = (Ke_{a+b})^{\phi} = e_a^{\phi} * (Ke_b)^{\phi} = 1^{\sigma} \cdot K^{\lambda}e_{a+b},$$

откуда $K^{\sigma} \cdot 1^{\lambda} = K$ и $1^{\sigma} \cdot K^{\lambda} = K$. Обратимость в K элементов 1^{σ} и 1^{λ} следует из того, что $K^{\sigma} = K$, $K^{\lambda} = K$, соотношений, указанных выше, а также леммы 3.

Умножая ϕ на диагональный автоморфизм, мы получим $1^{\sigma} = 1^{\lambda} = 1$. Далее, ϕ-инвариантность основных соотношений кольца R даёт

$$(xe_a * e_b)^{\phi} = (xe_a)^{\phi} * e_b^{\phi} = x^{\sigma} \cdot 1^{\lambda}e_{a+b},$$

$$(xe_a * e_b)^{\phi} = e_a^{\phi} * (xe_b)^{\phi} = 1^{\sigma} \cdot x^{\lambda}e_{a+b},\ (x \in K).$$

Поэтому $x^{\lambda} = x^{\sigma}$ для любого $x \in K$, то есть $\lambda = \sigma$. Кроме того, для любых $x, y \in K$, $\sigma \in Aut\ R$, в силу равенств (по модулю L_3)

$$x^{\sigma} \cdot y^{\sigma}e_{a+b} = (x^{\sigma}e_a) * (y^{\sigma}e_b) = (xe_a)^{\phi} * (ye_b)^{\phi} = (xye_a * e_b)^{\phi} = (xy)^{\sigma}e_{a+b}.$$

Умножая ϕ, если необходимо, на кольцевой автоморфизм $\hat{\sigma}^{-1}$, получим $\sigma = 1$, откуда

$$(xe_r)^{\phi} = xe_r \mathrm{mod} Q(r) \quad (r \in \Phi^+),$$

где $Q(r) := \sum\limits_{s>r} Ke_s$. Кроме того,

$$(xe_a)^\phi = xe_a + x^{\sigma'}e_{a+b} + x^{\sigma''}e_{2a+b} + x^{\sigma'''}e_{3a+b}\mathrm{mod}Ann\ R,$$

$$(xe_b)^\phi = xe_b + x^{\lambda'}e_{3a+b}\mathrm{mod}Ann\ R,$$

для некоторых $\sigma', \sigma'', \sigma''', \lambda' \in End\ K^+$. Проверим действие этих эндоморфизмов

$$0 = 0^\phi = (e_b * xe_b)^\phi = x^{\lambda'}e_{3a+2b},$$

откуда $x^{\lambda'} = 0$, то есть $\lambda' = 0$ для всех $x \in K$.

$$0 = 0^\phi = (e_b * xe_a)^\phi = (-2)\cdot 1^{\lambda'}xe_{3a+b} + x^{\sigma'''}e_{3a+2b},$$

из чего следует, что $x^{\sigma'''} = 0$, то есть $\sigma''' = 0$ для всех $x \in K$.

$$0 = 0^\phi = (xe_a * e_a)^\phi = (l_1x1^{\sigma'} + l_2x^{\sigma'})e_{2a+b} + (-2x1^{\sigma''} + x^{\sigma''})e_{3a+b}\mathrm{mod}AnnR, \qquad (23)$$

где $l_1 = -l_2$ и $l_1 = 1$ при $N_{a,a+b} = 2$ или $l_1 = -1$ при $N_{a+b,a} = -2$. Отсюда $x^{\sigma'} = x1^{\sigma'}$.

$$(l_2xe_{2a+b})^\phi = (xe_{a+b} * e_a)^\phi = l_2xe_{2a+b} + x1^{\sigma''}e_{3a+2b},$$
$$(l_2xe_{2a+b})^\phi = (e_{a+b} * xe_a)^\phi = l_2xe_{2a+b} + x^{\sigma''}e_{3a+2b},$$

аналогично предыдущим случаям $x1^{\sigma''} = x^{\sigma''}$. Подставив это равенство в (23), получим, $-x^{\sigma''} = 0$. Откуда $\sigma'' = 0$ для всех $x \in K$. Из (23) следует, что $\sigma' \in End\ K^+$ действуют как умножения на скаляр.

Умножением ϕ на автоморфизм вида (14) при $t = -1^{\sigma'}$ получим

$$(xe_a)^\phi = xe_a\mathrm{mod}Ann\ R,$$
$$(xe_b)^\phi = xe_b\mathrm{mod}Ann\ R.$$

Умножаем на центральный автоморфизм из леммы [16, лемма 1.1.] вида $(1+\zeta)(e_a) = e_a + se_{3a+2b}$, $(1+\zeta)(e_b) = e_b + te_{3a+2b}(s,\ t \in K)$, $(1+\zeta)(e_r) \longrightarrow e_r$ для остальных $r \in \Phi^+$, получаем $(xe_a)^\phi = xe_a$, $(xe_b)^\phi = xe_b$.

4. Случай $N_{a,b} = 1, N_{a,2a+b} = -3, N_{b,3a+b} = -1$.

По лемме 4 идеалы $C(L_4) = Ke_a + L_2$ и $Ann^lR = Ke_b + AnnR$ являются характеристичными. Учитывая характеристичность этих идеалов и $L_2, AnnR$, получаем

$$(xe_a)^\phi = x^\sigma e_a\mathrm{mod}L_2,$$

$$(ye_b)^\phi = y^\lambda e_b\mathrm{mod}AnnR,$$

для подходящих эндоморфизмов σ, λ аддитивной группы K^+ кольца K (пользуемся тем, что ϕ сохраняет сложение в R).

Сюръективность σ, λ, то есть выполнение равенств $K^\sigma = K = K^\lambda$, следует из характеристичности идеалов $C(L_4)$, $Ann^lR, L_2, AnnR$ и двух серий равенств

$$Ke_a + L_2 = C(L_4) = (C(L_4))^\phi = (Ke_a)^\phi + (L_2)^\phi = K^\sigma e_a\mathrm{mod}L_2,$$

$$Ke_b + AnnR = Ann^lR = (Ann^lR)^\phi = (Ke_b)^\phi + (AnnR)^\phi = K^\lambda e_b\mathrm{mod}AnnR.$$

Инъективность $\sigma, \lambda \in End\ K^+$ доказывается аналогично случаю 1. Отсюда вытекает включение $\sigma, \lambda \in Aut\ K^+$.

По модулю L_3 справедливы две серии равенств

$$Ke_{a+b} = (Ke_{a+b})^\phi = (Ke_a)^\phi * e_b^\phi = K^\sigma \cdot 1^\lambda e_{a+b},$$

$$Ke_{a+b} = (Ke_{a+b})^\phi = e_a^\phi * (Ke_b)^\phi = 1^\sigma \cdot K^\lambda e_{a+b},$$

откуда $K^\sigma \cdot 1^\lambda = K$ и $1^\sigma \cdot K^\lambda = K$. Обратимость в K элементов 1^σ и 1^λ следует из того, что $K^\sigma = K$, $K^\lambda = K$, соотношений, указанных выше, а также леммы 3.

Умножая ϕ на диагональный автоморфизм, мы получим $1^\sigma = 1^\lambda = 1$. Далее, ϕ-инвариантность основных соотношений кольца R даёт

$$(xe_a * e_b)^\phi = (xe_a)^\phi * e_b^\phi = x^\sigma \cdot 1^\lambda e_{a+b} \mathrm{mod} L_3,$$

$$(xe_a * e_b)^\phi = e_a^\phi * (xe_b)^\phi = 1^\sigma \cdot x^\lambda e_{a+b} \mathrm{mod} L_3,\ (x \in K).$$

Поэтому $x^\lambda = x^\sigma$ для любого $x \in K$, то есть $\lambda = \sigma$. Кроме того, для любых $x, y \in K$, $\sigma \in Aut\ R$, в силу равенств (по модулю L_3)

$$x^\sigma \cdot y^\sigma e_{a+b} = (x^\sigma e_a) * (y^\sigma e_b) = (xe_a)^\phi * (ye_b)^\phi = (xye_a * e_b)^\phi = (xy)^\sigma e_{a+b}.$$

Умножая ϕ, если необходимо, на кольцевой автоморфизм $\hat{\sigma}^{-1}$, получим $\sigma = 1$, откуда

$$(xe_r)^\phi = xe_r \mathrm{mod} Q(r) \quad (r \in \Phi^+),$$

где $Q(r) := \sum\limits_{s>r} Ke_s$. Кроме того,

$$(xe_a)^\phi = xe_a + x^{\sigma'} e_{a+b} + x^{\sigma''} e_{2a+b} + x^{\sigma'''} e_{3a+b} \mathrm{mod} Ann\ R,$$

$$(xe_b)^\phi = xe_b \mathrm{mod} Ann\ R,$$

для некоторых $\sigma', \sigma'', \sigma''' \in End\ K^+$. Проверим действие этих эндоморфизмов

$$0 = 0^\phi = (xe_a * e_a)^\phi = (l_1 x 1^{\sigma'} + l_2 x^{\sigma'}) e_{2a+b} + (x 1^{\sigma''} - 2x^{\sigma''}) e_{3a+b} \mathrm{mod} Ann R, \tag{24}$$

где $l_1 = -l_2$ и $l_1 = 1$ при $N_{a,a+b} = 2$ или $l_1 = -1$ при $N_{a+b,a} = -2$. Отсюда $x^{\sigma'} = x1^{\sigma'}$.

$$(l_2 xe_{2a+b})^\phi = (xe_{a+b} * e_a)^\phi = l_2 xe_{2a+b} + x1^{\sigma''} e_{3a+2b},$$
$$(l_2 xe_{2a+b})^\phi = (e_{a+b} * xe_a)^\phi = l_2 xe_{2a+b} + x^{\sigma''} e_{3a+2b},$$

аналогично предыдущим случаям $x1^{\sigma''} = x^{\sigma''}$. Отсюда и из (24) $\sigma'' = 0$. Далее

$$(xe_{a+b})^\phi = (e_a * xe_b)^\phi = xe_{a+b} + x^{\sigma'''} e_{3a+2b},$$
$$(xe_{a+b})^\phi = (xe_a * e_b)^\phi = xe_{a+b} + x1^{\sigma'''} e_{3a+2b}, \tag{25}$$

аналогично предыдущим случаям $x1^{\sigma'''} = x^{\sigma'''}$. Отсюда и из (24) следует, что $\sigma', \sigma''' \in End\ K^+$ действуют как умножения на скаляр. Умножением ϕ последовательно на автоморфизмы вида (15) при $t = -1^{\sigma'''}$ и (16) при $t = -1^{\sigma'}$ получим

$$(xe_a)^\phi = xe_a \mathrm{mod} Ann\ R,$$
$$(xe_b)^\phi = xe_b \mathrm{mod} Ann\ R.$$

Умножаем на центральный автоморфизм из леммы [16, лемма 1.1.] вида $(1+\zeta)(e_a) = e_a + se_{3a+2b},\ (1+\zeta)(e_b) = e_b + te_{3a+2b}(s,\ t \in K),\ (1+\zeta)(e_r) \longrightarrow e_r$ для остальных $r \in \Phi^+$, получаем $(xe_a)^\phi = xe_a,\ (xe_b)^\phi = xe_b$.

5. Случай $N_{a,b} = -1, N_{a,2a+b} = 3, N_{b,3a+b} = 1$.

Ясно, что централизаторы идеала L_4 характеристичны, в частности, централизатор $C(L_4) = Ke_a + L_2$. По лемме 4 идеал $Ann^r R = Ke_b + AnnR$ тоже является характеристичным. Учитывая характеристичность этих идеалов и $L_2, AnnR$, получаем

$$(xe_a)^\phi = x^\sigma e_a \mathrm{mod} L_2,$$

$$(ye_b)^\phi = y^\lambda e_b \mathrm{mod} AnnR,$$

для подходящих эндоморфизмов σ, λ аддитивной группы K^+ кольца K (пользуемся тем, что ϕ сохраняет сложение в R).

Сюръективность σ, λ, то есть выполнение равенств $K^\sigma = K = K^\lambda$, следует из характеристичности идеалов $C(R^4)$, $Ann^r R, L_2, AnnR$ и двух серий равенств

$$Ke_a + L_2 = C(L_4) = (C(L_4))^\phi = (Ke_a)^\phi + (L_2)^\phi = K^\sigma e_a \mathrm{mod} L_2,$$

$$Ke_b + AnnR = Ann^r R = (Ann^r R)^\phi = (Ke_b)^\phi + (AnnR)^\phi = K^\lambda e_b \mathrm{mod} AnnR.$$

Инъективность $\sigma, \lambda \in End\ K^+$ доказывается аналогично случаю 1. Отсюда вытекает включение $\sigma, \lambda \in Aut\ K^+$.

По модулю L_3 справедливы две серии равенств

$$Ke_{a+b} = (Ke_{a+b})^\phi = (Ke_b)^\phi * e_a^\phi = K^\lambda \cdot 1^\sigma e_{a+b},$$

$$Ke_{a+b} = (Ke_{a+b})^\phi = e_b^\phi * (Ke_a)^\phi = 1^\lambda \cdot K^\sigma e_{a+b},$$

откуда $K^\sigma \cdot 1^\lambda = K$ и $1^\sigma \cdot K^\lambda = K$. Обратимость в K элементов 1^σ и 1^λ следует из того, что $K^\sigma = K$, $K^\lambda = K$, соотношений, указанных выше, а также леммы 3.

Умножая ϕ на диагональный автоморфизм, мы получим $1^\sigma = 1^\lambda = 1$. Далее, ϕ-инвариантность основных соотношений кольца R даёт

$$(xe_b * e_a)^\phi = (xe_b)^\phi * e_a^\phi = x^\lambda \cdot 1^\sigma e_{a+b},$$

$$(xe_b * e_a)^\phi = e_b^\phi * (xe_a)^\phi = 1^\lambda \cdot x^\sigma e_{a+b},\ (x \in K).$$

Поэтому $x^\lambda = x^\sigma$ для любого $x \in K$, то есть $\lambda = \sigma$. Кроме того, для любых $x, y \in K$, $\sigma \in Aut\ R$, в силу равенств (по модулю L_3)

$$x^\sigma \cdot y^\sigma e_{a+b} = (x^\sigma e_b) * (y^\sigma e_a) = (xe_b)^\phi * (ye_a)^\phi = (xye_b * e_a)^\phi = (xy)^\sigma e_{a+b}.$$

Умножая ϕ, если необходимо, на кольцевой автоморфизм $\hat{\sigma}^{-1}$, получим $\sigma = 1$, откуда

$$(xe_r)^\phi = xe_r \mathrm{mod} Q(r) \quad (r \in \Phi^+),$$

где $Q(r) := \sum\limits_{s>r} Ke_s$. Кроме того,

$$(xe_a)^\phi = xe_a + x^{\sigma'} e_{a+b} + x^{\sigma''} e_{2a+b} + x^{\sigma'''} e_{3a+b} \mathrm{mod} Ann\ R,$$

$$(xe_b)^\phi = xe_b \mathrm{mod} Ann\ R,$$

для некоторых $\sigma', \sigma'', \sigma''' \in End\ K^+$. Проверим действие этих эндоморфизмов

$$0 = 0^\phi = (xe_a * e_a)^\phi = (l_1 x 1^{\sigma'} + l_2 x^{\sigma'})e_{2a+b} + (x1^{\sigma''} - 2x^{\sigma''})e_{3a+b} \mathrm{mod} AnnR, \tag{26}$$

где $l_1 = -l_2$ и $l_1 = 1$ при $N_{a,a+b} = 2$ или $l_1 = -1$ при $N_{a+b,a} = -2$. Отсюда $x^{\sigma'} = x1^{\sigma'}$.

$$(l_1 xe_{2a+b})^\phi = (xe_a * e_{a+b})^\phi = l_1 xe_{2a+b} + x^{\sigma''}e_{3a+2b},$$
$$(l_1 xe_{2a+b})^\phi = (e_a * xe_{a+b})^\phi = l_1 xe_{2a+b} + x1^{\sigma''}e_{3a+2b},$$

аналогично предыдущим случаям $x1^{\sigma''} = x^{\sigma''}$. Подставив это равенство в (26), получим, $-x^{\sigma''} = 0$. Откуда $\sigma'' = 0$ для всех $x \in K$. Далее

$$(xe_{a+b})^\phi = (e_b * xe_a)^\phi = xe_{a+b} + x^{\sigma'''}e_{3a+2b},$$
$$(xe_{a+b})^\phi = (xe_b * e_a)^\phi = xe_{a+b} + x1^{\sigma'''}e_{3a+2b}, \tag{27}$$

аналогично предыдущим случаям $x1^{\sigma'''} = x^{\sigma'''}$. Из (26) следует, что $\sigma', \sigma''' \in End\ K^+$ действуют как умножения на скаляр.

Умножением ϕ последовательно на автоморфизм вида (16) при $t = -1^{\sigma'}$ и автоморфизм вида (15) при $t = -1^{\sigma'''}$ получим

$$(xe_a)^\phi = xe_a \mathrm{mod} Ann\ R,$$
$$(xe_b)^\phi = xe_b \mathrm{mod} Ann\ R.$$

Умножаем на центральный автоморфизм из леммы [16, лемма 1.1.] вида $(1+\zeta)(e_a) = e_a + se_{3a+2b},\ (1+\zeta)(e_b) = e_b + te_{3a+2b}(s,\ t \in K),\ (1+\zeta)(e_r) \longrightarrow e_r$ для остальных $r \in \Phi^+$, получаем $(xe_a)^\phi = xe_a,\ (xe_b)^\phi = xe_b$.

6. Случай $N_{a,b} = -1, N_{a,2a+b} = 3, N_{b,3a+b} = -1$.
По лемме 4 идеалы $C(L_4) = Ke_a + L_2$ и $C^r_{\mathrm{mod}AnnR}(R) = Ke_b + L_4$ являются характеристичными. Учитывая характеристичность этих идеалов и L_2, L_4, получаем

$$(xe_a)^\phi = x^\sigma e_a \mathrm{mod} L_2,$$

$$(ye_b)^\phi = y^\lambda e_b \mathrm{mod} L_4,$$

для подходящих эндоморфизмов σ, λ аддитивной группы K^+ кольца K (пользуемся тем, что ϕ сохраняет сложение в R).
Сюръективность σ, λ, то есть выполнение равенств $K^\sigma = K = K^\lambda$, следует из характеристичности идеалов $C(L_4)$, $C^r_{\mathrm{mod}AnnR}(R), L_2, L_4$ и двух серий равенств

$$Ke_a + L_2 = C(L_4) = (C(L_4))^\phi = (Ke_a)^\phi + (L_2)^\phi = K^\sigma e_a \mathrm{mod} L_2,$$

$$Ke_b + L_4 = C^r_{\mathrm{mod}AnnR}(R) = (C^r_{\mathrm{mod}AnnR}(R))^\phi = (Ke_b)^\phi + (L_4)^\phi = K^\lambda e_b \mathrm{mod} L_4.$$

Инъективность $\sigma, \lambda \in End\ K^+$ доказывается аналогично случаю 1. Отсюда вытекает включение $\sigma, \lambda \in Aut\ K^+$.

По модулю L_3 справедливы две серии равенств

$$Ke_{a+b} = (Ke_{a+b})^\phi = (Ke_b)^\phi * e_a^\phi = K^\sigma \cdot 1^\lambda e_{a+b},$$

$$Ke_{a+b} = (Ke_{a+b})^{\phi} = e_b^{\phi} * (Ke_a)^{\phi} = 1^{\sigma} \cdot K^{\lambda} e_{a+b},$$

откуда $K^{\sigma} \cdot 1^{\lambda} = K$ и $1^{\sigma} \cdot K^{\lambda} = K$. Обратимость в K элементов 1^{σ} и 1^{λ} следует из того, что $K^{\sigma} = K$, $K^{\lambda} = K$, соотношений, указанных выше, а также леммы 3.

Умножая ϕ на диагональный автоморфизм, мы получим $1^{\sigma} = 1^{\lambda} = 1$. Далее, ϕ-инвариантность основных соотношений кольца R даёт

$$(xe_b * e_a)^{\phi} = (xe_b)^{\phi} * e_a^{\phi} = x^{\sigma} \cdot 1^{\lambda} e_{a+b} \mathrm{mod} L_3,$$

$$(xe_b * e_a)^{\phi} = e_b^{\phi} * (xe_a)^{\phi} = 1^{\sigma} \cdot x^{\lambda} e_{a+b} \mathrm{mod} L_3, \ (x \in K).$$

Поэтому $x^{\lambda} = x^{\sigma}$ для любого $x \in K$, то есть $\lambda = \sigma$. Кроме того, для любых $x, y \in K$, $\sigma \in Aut\ R$, в силу равенств (по модулю L_3)

$$x^{\sigma} \cdot y^{\sigma} e_{a+b} = (x^{\sigma} e_b) * (y^{\sigma} e_a) = (xe_b)^{\phi} * (ye_a)^{\phi} = (xye_b * e_a)^{\phi} = (xy)^{\sigma} e_{a+b}.$$

Умножая ϕ, если необходимо, на кольцевой автоморфизм $\hat{\sigma}^{-1}$, получим $\sigma = 1$, откуда

$$(xe_r)^{\phi} = xe_r \mathrm{mod} Q(r) \quad (r \in \Phi^+),$$

где $Q(r) := \sum\limits_{s>r} Ke_s$. Кроме того,

$$(xe_a)^{\phi} = xe_a + x^{\sigma'} e_{a+b} + x^{\sigma''} e_{2a+b} + x^{\sigma'''} e_{3a+b} \mathrm{mod} Ann\ R,$$

$$(xe_b)^{\phi} = xe_b + x^{\lambda'} e_{3a+b} \mathrm{mod} Ann\ R,$$

для некоторых $\sigma', \sigma'', \sigma''', \lambda' \in End\ K^+$. Проверим действие этих эндоморфизмов

$$0 = 0^{\phi} = (xe_a * e_a)^{\phi} = (l_1 x 1^{\sigma'} + l_2 x^{\sigma'}) e_{2a+b} + (x 1^{\sigma''} - 2x^{\sigma''}) e_{3a+b} \mathrm{mod} Ann R, \tag{28}$$

где $l_1 = -l_2$ и $l_1 = 1$ при $N_{a,a+b} = 2$ или $l_1 = -1$ при $N_{a+b,a} = -2$. Отсюда $x^{\sigma'} = x1^{\sigma'}$.

$$(l_2 xe_{2a+b})^{\phi} = (xe_{a+b} * e_a)^{\phi} = l_2 xe_{2a+b} + x1^{\sigma''} e_{3a+2b},$$
$$(l_2 xe_{2a+b})^{\phi} = (e_{a+b} * xe_a)^{\phi} = l_2 xe_{2a+b} + x^{\sigma''} e_{3a+2b},$$

аналогично предыдущим случаям $x1^{\sigma''} = x^{\sigma''}$. Отсюда и из (28) $\sigma'' = 0$. Далее

$$0 = 0^{\phi} = (e_a * xe_b)^{\phi} = x^{\sigma'''} e_{3a+2b},$$

аналогично предыдущим случаям $\sigma''' = 0$.

$$0 = 0^{\phi} = (xe_b * e_b)^{\phi} = x^{\lambda'} e_{3a+2b}, \tag{29}$$

откуда $\lambda' = 0$ для всех $x \in K$. Отсюда и из (28) следует, что $\sigma' \in End\ K^+$ действует как умножение на скаляр. Умножением ϕ на автоморфизм вида (14) при $t = -1^{\sigma'}$ получим

$$(xe_a)^{\phi} = xe_a \mathrm{mod} Ann\ R,$$
$$(xe_b)^{\phi} = xe_b \mathrm{mod} Ann\ R.$$

Умножаем на центральный автоморфизм из леммы [16, лемма 1.1.] вида $(1+\zeta)(e_a) = e_a + se_{3a+2b}$, $(1+\zeta)(e_b) = e_b + te_{3a+2b} (s,\ t \in K)$, $(1+\zeta)(e_r) \longrightarrow e_r$ для остальных $r \in \Phi^+$, получаем $(xe_a)^{\phi} = xe_a$, $(xe_b)^{\phi} = xe_b$.

7. Случай $N_{a,b}=-1, N_{a,2a+b}=-3, N_{b,3a+b}=1$.
По лемме 4 идеалы $C(L_4)=Ke_a+L_2$ и $Ann^rR=Ke_b+AnnR$ являются характеристичными. Учитывая характеристичность этих идеалов и $L_2, AnnR$, получаем

$$(xe_a)^\phi = x^\sigma e_a \mathrm{mod} L_2,$$

$$(ye_b)^\phi = y^\lambda e_b \mathrm{mod} AnnR,$$

для подходящих эндоморфизмов σ, λ аддитивной группы K^+ кольца K (пользуемся тем, что ϕ сохраняет сложение в R).
Сюръективность σ, λ, то есть выполнение равенств $K^\sigma = K = K^\lambda$, следует из характеристичности идеалов $C(L_4)$, $Ann^rR, L_2, AnnR$ и двух серий равенств

$$Ke_a + L_2 = C(L_4) = (C(L_4))^\phi = (Ke_a)^\phi + (L_2)^\phi = K^\sigma e_a \mathrm{mod} L_2,$$

$$Ke_b + AnnR = Ann^rR = (Ann^rR)^\phi = (Ke_b)^\phi + (AnnR)^\phi = K^\lambda e_b \mathrm{mod} AnnR.$$

Инъективность $\sigma, \lambda \in End\ K^+$ доказывается аналогично случаю 1. Отсюда вытекает включение $\sigma, \lambda \in Aut\ K^+$.

По модулю L_3 справедливы две серии равенств

$$Ke_{a+b} = (Ke_{a+b})^\phi = (Ke_b)^\phi * e_a^\phi = K^\lambda \cdot 1^\sigma e_{a+b},$$

$$Ke_{a+b} = (Ke_{a+b})^\phi = e_b^\phi * (Ke_a)^\phi = 1^\lambda \cdot K^\sigma e_{a+b},$$

откуда $K^\sigma \cdot 1^\lambda = K$ и $1^\sigma \cdot K^\lambda = K$. Обратимость в K элементов 1^σ и 1^λ следует из того, что $K^\sigma = K$, $K^\lambda = K$, соотношений, указанных выше, а также леммы 3.

Умножая ϕ на диагональный автоморфизм, мы получим $1^\sigma = 1^\lambda = 1$. Далее, ϕ-инвариантность основных соотношений кольца R даёт

$$(xe_b * e_a)^\phi = (xe_b)^\phi * e_a^\phi = x^\lambda \cdot 1^\sigma e_{a+b} \mathrm{mod} L_3,$$

$$(xe_b * e_a)^\phi = e_b^\phi * (xe_a)^\phi = 1^\lambda \cdot x^\sigma e_{a+b} \mathrm{mod} L_3,\ (x \in K).$$

Поэтому $x^\lambda = x^\sigma$ для любого $x \in K$, то есть $\lambda = \sigma$. Кроме того, для любых $x, y \in K$, $\sigma \in Aut\ R$, в силу равенств (по модулю L_3)

$$x^\sigma \cdot y^\sigma e_{a+b} = (x^\sigma e_b) * (y^\sigma e_a) = (xe_b)^\phi * (ye_a)^\phi = (xye_b * e_a)^\phi = (xy)^\sigma e_{a+b}.$$

Умножая ϕ, если необходимо, на кольцевой автоморфизм $\hat{\sigma}^{-1}$, получим $\sigma = 1$, откуда

$$(xe_r)^\phi = xe_r \mathrm{mod} Q(r) \quad (r \in \Phi^+),$$

где $Q(r) := \sum\limits_{s>r} Ke_s$. Кроме того,

$$(xe_a)^\phi = xe_a + x^{\sigma'}e_{a+b} + x^{\sigma''}e_{2a+b} + x^{\sigma'''}e_{3a+b} \mathrm{mod} Ann\ R,$$

$$(xe_b)^\phi = xe_b \mathrm{mod} Ann\ R,$$

для некоторых $\sigma', \sigma'', \sigma''' \in End\ K^+$. Проверим действие этих эндоморфизмов

$$0 = 0^\phi = (xe_a * e_a)^\phi = (l_1 x 1^{\sigma'} + l_2 x^{\sigma'})e_{2a+b} + (-2x1^{\sigma''} + x^{\sigma''})e_{3a+b} \mathrm{mod} Ann R, \tag{30}$$

где $l_1 = -l_2$ и $l_1 = 1$ при $N_{a,a+b} = 2$ или $l_1 = -1$ при $N_{a+b,a} = -2$. Отсюда $x^{\sigma'} = x1^{\sigma'}$.

$$(l_2 x e_{2a+b})^\phi = (xe_{a+b} * e_a)^\phi = l_2 x e_{2a+b} + x1^{\sigma''} e_{3a+2b},$$
$$(l_2 x e_{2a+b})^\phi = (e_{a+b} * xe_a)^\phi = l_2 x e_{2a+b} + x^{\sigma''} e_{3a+2b},$$

аналогично предыдущим случаям $x1^{\sigma''} = x^{\sigma''}$. Отсюда и из (30) $\sigma'' = 0$. Далее

$$(xe_{a+b})^\phi = (e_b * xe_a)^\phi = xe_{a+b} + x^{\sigma'''} e_{3a+2b},$$
$$(xe_{a+b})^\phi = (xe_b * e_a)^\phi = xe_{a+b} + x1^{\sigma'''} e_{3a+2b}, \tag{31}$$

аналогично предыдущим случаям $x1^{\sigma'''} = x^{\sigma'''}$. Отсюда и из (30) следует, что $\sigma', \sigma''' \in End\ K^+$ действуют как умножения на скаляр. Умножением ϕ последовательно на автоморфизмы вида (15) при $t = -1^{\sigma'''}$ и (16) при $t = -1^{\sigma'}$ получим

$$(xe_a)^\phi = xe_a \mathrm{mod} Ann\ R,$$
$$(xe_b)^\phi = xe_b \mathrm{mod} Ann\ R.$$

Умножаем на центральный автоморфизм из леммы [16, лемма 1.1.] вида $(1+\zeta)(e_a) = e_a + se_{3a+2b},\ (1+\zeta)(e_b) = e_b + te_{3a+2b}(s,\ t \in K),\ (1+\zeta)(e_r) \longrightarrow e_r$ для остальных $r \in \Phi^+$, получаем $(xe_a)^\phi = xe_a,\ (xe_b)^\phi = xe_b$.

8. Случай $N_{a,b} = -1, N_{a,2a+b} = -3, N_{b,3a+b} = -1$.
По лемме 4 идеалы $C(L_4) = Ke_a + L_2$ и $C^r_{\mathrm{mod}L_4}(R) = Ke_b + L_3$ являются характеристичными. Учитывая характеристичность этих идеалов и L_2, L_3, получаем

$$(xe_a)^\phi = x^\sigma e_a \mathrm{mod} L_2,$$

$$(ye_b)^\phi = y^\lambda e_b \mathrm{mod} L_3,$$

для подходящих эндоморфизмов σ, λ аддитивной группы K^+ кольца K (пользуемся тем, что ϕ сохраняет сложение в R).
Сюръективность σ, λ, то есть выполнение равенств $K^\sigma = K = K^\lambda$, следует из характеристичности идеалов $C(R^4)$, $C^r_{\mathrm{mod}L_4}(R), L_2, L_3$ и двух серий равенств

$$Ke_a + L_2 = C(L_4) = (C(L_4))^\phi = (Ke_a)^\phi + (L_2)^\phi = K^\sigma e_a \mathrm{mod} L_2,$$

$$Ke_b + L_3 = C^r_{\mathrm{mod}L_4}(R) = (C^r_{\mathrm{mod}L_4}(R))^\phi = (Ke_b)^\phi + (L_3)^\phi = K^\lambda e_b \mathrm{mod} L_3.$$

Инъективность $\sigma, \lambda \in End\ K^+$ доказывается аналогично случаю 1. Отсюда вытекает включение $\sigma, \lambda \in Aut\ K^+$.

По модулю L_3 справедливы две серии равенств

$$Ke_{a+b} = (Ke_{a+b})^\phi = (Ke_b)^\phi * e_a^\phi = K^\lambda \cdot 1^\sigma e_{a+b},$$

$$Ke_{a+b} = (Ke_{a+b})^\phi = e_b^\phi * (Ke_a)^\phi = 1^\lambda \cdot K^\sigma e_{a+b},$$

откуда $K^\sigma \cdot 1^\lambda = K$ и $1^\sigma \cdot K^\lambda = K$. Обратимость в K элементов 1^σ и 1^λ следует из того, что $K^\sigma = K$, $K^\lambda = K$, соотношений, указанных выше, а также леммы 3.

Умножая ϕ на диагональный автоморфизм, мы получим $1^\sigma = 1^\lambda = 1$. Далее, ϕ-инвариантность основных соотношений кольца R даёт

$$(xe_a * e_b)^\phi = (xe_b)^\phi * e_a^\phi = x^\lambda \cdot 1^\sigma e_{a+b} \mathrm{mod} L_3,$$

$$(xe_a * e_b)^\phi = e_b^\phi * (xe_a)^\phi = 1^\lambda \cdot x^\sigma e_{a+b} \mathrm{mod} L_3,\ (x \in K).$$

Поэтому $x^\lambda = x^\sigma$ для любого $x \in K$, то есть $\lambda = \sigma$. Кроме того, для любых $x, y \in K$, $\sigma \in Aut\ R$, в силу равенств (по модулю L_3)

$$x^\sigma \cdot y^\sigma e_{a+b} = (x^\sigma e_b) * (y^\sigma e_a) = (xe_b)^\phi * (ye_a)^\phi = (xye_b * e_a)^\phi = (xy)^\sigma e_{a+b}.$$

Умножая ϕ, если необходимо, на кольцевой автоморфизм $\hat{\sigma}^{-1}$, получим $\sigma = 1$, откуда

$$(xe_r)^\phi = xe_r \mathrm{mod} Q(r) \quad (r \in \Phi^+),$$

где $Q(r) := \sum\limits_{s>r} Ke_s$. Кроме того,

$$(xe_a)^\phi = xe_a + x^{\sigma'} e_{a+b} + x^{\sigma''} e_{2a+b} + x^{\sigma'''} e_{3a+b} \mathrm{mod} Ann\ R,$$

$$(xe_b)^\phi = xe_b + x^{\lambda'} e_{2a+b} + x^{\lambda''} e_{3a+b} \mathrm{mod} Ann\ R,$$

для некоторых $\sigma', \sigma'', \sigma''', \lambda', \lambda'' \in End\ K^+$. Проверим действие этих эндоморфизмов

$$0 = 0^\phi = (xe_a * e_a)^\phi = (l_1 x 1^{\sigma'} + l_2 x^{\sigma'}) e_{2a+b} + (-2x1^{\sigma''} + x^{\sigma''}) e_{3a+b} \mathrm{mod} Ann R, \tag{32}$$

где $l_1 = -l_2$ и $l_1 = 1$ при $N_{a,a+b} = 2$ или $l_1 = -1$ при $N_{a+b,a} = -2$. Отсюда $x^{\sigma'} = x1^{\sigma'}$.

$$\begin{aligned} (xe_{a+b})^\phi &= (xe_b * e_a)^\phi = xe_{a+b} + x^{\lambda'} e_{3a+b} \mathrm{mod} Ann\ R, \\ (xe_{a+b})^\phi &= (e_b * xe_a)^\phi = xe_{a+b} + x1^{\lambda'} e_{3a+b} \mathrm{mod} Ann\ R, \end{aligned} \tag{33}$$

откуда $x1^{\lambda'} = x^{\lambda'}$.

$$\begin{aligned} (l_1 xe_{2a+b})^\phi &= (xe_a * e_{a+b})^\phi = l_1 xe_{2a+b} + x^{\sigma''} e_{3a+2b}, \\ (l_1 xe_{2a+b})^\phi &= (e_a * xe_{a+b})^\phi = l_1 xe_{2a+b} + x1^{\sigma''} e_{3a+2b}, \end{aligned} \tag{34}$$

аналогично предыдущим случаям $x1^{\sigma''} = x^{\sigma''}$.

$$0 = 0^\phi = (e_b * xe_b)^\phi = x^{\lambda''} e_{3a+2b}, \tag{35}$$

откуда $x^{\lambda''} = 0$, то есть $\lambda'' = 0$ для всех $x \in K$. Далее, из равенств $0 = 0^\phi = (xe_b * e_{a+b})^\phi = = x^{\lambda'} e_{3a+2b}$, получаем равенство $\lambda' = 0$. Из равенств

$$0 = 0^\phi = (xe_a * e_b)^\phi = x^{\sigma'''} e_{3a+2b},$$

из чего следует, что $x^{\sigma'''} = 0$, то есть $\sigma''' = 0$ для всех $x \in K$.

Из (17)-(20) следует, что $\sigma', \sigma'', \lambda' \in End\ K^+$ действуют как умножения на скаляр. Умножением ϕ на автоморфизм вида (14) при $t = -1^{\sigma'}$ получим

$$\begin{aligned} (xe_a)^\phi &= xe_a \mathrm{mod} Ann\ R, \\ (xe_b)^\phi &= xe_b \mathrm{mod} Ann\ R. \end{aligned}$$

Умножаем на центральный автоморфизм из леммы [16, лемма 1.1.] вида $(1+\zeta)(e_a) = = e_a + se_{3a+2b},\ (1+\zeta)(e_b) = e_b + te_{3a+2b}(s,\ t \in K),\ (1+\zeta)(e_r) \longrightarrow e_r$ для остальных $r \in \Phi^+$, получаем $(xe_a)^\phi = xe_a,\ (xe_b)^\phi = xe_b$. $\square$

5. Заключение

В статье установлены критерии изоморфизма точных обёртывающих колец R колец Ли $N\Phi(K)$ типа G_2 над произвольным ассоциативно-коммутативным кольцом K с единицей, также получено явное описание их автоморфизмов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Albert A. Power-Associative Rings // Transactions of the American Mathematical Society. 1948. Vol. 64, № 3, P. 552 – 593.

2. Myung H. C. Some Classes of Flexible Lie-Admissible Algebras // Trans. Amer. Math. Soc. 1972. Vol. 167. P. 79 – 88.

3. Laufer P. J. Some Lie admissible algebras // Canad. J. Math. 1962. Vol. 14, № 2. P. 287 – 292.

4. Levchuk V. M. Connections between a unitriangular group and certain rings. Chap. 2: Groups of automorphisms. // Siberian Mathematical Journal. 1983. Vol. 24. P. 543 – 557. DOI: 10.1007/BF00969552

5. Cao Y., Jiang D., Wang J. Automorphisms of certain nilpotent Lie algebras over commutative rings // Intern. J. Algebra and Computation. 2007. Vol. 17, №. 3. P. 527 – 555.

6. Левчук В. М. Автоморфизмы унипотентных подгрупп // Алгебра и Логика. 1990. Т. 29, № 3. С. 316 – 338.

7. Литаврин А. В. Автомофизмы нильпотентной подалгебры $N\Phi(K)$ алгебры Шевалле симплектического типа // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2015. Т. 13, С. 41 – 55. DOI: 10.26516/1997-7670.2024.47.9

8. Левчук В. М., Литаврин,А. В. Гиперцентральные автоморфизмы нильтреугольных подалгебр алгебр Шевалле [Электронный ресурс]
Сибирские электронные математические известия. DOI: 10.17377/semi.2016.13.040. URL: http://semr.math.nsc.ru/v13/p467-477.pdf 2016.

9. Литаврин А. В. Автоморфизмы нильтреугольных подколец алгебр Шевалле классических типов/ Дисс. на соиск. ученой степени кандид. физ.-мат. наук. СФУ. 2017. С. 74.

10. Казакова А. В. Автомофизмы нильтреугольных подколец алгебр Шевалле типа G_2 над областями целостности. I // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2024. Т. 47. С. 93 – 106. DOI: 10.26516/1997-7670.2024.47.9

11. Казакова А. В. Автоморфизмы нильтреугольных подколец алгебр Шевалле типа G_2 над полем характеристики 2 // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 88. С. 26 – 36. DOI: 10.17223/19988621/88/3

12. Gibbs J.A. Automorphisms of certain unipotent groups // J. Algebra. 1970. Vol. 14, №. 2. P. 203 – 228.

13. Левчук В. М. Нильтреугольная подалгебра алгебры Шевалле: обёртывающая алгебра, идеалы и автоморфизмы // Доклады академии наук. 2018. Т. 478, № 2. С. 137 – 140.

14. Carter R. Simple Groups of Lie Type // New York, Wiley and Sons. 1972. 331 P.

15. Казакова А. В., Кириллова Е. А. Автоморфизмы и центральные ряды нильтреугольных подколец алгебр Шевалле // Мальцевские чтения : тезисы докладов международной конференции. (Новосибирск, 16-20 ноября 2020 г.) С. 191.

16. Kuzucuoglu F., Levchuk V. M. The automorphism group of certain radical rings. // J. Algebra. 2004. Vol. 243. P. 473 – 485. DOI: 10.1006/jabr.2001.886

REFERENCES

1. Albert, A. 1948, "Power-Associative Rings", *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 64, no. 3, pp. 552 – 593.

2. Myung, H. C. 1972, "Some Classes of Flexible Lie-Admissible Algebras", *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 167, pp. 79 – 88.

3. Laufer, P. J. 1962, "Some Lie admissible algebras", *Canad. J. Math.*, vol. 14, no. 2, pp. 287 – 292.

4. Levchuk, V. M. 1983, "Connections between a unitriangular group and certain rings. Chap. 2: Groups of automorphisms", *Siberian Mathematical Journal*, vol. 24, pp. 543–557. doi: 10.1007/BF00969552

5. Cao, Y., Jiang, D., & Wang, J. 2007, "Automorphisms of certain nilpotent Lie algebras over commutative rings", *Intern. J. Algebra and Computation,* vol. 17, no. 3, pp. 527–555.

6. Levchuk, V. M. 1990, "Automorphisms of unipotent subgroups of chevalley groups", *Algebra and Logic*, vol. 29, pp. 211–224. doi: 10.1007/BF01979936

7. Litavrin, A. V. 2015, "Automorphisms of the nilpotent subalgebra $N\Phi(K)$ Chevalley algebra of symplectic type", *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, vol. 13, no. 3, pp. 41–55. (in Russian)

8. Levchuk, V. M., Litavrin, A. V. 2016, "Hypercentral automorphisms of nil-triangular subalgebras in Chevalley algebras", *Siberian Electronic Mathematical Reports*, vol. 13, pp. 467–477, Available at: http://semr.math.nsc.ru/v13/p467-477.pdf (in Russian)

9. Litavrin, A. V. "Automorphisms of nil-triangular subrings of algebras Chevalley of classic types", Thesis for: Cand. Sc. (Physics and Mathematics): 01.01.06. Siberian Federal University, 2017, 74 p. (in Russian)

10. Kazakova, A. V. 2024, "Automophisms of Nil-Triangular Subrings of Algebras Chevalley Type G_2 Over Integral Domain. I.", *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, vol. 47, pp. 93–106. (in Russian) doi: 10.26516/1997-7670.2024.47.93

11. Kazakova, A. V. 2024, "Automorphisms of nil-triangular subrings of Chevalley algebras of type G2 over the field of characteristic 2", *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*, no. 88, pp. 26–36. (in Russian) doi: 10.17223/19988621/88/3

12. Gibbs, J.A. 1970, "Automorphisms of certain unipotent groups", *J. Algebra*, vol. 14, no. 2, pp. 203–228.

13. Levchuk, V. M. 2018, "Niltriangular subalgebra of Chevalley algebra: the enveloping algebra, ideals and automorphisms", *Dokl. Math.*, vol. 97, no. 1, pp. 23–27.
doi: 10.7868/S0869565218020032

14. Carter, R. 1972, *Simple Groups of Lie Type.* Wiley and Sons, New York, 331 pp.

15. Kazakova, A. V., Kirillova, E. A. “Automor-phisms and central series of niltriangular subrings of Chevalley algebras”, *Collection of Abstracts of International Conference “Mal’tsev Meeting”*, Novosibirsk. Novosibirsk, 2020, p. 191.

16. Kuzucuoglu, F., Levchuk, V. M. 2001, “The automorphism group of certain radical rings”, *J. Algebra*, vol. 243, pp. 473–485. doi: 10.1006/jabr.2001.886

Получено: 14.03.2024
Принято в печать: 04.09.2024

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 25. Выпуск 3.

УДК 517.928 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-143-157

Оператор Штурма – Лиувилля с быстро растущим потенциалом и асимптотика его спектра

А. В. Качкина

Качкина Алиса Валерьевна — Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова; Московский центр фундаментальной и прикладной математики (г. Москва).
e-mail: alisa-kachkina@mail.ru

Аннотация

В работе изучается асимптотика дискретного спектра оператора Штурма–Лиувилля, задаваемого на $\mathbb{R}_+$ выражением $-y''+q(x)y$ и граничным условием в нуле $y(0)\cos\alpha+y'(0)\sin\alpha=0$, для быстро растущих на бесконечности потенциалов $q(x)$. Получены асимптотики собственных значений оператора для классов потенциалов, характеризующих скорость их роста на бесконечности.

Ключевые слова: дифференциальный оператор, спектр, асимптотика.

Библиография: 21 название.

Для цитирования:
Качкина, А. В. Оператор Штурма–Лиувилля с быстро растущим потенциалом и асимптотика его спектра // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 3, с. 143–157.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 25. No. 3.

UDC 517.928 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-143-157

The Sturm–Liouville operator with rapidly growing potential and the asymptotics of its spectrum

A. Kachkina

Kachkina Alisa Valerievna — Lomonosov Moscow State University; Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics (Moscow).
e-mail: alisa-kachkina@mail.ru

Abstract

In this paper, we study the asymptotic behavior of the discrete spectrum of the Sturm–Liouville operator given on $\mathbb{R}_+$ by the expression $-y''+q(x)y$ and the zero boundary condition $y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0$, for rapidly growing potentials $q(x)$. The asymptotics of the eigenvalues of the operator for the classes of potentials are obtained, which characterize the rate of their growth at infinity.

Keywords: differential operator, spectrum, asymptotics.

Bibliography: 21 titles.

For citation:
Kachkina, A. V. 2024, “The Sturm—Liouville operator with a rapidly growing potential and the asymptotics of its spectrum” , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 3, pp. 143–157.

1. Введение

В гильбертовом пространстве $L_2[0,+\infty)$ рассматривается оператор Штурма–Лиувилля $\mathbb{L}_q$, порождаемый дифференциальным выражением:

$$l_q(y) = -y''(x) + q(x)y(x),$$

и граничным условием в нуле:

$$y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0,$$

где $q(x)$ — непрерывная на $[0,+\infty)$ действительнозначная функция. Область определения оператора $\mathbb{L}_q$: $D(\mathbb{L}_q) = \{y \in L_2[0,+\infty) : y, y'$ абсолютно непрерывны на любом $[a,b] \subset [0,+\infty)$, $-y'' + q(x)y \in L_2[0,+\infty)$ и $y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0\}$.

Если функция (потенциал) $q(x) \longrightarrow +\infty$, $x \longrightarrow +\infty$, то оператор $\mathbb{L}_q$ полуограничен снизу и имеет чисто дискретный спектр $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\lambda_n \longrightarrow +\infty$, $n \longrightarrow +\infty$ (Э. Ч. Титчмарш [1], А. М. Молчанов [4]). Занумеруем собственные числа оператора $\mathbb{L}_q$ в порядке возрастания: $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots$.

Хорошо изучено распределение спектра (Э. Ч. Титчмарш [1]) в случае степенного роста потенциала q. Так, например, если $q(x) = x^k$, $k > 0$, то собственные значения λ_n оператора $\mathbb{L}_q$ имеют асимптотику:

$$\lambda_n \sim \left\{ \frac{\pi k \Gamma(\frac{3}{2} + \frac{1}{k})}{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(\frac{1}{k})} n \right\}^{\frac{2k}{k+2}}, \quad n \longrightarrow +\infty, \tag{1}$$

где $\Gamma(z)$ — Гамма–функция Эйлера.

Асимптотика собственных значений оператора $\mathbb{L}_q$ в случае $\alpha = 0$ для потенциалов вида $q(x) = x^k + V(x)$, $k > 0$, получена в работах Х. Х. Муртазина и Т. Г. Амангильдина [5] для $V(x) \in C_0^2[0,+\infty)$ и Х. К. Ишкина [6] для $V(x) \in C_0^1[0,+\infty)$, где функции из класса $C_0^m[0,+\infty)$ — финитные функции класса $C^m[0,+\infty)$.

Распределение спектра операторов Эйри и Вебера, возмущенных дельта–взаимодействием (дельта–функцией Дирака) найдено А. С. Печенцовым [19], [20], [21].

Если потенциал q растет на бесконечности быстрее любой степенной функции, то собственные значения оператора $\mathbb{L}_q$ не имеют степенную асимптотику (1). А. И. Козко [3] установил, что для потенциала $q(x) = e^x$ выполнено соотношение $\lambda_n \sim \left(\frac{\pi n}{2\ln(\pi n)}\right)^2$, $n \longrightarrow +\infty$.

В данной работе получены асимптотики собственных значений оператора $\mathbb{L}_q$ для классов потенциалов, быстро растущих на бесконечности.

2. Классы быстро растущих потенциалов. Вспомогательные утверждения

Обозначим через $\mathfrak{Q}$ класс функций $q \in C[0,+\infty) \cap C^2(0,+\infty)$, удовлетворяющих условиям:

$$q''(x) \geq 0, \quad x \geq x_0, \tag{2}$$

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{xq'(x)}{q(x)} = +\infty. \tag{3}$$

Из последнего равенства, в частности, следует, что существует такое число $\widetilde{x}$, что для всех значений аргумента $x > \widetilde{x}$ значения $q(x)$ не обращаются в ноль, а также выполнено неравенство $\dfrac{q'(x)}{q(x)} > 0$. Без ограничения общности всюду далее будем считать, что эти соотношения выполнены при $x > 0$ (т.е. $\widetilde{x} = 0$).

Лемма 1. *Рассмотрим произвольную функцию $q \in \mathfrak{Q}$. Верны следующие утверждения.*

1. Функции q' и q принимают только положительные значения на аргументах, больших некоторого x_1. Кроме того, эти функции растут на бесконечности быстрее любой степенной функции, т. е. для любого $k \in \mathbb{N}$ имеем $x^k = o(q(x))$, $x \longrightarrow +\infty$.

2. Пусть функция p — обратная к функции q, то есть $q(p(x)) = x$ для $x > x_1$. Тогда функция p растет медленнее любой степенной функции, т. е. для любого $\delta > 0$ имеем $p(x) = o(x^\delta)$, $x \longrightarrow +\infty$.

Доказательство. 1. Обозначим $\varphi(x) = x(\ln|q(x)|)'$ для $x > 0$. Тогда из равенства (3) следует, что $\varphi(x) \longrightarrow +\infty$ при $x \longrightarrow +\infty$. Для любых чисел $x > x_1 > 0$ и любого заданного $k \in \mathbb{N}$ верна следующая цепочка равенств:

$$\left(\frac{x_1}{x}\right)^k |q(x)| = \left(\frac{x_1}{x}\right)^k |q(x_1)| \exp \int_{x_1}^{x} \frac{\varphi(t)}{t} dt = |q(x_1)| \exp \int_{x_1}^{x} \frac{\varphi(t) - k}{t} dt.$$

Поскольку функция φ является бесконечно большой, можно выбрать $x_1 > 0$ так, чтобы для всех чисел $x > x_1$ выполнялись соотношения:

$$\int_{x_1}^{x} \frac{\varphi(t) - k}{t} dt > \int_{x_1}^{x} \frac{1}{t} dt = \ln\left(\frac{x}{x_1}\right).$$

Отсюда и из полученной ранее цепочки равенств следует, что $|q(x)|x^{-k} \longrightarrow +\infty$ при $x \longrightarrow +\infty$ и при любом заданном натуральном k, то есть модуль функции q растет быстрее любой степенной функции.

Так как для $x > 0$ выполнено неравенство $\dfrac{q'(x)}{q(x)} > 0$, а значит, значения $q'(x)$ и $q(x)$ одного знака, осталось показать, что они именно положительные. Предположим, что это не так. Тогда в силу соотношения (2) функция $|q|$ выпукла вверх при значениях аргумента $x \geq x_0$ и ее график лежит ниже касательной, проведенной в некоторой точке $x_2 \geq x_0$, а значит, $|q|$ не может расти быстрее любой степенной функции. Полученное противоречие завершает доказательство пункта 1.

2. По доказанному ранее для любого $k \in \mathbb{N}$ существует такое число $\varkappa_k$, что для всех $x > \varkappa_k$ выполнено неравенство $q(x) > x^{k+1}$. Тогда в силу строгого возрастания функции p получаем, что $p(q(x)) > p(x^{k+1})$, а значит, $x > p(x^{k+1})$ для $x > \varkappa_k$. Таким образом, для $t > \varkappa_k^{k+1}$ выполнено неравенство $p(t) < t^{\frac{1}{k+1}}$. Отсюда получаем следующую цепочку соотношений

$$0 < \frac{p(t)}{t^{\frac{1}{k}}} < \frac{t^{\frac{1}{k+1}}}{t^{\frac{1}{k}}} = t^{\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}} \longrightarrow 0, \quad t \longrightarrow +\infty.$$

Полученное соотношение означает, что $\lim\limits_{t \longrightarrow +\infty} \dfrac{p(t)}{t^{\frac{1}{k}}} = 0$, $t \longrightarrow +\infty$, следовательно, $p(t) = o(t^{\frac{1}{k}})$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Поскольку для любого числа $\delta > 0$ найдется такой номер $k_\delta \in \mathbb{N}$, что $\delta > \dfrac{1}{k_\delta}$, получаем, что $p(x) = o(x^\delta)$, $x \longrightarrow +\infty$. ■

Далее без ограничения общности будем считать, что $q(x) > 0$, $q'(x) > 0$ и $q''(x) \geq 0$ для любого $x > 0$.

Пример 1. *Все целые функции с неотрицательными тейлоровскими коэффициентами, отличные от полинома, входят в класс $\mathfrak{Q}$.*

Так как логарифм максимума модуля целой функции $q(z)$ в круге $|z| \leq x$ является выпуклой вниз функцией от $\ln x$ (см. [2]), то $\varphi(x)$ не убывает. Функция $\varphi(x)$ не ограничена сверху, в

противном случае имело бы место равенство $q(x) = O(x^m)$ при некотором $m \in \mathbb{N}$. По доказанному ранее получаем, что $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = +\infty$, то есть выполнено соотношение (3), а значит, $q(x) \in \mathfrak{Q}$. ■

Обозначим через $\widetilde{\mathfrak{Q}}$ подкласс функций $q \in \mathfrak{Q}$, удовлетворяющих следующему условию хотя бы при одном значении $1 < \gamma < 4/3$

$$q''(x) \le (q'(x))^\gamma, \quad x \ge x_0. \tag{4}$$

Пример 2. *Целые функции конечного порядка вида* $q(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, $a_n \ge 0$, $n \in \mathbb{N}_0$, *отличные от полинома, лежат в классе* $\widetilde{\mathfrak{Q}}$.

Пусть $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ — целая функция конечного порядка $\rho > 0$ с неотрицательными коэффициентами ряда Тейлора. Производная $f'(z)$ имеет тот же порядок ρ, что и сама $f(z)$. Поэтому для доказательства неравенства (4) достаточно показать, что для любого $\varepsilon > 0$:

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n b_n x^{n-1} = o(f(x))^{1+\varepsilon}, \ x \to +\infty.$$

Пусть $\beta > \rho$. Тогда для некоторой постоянной $C > 0$ выполняется неравенство:

$$\max_{|z| \le x} |f(z)| = f(x) \le C \exp(x^\beta).$$

Следовательно,

$$|b_n| \le \inf_{x>0} x^{-n} f(x) \le C \inf_{x>0} \exp(x^\beta - n \ln x) = C \exp\Big(- \frac{n}{\beta} \ln \frac{n}{e\beta} \Big).$$

Из последнего неравенства при $n > e^{\beta+1} \beta x^\beta$ находим

$$|b_n| x^n \le C \exp\Big(- \frac{n}{\beta} \ln \frac{n}{e\beta} + n \ln x \Big) \le C \exp\Big(- \frac{n}{\beta} \ln(e^\beta x^\beta) + n \ln x \Big) =$$
$$= C \exp(-n \ln(ex) + n \ln x) = C \exp(n(\ln x - \ln(ex)) = Ce^{-n}.$$

Отсюда $\sum\limits_{n > e^{\beta+1}\beta x^\beta} n b_n x^n \le C_1$, $C_1 > 0$. Следовательно, при $x \ge 1$ имеем неравенство

$$f'(x) = \sum_{n \le e^{\beta+1}\beta x^\beta} n b_n x^{n-1} + \sum_{n > e^{\beta+1}\beta x^\beta} n b_n x^{n-1} \le$$
$$\le C_1 + e^{\beta+1} \beta x^\beta \sum_{n \le e^{\beta+1}\beta x^\beta} b_n x^{n-1} \le C_1 + C_2 \frac{f(x)}{x} x^\beta.$$

Так как f растет быстрее любой степенной функции, $\forall \varepsilon > 0$ получаем $f'(x) = o(f(x))^{1+\varepsilon}$, $x \to +\infty$. ■

Для $\beta > 1$ и $\mu > 0$ обозначим через $\mathfrak{Q}_{\beta,\mu}$ класс функций $q \in \widetilde{\mathfrak{Q}}$ таких, что

$$\ln q(x) = \mu \ln^\beta x + o(\ln^{\beta-1} x), \quad x \to +\infty. \tag{5}$$

Переписать данное условие на потенциал в терминах обратной функции позволяет следующее утверждение.

Лемма 2. *Рассмотрим произвольный потенциал $q \in \mathfrak{Q}_{\beta,\mu}$. Пусть p — обратная к q функция, $\delta = \mu^{-\frac{1}{\beta}}$. Тогда выполнено соотношение*

$$\ln p(x) = \delta \ln^{\frac{1}{\beta}} x + o(1), \quad x \longrightarrow +\infty.$$

Доказательство. Перепишем выражение (5) в следующем виде: $\ln x = \mu \ln^{\beta} p(x) + o(\ln^{\beta-1} p(x))$, $x \longrightarrow +\infty$. Для некоторой $\varepsilon(x) = o(1)$, $x \longrightarrow +\infty$, получаем выражение:

$$\ln x = \mu \ln^{\beta} p(x)\left(1 + \frac{\varepsilon(x)}{\ln p(x)}\right) = \mu \ln^{\beta} p(x) \cdot \alpha(x),$$

где $\alpha(x) \longrightarrow 1$, $x \longrightarrow +\infty$. Отсюда, выразив $\ln p(x)$, получаем равенство:

$$\ln p(x) = \left(\frac{1}{\mu}\right)^{\frac{1}{\beta}} \ln^{\frac{1}{\beta}} x \left(1 + \frac{\varepsilon(x)}{\ln p(x)}\right)^{-\frac{1}{\beta}}.$$

Тогда с учетом обозначения для δ и согласно биномиальному разложению получаем следующее соотношение:

$$\ln p(x) = \delta \ln^{\frac{1}{\beta}} x - \frac{\delta \ln^{\frac{1}{\beta}} x \cdot \varepsilon(x)}{\beta \ln p(x)} + o\left(\frac{\delta \ln^{\frac{1}{\beta}} x \cdot \varepsilon(x)}{\ln p(x)}\right), \quad x \longrightarrow +\infty.$$

Поскольку $\delta \ln^{\frac{1}{\beta}} x = \ln p(x) \cdot \alpha^{\frac{1}{\beta}}(x)$, полученное выражение можно переписать в следующем виде:

$$\ln p(x) = \delta \ln^{\frac{1}{\beta}} x - \frac{\ln p(x) \cdot \alpha^{\frac{1}{\beta}}(x) \cdot \varepsilon(x)}{\beta \ln p(x)} + o\left(\frac{\ln p(x) \cdot \alpha^{\frac{1}{\beta}}(x) \cdot \varepsilon(x)}{\ln p(x)}\right), \quad x \longrightarrow +\infty.$$

А значит, $\ln p(x) = \delta \ln^{\frac{1}{\beta}} x + o(1)$, $x \longrightarrow +\infty$, так как $\alpha(x) \longrightarrow 1$ и $\varepsilon(x) \longrightarrow 0$ при $x \longrightarrow +\infty$. ■

Выражение (5) при значении параметра $\beta = 1$ означает степенной рост потенциала q, для которого Э. Ч. Титчмаршом была получена асимптотика (1). При значениях параметра $\beta > 2$ для потенциала $q \in \mathfrak{Q}_{\beta,\mu}$ выполняется условие:

$$\frac{\ln q(x)}{\ln^2 x} \longrightarrow +\infty, \quad x \longrightarrow +\infty.$$

При таких условиях спектр оператора $\mathbb{L}_q$ имеет асимптотику (А. И. Козко [3])

$$\lambda_n \sim (\pi n)^2 p^{-2}((\pi n)^2), \quad n \longrightarrow +\infty,$$

где p — обратная функция к q. Следующий результат А. И. Козко [3] устанавливает асимптотику спектра оператора $\mathbb{L}_q$ для потенциалов класса $\mathfrak{Q}_{\beta,\mu}$ в случае значения параметра $\beta = 2$:

$$\lambda_n \sim (\pi n)^2 p^{-2}((\pi n)^2) \exp\left(\frac{2}{\mu}\right), \quad n \longrightarrow +\infty. \tag{6}$$

Позже А. Ю. Киселевой (личное сообщение) были найдены асимптотические разложения для собственных значений оператора Штурма–Лиувилля в рассматриваемой задаче для потенциала класса $\mathfrak{Q}_{\beta,\mu}$ и значений параметра $\beta \in (3/2, 2]$:

$$\lambda_n \sim (\pi n)^2 p^{-2}((\pi n)^2) \exp\left(\frac{4}{\mu\beta} \ln^{2-\beta} p((\pi n)^2)\right), \quad n \longrightarrow +\infty. \tag{7}$$

и $\beta \in (4/3, 3/2]$:

$$\lambda_n \sim (\pi n)^2 p^{-2}((\pi n)^2) \exp\left(\frac{4}{\mu\beta}\ln^{2-\beta} p((\pi n)^2) - \frac{4}{\mu^2\beta}\left(\frac{3}{\beta}-1\right)\ln^{3-2\beta} p((\pi n)^2)\right), \quad n \to +\infty. \tag{8}$$

Изучение асимптотики собственных значений оператора $\mathbb{L}_q$ было продолжено И. Г. Насртдиновым [7] для более близких к единице значений параметра β. Так, для потенциала $q \in \mathfrak{Q}_{\beta,\mu}$, значений параметра $\beta \in (5/4, 4/3]$ и $\nu = \delta^{\frac{1}{\beta}}$ справедливо:

$$\lambda_n \sim (\pi n)^2 \exp\Bigg(-\Bigg(2\nu^\beta \ln^{\frac{1}{\beta}}((\pi n)^2) - \frac{4}{\beta}\nu^{2\beta}\ln^{\frac{2}{\beta}-1}((\pi n)^2) + \\ + \frac{4(3-\beta)}{\beta^2}\nu^{3\beta}\ln^{\frac{3}{\beta}-2}((\pi n)^2) - \frac{16(8-6\beta+\beta^2)}{3\beta^3}\nu^{4\beta}\ln^{\frac{4}{\beta}-3}((\pi n)^2)\Bigg)\Bigg), \quad n \to +\infty. \tag{9}$$

С помощью леммы 2 можно переписать данный результат в терминах обратной функции p. Получаем следующий вид асимптотики:

$$\lambda_n \sim (\pi n)^2 p^{-2}((\pi n)^2) \exp\Bigg(\frac{4}{\mu\beta}\ln^{2-\beta} p((\pi n)^2) - \frac{4}{\mu^2\beta}\left(\frac{3}{\beta}-1\right)\ln^{3-2\beta} p((\pi n)^2) + \\ + \frac{16(8-6\beta+\beta^2)}{3\mu^3\beta^3}\ln^{4-3\beta}(p(\pi n)^2)\Bigg), \quad n \to +\infty.$$

3. Основной результат и его доказательство

Обозначим $c_n = (\pi n)^2$, $n \in \mathbb{N}$. В работе [3] доказано, что в случае $q \in \widetilde{\mathfrak{Q}}$ имеет место асимптотика $n \sim \frac{1}{\pi}\lambda_n^{1/2} p(\lambda_n)$, $n \to +\infty$. Отсюда получаем, что $\lambda_n \sim \frac{c_n}{p^2(\lambda_n)}$, $n \to +\infty$, то есть для некоторой последовательности $\alpha_n \to 1$, $n \to +\infty$ выполнено равенство:

$$\lambda_n = \alpha_n \frac{c_n}{p^2(\lambda_n)}, \ n \in \mathbb{N}.$$

Тогда $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\lambda_n}{c_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\alpha_n}{p^2(\lambda_n)} = 0$ в силу неограниченного монотонного роста функции p. Значит, $\lambda_n = o(c_n)$, $n \to +\infty$. Поэтому, начиная с некоторого номера, выполняется неравенство $\lambda_n < c_n$.

В принятых ранее обозначениях положим по определению:

$$Y_n = \frac{c_n}{p^2(c_n)}, \quad Z_n = \frac{c_n}{p^2(Y_n\alpha_n)}, \quad W_n = \frac{c_n}{p^2(Z_n\alpha_n)}, \\ V_n = \frac{c_n}{p^2(W_n\alpha_n)}, \quad F_n = \frac{c_n}{p^2(V_n\alpha_n)}, \quad G_n = \frac{c_n}{p^2(F_n\alpha_n)}.$$

Лемма 3. *Для $\beta > 1$ и $\mu > 0$ рассмотрим произвольную функцию $q \in \mathfrak{Q}_{\beta,\mu}$ и обратную к ней функцию p. Зафиксируем для q введенные выше обозначения для последовательностей. Тогда в этих обозначениях, начиная с некоторого номера, выполнена цепочка неравенств*

$$Y_n\alpha_n < W_n\alpha_n < F_n\alpha_n < \lambda_n < G_n\alpha_n < V_n\alpha_n < Z_n\alpha_n < c_n.$$

Доказательство. По доказанному $\lambda_n < c_n$, начиная с некоторого номера N. В силу строгого возрастания функции p для всех номеров $n > N$ выполнено неравенство $p^2(\lambda_n) < p^2(c_n)$, а значит, имеет место следующая цепочка соотношений:

$$Y_n\alpha_n = \alpha_n \frac{c_n}{p^2(c_n)} < \alpha_n \frac{c_n}{p^2(\lambda_n)} = \lambda_n < c_n, \quad n > N.$$

Таким образом, для всех номеров $n > N$ доказано двойное неравенство $Y_n\alpha_n < \lambda_n < c_n$. Из неравенства $p^2(Y_n\alpha_n) < p^2(\lambda_n)$ для $n > N$ следует, что

$$\lambda_n = \alpha_n \frac{c_n}{p^2(\lambda_n)} < \alpha_n \frac{c_n}{p^2(Y_n\alpha_n)} = Z_n\alpha_n, \quad n > N.$$

Отсюда и из полученных ранее неравенств заключаем, что $Y_n\alpha_n < \lambda_n < Z_n\alpha_n$ для $n > N$.

Установим, что $Z_n\alpha_n < c_n$, начиная с некоторого номера. Поскольку по лемме 1 функция p растет медленнее любой степенной функции, в частности, $p^2(c_n) = o(c_n)$, $n \to +\infty$, получаем, что $Y_n\alpha_n = \dfrac{c_n\alpha_n}{p^2(c_n)} \to +\infty$, $n \to +\infty$. Отсюда

$$\frac{Z_n\alpha_n}{c_n} = \frac{\alpha_n}{p^2(Y_n\alpha_n)} \to 0, \quad n \to +\infty.$$

Таким образом, $Z_n\alpha_n = o(c_n)$, $n \to +\infty$, что влечет за собой выполнение неравенства $Z_n\alpha_n < c_n$ с некоторого номера. Без ограничения общности будем считать, что этот номер равен N. Таким образом, получена цепочка неравенств $Y_n\alpha_n < \lambda_n < Z_n\alpha_n < c_n$ для $n > N$.

Установленное для $n > N$ неравенство $Z_n\alpha_n < c_n$ позволяет, снова воспользовавшись строгим возрастанием функции p, получить требуемое неравенство

$$Y_n = \frac{c_n}{p^2(c_n)} < \frac{c_n}{p^2(Z_n\alpha_n)} = W_n, \quad n > N.$$

Отсюда и из полученных ранее соотношений заключаем, что $Y_n\alpha_n < W_n\alpha_n < \lambda_n < Z_n\alpha_n < c_n$ для $n > N$. Далее аналогично последовательно устанавливаются все необходимые неравенства на $V_n\alpha_n$, $F_n\alpha_n$ и $G_n\alpha_n$. ■

Теорема 1. *Пусть $q \in \mathfrak{Q}_{\beta,\mu}$, $\beta \in (6/5, 5/4]$. Тогда для спектра оператора $\mathbb{L}_q$ справедливо*

$$\lambda_n \sim c_n \exp\Bigg(-2\delta\Bigg(\ln^{\frac{1}{\beta}} c_n - \frac{2\delta}{\beta}\ln^{\frac{2}{\beta}-1} c_n + (2\delta)^2\frac{3-\beta}{2\beta^2}\ln^{\frac{3}{\beta}-2} c_n - (2\delta)^3\frac{8-6\beta+\beta^2}{3\beta^3}\ln^{\frac{4}{\beta}-3} c_n + \\ + (2\delta)^4\frac{125-150\beta+55\beta^2-6\beta^3}{24\beta^4}\ln^{\frac{5}{\beta}-4} c_n\Bigg)\Bigg), \ n \to +\infty.$$

С помощью формулы из леммы 2 можно переписать данный результат в терминах обратной функции p. Получаем следующий вид асимптотики:

$$\lambda_n \sim (\pi n)^2 p^{-2}((\pi n)^2)\exp\Bigg(4\frac{1}{\mu\beta}\ln^{2-\beta} p((\pi n)^2) - \frac{4}{\mu^2\beta}\left(\frac{3}{\beta}-1\right)\ln^{3-2\beta} p((\pi n)^2) + \\ + \frac{16(8-6\beta+\beta^2)}{3\mu^3\beta^3}\ln^{4-3\beta}(p(\pi n)^2) - \frac{4(125-150\beta+55\beta^2-6\beta^3)}{3\mu^4\beta^4}\ln^{5-4\beta} p((\pi n)^2)\Bigg), \\ n \to +\infty.$$

Доказательство. Зафиксируем для q обозначения для последовательностей, введенные перед формулировкой леммы 3. Для доказательства теоремы достаточно установить, что

$$F_n \sim G_n \sim c_n \exp\Bigg(-2\delta\Bigg(\ln^{\frac{1}{\beta}} c_n - \frac{2\delta}{\beta}\ln^{\frac{2}{\beta}-1} c_n + (2\delta)^2\frac{3-\beta}{2\beta^2}\ln^{\frac{3}{\beta}-2} c_n - (2\delta)^3\frac{8-6\beta+\beta^2}{3\beta^3}\ln^{\frac{4}{\beta}-3} c_n + \\ + (2\delta)^4\frac{125-150\beta+55\beta^2-6\beta^3}{24\beta^4}\ln^{\frac{5}{\beta}-4} c_n\Bigg)\Bigg), \quad n \to +\infty.$$

Тогда в силу леммы 3 получим, что $\lambda_n \sim F_n \sim G_n$, $n \to +\infty$. Найдем асимптотические разложения для последовательностей F_n и G_n.

1. Запишем соотношение, используя выражение для обратной функции из леммы 2:

$$\ln p(Y_n\alpha_n) = \delta \ln^{\frac{1}{\beta}}(Y_n\alpha_n) + o(1) = \delta(\ln Y_n + \ln \alpha_n)^{\frac{1}{\beta}} + o(1), \quad n \to +\infty.$$

Поскольку $\ln \alpha_n = o(1)$, $n \to +\infty$, получаем

$$\ln p(Y_n\alpha_n) = \delta \ln^{\frac{1}{\beta}} Y_n \left(1 + \frac{o(1)}{\ln Y_n}\right)^{\frac{1}{\beta}} + o(1), \quad n \to +\infty.$$

С учетом формулы Тейлора и неравенства $\dfrac{1}{\beta} - 1 < 0$ слагаемое правой части равенства может быть записано в виде

$$\delta \ln^{\frac{1}{\beta}} Y_n \left(1 + \frac{1}{\beta} o(\ln^{-1} Y_n)\right) = \delta \ln^{\frac{1}{\beta}} Y_n + o(1), \quad n \to +\infty.$$

Таким образом, установлено соотношение $\ln p(Y_n\alpha_n) = \delta \ln^{\frac{1}{\beta}} Y_n + o(1)$, $n \to +\infty$. По определению Y_n и ввиду леммы 2 имеем следующее соотношение

$$\ln^{\frac{1}{\beta}} Y_n = (\ln c_n - 2(\delta \ln^{\frac{1}{\beta}} c_n + o(1)))^{\frac{1}{\beta}}, \quad n \to +\infty.$$

После вынесения за скобку $\ln^{\frac{1}{\beta}} c_n$ получаем выражение $(\ln^{\frac{1}{\beta}} c_n) \cdot (1 - 2\delta \ln^{\frac{1}{\beta}-1} c_n + o(\ln^{-1} c_n))^{\frac{1}{\beta}}$, $n \to +\infty$. Второй множитель с помощью формулы Тейлора и символа Похгаммера $(x)_n = x(x-1)\dots(x-(n-1))$ может быть записан следующим образом:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{\beta}(-2\delta \ln^{\frac{1}{\beta}-1} c_n + o(\ln^{-1} c_n)) + \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{\beta}\right)_2 ((2\delta)^2 \ln^{\frac{2}{\beta}-2} c_n + o(\ln^{\frac{1}{\beta}-2} c_n) + o(\ln^{-2} c_n)) + \\ + \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{\beta}\right)_3 (-(2\delta)^3 \ln^{\frac{3}{\beta}-3} c_n + o(\ln^{\frac{2}{\beta}-3} c_n) + o(\ln^{\frac{1}{\beta}-3} c_n) + o(\ln^{-3} c_n)) + \\ + \frac{1}{4!}\left(\frac{1}{\beta}\right)_4 ((2\delta)^4 \ln^{\frac{4}{\beta}-4} c_n + o(\ln^{\frac{3}{\beta}-4} c_n) + o(\ln^{\frac{2}{\beta}-4} c_n) + o(\ln^{\frac{1}{\beta}-4} c_n) + o(\ln^{-4} c_n)) + \\ + O(\ln^{\frac{5}{\beta}-5} c_n + o(\ln^{\frac{4}{\beta}-5} c_n) + o(\ln^{\frac{3}{\beta}-5} c_n) + o(\ln^{\frac{2}{\beta}-5} c_n) + o(\ln^{\frac{1}{\beta}-5} c_n) + o(\ln^{-5} c_n)), \\ n \to +\infty. \end{aligned}$$

После всех преобразований с учетом того, что значения параметра $\beta \in \left(\dfrac{6}{5}, \dfrac{5}{4}\right]$, а значит, выполняется соотношение $O(\ln^{\frac{6}{\beta}-5} c_n) = o(1)$, $n \to +\infty$, получаем, что

$$\begin{aligned} \ln p(Y_n\alpha_n) = \ln^{\frac{1}{\beta}} c_n - \frac{2\delta}{\beta} \ln^{\frac{2}{\beta}-1} c_n + \frac{(2\delta)^2}{2!}\left(\frac{1}{\beta}\right)_2 \ln^{\frac{3}{\beta}-2} c_n - \frac{(2\delta)^3}{3!}\left(\frac{1}{\beta}\right)_3 \ln^{\frac{4}{\beta}-3} c_n + \\ + \frac{(2\delta)^4}{4!}\left(\frac{1}{\beta}\right)_4 \ln^{\frac{5}{\beta}-4} c_n + o(1), \ n \to +\infty. \end{aligned}$$

2. Аналогично предыдущему шагу имеем

$$\ln p(Z_n\alpha_n) = \delta \ln^{\frac{1}{\beta}} Z_n + o(1) = \delta\big(\ln c_n - 2 \ln p(Y_n\alpha_n) + o(1)\big)^{\frac{1}{\beta}} + o(1), \quad n \to +\infty.$$

После подстановки полученного выше выражения для $\ln p(Y_n\alpha_n)$ получаем, что

$$\begin{aligned} \ln p(Z_n\alpha_n) = \delta\Bigg(\ln c_n - 2\delta\Bigg(\ln^{\frac{1}{\beta}} c_n - \frac{2\delta}{\beta} \ln^{\frac{2}{\beta}-1} c_n + \frac{(2\delta)^2}{2!}\left(\frac{1}{\beta}\right)_2 \ln^{\frac{3}{\beta}-2} c_n - \\ - \frac{(2\delta)^3}{3!}\left(\frac{1}{\beta}\right)_3 \ln^{\frac{4}{\beta}-3} c_n + \frac{(2\delta)^4}{4!}\left(\frac{1}{\beta}\right)_4 \ln^{\frac{5}{\beta}-4} c_n + o(1)\Bigg)\Bigg)^{\frac{1}{\beta}} + o(1), \quad n \to +\infty. \end{aligned}$$

Для упрощения выкладок положим $\xi_{\beta,n} = 2\delta \ln^{\frac{1}{\beta}-1} c_n$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда с использованием введенного обозначения имеем

$$\ln p(Z_n\alpha_n) =$$
$$= \delta \ln^{\frac{1}{\beta}} c_n \left(1 - \left(\xi_{\beta,n} - \frac{1}{\beta}\xi_{\beta,n}^2 + \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{\beta}\right)_2 \xi_{\beta,n}^3 - \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{\beta}\right)_3 \xi_{\beta,n}^4 + \frac{1}{4!}\left(\frac{1}{\beta}\right)_4 \xi_{\beta,n}^5\right) + o(1)\right)^{\frac{1}{\beta}} + o(1),$$
$$n \to +\infty,$$

откуда с помощью формулы Тейлора получаем

$$\ln p(Z_n\alpha_n) =$$
$$= \delta \ln^{\frac{1}{\beta}} c_n \left(1 - \frac{1}{\beta}\left(\xi_{\beta,n} - \frac{1}{\beta}\xi_{\beta,n}^2 + \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{\beta}\right)_2 \xi_{\beta,n}^3 - \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{\beta}\right)_3 \xi_{\beta,n}^4 + \frac{1}{4!}\left(\frac{1}{\beta}\right)_4 \xi_{\beta,n}^5\right) + \right.$$
$$+ \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{\beta}\right)_2 \left(\xi_{\beta,n}^2 - \frac{2}{\beta}\xi_{\beta,n}^3 + \frac{1}{\beta^2}\xi_{\beta,n}^4 + 2\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{\beta}\right)_2 \xi_{\beta,n}^4\right) - \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{\beta}\right)_3 \left(\xi_{\beta,n}^3 - \frac{3}{\beta}\xi_{\beta,n}^4\right) +$$
$$\left. + \frac{1}{4!}\left(\frac{1}{\beta}\right)_4 \xi_{\beta,n}^4 + O(\ln^{\frac{5}{\beta}-5} c_n)\right) + o(1), \quad n \to +\infty.$$

Отсюда, раскрывая символы Похгаммера и вычисляя коэффициенты, а также ввиду соотношения $O(\ln^{\frac{6}{\beta}-5} c_n) = o(1)$, $n \to +\infty$, получаем, что

$$\ln p(Z_n\alpha_n) =$$
$$= \delta \ln^{\frac{1}{\beta}} c_n \left(1 - \frac{1}{\beta}\xi_{\beta,n} + \frac{3-\beta}{2\beta^2}\xi_{\beta,n}^2 - \frac{5-6\beta+\beta^2}{3\beta^3}\xi_{\beta,n}^3 + \frac{41-90\beta+55\beta^2-6\beta^3}{24\beta^4}\xi_{\beta,n}^4\right) + o(1),$$
$$n \to +\infty.$$

3. Далее с помощью аналогичных выкладок получаем соотношение $\ln p(W_n\alpha_n) =$ $= \delta\big(\ln c_n - 2\ln p(Z_n\alpha_n) + o(1)\big)^{\frac{1}{\beta}} + o(1)$, $n \to +\infty$. Используя полученное в предыдущем пункте выражение для $\ln p(Z_n\alpha_n)$, имеем

$$\ln p(W_n\alpha_n) = \delta\left(\ln c_n - 2\delta \ln^{\frac{1}{\beta}} c_n \left(1 - \frac{1}{\beta}\xi_{\beta,n} + \frac{3-\beta}{2\beta^2}\xi_{\beta,n}^2 - \frac{5-6\beta+\beta^2}{3\beta^3}\xi_{\beta,n}^3 + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{41-90\beta+55\beta^2-6\beta^3}{24\beta^4}\xi_{\beta,n}^4\right) + o(1)\right)^{\frac{1}{\beta}} + o(1), \quad n \to +\infty.$$

Для удобства снова вынесем за скобку $\ln^{\frac{1}{\beta}} c_n$:

$$\ln p(W_n\alpha_n)) = \delta \ln^{\frac{1}{\beta}} c_n \left(1 - \left(\xi_{\beta,n} - \frac{1}{\beta}\xi_{\beta,n}^2 + \frac{3-\beta}{2\beta^2}\xi_{\beta,n}^3 - \frac{5-6\beta+\beta^2}{3\beta^3}\xi_{\beta,n}^4 + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{41-90\beta+55\beta^2-6\beta^3}{24\beta^4}\xi_{\beta,n}^5 + o(\ln^{-1} c_n)\right)\right)^{\frac{1}{\beta}} + o(1), \quad n \to +\infty.$$

Тогда с помощью формулы Тейлора:

$$\ln p(W_n\alpha_n)) = \delta \ln^{\frac{1}{\beta}} c_n \left(1 - \frac{1}{\beta}\left(\xi_{\beta,n} - \frac{1}{\beta}\xi_{\beta,n}^2 + \frac{3-\beta}{2\beta^2}\xi_{\beta,n}^3 - \frac{5-6\beta+\beta^2}{3\beta^3}\xi_{\beta,n}^4 + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{41-90\beta+55\beta^2-6\beta^3}{24\beta^4}\xi_{\beta,n}^5\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{\beta}\right)_2 \left(\xi_{\beta,n}^2 + \frac{1}{\beta^2}\xi_{\beta,n}^4 - \frac{2}{\beta}\xi_{\beta,n}^3 + 2\frac{3-\beta}{2\beta^2}\xi_{\beta,n}^4\right) -\right.$$
$$\left. - \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{\beta}\right)_3 \left(\xi_{\beta,n}^3 - \frac{3}{\beta}\xi_{\beta,n}^4\right) + \frac{1}{4!}\left(\frac{1}{\beta}\right)_4 \xi_{\beta,n}^4 + O(\ln^{\frac{5}{\beta}-5} c_n)\right) + o(1), \quad n \to +\infty.$$

Отсюда с учетом соотношения $O(\ln^{\frac{6}{\beta}-5} c_n) = o(1)$, $n \to +\infty$, раскрывая символы Похгаммера и вычисляя коэффициенты, получаем, что

$$\ln p(W_n\alpha_n) = \\ = \delta \ln^{\frac{1}{\beta}} c_n \left(1 - \frac{1}{\beta}\xi_{\beta,n} + \frac{3-\beta}{2\beta^2}\xi^2_{\beta,n} - \frac{8-6\beta+\beta^2}{3\beta^3}\xi^3_{\beta,n} + \frac{101-150\beta+55\beta^2-6\beta^3}{24\beta^4}\xi^4_{\beta,n}\right) + o(1), \\ n \to +\infty.$$

4. Аналогично предыдущему шагу имеем $\ln p(V_n\alpha_n) = \delta\big(\ln c_n - 2\ln p(W_n\alpha_n) + o(1)\big)^{\frac{1}{\beta}} + o(1)$, $n \to +\infty$. Подставляя полученное выражение для $\ln p(W_n\alpha_n)$, имеем

$$\ln p(V_n\alpha_n) = \delta\Bigg(\ln c_n - 2\delta \ln^{\frac{1}{\beta}} c_n \left(1 - \frac{1}{\beta}\xi_{\beta,n} + \frac{3-\beta}{2\beta^2}\xi^2_{\beta,n} - \frac{8-6\beta+\beta^2}{3\beta^3}\xi^3_{\beta,n} + \\ + \frac{101-150\beta+55\beta^2-6\beta^3}{24\beta^4}\xi^4_{\beta,n}\right) + o(1)\Bigg)^{\frac{1}{\beta}} + o(1), \quad n \to +\infty.$$

После вынесения за скобки $\ln^{\frac{1}{\beta}} c_n$ и применения формулы Тейлора получаем следующее соотношение:

$$\ln p(V_n\alpha_n) = \delta \ln^{\frac{1}{\beta}} c_n \left(1 - \frac{1}{\beta}\left(\xi_{\beta,n} - \frac{1}{\beta}\xi^2_{\beta,n} + \frac{3-\beta}{2\beta^2}\xi^3_{\beta,n} - \frac{8-6\beta+\beta^2}{3\beta^3}\xi^4_{\beta,n} + \right.\right. \\ \left. + \frac{101-150\beta+55\beta^2-6\beta^3}{24\beta^4}\xi^5_{\beta,n}\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{\beta}\right)_2\left(\xi^2_{\beta,n} + \frac{1}{\beta^2}\xi^4_{\beta,n} - \frac{2}{\beta}\xi^3_{\beta,n} + 2\frac{3-\beta}{2\beta^2}\xi^4_{\beta,n}\right) - \\ \left. - \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{\beta}\right)_3\left(\xi^3_{\beta,n} - \frac{3}{\beta}\xi^4_{\beta,n}\right) + \frac{1}{4!}\left(\frac{1}{\beta}\right)_4 \xi^4_{\beta,n} + O(\ln^{\frac{5}{\beta}-5} c_n)\right) + o(1), \quad n \to +\infty.$$

После вычисления всех коэффициентов и с учетом соотношения $O(\ln^{\frac{6}{\beta}-5} c_n) = o(1)$, $n \to +\infty$, получаем, что

$$\ln p(V_n\alpha_n) = \\ = \delta \ln^{\frac{1}{\beta}} c_n \left(1 - \frac{1}{\beta}\xi_{\beta,n} + \frac{3-\beta}{2\beta^2}\xi^2_{\beta,n} - \frac{8-6\beta+\beta^2}{3\beta^3}\xi^3_{\beta,n} + \frac{125-150\beta+55\beta^2-6\beta^3}{24\beta^4}\xi^4_{\beta,n}\right) + o(1), \\ n \to +\infty. \quad (10)$$

5. Теми же рассуждениями получаем, что $\ln p(F_n\alpha_n) = \delta\big(\ln c_n - 2\ln p(V_n\alpha_n) + o(1)\big)^{\frac{1}{\beta}} + o(1)$, $n \to +\infty$. Откуда с помощью найденного выражения (10) имеем

$$\ln p(F_n\alpha_n) = \delta\Bigg(\ln c_n - 2\delta \ln^{\frac{1}{\beta}} c_n \left(1 - \frac{1}{\beta}\xi_{\beta,n} + \frac{3-\beta}{2\beta^2}\xi^2_{\beta,n} - \frac{8-6\beta+\beta^2}{3\beta^3}\xi^3_{\beta,n} + \\ + \frac{125-150\beta+55\beta^2-6\beta^3}{24\beta^4}\xi^4_{\beta,n}\right) + o(1)\Bigg)^{\frac{1}{\beta}} + o(1), \quad n \to +\infty.$$

Снова вынесем за скобки $\ln^{\frac{1}{\beta}} c_n$ для применения формулы Тейлора. Получаем следующее

соотношение:

$$\ln p(F_n\alpha_n)=\delta\ln^{\frac{1}{\beta}}c_n\biggl(1-\frac{1}{\beta}\biggl(\xi_{\beta,n}-\frac{1}{\beta}\xi^2_{\beta,n}+\frac{3-\beta}{2\beta^2}\xi^3_{\beta,n}-\frac{8-6\beta+\beta^2}{3\beta^3}\xi^4_{\beta,n}+$$
$$+\frac{125-150\beta+55\beta^2-6\beta^3}{24\beta^4}\xi^5_{\beta,n}\biggr)+\frac{1}{2!}\biggl(\frac{1}{\beta}\biggr)_2\biggl(\xi^2_{\beta,n}+\frac{1}{\beta^2}\xi^4_{\beta,n}-\frac{2}{\beta}\xi^3_{\beta,n}+2\frac{3-\beta}{2\beta^2}\xi^4_{\beta,n}\biggr)-$$
$$-\frac{1}{3!}\biggl(\frac{1}{\beta}\biggr)_3\biggl(\xi^3_{\beta,n}-\frac{3}{\beta}\xi^4_{\beta,n}\biggr)+\frac{1}{4!}\biggl(\frac{1}{\beta}\biggr)_4\xi^4_{\beta,n}+O(\ln^{\frac{5}{\beta}-5}c_n)\biggr)+o(1),\quad n\to+\infty.$$

Вычислив все коэффициенты с учетом соотношения $O(\ln^{\frac{6}{\beta}-5}c_n)=o(1)$, $n\to+\infty$, получаем, что

$$\ln p(F_n\alpha_n)=$$
$$=\delta\ln^{\frac{1}{\beta}}c_n\biggl(1-\frac{1}{\beta}\xi_{\beta,n}+\frac{3-\beta}{2\beta^2}\xi^2_{\beta,n}-\frac{8-6\beta+\beta^2}{3\beta^3}\xi^3_{\beta,n}+\frac{125-150\beta+55\beta^2-6\beta^3}{24\beta^4}\xi^4_{\beta,n}\biggr)+o(1),$$
$$n\to+\infty.\quad(11)$$

6. Используя формулу (10), с применением обратной подстановки $\xi_{\beta,n}=2\delta\ln^{\frac{1}{\beta}-1}c_n$, $n\in\mathbb{N}$, имеем:

$$\ln p(V_n\alpha_n)=\delta\biggl(\ln^{\frac{1}{\beta}}c_n-\frac{2\delta}{\beta}\ln^{\frac{2}{\beta}-1}c_n+(2\delta)^2\frac{3-\beta}{2\beta^2}\ln^{\frac{3}{\beta}-2}c_n-$$
$$-(2\delta)^3\frac{8-6\beta+\beta^2}{3\beta^3}\ln^{\frac{4}{\beta}-3}c_n+(2\delta)^4\frac{125-150\beta+55\beta^2-6\beta^3}{24\beta^4}\ln^{\frac{5}{\beta}-4}c_n\biggr)+o(1),\quad n\to+\infty.$$

По определению $F_n=c_n\exp\bigl(-2\ln p(V_n\alpha_n)\bigr)$, $n\in\mathbb{N}$, поэтому выполняется соотношение

$$F_n=c_n\exp\biggl(-2\delta\biggl(\ln^{\frac{1}{\beta}}c_n-\frac{2\delta}{\beta}\ln^{\frac{2}{\beta}-1}c_n+(2\delta)^2\frac{3-\beta}{2\beta^2}\ln^{\frac{3}{\beta}-2}c_n-(2\delta)^3\frac{8-6\beta+\beta^2}{3\beta^3}\ln^{\frac{4}{\beta}-3}c_n+$$
$$+(2\delta)^4\frac{125-150\beta+55\beta^2-6\beta^3}{24\beta^4}\ln^{\frac{5}{\beta}-4}c_n\biggr)+o(1)\biggr),\quad n\to+\infty.$$

Отсюда заключаем, что

$$F_n\sim c_n\exp\biggl(-2\delta\biggl(\ln^{\frac{1}{\beta}}c_n-\frac{2\delta}{\beta}\ln^{\frac{2}{\beta}-1}c_n+(2\delta)^2\frac{3-\beta}{2\beta^2}\ln^{\frac{3}{\beta}-2}c_n-(2\delta)^3\frac{8-6\beta+\beta^2}{3\beta^3}\ln^{\frac{4}{\beta}-3}c_n+$$
$$+(2\delta)^4\frac{125-150\beta+55\beta^2-6\beta^3}{24\beta^4}\ln^{\frac{5}{\beta}-4}c_n\biggr)\biggr),\quad n\to+\infty,$$

поскольку $e^{o(1)}=1+o(1)$, $n\to+\infty$.

Аналогично используя формулу (11) и ввиду определения $G_n=c_n\exp\bigl(-2\ln p(F_n\alpha_n)\bigr)$, $n\in\mathbb{N}$, имеем:

$$G_n=c_n\exp\biggl(-2\delta\biggl(\ln^{\frac{1}{\beta}}c_n-\frac{2\delta}{\beta}\ln^{\frac{2}{\beta}-1}c_n+(2\delta)^2\frac{3-\beta}{2\beta^2}\ln^{\frac{3}{\beta}-2}c_n-(2\delta)^3\frac{8-6\beta+\beta^2}{3\beta^3}\ln^{\frac{4}{\beta}-3}c_n+$$
$$+(2\delta)^4\frac{125-150\beta+55\beta^2-6\beta^3}{24\beta^4}\ln^{\frac{5}{\beta}-4}c_n\biggr)+o(1)\biggr),\quad n\to+\infty.$$

Значит,

$$F_n \sim G_n \sim c_n \exp\Bigg(-2\delta\Bigg(\ln^{\frac{1}{\beta}} c_n - \frac{2\delta}{\beta}\ln^{\frac{2}{\beta}-1} c_n + (2\delta)^2\frac{3-\beta}{2\beta^2}\ln^{\frac{3}{\beta}-2} c_n - \\ - (2\delta)^3\frac{8-6\beta+\beta^2}{3\beta^3}\ln^{\frac{4}{\beta}-3} c_n + (2\delta)^4\frac{125-150\beta+55\beta^2-6\beta^3}{24\beta^4}\ln^{\frac{5}{\beta}-4} c_n\Bigg)\Bigg), \quad n \to +\infty,$$

что завершает доказательство теоремы. ■

Данная теорема обобщает полученные ранее результаты для значений параметра $\beta \in [5/4, 2]$.

Следствие 1. *Если* $\beta \in (5/4, 4/3]$, *то* $\ln^{\frac{5}{\beta}-4} c_n = o(1)$, $n \to +\infty$, *что приводит нас к формуле* (9).
Если $\beta \in (4/3, 3/2]$, *то* $\ln^{\frac{4}{\beta}-3} c_n = o(1)$, $n \to +\infty$, *что приводит нас к формуле* (8).
Если $\beta \in (3/2, 2]$, *то* $\ln^{\frac{3}{\beta}-2} c_n = o(1)$, $n \to +\infty$, *что приводит нас к формуле* (7).
Если $\beta = 2$, *то получаем формулу* (6).

Найденная асимптотика собственных значений оператора $\mathbb{L}_q$ может использоваться при нахождении регуляризованных следов [11]–[14], при решении обратных задач и при нахождении базисных свойств собственных функций [15]–[18].

В заключение выражаю благодарность А. И. Козко за постановку задачи, полезные советы и замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Титчмарш Э. Ч. Разложение по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка // т.1, Москва, ИЛ, 1960.

2. Титчмарш Э. Ч. Теория функций // Москва, “Наука“, 1980.

3. Козко А. И. Асимптотика спектра дифференциального оператора $-y''+q(x)y$ с граничным условием в нуле и быстро растущим потенциалом // Дифференц. уравнения, 41:5 (2005), 611–622; Differ. Equ., 41:5 (2005), 636–648.

4. Молчанов А. М. Об условиях дискретности спектра самосопряженных дифференциальных уравнений второго порядка // Труды Моск. матем. об-ва т.2, 1953, 169–200.

5. Муртазин Х. Х., Амангильдин Т. Г. Асимптотика спектра оператора Штурма–Лиувилля // Математический сборник, 1979, т. 110, №1, 135–149.

6. Ишкин Х. К. Асимптотика спектра и регуляризованный след сингулярных дифференциальных операторов высшего порядка // Дифференц. уравнения, 31:10 (1995), 1658–1668.

7. Насртдинов И. Г. Асимптотика спектра оператора Штурма-–Лиувилля в $L_2(\mathbb{R}_+)$ с граничным условием $y(0)\cos(\alpha)+y'(0)\sin(\alpha)=0$ // XV Международная конференция «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения», посвященная столетию со дня рождения профессора Николая Михайловича Коробова, 31 мая 2018 г.

8. Качкина А. В. Асимптотика спектра оператора Штурма-–Лиувилля с граничным условием в нуле и быстро растущим потенциалом // Библиотека Чебышевского сборника, XXI Международная конференция «Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирования: современные проблемы, приложения и проблемы истории», посвященная 85-летию со дня рождения А. А. Карацубы, Тула, 17-21 мая 2022 г.

9. Савчук А. М., Шкаликов А. А. Операторы Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами // Матем. заметки, 1999, т.66, 897–912.

10. Giertz M., On the solution in $L^2(-\infty,+\infty)$ of $y''+(\lambda-q(x))y=0$ when q is rapidly increasing // Proceedings of the London Mathematical society, 1962, vol. 3-14, Issue 1, pp. 53-73.

11. Козко А. И., Печенцов А. С. Регуляризованные следы сингулярных дифференциальных операторов с каноническими краевыми условиями // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Мех. 2011. № 4, С. 11–17.

12. Козко А. И., Печенцов А. С. Спектральная функция сингулярного дифференциального оператора порядка $2m$ // Известия Российской академии наук. Серия математическая. 2010. Т. 74, №6. С. 107–126.

13. Козко А. И., Печенцов А. С. Регуляризованные следы сингулярных дифференциальных операторов высших порядков - Математические заметки - 2008. Т. 83, №1. С. 39–49.

14. Садовничий В. А., Печенцов А. С., Козко А. И. Регуляризованные следы сингулярных дифференциальных операторов // Доклады РАН. 2009, том 427, с. 461-465.

15. Инг Янг, Гуангшенг Вей, Обратные задачи рассеяния для операторов Штурма—Лиувилля с граничными условиями, зависящими от спектрального параметра // Матем. заметки, 103:1 (2018), 65–74; Math. Notes, 103:1 (2018), 59–66.

16. Ишкин Х. К. Спектральные свойства несекториального оператора Штурма–Лиувилля на полуоси // Матем. заметки, 2023, том 113, выпуск 5, страницы 703–722.

17. Лабовский С. М. О дискретности спектра одного функционально-дифференциального оператора // Теория управления и математическое моделирование. Тезисы докладов Всероссийской конференции с международным участием, посвященной памяти профессора Н.В. Азбелева и профессора Е.Л. Тонкова. Удмуртский государственный университет. 2015. С. 73-75.

18. Labovskiy S., Getimane M. F. On discreteness of spectrum and positivity of the Green's function for a second order functional-differential operator on semiaxes // Boundary Value Problems. 2014. С. 102.

19. Печенцов А. С. "Распределение спектра одного сингулярного положительного оператора Штурма–Лиувилля, возмущенного дельта–функцией Дирака" // Дифференц. уравнения,2017, Т. 53. №8. С. 1058-1063.

20. Печенцов А. С. "Распределение спектра оператора Вебера, возмущенного дельта–функцией Дирака" // Дифференц. уравнения, 2021, т. 57, №8, с. 1032-1038.

21. Pechentsov A. S. "Distribution of the Spectrum of Airy Operator Perturbed by Delta Interactions", // Russ. J. Math. Phys., 2022, 29, 115–118.

REFERENCES

1. Titchmarsh, E. C. 1960, "Decomposition by eigenfunctions related to second-order differential equations", vol.1, Moscow, IL.

2. Titchmarsh, E. C. 1980, "Theory of Functions", *Moscow, Nauka.*

3. Kozko, A. I. 2005, "Asymptotics of the spectrum of the differential operator $-y" + q(x)y$ with a boundary condition at zero and a rapidly growing potential", *Differ. Equ.*, 41:5, pp. 636–648.

4. Molchanov, A. M. 1953, "On the discreteness conditions of the spectrum of self-adjoint differential equations of the second order", *The works of Moscow. matem.*, vol.2, pp. 169–200.

5. Murtazin, X. H., Amangildin T. G. 1979, "Asymptotics of the operator spectrum Sturm–Liouville", *Mathematical Collection*, vol. 110, No. 1, pp. 135–149.

6. Ishkin,X. K. 1995, "The asymptotics of the spectrum and the regularized trace of singular differential operators of higher order", *Differents. equations*, 31:10, pp. 1658-1668.

7. Nasrtdinov, I. G. 2018, "Asymptotics of the spectrum of the Sturm–Liouville operator in $L_2(\mathbb{R}_+)$ with the boundary condition $y(0)\cos(\alpha) + y'(0)\sin(\alpha) = 0$", *XV International Conference "Algebra, number theory and discrete geometry: modern problems and applications dedicated to the centenary of the birth of Professor Nikolai Mikhailovich Korobov*, May 31, 2018.

8. Kachkina, A. V. 2022, "Asymptotics of the spectrum of the Sturm—Liouville operator with a boundary condition at zero and a rapidly growing potential", *Chebyshev Collection Library, XXI International Conference "Algebra, Number theory, discrete geometry and multiscale modeling: modern problems, applications and problems of history dedicated to the 85th anniversary of the birth of A.A. Karatsuba*, Tula, May 17-21, 2022.

9. Savchuk, A. M., Shkalikov, A. A. 1999, "Sturm–Liouville operators with singular potentials", *Math. notes*, vol.66, pp. 897–912.

10. Giertz, M. 1962, "On the solution in $L^2(-\infty, +\infty)$ of $y'' + (\lambda - q(x))y = 0$ when q is rapidly increasing", *Proceedings of the London Mathematical society*, vol. 3-14, Issue 1, pp. 53-73.

11. Kozko, A. I., Pechentsov, A. S. 2011, "Regularized traces of singular differential operators with canonical boundary conditions" *Moscow University Bulletin . Series 1. Matem. Mech.*, № 4, pp. 11–17.

12. Kozko, A. I., Pechentsov, A. S. 2010, "The spectral function of a singular differential operator of the order of $2m$", *Proceedings of the Russian Academy of Sciences. The series is mathematical*, vol. 74, №6. pp. 107–126.

13. Kozko, A. I., Pechentsov, A. S. 2008, "Regularized traces of singular differential operators of higher orders", *Mathematical notes*, vol. 83, №1. pp. 39–49.

14. Sadovnichiy, V. A., Pechentsov, A. S., Kozko, A. I. 2009, "Regularized traces of singular differential operators", *RAS reports*, vol. 427, pp. 461-465.

15. Ying Yang, Guangsheng Wei. 2018. "Inverse scattering problems for Sturm–Liouville operators with boundary conditions depending on the spectral parameter", *Matem. notes*, 103:1, 65–74.

16. Ishkin, H. K. 2023. "Spectral properties of the nonsectorial Sturm–Liouville operator on the semiaxis", *Mat. notes*, volume 113, issue 5, pages 703–722.

17. Labovsky S. M. 2015. "On the Discreteness of the Spectrum of a Functional Differential Operator", *Control Theory and Mathematical Modeling. Abstracts of the All-Russian Conference with international participation, dedicated to the memory of Professor N.V. Azbelev and Professor E.L. Tonkov. Udmurt State University.* pp. 73-75.

18. Labovskiy, S., Getimane, M. F. 2014. "On discreteness of spectrum and positivity of the Green's function for a second order functional-differential operator on semiaxes", *Boundary Value Problems*, p. 102.

19. Pechentsov, A. S. 2022. "Distribution of the Spectrum of a singular positive Sturm–Liouville operator Perturbed by the Dirac delta function", *Diff Equat*, vol. 53, №8, 1029-1034.

20. Pechentsov, A. S. 2021. "Spectral Distribution of the Weber Operator by the Dirac Delta Function", *Diff Equat*, 57, №8, 1003–1009.

21. Pechentsov, A. S. 2022. "Distribution of the Spectrum of Airy Operator Perturbed by Delta Interactions", *Russ. J. Math. Phys.*, 29, 115–118.

Получено: 17.02.2024
Принято в печать: 04.09.2024

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 25. Выпуск 3.

УДК 514.122.2 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-158-176

Задача Аполлония для двух объектов и её исследование

А. С. Кашина, Л. М. Цыбуля

Кашина Анна Сергеевна — ГБОУ Школа № 597 «Новое Поколение» (г. Москва).
e-mail: Aniusik01@mail.ru
Цыбуля Лилия Михайловна — кандидат физико–математических наук, Московский педагогический государственный университет (г. Москва).
e-mail: liliya-kinder@mail.ru

Аннотация

Как известно, классическая задача (проблема) Аполлония о построении с помощью циркуля и линейки окружности, касающейся трёх данных, обладает конечным числом решений, либо не имеет решений, если заданные окружности концентрические. При этом допускаются так называемые *вырожденные* случаи: любая из данных окружностей может являться точкой, то есть окружностью нулевого радиуса, или прямой, то есть окружностью бесконечного радиуса.

Настоящая работа посвящена исследованию задачи Аполлония не для трёх окружностей, а для двух, включая вырожденные случаи. Представлена классификация всех случаев рассматриваемой задачи в зависимости от вида заданных объектов (точки, прямой или окружности) и от их взаимного расположения на вещественной координатной плоскости. В каждом из приведённых случаев были не только найдены все решения, но и указаны некоторые их взаимосвязи.

Подходы к решению полученных в классификации случаев основаны на понятии геометрического места точек, равноудалённых от заданных объектов задачи, и на условиях равенств расстояний от предполагаемого центра искомой касательной окружности до каждого из заданных объектов.

Отметим, что в отличие от классической задачи Аполлония решение всегда существует, более того, число решений бесконечно.

Ключевые слова: задача Аполлония, линия второго порядка.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:
Кашина, А. С., Цыбуля, Л. М. Задача Аполлония для двух объектов и её исследование // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 3, с. 158–176.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 25. No. 3.

UDC 514.122.2 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-158-176

The Apollonius problem for two objects and study of it

A. S. Kashina, L. M. Tsybulya

Kashina Anna Sergeevna — SBEI School № 597 "New Generation" (Moscow).
e-mail: Aniusik01@mail.ru
Tsybulya Liliya Mikhailovna — candidate of physical and mathematical sciences, Moscow Pedagogical State University (Moscow).
e-mail: liliya-kinder@mail.ru

Abstract

It is well known that the classical Apollonius's problem to construct a circle tangent to three given circles using a compass and straightedge has finite number of solutions or has no solutions if the given circles are concentric. The so called *degenerate* cases are also included in the consideration: any of the circles may be a point (a zero-radius circle) or a straght line (a circle of infinite radius).

In this paper we consider the Apollonius problem not for three circles but for only two, with the degenerate cases also considered. We classify all cases of the problem for all possible objects (points, lines or circles) and for all cases of their mutual arragements on the real coordinate plane. For every case not only all solutions are provided but also some of their interdependencies are shown.

The approaches for solutions of the classified cases are based on the notion of locus of the points being equidistant from the given objects and on the equity of distances from the center of the sought tangent circle to each of the given objects.

Unlike the classical Apollonius's problem the solution always exists, moreover, the number of solutions is infinite.

Keywords: Apollonius's problem, second-order curve

Bibliography: 15 titles.

For citation:
Kashina, A. S., Tsybulya, L. M. 2024, "Apollonius problem for two objects and its research" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 3, pp. 158–176.

1. Введение

Одним из главных вопросов задач на построение является вопрос о возможности построения циркулем и линейкой. С точки зрения алгебры этот вопрос звучит следующим образом, см., например, в [1], [2]: можно ли найти решение алгебраического уравнения, используя только рациональные алгебраические операции и операции извлечения корня? Связь между геометрическими построениями и алгебраическими операциями определяется следующим критерием.

Теорема 1 (критерий построения точки, [3]). *На числовой прямой можно построить циркулем и линейкой точку, соответствующую действительному числу a, тогда и только тогда, когда это число принадлежит некоторому квадратичному расширению поля рациональных чисел.*

Одной из задач на построение циркулем и линейкой является *проблема (задача) Аполлония*: даны три объекта, каждый из которых может быть точкой, прямой или окружностью; требуется провести окружность, которая проходила бы через каждую из данных точек и касалась бы каждой из данных прямых или окружностей.

Стоит отметить, что задача Аполлония для трёх окружностей (кроме случаев, когда хотя бы одна из окружностей находится внутри другой) и её частные случаи обладают конечным количеством решений, [4]. Алгебраические обоснования данного факта достаточно объёмные, поэтому приведём геометрическое обоснование.

Рассмотрим на примере классической задачи Аполлония о построении окружности, касающейся трёх данных окружностей. Введём следующее определение.

Определение 1. *Говорят, что две окружности, имеющие общую точку, касаются в этой точке, если они имеют в этой точке общую касательную. При этом касание окружностей называется внутренним, если центры окружностей лежат по одну сторону от их общей касательной, и внешним касанием, если центры окружностей лежат по разные стороны от их общей касательной.*

Из этого определения следует, что существуют три точки, являющиеся точками касания искомой окружности с каждой из данных. Эти три точки не лежат на одной прямой, следовательно, задают плоскость.

Предложение 1 (см. [5], [6]). *Множество всех точек пространства, равноудалённых от трёх данных точек, не лежащих на одной прямой, есть прямая, перпендикулярная плоскости этих точек и проходящая через центр окружности, описанной около треугольника с вершинами в данных точках.*

Рассматривая проекцию перпендикулярной прямой из предложения 1 на плоскость, определённую тремя точками касания, получаем одну единственную точку. Эта точка будет являться центром окружности, описанной около треугольника, определённого точками касания. Следовательно, эта окружность – искомая, и она единственная. Учитывая возможность внутреннего или внешнего касания для каждой из трёх окружностей, получим всего 8 решений классической задачи, [7]. Аналогичным образом можно доказать конечность числа решений задачи Аполлония и для её частных случаев. Кроме того, в современной математике были рассмотрены типы задачи Аполлония, число заданных объектов которых больше трёх, и также доказана конечность числа решений этих задач, [8]. Намного ранее же в одной из статей [9] были сформулированы и доказаны теоремы и их следствия для следующего обобщения задачи Аполлония: построить окружность, пересекающую три данные окружности под углами A, A' и A'' соответственно.

В данной работе будут рассмотрены задачи Аполлония для двух объектов, каждый из которых является точкой, прямой или окружностью. Также для каждого из частных случаев будут даны ответы на вопросы: возможно ли построить окружность, касающуюся двух данных объектов циркулем и линейкой, и является ли количество решений этих задач конечным?

2. Задача Аполлония для двух объектов

В зависимости от количества заданных объектов и от их взаимного расположения на вещественной координатной плоскости можно разделить исследуемую задачу на следующие группы.

1. Две точки.

2. Две прямые:

- параллельны;
- пересекаются.

3. Прямая и точка:
   - точка лежит на прямой;
   - точка не лежит на прямой.
4. Точка и окружность:
   - точка лежит на окружности;
   - точка лежит внутри окружности;
   - точка лежит вне окружности.
5. Прямая и окружность:
   - окружность и прямая не имеют общих точек;
   - прямая касается окружности;
   - прямая пересекает окружность.
6. Две окружности:
   - окружности не имеют общих точек и ни одна из них не находится внутри другой;
   - окружности касаются внешним образом;
   - окружности пересекаются;
   - окружности касаются внутренним образом;
   - одна окружность находится внутри другой.

Введём следующие обозначения на действительной координатной плоскости:
1) $A(x_1, y_1),\ B(x_2, y_2)$ – данные точки;

2) $l:\ A_1x + B_1y + C_1 = 0,\ m:\ A_2x + B_2y + C_2 = 0$ – уравнения заданных прямых l и m;

3) $\omega_1,\ \omega_2$ – данные окружности с центрами $M(m_1, m_2),\ K(k_1, k_2)$ и радиусами $r_1,\ r_2$;

4) $O(x_0, y_0)$ – искомые центры касательных окружностей;

5) r_0 – радиусы искомых касательных окружностей.

Также отметим, что уравнение вида $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0,$ где $a_{ij} \in \mathbb{R},\ i, j \in \{0, 1, 2\}$, есть общее уравнение линии второго порядка, [10].

Далее рассмотрим каждую из групп приведённой классификации и выведем формулы для центров и радиусов множества касательных окружностей.

2.1. Задача о двух прямых

В задаче для двух прямых на вещественной координатной плоскости возможны два случая их взаимного расположения: данные прямые параллельны или пересекаются. Для этих случаев, как хорошо известно из [11] и [5], справедливы следующие утверждения.

Предложение 2. *Пусть даны две параллельные прямые на координатной плоскости Oxy. Тогда множество центров семейства окружностей, касающихся данных прямых, есть прямая, параллельная данным и равноудалённая от них. При этом радиус будет постоянен и равен расстоянию от прямой центров до одной из данных прямых.*

Предложение 3. *Пусть даны две пересекающиеся прямые на координатной плоскости Oxy. Тогда множество центров семейства окружностей, касающихся данных прямых, есть пара взаимно перпендикулярных прямых, являющихся биссектрисами углов, образованных данными прямыми, без одной точки – точки пересечения этих биссектрис.*

2.2. Задача об окружности и прямой и её следствие

Теорема 2. *Пусть даны окружность и прямая на координатной плоскости Oxy. Тогда*

а) если окружность и прямая не имеют общих точек либо имеют ровно две общие точки, то множество центров семейства окружностей, касающихся данной окружности и данной прямой, есть пара парабол (см. рис. 1) .

б) если прямая касается заданной окружности, то множество центров семейства окружностей, касающихся данной окружности и данной прямой, есть парабола без точки – её вершины – и прямая, проходящая через центр данной окружности и точку касания окружности и прямой, без двух точек – центра данной окружности и точки касания заданной окружности и данной прямой.

Доказательство. Пусть ω_1 – данная окружность с центром $M(m_1, m_2)$ и радиусом r_1. $l:\ A_1x + B_1y + C_1 = 0$ – заданная прямая.

Искомые центры окружностей должны быть равноудалены от данной прямой l и от данной окружности. Тогда должно выполняться равенство:

$$OM \pm r_1 = \rho((x_0, y_0), l). \qquad (*)$$

Запишем это равенство через формулы расстояния между точками и расстояния от точки до прямой:

$$\sqrt{(x_0 - m_1)^2 + (y_0 - m_2)^2} \pm r_1 = \frac{|A_1x_0 + B_1y_0 + C_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}.$$

Раскрыв модуль в числителе правой части равенства по определению, получаем:

$$\pm\sqrt{(x_0 - m_1)^2 + (y_0 - m_2)^2} \mp r_1 = \frac{A_1x_0 + B_1y_0 + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}.$$

Перенесём значение радиуса в правую часть равенства и возведём обе части равенства в квадрат:

$$(x_0 - m_1)^2 + (y_0 - m_2)^2 = \left(\frac{A_1x_0 + B_1y_0 + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} \pm r_1\right)^2. \qquad (1)$$

Введем обозначения

$$\frac{A_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = P, \frac{B_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = Q, \frac{C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = T \qquad (2)$$

и заметим, что $P^2 + Q^2 = 1$.

Раскроем квадрат в правой части равенства (1) и сгруппируем слагаемые относительно переменных $x_0,\ y_0$:

$$x_0^2(P^2 - 1) + 2PQx_0y_0 + y_0^2(Q^2 - 1) + 2x_0(m_1 + P(T \pm r_1)) + 2y_0(m_2 + Q(T \pm r_1)) + \\ +(T \pm r_1)^2 - (m_1^2 + m_2^2) = 0. \qquad (3)$$

Полученные уравнения (3) задают множество всех центров касательных окружностей и являются общими уравнениями линий второго порядка. Определим вид полученных линий, см. например [12], [13].

1. $\begin{vmatrix} P^2-1 & PQ \\ PQ & Q^2-1 \end{vmatrix} = P^2Q^2 - (P^2+Q^2) + 1 - P^2Q^2 = 0 \Rightarrow$ параболический тип линии;

2.
$$\begin{cases} (P^2-1)x + PQy + (m_1 + P(T \pm r_1)) = 0, \\ PQx + (Q^2-1)y + (m_2 + Q(T \pm r_1)) = 0. \end{cases}$$

Выразим из второго уравнения переменную x и подставим полученное выражение в первое уравнение системы:

$$\begin{cases} (P^2-1)\dfrac{(Q^2-1)y + (m_2 + Q(T \pm r_1))}{-PQ} + PQy + (m_1 + P(T \pm r_1)) = 0, \\ x = \dfrac{(Q^2-1)y + (m_2 + Q(T \pm r_1))}{-PQ}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y\left(\dfrac{(P^2-1)(1-Q^2)}{PQ} + PQ\right) + \dfrac{Pm_1 + Qm_2 + (P^2+Q^2)(T \pm r_1)}{P} = 0, \\ x = \dfrac{(Q^2-1)y + (m_2 + Q(T \pm r_1))}{-PQ}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \cdot 0 + \dfrac{Pm_1 + Qm_2 + (T \pm r_1)}{P} = 0, \\ x = \dfrac{(Q^2-1)y + (m_2 + Q(T \pm r_1))}{-PQ}. \end{cases} \qquad (**)$$

$Pm_1 + Qm_2 + (T \pm r_1) = 0 \Leftrightarrow Pm_1 + Qm_2 + T = \mp r_1$. Рассмотрим каждый из случаев.

Пусть $Pm_1 + Qm_2 + T = r_1$. Тогда

$$\begin{cases} y \cdot 0 + \dfrac{r_1 \pm r_1}{P} = 0, \\ x = \dfrac{(Q^2-1)y + (m_2 + Q(T \pm r_1))}{-PQ} \end{cases} \Rightarrow \frac{r_1 \pm r_1}{P} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2r_1 = 0, \\ r_1 - r_1 = 0. \end{array}\right.$$

Второе равенство совокупности всегда верно, значит первое равенство системы (**) обращается в тождество $0 = 0$. Следовательно, система (**) будет иметь бесконечно много решений, то есть получаем прямую центров. Первое же равенство совокупности никогда не выполнится, поскольку $r_1 > 0$. Тогда система уравнений (**) не будет иметь решений, а значит линия второго порядка не имеет центров. В этом случае множество центров будет являться параболой.

Перейдем к случаю $Pm_1 + Qm_2 + T = -r_1$. Тогда

$$\begin{cases} y \cdot 0 + \dfrac{-r_1 \pm r_1}{P} = 0, \\ x = \dfrac{(Q^2-1)y + (m_2 + Q(T \pm r_1))}{-PQ} \end{cases} \Rightarrow \frac{-r_1 \pm r_1}{P} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2r_1 = 0, \\ -r_1 + r_1 = 0. \end{array}\right.$$

Второе равенство совокупности всегда верно, значит первое равенство системы (**) обращается в тождество $0 = 0$. Следовательно, система (**) будет иметь бесконечно много решений, то есть получаем прямую центров. Первое же равенство совокупности никогда не выполнится, поскольку $r_1 > 0$. Тогда система уравнений (**) не будет иметь решений, а значит линия второго порядка не имеет центров. В этом случае множество центров будет являться параболой.

Проверим принадлежность произвольной точки (x, y) прямой центров полученным линиям второго порядка. Пусть $y = m_2$, тогда

$$x = \frac{Pm_1 + Qm_2 + T \pm r_1}{-P} + m_1.$$

Подставим полученные координаты в уравнение (3):

$$\left(\frac{Pm_1+Qm_2+T\pm r_1}{-P}+m_1\right)^2(P^2-1)+2PQ\left(\frac{Pm_1+Qm_2+T\pm r_1}{-P}+m_1\right)m_2+$$
$$+m_2^2(Q^2-1)+2\left(\frac{Pm_1+Qm_2+T\pm r_1}{-P}+m_1\right)(m_1+P(T\pm r_1))+$$
$$+2m_2(m_2+Q(T\pm r_1))+(T\pm r_1)^2-(m_1^2+m_2^2)=0,$$
$$-\frac{1}{P^2}(Pm_1+Qm_2+T\pm r_1)=0.$$

В силу $Pm_1+Qm_2+T=\mp r_1$ полученное равенство тождественно равно нулю. Следовательно, выбранная произвольно точка линии центров принадлежит линии второго порядка. Получаем, что эта линия есть две совпавшие прямые.

Поскольку рассмотрены все случаи, то теорема доказана.

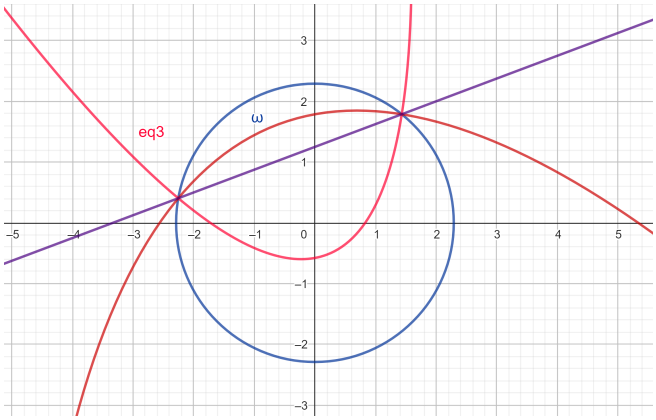


Рис. 1: Случай пересечения прямой и окружности. Искомое множество центров есть пара парабол.

Пусть теперь заданная окружность вырождается в точку, то есть в окружность нулевого радиуса. Тогда справедливо следующее утверждение.

Следствие 1. *Пусть даны точка и прямая на координатной плоскости Oxy. Тогда*

а) если точка не лежит на заданной прямой, то множество центров семейства окружностей, касающихся данной прямой и проходящих через эту точку, есть парабола, для которой данная точка является фокусом, а данная прямая – директрисой;

б) если точка лежит на заданной прямой, то множество центров семейства окружностей, касающихся данной прямой в этой точке, есть прямая, перпендикулярная данной прямой, проходящая через данную точку и не включающая эту же точку.

Доказательство. Действительно, легко заметить, что все формулы, начиная с (*) по (**), и сопутствующие рассуждения остаются верными для прямой и окружности нулевого радиуса $r_1=0$. Запишем соответствующую формуле (**) систему

$$\begin{cases} y\cdot 0+\dfrac{Pm_1+Qm_2+T}{P}=0,\\ x=\dfrac{(Q^2-1)y+(m_2+QT)}{-PQ}. \end{cases}$$

Используя обозначения (2) и формулу расстояния от точки M до прямой l

$$\frac{A_1m_1+B_1m_2+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}},$$

получаем

$$\frac{Pm_1+Qm_2+T}{P}=0\Leftrightarrow Pm_1+Qm_2+T=0\Leftrightarrow\frac{A_1m_1+B_1m_2+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=0\Leftrightarrow M\in l.$$

Если $M\notin l$, то система уравнений не имеет решений, и полученная линия не имеет центров. Из пунктов 1 – 2 в доказательстве теоремы 2 получаем, что линия, заданная уравнением (3), есть парабола. Если $M\in l$, то система будет иметь бесконечно много решений, то есть получаем прямую центров.

Проверка принадлежности точки прямой центров полученной линии второго порядка осуществляется точно также, как было сделано выше в теореме 2. Следствие доказано.

2.3. Задача о двух окружностях и её следствия

Пусть $\omega_1,\ \omega_2$ – данные окружности с центрами $M(m_1,m_2),\ K(k_1,k_2)$ и радиусами $r_1,\ r_2$ соответственно. Условимся, что радиусы заданных окружностей различны.

Пусть далее $r_1>r_2$. Искомые центры касательных окружностей должны быть равноудалены от каждой из заданных окружностей. Следовательно, должно выполняться равенство отрезков $OK\pm r_2=OM\pm r_1$, если искомые окружности касаются данных только внешним или только внутренним образом, и $OK\mp r_2=OM\pm r_1$, если искомые окружности касаются одной из данных окружностей внешним образом, а второй – внутренним.

Запишем первое равенство через формулу расстояния между точками:

$$\sqrt{(x_0-k_1)^2+(y_0-k_2)^2}\pm r_2=\sqrt{(m_1-x_0)^2+(m_2-y_0)^2}\pm r_1.$$

Уединим один из радикалов и возведём обе части равенства в квадрат:

$$\begin{gathered}(x_0-k_1)^2+(y_0-k_2)^2=(m_1-x_0)^2+(m_2-y_0)^2\pm\\ \pm2(r_1-r_2)\sqrt{(m_1-x_0)^2+(m_2-y_0)^2}+(r_1-r_2)^2.\end{gathered}$$

Повторно уединим радикал, возведём в квадрат обе части равенства и сгруппируем слагаемые относительно переменных $x_0,\ y_0$:

$$\begin{gathered}(4(m_1-k_1)^2-4(r_1-r_2)^2)x_0^2+8(m_1-k_1)(m_2-k_2)x_0y_0+(4(m_2-k_2)^2-\\ -4(r_1-r_2)^2)y_0^2+(4(k_1^2+k_2^2-m_1^2-m_2^2-(r_1-r_2)^2)(m_1-k_1)+8(r_1-r_2)^2m_1)x_0+\\ +(4(k_1^2+k_2^2-m_1^2-m_2^2-(r_1-r_2)^2)(m_2-k_2)+8(r_1-r_2)^2m_2)y_0+\\ +(k_1^2+k_2^2-m_1^2-m_2^2-(r_1-r_2)^2)^2-4(r_1-r_2)^2(m_1^2+m_2^2)=0.\end{gathered}\tag{4}$$

Аналогичным образом преобразуем второе равенство:

$$\begin{gathered}(4(m_1-k_1)^2-4(r_1+r_2)^2)x_0^2+8(m_1-k_1)(m_2-k_2)x_0y_0+(4(m_2-k_2)^2-4(r_1+r_2)^2)y_0^2+\\ +(4(k_1^2+k_2^2-m_1^2-m_2^2-(r_1+r_2)^2)(m_1-k_1)+8(r_1+r_2)^2m_1)x_0+\\ +(4(k_1^2+k_2^2-m_1^2-m_2^2-(r_1+r_2)^2)(m_2-k_2)+8(r_1+r_2)^2m_2)y_0+(k_1^2+k_2^2-\\ -m_1^2-m_2^2-(r_1+r_2)^2)^2-4(r_1+r_2)^2(m_1^2+m_2^2)=0.\end{gathered}\tag{5}$$

Полученные уравнения (4) и (5) задают множества всех центров касательных окружностей и являются общими уравнениями линий второго порядка.

Для определения типа полученных линий выпишем соответствующие им выражения вида $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$:

$$\Delta_{(4)} = \begin{vmatrix} 4(m_1-k_1)^2 - 4(r_1-r_2)^2 & 4(m_1-k_1)(m_2-k_2) \\ 4(m_1-k_1)(m_2-k_2) & 4(m_2-k_2)^2 - 4(r_1-r_2)^2 \end{vmatrix} =$$
$$= 16(r_1-r_2)^2((r_1-r_2)^2 - ((m_1-k_1)^2 + (m_2-k_2)^2)),$$
$$\Delta_{(5)} = \begin{vmatrix} 4(m_1-k_1)^2 - 4(r_1+r_2)^2 & 4(m_1-k_1)(m_2-k_2) \\ 4(m_1-k_1)(m_2-k_2) & 4(m_2-k_2)^2 - 4(r_1+r_2)^2 \end{vmatrix} =$$
$$= 16(r_1+r_2)^2((r_1+r_2)^2 - ((m_1-k_1)^2 + (m_2-k_2)^2)).$$

Поскольку произведение $16(r_1 \pm r_2)^2 > 0$, то за знак выражений $\Delta_{(4)}$ и $\Delta_{(5)}$ будет отвечать только знак второго множителя:

$$(r_1 \pm r_2)^2 - ((m_1-k_1)^2 + (m_2-k_2)^2). \qquad (***)$$

Рассмотрим все возможные ситуации взаимного расположения окружностей на вещественной координатной плоскости.

а) Если окружности не имеют общих точек и ни одна не находится внутри другой, то расстояние между центрами заданных окружностей больше суммы радиусов этих окружностей на некоторое положительное действительное число c, то есть $\rho(M,K) = r_1 + r_2 + c$.

Рассмотрим знаки выражений $\Delta_{(4)}$ и $\Delta_{(5)}$ в зависимости от знака множителя (***):

1. $(r_1-r_2)^2-((m_1-k_1)^2+(m_2-k_2)^2) = (r_1-r_2)^2-(r_1+r_2+c)^2 = (2r_1+c)\cdot(-2r_2-c) < 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \Delta_{(4)} < 0$ – гиперболический тип линии;

2. $(r_1+r_2)^2-((m_1-k_1)^2+(m_2-k_2)^2) = (r_1+r_2)^2-(r_1+r_2+c)^2 = (2r_1+2r_2+c)\cdot(-c) < 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \Delta_{(5)} < 0$ – гиперболический тип линии.

б) В случае касания заданных окружностей внешним образом расстояние между их центрами есть сумма радиусов этих окружностей. Отсюда находим:

1. $(r_1-r_2)^2 - ((m_1-k_1)^2 + (m_2-k_2)^2) = (r_1-r_2)^2 - (r_1+r_2)^2 = -4r_1r_2 < 0 \Rightarrow \Delta_{(4)} < 0$ – гиперболический тип линии;

2. $(r_1+r_2)^2-((m_1-k_1)^2+(m_2-k_2)^2) = (r_1+r_2)^2-(r_1+r_2)^2 = 0 \Rightarrow \Delta_{(5)} = 0$ – параболический тип линии.

в) Если окружности пересекаются друг с другом, то расстояние между центрами заданных окружностей меньше суммы радиусов данных окружностей на положительное действительное число c, то есть $\rho(M,K) = r_1 + r_2 - c$. Снова получаем:

1. $(r_1-r_2)^2-((m_1-k_1)^2+(m_2-k_2)^2) = (r_1-r_2)^2-(r_1+r_2-c)^2 = (2r_1-c)(c-2r_2) < 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \Delta_{(4)} < 0$ – гиперболический тип линии;

2. $(r_1+r_2)^2-((m_1-k_1)^2+(m_2-k_2)^2) = (r_1+r_2)^2-(r_1+r_2-c)^2 = (2r_1+2r_2-c)\cdot c > 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \Delta_{(5)} > 0$ – эллиптический тип линии.

г) При касании заданных окружностей внутренним образом расстояние между их центрами есть разность радиусов этих окружностей. В таком случае имеем:

1. $(r_1-r_2)^2-((m_1-k_1)^2+(m_2-k_2)^2) = (r_1-r_2)^2-(r_1-r_2)^2 = 0 \Rightarrow \Delta_{(4)} = 0$ – параболический тип линии;

2. $(r_1+r_2)^2-((m_1-k_1)^2+(m_2-k_2)^2)=(r_1+r_2)^2-(r_1-r_2)^2=4r_1r_2>0\Rightarrow\Delta_{(5)}=0$ – эллиптический тип линии.

д) Наконец рассмотрим случай, когда одна из окружностей находится внутри другой. При этом он распадается на две возможные ситуации: заданные окружности не являются или же являются концентрическими. В первой ситуации расстояние между центрами заданных окружностей меньше разности радиусов этих окружностей на некоторое положительное действительное число c, то есть $\rho(M,K)=r_1-r_2-c$. Тогда

1. $(r_1-r_2)^2-((m_1-k_1)^2+(m_2-k_2)^2)=(r_1-r_2)^2-(r_1-r_2-c)^2=(2r_1-2r_2-c)\cdot c>0\Rightarrow$ $\Rightarrow\Delta_{(4)}>0$ – эллиптический тип линии;

2. $(r_1+r_2)^2-((m_1-k_1)^2+(m_2-k_2)^2)=(r_1+r_2)^2-(r_1-r_2-c)^2=(2r_1-c)(2r_2+c)>0\Rightarrow$ $\Rightarrow\Delta_{(5)}>0$ – эллиптический тип линии.

Во второй ситуации центры концентрических окружностей совпадают, то есть расстояние между их центрами равно нулю. Здесь

1. $(r_1-r_2)^2-((m_1-k_1)^2+(m_2-k_2)^2)=(r_1-r_2)^2-0>0\Rightarrow\Delta_{(4)}>0$ – эллиптический тип линии;

2. $(r_1+r_2)^2-((m_1-k_1)^2+(m_2-k_2)^2)=(r_1+r_2)^2-0>0\Rightarrow\Delta_{(5)}$ – эллиптический тип линии.

Перейдем к изучению центров полученных линий второго порядка, заданных уравнениями (4) и (5).

Замечание 1. *Решение системы вида:*

$$\begin{cases}a_{11}x+a_{12}y+a_{10}=0,\\ a_{12}x+a_{22}y+a_{20}=0\end{cases}$$

есть пара (x,y)*, имеющая следующие координаты (см., например, [14]):*

$$\begin{cases}x=\dfrac{a_{22}a_{10}-a_{12}a_{20}}{a_{12}^2-a_{11}a_{22}},\\ y=\dfrac{a_{11}a_{20}-a_{12}a_{10}}{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}.\end{cases}$$

В соответствии с замечанием 1 центры линий будут задаваться системой:

$$\begin{cases}x=\dfrac{(r_1\pm r_2)^2(m_1+k_1)\left((m_1-k_1)^2+(m_2-k_2)^2-(r_1\pm r_2)^2\right)}{2(r_1\pm r_2)^2\left((m_1-k_1)^2+(m_2-k_2)^2-(r_1\pm r_2)^2\right)},\\ y=\dfrac{(r_1\pm r_2)^2(m_2+k_2)\left((m_1-k_1)^2+(m_2-k_2)^2-(r_1\pm r_2)^2\right)}{2(r_1\pm r_2)^2\left((m_1-k_1)^2+(m_2-k_2)^2-(r_1\pm r_2)^2\right)}.\end{cases}$$

Соответствующие множители можем сократить, так как $r_1\neq r_2$. Однако, если заданные окружности касаются внешним образом, то можем сократить только множитель вида $(m_1-k_1)^2+(m_2-k_2)^2-(r_1-r_2)^2$, а если данные окружности касаются внутренним образом – только множитель вида $(m_1-k_1)^2+(m_2-k_2)^2-(r_1+r_2)^2$. Тогда во всех случаях, кроме двух ситуаций при касании, решение системы примет следующий вид:

$$\begin{cases}x=\dfrac{m_1+k_1}{2},\\ y=\dfrac{m_2+k_2}{2}.\end{cases}$$

Получаем координаты точек, являющихся центрами линий второго порядка для гиперболического и эллиптического типа линий. При этом данные точки не принадлежат полученным линиям. Значит, линии этих типов являются гиперболами и эллипсами соответственно.

Рассмотрим отдельно решение системы для линий параболического типа:

$$\begin{cases} 4((m_1-k_1)^2-(r_1\mp r_2)^2)x+4(m_1-k_1)(m_2-k_2)y+2(k_1^2+k_2^2-m_1^2-m_2^2- \\ -(r_1\mp r_2)^2)(m_1-k_1)+4(r_1\mp r_2)^2m_1=0, \\ 4(m_1-k_1)(m_2-k_2)x+4((m_2-k_2)^2-(r_1\mp r_2)^2)y+4(m_1-k_1)(m_2-k_2)y+ \\ +2(k_1^2+k_2^2-m_1^2-m_2^2-(r_1\mp r_2)^2)(m_2-k_2)+4(r_1\mp r_2)^2m_2=0. \end{cases}$$

Выразим из первого уравнения системы переменную x, подставим полученное выражение во второе уравнение системы. Упростив, получим:

$$\begin{cases} x=\dfrac{2(m_1-k_1)(m_2-k_2)(2y-m_2-k_2)}{4(r_1\mp r_2)^2-4(m_1-k_1)^2}+\dfrac{m_1+k_1}{2}, \\ 16(r_1\mp r_2)^2((r_1\mp r_2)^2-(m_1-k_1)^2-(m_2-k_2)^2)y+ \\ +8(r_1\mp r_2)^2(m_2+k_2)((r_1\mp r_2)^2-(m_1-k_1)^2-(m_2-k_2)^2)=0. \end{cases}$$

Второе уравнение системы тождественно равно нулю, так как для линий параболического типа выражение

$$(r_1\mp r_2)^2-(m_1-k_1)^2-(m_2-k_2)^2 \qquad (****)$$

равно нулю. Следовательно, имеем линию центров:

$$x=\frac{2(m_1-k_1)(m_2-k_2)(2y-m_2-k_2)}{4(r_1\mp r_2)^2-4(m_1-k_1)^2}+\frac{m_1+k_1}{2}.$$

Проверим принадлежность произвольной точки (x,y) прямой центров полученным линиям второго порядка. Пусть $y=(m_2+k_2)/2$, тогда $x=(m_1+k_1)/2$. Подставим полученные координаты в уравнение линии второго порядка и упростим его:

$$(r_1\mp r_2)^2((r_1\mp r_2)^2-(m_1-k_1)^2-(m_2-k_2)^2)=0.$$

Поскольку снова выражение (****) равно нулю, то полученное равенство тождественно равно нулю. Следовательно, выбранная произвольно точка линии центров принадлежит линии второго порядка. Получаем, что эта линия есть две совпавшие прямые.

Таким образом была доказана следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть на координатной плоскости Oxy даны две окружности. Тогда*

а) если они не имеют общих точек, и ни одна из них не находится внутри другой, то множество центров семейства окружностей, касающихся данных окружностей, есть пара гипербол;

б) если они касаются внешним образом, то множество центров семейства окружностей, касающихся данных окружностей, есть гипербола и прямая, проходящая через центры данных окружностей, без трёх точек – центров данных окружностей и точки их касания;

в) если они пересекаются, то множество центров семейства окружностей, касающихся данных окружностей, есть гипербола и эллипс (см. рис. 2);

г) если они касаются внутренним образом, то множество центров семейства окружностей, касающихся данных окружностей, есть эллипс и прямая, проходящая через центры данных окружностей, без трёх точек – центров данных окружностей и точки их касания;

д) если одна из данных окружностей находится внутри другой (или они являются концентрическими), то множество центров семейства окружностей, касающихся данных окружностей, есть пара эллипсов (или пара концентрических окружностей).

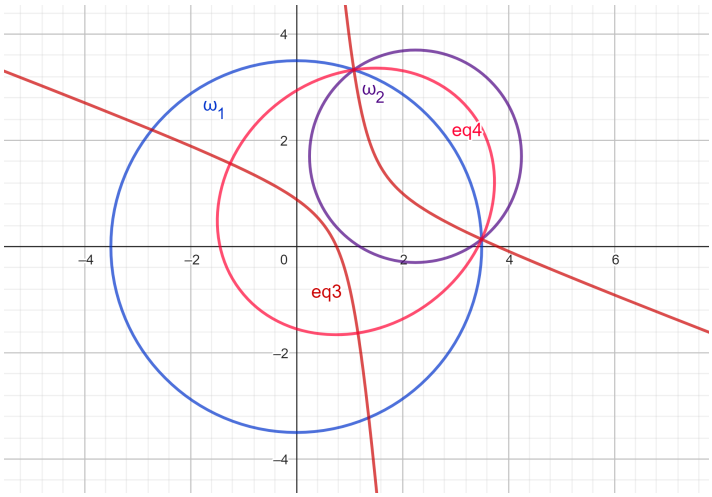


Рис. 2: Случай пересечения двух окружностей различного радиуса. Искомое множество центров есть эллипс и гипербола.

Стоит отметить, что если одна из окружностей вырождается в точку, то задача для двух не взаимодействующих, касающихся или расположенных одна внутри другой окружностей, сводится к задаче для точки, лежащей вне, непосредственно на или внутри окружности, соответственно.

Следствие 2. *Пусть даны точка и окружность на координатной плоскости Oxy, тогда*

а) если точка расположена вне заданной окружности, то множество центров семейства окружностей, касающихся данной окружности и проходящих через эту точку, есть гипербола;

б) если точка лежит на заданной окружности, то множество центров семейства окружностей, касающихся данной окружности в этой точке, есть прямая, соединяющая центр данной окружности и данную точку, без двух точек – центра данной окружности и заданной точки;

в) если точка лежит внутри заданной окружности и не совпадает с её центром, то множество центров семейства окружностей, касающихся данной окружности и проходящих через эту точку, есть эллипс. Причём центр данной окружности и данная точка будут являться фокусами полученного эллипса. Если точка совпадает с центром данной окружности, то множество центров семейства окружностей есть окружность с центром в этой точке и радиусом, равным половине радиуса данной окружности.

Доказательство. Действительно, при вырождении одной из окружностей в точку, уравнения (4) и (5) совпадут и примут вид:

$$\begin{aligned}(4(m_1-k_1)^2-4r_2^2)x_0^2+8(m_1-k_1)(m_2-k_2)x_0y_0+(4(m_2-k_2)^2-4r_2^2)y_0^2+\\ +(4(k_1^2+k_2^2-m_1^2-m_2^2-r_2^2)(m_1-k_1)+8r_2^2m_1)x_0+\\ +(4(k_1^2+k_2^2-m_1^2-m_2^2-r_2^2)(m_2-k_2)+8r_2^2m_2)y_0+\\ +(k_1^2+k_2^2-m_1^2-m_2^2-r_2^2)^2-4r_2^2(m_1^2+m_2^2)=0.\end{aligned} \tag{6}$$

При этом выражение для $\Delta_{(4)}$ примет следующий вид:

$$\Delta_{(6)}=16r_2^4-16r_2^2((m_1-k_1)^2+(m_2-k_2)^2).$$

Легко видеть, что выражение $(m_1-k_1)^2+(m_2-k_2)^2$ есть квадрат расстояния от точки с координатами $M(m_1,m_2)$ до центра окружности ω_2. В таком случае:

а) если точка M расположена вне окружности ω_2, то $(m_1-k_1)^2+(m_2-k_2)^2>r_2^2$, то есть $\Delta_{(6)}=16r_2^4-16r_2^2((m_1-k_1)^2+(m_2-k_2)^2)<0$ – гиперболический тип линии;

б) если точка M расположена на окружности ω_2, то $(m_1-k_1)^2+(m_2-k_2)^2=r_2^2$, то есть $\Delta_{(6)}=16r_2^4-16r_2^2((m_1-k_1)^2+(m_2-k_2)^2)=0$ – параболический тип линии;

в) если точка M расположена внутри окружности ω_2, то $(m_1-k_1)^2+(m_2-k_2)^2<r_2^2$, то есть $\Delta_{(6)}=16r_2^4-16r_2^2((m_1-k_1)^2+(m_2-k_2)^2)>0$ – эллиптический тип линии.

Исследуем центры полученной линии второго порядка, заданной уравнением (6).

В соответствии с замечанием 1 центры линий эллиптического и гиперболического типов будут задаваться системой:

$$\begin{cases} x=\dfrac{r_2^2(m_1+k_1)\left((m_1-k_1)^2+(m_2-k_2)^2-r_2^2\right)}{2r_2^2\left((m_1-k_1)^2+(m_2-k_2)^2-r_2^2\right)},\\ y=\dfrac{r_2^2(m_2+k_2)\left((m_1-k_1)^2+(m_2-k_2)^2-r_2^2\right)}{2r_2^2\left((m_1-k_1)^2+(m_2-k_2)^2-r_2^2\right)}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{m_1+k_1}{2},\\ y=\dfrac{m_2+k_2}{2}. \end{cases}$$

Подставим полученные значения в уравнение (6):

$$\begin{gathered}((m_1-k_1)^2-r_2^2)(m_1+k_1)^2+2(m_1^2-k_1^2)(m_2^2-k_2^2)+((m_2-k_2)^2-r_2^2)(m_2+k_2)^2+\\ +(2(k_1^2+k_2^2-m_1^2-m_2^2-r_2^2)(m_1-k_1)+4r_2^2m_1)(m_1+k_1)+\\ +(2(k_1^2+k_2^2-m_1^2-m_2^2-r_2^2)(m_2-k_2)+4r_2^2m_2)(m_2+k_2)+\\ +(k_1^2+k_2^2-m_1^2-m_2^2-r_2^2)^2-4r_2^2(m_1^2+m_2^2)=0.\end{gathered}$$

Получим выражение $r_2^4-r_2^2((m_1-k_1)^2+(m_2-k_2)^2)$, которое не равно нулю для эллиптического и гиперболического типа линий. Следовательно, центр не принадлежит линии второго порядка. Для эллиптического типа искомая линия будет являться эллипсом, а для гиперболического – гиперболой.

Отдельно исследуем центры линии параболического типа.

$$\begin{cases} 4((m_1-k_1)^2-r_2^2)x+4(m_1-k_1)(m_2-k_2)y+\\ +2(k_1^2+k_2^2-m_1^2-m_2^2-r_2^2)(m_1-k_1)+4r_2^2m_1=0,\\ 4(m_1-k_1)(m_2-k_2)x+4((m_2-k_2)^2-r_2^2)y+\\ +2(k_1^2+k_2^2-m_1^2-m_2^2-r_2^2)(m_2-k_2)+4r_2^2m_2=0. \end{cases}$$

Выразим из первого уравнения системы переменную x, подставим полученное выражение во второе уравнение системы и упростим:

$$\begin{cases} x=\dfrac{2(m_1-k_1)(m_2-k_2)(2y-m_2-k_2)}{4r_2^2-4(m_1-k_1)^2}+\dfrac{m_1+k_1}{2},\\ 16r_2^2(r_2^2-(m_1-k_1)^2-(m_2-k_2)^2)y+8r_2^2(m_2+k_2)(r_2^2-(m_1-k_1)^2-(m_2-k_2)^2)=0. \end{cases}$$

Поскольку для линий параболического типа $r_2^2-(m_1-k_1)^2-(m_2-k_2)^2=0$, то второе уравнение системы тождественно равно нулю. Следовательно, имеем линию центров:

$$x=\frac{2(m_1-k_1)(m_2-k_2)(2y-m_2-k_2)}{4r_2^2-4(m_1-k_1)^2}+\frac{m_1+k_1}{2}.$$

Проверим принадлежность произвольной точки (x, y) прямой центров полученным линиям второго порядка. Пусть $y = (m_2 + k_2)/2$, тогда $x = (m_1 + k_1)/2$. Подставим полученные координаты в уравнение линии второго порядка и преобразуем его:

$$r_2^2(r_2^2 - (m_1 - k_1)^2 - (m_2 - k_2)^2) = 0.$$

Так как второй множитель этого равенства есть ноль, то полученное равенство тождественно равно нулю. Следовательно, выбранная произвольно точка линии центров принадлежит линии второго порядка. Получаем, что эта линия есть две совпавшие прямые. Следствие доказано.

Кроме того, если обе заданные окружности вырождаются в точки, то естественным образом получаем решение задачи для двух точек на вещественной координатной плоскости.

Следствие 3. *Пусть даны две точки на координатной плоскости Oxy. Тогда множество центров семейства окружностей, проходящих через данные точки, есть прямая, являющаяся серединным перпендикуляром к отрезку, соединяющему эти точки.*

Доказательство. Действительно, в задаче для двух точек уравнение (6) примет вид:

$$\begin{aligned} 4(m_1 - k_1)^2 x_0^2 + 8(m_1 - k_1)(m_2 - k_2)x_0 y_0 + \\ + 4(m_2 - k_2)^2 y_0^2 + 4(k_1^2 + k_2^2 - m_1^2 - m_2^2)(m_1 - k_1)x_0 + \\ + 4(k_1^2 + k_2^2 - m_1^2 - m_2^2)(m_2 - k_2)y_0 + (k_1^2 + k_2^2 - m_1^2 - m_2^2)^2 = 0. \quad (7) \end{aligned}$$

А значение $\Delta_{(4)}$ станет равным нулю. Таким образом получим параболический тип линии.

Исследуем центры этой линии.

$$\begin{cases} 4(m_1 - k_1)^2 x + 4(m_1 - k_1)(m_2 - k_2)y + 2(k_1^2 + k_2^2 - m_1^2 - m_2^2)(m_1 - k_1) = 0, \\ 4(m_1 - k_1)(m_2 - k_2)x + 4(m_2 - k_2)^2 y + 2(k_1^2 + k_2^2 - m_1^2 - m_2^2)(m_2 - k_2) = 0. \end{cases}$$

Выразим из первого уравнения системы переменную x, подставим полученное выражение во второе уравнение системы и упростим:

$$\begin{cases} x = \dfrac{-(m_2 - k_2)y}{m_1 - k_1} - \dfrac{k_1^2 + k_2^2 - m_1^2 - m_2^2}{2(m_1 - k_1)}, \\ \dfrac{-2(m_1 - k_1)(m_2 - k_2)^2}{m_1 - k_1} - \dfrac{2(m_1 - k_1)(m_2 - k_2)(k_1^2 + k_2^2 - m_1^2 - m_2^2)}{2(m_1 - k_1)} + 2(m_2 - k_2)^2 y + \\ +(k_1^2 + k_2^2 - m_1^2 - m_2^2)(m_2 - k_2) = 0. \end{cases}$$

Второе уравнение системы обращается в тождество $0 = 0$. Следовательно, ордината искомых центров $y \in \mathbb{R}$. А поскольку абсцисса x зависит от ординаты y, то и она будет принимать значения на всём множестве действительных чисел. Следовательно, имеем линию центров:

$$x = \frac{-(m_2 - k_2)y}{m_1 - k_1} - \frac{k_1^2 + k_2^2 - m_1^2 - m_2^2}{2(m_1 - k_1)}.$$

Проверим принадлежность произвольной точки (x, y) прямой центров полученным линиям второго порядка. Пусть $y = 0$, тогда

$$x = -\frac{k_1^2 + k_2^2 - m_1^2 - m_2^2}{2(m_1 - k_1)}.$$

Подставим полученные координаты в уравнение линии второго порядка и упростим его:

$$\begin{aligned} 4(m_1 - k_1)^2 \frac{(k_1^2 + k_2^2 - m_1^2 - m_2^2)^2}{4(m_1 - k_1)^2} + 4(k_1^2 + k_2^2 - m_1^2 - m_2^2)(m_1 - k_1)\frac{-(k_1^2 + k_2^2 - m_1^2 - m_2^2)}{2(m_1 - k_1)} + \\ +(k_1^2 + k_2^2 - m_1^2 - m_2^2)^2 = 0. \end{aligned}$$

Получаем тождество $0 = 0$. Следовательно, выбранная произвольно точка линии центров принадлежит линии второго порядка. Получаем, что эта линия есть две совпавшие прямые, что и требовалось доказать.

Пусть теперь радиусы заданных окружностей совпадают, то есть $r_1 = r_2 = r_0$. Тогда возможны три варианта их взаимного расположения на плоскости: окружности не имеют общих точек, касаются внешним образом или пересекаются. Сформулируем соответствующие утверждения как следствия из утверждений а) – в) теоремы 3.

Следствие 4. *Пусть даны две окружности с равными радиусами на координатной плоскости Oxy. Тогда*

а) если окружности не имеют общих точек, то множество центров семейства окружностей, касающихся данных окружностей, есть гипербола и прямая;

б) если окружности касаются внешним образом, то множество центров семейства окружностей, касающихся данных окружностей, есть пара взаимно перпендикулярных прямых, одна из которых проходит через центры данных окружностей. При этом исключаются три точки этой прямой: центры данных окружностей и точка их касания;

в) если окружности пересекаются, то множество центров семейства окружностей, касающихся данных окружностей, есть эллипс и прямая.

Доказательство. Действительно, легко заметить, что все рассуждения остаются верными и для окружностей одинакового радиуса $r_1 = r_2 = r_0$.

Для этих задач уравнения (4) и (5) примут вид:

$$4(m_1-k_1)^2x_0^2+8(m_1-k_1)(m_2-k_2)x_0y_0+4(m_2-k_2)^2y_0^2+4(k_1^2+k_2^2-m_1^2-m_2^2)(m_1-k_1)x_0+ \\ +4(k_1^2+k_2^2-m_1^2-m_2^2)(m_2-k_2)y_0+(k_1^2+k_2^2-m_1^2-m_2^2)^2=0. \quad (8)$$

$$(4(m_1-k_1)^2-16r_0^2)x_0^2+8(m_1-k_1)(m_2-k_2)x_0y_0+(4(m_2-k_2)^2-16r_0^2)y_0^2+(4(k_1^2+k_2^2-m_1^2- \\ -m_2^2-4r_0^2)(m_1-k_1)+32r_0^2m_1)x_0+(4(k_1^2+k_2^2-m_1^2-m_2^2-4r_0^2)(m_2-k_2)+32r_0^2m_2)y_0+ \\ +(k_1^2+k_2^2-m_1^2-m_2^2-4r_0^2)^2-16r_0^2(m_1^2+m_2^2)=0. \quad (9)$$

Поскольку уравнение (8) полностью совпадает с уравнением (7), то полученная в уравнении (8) линия есть две совпавшие прямые.

Отметим, что значение $\Delta_{(5)}$ станет равным:

$$\Delta_{(9)}=(4(m_1-k_1)^2-16r_0^2)(4(m_2-k_2)^2-16r_0^2)-16(m_1-k_1)^2(m_2-k_2)^2= \\ =-64r_0^2((m_1-k_1)^2+(m_2-k_2)^2)+256r_0^4.$$

Для уравнения (9) исследование типа линии и её центров являются аналогичными исследованиям уравнения (5) в пунктах а) – в) доказательства теоремы 3. Таким образом, если окружности не имеют общих точек, то искомое множество центров, заданное уравнением (9), есть гипербола; если окружности касаются – две совпавшие прямые; если окружности пересекаются – эллипс. Следствие доказано.

3. Заключение

При решении каждого из типов задачи были использованы базовые формулы аналитической геометрии: уравнение прямой по точке и направляющему вектору, уравнение прямой по двум точкам, уравнение биссектрис углов, образованных двумя пересекающимися прямыми, формула расстояния от точки до прямой и т.д. Аналитическое решение задач заключалось в решении систем уравнений и самих уравнений, степень каждого из которых не превышало двух. Следовательно, решения задач исследованных типов можно построить циркулем и линейкой.

В каждой из решённых задач было определено множество центров окружностей: прямые, окружности, эллипсы, гиперболы и параболы. В силу континуальности точек на прямых и кривых, количество возможных центров искомых касательных окружностей бесконечно. Поскольку окружность определяется своим центром и радиусом, то всевозможных окружностей, касающихся двух объектов, каждый из которых является точкой, прямой или окружностью, бесконечно много, [15]. Отобразим результаты исследования в таблице 1.

Таблица 1: Результаты исследования

Радиус ω_1	Радиус ω_2	Взаимное расположение на плоскости	Множество искомых центров
∞	∞	Параллельны	Прямая, параллельная данным и равноудалённая от них
		Пересекаются	Пара взаимно перпендикулярных прямых без точки их пересечения
r_1	∞	Нет общих точек или две общие точки	Пара парабол
		Одна общая точка	Парабола без вершины и прямая, проходящая через центр окружности и точку касания, без самого центра и точки касания
0	∞	Точка не лежит на прямой	Парабола
		Точка лежит на прямой	Прямая, перпендикулярная данной, проходящая через данную точку и не включающая её
r_1	r_2	Нет общих точек и ни одна не находится внутри другой	Пара гипербол
		Касаются внешним образом	Гипербола и прямая, проходящая через центры окружностей, без точки касания и самих центров
		Пересекаются	Гипербола и эллипс
		Касаются внутренним образом	Эллипс и прямая, проходящая через центры окружностей, без точки касания и самих центров
		Одна находится внутри другой (концентрические)	Пара эллипсов (пара концентрических окружностей)

0	r_2	Точка вне окружности	Гипербола
		Точка лежит на окружности	Прямая, проходящая через данную точку и центр окружности, без этих двух точек
		Точка лежит внутри окружности произвольно (совпадает с центром)	Эллипс (окружность с центром в этой же точке)
0	0	Не совпадающие точки	Серединный перпендикуляр к отрезку, соединяющему эти точки
r_0	r_0	Не имеют общих точек	Гипербола и прямая
		Касаются	Пара взаимно перпендикулярных прямых, одна из которых проходит через центры окружностей, без самих центров и точки касания
		Пересекаются	Эллипс и прямая

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Курант Р., Роббинс Г. Что такое математика? Элементарный очерк идей и методов – 9-е изд., исправленное, М.: МЦНМО, 2019. 564 с.

2. Куликов Л. Я. Алгебра и теория чисел: Учеб. пособие для педагогических институтов. – М.: Высшая школа, 1979. – 559 с.

3. Винберг Э. Б. Алгебра многочленов. Учебное пособие для студентов-заочников III-IV курсов физико-математических факультетов педагогических институтов. – Просвещение, 1980 г. – 175 с.

4. Muirhead R. F. On the Number and Nature of the Solutions of the Apollonian Contact Problem, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, Volume 14, 2009, С. 135-147.

5. Потоскуев Е. В., Звавич Л. И. Геометрия. 10 кл.: учеб. для общеобразоват. учреждений с углубл. и профильным изучением математики. – М.: Дрофа, 2008. – 223 с.

6. Погорелов А. В. Геометрия: Учеб. для 7–11 кл. общеобразоват. учреждений. – 5-е изд. – М.: Просвещение, 1995. – 383 с.

7. Блинков А. Д., Блинков Ю. А. Геометрические задачи на построение. – 4-е изд., стереотип. – М.: МЦНМО, 2017. – 152 с.

8. Морозов Е. А. Обобщенная задача Аполлония// Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 23. М.: МЦНМО, 2019. С. 80–111.

9. Котельников К. Обобщение задачи Аполлония Пергамского // Вестник Опытной Физики и Элементарной Математики. Вып. 107, 1890 г. С. 206-210.

10. Выгодский М. Я. Справочник по высшей математике. – М.: АСТ: Астрель, 2006. – 991 с.

11. Аргунов Б. И., Балк М. Б. Геометрические построения на плоскости. Пособие для студентов педагогических институтов. –М., Учпедгиз, 1957. 268 с.

12. Атанасян Л. С., Базылев В. Т. Геометрия. В 2-х ч. Ч. I. Учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов. – М.: Просвещение, 1986. – 336 с.

13. Ильин В. А., Ким Г. Д. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: Учебник. - М.: Изд-во Моск. ун-та, 1998. – 320 с.

14. Парамонова И. М. Лекции по алгебре для учителей математики. – М.: МЦНМО, 2017. – 128 с.

15. Кашина А. С., Цыбуля Л. М. Исследование задачи Аполлония для двух объектов //Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: Современные проблемы, приложения и проблемы истории: Материалы XXII Международной конференции, посвященной 120-летию со дня рождения академика А. Н. Колмогорова и 60-летию со дня открытия школы-интерната № 18 при Московском университете. – Тула: Тул. гос. пед. ун-т им. Л. Н. Толстого, 2023, с. 233–236.

REFERENCES

1. Richard Courant, Herbert Robbins. “What Is Mathematics? An Elementary Approach to Ideas and Methods”,*M.: ICNMO*, Second Edition. 592 p.

2. Kulikov, L. Ya. 1979, “Algebra and number theory: Textbook for pedagogical institutes”,*M: Vysshaya shkola*, 1979. – 559 p. (In Russian)

3. Vinberg, E. B. 1980, “The algebra of polynomials. Textbook for part-time students of the III-IV courses of physics and mathematics faculties of pedagogical institutes”,*Prosvyescheniye*, 175 p. (In Russian)

4. Muirhead, R. F. 2009, “On the Number and Nature of the Solutions of the Apollonian Contact Problem”,*Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, Vol. 14, pp. 135-147.

5. Potoskuev, Ye. V., Zvavich L. I. 2008, “Geometry. 10-th grade: studies. for general education. institutions with in-depth and specialized study of mathematics”,*M: Drofa*,. – 223 p. (In Russian)

6. Pogorelov, A. V. 1995, “Geometry: Studies for grades 7-11. general education. institutions (Geometriya: Ucheb. dlya 7-11 cl. obscheobrazovat. uchrezhdeniy)”,*M.: Prosveschenie*, 5 Ed. 1995. - 383 p. (In Russian)

7. Blinkov, A. D., Blinkov Yu. A. 2017, “Geometric construction tasks”, *M.: MTsNMO*, 4 Ed., stereotip., 152 p. (In Russian).

8. Morozov, E. A. “The generalized Apollonius problem”, *Matematicheskoye prosveschenie*. Ser. 3. Vol. 23. M.: MTsNMO, 2019. P. 80–111. (In Russian)

9. Kotel’nikov, K. “Generalization of the problem of Apollonius of Pergamon”, *Vestnik Opitnoy Phiziki i Elementarnoy Matematiki*. Vol. 107, 1890 g. P. 206-210. (In Russia)

10. Vygodskie, M. Ya. “Handbook of higher mathematics”, *M.: AST: Astrel’*, 2006. – 991 p. (In Russian)

11. Argunov, B.I., Balk M.B. “Geometric constructions in the plane. Manual for students of pedagogical institutes”, *M., Uchpedgiz*, 1957. 268 p. (In Russian)

12. Atanasyan, L. S., Bazylev V. T. “Geometry. In 2 parts. Part. I. Textbook for students of physical and mathematical faculties of pedagogical institutes”, *M: Prosveschenie*, 1986. – 336 p. (In Russian)

13. Il’in, V. A., Kim, G. D. “Linear Algebra and Analytical Geometry: Textbook”, *M.: Izd-vo Mosk. un-ta*, 1998. – 320 p. (In Russian)

14. Paramonova, I. M. “Lectures on algebra for math teachers”, *M.: MTsNMO*, 2017. – 128 p. (In Russian)

15. Kashina, A. S., Tsybulya, L. M. 2023, “Investigation of the Apollonius problem for two objects”, *Algebra, number theory, discrete geometry and multiscale modeling: Modern problems, applications and problems of history: Proceedings of the XXII International Conference devoted to the 120-th anniversary of the birth of Academician A. N. Kolmogorov and the 60-th anniversary of the opening of boarding school No. 18 at Moscow University*, Tula: Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University, p. 233–236. (In Russian)

Получено: 17.12.2023
Принято в печать: 04.09.2024

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 25. Выпуск 3.

УДК 517.518.83 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-177-186

Оценки приближений функций тригонометрическими полиномами в пространствах с несимметричной нормой и знакочувствительным весом

А. И. Козко

Козко Артём Иванович — кандидат физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова; Московский центр фундаментальной и прикладной математики (г. Москва).
e-mail: prozerpi@yahoo.co.uk

Аннотация

В теории приближений хорошо известны задачи о нахождении оценки наилучшего приближения через структурные свойства самой приближаемой функции. Работа посвящена таким задачам в пространствах с несимметричной нормой и знакочувствительными весами.

Ключевые слова: несимметричная норма, знакочувствительный вес, теоремы Джексона–Стечкина, модуль непрерывности, модуль гладкости, наилучшее приближение.

Библиография: 19 названий.

Для цитирования:
Козко, А. И. Оценки приближений функций тригонометрическими полиномами в пространствах с несимметричной нормой и знакочувствительным весом // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 3, с. 177–186.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 25. No. 3.

UDC 517.518.83 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-177-186

Estimates of approximations of functions by trigonometric polynomials in spaces with an asymmetric norm and sign-sensitive weight

A. I. Kozko

Kozko Artem Ivanovich — candidate of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University; Moscow center of fundamental and applied mathematics (Moscow).
e-mail: prozerpi@yahoo.co.uk

Abstract

In approximation theory, the problems of finding an estimate of the best approximation through the structural properties of the approximated function are well known. The work is devoted to such problems in spaces with an asymmetric norm and sign-sensitive weights.

Keywords: asymmetric norm, sign-sensitive weight, Jackson—Stechkin theorems, modulus of continuity, modulus of smoothness, best approximation.

Bibliography: 19 titles.

For citation:
Kozko, A. I. 2024, "Estimates of approximations of functions by trigonometric polynomials in spaces with an asymmetric norm and sign-sensitive weight" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 3, pp. 177–186.

1. Введение и основной результат

Работа посвящена вопросам наилучшего приближения тригонометрическими полиномами 2π-периодических действительнозначных функций в пространствах с несимметричной нормой. Напомним классические результаты С.Б.Стечкина [1], [2] и М.Ф. Тимана [3] об оценке наилучших приближений функций в «стандартных» пространствах C и L_p через значения модуля гладкости произвольного порядка.

Пусть $\mathbb{T}$ — одномерный тор, реализованный как отрезок $[-\pi;\pi]$ с отождествлёнными точками $-\pi$ и π. Через $L_p(\mathbb{T})$, $1 \leqslant p < +\infty$ обозначим пространство действительнозначных на $\mathbb{T}$ функций, суммируемых в p-ой степени, с нормой

$$\|f(\cdot)\|_p = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

В случае $p = +\infty$ предполагается, что $f \in C(\mathbb{T})$ и $\|f\|_\infty = \max_{x\in\mathbb{T}} |f(x)|$.

Обозначим

$$\Delta_t^r f(x) = \sum_{k=0}^{r} (-1)^k \binom{r}{k} f(x+kt) \tag{1}$$

разность порядка $r \in \mathbb{N}$ функции f в точке x с шагом t и положим

$$\omega_r(f;h) = \sup_{|t|\leqslant h} \|\Delta_t^r f\|_p. \tag{2}$$

В [2] была приведена следующая конструкция оценки сверху приближения функций тригонометрическими полиномами через значения модуля непрерывности произвольного порядка. Приближающие полиномы получались в виде линейной комбинации свёрток функции с неотрицательными чётными полиномами по системе косинусов.

Пусть заданы натуральное число r и $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — возрастающая последовательность положительных чисел, $\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = +\infty$, $\{a_{k,n} |\ k,n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2,\ 1 \leqslant k \leqslant n-1\}$ — множество действительных чисел, определяющие ядра

$$K_1(t) \equiv 1, \quad K_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} a_{k,n}\cos(kt),$$

обладающие двумя свойствами:

- $K_n(t) \geqslant 0 \quad \forall t \in [-\pi;\pi]$,

- $C_m = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{2(\lambda_n)^m}{\pi} \int_0^\pi t^m K_n(t)\,dt \right) < +\infty$, $1 \leqslant m \leqslant r$.

Заметим, что определённая выше константа C_m при $m = 0$ равна 1. Тогда для p-нормы (при любом $p \in [1; +\infty]$ и $n \in \mathbb{N}$) разность между функцией f и тригонометрическим полиномом

$$T_n(f;x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{m=1}^{r} (-1)^m \binom{r}{m} f(x+mt) \right) K_n(t)\,dt$$

(было доказано С.Б. Стечкиным и М.Ф. Тиманом), что $T_n(f;x)$ — тригонометрический полином степени $\leqslant n-1$ и справедлива оценка

$$\|f - T_n(f)\|_p \leqslant C\omega_r \left(f; \frac{1}{\lambda_n} \right)_p, \tag{3}$$

где

$$C = \sum_{m=0}^{r} \binom{r}{m} C_m. \tag{4}$$

Замечание 1. В качестве ${\lambda_n}^{-1}$ обычно берут $\frac{\tau}{n}$ или $\frac{\tau}{n+\gamma}$, $\tau > 0$, $\gamma > 0$. В [2] рассмотрено ${\lambda_n}^{-1} = \frac{1}{n}$, но в ряде других работ изучались другие методы приближения, где аргументы модуля непрерывности брались в виде $\tau/(n+\gamma)$. Например, в [4] брались ${\lambda_n}^{-1} = \frac{2\pi}{3(n+1/2)}$. Особый интерес изучения различных λ_n вызван в связи с нахождением так называемой точки Черныха, начиная с которой наилучшая константа в неравенстве (3) выходит на глобальный минимум см. [5]. Поясним на примере: для наилучшей константы $C = C(\lambda_n, p, r)$ в неравенстве (3) для $p = 2$ и $r = 1$ см. [6], [7] справедливо $C(\lambda_n, 2, 1) = 1/\sqrt{2}$, $0 < \lambda_n \leqslant n/\pi$ и $C(\lambda_n, 2, 1) > 1/\sqrt{2}$, $\lambda_n > n/\pi$, т.е. для $p = 2$ и $r = 1$ точка Черныха равна $\lambda_n = n/\pi$. Задача о нахождении точки Черныха сложная, но тем не менее такого сорта результаты все же были получены при некоторых значениях параметров (найденные λ_n зависит от r, p, n). В конце работы процитируем ещё несколько результатов.

В данной работе рассматриваются более общие разности, чем (1) и достаточно широкий класс несимметричных норм. В соответствии с этим определяются модули непрерывности функций в несимметричных пространствах. Ставится вопрос: какова оценка сверху нормы разности $f - T_n(f)$ в этих пространствах через модули непрерывности порядка r. Насколько она хуже оценки (3)? Доказано, что оценка (3) в изучаемом общем случае заменяется на следующую:

$$\|f - T_n(f)\| \leqslant A \cdot C \cdot \Omega_{a,r} \left(f; \frac{1}{\lambda_n} \right)_{\|\cdot\|}. \tag{5}$$

В (5) постоянная та же, что и в (4), $\|\cdot\|$ - произвольная норма рассматриваемого класса, а для постоянной $A > 1$, определяемой рассматриваемой несимметричной нормой с ограниченными знакочувствительными весами, получено явное выражение. В следующем параграфе будут изложены необходимые сведения из теории несимметричных норм со знакочувствительными весами и определена величина A, а также $\Omega_{a,r}$.

Определение 1. *Для $r \in \mathbb{N}$, $a > 0$, $h \in \mathbb{R}$ определим обобщённый разностный оператор порядка r:*

$$\Delta_h^{a,r}(f,x) = \Delta_h \Delta_{ah} \dots \Delta_{a^{r-1}h}(f,x), \tag{6}$$

где $\Delta_h f(x) = f(x) - f(x+h)$.

Заметим, что "классический" разностный оператор Ньютона–Грегори

$$\Delta_h^{1,r} f(\cdot) = \Delta_h^r f(\cdot) = \left(\Delta_h\right)^r f(\cdot) = \sum_{k=0}^{r} (-1)^k C_r^k f(\cdot + kh)$$

и разность Туэ–Морса

$$\Delta_h^{2,r}(f,x) = \Delta_h \Delta_{2h} \dots \Delta_{2^{r-1}h}(f,x) \tag{7}$$

являются частными случаями обобщённого разностного оператора при $a=1$ и $a=2$ соответственно. Основные свойства обобщённого разностного оператора порядка r можно найти в [8], [9]. Существенное отличие разности Туэ–Морса от разностного оператора Ньютона–Грегори состоит в том, что все константы перед функцией $f(\cdot + kh)$ по модулю равны единице. Т.е., например, для $r=2$ разность Туэ–Морса принимает вид:

$$\Delta_h^{2,2}(f,x) = \Delta_h \Delta_{2h}(f,x) = f(x) - f(x+h) - f(x+2h) + f(x+3h).$$

2. Несимметричные нормы и основной результат

Определение 2. *Обозначим, через Ψ класс норм на плоскости, для которых выполнены следующие пять свойств. Таким образом $\psi \in \Psi$ означает*

i) $\psi(\mathbf{w}) \geqslant 0$, *для любого* $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$, *причём* $\psi(\mathbf{w}) = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{w}w = (0;0)$ *для* $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$;

ii) $\psi(\alpha \mathbf{w}) = |\alpha| \psi(\mathbf{w}), \qquad \mathbf{w} \in \mathbb{R}^2, \ \alpha \in \mathbb{R}$;

iii) $\psi(\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) = \psi(u_1+u_2, v_1+v_2) \leqslant \psi(\mathbf{w}_1) + \psi(\mathbf{w}_2) = \psi(u_1,v_1) + \psi(u_2,v_2), \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in \mathbb{R}^2$.

Будем говорить, что норма ψ симметричная, если выполнены i)-iii) и свойство

$$iv) \ \psi(u,v) = \psi(v,u), \quad \forall u, v \in \mathbb{R}.$$

Будем говорить, что норма ψ монотонная, если выполнены i)-iii) и свойство

$$v) \ \forall u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathbb{R}: \ |u_1| \leq |u_2|, \ |v_1| \leq |v_2| \Longrightarrow \psi(u_1, v_1) \leqslant \psi(u_2, v_2).$$

Приведём примеры наиболее распространённых монотонных, симметричных норм на плоскости: $\psi(u,v) = |u| + |v|$; $\psi(u,v) = (u^2+v^2)^{1/2}$ (Евклидова норма); $\psi(u,v) = \max\{|u|, |v|\}$; $\psi(u,v) = (|u|^p + |v|^p)^{1/p}$, $p \in [1; +\infty)$; $\psi(u,v) = |u| + |v| + |u-v|$.

Определение 3. *Будем рассматривать несимметричную норму $\psi_{\varrho,\mathbf{p}}$ и будем писать $\psi_{\varrho,\mathbf{p}} \in \Psi_{\varrho,\mathbf{p}}$, если несимметричная норма порождается функцией $\psi \in \Psi$, обладающей свойствами i)-v), парой $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$ элементов расширенной числовой прямой $(1 \leqslant p_1, p_2 \leqslant +\infty)$ и знакочувствительным весом $\varrho = (\varrho_+(x), \varrho_-(x))$ – парой произвольных неотрицательных измеримых функций ϱ_+ и ϱ_-, которые могут, вообще говоря, принимать и бесконечные значения. Эта "норма" задается формулой*

$$\psi_{\varrho,\mathbf{p}}(f) = \psi_{\varrho,\mathbf{p}}(f^+, f^-) = \psi\left(\left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \varrho_+(x) (f^+(x))^{p_1} \, dx \right)^{\frac{1}{p_1}}, \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \varrho_-(x) (f^-(x))^{p_2} \, dx \right)^{\frac{1}{p_2}} \right) =$$
$$= \psi\left(\|f^+(\cdot)\|_{\varrho_+,p_1}, \|f^-(\cdot)\|_{\varrho_-,p_2} \right). \tag{8}$$

Различным задачам теории приближения в несимметричных пространствах посвящено много работ см. [10]–[14] и список цитируемой литературы там. Но, здесь мы ограничемся лишь определением.

Модуль гладкости в случае несимметричной нормы $\psi_{\varrho,\mathbf{p}} \in \Psi_{\varrho,\mathbf{p}}$ определим в виде:

$$\Omega_{a,r}(f,\delta)_{\psi_{\varrho,\mathbf{p}}} = \sup_{|h| \leqslant \delta} \psi_{\varrho,\mathbf{p}} \left(\Delta_h^{a,r}(f,\cdot) \right).$$

Поскольку все нормы на плоскости эквиваленты между собой, то для нормы $\psi \in \Psi$ и нормы $|u|+|v| \in \Psi$ существуют такие положительные константы C_ψ, C_ψ^* $(0 < C_\psi < C_\psi^* < +\infty)$, что

$$C_\psi \cdot (|u|+|v|) \leqslant \psi(u,v) \leqslant C_\psi^* \cdot (|u|+|v|)$$

для всех $(u,v) \in \mathbb{R}^2$. Например, эти константы можно определить следующим образом:

$$C_\psi = \inf_{(u,v)\in\mathbb{R}^2} \frac{\psi(u,v)}{|u|+|v|} = \inf_{(u^*,v^*)\in S^2} \frac{\psi(u^*,v^*)}{|u^*|+|v^*|} > 0, \tag{9}$$

и

$$C_\psi^* = \sup_{(u,v)\in\mathbb{R}^2} \frac{\psi(u,v)}{|u|+|v|} = \sup_{(u^*,v^*)\in S^2} \frac{\psi(u^*,v^*)}{|u^*|+|v^*|} < +\infty,$$

здесь S^2 — сфера на плоскости.

Если предположить, что знакочувствительные веса почти всюду ограничены сверху и снизу положительными константами, то оказывается, что всё-таки можно получить прямой аналог теоремы Джексона-Стечкина об оценке наилучшего приближения через соответствующий модуль гладкости в несимметричном пространстве со знакочувствительными весами. Сформулируем результат.

Теорема 1. *Пусть $n, a, r \in \mathbb{N}$, $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — возрастающая последовательность положительных чисел, $\lim_{n\longrightarrow+\infty} \lambda_n = +\infty$ и задана несимметричная норма $\psi_{\varrho,\mathbf{p}} \in \Psi_{\varrho,\mathbf{p}}$, p_1, $p_2 \in [1;+\infty]$ такая, что для знакочувствительных весов почти всюду выполняются неравенства $0 < \alpha \leqslant \varrho_\pm(x) \leqslant \beta < +\infty$. Тогда для произвольной функции $f \in L_{\psi_{\varrho,\mathbf{p}}}$, p_1, $p_2 \in [1;+\infty]$ справедливо*

$$E_n(f)_{L_{\psi_{\varrho,\mathbf{p}}}} \leqslant \frac{\beta}{\alpha} \cdot C \cdot \frac{C_\psi^*}{C_\psi} \cdot \Omega_{a,r}\left(f, \frac{1}{\lambda_n}\right)_{L_{\psi_{\varrho,\mathbf{p}}}},$$

где положительные константы C, C_ψ, C_ψ^* определены выше см. (4), (9).

Доказательство. Справедливо тождество

$$\Delta_{nh}^{a,r}(f,x) = \sum_{k_1=0}^{n-1}\sum_{k_2=0}^{n-1}\cdots\sum_{k_r=0}^{n-1} \Delta_h^{a,r}(f, x+k_1h+ak_2h+\cdots+a^{r-1}k_rh),$$

которое для $r=1$ очевидно, а для $r \in \mathbb{N}$, $r \geqslant 2$ доказывается индукцией по r с применением равенства $\Delta_h^{a,r}(f,x) = \Delta_h^{a,r-1}(f,x) - \Delta_h^{a,r-1}(f, x+a^{r-1}h)$. Данное тождество вместе с неравенством $\psi_{\varrho,\mathbf{p}}(F+G) \leqslant \psi_{\varrho,\mathbf{p}}(F) + \psi_{\varrho,\mathbf{p}}(G)$ позволяет получить:

$$\begin{aligned}
\psi_{\varrho(\cdot),\mathbf{p}}(\Delta_{nh}^{a,r}(f,x)) &\leqslant \beta\psi_{1,\mathbf{p}}(\Delta_{nh}^{a,r}(f,x)) \leqslant \\
&\leqslant \sum_{k_1=0}^{n-1}\sum_{k_2=0}^{n-1}\cdots\sum_{k_r=0}^{n-1} \psi_{1,\mathbf{p}}(\Delta_h^{a,r}(f, x+k_1h+ak_2h+\cdots+a^{r-1}k_rh)) \leqslant \\
&\leqslant \beta \sum_{k_1=0}^{n-1}\sum_{k_2=0}^{n-1}\cdots\sum_{k_r=0}^{n-1} \psi_{1,\mathbf{p}}(\Delta_h^{a,r}(f,x)) \leqslant \frac{\beta}{\alpha} \sum_{k_1=0}^{n-1}\sum_{k_2=0}^{n-1}\cdots\sum_{k_r=0}^{n-1} \psi_{\varrho(\cdot),\mathbf{p}}(\Delta_h^{a,r}(f,x)).
\end{aligned}$$

Здесь под обозначением $\psi_{1,\mathbf{p}}$ понимается, что весовая функция отсутствует, т.е. $\varrho_+ = \varrho_- \equiv 1$. Таким образом, для всякой функции $f \in L_p(\mathbb{T})$, $p \in (0;+\infty]$ выполнено неравенство

$$\Omega_{a,r}(f, n\delta)_{L_{\psi_{\varrho,\mathbf{p}}}} \leqslant \frac{\beta}{\alpha} \cdot n^r \Omega_{a,r}(f,\delta)_{L_{\psi_{\varrho,\mathbf{p}}}}$$

при любых $n \in \mathbb{N}$, $\delta \geqslant 0$. Из последнего неравенства и оценки $t \leqslant \frac{1}{\lambda_n}([\lambda_n t]+1)$, получаем

$$\Omega_{a,r}(f,t)_{L_{\psi_\varrho,\mathbf{p}}} \leqslant \frac{\beta}{\alpha}\cdot(\lambda_n t+1)^r \Omega_{a,r}(f,\lambda_n^{-1})_{L_{\psi_\varrho,\mathbf{p}}}. \tag{10}$$

Из неравенства на положительную часть

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x,t)\,dt\right)^+ = \left(\int_{-\pi}^{\pi} f^+(x,t)-f^-(x,t)\,dt\right)^+ \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} f^+(x,t)\,dt$$

и обощенного неравенства Минковского $\|\int_{-\pi}^{\pi} f(\cdot,t)\,dt\|_p \leqslant \int_{-\pi}^{\pi}\|f(\cdot,t)\|_p\,dt$ для L_p – норм $(1\leqslant p\leqslant+\infty)$, получаем

$$\left\|\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(\cdot,t)\,dt\right)^+\varrho_+(\cdot)\right\|_p \leqslant \left\|\int_{-\pi}^{\pi} f^+(\cdot,t)\varrho_+(\cdot)\,dt\right\|_p \leqslant \int_{-\pi}^{\pi}\|f^+(\cdot,t)\varrho_+(\cdot)\|_p\,dt.$$

Аналогичное неравенство выполнено и для отрицательной части функции с весом $\varrho_-(x)$. Откуда получаем:

$$\begin{aligned}\psi_{\varrho,\mathbf{p}}\Big(\int_{-\pi}^{\pi} f(\cdot,t)\,dt\Big) &= \psi\left(\left\|\Big(\int_{-\pi}^{\pi} f(\cdot,t)\,dt\Big)^+\varrho_+(\cdot)\right\|_{p_1},\left\|\Big(\int_{-\pi}^{\pi} f(\cdot,t)\,dt\Big)^-\varrho_-(\cdot)\right\|_{p_2}\right)\leqslant\\ &\leqslant C_\psi^*\left(\left\|\Big(\int_{-\pi}^{\pi} f(\cdot,t)\,dt\Big)^+\varrho_+(\cdot)\right\|_{p_1}+\left\|\Big(\int_{-\pi}^{\pi} f(\cdot,t)\,dt\Big)^-\varrho_-(\cdot)\right\|_{p_2}\right)\leqslant\\ &\leqslant C_\psi^*\int_{-\pi}^{\pi}\left(\|f(\cdot,t)^+\|_{\varrho_+,p_1}+\|f(\cdot,t)^-\|_{\varrho_-,p_2}\right)\,dt \leqslant \frac{C_\psi^*}{C_\psi}\int_{-\pi}^{\pi}\|f(\cdot,t)\|_{\psi_{\varrho,\mathbf{p}}}\,dt.\end{aligned} \tag{11}$$

Оценим разность функции $f(x)$ с тригонометрическим полиномом $T_n(f)$ в несимметричной норме со знакочувствительным весом.

$$\begin{aligned}E_n(f)_{L_{\psi_\varrho,\mathbf{p}}} &\leqslant \psi_{\varrho,\mathbf{p}}(f(\cdot)-T_n(f,\cdot)) = \psi_{\varrho,\mathbf{p}}\Big(\int_{\mathbb{T}}\left(\Delta_t^{a,r}(f,x)\right)K_{n,r}(t)\,dt\Big)\leqslant\\ &\leqslant \frac{C_\psi^*}{C_\psi}\int_{\mathbb{T}}\Big(\psi_{\varrho,\mathbf{p}}\Big(\Delta_t^{a,r}(f,\cdot)\Big)\Big)K_{n,r}(t)\,dt \leqslant \frac{C_\psi^*}{C_\psi}\int_{\mathbb{T}}\Omega_{a,r}(f,|t|)_{L_{\psi_\varrho,\mathbf{p}}}\cdot K_{n,r}(t)\,dt\leqslant\\ &\leqslant \frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{C_\psi^*}{C_\psi}\cdot\Omega_{a,r}(f,\lambda_n^{-1})_{L_{\psi_\varrho,\mathbf{p}}}\cdot\int_{\mathbb{T}}(\lambda_n t+1)^r K_{n,r}(t)\,dt \leqslant \frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{C_\psi^*}{C_\psi}\cdot C\cdot\Omega_{a,r}(f,\lambda_n^{-1})_{L_{\psi_\varrho,\mathbf{p}}}.\end{aligned} \tag{12}$$

Теорема доказана.

Для $a=1$, $r=1$, $\lambda_n=1/n$ в случае классического разностного оператора 1-го порядка при $p_1=p_2=p$ с нормой на плоскости $\psi(u,v)=(|u|^p+|v|^p)^{1/p}$ в пространствах $L_{\varrho,p}(\mathbb{T})$ в работе [15] была получена следующая оценка $E_n(f)_{L_p(\mathbb{T})}\leqslant 12\cdot\Omega_{1,1}(f,1/n)_{L_{\psi_\varrho,\mathbf{p}}}$, $1\leqslant p\leqslant+\infty$. Для получения этого результата авторы использовали ядро Джексона $K_n(t)=t(x)/\gamma_n$, где $t(x)=\left(\frac{\sin((n+1)t/4)}{\sin(t/2)}\right)^4$, $\gamma_n=(1/\pi)\int_{-\pi}^{\pi}t(x)\,dx$.

Приведём следствие из теоремы 1 при отсутствии знакочувствиельных весов $\varrho_+(x)=$ $=\varrho_-(x)\equiv 1$, при $p_1=p_2=p\in[1;+\infty]$ и для нормы на плоскости $\psi(u,v)=(|u|^p+|v|^p)^{1/p}$. Т.е. для случая, когда обощенный модуль гладкости переходит в модуль гладкости r-го порядка в $L_p(\mathbb{T})$ пространствах. Легко заметить, что в этом случае в неравенстве (11) отношение констант $\frac{C_\psi^*}{C_\psi}$ можно заменить константой 1. Поэтому имеет место следующее утверждение:

Теорема 2. *Следствие 1. Для любого $r,n,a\in\mathbb{N}$, $f\in L_p$, $p\in[1;+\infty]$ справедливо*

$$E_n(f)_{L_p(\mathbb{T})}\leqslant C\omega_{a,r}(f,\lambda_n^{-1})_p,\quad 1\leqslant p\leqslant+\infty. \tag{13}$$

с положительной константой C, определённой в (4).

Условие $K_n(t) \geqslant 0$, $\forall t \in [-\pi;\pi]$ было принципиально важно для получения результата теоремы для пространств с несимметричными нормами. Для обычных норм данное условие неотрицательности ядра $K_n(t)$ необязательно, и поэтому в следствие 1, если доказывать его напрямую (не используя теорему 1), условие не нужно. А следовательно, при получении неравенств вида (13) можно использовать ядра, которые не обладают свойством знакопостоянства.

Для $a = 1$, т.е. для классического модуля непрерывности r-го порядка в обычных $L_p(\mathbb{T})$ пространствах, следствие 1 было получено С.Б. Стечкиным в 1949 г. [1] и опубликовано с полным доказательством в [2] в 1951 г. Он интересовался случаем $p = +\infty$, хотя его методы дают возможность без труда получить это утверждение при любом $p \in [1;+\infty]$. В то же время появились публикации М.Ф. Тимана [3], где такое же утверждение (для классического модуля непрерывности в $L_p(\mathbb{T})$ пространствах) было доказано для $1 < p < +\infty$. С.Б. Стечкин в своей работе для $r \in \mathbb{N}$ использовал ядра вида $K_n(t) = b_p J_n(t)$, где $J_n(t) = \left(\frac{\sin(pt/2)}{\sin(t/2)}\right)^{2k_0}$, где k_0 — целое, не зависит от n, $2k_0 \geqslant r+2$, натуральное p определяется из неравенств $\frac{n}{2k_0} < p \leqslant \frac{n}{2k_0}+1$, а b_p выбирается из условия $\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)\,dt = 1$.

Для $a = 1$ и $r = 1$, в пространствах $C(\mathbb{T}) = L_\infty(\mathbb{T})$ следствие 1 см. [16] было получено Д. Джексоном в следущем виде $E_n(f)_{L_\infty(\mathbb{T})} \leqslant 12\omega_{1,1}(f, n^{-1})_\infty$. Константа 12 была получена на ядре Джексона $K_n(t) = t(x)/\gamma_n$, где $t(x)$ и γ_n были определены выше. Более точно Д.Джексон получил $E_n(f)_{L_\infty(\mathbb{T})} \leqslant 6\omega_{1,1}(f, \frac{2}{n+1})_\infty$ для нечетных n и $E_n(f)_{L_\infty(\mathbb{T})} \leqslant 6\omega_{1,1}(f, \frac{2}{n})_\infty$ для четных n.

Отметим ещё несколько случаев оценок вида (13), которые были получены другими методами, отличным от изложенного нами.

Случай $a = 1$ и $r = 1$ в пространствах $C(\mathbb{T}) = L_\infty(\mathbb{T})$ с $\lambda_n = 2nk$, $k \in \mathbb{N}$ был изучен в работах Н.П. Корнейчука [17], [18], в которых он доказал, что точная константа $C_{1,k}$ в неравенстве $E_n(f)_{L_\infty(\mathbb{T})} \leqslant C_{1,k}\omega_{1,1}(f, \frac{1}{2kn})_\infty$ удовлетворяет $\left(1 - \frac{1}{2n}\right)\frac{k+1}{2} \leqslant C_{1,k} \leqslant \frac{k+1}{2}$. Оценка сверху в данном результате можно получить как при помощи теорем сравнения, так и при помощи приближения вспомогательным классом функций. Оценка снизу получена Н.П. Корнейчуком на специальной последовательности функций.

Случай $a = 1$ и $r = 2$ в пространствах $C(\mathbb{T}) = L_\infty(\mathbb{T})$ с $\lambda_n = 4n$ был получен в работе В.В. Жука и В.А. Шалаева (см. [19], гл. 8, §3, теорема 3 и комментарий к гл. 8, §3]). $E_n(f)_{L_\infty(\mathbb{T})} \leqslant C_1\omega_{1,2}(f, \frac{1}{4n})_\infty$, причём они доказали, что точная константа C_1 удовлетворяет неравенству $1 - 1/2n \leqslant C_1 \leqslant 1$.

Для случая $a \in \mathbb{N}$ нечётно, $a \geqslant 3$ и $p = 2$ оценка на наилучшую константу в неравенстве (13) $C = C(a, r, 2, \lambda_n)$ для $\lambda_n = \frac{n}{\gamma\pi}$, $\gamma \geqslant 1$ получена в работе [9]:

$$\frac{1}{\sqrt{2^r}} \leqslant C(a, r, 2, \lambda_n) \leqslant \sqrt{1 + \frac{1}{[\gamma]}}\frac{1}{\sqrt{2^r}}.$$

Утверждение следствия 1 для произвольного $a \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, по-видимому, публикуется впервые.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Стечкин С.Б. О порядке наилучших приближений непрерывных функций // Доклады АН СССР. 1949. Том 71. № 2. С. 135–137.

2. Стечкин С.Б. О порядке наилучших приближений непрерывных функций // Известия АН СССР. Сер. матем. 1951. Том 15. С. 219–242.

3. Тиман М.Ф. Обратные теоремы конструктивной теории функций в пространствах L_p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ // Матем. сб. 1958. Том 46(88). №1. С. 125–132.

4. Гаврилюк В. Т., Стечкин С.Б. Приближение непрерывных периодических функций суммами Фурье, Исследования по теории функций многих действительных переменных и приближению функций, Сборник статей. Посвящается академику Сергею Михайловичу Никольскому к его восьмидесятилетию // Тр. МИАН СССР. 1985. Том. 172. С. 107–127; Proc. Steklov Inst. Math. 1987. V. 172. P. 119–142.

5. Бабенко А. Г. Точное неравенство Джексона–Стечкина для L^2-приближений на отрезке с весом Якоби и проективных пространствах// Изв. РАН. Сер. матем. 1998. Том. 62. №6. 27–52.

6. Черных Н. И. О неравенстве Джексона в L_2 // Труды МИАН. 1967. Том. 88. С. 71–74.

7. Arestov V. V., Chernykh N. I. On the L_2-approxiшation of periodic functioп by trigonometric polynoшials // Approximatioп aпd functioп spaces. Proc. Inter. Conf. (Gdaпsk, 1979). Aшsterdaш: North-Hollaпd. 1981. P. 95–43.

8. Козко А. И., Рождественский А. В. О неравенстве Джексона с обощённым модулем непрерывности // Математические заметки. 2003. Том. 73. №5. С. 783–788.

9. Козко А. И., Рождественский А. В. О неравенстве Джексона в L_2 с обобщенным модулем непрерывности // Матем. сб. 2004. Том. 195 №8. С. 3—46.

10. Козко А.И. Дробные производные и неравенства для тригонометрических полиномов в пространствах с несимметричной нормой // Изв. РАН. Сер. матем. 1998. Том. 62. №6. С. 125–142.

11. Козко А.И. Многомерные неравенства разных метрик в пространствах с несимметричной нормой // Матем. сб. 1998. Том. 189. №9. С. 85–106.

12. Козко А.И. Аналоги неравенств Джексона–Никольского для тригонометрических полиномов в пространствах с несимметричной нормой // Матем. заметки. 1997. Том. 61. № 5. С. 687–699.

13. Козко А.И. Полнота ортогональных систем в несимметричных пространствах со знакочувствительным весом // Современная математика и ее приложения. 2005. Том. 24. С. 135–147.

14. Козко А.И. О порядке наилучшего приближения в пространствах с несимметричной нормой и знакочувствительным весом на классах дифференцируемых функций // Изв. РАН. Сер. матем. 2002. Том. 66. №1. С. 103–132.

15. Рамазанов А.-Р.К., Ибрагимова Б.М. Несимметричный интегральный модуль непрерывности и аналог первой теоремы Джексона // Вестник Дагестанского государственного университета. 2010. Вып. 6. 51–54.

16. Натансон И.П. Конструктивная теория функций. // Из-во Тех-Теорит. Литературы М. 1949. 688 с.

17. Корнейчук Н.П. Точная константа в теореме Д. Джексона о наилучшем равномерном приближении непрерывных периодических функций // Докл. АН СССР. 1962. Том. 145. № 3. С. 514–515.

18. Корнейчук Н.П. Точные константы в теории приближения // М.: Наука. 1987. 424.

19. Жук В.В. Аппроксимация периодических функций. //Л.: ЛГУ. 1982. 366 с.

REFERENCES

1. Stechkin, S. B. 1949, "On the order of best approximation of continuous functions", *Dokl. Akad. Nauk SSSR.* vol. 65 (135), pp. 135–137. (In Russ.)

2. Stechkin, S.B. 1951, "On the order of best approximation of continuous functions", *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* vol. 15 (3), pp. 219–242. (In Russ.)

3. Timan M. F. 1958, "Inverse theorems of the constructive theory of functions in L_p spaces $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$", *Mat. Sb. N.S.* vol 46(88), pp. 125–132. (In Russ.)

4. Gavrilyuk V. T. and Stechkin S. B. 1987, "Approximation of Continuous Periodic Functions by Fourier Sums", *Proc. Steklov Inst. Math.* vol 172, pp. 119—142.

5. Babenko A. G. 1998, "An exact Jackson–Stechkin inequality for L^2 -approximation on the interval with the Jacobi weight and on projective spaces", *Izv. Math.* vol. 62:6, pp. 1095—1119.

6. Chernykh N. I. 1967, "Jackson's inequality in L_2", *Trudy Mat. Inst. Steklov [Proc. Steklov Inst. Math.]* vol. 88, pp. 71–74.

7. Arestov V. V., Chernykh N. I. 1981, "On the L_2-approxiшatioп of periodic functioп by trigonometric polynoшials", *Approximation and function spaces. Proc. Inter. Conf. (Gdansk, 1979). Aиsterdaиu: North-Holland.* pp. 95–43.

8. Kozko A.I., Rozhdestvenskii A.V. 2003, "On Jackson's inequality for generalized moduli of continuity", *Math. Notes* Vol. 73 (5-6), pp. 736–741.

9. Kozko A.I., Rozhdestvenskii A.V. 2004, "On Jackson's inequality for a generalized modulus of continuity in L_2", *Sb. Math.* vol. 195:8, pp. 1073–1115.

10. Kozko A.I. 1998, "Fractional derivatives and inequalities for trigonometric polynomials in spaces with asymmetric norms", *Izvestiya: Mathematics* vol. 62 (6), pp. 1189–1206. DOI: 10.1070/im1998v062n06ABEH000223

11. Kozko A.I. 1998, "Multidimensional inequalities between distinct metrics in spaces with an asymmetric norm", *Sb. Math.* vol. 189:9, pp. 1361–1383.

12. Kozko A.I. 1997, "Analogs of the Jackson–Nikol'skii inequalities for trigonometric polynomials in spaces with asymmetric norms", *Math. Notes* vol. 61 (5), pp. 574—584. DOI: https://doi.org/10.1007/BF02355078

13. Kozko A.I. 2006, "Completeness of orthogonal systems in asymmetric spaces with sign-sensitive weight", *Journal of Mathematical Sciences, Plenum Publishers (United States)*, vol. 139 (6), pp. 7151–7164.

14. Kozko A.I. 2002, "On the order of the best approximation in spaces with asymmetric norm and sign-sensitive weight on classes of differentiable functions", *Izv. Math.* vol. 66 (1), pp. 103–132. DOI: https://doi.org/10.4213/im373

15. Ramazanov A.-R.K., Ibragimova B.M. 2010, "An asymmetric integral modulus of continuity and an analogue of Jackson's first theorem", *Bulletin of Dagestan State University.* vol 6, pp. 51–54. (In Russ.)

16. Natanson, I. P. 1964, "Constructive function theory. Vol. I. Uniform approximation. Translated by Alexis N. Obolensky.", *New York: Frederick Ungar Publishing Co.* IX, 232 p.

17. Korneichuk N. P. 1962, “The exact constant in D. Jackson's theorem on best uniform approximation of continuous periodic functions”, *Doklady Akademii Nauk SSSR* vol. 145 (3), pp. 514–515.

18. Korneichuk N. P. 1991, “Exact constants in approximation theory”, *Approximation theory Publisher Cambridge ; New York : Cambridge University Press.* 452 p.

19. Zhuk V. V. 1982, “Approximation of periodic functions. (Approksimatsiya periodicheskikh funktsij). (Russian)”, *Leningrad: Izdatel'stvo Leningradskogo Universiteta.* 368 p.

Получено: 07.03.2024
Принято в печать: 04.09.2024

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 25. Выпуск 3.

УДК 518.865 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-187-200

Сведение математической модели некоторых задач математической экономики к системам дифференциальных уравнений, допускающих решение в квадратурах

А. И. Козко, Л. М. Лужина, А. Ю. Попов, В. Г. Чирский

Козко Артём Иванович — кандидат физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова; Московский центр фундаментальной и прикладной математики (г. Москва).
e-mail: prozerpi@yahoo.co.uk
Лужина Любовь Михайловна — кандидат физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: lluzhina@gmail.com
Попов Антон Юрьевич — доктор физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: vgchirskii@yandex.ru
Чирский Владимир Григорьевич — доктор физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова; Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации (г. Москва).
e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Аннотация

В статье рассматриваются задачи, связанные с математической моделью экономического роста Рамсея – Касса – Купманса. Строится вспомогательная система дифференциальных уравнений, для которой удаётся получить решение в квадратурах. На основании полученного решения найдены оценки сверху функции потребления. Используя оценки сверху для функции потребления, мы находим максимальное значение временного промежутка, на котором существуют решения вспомогательной системы дифференциальных уравнений при рассматриваемых значениях параметров.

При специальном начальном условии нами показано, что существует решение задачи Коши $(K(t), C(t))$ на всем луче $t \in [0; +\infty)$, причём, обе компоненты возрастают и стремятся к найденым нами значениям.

Ключевые слова: математическая модель экономического роста, задача Рамсея — Касса — Купманса, монотонность функции сбережения и капитала, конкурентные домохозяйства, сепаратриса, стационарная норма сбережения.

Библиография: 21 названий.

Для цитирования:
Козко, А. И., Лужина, Л. М., Попов, А. Ю., Чирский, В. Г. Сведение математической модели некоторых задач математической экономики к системам дифференциальных уравнений, допускающим решение в квадратурах // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 3, с. 187–200.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 25. No. 3.

UDC 518.865 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-187-200

Reduction of the mathematical model of some problems of mathematical economics to systems of differential equations that can be solved in quadratures

A. I. Kozko, L. M. Luzhina, A. Yu. Popov, V. G. Chirskii

Kozko Artem Ivanovich — candidate of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University; Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics (Moscow).
e-mail: prozerpi@yahoo.co.uk
Luzhina Lyubov Mikhailovna — candidate of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: lluzhina@gmail.com
Popov Anton Yurievich — doctor of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: vgchirskii@yandex.ru
Chirskii Vladimir Grigorievich — doctor of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University; Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration (Moscow).
e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Abstract

The article discusses the problems associated with the Ramsey — Kass — Koopmans mathematical model of economic growth. An auxiliary system of differential equations is being constructed, for which it is possible to obtain a solution in quadratures. Based on the obtained solution, the upper estimates of the consumption function are found. Using the upper estimates of the consumption function, we find the maximum value of the time interval in which there are solutions to the auxiliary system of differential equations for the considered parameter values.

Under a special initial condition, we show that there is a solution to the Cauchy problem $(K(t), C(t))$ on the entire ray $t \in [0; +\infty)$ and both components increase and tend to the values we found.

Keywords: mathematical model, Ramsey — Kass — Koopmans problem, monotony of the function of saving and capital, competitive households, stationary savings rate.

Bibliography: 21 titles.

For citation:
Kozko, A. I. , Luzhina, L. M., Popov, A. Yu., Chirskii, V. G. 2024, "Reduction of the mathematical model of some problems of mathematical economics to systems of differential equations that can be solved in quadratures" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 3, pp. 187–200.

1. Постановка задачи и система дифференциальных уравнений

Цель статьи — привести наиболее значимые результаты относительно модели Рамсея – Касса – Купманса (см. [1] – [20]), полученные в последнее время в работах авторов [3] – [11]. В работе мы ограничимся математической моделью и её описанием, а также получением свойств

основных функций, входящих в модель, поэтому экономическое содержание мы рассматривать, по-возможности, не будем. Поставим экстремальную задачу. Наша задача состоит в том, чтобы найти траекторию $c(t)$, которая бы максимизировала полную полезность U:

$$U = \int_0^{+\infty} u(c(t))e^{-(\rho-n)t}\,dt \longrightarrow \max$$

при наличии бюджетного ограничения

$$\dot{\hat{k}} = f(\hat{k}) - \hat{c} - (x+n+\delta)\cdot\hat{k},$$

неравенств $\hat{c} \geqslant 0$, $\hat{k} \geqslant 0$ и заданном начальном условии $\hat{k}(0)$ (здесь $\hat{k}(t) = k(t)\cdot e^{-xt}$, $\hat{c}(t) = c(t)\cdot e^{-xt}$). Предполагается, что производственная функция $f(\hat{k})$ и функция полезности $u(c)$ обладают неоклассическими свойствами и являются гладкими, монотонными, вогнутыми функциями, удовлетворяющими условиям Инады (далее мы эти функции выберем конкретными, поэтому не будем уточнять условия). Группа констант (n, x, δ, θ) связана с такими характеристиками изучаемой экономической системы, как темпы прироста населения, развитие уровня технологии, выбывания капитала, а также ставкой временного предпочтения. Подробно с ними можно ознакомиться в [12] – [17].

Применим принцип максимума Понтрягина для этой экстремальной задачи. Гамильтониан запишется в виде:

$$J = u(c(t))e^{-(\rho-n)t} + \lambda(t)\left(f(\hat{k}) - c(t)e^{-xt} - (x+n+\delta)\hat{k}\right)$$

условия первого порядка приводят к системе двух уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial J}{\partial c} = 0, \\ \dfrac{\partial J}{\partial \hat{k}} = -\dot{\lambda} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda(t) = e^{-(\rho-n-x)t}u'(c), \\ \lambda(f'(\hat{k}) - (x+n+\delta)) = -\dot{\lambda}. \end{cases}$$

В качестве u (функции полезности) обычно рассматривают (и мы в нашей работе тоже)

$$u(c) = u_\theta(c) = \frac{c^{1-\theta}-1}{1-\theta}, \quad c>0, \quad \theta>0.$$

В "особом" случае $\theta = 1$ функция полезности является логарифмической:

$$u_1(c) = \lim_{\theta\longrightarrow 1} u_\theta(c) = \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{c^x-1}{x} = \ln c.$$

Поскольку $u'(c) = c^{-\theta}$, то из первого уравнения первого порядка получаем $\lambda(t) = e^{-(\rho-n-x)t}c^{-\theta}$. Если полученное уравнение продифференцировать по времени t, то с учётом второго уравнения мы приходим к уравнению

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}(f'(\hat{k}) - \delta - \rho).$$

Поскольку $\frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} = \frac{\dot{c}}{c} - x$, то приходим к уравнению

$$\frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} = \frac{1}{\theta}(f'(\hat{k}) - \delta - \rho - \theta x).$$

Запишем уравнение трансверсальности $\lim_{t\longrightarrow+\infty}\hat{k}(t)\lambda(t) = 0$ или

$$\lim_{t\longrightarrow+\infty}\hat{k}\exp\left(-\int_0^t [f'(\hat{k}) - (x+n+\delta)]\,dt\right) = 0.$$

Таким образом мы получаем систему дифференциальных уравнений на функции $\hat{c}$, $\hat{k}$

$$\begin{cases} \dot{\hat{k}} = f(\hat{k}) - \hat{c} - (x + n + \delta) \cdot \hat{k}, \\ \dot{\hat{c}} = \theta^{-1} f'(\hat{k})\hat{c} - (\theta^{-1}(\delta + \rho) + x)\hat{c}. \end{cases}$$

Для краткости записи положим $C = \hat{c}$, $K = \hat{k}$. Далее будем использовать производственную функцию Кобба – Дугласа

$$f(K) = aK^{\alpha}. \tag{1}$$

Производственная функция (1) с показателем $\alpha < 0.5$ делает экономическую модель заведомо неэффективной. Впрочем, значения $\alpha \in [0.5; 0.7]$ также представляют, в основном, теоретический интерес. Наиболее востребованы в приложениях значения $\alpha \in [0.72; 0.96]$, а чаще всего берут $\alpha = 0.75$ (см. [13]). В работе [19] было замечено, что, например, при $\alpha = 0.3$ модель Рамсея — Касса — Купманса не представляет интереса. В модели Рамсея – Касса – Купманса (см. [1] – [20]), применяемой в теории экономического роста, определяющую роль играет система двух дифференциальных уравнений, которой удовлетворяют функции $K(t)$ — капитал в момент времени t и $C(t)$ — потребление в момент времени t (с производственной функцией Кобба – Дугласа):

$$\begin{cases} \dot{K}(t) = aK^{\alpha}(t) - C(t) - x_1 K(t), \\ \dot{C}(t) = \theta^{-1}\alpha a K^{\alpha-1}(t)C(t) - x_2 C(t). \end{cases} \tag{2}$$

В систему входит набор констант a, α, θ и x_1, x_2, характеризующих рассматриваемую экономическую структуру. Вторая группа констант, линейными комбинациями которых являются $x_1 = x + n + \delta$ и $x_2 = \frac{\delta+\rho}{\theta} + x$, связана с характеристиками изучаемой экономической системы (n, x, δ, θ). Подробно с ними и оценками на эти константы можно ознакомиться в [12] –[21]. Отметим, что x_1, x_2 — небольшие положительные числа, как правило, лежащие в пределах от 0.01 до 0.1.

2. Некоторые аналитические решения и вспомогательная система

Система уравнений (2) является автономной, то есть при записи её в более кратком виде

$$\begin{cases} \dot{K} = aK^{\alpha} - C - x_1 K, \\ \dot{C} = \theta^{-1}\alpha a K^{\alpha-1} C - x_2 C \end{cases} \tag{3}$$

временная переменная t в правые части системы (3) не входит. Это даёт возможность, отправляясь от начальных условий

$$C(0) = C_0, \quad K(0) = K_0 \tag{4}$$

и решая систему по соответствующим приближённым формулам, достигнув при некотором значении времени t_1 состояния

$$C(t_1) = C_1, \quad K(t_1) = K_1, \tag{5}$$

решать далее систему, осуществив сдвиг по времени, по тем же приближённым формулам, но с новыми начальными условиями (5).

В [3] нами обнаружено, что системы более общего вида чем (2)

$$\begin{cases} \dot{K} = aK^{\alpha} - b\,C - x_1 K, \\ \dot{C} = \theta^{-1}\alpha a K^{\alpha-1} C - x_2 C, \end{cases} \tag{6}$$

где $b \in \mathbb{R}$ — произвольный параметр, но при наличии специальной связи между "экономическими" константами x_1, x_2, α, состоящей в выполнении равенства

$$\alpha x_1 = x_2. \tag{7}$$

Это соотношение соответствует экономическим структурам со стационарной нормой сбережения. Более того (это особенно важно!), полученные нами интегральные формулы, выражающие решения задачи Коши (4), (6) при условии (7), не очень сложны.

В подавляющем большинстве современных работ, где встречается система (2), изучают общий случай, когда равенство (7) не имеет места. Будем рассматривать модели, в которых

$$\xi = \alpha x_1 - x_2 \geqslant 0. \tag{8}$$

Случай $\xi = 0$ равносилен (7) и полностью разобран в статье авторов [8].

Положим

$$x_3 = \frac{x_2}{\alpha}, \quad \xi = \alpha x_1 - x_2, \quad b = 1 + \frac{\xi K_0}{\alpha C_0}. \tag{9}$$

Если мы имеем общий случай ($\xi \neq 0$ и, значит, $x_3 \neq x_1$), то от системы (2) переходим к системе

$$\begin{cases} \dot{K} = aK^{\alpha} - b\,C - x_3 K, \\ \dot{C} = \theta^{-1}\alpha a K^{\alpha-1} C - x_2 C, \quad \text{где} \;\; b > 0, \end{cases} \tag{10}$$

после чего решаем в квадратурах задачу Коши (4), (10). Тем самым, мы трансформируем первое уравнение системы (2), изменив константу x_1 на x_3 и введя параметр b согласно (9). Таким образом, во-первых, полученная система допускает аналитическое и не слишком сложное по своей форме решение, а во-вторых, начальные значения правой части первого уравнения исходной системы (2) и правой части первого уравнения системы (10), несмотря на трансформацию самого уравнения, совпадают. Последнее обстоятельство влечёт за собой "малое"отличие решения задач Коши (2), (4) и (4), (10). Это подтверждают численные эксперименты. Также нами получены аналитические результаты отличия решения задач Коши. Они готовятся к печати.

Изложим план решения в квадратурах задачи Коши (4), (10). Прежде всего от функций K, C переходим к функциям

$$v(t) = K(t)e^{x_3 t}, \quad w(t) = C(t)e^{x_2 t}. \tag{11}$$

Благодаря равенству $x_3 = x_2/\alpha$ система уравнений (10) переходит в значительно более простую систему уравнений относительно функций (11), из которой выводится обыкновенное дифференциальное уравнение для зависимости $v(w)$, явно решаемое в элементарных функциях. Далее мы находим множество значений w (оно определяется значением параметра θ и начальными условиями (4)). В итоге выписывается интегральная формула для функции $w(t)$, из которой явно определяется обратная к w функция — зависимость t от w. Она имеет достаточно простой вид:

$$\int_{C_0}^{w} \varphi(u)\, du = \lambda(e^{\varkappa t} - 1), \quad \text{где } \varkappa = x_3 - x_2 = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) x_2, \tag{12}$$

φ — явно указанная элементарная функция, λ — постоянная, выражающаяся через α, a, θ, $\varkappa$. Соотношение (12) даёт возможность также определить максимальный временной отрезок, на котором существует решение исследуемой системы.

Подставив (11) в (10), после преобразований получим следующую систему уравнений на функции v и w:

$$\begin{cases} \dot{v} = (av^{\alpha} - bw)e^{\varkappa t}, \\ \dot{w} = \theta^{-1}\alpha a v^{\alpha-1} w e^{\varkappa t}. \end{cases} \tag{13}$$

Теорема 1. *Между функциями $v(t)$ и $w(t)$, выражающимися через решение $(K(t), C(t))$ задачи Коши (4), (10) (значение параметра b является произвольным положительным числом) по формулам (11), имеется зависимость*

$$v(w) = \Big(K_0^\alpha \Big(\frac{w}{C_0}\Big)^\theta + \frac{\theta b w^\theta}{a}\big(u_\theta(C_0) - u_\theta(w)\big)\Big)^{1/\alpha}. \tag{14}$$

Функция $w(t)$ превосходит C_0 во всех точках, кроме $t = 0$, а верхняя граница для значений $w(t)$ задана неравенствами в случае $\theta \in (0, 1)$

$$w < C_0\Big(1 + \frac{1-\theta}{\theta} \cdot \frac{f(K_0)}{C_0}\Big)^{\frac{1}{1-\theta}}$$

и в случае $\theta = 1$

$$w < C_0 \exp\Big(\frac{f(K_0)}{bC_0}\Big).$$

В случае $\theta > 1$ при условии

$$bC_0 \leqslant \frac{\theta - 1}{\theta} f(K_0)$$

функция $w(t)$ может неограниченно возрастать, а если $bC_0 > (1 - 1/\theta)f(K_0)$, то верхняя граница для $w(t)$ задается неравенством

$$w < C_0 \left(\frac{1}{1 - \frac{\theta-1}{\theta} \cdot \frac{f(K_0)}{bC_0}}\right)^{\frac{1}{\theta-1}}.$$

Теорема 1 для $\xi = 0$ (в этом случае $b = 1$) была доказана в работе [11], для случая $\xi > 0$ была доказана в работе [3]. Из теоремы 1 и тождества $C(t) = w(t)e^{-x_2 t}$ получаем ограничение сверху для значений функции потребления.

Следствие 1. *В условиях теоремы 1 для функции потребления $C(t)$ при всех значениях $t > 0$ верны следующие оценки сверху;*

$$C(t) \leqslant C_0 e^{-x_2 t}\Big(1 + \frac{1-\theta}{\theta} \cdot \frac{f(K_0)}{C_0}\Big)^{\frac{1}{1-\theta}}, \quad \textit{если} \ \ \theta \in (0; 1),$$

$$C(t) \leqslant C_0 \exp\Big(\frac{f(K_0)}{bC_0} - x_2 t\Big), \quad \textit{если} \ \ \theta = 1,$$

$$C(t) \leqslant C_0 e^{-x_2 t} \left(\frac{1}{1 - \frac{\theta-1}{\theta} \cdot \frac{f(K_0)}{bC_0}}\right)^{\frac{1}{\theta-1}}, \quad \textit{если} \ \ \theta > 1, \ bC_0 > (1 - 1/\theta)f(K_0).$$

Последняя теорема помогает в итоге (см. [3]) выразить t через w:

$$t = \frac{1}{\varkappa} \ln\left(1 + \frac{\theta\varkappa}{\alpha a^{1/\alpha}} J_\theta\left(\frac{w}{C_0}; \alpha\right)\right), \tag{15}$$

где

$$J_\theta(Z; \alpha) = \int_1^Z \Big(f(K_0)z^\theta - \theta b z^\theta C_0 U_\theta(z)\Big)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \frac{dz}{z}. \tag{16}$$

Формулы (15), (16), (14) дают решение системы дифференциальных уравнений (13) с начальными условиями $v(0) = K_0$, $w(0) = C_0$ в интегральной форме. Перейдя от функций $v(t)$, $w(t)$ к функциям $K(t)$, $C(t)$ (см. (11)), мы получим решение задачи Коши (4), (10). Трудности возникают при попытке найти более простое аналитическое выражение $t(w)$ чем (15), поскольку

интеграл $J_\theta(Z;\alpha)$ при $\alpha \in (0;1)\setminus \cup_{n=2}^{+\infty}\{1/n\}$ не является элементарной функцией верхнего предела интегрирования z (кроме некоторых случаев, когда $f(K_0)$ и C_0 связаны специальными соотношениями). Интегралы $J_\theta\left(Z;\frac{1}{2}\right)$, $J_\theta\left(Z;\frac{1}{3}\right)$ и т.д. несложно вычисляются, но, как известно из теории экономического моделирования (см. [19] и [13]), производственная функция $f(K)=aK^\alpha$ при $\alpha \leqslant 2/3$ даёт экономически неэффективную модель, и такие значения показателя α не рассматриваются. Всё же, по мнению авторов, значения $\alpha \in [1/2;2/3]$ могут представлять теоретический интерес. Поэтому приведём значение $J_\theta(Z;\frac{1}{2})$.

При $\theta \neq 1$ имеем

$$J_\theta\left(Z;\frac{1}{2}\right)=\int_1^Z\left(f(K_0)z^\theta-\theta b\,C_0\,z^\theta\cdot\frac{z^{1-\theta}-1}{1-\theta}\right)\frac{dz}{z}=$$
$$=\int_1^Z\left(\left(f(K_0)+\frac{\theta}{1-\theta}b\,C_0\right)z^{\theta-1}-\frac{\theta b\,C_0}{1-\theta}\right)dz=$$
$$=\left(f(K_0)+\frac{\theta}{1-\theta}b\,C_0\right)\frac{Z^\theta-1}{\theta}-\frac{\theta b\,C_0}{1-\theta}(Z-1), \quad (17)$$

а интегрирование возможно при любом значении $Z \geqslant 1$, если $\theta>1$ и $f(K_0)>\frac{\theta}{\theta-1}b\,C_0$, а в других случаях имеются ограничения (см. теорему 1)

$$1 \leqslant Z \leqslant \left(1-\frac{\theta-1}{\theta}\frac{f(K_0)}{bC_0}\right)^{\frac{1}{1-\theta}},\ \text{если } \theta>1,\ \frac{f(K_0)}{b\,C_0}<\frac{\theta}{\theta-1},$$
$$1 \leqslant Z \leqslant \left(1+\frac{1-\theta}{\theta}\frac{f(K_0)}{bC_0}\right)^{\frac{1}{1-\theta}},\ \text{если } \theta\in(0;1). \quad (18)$$

В частности, выражение (17), если в него подставить верхние границы для переменной z из (18) даёт максимально возможное (при $\theta\in(0;1)$ или при $\theta\in(1;+\infty)$, если $f(K_0)/(b\,C_0)<\frac{\theta}{\theta-1}$) значение интеграла $J_\theta\left(Z;\frac{1}{2}\right)$. Если его подставить в (15), то получится максимальное значение временного промежутка, на котором существует решение при рассматриваемых значениях параметров.

При $\theta=1$ имеем

$$J_1\left(Z;\frac{1}{2}\right)=\int_1^Z\left(f(K_0)-b\,C_0\,\ln z\right)dz=(Z-1)(f(K_0)+b\,C_0)-b\,C_0 Z\ln Z,$$

а длина максимального временного промежутка, на котором существует решение, равна (если $\alpha=1/2$, то $\varkappa=x_2$)

$$T=\frac{1}{\varkappa}\ln\left(1+\frac{2\varkappa}{a^2}J_1\left(\exp\left(\frac{f(K_0)}{bC_0}\right);\frac{1}{2}\right)\right)=$$
$$=\frac{1}{x_2}\ln\left(1+\frac{2x_2}{a^2}\left(bC_0\exp\left(\frac{f(K_0)}{bC_0}\right)-f(K_0)-bC_0\right)\right).$$

3. Случай монотонного роста функций $K(t)$, $C(t)$ на всём луче $[0,\ +\infty)$

В связи с тем, что в предыдущем параграфе (см. [3]) мы решили в квадратурах задачу Коши для более общих систем, нежели (2) с соотношение (7), а именно (10), мы там же предложили в случае (8) заменить систему уравнений (2) системой уравнений (10), отличающейся от (2) множителем b перед C в правой части первого уравнения, равным

$$b=1+\frac{\xi K_0}{\alpha C_0}, \quad (19)$$

а также заменой x_1 на $\frac{x_2}{\alpha}$ в том же уравнении. Такой выбор параметра b обусловлен тем, что из равенства (19) следует совпадение значений правых частей первых уравнений систем (2) и (10) в начальный момент времени. А поскольку вторые уравнения этих систем одинаковы, то мы имеем "близость" решений задачи Коши для систем (2) и (10) с совпадающими начальными условиями (4) при "относительно небольших" временах.

В этом параграфе мы изучаем вопрос о монотонности функций $C(t)$ и $K(t)$ – компонент решения задачи Коши (10), (4). Данный вопрос постоянно привлекает внимание исследователей моделей экономического роста. Обычно рассматривают модели, в которых "заложено" возрастание компонент решения $(K(t),\ C(t))$ в самом начале процесса, и выясняют, каких значений могут достичь, возрастая, эти функции, и сколь долго будет длиться их возрастание. Из (10), (4) видно, что положительность $\dot{C}(0)$ равносильна справедливости неравенства

$$\frac{\alpha}{\theta}\frac{f(K_0)}{K_0} > x_2, \tag{20}$$

Это условие в дальнейшем предполагается выполненным. Из (10), (4) также видно, что положительность $\dot{K}(0)$ равносильна справедливости неравенства

$$f(K_0) > bC_0 + x_3K_0,$$

а значит заведомо $f(K_0) > bC_0$. Обычно предполагают, что

$$f(K_0) \geqslant \frac{\theta}{\theta-1}bC_0, \tag{21}$$

(В частности, если $\theta = 2$, то $f(K_0) \geqslant 2bC_0$, а если $\theta = 3$, то $f(K_0) \geqslant 1.5bC_0$.)

Множитель $\frac{\theta}{\theta-1}$ (напомним, что у нас $\theta > 1$) появился в (21) не случайно. В случае, когда в (21) достигается равенство, мы получили следующий результат.

Теорема 2. *Пусть $\theta > 1$, выполняется условие* (20) *и равенство*

$$f(K_0) = \frac{\theta}{\theta-1}bC_0. \tag{22}$$

Тогда решение $(K(t),\ C(t))$ задачи Коши (10), (4) *существует на всём луче $[0,\ +\infty)$, обе компоненты его возрастают и стремятся к следующим пределам:*

$$\lim_{t\longrightarrow+\infty} K(t) = \left(\frac{a\alpha}{x_2\theta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad \lim_{t\longrightarrow+\infty} C(t) = \frac{\theta-1}{b}\left(\frac{a}{\theta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\left(\frac{\alpha}{x_2}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \tag{23}$$

На луче $0 \leqslant t \leqslant +\infty$ справедливы тождества

$$C(t) = \frac{\theta-1}{b\theta}f(K(t)), \quad \int\limits_{K_0}^{K(t)} \frac{du}{\theta^{-1}f(u) - (\frac{x_2}{\alpha})u} = t. \tag{24}$$

Теорема 2 была доказана в работе авторов [11].

Замечание 2. *Теорема 2 означает, что на фазовой плоскости (см. рис. 1) мы попадаем на сепаратрису — единственную интегральную кривую, обладающую свойством бесконечного монотонного возрастания сразу обеих функций $C(t)$ и $K(t)$ – компонент решения задачи Коши* (10), (4). *Таким образом мы попадаем в идеальную экономическую ситуацию, когда с ростом времени у нас растёт как потребление, так и капитал. Причём этот процесс продолжается до бесконечности и в итоге обе функциии стремятся к конечным значениям* (23) *с ростом времени до бесконечности.*

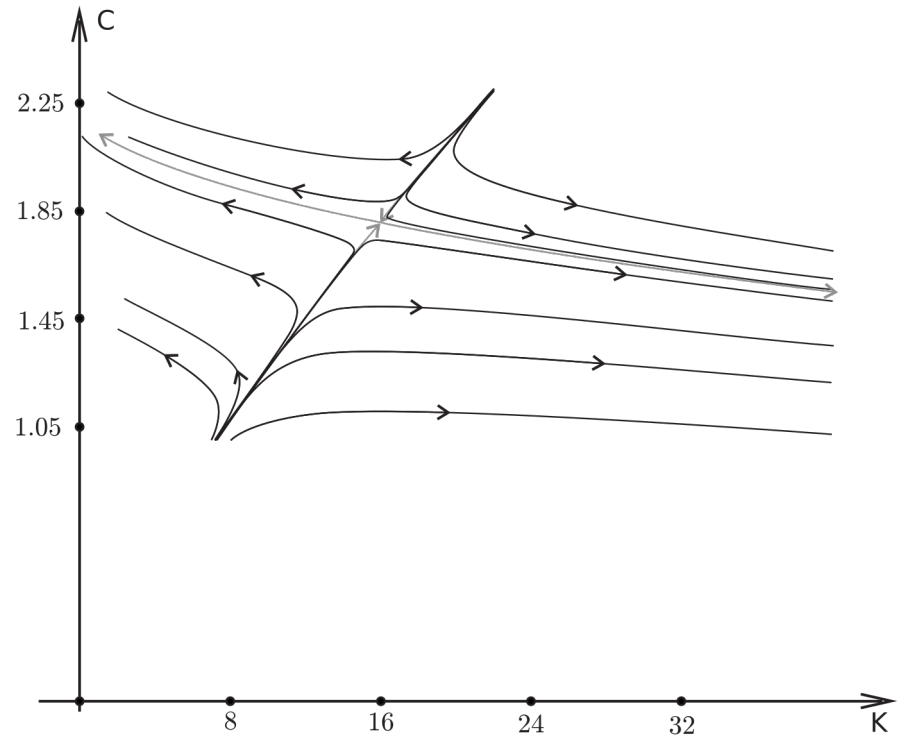


Рис. 1: Фазовый портрет. Построен для так называемых «эталонных значений»: $\alpha = 3/4$, $\theta = 3$, $n = 0.01$, $\delta = 0.05$, $x = 0.02$, $x_1 = 0.08$, $x_2 = 13/300$, $a = 26/75$.

Завершая параграф, выясним, во сколько раз увеличиваются значения $K(t)$ и $C(t)$ по сравнению с начальными значениями этих функций по завершении экономической деятельности (то есть при больших временах) при наличии специального соотношения (22) между K_0 и C_0 (случай, когда мы находимся на сепаратрисе). Ответ мы выразим через постоянную H, которую определим следующим образом

$$H = \frac{\alpha}{\theta}\frac{f(K_0)}{x_2 K_0}.$$

Напомним, что положительность $\dot{C}(0)$ равносильна неравенству $H > 1$.

Выше мы доказали, что предел при $t \longrightarrow +\infty$ функции $K(t)$ равен

$$K_+ = \left(\frac{a\alpha}{x_2\theta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = \left(\frac{\alpha a K_0^\alpha}{\theta x_2 K_0^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = \left(\frac{\alpha f(K_0)}{\theta x_2 K_0} K_0^{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = H^{\frac{1}{1-\alpha}} K_0. \tag{25}$$

Отношение предела $C_+ = \lim\limits_{t\longrightarrow+\infty} C(t)$ к C_0 проще всего выразить, воспользовавшись не равенством (23), а только что выведенным равенством (25), затем первым тождеством (24) и равенством (22), согласно которому

$$\begin{aligned} C_+ = \frac{\theta-1}{b\theta} f(K_+) = \frac{\theta-1}{b\theta} a (H^{\frac{1}{1-\alpha}} K_0)^\alpha = \frac{\theta-1}{b\theta} a K_0^\alpha H^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = \\ \frac{\theta-1}{b\theta} f(K_0) H^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = C_0 H^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}. \end{aligned} \tag{26}$$

Отсюда заключаем, что первоначальное значение $C(t)$ умножается в пределе на $H^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$, а первоначальное значение $K(t)$ умножается на $H^{\frac{1}{1-\alpha}}$.

4. Заключение

Обсудим содержание и итоги проведенного исследования. Вопрос о монотонности компонент решения задачи Коши для системы уравнений (2) является актуальным и обсуждается во многих работах. Однако, нам не известны какие-либо результаты теоретического характера на эту тему: в основном, в упомянутых статьях анализируется поведение приближённых решений системы, найденных численными методами для различных значений экономических параметров.

Основная трудность в этой тематике состоит в том, что компоненты решения системы дифференциальных уравнений (2), судя по всему, в общем случае не могут быть записаны в удобной для изучения их поведения аналитической форме. Тем не менее, мы обнаружили, что если в системе уравнений (2) постоянную x_1 заменить на $\frac{x_2}{\alpha}$, то полученная система допускает решение в квадратурах, но не только она! В [3] мы выяснили, что после такой замены константы x_1 решение в квадратурах допускает целый класс систем, в которых вычитаемое C в первом уравнении заменено на bC, где b – произвольная положительная постоянная. Это обстоятельство даёт возможность заменить первое уравнение системы (2) первым уравнением решаемой в квадратурах системы (10) (вторые уравнения систем (2) и (10) при этом совпадают), выбрав величину b по формуле (19), чтобы обеспечить равенство значений правых частей этих уравнений в начальный момент времени. Последнее должно повлечь за собой малое отличие решений задач Коши для систем (2) и (10) с одинаковыми условиями (4). Теоретическая оценка уклонения решения задачи Коши (2), (4) от решения задачи Коши (10), (4) нами была недавно получена, и соотвествующий результат готовится к публикации. Проведенные нами численные эксперименты показывают, что при наиболее востребованных в приложениях значениях экономических параметров α, θ, x_1, x_2 и соотношениях между $f(K_0)$ и C_0 относительное отличие решений упомянутых задач Коши на довольно больших промежутках времени лежит в пределах $1\% - 2\%$. Эта погрешность, как часто бывает в математическом моделировании, сопоставима с погрешностью, даваемой самой моделью в описании реально происходящего процесса.

В этой работе мы продемонстрировали эффективность перехода от системы (2) к близкой ей системе (10) в вопросе изучения монотонности решений задачи Коши. Пока мы рассмотрели случай $\theta > 1$. В этом случае нами обнаружено “критическое соотношение” (22) для начальных условий (4), при выполнении которого обе компоненты решения задачи Коши (10), (4) возрастают на всей положительной полуоси (естественно, при выполнении условия (20)). Кроме того, $K(t)$ и $C(t)$ в случае равенства (22) ограничены; их пределы на бесконечности нами найдены.

Таким образом, при произвольном значении параметра $\theta > 1$, мы нашли соотношение между $f(K_0)$ и C_0, выполнение которого влечёт за собой возрастание обеих компонент решения задачи Коши (10), (4). Подчеркнём, что сформулированные выше результаты получены благодаря найденному в [3] интегральному тождеству, в которое входит функция $C(t)$.

В дальнейшем мы планируем продолжить исследование монотонности компонент решения задачи Коши (10), (4), в частности, изучить поведение компонент $C(t)$, $K(t)$ не только в случае $f(K_0) > \theta(\theta-1)^{-1}$ в C_0, но и $f(K_0) < \theta(\theta-1)^{-1}$ в C_0. Заслуживает внимания также задача нахождения или оценки максимальных значений (или точных верхних граней) $K(t)$ и $C(t)$ на положительной полуоси. Пока это сделано только при выполнении равенства (22).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Acemoglu Daron. The Neoclassical Growth Model. Introduction to Modern Economic Growth // Princeton: Princeton University Press. 2009. pp. 287–326. ISBN 978-0-691-13292-1.

2. Bénassy Jean-Pascal. The Ramsey Model. Macroeconomic Theory // New York: Oxford University Press. 2011. P. 145–160. ISBN 978-0-19-538771-1.

3. Козко А.И., Лужина Л.М., Попов А.Ю., Чирский В.Г. Метод приближённого решения системы дифференциальных уравнений из модели Рамсея — Касса — Купманса, основанный на решении в квадратурах одного подкласса сходных систем // Чебышевский сборник. 2022;23(4):115-125. https://doi.org/10.22405/2226-8383-2022-23-4-115-125

4. Козко А.И., Лужина Л.М., Попов А.Ю., Чирский В.Г. Оптимальная экспонента в задаче Рамсея — Касса — Купманса с логарифмической функцией полезности // Чебышевский сборник. 2019;20(4):197-207. https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-20-4-197-207.

5. Козко А.И., Лужина Л.М., Попов А.Ю., Чирский В.Г. О задаче Рамсея — Касса — Купманса для потребительского выбора // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2020. Том 182. С. 39–44. DOI: 10.36535/0233-6723-2020-182-39-44

6. Козко А.И., Лужина Л.М., Попов А.Ю., Чирский В.Г. Модель задачи Рамсея — Касса — Купманса // Издательство: Московский педагогический государственный университет (Москва). Классическая и современная геометрия, материалы международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения В. Т. Базылева. под ред. А. В. Царева. Москва. 2019. С. 87-88.

7. Козко А.И., Лужина Л.М., Попов А.Ю., Чирский В.Г. Оценка необходимого начального экономического ресурса в задаче Рамсея — Касса — Купманса // Чебышевский сборник. 2019. Том 20(4). С. 188-196. https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-20-4-188-196.

8. Козко А.И., Лужина Л.М., Попов А.Ю., Чирский В.Г. Функция потребления в модели экономического роста Рамсея — Касса — Купманса в случае стационарности функции сбережения // Чебышевский сборник. 2022. Том 23(1). С. 118-129. https://doi.org/10.22405/2226-8383-2022-23-1-118-129.

9. Козко А.И., Лужина Л.М., Попов А.Ю., Чирский В.Г. Локализация показателя оптимальной экспоненты задачи Рамсея — Касса — Купманса стремящейся к бесконечности степенной функции полезности. Чебышевский сборник. 2021. Том 22(2). С.121-134. https://doi.org/10.22405/2226-8383-2021-22-2-121-134

10. Козко А.И., Лужина Л.М., Попов А.Ю., Чирский В.Г. Ограничения на значения функции потребления в модели экономического роста Рамсея — Касса — Купманса в случае стационарности функции сбережения. Чебышевский сборник. 2021. Том 22(2). С. 501-509. https://doi.org/10.22405/2226-8383-2021-22-2-501-509

11. Козко А.И., Лужина Л.М., Попов А.Ю., Чирский В.Г. Об идеальной экономической ситуации - росте капитала и функции потребления в некоторых моделях экономического роста. // Чебышевский сборник. 2023. Том 24(2). С. 256-265. https://doi.org/10.22405/2226-8383-2023-24-2-256-265

12. Rahul Giri. Growth Model with Endogenous Savings: Ramsey — Cass — Koopmans Model // http://ciep.itam.mx/~rahul.giri/uploads/1/1/3/6/113608/ramsey-cass-koopmans_model.pdf.

13. Барро Р. Дж., Сала-и-Мартин Х. Экономический рост // М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. 2010.

14. Groth Christian and Koch Karl-Josef and Steger Thomas Michael. Rethinking the Concept of Long-Run Economic Growth (April 2006) // CESifo Working Paper Series No. 1701. Available at SSRN: https://ssrn.com/abstract=899250.

15. Groth Christian, Koch Karl-Josef, Steger Thomas Michael. When Economic Growth is Less than Exponential // Economic Theory. Vol. 44, No. 2. 2010.

16. Groth C. Chapter 10: The Ramsey Model // Available at: http://web.econ.ku.dk/okocg/VV/VV-2010/Lecture%20notes/Ch7-2010-1.pdf, 2010.

17. Romer D. Advanced Macroeconomics. 3rd ed. // New York: McGraw-Hill/Irwin. 2006. P. 651.

18. Robert J. Barro. Ramsey Meets Laibson in the Neoclassical Growth Model // The Quarterly Journal of Economics, Oxford University Press. 1999. Vol. 114, No 4. P. 1125-1152.

19. King Robert G., and Sergio Rebelo. Transitional Dynamics and Economic Growth in the Neoclassical Model // American Economic Review. 1993. Vol. 83, September. P. 908-931.

20. Pierre-Olivier Gourinchas. Notes for Econ202A: The Ramsey — Cass — Koopmans Model // UC Berkeley Fall 2014 https://eml.berkeley.edu/~webfac/gourinchas/e202a_f14/Notes_Ramsey_Cass_Koopmans_pog.pdf

21. Эглит Я.Я., Эглите К.Я., Дудин В.С., Юрченко Е.А. Функция потребления и оценивание её параметров по экспереминтальным данным // Транспортное дело России. 2022. No. 2. С. 7-9. DOI: 10.52375/20728689_2022_2_7.

REFERENCES

1. Acemoglu, Daron. 2009, “The Neoclassical Growth Model. Introduction to Modern Economic Growth”, *Princeton: Princeton University Press.* pp. 287–326. ISBN 978-0-691-13292-1.

2. Bénassy, Jean-Pascal. 2011, “The Ramsey Model. Macroeconomic Theory”, *New York: Oxford University Press.* pp. 145–160. ISBN 978-0-19-538771-1.

3. Kozko A.I., Luzhina L.M., Popov, A.Yu., Chirskii, V.G. 2022, “The method of approximate solution of a system of differential equations from the Ramsey — Kass — Koopmans model, based on the solution in quadratures of one subclass of similar systems”, *Chebyshevskii Sbornik.* vol.23(4), September. pp. 115-125. (In Russ.) https://doi.org/10.22405/2226-8383-2022-23-4-115-125

4. Kozko, A.I., Luzhina, L.M., Popov, A.Yu., Chirskii, V.G. 2019, “Optimal exponent in the Ramsey — Kass — Koopmans problem with logarithmic utility function”, *Chebyshevskii Sbornik.* vol. 20(4), September. pp. 197-207. (In Russ.) https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-20-4-197-207

5. Kozko, A. I., Luzhina, L. M., Popov, A. Yu., Chirskii, V. G. 2020, “On the Ramsey — Kass — Koopmans problem for consumer choice”, *Results of science and technology. Modern mathematics and its applications. Thematic review.* vol. 182, September, pp. 39-44. (In Russ.) DOI: 10.36535/0233-6723-2020-182-39-44.

6. Kozko, A. I., Luzhina, L. M., Popov, A. Yu., Chirskii, V. G. 2019, The model of the problem Ramsey — Kass — Koopmans // *Moscow state pedagogical University (Moscow). Classical and modern geometry, materials of the international conference dedicated to the 100th anniversary of V. T. Bazylev. under the editorship of A. V. Tsarev. Moscow.* pp. 87-88.

7. Kozko, A.I., Luzhina, L.M., Popov, A.Yu., Chirskii, V.G. 2019, "Assessment of the necessary initial economic resource in the Ramsey — Kass — Koopmans problem", *Chebyshevskii Sbornik.* vol. 20(4), September, pp. 188-196. (In Russ.) https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-20-4-188-196.

8. Kozko, A.I., Luzhina, L.M., Popov, A.Yu., Chirskii, V.G. 2022, "The consumption function in the Ramsey — Kass — Koopmans economic growth model in the case of a stationary saving function", *Chebyshevskii Sbornik.* vol. 23(1), September, pp. 118-129. (In Russ.) https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-20-4-188-196.

9. Kozko, A.I., Luzhina, L.M., Popov, A.Yu., Chirskii, V.G. 2021, "Localization of the indicator optimal exponent of the Ramsey — Kass — Koopmans problem tending to infinity of the power utility function", *Chebyshevskii Sbornik.* 2021;22(2):121-134. (In Russ.) https://doi.org/10.22405/2226-8383-2021-22-2-121-134

10. Kozko, A.I., Luzhina, L.M., Popov, A.Yu., Chirskii, V.G. "Restrictions on the values of the consumption function in the Ramsey — Kass — Koopmans economic growth model in the case of a stationary saving function", *Chebyshevskii Sbornik.* 2021;22(2):501-509. (In Russ.) https://doi.org/10.22405/2226-8383-2021-22-2-501-509

11. Kozko, A.I., Luzhina, L.M., Popov, A.Yu., Chirskii, V.G. 2023, "About the ideal economic situation - the growth of capital and the function of consumption in some models of economic growth", *Chebyshevskii Sbornik.* vol. 24(2), pp. 256-265. (In Russ.) https://doi.org/10.22405/2226-8383-2023-24-2-256-265

12. Rahul, Giri. 2018, "Growth Model with Endogenous Savings: Ramsey — Cass — Koopmans Model", *http://ciep.itam.mx/˜rahul.giri/uploads/1/1/3/6/113608/ramsey-cass-koopmans_ model.pdf.*

13. Barro, Robert J., Sala-i-Martin, Xavier. 2003, "Economic growth (2nd ed.)", *Massachusetts: MIT Press*, ISBN 9780262025539.

14. Groth, Christian and Koch, Karl-Josef and Steger, Thomas Michael. 2006, "Rethinking the Concept of Long-Run Economic Growth (April 2006)", *CESifo Working Paper Series*, no. 1701. Available at SSRN: https://ssrn.com/abstract=899250.

15. Groth, Christian and Koch, Karl-Josef and Steger, Thomas Michael. 2010, "When Economic Growth is Less than Exponential", *Economic Theory*, vol. 44, no. 2, pp. 213-242.

16. Groth, C. 2010, "Chapter 10: The Ramsey Model", *Available at: http://web.econ.ku.dk/okocg/VV/VV-2010/Lecture%20notes/Ch7-2010-1.pdf.*

17. Romer, D. 2006, "Advanced Macroeconomics. 3rd ed", *New York: McGraw-Hill/Irwin*, pp. 651.

18. Robert J., Barro. 1999, "Ramsey Meets Laibson in the Neoclassical Growth Model", *The Quarterly Journal of Economics, Oxford University Press*, vol. 114, no. 4, pp. 1125-1152.

19. King Robert, G., and Sergio Rebelo. 1993, "Transitional Dynamics and Economic Growth in the Neoclassical Model", *American Economic Review.* vol. 83, September, pp. 908-931.

20. Pierre-Olivier, Gourinchas. 2014, “Notes for Econ202A: The Ramsey — Cass — Koopmans Model”, *UC Berkeley Fall*, https://eml.berkeley.edu/~webfac/gourinchas/e202a_f14/Notes_Ramsey_Cass_Koopmans_pog.pdf.

21. Eglit, Y., Eglite, K., Dudin, V., Yurchenko, E. 2022, “Consumption function and estimation of its parameters from experimental data”, *Transport business in Russia.* vol. 2, pp. 7-9.

Получено: 06.03.2024
Принято в печать: 04.09.2024

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 25. Выпуск 3.

УДК 517.957 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-201-212

Изоспектральные и частично-изоспектральные операторы Дирака на конечном отрезке

О. Э. Мирзаев, Т. Г. Хасанов

Мирзаев Олим Эркинович — кандидат физико-математических наук, Самаркандский государственный университет им. Ш. Рашидова (г. Самарканд, Узбекистан).
e-mail: olim-mirzaev@mail.ru
Хасанов Темур Гафурджанович — аспирант, Ургенчский государственный университет (г. Ургенч, Узбекистан).
e-mail: temur.xasanov.2018@mail.ru

Аннотация

В данной работе предлагается алгоритм построения изоспектрального и частично-изоспектрального операторов Дирака на конечном отрезке. Этот алгоритм применяется к процессу нахождения решений смешанных задач, поставленных для систем дифференциальных уравнений с частными производными гиперболического типа с переменными коэффициентами.

Ключевые слова: собственные значения, нормирующие константы, обратные задачи, интегральные уравнения Фредгольма второго рода, изоспектральные и частично-изоспектральные операторы Дирака.

Библиография: 25 названий.

Для цитирования:
Мирзаев, О. Э., Хасанов, Т. Г. Изоспектральные и частично-изоспектральные операторы Дирака на конечном отрезке // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 3, с. 201–212.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 25. No. 3.

UDC 517.957 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-201-212

Isospectral and partially isospectral Dirac operators on the finite interval

O. E. Mirzaev, T, G. Khasanov

Mirzaev Olim Erkinovich — candidate of physical and mathematical sciences, Samarkand State University named after Sharof Rashidov (Samarkand, Uzbekistan).
e-mail: olim-mirzaev@mail.ru
Khasanov Temur Gafurdjanovich — postgraduate student, Urgench State University (Urgench, Uzbekistan).
e-mail: temur.xasanov.2018@mail.ru

Abstract

In this paper, we propose an algorithm for constructing isospectral and partially isospectral Dirac operators on a finite interval. This algorithm is applied to the process of finding solutions to mixed problems posed for a system of partial differential equations of hyperbolic type with variable coefficients.

Keywords: eigenvalues, normalization constants, inverse problems, Fredholm integral equations of the second kind, isospectral and partially-isospectral Dirac operators.

Bibliography: 25 titles.

For citation:
Mirzaev, O. E., Khasanov, T. G. 2024, "Isospectral and partially isospectral Dirac operators on the finite interval" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 3, pp. 201–212.

1. Введение

Определение 1.1. Краевые задачи для систем уравнений Дирака

$$D^0y \equiv By' = \lambda y, \ \ (0 < x < \pi), y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}, \tag{1}$$

$$y_1(0) = 0, \ \ y_1(\pi) = 0 \tag{2}$$

и

$$D(p(x), q(x), \infty, \infty)y \equiv By' + Q(x)y = \lambda y, y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}, \tag{3}$$

$$y_1(0) = 0, \ \ y_1(\pi) = 0 \tag{4}$$

называются изоспектральными, если имеют одинаковые собственные значения, т.е. $\sigma(D(p(x), q(x), \infty, \infty) = \sigma(D^0) = \{n, \ n \in Z\}$.

Определение 1.2. Краевые задачи (1)-(2) и (3)-(4) называются частично-изоспектральными, если собственные значения удовлетворяют условиям

$$\lambda_0 \neq \lambda_0^0; \ \lambda_n = \lambda_n^0 \text{ при } n \in Z\backslash\{0\}.$$

Здесь

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \ \ Q(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix},$$

а $p(x), \ q(x) \in C^1[0, \pi]$ - вещественные непрерывно дифференцируемые функции, λ – комплексный параметр, λ_n^0 - собственные значения краевой задачи (1)-(2).

Настоящая работа посвящена обратной спектральной задаче об описании всех краевых задач системы дифференциальных уравнений Дирака на конечном отрезке с одним и тем же спектром. Такие краевые задачи называются изоспектральными и были изучены в работах [1-5]. М.Г.Гасымов, Т.Т.Джабиев (см.[6]) показали, что оператор Дирака на конечном отрезке определяется однозначно по его собственным значениям и последовательности нормирующих констант, а также ими найдены необходимые и достаточные условия восстановления краевых задач. М.Г.Гасымовом и Б.М.Левитаном (см.[7]) были найдены необходимые и достаточные условия восстановления оператора Дирака на полуоси по их спектральным функциям. При построении изоспектральных операторов Дирака на конечном отрезке с заданным спектром $\sigma(D(p(x), q(x), \infty, \infty)) = \{\lambda_n, n \in Z\}$ нами использован метод Гасымова-Левитана (см.[7]). Этот метод основан на восстановлении коэффициента оператора Дирака по спектральным данным с помощью интегрального уравнения Фредгольма второго рода с параметром.

Следует отметить, что изоспектральные операторы Штурма-Лиувилля на конечном отрезке изучались в работах [8-16]. Частично-изоспектральные операторы Штурма-Лиувилля на конечном отрезке изучались в работах [17-18]. Теория обратных спектральных задач для оператора Штурма-Лиувилля и их приложения более подробно изложена в работах [19-25].

Основным результатом настоящей работы является алгоритм восстановления семейства операторов Дирака $D = D(p(x), q(x), \infty, \infty)$ и $D = D(a)$ на конечном отрезке, спектры которых удовлетворяют соответственно условиями:

$\sigma(D(p(x), q(x), \infty, \infty)) = \{\lambda_n = n, \in Z\}$ и $\sigma(D(a)) = \{\lambda_0 = a,\ |a| < 1,\ \lambda_n = n,\ n \in Z\backslash\{0\}\}$.

2. Некоторые сведения об обратной задаче для оператора Дирака на конечном отрезке

Обозначим через $\varphi(x, \lambda) = (\varphi_1(x, \lambda), \varphi_2(x, \lambda))^T$ решение уравнения (3), удовлетворяющее начальным условиям:

$$\varphi_1(0, \lambda) = 0,\ \ \varphi_2(0, \lambda) = -1. \tag{5}$$

Известно [22], что решение $\varphi(x, \lambda)$ задачи (3) с условиями (5) существует, единственно и для каждого фиксированного $x \in [0, \pi]$ является целой вектор-функцией по λ. Кроме того, имеет место интегральное представление

$$\varphi(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \sin \lambda x \\ -\cos \lambda x \end{pmatrix} + \int_0^x K(x, t) \begin{pmatrix} \sin \lambda t \\ -\cos \lambda t \end{pmatrix} dt, \tag{6}$$

притом матрица-функция $K(x, t) = \|K_{ij}(x, t)\|_{i,j=1,2}$ является решением задачи

$$BK'_x(x, t) + K'_t(x, t)B = -Q(x)K(x, t), \tag{7}$$

$$BK(x, x) - K(x, x)B = -Q(x) \tag{8}$$

$$K_{11}(x, 0) = K_{21}(x, 0) = 0. \tag{9}$$

Очевидно, что вектор-функция $\varphi(x, \lambda) = (\varphi_1(x, \lambda), \varphi_2(x, \lambda))^T$ при любом λ удовлетворяет граничному условию $\varphi_1(0, \lambda) = 0$. Поэтому собственные значения λ_n, $n \in Z$ задачи (3) с условиями (4) суть корни уравнения

$$\Delta(\lambda) \equiv \varphi_1(\pi, \lambda) = 0. \tag{10}$$

Тогда $\varphi(x, \lambda_n) = (\varphi_1(x, \lambda_n), \varphi_2(x, \lambda_n))^T$, $n \in Z$ является собственной вектор-функцией задачи (3) с условиями (4).

Положим

$$\alpha_n = \int_0^\pi [\varphi_1^2(x, \lambda_n) + \varphi_2^2(x, \lambda_n)]dx,\ \ n \in Z. \tag{11}$$

Числа α_n, $n \in Z$ называются нормировочными числами краевой задачи (3)-(4). Набор чисел $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ будем называть в дальнейшем спектральными данными задачи (3)-(4).

Теорема 2.1. ([6]). Если $p(x)$ и $q(x)$ имеют производные k-порядка из $L^2[0, \pi]$, то для спектральных данных $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ задачи (3)-(4) справедливы равенства

$$\lambda_n = n + \frac{\beta_1}{n} + ... + \frac{\beta_{k-1}}{n^{k-1}} + \frac{\beta_{k,n}}{n^k}, \tag{12}$$

$$\alpha_n = \pi + \frac{c_1}{n} + ... + \frac{c_{k-1}}{n^{k-1}} + \frac{c_{k,n}}{n^k}. \tag{13}$$

где ряды

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\beta_{k,n}|^2 < \infty, \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_{k,n}|^2 < \infty$$

сходятся.

Следует отметить, что собственные вектор-функции $\varphi(x,\lambda_n) = (\varphi_1(x,\lambda_n), \varphi_2(x,\lambda_n))^T$, $n \in Z$ задачи (3)-(4), соответствующие различным собственным значениям ортогональны в гильбертовом пространстве квадратично суммируемых двух компонентных вектор-функций $L_2^2(0,\pi)$ и для произвольных вектор-функций $f(x) = (f_1(x), f_2(x))^T \in L_2^2[0,\pi]$ имеет место

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(x,\lambda_n)\{\frac{1}{\alpha_n}\int_0^{\pi} \varphi^T(t,\lambda_n) f(t)dt\}.$$

Отсюда получим символическое равенство:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n}\varphi(x,\lambda_n)\varphi^T(t,\lambda_n) = I\delta(x-t), \tag{14}$$

где I-единичная матрица, $\delta(x)$ - дельта функция Дирака. В частности, при $p(x) \equiv 0,\ q(x) \equiv 0$, имеем

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi}\begin{pmatrix} \sin nx \\ -\cos nx \end{pmatrix}(\sin nt, -\cos nt) = I\delta(x-t). \tag{15}$$

Теорема 2.2. ([6]). Коэффициенты $p(x)$ и $q(x)$ краевой задачи (3)-(4) определяются однозначно по спектральным данным $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$.

Лемма 2.1. Имеет место тождество

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n}\varphi(x,\lambda_n)(\sin\lambda_n t, -\cos\lambda_n t) = 0, \ \ 0 < t < x < \pi. \tag{16}$$

Теорема 2.3. ([6]). Ядро $K(x,t) = \|K_{ij}(x,t)\|_{i,j=1,2}$ оператора преобразования (6), удовлетворяет линейному интегральному уравнению

$$K(x,t) + F(x,t) + \int_0^x K(x,s)F(s,t)ds = 0, \ \ (0 < t \leqslant x < \pi), \tag{17}$$

где

$$F(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{\alpha_n}\begin{pmatrix} \sin\lambda_n x \\ -\cos\lambda_n x \end{pmatrix}(\sin\lambda_n t, -\cos\lambda_n t) - \frac{1}{\pi}\begin{pmatrix} \sin nx \\ -\cos nx \end{pmatrix}(\sin nt, -\cos nt)\right\}. \tag{18}$$

Теорема 2.4. ([6]). Для того чтобы последовательность вещественных чисел $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, $\alpha_n > 0$, $n \in Z$ была спектральными данными некоторой краевой задачи вида (3)-(4) с матричной функцией вида

$$Q(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix},$$

необходимо и достаточно, чтобы для λ_n, $n \in Z$ и α_n, $n \in Z$ выполнялись асимптотические формулы (12) и (13), где $p(x)$ и $q(x)$ имеют производные k-го порядка из $L^2(0,\pi)$.

Итак, пусть $\{\lambda_n, a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, $a_n > 0$, $n \in Z$ удовлетворяет условиям (12) и (13). Построим матричную функцию $F(x,t)$ по формуле (18) и рассмотрим интегральное уравнение (17) относительно $K(x,t) = \|K_{ij}(x,t)\|_{i,j=1,2}$. Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема 2.5. ([6]). При каждом фиксированном $x \in (0,\pi)$ интегральное уравнение (17) имеет единственное решение $K(x,t) = \|K_{ij}(x,t)\|_{i,j=1,2}$.

Теперь, решая интегральное уравнение (17), находим матрицу-функций $K(x,t) = \|K_{ij}(x,t)\|_{i,j=1,2}$. Далее определим вектор-функцию $\varphi(x,\lambda) = (\varphi_1(x,\lambda), \varphi_2(x,\lambda))^T$ по формуле (6). Тогда нетрудно показать, что вектор-функция $\varphi(x,\lambda) = (\varphi_1(x,\lambda), \varphi_2(x,\lambda))^T$ удовлетворяет уравнению

$$B\varphi' + Q(x)\varphi = \lambda\varphi, \;\; Q(x) = K(x,x)B - BK(x,x)$$

и начальным условиям $\varphi_1(0,\lambda) = 0, \;\; \varphi_2(0,\lambda) = -1$.

3. Алгоритм восстановления изоспектральных и частично-изоспектральных краевых задач

Основной результат настоящей работы содержится в следующей теореме.

Теорема 3.1. Пусть пара $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, $\alpha_n > 0$, $n \in Z$ последовательностей действительных чисел удовлетворяет следующим условиям

$$\lambda_n = n, \;\; n \in Z, \;\; \frac{1}{\alpha_n} = \frac{1}{\pi} + \frac{\gamma_n}{n^2+1}, \;\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_n}{n^2+1} < \infty, \;\; \gamma_n > 0, \;\; n \in Z. \tag{19}$$

Тогда эта пара является спектральными данными граничной задачи, поставленной для оператора Дирака вида $D(p(x,...,\gamma_{-n},...,\gamma_0,...,\gamma_n,...), q(x,...,\gamma_{-n},...,\gamma_0,...,\gamma_n,...), \infty, \infty) = D(...,\gamma_{-n},...,\gamma_0,...,\gamma_n,...)$.

Доказательство. Легко заметить, что последовательность $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, $\alpha_n > 0$, $n \in Z$, определенная формулами (19), удовлетворяет условиями (12)-(13).

Для этого определим матрицу-функций $F(x,t)$ по формулам (18) и (19):

$$F(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\gamma_n}{n^2+1} \begin{pmatrix} \sin nx \\ -\cos nx \end{pmatrix} (\sin nt, -\cos nt) \right\}. \tag{20}$$

Подставляя (20) в интегральное уравнение (17) получим

$$K(x,t) = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_n}{n^2+1} \varphi(x,n)(\sin nt, -\cos nt), \tag{21}$$

где

$$\varphi(x,n) = \begin{pmatrix} \sin nx \\ -\cos nx \end{pmatrix} + \int_0^x K(x,s) \begin{pmatrix} \sin ns \\ -\cos ns \end{pmatrix} ds. \tag{22}$$

Известно ([6], [22]), что вектор-функция $\varphi(x,\lambda)$ определенная по формуле (6) удовлетворяет дифференциальному уравнению (3), и начальным условиям $\varphi_1(0,\lambda) = 0$, $\varphi_2(0,\lambda) = -1$, где коэффициенты определяются по формулами

$$\begin{aligned} &p(x,...,\gamma_{-n},...,\gamma_0,..,\gamma_n,...) = \textstyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_n}{n^2+1}[\varphi_2(x,n)\sin nt - \varphi_1(x,n)\cos nt], \\ &q(x,...,\gamma_{-n},...,\gamma_0,...,\gamma_n,...) = -\textstyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_n}{n^2+1}[\varphi_1(x,n)\sin nt + \varphi_2(x,n)\cos nt]. \end{aligned} \tag{23}$$

Далее подставляя выражение (21) в формулу (22), имеем

$$\varphi(x,n) = \begin{pmatrix} \sin nx \\ -\cos nx \end{pmatrix} - \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_p}{p^2+1} \varphi(x,p) \int_0^x (\sin ps, -\cos ps) \begin{pmatrix} \sin ns \\ -\cos ns \end{pmatrix} ds. \tag{24}$$

Отсюда, получим собственную вектор-функцию

$$\varphi(x,n)=\begin{pmatrix} \frac{\sin nx}{1+\frac{\gamma_n}{n^2+1}x} \\ -\frac{\cos nx}{1+\frac{\gamma_n}{n^2+1}x} \end{pmatrix}, n\in Z,$$

соответствующую собственным значениям $\lambda_n=n,\ n\in Z$, т.к.

$$\int_0^x(\sin ps,-\cos ps)\begin{pmatrix}\sin ns\\ -\cos ns\end{pmatrix}ds=\begin{cases} x,\ p=n,\\ 0,\ \ p\neq n.\end{cases}$$

Легко проверяются выполнение граничных условий (4), т.е. $\varphi_1(0,\lambda_n)=0,\ \varphi_1(\pi,\lambda_n)=0,$ $\lambda_n=n,\ n\in Z$.

Таким образом, удалось найти все коэффициенты семейства изоспектрального оператора Дирака вида $D(...,\gamma_{-n},...,\gamma_0,...,\gamma_n,...)$. В частности, если $\gamma_0>0,\ \gamma_n=0,\ n\in Z\backslash\{0\}$, то имеем следующую изоспектральную краевую задачу:

$$D(\gamma_0)y\equiv\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}y'+\begin{pmatrix}0&\frac{\gamma_0}{1+\gamma_0x}\\ \frac{\gamma_0}{1+\gamma_0x}&0\end{pmatrix}y=\lambda y,\ y(x)=\begin{pmatrix}y_1(x)\\y_2(x)\end{pmatrix},\ 0<x<\pi,$$
$$y_1(0)=0,\ y_1(\pi)=0. \tag{25}$$

Все собственные значения краевой задачи $D(\gamma_0)$ состоят из заданных чисел $\lambda_n=n,\ n\in Z$, а соответствующие им собственные функции находятся по формулам

$$\varphi_1(x,0)=0,\ \varphi_2(x,0)=-1+\ln(1+\gamma_0x),$$

$$\varphi_1(x,n)=\sin nx,\ \varphi_2(x,n)=-\cos nx+\frac{\gamma_0\sin nx}{n(1+\gamma_0x)},n\in Z\backslash\{0\}.$$

Теперь с помощью изоспектральных граничных задач (25) построим семейство смешанной задачи:

$$iu_t=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}u_x+\begin{pmatrix}0&\frac{\gamma_0}{1+\gamma_0x}\\ \frac{\gamma_0}{1+\gamma_0x}&0\end{pmatrix}u,0<x<\pi,\ \gamma_0>0,$$
$$u(x,0)=f(x),\ f(x)=(f_1(x),f_2(x))^T,\ u_1(0,t)=0,\ u_1(\pi,t)=0,\ u(x,t)=\begin{pmatrix}u_1(x,t)\\u_2(x,t)\end{pmatrix}. \tag{26}$$

Используя теорему 3.1, получим:

Следствие 3.1. Решение смешанной задачи, поставленной для системы уравнения гиперболического типа с переменными коэффициентами (26), выглядит следующим образом:

$$u(x,t)=B_0\begin{pmatrix}0\\-1+\ln(1+\gamma_0x)\end{pmatrix}+\sum_{n=-\infty,n\neq0}^{\infty}B_ne^{-int}\begin{pmatrix}\sin nx\\-\cos nx+\frac{\gamma_0\sin nx}{n(1+\gamma_0x)}\end{pmatrix},$$

здесь $B_0=\int_0^\pi(-1+\ln(1+\gamma_0x))f_2(x)dx$, $B_n=\int_0^\pi(y_{1n}(x)f_1(x)+y_{2n}(x)f_2(x))dx, n\in Z\backslash\{0\}$.

Теорема 3.2. Пусть пара $\{\lambda_n,\alpha_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, $\alpha_n>0$, $n\in Z$ последовательностей действительных чисел удовлетворяет следующим условиям

$$\lambda_0=a,\ |a|<1,\ \ \lambda_n=n,\ \ n\in Z\backslash\{0\},\ \alpha_n=\pi,\ n\in Z. \tag{27}$$

Тогда эта пара является спектральными данными граничной задачи, поставленный для оператора Дирака вида $D(p(x,a),q(x,a),\infty,\infty)=D(a)$.

Доказательство. Легко заметить, что последовательность $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, $\alpha_n > 0$, $n \in Z$, определенная формулами (19), удовлетворяет условиями (12)-(13).

Для этого определим матричную функцию $F(x,t)$ по формулам (18) и (27):

$$F(x,t) = \frac{1}{\pi}\begin{pmatrix} \sin ax \\ -\cos ax \end{pmatrix}(\sin at, -\cos at) - \frac{1}{\pi}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}(0,-1). \tag{28}$$

Подставляя (28) в интегральное уравнение (17) получим

$$K(x,t) = -\frac{1}{\pi}g(x)(\sin at, -\cos at) + \frac{1}{\pi}f(x)(0,-1), \tag{29}$$

где

$$f(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \int_0^x K(x,s)\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} ds, \tag{30}$$

$$g(x) = \begin{pmatrix} \sin ax \\ -\cos ax \end{pmatrix} + \int_0^x K(x,s)\begin{pmatrix} \sin as \\ -\cos as \end{pmatrix} ds. \tag{31}$$

Подставляя выражение (28) в формулы (30) и (31), имеем

$$f(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{\sin ax}{a\pi}g(x) + \frac{x}{\pi}f(x), \tag{32}$$

$$g(x) = \begin{pmatrix} \sin ax \\ -\cos ax \end{pmatrix} - \frac{x}{\pi}g(x) + \frac{\sin ax}{a\pi}f(x), \tag{33}$$

и

$$g(x) = \begin{pmatrix} \frac{a^2\pi(\pi-x)\sin ax}{a^2(\pi^2-x^2)+\sin^2 ax} \\ \frac{-a\pi[a(\pi-x)\cos ax+\sin ax]}{a^2(\pi^2-x^2)+\sin^2 ax} \end{pmatrix}, \quad f(x) = \begin{pmatrix} \frac{a\pi\sin^2 ax}{a^2(\pi^2-x^2)+\sin^2 ax} \\ \frac{-a\pi\left[a(\pi-x)-\frac{\sin 2ax}{2}\right]}{a^2(\pi^2-x^2)+\sin^2 ax} \end{pmatrix}. \tag{34}$$

Далее, учитывая формулы (29), (34) и (35), находим

$$K(x,t) = \begin{pmatrix} -\frac{a^2(\pi-x)\sin ax\sin at}{a^2(\pi^2-x^2)+\sin^2 ax} & \frac{a^2(\pi-x)\sin ax\cos at - a\sin^2 ax}{a^2(\pi^2-x^2)+\sin^2 ax} \\ \frac{a[a(\pi-x)\cos ax+\sin ax]\sin at}{a^2(\pi^2-x^2)+\sin^2 ax} & \frac{-a[a(\pi-x)\cos ax+\sin ax]\cos at+a^2(\pi-x)-\frac{a\sin 2ax}{2}}{a^2(\pi^2-x^2)+\sin^2 ax} \end{pmatrix}$$

$$K_{11}(x,x) = -\frac{a^2(\pi-x)\sin^2 ax}{a^2(\pi^2-x^2)+\sin^2 ax}, \tag{35}$$

$$K_{12}(x,x) = \frac{a^2(\pi-x)\frac{\sin 2ax}{2} - a\sin^2 ax}{a^2(\pi^2-x^2)+\sin^2 ax}, \tag{36}$$

$$K_{21}(x,x) = \frac{a^2(\pi-x)\frac{\sin 2ax}{2} + a\sin^2 ax}{a^2(\pi^2-x^2)+\sin^2 ax}, \tag{37}$$

$$K_{22}(x,x) = \frac{a^2(\pi-x)\sin^2 ax - a\sin 2ax}{a^2(\pi^2-x^2)+\sin^2 ax}. \tag{38}$$

Далее, учитывая формулы (8), (35), (36), (37) и (38) , находим

$$p(x,a) = -(K_{12}+K_{21}) = \frac{a^2(\pi-x)\sin 2ax}{a^2(\pi^2-x^2)+\sin^2 ax},$$

$$q(x,a) = K_{11} - K_{22} = \frac{2a^2(\pi-x)\sin^2 ax + a\sin 2ax}{a^2(\pi^2-x^2)+\sin^2 ax}.$$

Таким образом, удалось найти все коэффициенты семейства частично-изоспектрального оператора Дирака вида $D(a)$:

$$D(a)\,y \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} y' + \begin{pmatrix} \frac{a^2(\pi-x)\sin 2ax}{a^2(\pi^2-x^2)+\sin^2 ax} & \frac{2a^2(\pi-x)\sin^2 ax+a\sin 2ax}{a^2(\pi^2-x^2)+\sin^2 ax} \\ \frac{2a^2(\pi-x)\sin^2 ax+a\sin 2ax}{a^2(\pi^2-x^2)+\sin^2 ax} & -\frac{a^2(\pi-x)\sin 2ax}{a^2(\pi^2-x^2)+\sin^2 ax} \end{pmatrix} y = \lambda y,\ 0 < x < \pi,$$
$$y_1(0) = 0,\ y_1(\pi) = 0,\ y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}. \tag{39}$$

Все собственные значения краевой задачи $D(a)$ состоят из заданных чисел $\lambda_0 = a$, $|a| < 1, \lambda_n = n,\ n \in Z\backslash\{0\}$, а соответствующие им собственные функции находятся по формулам

$$\varphi_1(x,\lambda_0) = \frac{a^2\left(\pi^2-x^2\right)\sin ax - a^2x(\pi-x)\sin ax + 2\sin^3 ax}{a^2(\pi^2-x^2)+\sin^2 ax},$$

$$\varphi_2(x,\lambda_0) = \frac{ax\sin ax - a^2\left(\pi^2-x^2\right)\cos ax + a(\pi-x)[ax+\sin ax]}{a^2(\pi^2-x^2)+\sin^2 ax},$$

$$\varphi_1(x,\lambda_n) = \frac{4(a-n)^2\sin^2 ax\sin nx - 4a^2n(\pi-x)\sin ax\sin(a-n)x}{n(a-n)\left[a^2(\pi^2-x^2)+\sin^2 ax\right]}, n \in Z\backslash\{0\},$$

$$\varphi_2(x,\lambda_n) = -\cos nx - \frac{a\sin(a-n)x\left[a(x-\pi)\cos ax+\sin ax\right]}{(a-n)\left[a^2(\pi^2-x^2)+\sin^2 ax\right]} +$$
$$+\frac{\sin nx\left[-a(x-\pi)\cos ax+\frac{\sin ax}{2}\right]}{n\left[a^2(\pi^2-x^2)+\sin^2 ax\right]}, n \in Z\backslash\{0\}.$$

Теперь посмотрим следующие смешанную задачу:

$$iu_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} u_x + \begin{pmatrix} \frac{a^2(\pi-x)\sin 2ax}{a^2(\pi^2-x^2)+\sin^2 ax} & \frac{2a^2(\pi-x)\sin^2 ax+a\sin 2ax}{a^2(\pi^2-x^2)+\sin^2 ax} \\ \frac{2a^2(\pi-x)\sin^2 ax+a\sin 2ax}{a^2(\pi^2-x^2)+\sin^2 ax} & -\frac{a^2(\pi-x)\sin 2ax}{a^2(\pi^2-x^2)+\sin^2 ax} \end{pmatrix} u, 0 < x < \pi,\ |a| < 1,$$
$$u(x,0) = f(x),\ f(x) = (f_1(x), f_2(x))^T,\ u_1(0,t) = 0,\ u_1(\pi,t) = 0,\ u(x,t) = \begin{pmatrix} u_1(x,t) \\ u_2(x,t) \end{pmatrix}. \tag{40}$$

Используя теорему 3.2, получим:

Следствие 3.2. Решение смешанной задачи поставленной для системы уравнения гиперболического типа с переменными коэффициентами (40) выглядит следующим образом:

$$u(x,t) = B_0e^{-iat}y_0(x) + \sum_{n=-\infty,\, n\neq 0}^{\infty} B_ne^{-int}y_n(x).$$

Здесь,

$$y_{10}(x) = \frac{a^2\left(\pi^2-x^2\right)\sin ax - a^2x(\pi-x)\sin ax + 2\sin^3 ax}{a^2(\pi^2-x^2)+\sin^2 ax},$$

$$y_{20}(x) = \frac{ax\sin ax - a^2\left(\pi^2-x^2\right)\cos ax + a(\pi-x)[ax+\sin ax]}{a^2(\pi^2-x^2)+\sin^2 ax},$$

$$y_{1n}(x) = \sin nx - \frac{a\sin ax}{a^2(\pi^2-x^2)+\sin^2 ax}\left[\frac{a(\pi-x)\sin(a-n)x}{(a-n)} - \frac{\sin nx\sin ax}{n}\right], n \in Z\backslash\{0\},$$

$$y_{2n}(x) = -\cos nx - \frac{a\sin(a-n)x\left[a(x-\pi)\cos ax+\sin ax\right]}{(a-n)\left[a^2(\pi^2-x^2)+\sin^2 ax\right]} +$$

$$+\frac{\sin nx\left[-a\left(x-\pi\right)\cos ax+\frac{\sin ax}{2}\right]}{n\left[a^2\left(\pi^2-x^2\right)+\sin^2 ax\right]}, n\in Z\backslash\{0\},$$

$$B_0=\int_0^\pi y_{20}(x)f_2(x)dx,\ B_n=\int_0^\pi (y_{1n}(x)f_1(x)+y_{2n}(x)f_2(x))dx, n\in Z\backslash\{0\}.$$

Таким образом, в этой статье построено семейство изоспектрального и частично-изоспектрального оператора Дирака, $D(...,\gamma_{-n},...,\gamma_0,...,\gamma_n,...)$ и $D(a)$ собственные значения которых совпадают соответсвенно с заданными числами:

$$\sigma(D(...,\gamma_{-n},...,\gamma_0,..,\gamma_n,...))=\{\lambda_n=n,\in Z\}$$

и

$$\sigma(D(a))=\{\lambda_0=a,\ |a|<1,\ \lambda_n=n,\ n\in Z\backslash\{0\}\}.$$

С помощью изоспектрального и частично-изоспектрального оператора Дирака найдено решение смешанных задач, поставленных для системы дифференциальных уравнений с частными производными гиперболического типа с переменными коэффициентами.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арутюнян, Т. Н. Изоспектральные операторы Дирака // Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, 29, № 2, 1994, с.4-14.
2. Albeverio, S., Hryniv, R., Mykytyuk, Ya. Inverse spectral problems for Dirac operators with summable potentials //Russian Journal of Math Physics, 12(2005), 406-423.
3. Etibar, S., Panakhov, Tuba Gulsen. Isospectrality problem for Dirac system // National academy of sciences of Azerbaijan, v.40, Special issue, 2014, p.386-392.
4. Ashrafyan, Yu. A., Harutyunyan, T. N. Dirac operator with linear potential and its perturbations // Mathematical Inverse Problems, Vol.3, No.1 (2016), 12-25.
5. Ashrafyan, Y., Harutyunyan, T. Isospectral Dirac operators // Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations 2017, № 4, 1-9.
6. Гасымов, М. Г., Джабиев, Т. Т. Определение системы дифференциальных уравнений Дирака по двум спектрам // Труды летней школы по спектральной теории операторов и представлению теории групп – Баку: Элм, 1975, с. 46–71.
7. Гасымов, М. Г., Левитан, Б. М. Обратная задача для системы Дирака // ДАН СССР, -1966. –т.167, № 5. –с.967-970.
8. Poschel, J., Trubowitz, E. Inverse spectral theory // Academic Press, New York, 1987.
9. Jodeit, M., Levitan, B. M. The isospectrality problem for the classical Sturm-Liouville equation // Advances in differential equations. 1997, v.2, № 2, p. 297-318.
10. Jodeit, M., Levitan, B. M.. The izospectrality problem fo some vector boundary problems // Russian journal of mathematical physics, vol.6, No.4, 1999, pp.375-393.
11. Ashrafyan, Y. A., Harutyunyan, T. N. Inverse Sturm-Liouville problems with fixed boundary conditions // Electronic Journal of differential equations, (2015), v. 2015, № 27, p.1-8.
12. Khasanov, A. B. Eigenvalues of the Dirac operator in the continuous spectrum // Theoretical and Mathematical Physics, 1994, 99(1), 396-401. https://doi.org/10.1007/BF01018793

13. Mirzaev, O. E., Khasanov, A. B. On families of isospectral Sturm–Liouville boundary value problems //Ufa Math. J. 12:2 (2020),28–34. https://doi.org/10.13108/2020-12-2-28

14. Мирзаев, О. Э., Хасанов, А. Б. Изоспектралные операторы Штурма-Лиувилля на конечном отрезке // ДАН РУз. 2020, № 3, с. 3-9.

15. Мирзаев, О. Э., Муродов, Ф. М. Изоспектралные операторы Штурма-Лиувилля на конечном отрезке //Научный журнал Самаркандского университета, 2020, № 3(121), с. 50-55. https://doi.org/10.59251/2181-1296.v3.1211.1083

16. Мирзаев, О. Э. Изоспектралные операторы Штурма-Лиувилля на конечном отрезке //Научный журнал Самаркандского университета, 2020, № 5(123), с. 60-64. https://doi.org/10.59251/2181-1296.v5.1231.1436

17. Мирзаев, О. Э. Частично-изоспектральные операторы Штурма-Лиувилля на конечном отрезке // Чебышевский сборник. 2023, Т.24, Выпуск 1(87), с. 104-113. https://doi.org/10.22405/2226-8383-2023-24-1-104-113

18. Мирзаев, О. Э., Сувонова, М. Частично-изоспектральные операторы Штурма-Лиувилля на конечном отрезке // Математические методы и модели в высокотехнологичном производстве. II Международный форум. 9 ноября 2022 г. Сборник тезисов докладов. с. 23-27.

19. Амбарцумян, В. А. Über eine Frage Eigenwerttheori. // Zeitschr, für Physik, 53,1929, pp.690-695.

20. Алимов, Ш. А. О работах А. Н. Тихонова по обратным задачи для уравнения Штурма-Лиувилля // УМН, 6(192), 1976, с. 84-88.

21. Гельфанд, И. М., Левитан, Б. М. Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции // Изв. АН СССР, сер. матем. 1951, т. 15, № 4, с. 309-360.

22. Левитан, Б. М., Саргсян, И. С. Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака // М.: Наука, 1988.

23. Марченко, В. А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения // Киев «Наукова Думка» 1977.

24. Савчук, А. М., Шкаликов, А. А. О свойствах отображений, связанных с обратными задачами Штурма-Лиувилля // Тр. МИАИ, 2008, Т. 260., с. 227-247. https://doi.org/10.1134/S0081543808010161

25. Юрко, В. А. Введение в теорию обратных спектральных задач // М.: Физматлит, 2007, 284 с.

REFERENCES

1. Arutjunjan, T. N. 1994, “Isospectral Dirac operators”, *Proceedings of the National Academy of Sciences of Armenia. Mathematics*, 29, № 2, pp. 4–14.

2. Albeverio, S, Hryniv, R., Mykytyuk, Ya. 2005, “Inverse spectral problems for Dirac operators with summable potentials”, *Russian Journal of Math Physics*, 12, pp. 406-423.

3. Etibar S. Panakhov, Tuba Gulsen. 2014, “Isospectrality problem for Dirac system”, *National academy of sciences of Azerbaijan*, Vol.40, Special issue, pp. 386–392.

4. Ashrafyan, Yu. A., Harutyunyan, T. N. 2016, "Dirac operator with linear potential and its perturbations", *Mathematical Inverse Problems*, Vol.3, No.1, pp. 12–25.

5. Ashrafyan, Y., Harutyunyan, T. 2017, "Isospectral Dirac operators", *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, № 4, pp. 1–9.

6. Gasymov, M. G., Dzhabiev, T. T. 1975, "Determination of the system of Dirac differential equations from two spectra", *Proceedings of the Summer School on the Spectral Theory of Operators and the Representation of Group Theory - Baku: Elm*, pp. 46–71.

7. Gasymov, M. G., Levitan, B. M. 1966, "Inverse problem for the Dirac system", *DAN USSR*, v.167, № . 5. pp.967–970.

8. Poschel, J., Trubowitz, E. 1987, "Inverse spectral theory", *Academic Press*, New York.

9. Jodeit, M., Levitan, B. M. 1997, "The isospectrality problem for the classical Sturm-Liouville equation", *Advances in differential equations*, v.2, № 2, pp. 297–318.

10. Jodeit, M., Levitan, B. M. 1999, "The izospectrality problem for some vector boundary problems", *Russian journal of mathematical physics*, vol.6, No.4, pp. 375–393.

11. Ashrafyan, Y. A., Harutyunyan, T. N. 2015, "Inverse Sturm-Liouville problems with fixed boundary conditions", *Electronic Journal of differential equations*, v. 2015, № 27, pp. 1–8.

12. Khasanov, A. B. 1994, "Eigenvalues of the Dirac operator in the continuous spectrum", *Theoretical and Mathematical Physics*, 99(1), pp. 396–401. https://doi.org/10.1007/BF01018793

13. Mirzaev, O. E. Khasanov, A. B. 2020, "On families of isospectral Sturm–Liouville boundary value problems", *Ufa Mathematical Journal*,12:2, pp. 28–34. https://doi.org/10.13108/2020-12-2-28

14. Mirzaev, O. E., Hasanov, A. B. 2020, "Isospectral Sturm-Liouville operators on the finite interval", *DAN RUz.*, № 3, pp. 3–9.

15. Mirzaev, O. E., Murodov, F. M. 2020, "Isospectral Sturm-Liouville operators on the finite interval", *SCIENTIFIC JOURNAL Samarkand State University*, 3(121), pp. 50–55. https://doi.org/10.59251/2181-1296.v3.1211.1083

16. Mirzaev, O. E. 2020, "Isospectral Sturm-Liouville operators on the finite interval", *SCIENTIFIC JOURNAL Samarkand State University*, 5(123), pp. 60–64. https://doi.org/10.59251/2181-1296.v5.1231.1436

17. Mirzaev, O. E. 2023, "Partially-isospectral Sturm-Liouville operators on the finite interval", *Chebyshevskii Sbornik*, Vol. 24, Iss. 1(87), pp. 104–113. https://doi.org/10.22405/2226-8383-2023-24-1-104-113

18. Mirzaev, O. E., Suvonova, M. 2022, "Partially-isospectral Sturm-Liouville operators on the finite interval", *Mathematical methods and models in high-tech production. II International Forum.* November 9, 2022, pp. 23–27.

19. Ambarzumjan, W. A. 1929, "On a Problem of the Theory of Eigenvalues", *Zeitschr, für Physik.* 53, pp. 690–695.

20. Alimov, Sh. A. 1976, "The work of A. N. Tikhonov on inverse problems for the Sturm-Liouville equation", *UMH.* 31:6(192), pp. 84–88. *[Russian Math. Surveys, 31:6, pp. 87–92].*

21. Gelfand, I. M., Levitan, B. M. 1951, “On the determination of a differential equation from its spectral function”, *Izv. Academy of Sciences of the USSR. Ser. math.* 15 :4 , pp. 309–360.

22. Levitan, B. M., Sargsyan, I. S. 1988, “Sturm-Liouville and Dirac operators”, *Nauka. Moscow, [Kluwer Acad. Publ. Dordrecht (1990).]*

23. Marchenko, V. A. “Sturm-Liouville Operators and Applications”, *Kiev “Naukova Dumka”* 1977. *[Birkhäuser Verlag (1986).]*

24. Savchuk, A. M., Shkalikov, A. A. 2008, “On the properties of maps connected with inverse Sturm-Liouville problems”, *Trudy MIAN.* 260, pp. 227–247 . *[Proc. Steklov Inst. Math. 260 , pp. 218–237 (2008).]* https://doi.org/10.1134/S0081543808010161

25. Yurko, V. A. 2007, “Introduction into the theory of inverse spectral problems”, *M.: Fizmatlit*, 284 p.

Получено: 08.01.2024
Принято в печать: 04.09.2024

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 25. Выпуск 3.

УДК 517.44 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-213-225

Полиномы Аппеля, ассоциированные с преобразованиями Фурье, и их применение для дифференциальных уравнений

А.И. Нижников, О.Э. Яремко, Н.Н. Яремко

Нижников Александр Иванович — Московский педагогический государственный университет (г. Москва).
e-mail: nizhnikov.ai@mail.ru
Яремко Олег Эммануилович — Московский государственный технический университет «Станкин» (г. Москва).
e-mail: yaremki8@gmail.com
Яремко Наталья Николаевна — Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС» (г. Москва).
e-mail: yaremki@yandex.ru

Аннотация

Для одного класса полиномов Аппеля, ассоциированного с дифференциальным уравнением параболического типа, получены формулы коэффициентов разложения в ряд полиномов. Установлено, что полиномы Аппеля участвуют в формулах разложения решения задачи Коши для уравнений параболического типа в ряд производных фундаментального решения. Предложен новый метод решения задачи Коши, суть которого состоит в применении разложения в ряды по полиномам Аппеля. Результаты обобщают метод решения уравнения теплопроводности на действительной оси разложением в ряд полиномов Эрмита. Исследована связь преобразования Фурье и рядов по ассоциированным полиномам Аппеля. Изучен вопрос применения полиномов Эрмита для преобразования Лапласа.

Ключевые слова: Полином Аппеля, фундаментальное решение, полином Эрмита, преобразование Фурье, задача Коши.

Библиография: 19 названий.

Для цитирования:
Нижников, А. И., Яремко, О. Э., Яремко, Н. Н. Полиномы Аппеля, ассоциированные с преобразованиями Фурье, и их применение для дифференциальных уравнений // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 3, с. 213–225.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 25. No. 3.

UDC 517.44 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-213-225

Appel polynomials associated with Fourier transforms and their applications to differential equations

A. I. Nizhnikov, O.E. Yaremko, N.N. Yaremko

Nizhnikov Alexander Ivanovich — Moscow State Pedagogical University (Moscow).
e-mail: nizhnikov.ai@mail.ru
Yaremko Oleg Emmanuilovich — Moscow State Technical University "Stankin" (Moscow).
e-mail: yaremki8@gmail.com
Yaremko Natalya Nikolaevna — National Research Technological University "MISiS" (Moscow).
e-mail: yaremki@yandex.ru

Abstract

Formulas for the coefficients of the expansion into a series of Appel polynomials associated with a differential equation of parabolic type are obtained. It has been established that Appel polynomials are involved in the formulas for the expansion of the solution to the Cauchy problem for equations of parabolic type into a series of derivatives of the fundamental solution. A new method for solving the Cauchy problem is proposed, the essence of which is to use series expansion in Appel polynomials. The results generalize the method for solving the heat equation on the real axis by expanding it into a series of Hermite polynomials. The connection between the Fourier transform and series in associated Appel polynomials is studied. The issue of using Hermite polynomials for the Laplace transform has been studied.

Keywords: Appel polynomial, fundamental solution, Hermite polynomial, Fourier transform, Cauchy problem.

Bibliography: 19 titles.

For citation:
Nizhnikov, A. I., Yaremko, O.E., Yaremko, N.N. 2024, "Appel polynomials associated with Fourier transforms and their applications to differential equations" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 3, pp. 213–225.

1. Введение

Пусть задана некоторая последовательность $a_0, a_1, ..., a_n, ...$ комплексных чисел. Полиномы Аппеля [3,7,10] определяются $p_n(x)$ формулой

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k x^{n-k}, n = 0, 1, ...$$

Приведем основное свойство полиномов Аппеля [7] $p_n'(x) = np_{n-1}(x), n \geq 1$. Экспоненциальная производящая функция последовательности многочленов Аппеля [7] $p_n(x)$ имеет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n(x)}{n!} t^n = A(t) \exp(xt)\,, \tag{1}$$

где $A(t)$ некоторый степенной ряд по t. Будем считать далее, что

$$A(t) = e^{-\beta p(it)}, \beta > 0,$$

где $p(z)-$ многочлен, для которого выполнено условие $Rep(\lambda) \geq 0$. Тогда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n(x,\beta)}{n!}(i\lambda)^n = e^{-\beta p(\lambda)} \exp(ix\lambda)\,. \tag{2}$$

Полиномы Эрмита служат важным примером полиномов Аппеля. Полиномы Эрмита можно применять для решения дифференциальных уравнений

Пример 1. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' = \beta y$. Будем искать решение задачи в виде ряда полиномов Эрмита [4,9]

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k H_k(x).$$

Имеем

$$y'' = \sum_{k=2}^{\infty} a_k k(k-1) H_{k-2}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+2}(k+2)(k+1) H_k(x).$$

Из единтственности разложения в ряд полиномов Эрмита получим $a_{k+2}(k+2)(k+1) = \beta a_k$. Значит,

$$a_{2k} = \frac{\beta^k a_0}{(2k)!}, a_{2k+1} = \frac{\beta^k a_1}{(2k+1)!}.$$

Тогда общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta^k}{(2k)!} H_{2k}(x) + a_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta^k}{(2k+1)!} H_{2k+1}(x).$$

Из разложения гиперболических функций [9] в ряд полиномов Эрмита следует, что решение можно записать в виде

$$y = a_0 e^{-\frac{\beta}{2}} ch\sqrt{\beta x} + a_1 e^{-\frac{\beta}{2}} \frac{sh\sqrt{\beta} x}{\sqrt{\beta}}.$$

Замечание 3. *Обычно для решения дифференциальных уравнений и систем с постоянными коэффициентами применяют метод Лапласа. Однако, при вычислении оригинала приходится находить вычеты в полюсах, решая для этого алгебраические уравнения высоких степеней. Применение рядов Эрмита не требует знания полюсов. Преобразование Фурье для рассмотренной задачи применять нельзя.*

Функции Эрмита [4] представляют собой набор собственных функций интегрального преобразования Фурье [11]. Это обстоятельство позволило установить связь интегральных преобразований Фурье и рядов по функциям Эрмита [4,9]. Было найдено новое представление решения задачи Коши для уравнения теплопроводности на действительной оси. Метод разложения в ряд по функциям Эрмита [8,12,15] позволил предложить новый подход к решению ретроспективной задачи [5] для уравнения теплопроводности. Таким образом, задача распространения метода разложения по полиномам Эрмита на случай полиномов Аппеля актуальна. В настоящей работе будет доказано, что метод разложения в ряды полиномов Аппеля есть альтернатива методу интегральных преобразований Фурье.

2. Задача Коши для уравнения $\frac{\partial u}{\partial t} = p\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u$

Рассмотрим задачу Коши для однородного уравнения [6]:

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t} = p\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u, \quad x \in \mathbb{R}^1,\ 0 < t < T,\\ u(x,\,0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^1.\end{gathered} \tag{3}$$

Решение задачи Коши может быть найдено методом Фурье и выражается формулой [14]

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t, x-\xi) f(\xi) d\xi, \tag{4}$$

где

$$G(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{tp(\lambda)} e^{i\lambda x} d\lambda.$$

Поставим цель найти решение задачи (3) в виде разложения по полиномам Аппеля.

3. Интегральное преобразование Фурье и разложения в ряд производных фундаментального решения

Запишем теорему разложения [6] для функция $f\,(x)$:

$$f\,(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda\xi}\, f\,(\xi)\, d\xi\right) d\lambda,$$

Преобразуем формулу разложения к виду

$$f\,(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\beta p(\lambda)} e^{i\lambda x}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta p(\lambda)} e^{-i\lambda\xi}\, f\,(\xi)\, d\xi\right) d\lambda, \tag{5}$$

где $\beta > 0$. Положим $t = -i\lambda$ в формуле (5) , тогда получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n(\xi,\beta)}{n!}(-i\lambda)^n = e^{-\beta p(\lambda)} \exp(-i\xi\lambda)\,. \tag{6}$$

Следовательно,

$$f\,(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty} f_{n,\beta}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\beta p(\lambda)} e^{i\lambda x}(-i\lambda)^n d\lambda, \tag{7}$$

где

$$f_{n,\beta} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p_n(\xi,\beta)}{n!}\, f\,(\xi)\, d\xi\,. \tag{8}$$

Для вычисления внутреннего интеграла в формуле (7) заметим, что функция

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{tp(\lambda)} e^{i\lambda x} d\lambda \equiv G(t,x)$$

является фундаментальным решением задачи Коши для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = p\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u.$$

Тогда получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\beta p(\lambda)} e^{i\lambda x} (i\lambda)^n d\lambda = \frac{\partial^n G(\beta, x)}{\partial x^n}. \tag{9}$$

Формула (7) принимает вид

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{n,\beta} \frac{\partial^n G(\beta, x)}{\partial x^n}. \tag{10}$$

Формула (10) представляет теорему разложения в ряд производных фундаментального решения. Коэфициенты ряда вычисляют через полином Аппеля, ассоциированный с дифференциальным уравнением (3).

4. Интегральное преобразование Фурье и разложения по полиномам Аппеля

Пусть функция $f(x)$ есть оригинал Фурье. Запишем теорему разложения [6]:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda\xi} f(\xi)\, d\xi \right) d\lambda,$$

Преобразуем формулу к виду

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta p(\lambda)} e^{i\lambda x} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{\beta p(\lambda)} e^{-i\lambda\xi} f(\xi)\, d\xi \right) d\lambda, \tag{11}$$

где $\beta > 0$. Из формулы (2) следует, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overline{p_n(x,\beta)}}{n!} (i\lambda)^n = e^{-\beta p(\lambda)} \exp(ix\lambda),$$

здесь $\overline{p_n(x,\beta)}$ комплексное сопряжение. Перейдем в обеих частях формулы (11) к комплексно сопряженным величинам. Учтем при этом, что $\overline{f(x)} = f(x)$. Получаем

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n(x,\beta)}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\beta p(\lambda)} e^{i\lambda\xi} (-i\lambda)^n d\lambda f(\xi) d\xi. \tag{12}$$

Для вычисления внутреннего интеграла в формуле (12) заметим, что выражение

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tp(\lambda)} e^{i\lambda\xi} d\lambda \equiv G(t,\xi)$$

является фундаментальным решением [14] задачи Коши для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = p\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) u.$$

Тогда получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\beta p(\lambda)} e^{i\lambda\xi} (-i\lambda)^n d\lambda = (-1)^n \frac{\partial^n G(\beta,\xi)}{\partial \xi^n}.$$

Формула (12) принимает вид

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n(\xi,\beta)}{n!} f_{n,\beta}, \tag{13}$$

где

$$f_{n,\beta} = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^n G(\beta,\xi)}{\partial \xi^n} f(\xi) d\xi.$$

Таким образом, формула (13) представляет теорему разложения в ряд полиномов Аппеля. Коэфициенты ряда вычисляют через производные фундаментального решения, ассоциированного с дифференциальным уравнением.

5. Интегральное преобразование Фурье и разложение по полиномам Аппеля

5.1. Вычисление коэффициентов разложения в ряд полиномов Аппеля через изображение Фурье

Найдем коэффициенты f_j разложения функции $f(x)$ в ряд полиномов Аппеля по известному образу Фурье $\Phi(\lambda)$. Перепишем формулу (8) для f_j в виде

$$f_{n,\beta} = \int_{-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{\partial^n G(\beta,\xi)}{\partial \xi^n} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\xi} \Phi(\lambda) d\lambda d\xi.$$

Изменим порядок интегрирования и воспользуемся формулой (9) Тогда получим

$$f_{n,\beta} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{\partial^n G(\beta,\xi)}{\partial \xi^n} e^{i\lambda\xi} d\xi d\lambda,$$

где

$$f_{n,\beta} = \int_{-\infty}^{\infty} (-i\lambda)^j e^{-\beta p(\lambda)} \Phi(\lambda) d\lambda. \tag{14}$$

5.2. Вычисление изображения Фурье по коэффициентам разложения в ряд Аппеля

Даны коэффициенты f_j разложения функции $f(x)$ в ряд полиномов Аппеля. Найти образ Фурье $\Phi(\lambda)$ функции $f(x)$. Имеем

$$\Phi(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda\xi} f(\xi) d\xi.$$

Запишем последнюю формулу в виде

$$\Phi(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-p(\lambda)\beta} e^{p(\lambda)\beta} e^{-i\lambda\xi} f(\xi) d\xi.$$

Воспользуемся формулой (6), тогда получим

$$\Phi(\lambda) = e^{p(\lambda)\beta} \sum_{n=0}^{\infty} (-i\lambda)^n \int_{-\infty}^{\infty} p(n,\xi) f(\xi) d\xi.$$

Из формулы (14) получаем нужный результат

$$\Phi(\lambda) = e^{p(\lambda)\beta} \sum_{n=0}^{\infty} (-i\lambda)^n f_{n,\beta}. \tag{15}$$

Замечание 4. *Свойства разложений в ряды полиномов Аппеля можно получить из свойств преобразования Фурье.*

В качестве примера получим формулу для коэффициентов производной данной функции $f(x)$.

Следствие 1. *Пусть* $g(x) = f^{(n)}(x)$ *тогда* $g_{j,\beta} = (-1)^n f_{j+n,\beta}$.

Доказательство. Применим формулу для коэффициентов разложения по полиномам Аппеля

$$g_{n,\beta} = \int_{-\infty}^{\infty} (-i\lambda)^j e^{-\beta p(\lambda)} G(\lambda) d\lambda.$$

По свойству преобразования Фурье производной имеем

$$G(\lambda) = (i\lambda)^n \Phi(\lambda).$$

Значит,

$$g_{n,\beta} = \int_{-\infty}^{\infty} (-i\lambda)^j e^{-\beta p(\lambda)} (i\lambda)^n \Phi(\lambda) d\lambda = (-1)^n f_{j+n,\beta}.$$

6. Решение задачи Коши для уравнения $\frac{\partial u}{\partial t} = p\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) u$

Рассмотрим задачу Коши для однородного уравнения [2]:

$$\begin{gathered} \frac{\partial u}{\partial t} = p\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) u, \quad x \in \mathbb{R}^1,\ 0 < t < T, \\ u(x,\ 0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^1. \end{gathered} \tag{16}$$

Решение задачи Коши выражается формулой

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tp(\lambda)} e^{i\lambda x} \Phi(\lambda) d\lambda, \tag{17}$$

где

$$\Phi(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda\xi} f(\xi) d\xi.$$

6.1. Решение задачи Коши разложением в ряд полиномов Аппеля

Преобразуем формулу (16), таким образом, чтобы решение задачи Коши представлялось в форме суммы ряда произведений: полинома Аппеля $p_n(x,\beta)$ на неизвестный множитель переменного t. При этом второй множитель конструируется из разложения в ряд полиномов Аппеля начального условия.

Теорема 1. *Пусть функция* $f(x)$ *из пространства быстро убывающих функций [1], тогда решение задачи Коши* $u(t,x)$ *в пространстве бесконечно дифференцируемых по переменной* $t, t \geq 0$ *быстро убывающих по переменной* x *функций существует, единственно и имеет вид [13]*

$$u\,(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n(x,\beta)}{n!} f_{n,t+\beta}, \tag{18}$$

где

$$f_{n,t+\beta} = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^n G(t+\beta,\xi)}{\partial \xi^n} f(\xi) d\xi.$$

Доказательство. Применим формулу (17). Тогда имеем

$$\Phi(\lambda) = e^{p(\lambda)\beta} \sum_{n=0}^{\infty} (-i\lambda)^n f_{n,\beta}.$$

Следовательно, на основании формулы (17) имеем равенство

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(t+\beta)p(\lambda)} e^{i\lambda x} \sum_{n=0}^{\infty} (-i\lambda)^n f_{n,\beta} d\lambda.$$

Учитывая формулу (14), получим формулу (18).

Замечание 5. *Чтобы получить разложение в ряд полиномов Аппеля решения рассматриваемой задачи Коши, надо найти разложение начального условия в ряд полиномов Аппеля. Затем, в формулах коэффициентов выполнить замену параметра* $\beta \longrightarrow t + \beta$.

6.2. Решение задачи Коши разложением в ряд производных фундаментальных решений

Мы покажем, что коэффициенты разложения в ряд производных фундаментальных решений вычисляются по формулам с участием полиномов Аппеля.

Теорема 2. *Пусть функция* $f(x)$ *из пространства быстро убывающих функций, тогда решение задачи Коши* $u(t,x)$ *в пространстве бесконечно дифференцируемых по переменной* $t, t \geq 0$ *быстро убывающих по переменной* x *функций существует, единственно и имеет вид*

$$u\,(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n f_{n,\beta} \frac{\partial^n G(t+\beta, x)}{\partial x^n}, \tag{19}$$

где

$$f_{n,\beta} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p_n(\xi,\beta)}{n!} f\,(\xi)\, d\xi\,.$$

Доказательство. Как отмечалось выше, решение задачи Коши выражается формулой

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tp(\lambda)} e^{i\lambda x} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda\xi} f(\xi) d\xi d\lambda.$$

Перепишем последнюю формулу в виде

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tp(\lambda)} e^{\beta p(\lambda)} e^{i\lambda x} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta p(\lambda)} e^{-i\lambda\xi} f(\xi) d\xi d\lambda.$$

Воспользуемся следствием из формулы (6)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n(\xi,\beta)}{n!} (-i\lambda)^n = e^{-\beta p(\lambda)} \exp(-\xi\lambda)\,.$$

Тогда получим

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(t+\beta)p(\lambda)} e^{i\lambda x} (-i\lambda)^n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p_n(\xi,\beta)}{n!} f(\xi) d\xi d\lambda.$$

Осталось заметить, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{(t+\beta)p(\lambda)} e^{i\lambda x}(-i\lambda)^n = (-1)^n \frac{\partial^n G(t+\beta, x)}{\partial x^n}.$$

Примем обозначение

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p_n(\xi,\beta)}{n!} f(\xi)\, d\xi = f_{n,\beta}.$$

Формула (19) доказана.

Замечание 6. *Чтобы получить разложение в ряд производных фундаментальных решений решения рассматриваемой задачи Коши, надо найти разложение начального условия в ряд полиномов Аппеля. Затем, в формулах производных фундаментальных решений выполнить замену параметра $\beta \longrightarrow t+\beta$, оставив при этом неизменными формулы для коэффициентов разложения.*

7. Решение обратной задачи Коши для уравнения $\frac{\partial u}{\partial t} = p\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) u$

Обратная задача Коши для уравнения (16) заключается в определении начального условия $f(x)$ по решению $u(\tau, x)$. Как известно решение обратной задачи существует, единственно. Однако не обладает устойчивостью [5]. Т.о. задача не корректна, однако формулу для такого решения можно найти. Она будет полезной в теоретическом плане. Кроме того, можно предположить, что на основе такой формулы можно построить практические регуляризационные алгоритмы. Займемся поиском решения. Метод Фурье дает формулу решения обратной задачи Коши

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-tp(\lambda)} e^{i\lambda x} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda\xi} u(t,\xi) d\xi d\lambda.$$

Считая выполненным условие $\beta > \tau$ перепишем последнюю формулу в виде

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\beta-t)p(\lambda)} e^{-\beta p(\lambda)} e^{i\lambda x} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda\xi} u(\tau,\xi) d\xi d\lambda.$$

Дословно повторяя выкладки п.6 получим две формулы для решения обратной задачи. Первая формула с помощью ряда полиномов Аппеля. Она имеет вид

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n(x,\beta)}{n!} u_{n,\beta-\tau}, \tau < \beta, \tag{20}$$

где

$$u_{n,\beta-\tau} = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^n G(\beta-\tau,\xi)}{\partial \xi^n} u(\tau,\xi) d\xi.$$

Вторая формула представляет решение ретростпективной задачи Коши [11] в виде разложения в ряд производных фундаментальной функций

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u_{n,\beta} \frac{\partial^n G(\beta-\tau, x)}{\partial x^n}, \tau < \beta, \tag{21}$$

где

$$u_{n,\beta} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p_n(\xi,\beta)}{n!} u(\tau,\xi)\, d\xi\,.$$

8. Обсуждение результатов

Имеется всего пять ортогональных с весом последовательностей полиномов Аппеля на действительной оси [7,10]. Последовательность полиномов Эрмита одна из них. Выберем в формуле (2) многочлен $p(\lambda) = -\lambda^2$. Тогда получим

$$e^{\lambda^2\beta}e^{i\lambda x} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(i\lambda)^j \beta^{\frac{j}{2}}}{j!} H_j\left(\frac{x}{2\sqrt{\beta}}\right), \tag{22}$$

Таким образом, полиномы Аппеля есть масштабированные полиномы Эрмита. Формула (9) преобразовывается к виду

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(-i\lambda)^j e^{-\lambda^2\beta}e^{i\lambda x}d\lambda = \frac{e^{-\frac{x^2}{4\beta}}}{2\sqrt{\pi\beta}}\frac{1}{(2\sqrt{\beta})^j}H_j\left(\frac{x}{2\sqrt{\beta}}\right).$$

Значит, производная порядка j фундаментального решения $G(t,x)$ задачи Коши для уравнения теплопроводности на действительной оси есть j функция Эрмита. Следовательно, результаты полученные в статье действительно обобщают результаты работ [8,12,15]. Наметим пути развития результатов статьи. Откажемся от ассоциации полиномов Эрмита с дифференциальным уравнением. Будем считать, что экспоненциальная производящая функция последовательности многочленов Аппеля p_n имеет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{p_n(x)}{n!}z^n = A(-iz)\exp(xz), \tag{23}$$

где $z = i\lambda$, а $A(\lambda)$ некоторый степенной ряд по λ, удовлетворяющий условиям:

- функция $A(\lambda) \neq 0, \lambda \in R$,
- функция $A^{-1}(\lambda)$ есть образ Фурье функции убывающей вместе со всеми производными быстрее любой степени $|x|^{-1}$.

Приведем формальный вывод формул для коэффициентов в приведенных предположениях. Пусть функция $y = f(x)$ может быть разложена в ряд полиномов Аппеля

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k p_k(x),$$

тогда формулу разложения для преобразования Фурье запишем в виде

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x}A(\lambda)\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{A(\lambda)}e^{-i\lambda\xi}f(\xi)\,d\xi\right)d\lambda.$$

Учитывая формулу (23) получим

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{p_n(x)}{n!}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(i\lambda)^n\frac{e^{-i\lambda\xi}}{A(\lambda)}d\lambda f(\xi)\,d\xi.$$

Примем обозначение для преобразования Фурье функции $\frac{1}{A(\lambda)}$:

$$G(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{A(\lambda)}e^{-i\lambda\xi}d\lambda.$$

Тогда выполнено

$$G^{(n)}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{A(\lambda)} e^{-i\lambda\xi}(-i\lambda)^n d\lambda.$$

Значит,формула разложения функции по полиномам Аппеля приобретает вид

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n(x)}{n!} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (-1)^n G^{(n)}(\xi) f(\xi)\, d\xi.$$

Тогда получаем разложение в ряд полиномов Аппеля

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n(x)}{n!} f_n, \tag{24}$$

где f_n- коэффициент при полиноме $p_n(x)$

$$f_n = \frac{(-1)^n}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G^{(n)}(\xi) f(\xi)\, d\xi.$$

Замечание 7. *Строгое обоснование разложения в ряд (24) будет предложено в последующих работах.*

9. Заключение

Основная идея работы заключается в использовании преобразования Фурье для изучения рядов по полиномов Аппеля. Удалось найти формулы для коэффициентов разложения, в которых участвуют функции ассоциированные с рядом полиномов Аппеля. Установлено, также что с каждым рядом Аппеля можно связать некоторый ассоциированный ряд, коэффициенты которого вычисляются с помощью полиномов Аппеля. Развита техника решения уравнений математической физики с помощью рядов по полиномам Аппеля. Главный результат состоит в том, что достаточно разложить в ряд полиномов Аппеля начальное условие, тогда решение задачи Коши получается заменой параметра $\beta \longrightarrow \beta + t$ в разложении начального условия. Точно также, чтобы найти решение ретроспективной задачи Коши надо в выражении температурного поля в момент t выбрать параметр $\beta > t$, а затем выполнить замену $\beta \longrightarrow \beta - t$. В результате получим выражение начального распределения температурного поля в момент $t = 0$.

10. Благодарности

Исследование выполнено при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № FSFS-2024-0007).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Владимиров В. С., Вашарин А.А., Каримова Х.Х., Михайлов В. П. , Сидоров Ю.В., Шабунин М. И. Сборник задач по уравнениям математической физики / Под ред. В.С. Владимирова. 4-е изд., стереотип. Физматлит, 2003. 288 с.

2. Владимиров В. С., Жаринов В. В. Уравнения математической физики. — М:, Физматлит, 2004.

3. Казьмин Ю. А.О разложениях в ряды по полиномам Аппеля. Матем. заметки, №5, вып.5, 1969, 509–520.

4. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т.2.— М.-Л.: ГТТИ, 1945.— 620 с.

5. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука. 1979.

6. Тихонов А.Н. , Васильева А.Б., Свешников А.Г. Курс высшей математики и математической физики. Дифференциальные уравнения. — Физматлит, 2005.

7. Чубариков В. Н. Обобщённая формула бинома Ньютона и формулы суммирования. Чебышевский сб., №21, вып.4 , 2020, 270–301.

8. Яремко Н. Н., Селютин В. Д., Журавлева Е. Г. Новые формулы обращения для интегральных преобразований Лапласа, Вейерштрасса и Меллина. Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки, 2018, № 1, 24–35.

9. Andrews, G. E., Askey, R., Roy, R. Hermite Polynomials. Cambridge, Cambridge University Press, 1999.

10. Aigner, Martin. A Course in Enumeration. Graduate Texts in Mathematics. Vol. 238. Springer, 2007.

11. Jeffreys H. and Jeffreys B. *Methods of Mathematical Physics*,3rd ed., Cambridge Univ. Press, 1956.

12. Sitnik S. M., Yaremko O., Yaremko N. Transmutation Operators and Applications. Transmutation Operators Boundary Value Problems,*Springer Nature Switzerland*, 2020, pp.447-466.

13. Sneddon I.N. *Fourier Transforms*. New York. McGraw-Hill. 1951.542 p.

14. Thambynayagam, R. K. M. The Diffusion Handbook: Applied Solutions for Engineers. / McGraw-Hill Professional. 2011.

15. Yaremko, N. , Yaremko, O. On a new formulas for a direct and inverse Cauchy problems of heat equation. DOI:10.48550/arXiv.1311.4442.

REFERENCES

1. Vladimirov, V. S., Vasharin, A. A., Karimova, H. H., Mikhailov, V. P.. Sidorov, Y.V., Shabunin, M.I. 1974, “Collection of Problems on Mathematical Physics Equations [in Russian]”, *Nauka, Moscow*.

2. Vladimirov, V. S., Zharinov, V. V. 2004, “Equations of Mathematical Physics [in Russian]”, *Fizmatlit, Moscow*.

3. Kazmin, Yu.A. 1969, Expansions in series of Appell polynomials Math. Notes , No. 5 : 5, pp. 304–311.

4. Courant, R. & Hilbert, D. 1962, “Methods of Mathematical Physics”, *Vol. 2, Partial Differential Equations. Wiley-Interscience, New York*.

5. Tikhonov, A. N., Arsenin, V. Ya. 1977, “Methods for solutions of ill-posed problems”, *N Y: Wiley*, 258 p.

6. Tikhonov, A. N., Vasil'eva, A. B., Sveshnikov, A. G. 1985, "Differential Equations", *Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo, Springer-Verlag.*

7. Chubarikov, V. N. 2020, "A generalized Binomial theorem and a summation formulae", *Chebyshevskii Sb.[in Russian]*, № . 21:4, pp. 270–301.

8. Yaremko, N. N., Selyutin, V. D., Zhuravleva, E. G. 2018, "New conversion formulas for integral transformations of Laplace, Weierstrass and Mellin", *News of higher educational institutions. The Volga region. Physical and Mathematical Sciences. [in Russian]*, № . 1, 24-35.

9. Andrews, G. E., Askey, R., Roy, R. 1999, "Hermite Polynomials", *Cambridge, Cambridge University Press.*

10. Aigner, Martin. 2007, "A Course in Enumeration. Graduate Texts in Mathematics", *Vol. 238. Springer.*

11. Jeffreys, H. & Jeffreys, B. 1956, "Methods of Mathematical Physics", *3rd ed., Cambridge Univ. Press*, 1956.

12. Sitnik, S. M., Yaremko, O., Yaremko, N. 2020, "Transmutation Operators and Applications. Transmutation Operators Boundary Value Problems", *Springer Nature Switzerland*, pp.447-466.

13. Sneddon, I.N. 1951, "Fourier Transforms", *New York. McGraw-Hill*, 542 p.

14. Thambynayagam, R. K. M. 2011, "The Diffusion Handbook: Applied Solutions for Engineers", *McGraw-Hill Professional.* 2011.

15. Yaremko, N., Yaremko, O. "On a new formulas for a direct and inverse Cauchy problems of heat equation", DOI:10.48550/arXiv.1311.4442.

Получено: 22.05.2024
Принято в печать: 04.09.2024

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 25. Выпуск 3.

УДК 512.552 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-226-235

Алгебры кватернионов с унитарными инволюциями, имеющие одинаковые подполя

С. В. Тихонов

Тихонов Сергей Викторович — кандидат физико-математических наук, Белорусский государственный университет (г. Минск).
e-mail: tikhonovsv@bsu.by

Аннотация

В статье строится такое поле E, что существует бесконечно много неизоморфных кватернионных E-алгебр с унитарными инволюциями и все такие алгебры расщепляются любым квадратичным расширением поля E.

Ключевые слова: центральная алгебра с делением, группа Брауэра, подполе, род.

Библиография: 27 названий.

Для цитирования:
Тихонов, С. В. Алгебры кватернионов с унитарными инволюциями, имеющие одинаковые подполя // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 3, с. 226–235.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 25. No. 3.

UDC 512.552 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-226-235

Quaternion algebras with unitary involutions having the same subfields

S. V. Tikhonov

Tikhonov Sergey Viktorovich — candidate of physical and mathematical sciences, Belarussian State University (Minsk).
e-mail: tikhonovsv@bsu.by

Abstract

We construct a field E such that there are infinitely many non-isomorphic quaternion E-algebras with unitary involution and all such algebras are split by any quadratic field extension of E.

Keywords: central division algebra, Brauer group, subfield, genus.

Bibliography: 27 titles.

For citation:
Tikhonov, S. V. 2024, “Quaternion algebras with unitary involutions having the same subfields”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 3, pp. 226–235.

1. Введение

Пусть F — поле, $\mathrm{Br}(F)$ — его группа Брауэра. Из конструкции Амицура ([3]) общего поля разложения центральной простой алгебры следует, что подгруппа в группе Брауэра, порожденная классом алгебры, однозначно определяется множеством полей разложения этой алгебры. Однако если рассматривать только конечномерные поля разложения, то ситуация перестает быть столь тривиальной. В последнее время активно исследуется вариант этой проблемы, связанный с рассмотрением только семейств максимальных подполей алгебр.

Определение 1. *(см. [5]). Род* $\mathbf{gen}(\mathcal{D})$ *конечномерной центральной алгебры с делением* $\mathcal{D}$ *над полем* F *определяется как набор классов* $[\mathcal{D}'] \in Br(\mathcal{F})$, *где* $\mathcal{D}'$ *— центральная* F*-алгебра с делением, имеющая такие же максимальные подполя, что и алгебра* $\mathcal{D}$.

Если $[\mathcal{D}'] \in \mathbf{gen}(\mathcal{D})$, то это означает, что алгебры $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}'$ имеют одинаковую степень n, и расширение K/F степени n допускает F-вложение $K \hookrightarrow \mathcal{D}$ тогда и только тогда, когда оно допускает F-вложение $K \hookrightarrow \mathcal{D}'$. Различные варианты понятия рода центральных простых алгебр рассмотрены в [1] и [15].

Из теоремы Алберта-Брауэра-Хассе-Нётер следует, что в случае числового поля F алгебра кватернионов над полем F имеет тривиальный род (т.е. род состоит из одного элемента), а род любой центральной F-алгебры с делением конечен (см. [1]). В [16] показано, что существуют кватернионные алгебры с бесконечным родом. Более того, доказано, что найдется поле F, над которым имеется бесконечно много попарно неизоморфных кватернионных алгебр, и любые две кватернионные F-алгебры с делением имеют одинаковый род. В [2] эти результаты обобщены на случай алгебр с делением любой простой степени. В [7] и [10] показано, что род алгебры с делением над конечно порожденным полем является конечным. Кроме того, существует гипотеза, что род алгебры кватернионов над конечно порожденным полем является тривиальным ([20, §8]).

Похожим образом можно определить род абсолютно почти простой алгебраической группы. Говорят, что две абсолютно почти простые алгебраические группы G_1 и G_2 над полем F имеют одинаковые классы F-изоморфности максимальных F-торов, если каждый максимальный F-тор группы G_1 F-изоморфен некоторому максимальному F-тору группы G_2, и наоборот. Алгебраическая F-группа G' называется F-формой алгебраической F-группы G, если G и G' изоморфны над сепарабельным замыканием F^{sep} поля F.

Определение 2. *[1, Определение 6.1] Пусть* G *— абсолютно почти простая алгебраическая группа над полем* F. *Род* $\mathbf{gen}_F(G)$ *группы* G *определяется как множество классов* F*-изоморфности* F*-форм* G' *группы* G, *имеющих те же классы* F*-изоморфности максимальных* F*-торов, что и* G.

Род абсолютно почти простой алгебраической группы является тривиальным в некоторых специальных случаях и предполагается конечным, если F — конечно порожденное поле "хорошей" характеристики (см. [20, §8]). Известно, что для центральной F-алгебры с делением $\mathcal{D}$ максимальные сепарабельные подполя алгебры $\mathcal{D}$ определяют максимальные F-торы соответствующей алгебраической группы $\mathrm{SL}_{1,\mathcal{D}}$. Таким образом, результаты о бесконечности рода алгебр с делением можно сформулировать в терминах родов подходящих алгебраических групп: для всякого простого p существуют примеры внутренних форм типа A_{p-1}, имеющих бесконечный род. Отметим, что пример алгебраической группы типа G_2 с бесконечным родом получен в [4, Rem. 3.6(b)]. Заметим, что если $\mathcal{D}$ — центральная алгебра с делением с унитарной инволюцией τ, то только τ-инвариантные сепарабельные максимальные подполя алгебры $\mathcal{D}$ порождают максимальные торы соответствующей специальной унитарной группы $\mathrm{SU}(\mathcal{D},\tau)$ ([18, Предложение 2.3]). В [27] построен пример такой алгебры с делением $\mathcal{D}$ степени 3 с унитарной инволюцией τ, что специальная унитарная группа $\mathrm{SU}(\mathcal{D},\tau)$ имеет бесконечный род.

В [15] рассматривается вопрос, насколько свойства алгебры с инволюциями обуславливаются инвариантными относительно инволюций этальными подалгебрами.

В настоящее время имеется большое число публикаций, посвященных изучению рода центральных простых алгебр и рода алгебраических групп, см., например, [6], [8], [9], [11], [12], [14], [17], [19], [20], [21], [22], [26], [27]. Последние результаты о роде алгебр и алгебраических групп представлены в обзоре [20] (см. также [1]).

В данной работе содержится дальнейшее развитие идей из [16] и [2]. Мы строим поле, над которым имеется бесконечно много попарно неизоморфных кватернионных алгебр с унитарными инволюциями, имеющих одинаковые подполя.

Пусть F/K — квадратичное расширение полей. Унитарная инволюция на центральной простой F-алгебре $\mathcal{A}$ называется F/K-инволюцией, если ее ограничение на F является нетривиальным K-автоморфизмом. Основной результат работы — следующая

Теорема 1. *Существуют такое поле E и подполе $T \subset E$, что $[E : T] = 2$ и имеется бесконечно много неизоморфных кватернионных E-алгебр с делением с E/T-инволюцией и все такие алгебры расщепляются любым квадратичным расширением поля E.*

Этот результат может найти применение при изучении родов унитарных алгебраических групп.

Ниже используются следующие обозначения: $Alg_2(F)$ — множество классов изоморфности кватернионных алгебр с делением над полем F; $Ext_2(F)$ — множество классов изоморфности квадратичных расширений поля F. Для расширения полей E/F и центральной простой F-алгебры $\mathcal{A}$ через $\mathcal{A}_{\mathrm{E}}$ обозначается тензорное произведение $\mathcal{A} \otimes_{\mathrm{F}} \mathrm{E}$, $\mathrm{res}_{E/F} : \mathrm{Br}(F) \longrightarrow \mathrm{Br}(E)$ обозначает гомоморфизм ограничения. Противоположная алгебра обозначается через $\mathcal{A}^{op}$, $\mathcal{A}^m$ обозначает $\mathcal{A} \otimes_F \cdots \otimes_F \mathcal{A}$ (m раз). Для сепарабельного квадратичного расширения F/K через $\mathrm{cor}_{F/K}$ обозначается гомоморфизм кограничения из $\mathrm{Br}(F)$ в $\mathrm{Br}(K)$. Известно, что $\mathrm{cor}_{F/K}([\mathcal{A}_F]) = [\mathcal{A}^2]$ для центральной простой K-алгебры $\mathcal{A}$ ([13, Proposition 3.13 (5)]). Напомним, что центральная простая F-алгебра $\mathcal{A}$ обладает F/K-инволюцией тогда и только тогда, когда $\mathrm{cor}_{F/K}([\mathcal{A}]) = 0$ ([13, Theorem 3.1 (2)]). Расширение полей E/F называется регулярным, если E/F сепарабельно и F алгебраически замкнуто в E.

2. Вспомогательные результаты

Следующая лемма немного в других обозначениях доказана в [27]. Для удобства читателя приведем доказательство здесь.

Лемма 1. *Пусть n — натуральное число, F — поле характеристики, не делящей $2n$, F/K — квадратичное расширение полей, σ — нетривиальный K-автоморфизм поля F, $\mathcal{A}$ — центральная простая F-алгебра степени n и L/F — циклическое расширение полей степени n. Тогда существуют такие регулярное расширение полей $F_{(K,L,\mathcal{A})}/F$ и подполе $K_{(L,\mathcal{A})} \subset F_{(K,L,\mathcal{A})}$, что $[F_{(K,L,\mathcal{A})} : K_{(L,\mathcal{A})}] = 2$ и*

(1) $F_{(K,L,\mathcal{A})} = K_{(L,\mathcal{A})}F$ и нетривиальный $K_{(L,\mathcal{A})}$-автоморфизм $\bar{\sigma}$ поля $F_{(K,L,\mathcal{A})}$ продолжает автоморфизм σ;

(2) композит полей $F_{(K,L,\mathcal{A})}L$ расщепляет алгебру $\mathcal{A}_{F_{(K,L,\mathcal{A})}}$;

(3) гомоморфизм ограничения $res_{F_{(K,L,\mathcal{A})}/F} : Br(F) \longrightarrow Br(F_{(K,L,\mathcal{A})})$ инъективен;

Доказательство. Пусть $F(x)$ — чисто трансцендентное расширение поля F степени трансцендентности 1. Пусть также ϕ — образующая группы Галуа $\mathrm{Gal}(L(x)/F(x))$ и

$$\mathcal{C} := \mathcal{A}^{\mathrm{op}}_{\mathcal{F}(\mathrm{x})} \otimes_{\mathcal{F}(\mathrm{x})} (\mathcal{L}(\mathrm{x})/\mathcal{F}(\mathrm{x}), \phi, \mathrm{x}),$$

где $(L(x)/F(x), \phi, x)$ — циклическая $F(x)$-алгебра степени n. Пусть также M — поле функций многообразия Севери-Брауэра алгебры $\mathcal{C}$. Заметим, что ядро гомоморфизма

$$\mathrm{res}_{M/F(x)} : \mathrm{Br}(F(x)) \longrightarrow \mathrm{Br}(M)$$

порождается классом $[\mathcal{C}]$ (см, например, [25, Cor. 13.16]).

Пусть $\mathcal{B}$ — центральная простая F-алгебра экспоненты $m > 1$. Предположим, что алгебра $\mathcal{B}$ расщепляется полем M. Тогда $[\mathcal{B}_{\mathcal{F}(\mathrm{x})}] = [\mathcal{C}^{\mathrm{i}}]$ для некоторого $1 \leqslant i \leqslant n$. Если $i < n$, то $F(x)$-алгебра $\mathcal{C}^i$ ветвится в дискретном нормировании (тривиальном на F) поля $F(x)$, определяемом многочленом x, но алгебра $\mathcal{B}_{F(x)}$ неразветвлена в этом нормировании. Следовательно, $[\mathcal{B}_{F(x)}] \neq [\mathcal{C}^i]$. Так как экспонента алгебры $\mathcal{B}_{F(x)}$ есть $m > 1$, то $[\mathcal{B}_{F(x)}] \neq [\mathcal{C}^n] = [F(x)]$. Таким образом, алгебра $\mathcal{B}_{F(x)}$ не расщепляется полем M. Откуда получаем инъективность гомоморфизма $\mathrm{res}_{M/F} : \mathrm{Br}(F) \longrightarrow \mathrm{Br}(M)$.

Так как поле M расщепляет алгебру $\mathcal{C}$, то

$$[\mathcal{A}_M] = [(L(x)/F(x), \phi, x)_M] = [(ML/M, \phi', x)],$$

где ϕ' — образующая группы Галуа $\mathrm{Gal}(ML/M)$. Таким образом, композит полей ML расщепляет алгебру $\mathcal{A}_M$.

Заметим, что M/F — регулярное расширение поля $F(x)$. Следующая конструкция трансфера регулярного расширения описана в [24, p. 220]).

Пусть σ также обозначает $K(x)$-автоморфизм поля $F(x)$, продолжающий автоморфизм σ поля F. Автоморфизм σ поля $F(x)$ может быть продолжен до изоморфизма (который также будем обозначать через σ) поля M и другого регулярного расширения поля $F(x)$, обозначаемого через M_σ. Таким образом, имеем следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccc} F & \hookrightarrow & F(x) & \hookrightarrow & M \\ \downarrow{\scriptstyle \sigma} & & \downarrow{\scriptstyle \sigma} & & \downarrow{\scriptstyle \sigma} \\ F & \hookrightarrow & F(x) & \hookrightarrow & M_\sigma \ . \end{array} \tag{1}$$

Пусть $F_{(K,L,\mathcal{A})} = MM_\sigma$ — свободный композит над F полей M и M_σ. Этот композит F-изоморфен полю функций многообразия Севери-Брауэра $M_\sigma(y)$-алгебры

$$\mathcal{A}^{op}_{M_\sigma(y)} \otimes_{M_\sigma(y)} (M_\sigma L(y)/M_\sigma(y), \psi', y),$$

где y — трансцендентный над M_σ элемент (мы заменили в алгебре x на y, поскольку композит полей свободный) и ψ' — образующая группы Галуа $\mathrm{Gal}(M_\sigma L(y)/M_\sigma(y))$. Поле $F_{(K,L,\mathcal{A})}$ является регулярным расширением поля F. Изоморфизмы $\sigma : M \longrightarrow M_\sigma$ и $\sigma^{-1} : M_\sigma \longrightarrow M$ имеют единственное продолжение до автоморфизма $\bar{\sigma}$ порядка 2 поля $F_{(K,L,\mathcal{A})}$. Пусть $K_{(L,\mathcal{A})} := T_{K/F}(M)$ — трансфер поля M относительно расширения полей $F \supset K$, т.е. $K_{(L,\mathcal{A})}$ — подполе поля $F_{(K,L,\mathcal{A})}$, состоящее из элементов, неподвижных при действии автоморфизма $\bar{\sigma}$. Заметим, что композит полей $K_{(L,\mathcal{A})}F$ совпадает с полем $F_{(K,L,\mathcal{A})}$, $[F_{(K,L,\mathcal{A})} : K_{(L,\mathcal{A})}] = 2$, а автоморфизм $\bar{\sigma}$ продолжает σ.

Алгебра $\mathcal{A}_{F_{(K,L,\mathcal{A})}}$ расщепляется полем $F_{(K,L,\mathcal{A})}L$, так как алгебра $\mathcal{A}_M$ расщепляется полем ML.

Наконец, диаграмма (1) индуцирует следующую коммутативную диаграмму для соответствующих групп Брауэра:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{Br}(F) & \xrightarrow{\mathrm{res}} & \mathrm{Br}(F(x)) & \xrightarrow{\mathrm{res}} & \mathrm{Br}(M) & & \\ \downarrow{\scriptstyle \cong} & & \downarrow{\scriptstyle \cong} & & \downarrow{\scriptstyle \cong} & & \\ \mathrm{Br}(F) & \xrightarrow{\mathrm{res}} & \mathrm{Br}(F(x)) & \xrightarrow{\mathrm{res}} & \mathrm{Br}(M_\sigma) & \xrightarrow{\mathrm{res}} & \mathrm{Br}(F_{(K,L,\mathcal{A})}) \ . \end{array}$$

Инъективность гомоморфизма $\mathrm{res}_{M/F}$ влечет инъективность гомоморфизма $\mathrm{res}_{M_\sigma/F}$. Более того, гомоморфизм $\mathrm{res}_{F_{(K,L,\mathcal{A})}/M_\sigma}$ инъективен ввиду тех же аргументов, что и для гомоморфизма $\mathrm{res}_{M/F}$, только основное поле F заменяется полем M_σ. Следовательно, гомоморфизм $\mathrm{res}_{F_{(K,L,\mathcal{A})}/F}$ также инъективен.

■

Замечание 8. *Пусть $F_{(K,L,\mathcal{A})}$ — поле, построенное в лемме 1. Если $\mathcal{B}$ — центральная простая F-алгебра с F/K-инволюцией θ, то формула*

$$\theta_{F_{(K,L,\mathcal{A})}}(a \otimes e) := \theta(a) \otimes \bar{\sigma}(e), a \in \mathcal{B}, e \in F_{(K,L,\mathcal{A})},$$

определяет $F_{(K,L,\mathcal{A})}/K_{(L,\mathcal{A})}$-инволюцию, продолжающую θ, на алгебре $\mathcal{B}_{F_{(K,S,A)}}$.

Далее доказательства из [2] адаптированы для кватернионных алгебр с унитарными инволюциями.

Предложение 1. *Пусть F — поле характеристики не 2, F/K — квадратичное расширение полей, σ — нетривиальный K-автоморфизм поля F, $A \subset Alg_2(F)$ и $S \subset Ext_2(F)$. Тогда существуют такие регулярное расширение полей $F_{(K,S,A)}/F$ и подполе $K_{(S,A)} \subset F_{(K,S,A)}$, что $[F_{(K,L,A)} : K_{(S,A)}] = 2$ и*

(1) $F_{(K,S,A)} = K_{(S,A)}F$ и нетривиальный $K_{(S,A)}$-автоморфизм поля $F_{(K,S,A)}$ продолжает автоморфизм σ;

(2) всякая алгебра из образа $res_{F_{(K,S,A)}/F}(A)$ расщепляется композитом полей $F_{(K,S,A)}L$ для всех $L \in S$;

(3) гомоморфизм $res_{F_{(K,S,A)}/F} : Br(F) \longrightarrow Br(F_{(K,S,A)})$ инъективен;

(4) для всякой центральной простой F-алгебры $\mathcal{B}$ с F/K-инволюцией θ алгебра $\mathcal{B}_{F_{(K,S,A)}}$ имеет $F_{(K,S,A)}/K_{(S,A)}$-инволюцию $\theta_{F_{(K,S,A)}}$, продолжающую θ.

Доказательство. Пусть $\mathcal{P} := \{(L, \mathcal{D}) | L \in S \text{ и } \mathcal{D} \in A\}$ — множество пар. Пусть также $<$ — полный порядок на множестве $\mathcal{P}$ и пусть $t_0 = (L_0, \mathcal{D}_0)$ обозначает наименьший элемент множества $\mathcal{P}$. Выберем представителей (обозначаемых теми же символами) классов изоморфности в обоих множествах S и A. Положим $E_{t_0} := F_{(K,L_0,\mathcal{D}_0)}$ и $T_{t_0} := K_{(L_0,\mathcal{D}_0)}$, где поля $F_{(K,L_0,\mathcal{D}_0)}$ и $K_{(L_0,\mathcal{D}_0)}$ построены в лемме 1. Для $t = (L, \mathcal{D}) \in \mathcal{P}$ положим

$$E^{<t} := \bigcup_{t'<t} E_{t'},\ T^{<t} := \bigcup_{t'<t} T_{t'} \text{ и } E_t := E^{<t}{}_{(T^{<t}, E^{<t}L, \mathcal{D}_{E^{<t}})},\ T_t := T^{<t}{}_{(E^{<t}L, \mathcal{D}_{E^{<t}})},$$

где поля E_t и T_t получены применением леммы 1 к квадратичному расширению полей $E^{<t}/T^{<t}$, циклическому расширению $E^{<t}L/E^{<t}$ и $E^{<t}$-алгебре $\mathcal{D}_{E^{<t}}$. Также определим

$$F_{(K,S,A)} := \bigcup_{t \in \mathcal{P}} E_t \text{ и } K_{(S,A)} := \bigcup_{t \in \mathcal{P}} T_t.$$

Тогда $F_{(K,S,A)}$ — квадратичное расширение поля $K_{(S,A)}$ и $F_{(K,S,A)} = K_{(S,A)}F$. Таким образом, поле $F_{(K,S,A)}$ имеет $K_{(S,A)}$-автоморфизм порядка 2, который продолжает σ. Тогда для F-алгебры $\mathcal{B}$ с F/K-инволюцией θ определим $F_{(K,S,A)}/K_{(S,A)}$-инволюцию на алгебре $\mathcal{B}_{F_{(K,S,A)}}$, как в формуле из замечания 8.

Из леммы 1 и трансфинитной индукции гомоморфизм $\mathrm{res}_{F_{(K,S,A)}/F} : \mathrm{Br}(F) \longrightarrow \mathrm{Br}(F_{(K,S,A)})$ инъективен и $F_{(K,S,A)}/F$ — регулярное расширение полей.

Наконец, пусть $\mathcal{D} \in A$, $L \in S$ и $t = (L, \mathcal{D})$. Из леммы 1 композит полей E_tL расщепляет алгебру $\mathcal{D}_{E_t}$, следовательно, алгебра $\mathcal{D}_{F_{(K,S,A)}}$ расщепляется полем $F_{(K,S,A)}L$.

■

3. Основная теорема

Теорема 2. *Пусть F — поле характеристики не 2, F/K — квадратичное расширение полей, σ — нетривиальный K-автоморфизм поля F и $A \subset Alg_2(F)$. Тогда существуют такие расширение полей F_A/F и подполе $K_A \subset F_A$, что $[F_A : K_A] = 2$ и*

(1) $F_A = K_A F$ и нетривиальный K_A-автоморфизм поля F_A продолжает автоморфизм σ;

(2) алгебры в образе $res_{F_A/F}(A)$ имеют одинаковые наборы максимальных подполей;

(3) гомоморфиз $res_{F_A/F} : Br(F) \longrightarrow Br(F_A)$ инъективен;

(4) для всякой центральной простой F-алгебры $\mathcal{B}$ с F/K-инволюцией θ алгебра $\mathcal{B}_{F_A}$ имеет F_A/K_A-инволюцию θ_{F_A}, продолжающую θ.

Доказательство. Пусть $M_0 := F$ и $N_0 := K$. Определим рекурсивно поля

$$M_i := M_{i-1(N_{i-1},S_{i-1},\mathrm{res}_{M_{i-1}/F}(A))} \text{ и } N_i := N_{i-1(S_{i-1},\mathrm{res}_{M_{i-1}/F}(A))},$$

$i \in \mathbb{Z}_{>0}$, применяя предложение 1 к квадратичному расширению M_{i-1}/N_{i-1}, множеству $\mathrm{res}_{M_{i-1}/F}(A) \subset Alg_2(M_{i-1})$ и множеству S_{i-1} всех максимальных подполей алгебр из $\mathrm{res}_{M_{i-1}/F}(A)$.

Пусть $F_A := \bigcup_{i\geqslant 0} M_i$ и $K_A := \bigcup_{i\geqslant 0} N_i$. С помощью математической индукции и предложения 1 получаем, что гомоморфизм $\mathrm{res}_{F_A/F} : \mathrm{Br}(F) \longrightarrow \mathrm{Br}(F_A)$ инъективен. Более того, $F_A = K_A F$, $[F_A : K_A] = 2$ и нетривиальный K_A-автоморфизм поля F_A продолжает автоморфизм σ. Если $\mathcal{B}$ — центральная простая F-алгебра с F/K-инволюцией, определим F_A/K_A-инволюцию на алгебре $\mathcal{B}_{F_A}$, как в формуле из замечания 8.

Предположим, что $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in A$ и L — максимальное подполе алгебры $\mathcal{A}_{F_A}$. Тогда найдется такое $i \geqslant 0$, что $L = F_A L'$, где L' — квадратичное расширение поля M_i, расщепляющее алгебру $\mathcal{A}_{M_i}$. Так как $\mathcal{A}_{M_i} \in \mathrm{res}_{M_i/F}(A)$, тогда $L' \in S_i$. Из предложения 1 поле $M_{i+1}L'$ расщепляет алгебру $\mathcal{B}_{M_{i+1}}$. Следовательно, L расщепляет $\mathcal{B}_{F_A}$. Аналогично всякое максимальное подполе алгебры $\mathcal{B}_{F_A}$ расщепляет $\mathcal{A}_{F_A}$. Таким образом, алгебры $\mathcal{A}_{F_A}$ и $\mathcal{B}_{F_A}$ имеют одинаковы наборы подполей.

■

Замечание 9. *Если рассмотреть такие поле F и подполе $K \subset T$, что найдется бесконечно много неизморфных кватернионных F-алгебр с F/K-инволюциями, то, применяя предыдущую теорему, получим поле, над которым есть бесконечно много неизомоморфных кватернионных алгебр с унитарными инволюциями, имеющих одинаковые подполя. Например, в качестве K можно взять поле $\mathbb{Q}(x)$, чисто трансцендентное расширение поля рациональных чисел, а в качетстве поля F — поле $K(\sqrt{2})$. Тогда для всех $\alpha \in \mathbb{Q}$ кватернионные F-алгебры $(-1, x+\alpha)$ попарно неизоморфны и имеют F/K-инволюции. Действительно, эти алгебры ветвятся в различных дискретных нормированиях (тривиальных на $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$) поля F, определяемых многочленами $x + \alpha$. Кроме того, эти алгебры имеют тривиальное кограничение до K, поскольку $cor_{F/K}([(-1, x+\alpha)]) = [(-1, x+\alpha)^2] = 0$. Однако теорема 1, сформулированная во введении, говорит больше: все кватернионные алгебры с инволюциями должны расщепляться любым квадратичным расширением центра.*

Доказательство теоремы 1. Пусть F и K — такие поля, что $[F : K] = 2$ и существует бесконечно много неизоморфных кватернионных F-алгебр с делением с F/K-инволюцией. Пусть также $A_0 \subset Alg_2(F)$ — помножество, состоящее из алгебр с F/K-инволюцией.

Положим $E_0 := F$ и $T_0 := K$. Для $i \geqslant 0$ рекурсивно определим

$$E_{i+1} := E_{i(T_i,Ext_2(E_i),A_i)} \text{ и } T_{i+1} := T_{i(Ext_2(E_i),A_i)},$$

где $A_i \subset Alg_2(E_i)$ — подмножество, состоящее из алгебр с F_i/K_i-инволюцией. Пусть $E := \bigcup_{i\geqslant 0} E_i$ и $T := \bigcup_{i\geqslant 0} T_i$.

Как при доказательстве теоремы 2 заключаем, что гомоморфизм $\mathrm{res}_{E/F} : \mathrm{Br}(F) \longrightarrow \mathrm{Br}(E)$ инъективен.

Пусть L/E — квадратичное расширение, $\mathcal{A}$ — кватернионная E-алгебра с E/T-инволюцией. Тогда найдется такое $i \geqslant 0$, что $\mathcal{A} = \mathcal{A}'_E$ для некоторой кватернионной E_i-алгебры $\mathcal{A}'$. Более того, поскольку $\mathcal{A}$ имеет E/T-инволюцию, то $\mathrm{cor}_{E_k/T_k}([\mathcal{A}'_{E_k}]) = 0$.

Так как диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Br}(E_i) & \xrightarrow{\mathrm{res}} & \mathrm{Br}(E) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{cor}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{cor}} \\ \mathrm{Br}(T_i) & \xrightarrow{\mathrm{res}} & \mathrm{Br}(T) \end{array}$$

коммутативна (см, например, [25, Theorem 8.1 d]), то $\mathrm{cor}_{E_k/T_k}([\mathcal{A}'_{E_k}]) = 0$ для некоторого $k \geqslant i$, следовательно, $\mathcal{A}'_{E_k}$ имеет E_k/T_k-инволюцию.

Также найдется такое $j \geqslant 0$, что $L = E_j L'$ для некоторого квадратичного расширения L' поля E_j. Из конструкции поля E следует, что для n, большего чем j и k, алгебра $\mathcal{A}'_{E_n}$ расщепляется полем $E_n L'$. Следовательно, L расщепляет $\mathcal{A}$.

Наконец, как и в доказательстве теоремы 2 получаем, что всякая алгебра из $\mathrm{res}_{E/F}(A_0)$ имеет E/T-инволюцию. Более того, так как множество A_0 бесконечно и гомоморфизм

$$\mathrm{res}_{E/F} : \mathrm{Br}(F) \longrightarrow \mathrm{Br}(E)$$

инъективен, то имеется бесконечно много неизоморфных кватернионных E-алгебр с делением с E/T-инволюцией. ■

4. Заключение

В статье строится такое поле E, что существует бесконечно много неизоморфных кватернионных E-алгебр с унитарными инволюциями и все такие алгебры расщепляются любым квадратичным расширением поля E. Полученные результаты могут найти применение при изучении родов унитарных алгебраических групп.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Черноусов В. И., Рапинчук А. С., Рапинчук И. А. Алгебры с делением, имеющие одинаковые максимальные подполя // Успехи математических наук. 2015. Том 70, Вып. 1. С. 89-122. (English transl.: Chernousov V. I., Rapinchuk A. S., Rapinchuk I. A. Division algebras with the same maximal subfields // Russian Math. Surveys. 2015. Vol. 70, Issue 1. P. 83-112.)

2. Тихонов С. В. Алгебры с делением простой степени с бесконечным родом // Труды МИАН. 2016. Том 292. С. 264-267. (English transl.: Tikhonov S.V. Division algebras of prime degree with infinite genus // Proc. Steklov Inst. Math. 2016. Vol. 292. P. 264-267.)

3. Amitsur S. A. Generic splitting fields of central simple algebras // Ann. of Math. (2). 1955. Vol. 62, № 1. P. 8-43.

4. Beli C., Gille P., Lee T.-Y. Examples of algebraic groups of type G_2 having the same maximal tori // Труды МИАН. 2016. Том 292. С. 16-25 и Proc. Steklov Inst. Math. 2016. Vol. 292. P. 10-19.

5. Chernousov V. I., Rapinchuk A. S., Rapinchuk I. A. On the genus of a division algebra // C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I. 2012. Vol. 350, № 17-18. P. 807-812.

6. Chernousov V. I., Rapinchuk A. S., Rapinchuk I. A. The genus of a division algebra and the unramified Brauer group // Bull. Math. Sci. 2013. Vol. 3, № 2. P. 211-240.

7. Chernousov V. I., Rapinchuk A. S., Rapinchuk I. A. On the size of the genus of a division algebra // Труды МИАН. 2016. Том 292. С. 69–99 и Proc. Steklov Inst. of Math. 2016. Vol. 292, № 1. P. 63-93.

8. Chernousov V. I., Rapinchuk A. S., Rapinchuk I. A. On some finiteness properties of algebraic groups over finitely generated fields // C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I. 2016. Vol. 354. P. 869-873.

9. Chernousov V. I., Rapinchuk A. S., Rapinchuk I. A. Spinor groups with good reduction // Compos. Math. 2019. Vol. 155, № 3. P. 484-527.

10. Chernousov V. I., Rapinchuk A. S., Rapinchuk I. A. The finiteness of the genus of a finite-dimensional division algebra, and generalizations // Israel J. Math. 2020. Vol. 236, № 2. P. 747-799.

11. Chernousov V. I., Rapinchuk A. S., Rapinchuk I. A. Simple algebraic groups with the same maximal tori, weakly commensurable Zariski-dense subgroups, and good reduction // Adv. Math. 2024. Vol. 438. Paper № 109437.

12. Garibaldi S., Saltman D. Quaternion Algebras with the Same Subfields // Quadratic forms, linear algebraic groups, and cohomology. Dev. math. 18, Springer, New York, 2010. P. 225-238

13. Knus M.-A., Merkurjev A. S., Rost M., Tignol J.-P. The Book of Involutions. — Colloquium Publications. Vol. 44, Amer. Math. Soc., 1998, +593 pp.

14. Krashen D., McKinnie K. Distinguishing algebras by their finite splitting fields // Manuscripta Math. 2011. Vol. 134, № 1-2. P. 171-182.

15. Krashen D., Matzri E., Rapinchuk A., Rowen L., Saltman D. Division algebras with common subfields // Manuscripta Math. 2022. Vol. 169, № 1-2. P. 209-249.

16. Meyer J. S. Division algebras with infinite genus // Bull. London Math. Soc. 2014. Vol. 46, № 3. P. 463-468.

17. Prasad G., Rapinchuk A. S. Weakly commensurable arithmetic groups and isospectral locally symmetric spaces // Publ. math. IHES. 2009. Vol. 109. P. 113-184.

18. Prasad G., Rapinchuk A. S. Local-global principles for embedding of fields with involution into simple algebras with involution // Comment. Math. Helv. 2010. Vol. 85. P. 583-645.

19. Rapinchuk A. S., Rapinchuk I. A. On division algebras having the same maximal subfields // Manuscripta Math. 2010. Vol. 132, № 3-4. P. 273-293.

20. Rapinchuk A. S., Rapinchuk I. A. Linear algebraic groups with good reduction // Res. Math. Sci. 2020. Vol. 7, № 3. Paper № 28.

21. Rapinchuk A. S., Rapinchuk I. A. Recent developments in the theory of linear algebraic groups: Good reduction and finiteness properties // Notices Amer. Math. Soc. 2021. Vol. 68, № 6. P. 899-910.

22. Rapinchuk A. S., Rapinchuk I. A. Some finiteness results for algebraic groups and unramified cohomology over higherdimensional fields // J. Number Theory. 2022. Vol. 233. P. 228-260.

23. Rapinchuk A. S., Rapinchuk I. A. Properness of the global-to-local map for algebraic groups with toric connected component and other finiteness properties // Math. Res. Lett. 2023. Vol. 30, № 3. P. 913–943.

24. Roquette P. Isomorphisms of generic splitting fields of simple algebras // J. Reine Angew. Math. 1964. Vol. 214/215. P. 207-226.

25. Saltman D. J. Lectures on Division Algebras. — Providence, RI: Amer. Math. Soc. 1999, + 120 pp.

26. Tikhonov S. V. On genus of division algebras // Manuscripta Math. 2021. Vol. 164, № 1. P. 321-325.

27. Tikhonov S. V. Outer forms of type A_2 with infinite genus // Documenta Math. 2024. Vol. 29. № 4. P. 805–814. См. также arXiv:2305.01606.

REFERENCES

1. Chernousov, V. I., Rapinchuk, A. S. & Rapinchuk, I. A. 2015, "Division algebras with the same maximal subfields", *Russian Math. Surveys*, vol. 70, issue 1, pp. 83-112.

2. Tikhonov, S. V. 2016, "Division algebras of prime degree with infinite genus", *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 292, pp. 264-267.

3. Amitsur, S. A. 1955, "Generic splitting fields of central simple algebras", *Ann. of Math. (2)*, vol. 62, no. 1, pp. 8-43.

4. Beli, C., Gille, P. & Lee, T.-Y. 2016, "Examples of algebraic groups of type G_2 having the same maximal tori", *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 292, pp. 10-19.

5. Chernousov, V. I., Rapinchuk, A. S. & Rapinchuk, I. A. 2012, "On the genus of a division algebra", *C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I.*, vol. 350, no. 17-18, pp. 807-812.

6. Chernousov, V. I., Rapinchuk, A. S. & Rapinchuk, I. A. 2013, "The genus of a division algebra and the unramified Brauer group", *Bull. Math. Sci.*, vol. 3, no. 2, pp. 211-240.

7. Chernousov, V. I., Rapinchuk, A. S. & Rapinchuk, I. A. 2016, "On the size of the genus of a division algebra", *Proc. Steklov Inst. of Math.*, vol. 292, no. 1, pp. 63-93.

8. Chernousov V. I., Rapinchuk A. S., Rapinchuk I. A. 2016, "On some finiteness properties of algebraic groups over finitely generated fields", *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I.*, vol. 354, pp. 869-873.

9. Chernousov, V. I., Rapinchuk, A. S. & Rapinchuk, I. A. 2019, "Spinor groups with good reduction", *Compos. Math.*, vol. 155, no. 3, pp. 484-527.

10. Chernousov, V. I., Rapinchuk, A. S. & Rapinchuk, I. A. 2020, "The finiteness of the genus of a finite-dimensional division algebra, and generalizations", *Israel J. Math.*, vol. 236, no. 2, pp. 747-799.

11. Chernousov, V. I., Rapinchuk, A. S. & Rapinchuk, I. A. 2024, "Simple algebraic groups with the same maximal tori, weakly commensurable Zariski-dense subgroups, and good reduction", *Adv. Math.*, vol. 438, paper no. 109437.

12. Garibaldi, S. & Saltman, D. 2010, "Quaternion Algebras with the Same Subfields", Quadratic forms, linear algebraic groups, and cohomology. Dev. math. 18, Springer, New York, pp. 225-238

13. Knus, M.-A., Merkurjev, A. S., Rost, M. & Tignol, J.-P. 1998, "The Book of Involutions", Colloquium Publications. vol. 44, Amer. Math. Soc., +593 pp.

14. Krashen, D. & McKinnie, K. 2011, "Distinguishing algebras by their finite splitting fields", *Manuscripta Math.*, vol. 134, no. 1-2, pp. 171-182.

15. Krashen, D., Matzri, E., Rapinchuk, A., Rowen, L. & Saltman, D. 2022, "Division algebras with common subfields", *Manuscripta Math.*, vol. 169, no. 1-2, pp. 209-249.

16. Meyer, J. S. 2014, "Division algebras with infinite genus", *Bull. London Math. Soc.*, vol. 46, no. 3, pp. 463-468.

17. Prasad, G. & Rapinchuk, A. S., 2009, "Weakly commensurable arithmetic groups and isospectral locally symmetric spaces", *Publ. math. IHES.*, vol. 109, pp. 113-184.

18. Prasad, G. & Rapinchuk, A. S. 2010, "Local-global principles for embedding of fields with involution into simple algebras with involution", *Comment. Math. Helv.*, vol. 85, pp. 583-645.

19. Rapinchuk, A. S. & Rapinchuk, I. A. 2010, "On division algebras having the same maximal subfields", *Manuscripta Math.*, vol. 132, no. 3-4, pp. 273-293.

20. Rapinchuk, A. S. & Rapinchuk, I. A. 2020, "Linear algebraic groups with good reduction", *Res. Math. Sci.*, vol. 7, no. 3, paper no. 28.

21. Rapinchuk, A. S. & Rapinchuk, I. A. 2021, "Recent developments in the theory of linear algebraic groups: Good reduction and finiteness properties", *Notices Amer. Math. Soc.*, vol. 68, no. 6, pp. 899-910.

22. Rapinchuk, A. S. & Rapinchuk, I. A. 2022, "Some finiteness results for algebraic groups and unramified cohomology over higherdimensional fields", *J. Number Theory.*, vol. 233, pp. 228-260.

23. Rapinchuk, A. S. & Rapinchuk, I. A. 2023, "Properness of the global-to-local map for algebraic groups with toric connected component and other finiteness properties", *Math. Res. Lett.*, vol. 30, no. 3, pp. 913–943.

24. Roquette, P. 1964, "Isomorphisms of generic splitting fields of simple algebras", *J. Reine Angew. Math.*, vol. 214/215, pp. 207-226.

25. Saltman, D. J. 1999, "Lectures on Division Algebras", *Providence, RI: Amer. Math. Soc.*, + 120 pp.

26. Tikhonov, S. V. 2021, "On genus of division algebras", *Manuscripta Math.*, vol. 164, no. 1, pp. 321-325.

27. Tikhonov, S. V. 2024, "Outer forms of type A_2 with infinite genus", *Documenta Math.*, Vol.29, № 4, pp. 805–814.

Получено: 17.03.2024
Принято в печать: 04.09.2024

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 25. Выпуск 3.

УДК 512.54 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-236-247

О проблеме обобщенной сопряженности слов в обобщенных древесных структурах групп Артина

А. С. Угаров, И. В. Добрынина

Угаров Андрей Сергеевич — аспирант, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: ugarandrey@gmail.com
Добрынина Ирина Васильевна — доктор физико-математических наук, Московский технический университет связи и информатики (г. Москва).
e-mail: dobrynirina@yandex.ru

Аннотация

Группы Артина являются обобщением известных групп кос, в последних алгоритмически разрешимы проблемы равенства и сопряженности слов. В силу сложности решения указанных проблем в классе групп Артина, алгоритмические проблемы рассматриваются в различных его подклассах.

В 1983 году К. Аппель и П. Шупп определили группы Артина экстрабольшого типа.

В 2003 году В. Н. Безверхний ввел в рассмотрение группы Артина с древесной структурой.

В статье рассматриваются обобщенные древесные структуры групп Артина, представляющие собой древесные произведения групп Артина экстрабольшого типа и групп Артина с древесной структурой, объединенных по циклическим подгруппам, соответствующим образующим этих групп.

Авторами статьи приводится оригинальное доказательство алгоритмической разрешимости проблемы обобщенной сопряженности слов в обобщенных древесных структурах групп Артина. Метод доказательства использует подход Г. С. Маканина, примененный им для исследования конечной порожденности нормализатора элемента в группах кос. Кроме того, в данной работе показывается, что централизатор конечно порожденной подгруппы в обобщенной древесной структуре групп Артина конечно порожден и существует алгоритм, выписывающий его образующие.

Ключевые слова: алгоритмические проблемы, группа Артина, обобщенная сопряженность, древесное произведение групп, централизатор.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:
Угаров, А. С., Добрынина, И. В. О проблеме обобщенной сопряженности слов в обобщенных древесных структурах групп Артина // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 3, с. 236–247.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 25. No. 3.

UDC 512.54 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-236-247

On problem of generalized conjugation of words in a generalized tree structures of Artin groups

A. S. Ugarov, I. V. Dobrynina

Ugarov Andrei Sergeyevich — postgraduate student, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: ugarandrey@gmail.com
Dobrynina Irina Vasil'evna — doctor of physical and mathematical sciences, Moscow Technical University of Communications and Informatics (Moscow).
e-mail: dobrynirina@yandex.ru

Abstract

Artin groups are a generalization of known braid groups, in which the problems of words and conjugacy of words are algorithmically solvable. Due to the complexity of solving these problems in the Artin group class, algorithmic problems are considered in its various subclasses.

In 1983 K. Appel and P. Schupp defined the Artin groups extra-large type.

In 2003, V. N. Bezverkhny introduced the Artin group with a tree structure.

Artin groups of extra-large type and Artin groups with tree structure are well studied and most of the algorithmic problems are solved in them, in particular, the algorithmic solvability of the problem of generalized conjugacy of words is proved.

The article deals with generalized tree structures of Artin groups, which are tree products of Artin groups of extra-large type and Artin groups with a tree structure, united by cyclic subgroups corresponding to generatings these groups.

The authors provide a original proof of algorithmic solvability of the problem of generalized conjugacy of words in generalized tree structures of Artin groups. The method of proof uses the approach of G. S. Makanin, applied by him to study the finite generality of the element Normalizer in braid groups. In addition, this paper shows that the centralizer of a finitely generated subgroup in the generalized tree structure of Artin groups is finitely generated and there is an algorithm that writes out its generators.

Keywords: algorithmic problems, Artin group, generalized conjugation, tree product of groups, centralizer.

Bibliography: 15 titles.

For citation:
Ugarov, A. S. & Dobrynina, I. V. 2024, "On problem of generalized conjugation of words in a generalized tree structures of Artin groups" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 3, pp. 236–247.

1. Введение

Пусть G – конечно порожденная группа Артина с копредставлением

$$G = \langle a_1, ..., a_l; < a_i a_j >^{m_{ij}} = < a_j a_i >^{m_{ji}}, i, j = \overline{1,l}, i \neq j \rangle,$$

где $< a_i a_j >^{m_{ij}}$ – слово длины m_{ij}, состоящее из m_{ij} чередующихся букв a_i и $a_j, i \neq j$, m_{ij} – число, соответствующее симметрической матрице Кокстера: $m_{ij} \in \mathbb{N} \backslash \{1\} \cup \{\infty\}, i, j = \overline{1,l}$, $i \neq j$. В случае $m_{ij} = \infty, i \neq j$, определяющего соотношения между образующими a_i, a_j нет.

К. Аппель и П. Шупп [1] определили класс групп Артина экстрабольшого типа и в нем решили проблемы равенства и сопряженности слов.

Группы Артина с древесной структурой введены В. Н. Безверхним [2]. В графе, соответствующем группе Артина, всегда можно выделить максимальный подграф, соответствующий группе Артина с древесной структурой. В данном классе групп В. Н. Безверхним и О. Ю. Платоновой (Карповой) решен ряд алгоритмических проблем [3].

В статье приводится оригинальный метод доказательства алгоритмической разрешимости проблемы обобщенной сопряженности слов в обобщенных древесных структурах групп Артина, представляющих собой древесные произведения групп Артина экстрабольшого типа и групп Артина с древесной структурой, объединенных по циклическим подгруппам, соответствующим образующим этих групп. Доказывается, что централизатор конечно порожденной подгруппы в данном классе групп конечно порожден и существует алгоритм, выписывающий его образующие

В доказательстве основных результатов используется метод диаграмм, введенный ван Кампеном, переоткрытый Р. Линдоном [4] и усовершенствованный В. Н. Безверхним [5], а также методы работы [6]. Более того, в данной статье мы хотим использовать процедуру доказательства из статьи [7], где данные проблемы рассматриваются для обобщенных древесных структур групп Кокстера. Заметим, что группа Кокстера получается мз группы Артина добавлением к определяющим соотношениям соотношений вида $a_i^2 = 1, i = \overline{1,l}$. Для этого нам прежде всего надо изучить строение диаграмм над обобщенными древесными структурами групп Артина и рассмотреть возможности построения базисных последовательностей.

2. Централизатор конечно порожденной подгруппы

Рассмотрим конечно порожденную группу Артина, заданную копредставлением $G = \langle a_1, ..., a_l; < a_i a_j >^{m_{ij}} = < a_j a_i >^{m_{ji}}, i, j = \overline{1,l}, i \neq j \rangle$, где $< a_i a_j >^{m_{ij}}$ — слово длины m_{ij}, состоящее из m_{ij} чередующихся букв a_i и $a_j, i \neq j$, m_{ij} – число, соответствующее симметрической матрице Кокстера: $m_{ij} \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \cup \{\infty\}, i, j = \overline{1,l}$, $i \neq j$, при $m_{ij} = \infty$ определяющего соотношения между образующими a_i, a_j нет.

Если $m_{ij} > 3$, $i \neq j$, то G называется группой Артина экстрабольшого типа [1].

Построим для группы Артина G граф Γ такой, что образующим a_i поставим в соответствие вершины графа Γ, а каждому определяющему соотношению $< a_i a_j >^{m_{ij}} = < a_j a_i >^{m_{ji}}, m_{ij} \neq \infty$ – ребро, соединяющее a_i и a_j, $i \neq j$. Если при этом получится дерево-граф Γ, то группа G называется группой Артина с древесной структурой [3].

Группа Артина G с древесной структурой может быть представлена как свободное произведение двупорожденных групп Артина, объединенных по бесконечным циклическим подгруппам: от графа Γ группы Артина G перейдем к графу $\overline{\Gamma}$ так, что вершинам графа $\overline{\Gamma}$ поставим в соответствие группы Артина на двух образующих $G_{ij} = \langle a_i, a_j; < a_i a_j >^{m_{ij}} = < a_j a_i >^{m_{ji}} \rangle$, а всякому ребру $\overline{e}$, соединяющему вершины, соответствующие G_{ij} и G_{jk} — циклическую подгруппу $\langle a_j \rangle$.

Далее в статье будем рассматривать группу группу Артина

$$G = \langle \prod_{s=1}^{t} * G_s; a_{i_m} = a_{j_k}, i \neq j, i, j \in \{\overline{1,t}\} \rangle,$$

представляющую собой древесное произведение групп Артина G_s, где G_s либо группа Артина с древесной структурой, либо группа Артина экстрабольшого типа, запись $a_{i_m} = a_{j_k}$ означает, что объединение групп Артина G_i и G_j ведется по бесконечным циклическим подгруппам $\langle a_{i_m} \rangle, \langle a_{j_k} \rangle$, где a_{i_m} — некоторый образующий группы G_i, a_{j_k} — некоторый образующий группы G_j. Такую группу Артина G будем называть обобщенной древесной структурой групп Артина

[8] и далее всюду под группой Артина G будем понимать такую группу, если нет специальных оговорок.

Данный класс групп относится к почти большим группам Артина и в нем алгоритмически разрешимы проблемы равенства и сопряженности слов [9].

Пусть $F_i = \langle a_i \rangle$, $F = \prod_{i=1}^{l} * F_i$ – свободное произведение циклических групп $F_i, \{a_i\}_{i=\overline{1,l}}$ – множество образующих G.

Обозначим через R_{ij} – множество всех нетривиальных слов, циклически приведенных в свободном произвдении $F_{ij} = F_i * F_j$ и равных 1 в группе G_{ij}. Группу Артина G_{ij} можно задать как $G_{ij} = \langle a_i, a_j; R_{ij} \rangle$.

Обозначим через $|w|$ длину слова w, а через $||w||$ – слоговую длину слова w.

В дальнейшем под R будем понимать $R = \bigcup_{i,j \in \{\overline{1,l}\}} R_{ij}$ – симметризованное подмножество свободного произведения F.

Пусть u, v – два циклически приведенных слова, $u,\ z \notin \langle R \rangle^G$, не сопряженные в F и сопряженные в G, где $\langle R \rangle^G$ – нормальное замыкание симметризованного множества R в G [4]. Тогда существует связная приведенная кольцевая R-диаграмма M с внешней граничной меткой u и внутренней граничной меткой v^{-1}, граничными метками областей D которой являются соотношения из R [4].

Подвергнем R-диаграмму M следующему преобразованию.

Если две области D_1, D_2 являются одновременно R_{ij}-диаграммами, пересекаются по ребру с меткой $\varphi(\partial D_1 \cap \partial D_2)$, то, стирая это ребро, объединим D_1, D_2 в одну область D. Допустим, что каждая из областей D_1, D_2 есть R_{ij}-диаграмма, D_1, D_2 пересекаются по вершине. Тогда объединяем D_1, D_2 в одну область D. Если в том или другом случае метка границы полученной области равна единице в свободном произведении F, то, удалив эту область, склеиваем ее границу. Таким образом, через конечное число шагов мы получим приведенную в F связную R-диаграмму M, инвариантную относительного рассмотренного преобразования с граничной меткой, равной w, причем если две области D', D'' из M пересекаются по ребру, то слоговая длина метки этого ребра равна единице.

Введем ряд определений, следуя работам [3], [5], [10] – [12].

Область $D \subset M$ назовем граничной, если $\partial M \cap \partial D \neq \emptyset$. Символами $i(D)$ будем обозначать число внутренних ребер в граничном цикле D, $d(D)$ – число ребер в граничном цикле D.

Область D с граничным циклом $\partial D = e\gamma e^{-1}\delta$, расположенная по обе стороны относительно ребра e, в которой склеенные ребра e и e^{-1} пересекают граничный цикл D, называется $(s-i)$-областью.

Будем говорить, что $\partial D \cap \partial M$ – правильная часть M, если $\partial D \cap \partial M$ есть объединение последовательности $l_1, l_2, \ldots, l_n$ замкнутых ребер, где $l_1, \ldots, l_n$ встречаются в данном порядке в некотором граничном цикле для D и в некотором граничном цикле для M [4].

Граничную область D R-диаграммы M назовем правильной, если $\partial D \cap \partial M$ есть правильная часть.

Определение 1. *Правильная область D R-диаграммы M называется деновской, если $i(D) < d(D)/2$.*

Определение 2. *Удаление внешней границы деновской области R-диаграммы M называется деновским сокращением R-диаграммы M или R-сокращением.*

R-диаграмма M является R-приведенной, если в M выполнены все деновские сокращения.

Слово $w \in G$ назовем R-приводимым (R-сократимым), если w приведено в F и содержит подслово s, являющееся подсловом некоторого соотношения $r \in R$, $r = sb$, где $||b|| < ||s||$.

Определение 3. *Поддиаграмма* $\Pi = \bigcup\limits_{i=1}^{n} D_i$ *образует полосу в* R*-приведенной* R*-диаграмме* M *с граничным циклом* $\partial M = \gamma \cup \delta$, *если*

1. $\partial D_i \cap \partial D_{i+1} = e_i,\ i = \overline{1, n-1}$, *где* e_i *– ребро ;*
2. $\partial D_i \cap \gamma = \gamma_i,\ i = \overline{1, n}$, *где* γ_i *– связный путь, причем* $||\gamma_i|| \geqslant 1$;
3. $||\partial D_1 \cap \gamma|| = ||\partial D_1 \backslash (\partial D_1 \cap \gamma)||$ *и* $||\partial D_n \cap \gamma|| = ||\partial D_n \backslash (\partial D_n \cap \gamma)||$;
4. $||\partial D_j \cap \gamma|| + 2 = ||\partial D_j \backslash (\partial D_j \cap \gamma)||,\ j = \overline{2, n-1}$.

Определение 4. *Пусть* Π *– полоса* R*-диаграммы* M. *Замену* R*-диаграммы* M *на* R*-диаграмму* M_1, *полученную из* M *удалением полосы* Π, *назовем* $\overline{R}$*-сокращением.*

R-приведенное слово w группы G назовем $\overline{R}$-приводимым ($\overline{R}$-сократимым), если в нем можно выделить подслово $s_1 s_2 \cdots s_n$, где каждое s_t содержится в некоторой группе G_{ij} и является подсловом соотношения $s_t^{-1} d_t^{-1} b_t d_{t+1} \in R$, причем при $1 \leq t \leq n$ $\quad ||d_t|| = ||d_{t+1}|| = 1$, $||s_t|| = ||b_t|| + 2$ и для t, $1 < t < n$, $||b_t|| = ||s_t||$.

Лемма 1. *Существует алгоритм, позволяющий для любого циклически приведенного слова* w *группы Артина* G *выяснить, является ли* w R*-приведенным.*

Существует алгоритм, позволяющий для любого циклически приведенного слова w *группы Артина* G *выяснить, является ли* w $\overline{R}$*-приведенным.*

Доказательство очевидно.

Определение 5. *Приведенную связную кольцевую* R*-диаграмму* M *с границей* $\partial M = \sigma \cup \tau$ *будем называть однослойной, если*

1) M *состоит из областей* $D_1, D_2, \ldots, D_m$, *где* $D_j \cap D_{j+1} = e_j, j = \overline{1, m-1}, D_1 \cap D_m = e_m$, $D_j \cap \sigma \neq \emptyset, D_j \cap \tau \neq \emptyset, j = \overline{1, m}$, e_j *– ребро,*

или

2) $M = (\bigcup\limits_{i=1}^{p} N_i) \cup (\bigcup\limits_{j=1}^{p} \gamma_j)$, N_i *– поддиаграммы (диски) в* M *с границами* $\partial N_i = \sigma_i \cup \tau_i, \sigma_i \cap \tau_i = A_i, B_i$ *– вершины,* $i = \overline{1, p}$, γ_i *– простые пути с концами* $B_{i-1}, A_i, i = \overline{2, p}$, *простой путь* γ_1 *имеет начало* B_p, *а конец –* A_1, *где каждое* N_i *из состоит из областей* $D_{i_1}, D_{i_2}, \ldots, D_{i_{m_i}}$, *причем* $D_{i_j} \cap D_{i_{j+1}} = e_{i_j}, j = \overline{1, m_i - 1}, D_{i_j} \cap \sigma \neq \emptyset, D_{i_j} \cap \tau \neq \emptyset, j = \overline{1, m_i}$, e_{i_j} *– ребро.*

Из данного определения имеем, что в случае 1) все области M граничные, каждая пара соседних областей, взятых в циклической последовательности, пересекается по ребру, каждая область пересекает и σ, и τ (пересечением может быть вершина, одно или несколько ребер). В случае 2) имеем простую кольцевую R-диаграмму, то есть R-диаграмму, в которой $\sigma \cap \tau \neq \emptyset$. Пути γ_i, по которым пересекаются σ, τ, отделяют поддиаграммы (диски), причем заметим, что эти пути, в том числе, могут иметь нулевую длину (быть вершиной).

Теорема 1. *[11] Пусть* M *– приведенная связная кольцевая* R*-диаграмма сопряженности слов* $\varphi(\sigma), \varphi(\tau) \in G$ *над группой Артина* G, *не содержащая* $(s-i)$*-областей;* σ, τ *– соответственно внешний и внутренний граничный циклы* M, *слова* $\varphi(\sigma)$, $\varphi(\tau)$ *циклически* R *и* $\overline{R}$*-несократимы. Тогда* M *является однослойной.*

Определение 6. *Кольцевую связную приведенную однослойную* R*-диаграмму* M *с граничными циклами* σ, τ *над группой Артина* G, *метки которой* $\varphi(\sigma)$, $\varphi(\tau)$ *приведены в* F, $\varphi(\sigma)$ *–* R*-приведено и* $\overline{R}$*-приведено, назовем особо специальной* R*-диаграммой, если в* M *существует одна область* D *такая, что* $||\varphi(\partial D \setminus (\partial D \bigcap \sigma))|| + 2 = ||\varphi(\partial D \setminus (\partial D \bigcap \tau))||$ $(||\varphi(\partial D \setminus (\partial D \bigcap \sigma))|| = ||\varphi(\partial D \setminus (\partial D \bigcap \tau))|| + 2)$, *а для остальных областей* D' $||\varphi(\partial D' \setminus (\partial D' \bigcap \bigcap \sigma))|| = ||\varphi(\partial D' \setminus (\partial D' \bigcap \tau))||$.

Замену слова $\varphi(\sigma)(\varphi(\tau))$ на слово $\varphi(\tau)(\varphi(\sigma))$ назовем специальным кольцевым R-сокращением.

Определение 7. *Будем говорить, что циклически несократимое слово w группы Артина G является тупиковым, если w циклически R-несократимо, циклически $\overline{R}$-несократимо и к нему неприменимо специальное кольцевое R-сокращение.*

Лемма 2. *Пусть M – связная приведенная минимальная R-диаграмма над группой Артина G с граничными циклами σ, τ; $\varphi(\sigma)$, $\varphi(\tau)$ являются тупиковыми. Тогда если $\varphi(\sigma) = x^r$, то $\varphi(\tau) = y^r$, где $x, y \in \{a_i^{\pm 1}\}_{i=\overline{1,l}}$, $\{a_i\}_{i=\overline{1,l}}$ – множество образующих группы G.*

Доказательство следует из работ [3] и [10], где также показано, что такие диаграммы состоят из $(s-i)$-областей.

Теорема 2. *[5] Пусть $G_{ij} = \langle a_i, a_j; < a_i a_j >^{m_{ij}} = < a_j a_i >^{m_{ji}} \rangle$, $w \in G_{ij}$ циклически несократимо в свободной группе, имеет слоговую длину, равную $2m_{ij}$, и равно единице в G_{ij}. Тогда оно имеет вид:*

при $m_{ij} = 2k+1$ $a_i^m a_j a_i \dots a_i a_j^{-m} a_i^{-1} a_j^{-1} \dots a_j^{-1}$, либо $a_i a_j a_i \dots a_i^m a_j^{-1} a_i^{-1} a_j^{-1} \dots a_j^{-m}$, либо им обратные,

при $m_{ij} = 2k, k > 1$ $a_i^m a_j a_i \dots a_j a_i^{-m} a_j^{-1} a_i^{-1} \dots a_j^{-1}$, либо $a_i a_j a_i \dots a_j^m a_i^{-1} a_j^{-1} a_i^{-1} \dots a_j^{-m}$, либо им обратные,

при $m_{ji} = 2$ $a_i^m a_j^l a_i^{-m} a_j^{-l}$, либо им обратные, $m, l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Из [5] также следует, что показатели степеней можно ограничить (по модулю) числом p, называемым параметром диаграммы: $p = |w| + |v|$.

Теорема 3. *Централизатор конечно порожденной подгруппы H обобщенной древесной структуры групп Артина G есть конечно порожденная подгруппа и существует алгоритм, выписывающий образующие централизатора.*

Доказательство. Пусть $u = x^r$, $x \in \{a_i^{\pm 1}\}_{i=\overline{1,l}}$, тогда из леммы 2 следует, что $v = y^r$, $y \in \{a_i^{\pm 1}\}_{i=\overline{1,l}}$, и диаграмма сопряженности этих слов состоит из $(s-i)$-областей.

Пусть M – кольцевая R-диаграмма, v – произвольная точка, принадлежащая некоторому замкнутому ребру $e \in M$, $e = e'e''$, $e' \bigcap e'' = v$. Тогда замкнутый путь $l \in M$ с начальной и конечной точкой v: $l = e'^{-1} e_1 \dots e_n t$, где $t = e'$ либо $t = e''^{-1}$, либо $l = e'' e_1' \dots e_n' t'$, где $t' = e'$ либо $t' = e''^{-1}$ назовем циклическим в M, если l гомотопен τ, соответственно σ. Кратчайший из всех циклических путей кольцевой R-диаграммы M, проходящих через некоторую точку v, принадлежащую ребру e, $e \in M$, назовем циклическим геодезическим путем с началом и концом в v.

Пусть $\sigma_0 = \sigma, \sigma_1, \dots, \sigma_k = \tau$ – граничные циклы R-диаграмм, полученных из $M = M_0$ последовательным удалением $(s-i)$-областей. Но тогда $\varphi(\sigma_i) = x_i^r$, $x_i \in \{a_j^{\pm 1}\}_{j=\overline{1,l}}, i = \overline{0,k}$, и любые два элемента x_{i-1}^r, x_i^r, $i = \overline{1,k}$, где $x^r = x_0^r$, $x_k^r = y^r$ сопряжены в $G_{x_{i-1}x_i}$ максимальным куском определяющего соотношения группы $G_{x_{i-1}x_i}$.

Пусть $m_0 = \max\{m_{ij} \mid m_{ij} < \infty\}$. Тогда длина любого циклического геодезического пути из M заключена в пределах $|u| \leqslant d \leqslant |u| + 2m_0$. Заметим, что для кольцевых R-диаграмм, состоящих из $(s-i)$-областей, в качестве параметра p можно взять любое число, в частности, $p = 0$.

Пусть слова u, v не являются степенями образующих в G. В этом случае u, v будут метками граничных циклов кольцевой R-диаграммы M как в теореме 1. Так как u сопряжено с v, u,v являются тупиковыми, то, как следует из [3], [12] и теоремы 1, $||u|| = ||v||$.

Укажем границы изменения длины циклического геодезического пути для диаграммы M. На основании теорем 1, 2 длина d циклического геодезического пути заключена в пределах $|u| \leqslant d \leqslant |u| + |v| + 2p$.

Пусть теперь $w_1, w_2, \ldots, w_n$ – образующие H, $H < G$; считаем, что $w_1 = w_{10}$ – тупиковое слово и $\forall i$, $i = \overline{2,n}$, $w_i = c_i w_{i0} c_i^{-1}$, где w_{i0} является тупиковым; $\Delta(w_{i0}, w_{i0})$ – кольцевая связная приведенная R-диаграмма сопряженности слова w_{i0} слову w_{i0}. Введем обозначения: $c = \max\{|c_1|, \ldots, |c_n|\}$, где $|c_1| = 0$ и $S(w_i, w_i)$, $i = \overline{1,n}$, – множество слов, длины d_i которых заключены в пределах $|w_{i0}| \leqslant d_i \leqslant 2(|w_{i0}| + |c| + p + m_0)$.

Рассмотрим следующую последовательность:

$$w_1^{(0)}, \ldots, w_n^{(0)}, H_1, w_1^{(1)}, \ldots, w_n^{(1)}, H_2, \ldots, H_m, w_1^{(m)}, \ldots, w_n^{(m)}, \qquad (1)$$

где $\forall i$, $i = \overline{1,m}$, $H_i^{-1} w_1^{(i-1)} H_i = w_1^{(i)}, \ldots, H_i^{-1} w_n^{(i-1)} H_i = w_n^{(i)}, H_i \in T = \{a^t, a \in \{a_i^{\pm 1}\}_{i=\overline{1,l}}, 1 \leq$ $\leq t \leq p\}, w_j^{(s)} \in S(w_j, w_j)$ и является меткой циклического геодезического диаграммы $\Delta(w_{j0}, w_{j0})$, $j = \overline{1,n}, s = \overline{0,m}$, $w_j^{(0)} = c_j w_{j0} c_j^{-1}$.

Последовательность (1) называется базисной. Базисную последовательность (1) назовем фундаментальной, если для $\forall j, s, 0 \leqslant j < s < m$, наборы $(w_1^{(j)}, \ldots, w_n^{(j)})$, $(w_1^{(s)}, \ldots, w_n^{(s)})$ различны и существует целое v, $0 \leqslant v < m$, такое что $w_1^{(v)} = w_1^{(m)}, \ldots, w_n^{(v)} = w_n^{(m)}$.

Лемма 3. *Если последовательность является фундаментальной, то соответствующее ей слово $H_1 H_2 \ldots H_m H_v^{-1} \ldots H_1^{-1}$ принадлежит централизатору подгруппы H.*

Доказательство очевидно.

Слово $H_1 H_2 \ldots H_m H_v^{-1} \ldots H_1^{-1}$, связанное с фундаментальной последовательностью (1), назовем базисным словом.

Лемма 4. *Если последовательность (1) является фундаментальной базисной последовательностью, то*

$$m \leqslant |S| = |S(w_1, w_1)| \ldots |S(w_n, w_n)|$$

Доказательство очевидно.

Лемма 5. *Число фундаментальных базисных последовательностей конечно.*

Доказательство очевидно.

Лемма 6. *Пусть $F \in \mathbb{C}_G(H)$, $\mathbb{C}_G(H)$ – централизатор H в G. Тогда существует разбиение F в произведение $F = H_1 H_2 \ldots H_m$, $H_i \in T = \{a^t, a \in \{a_i^{\pm 1}\}_{i=\overline{1,l}}, 1 \leq t \leq p\}$, $i = \overline{1,m}$, и базисная последовательность, связанная с данными разбиением F, то есть*

$$w_1^{(0)}, \ldots, w_n^{(0)}, H_1, w_1^{(1)}, \ldots, w_n^{(1)}, H_2, \ldots, H_m, w_1^{(m)}, \ldots, w_n^{(m)}$$

Доказательство. Пусть $F \in \mathbb{C}_G(H)$, $F \neq 1$, тогда имеет место следующая система соотношений
$F^{-1} w_1 F = w_1$, $c_2 F^{-1} c_2^{-1} w_{20} c_2 F c_2^{-1} = w_{20}, \ldots, c_n F^{-1} c_n^{-1} w_{n0} c_n F c_n^{-1} = w_{n0}$.

Пусть $\forall i, i = \overline{2,n}$, $\exists X_i, Y_i, F_i$ такие, что $F \equiv X_i F_i Y_i$ ($\equiv$ – графическое равенство), $c_i = c_i' X_i^{-1} = c_i'' Y_i$. В результате имеем следующие равенства $F^{-1} w_1 F = w_1$,
$c_i'' F_i^{-1} c_i'^{-1} w_{i0} c_i' F_i c_i''^{-1} = w_{i0}, i = \overline{2,n}$, где каждое из слов $c_i' F_i c_i''^{-1}$ несократимо .

Рассмотрим кольцевые приведенные R - приведенные, $\overline{R}$-приведенные R-диаграммы $\Delta(w_{i0}, w_{i0})$ с граничными циклами $\sigma^{(i0)}$, $\tau^{(i0)}$, где $\varphi(\sigma^{(i0)}) = w_{i0}, \varphi(\tau^{(i0)}) = w_{i0}^{-1}$, $i = \overline{2,n}$ (при $i = 1, w_{10} = w_1$), каждая из которых, соответственно, является диаграммой сопряженности для i-го соотношения.

Обозначим через $O^{(i0)}$ начальную точку на $\sigma^{(i0)}$ и через $O'^{(i0)}$ – начальную точку на $\tau^{(i0)}$, $i = \overline{1,n}$. Тогда в диаграмме $\Delta(w_{i0}, w_{i0}), i = \overline{1,n}$, содержится путь $\eta_i, \alpha(\eta_i) = O^{(i0)}, \omega(\eta_i) = O'^{(i0)}$ с $\varphi(\eta_1) = F$, $\varphi(\eta_i) = c_i' F_i c_i''^{-1}$, $i = \overline{2,n}$, где $\alpha(\eta)$, $\omega(\eta)$ – соответственно начало и конец

пути η. Пусть $\varphi(\eta_1) = F = H_1^{(1)}H_2^{(1)}\dots H_{m(1)}^{(1)}$ – разбиение F в диаграмме $\Delta(w_{10}, w_{10})$ на элементы множества T. Тогда $F \equiv X_iF_iY_i = H_1^{(1)}\dots H_{\alpha_{(i)}^{(1)}}^{(1)}H_{\alpha_{(i)+1}^{(1)}}^{(1)}\dots H_{\beta_{(i)}^{(1)}}^{(1)}H_{\beta_{(i)+1}^{(1)}}^{(1)}\dots H_{m(1)}^{(1)}$, где $X_i = H_1^{(1)}\dots H_{\alpha_{(i)}^{(1)}}^{(1)}$, $F_i = H_{\alpha_{(i)+1}^{(1)}}^{(1)}\dots H_{\beta_{(i)}^{(1)}}^{(1)}$, $Y_i = H_{\beta_{(i)+1}^{(1)}}^{(1)}\dots H_{m(1)}^{(1)}$. С другой стороны, каждое $\varphi(\eta_i) = c_i'F_ic_i''^{-1}$ в соответствующей диаграмме $\Delta(w_{i0}, w_{i0})$ разбивается на элементы множества T $\varphi(\eta_i) = H_1^{(i)}\dots H_{\alpha_{(i)}^{(1)}}^{(i)}H_{\alpha_{(i)+1}^{(i)}}^{(i)}\dots H_{\beta_{(i)}^{(i)}}^{(i)}H_{\beta_{(i)+1}^{(i)}}^{(i)}\dots H_{m(i)}^{(i)}$, где $c_i' = H_1^{(i)}\dots H_{\alpha_{(i)}^{(i)}}^{(i)}$, $F_i = H_{\alpha_{(i)+1}^{(i)}}^{(i)}\dots H_{\beta_{(i)}^{(i)}}^{(i)}$, $c_i''^{-1} = H_{\beta_{(i)+1}^{(i)}}^{(i)}\dots H_{m(i)}^{(i)}$. Отсюда следуют соотношения $F_i = H_{\alpha_{(i)+1}^{(1)}}^{(1)}\dots H_{\beta_{(i)}^{(1)}}^{(1)} = H_{\alpha_{(i)+1}^{(i)}}^{(i)}\dots H_{\beta_{(i)}^{(i)}}^{(i)}$. Заметим, что разбиение X_i определяется разбиением F. Аналогично, разбиение Y_j, также определяется разбиением F. Следовательно, X_i, Y_j на искомое разбиение F не влияют. В качестве искомого возьмем разбиение $\varphi(\eta_1) = F$ в диаграмме $\Delta(w_{10}, w_{10})$. Получим разбиение F: $F = H_1H_2\dots H_m$ и последовательность $w_1^{(0)}, \dots, w_n^{(0)}, H_1, w_1^{(1)}, \dots, w_n^{(1)}, H_2, \dots, H_m, w_1^{(m)}, \dots, w_n^{(m)}$, связанную с полученным разбиением, удовлетворяющую условиям: $\forall i, i = \overline{1,m}$, $H_i^{-1}w_1^{(i-1)}H_i = w_1^{(i)}, \dots, H_i^{-1}w_n^{(i-1)}H_i = w_n^{(i)}, H_i \in H_i \in T = \{a^t, a \in \{a_i^{\pm 1}\}_{i=\overline{1,l}}, 1 \le t \le p\}$, $w_j^{(s)} \in S(w_j, w_j)$, $j = \overline{1,n}, s = \overline{1,m}$.

Лемма 7. *Множество всех базисных слов порождает централизатор подгруппы H.*

Доказательство очевидно

Из лемм 3-7 следует справедливость теоремы 3.

3. Обобщенная сопряженность слов

Теорема 4. *В обобщенной древесной структуре групп Артина разрешима проблема обобщенной сопряженности слов.*

Доказательство. Пусть даны множества слов $w_1, w_2, \dots, w_n$ и $v_1, v_2, \dots, v_n$. Необходимо установить: $\exists z$, $z \in G$, $\&_{i=1}^n(z^{-1}w_iz = v_i)$.

Пусть слова $w_1 = w_{10}$, $v_1 = v_{10}$ являются тупиковыми. Пусть $w_i = a_iw_{i0}a_i^{-1}$, $v_i = b_iv_{i0}b_i^{-1}$, $i = \overline{2,n}$, где w_{i0}, v_{i0} являются тупиковыми. Если предположить, что эти множества сопряжены, то $\forall i$, $i = \overline{1,n}$, $|w_{i0}| = |v_{i0}|$ и если какое-то из w_{i0} есть степень образующего, то сопряженное ему слово v_{i0} тоже степень образующего y. Пусть $\Delta(w_{i0}, v_{i0})$ – кольцевая связная приведенная R-диаграмма сопряженности слов w_{i0}, v_{i0}. Пусть

$$|a| = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_n|\},$$

$$|b| = \max\{|b_1|, |b_2|, \dots, |b_n|\},$$

где $|a_1| = |b_1| = 0$.

Обозначим через $S(w_i, v_i)$, $i = \overline{1,n}$, множество всех слов длина d_i которых заключена в пределах $|w_{i0}| \leqslant d_i \leqslant |w_{i0}| + |v_{i0}| + 2(|a| + |b| + p + m_0)$.

Введем обозначения $\forall i$, $i = \overline{1,n}$, $w_i = w_i^{(0)}$ и рассмотрим базисные последовательности, соответствующие множеству слов $w_1^{(0)}, \dots, w_n^{(0)}$:

$$w_1^{(0)}, \dots, w_n^{(0)}, H_1, w_1^{(1)}, \dots, w_n^{(1)}, H_2, \dots, H_m, w_1^{(m)}, \dots, w_n^{(m)}, \tag{2}$$

где $\forall i$, $i = \overline{1,n}$, $\forall j$, $j = \overline{0,m}$, $w_i^{(j)} \in S(w_i, v_i)$ и является меткой циклического геодезического диаграммы $\Delta(w_{i0}, v_{i0})$.

Базисная последовательность (2) называется особой, если она не содержит фундаментальную последовательность либо является пустой, то есть все $H_i = 1$. Слово $H_1H_2 \dots H_m$, соответствующее особой базисной последовательности, назовем особым базисным словом.

Если в базисной последовательности (2) $w_1^{(m)} = v_1, \dots, w_n^{(m)} = v_n$, то слова $w_1, \dots, w_n$ обобщенно сопряжены словам $v_1, \dots, v_n$.

Лемма 8. *Если последовательность (2) является особой базисной последовательностью, то* $m \leqslant |S| = |S(w_1, v_1)| \dots |S(w_n, v_n)|$.

Доказательство очевидно.

Лемма 9. *Число особых базисных последовательностей конечно.*

Доказательство очевидно.

Лемма 10. *Пусть F – какое-то решение системы $\&_{i=1}^n(z^{-1}w_iz = v_i)$, тогда существует разбиение F в произведение $H_1H_2 \dots H_m$ элементов множества T и базисная последовательность, связанная с данным разбиением F:*

$$w_1^{(0)}, \dots, w_n^{(0)}, H_1, w_1^{(1)}, \dots, w_n^{(1)}, H_2, \dots, H_m, w_1^{(m)}, \dots, w_n^{(m)}, \tag{3}$$

где $w_1^{(m)} = v_1, \dots, w_n^{(m)} = v_n$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 6.

Лемма 11. *Пусть F – какое-то решение системы $\&_{i=1}^n(z^{-1}w_iz = v_i)$ и (3) – базисная последовательность, соответствующая данному разбиению F. Тогда из последовательности (3) можно выделить особую подпоследовательность, такую, что соответствующее ей базисное слово F является решением системы.*

Доказательство. Если система $\&_{i=1}^n(z^{-1}w_iz = v_i)$ такова, что $\forall i$, $i = \overline{1,n}$, $w_i \equiv v_i$, то в качестве особой базисной подпоследовательности возьмем пустую подпоследовательность с $F \equiv 1$. Если последовательность (3) не содержит фундаментальных подпоследовательностей то $F' = F$. Если (3) не особая и $\exists j$, $j = \overline{1,n}$, то существуют целые числа v, k, $0 \leqslant v < k < m$ такие, что подпоследовательность $w_1^{(0)}, \dots, w_n^{(0)}, H_1, \dots, H_v, w_1^{(v)}, \dots, w_n^{(v)}, H_{v+1}, \dots, H_k, w_1^{(k)}, \dots, w_n^{(k)}$ является фундаментальной. Вычеркнув из (3) подпоследовательность $H_{v+1}, w_1^{(v+1)}, \dots, w_n^{(v+1)}, H_{v+2}, \dots, H_k, w_1^{(k)}, \dots, w_n^{(k)}$, получим базисную последовательность слов, являющуюся решением системы. Если полученная базисная последовательность не является особой, то применим к ней указанный выше процесс.

Из лемм 8-11 следует доказательство теоремы 2.

Теорема 5. *Пусть G – обобщенная древесная структура групп Артина и $\{w_i\}_{i=\overline{1,n}}$, $\{v_i\}_{i=\overline{1,n}}$ – слова из G. Если F – какое-то решение системы $\&_{i=1}^n(z^{-1}w_iz = v_i)$, то множество слов $\mathbb{C}_G(H) \cdot F$, где $\mathbb{C}_G(H)$ – централизатор подгруппы H, порожденной словами $\{w_i\}_{i=\overline{1,n}}$, является множеством всех решений системы.*

Доказательство очевидно.

Теорема 6. *Существует алгоритм, позволяющий для любого конечного множества слов из обобщенной древесной структурой групп Артина G выписать образующие их нормализатора.*

Доказательство очевидно.

4. Заключение

В работе рассмотрены проблемы построения централизатора конечно порожденной подгруппы и обобщенной сопряженности слов в обобщенных древесных структурах групп Артина. Данный класс групп важен для изучения алгоритмических проблем [13], [14] в группах Артина, которые могут либо быть представлены как обобщенные древесные структуры групп Артина, образованные из групп Артина с древесной структурой заменой некоторых вершин соответствующего дерева-графа группами Артина большого или экстрабольшого типов, а также группами Артина с n-угольной структурой, либо непосредственно принадлежат к перечисленным классам аналогично группам Кокстера [15]. Данная работа продолжает изучение алгоритмических свойств групп Артина.

Для решения проблемы построения централизатора конечно порожденной подгруппы в обобщенных древесных структурах групп Артина применялись современные комбинаторные и геометрические методы исследования, в частности, метод диаграмм, введенный ван Кампеном, переоткрытый Р. Линдоном и усовершенствованный В. Н. Безверхним в части введения $\overline{R}$-сокращений, и подход Г. С. Маканина, используемый им для доказательства конечной порожденности нормализатора элемента в группах кос. Использовались идеи работы [7].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Appel K., Schupp P. Artins groups and infinite Coxter groups // Ivent. Math. 1983. Vol. 72. P. 201-220.

2. Безверхний В. Н. О группах Артина, Кокстера с древесной структурой. // V международная конференция «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения»: тезисы докладов международной конференции. Тула, 2003. С. 33-34.

3. Безверхний В. Н., Карпова О. Ю. Проблемы равенства и сопряженности слов в группах Артина с древесной структурой. // Известия ТулГУ. Серия Математика. Механика. Информатика. 2006. Т. 12, №1. С. 67-82.

4. Линдон Р., Шуп П. Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980.

5. Безверхний В. Н. Решение проблемы обобщенной сопряженности слов в группах Артина большого типа // Фундаментальная и прикладная матемаматика. 1999. Т.5, №1. С. 1-38.

6. Маканин Г. С. О нормализаторах группы кос // Математический сборник. 1971. Т. 86, №2. С. 171-179.

7. Безверхний В. Н., Добрынина И. В. О проблеме обобщенной сопряженности слов в обобщенных древесных структурах групп Кокстера // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, №3. С. 135-147.

8. Добрынина И. В., Угаров А. С. О централизаторе элемента в обобщённых древесных структурах групп Артина // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории: Материалы XVII Междунар. конф., посвящённой 100-летию со дня рождения профессора Н. И. Фельдмана и 90-летию со дня рождения профессоров А. И. Виноградова, А. В. Малышева и Б. Ф. Скубенко. Тула: ТГПУ, 2019. С. 42-44.

9. Holt D. F., Rees S. E. Biautomatic structures in systolic Artin groups // International Journal of Algebra and Computation. 2021. Т. 31, №3. С. 365-391.

10. Безверхний В. Н. Решение проблемы сопряженности слов в группах Артина большого типа // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. Тула. ТГПИ. 1986. С. 26-61.

11. Добрынина И. В., Угаров А. С. Об обобщенных древесных структурах групп Артина // Владикавказский математический журнал. 2021. Т. 23, №3. С. 52-63.

12. Безверхний В. Н., Кузнецова А. Н. Разрешимость проблемы степенной сопряженности слов в группах Артина экстрабольшого типа // Чебышевский сборник. 2008. Т. 9, №1. С. 50-69.

13. Dehn M. Uber unendliche diskontinuierliche Gruppen // Math. Annal. 1912. Vol. 71. P. 116-144.

14. Tietze H. Uber die topologischen Invarianten mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten // Monatsh. Math. Phys., 1908. Vol. 19. P. 1—118.

15. Безверхний В. Н., Безверхняя Н. Б., Добрынина И. В., Инченко О. В., Устян А. Е. Об алгоритмических проблемах в группах Кокстера // Чебышевский сборник. 2016. Т. 17, №4. С. 23-50.

REFERENCES

1. Appel, K. & Schupp, P. 1983, "Artins groups and infinite Coxter groups", *Ivent. Math.*, vol. 72, pp. 201-220.

2. Bezverkhnii, V. N. 2003, "On Artin groups, Coxeter with a tree structure", *V mezhdunarodnaya konferentsiya «Algebra i teoriya chisel: sovremennye problemy i prilozheniya»: tezisy dokladov mezhdunarodnoy konferentsii*, Tula, , pp. 33-34.

3. Bezverkhnii, V. N. & Karpova, O. Ju. 2005, "Power conjugacy problem for words in Coxeter groups with tree structure", *Izvestia of Tula state University. Ser. Math. Mechanics. Informatics*, vol. 11, pp. 63-75.

4. Lyndon, R.& Schupp, P. 1980, "Combinatorial group theory", *Mir*, Moscow.

5. Bezverkhnii,V. N. 1999, "Decision of the generalized conjugacy problem in Artin groups of large type", *Fundamental and Applied Mathematics*, vol. 5, no. 1, pp. 1-38.

6. Makanin, G. S. 1971, "On normalizers in the braid group", *Math. USSR-Sb.*, vol. 15, no. 2, pp. 167–175.

7. Bezverkhnii, V. N. & Dobrynina, I. V. 2018, "On problem of generalized conjugation of words in a generalized tree structures of Coxeter groups", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 19, no. 3, pp. 135-147.

8. Dobrynina, I. V. & Ugarov, A. S. 2019, "On the centralizer of an element in generalized tree structures of Artin groups", *Algebra, number theory and discrete geometry: modern problems, applications and problems of history: Proceedings of the XVII International Conf. devoted to the 100-th anniversary of the birth of Professor N. I. Feldman and the 90-th anniversary of the birth of Professors A. I. Vinogradov, A. V. Malyshev, and B. F. Skubenko*, Tula: TSPU, pp. 42-44.

9. Holt, D. F.& Rees, S. E. 2021, "Biatomatic structures in systolic Artin groups", *International Journal of Algebra and Computation*, vol. 31, no. 3, pp. 365-391.

10. Bezverkhnii, V.N. 1986, “Solution of the problem of conjugation of words in Artin groups of large type ”, *Algorithmic problems of theory of groups and semigroups*, Tula: TSPU, pp. 26-61.

11. Dobrynina, I.V. & Ugarov, A.S. 2021, “On generalized tree structures of Artin groups”, *Vladikavkaz. Mat. Zh.,*, vol. 23, no. 3, pp. 52-63.

12. Bezverkhnii, V.N. & Kuznetsova, A.N. 2008, “Solvability of the problem of power conjugacy of words in Artin groups of extra-large type ”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 9, no. 1, pp. 50-69.

13. Dehn, M. 1912, “Uber unendliche diskontinuierliche Gruppen”, *Math. Annal.*, vol. 71, pp. 116-144.

14. Tietze, H. 1908, “Uber die topologischen Invarianten mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten”, *Monatsh. Math. Phys.*, vol. 19, pp. 1-118.

15. Bezverkhnii, V.N., Bezverkhnyaya, N. B., Dobrynina, I.V., Inchenko O. V., Ustyan A. E. 2016, “On algorithmic problems in Coxeter groups”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 17, no. 4, pp. 23–50.

Получено: 27.04.2024
Принято в печать: 04.09.2024

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 25. Выпуск 3.

УДК 512.54 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-248-258

Об алгоритме решения проблемы степенной сопряженности слов в обобщенных древесных структурах групп Артина

А. С. Угаров, И. В. Добрынина

Угаров Андрей Сергеевич — аспирант, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: ugarandrey@gmail.com
Добрынина Ирина Васильевна — доктор физико-математических наук, Московский технический университет связи и информатики (г. Москва).
e-mail: dobrynirina@yandex.ru

Аннотация

В статье рассматривается решение проблемы степенной сопряженности слов в обобщенных древесных структурах групп Артина геометрическими методами, основанными на исследовании диаграмм над данным классом групп, имеющих однослойную структуру, как ранее показано авторами. Используются преобразования диаграмм, включающие сокращения, введенные М. Деном и В. Н. Безверхним.

Статья является продолжением рассмотрения алгоритмов для решения проблем комбинаторной теории групп в обобщенных древесных структурах групп Артина, ранее авторами предлагались алгоритмы, основанные на диаграммном подходе, для решения проблем сопряженности, обобщенной сопряженности слов, построения централизаторов элемента и конечно порожденной подгруппы.

Рассматриваемый в статье класс групп представляет собой древесное произведение групп Артина с древесной структурой и групп Артина экстрабольшого типа, объединение ведется по бесконечным циклическим подгруппам, порожденным образующими соответствующих групп.

Группы Артина введены в начале прошлого века как обобщение известных групп кос, класс групп Артина экстрабольшого типа выделен в 1983 году, класс групп Артина с древесной структурой определен в 2003 году. Рассматриваемые в работе группы относятся к почти большим группам Артина и в них алгоритмически разрешимы проблемы равенства, сопряженности слов, что следует из доказательства их биавтоматности. Предложенный авторами подход в решении проблемы степенной сопряженности слов является более наглядным и простым.

Ключевые слова: группа Артина, алгоритмические проблемы, степенная сопряженность слов, древесное произведение.

Библиография: 12 названий.

Для цитирования:
Угаров, А. С., Добрынина, И. В. Об алгоритме решения проблемы степенной сопряженности слов в обобщенных древесных структурах групп Артина // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 3, с. 248–258.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 25. No. 3.

UDC 512.54 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-248-258

On an algorithm for solving the problem of power conjugacy of words in generalized tree structures of Artin groups

A. S. Ugarov (Tula), I. V. Dobrynina (Moscow)

Ugarov Andrei Sergeyevich — postgraduate student, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: ugarandrey@gmail.com
Dobrynina Irina Vasil'evna — doctor of physical and mathematical sciences, Moscow Technical University of Communications and Informatics (Moscow).
e-mail: dobrynirina@yandex.ru

Abstract

The article considers the solution of the problem of power conjugacy of words in generalized tree structures of Artin groups by geometric methods based on the study of diagrams over this class of groups having a single-layer structure, as previously shown by the authors. Chart transformations are used, including abbreviations introduced by M. Den and V. N. Bezverkhnim.

The article is a continuation of the consideration of algorithms for solving problems of combinatorial group theory in generalized tree structures of Artin groups, previously the authors proposed algorithms based on a diagram approach to solve conjugacy problems, generalized conjugacy of words, the construction of centralizers of an element and a finitely generated subgroup.

The class of groups considered in the article is a tree product of Artin groups with a tree structure and Artin groups of extra-large type, amalgamated by cyclic subgroups corresponding to the generators of the groups.

Artin groups were introduced at the beginning of the last century as a generalization of the well-known braid groups, the class of extra-large Artin groups was isolated in 1983, the class of Artin groups with a woody structure was isolated in 2003. The groups considered in this paper belong to almost large Artin groups and the problems of words and conjugacy of words are algorithmically solvable in them, which follows from the proof of their biautomaticity. The approach proposed by the authors in solving the problem of power conjugacy of words is more visual and simple.

Keywords: Artin group, algorithmic problems, power conjugacy of words, tree product.

Bibliography: 12 titles.

For citation:
Ugarov, A. S. & Dobrynina, I. V. 2024, "On an algorithm for solving the problem of power conjugacy of words in generalized tree structures of Artin groups", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 3, pp. 248–258.

1. Введение

Пусть G — конечно порожденная группа Артина с копредставлением

$$G = \langle a_1, ..., a_l; \langle a_i a_j \rangle^{m_{ij}} = \langle a_j a_i \rangle^{m_{ji}}, i, j = \overline{1, l}, i \neq j \rangle,$$

где $\langle a_i a_j \rangle^{m_{ij}}$ — слово длины m_{ij}, состоящее из m_{ij} чередующихся букв a_i и $a_j, i \neq j$, m_{ij} — число, соответствующее симметрической матрице Кокстера: $m_{ij} \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \cup \{\infty\}, i \neq j$.

Группа Артина называется группой Артина экстрабольшого типа, если $m_{ij} > 3$ для любых $i \neq j$. Данный класс групп в 1983 году выделен К. Аппелем и П. Шуппом [1].

Для группы Артина G построим граф Γ так, что образующим a_i соответствуют вершины графа Γ, а каждому определяющему соотношению $\langle a_i a_j \rangle^{m_{ij}} = \langle a_j a_i \rangle^{m_{ji}}, m_{ij} < \infty$, — ребро, соединяющее вершины, соответствующие a_i и a_j, $i \neq j$. Если при этом получится дерево-граф, то группа Артина G называется группой Артина с древесной структурой [2].

Класс групп Артина с древесной структурой введен в рассмотрение В. Н. Безверхним в 2003 году [3].

Далее рассмотрим группу Артина

$$G = \langle \prod_{s=1}^{t} * G_s; a_{i_m} = a_{j_k}, i \neq j, i, j \in \{\overline{1,t}\} \rangle,$$

представляющую собой древесное произведение групп Артина G_s, где G_s либо группа Артина с древесной структурой, либо группа Артина экстрабольшого типа, запись $a_{i_m} = a_{j_k}$ означает, что объединение групп Артина G_i и G_j ведется по бесконечным циклическим подгруппам $\langle a_{i_m} \rangle, \langle a_{j_k} \rangle$, где a_{i_m} — некоторый образующий группы G_i, a_{j_k} — некоторый образующий группы G_j. Такую группу Артина G будем называть обобщенной древесной структурой групп Артина [4] и далее под G будем понимать такую группу, если нет специальных оговорок.

Обобщенные древесные структуры групп Артина относятся к классу почти больших групп Артина [5].

Известно, что в обобщенной древесной структуре групп Артина разрешимы проблемы равенства, сопряженности слов [5], геометрическими методами решен вопрос построения централизатора произвольного элемента [4], [6].

В доказательстве основного результата об алгоритмической разрешимости проблемы степенной сопряженности слов в обобщенных древесных структурах групп Артина используется метод диаграмм, введенный ван Кампеном, переоткрытый Р. Линдоном и усовершенствованный В. Н. Безверхним.

2. Вспомогательные утверждения

Пусть $F_i = \langle a_i \rangle$, $F = \prod_{i=1}^{l} * F_i$ — свободное произведение циклических групп $F_i, \{a_i\}_{i=\overline{1,l}}$ — множество образующих G.

Обозначим через R_{ij} – множество всех нетривиальных слов, циклически приведенных в свободном произвдении $F_{ij} = F_i * F_j$ и равных 1 в группе G_{ij}. Группу Артина G_{ij} можно задать как $G_{ij} = \langle a_i, a_j; R_{ij} \rangle$.

Обозначим через $|w|$ длину слова w, а через $||w||$ — слоговую длину слова w.

В дальнейшем под R будем понимать $R = \bigcup_{i,j \in \{\overline{1,l}\}} R_{ij}$ — симметризованное подмножество свободного произведения F.

Пусть u, v — два циклически приведенных слова, u, $z \notin \langle R \rangle^G$, не сопряженные в F и сопряженные в G, где $\langle R \rangle^G$ — нормальное замыкание симметризованного множества R в G [7]. Тогда существует связная приведенная кольцевая R-диаграмма M с внешней граничной меткой u и внутренней граничной меткой v^{-1}, граничными метками областей D которой являются соотношения из R [7].

Подвергнем R-диаграмму M следующему преобразованию.

Если две области D_1, D_2 являются одновременно R_{ij}-диаграммами, пересекаются по ребру с меткой $\varphi(\partial D_1 \cap \partial D_2)$, то, стирая это ребро, объединим D_1, D_2 в одну область D. Допустим, что каждая из областей D_1, D_2 есть R_{ij}-диаграмма, D_1, D_2 пересекаются по вершине. Тогда объединяем D_1, D_2 в одну область D. Если в том или другом случае метка границы полученной области равна единице в свободном произведении F, то, удалив эту область, склеиваем ее границу. Таким образом, через конечное число шагов мы получим приведенную в F связную R-диаграмму M, инвариантную относительного рассмотренного преобразования с граничной меткой, равной w, причем если две области D', D'' из M пересекаются по ребру, то слоговая длина метки этого ребра равна единице.

Введем ряд определений, следуя работам [2], [8], [9], [10].

Область $D \subset M$ назовем граничной, если $\partial M \cap \partial D \neq \emptyset$. Символами $i(D)$ будем обозначать число внутренних ребер в граничном цикле D, $d(D)$ — число ребер в граничном цикле D.

Область D с граничным циклом $\partial D = e\gamma e^{-1}\delta$, расположенная по обе стороны относительно ребра e, в которой склеенные ребра e и e^{-1} пересекают граничный цикл D, называется $(s-i)$-областью.

Будем говорить, что $\partial D \cap \partial M$ — правильная часть M, если $\partial D \cap \partial M$ есть объединение последовательности $l_1, l_2, \ldots, l_n$ замкнутых ребер, где $l_1, \ldots, l_n$ встречаются в данном порядке в некотором граничном цикле для D и в некотором граничном цикле для M [7].

Граничную область D R-диаграммы M назовем правильной, если $\partial D \cap \partial M$ есть правильная часть.

Правильная область D R-диаграммы M называется *деновской* [7], если $i(D) < d(D)/2$.

Удаление внешней границы деновской области R-диаграммы M называется деновским сокращением R-диаграммы M или R-сокращением.

R-диаграмма M является R-приведенной, если в M выполнены все деновские сокращения.

Слово $w \in G$ назовем R-приводимым (R-сократимым), если w приведено в F и содержит подслово s, являющееся подсловом некоторого соотношения $r \in R$, $r = sb$, где $||b|| < ||s||$.

Слово w называется циклически R-несократимым, если любая его циклическая перестановка w^* не содержит R-сокращения.

Определение 1. *[2] Поддиаграмма* $\Pi = \bigcup\limits_{i=1}^{n} D_i$ *образует полосу в* R*-приведенной* R*-диаграмме* M *с граничным циклом* $\partial M = \gamma \cup \delta$, *если*

1. $\partial D_i \cap \partial D_{i+1} = e_i$, $i = \overline{1, n-1}$, *где* e_i *– ребро ;*
2. $\partial D_i \cap \gamma = \gamma_i$, $i = \overline{1, n}$, *где* γ_i *— связный путь, причем* $||\gamma_i|| \geqslant 1$*;*
3. $||\partial D_1 \cap \gamma|| = ||\partial D_1 \backslash (\partial D_1 \cap \gamma)||$ *и* $||\partial D_n \cap \gamma|| = ||\partial D_n \backslash (\partial D_n \cap \gamma)||$*;*
4. $||\partial D_j \cap \gamma|| + 2 = ||\partial D_j \backslash (\partial D_j \cap \gamma)||$, $j = \overline{2, n-1}$.

Пусть Π — полоса R-диаграммы M. Замену R-диаграммы M на R-диаграмму M_1, полученную из M удалением полосы Π, назовем $\overline{R}$-сокращением.

R-приведенное слово w группы G назовем $\overline{R}$-приводимым ($\overline{R}$-сократимым), если в нем можно выделить подслово $s_1 s_2 \cdots s_n$, где каждое s_t содержится в некоторой группе G_{ij} и является подсловом соотношения $s_t^{-1} d_t^{-1} b_t d_{t+1} \in R$, причем при $1 \leq t \leq n$ $||d_t|| = ||d_{t+1}|| = 1$, $||s_t|| = ||b_t|| + 2$ и для t, $1 < t < n$, $||b_t|| = ||s_t||$.

Слово w называется циклически $\overline{R}$-несократимым, если любая его циклическая перестановка w^* не содержит $\overline{R}$-сокращения.

Лемма 1. *Существует алгоритм, позволяющий для любого циклически приведенного слова* w *группы Артина* G *выяснить, является ли* w R*-приведенным.*

Существует алгоритм, позволяющий для любого циклически приведенного слова w группы Артина G выяснить, является ли w $\overline{R}$-приведенным.

Доказательство очевидно.

Определение 2. *Приведенную связную кольцевую R-диаграмму M с границей $\partial M = \sigma \cup \tau$ будем называть однослойной, если*

1) M состоит из областей $D_1, D_2, \ldots, D_m$, где $D_j \cap D_{j+1} = e_j, j = \overline{1, m-1}, D_1 \cap D_m = e_m$, $D_j \cap \gamma \neq \emptyset, D_j \cap \delta \neq \emptyset, j = \overline{1, m}$, e_j — ребро,

или

2) $M = (\bigcup\limits_{i=1}^{p} N_i) \cup (\bigcup\limits_{j=1}^{p} \gamma_j)$, N_i — поддиаграммы (диски) в M с границами $\partial N_i = \gamma_i \cup \delta_i, \gamma_i \cap \delta_i = \{A_i, B_i\}$ — вершины, $i = \overline{1, p}$, γ_i — простые пути с концами $B_{i-1}, A_i, i = \overline{2, p}$, простой путь γ_1 имеет начало B_p, а конец — A_1, где каждое N_i из состоит из областей $D_{i_1}, D_{i_2}, \ldots, D_{i_{m_i}}$, причем $D_{i_j} \cap D_{i_{j+1}} = e_{i_j}, j = \overline{1, m_i - 1}, D_{i_j} \cap \gamma \neq \emptyset, D_{i_j} \cap \delta \neq \emptyset, j = \overline{1, m_i}$, e_{i_j} — ребро.

Из данного определения имеем, что в случае 1) все области M граничные, каждая пара соседних областей, взятых в циклической последовательности, пересекается по ребру, каждая область пересекает и γ, и δ (пересечением может быть вершина, одно или несколько ребер). В случае 2) имеем простую кольцевую R-диаграмму, то есть R-диаграмму, в которой $\gamma \cap \delta \neq \emptyset$. Пути γ_i, по которым пересекаются γ, δ, отделяют поддиаграммы (диски), причем заметим, что эти пути, в том числе, могут иметь нулевую длину (быть вершиной).

Теорема 1. *[6] Пусть M — приведенная связная кольцевая R-диаграмма сопряженности слов $\varphi(\gamma)$, $\varphi(\delta) \in G$ над группой Артина G, не содержащая $(s-i)$-областей; γ, δ — соответственно внешний и внутренний граничный циклы M, слова $\varphi(\gamma)$, $\varphi(\delta)$ циклически R и $\overline{R}$-несократимы. Тогда M является однослойной.*

Определение 3. *Кольцевую связную приведенную однослойную R-диаграмму M с граничными циклами γ, δ над группой Артина G, метки которой $\varphi(\gamma)$, $\varphi(\delta)$ приведены в F, $\varphi(\gamma)$ — R-приведено и $\overline{R}$-приведено, назовем особо специальной R-диаграммой, если в M существует одна область D такая, что $||\varphi(\partial D \setminus (\partial D \bigcap \gamma))|| + 2 = ||\varphi(\partial D \setminus (\partial D \bigcap \delta))||$ $(||\varphi(\partial D \setminus (\partial D \bigcap \gamma))|| = ||\varphi(\partial D \setminus (\partial D \bigcap \delta))|| + 2)$, а для остальных областей D' $||\varphi(\partial D' \setminus \setminus (\partial D' \bigcap \gamma))|| = ||\varphi(\partial D' \setminus (\partial D' \bigcap \delta))||$.*

Замену слова $\varphi(\gamma)(\varphi(\delta))$ на слово $\varphi(\delta)(\varphi(\gamma))$ назовем специальным кольцевым R-сокращением.

Определение 4. *Будем говорить, что циклически несократимое слово w группы Артина G является тупиковым, если w циклически R-несократимо, циклически $\overline{R}$-несократимо и к нему неприменимо специальное кольцевое R-сокращение.*

Лемма 2. *[8] Пусть $G_{ij} = \langle a_i, a_j; < a_i a_j >^{m_{ij}} = < a_j a_i >^{m_{ji}} \rangle$, $w \in G_{ij}$ циклически несократимо в свободной группе, имеет слоговую длину, равную $2m_{ij}$, и равно единице в G_{ij}. Тогда оно имеет вид:*

при $m_{ij} = 2k+1$ $a_i^m a_j a_i \ldots a_i a_j^{-m} a_i^{-1} a_j^{-1} \ldots a_j^{-1}$, либо $a_i a_j a_i \ldots a_i^m a_j^{-1} a_i^{-1} a_j^{-1} \ldots a_j^{-m}$, либо им обратные,

при $m_{ij} = 2k, k > 1$ $a_i^m a_j a_i \ldots a_j a_i^{-m} a_j^{-1} a_i^{-1} \ldots a_j^{-1}$, либо $a_i a_j a_i \ldots a_j^m a_i^{-1} a_j^{-1} a_i^{-1} \ldots a_j^{-m}$, либо им обратные,

при $m_{ji} = 2$ $a_i^m a_j^l a_i^{-m} a_j^{-l}$, либо им обратные, $m, l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Лемма 3. *Пусть M — связная приведенная минимальная R-диаграмма над группой Артина G с граничными циклами γ, δ; $\varphi(\gamma)$, $\varphi(\delta)$ являются тупиковыми. Тогда если $\varphi(\gamma) = x^r$, то $\varphi(\delta) = y^r$, где $x, y \in \{a_i^{\pm 1}\}_{i=\overline{1,l}}, \{a_i\}_{i=\overline{1,l}}$ — множество образующих группы G.*

Лемма 4. *Пусть $v, w \in G$ — тупиковые слова и пусть v сопряжено с w в G. Тогда $||v|| = ||w||$ и никакое слово $u \in G$ такое, что $||u|| < ||v||$, не сопряжено с v в G.*

Доказательство следует из работ [2] и [9], где также показано, что такие диаграммы состоят из $(s-i)$-областей.

3. Основной результат

Лемма 5. *Пусть слово $w \in G$ циклически несократимо в свободной группе и не равно 1 в G. Тогда любая степень слова, сопряженного w или w^2 в группе G, циклически R и $\overline{R}$-несократима.*

Доказательство. Если группа G является группой Артина с древесной структурой, либо группой Артина экстрабольшого типа, то доказательство следует соответственно из работ [11], [10]. Перейдем к общему случаю. Рассмотрим циклически R и $\overline{R}$-несократимое слово w, не равное 1 в группе G. При необходимости перейдем к сопряженному с ним тупиковому слову. Надо показать, что слово w^n является R-несократимым.

Допустим, слово w^n содержит деновскую область D. Очевидно, что такая область не может содержаться внутри w, так как w R-несократимо.Поэтому она должна содержаться на границе w с w, что невозможно, так как слово w циклически R-несократимо. Следовательно, слово w^n не содержит деновских областей.

Пусть в слове w^n имеют место $\overline{R}$-сокращения. Рассмотрим окружность, по границе которой запишем слово w^n (обозначим эту границу ∂M). Разобьем окружность на пути $\gamma_i, i = \overline{1,n}$, причем $\varphi(\gamma_i) = w$. Можно всегда считать, что $n = 2k$. Пусть $\gamma = D_1 \cup D_2 \cup \cdots \cup D_{n'}$ — полоса. Обозначим $\partial M \cap \gamma = \gamma', \alpha(\gamma')$ — начальную точку пути γ', $\omega(\gamma')$ — конечную точку пути γ'.

Будем полагать, сделав, если это необходимо, циклический сдвиг, что $\omega(\gamma') = \omega(\gamma_1)$. Считаем, что $\varphi(\gamma_1) = w$ — циклически несократимое слово.

Подклеим с внешней стороны к $\gamma_1, \gamma_3, \cdots, \gamma_{2k-1}$ и с внутренней стороны окружности к $\gamma_2, \gamma_4, \cdots \gamma_{2k}$ полосы, совместив конечные точки полос и путей. Полученную кольцевую диаграмму обозначим через K.

В силу теоремы 1 строение диаграммы над группой Артина G аналогично строению диаграммы над группой Артина с древесной структурой, поэтому случаи для полос, у которых $d(D_1) = \{4, 6\}$ и $d(D_n) = \{4, 6\}$ рассматриваются аналогично доказательству леммы 12 работы [11]. В случаях, когда $d(D_1) > 6$ и (или) $d(D_{n'}) > 6$, доказательство проводится аналогично и значительно проще.

Определение 5. *Будем говорить, что в группе G разрешима проблема степенной сопряженности слов, если существует алгоритм, позволяющий для двух любых слов $w, v \in G$ установить, существуют ли ненулевые целые числа n, m такие, что слова w^n, v^n сопряжены в группе G.*

Лемма 6. *[10] В группе Артина экстрабольшого типа разрешима проблема степенной сопряженности слов.*

Лемма 7. *[2] В группе Артина с древесной структурой разрешима проблема степенной сопряженности слов.*

Теорема 2. *В обобщенных древесных структурах групп Артина разрешима проблема степенной сопряженности слов.*

Доказательство. Если w, v являются словами из группы Артина экстрабольшого типа, либо из группы Артина с древесной структурой, то результат следует из лемм 6, 7 соответственно. Рассмотрим общий случай обобщенной древесной структуры групп Артина G.

Если необходимо, перейдем от слов w, v к сопряженным с ними словам w_0, v_0, любая степень которых циклически R и $\overline{R}$-несократима, на основании леммы 5.

Рассмотрим кольцевую связную приведенную R-диаграмму M сопряженности слов w_0^m и v_0^n, соответствующую пункту 1) определения 2. Пусть $\varphi(\gamma) = (w_0^*)^m$, $\varphi(\delta) = (v_0^*)^n$, причем путь γ начинается в точке O, а путь δ — в точке O_1. Сделаем разрез диаграммы M по ребру OO_1, получим односвязную однослойную приведенную R-диаграмму, которую обозначим M^*.

1. Пусть диаграмма M^* состоит из областей, для которых метки пересечения с γ и δ имеют одну и ту же слоговую длину, то есть являются областями первого типа [10]. Тогда приклеим к ней диаграмму $M^{*\prime}$, тождественную диаграмме M^*, с циклическим сдвигом на слово w_0^*.

Заметим, что $\varphi(\gamma) = (w_0^*)^m$, $\varphi(\gamma_i) = w_0^*, i = \overline{1,m}$, причем $\alpha(\partial D_1 \cap \gamma) = O$, $w(\gamma_1) = O'$. Таким образом, $\varphi(\gamma_1) = \varphi(OO') = w_0^*$.

Очевидно, что внутренняя точка O' не может иметь степень 3 в диаграмме $M^* \cup M^{*\prime}$, так как нет сокращений и циклов, в которых участвуют не менее двух образующих из группы Артина с древесной структурой. Поэтому $O' = \alpha(\partial D_i \cap \gamma)$ имеет степень 4.

Метки пересекающихся областей D_j и $D'_{j'}$, $j, j' = \overline{1,n}$, содержат одинаковые образующие. Действительно, при $\|\varphi(\partial D_j \cap \partial D'_{j'})\| > 1$ это очевидно. Пусть $\|\varphi(\partial D_j \cap \partial D'_{j'})\| = 1$. Предположим, что метки области D_r из M^* и расположенной над ней области D'_1 из $M^{*\prime}$ содержат различные образующие. Тогда рассмотрим поддиаграмму, содержащую области D'_n, D_{r-1}, D_r, D'_1, содержащие точку O', расположенные относительно этой точки против часовой стрелки, где $d(D'_n) = d(D_{r-1}) = d(D_r) = d(D'_1) = 4$. Пусть $\varphi(\partial D'_n \cap \partial D_1{}') = a^k$, $\varphi(\partial D_1{}' \cap \partial D_r) = b^l$, $\varphi(\partial D_{r-1} \cap \partial D_r) = c^t$, $\varphi(\partial D_{r-1} \cap \partial D'_n) = d^r$, k, l, t, $r \in Z\backslash\{0\}$. Такой случай соответствует группе Артина с древесной структурой и данному фрагменту диаграммы соответствует цикл в дереве-графе, что невозможно. Таким образом, получаем, что $\varphi(\partial D_j)$, $\varphi(\partial D'_{j'}) \in G_{ab}$, $\forall j, j' = \overline{1,n}$. Далее будем рассуждать, следуя работе [2].

Рассмотрим случай, когда $\varphi(\partial D_1)$, $\varphi(\partial D_1) \in G_{ab}$, $m_{ab} \geqslant 2$, $\varphi(\partial D_1 \cap \gamma) = s$, $\varphi(\partial D_1 \cap \delta) = r$, $\varphi(\partial D_n \cap \partial D_1) = b^p$, $\varphi(\partial D'_n \cap \partial D'_1) = b^q$, $\varphi(\partial D_1 \cap \partial D_2) = a^h$, $\varphi(\partial D'_1 \cap \partial D'_2) = a^t$.

Для области D_1 имеем $sb^p ra^h = 1$, а для D'_1 выполнено $rb^q sa^t = 1$. Поскольку $a^h sb^p r = 1$, то $r = a^{-1}s^{-1}b^{-p}$, откуда $s^{-1}b^{q-p}s = a^{h-t}$. В силу леммы 3 справедливо равенство $q-p = h-t = m$.

В случае $b = a$ имеем $s^{-1}b^m s = b^m$. Если $\|\varphi(\partial D_1)\| = 2m_{ab}$, то, применяя лемму 2, получим $p = h$ и $\varphi(\partial D_1 \cap \partial D_2) = b^p$.

Рассмотрим случай $\|\varphi(\partial D_1)\| \neq 2m_{ab}$.

Пусть $m_{ab} = 2k$. Определяющее соотношение тогда имеет вид: $\underbrace{ab\ldots ab}_{2k} = \underbrace{ba\ldots ba}_{2k}$, следовательно, $\underbrace{ab\ldots a}_{s_0} b^p \underbrace{a^{-1}b^{-1}\ldots a^{-1}}_{s_0^{-1}} = b^p$.

Диаграмма сопряженности для b^m и b^m состоит из k вложенных $(s-i)$-областей с граничными циклами δ_i, $i = \overline{1,k+1}$. Для каждой $(s-i)$-области D_j^* имеем $\|\varphi(\partial D_j^*)\| = 2m_{ab}$, $\varphi(\delta_i) = b^p$, $\varphi(\delta_{k+1}) = b^h$, все D_j^* имеют четное m_{ab}, а $\varphi(e_j) = s_0$, где s_0 — подслово определяющего соотношения, e_j — ребро, соответствующее данной области, $j = \overline{1,k}$. Отсюда $\forall i\, \varphi(\delta_i) = b^p$, $p = h$ и $\varphi(\partial D_1 \cap \partial D_2) = b^p$. В общем случае $s = s_0 b^{j_1} s_0 b^{j_2} \ldots s_0 b^{j_{k-1}}$. Так как $s_0 b^p = b^p s_0$ в G_{ab}, то $s = s_0^{j_1+j_2+\ldots+j_{k-1}}$. Если s минимальной длины, то $w(e_j) = \alpha(e_{j+i})$, $\forall j = \overline{1,k}$ и $s = s_0^k$.

Таким образом, мы разбили область D_1 на области $D_1 = \cup D_j^*$, $j = \overline{1,k}$, где $\|\varphi(\partial D_j^*)\| = 2m_{ab}$ и все D_j^* являются областями первого типа.

Пусть $m_{ab} = 2k+1$. Определяющее соотношение для m_{ab}: $\underbrace{ab\ldots aba}_{2k+1} = \underbrace{ba\ldots bab}_{2k+1}$, тогда $\underbrace{ab\ldots ba}_{z_1} b^p \underbrace{b^{-1}a^{-1}\ldots b^{-1}a^{-1}}_{z_1^{-1}} = a^p$ и $\underbrace{ab\ldots ab}_{z_2} a^p \underbrace{a^{-1}b^{-1}\ldots a^{-1}b^{-1}}_{z_2^{-1}} = b^p$

В силу нечетности m_{ab} для перевода b_m в b_m нужно два (либо четное число) сопряжения словами z_1, z_2. Диаграмма сопряженности для b^m и b^m состоит из k вложенных $(s-i)$-областей

с граничными циклами δ_i, $i=\overline{1,k+1}$, для каждой $(s-i)$-области D_j^* имеем $\|\varphi(\partial D_j^*)\|=2m_{ab}$. Имеем $\varphi(\partial\delta_1)=b^p$, $\varphi(\partial\delta_{k+1})=a^h$, все D_j^* будут с нечетным m_{ab}. Получаем, что если $\varphi(\partial\delta_j)=b^p$, $\varphi(\partial\delta_{j+1})=a^p$, то $\varphi(e_j)=z_2$ и $\varphi(e_{j+1})=z_1$. Отсюда $p=h$, $\varphi(\partial D_1\cap\partial D_2)=a^p$.

В случае $b\neq a$ имеем $s^{-1}b^ms=a^m$. Если для области D_1 справедливо $\|\varphi(\partial D_1)\|=2m_{ab}$, то, применяя лемму 2, получим $p=h$, $\varphi(\partial D_1\cap\partial D_2)=a^p$. Если же $\|\varphi(\partial D_1)\|\neq 2m_{ab}$, то строим диаграмму сопряженности для b^m и a^m подобно предыдущему случаю. Тогда $D_1=\cup D_j^*$, $j=\overline{1,k}$, где $\|\varphi(\partial D_j^*)\|=2m_{ab}$ и все D_j^* являются областями первого типа, $\varphi(\partial D_j\cap\partial D_{j+1})=a^p$ или $\varphi(\partial D_j\cap\partial D_{j+1})=b^p$. Получим $s=z_2z_1z_2\dots z_2$ и $\varphi(\partial D_1\cap\partial D_2)=a^p$

Пусть $\varphi(\partial D_n\cap\partial D_1)=b^p$. Учитывая, что область D_1 состоит из ряда областей D_j^*, $j=\overline{1,k}$, с $\|\varphi(\partial D_j^*)\|=2m_{ab}$, по лемме 2 метки общих ребер областей есть степени b^p или a^p. Все области D_r, $r=\overline{1,n}$, имеют первый тип, поэтому получим $\varphi(\partial D_{r-1}\cap\partial D_r)=b^p$. Если метка $\varphi(\partial D_n\cap\partial D_1)$ есть степень образующего, то такую же степень будет иметь метка каждого ребра $\varphi(\partial D_{r-1}\cap\partial D_r)$, $i=\overline{1,n}$. Выделим поддиаграмму $\cup D_k$ и склеим ее по ребрам $e_1=\partial D_n\cap\partial D_1$ и $e_2=\partial D_{r-1}\cap\partial D_r$, где $\varphi(e_1)=\varphi(e_2)=b^p$. Получим кольцевую связную приведенную R-диаграмму сопряженности слов w_0^*, v_0^*, а, значит, степени этих слов также сопряжены.

2. Пусть диаграмма M^* содержит области первого, второго (когда $||\varphi(\partial D\bigcap\gamma)||=||\varphi(\partial D\bigcap\bigcap\delta)||+2$) и третьего типов (когда $||\varphi(\partial D\bigcap\delta)||=||\varphi(\partial D\bigcap\gamma)||+2$) [10]. Диаграмма M^* содержит одинаковое число областей второго и третьего типов, причем области второго типа должны чередоваться с областями третьего типа, иначе в диаграмме M^* выделится полоса. Вновь приклеим к ней диаграмму $M^{*\prime}$, тождественную диаграмме M^*, с циклическим сдвигом на слово w_0^*. Обозначим $\varphi(\gamma)=(w_0^*)^m$, $\varphi(\gamma_i)=w_0^*$, причем, $\alpha(\partial D_1\cap\gamma)=O$, $w(\gamma_1)=O'$, $\varphi(\gamma_1)=\varphi(OO')=w_0^*$.

Степень внутренней точки $O'\geqslant 4$, как показано ранее. Рассмотрим случай, когда степень O' равна четырем.

Пусть D_1, D_r и, соответственно, D_1' — области третьего типа. При этом $\|\partial D_r\cap\gamma\|=\|\partial D_1'\cap\cap\gamma\|$, где $d(D_r)=d(D_1')$. Следовательно, $\varphi(\partial D_1)\in G_{ab}$. Обозначим $\varphi(\partial D_n)\cap\varphi(\partial D_1)=b^p$.

Пусть $\varphi(\partial D_1)$, $\varphi(\partial D_1')\in G_{ab}$, $m_{ab}\geqslant 2$, $\varphi(\partial D_1\cap\gamma)=s$, $\varphi(\partial D_1\cap\delta)=r$, $\varphi(\partial D_n\cap\partial D_1)=b^p$, $\varphi(\partial D_n'\cap\partial D_1')=b^q$, $\varphi(\partial D_1\cap\partial D_2)=a^h$, $\varphi(\partial D_1'\cap\partial D_2')=a^t$, $\|r\|<\|s\|$. Тогда аналогично первому случаю $s^{-1}b^ms=a^m$, где $q-p=h-t=m$. Строим, как в первом случае, диаграмму сопряженности для b^m и a^m.

Если для области D_1 справедливо $\|\varphi(\partial D_1)\|=2m_{ab}$, то $\|\varphi(\partial D_1')\|=2m_{ab}$, $\varphi(\partial D_1\cap\partial D_1')$ содержит либо b^p (если $m_{ab}=2k$, $k\geqslant 1$), либо a^p (если $m_{ab}=2k+1$). В силу $d(D_1)=d(D_1')$ и леммы 2 $\varphi(\partial D_n'\cap\partial D_1')=b^p$ и $\varphi(\partial D_{r-1}\cap\partial D_r)=b^p$.

Пусть для области D_1 выполняется условие $\|\varphi(\partial D_1\|)\neq 2m_{ab}$.

Если $m_{ab}=2k$, $k>1$, то строя диаграмму сопряженности как и для первого случая, получаем разбиение области D_1 на области $D_1=\cup D_j^*$, $j=\overline{1,k}$, где $\|\varphi(\partial D_j^*\|=2m_{ab}$. В силу $\|r\|<\|s\|$, получим, что среди областей первого типа D_j^* есть хотя бы одна область D_k^* третьего типа. Поэтому $s=s_0^k$. Для областей D_j^* имеем $d(D_j^*)=2\|s_0\|+2$, $j=\overline{1,k-1}$. Но $d(D_k^*)=\|s_0\|+2$. Данный случай невозможен, так как получим, что подслова $s_0=\varphi(\partial D_j^*\cap\gamma)$, $j=\overline{1,k-1}$ и $s_0=\varphi(\partial D_k^*\cap\gamma)$ различны.

При $m_{ab}=2k+1$ получаем аналогичный случай. Таким образом, $p=q$, $\varphi(\partial D_n'\cap\partial D_1')=b^p$.

Если $\varphi(\partial D_n\cap\partial D_1)=b^p$, то $\varphi(\partial D_n'\cap\partial D_1')=b^p$ и ту же степень образующего содержит $\varphi(\partial D_{r-1}\cap\partial D_r)$, то есть $\varphi(\partial D_{r-1}\cap\partial D_r)=b^p$. Выделим поддиаграмму $\cup D_k$ и склеим ее по ребрам $e_1=\partial D_n\cap\partial D_1$ и $e_2=\partial D_{r-1}\cap\partial D_r$, где $\varphi(e_1)=\varphi(e_2)=b^p$. Таким образом, получим кольцевую связную приведенную R-диаграмму сопряженности слов w_0^*, v_0^*, поэтому степени этих слов также сопряжены.

Пусть теперь D_1 и D_r — области различных типов (например, области D_1 — третьего, D_r — первого или второго типов). Этот случай невозможен. Действительно, если к диаграмме M^* приклеим тождественную диаграмму $M^{*\prime}$ к границе δ, то получим, что как минимум метки

двух областей содержат одинаковые образующие $\varphi(\partial D_1)$, $\varphi(\partial D_2) \in G_{ab}$. А это противоречит инвариантности диаграммы M^* относительно таких преобразований.

Случай, когда степень O' больше четырех, очевиден.

3. Пусть диаграмма M^* содержит одну область второго или третьего типа. Данный случай невозможен, так как в $\varphi(\gamma_1 \cup \gamma_2) = (w_0^*)^2$ будут $\overline{R}$-сокращения.

Рассмотрим теперь простую кольцевую диаграмму $M = (\bigcup\limits_{i=1}^{p} N_i) \cup (\bigcup\limits_{j=1}^{p} \gamma_j)$ сопряженности циклически $R, \overline{R}$-несократимых слов w_0^n, v_0^m, N_i — поддиаграммы (диски) в M с границами $\partial N_i = \gamma_i \cup \delta_i, \gamma_i \cap \delta_i = \{A_i, B_i\}$ — вершины, $i = \overline{1,p}$, γ_i — простые пути с концами $B_{i-1}, A_i, i = \overline{2,p}$, простой путь γ_1 имеет начало B_p, а конец — A_1.

Пусть $\varphi(\gamma) = (w_0^*)^m$ и $\varphi(\delta) = (v_0^*)^n$. Заметим, что $p < |w_0^*| \cdot |v_0^*| + 1$. Действительно, если осуществить разрез в точке A_1, то слово w_0^* будет разбито на две части $w_0^* = w_{01}w_{02}$. При этом может быть только $|w_0^*|$ возможностей разбить слово на две части. Аналогичное верно и для слова v_0^*. Если данное неравенство не выполняется, то выделится повторяющаяся часть, которую можно вырезать, а оставшуюся часть снова замкнуть в кольцо.

Рассмотрим диск N_1, в котором внешний путь γ_1, внутренний путь $AB = \delta_1$. Заметим, что слоговые длины путей γ_1 и δ_1 должны совпадать, иначе диаграмма M будет содержать полосу, что невозможно ввиду ее $\overline{R}$-приведенности.

Считаем, что $|\gamma_1|$ — большое число. Пусть $|\gamma_1| > 4\|w_0\|$. Выделим на пути γ_1, начиная от вершины A_1, некоторую циклическую перестановку w_0^* слова w_0 такую, что слово w_0^* начинается в вершине O, имеющей степень 3. Дальнейшие рассуждения проводятся аналогично как и для диаграмм предыдущего вида.

Так как число дисков меньше $|w_0^*| \cdot |v_0^*| + 1$, длина пути в каждой диске $|\gamma_1| \leq 4\|w_0\|$, длина каждого простого пути не превышает $|w_0^*|$, то $m \cdot |w_0^*| < 5|w_0^*|(|w_0^*| \cdot |v_0^*| + 1)$, откуда m, $n < 5(|w_0^*| \cdot |v_0^*| + 1)$.

Таким образом, проблема степенной сопряженности слов разрешима.

4. Заключение

В данной работе рассмотрено решение проблемы степенной сопряженности слов геометрическими методами. Данный результат является частью исследований комбинаторных свойств обобщенных древесных структур групп Артина и может быть использован для решения алгоритмических проблем в общем классе групп Артина.

Авторы выражают благодарность профессору В. Н. Безверхнему за внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Appel K., Schupp P. Artins groups and infinite Coxter groups // Inventiones mathematicae. 1983. №72. С. 201-220.

2. Карпова О. Ю., Безверхний В. Н. Решение проблемы степенной сопряженности в группах Артина с древесной структурой // / Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2009. Вып. 3. С. 42-59.

3. Безверхний В. Н. О группах Артина, Кокстера с древесной структурой // V международная конференция «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения»: тезисы докладов международной конференции. Тула: ТГПУ, 2003. С. 33-34.

4. Добрынина И. В., Угаров А. С. О централизаторе элемента в обобщённых древесных структурах групп Артина // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные

проблемы, приложения и проблемы истории. Материалы XVII Международной конференции, посвящённой 100-летию со дня рождения профессора Н. И. Фельдмана и 90-летию со дня рождения профессоров А. И. Виноградова, А. В. Малышева и Б. Ф. Скубенко. Тула: ТГПУ, 2019. С. 42-44.

5. Holt D. F., Rees S. E. Biautomatic structures in systolic Artin groups // International Journal of Algebra and Computation. 2021. Т. 31, №3. С. 365-391.

6. Добрынина И. В., Угаров А. С. Об обобщенных древесных структурах групп Артина // Владикавказский математический журнал. 2021. Т. 23, №3. С. 52-63.

7. Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980.

8. Безверхний В. Н. Решение проблемы обобщенной сопряженности слов в группах Артина большого типа // Фундаментальная и прикладная матемаматика. 1999. Т. 5, № 1. С. 1-38.

9. Безверхний В. Н. Решение проблемы сопряженности слов в группах Артина большого типа // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. Тула:ТГПУ, 1986. С. 26-61.

10. Безверхний В. Н., Кузнецова А. Н. Разрешимость проблемы степенной сопряженности слов в группах Артина экстрабольшого типа // Чебышевский сборник. 2008. Т. 9, №1. С. 50-68.

11. Безверхний В. Н., Карпова О. Ю. Проблема вхождения в циклическую подгруппу в группах Артина с древесной структурой // Чебышевский сборник. 2008. Т. 9, №1. С. 30-49.

12. Безверхний В. Н., Безверхняя Н. Б., Добрынина И. В., Инченко О. В., Устян А. Е. Об алгоритмических проблемах в группах Кокстера // Чебышевский сборник. 2016. Т. 17, №4. С. 23-50.

REFERENCES

1. Appel, K. & Schupp, P. 1983, “Artins groups and infinite Coxter groups”, *Inventiones mathematicae*, vol. 72, pp. 201-220.

2. Karpova, O. Ju. & Bezverkhnii, V. N. 2009, “Solving the power conjugacy problem in Artin groups with a tree structure”, *Izvestia of Tula state University. Estestven nauki*, no. 3, pp. 42-59.

3. Bezverkhnii, V. N. 2003, “On Artin groups, Coxeter with a tree structure”, *V mezhdunarodnaya konferentsiya «Algebra i teoriya chisel: sovremennye problemy i prilozheniya»: tezisy dokladov mezhdunarodnoy konferentsii*, Tula, pp. 33-34.

4. Dobrynina, I. V. & Ugarov, A. S. 2019, “On the centralizer of an element in generalized tree structures of Artin groups”, *Algebra, number theory and discrete geometry: modern problems, applications and problems of history: Proceedings of the XVII International Conf. devoted to the 100-th anniversary of the birth of Professor N. I. Feldman and the 90-th anniversary of the birth of Professors A. I. Vinogradov, A. V. Malyshev, and B. F. Skubenko*, Tula: TSPU, pp. 42-44.

5. Holt, D. F.& Rees, S. E. 2021, “Biatomatic structures in systolic Artin groups”, *International Journal of Algebra and Computation*, vol. 31, no. 3, pp. 365-391.

6. Dobrynina, I. V. & Ugarov, A. S. 2021, “On generalized tree structures of Artin groups”, *Vladikavkaz. Mat. Zh.,*, vol. 23, no. 3, pp. 52-63.

7. Lyndon, R.& Schupp, P. 1980, *Combinatorial group theory*, Mir, Moscow.

8. Bezverkhnii,V. N. 1999, "Solution of the generalized conjugacy problem in Artin groups of large type", *Fundamental and Applied Mathematics*, vol. 5, no. 1, pp. 1-38.

9. Bezverkhnii, V. N. 1986, "Solution of the problem of conjugation of words in Artin groups of large type", *Algorithmic problems of theory of groups and semigroups*, Tula: TSPU, pp. 26-61.

10. Bezverkhnii, V. N. & Kuznetsova, A. N. 2008, "Solvability of the problem of power conjugacy of words in Artin groups of extra-large type ", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 9, no. 1, pp. 50-69.

11. Bezverkhnii, V. N. & Karpova, O. Ju. 2008, "The occurrence problem a cyclic subgroup in Artin groups with a woody structure", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 9, no. 1, pp. 30-49.

12. Bezverkhnii, V. N., Bezverkhnyaya, N. B., Dobrynina, I. V., Inchenko O. V., Ustyan A. E. 2016, "On algorithmic problems in Coxeter groups", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 17, no. 4, pp. 23-50.

Получено: 05.05.2024
Принято в печать: 04.09.2024

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 25. Выпуск 3.

УДК 511.36 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-259-269

Арифметические свойства значений расходящихся в поле $\mathbb{C}$ рядов

В. Г. Чирский

Чирский Владимир Григорьевич — доктор физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова; Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации (г. Москва).
e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Аннотация

Статья посвящена описанию направлений исследования арифметических свойств значений рядов вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot n! z^n$$

с коэффициентами a_n, удовлетворяющими определённым условиям. При этих условиях рассматриваемый ряд,отличный от многочлена, сходится в поле $\mathbb{C}$ только при $z = 0$. Однако для почти всех, кроме конечного числа, простых чисел p такой ряд сходится в полях $\mathbb{Q}_p$.Поэтому есть два естественных пути исследования. Мы можем рассматривать либо значения результата некоторого суммирования этого ряда, либо его значения в поле $\mathbb{Q}_p$. Примером первого подхода служит рассмотренный ещё Эйлером ряд

$$1 - x + 2x^2 + ... + (-1)^n \cdot n! x^n + ...,$$

в результате суммирования которого при подстановке $x = 1$ получается замечательное равенство

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n! = e(\gamma - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot n!}),$$

где $\gamma-$ постоянная Эйлера.

Другое направление исследований использует введённое Э.Бомбиери понятие глобального соотношения. Используя модифицированный метод Зигеля–Шидловского удаётся получить аналоги основных теорем А.Б.Шидловского для $E-$ функций. Применение аппроксимаций Эрмита-Паде позволило рассмотреть значения обобщённых гипергеометрических рядов не только с алгебраическими, но и с некоторыми трансцендентными в любом поле $\mathbb{Q}_p$ параметрами.

Ключевые слова: трансцендентность,суммирование рядов, полиадическое число.

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:
Чирский, В. Г. Арифметические свойства значений расходящихся в поле $\mathbb{C}$ рядов // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 3, с. 259–269.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 25. No. 3.

UDC 511.36 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-259-269

Arithmetic properties of values of divergent in $\mathbb{C}$ series

V. G. Chirskii

Chirskii Vladimir Grirorevich — doctor of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University; Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration (Moscow).

e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Abstract

The article describes the directions of research on the arithmetic properties of series values of the form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot n! z^n$$

with coefficients a_n satisfying certain conditions. Under these conditions, the considered series, other than the polynomial, converges in the field $\mathbb{C}$ only at $z = 0$. However, for almost all but a finite number of prime p numbers, such a series converges in the fields $\mathbb{Q}_p$. Therefore there are two ways of research. We can either consider the arithmetic properties of the result of some summation of this series, or consider the values of this series in the field $\mathbb{Q}_p$. An example of the first approach is the series considered by Euler

$$1 - x + 2x^2 + ... + (-1)^n \cdot n! x^n + ...,$$

as a result of the summation of which, with the substitution $x = 1$, we obtain the remarkable equality

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n! = e(\gamma - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot n!}),$$

where γ – Euler's constant.

Another direction of research uses the concept of global relation introduced by E. Bombieri. Using the modified Siegel—Shidlovskii method, it is possible to obtain analogues of the main theorems of A.B. Shidlovskii for $E-$ functions. The use of Hermite-Pade approximants made it possible to consider the values of generalized hypergeometric series not only with algebraic, but also with certain parameters transcendental in any field $\mathbb{Q}_p$.

Keywords: transcendence,summatuon of a series, polyadic number.

Bibliography: 16 titles.

For citation:

Chirskii, V. G. 2024, "Arithmetic properties of values of divergent in $\mathbb{C}$ series", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 3, pp. 259–269.

1. Введение

Работа относится к теории трансцендентных чисел в неархимедовски нормированных областях. Точнее говоря, рассматриваются задачи, к решению которых, в основном, привлекаются различные обобщения метода Зигеля-Шидловского в теории трансцедентных чисел. Сам метод достаточно подробно освещен в [1]. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n n!\, z^n, \tag{1}$$

коэффициенты которого – алгебраические числа из некоторого числового поля K конечной степени над полем Q. При этом максимумы модулей сопряжённых с a_n чисел не превосходят C_1^n. Кроме того, существует последовательность натуральных чисел q_n таких, что все числа $q_n a_k, k = 0, 1, ..., n$ принадлежат кольцу $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$ целых чисел поля $\mathbb{K}$ и выполняется оценка $|q_n| \leq C_2^n$. Такие ряды, если они отличны от многочленов, расходятся в поле $\mathbb{C}$.

2. Арифметические свойства просуммированных рядов

Можно рассматривать функции, полученные в результате суммирования Бореля-Лапласа (см. [2])или Рамиса [3] таких рядов. Например, ряд связанный с именем Эйлера

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \tag{2}$$

представляет собой асимптотическое разложение (см. [2]) для интеграла

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{w}{z}}}{1+w}.$$

Результат суммирования ряда (2) при $z = 1$ является известной постоянной Гомпертца. Точнее говоря,справедливо равенство

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n! = e(\gamma - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot n!}),$$

где $\gamma-$ постоянная Эйлера, а левая часть обозначает результат упомянутого выше суммирования.

В этом направлении проводятся интенсивные и очень интересные исследования Ривоаля, Фишлера и Фергюсона, [4],-[7], связанные с подходом И. Андре [8] и Бертрана и Бейкерса [9] к исследованию арифметических свойств значений $E-$ функций.

3. Арифметические свойства элементов прямых произведений полей $p-$ адических чисел

С другой стороны, упомянутые ряды (1) сходятся в полях p–адических чисел или алгебраических расширениях этих полей, что позволяет рассматривать бесконечномерные векторы, координаты которых представляют собой суммы рассматриваемых рядов в упомянутых полях. С этими рядами тесно связано понятие полиадического числа. Напомним, что каноническое разложение полиадического числа λ имеет вид

$$\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n!, a_n \in \mathbb{Z}, 0 \leq a_n \leq n.$$

Этот ряд сходится в любом поле $p-$ адических чисел $\mathbb{Q}_p$. Действительно,

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} |a_n n!|_p = 0.$$

Так как $a_n \in \mathrm{Z}$, имеем $|a_n|_p \leq 1$, кроме того,

$$|n!|_p = p^{-\dfrac{n - S_n}{p-1}} \longrightarrow 0$$

при $n \longrightarrow \infty$. Здесь S_n обозначает сумму цифр $p-$ичного разложения числа n. Разумеется, ряд, члены которого - целые числа, сходящийся во всех полях $p-$ адических чисел, представляет собой целое полиадическое число.

Кольцом целых полиадических чисел называется прямое произведение колец целых $p-$ адических чисел по всем простым числам p. Элементы λ этого кольца, таким образом, можно рассматривать как бесконечномерные векторы, координаты которых в соответствующем кольце целых $p-$ адических чисел обозначаем $\lambda^{(p)}$. Разумеется, вполне аналогичным способом можно рассматривать прямые произведения алгебраических расширений $\mathbb{K}_v$ полей $\mathbb{Q}_p$.

Это позволяет ввести понятия бесконечной и глобальной линейной или алгебраической независимости. Рассмотрим ряд $f(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot \alpha^n$, где $\alpha, c_n \in \mathbb{K}-$ алгебраическому числовому полю конечной степени $\varkappa$ над полем $\mathbb{Q}$ рациональных чисел. Пусть он сходится в бесконечном множестве полей $\mathbb{K}_v$, где нормирование v поля $\mathbb{K}$ продолжает $p-$адическое нормирование поля $\mathbb{Q}$. Это позволяет рассматривать ряд $f(\alpha)$, как элемент прямого произведения этих полей $\mathbb{K}_v$. Это прямое произведение имеет естественную структуру кольца, операциям в котором соответствуют операции по каждой координате. Для элемента $\mathfrak{a}$ этого прямого произведения обозначаем $\mathfrak{a}^{(v)}$ его координату в поле $\mathbb{K}_v$.

Если существует $P(x)$ – многочлен с рациональными коэффициентами, отличный от тождественного нуля такой, что $P(\mathfrak{a}) = 0$ (иными словами, $P\left(\mathfrak{a}^{(v)}\right) = 0$ в каждом поле $\mathbb{K}_v$ этого прямого произведения), то говорим, что $\mathfrak{a}$ – *алгебраический элемент*.

Если элемент $\mathfrak{a}$ не является алгебраическим, то его называют *трансцендентным*. Трансцендентность элемента означает, что для любого $P(x)-$ многочлена с рациональными коэффициентами, отличного от тождественного нуля, существует простое число p и нормирование v поля $\mathbb{K}$, продолжающее p-адическое нормирование поля $\mathbb{Q}$ такие, что $P\left(\mathfrak{a}^{(v)}\right) \neq 0$ в поле $\mathbb{K}_v$.

Назовем элемент $\mathfrak{a}$ *бесконечно трансцендентным*, если для любого $P(x)$ – многочлена с рациональными коэффициентами, отличного от тождественного нуля, существует бесконечное множество простых чисел p, для каждого из которых есть нормирование v поля $\mathbb{K}$, продолжающее p – адическое нормирование такое, что $P\left(\mathfrak{a}^{(v)}\right) \neq 0$ в поле $\mathbb{K}_v$.

Элемент $\mathfrak{a}$ называется *глобально трансцендентным*, если для любого $P(x)$ – многочлена с рациональными коэффициентами, отличного от тождественного нуля, неравенство $P\left(\mathfrak{a}^{(v)}\right) \neq 0$ выполняется во всех полях $\mathbb{K}_v$ рассматриваемого прямого произведения.

Примерами глобально трансцендентных чисел служат ряды

$$\sum_{k=0}^{\infty} n_k!,$$

где $\{n_k\}-$ достаточно быстро растущая последовательность натуральных чисел. Более того, ряды

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{n_k!}{p_k^{m_k}},$$

в которых p_k- простое число с номером k, а $\{n_k\}, \{m_k\}$- достаточно быстро растущие последовательности натуральных чисел, дают примеры чисел, трансцендентных как в поле $\mathbb{R}$, так и в

любом поле $\mathbb{Q}_p$. Действительно, быстрый рост последовательности $\{n_k\}$ обеспечивает трансцендентность суммы этого ряда в любом поле $\mathbb{Q}_p$, а быстрый рост последовательности $\{m_k\}$-трансцендентность суммы этого ряда в поле $\mathbb{R}$.

Отметим, что из бесконечной трансцендентности элемента не следует трансцендентность $\mathfrak{a}^{(v)}$ хотя бы для одного простого числа p и нормирования v поля $\mathbb{K}$, продолжающего p-адическое нормирование поля $\mathbb{Q}$. Например, элемент $(1, 2, \ldots, n, \ldots)$ прямого произведения полей $\mathbb{Q}_p$ (координата которого равна n в поле $\mathbb{Q}_{p_n}$, соответствующем n-ному простому числу p_n) бесконечно трансцендентен. Действительно, любой $P(x)-$ многочлен с рациональными коэффициентами, отличный от тождественного нуля, может обратиться в ноль лишь на конечном множестве натуральных чисел.

Для совокупности элементов $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_m$ аналогичным образом определяются понятия их алгебраической зависимости, алгебраической независимости, бесконечной алгебраической независимости и глобальной алгебраической независимости. Достаточно вместо многочлена $P(x)$ рассмотреть $P(x_1, \ldots, x_m)-$ многочлен с рациональными коэффициентами, отличный от тождественного нуля.

В работах [10],[11] установлены теоремы для F-рядов, подобные теоремам А.Б. Шидловского для E–функций (ряды вида $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$).

Сформулируем определение F-ряда. Ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot n! \cdot z^n.$$

принадлежит классу $F(\mathbb{K}, C_1, C_2, C_3, q)$, если

1. Все коэффициенты c_n принадлежат некоторому алгебраическому числовому полю $\mathbb{K}$ конечной степени $\varkappa$ над полем $\mathbb{Q}$ рациональных чисел.

2. Максимумы абсолютных величин алгебраически сопряженных с числом c_n чисел представляют собой $O(C_1^n), n \longrightarrow \infty$ с некоторой постоянной $C_1 > 1$.

3. Существует последовательность натуральных чисел d_n такая, что при$k = 0, 1, \ldots, n$ числа $d_n c_k$ принадлежат кольцу целых чисел $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$ поля $\mathbb{K}$ и $d_n = q^n d_{0,n}$, $q \in \mathbb{N}$, а числа $d_{0,n}$ делятся только на простые числа p, не превосходящие $C_2 n$, и для всех таких простых p выполняется неравенство $\vartheta_p(d_{0,n}) \leqslant C_3 \left(\log_p n + \frac{n}{p^2}\right)$. (Символ $\vartheta_p(a)$ обозначает степень, в которой простое число p входит в разложение на множители целого числа a.)

Это определение показывает, что F-ряды относятся к так называемым арифметическим рядам Жевре.

Теорема(Теорема 3,[10]) . *Пусть F-ряды $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ алгебраически независимы над полем $\mathbb{C}(z)$ и составляют решение системы линейных дифференциальных уравнений вида*

$$y_k' = Q_{k,0} + \sum_{i=1}^{m} Q_{k,i} y_i, k = 1, \ldots, m, Q_{k,i} \in \mathbb{C}(z) \ .$$

Пусть γ-алгебраическое число, отличное от нуля и особых точек этой системы уравнений. Тогда ряды $f_1(\gamma), \ldots, f_m(\gamma)$ бесконечно алгебраически независимы.

Вместе с тем, для конкретного поля p–адических чисел не удаётся доказать хотя бы иррациональность значений таких рядов, оценки линейных форм зависят от высоты формы [11].

Пусть $t = r - s > 0$. Будем рассматривать ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n \ldots (\alpha_r)_n}{(\beta_1)_n \ldots (\beta_s)_n} (zt)^{tn}. \tag{3}$$

В работе [12] установлены условия на параметры рассматриваемого ряда , при которых справедливо следующее утверждение:

Пусть $\mathbb{K}$*– алгебраическое числовое поле конечной степени* $\varkappa$ *над полем* $\mathbb{Q}$ *рациональных чисел. Пусть* $f'(z), f''(z), \ldots, f^{(r-1)}(z)$*-формальные производные ряда (3).*
Пусть $\gamma \in \mathbb{K}$, $\gamma \neq 0$.

Тогда ряды $f(\gamma)$, $f'(\gamma), f''(\gamma), \ldots, f^{(r-1)}(\gamma)$ *бесконечно алгебраически независимы.*

В работе [13] рассматриваются ряды вида

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\mu_1)_n \cdot \ldots \cdot (\mu_1)_n z^n, \tag{4}$$

среди параметров которых содержатся алгебраические иррациональные числа (и, значит, они не входят в класс $F-$ рядов) и устанавливаются условия бесконечной линейной независимости их значений в алгебраических точках. Для рядов вида (4) можно рассмотреть случай, в котором среди параметров будут глобально трансцендентные полиадические числа.Более точно,будем называть полиадическое число λ полиадическим числом Лиувилля(или лиувиллевым полиадическим числом), если для любых чисел n и P существует целое число A такое, что для всех простых чисел p , удовлетворяющих неравенству $p \leq P$ выполнено неравенство

$$|\lambda - A|_p < |A|^{-n}.$$

Точнее говоря, следовало бы писать

$$\left|\lambda^{(p)} - A\right|_p < |A|^{-n},$$

однако мы условимся, что при рассмотрении поля $p-$ адических чисел под символом λ подразумевается сумма $\lambda^{(p)}$этого ряда.В работе [16] доказана теорема.

Теорема ([1]).*Полиадическое число Лиувилля является трансцендентным элементом любого поля* $\mathbb{Q}_p$*. Иными словами, полиадическое число Лиувилля - глобально трансцедентное число.*

Положим

$$\lambda_0 = 1, s_0 = [exp\lambda_0] + 1.$$

Пусть λ_1 - произвольное натуральное число такое, что для любого простого числа p, удовлетворяющего неравенству

$$p \leq s_0 + 2\lambda_0^2$$

выполняется неравенство

$$ord_p\lambda_1 \geq ms_0 \ln s_0$$

и положим

$$s_1 = [exp\lambda_1] + 1.$$

Для $k \geq 1$ пусть λ_{k+1} - произвольное натуральное число такое, что для любого простого числа p, удовлетворяющего неравенству

$$p \leq s_k + 2\lambda_k^2$$

выполняется неравенство

$$ord_p\lambda_{k+1} \geq ms_k \ln s_k$$

и полагаем

$$s_{k+1} = [exp\lambda_{k+1}] + 1.$$

Ряд

$$\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k$$

сходится в любом поле $\mathbb{Q}_p$. Пусть $\mu_{i,0}, i = 1, ..., m-1$-натуральные числа. Пусть для любых $i = 1, ..., m-1, k \geq 1$ числа $\mu_{i,k}$ - неотрицательные целые и удовлетворяют неравенству $\mu_{i,k} \leq \lambda_k$. Положим

$$\alpha_i = \sum_{l=0}^{\infty} \mu_{ii,l}\lambda_l, i = 1, ..., m-1,$$

$$f_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_1)_n ... (\alpha_{m-1})_n z^n, \tag{5}$$

$$f_{m-1}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_1 + 1)_n ... (\alpha_{m-1} + 1)_n z^n, \tag{6}$$

а для $i = 1, ..., m-2$

$$f_i(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_1 + 1)_n ... (\alpha_i + 1)_n (\alpha_{i+1})_n ... (\alpha_{m-1})_n z^n.$$

Пусть M - натуральное число, рассмотрим приведённую систему вычетов по $mod(M)$, число элементов этой системы равно $\varphi(M)$, где $\varphi(M)$-функция Эйлера. Пусть произвольным образом выбраны ϱ различных элементов $a_1, ..., a_\varrho$ этой приведённой системы вычетов. Символами $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_\varrho$ обозначены множества натуральных значений, принимаемых прогрессиями вида $a_i + Mk, k \in \mathbb{Z}$. Будем обозначать $\mathbb{P}(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_\varrho)$ множество простых чисел, входящих в объединение множеств $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_\varrho$.

Теорема ([15]). *Пусть $m \geq 3, M, \varrho$- натуральные числа, для которых $\varphi(M) > m, \varrho m > \varphi(M)(m-1)$. Тогда для любых целых чисел $h_0, ..., h_{m-1}$, не равных одновременно нулю и любого натурального числа ξ существует бесконечное множество простых чисел p из множества $\mathbb{P}(\boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_\varrho)$ таких, что в поле $\mathbb{Q}_p$ выполняется неравенство*

$$\mid h_0 f_0(\xi) + ... + h_{m-1} f_{m-1}(\xi) \mid_p > 0.$$

Вполне аналогичная теорема справедлива при замене ξ на полиадическое число Лиувилля Ξ.

Для гипергеометрических рядов общего вида

$$F_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n ... \alpha_r)_n}{(\beta_1)_n ... \beta_s)_n} z^n,$$

$$F_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1 + 1)_n ... \alpha_r + 1)_n}{(\beta_1 + 1)_n ... \beta_s + 1)_n} z^n$$

справедливо тождество

$$F_0(z) = 1 + \frac{\alpha_1 ... \alpha_r}{\beta_1 ... \beta_s} z F_1(z).$$

Это равенство означает, что если все числа $\alpha_1, ..., \alpha_r, \beta_1, ..., \beta_s$ и значение z - алгебраические, то оба значения $F_0(z), F_1(z)$ либо одновременно алгебраические, либо трансцендентные числа.

Если же число $\frac{\alpha_1 \dots \alpha_r}{\beta_1 \dots \beta_s} z$ трансцендентное и число $F_1(z) \neq 0$, то хотя бы одно из этих чисел является трансцендентным. Высказанные выше утверждения относятся как к полю комплексных чисел, так и к любому полю Q_p.

В работе [16] предыдущая теорема применена к рядам (5),(6), т.е.$\Psi_0(z) = f_0(z), \Psi_1(z) = = f_0(z)$ и доказано, что если $\alpha_1, ..., \alpha_m$ - полиадические числа Лиувилля и если ξ - натуральное число или если Ξ - полиадическое число Лиувилля, то существует бесконечное множество полей $\mathbb{Q}_p$, в которых хотя бы одно из чисел $\Psi_0(\xi), \Psi_1(\xi)$ (соответственно,$\Psi_0(\Xi), \Psi_1(\Xi)$) является трансцендентным числом. Для конкретного поля $\mathbb{Q}_2$ можно получить формулируемое ниже утверждение.

Пусть

$$f_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda)_n z^n, f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda + 1)_n z^n.$$

Положим

$$\lambda_0 = 1, s_0 = [exp\lambda_0] + 1 = 3.$$

Пусть λ_1 - произвольное натуральное число такое, что для любого простого числа p, удовлетворяющего неравенству

$$p \leq s_0 + 2\lambda_0^2 = 5$$

выполняется неравенство

$$ord_p \lambda_1 \geq 2 s_0 \ln s_0$$

и положим

$$s_1 = [exp\lambda_1] + 1.$$

Для $k \geq 1$ пусть λ_{k+1} - произвольное натуральное число такое, что для любого простого числа p, удовлетворяющего неравенству

$$p \leq s_k + 2\lambda_k^2$$

выполняется неравенство

$$ord_p \lambda_{k+1} \geq 2 s_k \ln s_k$$

и полагаем

$$s_{k+1} = [exp\lambda_{k+1}] + 1.$$

Ряд

$$\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k$$

сходится в любом поле $\mathbb{Q}_p$.

Теорема([17]). *Хотя бы одно из 2-адических чисел $f_0(1), f_1(1)$ - трансцендентное 2-адическое число.*

4. Заключение

В статье дан краткий обзор современного состояния вопроса об арифметической природе значений расходящихся в поле $\mathbb{C}$ рядов и рассказано о двух основных подходах к исследованию проблемы. В работах [10], [12] содержатся результаты автора, относящиеся к развитию метода Зигеля-Шидловского и ряду других вопросов теории трансцендентных чисел в областях с неархимедовскими нормированиями. Отдельного внимания заслуживают исследования, посвящённые полиадическим числам Лиувилля [14]-[17]. Объекты, названные в этой работе

полиадическими числами Лиувилля, рассматриваются относительно недавно. Отметим работу Е.Ю. Юденковой [18], в которой значения $F-$ рядов рассматриваются в полиадических точках Лиувилля,работу В.Ю. Матвеева [19], работу Е.С. Крупицына [20], где установлены оценки многочленов от совокупностей полиадических чисел Лиувилля.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шидловский, А. Б. Трансцендентные числа.-М.: «Наука».-1987.-448 с.(Английский перевод:[3] Andrei B.Shidlovskii. Transcendental Numbers. W.de Gruyter.-Berlin.-New York.-1989.-467pp.).
2. Харди, Г. Г. Расходящиеся ряды.-М.:«URSS».-2006.-506с.
3. Рамис, Ж. П. Расходящиеся ряды и асимптотические теории.-М.-Иж.: «Институт компьютерных технологий».-2002.-80 с.
4. Ferguson, T. Algebraic properties of Э-functions // J.Number Theory. 2021.- v.229, pp.168-178.
5. Fischler, S., Rivoal, T. Arithmetic theory of E-operators // J.d l'Ecole polytechnique-Mathematiques.-2016.-т. 3.-с. 31 -65.
6. Fischler, S., Rivoal, T. Microsolutions of differential operators and values of arithmetic Gevrey series // Michigan Math. J.-2018.-с.239-254.
7. Rivoal, T. On the arithmetic nature of the values of the Gamma function,Euler's constant and Gompertz's constant // American J.of Math.-2012.-n/140.-№2.-с.317-348.
8. Andre, Y. Arithmetic Gevrey series and transcendence. A survey // J. Theor. Nombres Bordeaux.-2003.-т.15.-с.1-10.
9. Bertrand, D., Beukers, F. Equations differentielles linearies et majorations de multiplicities.-1985.-Annales scientifiques ENS.-т.18.-№1.-с.181-192.
10. Chirskii, V. G. Product Formula, Global Relations and Polyadic Integers // Russ. J. Math. Phys. 2019.- v.26, no.3, pp.286-305.
11. Ernvall-Hytonen, A.-M., Matala-aho, T., Seppala, I. Euler's factorial series, Hardy integral, and continued fractions // J.Number Theory. 2023.-v.244.-pp.224-250.
12. Chirskii, V. G. Arithmetic properties of generalized hypergeometric $F-$ series // Russ. J. Math. Phys. 2020.- v.27, no.2, pp.175-184.
13. Чирский, В. Г. Об арифметических свойствах обобщенных гипергеометрических рядов с иррациональными параметрами // Известия РАН, серия математическая.-2014.-т.78.-№6.-с.193-210.
14. Чирский, В. Г. Полиадические числа Лиувилля // Чебышевский сборник.-2021.-т. 22.- вып. 3.-с. 245 – 255.
15. Чирский, В. Г. Арифметические свойства значений обобщенных гипергеометрических рядов с полиадическими трансцендентными параметрами // Доклады Академии наук, сер. матем.информ. проц. управл.-2022.-т.506.-с.95-107.
16. Чирский, В. Г. Трансцендентность p-адических значений обобщенных гипергеометрических рядов с трансцендентными полиадическими параметрами // Доклады Академии наук, сер. матем.информ. проц. управл.-2023.-т.510.-с.29-32.

17. Чирский, В. Г. Трансцендентность некоторых 2-адических чисел // Чебышевский сборник.- 2023.- т. 24.- вып. 5.- с. 194 – 200.

18. Юденкова, Е. Ю. Бесконечная линейная и алгебраическая независимость знгачений F-рядов в полиадических лиувиллевых точках // Чебышевский сборник.-2021.-т. 22.- вып. 2.-с. 334 – 346.

19. Матвеев, В. Ю. Свойства элементов прямых произведений полей // Чебышевский сборник.- 2019.- т.20.- вып. 2.- с. 383 – 390.

20. Крупицын, Е. С. Арифметические свойства рядов некоторых классов// Чебышевский сборник.- 2019.- т. 20.- вып. 2.- с. 374 – 382.

REFERENCES

1. Shidlovskii, A. B. 1989, "Transcendental Numbers", *W.de Gruyter.-Berlin.-New York*, 467 pp.

2. Hardy, G. H. 1949, "Divergent Series", *Clarendon Press.-London*, 510 pp.

3. Ramis, J. P. 1993, "Series divergentes et theories asymptotiques", *Panoramas et Syntheses, no.21, Soc. Math. France. -Paris*, 80 pp.

4. Ferguson, T. 2021, "Arithmetic properties of Э-functions",*J.Number Theoty*, Vol, 229, pp.168–178.

5. Fischler, S., Rivoal. T. 2016, "Arithmetic theory of E-operators",*J.d l'Ecole polytechnique-Mathematiques*, Vol, 3, pp.31–65.

6. Fischler, S., Rivoal, T. 2018, "Microsolutions of differential operators and values of arithmetic Gevrey series",*Michigan Math. J.*, Vol, 61, pp.239–254.

7. Rivoal, T. 2012, "On the arithmetic nature of the values of the Gamma function,Euler's constant and Gompertz's constant",*American J.of Math*, Vol, 140,no.2. pp.317–348.

8. Andre, Y. 2003, "Arithmetic Gevrey series and transcendence. A survey",*J.Theor.Nombres Bordeaux*, Vol, 15, pp.1–10.

9. Bertrand, D., Beukers, F. 1985, "Equations differentielles linearies et majorations de multiplicities ",*Annales scientifiques ENS*, Vol, 18,no.1. pp.181–192.

10. Chirskii, V. G. 2019, "Product Formula, Global Relations and Polyadic Integers", *Russ. J. Math. Phys.*, Vol.26, no.3, pp.286–305.

11. Ernvall-Hytonen, A.-M., Matala-aho, T., Seppala, I. 2023, " Euler's factorial series, Hardy integral, and continued fractions", *J.Number Theory*, Vol. 244, pp.224–250.

12. Chirskii, V. G. 2020, " Arithmetic properties of generalized hypergeometric F- series", *Russ. J. Math. Phys.*, Vol.27, no.2, pp.175–184.

13. Chirskii, V. G.2014, "On the arithmetic properties of generalized hypergeometric series with irrational parameters .", *Izvestiya RAN. Ser. Math.*, Vol. 8, no.6, pp.193–210.

14. Chirskii, V. G.2021, " Polyadic Liouvillean numbers .", *Chebyshevsky sbornik*, Vol. 22, no.3, pp.245–255.

15. Chirskii, V. G. 2022, " Arithmetic properties of the values of generalized hypergeometric series with polyadic transcendental parameter .", *Dokl. Math.*, Vol. 106, no.2, pp.386–397.

16. Chirskii, V. G. 2023, "Transcendence of p-adic values of generalized hypergeometric series with transcendental polyadic parameter .", *Dokl. Math.*, Vol. 107, no.2, pp.109–111.

17. Chirskii, V. G. 2023, " Transcendence of certain 2-adic numbers .", *Chebyshevsky sbornik*, Vol. 24, no.5, pp.194–200.

18. Yudenkova, E. Yu. 2021, " Infinite linear and algebraic independence pf values of F-series at polyadic Liouvillean point .", *Chebyshevsky sbornik*, Vol. 22, no.2, pp.334–346.

19. Matveev, V. Yu. 2019, " Properties of elements of direct products of fields", *Chebyshevsky sbornik*, Vol. 20, no.2, pp.383–390.

20. Krupitsin, E. S. 2019, " Arithmetic properties of series of certain classes", *Chebyshevsky sbornik*, Vol. 20, no.2, pp.374–382.

Получено: 24.03.2024
Принято в печать: 04.09.2024

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 25. Выпуск 3.

УДК 517.9+531.01 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-270-298

Тензорные инварианты динамических систем пятого порядка с диссипацией

М. В. Шамолин

Шамолин Максим Владимирович — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: shamolin@rambler.ru, shamolin.maxim@yandex.ru

Аннотация

Представлены новые случаи интегрируемых однородных по части переменных динамических систем пятого порядка, в которых может быть выделена система на касательном расслоении к двумерному многообразию. При этом силовое поле разделяется на внутреннее (консервативное) и внешнее, которое обладает диссипацией разного знака. Внешнее поле вводится с помощью некоторого унимодулярного преобразования и обобщает ранее рассмотренные поля. Приведены полные наборы как первых интегралов, так и инвариантных дифференциальных форм.

Ключевые слова: динамическая система, интегрируемость, диссипация, трансцендентный первый интеграл, инвариантная дифференциальная форма.

Библиография: 46 названий.

Для цитирования:
Шамолин, М. В. Тензорные инварианты динамических систем пятого порядка с диссипацией // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 3, с. 270–298.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 25. No. 3.

UDC 517.9+531.01 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-270-298

Tensor invariants of fifth-order dynamical systems with dissipation

M. V. Shamolin

Shamolin Maxim Vladimirovich — doctor of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: shamolin@rambler.ru, shamolin.maxim@yandex.ru

Abstract

New cases of integrable dynamical systems of the fifth-order homogeneous in terms of variables are presented, in which a system on a tangent bundle to a two-dimensional manifold can be distinguished. In this case, the force field is divided into an internal (conservative) and an external one, which has a dissipation of different signs. The external field is introduced using some unimodular transformation and generalizes the previously considered fields. Complete sets of both the first integrals and invariant differential forms are given.

Keywords: dynamical system, integrability, dissipation, transcendental first integral, invariant differential form.

Bibliography: 46 titles.

For citation:
Shamolin, M. V. 2024, “Tensor invariants of fifth-order dynamical systems with dissipation” , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 3, pp. 270–298.

1. Примеры интегрирования систем третьего порядка

1.1. Введение

Нахождение достаточного количества тензорных инвариантов (не только автономных первых интегралов), как известно [13, 14, 45], облегчает исследование, а иногда позволяет точно проинтегрировать систему дифференциальных уравнений. Например, наличие инвариантной дифференциальной формы фазового объема позволяет уменьшить количество требуемых первых интегралов. Для консервативных (в частности, гамильтоновых) систем этот факт естествен, когда фазовый поток сохраняет объем с гладкой (или постоянной) плотностью.

Сложнее (в смысле гладкости инвариантов) дело обстоит для систем, обладающих притягивающими или отталкивающими предельными множествами. Для таких систем коэффициенты искомых инвариантов должны, вообще говоря, включать функции, обладающие существенно особыми точками (см. также [23, 24, 26]).

Наш подход состоит в том, что для точного интегрирования автономной системы порядка m надо знать $m-1$ независимый тензорный инвариант. При этом для достижения точной интегрируемости приходится соблюдать также ряд дополнительных условий на эти инварианты.

Важные случаи интегрируемых систем с малым числом степеней свободы в неконсервативном поле сил уже рассматривались в работах автора [28, 30, 43]. Настоящее исследование распространяет результаты этих работ на более широкий класс динамических систем. При этом в этих работах упор делался на нахождение достаточного количества именно первых интегралов. Но, как известно, иногда полного набора первых интегралов для систем может и не быть, зато достаточное количество инвариантных форм может быть обеспечено.

Для систем классической механики понятия “консервативность”, “силовое поле”, “диссипация” и др. вполне естественны. Поскольку в данной работе изучаются динамические системы на касательном расслоении к гладкому многообразию (пространству положений), уточним данные понятия для таких систем.

Анализ “в целом” начинается с исследования приведенных уравнений геодезических, левые части которых при правильной параметризации представляют собой записи координат ускорения движения материальной частицы, а правые части приравнены к нулю. Соответственно, величины, которые ставятся в дальнейшем в правую часть, можно рассматривать как некоторые обобщенные силы. Такой подход традиционен для классической механики, а теперь он естественно распространяется на более общий случай касательного расслоения к гладкому многообразию. Последнее позволяет, в некотором смысле, конструировать “силовые поля”. Так, например, введя в систему коэффициенты, линейные по одной из координат (по одной из квазискоростей системы) касательного пространства, получим силовое поле с диссипацией разного знака (в зависимости от знака самого коэффициента).

И хотя словосочетание “диссипация разного знака” несколько противоречиво, тем не менее, будем его употреблять. Учитывая при этом, что в математической физике диссипация “со знаком “плюс” — это рассеяние полной энергии в обычном смысле, а диссипация “со знаком “минус” — это своеобразная “подкачка” энергии (при этом в механике силы, обеспечивающие рассеяние энергии называются диссипативными, а силы, обеспечивающие подкачку энергии называются разгоняющими).

Консервативность для систем на касательных расслоениях можно понимать в традиционном смысле, но мы добавим к этому следующее. Будем говорить, что система консервативна,

если она обладает полным набором гладких первых интегралов, что говорит о том, что она не обладает притягивающими или отталкивающими предельными множествами. Если же она последними обладает, то будем говорить, что система в той или иной области фазового пространства обладает диссипацией какого-то знака. Как следствие этого — обладание системы хотя бы одним первым интегралом (если они вообще есть) с существенно особыми точками.

В данной работе силовое поле разделяется на так называемые внутреннее и внешнее. Внутреннее поле характерно тем, что оно не меняет консервативности системы. А внешнее может вносить в систему диссипацию разного знака. Заметим также, что вид внутренних силовых полей заимствован из классической динамики твердого тела (см. также [7, 18, 46]).

В данном разделе 1 приведены первые интегралы, а также инвариантные дифференциальные формы классов однородных по части переменных динамических систем третьего порядка, в которых может быть выделена система с одной степенью свободы на своем двумерном многообразии. При этом силовое поле разделяется на внутреннее (консервативное) и внешнее, которое обладает так называемой знакопеременной диссипацией. Внешнее поле вводится с помощью некоторого унимодулярного преобразования и обобщает силовые поля, рассматриваемые ранее.

1.2. Некоторые примеры из плоскопараллельной динамики твердого тела, взаимодействующего со средой

Рассмотрим плоскопараллельное движение симметричного твердого тела с передним плоским торцом (одномерной пластиной) в поле силы сопротивления в условиях квазистационарности [11, 18]. Если (v, α) — полярные координаты вектора скорости некоторой характерной точки D твердого тела (D — центр пластины), Ω — значение его угловой скорости, I, m — инерционно-массовые характеристики, то динамическая часть уравнений движения тела (в том числе, и в случае аналитических функций Чаплыгина [18]), при котором касательные силы воздействия среды на пластину отсутствуют, примет вид:

$$\begin{aligned} &\dot v\cos\alpha-\dot\alpha v\sin\alpha-\Omega v\sin\alpha+\sigma\Omega^2=\frac{F_x}{m},\\ &\dot v\sin\alpha+\dot\alpha v\cos\alpha+\Omega v\cos\alpha-\sigma\dot\Omega=0,\\ &I\dot\Omega=y_N\left(\alpha,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2,\ F_x=-S,\ S=s(\alpha)v^2,\ \sigma>0,\ v>0. \end{aligned} \tag{1}$$

Первые два уравнения (1) описывают движение центра масс на двумерной евклидовой плоскости $\mathbf{E}^2$ в проекциях на систему координат Dx_1x_2, связанную с телом. При этом Dx_1 — срединный перпендикуляр к пластине, проходящий через центр масс C симметричного тела, а Dx_2 — ось, выбранная вдоль пластины. Третье же уравнение (1) получено из теоремы об изменении кинетического момента.

Таким образом, фазовым пространством системы (1) третьего порядка является прямое произведение $\mathbf{R}^1_+\times\mathbf{S}^1\times\mathrm{so}(2)$ части двумерного цилиндра на алгебру Ли $\mathrm{so}(2)$.

Если же рассматривается более общая задача о движении тела при наличии некоторой следящей силы $\mathbf{T}$, проходящей через центр масс и обеспечивающей во все время движения выполнение равенства ($\mathbf{V}_C$ — скорость центра масс, см. также [37, 40])

$$\mathbf{V}_C\equiv\mathbf{const}, \tag{2}$$

то в системе (1) вместо F_x должна стоять величина, тождественно равная нулю, поскольку на тело будет действовать неконсервативная пара сил: $T-s(\alpha)v^2\equiv0,\ \sigma=DC$.

Очевидно, что для этого нужно выбрать величину следящей силы T в виде

$$T=T_v(\alpha,\Omega)=s(\alpha)v^2,\ \mathbf{T}\equiv-\mathbf{S}. \tag{3}$$

Случай (3) выбора величины T следящей силы является частным случаем возможности отделения независимой подсистемы второго порядка после некоторого преобразования системы третьего порядка (1).

Действительно, пусть выполнено следующее условие на величину T:

$$T = T_v(\alpha, \Omega) = \tau_1\left(\alpha, \frac{\Omega}{v}\right) v^2 + \tau_2\left(\alpha, \frac{\Omega}{v}\right) \Omega v + \tau_3\left(\alpha, \frac{\Omega}{v}\right) \Omega^2 = T_1\left(\alpha, \frac{\Omega}{v}\right) v^2.$$

Систему (1) можно переписать в виде

$$\begin{gathered}
\dot{v} + \sigma\Omega^2 \cos\alpha - \sigma \sin\alpha \left[\frac{v^2}{I} y_N\left(\alpha, \frac{\Omega}{v}\right) s(\alpha)\right] = \frac{T_1\left(\alpha, \Omega/v\right) v^2 - s(\alpha) v^2}{m} \cos\alpha, \\
\dot{\alpha} v + \Omega v - \sigma \cos\alpha \left[\frac{v^2}{I} y_N\left(\alpha, \frac{\Omega}{v}\right) s(\alpha)\right] - \sigma\Omega^2 \sin\alpha = \frac{s(\alpha) v^2 - T_1\left(\alpha, \Omega/v\right) v^2}{m} \sin\alpha, \qquad (4) \\
\dot{\Omega} = \frac{v^2}{I} y_N\left(\alpha, \frac{\Omega}{v}\right) s(\alpha).
\end{gathered}$$

Введя далее новые фазовую переменную и дифференцирование по формулам $\Omega = n_1 v\omega$, $< \cdot >= n_1 v <'>$, $n_1 > 0$, $n_1 = \text{const}$, система (4) приведется к следующему виду:

$$v' = v\Psi(\alpha, \omega), \qquad (5)$$

$$\begin{gathered}
\alpha' = -\omega + \sigma n_1 \omega^2 \sin\alpha + \left[\frac{\sigma}{I n_1} y_N\left(\alpha, n_1\omega\right) s(\alpha)\right] \cos\alpha - \frac{T_1\left(\alpha, n_1\omega\right) - s(\alpha)}{m n_1} \sin\alpha, \\
\omega' = \frac{1}{I n_1^2} y_N\left(\alpha, n_1\omega\right) s(\alpha) - \omega \left[\frac{\sigma}{I n_1} y_N\left(\alpha, n_1\omega\right) s(\alpha)\right] \sin\alpha + \qquad (6) \\
+ \sigma n_1 \omega^3 \cos\alpha - \omega \frac{T_1\left(\alpha, n_1\omega\right) - s(\alpha)}{m n_1} \cos\alpha, \\
\Psi(\alpha, \omega) = -\sigma n_1 \omega^2 \cos\alpha + \left[\frac{\sigma}{I n_1} y_N\left(\alpha, n_1\omega\right) s(\alpha)\right] \sin\alpha + \frac{T_1\left(\alpha, n_1\omega\right) - s(\alpha)}{m n_1} \cos\alpha.
\end{gathered}$$

Видно, что в системе третьего порядка (5), (6) может быть выделена независимая подсистема второго порядка (6), которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем двумерном фазовом цилиндре. В частности, при выполнении условия (3) только что рассмотренный прием выделения независимой подсистемы второго порядка также возможен.

Система (5), (6) содержит динамические уравнения движения твердого тела. При отсутствии силового поля (формально при $s(\alpha) \equiv T_1\left(\alpha, n_1\omega\right) \equiv 0$) она примет вид

$$v' = v\Psi(\alpha, \omega),\ \Psi(\alpha, \omega) = -\sigma n_1 \omega^2 \cos\alpha, \qquad (7)$$

$$\alpha' = -\omega + \sigma n_1 \omega^2 \sin\alpha,\ \omega' = -\omega\Psi(\alpha, \omega). \qquad (8)$$

1.2.1. Случай отсутствия зависимости момента неконсервативных сил от угловой скорости

Подобно выбору аналитических функций Чаплыгина [18], динамические функции s и y_N примем в следующем виде:

$$s(\alpha) = B\cos\alpha,\ y_N\left(\alpha, \frac{\Omega}{v}\right) = y_0(\alpha) = A\sin\alpha,\ A, B > 0,\ v \neq 0, \qquad (9)$$

убеждающем нас о том, что в рассматриваемой системе отсутствует зависимость момента неконсервативных сил от угловой скорости (имеется лишь зависимость от угла α).

Тогда, благодаря условиям (2), (9) преобразованная динамическая часть уравнений движения (система (5), (6)) примет вид аналитической системы

$$v' = v\Psi(\alpha,\omega), \tag{10}$$

$$\begin{aligned} &\alpha' = -\omega + b\sin\alpha\cos^2\alpha + b\omega^2\sin\alpha,\\ &\omega' = \sin\alpha\cos\alpha - b\omega\sin^2\alpha\cos\alpha + b\omega^3\cos\alpha,\ \Psi(\alpha,\omega) = -b\omega^2\cos\alpha + b\sin^2\alpha\cos\alpha, \end{aligned} \tag{11}$$

при этом выбирая безразмерный параметр b и постоянную n_1 следующим образом: $b = \sigma n_0$, $n_0^2 = AB/I,\ n_1 = n_0$.

Итак, система (10), (11) может быть рассмотрена на части фазового трехмерного цилиндра $W_1 = \mathbf{R}^1_+\{v\} \times \mathbf{S}^1\{\alpha \bmod 2\pi\} \times \mathbf{R}^1\{\omega\}$.

Теорема 1. *Система (10), (11) обладает полным набором первых интегралов (один из которых является аналитической функцией, а второй — трансцендентной функцией фазовых переменных), выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций [1, 6, 9].*

Здесь необходимо привести важное замечание. Дело в том, что с точки зрения теории элементарных функций полученный первый интеграл является трансцендентным (т.е. не алгебраическим). В данном же случае трансцендентность понимается в смысле теории функций комплексного переменного, когда у функции, после ее формального продолжения в комплексную область, имеются существенно особые точки, соответствующие притягивающим и отталкивающим предельным множествам рассматриваемой динамической системы.

1.2.2. Случай зависимости момента неконсервативных сил от угловой скорости

Дальнейший пример посвящен случаю движения при наличии зависимости момента действующих сил от угловой скорости. Поэтому введем такую зависимость. Данная точка зрения поможет нам вводить эту зависимость и для трехмерных, и для многомерных тел.

Пусть $x = (x_{1N}, x_{2N})$ — координаты точки N приложения неконсервативной силы на одномерную пластину, $Q = (Q_1, Q_2)$ — компоненты силы $\mathbf{S}$ воздействия среды, не зависящие от угловой скорости. Будем вводить зависимость функций $(x_{1N}, x_{2N}) = (x_N, y_N)$ от угловой скорости лишь линейным образом, поскольку само данное введение априори не очевидно [18].

Примем следующую зависимость: $x = Q + R$, $R = (R_1, R_2)$ — вектор-функция, содержащая угловую скорость. При этом зависимость функции R от угловой скорости — гироскопическая:

$$R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{v}\begin{pmatrix} 0 & -\Omega \\ \Omega & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}.$$

Здесь (h_1, h_2) — некоторые положительные параметры (ср. с [18]).

Применительно к нашей задаче, поскольку $x_{1N} = x_N \equiv 0$, то $x_{2N} = y_N = Q_2 - h_1\Omega/v$.

Подобно выбору аналитических функций Чаплыгина [18] допустим равенство $Q_2 = A\sin\alpha$, $A > 0$, а динамические функции s и y_N примем в следующем виде:

$$s(\alpha) = B\cos\alpha,\ y_N\left(\alpha, \frac{\Omega}{v}\right) = A\sin\alpha - h\frac{\Omega}{v},\ A, B,\ h = h_1 > 0,\ v \neq 0, \tag{12}$$

убеждающем нас о том, что в рассматриваемой системе присутствует также еще и дополнительный демпфирующий (а в некоторых областях фазового пространства и разгоняющий) момент неконсервативной силы (т.е. присутствует зависимость момента от угловой скорости).

Тогда, благодаря условиям (2), (12) преобразованная динамическая часть уравнений движения (система (5), (6)) примет вид аналитической системы

$$v' = v\Psi(\alpha,\omega), \tag{13}$$

$$\begin{gathered}\alpha' = -\omega + b\sin\alpha\cos^2\alpha + b\omega^2\sin\alpha - bH_1\omega\cos^2\alpha,\\ \omega' = \sin\alpha\cos\alpha - b\omega\sin^2\alpha\cos\alpha + b\omega^3\cos\alpha + bH_1\omega^2\sin\alpha\cos\alpha - H_1\omega\cos\alpha,\\ \Psi(\alpha,\omega) = -b\omega^2\cos\alpha + b\sin^2\alpha\cos\alpha - bH_1\omega\sin\alpha\cos\alpha,\end{gathered} \tag{14}$$

при этом выбирая безразмерные параметры b, H_1 и постоянную n_1 следующим образом: $b = \sigma n_0$, $n_0^2 = AB/I$, $H_1 = Bh/In_0$, $n_1 = n_0$.

Итак, система (13), (14) также может быть рассмотрена на части фазового трехмерного цилиндра $W_1 = \mathbf{R}^1_+\{v\} \times \mathbf{S}^1\{\alpha \bmod 2\pi\} \times \mathbf{R}^1\{\omega\}$.

Теорема 2. *Система (13), (14) обладает полным набором первых интегралов (один из которых является аналитической функцией, а второй — трансцендентной функцией фазовых переменных), выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций (см. также [15, 16, 25]).*

1.3. Системы при отсутствии внешнего поля сил

Проиллюстрируем предлагаемый в работе подход на примере систем третьего порядка. Пусть v, α, z — фазовые переменные в гладкой динамической системе, правые части которой — однородные полиномы по переменным v, z с коэффициентами, зависящими от α:

$$\dot v = a(\alpha)v^2 + b(\alpha)vz + c(\alpha)z^2,\ \dot z = d(\alpha)v^2 + e(\alpha)vz + f(\alpha)z^2,\ v\dot\alpha = g(\alpha)v^2 + h(\alpha)vz + i(\alpha)z^2. \tag{15}$$

Тогда, выбирая новую независимую переменную q ($dq = vdt$, $d/dq = <'>$, $v \neq 0$), а также новую фазовую переменную Z, $z = Zv$, систему (15) можно переписать в следующем виде:

$$v' = v\Psi(\alpha, Z),\ \Psi(\alpha, Z) = a(\alpha) + b(\alpha)Z + c(\alpha)Z^2, \tag{16}$$

$$\alpha' = g(\alpha) + h(\alpha)Z + i(\alpha)Z^2,\ Z' = d(\alpha) + e(\alpha)Z + f(\alpha)Z^2 - Z\Psi(\alpha, Z), \tag{17}$$

при этом уравнение (16) на v отделяется, что дает возможность рассматривать два оставшихся уравнения в качестве системы (17) с одной степенью свободы на двумерном фазовом многообразии $N^2\{Z;\alpha\}$.

Особняком стоит случай некоторой усеченной системы, когда выполнены тождества $d(\alpha) \equiv e(\alpha) \equiv f(\alpha) \equiv 0$. Тогда система (16), (17) имеет естественный аналитический первый интеграл

$$z = vZ = \text{const}. \tag{18}$$

Для точной интегрируемости усеченной системы (16), (17) нужно найти еще один первый интеграл, независимый с (18).

В данном разделе мы ограничимся следующим важным частным случаем системы (16), (17) третьего порядка:

$$v' = v\Psi(\alpha, Z),\ \Psi(\alpha, Z) = -b_0Z^2\tilde\Delta(\alpha)f_1(\alpha),\ \tilde\Delta(\alpha) = \frac{d\Delta(\alpha)}{d\alpha},\ \Delta(\alpha) = \frac{\delta(\alpha)}{f_1(\alpha)}, \tag{19}$$

$$\alpha' = f_1(\alpha)Z + b_0Z^2\delta(\alpha),\ Z' = -Z\Psi(\alpha, Z), \tag{20}$$

$b_0 \geqslant 0$ — параметр, $f_1(\alpha)$, $\delta(\alpha)$ — некоторые гладкие функции, и будем рассматривать систему (19), (20) как систему при отсутствии внешнего поля сил.

Система (19), (20) имеет более общий вид, чем система (7), (8), взятая из динамики твердого тела, и при $Z = \omega$, $b_0 = \sigma n_1$, $\delta(\alpha) = \sin\alpha$, $f_1(\alpha) \equiv -1$, в частности, они совпадают.

1.3.1. Полный набор гладких первых интегралов

Предложение 3. *Система (19), (20) имеет два гладких (автономных) первых интеграла:*

$$\Phi_0(v;Z;\alpha)=v^2(1+2b_0Z\Delta(\alpha))=C_0=const,\ \Phi_1(v;Z)=vZ=C_1=const. \tag{21}$$

Другими словами, независимая подсистема (20) на многообразии $N^2\{Z;\alpha\}$ имеет рациональный [12, 17, 31] по Z (автономный) первый интеграл вида (см. также [32, 33]) $\Phi(Z;\alpha)=(1+2b_0Z\Delta(\alpha))/Z^2=C=\text{const}$, который не имеет существенно особых точек. В силу последнего, подсистема (20) также не имеет притягивающих или отталкивающих предельных множеств, позволяющих говорить о наличии в системе диссипации того или иного знака.

Таким образом, внутреннее гладкое силовое поле (зависящее от параметра $b_0>0$) в системе (19), (20) не нарушает консервативности системы.

1.3.2. Инвариантные дифференциальные формы

Зададимся вопросом поиска инвариантных дифференциальных форм (для начала фазового объема) для интегрируемости системы (19), (20).

Может показаться излишним нахождение инвариантных дифференциальных форм после нахождения полного набора (а именно, двух) первых интегралов рассматриваемой системы, поскольку она уже интегрируема в квадратурах (точно интегрируема). Но, как известно [2, 5, 19], не всегда можно найти полный набор первых интегралов, а полный набор инвариантных дифференциальных форм фазового объема может быть найден независимо от первых интегралов, что также будет свидетельствовать о точной интегрируемости системы. Другое дело, что из полного набора функционально независимых дифференциальных форм фазового объема можно будет получить некоторые первые интегралы.

Для начала сделаем замену независимого переменного t на τ по формуле $d/dt=f_1(\alpha)d/d\tau$ и будем по-прежнему штрихом обозначать производную по τ. Система (19), (20) примет вид

$$v'=v\Psi(\alpha,Z),\ \Psi(\alpha,Z)=-b_0Z^2\tilde{\Delta}(\alpha), \tag{22}$$

$$\alpha'=Z+b_0Z^2\Delta(\alpha),\ Z'=-Z\Psi(\alpha,Z). \tag{23}$$

Для поиска функции $\rho(v;\alpha,Z)$, которая определяет искомую инвариантную внешнюю дифференциальную форму

$$\rho(v;\alpha,Z)dv\wedge d\alpha\wedge dZ, \tag{24}$$

подсчитаем дивергенцию векторного поля $w(v;\alpha,Z)$ системы (22), (23) в евклидовых координатах: $\operatorname{div}w(v;\alpha,Z)=3b_0Z^2\tilde{\Delta}(\alpha)$. Тогда составная система уравнений характеристик (для поиска решения линейного уравнения

$$\operatorname{div}[\rho(v;\alpha,Z)w(v;\alpha,Z)]=0 \tag{25}$$

в частных производных) будет состоять из системы (22), (23) и добавочного уравнения $\rho'=-3b_0Z^2\tilde{\Delta}(\alpha)\rho$.

Как отмечалось, система (19), (20) (а поэтому и (22), (23)) имеет два гладких первых интеграла (21). Для получения дополнительного первого интеграла составной системы уравнений характеристик нетрудно получить следующее соотношение: $d\rho/dZ=-3\rho/Z$, что немедленно дает необходимый первый интеграл: $\Phi_\rho(\rho;Z)=\rho Z^3=C_\rho=\text{const}$.

Теперь нетрудно найти общее решение уравнения (25) $\rho=\mathcal{F}_0[\Phi_0,\Phi_1]/Z^3$ и убедиться, что следующие функции $\rho_1(Z)=1/Z^3$, $\rho_2(v)=v^3$ являются примерами функции $\rho(v;\alpha,Z)$, определяющей инвариантную дифференциальную форму фазового объема (24) для системы (22),

(23). Здесь $\mathcal{F}_0[\Phi_0, \Phi_1]$ — произвольная гладкая функция двух аргументов, при этом Φ_0, Φ_1 — два независимых первых интеграла (21).

Заметим, что все найденные в разделе 1.3.2 инвариантные внешние дифференциальные формы для систем (22), (23) позволяют выписать соответствующие дифференциальные формы и для систем (19), (20). Для этого все найденные формы надо поделить на $f_1(\alpha)$ (т.е. "вернуть" старую независимую переменную t).

1.4. Добавление внешнего силового поля и гладкость первых интегралов

Переходим к некоторому усложнению, добавляя в систему (22), (23) (лишь в уравнение на Z') внешнее гладкое силовое поле $F(\alpha)$ при наличии внутреннего ($b_0 > 0$):

$$v' = v\Psi(\alpha, Z),\ \Psi(\alpha, Z) = -b_0 Z^2 \tilde{\Delta}(\alpha), \tag{26}$$

$$\alpha' = Z + b_0 Z^2 \Delta(\alpha),\ Z' = F(\alpha) - Z\Psi(\alpha, Z). \tag{27}$$

Может создаться впечатление, что система осталась консервативной (что, действительно, имеет место при $b_0 = 0$, т.е. при отсутствии внутреннего поля). Консервативность "подтвердилась" бы наличием в системе двух гладких (автономных) первых интегралов.

Действительно, при некотором естественном условии у системы (26), (27) существует гладкий первый интеграл, вида

$$\Phi_1(v; Z; \alpha) = v^2(Z^2 - F_1(\alpha)) = C_1 = \text{const},\ \frac{dF_1(\alpha)}{d\alpha} = 2F(\alpha), \tag{28}$$

структура которого напоминает интеграл полной энергии. Но дополнительного гладкого (во всем фазовом пространстве) первого интеграла система (26), (27), вообще говоря, не имеет. Более того, если, в частности, $F(\alpha) = \Delta(\alpha)\tilde{\Delta}(\alpha)$, то дополнительный интеграл является трансцендентной функцией фазовых переменных (т.е. имеет существенно особые точки, означающие наличие в системе притягивающих или отталкивающих предельных множеств, см. следующее предложение, а также [4, 8, 20]).

Предложение 4. *Если $F(\alpha) = \Delta(\alpha)\tilde{\Delta}(\alpha)$, то система (26), (27) имеет два независимых (один, вообще говоря, трансцендентный и один гладкий) первых интеграла:*

$$\Phi_0(v; Z; \alpha) = v^2\left(1 + b_0 Z\Delta(\alpha) + \frac{b_0}{2}(Z^2 - \Delta^2(\alpha))\ln\left|\frac{Z + \Delta(\alpha)}{Z - \Delta(\alpha)}\right|\right) = C_0 = const, \tag{29}$$

$$\Phi_1(v; Z; \alpha) = v^2(Z^2 - \Delta^2(\alpha)) = C_1 = const. \tag{30}$$

Как видно из вида первого интеграла (29), притягивающие и отталкивающие предельные множества системы (26), (27) могут быть найдены из системы недифференциальных равенств

$$Z = 0,\ \Delta(\alpha) = 0.$$

В данном случае первый интеграл (30) является частным случаем интеграла (28).

1.5. Системы со знакопеременной диссипацией

Модифицируем далее систему (26), (27), где будут в наличии уже два ключевых параметра $b_0 \geqslant 0$, $b_1 \neq 0$, введя внешнее гладкое силовое поле. Таким образом, будем рассматривать следующую систему:

$$v' = v\Psi(\alpha, Z),\ \Psi(\alpha, Z) = -b_0 Z^2 \tilde{\Delta}(\alpha) + b_1 F(\alpha)\Delta(\alpha), \tag{31}$$

$$\alpha' = Z + b_0 Z^2 \Delta(\alpha) + b_1 F(\alpha)\overline{f}(\alpha),\ \overline{f}(\alpha) = \frac{\mu - \Delta^2(\alpha)}{\tilde{\Delta}(\alpha)},\ Z' = F(\alpha) - Z\Psi(\alpha, Z), \tag{32}$$

$\mu > 0$. При этом коэффициенты консервативной составляющей (внутреннего) силового поля содержат параметр b_0, а неконсервативной составляющей (внешнего) поля — параметр b_1.

Напомним, что система (31), (32) фактически является "образом" следующей системы при замене $d/dt = f_1(\alpha)d/d\tau$ независимой переменной:

$$v' = v\Psi(\alpha, Z),\ \Psi(\alpha, Z) = -b_0 Z^2 \tilde{\Delta}(\alpha) f_1(\alpha) + b_1 F(\alpha)\delta(\alpha), \tag{33}$$

$$\alpha' = f_1(\alpha)Z + b_0 Z^2 \delta(\alpha) + b_1 F(\alpha)\overline{f}(\alpha) f_1(\alpha),\ Z' = F(\alpha)f_1(\alpha) - Z\Psi(\alpha, Z). \tag{34}$$

Выше (раздел 1.4) мы ввели подобное поле, добавив коэффициент $F(\alpha)$ в уравнение на Z' системы (26), (27), и убедились, что полученная система, вообще говоря, не будет консервативной. Консервативность будет при дополнительном условии: $b_0 = 0$ (отсутствие внутреннего силового поля). Но мы будем рассматривать одновременное присутствие двух силовых полей в системе, положив $b_0 > 0$, $b_1 \neq 0$. Рассматриваемая система на прямом произведении числового луча $\mathbf{R}^1_+\{v\}$ и касательного расслоения $TM^1\{Z;\alpha\}$ приняла вид (31), (32).

Как будет видно далее, только что было введено составное силовое поле со знакопеременной диссипацией (или с диссипацией переменного знака) с помощью некоторого унимодулярного преобразования.

Система (33), (34) имеет более общий вид, чем система (10), (11), взятая из динамики твердого тела, и при $Z = \omega$, $b_0 = -b_1 = b$, $\delta(\alpha) = \sin\alpha$, $F(\alpha) = -\Delta(\alpha)\tilde{\Delta}(\alpha)$, $f_1(\alpha) \equiv -1$, в частности, они совпадают.

1.5.1. Первые интегралы и инвариантные дифференциальные формы

Теорема 3. *Если выполнено условие $F(\alpha) = \lambda\Delta(\alpha)\tilde{\Delta}(\alpha)$, $\lambda \in \mathbf{R}$, то система (31), (32) обладает полным набором — двумя (одним гладким и одним, вообще говоря, трансцендентным, т.е. имеющим существенно особые точки) независимыми первыми интегралами. Кроме того, она обладает двумя инвариантными внешними дифференциальными формами, между собой независимыми, но зависимыми с первыми интегралами.*

2. Инварианты однородных систем пятого порядка

В данном разделе 2 приведены первые интегралы, а также инвариантные дифференциальные формы классов однородных по части переменных динамических систем пятого порядка, в которых может быть выделена система с двумя степенями свободы на своем четырехмерном многообразии. При этом силовое поле разделяется на внутреннее (консервативное) и внешнее, которое обладает знакопеременной диссипацией. Внешнее поле вводится с помощью некоторого унимодулярного преобразования и обобщает силовые поля, рассматриваемые ранее.

2.1. Некоторые примеры из пространственной динамики твердого тела, взаимодействующего со средой

Рассмотрим пространственное движение однородного осесимметричного твердого тела с передним плоским торцом (двумерным диском) в поле силы сопротивления в условиях квазистационарности [18]. Если (v, α, β_1) — сферические координаты вектора скорости некоторой характерной точки D твердого тела (D — центр диска, лежащий на оси симметрии тела), $\Omega = \{\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3\}$ — компоненты его угловой скорости в системе координат $Dx_1x_2x_3$, связанной с телом, при этом ось симметрии CD совпадает с осью Dx_1 (C — центр масс), а оси

Dx_2, Dx_3 лежат в гиперплоскости диска, $I_1, I_2, I_3 = I_2, m$ — инерционно-массовые характеристики, то динамическая часть уравнений движения тела, при котором касательные силы воздействия среды на диск отсутствуют, примет вид:

$$\dot{v}\cos\alpha - \dot{\alpha}v\sin\alpha + \Omega_2 v\sin\alpha\sin\beta_1 - \Omega_3 v\sin\alpha\cos\beta_1 + \sigma(\Omega_2^2+\Omega_3^2) = \frac{F_x}{m},$$

$$\begin{gathered}
\dot{v}\sin\alpha\cos\beta_1 + \dot{\alpha}v\cos\alpha\cos\beta_1 - \dot{\beta}_1 v\sin\alpha\sin\beta_1 + \Omega_3 v\cos\alpha - \\
-\Omega_1 v\sin\alpha\sin\beta_1 - \sigma\Omega_1\Omega_2 - \sigma\dot{\Omega}_3 = 0, \\
\dot{v}\sin\alpha\sin\beta_1 + \dot{\alpha}v\cos\alpha\sin\beta_1 + \dot{\beta}_1 v\sin\alpha\cos\beta_1 + \Omega_1 v\sin\alpha\cos\beta_1 - \\
-\Omega_2 v\cos\alpha - \sigma\Omega_1\Omega_3 + \sigma\dot{\Omega}_2 = 0,\ \dot{\Omega}_1 = 0, \\
I_2\dot{\Omega}_2 + (I_1 - I_2)\Omega_1\Omega_3 = -z_N\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2, \\
I_2\dot{\Omega}_3 + (I_2 - I_1)\Omega_1\Omega_2 = y_N\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2,
\end{gathered} \tag{35}$$

где $F_x = -S,\ S = s(\alpha)v^2,\ \sigma > 0,\ v > 0.$

Первые три уравнения (35) описывают движение центра масс в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbf{E}^3$ в проекциях на систему координат $Dx_1x_2x_3$. Вторые же три уравнения (35) получены из теоремы об изменении кинетического момента тела в осях Кенига.

Таким образом фазовым пространством системы (35) шестого порядка является прямое произведение $\mathbf{R}^1_+ \times \mathbf{S}^2 \times \mathrm{so}(3)$ трехмерного многообразия на алгебру Ли so(3).

Сразу же заметим, что система (35), в силу имеющейся динамической симметрии $I_2 = I_3$, обладает циклическим первым интегралом

$$\Omega_1 \equiv \Omega_1^0 = \mathrm{const}. \tag{36}$$

При этом в дальнейшем будем рассматривать динамику системы на нулевом уровне:

$$\Omega_1^0 = 0. \tag{37}$$

Если же рассматривается более общая задача о движении тела при наличии некоторой следящей силы $\mathbf{T}$, проходящей через центр масс и обеспечивающей во все время движения выполнение равенства ($\mathbf{V}_C$ — скорость центра масс)

$$\mathbf{V}_C \equiv \mathbf{const}, \tag{38}$$

то в системе (35) вместо F_x должна стоять величина, тождественно равная нулю, поскольку на тело будет действовать неконсервативная пара сил: $T - s(\alpha)v^2 \equiv 0,\ \sigma = DC$.

Очевидно, что для этого нужно выбрать величину следящей силы T в виде

$$T = T_v(\alpha, \Omega) = s(\alpha)v^2,\ \mathbf{T} \equiv -\mathbf{S}. \tag{39}$$

Случай (39) выбора величины T следящей силы является частным случаем возможности отделения независимой подсистемы пятого порядка после некоторого преобразования системы шестого порядка (35).

Действительно, пусть выполнено следующее условие на величину T:

$$T = T_v(\alpha, \beta_1, \Omega) = \sum_{i,j=0,\ i\leqslant j}^{3} \tau_{ij}\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right)\Omega_i\Omega_j = T_1\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right)v^2,\ \Omega_0 = v.$$

Введем для начала следующие квазискорости: $z_1 = \Omega_2 \cos\beta_1 + \Omega_3 \sin\beta_1,\ z_2 = -\Omega_2 \sin\beta_1 + \Omega_3 \cos\beta_1$. Систему (35) в случаях (36), (37) можно переписать в виде

$$\dot v + \sigma(z_1^2 + z_2^2)\cos\alpha -$$
$$-\sigma\frac{v^2}{I_2}s(\alpha)\sin\alpha\left[y_N\left(\alpha,\beta_1,\frac{\Omega}{v}\right)\cos\beta_1 + z_N\left(\alpha,\beta_1,\frac{\Omega}{v}\right)\sin\beta_1\right] =$$
$$= \frac{T_1\left(\alpha,\beta_1,\Omega/v\right)v^2 - s(\alpha)v^2}{m}\cos\alpha,$$
$$\dot\alpha v + z_2 v - \sigma(z_1^2 + z_2^2)\sin\alpha -$$
$$-\sigma\frac{v^2}{I_2}s(\alpha)\cos\alpha\left[y_N\left(\alpha,\beta_1,\frac{\Omega}{v}\right)\cos\beta_1 + z_N\left(\alpha,\beta_1,\frac{\Omega}{v}\right)\sin\beta_1\right] = \tag{40}$$
$$= \frac{s(\alpha)v^2 - T_1\left(\alpha,\beta_1,\Omega/v\right)v^2}{m}\sin\alpha,$$
$$\dot\Omega_3 = \frac{v^2}{I_2}y_N\left(\alpha,\beta_1,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha),\ \dot\Omega_2 = -\frac{v^2}{I_2}z_N\left(\alpha,\beta_1,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha),$$
$$\dot\beta_1\sin\alpha - z_1\cos\alpha - \frac{\sigma v}{I_2}s(\alpha)\left[z_N\left(\alpha,\beta_1,\frac{\Omega}{v}\right)\cos\beta_1 - y_N\left(\alpha,\beta_1,\frac{\Omega}{v}\right)\sin\beta_1\right] = 0.$$

Введя далее новые фазовые переменные и дифференцирование по формулам $z_k = n_1 v Z_k$, $k = 1,2,\ <\cdot> = n_1 v <'>,\ n_1 > 0,\ n_1 = \mathrm{const}$, система (40) приведется к следующему виду:

$$v' = v\Psi(\alpha,\beta_1,Z_1,Z_2), \tag{41}$$
$$\alpha' = -Z_2 + \sigma n_1(Z_1^2 + Z_2^2)\sin\alpha +$$
$$+\frac{\sigma}{I_2 n_1}s(\alpha)\cos\alpha\left[y_N\left(\alpha,\beta_1,n_1 Z\right)\cos\beta_1 + z_N\left(\alpha,\beta_1,n_1 Z\right)\sin\beta_1\right] -$$
$$-\frac{T_1\left(\alpha,\beta_1,n_1 Z\right) - s(\alpha)}{m n_1}\sin\alpha, \tag{42}$$
$$Z_2' = \frac{s(\alpha)}{I_2 n_1^2}\left[1 - \sigma n_1 Z_2\sin\alpha\right]\left[y_N\left(\alpha,\beta_1,n_1 Z\right)\cos\beta_1 + z_N\left(\alpha,\beta_1,n_1 Z\right)\sin\beta_1\right] -$$
$$-Z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \sigma n_1 Z_2(Z_1^2 + Z_2^2)\cos\alpha -$$
$$-\frac{\sigma}{I_2 n_1}Z_1\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\left[z_N\left(\alpha,\beta_1,n_1 Z\right)\cos\beta_1 - y_N\left(\alpha,\beta_1,n_1 Z\right)\sin\beta_1\right] -$$
$$-Z_2\frac{T_1\left(\alpha,\beta_1,n_1 Z\right) - s(\alpha)}{m n_1}\cos\alpha, \tag{43}$$
$$Z_1' = \frac{1}{I_2 n_1^2}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\left[\sigma n_1 Z_2\sin\alpha - 1\right]\left[z_N\left(\alpha,\beta_1,n_1 Z\right)\cos\beta_1 - y_N\left(\alpha,\beta_1,n_1 Z\right)\sin\beta_1\right] +$$
$$+Z_1 Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \sigma n_1 Z_1(Z_1^2 + Z_2^2)\cos\alpha -$$
$$-\frac{\sigma}{I_2 n_1}Z_1 s(\alpha)\sin\alpha\left[z_N\left(\alpha,\beta_1,n_1 Z\right)\sin\beta_1 + y_N\left(\alpha,\beta_1,n_1 Z\right)\cos\beta_1\right] -$$
$$-Z_1\frac{T_1\left(\alpha,\beta_1,n_1 Z\right) - s(\alpha)}{m n_1}\cos\alpha, \tag{44}$$
$$\beta_1' = Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} +$$

$$+\frac{\sigma}{I_2 n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\left[z_N\left(\alpha,\beta_1,n_1Z\right)\cos\beta_1 - y_N\left(\alpha,\beta_1,n_1Z\right)\sin\beta_1\right], \tag{45}$$

$$\Psi(\alpha,\beta_1,Z_1,Z_2) = -\sigma n_1(Z_1^2+Z_2^2)\cos\alpha +$$
$$+\frac{\sigma}{I_2 n_1}s(\alpha)\sin\alpha\left[y_N\left(\alpha,\beta_1,n_1Z\right)\cos\beta_1 + z_N\left(\alpha,\beta_1,n_1Z\right)\sin\beta_1\right] +$$
$$+\frac{T_1\left(\alpha,\beta_1,n_1Z\right)-s(\alpha)}{mn_1}\cos\alpha.$$

Видно, что в системе пятого порядка (41)–(45) может быть выделена независимая подсистема четвертого порядка (42)–(45), которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем четырехмерном фазовом пространстве. В частности, при выполнении условия (39) только что рассмотренный прием выделения независимой подсистемы четвертого порядка возможен.

Система (41)–(45) содержит динамические уравнения движения твердого тела. При отсутствии силового поля (формально при $s(\alpha)\equiv T_1\left(\alpha,n_1\omega\right)\equiv 0$) она примет вид

$$v' = v\Psi(\alpha,\beta_1,Z_1,Z_2),\ \Psi(\alpha,\beta_1,Z_1,Z_2) = -\sigma n_1(Z_1^2+Z_2^2)\cos\alpha, \tag{46}$$

$$\alpha' = -Z_2 + \sigma n_1(Z_1^2+Z_2^2)\sin\alpha, \tag{47}$$

$$Z_2' = -Z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \sigma n_1 Z_2(Z_1^2+Z_2^2)\cos\alpha, \tag{48}$$

$$Z_1' = Z_1Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \sigma n_1 Z_1(Z_1^2+Z_2^2)\cos\alpha, \tag{49}$$

$$\beta_1' = Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}. \tag{50}$$

2.1.1. Случай отсутствия зависимости момента неконсервативных сил от угловой скорости

Подобно выбору аналитических функций Чаплыгина, динамические функции s, y_N и z_N примем в следующем виде:

$$\begin{gathered} s(\alpha) = B\cos\alpha,\ y_N\left(\alpha,\beta_1,\frac{\Omega}{v}\right) = y_0(\alpha,\beta_1) = A\sin\alpha\cos\beta_1, \\ z_N\left(\alpha,\beta_1,\frac{\Omega}{v}\right) = z_0(\alpha,\beta_1) = A\sin\alpha\sin\beta_1,\ A,B>0,\ v\neq 0, \end{gathered} \tag{51}$$

убеждающем нас о том, что в рассматриваемой системе отсутствует зависимость момента неконсервативных сил от угловой скорости (имеется лишь зависимость от углов α,β_1).

Тогда, благодаря условиям (38), (51) преобразованная динамическая часть уравнений движения (система (41)–(45)) примет вид аналитической системы

$$v' = v\Psi(\alpha,\beta_1,Z_1,Z_2), \tag{52}$$

$$\alpha' = -Z_2 + b(Z_1^2+Z_2^2)\sin\alpha + b\sin\alpha\cos^2\alpha,$$
$$Z_2' = \sin\alpha\cos\alpha - Z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bZ_2(Z_1^2+Z_2^2)\cos\alpha - bZ_2\sin^2\alpha\cos\alpha, \tag{53}$$
$$Z_1' = Z_1Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bZ_1(Z_1^2+Z_2^2)\cos\alpha - bZ_1\sin^2\alpha\cos\alpha,$$

$$\beta_1' = Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\ \Psi(\alpha,\beta_1,Z_1,Z_2) = -b(Z_1^2+Z_2^2)\cos\alpha + b\sin^2\alpha\cos\alpha, \tag{54}$$

при этом выбирая безразмерный параметр b и постоянную n_1 следующим образом: $b=\sigma n_0$, $n_0^2 = AB/I_2,\ n_1 = n_0$.

Итак, система (52)–(54) может быть рассмотрена на своем фазовом пятимерном многообразии $W_1 = \mathbf{R}^1_+\{v\}\times T\mathbf{S}^2\{Z_1,Z_2,0<\alpha<\pi,\ 0\leqslant\beta_1<2\pi\}$, т.е. на прямом произведении числового луча на касательное расслоение к двумерной сфере $\mathbf{S}^2\{0<\alpha<\pi,0\leqslant\beta_1<2\pi\}$.

Теорема 4. *Система (35) при условиях (38), (36), (37), (51) обладает пятью независимыми первыми интегралами (полным набором), три из которых являются трансцендентными функциями с точки зрения комплексного анализа. При этом эти интегралы выражаются через конечную комбинацию элементарных функций (см. также [22, 27, 34]).*

2.1.2. Случай зависимости момента неконсервативных сил от угловой скорости

Дальнейший пример посвящен случаю движения при наличии зависимости момента действующих сил от угловой скорости. Поэтому введем такую зависимость. Отметим, что данная точка зрения поможет нам вводить эту зависимость и для многомерных тел.

Пусть $x = (x_{1N}, x_{2N}, x_{3N})$ — координаты точки N приложения неконсервативной силы (воздействия среды) на двумерный диск, $Q = (Q_1, Q_2, Q_3)$ — компоненты силы $\mathbf{S}$ воздействия среды, не зависящие от угловой скорости. Будем вводить зависимость функций $(x_{1N}, x_{2N}, x_{3N}) = (x_N, y_N, z_N)$ от угловой скорости лишь линейным образом, поскольку само данное введение априори не очевидно.

Примем следующую зависимость: $x = Q + R$, $R = (R_1, R_2, R_3)$ — вектор-функция, содержащая угловую скорость. При этом зависимость R от угловой скорости — гироскопическая:

$$R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{v} \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}. \tag{55}$$

Здесь (h_1, h_2, h_3) — некоторые положительные параметры.

Теперь, применительно к нашей задаче, поскольку $x_{1N} = x_N \equiv 0$, то $x_{2N} = y_N = Q_2 - h_1\Omega_3/v$, $x_{3N} = z_N = Q_3 + h_1\Omega_2/v$.

Подобно выбору аналитических функций Чаплыгина допустим равенства $Q_2 = A\sin\alpha\cos\beta_1$, $Q_3 = A\sin\alpha\sin\beta_1$, $A > 0$, а функции s, y_N и z_N примем в следующем виде:

$$s(\alpha) = B\cos\alpha,\ B > 0,$$

$$y_N\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right) = A\sin\alpha\cos\beta_1 - h\frac{\Omega_3}{v},\ h = h_1 > 0,\ v \neq 0, \tag{56}$$

$$z_N\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right) = A\sin\alpha\sin\beta_1 + h\frac{\Omega_2}{v},\ h = h_1 > 0,\ v \neq 0,$$

убеждающем нас о том, что в рассматриваемой системе присутствует также еще и дополнительный демпфирующий (а в некоторых областях фазового пространства и разгоняющий) момент неконсервативной силы (т.е. присутствует зависимость момента от угловой скорости). Причем $h_2 = h_3$ в силу динамической симметрии тела.

Тогда, благодаря условиям (38), (56) преобразованная динамическая часть уравнений движения (система (41)–(45)) примет вид аналитической системы

$$v' = v\Psi(\alpha, \beta_1, Z_1, Z_2), \tag{57}$$

$$\begin{gathered} \alpha' = -Z_2 + b(Z_1^2 + Z_2^2)\sin\alpha + b\sin\alpha\cos^2\alpha - bH_1Z_2\cos^2\alpha, \\ Z_2' = \sin\alpha\cos\alpha - (1 + bH_1)Z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bZ_2(Z_1^2 + Z_2^2)\cos\alpha - bZ_2\sin^2\alpha\cos\alpha + \\ + bH_1Z_2^2\sin\alpha\cos\alpha - H_1Z_2\cos\alpha, \\ Z_1' = (1 + bH_1)Z_1Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bZ_1(Z_1^2 + Z_2^2)\cos\alpha - bZ_1\sin^2\alpha\cos\alpha + \\ + bH_1Z_1Z_2\sin\alpha\cos\alpha - H_1Z_1\cos\alpha, \end{gathered} \tag{58}$$

$$\beta_1' = (1 + bH_1)Z_1 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{59}$$

$$\Psi(\alpha, \beta_1, Z_1, Z_2) = -b(Z_1^2 + Z_2^2)\cos\alpha + b\sin^2\alpha\cos\alpha - bH_1 Z_2 \sin\alpha\cos\alpha,$$

при этом выбирая безразмерные параметры b, H_1 и постоянную n_1 следующим образом: $b = \sigma n_0$, $n_0^2 = AB/I_2$, $H_1 = Bh/I_2 n_0$, $n_1 = n_0$.

Видно, что в системе пятого порядка (57)–(59) выделилась независимая подсистема четвертого порядка (58), (59), которую можно рассматривать на касательном расслоении $T\mathbf{S}^2$ к двумерной сфере $\mathbf{S}^2$.

Теорема 5. *Система (35) при условиях (38), (36), (37), (56) обладает пятью независимыми первыми интегралами (полным набором), три из которых являются трансцендентными функциями с точки зрения комплексного анализа. При этом эти интегралы выражаются через конечную комбинацию элементарных функций (см. также [29, 35, 41]).*

2.2. Системы пятого порядка при отсутствии внешнего силового поля

Пусть v, α, β, $z = (z_1, z_2)$ — фазовые переменные в гладкой динамической системе, правые части которой — однородные полиномы по переменным v, z с коэффициентами, зависящими от α, β следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \dot v \\ \dot z_2 \\ \dot z_1 \\ v\dot\alpha \\ v\dot\beta \end{pmatrix} = A(\alpha,\beta) \begin{pmatrix} v^2 \\ vz_2 \\ vz_1 \\ z_2^2 \\ z_2 z_1 \\ z_1^2 \end{pmatrix}, \tag{60}$$

где $A(\alpha, \beta)$ — матрица размером 5×6 (система, аналогичная (15)).

Выбирая новую независимую переменную q ($dq = vdt$, $d/dq = <'>$, $v \neq 0$), а также новые фазовые Z_k, $z_k = Z_k v$, $k = 1, 2$, $Z = (Z_1, Z_2)$, систему (60) можно переписать в виде

$$v' = v\Psi(\alpha, Z),\ \Psi(\alpha, Z) = A_v(\alpha,\beta) \begin{pmatrix} 1 \\ Z_2 \\ Z_1 \\ Z_2^2 \\ Z_2 Z_1 \\ Z_1^2 \end{pmatrix}, \tag{61}$$

$$\begin{pmatrix} Z_2' \\ Z_1' \\ \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix} = \hat A(\alpha,\beta) \begin{pmatrix} 1 \\ Z_2 \\ Z_1 \\ Z_2^2 \\ Z_2 Z_1 \\ Z_1^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} Z_2\Psi(\alpha, Z) \\ Z_1\Psi(\alpha, Z) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{62}$$

где $A_v(\alpha, \beta)$ — первая строка матрицы $A(\alpha, \beta)$, а $\hat A(\alpha, \beta)$ — матрица $A(\alpha, \beta)$ без первой строки:

$$A(\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} A_v(\alpha,\beta) \\ \hat A(\alpha,\beta) \end{pmatrix}.$$

При этом уравнение (61) на v отделяется, что дает возможность рассматривать четыре оставшихся уравнения в качестве системы (62) на четырехмерном фазовом многообразии $N^4\{Z_2, Z_1; \alpha, \beta\}$.

В данном разделе мы ограничимся следующим важным частным случаем системы (61), (62) пятого порядка:

$$v' = v\Psi(\alpha, Z),\ \Psi(\alpha, Z) = -b(Z_1^2 + Z_2^2)\tilde{\Delta}(\alpha)f_2(\alpha),\ \tilde{\Delta}(\alpha) = \frac{d\Delta(\alpha)}{d\alpha},\ \Delta(\alpha) = \frac{\delta(\alpha)}{f_2(\alpha)}, \tag{63}$$

$$\begin{aligned}
&\alpha' = f_2(\alpha)Z_2 + b(Z_1^2 + Z_2^2)\delta(\alpha),\\
&Z_2' = -f_2(\alpha)\left[\Gamma^{\alpha}_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) + Df_2(\alpha)\right]Z_2^2 - \frac{f_1^2(\alpha)}{f_2(\alpha)}\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha,\beta)Z_1^2 - Z_2\Psi(\alpha, Z),\\
&Z_1' = -f_2(\alpha)\left[2\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha,\beta) + Df_1(\alpha)\right]Z_1Z_2 - Z_1\Psi(\alpha, Z),\\
&\beta' = Z_1f_1(\alpha),
\end{aligned} \tag{64}$$

$DQ(\xi) = d\ln|Q(\xi)|/d\xi$, $b \geqslant 0$, $\delta(\alpha)$, $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, $\Gamma^i_{jk}(\alpha,\beta)$, $i,j,k = \alpha,\beta$ — некоторые гладкие функции, и будем рассматривать систему (63), (64) как *систему при отсутствии внешнего поля сил*. Уравнение (63) отделяется, что дает возможность рассматривать уравнения (64) в качестве независимой системы (с двумя степенями свободы) на четырехмерном многообразии $N^4\{Z_2, Z_1; \alpha, \beta\} = TM^2\{Z_2, Z_1; \alpha, \beta\}$ (касательном расслоении гладкого двумерного многообразия $M^2\{\alpha, \beta\}$, см. также [21, 42]).

Система (63), (64) имеет более общий вид, чем система (46)–(50), взятая из динамики твердого тела, и при $b = \sigma n_1$, $\delta(\alpha) = \sin\alpha$, а также при

$$f_1(\alpha) = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\ f_2(\alpha) \equiv -1,\ \Gamma^{\alpha}_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) \equiv 0,\ \Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha,\beta) = -\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\ \Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha,\beta) = \frac{1+\cos^2\alpha}{2\cos\alpha\sin\alpha},$$

в частности, они совпадают.

Рассмотрим структуру системы (64). Она для простоты соответствует следующим уравнениям геодезических линий с тремя ненулевыми коэффициентами связности на касательном расслоении $TM^2\{\dot\alpha, \dot\beta; \alpha, \beta\}$ многообразия $M^2\{\alpha, \beta\}$ (в частности, на расслоении (двумерной) поверхности вращения, плоскости Лобачевского и т.д.):

$$\ddot\alpha + \Gamma^{\alpha}_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)\dot\alpha^2 + \Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha,\beta)\dot\beta^2 = 0,\ \ddot\beta + 2\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta = 0. \tag{65}$$

Действительно, выбрав новые координаты z_1, z_2 в касательном пространстве в виде

$$\dot\alpha = z_2f_2(\alpha),\ \dot\beta = z_1f_1(\alpha), \tag{66}$$

мы получаем следующие соотношения (ср. с (64)):

$$\begin{aligned}
&Z_1' = -f_2(\alpha)\left[2\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha,\beta) + Df_1(\alpha)\right]Z_1Z_2 - Z_1\Psi(\alpha, Z),\\
&Z_2' = -f_2(\alpha)\left[\Gamma^{\alpha}_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) + Df_2(\alpha)\right]Z_2^2 - \frac{f_1^2(\alpha)}{f_2(\alpha)}\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha,\beta)Z_1^2 - Z_2\Psi(\alpha, Z),
\end{aligned} \tag{67}$$

при этом уравнения (65) почти всюду эквивалентны совокупности (66), (67), которая, прежде всего, присутствует в системе (64). Здесь лучше изменить независимую переменную и вместо (66) выбрать равенства $\alpha' = Z_2f_2(\alpha)$, $\beta' = Z_1f_1(\alpha)$.

Отметим задачи, приводящие к уравнениям (65).

(a) Системы на касательном расслоении к двумерной сфере. Здесь необходимо выделить два случая метрик на сфере. Один случай — метрика, индуцированная евклидовой метрикой объемлющего трехмерного пространства. Такая метрика естественна для изучения задачи о движении точки по такой сфере. Второй случай — приведенная метрика, индуцированная группами симметрий, характерных для пространственного движения динамически симметричного (трехмерного) твердого тела (см. также [44]).

(b) Системы на касательном расслоении более общей двумерной поверхности вращения.

(c) Системы на касательном расслоении плоскости Лобачевского в модели Клейна.

Далее, в системе (63), (64) также присутствуют коэффициенты при параметре $b \geqslant 0$. Но, как и в системе (19), (20), они не нарушают консервативности, поскольку система (63), (64) обладает полным набором (четырьмя) гладких первых интегралов.

2.2.1. О количествах "неизвестных" функций и условий, на них накладываемых

Если рассматривать общие уравнения геодезических на касательном расслоении двумерного гладкого многообразия, то разных ненулевых коэффициентов связности, вообще говоря, будет $n^2(n+1)/2$ штук при $n = 2$, т.е. 6 коэффициентов. Как видно из этого, общая задача интегрирования уравнений геодезических достаточно сложна. К данному количеству коэффициентов связности добавляются еще функции (в нашем случае $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$ из (66)), определяющие координаты на касательном расслоении.

Поэтому, как было отмечено ранее, ограничимся "лишь" 3 ($n(n-1)+1$ штукой при $n=2$) ненулевыми коэффициентами связности, формирующими уравнения геодезических (65). При этом по такому количеству выбирается и количество функций, определяющих координаты на касательном расслоении — их будет 2 ($n(n-1)/2+1$ штука при $n=2$). Таким образом, мы имеем 5 функции, характеризующие исключительно геометрию фазового многообразия и координаты на нем.

Каково же количество накладываемых алгебраических и дифференциальных условий ($B(2)$) на имеющиеся $A(2) = 5$ функций ($A(n) = 3n(n-1)/2 + 2$ штуки при $n = 2$)? Ведь данные условия являются достаточными для полного интегрирования уравнений геодезических. Понятно, что таких функциональных условий должно быть меньше 3, иначе задача не имеет смысла. Вопрос — на сколько меньше, потому что чем меньше число $B(2)$, тем больше разность $A(2) - B(2)$, и тем больше систем уравнений геодезических допускают полный набор инвариантов для их интегрирования.

В данной работе будем накладывать $B(2) = 3$ условия на имеющиеся $A(2) = 5$ функций. Число $B(2)$ складывается из трех слагаемых: $B(2) = B_1(2) + B_2(2) + B_3(2)$.

Число $B_1(2)$ равно количеству условий, накладываемых на функции $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$. При $n = 2$ мы не намерены накладывать явные алгебраические условия на функции $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, т.е. $B_1(2) = 0$ (в общем случае $B_1(n) = (n-1)(n-2)/2$). Мы введем лишь новое обозначение для универсальности, а именно, $f_1(\alpha) =: f(\alpha)$.

Число $B_2(2)$ равно количеству условий, накладываемых на коэффициенты связности, а именно,

$$\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha,\beta) \equiv \Gamma_1(\alpha), \tag{68}$$

т.е. $B_2(2) = 1$ (в общем случае $B_2(n) = n(n-1)/2$).

Число $B_3(2)$ равно количеству алгебраических и дифференциальных условий, накладываемых и на функции $f(\alpha)$, $f_2(\alpha)$ и на коэффициенты связности, а именно,

$$\begin{aligned} &\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha) =: \Gamma_2(\alpha), \\ &f_2^2(\alpha)\,[2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)] + f^2(\alpha)\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha,\beta) \equiv 0, \\ &\Gamma^{\alpha}_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) + Df_2(\alpha) \equiv 0, \end{aligned} \tag{69}$$

т.е. $B_3(2) = 2$ (в общем случае $B_3(n) = n(n-1)/2 + 1$).

Видно, что в общем случае

$$B(n) = B_1(n) + B_2(n) + B_3(n) = (n-1)^2 + \frac{n(n-1)}{2} + 1,$$

при этом $A(n) - B(n) = n$, что говорит об увеличении количества "произвольных" функций по сравнению с условиями, накладываемыми на них, ровно на n (n — размерность рассматриваемого риманова многообразия). В нашем случае $A(2) - B(2) = 2$.

Замечание 1. *Пусть выполнено условие (68) и реализуется система дифференциальных равенств (69). Тогда справедливы следующие 2 ($n(n-1)/2+1$ при $n=2$) тождества:*

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha,\beta) \equiv \Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha),\ \Gamma^{\alpha}_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) \equiv \Gamma^{\alpha}_{\alpha\alpha}(\alpha). \tag{70}$$

Следующее замечание является в некотором смысле обратным к замечанию 1. В нашем случае, при $n = 2$, оно носит некоторый формальный (даже тавтологичный) смысл, который будет ясен при увеличении размерности $n \geqslant 3$ многообразия M^n.

Замечание 2. *Пусть выполнено условие (68), при этом реализуются 2 тождества (70). Тогда справедлива система дифференциальных равенств (69), которая примет вид*

$$\begin{aligned} &\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha) =: \Gamma_2(\alpha),\\ &f_2^2(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] + f^2(\alpha)\Gamma_2(\alpha) \equiv 0,\\ &\Gamma^{\alpha}_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) + Df_2(\alpha) \equiv 0. \end{aligned} \tag{71}$$

Фактически, уравнения (71) и (69) совпадают с точностью до обозначений. Но это, как указано выше, произошло по причине низкой размерности $n = 2$ многообразия M^n.

Таким образом, при выполнении 1 условия (68) 2 условия (69) и 2 условия (71) в упомянутом смысле эквивалентны.

2.2.2. Достаточные условия интегрируемости

Для полного интегрирования системы пятого порядка достаточно знать, вообще говоря, четыре независимых инварианта. Как будет показано, для полного интегрирования системы (63), (64) достаточно знать четыре независимых тензорных инварианта: или четыре первых интеграла, или четыре независимых дифференциальных формы, или какую-то комбинацию из интегралов и форм общим количеством четыре. При этом, конечно, инварианты (в частности, для случая отсутствия внешнего поля сил) можно искать и в более общем виде, чем рассмотрено далее (ср. с [38, 39]).

Как известно, первым интегралом уравнений геодезических линий (65), переписанных в виде $\ddot{x}^i + \sum_{j,k=1}^{2} \Gamma^i_{jk}(x)\dot{x}^j\dot{x}^k = 0$, $i = 1, 2$, является гладкая функция $\Phi(\dot{x}; x) = \sum_{j,k=1}^{2} g_{jk}(x)\dot{x}^j\dot{x}^k$, но мы представим его в более простой форме, нужным образом подобрав координаты на касательном расслоении, тем самым "выпрямив" квадратичную форму на фазовом многообразии.

Кроме того, подчеркнем, что в следующей теореме 6 (которая справедлива и при более общих условиях) накладываются 3 алгебраических и дифференциальных соотношения (68), (69) на 5 функций: на функции $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$ из (66) и на 3, вообще говоря, ненулевых коэффициента связности $\Gamma^i_{jk}(\alpha,\beta)$ из (65).

Теорема 6. *Если выполнены условия (68), (69), то система (63), (64), рассмотренная на произведении $\mathbf{R}^1_+\{v\} \times TM^2\{Z_2, Z_1; \alpha, \beta\}$, обладает полным набором, состоящим из четырех гладких первых интегралов вида*

$$\Phi_0(v; Z_2; \alpha) = v^2(1 + 2bZ_2\Delta(\alpha)) = C_0 = const; \tag{72}$$

$$\Phi_1(v; Z_2, Z_1) = v^2(Z_1^2 + Z_2^2) = C_1^2 = const; \tag{73}$$

$$\left.\begin{aligned}&\Phi_2(v;Z_1;\alpha)=v^2Z_1\Delta(\alpha)=C_2=const,\\&\Delta(\alpha)=A_1f(\alpha)\exp\left\{2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\Gamma_1(b)db\right\},\ A_1=const;\end{aligned}\right\}\tag{74}$$

$$\Phi_3(\alpha,\beta)=G\left(\alpha,\beta,C_0,C_1^2,C_2\right)=C_3=const,\tag{75}$$

G — некоторая гладкая функция нескольких переменных.

Более того, после некоторого ее приведения — замен независимой переменной

$$\frac{d}{dt}=f_2(\alpha)\frac{d}{d\tau}\tag{76}$$

и фазовых

$$w_2=Z_2,\ w_1=Z_1,\ w_1^*=\ln|w_1|\tag{77}$$

— фазовый поток системы (63), (64) сохраняет фазовый объем с плотностью

$$\rho(v;\alpha)=\frac{v^3}{f_2(\alpha)}$$

на произведении $\mathbf{R}^1_+\{v\}\times TM^2\{w_2,w_1^*;\alpha,\beta\}$, т.е. сохраняется соответствующая внешняя дифференциальная форма

$$\frac{v^3}{f_2(\alpha)}dv\wedge dw_2\wedge dw_1^*\wedge d\alpha\wedge d\beta.$$

Заметим также, что равенства (69) могут трактоваться как возможность преобразования квадратичной формы метрики многообразия к каноническому виду с законом сохранения энергии (73). История и текущее состояние рассмотрения данной более общей проблемы достаточно обширны (отметим лишь работы [3, 10, 36]). Ну а поиск первых интегралов опирается на наличие в системе дополнительных групп симметрий.

3. Введение внешнего силового поля с диссипацией через унимодулярные преобразования

Модифицируем систему (63), (64) при наличии двух ключевых параметров $b\geqslant 0$, $b_1\neq 0$, вводя внешнее силовое поле. Если ввести такое поле, добавив коэффициент $F(\alpha)f_2(\alpha)$ в уравнение на Z_2' системы (78), (79) и даже положив при этом $b_1=0$, полученная система, вообще говоря, не будет консервативной. Консервативность будет при дополнительном условии: $b=0$. Но мы расширим введение силового поля, положив $b>0$, $b_1\neq 0$. При этом (как и выше) сделаем вспомогательную замену независимого переменного t на τ по формуле $d/dt=f_2(\alpha)d/d\tau$ и будем по-прежнему штрихом обозначать производную по τ. Рассматриваемая система на прямом произведении числового луча и касательного расслоения $TM^2\{Z_2,Z_1;\alpha,\beta\}$ примет вид

$$v'=v\Psi(\alpha,Z),\ \Psi(\alpha,Z)=-b(Z_1^2+Z_2^2)\tilde{\Delta}(\alpha)+b_1F(\alpha)\Delta(\alpha),\tag{78}$$

$$\left.\begin{aligned}&\alpha'=Z_2+b(Z_1^2+Z_2^2)\Delta(\alpha)+b_1F(\alpha)\overline{f}(\alpha),\ \overline{f}(\alpha)=\frac{\mu-\Delta^2(\alpha)}{\tilde{\Delta}(\alpha)},\\&Z_2'=F(\alpha)-\left[\Gamma^{\alpha}_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)+Df_2(\alpha)\right]Z_2^2-\frac{f_1^2(\alpha)}{f_2^2(\alpha)}\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha,\beta)Z_1^2-Z_2\Psi(\alpha,Z),\\&Z_1'=-\left[2\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)+Df_1(\alpha)\right]Z_1Z_2-Z_1\Psi(\alpha,Z),\\&\beta'=Z_1\frac{f_1(\alpha)}{f_2(\alpha)},\end{aligned}\right\}\tag{79}$$

здесь $\mu > 0$ — параметр. При этом коэффициенты консервативной составляющей внутреннего силового поля содержат параметр b, а неконсервативной составляющей внешнего поля — параметр b_1.

Силовое поле в уравнениях на v', Z' определяется функцией $\Psi(\alpha, Z)$. Опишем введение силового поля в виде двумерного столбца, в первой строке которого стоят коэффициенты из уравнения на α', а во второй строке — коэффициенты из функции $\Psi(\alpha, Z)$. Таким образом, совместное силовое поле (в котором присутствуют три параметра $b \geqslant 0$, $b_1 \neq 0$, $\mu > 0$) будет иметь вид

$$U \begin{pmatrix} b(Z_1^2 + Z_2^2) \\ b_1 F(\alpha) \end{pmatrix}, \; U = \begin{pmatrix} \Delta(\alpha) & \overline{f}(\alpha) \\ -\tilde{\Delta}(\alpha) & \Delta(\alpha) \end{pmatrix},$$

где U — преобразование с определителем, равным μ, и являющееся унимодулярным преобразованием при $\mu = 1$. В частности, если $\mu = 1$, а $\Delta(\alpha) = \cos\alpha$ или $\Delta(\alpha) = \sin\alpha$, то данное преобразование задает поворот на угол α. Более того, такое преобразование вносит в систему диссипацию (как одного знака, так и другого, см. также [22]).

4. Инварианты систем с диссипацией

Перейдем теперь к интегрированию системы пятого порядка (78), (79) при выполнении свойств (68), (69), которые обеспечивают отделение независимой подсистемы третьего порядка. Как будет показано, для полного интегрирования системы (78), (79) достаточно знать четыре независимых тензорных инварианта: или четыре первых интеграла, или четыре независимых дифференциальных формы, или какую-то комбинацию из интегралов и форм общим количеством четыре. При этом, конечно, инварианты можно искать и в более общем виде, чем рассмотрено далее.

Кроме того, подчеркнем, что в следующей теореме 7 (которая справедлива и при более общих условиях) накладываются 3 алгебраических и дифференциальных соотношения (68), (69) на 5 функций: на 2 функции $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$ и на 3, вообще говоря, ненулевых коэффициента связности $\Gamma^i_{jk}(\alpha, \beta)$. Тогда система (79) распадается следующим образом:

$$\begin{aligned} \alpha' &= Z_2 + b(Z_1^2 + Z_2^2)\Delta(\alpha) + b_1 F(\alpha)\overline{f}(\alpha), \\ Z_2' &= F(\alpha) - \Gamma_2(\alpha)\frac{f_1^2(\alpha)}{f_2^2(\alpha)} Z_1^2 - Z_2\Psi(\alpha, Z_1, Z_2), \\ Z_1' &= \Gamma_2(\alpha)\frac{f_1^2(\alpha)}{f_2^2(\alpha)} Z_1 Z_2 - Z_1\Psi(\alpha, Z_1, Z_2), \end{aligned} \tag{80}$$

$$\beta' = Z_1 \frac{f_1(\alpha)}{f_2(\alpha)}. \tag{81}$$

Внесем некоторые ограничения на силовое поле. Пусть для некоторого $\kappa \in \mathbf{R}$ выполнено равенство

$$\frac{f_1^2(\alpha)}{f_2^2(\alpha)}\Gamma_2(\alpha) = \kappa \frac{d}{d\alpha}\ln|\Delta(\alpha)| = \kappa\frac{\tilde{\Delta}(\alpha)}{\Delta(\alpha)}, \tag{82}$$

а для некоторого $\lambda \in \mathbf{R}$ — равенство

$$F(\alpha) = \lambda \frac{d}{d\alpha}\frac{\Delta^2(\alpha)}{2} = \lambda\tilde{\Delta}(\alpha)\Delta(\alpha). \tag{83}$$

Условие (82) назовем “геометрическим”, а условие (83) — “энергетическим”. Условие (82) названо геометрическим в том числе потому, что накладывает условие на ключевой коэффициент связности $\Gamma_2(\alpha)$, приводя соответствующие коэффициенты системы к однородному

виду относительно функции $\Delta(\alpha)$ при участии функций $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, входящих в кинематические соотношения. Условие (83) названо энергетическим в том числе потому, что (внешние) силы становятся, в некотором смысле, "потенциальными" по отношению к "силовой" функции $\Delta^2(\alpha)/2$, приводя соответствующие коэффициенты системы к однородному виду (опять же относительно функции $\Delta(\alpha)$). При этом сама функция $\Delta(\alpha)$, в определенном смысле, и вносит в систему диссипацию разных знаков или так называемую (знако)переменную диссипацию (см. также [18]).

Теорема 7. *Пусть для некоторых $\kappa, \lambda \in \mathbf{R}$ выполняются условия (82) и (83). Тогда система (78), (80), (81) обладает полным набором — четырьмя (одним гладким и тремя, вообще говоря, имеющими существенно особые точки) независимыми первыми интегралами. Кроме того, она также обладает четырьмя инвариантными дифференциальными формами, между собой независимыми, но зависимыми с первыми интегралами.*

Действительно, благодаря однородным переменным u_k, $Z_k = u_k\Delta(\alpha)$, $k = 1, 2$, из системы (80) можно получить следующие дифференциальные соотношения:

$$\Delta\frac{du_2}{d\Delta} = \frac{\lambda - \kappa u_1^2 - u_2^2 - b_1\lambda\mu u_2}{u_2 + b(u_1^2 + u_2^2)\Delta^2 + b_1\lambda(\mu - \Delta^2)}, \; \Delta\frac{du_1}{d\Delta} = \frac{(\kappa - 1)u_1u_2 - b_1\lambda\mu u_1}{u_2 + b(u_1^2 + u_2^2)\Delta^2 + b_1\lambda(\mu - \Delta^2)}, \tag{84}$$

из которых легко следует уравнение первого порядка

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{\lambda - b_1\lambda\mu u_2 - u_2^2 - \kappa u_1^2}{(\kappa - 1)u_1u_2 - b_1\lambda\mu u_1}. \tag{85}$$

Уравнение (85) имеет вид уравнения Абеля [9]. В частности, при $\kappa = -1$ оно имеет следующий первый интеграл:

$$\frac{u_2^2 + u_1^2 + b_1\lambda\mu u_2 - \lambda}{u_1} = C_1 = \text{const}, \tag{86}$$

который в прежних переменных выглядит как

$$\Theta_1(Z_2, Z_1; \alpha) = G_1\left(\frac{Z_2}{\Delta(\alpha)}, \frac{Z_1}{\Delta(\alpha)}\right) = \frac{Z_2^2 + Z_1^2 + b_1\lambda\mu Z_2\Delta(\alpha) - \lambda\Delta^2(\alpha)}{Z_1\Delta(\alpha)} = C_1 = \text{const}. \tag{87}$$

Используем для подсчета дивергенции векторного поля $w_2(v; Z_2, w_1^*; \alpha, \beta)$, $w_1^* = \ln|Z_1|$, системы (78), (80), (81) с диссипацией функцию $\rho_2(v) = v^3$ (полученную для системы (63), (64)). Тогда составная система уравнений характеристик для уравнения

$$\operatorname{div}[\rho(v; Z_2, w_1^*; \alpha, \beta)w_2(v; Z_2, w_1^*; \alpha, \beta)] = 0 \tag{88}$$

будет состоять из системы (78), (80), (81) (правая часть которой умножена на функцию $\rho_2(v) = v^3$) и следующего добавочного уравнения:

$$\rho' = -v^3 b_1\lambda\mu\tilde{\Delta}(\alpha)\rho. \tag{89}$$

Системе (78), (80), (81), (89) уравнений характеристик можно сопоставить три соотношения: два из (84) и

$$\Delta\frac{d\rho}{d\Delta} = \frac{-\rho[b_1\lambda\mu]}{u_2 + b(u_1^2 + u_2^2)\Delta^2 + b_1\lambda(\mu - \Delta^2)}. \tag{90}$$

В общем случае искомые первые интегралы выписываются громоздко (в частности, если $\kappa = -1$, то используется равенство (86)). При участии уравнений (84), (81) получаются два других первых интеграла, имеющие следующие структурные виды:

$$\Theta_2(Z_2, Z_1; \alpha) = G_2\left(\Delta(\alpha), \frac{Z_2}{\Delta(\alpha)}, \frac{Z_1}{\Delta(\alpha)}\right) = C_2 = \text{const}, \tag{91}$$

$$\Theta_3(Z_2, Z_1; \alpha, \beta) = G_3\left(\Delta(\alpha), \beta, \frac{Z_2}{\Delta(\alpha)}, \frac{Z_1}{\Delta(\alpha)}\right) = C_3 = \text{const}. \tag{92}$$

При этом (при $\kappa = -1$) первый интеграл (91) найдется из уравнения Бернулли

$$\frac{d\Delta}{du_2} = \frac{(b_1\lambda\mu + u_2)\Delta + \left\{b[U^2(C_1, u_2) + u_2^2] - b_1\lambda\right\}\Delta^3}{u(u_2) + U^2(C_1, u_2)},$$

$$U(C_1, u_2) = \frac{1}{2}\left\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 + 4u(u_2)}\right\},\ u(u_2) = \lambda - b_1\lambda\mu u_2 - u_2^2.$$

Выражение первых интегралов (91), (92) через конечную комбинацию элементарных функций главным образом зависит от явного вида функции $\Delta(\alpha)$.

Кроме того, у системы (78), (80), (81) существует гладкий первый интеграл, который, например, при $b = -b_1$ примет вид

$$\Theta_0(v; Z_2, Z_1; \alpha) = v^2(1 + 2bZ_2\Delta(\alpha) - b^2\mu(Z_1^2 + Z_2^2)) = C_0 = \text{const}. \tag{93}$$

А уравнение (90), в свою очередь, позволяет получить функцию $\rho(v; Z_2, w_1^*; \alpha, \beta)$, которая определяет инвариантную дифференциальную форму объема. Действительно, справедливо следующее инвариантное соотношение:

$$\rho \cdot \exp\left\{b_1\lambda\mu \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)}\right\} = C_\rho = \text{const},\ U_2(C_1, u_2) = 2u(u_2) + C_1U(C_1, u_2).$$

Отсюда, в частности, следует, что одним из возможных вариантов инвариантной дифференциальной формы объема является следующая форма:

$$v^3 \exp\left\{-b_1\lambda\mu \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)}\right\} dv \wedge d\alpha \wedge dZ_2 \wedge dw_1^* \wedge d\beta,\ u_2 = \frac{Z_2}{\Delta(\alpha)}.$$

Таким образом, общее решение линейного уравнения (88) в частных производных примет следующий вид:

$$\rho = v^3 \exp\left\{-b_1\lambda\mu \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)}\right\} \cdot \mathcal{F}\left[\Theta_0, \Theta_1, \Theta_2, \Theta_3\right],$$

где $\mathcal{F}\left[\Theta_0, \Theta_1, \Theta_2, \Theta_3\right]$ — произвольная гладкая функция четырех аргументов, при этом $\Theta_0, \Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ — четыре независимых первых интеграла (93), (87), (91), (92) соответственно.

В частности, за четыре функционально независимых решения линейного уравнения (88) в частных производных можно взять следующие функции ($u_k = Z_k/\delta(\alpha)$, $k = 1, 2$, $w_1^* = \ln|Z_1|$):

$$\rho_0(v; Z_2, w_1^*; \alpha) = v^3 \exp\left\{-b_1\lambda\mu \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)}\right\} \cdot \Theta_0(v; Z_2, w_1^*; \alpha),$$

$$\rho_1(v; Z_2, w_1^*; \alpha) = v^3 \exp\left\{-b_1\lambda\mu \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)}\right\} \cdot \Theta_1(Z_2, w_1^*; \alpha),$$

$$\rho_2(v; Z_2, w_1^*; \alpha) = v^3 \exp\left\{-b_1\lambda\mu \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)}\right\} \cdot \Theta_2(Z_2, w_1^*; \alpha),$$

$$\rho_3(v; Z_2, w_1^*; \alpha, \beta) = v^3 \exp\left\{-b_1\lambda\mu \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)}\right\} \cdot \Theta_3(Z_2, w_1^*; \alpha, \beta).$$

5. Строение инвариантов для систем с диссипацией и приложения

Система (78), (79) является динамической системой с переменной диссипацией. При этом при $F(\alpha) \equiv 0$ она превращается в систему консервативную (63), (64). Последняя, в частности, при некоторых естественных условиях обладает двумя гладкими первыми интегралами вида (73), (74). Более того, если функция $F(\alpha)$ не равна тождественно нулю, но $b_1 = 0$, то система (78), (79) при условии (83) обладает первым интегралом вида

$$\Theta\Big|_{B=0}(B; v; Z_2, Z_1; \alpha) = v^2(Z_1^2 + Z_2^2 - \lambda\Delta^2(\alpha)) = \text{const}, \tag{94}$$

где $\Theta(B; v; Z_2, Z_1; \alpha) = v^2(Z_1^2 + Z_2^2 + B\lambda\mu Z_2\Delta(\alpha) - \lambda\Delta^2(\alpha))$ — семейство функций, зависящих от параметра $B \geqslant 0$.

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (94), (74) также является первым интегралом системы (78), (79) при не равенстве функции $F(\alpha)$ тождественно нулю, но $b_1 = 0$. Но при $b_1 > 0$ каждая из функций

$$\Theta\Big|_{B=b_1}(B; v; Z_2, Z_1; \alpha) = v^2(Z_1^2 + Z_2^2 + b_1\lambda\mu Z_2\Delta(\alpha) - \lambda\Delta^2(\alpha)) = \text{const} \tag{95}$$

и (74) по отдельности не является первым интегралом системы (78), (79). Однако отношение функций (95), (74) является первым интегралом (87) системы (78), (79) (для простоты, при $\kappa = -1$) при любом $b_1 > 0$.

Вообще же, как и указывалось ранее, для систем с диссипацией трансцендентность функций (в смысле наличия существенно особых точек) как первых интегралов наследуется из нахождения в системе притягивающих или отталкивающих предельных множеств.

Выделим теперь существенные случаи для функций $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, определяющих метрику на двумерной сфере, и функции $\Delta(\alpha)$:

$$f_1(\alpha) = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sqrt{1+\nu\sin^2\alpha}},\ \nu \in \mathbf{R},\ f_2(\alpha) \equiv -1,\ \Delta(\alpha) = \sin\alpha, \tag{96}$$

$$f_1(\alpha) = \frac{1}{\sin\alpha\sqrt{1+\nu\sin^2\alpha}},\ \nu \in \mathbf{R},\ f_2(\alpha) \equiv -1, \tag{97}$$

а также следующие случаи, имеющие самостоятельный интерес:

$$f_1(\alpha) = \frac{\nu_1\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2+\nu_2}},\ \nu_1, \nu_2 \in \mathbf{R},\ f_2(\alpha) = \nu_1\alpha, \tag{98}$$

$$f_1(\alpha) = \frac{\nu_1}{\rho(\alpha)\sqrt{\nu_2\nu_1^2\rho^2(\alpha)-1}},\ \nu_1, \nu_2 \in \mathbf{R},\ f_2(\alpha) = \frac{\nu_1}{\sqrt{1+\rho'^2(\alpha)}}. \tag{99}$$

Случай (96) формирует класс систем (78), (79) при $\mu = 1$, соответствующих пространственному движению динамически симметричного твердого тела на нулевом уровне циклического интеграла в неконсервативном поле сил. В частности, при $\Delta(\alpha) \equiv F(\alpha) \equiv 0$ рассматриваемая система описывает геодезический поток на двумерной сфере. В случае (96), если $\Delta(\alpha) = F(\alpha)/\cos\alpha$, то система описывает пространственное движение твердого тела в силовом поле $F(\alpha)$ под действием следящей силы [18]. В частности, если $F(\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha$, $\Delta(\alpha) = \sin\alpha$, то система эквивалентна пространственному (сферическому) маятнику, помещенному в поток набегающей среды, и обладает полным набором первых интегралов с существенно особыми точками, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

Случай (97) формирует класс систем (78), (79), соответствующих движению точки по двумерной сфере с метрикой, индуцированной евклидовой метрикой объемлющего трехмерного пространства.

Случай (98) формирует класс систем (78), (79), соответствующих движению точки по плоскости Лобачевского в модели Клейна.

Случай (99) формирует класс систем (78), (79), соответствующих движению точки по поверхности, образуемой при вращении линии, заданной функцией $\rho(\alpha)$, вокруг оси α. В трех последних случаях функция $\Delta(\alpha)$ пробегает некоторое функциональное множество.

В заключение некоторое замечание об интегрируемости. Как известно, понятие интегрируемости достаточно многообразное. В данной же работе предъявлены полные наборы не только первых интегралов, но и инвариантных дифференциальных форм для однородных систем пятого порядка. Эти наборы содержат в себе почти всюду гладкие функции, имеющие существенно особые точки. Показана связь наличия предъявляемых инвариантных форм с набором первых интегралов. Примеры, перечисленные выше из приложений, также являются новыми нетривиальными случаями интегрируемости систем геодезических и систем с диссипацией в явном виде.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бурбаки Н. Интегрирование. Меры, интегрирование мер. – М.: Наука, 1967. — 396 с.

2. Бурбаки Н. Интегрирование. Меры на локально компактных пространствах. Продолжение меры. Интегрирование мер. Меры на отделимых пространствах. – М.: Наука, 1977. — 600 с.

3. Вейль Г. Симметрия. М.: URSS, 2007.

4. Георгиевский Д.В., Шамолин М.В. Кинематика и геометрия масс твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbf{R}^n$ // Доклады РАН. — 2001. — Т. 380. — № 1. — С. 47–50.

5. Георгиевский Д.В., Шамолин М.В. Обобщенные динамические уравнения Эйлера для твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbf{R}^n$ // Доклады РАН. — 2002. — Т. 383. — № 5. — С. 635–637.

6. Георгиевский Д.В., Шамолин М.В. Первые интегралы уравнений движения обобщенного гироскопа в $\mathbf{R}^n$ // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. — 2003. — № 5. — С. 37–41.

7. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. М.: Наука, 1979. — 760 с.

8. Иванова Т.А. Об уравнениях Эйлера в моделях теоретической физики // Матем. заметки. — 1992. — Т. 52. — Вып. 2. — С. 43–51.

9. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976.

10. Клейн Ф. Неевклидова геометрия. Пер. с нем. Изд. 4, испр., обновл. – М.: URSS, 2017. 352 с.

11. Козлов В.В. Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике // Успехи матем. наук. 1983. Т. 38. Вып. 1. С. 3–67.

12. Козлов В.В. Рациональные интегралы квазиоднородных динамических систем // Прикл. матем. и механ. 2015. Т. 79. № 3. С. 307–316.

13. Козлов В.В. Тензорные инварианты и интегрирование дифференциальных уравнений // Успехи матем. наук. — 2019. — Т. 74. —№ 1(445). — С. 117–148.

14. Колмогоров А.Н. О динамических системах с интегральным инвариантом на торе // Доклады АН СССР. – 1953. – Т. 93. —№ 5. — С. 763–766.

15. Походня Н.В., Шамолин М.В. Новый случай интегрируемости в динамике многомерного тела // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. — 2012. — № 9(100). — С. 136–150.

16. Походня Н.В., Шамолин М.В. Некоторые условия интегрируемости динамических систем в трансцендентных функциях // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. — 2013. — № 9/1(110). — С. 35–41.

17. Походня Н.В., Шамолин М.В. Интегрируемые системы на касательном расслоении к многомерной сфере // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. — 2014. — № 7(118). — С. 60–69.

18. Самсонов В.А., Шамолин М.В. К задаче о движении тела в сопротивляющейся среде // Вест. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. — 1989. — № 3. — С. 51–54.

19. Трофимов В.В. Уравнения Эйлера на конечномерных разрешимых группах Ли // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1980. — Т. 44. — № 5. — С. 1191–1199.

20. Трофимов В.В. Симплектические структуры на группах автоморфизмов симметрических пространств // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1984. № 6. С. 31–33.

21. Трофимов В.В., Фоменко А.Т. Методика построения гамильтоновых потоков на симметрических пространствах и интегрируемость некоторых гидродинамических систем // ДАН СССР. 1980. Т. 254. № 6. С. 1349–1353.

22. Трофимов В.В., Шамолин М.В. Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем // Фундам. и прикл. матем. 2010. Т. 16. Вып. 4. С. 3–229.

23. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1987.

24. Шамолин М.В. Об интегрируемости в трансцендентных функциях // Успехи матем. наук. 1998. Т. 53. Вып. 3. С. 209–210.

25. Шамолин М.В. Интегрируемость по Якоби в задаче о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде // Доклады РАН. — 2000. — Т. 375. — № 3. — С. 343–346.

26. Шамолин М.В. Об интегрировании некоторых классов неконсервативных систем // Успехи матем. наук. — 2002. — Т. 57. — Вып. 1. — С. 169–170.

27. Шамолин М.В. Об одном интегрируемом случае уравнений динамики на $so(4) \times \mathbf{R}^4$ // Успехи матем. наук. — 2005. — Т. 60. — Вып. 6. — С. 233–234.

28. Шамолин М.В. Случай полной интегрируемости в динамике на касательном расслоении двумерной сферы // Успехи матем. наук. — 2007. — Т. 62. — Вып. 5. — С. 169–170.

29. Шамолин М.В. Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле // Доклады РАН. — 2013. — Т. 453. — № 1. — С. 46–49.

30. Шамолин М.В. Новый случай интегрируемости уравнений динамики на касательном расслоении к трехмерной сфере // Успехи матем. наук. — 2013. — Т. 68. — Вып. 5(413). — С. 185–186.

31. Шамолин М.В. Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле при учете линейного демпфирования // Доклады РАН. — 2014. — Т. 457. — № 5. — С. 542–545.

32. Шамолин М.В. Интегрируемые системы с переменной диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере и приложения // Фундам. и прикл. матем. — 2015. — Т. 20. — Вып. 4. — С. 3–231.

33. Шамолин М.В. Полный список первых интегралов динамических уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле // Доклады РАН. — 2015. — Т. 461. — № 5. — С. 533–536.

34. Шамолин М.В. Полный список первых интегралов уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования // Доклады РАН. — 2015. — Т. 464. — № 6. — С. 688–692.

35. Шамолин М.В. Интегрируемые неконсервативные динамические системы на касательном расслоении к многомерной сфере // Дифференц. уравнения. — 2016. — Т. 52. — № 6. — С. 743–759.

36. Шамолин М.В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере // Доклады РАН. — 2017. — Т. 474. — № 2. — С. 177–181.

37. Шамолин М.В. Интегрируемые динамические системы с конечным числом степеней свободы с диссипацией // Пробл. матем. анализа. — 2018. — № 95. — С. 79–101.

38. Шамолин М.В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении многомерного многообразия // Доклады РАН. — 2018. — Т. 482. — № 5. — С. 527–533.

39. Шамолин М.В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия // Доклады РАН. — 2018. — Т. 479. — № 3. — С. 270–276.

40. Шамолин М.В. Новые случаи интегрируемых систем нечетного порядка с диссипацией // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. — 2020. — Т. 491. — № 1. — С. 95–101.

41. Шамолин М.В. Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. — 2021. — Т. 497. — № 1. — С. 23–30.

42. Шамолин М.В. Новые случаи интегрируемости геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении конечномерного многообразия // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. — 2021. — Т. 500. — № 1. — С. 78–86.

43. Шамолин М.В. Тензорные инварианты геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении двумерного многообразия // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. — 2021. — Т. 501. — № 1. — С. 89–94.

44. Шамолин М.В. Инвариантные формы объема систем с тремя степенями свободы с переменной диссипацией // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. — 2022. — Т. 507. — № 1. — С. 86–92.

45. Poincaré H. Calcul des probabilités, Gauthier–Villars, Paris, 1912, 340 pp.

46. Shamolin M.V. Some questions of the qualitative theory of ordinary differential equations and dynamics of a rigid body interacting with a medium, In: Journal of Mathematical Sciences, 2002,Vol. 110, No. 2, pp. 2528–2557.

REFERENCES

1. Bourbaki N. Integrirovaniye. Mery, integrirovaniye mer [Integration. Measures, measure integration]. Moscow, Nauka, 1967.

2. Bourbaki N. Integrirovaniye. Mery na lokal'no-kompaktnykh prostranstvakh. Prodolzheniye mer. Mery na otdelimykh prostranstvakh [Integration. Measures on locally compact spaces. Continuation of measures. Measures on separable spaces]. Moscow, Nauka, 1977.

3. Weil G. Simmetriya [Symmetries]. Moscow, URSS, 2007.

4. Georgievskii D.V., Shamolin M.V. Kinematika i geometriya mass tverdogo tela s nepodvizhnoy tochkoy v $\mathbf{R}^n$ [Kinematics and mass geometry for a solid body with a fixed point in $\mathbf{R}^n$]. Doklady RAN [Physics Doklady], 2001, Vol. 380, No. 1, P. 47–50.

5. Georgievskii D.V., Shamolin M.V. Obobshchennye dinamicheskiye uravneniya Eilera dlya tverdogo tela s nepodvizhnoy tochkoy v $\mathbf{R}^n$ [Generalized Euler's Equations Describing the Motion of a Rigid Body with a Fixed Point in $\mathbf{R}^n$]. Doklady RAN [Physics Doklady], 2002, Vol. 383, No. 5, P. 635–637.

6. Georgievskii D.V., Shamolin M.V. Pervye integraly uravneniy dvizheniya obobshchennogo gyroskopa v $\mathbf{R}^n$ [First integrals of motion equations of a generalized gyroscope in $\mathbf{R}^n$]. Vestnik Moskovskogo Universiteta. Seriya 1. Matematika. Mekhanika [Moscow University Mathematics Bulletin], 2003, No. 5, P. 37–41.

7. Dubrovin B.A., Novikov S.P., Fomenko A.T. Sovremennaya geometriya [Modern Geometry], Moscow, Nauka, 1979.

8. Ivanova T.A. Ob uravneniyakh Eilera v modelyakh teoreticheskoy phiziki [Euler equations in models of theoretical physics]. Matematicheskiye zametki [Mathematical Notes], 1992, Vol. 52, No. 2, P. 43–51.

9. Kamke E. Spravochnik po obyknovennym differentsyal'nym uravneniyam [Handbook of Ordinary Differential Equations]. Moscow, Nauka, 1976.

10. Klein F. Neevklidova geometriya [Non-Euclidean geometry]. M., URSS, 2017.

11. Kozlov V.V. Integriruemost' i Neintegriruemost' v gamil'tonovoy mekhanike [Integrability and non-integrability in Hamiltonian mechanics]. Uspekhi matematicheskikh nauk [Russian Mathematical Surveys], 1983, Vol. 38, No. 1, P. 3–67.

12. Kozlov V.V. Ratsyonal'nye integraly kvaziodnorodnykh dinamicheskikh sistem [Rational integrals of quasi-homogeneous dynamical systems] // Prikladnaya matematika i mekhanika [Journal of applied mathematics and mechanics], 2015, Vol. 79, No. 3, P. 307–316.

13. Kozlov V.V. Tenzornye invarianty i integrirovaniye differentsyal'nykh uravneniy [Tensor invariants and integration of differential equations]. Uspekhi matematicheskikh nauk [Russian Mathematical Surveys], 2019, Vol. 74, No. 1(445), P. 117–148.

14. Kolmogorov A.N. O dinamicheskikh sistemakh s integral'nym invariantom na tore [On dynamical systems with an integral invariant on a torus]. Doklady AN SSSR [Doklady Mathematics], 1953, Vol. 93, No. 5, P. 763–766.

15. Pokhodnya N.V., Shamolin M.V. Noviy sluchay integriruemosti v dinamike mnogomernogo tela [A new case of integrability in the dynamics of a multidimensional body]. Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya [Vestnik of Samara University. Natural Science Series], 2012, No. 9(100), P. 136–150.

16. Pokhodnya N.V., Shamolin M.V. Nekotorye usloviya integriruemosti dinamicheskikh sistem v transtsendentnykh funktsiyakh [Some conditions of integrability of dynamical systems in transcendental functions]. Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya [Vestnik of Samara University. Natural Science Series], 2013, No. 9/1(110), P. 35–41.

17. Pokhodnya N.V., Shamolin M.V. Integriruemye sistemy na kasatel'nom rassloenii k mnogomernoy sfere [Integrable systems on a tangent bundle to a multidimensional sphere]. Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya [Vestnik of Samara University. Natural Science Series], 2014, No. 7(118), P. 60–69.

18. Samsonov V.A., Shamolin M.V. K zadache o dvizhenii tela v soprotivlyayushcheisya srede [On the problem of a body motion in a resisting medium]. Vestnik Moskovskogo Universiteta. Seriya 1. Matematika. Mekhanika [Moscow University Mechanics Bulletin], 1989, No. 3, P. 51–54.

19. Trofimov V.V. Уравнения Эйлера на конечномерных разрешимых группах Ли [Euler equations on finite-dimensional solvable Lie groups]. Izvestiya AN SSSR. Seriya matematicheskaya [Izvestiya: Mathematics], 1980, Vol. 44, No. 5, P. 1191–1199.

20. Trofimov V.V. Simplekticheskiye struktury na gruppakh avtomorfizmov simmetricheskikh prostranstv [Symplectic structures on automorphism groups of symmetric spaces]. Vestnik Moskovskogo Universiteta. Seriya 1. Matematika. Mekhanika [Moscow University Mathematics Bulletin], 1984, No. 6, P. 31–33.

21. Trofimov V.V., Fomenko A.T. Metodika postroeniya gamil'tonovykh potokov na simmetricheskikh prostranstvakh i integriruemost' nekotorykh gidrodinamicheskikh sistem [The technique of Hamiltonian flows constructing on symmetric spaces and the integrability of some hydrodynamic systems]. Doklady AN SSSR [Doklady Mathematics], 1980, Vol. 254, No. 6, P. 1349–1353.

22. Trofimov V.V., Shamolin M.V. Geometricheskiye i dinamicheskiye invarianty integriruemykh gamil'tonovykh i dissipativnykh sistem [Geometric and dynamical invariants of integrable Hamiltonian and dissipative systems]. Fundamental'naya i prikladnaya matematika [Journal of Mathematical Sciences], 2010, Vol. 16, No. 4, P. 3–229.

23. Shabat B.V. Vvedeniye v kompleksniy analiz [Introduction in Complex Analysis], Moscow, Nauka, 1987.

24. Shamolin M.V. Ob integriruemosti v transtsendentnykh funktsiyakh [On integrability in transcendental functions]. Uspekhi matematicheskikh nauk [Russian mathematical surveys], 1998, Vol. 53, No. 3, P. 209–210.

25. Shamolin M.V. Integriruemost' po Yakobi v zadache o dvizhenii chetyrekhmernogo tverdogo tela v soprotivlyayushcheisya srede [Integrability according to Jacobi in the Problem of Motion of a Four-Dimensional Solid in a Resistant Medium]. Doklady RAN [Physics Doklady], 2000, Vol. 375, No. 3, P. 343–346.

26. Shamolin M.V. Ob integrirovanii nekotorykh klassov nekonservativnykh sistem [Integration of certain classes of non-conservative systems]. Uspekhi matematicheskikh nauk [Russian mathematical surveys], 2002, Vol. 57, No. 1, P. 169–170.

27. Shamolin M.V. Ob odnom integriruemom sluchae uravneniy dinamiki na so(4) $\times$ $\mathbf{R}^4$ [An integrable case of dynamical equations on so(4)$\times\mathbf{R}^4$]. Uspekhi matematicheskikh nauk [Russian mathematical surveys], 2005, Vol. 60, No. 6, P. 233–234.

28. Shamolin M.V. Sluchay polnoy integriruemosti v dinamike na kasatel'nom rassloenii dvumernoy sfery [The case of complete integrability in dynamics on a tangent bundle of a two-dimensional sphere]. Uspekhi matematicheskikh nauk [Russian mathematical surveys], 2007, Vol. 62, No. 5, P. 169–170.

29. Shamolin M.V. Noviy sluchay integriruemosti v dinamike mnogomernogo tverdogo tela v nekonservativnom pole [New Case of Integrability in the Dynamics of a Multidimensional Solid in a Nonconservative Field]. Doklady RAN [Physics Doklady], 2013, Vol. 453, No. 1, P. 46–49.

30. Shamolin M.V. Noviy sluchay integriruemosti uravenniy dinamiki na kasatel'nom rassloenii k trekhmernoy sfere [New case of integrability of dynamic equations on the tangent bundle of a 3-sphere]. Uspekhi matematicheskikh nauk [Russian mathematical surveys], 2013, Vol. 68, No. 5(413), P. 185–186.

31. Shamolin M.V. Noviy sluchay integriruemosti v dinamike mnogomernogo tverdogo tela v nekonservativnom pole pri uchete lineynogo dempfirovaniya [A New Case of Integrability in the Dynamics of a Multidimensional Solid in a Nonconservative Field under the Assumption of Linear Damping]. Doklady RAN [Physics Doklady], 2014, Vol. 457, No. 5, P. 542–545.

32. Shamolin M.V. Integriruemye sistemy s peremennoy dissipatsiey na kasatel'nom rassloenii k mnogomernoy sfere i prilozheniya [Integrable variable dissipation systems on the tangent bundle of a multi-dimensional sphere and some applications]. Fundamental'naya i prikladnaya matematika [Journal of Mathematical Sciences], 2015, Vol. 20, No. 4, P. 3–231.

33. Shamolin M.V. Polniy spisok pervykh integralov dinamicheskikh uravneniy dvizheniya mnogomernogo tverdogo tela v nekonservativnom pole [Complete List of First Integrals of Dynamic Equations for a Multidimensional Solid in a Nonconservative Field]. Doklady RAN [Physics Doklady], 2015, Vol. 461, No. 5, P. 533–536.

34. Shamolin M.V. Polniy spisok pervykh integralov dinamicheskikh uravneniy dvizheniya mnogomernogo tverdogo tela v nekonservativnom pole pri nalichii lineynogo dempfirovaniya [Complete List of the First Integrals of Dynamic Equations of a Multidimensional Solid in a Nonconservative Field under the Assumption of Linear Damping]. Doklady RAN [Physics Doklady], 2015. — T. 464. — № 6. — C. 688–692.

35. Shamolin M.V. Integriruemiye nekonservativniye dinamicheskiye sistemy na kasatel'nom rassloenii k mnogomernoy sfere [Integrable Nonconservative Dynamical Systems on the Tangent Bundle of the Multidimensional Sphere]. Differentsial'niye uravneniya [Differential equations]. 2016, Vol. 52, No. 6, P. 743–759.

36. Shamolin M.V. Noviye sluchai integriruemykh sistem s dissipatsiyey na kasatel'nom rassloenii k mnogomernoy sfere [New Cases of Integrable Systems with Dissipation on a Tangent Bundle of a Multidimensional Sphere]. Doklady RAN [Physics Doklady], 2017, Vol. 474, No. 2, P. 177–181.

37. Shamolin M.V. Integriruemiye dinamicheskie sistemy s konechnym chislom stepeney svobody s dissipatsiyey [Integrable Dynamic Systems with Dissipation and Finitely Many Degrees of

Freedom]. Problemy matematicheskogo analiza [Journal of mathematical sciences], 2018, No. 95, P. 79–101.

38. Shamolin M.V. Noviye sluchai integriruemykh sistem s dissipatsiyey na kasatel'nom rassloyenii mnogomernogo mnogoobraziya [New Cases of Integrable Systems with Dissipation on the Tangent Bundle of a Multidimensional Manifold]. Doklady RAN [Physics Doklady], 2018, Vol. 482, No. 5, P. 527–533.

39. Shamolin M.V. Noviye sluchai integriruemykh sistem s dissipatsiyey na kasatel'nom rassloyenii chetyrekhmernogo mnogoobraziya [New Cases of Integrable Systems with Dissipation on Tangent Bundles of Four-Dimensional Manifolds]. Doklady RAN [Physics Doklady], 2018, Vol. 479, No. 3, P. 270–276.

40. Shamolin M.V. Noviye sluchai integriruemykh sistem nechetnogo poryadka s dissipatsiyey [New Cases of Integrable Odd-Order Systems with Dissipation]. Doklady RAN. Matematika, informatika, protsessy upravleniya [Doklady Mathematics], 2020, Vol. 491, No. 1, P. 95–101.

41. Shamolin M.V. Noviye sluchai odnorodnykh integriruemykh sistem s dissipatsiyey na kasatel'nom rassloyenii chetyrekhmernogo mnogoobraziya [New Cases of Homogeneous Integrable Systems with Dissipation on Tangent Bundles of Four-Dimensional Manifolds]. Doklady RAN. Matematika, informatika, protsessy upravleniya [Doklady Mathematics], 2021, Vol. 497, No. 1, P. 23–30.

42. Shamolin M.V. Noviye sluchai integriruemosti geodezicheskikh, potentsial'nykh i dissipativnykh sistem na kasatel'nom rassloenii konechnomernogo mnogoobraziya [New Cases of Integrability of Systems of Geodesics and Potential and Dissipative Systems on Tangent Bundles of Finite-Dimensional Manifolds]. Doklady RAN. Matematika, informatika, protsessy upravleniya [Doklady Mathematics], 2021, Vol. 500, No. 1, P. 78–86.

43. Shamolin M.V. Tenzorniye invarianty geodezicheskikh, potentsial'nykh i dissipativnykh sistem na kasatel'nom rassloenii dvumernogo mnogoobraziya [Tensor Invariants of Geodesic, Potential, and Dissipative Systems on Tangent Bundles of Two-Dimensional Manifolds]. Doklady RAN. Matematika, informatika, protsessy upravleniya [Doklady Mathematics], 2021, Vol. 501, No. 1, P. 89–94.

44. Shamolin M.V. Invariantniye formy obyema sistem s tremya stepenyami svobody s peremennoy dissipatsiyey [Invariant Volume Forms of Variable Dissipation Systems with Three Degrees of Freedom]. Doklady RAN. Matematika, informatika, protsessy upravleniya [Doklady Mathematics], 2022, Vol. 507, No. 1, P. 86–92.

45. Poincaré H. Calcul des probabilités, Gauthier–Villars, Paris, 1912.

46. Shamolin M.V. Some questions of the qualitative theory of ordinary differential equations and dynamics of a rigid body interacting with a medium. Journal of Mathematical Sciences, 2002,Vol. 110, No. 2, P. 2528–2557.

Получено: 02.04.2024
Принято в печать: 04.09.2024

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 25. Выпуск 3.

УДК 519.175.4 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-299-334

О справедливости закона 0 или 1 для неглубоких свойств первого порядка сильно разреженного случайного графа

Р. Р. Шефрукова

Шефрукова Руфина Руслановна — аспирант, Адыгейский государственный университет (г. Майкоп).
e-mail: rufa.1@yandex.ru

Аннотация

В биномиальном случайном графе $G(n,p)$ ребра проводятся независимо и с вероятностью p каждое. Случайный граф подчиняется k-закону 0 или 1, если вероятность истинности любой формулы первого порядка, кванторная глубина которой не превосходит k, стремится либо к 0 либо к 1 при $n \longrightarrow \infty$. Данная статья посвящена ответу на следующий вопрос: для каких пар k и ℓ случайный граф $G(n, n^{-l-1/\ell})$ подчиняется k-закону 0 или 1? Мы получили полный ответ при $k = 3$ и всех натуральных ℓ, а также доказали, что при $k = 4$ и $\ell \in [1, 40] \cup \{72\}$ закон нарушается.

Ключевые слова: Случайный граф, биномиальный случайный граф, логика первого порядка, закон 0 или 1, кванторная глубина, игра Эренфойхта.

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:
Шефрукова, Р.Р. О справедливости закона 0 или 1 для неглубоких свойств первого порядка сильно разреженного случайного графа // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 3, с. 299–334.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 25. No. 3.

UDC 519.175.4 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-299-334

On the validity of 0-1 law for shallow first order properties of very sparse random graphs

R. R. Shefrukova

Shefrukova Rufina Ruslanovna — postgraduate student, Adyghe State University (Maykop).
e-mail: rufa.1@yandex.ru

Abstract

In the binomial random graph $G(n,p)$ edges between every pair of vertices appear independently with probability p. The random graph obeys 0-1 k-law, if, for every first order sentence, the probability that $G(n,p)$ satisfies it is either 0 or 1 in the limit (as $n \longrightarrow \infty$). This paper addresses the following question: given a small k and any ℓ, does $G(n, n^{-l-1/\ell})$ satisfy 0-1 k-law? We answer this question for $k = 3$ and all ℓ. We also prove that for $k = 4$ and $\ell \in [1, 40] \cup \{72\}$ 0-1 k-law does not hold.

Keywords: Random graph, binomial random graph, first order logic, 0-1 law, quantifier depth, Ehrenfeucht game.

Bibliography: 16 titles.

For citation:
Shefrukova, R.R. 2024, "On the validity of 0-1 law for shallow first order properties of very sparse random graphs", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 3, pp. 299–334.

1. Введение

Наука о случайных графах зародилась на рубеже 50-х и 60-х годов. Впервые случайные графы были определены и изучены Эрдёшем и Реньи, именно их труды [5, 6] заложили основы современной науки о случайных графах. В настоящее время исследовано множество моделей случайных графов. В данной статье рассматривается наиболее изученная классическая модель биномиального случайного графа $G(n,p)$: ребра между парами вершин n-элементного множества проводятся независимо с вероятностью p.

Классическим результатом в области является теорема Глебского, Когана, Легонького, Таланова [8] и Фагина [7], утверждающая, что случайный граф $G(n, 1/2)$ подчиняется закону нуля или единицы для формул первого порядка (т.е. вероятность истинности любой такой формулы стремится либо к 0, либо к 1 с ростом n к бесконечности). Тот же результат справедлив и для любой другой постоянной вероятности проведения ребра p, а также для p, стремящейся к 0 медленнее любой степенной функции [12]. Если $p = n^{-\alpha}$, $\alpha > 0$, то известно следующее [11]. Закон нуля или единицы *не* выполняется тогда и только тогда, когда либо α — рациональное число из $(0, 1]$, либо $\alpha = 1 + \frac{1}{\ell}$ для некоторого $\ell \in \mathbb{N}$. Итак, при $\alpha > 1$ возникают исключительные точки вида $1 + 1/\ell$, для которых закон не выполнен, мотивируя следующий естественный вопрос. Для каких пар k и ℓ выполняется k-закон нуля или единицы (т.е. для формул первого порядка глубины не более k) для $G(n, n^{-1-1/\ell})$? Настоящая работа посвящена ответу на этот вопрос при малых k.

Для больших k вопрос был изучен Жуковским М.Е. и Островским Л.Б [2, 10]. При $\alpha = 1 + 1/\ell$ были получены нижняя и верхняя оценка на наибольшее k, при котором выполнен k-закон нуля или единицы. А именно был получен следующий результат. Пусть функция $T(i)$ определена следующим образом (на множестве натуральных чисел): $T(0) = 1, T(i) = 2^{T(i-1)}$, $i \geq 1$. Кроме того, для любого натурального числа x положим

$$\log^*(x) = \min\{i : T(i) \geq x\}$$

(т. е. $\log^* T(i)) = i$).

Теорема 1 (Жуковский, Островский [2, 10]). *Пусть $k \geq 7$ — натуральное число. Тогда для любого натурального $\ell \leq 2T(k-4)$ случайный граф $G(n, n^{-1-1/\ell})$ не подчиняется k закону нуля или единицы. Более того, существует такая константа C, что для любого натурального $k > 3$ и $\ell \geq T(k + \log^*(k+1) + 3)$ случайный граф $G(n, n^{-1-1/\ell})$ подчиняется k-закону нуля или единицы.*

В настоящей работе мы изучили справедливость закона нуля или единицы для $k = 3$ и всех ℓ, а также для $k = 4$ и всех $\ell \leq 40$. Заметим, что при $k = 2$ легко заметить, что единственным значением ℓ, при котором нарушается закон, является $\ell = 1$ — см. раздел 3.

Теорема 2. *Положим* $p = n^{-1-1/\ell}$.

- *При* $k = 3$ *и* $\ell \leq 6$ *случайный граф* $G(n, p)$ *не подчиняется* k*-закону 0 или 1. Если же* $\ell \geq 7$*, то случайный граф* $G(n, n^{-1-1/\ell})$ *подчиняется* k*-закону 0 или 1.*
- *При* $k = 4$ *и* $\ell \leq 40$ *случайный граф* $G(n, p)$ *не подчиняется* k*-закону 0 или 1. Кроме того, случайный граф* $G(n, n^{-73/72})$ *не подчиняется 4-закону 0 или 1.*

Итак, теорема 1 утверждает, что $G(n, n^{-1-1/\ell})$ подчиняется 4-закону 0 или 1 при всех $\ell \geq T(7 + \log^* 5) = T(10)$, то есть ℓ превосходит "башню" из двоек высоты 10. В полученной нами теореме 2 имеется сплошной интервал значений ℓ, при которых не выполнен 4-закон, и одно отдельное значение 72. Мы не знаем, не выполнен ли 4-закон 0 или 1 для всех ℓ, не превосходящих 72, но ожидаем, что выколотые точки на отрезке $[1, \ell_0]$, где ℓ_0 — максимальное значение, при котором не выполнен 4-закон, все-таки имеются. Тем не менее, по всей видимости, наилучшая известная верхняя оценка $\ell_0 < T(10)$ далека от оптимальной. Поэтому наиболее интересным вопросом является нахождение или значительное улучшение верхней оценки ℓ_0.

Доказательство отсутствия k-закона в теореме 2 проводится конструктивно — приводится формула, вероятность которой не стремится ни к 0, ни к 1. Для доказательства справедливости закона мы использовали теорему Эренфойхта и следствие из нее о связи игры Эренфойхта с законами нуля или единицы. Необходимые определения и формулировки соответствующих теорем приведены в разделе 2. Доказательство теоремы 2 приведено в разделе 3.

Отметим, что законы нуля или единицы используются в задачах о выразимости графовых свойств на языке первого порядка, которые, в свою очередь, могут быть использованы для оценивания временной сложности алгоритмов проверки этих свойств [13, 14]. Справедливость k-закона для случайного графа $G(n, n^{-\alpha})$ при $\alpha \leq 1$ изучена в работах [15, 16].

2. Используемый в работе математический аппарат

Прежде всего введем ряд понятий, обозначений, утверждений и конструкций, которые необходимы для формальной постановки задачи и ее решения.

2.1. Логический формализм

Пусть M — непустое множество. Будем называть *предикатом арности* $k \in \mathbb{N}$ произвольное отображение $M^k \longrightarrow \{0, 1\}$. Сами по себе формулы являются формальными записями, и поэтому в их записи участвуют не сами предикаты, а их обозначения, называемые предикатными символами. Так, *предикатный символ* — это произвольный символ, с которым ассоциировано некоторое натуральное число (арность соответсвующего предиката). *Сигнатурой* называется произвольное множество предикатных символов. *Интерпретация сигнатуры* — множество предикатов, соответствующих символам из сигнатуры и имеющих соответсвующую арность.

Перейдем к определению формулы первого порядка. Определим сперва понятие атома. *Атомарная формула (атом)* (иными словами, формула, которая не содержит никаких логических связок) — это выражение $p(t_1, \ldots, t_n)$, где $p \in \Sigma$ — предикатный символ арности n, а $t_1, \ldots, t_n$ — переменные. Переменные атомарной формулы являются *несвязными.*

Определим, наконец, *формулы первого порядка* и, одновременно с этим, *кванторную глубины формулы.*

1. Любой атом является формулой первого порядка. Кванторная глубина атома равна 0.

2. Если φ — формула первого порядка, то и $\neg\varphi$ — формула первого порядка. Множество несвязанных переменных при этом сохраняется. Кванторная глубина формулы $\neg\varphi$ равна кванторной глубине формулы φ.

3. Если φ_1, φ_2 — формулы первого порядка, то и

$$\varphi_1 \vee \varphi_2,\ \varphi_1 \wedge \varphi_2,\ \varphi_1 \Rightarrow \varphi_2,\ \varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2$$

— формулы первого порядка. Кванторная глубина каждой из перечисленных новых формул равна максимуму из кванторной глубины φ_1 и кванторной глубины φ_2.

4. Пусть φ — формула первого порядка. Тогда

$$\exists x\ \varphi,\ \forall x\ \varphi$$

— формулы первого порядка, переменная x в которых является связанной. Кванторная глубина обеих формул на 1 больше кванторной глубины φ.

Формула без несвязанных переменных называется *замкнутой* или *предложением*. Заметим, что замкнутая формула φ на интерпретации сигнатуры Σ *принимает одно из двух значений* 1 или 0. Иными словами, замкнутая формула *выражает свойство* интерпретаций. Если же $\varphi(x_1, \ldots, x_r)$ — незамкнутая формула с несвязанными переменными $x_1, \ldots, x_r$, то φ *выражает предикат арности* r. Заметим, наконец, что кванторная глубина формулы — это, говоря неформально, максимальная длина последовательности вложенных кванторов.

Для более глубокого ознакомления с логикой первого порядка мы рекомендуем читателю обратиться к монографиям [1, 9].

В настоящей работе в роли интерпретаций будут выступать графы.

2.2. Теоретико-графовые и вероятностные конструкции

Простым графом G (или просто *графом*) называется пара множеств (V, E), где

- V — непустое, конечное множество элементов, называемых *вершинами*;
- E — конечное множество неупорядоченных пар различных элементов из V, называемых *ребрами*.

Множество V называется *множеством вершин графа* G, а E — *его множеством ребер*. Количество вершин и ребер графа будем обозначать, соответственно, $v(G)$ и $e(G)$.

Рассмотрим граф $G = (V, E)$. Граф $G' = (V', E')$ называется *подграфом* графа G, если V' и E' являются соответственно такими подмножествами V и E, что ребро $\{v_i, v_j\}$ содержится в E' только в том случае, если v_i и v_j содержатся в V'. Граф G' называется *собственным подграфом* G, если E' — собственное подмножество E или V' — собственное подмножество V. Граф G' называется *индуцированным* подграфом графа G, если множество вершин графа G' является подмножеством множества вершин графа G, а множество ребер *индуцировано* этим множеством вершин, то есть любые две вершины u, v графа G' *смежны* (т.е. соединены ребром) в G' тогда и только тогда, когда они смежны в G.

Граф называется *связным*, если для любых двух его вершин u, v существует последовательность вершин $u = v_0, v_1, \ldots, v_k = v$ такая, что для любого $i \in \{1, \ldots, k\}$ пара $\{v_{i-1}, v_i\}$

образует ребро. *Компонента связности* графа — это его максимальный (по включению) связный подграф. Очевидно, любой граф представляется в виде *дизъюнктного объединения* (т.е. непересекающихся по вершинам) компонент связности.

Простым циклом C_k называется граф на множестве $v_1, \ldots, v_k$ с множеством ребер $\{\{v_1, v_2\}, \ldots, \{v_{k-1}, v_k\}, \{v_k, v_1\}\}$. Связный граф, не содержащий как подграф простого цикла, называется *деревом*. Самыми "простейшими" деревьями являются звезды и простые пути. *Звездой* $K_{1,s}$ называется дерево на $s+1$ вершине, одна вершина которого смежна со всеми остальными, *простым путем* P_ℓ называется дерево на ℓ вершинах, которое получается из простого цикла удалением одного ребра. *Лесом* называется граф, любая компонента связности которого является деревом.

Обозначим через $a(G)$ число автоморфизмов графа G. *Автоморфизм графа* — это отображение множества вершин на себя, сохраняющее смежность. Иными словами, автоморфизм графа — это *изоморфизм* графа на себя. Два графа $G = (V, E)$ и $G' = (V', E')$ называются *изоморфными* (обозначается $G \cong G'$), если существует биекция (*изоморфизм*) $\varphi : V \longrightarrow V'$ такая, что $(v_i, v_j) \in E \Leftrightarrow (\varphi(v_i), \varphi(v_j)) \in E'$.

На стыке теории графов и теории вероятностей располагается теория случайных графов. Случайный граф — это общий термин для обозначения вероятностного распределения графов, используемый, в частности, для ответов на вопросы о свойствах простых графов. Случайный граф означает почти всегда биномиальную модель случайных графов Эрдеша–Реньи. Дадим определение случайного графа в данной модели.

Пусть дано множество $V_n = \{1, \ldots, n\}$, элементы которого мы будем считать вершинами случайного графа $G(n, p)$, где $p \in [0, 1]$ — некоторый фиксированный параметр. На этом множестве будем строить случайный граф (а точнее случайное множество ребер) следующим образом. Будем соединять любые две вершины i и j ребром с вероятностью p независимо от всех остальных пар вершин. Иными словами, *случайный граф* — это граф полученный из множества n изолированных вершин путём последовательного случайного добавления соединяющих вершины ребер.

Мы будем рассматривать свойства случайных графов, определяемые формулами первого порядка, которые строятся описанным в разделе 2.1 способом с помощью (сигнатура состоит из символов $\sim, =$ арности 2):

- предикатных символов $\sim, =$.
- логических связок $\neg, \longrightarrow, \leftrightarrow, \vee, \wedge$.
- переменных $x, y, x_1, y_1, \ldots$
- кванторов $\forall, \exists$.

Напомним формулировку закона 0 или 1, доказанную Ю. В. Глебским, Д. И. Коганом, М. И. Лиогоньким и В. А. Талановым в 1969 году [8], а также Р. Фагиным в 1976 году [7] (ниже мы приводим более общую формулировку, возникшую впервые в работе Дж. Спенсера [12]).

Теорема 3 (Дж. Спенсер [12]). *Если $p = p(n)$ — такая функция, что $pn^a \longrightarrow \infty$ и $(1-p)n^a \longrightarrow \infty$ для любого $a > 0$, а A — произвольное свойство графов, которое можно выразить на языке первого порядка, то либо $\mathbb{P}(G(n,p) \in A) \longrightarrow 0$ при $n \longrightarrow \infty$, либо $\mathbb{P}(G(n,p) \in A) \longrightarrow 1$.*

Далее речь пойдет о справедливости закона нуля или единицы для *разреженного случайного графа*, т.е. вероятности проведения ребра, равной $p = n^{-\alpha}$ для некоторого постоянного $\alpha > 0$. Говорят, что случайный граф подчиняется *закону 0 или 1*, если для любого свойства из класса свойств первого порядка (т.е. выразимого на языке первого порядка) вероятность

выполнения этого свойства стремится либо к 0, либо к 1. В частности, теорема 3 утверждает справедливость закона 0 или 1 для некоторого класса вероятностей проведения ребра $p = p(n)$.

В 1988 году Дж. Спенсер и С. Шелах доказали [11], что случайный граф не подчиняется закону 0 или 1 тогда и только тогда, когда значение параметра α (показателя степени) либо равно $1 + 1/\ell$ для некоторого натурального ℓ, либо является рациональными числом из $(0, 1]$.

Основным средством при доказательстве законов 0 или 1 для свойств первого порядка случайных графов является *игра Эренфойхта*. Определим эту игру $\mathrm{EHR}(G, H, k)$ на двух графах G и H с количеством раундов, равным k. В игре участвуют два игрока: Новатор и Консерватор. Игроки ходят по очереди, начиная с Новатора в первом раунде; каждый из игроков делает k ходов. В ν-м раунде, $1 \leq \nu \leq k$, Новатор выбирает вершину из любого графа, отличную от уже выбранных (он выбирает либо $x_\nu \in V(G)$ либо $y_\nu \in V(H)$). Затем Консерватор выбирает вершину из другого графа, отличную от уже выбранных. К концу игры выбраны вершины $x_1, \ldots, x_k \in V(G)$ и $y_1, \ldots, y_k \in V(H)$. Консерватор побеждает в том и только том случае, когда отображение $\phi : \{x_1, \ldots, x_k\} \longrightarrow \{y_1, \ldots, y_k\}$, переводящее вершину x_ν в вершину y_ν для каждого $\nu \in \{1, \ldots, k\}$, является изоморфизмом графов $G|_{\{x_1,\ldots,x_k\}}$ и $H|_{\{y_1,\ldots,y_k\}}$.

В дальнейшей работе будем опираться на теорему Эренфойхта [4] о связи между, так называемой, элементарной эквивалентностью графов (т.е. неразличимостью с помощью формул первого порядка) и описанной игрой.

Теорема 4 (А. Эренфойхт [4]). *Для любых двух графов G, H и любого $i \in N$ Консерватор имеет выигрышную стратегию в игре $\mathrm{EHR}(G, H, i)$ тогда и только тогда, когда для любого свойства первого порядка, выражаемого предложением, кванторная глубина которого не превышает i, либо оба графа обладают этим свойством, либо оба графа не обладают.*

Случайный граф подчиняется *k-закону нуля или единицы*, если для любого свойства, выражаемого формулой первого порядка с кванторной глубиной не более k, вероятность выполнения этого свойства стремится либо к 0, либо к 1.

Из теоремы 4 вытекает следующий результат о связи игры с законами нуля или единицы (см., например, [11, 2]).

Теорема 5. *Пусть k — произвольное натуральное число. С вероятностью, стремящейся к 1 при $n, m \longrightarrow \infty$, у Консерватора есть выигрышная стратегия в игре Эренфойхта на двух независимых случайных графах $G(n, p)$, $G(m, p)$ в k раундах тогда и только тогда, когда случайный граф $G(n, p)$ подчиняется k-закону нуля или единицы.*

2.3. Вспомогательные утверждения

Пусть G — некоторый фиксированный граф с v вершинами и e ребрами. Назовем отношение $\rho(G) = e/v$ *плотностью* графа G. Граф G называется *сбалансированным*, если плотность любого его подграфа H не превосходит его собственной плотности, т.е. выполнено следующее неравенство: $\rho(H) \leq \rho(G)$. Граф G называется *строго сбалансированным*, если максимальная плотность ρ его подгафа H достигается ровно на нем самом и больше ни на ком, т.е. выполнено неравенство $\rho(H) < \rho(G)$ для всех собственных подграфов H графа G. Очевидно, справедливо

Утверждение 1. *Любое дерево является строго сбалансированным графом.*

Сформулируем теорему о количестве копий произвольного фиксированного строго сбалансированного графа в случайном графе. Положим $\rho_{\max}(G) = \max\{\rho(H) : H \subseteq G\}$. Введем случайную величину N_G, равную количеству копий графа G в случайном графе $G(n, p)$.

Теорема 6 ([3]). *Пусть G — произвольный граф. Если $p = o(n^{-1/\rho_{\max}(G)})$, то*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \mathbb{P}(N_G > 0) = 0.$$

Если же $n^{-1/\rho_{\max}(G)} = o(p)$, то

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \mathbb{P}(N_G > 0) = 1.$$

Пусть теперь G — строго сбалансированный граф. Если $n^{-1/\rho(G)} = o(p)$, то для любого $\varepsilon > 0$ справедливо равенство

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \mathbb{P}(|N_G - \mathsf{E}N_G| \leq \varepsilon \mathsf{E}N_G) = 1.$$

Если же $p = n^{-1/\rho(G)}$, то

$$N_G \xrightarrow{d} \xi \sim \mathrm{Pois}\left(\frac{1}{a(G)}\right),$$

где $\mathrm{Pois}(\lambda)$ *— пуассоновское распределение с параметром λ.*

Для графа $G(n,p)$, $p = n^{-1-1/\ell}$ где $\ell \in \mathbb{N}$, очевидным следствием утверждения 1 и теоремы 6 является следующее.

Следствие 1. *Пусть $p = n^{-1-1/\ell}$, $\ell \in \mathbb{N}$.*

1. *Вероятность того, что случайный граф $G(n,p)$ является лесом, стремится к 1 при $n \longrightarrow \infty$.*
2. *Для любого $s \in \mathbb{N}$ и любого дерева T с не более чем ℓ вершинами, вероятность того что $G(n,p)$ содержит хотя бы s компонент, изоморфных T, стремится к 1 при $n \longrightarrow \infty$.*
3. *С вероятностью, стремящейся к 1 при $n \longrightarrow \infty$, в $G(n,p)$ не найдется деревьев на $\ell+2$ вершинах.*
4. *Для любого дерева T с $\ell+1$ вершиной $\mathbb{P}(T \subset G(n,p)) \longrightarrow c(T) \notin \{0,1\}$.*

Введем следующие обозначения для описанных в следствии 1 свойств случайного графа. Будем обозначать:

- F свойство являться лесом.
- $\mathsf{C}_s(T)$ свойство содержать хотя бы s компонент, изоморфных T.
- T^* свойство не содержать деревьев на $\ell+2$ вершинах.
- $\mathsf{T}(T)$ свойство содержать дерево, изоморфное T.

3. Доказательство теоремы 2

Далее мы отдельно докажем теорему для случая $k = 3$ и случая $k = 4$. Но прежде для полноты изложения и демонстрации метода докажем, что при $k = 2$ исключительным значеним ℓ, при котором нарушается закон, является $\ell = 1$.

При $\ell \in \mathbb{N}$ пусть $\mathsf{P}_\ell := \mathsf{T}(P_\ell) \cap \mathsf{F}$ — свойство содержать P_ℓ ацикличным графом. Заметим также, что число автоморфизмов P_ℓ равно 2.

- Пусть $\ell = 1$, т.е. $p = n^{-2}$. Докажем, что граф $G(n,p)$ не подчиняется 2-закону нуля или единицы, то есть существует формула кванторной глубины 2, вероятность истиности которой не стремится ни к 0, ни к 1.

  По теореме 6 граф $G(n,p)$ обладает свойством $\mathsf{T}(P_{\ell+1})$ с ассимптотической вероятностью, отличной от 0 и 1 (а именно $e^{-1/2}$), так как, очевидно, граф $P_{\ell+1}$ строго сбалансирован и имеет плотностью 1/2. При этом $\mathsf{T}(P_{\ell+1})$ на языке первого порядка записывается с помощью следующей формулы глубины 2:

  $$\exists x_1 \exists x_2 \quad ((x_1 \neq x_2) \wedge (x_1 \sim x_2)).$$

  Таким образом, $G(n,p)$ не подчиняется 2-закону 0 или 1, что и требовалось.

- Пусть теперь $p = n^{-(\ell+1)/\ell}$ и $\ell \geq 2$. По теореме 4 для доказательства того, что случайный граф $G(n,p)$ подчиняется 2-закону нуля или единицы, достаточно доказать, что с вероятностью, стремящейся к 1 (при $n, m \longrightarrow \infty$), у Консерватора есть выигрышная стратегия в 2 раундах в игре на двух независимых случайных графах $G(n,p(n))$ и $G(m,p(m))$. В силу следствия 1 достаточно доказать, что у Консерватора есть выигрышная стратегия в двух раундах на любых двух графах G, H, обладающих свойствами F, $\mathsf{C}_s(T)$ при $T = P_1$, $T = P_2$ и $s = 2$ (см. Рис. 1). Действительно, оба графа P_1 и P_2 являются деревьями с не более ℓ вершинами.

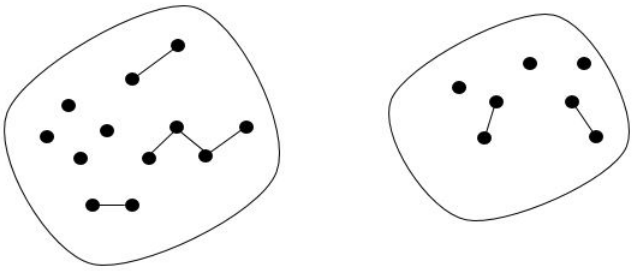


Рис. 1: Графы G и H, обладающие достаточными для победы Консерватора свойствами

На таких двух графах Консерватор побеждает за два раунда, так как:

1. Если в первом раунде Новатор в одном из графов выберет вершину с ребром, то Консерватор также выберет вершину, соединенную ребром с некоторой другой вершиной. Во втором руанде, какую бы вершину в каком бы графе Новатор не выбрал (соединенную ребром с первой или же нет), Корнсеватор выберет нужную ему вершину (например, изолированную в случае, когда Новатор выбрал вершину, не смежную с первой).
2. Если Новатор в первом раунде выберет изолированную вершину, то Консерватор тоже выберет изолированную вершину в другом графе. Во втором раунде какой бы выбор не сделал Новатор, Консерватор сделает идентичный выбор, просто выбрав произвольную вершину, отличную от первой.

Таким образом, Консерватор побеждает в двух раундах. Следовательно, закон нуля или единицы выполняется.

3.1. $k = 3$

- Пусть $\ell = 4$, т.е. $p = n^{-5/4}$ (случаи $\ell = 2$, $\ell = 3$ анологичны — во всех случаях достаточно рассмотреть свойство $\mathsf{P}_{\ell+1}$). Свойство $\mathsf{P}_{\ell+1}$ для леса записывается на языке первого

порядка с помощью следующей формулы φ:

$$\begin{aligned}\exists x_1 \exists x_2 \quad & [\exists x_3\ (x_1 \sim x_3) \wedge (x_2 \sim x_3)] \wedge \\ & [\exists x_3\ (x_1 \sim x_3) \wedge (x_2 \nsim x_3)] \wedge \\ & [\exists x_3\ (x_2 \sim x_3) \wedge (x_1 \nsim x_3)].\end{aligned}$$

В силу следствия 1,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(G(n,p) \models \varphi) &= \mathbb{P}(G(n,p) \models \varphi, G(n,p) \in \mathsf{F}) + o(1) \\ &= \mathbb{P}(G(n,p) \in \mathsf{P}_{\ell+1}, , G(n,p) \in \mathsf{F}) + o(1) \\ &= \mathbb{P}(G(n,p) \in \mathsf{P}_{\ell+1}) + o(1),\end{aligned}$$

что стремится к числу, отличному от 0 и 1, при $n \longrightarrow \infty$. Таким образом, случайный граф $G(n,p)$ не подчиняется 3-закону нуля или единицы.

- Пусть $\ell = 5$, т.е. $p = n^{-6/5}$. Рассмотрим свойство $\mathsf{T}(F)$, где F — путь на 5 вершинах, к центральной вершине которого добавлено ребро (см. Рис. 2).

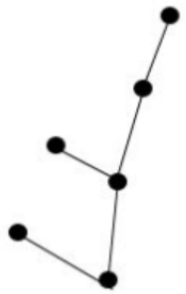


Рис. 2: Путь на 5 вершинах, к центральной вершнине которого добавлено ребро.

Это свойство для леса записывается на языке первого порядка следующей формулой φ:

$$\begin{aligned}\exists x_1 \quad \exists x_2 \quad & \Big[\Big(\exists x_3\ (x_1 \sim x_3) \wedge (x_2 \sim x_3)\Big) && \wedge \\ & \quad \Big(\exists x_3\ (x_1 \nsim x_3) \wedge (x_2 \sim x_3)\Big)\Big] && \wedge \\ \exists x_2 \quad & \Big[\Big(\exists x_3\ (x_1 \sim x_3) \wedge (x_2 \sim x_3)\Big) && \wedge \\ & \quad \neg\Big(\exists x_3\ (x_1 \nsim x_3) \wedge (x_2 \sim x_3)\Big)\Big] && \wedge \\ \exists x_2 \quad & \Big[\neg\Big(\exists x_3\ (x_3 \neq x_1) \wedge (x_3 \sim x_2)\Big) && \wedge\ (x_1 \sim x_2)\Big]\end{aligned}$$

Аналогично предыдущему случаю из следствия 1 мгновенно получаем, что $\mathbb{P}(G(n,p) \models \models \varphi)$ не имеет предела, а значит случайный граф $G(n,p)$ не подчиняется 3-закону нуля или единицы.

- Пусть $\ell = 6$, т.е. $p = n^{-7/6}$. Свойство $\mathsf{P}_{\ell+1}$ для леса записывается на языке первого

порядка следующим образом:

$$\begin{aligned}\exists x_1 \quad & \left[\left(\exists x_2\ \exists x_3\ (x_2 \neq x_3) \wedge (x_2 \sim x_1) \wedge (x_3 \sim x_1)\right)\right] && \wedge \\ & \left[\neg\ \exists x_2\ \left((x_1 \sim x_2) \wedge (\ \forall x_3\ (x_3 \sim x_2)\right.\right. && \Rightarrow \\ & \qquad \left.\left.(x_3 = x_1)\right)\right] && \wedge \\ & \left[\neg\ \exists x_2\ \left(\exists x_3\ (x_3 \sim x_1) \wedge (x_3 \sim x_2)\right)\right. && \wedge \\ & \qquad \left.\left(\forall x_3\ (x_3 \sim x_2)\ \Rightarrow\ (x_3 \sim x_1)\right)\right]\end{aligned}$$

Из следствия 1 получаем, что вероятность истинности этой формулы не имеет предела, а значит случайный граф $G(n,p)$ не подчиняется 3-закону нуля или единицы.

- Пусть $\ell = 7$, т.е. $p = n^{-8/7}$. По теореме 4 достаточно доказать, что с вероятностью, стремящейся к 1 (при $n, m \longrightarrow \infty$), Консерватор имеет выигрышную стратегию в 3 раундах в игре на двух независимых случайных графах $G(n, p(n))$ и $G(m, p(m))$.

  В силу следствия 1 достаточно доказать, что у Консерватора есть выигрышная стратегия в трех раундах на любых двух графах G, H, обладающих свойствами $\mathsf{C}_s(T)$ при

$$T \in \{P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, T^*, K_{1,3}, K_{1,4}, \text{изолированная вершина}\}$$

  и $s = 3$, где T^* — дерево, изображенное на Рис. 2.

  Рассмотрим два графа G и H, обладающих перечисленными свойствами, и опишем выигрышную стратегию Консерватора в 3 раундах.

  Очевидно следующее.

  Предложение 1. *Если*

  1) вершины x_1, y_1, выбранные в первом раунде, содержатся в компонентах X_1, Y_1 соответственно таких, что $|X_1| \geq 2$ тогда и только тогда, когда $|Y_1| \geq 2$,

  2) Новатор выбирает во втором раунде вершину в компоненте связности, отличной от той, которой принадлежит вершина, выбранная в первом раунде,

  то для того, чтобы выиграть, Консерватору достаточно чтобы компонента, в которой он выберет вершину во втором раунде содержала хотя бы две вершины тогда и только тогда, когда хотя бы две вершины содержит компонента с вершиной, выбранной в том же раунде Новатором.

  Заметим также, что, если за первые два раунда Консерватор не проиграл, то в третьем раунде Новатору бессмысленно выбирать вершину в новой компоненте, в которой еще не выбрано ни одной вершины. В этой связи и в силу предложения 2 мы можем считать, что Новатор не меняет в ходе игры компонент связности.

  Предложение 2. *Если Новатор в первом раунде выбирает вершину в компоненте, в которой присутствует не более 3 вершин, то стратегия Консерватора очевидна — он просто выбирает изоморфную компоненту и далее копирует ходы Новатора.*

Итак, мы можем считать, что Новатор в первом раунде выбирает вершину в компоненте, в которой хотя бы 4 вершины, а во втором и третьем раунде не выбирает вершину в новой компоненте связности.

Пусть x_1 — вершина, выбранная Новатором в первом раунде. Пусть $D(x_1)$ — наибольшая длина простого пути в соответствующем графе, начинающемся с вершины x_1. Стратегия Консерватора будет зависеть от значения величины $D(x_1)$. Пусть, кроме того, $N(x_1)$ — количество соседей вершины x_1, $N_i(x_1)$ — колличество листов, расположенных на расстоянии i от вершины x_1, $N_{\geq i}(x_1)$ — колличество листов, расположенных на расстоянии хотя бы i от вершины x_1. В силу сказанного выше либо $D(x_1) = 1$ и $N(x_1) \geq 3$, либо $D(x_1) = 2$ и $N(x_1) \geq 2$, либо $D(x_1) \geq 3$.

Вершину, выбранную Консерватором в первом раунде, будем обозначать y_1.

1. Если $D(x_1) = 1$ и $N(x_1) \geq 3$, то Консерватор выберет неконцевую вершину, принадлежащую компоненте, изоморфной P_3. В следующих двух раундах Консерватор и Новатор выбирают соседей выбранной в первом раунде вершины, и тем самым в третьем раунде Консерватор побеждает.
2. Пусть $D(x_1) = 2$ и $N(x_1) \geq 2$, $N_1(x_1) > 0$, $N_2(x_1) > 0$. В данном случае Консерватор выбирает одну из центральных вершин компоненты, изоморфной P_4.

   Если во втором раунде Новатор выбирает вершину, смежную с x_1, которая при этом является концевой вершиной. Консерватор тогда выбирает вершину, смежную с y_1, которая также является концевой вершиной. В третьем раунде Консерватор победит, так как в обоих графах остались одинаковые наборы "расширений" двух выбранных вершин, а именно: вершина, смежная только с первой вершиной, вершины, не смежные ни с первой, ни со второй, и только они.

   Если Новатор во втором раунде выбирает вершину смежную с x_1, которая не является концевой, тогда и Консерватор выбирает не концевую вершину смежную с y_1. В третьем раунде Консерватор победит, так как в обоих графах остались одинаковые наборы "расширений" двух выбранных вершин, а именно: вершина, смежная только с первой, вершина, смежная со второй, и вершины, не смежные ни с первой, ни со второй, и только они.

   Если во втором раунде Новатор выбирает вершину, расположенную на расстоянии 2 от x_1, то и Консерватор выбирает вершину на расстоянии 2 от y_1. В третьем раунде Консерватор победит, так как в обоих графах остались одинаковые наборы "расширений" двух выбранных вершин, а именно: в обоих графах есть общий сосед выбранных вершин, сосед только первой из двух, а также вершины, не смежные ни с первой, ни со второй, и только они.
3. Если $D(x_1) = 2$ и $N(x_1) \geq 2$, $N_1(x_1) = 0$, $N_2(x_1) > 0$, то Консерватор выбирает центральную вершину компоненты, изомрфной P_5.

   Если во втором раунде Новатор выбирает смежную вершину с x_1, тогда и Консерватор выберает вершину, смежную с y_1. В третьем раунде Консерватор победит, так как в обоих графах остались одинаковые наборы "расширений" двух выбранных вершин, а именно: вершина, смежная только с первой, вершина, смежная только со второй, и вершины, не смежные ни с первой, ни со второй, и только они.

   Если же Новатор выбирает вершину, расположенную на расстоянии 2 от x_1, то и Консерватор выбирает вершину на расстоянии 2 от y_1. В третьем раунде Консерватор победит, так как в обоих графах остались одинаковые наборы "расширений" двух выбранных вершин, а именно: в обоих графах есть общий сосед выбранных вершин, сосед только первой из двух выбранных вершин, и вершины, не смежные ни с первой, ни со второй, и только они.

4. Если $D(x_1) \geq 3$ и $N(x_2) = 1$, то Консерватор выберет концевую вершину, принадлежащую P_4.

   Пусть во втором раунде Новатор выбирает вершину, смежную с x_1, тогда и Консерватор выбирает вершину, смежную с y_1. В третьем раунде Консерватор победит, так как в обоих графах остались одинаковые наборы "расширений" двух выбранных вершин, а именно: вершина, смежная со второй вершиной, и вершины, не смежные ни с первой, ни со второй, и только они.

   Если Новатор во втором раунде выбирает вершину на расстоянии 2 от выбранной ранее, тогда и Консерватор выбирает вершину на расстоянии 2 от y_1. В третьем раунде Консерватор победит, так как в обоих графах остались одинаковые наборы "расширений" двух выбранных вершин, а именно: вершина, смежная сразу с двумя выбранными ранее вершинами, вершина, смежная только со второй вершиной, и вершины, не смежные ни с первой, ни со второй, и только они.

   Если Новатор во втором раунде выбирает вершину на расстоянии не менее 3 от выбранной ранее вершины, то Консерватор выберет вершину на расстоянии 3 от y_1. В третьем раунде Консерватор победит, так как в обоих графах остались одинаковые наборы "расширений" двух выбранных вершин, а именно: вершина, смежная только с первой вершиной, вершина, смежная только со второй вершиной, и вершины, не смежные ни с первой, ни со второй, и только они.

5. Пусть $D(x_1) \geq 3$ и $N(x_1) \geq 2$, $N_1(x_1) > 0$, $N_2(x_1) > 0$, $N_{\geq 3}(x_1) > 0$. Консерватор выбирает неконцевую и нецентральную вершину P_5, к центральной вершине которого добавлено ребро наружу (см. Рис 2).

   Предположим, что во втором раунде Новатор выбирает вершину, смежную с x_1, не являющуюся листом. Тогда и Консерватор выбирет вершину, смежную с вершиной y_1, не являющуюся листом. В третьем раунде Консерватор победит, так как в обоих графах остались одинаковые наборы "расширений" двух выбранных вершин, а именно: вершины, смежная только с первой вершиной, вершины, смежные только со второй вершиной, и вершины, не смежные ни с первой, ни со второй, и только они.

   Предположим, что во втором раунде Новатор выбирает лист, смежный с x_1. Тогда и Консерватор выбирет лист, смежный с вершиной y_1. В третьем раунде Консерватор победит, так как в обоих графах остались одинаковые наборы "расширений" двух выбранных вершин, а именно: вершина, смежная только с первой вершиной, и вершины, не смежные ни с первой, ни со второй, и только они.

   Предположим, что во втором раунде Новатор выбирает вершину на расстоянии 2 от x_1, не являющуюся листом. Тогда Консерватор выбирет вершину на расстоянии 2 от вершины y_1, не являющуюся листом. В третьем раунде Консерватор победит, так как в обоих графах остались все возможные наборы "расширений" двух выбранных вершин, а именно: вершина смежная толко с первой вершиной, вершина смежная с первой и со второй вершинами, вершина смежная только со второй, и вершины, не смежные ни с первой, ни со второй.

   Предположим, что во втором раунде Новатор выбирает лист на расстоянии 2 от x_1. Тогда и Консерватор выбирет лист на расстоянии 2 от вершины y_1. В третьем раунде Консерватор победит, так как в обоих графах остались одинаковые наборы "расширений" двух выбранных вершин, а именно: вершина, смежная только с первой, вершина, смежная с первой и со второй вершинами, и вершины, не смежные ни с первой, ни со второй, и только они.

   Предположим, что во втором раунде Новатор выбирает вершину на расстоянии не менее 3 от x_1. Тогда Консерватор выбирет вершину на расстоянии 3 от y_1. В

третьем раунде Консерватор победит, так как в обоих графах остались одинаковые наборы “расширений” двух выбранных вершин, а именно: вершина, смежная только с перовой, вершина, смежная только со второй вершиной, и вершины, не смежные ни с первой, ни со второй, и только они.

6. Если $D(x_1) \geq 3$ и $N(x_1) \geq 2$, $N_1(x_1) = 0$, $N_2(x_1) > 0$, $N_{\geq 3}(x_1) > 0$, то Консерватор выбирает одну из двух центральных вершин P_6.

   Пусть во втором раунде Новатор выбирает вершину, смежную с x_1. Тогда и Консерватор выбирет смежную вершину с вершиной y_1. В третьем раунде Консерватор победит, так как в обоих графах остались одинаковые наборы “расширений” двух выбранных вершин, а именно: вершина, смежная только с первой вершиной, вершина, смежная только со второй вершиной, и вершины, не смежные ни с первой, ни со второй, и только они.

   Пусть во втором раунде Новатор выбирает лист на расстоянии 2 от x_1. Тогда и Консерватор выбирет лист на расстоянии 2 от y_1. В третьем раунде Консерватор победит, так как в обоих графах остались одинаковые наборы “расширений” двух выбранных вершин, а именно: вершинаЮ смежная только с первой, вершина, смежная с первой и со второй вершинами, и вершины, не смежные ни с первой, ни со второй, и только они.

   Пусть во втором раунде Новатор выбирает вершину на расстоянии 2 от x_1, не являющуюся листом. Тогда Консерватор также выбирает не лист на расстоянии 2 от y_1. В третьем раунде Консерватор победит, так как в обоих графах остались все возможные наборы “расширений” двух выбранных вершин, а именно: вершина, смежная только с первой, вершина, смежная только со второй, вершина смежная с первой и со второй вершинами, и вершины, не смежные ни с первой, ни со второй.

   Пусть во втором раунде Новатор выбирает вершину на расстоянии хотя бы 3 от x_1. Тогда Консерватор выбирет вершину на расстоянии 3 от y_1. В третьем раунде Консерватор победит, так как в обоих графах остались одинаковые наборы “расширений” двух выбранных вершин, а именно: вершина, смежная только с первой вершиной, вершина, смежная только со второй вершиной, и вершины, не смежные ни с первой, ни со второй, и только они.

7. Если $D(x_1) \geq 3$ и $N(x_1) \geq 2$, $N_1(x_1) > 0$, $N_2(x_1) = 0$, $N_{\geq 3}(x_1) > 0$, то Консерватор выбирает неконцевую и нецентральную вершину P_5.

   Если во втором раунде Новатор выбирает лист, смежный с x_1, то и Консерватор выбирет лист, смежный с y_1. В третьем раунде Консерватор победит, так как в обоих графах остались одинаковые наборы “расширений” двух выбранных вершин, а именно: вершина, смежная только с первой вершиной, и вершины, не смежные ни с первой, ни со второй, и только они.

   Если во втором раунде Новатор выбирает, смежную с x_1, не являющуюся листом, то и Консерватор выбирет также вершину, смежную с y_1, не явлляющуюся листом. В третьем раунде Консерватор победит, так как в обоих графах остались одинаковые наборы “расширений” двух выбранных вершин, а именно: вершина, смежная только с первой вершиной, вершина, смежная только со второй вершиной, и вершины, не смежные ни с первой, ни со второй, и только они.

   Если во втором раунде Новатор выбирает вершину на расстоянии 2 от x_1, то и Консерватор выбирет вершину на расстоянии 2 от y_1. В третьем раунде Консерватор победит, так как в обоих графах есть все возможные наборы “расширений” двух выбранных вершин, а именно: вершина, смежная только с первой, вершина, смежная как с первой, так и со второй вершиной, вершина смежная только со второй, и вершины, не смежные ни с первой, ни со второй.

Если во втором раунде Новатор выбирает вершину на расстоянии не менее 3 от x_1, то Консерватор выбирает вершину на расстоянии 3 от y_1. В третьем раунде Консерватор победит, так как в обоих графах остались одинаковые наборы "расширений" двух выбранных вершин, а именно: вершина, смежная только с первой, вершина, смежная только со второй, и вершины, не смежные ни с первой, ни со второй, и только они.

8. Если $D(x_1) \geq 3$ и $N(x_1) \geq 2$, $N_1(x_1) = 0$, $N_2(x_1) = 0$, $N_{\geq 3}(x_1) > 0$, то Консерватор выбирает центральную вершину P_7.

   Если во втором раунде Новатор выбирает вершину, смежную с x_1, то и Консерватор выбирет смежную вершину с вершиной y_1. В третьем раунде Консерватор победит, так как в обоих графах остались одинаковые наборы "расширений" двух выбранных вершин, а именно: вершина, смежная только с первой вершиной, вершина, смежная только со второй вершиной, и вершины, не смежные ни с первой, ни со второй, и только они.

   Пусть во втором раунде Новатор выбирает вершину на расстоянии 2 от вершины x_1. Тогда Консерватор также выбирает вершину на расстоянии 2 от y_1. В третьем раунде Консерватор победит, так как в обоих графах есть все возможные наборы "расширений" двух выбранных вершин, а именно: вершина, смежная только с первой вершиной, вершина, смежная как с первой, так и со второй вершиной, вершина, смежная только со второй вершиной, и вершины, не смежные ни с первой, ни со второй, и только они.

   Пусть во втором раунде Новатор выбирает вершину на расстоянии хотя бы 3 от вершины x_1. Тогда Консерватор выбирает вершину на расстоянии 3 от y_1. В третьем раунде Консерватор победит, так как в обоих графах остались одинаковые наборы "расширений" двух выбранных вершин, а именно: вершина, смежная только с первой вершиной, вершина, смежная только только со второй вершиной, и вершины, не смежные ни с первой, ни со второй, и только они.

Таким образом, Консерватор побеждает в трех раундах. Следовательно, закон нуля или единицы выполняется.

3.2. $k = 4$

Для $\ell \in [6]$ закон нуля или единицы уже опровергнут в предыдущем пункте. В этом разделе мы докажем, что для каждого $\ell \in \{7, 8, \ldots, 40, 72\}$ 4-закон нуля или единицы не выполняется, так как найдется такое дерево F на $\ell+1$ вершшине, что существование подграфа, изоморфного F (при условии, что наш граф — это лес), записывается с помощью формулы глубины 4.

Для более наглядной и короткой записи формулы, введем ряд вспомогательных обозначений:

1. Формула, записанная ниже, обозначает, что в графе (который является лесом) содержится путь на 5 вершинах, концевая вершина которого совпадает с x_1:

$$\begin{aligned} D_5(x_1) = \quad & \exists x_2\ \exists x_3 \Big((x_1 \neq x_2) \wedge (x_1 \neq x_3) \Big) \qquad \wedge \\ & \Big(\exists x_4\ (x_4 \nsim x_2) \wedge (x_1 \sim x_4) \wedge (x_4 \sim x_3) \Big) \qquad \wedge \\ & \Big(\exists x_4\ (x_3 \sim x_4) \wedge (x_4 \sim x_2) \Big). \end{aligned}$$

2. Формула, записывающая свойство содержать путь на 6 вершинах, выходящий из x_1, имеет следующюю запись:

$$\begin{aligned} D_6(x_1) = \quad & \exists x_2\ \exists x_3 \Big((x_1 \neq x_2) \wedge (x_1 \neq x_3) \Big) \quad \wedge \\ & \Big(\exists x_4\ (x_4 \nsim x_2) \wedge (x_1 \sim x_4) \wedge (x_4 \sim x_3) \Big) \quad \wedge \\ & \Big(\exists x_4\ (x_3 \sim x_4) \wedge (x_4 \sim x_2) \Big) \quad \wedge \\ & \Big(\exists x_3\ (\exists x_4 (x_3 \neq x_4) \wedge (x_3 \sim x_2) \wedge (x_4 \sim x_2) \Big). \end{aligned}$$

3. Записанная ниже формула обозначает, что найдется путь на 7 вершинах, исходящий из x_1, любой сосед пятой вершины которого имеет соседа отличного от него:

$$\begin{aligned} D_7(x_1) = \quad & \exists x_2\ \exists x_3 \Big((x_1 \neq x_2) \wedge (x_1 \neq x_3) \Big) \quad \wedge \\ & \Big(\exists x_4\ (x_4 \nsim x_2) \wedge (x_1 \sim x_4) \wedge (x_4 \sim x_3) \Big) \quad \wedge \\ & \Big(\exists x_4\ (x_3 \sim x_4) \wedge (x_4 \sim x_2) \Big) \quad \wedge \\ & \Big(\exists x_3\ (\exists x_4 (x_3 \neq x_4) \wedge (x_3 \sim x_2) \wedge (x_4 \sim x_2) \wedge (x_3 \nsim x_4) \Big) \quad \wedge \\ & \Big(\forall x_3\ (x_3 \sim x_2) \Rightarrow\ \exists x_4 (x_4 \neq x_2) \wedge (x_4 \sim x_3) \Big). \end{aligned}$$

4. Записанная ниже формула обозначает, что найдется путь на 8 вершинах, исходящий из x_1, такой что, у любого соседа пятой вершины есть сосед отличный от этой вершины и любая вершина на расстоянии 2 от пятой вершины имеет соседа не смежного с этой пятой вершиной:

$$\begin{aligned} D_8(x_1) = \quad & \exists x_2\ \exists x_3 \Big((x_1 \neq x_2) \wedge (x_1 \neq x_3) \Big) \quad \wedge \\ & \Big(\exists x_4\ (x_4 \nsim x_2) \wedge (x_1 \sim x_4) \wedge (x_4 \sim x_3) \Big) \quad \wedge \\ & \Big(\exists x_4\ (x_3 \sim x_4) \wedge (x_4 \sim x_2) \Big) \quad \wedge \\ & \Big(\forall x_3\ (x_3 \sim x_2) \Rightarrow (\exists x_4\ (x_4 \sim x_3) \wedge (x_4 \neq x_2)) \Big) \quad \wedge \\ & \Big(\forall x_3\ (\exists x_4\ (x_2 \sim x_4) \wedge (x_4 \sim x_3) \wedge (x_2 \neq x_3)) \Rightarrow \\ & \qquad (\exists x_4\ (x_4 \sim x_3) \wedge (x_4 \nsim x_2)) \Big). \end{aligned}$$

5. Рассмотрим формулу, записывающую свойство отсутствия листьев на расстоянии 1 от x_1:

$$L_1(x_1) = \Big[\forall x_2\ (x_1 \sim x_2) \Rightarrow (\exists x_3\ (x_1 \neq x_3) \wedge (x_2 \sim x_3) \Big].$$

6. С помощью L_2 будем обозначать формулу, записывающую свойство отсутствия листьев на расстоянии 2 от x_1:

$$L_2(x_1) = \Big[\forall x_2 \ \Big(\exists x_3 \ (x_1 \sim x_3) \wedge (x_3 \sim x_2)\Big) \quad \Rightarrow \quad \Big(\exists x_3 \ (x_2 \sim x_3) \wedge (x_3 \nsim x_1)\Big)\Big].$$

7. Рассмотрим формулу, записывающую свойство отсутствия листьев на расстоянии 3 от x_1:

$$L_3(x_1) = \Big[\forall x_2 \ (\exists x_3 \ \Big(\exists x_4 \ (x_1 \sim x_3) \wedge (x_3 \sim x_4) \quad \wedge \quad (x_3 \neq x_2) \wedge (x_1 \neq x_4) \wedge (x_4 \sim x_2)\Big) \quad \Rightarrow \quad \Big(\exists x_3 \ \exists x_4 \ (x_3 \neq x_4) \wedge (x_2 \sim x_4) \wedge (x_2 \sim x_3)\Big)\Big].$$

8. Рассмотрим формулу, записывающую свойство отсутствия листьев на расстоянии 4 от x_1:

$$L_4(x_1) = \Big[\forall x_2 \ \Big(\exists x_3 \ (\exists x_4 \ (x_1 \sim x_3) \wedge (x_3 \sim x_4) \quad \wedge \quad (x_3 \neq x_2) \wedge (x_1 \neq x_4) \wedge (x_4 \sim x_2))\Big) \quad \Rightarrow \quad \Big(\forall x_3 \ (x_3 \sim x_2) \Rightarrow \ \exists x_4 \ (x_4 \sim x_3) \wedge (x_4 \neq x_2)\Big)\Big].$$

9. Рассмотрим формулу, записывающую свойство отсутствия листьев на расстоянии 5 от x_1:

$$L_5(x_1) = \ \forall x_2 \ \Big[\exists x_3 \ \Big(\exists x_4 \ (x_1 \sim x_4) \wedge (x_3 \sim x_4)) \wedge (x_4 \nsim x_2)\Big) \quad \wedge \quad \Big(\exists x_4 \ (x_2 \sim x_4) \wedge (x_3 \sim x_4)\Big)\Big] \quad \Rightarrow \quad \Big[\forall x_3 \ [x_3 \sim x_2] \Rightarrow [\exists x_4 \ (x_3 \sim x_4) \wedge (x_4 \neq x_2)\Big].$$

10. Рассмотрим формулу, из которой следует отсутствие листьев на расстоянии 6 от x_1:

$$L_6(x_1) = \ \forall x_2 \ \Big[\exists x_3 \ \Big(\exists x_4 \ (x_1 \sim x_4) \wedge (x_3 \sim x_4)) \wedge (x_4 \nsim x_2) \quad \wedge \quad \Big(\exists x_4 \ (x_2 \sim x_4) \wedge (x_3 \sim x_4)\Big)\Big] \quad \Rightarrow \quad \Big[\forall x_3 \ \Big(\Big(\exists x_4 \ (x_3 \sim x_4) \wedge (x_4 \sim x_2)\Big) \wedge \Big(x_2 \neq x_3\Big)\Big) \quad \Rightarrow \quad \Big(\exists x_4 \ (x_3 \sim x_4) \wedge (x_4 \nsim x_2)\Big)\Big].$$

Рассмотренная формула означает, что для любой вершины x_2 на расстоянии 4 от x_1 и у любой вершины на расстоянии 2 от x_2 есть еще один сосед (отличный от общего соседа этой вершины с x_2), а следовательно, отсутствуют листья на расстоянии 6 от x_1. Конъюнкция L_6 и L_4 равносильна отсутствию листьев на расстояниях 4 или 6.

11. Рассмотрим, наконец, формулу, утверждающую наличие хотя бы 3 соседей у x_1:

$$N_3(x_1,x_2,x_3) = \Big[\exists x_2\ \exists x_3\ \exists x_4\ (x_2 \neq x_3) \wedge (x_3 \neq x_4) \wedge (x_2 \neq x_4) \quad \wedge \\ (x_1 \sim x_2) \wedge (x_1 \sim x_3) \wedge (x_1 \sim x_4)\Big]$$

Теперь перейдем непосредственно к записи искомых формул.

- Пусть $\ell = 7$, т.е. $p = n^{-8/7}$. Докажем, что вероятность истинности формулы $\exists x_1\, D_8(x_1)$ на случайном графе стремится к некоторому пределу $c \in (0,1)$.

  По утверждению пункта 4 следствия 1

  $$\mathbb{P}(G(n,p) \supset P_8) \longrightarrow c \in (0,1).$$

  Кроме того, пусть Q — это свойство, которое заключатся в том, что граф ялвяется лесом, в котором отсутствуют деревья на 9 вершинах. По утверждению пункта 1 следствия 1

  $$\mathbb{P}(G(n,p) \in Q) \longrightarrow 1.$$

  Следовательно, разложив

  $$\mathbb{P}(G(n,p) \models \varphi) = \mathbb{P}(G(n,p) \models \varphi,\, G(n,p) \in Q) \\ + \mathbb{P}(G(n,p) \models \varphi,\, G(n,p) \notin Q),$$

  получим

  $$\begin{aligned}\mathbb{P}(G(n,p) \models \varphi) &= \mathbb{P}(G(n,p) \models \varphi, G(n,p) \in Q) + o(1) \\ &= \mathbb{P}(G(n,p) \supset P_8, G(n,p) \in Q) + o(1) \\ &= \mathbb{P}(G(n,p) \supset P_8) \\ &\qquad - \mathbb{P}(G(n,p) \supset P_8, G(n,p) \notin Q) + o(1) \\ &= \mathbb{P}(G(n,p) \supset P_8) + o(1) \quad \longrightarrow c.\end{aligned}$$

- Пусть $\ell = 8$, т.е. $p = n^{-9/8}$. Тогда формула

  $$\exists x_1 \quad N_3(x_1) \wedge D_5(x_1) \wedge L_1(x_1)$$

  записывает (для леса) свойство, существования подграфа, изоморфного дереву, образованного тремя путями P_3, P_3, P_5 с общим концом. Докажем, что вероятность истинности данной формулы для леса на случайном графе стремится к некоторой $c \in (0,1)$.

  Обозначим G_8 рассматриваемый подгаф, образованный путями P_3, P_3, P_5 с общим концом. По утверждению пункта 4 следствия 1

  $$\mathbb{P}(G(n,p) \supset G_8) \longrightarrow c \in (0,1).$$

  Кроме того, пусть Q — это свойство, которое заключатся в том, что граф ялвяется лесом. По утверждению пункта 1 следствия 1

  $$\mathbb{P}(G(n,p) \in Q) \longrightarrow 1.$$

Следовательно, разложив

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(G(n,p) \models \varphi) = \mathbb{P}(G(n,p) &\models \varphi,\, G(n,p) \in Q)\\ &+ \mathbb{P}(G(n,p) \models \varphi,\, G(n,p) \notin Q),\end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(G(n,p) \models \varphi) &= \mathbb{P}(G(n,p) \models \varphi, G(n,p) \in Q) + o(1)\\ &= \mathbb{P}(G(n,p) \supset G_8, G(n,p) \in Q) + o(1)\\ &= \mathbb{P}(G(n,p) \supset G_8)\\ &\qquad - \mathbb{P}G(n,p) \supset G_8, G(n,p) \notin Q) + o(1)\\ &= \mathbb{P}(G(n,p) \supset G_8) + o(1) \quad \to c.\end{aligned}$$

- Пусть $\ell = 9$, т.е. $p = n^{-10/9}$. Тогда формула

$$\exists x_1 \quad N_3(x_1) \wedge L_1(x_1) \wedge L_2(x_1)$$

записывает (для леса) свойство существование подграфа, изоморфного дереву, образованного тремя путями P_4 с общим концом. Вероятность истинности данной формулы на случайном графе стремится к некоторой константе $c \in (0,1)$, что доказывается по аналогии со случаем $\ell = 8$.

Во всех дальнейших пунктах мы будем пользоваться схемой доказательства, аналогичной предыдущим пунктам. Поэтому мы в каждом случае приведем формулу и опишем свойство, которое она записывает, но опустим вывод того, что предел вероятности отличен от 0 и 1, из следствия 1.

- Пусть $\ell = 10$, т.е. $p = n^{-11/10}$. Тогда подходящая нам формула

$$\exists x_1 \quad N_3(x_1) \wedge D_5(x_1) \wedge L_1(x_1) \wedge L_2(x_1)$$

записывает (для леса) свойство существование подграфа, изоморфного дереву, образованного тремя путями P_4, P_4, P_5 с общим концом.

- Пусть $\ell = 11$, т.е. $p = n^{-12/11}$. Тогда подходящая нам формула

$$\exists x_1 \quad N_3(x_1) \wedge D_6(x_1) \wedge L_1(x_1) \wedge L_2(x_1)$$

записывает (для леса) свойство существование подграфа, изоморфного дереву, образованного тремя путями P_4, P_4, P_6 с общим концом.

- Пусть $\ell = 12$, т.е. $p = n^{-13/12}$. Тогда подходящая нам формула

$$\exists x_1 \quad N_3(x_1) \wedge \left(\bigwedge_{i=1}^{3} L_i(x_1) \right)$$

записывает (для леса) свойство существование подграфа, изоморфного дереву, образованного тремя путями P_5 с общим концом.

- Пусть $\ell = 13$, т.е. $p = n^{-14/13}$. Тогда подходящая нам формула

$$\exists x_1 \quad N_3(x_1) \wedge D_6(x_1) \wedge \left(\bigwedge_{i=1}^{3} L_i(x_1) \right)$$

записывает (для леса) свойство существование подграфа, изоморфного дереву, образованного тремя путями P_5, P_5, P_6 с общим концом.

- Пусть $\ell = 14$, т.е. $p = n^{-15/14}$. Тогда подходящая нам формула

$$\exists x_1 \quad N_3(x_1) \wedge D_7(x_1) \wedge \left(\bigwedge_{i=1}^{3} L_i(x_1) \right)$$

записывает (для леса, все деревья которого имеют не более 15 вершин) свойство существование подграфа, изоморфного дереву, образованного тремя путями P_5, P_5, P_7 с общим концом.

- Пусть $\ell = 15$, т.е. $p = n^{-16/15}$. Тогда подходящая нам формула

$$\exists x_1 \quad N_3(x_1) \wedge \left(\bigwedge_{i=1}^{4} L_i(x_1) \right)$$

записывает (для леса) свойство существование подграфа, изоморфного дереву, образованного тремя путями P_6 с общим концом.

- Пусть $\ell = 16$, т.е. $p = n^{-17/16}$. Тогда подходящая нам формула

$$\exists x_1 \quad N_3(x_1) \wedge D_7(x_1) \wedge \left(\bigwedge_{i=1}^{4} L_i(x_1) \right)$$

записывает (для леса, все деревья которого имеют не более 17 вершин) свойство существование подграфа, изоморфного дереву, образованного тремя путями P_6, P_6, P_7 с общим концом.

- Пусть $\ell = 17$, т.е. $p = n^{-18/17}$. Тогда подходящая нам формула

$$\exists x_1 \quad N_3(x_1) \wedge D_8(x_1) \wedge \left(\bigwedge_{i=1}^{4} L_i(x_1) \right)$$

записывает (для леса, все деревья которого имеют не более 18 вершин) свойство существование подграфа, изоморфного дереву, образованного тремя путями P_6, P_6, P_8.

- Пусть $\ell = 18$, т.е. $p = n^{-19/18}$. Тогда подходящая нам формула

$$\exists x_1 \quad N_3(x_1) \wedge \left(\bigwedge_{i=1}^{5} L_i(x_1) \right)$$

записывает (для леса) свойство существование подграфа, изоморфного дереву, образованного тремя путями P_7 с общим концом.

- Пусть $\ell = 19$, т.е. $p = n^{-20/19}$. Тогда подходящая нам формула

$$\exists x_1 \quad N_3(x_1) \wedge D_8(x_1) \wedge \left(\bigwedge_{i=1}^{5} L_i(x_1) \right)$$

записывает (для леса, все деревья которого имеют не более 20 вершин) свойство существование подграфа, изоморфного дереву, образованному тремя путями P_7, P_7, P_8.

- Пусть $\ell = 20$, т.е. $p = n^{-21/20}$. Тогда подходящая нам формула

$$\begin{aligned}\exists x_1 \quad & N_3(x_1) \wedge D_8(x_1) \wedge \left(\bigwedge_{i=3}^{5} L_i(x_1)\right) \wedge \\ & (\forall x_2\ [x_2 \sim x_1] \Rightarrow \\ & \qquad [\exists x_3 \exists x_4\ (x_2 \sim x_3) \wedge (x_3 \sim x_4) \wedge (x_1 \neq x_3) \wedge (x_2 \neq x_4)]) \wedge \\ & (\exists x_3\ [\exists x_2\ (x_1 \sim x_2) \wedge (x_2 \sim x_3) \wedge (x_1 \neq x_3)] \wedge \\ & \qquad [\neg[\exists x_4\ (x_1 \nsim x_4) \wedge (x_3 \sim x_4)]]).\end{aligned}$$

записывает (для леса, все деревья которого имеют не более 21 вершины) свойство существование подграфа, изоморфного дереву, образованного одним P_8 и двумя P_7 с общим концом, при этом к одному из трех путей прикреплен лист, находящийся на расстоянии 2 от их общего конца.

- Пусть $\ell = 21$, т.е. $p = n^{-22/21}$. Тогда подходящая нам формула

$$\exists x_1 \quad N_3(x_1) \wedge \left(\bigwedge_{i=1}^{6} L_i(x_1)\right)$$

записывает (для леса) свойство существование подграфа, изоморфного дереву, образованному тремя путями P_8 с общим концом.

- Пусть $\ell = 22$, т.е. $p = n^{-23/22}$. Тогда подходящая нам формула

$$\begin{aligned}\exists x_1 \quad & N_3(x_1) \wedge \left(\bigwedge_{i=3}^{6} L_i(x_1)\right) \wedge \\ & (\forall x_2\ [x_2 \sim x_1] \Rightarrow \\ & \qquad [\exists x_3 \exists x_4\ (x_2 \sim x_3) \wedge (x_3 \sim x_4) \wedge (x_1 \neq x_3) \wedge (x_2 \neq x_4)] \wedge \\ & (\exists x_3\ [\exists x_2\ (x_1 \sim x_2) \wedge (x_2 \sim x_3) \wedge (x_1 \neq x_3)] \wedge \\ & \qquad [\neg[\exists x_4\ (x_1 \nsim x_4) \wedge (x_3 \sim x_4)]])\end{aligned}$$

записывает (для леса, все деревья которого имеют не более 23 вершин) свойство существование подграфа, изоморфного дереву, образованному тремя путями P_8, к одному из которых прикреплен лист, находящийся на расстоянии 2 от общего конца.

- Пусть $\ell = 23$, т.е. $p = n^{-24/23}$. Тогда подходящая нам формула

$$\begin{aligned}\exists x_1 \quad & N_3(x_1) \wedge \left(\bigwedge_{i=3}^{6} L_i(x_1)\right) \wedge \\ & (\forall x_2\ [x_2 \sim x_1] \Rightarrow \\ & \qquad [\exists x_3\ \exists x_4\ (x_2 \sim x_3) \wedge (x_3 \sim x_4) \wedge (x_1 \neq x_3) \wedge (x_2 \neq x_4)]) \wedge \\ & (\exists x_3'\ \exists x_3\ [\exists x_2\ (x_1 \sim x_2) \wedge (x_2 \sim x_3) \wedge (x_3 \neq x_1)] \wedge \\ & \qquad [\neg\,[\exists x_4\ (x_1 \nsim x_4) \wedge (x_3 \sim x_4)]] \wedge \\ & \qquad [\exists x_2\ (x_1 \sim x_2) \wedge (x_2 \sim x_3') \wedge (x_3' \neq x_1) \wedge (x_3 \neq x_3')] \wedge \\ & \qquad [\neg\,[\exists x_4\ (x_1 \nsim x_4) \wedge (x_3' \sim x_4)]])\end{aligned}$$

записывает (для леса, все деревья которого имеют не более 24 вершин) свойство существование подграфа, изоморфного дереву, образованному тремя путями P_8 и двумя листьями, соединенными ребрами с вершинами, находящимися на расстоянии 1 от x_1 (см. Рис. 3).

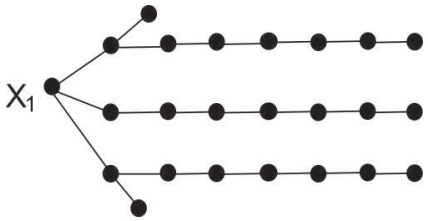


Рис. 3: Дерево на 24 вершинах

- Пусть $\ell = 24$, т.е. $p = n^{-25/24}$. Тогда подходящая нам формула

$$\begin{aligned}
\exists x_1 \quad & N_3(x_1) \wedge \left(\bigwedge_{i=4}^{6} L_i(x_1) \right) \wedge \\
& (\forall x_2\ [x_2 \sim x_1] \Rightarrow \\
& \qquad (\exists x_3\ [\exists x_4\ (x_2 \sim x_4) \wedge (x_4 \sim x_3) \wedge (x_4 \neq x_1)] \wedge \\
& \qquad\quad [\exists x_4\ (x_3 \sim x_4) \wedge (x_4 \nsim x_2)])) \wedge \\
& (\exists x_2\ [x_2 \sim x_1] \wedge \\
& \qquad (\exists x_3\ [(x_3 \sim x_2) \wedge (x_3 \neq x_1)] \wedge \\
& \qquad\quad \neg\, [\exists x_4\ (x_4 \sim x_3) \wedge (x_4 \nsim x_1)]) \wedge \\
& \qquad (\exists x_3\ [\exists x_4\ (x_4 \sim x_3) \wedge (x_4 \sim x_2) \wedge (x_4 \neq x_1)] \wedge \\
& \qquad\quad \neg\, [\exists x_4\ (x_4 \sim x_3) \wedge (x_4 \nsim x_2)]))
\end{aligned}$$

записывает (для леса, все деревья которого имеют не более 25 вершин) свойство существование подграфа, изоморфного дереву, образованному тремя путями P_8, исходящими из одной и той же вершины x_1 и двумя листьями, находящимися на расстояниях 1 и 2 от одной и той же вершины одного из P_8, смежный с x_1 (см. Рис. 4).

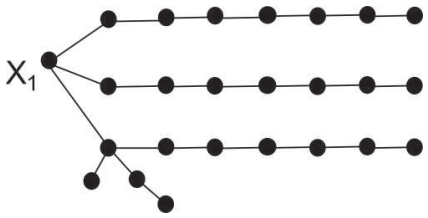


Рис. 4: Дерево на 25 вершинах

- Пусть $\ell = 25$, т.е. $p = n^{-26/25}$. Тогда подходящая нам формула

$$\begin{aligned}
\exists x_1 \quad & N_3(x_1) \wedge \left(\bigwedge_{i=4}^{6} L_i(x_1) \right) \wedge \\
& (\forall x_2\ [x_2 \sim x_1] \Rightarrow \\
& \qquad [\exists x_3\ [\exists x_4\ (x_2 \sim x_4) \wedge (x_4 \sim x_3) \wedge (x_4 \neq x_1)] \wedge \\
& \qquad\quad [\exists x_4\ (x_3 \sim x_4) \wedge (x_4 \nsim x_2)]]) \wedge \\
& (\forall x_2\ [x_2 \sim x_1] \Rightarrow \\
& \qquad [\exists x_3\ \exists x_3'\ (x_2 \sim x_3) \wedge (x_2 \sim x_3') \wedge (x_3 \neq x_3') \wedge \\
& \qquad\quad (x_1 \neq x_3) \wedge (x_1 \neq x_3')]) \wedge \\
& (\exists x_2\ [x_2 \sim x_1] \wedge \\
& \qquad [\exists x_3\ [\exists x_4\ (x_4 \sim x_3) \wedge (x_4 \sim x_2) \wedge (x_2 \neq x_3) \wedge (x_1 \neq x_4)] \wedge \\
& \qquad\quad \neg\, [\exists x_4\ (x_4 \sim x_3) \wedge (x_4 \nsim x_2)]])
\end{aligned}$$

записывает (для леса, все деревья которого имеют не более 26 вершин) свойство существование подграфа, изоморфного дереву, образованному тремя путями P_8, исходящими из одной и той же вершины x_1 и тремя листьями. Из них два листа находятся на расстоянии 1, а третий лист на расстоянии 2 от вершин смежных с x_1 (см. Рис. 5).

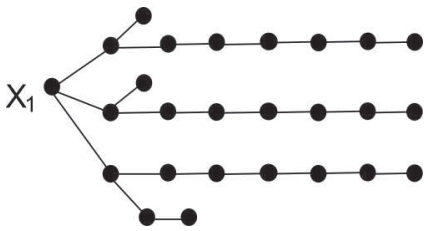


Рис. 5: Дерево на 26 вершинах

- Пусть $\ell = 26$, т.е. $p = n^{-27/26}$. Тогда подходящая нам формула

$$\begin{aligned}
\exists x_1 \quad & N_3(x_1) \wedge \\
& (\forall x_2\ [x_2 \sim x_1] \Rightarrow \\
& \qquad [\exists x_3\ \exists x_3'\ [(x_3 \neq x_3') \wedge (x_3 \sim x_2) \wedge \\
& \qquad\quad (x_3' \sim x_2) \wedge (x_3 \neq x_1) \wedge (x_3' \neq x_1)]]) \wedge \\
& (\forall x_2\ (\exists x_3\ [(x_3 \sim x_2) \wedge (x_3 \sim x_1) \wedge (x_2 \neq x_1)]) \Rightarrow \\
& \qquad (\exists x_3\ \exists x_3'\ [(x_3 \neq x_3') \wedge (x_3 \sim x_2) \wedge (x_3' \sim x_2) \wedge \\
& \qquad\quad (x_3 \nsim x_1) \wedge (x_3' \nsim x_1)])) \wedge \\
& (\exists x_2\ [x_2 \sim x_1] \wedge \\
& \qquad (\forall x_3\ (\exists x_4\ [(x_4 \sim x_3) \wedge (x_4 \sim x_2) \wedge (x_3 \neq x_2)]) \Rightarrow \\
& \qquad\quad (\exists x_4\ [(x_4 \sim x_3) \wedge (x_4 \nsim x_2)])) \wedge \\
& \qquad (\exists x_3\ [\exists x_4\ (x_4 \sim x_3) \wedge (x_4 \sim x_2) \wedge (x_3 \neq x_2) \wedge (x_4 \neq x_1)] \wedge \\
& \qquad\quad \neg\, [\exists x_4\ (x_4 \sim x_3) \wedge (x_4 \nsim x_2)]))
\end{aligned}$$

записывает (для леса, все деревья которого имеют не более 27 вершин) свойство существование подграфа, изоморфного бинарному дереву с глубиной 3 и корнем степени 3, к четырем листьям $v_1, \ldots, v_4$ которого, имеющих общего предка на расстоянии 2 от них, подвешено по одному листу, а также еще один лист подвешен к одному из родителей $v_1, \ldots, v_4$. (см. Рис. 6).

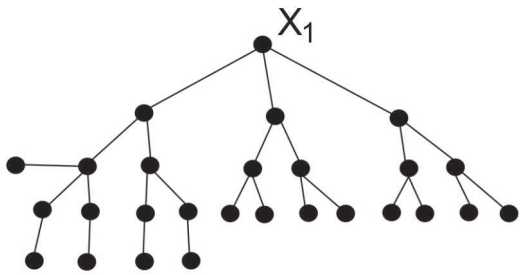


Рис. 6: Дерево на 27 вершинах

- Пусть $\ell = 27$, т.е. $p = n^{-28/27}$. Тогда подходящая нам формула

$$\begin{aligned}\exists x_1 \quad & N_3(x_1) \wedge \left(\bigwedge_{i=2,4}^{6} L_i(x_1) \right) \wedge \\ & (\forall x_2\ [x_2 \sim x_1] \Rightarrow \\ & \qquad (\exists x_3\ [\exists x_4\ (x_2 \sim x_4) \wedge (x_4 \sim x_3) \wedge (x_4 \neq x_1)] \wedge \\ & \qquad\qquad [\exists x_4\ (x_3 \sim x_4) \wedge (x_4 \nsim x_2)])) \wedge \\ & (\forall x_2\ [x_2 \sim x_1] \Rightarrow \\ & \qquad [\exists x_3\ \exists x_3'\ (x_2 \sim x_3) \wedge (x_2 \sim x_3') \wedge (x_3 \neq x_3') \wedge \\ & \qquad\qquad (x_1 \neq x_3) \wedge (x_1 \neq x_3')])\end{aligned}$$

записывает (для леса, все деревья которого имеют не более 28 вершин) свойство существование подграфа, изоморфного дереву, образованному тремя путями P_8, исходящими из одной и той же вершины x_1 и тремя листьями находящихся на расстоянии 2 от вершин P_8, смежных с x_1. (см. Рис. 7).

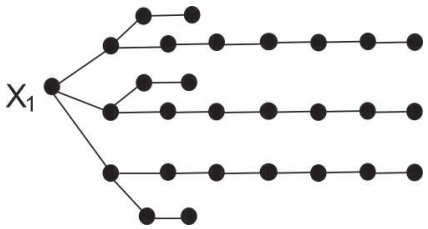


Рис. 7: Дерево на 28 вершинах

- Пусть $\ell = 28$, т.е. $p = n^{-29/28}$. Тогда подходящая нам формула

$$\begin{aligned}
\exists x_1 \quad & N_3(x_1) \wedge \left(\bigwedge_{i=4}^{6} L_i(x_1) \right) \wedge \\
& (\forall x_2\ [x_2 \sim x_1] \Rightarrow \\
& \qquad (\exists x_3\ [\exists x_4\ (x_2 \sim x_4) \wedge (x_4 \sim x_3) \wedge (x_4 \neq x_1)] \wedge \\
& \qquad\quad [\exists x_4\ (x_3 \sim x_4) \wedge (x_4 \nsim x_2)])) \wedge \\
& (\exists x_2\ (x_2 \sim x_1)\ \wedge \\
& \qquad [\exists x_3\ (x_3 \sim x_2) \wedge (x_3 \neq x_1) \wedge \\
& \qquad\quad \neg\,(\exists x_4\ (x_4 \sim x_3) \wedge (x_4 \nsim x_2))]) \wedge \\
& (\exists x_2\ (x_1 \sim x_2) \wedge [\exists x_3' \exists x_3\ (x_3 \sim x_2) \wedge (x_3' \sim x_2) \wedge (x_3 \neq x_1) \wedge \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad (x_3' \neq x_1) \wedge (x_3 \neq x_3')] \wedge \\
& \qquad [\forall x_3\ (\exists x_4\,(x_4 \sim x_2) \wedge (x_4 \sim x_3) \wedge (x_2 \neq x_3)) \Rightarrow \\
& \qquad\quad (\exists x_4\,(x_4 \sim x_3) \wedge (x_4 \neq x_2)))] \wedge \\
& \qquad [\forall x_3\ (x_3 \sim x_2) \Rightarrow \\
& \qquad\quad (\exists x_4\,(x_4 \sim x_3) \wedge (x_4 \neq x_2))])
\end{aligned}$$

записывает (для леса, все деревья которого имеют не более 29 вершин) свойство существование подграфа, изоморфного дереву, образованному тремя путями P_8, исходящими из одной и той же вершины x_1 и двумя листьями. Один из этих листьев находится на расстоянии 2, а второй лист — на расстоянии 6 от вершин этих P_8, смежных с x_1 (см. Рис. 8).

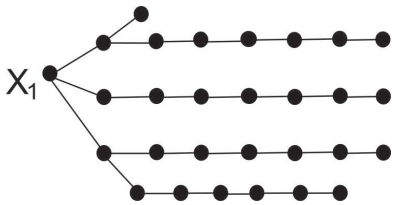


Рис. 8: Дерево на 29 вершинах

- Пусть $\ell = 29$, т.е. $p = n^{-30/29}$. Тогда подходящая нам формула

$$\begin{aligned}
\exists x_1 \quad & N_3(x_1) \wedge \left(\bigwedge_{i=4}^{6} L_i(x_1) \right) \wedge \\
& (\forall x_2\ [x_2 \sim x_1] \Rightarrow \\
& \qquad (\exists x_3\ [\exists x_4\ (x_2 \sim x_4) \wedge (x_4 \sim x_3) \wedge (x_4 \neq x_1)] \wedge \\
& \qquad\quad [\exists x_4\ (x_3 \sim x_4) \wedge (x_4 \nsim x_2)])) \wedge \\
& (\exists x_2\ (x_2 \sim x_1)\ \wedge \\
& \qquad [\exists x_3'\ \exists x_3\, (x_3 \sim x_2) \wedge (x_3 \sim x_3') \wedge \\
& \qquad\quad (x_3 \neq x_1) \wedge (x_2 \neq x_3')] \wedge \\
& \qquad\quad \neg\, [\exists x_4\ (x_4 \sim x_3') \wedge (x_4 \neq x_2)]) \wedge \\
& (\exists x_2\ (x_1 \sim x_2) \wedge [\exists x_3'\, \exists x_3\ (x_3 \sim x_2) \wedge (x_3' \sim x_2) \wedge (x_3 \neq x_1) \wedge \\
& \qquad\quad (x_3' \neq x_1) \wedge (x_3 \neq x_3')] \wedge \\
& \qquad [\forall x_3\ (\exists x_4\, (x_4 \sim x_2) \wedge (x_4 \sim x_3) \wedge (x_2 \neq x_3)) \Rightarrow \\
& \qquad\quad (\exists x_4\, (x_4 \sim x_3) \wedge (x_4 \neq x_2)))] \wedge \\
& \qquad [\forall x_3\ (x_3 \sim x_2) \Rightarrow \\
& \qquad\quad (\exists x_4\, (x_4 \sim x_3) \wedge (x_4 \neq x_2))])
\end{aligned}$$

записывает (для леса, все деревья которого имеют не более 30 вершин) свойство существование подграфа, изоморфного дереву, образованному тремя путями P_8, исходящими из одной и той же вершины x_1 и двумя листьями. Один из этих листьев находится на расстоянии 3, а второй лист — на расстоянии 6 от вершин этих P_8, смежных с x_1 (см. Рис. 9).

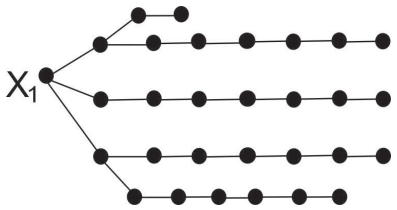


Рис. 9: Дерево на 30 вершинах

- Пусть $\ell = 30$, т.е. $p = n^{-31/30}$. Тогда подходящая нам формула

$$\begin{aligned}
\exists x_1 \quad & N_3(x_1) \wedge \left(\bigwedge_{i=4}^{6} L_i(x_1) \right) \wedge \\
& (\forall x_2\ [x_2 \sim x_1] \Rightarrow \\
& \qquad (\exists x_3\ [\exists x_4\ (x_2 \sim x_4) \wedge (x_4 \sim x_3) \wedge (x_4 \neq x_1)] \wedge \\
& \qquad\quad [\exists x_4\ (x_3 \sim x_4) \wedge (x_4 \nsim x_2)])) \wedge \\
& (\exists x_2\ [x_2 \sim x_1] \wedge \\
& \qquad (\exists x_3\ [(x_3 \sim x_2) \wedge (x_3 \neq x_1)] \wedge \\
& \qquad\quad \neg\, [\exists x_4\ (x_4 \sim x_3) \wedge (x_4 \nsim x_1)]) \wedge \\
& \qquad (\exists x_3\ [\exists x_4\ (x_4 \sim x_3) \wedge (x_4 \sim x_2) \wedge (x_4 \neq x_1)] \wedge \\
& \qquad\quad \neg\, [\exists x_4\ (x_4 \sim x_3) \wedge (x_4 \neq x_2)])) \\
& (\exists x_2\ [x_2 \sim x_1] \wedge \\
& \qquad [\exists x_3\, \exists x_3'\ (x_3 \sim x_2) \wedge (x_3' \sim x_2) \wedge \\
& \qquad\qquad (x_3 \neq x_1) \wedge (x_3' \neq x_1) \wedge (x_3 \neq x_3')] \wedge \\
& \qquad [\forall x_3\ (\exists x_4\, (x_4 \sim x_2) \wedge (x_4 \sim x_3) \wedge (x_2 \neq x_3)) \Rightarrow \\
& \qquad\quad (\exists x_4\, (x_4 \sim x_3) \wedge (x_4 \neq x_2)))] \wedge \\
& \qquad [\forall x_3\ (x_3 \sim x_2) \Rightarrow \\
& \qquad\quad (\exists x_4\, (x_4 \sim x_3) \wedge (x_4 \neq x_2))])
\end{aligned}$$

записывает (для леса, все деревья которого имеют не более 31 вершин) свойство существование подграфа, изоморфного дереву, образованному тремя путями P_8, исходящими из одной и той же вершины x_1 и тремя листьями. Два листа находятся на расстояниях 1 и 2 от одной и той же вершины, смежной с x_1, а третий лист — на расстоятии 6 от некоторой другой вершины, смежной с x_1 (см. Рис. 10).

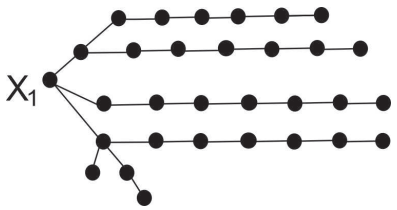


Рис. 10: Дерево на 31 вершине

- Пусть $\ell = 31$, т.е. $p = n^{-32/31}$. Тогда подходящая нам формула

$$\begin{aligned}\exists x_1 \quad & N_3(x_1) \wedge \left(\bigwedge_{i=2,4}^{6} L_i(x_1) \right) \wedge \\ & (\forall x_2\ [x_2 \sim x_1] \Rightarrow \\ & \quad (\exists x_3\ [\exists x_4\ (x_2 \sim x_4) \wedge (x_4 \sim x_3) \wedge (x_4 \neq x_1)] \wedge \\ & \quad\quad [\exists x_4\ (x_3 \sim x_4) \wedge (x_4 \nsim x_2)])) \wedge \\ & (\forall x_2\ [x_2 \sim x_1] \Rightarrow \\ & \quad [\exists x_3\ \exists x_3'\ (x_2 \sim x_3) \wedge (x_2 \sim x_3') \wedge (x_3 \neq x_3') \wedge \\ & \quad\quad (x_1 \neq x_3) \wedge (x_1 \neq x_3')]) \\ & (\exists x_2\ [x_2 \sim x_1] \wedge \\ & \quad [\forall x_3\ (\exists x_4\, (x_4 \sim x_2) \wedge (x_4 \sim x_3) \wedge (x_2 \neq x_3)) \Rightarrow \\ & \quad\quad (\exists x_4\, (x_4 \sim x_3) \wedge (x_4 \neq x_2)))])\end{aligned}$$

записывает (для леса, все деревья которого имеют не более 32 вершин) свойство существование подграфа, изоморфного дереву, образованному тремя путями P_8, исходящими из одной и той же вершины x_1 и тремя листьями. Два листа находятся на расстоянии 2, а третий лист — на расстоятии 6 от вершин, смежных с x_1 (см. Рис. 11).

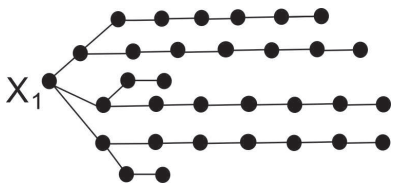


Рис. 11: Дерево на 32 вершинах

- Пусть $\ell = 32$, т.е. $p = n^{-33/32}$. Тогда подходящая нам формула

$$\begin{aligned}\exists x_1 \quad & N_3(x_1) \wedge \left(\bigwedge_{i=2,4}^{6} L_i(x_1) \right) \wedge \\ & (\forall x_2\ [x_2 \sim x_1] \Rightarrow \\ & \quad (\exists x_3\ [\exists x_4\ (x_2 \sim x_4) \wedge (x_4 \sim x_3) \wedge (x_4 \neq x_1)] \wedge \\ & \quad\quad [\exists x_4\ (x_3 \sim x_4) \wedge (x_4 \nsim x_2)])) \wedge \\ & (\forall x_2\ [x_2 \sim x_1] \Rightarrow \\ & \quad [\exists x_3\ \exists x_3'\ (x_2 \sim x_3) \wedge (x_2 \sim x_3') \wedge (x_3 \neq x_3') \wedge \\ & \quad\quad (x_1 \neq x_3) \wedge (x_1 \neq x_3')]) \\ & (\exists x_4\ [\exists x_2\ \exists x_3\ (x_1 \sim x_2) \wedge (x_2 \sim x_3) \wedge (x_3 \sim x_4) \wedge \\ & \quad\quad (x_1 \neq x_3) \wedge (x_2 \neq x_4)] \wedge \\ & \quad [\forall x_3\ (x_3 \sim x_4) \Rightarrow \exists x_2\ (x_2 \sim x_1) \wedge (x_2 \sim x_3)] \wedge \\ & \quad [\exists x_2\ (\exists x_3\ (x_3 \sim x_2) \wedge (x_3 \sim x_4) \wedge (x_1 \nsim x_2))]) \wedge \\ & (\exists x_2\ [x_2 \sim x_1] \wedge \\ & \quad [\forall x_3\ (\exists x_4\, (x_4 \sim x_2) \wedge (x_4 \sim x_3) \wedge (x_2 \neq x_3)) \Rightarrow \\ & \quad\quad (\exists x_4\, (x_4 \sim x_3) \wedge (x_4 \nsim x_2)))])\end{aligned}$$

записывает (для леса, все деревья которого имеют не более 33 вершин) свойство существования подграфа, изоморфного дереву, образованному тремя путями P_8, исходящими из одной и той же вершины x_1 и четырьмя дополнительными "ветвями" (см. Рис. 12).

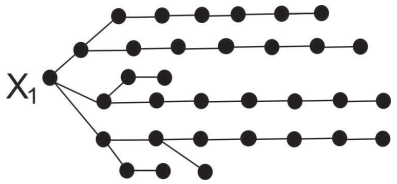


Рис. 12: Дерево на 33 вершинах

- Пусть $\ell = 33$, т.е. $p = n^{-34/33}$. Тогда подходящая нам формула

$$\begin{aligned}\exists x_1 \quad & N_3(x_1) \wedge \left(\bigwedge_{i=2}^{5} L_i(x_1)\right) \wedge \\ & (\forall x_2\ [x_2 \sim x_1] \Rightarrow \\ & \qquad [\exists x_3\, \exists x_3'\ (x_3 \sim x_2) \wedge (x_3' \sim x_2) \wedge \\ & \qquad\qquad (x_3 \neq x_1) \wedge (x_3' \neq x_1) \wedge (x_3 \neq x_3')])\end{aligned}$$

записывает (для леса, все деревья которого имеют не более 34 вершин) свойство существование подграфа, изоморфного дереву, образованному вершиной степени 3, каждый сосед которой отождествлён с концами двух путей P_6 (см. Рис. 13).

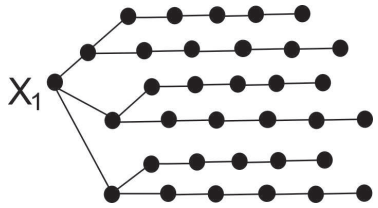


Рис. 13: Дерево на 34 вершинах

- Пусть $\ell = 34$, т.е. $p = n^{-35/34}$. Тогда подходящая нам формула

$$
\begin{aligned}
\exists x_1 \quad & N_3(x_1) \wedge \left(\bigwedge_{i=2,4}^{6} L_i(x_1) \right) \wedge \\
& (\forall x_2\ [x_2 \sim x_1] \Rightarrow \\
& \qquad (\exists x_3\ [\exists x_4\ (x_2 \sim x_4) \wedge (x_4 \sim x_3) \wedge (x_4 \neq x_1)] \wedge \\
& \qquad\quad [\exists x_4\ (x_3 \sim x_4) \wedge (x_4 \nsim x_2)])) \wedge \\
& (\forall x_2\ [x_2 \sim x_1] \Rightarrow \\
& \qquad [\exists x_3\ \exists x_3'\ (x_2 \sim x_3) \wedge (x_2 \sim x_3') \wedge (x_3 \neq x_3') \wedge \\
& \qquad\quad (x_1 \neq x_3) \wedge (x_1 \neq x_3')]) \\
& (\exists x_4\ [\exists x_2\ \exists x_3\ (x_1 \sim x_2) \wedge (x_2 \sim x_3) \wedge (x_3 \sim x_4) \wedge \\
& \qquad\quad (x_1 \neq x_3) \wedge (x_2 \neq x_4)] \wedge \\
& \qquad [\forall x_3\ (x_3 \sim x_4) \Rightarrow \exists x_2\ (x_2 \sim x_1) \wedge (x_2 \sim x_3)] \wedge \\
& \qquad [\exists x_2\ (\exists x_3\ (x_3 \sim x_2) \wedge (x_3 \sim x_4) \wedge (x_1 \nsim x_2) \wedge (x_2 \neq x_4))]) \wedge \\
& (\exists x_2\ [x_2 \sim x_1] \wedge \\
& \qquad [\forall x_3\ (\exists x_4\, (x_4 \sim x_2) \wedge (x_4 \sim x_3) \wedge (x_2 \neq x_3)) \Rightarrow \\
& \qquad\quad (\exists x_4\, (x_4 \sim x_3) \wedge (x_4 \nsim x_2)))]) \wedge \\
& (\forall x_3\, [(\exists x_2\, (x_1 \sim x_2) \wedge (x_2 \sim x_3)) \wedge \\
& \qquad (\neg\, (\exists x_4\, (x_3 \sim x_4) \wedge (\exists x_3'\, (x_3' \sim x_4) \wedge (x_3' \neq x_3) \wedge (x_1 \neq x_3'))))] \Rightarrow \\
& \qquad [\exists x_4\, \exists x_4'\, (x_4 \sim x_3) \wedge (x_4' \sim x_3) \wedge \\
& \qquad\quad (x_4 \neq x_4') \wedge (x_4 \nsim x_1) \wedge (x_4' \nsim x_1)])
\end{aligned}
$$

записывает (для леса, все деревья которого имеют не более 35 вершин) свойство существования подграфа, изоморфного дереву, изображенному на Рис. 14.

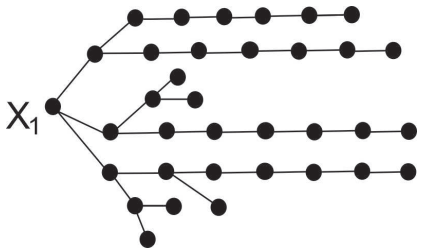


Рис. 14: Дерево на 35 вершинах

- Пусть $\ell = 35$, т.е. $p = n^{-36/35}$. Тогда подходящая нам формула

$$\begin{aligned}\exists x_1 \quad & N_2(x_1) \wedge \left(\bigwedge_{i=1}^{6} L_i(x_1)\right) \wedge \\ & (\exists x_2\ (x_1 \sim x_2) \wedge \\ & \quad [\exists x_3\ \exists x_3'\ (x_3 \sim x_2) \wedge (x_3' \sim x_2) \wedge \\ & \quad\quad (x_3 \neq x_3') \wedge (x_3 \neq x_1) \wedge (x_3' \neq x_1)]) \wedge \\ & (\forall x_3\ [\exists x_2\, (x_1 \sim x_2) \wedge (x_2 \sim x_3) \wedge (x_1 \neq x_3)] \Rightarrow \\ & \quad [\exists x_4\, \exists x_4'\, (x_4 \sim x_3) \wedge (x_3 \sim x_4') \wedge (x_4 \neq x_4') \wedge \\ & \quad\quad (x_4 \nsim x_1) \wedge (x_4' \nsim x_1)])\end{aligned}$$

записывает (для леса, все деревья которого имеют не более 36 вершин) свойство существования подграфа, изоморфного дереву, изображенному на Рис. 15.

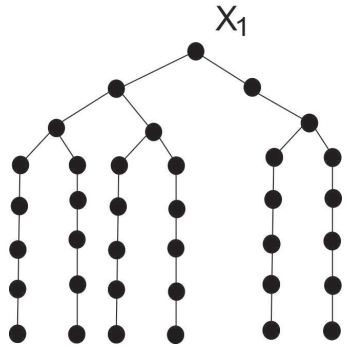


Рис. 15: Дерево на 36 вершинах

- Пусть $\ell = 36$, т.е. $p = n^{-37/36}$. Тогда подходящая нам формула

$$\begin{aligned}\exists x_1 \quad & N_3(x_1) \wedge \left(\bigwedge_{i=2}^{6} L_i(x_1)\right) \wedge \\ & (\exists x_2\ (x_1 \sim x_2) \wedge \\ & \quad [\exists x_3\ \exists x_3'\ (x_3 \sim x_2) \wedge (x_3' \sim x_2) \wedge \\ & \quad\quad (x_3 \neq x_3') \wedge (x_3 \neq x_1) \wedge (x_3' \neq x_1)]) \wedge \\ & (\exists x_2\ (x_1 \sim x_2) \wedge \\ & \quad (\exists x_3\ (x_3 \sim x_2) \wedge (x_3 \neq x_1)) \\ & \quad\quad [\neg\, (\exists x_3'\ (x_3' \sim x_2) \wedge (x_3' \neq x_1) \wedge (x_3' \neq x_3))]) \wedge \\ & (\forall x_3\ [\exists x_2\, (x_1 \sim x_2) \wedge (x_2 \sim x_3) \wedge (x_1 \neq x_3)] \Rightarrow \\ & \quad [\exists x_4\, \exists x_4'\, (x_4 \sim x_3) \wedge (x_3 \sim x_4') \wedge (x_4 \neq x_4') \wedge \\ & \quad\quad (x_4 \nsim x_1) \wedge (x_4' \nsim x_1)])\end{aligned}$$

записывает (для леса, все деревья которого имеют не более 37 вершин) свойство существования подграфа, изоморфного дереву, изображенному на Рис. 16.

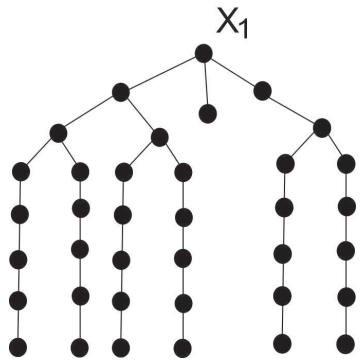


Рис. 16: Дерево на 37 вершинах

- Пусть $\ell = 37$, т.е. $p = n^{-38/37}$. Тогда подходящая нам формула

$$
\begin{aligned}
\exists x_1 \quad & \left(\bigwedge_{i=2}^{6} L_i(x_1)\right) \wedge \\
& (\exists x_2\ (x_1 \sim x_2) \wedge \\
& \qquad [\exists x_3\ \exists x_3'\ (x_3 \sim x_2) \wedge (x_3' \sim x_2) \wedge \\
& \qquad\qquad (x_3 \neq x_3') \wedge (x_3 \neq x_1) \wedge (x_3' \neq x_1)]) \wedge \\
& (\forall x_3\ [\exists x_2\,(x_1 \sim x_2) \wedge (x_2 \sim x_3) \wedge (x_1 \neq x_3)] \Rightarrow \\
& \qquad [\exists x_4\,\exists x_4'\,(x_4 \sim x_3) \wedge (x_3 \sim x_4') \wedge (x_4 \neq x_4') \wedge \\
& \qquad\qquad (x_4 \nsim x_1) \wedge (x_4' \nsim x_1)]) \wedge \\
& (\exists x_2\ (x_1 \sim x_2) \wedge \\
& \qquad (\exists x_3\ (x_3 \sim x_2) \wedge (x_3 \neq x_1)) \\
& \qquad\qquad [\neg\,(\exists x_3'\ (x_3' \sim x_2) \wedge (x_3' \neq x_1) \wedge (x_3' \neq x_3))]) \wedge \\
& (\exists x_2\ \exists x_2'\,(x_2 \sim x_1) \wedge (x_2' \sim x_1) \wedge (x_2 \neq x_2') \wedge \\
& \qquad\qquad (\forall x_3\ [((x_2 \sim x_3) \vee (x_2' \sim x_3)) \Rightarrow (x_3 = x_1)])) \wedge \\
& (\exists x_2\ \exists x_2'\,(x_2 \neq x_2') \wedge (x_2 \sim x_1) \wedge (x_2' \sim x_1) \wedge \\
& \qquad\qquad (\exists x_3\,(x_3 \sim x_2) \wedge (x_3 \neq x_1)) \wedge \\
& \qquad\qquad (\exists x_3\,(x_3 \sim x_2') \wedge (x_3 \neq x_1)))
\end{aligned}
$$

записывает (для леса, все деревья которого имеют не более 38 вершин) свойство существования подграфа, изоморфного дереву, изображенному на Рис. 17.

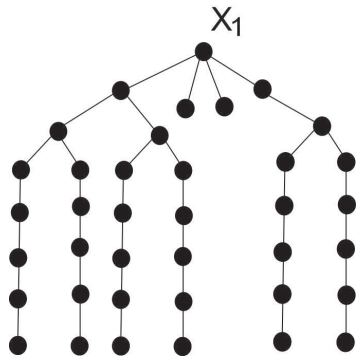


Рис. 17: Дерево на 38 вершинах

- Пусть $\ell = 38$, т.е. $p = n^{-39/38}$. Тогда подходящая нам формула

$$\begin{aligned}\exists x_1 \quad & N_2(x_1) \wedge \left(\bigwedge_{i=1}^{5} L_i(x_1)\right) \wedge \\ & (\forall x_2\ (x_1 \sim x_2) \Rightarrow \\ & \qquad [\exists x_3\ \exists x_3'\ (x_3 \sim x_2) \wedge (x_3' \sim x_2) \wedge \\ & \qquad\qquad (x_3 \neq x_3') \wedge (x_3 \neq x_1) \wedge (x_3' \neq x_1)]) \wedge \\ & (\forall x_3\ [\exists x_2\,(x_1 \sim x_2) \wedge (x_2 \sim x_3) \wedge (x_1 \neq x_3)] \Rightarrow \\ & \qquad [\exists x_4\,\exists x_4'\,(x_4 \sim x_3) \wedge (x_3 \sim x_4') \wedge (x_4 \neq x_4') \wedge \\ & \qquad\qquad (x_4 \nsim x_1) \wedge (x_4' \nsim x_1)])\end{aligned}$$

записывает (для леса, все деревья которого имеют не более 39 вершин) свойство существования подграфа, изоморфного дереву, изображенному на Рис. 18.

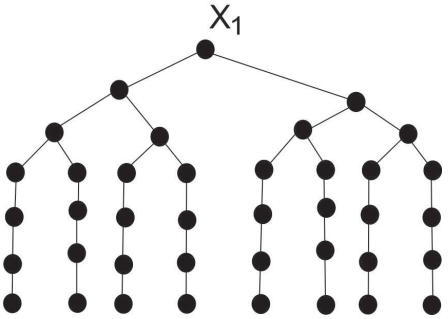


Рис. 18: Дерево на 39 вершинах

- Пусть $\ell = 39$, т.е. $p = n^{-40/39}$. Тогда подходящая нам формула

$$\begin{aligned}\exists x_1 \quad & N_3(x_1) \wedge \left(\bigwedge_{i=2}^{6} L_i(x_1)\right) \wedge \\ & (\forall x_2\ [x_2 \sim x_1] \Rightarrow \\ & \qquad [\exists x_3\,\exists x_3'\ (x_3 \sim x_2) \wedge (x_3' \sim x_2) \wedge \\ & \qquad\qquad (x_3 \neq x_1) \wedge (x_3' \neq x_1) \wedge (x_3 \neq x_3')])\end{aligned}$$

записывает (для леса, все деревья которого имеют не более 40 вершин) свойство существование подграфа, изоморфного дереву, образованному вершиной степени 3, каждый сосед которой отождествлён с концами двух путей P_7 (см. Рис. 19).

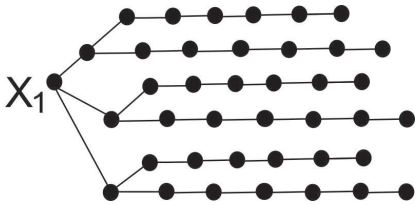


Рис. 19: Дерево на 40 вершинах

- Пусть $\ell = 40$, т.е. $p = n^{-41/40}$. Тогда подходящая нам формула

$$\begin{aligned}
\exists x_1 \quad & \left(\bigwedge_{i=2}^{5} L_i(x_1)\right) \wedge \\
& (\exists x_2\ (x_1 \sim x_2) \wedge \\
& \qquad [\exists x_3\ \exists x_3'\ (x_3 \sim x_2) \wedge (x_3' \sim x_2) \wedge \\
& \qquad\qquad (x_3 \neq x_3') \wedge (x_3 \neq x_1) \wedge (x_3' \neq x_1)]) \wedge \\
& (\exists x_2\ \exists x_2'\, (x_2 \sim x_1) \wedge (x_2' \sim x_1) \wedge (x_2 \neq x_2') \wedge \\
& \qquad\qquad (\forall x_3\ [((x_2 \sim x_3) \vee (x_2' \sim x_3)) \Rightarrow (x_3 = x_1)])) \wedge \\
& (\forall x_2\, (\exists x_3 (x_1 \sim x_2) \wedge (x_2 \sim x_3) \wedge (x_1 \neq x_3)) \Rightarrow \\
& \qquad (\exists x_3' (x_2 \sim x_3') \wedge (x_3' \neq x_3) \wedge (x_3' \neq x_1))) \wedge \\
& (\forall x_3\ [\exists x_2\, (x_1 \sim x_2) \wedge (x_2 \sim x_3) \wedge (x_1 \neq x_3)] \Rightarrow \\
& \qquad [\exists x_4\ \exists x_4'\, (x_4 \sim x_3) \wedge (x_3 \sim x_4') \wedge (x_4 \neq x_4') \wedge \\
& \qquad\qquad (x_4 \nsim x_1) \wedge (x_4' \nsim x_1)])
\end{aligned}$$

записывает (для леса, все деревья которого имеют не более 41 вершин) свойство существования подграфа, изоморфного дереву, изображенному на Рис. 20.

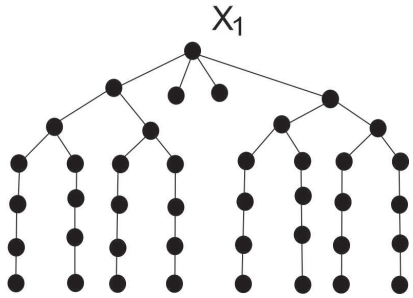


Рис. 20: Дерево на 41 вершине

- Пусть $\ell = 72$, т.е. $p = n^{-73/72}$. Тогда подходящая нам формула

$$\begin{aligned}
\exists x_1 \quad & N_3(x_1) \wedge \left(\bigwedge_{i=3}^{6} L_i(x_1) \right) \wedge \\
& (\forall x_2\ [x_2 \sim x_1] \Rightarrow \\
& \qquad [\exists x_3\, (x_3 \sim x_2) \wedge (x_3 \neq x_1)] \wedge \\
& \qquad\quad \neg[\exists x_4\ (x_4 \sim x_3) \wedge (x_4 \neq x_2)]) \wedge \\
& (\forall x_3\ [\exists x_2\ (x_1 \sim x_2) \wedge (x_2 \sim x_3) \wedge (x_1 \neq x_3)] \Rightarrow \\
& \qquad (\exists x_3'\ (x_3' \neq x_1) \wedge (x_3 \neq x_3') \wedge \\
& \qquad\quad [\exists x_2\, (x_2 \sim x_3') \wedge (x_2 \sim x_1)] \wedge \\
& \qquad\quad [\exists x_2\, (x_2 \sim x_3) \wedge (x_2 \sim x_3')] \wedge \\
& \qquad\quad [\exists x_4\ (x_4 \sim x_3') \wedge (x_4 \nsim x_1)])) \wedge \\
& (\forall x_3\ [\exists x_2\, (x_1 \sim x_2) \wedge (x_2 \sim x_3) \wedge (x_1 \neq x_3)] \Rightarrow \\
& \qquad [\exists x_4\ \exists x_4'\ (x_4 \sim x_3) \wedge (x_3 \sim x_4') \wedge (x_4 \neq x_4') \wedge \\
& \qquad\quad (x_4 \nsim x_1) \wedge (x_4' \nsim x_1)]) \wedge
\end{aligned}$$

записывает (для леса, все деревья которого имеют не более 73 вершин) свойство существования подграфа, изоморфного дереву, изображенному на Рис. 21.

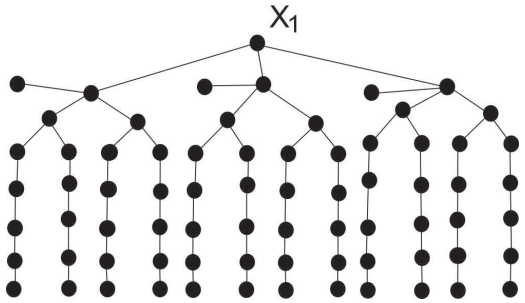


Рис. 21: Дерево на 73 вершинах

4. Заключение

В работе был исследован вопрос о справедливости k-закона нуля или единицы для случайного графа $G(n, n^{-1-1/\ell})$ при $k \in \{2, 3, 4\}$ и $\ell \in \mathbb{N}$.

Были получены следующие результаты. При $k = 2$ закон справедлив тогда и только тогда, когда $\ell \geq 2$. При $k = 3$ закон справедлив при $\ell \geq 7$. Наконец, при $k = 4$ закон нарушается при $\ell \in \{1, 2 \ldots, 39, 40, 72\}$. Мы предполагаем, что и при $\ell \in \{41, 42, \ldots, 71\}$ закон нарушается, но построить подходящих формул нам не удалось. Было бы интересно понять, существуют ли какие-то “пропуски” в множестве ℓ, при которых 4-закон нарушается.

В дальнейшем мы планируем значительно улучшить известную верхнюю оценку на наименьшее ℓ, при котором 4-закон справедлив. Также было бы интересно рассмотреть остальные $k \geq 5$, но получение полного описания всех ℓ, при которых закон будет нарушаться, выглядит неподъемной задачей. Тем не менее, разработка новых методов могла бы помочь значительно сократить разрыв между нижней и верхней оценкой на наиеньшее ℓ, при котором справедлив k-закон, в теореме 1.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Верещагин, Н.К., Шень, А. Языки и исчисления // МЦНМО. 2012. 4-е изд. С. 240.
2. Жуковский, М.Е., Островский, Л.Б. Свойства первого порядка ограниченной кванторной глубины сильно разреженных случайных графов // Изв. РАН. Сер. матем.- 2017.- Вып. 81.- С. 100–113.
3. Bollobás, B. Threshold functions for small subgraphs // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 1981. P. 197–206.
4. Ehrenfeucht, A. Anapplication of games to the completeness problem for formalized theories // Warszawa, Fund.Math. 1960. P. 121–149.
5. Erdős, P., Rényi, A. On Random Graphs // Publicationes Mathematicae (Debrecen). 1959. Vol. 6. P. 290–297.
6. Erdős, P., Rényi, A. On the evolution of random graphs // Publ. Math. Inst. Hungar. Acad. Sci. 1960. P. 17–61.
7. Fagin, R. Probabilities in Finite Models // J. Symbolic Logic. 1976. Vol. 41. P. 50–58.
8. Глебский, Ю.В., Коган, Д.И., Легонький, М.И., Таланов, В.А. Объем и доля выполнимости формул узкого исчисления предикатов // Кибернетика 1969. Т. 2. С. 17–26.
9. Libkin, L. Elements of finite model theory // Texts in Theoretical Computer Science. An EATCS Series, Springer. 2004.
10. Ostrovsky, L.B., Zhukovskii, M.E. Monadic second-order properties of very sparse random graphs // Annals of pure and applied logic. 2017. Vol. 168. P. 2087–2101.
11. Shelah, S., Spencer, J.H. Zero-One Laws for Sparse Random Graphs // J.Amer. Math. Soc. 1988. Vol. 1. P. 97–115.
12. Spencer, J.H. Threshold spectra via the Ehrenfeucht game // Discrete Applied Math. 1991. Vol. 30. P. 235–252.
13. Verbitsky, O., Zhukovskii, M. On the First-Order Complexity of Induced Subgraph Isomorphism // Logical Methods in Computer Science. 2019. Vol. 15. P. 25:1–25:24.
14. Verbitsky, O., Zhukovskii, M. The Descriptive Complexity of Subgraph Isomorphism without Numerics // Theory of Computing Systems. 2019. Vol. 63. P. 902–921.
15. Zhukovskii, M.E. On the zero–one k-law extensions // European Journal of Combinatorics. 2017. Vol. 60. P. 66–81.
16. Zhukovskii, M.E. Zero-one k-law // Discrete Mathematics. 2012. Vol. 312. P. 1670–1688.

REFERENCES

1. Vereshchagin, N.K., Shen, A. 2012, "Languages and calculus", *MCCME*, 4th ed, P. 240.
2. Zhukovsky, M.E., Ostrovskii, L.B. 2017, "First-order properties of bounded quantor depth of strongly sparse random graphs", *Izvestiya:Mathematics*, Vol. 81, pp. 100–113.

3. Bollobás, B. 1981, "Threshold functions for small subgraphs", *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, pp. 197–206.

4. Ehrenfeucht, A. 1960, "Anapplication of games to the completeness problem for formalized theories", *Warszawa, Fund.Math.*, pp. 121–149.

5. Erdős P., Rényi, A. 1959, "On Random Graphs", *Publicationes Mathematicae (Debrecen)*, Vol. 6, pp. 290–297.

6. Erdős, P., Rényi, A. 1960, "On the evolution of random graphs", *Publ. Math. Inst. Hungar. Acad. Sci.*, pp. 17–61.

7. Fagin, R. 1976, "Probabilities in Finite Models", *J. Symbolic Logic*, Vol. 41, pp. 50–58.

8. Glebskii, Y.V., Kogan, D.I., Liogon'kii, M.I., Talanov, V.A. 1969, "Range and degree of realizability of formulas in the restricted predicate calculus", *Cybern Syst Anal.*, Vol. 5, pp. 142–154.

9. Libkin, L. 2004, "Elements of finite model theory", *Texts in Theoretical Computer Science. An EATCS Series, Springer.*

10. Ostrovsky, L.B., Zhukovskii, M. E. 2017, "Monadic second-order properties of very sparse random graphs", *Annals of pure and applied logic*, Vol. 168, pp. 2087–2101.

11. Shelah, S., Spencer, J.H. 1988, "Zero-One Laws for Sparse Random Graphs", *J.Amer. Math. Soc.*, Vol. 1, pp. 97–115.

12. Spencer, J.H. 1991, "Threshold spectra via the Ehrenfeucht game", *Discrete Applied Math.*, Vol. 30, pp. 235–252.

13. Verbitsky, O., Zhukovskii, M. 2019, "On the First-Order Complexity of Induced Subgraph Isomorphism", *Logical Methods in Computer Science*, Vol. 15, pp. 25:1–25:24.

14. Verbitsky, O., Zhukovskii, M. 2019, "The Descriptive Complexity of Subgraph Isomorphism without Numerics", *Theory of Computing Systems*, Vol. 63, pp. 902–921.

15. Zhukovskii, M.E. 2017, "On the zero–one k-law extensions", *European Journal of Combinatorics*, Vol. 60, pp. 66–81.

16. Zhukovskii, M.E. 2012, "Zero-one k-law", *Discrete Mathematics*, Vol. 312, pp. 1670–1688.

Получено: 02.03.2024
Принято в печать: 04.09.2024

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 25. Выпуск 3.

УДК 517.37 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-335-342

Об одной формуле Лиувилля

Ю. В. Андрианова, В. Б. Шерстюков

Андрианова Юлия Владимировна — Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: yulia.andrianova@math.msu.ru
Шерстюков Владимир Борисович — доктор физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова; Московский центр фундаментальной и прикладной математики (г. Москва).
e-mail: shervb73@gmail.com

Аннотация

Обсуждается классическая формула Лиувилля, выражающая кратный интеграл по многомерной пирамиде через интеграл по отрезку. Показано, как формула Лиувилля связана со специальной суммой, содержащей последовательные первообразные подынтегральной функции. Приведены конкретные примеры, иллюстрирующие общий результат. Попутно доказана компактная формула для вычисления степенных моментов экспоненциальной функции.

Ключевые слова: кратный интеграл, формула Лиувилля, биномиальная сумма, факториал, субфакториал, число e.

Библиография: 6 названий.

Для цитирования:
Андрианова, Ю. В., Шерстюков, В. Б. Об одной формуле Лиувилля // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 3, с. 335–342.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 25. No. 3.

UDC 517.37 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-335-342

A certain formula of Liouville

Yu. V. Andrianova, V. B. Sherstyukov

Andrianova Yulia Vladimirovna — Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: yulia.andrianova@math.msu.ru
Sherstyukov Vladimir Borisovich — doctor of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University; Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics (Moscow).
e-mail: shervb73@gmail.com

Abstract

The classical Liouville formula expressing the multiple integral over a multidimensional pyramid through the integral over a segment is discussed. It is shown how the Liouville formula is related to the special sum, containing successive antiderivatives of the integrand. Specific examples are given to illustrate the general result. Along the way, a compact formula for calculating the power moments of an exponential function is proved.

Keywords: multiple integral, Liouville formula, binomial sum, factorial, subfactorial, Euler number.

Bibliography: 6 titles.

For citation:
Andrianova, Yu. V., Sherstyukov, V. B. 2024, "A certain formula of Liouville" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 3, pp. 335–342.

1. Введение

Идея написать заметку родилась в ходе обсуждения примера № 15.478 из известного задачника [1]. Требуется вычислить интеграл

$$\int\limits_{\substack{x_1\geqslant 0,\,\dots\,,\,x_n\geqslant 0,\\ x_1+\ldots+x_n\leqslant 1}}\cdots\int \sqrt{x_1+\ldots+x_n}\;dx_1\,\ldots\,dx_n. \tag{1}$$

Нахождение кратного интеграла (1) двумя различными способами приводит к неочевидной формуле

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\,\frac{4^k k!}{(2k+1)!\,(n-k)!}=\frac{2}{(2n+1)(n-1)!},\qquad n\in\mathbb{N}, \tag{2}$$

которую, кстати, не так просто вывести напрямую. Заинтересовавшись случайно обнаруженным эффектом, авторы решили поделиться возникающими на этом пути соображениями.

2. Формула Лиувилля

Начнём с одного общего результата, называемого формулой Лиувилля (см. [1; № 15.486]).

Теорема 1. *Пусть* $f\in C[0,a]$, *где* $a>0$, *и*

$$V_n(a)=\{(x_1,\,\dots\,,x_n):\;\;x_1\geqslant 0,\,\dots\,,\,x_n\geqslant 0,\;\;x_1+\,\dots\,+x_n\leqslant a\}\,,\qquad n\in\mathbb{N}, \tag{3}$$

есть n*-мерная пирамида. Тогда справедлива формула*

$$\int\limits_{V_n(a)}\cdots\int f(x_1+\ldots+x_n)\,dx_1\,\ldots\,dx_n=\frac{1}{(n-1)!}\int\limits_0^a t^{n-1}f(t)\,dt,\qquad n\in\mathbb{N}. \tag{4}$$

Доказательство. Для полноты изложения и сравнения с последующим приведём обоснование формулы (4). Перейдём в кратном интеграле к новым переменным

$$y_1=x_1+\ldots+x_n,\quad y_2=x_1+\ldots+x_{n-1},\quad\ldots\,,\quad y_n=x_1.$$

Область интегрирования в координатах $(y_1,\,\dots\,,\,y_n)$ задаётся неравенствами

$$0\leqslant y_1\leqslant a,\quad 0\leqslant y_2\leqslant y_1,\quad\ldots\,,\quad 0\leqslant y_n\leqslant y_{n-1},$$

а модуль якобиана соответствующего отображения равен единице. Тогда

$$\int\limits_{V_n(a)}\cdots\int f(x_1+\ldots+x_n)\,dx_1\,\ldots\,dx_n=\int\limits_0^a f(y_1)\,dy_1\int\limits_0^{y_1}dy_2\ldots\int\limits_0^{y_{n-1}}dy_n=$$

$$=\int\limits_0^a f(y_1)\,dy_1\int\limits_0^{y_1}dy_2\ldots\int\limits_0^{y_{n-2}}y_{n-1}\,dy_{n-1}=\frac{1}{2!}\int\limits_0^a f(y_1)\,dy_1\int\limits_0^{y_1}dy_2\ldots\int\limits_0^{y_{n-3}}y_{n-2}^2\,dy_{n-2}=\ldots=$$

$$=\frac{1}{(n-1)!}\int\limits_0^a y_1^{n-1}f(y_1)\,dy_1.$$

Формула (4) доказана. □

Другое доказательство формулы Лиувилля предложено в [2; гл. 18, § 5]. Как видно из (4) при $f\equiv 1$, объём n-мерной пирамиды (3) находится по формуле

$$|V_n(a)|=\frac{a^n}{n!},\qquad a>0,\quad n\in\mathbb{N}. \tag{5}$$

Используя (5) выразим кратный интеграл в (4) по-другому.

Теорема 2. *В условиях теоремы* 1 *при любых* $a>0$ *и* $n\in\mathbb{N}$ *справедлива формула*

$$\int\limits_{V_n(a)}\cdots\int f(x_1+\ldots+x_n)\,dx_1\,\ldots\,dx_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{a^{n-k}}{(n-k)!}\,F_k(a), \tag{6}$$

где F_k *обозначает* k*-ую первообразную функции* f *на* $[0,a]$, *определяемую рекуррентным правилом*

$$F_k(t)=\int\limits_0^t F_{k-1}(s)\,ds,\quad k\in\mathbb{N},\qquad F_0(t)\equiv f(t). \tag{7}$$

Доказательство. В соответствии с определением (3) имеем

$$\int\limits_{V_n(a)}\cdots\int f(x_1+\ldots+x_n)\,dx_1\,\ldots\,dx_n=\int\limits_{V_{n-1}(a)}\cdots\int dx_1\,\ldots\,dx_{n-1}\int\limits_0^{a-x_1-\ldots-x_{n-1}}f(x_1+\ldots+x_n)\,dx_n.$$

Внутренний интеграл в терминах первообразной $F_1(t)=\int\limits_0^t f(s)\,ds$ переписывается так

$$\int\limits_0^{a-x_1-\ldots-x_{n-1}}f(x_1+\ldots+x_n)\,dx_n=\int\limits_{x_1+\ldots+x_{n-1}}^{a}f(t)\,dt=F_1(a)-F_1(x_1+\ldots+x_{n-1}).$$

Поэтому

$$\int\limits_{V_n(a)}\cdots\int f(x_1+\ldots+x_n)\,dx_1\,\ldots\,dx_n=|V_{n-1}(a)|\,F_1(a)-\int\limits_{V_{n-1}(a)}\cdots\int F_1(x_1+\ldots+x_{n-1})\,dx_1\,\ldots\,dx_{n-1}.$$

Те же соображения с использованием следующей первообразной $F_2(t) = \int\limits_0^t F_1(s)\,ds$ дают

$$\int\limits_{V_{n-1}(a)}\cdots\int F_1(x_1+\ldots+x_{n-1})\,dx_1\,\ldots\,dx_{n-1} =$$

$$= |V_{n-2}(a)|\,F_2(a) - \int\limits_{V_{n-2}(a)}\cdots\int F_2(x_1+\ldots+x_{n-2})\,dx_1\,\ldots\,dx_{n-2}.$$

Отсюда с учётом (5) имеем

$$\int\limits_{V_n(a)}\cdots\int f(x_1+\ldots+x_n)\,dx_1\,\ldots\,dx_n =$$

$$= \frac{a^{n-1}}{(n-1)!}\,F_1(a) - \frac{a^{n-2}}{(n-2)!}\,F_2(a) + \int\limits_{V_{n-2}(a)}\cdots\int F_2(x_1+\ldots+x_{n-2})\,dx_1\,\ldots\,dx_{n-2}.$$

Продолжив процесс на нужное число шагов, придём к формуле (6). Обратим внимание, что на последнем шаге возникнет интеграл $\int\limits_0^a F_{n-1}(x_1)\,dx_1 = F_n(a)$ по одномерной пирамиде $V_1(a)$, совпадающей с отрезком $[0,a]$, и для корректного действия формулы (6) важен выбор n-ой первообразной именно по правилу (7). □

Из теорем 1, 2 очевидно вытекает следующее утверждение.

Следствие 1. *Пусть $f\in C[0,a]$, где $a>0$, и $n\in\mathbb{N}$. Тогда верна формула*

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\,\frac{a^{n-k}}{(n-k)!}\,F_k(a) = \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_0^a t^{n-1}f(t)\,dt, \tag{8}$$

левая часть которой вычисляется на основе (7).

Вернёмся к исходному кратному интегралу (1). С одной стороны, по формуле Лиувилля (4) находим

$$\int\limits_{V_n(1)}\cdots\int\sqrt{x_1+\ldots+x_n}\,dx_1\,\ldots\,dx_n = \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_0^1 t^{n-1/2}\,dt = \frac{2}{(2n+1)(n-1)!}, \qquad n\in\mathbb{N}. \tag{9}$$

С другой стороны, поскольку для $f(t)=\sqrt{t}$ первообразные (7) имеют вид

$$F_k(t) = \frac{t^{1/2+k}}{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{2k+1}{2}} = \frac{4^k k!}{(2k+1)!}\,t^{1/2+k}, \qquad k\in\mathbb{N}, \quad t\in[0,1],$$

то формула (6) в таком случае означает, что

$$\int\limits_{V_n(1)}\cdots\int\sqrt{x_1+\ldots+x_n}\,dx_1\,\ldots\,dx_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\,\frac{4^k k!}{(2k+1)!\,(n-k)!}, \qquad n\in\mathbb{N}. \tag{10}$$

Сопоставив (9) и (10), получим тождество (2) как частный случай (8) при выборе $a=1$ и $f(t)=\sqrt{t}\in C[0,1]$.

Разумеется, соотношение (8) можно доказать иначе — многоразовым интегрированием по частям его правой половины с пошаговым привлечением первообразных (7). Способ, основанный на соединении теорем 1, 2, представляется более изящным.

Рассмотрим ещё два примера на применение формулы (8).

Пример 3. *Пусть* $f(t)=t^{\alpha}$, *где* $\alpha>0$. *Элементарно проверяется, что*

$$F_k(t)=\frac{t^{\alpha+k}}{(\alpha+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha+k)},\qquad k\in\mathbb{N}.$$

Подставив это выражение и $a=1$ *в* (8), *получим соотношение*

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{(n-k)!\,(\alpha+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha+k)}=\frac{1}{(n-1)!\,(\alpha+n)},\tag{11}$$

выполненное при всех $\alpha>0$ *и любом* $n\in\mathbb{N}$. *По принципу аналитического продолжения формула распространяется на все значения* α *в плоскости* $\mathbb{C}$ *с выброшенными из неё целыми точками* $-n,\ldots,-1$. *Соотношение* (11) *есть частный случай тождества, с помощью которого обычно выводят интерполяционную формулу Ньютона* (*см., например,* [3; § 3, *формула* 3.1.1]). *Мы уже видели, что при* $\alpha=1/2$ *тождество* (11) *конкретизируется в* (2). *Но теперь можно подставлять в* (11) *запрещённые ранее условием* $\alpha>0$ *значения. Например, выбор* $\alpha=-1/2$ *позволяет вычислить схожую с* (2), *но чуть другую сумму*

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{4^k k!}{(2k)!\,(n-k)!}=\frac{2}{(2n-1)(n-1)!},\qquad n\in\mathbb{N}.$$

Обе суммы допускают эквивалентную запись через биномиальные коэффициенты. Именно,

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{4^k}{2k+1}\,\frac{C_n^k}{C_{2k}^k}=\frac{2n}{2n+1},\qquad \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\,4^k\,\frac{C_n^k}{C_{2k}^k}=\frac{2n}{2n-1}$$

при всех $n\in\mathbb{N}$.

Пример 4. *Пусть* $f(t)=e^t$. *Тогда по формуле* (7) *находим*

$$F_k(t)=e^t-\sum_{m=0}^{k-1}\frac{t^m}{m!},\qquad k\in\mathbb{N}.$$

При $a=1$ *левая часть в* (8) *принимает вид*

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{(n-k)!}\,F_k(1)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{(n-k)!}\left(e-\sum_{m=0}^{k-1}\frac{1}{m!}\right)=$$
$$=(-1)^{n-1}e\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k!}-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{(n-k)!}\sum_{m=0}^{k-1}\frac{1}{m!}=(-1)^{n-1}\left(e\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k!}-1\right),$$

а правая — соответственно, вид

$$\frac{1}{(n-1)!}\int_0^1 t^{n-1}e^t\,dt.$$

Поэтому, заменив в (8) $n-1$ *на* n, *придём к равенству*

$$\int_0^1 t^n e^t\,dt=(-1)^n n!\left(e\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}-1\right),\qquad n\in\mathbb{N}_0\equiv\mathbb{N}\cup\{0\}\tag{12}$$

(*см. также* [4, *раздел* 1.3.2]). *Дальнейшие возможные упрощения правой части* (12) *связаны с понятием субфакториала* $!n$, *определяемого для натурального числа* n *как количество перестановок* n *элементов без неподвижных точек* (*т. е. количество беспорядков*). *Известно* (*см.* [5, *гл.* 5, § 5.3], [6]), *что*

$$!n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} = \left\lfloor \frac{n!}{e} \right\rceil, \qquad n \in \mathbb{N},$$

где $\lfloor x \rceil$ *обозначает ближайшее к* $x \in \mathbb{R}$ *целое число. Следовательно, при любом* $n \in \mathbb{N}$ *имеем*

$$\int_0^1 t^n e^t \, dt = (-1)^n e \left(!n - \frac{n!}{e} \right) = (-1)^n e \left(\left\lfloor \frac{n!}{e} \right\rceil - \frac{n!}{e} \right).$$

Наконец, обозначив через $\|x\|$ *расстояние от* x *до ближайшего к нему целого числа, запишем окончательно изящную формулу*

$$\int_0^1 t^n e^{t-1} \, dt = \left\| \frac{n!}{e} \right\|, \qquad n \in \mathbb{N} \tag{13}$$

(*при* $n = 0$ *правило* (13) *не работает*). *Отсюда мгновенно следует асимптотика*

$$\left\| \frac{n!}{e} \right\| \sim \frac{1}{n}, \qquad n \longrightarrow \infty,$$

поскольку для любой функции $f \in C[0,1]$ *выполнено предельное соотношение*

$$\lim_{n \to \infty} n \int_0^1 t^n f(t) \, dt = f(1).$$

Кроме того, последовательность расстояний $\|n!/e\|$, *где* $n \in \mathbb{N}$, *как последовательность степенных моментов положительной и непрерывной на* $[0,1]$ *функции, является вполне монотонной* (*положительны все её конечные разности любого порядка*), *в частности — в строгом смысле убывает и выпукла. Несколько близких к* (13) *тождеств для интегралов* (*в других обозначениях*) *приведено в* [6].

Заметим, что разложение экспоненты в степенной ряд с последующим почленным интегрированием даёт в дополнение к (12), (13) *представление*

$$\int_0^1 t^n e^t \, dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! \, (k+n+1)}, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{14}$$

менее удобное для практического применения. Например, взяв $n = 3$, *по формулам* (12), (13) *устно вычисляем*

$$\int_0^1 t^3 e^t \, dt = -6 \left(e \sum_{k=0}^{3} \frac{(-1)^k}{k!} - 1 \right) = 6 - 6e \left(1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \right) = 6 - 2e,$$

$$\int_0^1 t^3 e^t \, dt = e \left\| \frac{6}{e} \right\| = e \left(\frac{6}{e} - 2 \right) = 6 - 2e,$$

в то время как ответ

$$\int\limits_0^1 t^3 e^t\,dt = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\,(k+4)},$$

получаемый по формуле (14)*, ещё нужно «довести до числа».*

Завершая разбор примера, отметим найденное по ходу дела красивое соотношение

$$\int\limits_{\substack{x_1\geqslant 0,\,\ldots,\,x_{n+1}\geqslant 0,\\ x_1+\ldots+x_{n+1}\leqslant 1}}\cdots\int e^{\,x_1+\ldots+x_{n+1}}\,dx_1\,\ldots\,dx_{n+1} = \frac{e}{n!}\left\|\,\frac{n!}{e}\,\right\|, \qquad n\in\mathbb{N}.$$

3. Заключение

Очевидно, потенциал формулы (8) не исчерпывается рассмотренными простейшими примерами. Ясно также, что многие из фигурирующих в работе соотношений могли быть подмечены ранее. Однако, нам кажется полезным взгляд с разных позиций на классическую формулу Лиувилля.

Кстати говоря, было бы любопытно в духе предложенной заметки проанализировать общий вариант этой формулы

$$\int\limits_{V_n(1)}\cdots\int x_1^{p_1-1}\,\ldots\,x_n^{p_n-1} f(x_1+\ldots+x_n)\,dx_1\,\ldots\,dx_n \;=\; \frac{\Gamma(p_1)\ldots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+\ldots+p_n)}\int\limits_0^1 t^{\,p_1+\ldots+p_n-1} f(t)\,dt,$$

действующий для любой $f\in C[0,1]$, с произвольными $p_k>0$, $k=1,\ldots,n$, где $n\in\mathbb{N}$, и значениями гамма-функции $\Gamma(p)$ в соответствующих точках.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Виноградова И. А., Олехник С. Н., Садовничий В. А. Математический анализ в задачах и упражнениях. Т. 3: Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы. — М.: МЦНМО, 2018. — 256 с.

2. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. III. — М.: Наука, 1966. — 656 с.

3. Гельфонд А. О. Вычеты и их приложения. — М.: КомКнига, 2006. — 112 с.

4. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. — М.: Наука, 1981. — 800 с.

5. Грэхем Р. Л., Кнут Д. Э., Паташник О. Конкретная математика. Основание информатики: Пер. с англ. — М.: Мир, 1998. — 704 с.

6. Hassani M. Derangements and applications // Journal of Integer Sequences. 2003. Vol. 6. Article 03.1.2.

REFERENCES

1. Vinogradova, I. A., Olekhnik, S. N., Sadovnichii, V. A. 2018, “Mathematical analysis in tasks and exercises”, *MCCME, Moscow*, 256 pp.

2. Fikhtengol'ts, G. M. 1966, "A Course of Differential and Integral Calculus", *Nauka, Moscow*, Vol. 3, 656 pp.

3. Gel'fond, A. O. 2006, "Residues and Their Applications", *KomKniga, Moscow*, 112 pp.

4. Prudnikov, A. P., Brychkov, Yu. A., Marichev, O. I. 1981, "Integrals and Series. Elementary functions", *Nauka, Moscow*, 800 pp.

5. Graham, R. L., Knuth, D. E., Patashnik, O. 1994, "Concrete mathematics: A Foundation for Computer Science", *2nd edition. Addison-Wesley, MA*, xiv+657 pp.

6. Hassani, M. 2003, "Derangements and applications", *Journal of Integer Sequences*, vol. 6. Article 03.1.2.

Получено: 14.02.2024
Принято в печать: 04.09.2024

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 25. Выпуск 3.

УДК 517.925 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-343-350

Об одном уравнении типа Брио—Буке[1]

В. А. Горелов, К. И. Орлов, П. Е. Волков

Горелов Василий Александрович — доктор физико-математических наук, Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт» (г. Москва).
e-mail: gorelov.va@mail.ru
Орлов Константин Игоревич — Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт» (г. Москва).
e-mail: OrlovKI@mpei.ru
Волков Павел Евгеньевич — Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт» (г. Москва).
e-mail: VolkovPY@mpei.ru

Аннотация

Данная статья посвящена задаче изучения мероморфных решений алгебраических дифференциальных уравнений, являющейся традиционной для теории дифференциальных уравнений. К настоящему времени достаточно хорошо исследован случай линейных уравнений. Что касается нелинейных уравнений, то здесь результатов, относящихся к более или менее общим классам уравнений, сравнительно немного. Одним из классов алгебраических дифференциальных уравнений, где получен ряд общих результатов, являются так называемые уравнения типа Брио-Буке. Это уравнения вида $P(y, y^{(n)}) = 0$, где P — многочлен с комплексными коэффициентами, $n \in \mathbb{N}$. Исследование мероморфных решений уравнений такого типа начато в работах Ш. Брио, Ж. К. Буке и Ш. Эрмита, которые описали все возможные решения уравнений вида $P(y, y') = 0$, показав, что все они лежат в классе W, состоящем из рациональных функций, рациональных функций от некоторой экспоненциальной функции и эллиптических функций. Далее была опубликована работа Э. Пикара, который доказал, что все решения уравнений вида $P(y, y'') = 0$ также лежат в W.

В дальнейшем возникла гипотеза о том, что у любого уравнения вида $P(y, y^{(n)}) = 0$ (при некоторых ограничениях на многочлен P) все мероморфные решения лежат в W. Над доказательством этой гипотезы работали Э. Хилле, Р. Кауфман, С. Бэнк, А. Ерёменко, Л. Лиао, Т. Нг, А. Янченко и другие математики. К настоящему времени справедливость гипотезы установлена во многих случаях. Остается, однако, ряд случаев, в которых гипотеза не доказана и не опровергнута.

В данной работе рассмотрен один такой случай, а именно уравнения $y^{(n)} = y^m$, где $n, m \in \mathbb{N},\ m \geqslant 2$. Найдено необходимое и достаточное условие существования ненулевых мероморфных решений указанных уравнений и сами эти решения.

Ключевые слова: алгебраические дифференциальные уравнения, мероморфные решения.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:
Горелов, В. А., Орлов, К. И., Волков, П. Е. Об одном уравнении типа Брио—Буке // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 3, с. 343–350.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 24-21-00196).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 25. No. 3.

UDC 517.925 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-343-350

About one Briot–Bouqet equation

V. A. Gorelov, K. I. Orlov, P. E. Volkov

Gorelov Vasily Alexandrovich — doctor of physical and mathematical sciences, National Research University "Moscow Power Engineering Institute" (Moscow).
e-mail: GorelovVA@mpei.ru
Orlov Konstantin Igorevich — National Research University "Moscow Power Engineering Institute" (Moscow).
e-mail: OrlovKI@mpei.ru
Volkov Pavel Evgenievich — National Research University "Moscow Power Engineering Institute" (Moscow).
e-mail: VolkovPY@mpei.ru

Abstract

This article is devoted to the problem of studying meromorphic solutions of algebraic differential equations, which is traditional for the theory of differential equations. At the present, the case of the linear equations is quite well explored. Speaking of the nonlinear equations, there are relatively few results related to more or less common equation classes. There is one class of equations, where a number of results have been obtained. They are called Briot–Bouquet equations. These are the equations of the form $P(y, y^{(n)}) = 0$, where P is a complex polynomial, $n \in \mathbb{N}$. The research of the meromorphic solutions of this type of equations was started by Ch. Briot, J. C. Bouqet and Ch. Hermit, who described all possible solutions of the equations of the form $P(y, y') = 0$ by showing that they are all included in class W, which consists of rational functions, rational functions of some exponential function and elliptic functions. After that E. Picard's work was published where he proved that all solutions of the equations of the form $P(y, y'') = 0$ are also included in W.

Later, the hypothesis arose that in any $P(y, y^{(n)}) = 0$ equation (with some limitations to the P) all its meromorphic solutions are included in W. E. Hille, R. Kaufman, S. Bank, A. Eremenko, L. Liao, T. Ng, A. Yanchenko and other mathematicians have been working on its proof. Nowadays the validity of the hypothesis has been established in many cases, but there are a number of cases left, where it is neither proved nor disproved.

There is one of these cases described in this work. Exactly, equations $y^{(n)} = y^m$, where $n, m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 2$. A necessary and sufficient condition for the existence of nonzero meromorphic solutions of these equations and these solutions themselves are found.

Keywords: algebraic differential equations, meromorphic solutions.

Bibliography: 15 titles.

For citation:
Gorelov, V. A., Orlov, K. I., Volkov, P. E., 2024, "About one Briot–Bouqet equation" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 3, pp. 343–350.

1. Введение

Описание мероморфных решений алгебраических дифференциальных уравнений является традиционной задачей теории дифференциальных уравнений. При этом к настоящему времени получено немного результатов, относящихся к нелинейным уравнениям.

Так, ряд результатов получен для уравнений типа Брио-Буке — уравнений вида $P(y, y^{(n)}) = 0$, где $n \in \mathbb{N}$, а P — многочлен с комплексными коэффициентами.

Для уравнений типа Брио-Буке имеется гипотеза, согласно которой любое мероморфное решение такого уравнения лежит в классе W, состоящем из рациональных функций, рациональных функций от некоторой экспоненциальной функции и эллиптических функций. Над доказательством этой гипотезы работали многие известные математики — Ш. Брио, Ж.-К. Буке, Э. Пикар, Э. Хилле, С. Бэнк, Р. Кауфман, А. Э. Ерёменко и другие (см. [1]–[9]). К настоящему времени гипотеза доказана для мероморфных решений, имеющих хотя бы один полюс, и для целых решений уравнений, где главная часть многочлена P не имеет кратных корней ([7], [10]), но эти общие результаты не позволяют описать, например, все мероморфные решения уравнений

$$y^{(n)} = y^m, \qquad n, m \in \mathbb{N}, \quad m \geqslant 2 \tag{1}$$

(такая задача, в частном случае $n = 4$, $m = 5$, была поставлена в [6]). В данной работе излагаются методы и приёмы, позволяющие находить все мероморфные решения этих уравнений и аналогичных им. А именно, доказана

Теорема 1. *Дифференциальное уравнение (1) имеет ненулевое мероморфное решение тогда и только тогда, когда*

$$\frac{n}{m-1} = k \in \mathbb{N}, \tag{2}$$

причем этим решением является функция

$$y = \frac{c}{(z-a)^k}, \qquad a \in \mathbb{C}, \quad c = \sqrt[m-1]{(-1)^n k(k+1)\dots(k+n-1)}. \tag{3}$$

2. Вспомогательные утверждения

Лемма 1. *Решением дифференциального уравнения (1) не может быть ненулевая целая функция.*

Доказательство. Предположим, что целая функция $y = f(z)$ является решением уравнения (1). Согласно теории Вимана-Валирона (см. [11], гл. 9, 10; [12], гл. 1) существует неограниченно возрастающая последовательность значений R такая, что если $\eta \in \mathbb{C}$, $|f(\eta)| = M(R) = \max\limits_{|z|=R} |f(z)|$, то

$$f^{(n)}(\eta) = f(\eta)\left(\frac{\nu(R)}{\eta}\right)^n \left(1 + O\left(\nu(R)^{-\frac{1}{4}+\delta}\right)\right) = f^m(\eta),$$

где $\nu(R)$ — так называемый центральный индекс максимального члена $m(R)$ (см. [12], стр. 25, (8)). Так как $1 \leq \nu(R) \leq (\ln m(R))^{1+\varepsilon}$ (см. [12], стр. 22, (5)), а $m(R) \leq M(R)$ (см. [13], т. I, отдел III, № 122), то отсюда $|f(\eta)| < cR^{-\gamma}$ при некоторых постоянных $c, \gamma > 0$. Но тогда $f(z) \equiv 0$, что и требовалось доказать.

Лемма 2. *Ненулевая функция $f(z) \in \mathbb{C}(z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (1) тогда и только тогда, когда выполнено условие (2), а $f(z)$ имеет вид (3).*

Доказательство. Если функция $f(z)$ имеет полюс порядка $p \geq 1$, то в её разложение на простейшие дроби входит слагаемое $c/(z-a)^p$, где $c, a \in \mathbb{C}$, $c \neq 0$.

Тогда при подстановке $f(z)$ в уравнение (1) его левая часть будет иметь при $z=a$ полюс порядка $p+n$, а правая — полюс порядка pm, что возможно только в случае $p=k=n/(m-1)$, $c=\sqrt[m-1]{(-1)^n k(k+1)\dots(k+n-1)}$.

Рассмотрим разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана в достаточно малой окрестности точки $z=a$:

$$f(z)=\frac{c}{(z-a)^k}+\frac{c_{k-1}}{(z-a)^{k-1}}+\dots+\frac{c_1}{z-a}+g(z),\qquad c,c_{k-1},\dots,c_1\in\mathbb{C},\quad c\neq 0,\tag{4}$$

где функция $g(z)$ голоморфна в окрестности точки a. Предположим, что в разложении (4) среди чисел $c_{k-1},\dots,c_1$ не все равны нулю. Тогда после подстановки (4) в (1) имеем

$$\left(\frac{c}{(z-a)^k}+\frac{c_\varkappa}{(z-a)^\varkappa}+\dots+\frac{c_1}{z-a}+g(z)\right)^{(n)}=\left(\frac{c}{(z-a)^k}+\frac{c_\varkappa}{(z-a)^\varkappa}+\dots+\frac{c_1}{z-a}+g(z)\right)^m,$$

где $c_\varkappa\neq 0$, $1\leq\varkappa\leq k-1$. Сравнивая коэффициенты при $1/(z-a)^{\varkappa+n}$, получим

$$(-1)^n\varkappa(\varkappa+1)\dots(\varkappa+n-1)c_\varkappa=mc^{m-1}c_\varkappa,$$

откуда $\varkappa(\varkappa+1)\dots(\varkappa+n-1)=mk(k+1)\dots(k+n-1)$, что невозможно. Следовательно, $c_{k-1}=\dots=c_1=0$.

Из разложения $f(z)$ на простейшие дроби также следует, что степень числителя функции $f(z)$ должна быть строго меньше степени знаменателя. Поэтому

$$f(z)=\sqrt[m-1]{(-1)^n k\dots(k+n-1)}\left(\frac{1}{(z-a_1)^k}+\dots+\frac{1}{(z-a_s)^k}\right),\qquad s\in\mathbb{N},\quad a_i\neq a_j, i\neq j.$$

Подставляя $f(z)$ в (1), получим

$$\sum_{i=1}^{s}\frac{1}{(z-a_i)^{k+n}}=\left(\sum_{i=1}^{s}\frac{1}{(z-a_i)^k}\right)^m.\tag{5}$$

Знаменатели обеих частей равенства (5) одинаковы, тогда как старший член числителя левой части равен $sz^{(k+n)(s-1)}$, а правой части — $s^m z^{km(s-1)}$, что возможно только при $s=1$. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Уравнение (1) не может иметь ненулевых решений вида $f(e^{\alpha z})$, где $f(x)\in\mathbb{C}(x)$, $\alpha\in\mathbb{C}$.*

Доказательство. Если функция $f(x)$ имеет полюс порядка $p\geq 1$, то в её разложение на простейшие дроби входит слагаемое $\hat c/(x-a)^p$, где $a,\hat c\in\mathbb{C}$, $\hat c\neq 0$. Тогда после подстановки функции $f(e^{\alpha z})$ в (1) правая часть этого уравнения примет вид $f^m(e^{\alpha z})$, где $f^m(x)$ — рациональная функция, имеющая при $x=a$ полюс порядка mp. Левая же часть уравнения (1) примет вид $g(e^{\alpha z})$, где $g(x)$ имеет при $x=a$ полюс порядка $p+n$, так как ввиду формулы Лейбница

$$\left(\frac{\hat c}{(e^{\alpha z}-a)^p}\right)^{(n)}=\left(\frac{-p\alpha\hat c e^{\alpha z}}{(e^{\alpha z}-a)^{p+1}}\right)^{(n-1)}=-p\alpha\hat c e^{\alpha z}\left(\frac{1}{(e^{\alpha z}-a)^{p+1}}\right)^{(n-1)}-\dots$$

$$-p\alpha\hat c(e^{\alpha z})^{(n-1)}\frac{1}{(e^{\alpha z}-a)^{p+1}}=\frac{(-1)^n p\dots(p+n-1)\hat c\alpha^n e^{n\alpha z}}{(e^{\alpha z}-a)^{p+n}}+\dots-\frac{\hat c p\alpha^n e^{\alpha z}}{(e^{\alpha z}-a)^{p+1}}.\tag{6}$$

Поэтому $p=k=n/(m-1)$, а $\hat c=\sqrt[m-1]{(-1)^n k(k+1)\dots(k+n-1)a^n\alpha^n}$. Пусть $\xi_0=\ln a/\alpha$, где $\ln a$ — значение какой-либо фиксированной ветви функции $\ln z$ в точке $z=a$. Ввиду того, что

$$\frac{\hat c}{(e^{\alpha z}-a)^k}=\frac{\hat c}{(e^{\alpha(z-\xi_0+\xi_0)}-a)^k}=\frac{\hat c}{a^k(e^{\alpha(z-\xi_0)}-1)^k}=\frac{\hat c}{a^k(\alpha(z-\xi_0)+\alpha^2(z-\xi_0)^2/2+\dots)^k}=$$

$$= \frac{\hat{c}}{a^k\alpha^k(z-\xi_0)^k(1+\alpha(z-\xi_0)/2+\dots)^k} = \frac{\hat{c}}{a^k\alpha^k(z-\xi_0)^k}(1-k\alpha(z-\xi_0)/2+\dots),$$

разложение Лорана функции $f(e^{\alpha z})$ в достаточно малой окрестности точки $z=\xi_0$ должно начинаться с члена $c/(z-\xi_0)^k$, что соответствует (4).

Очевидно, что точка $\xi_1=\xi_0+2\pi i/\alpha$ также является полюсом функции $f(e^{\alpha z})$. Рассмотрим произвольную область $G\subseteq\mathbb{C}$, содержащую ξ_0 и ξ_1, но не содержащую других полюсов $f(e^{\alpha z})$. В этой области функция $f(e^{\alpha z})$, с учётом установленного при доказательстве леммы 2, имеет вид

$$f(e^{\alpha z}) = \frac{c}{(z-\xi_0)^k} + \frac{c}{(z-\xi_1)^k} + g(z),$$

где $g(z)$ голоморфна в G. Подставив это выражение в (1), получим

$$\frac{1}{(z-\xi_0)^{k+n}} + \frac{1}{(z-\xi_1)^{k+n}} + \frac{1}{c^m}g^{(n)}(z) = \left(\frac{1}{(z-\xi_0)^k} + \frac{1}{(z-\xi_1)^k} + \frac{1}{c}g(z)\right)^m.$$

В обеих частях последнего равенства рассмотрим члены с наибольшей скоростью убывания при $z\longrightarrow\infty$. Сумма таких членов в левой части эквивалентна при $z\longrightarrow\infty$ функции $2/z^{k+n}$, а в правой части — $2^m/z^{km}$, что при $m\geqslant 2$ невозможно. Лемма 3 доказана.

3. Доказательство теоремы 1

Из леммы 1 следует, что ненулевое мероморфное решение уравнения (1) не может быть целым. Но согласно [1] любое мероморфное решение, имеющее хотя бы один полюс, лежит в классе W. Ввиду лемм 2 и 3 оно является либо эллиптической функцией, либо функцией вида (3). Кроме того, имеет место

Лемма 4. *Никакая эллиптическая функция не может быть решением дифференциального уравнения (1).*

Доказательство. Предположим противное. Пусть $\varphi(z)$ — эллиптическая функция с периодами $\{2\omega_1;2\omega_2\}$, удовлетворяющая уравнению (1).

Рассмотрим представление $\varphi(z)$ через сигма-функции ([14], гл. 3; [15], гл. 7, §6):

$$\varphi(z) = \gamma\frac{\sigma(z-a_1)\dots\sigma(z-a_s)}{\sigma(z-b_1)\dots\sigma(z-b_s)},$$

где $\{a_1,\dots,a_s\}$ — все нули функции $\varphi(z)$, а $\{b_1,\dots,b_s\}$ — все полюса $\varphi(z)$ в параллелограмме периодов.

При этом $a_1+\dots+a_s=b_1+\dots+b_s$, $\gamma\in\mathbb{C}$, $\sigma(z)$ — целая функция с простыми нулями в вершинах параллелограмма периодов,

$$\sigma(z) = z\cdot\prod_{(m,n)\in\mathbb{Z}\setminus\{(0,0)\}}\left(1-\frac{z}{\Omega_{m,n}}\right)\exp\left\{\frac{z}{\Omega_{m,n}}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{\Omega_{m,n}}\right)^2\right\},\qquad \Omega_{m,n}=2m\omega_1+2n\omega_2.$$

Как установлено при доказательстве леммы 2, любой полюс функции $\varphi(z)$ должен иметь порядок $k=n/(m-1)$. Поэтому можно считать, что $b_1=\dots=b_k$, $b_j\neq b_1$ при $j>k$.

Положим

$$h(z) = \gamma\frac{\sigma(z-a_1)\dots\sigma(z-a_s)}{\sigma(z-b_{k+1})\dots\sigma(z-b_s)}.$$

Тогда

$$\varphi(z) = \frac{h(z)}{\sigma^k(z-b_1)}.$$

Из соотношения $\sigma(z+2\omega_1)=-e^{2\eta_1(z+\omega_1)}\sigma(z)$ ([14], гл. 3, §13) и того, что $a_1+\cdots+a_s = kb_1+b_{k+1}+\cdots+b_s$, получим

$$h(z+2\omega_1) = (-1)^k e^{2k\eta_1(z-b_1+\omega_1)}h(z), \tag{7}$$

откуда

$$h'(z+2\omega_1) = (-1)^k 2k\eta_1 e^{2k\eta_1(z-b_1+\omega_1)}h(z) + (-1)^k e^{2k\eta_1(z-b_1+\omega_1)}h'(z). \tag{8}$$

Так как совокупности $\{a_1,\ldots,a_s\}$ и $\{b_1,\ldots,b_s\}$ задают все нули и полюса внутри параллелограмма периодов, то $h(b_1)\neq 0$. Отсюда и (7) следует, что $h(b_1+2\omega_1)\neq 0$. Отметим, что если $h'(b_1)=0$, то ввиду (8) $h'(b_1+2\omega_1)\neq 0$. Положим $z_0=b_1$, если $h'(b_1)\neq 0$ и $z_0=b_1+2\omega_1$, если $h'(b_1)=0$.

В силу выбора z_0 получаем $h(z_0)\neq 0$, $h'(z_0)\neq 0$. Так как $\sigma'(0)\neq 0$, $\sigma'(2\omega_1)\neq 0$, то разложение функции $\varphi(z)=\dfrac{h(z)}{\sigma^k(z-b_1)}$ в ряд Лорана в окрестности точки z_0 имеет вид

$$\varphi(z) = \frac{A}{(z-z_0)^k} + \frac{B}{(z-z_0)^{k-1}} + \frac{\psi(z)}{(z-z_0)^{k-2}},$$

где $\psi(z)$ голоморфна в некоторой окрестности точки z_0, $AB\neq 0$, причём, как следует из доказательства леммы 2, $A=\sqrt[m-1]{(-1)^n k\ldots(k+n-1)}$. Подставив $\varphi(z)$ в (1), получим

$$\frac{(-1)^n k\ldots(k+n-1)A}{(z-z_0)^{k+n}} + \frac{(-1)^n(k-1)\ldots(k+n-2)B}{(z-z_0)^{k+n-1}} + \cdots + \left(\frac{\psi(z)}{(z-z_0)^{k-2}}\right)^{(n)} =$$

$$= \left(\frac{A}{(z-z_0)^k} + \frac{B}{(z-z_0)^{k-1}} + \frac{\psi(z)}{(z-z_0)^{k-2}}\right)^m = \frac{A^m}{(z-z_0)^{km}} + \frac{mA^{m-1}B}{(z-z_0)^{km-1}} + \ldots.$$

Сравнивая в полученном равенстве члены вида $C/(z-z_0)^{k+n-1}$, получим $k-1=(k+n-1)m$, что невозможно. Лемма 4 доказана.

Из леммы 4 и рассуждений непосредственно перед ней следует утверждение теоремы 1.

4. Заключение

Используемые в настоящей статье методы могут быть применены к уравнениям более общего вида, чем (1). В частности, с помощью обобщения проведённых рассуждений можно найти все мероморфные решения уравнений $(y^{(n)})^l = y^m$, $n,m,l\in\mathbb{N}$, $m\neq l$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Briot Ch., Bouquet J. Intégration des équations différentielles au moyen de fonctions elliptiques // J. École Polytechnique. 1856. Vol. 21. P. 199-254.

2. Briot Ch., Bouquet J. Théorie des fonctions doublement périodiques et, en particulier, des fonctions elliptiques. Paris, Mallet-Bachelier, 1859.

3. Picard E. Sur une propriété des fonctions uniformes d'une variable et sur une classe d'équations différentielles // C. R. Acad. Sci. Paris. 1880. Vol. 91. P. 1058-1061.

4. Hille E. Ordinary differential equations in the complex domain // Pure Appl. Math. 1976. Wiley-Interscience [John Wiley & Sonns], New York-London-Sydney.

5. Bank S.B., Kaufman R.P. On Briot-Bouquet differential equations and a question of Einar Hille // Math. Z. 1981. Vol. 177, № 4. P. 549-559.

6. Еременко А.Э. Мероморфные решения уравнений типа Брио-Буке // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. 1982. Т. 38. Харьков: Вища школа. С. 48-56.

7. Eremenko A. E., Liao L., Ng T. W. Meromorphic solutions of higher order Briot–Bouquet differential equations // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 2009. Vol. 146, P. 197-206.

8. Hayman W.K. The growth of solutions of algebraic differential equations // Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl. 1996. Vol. 7, № 2. P. 67-73.

9. Hille E. Higher order Briot-Bouquet differential equations // Ark. Mat. 1978. Vol. 16, № 1-2. P. 271-286.

10. Янченко А. Я. Об одном продвижении в доказательстве гипотезы о мероморфных решениях уравнений типа Брио-Буке // Изв. РАН. Сер. матем. 2022. Т. 86, № 5. С. 197-208.

11. Валирон Ж. Аналитические функции. М.: Гостехиздат, 1957.

12. Виттих Г. Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям. М.: Физматгиз, 1960.

13. Полиа Г., Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа. М.: Наука, 1978.

14. Ахиезер Н.И. Элементы теории эллиптических функций. М.: Наука, 1970.

15. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций. М.: Наука, 1967–1968.

REFERENCES

1. Briot, Ch. & Bouquet, J. 1856, “Intégration des équations différentielles au moyen de fonctions elliptiques”, *J. École Polytechnique*, vol. 21, pp. 199-254.

2. Briot, Ch. & Bouquet, J. 1859, “Théorie des fonctions doublement périodiques et, en particulier, des fonctions elliptiques”, *JMallet-Bachelier, Paris*.

3. Picard, E. 1880, “Sur une propriété des fonctions uniformes d’une variable et sur une classe d’équations différentielles”, *C. R. Acad. Sci. Paris*, vol. 91, pp. 1058-1061.

4. Hille, E. 1976, “Ordinary differential equations in the complex domain”, *Pure Appl. Math.*, Wiley-Interscience [John Wiley & Sonns], New York-London-Sydney.

5. Bank, S. B. & Kaufman R. P. 1981, “On Briot-Bouquet differential equations and a question of Einar Hille”, *Math. Z.*, vol. 177, no. 4, pp. 549-559.

6. Eremenko, A. E. 1986, “Meromorphic solutions of equations of Briot–Bouquet type”, *Amer. Math. Soc. Transl.*, vol. 133, pp. 15-23.

7. Eremenko, A. E., Liao, L. & Ng, T. W. 2009, “Meromorphic solutions of higher order Briot–Bouquet differential equations”, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, vol. 146, pp. 197-206.

8. Hayman, W. K. 1996, “The growth of solutions of algebraic differential equations”, *Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl.*, vol. 7, no. 2, pp. 67-73.

9. Hille, E. 1978, “Higher order Briot-Bouquet differential equations”, *Ark. Mat.*, vol. 16, no. 1-2, pp. 1020-1030.

10. Yanchenko, A. Ya. 2022, "One advance in the proof of the conjecture on meromorphic solutions of Briot–Bouquet type equations", *Izv. Math.*, vol. 86, no. 5, pp. 819-836.

11. Valiron, G. 1954, "Fonctions analytiques", *Presses universitaires de France, Paris.*

12. Wittich, H. 1955, "Neuere Untersuchungen über eindeutige analytische Funktionen", *Ergeb. Math. Grenzgeb. (N.F.)*, 8, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg.

13. Polia, G. & Szegö, G. 1964, "Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis", ", *Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg*, New York.

14. Akhiezer, N. 1990, Elements of the theory of elliptic functions, Transl. Math. Monogr., AMS, Providence, RI, vol. 79.

15. Markushevich, A. I. 1967-1968, "Theory of analytic Functions", *Nauka, Moscow* (Russian).

Получено: 18.02.2024
Принято в печать: 04.09.2024

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 25. Выпуск 3.

УДК 519.2 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-351-358

О формировании мягких норм для оценки функционирования сложных систем[1]

Р. А. Жуков, С. В. Прокопчина

Жуков Роман Александрович — доктор экономических наук, кандидат физико-математических наук, Финансовый университет при Правительстве РФ (Тульский филиал) (г. Тула).
e-mail: pluszh@mail.ru
Прокопчина Светлана Васильевна — доктор технических наук, Финансовый университет при Правительстве РФ (г. Москва).
e-mail: svprokopchina@mail.ru

Аннотация

Представлен метод формирования мягких норм для сложных систем, функционирующих в условиях неопределенности, на основе методологии байесовских интеллектуальных измерений в рамках регуляризирующего байесовского подхода. Продемонстрирована реализация метода на примере сельского хозяйства Тульской области.

Ключевые слова: плотность распределения вероятностей, байесовские интеллектуальные технологии, мягкие нормы, агрегирование, сложная система.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:
Жуков, Р. А, Прокопчина, С. В. О формировании мягких норм для оценки функционирования сложных систем // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 3, с. 351–358.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 25. No. 3.

UDC 519.2 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-351-358

On the formation of soft norms for evaluating the functioning of complex systems[2]

R. A. Zhukov, S. V. Prokopchina

Zhukov Roman Aleksandrovich — doctor of economic sciences, candidate of physical and mathematical sciences, Financial University under the Government of the Russian Federation (Tula Branch) (Tula).
e-mail: pluszh@mail.ru
Prokopchina Svetlana Vasilyevna — doctor of technical sciences Financial University under the Government of the Russian Federation (Moscow).
e-mail: svprokopchina@mail.ru

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-28-20020, https://rscf.ru/project/24-28-20020/ и Тульской области

[2]The study was carried out at the expense of a grant from the Russian science Foundation № 24-28-20020, https://rscf.ru/project/24-28-20020/ and Tula region

Abstract

The method for the formation of soft norms for complex systems operating under conditions of uncertainty is presented, based on the methodology of Bayesian intelligent measurements within the framework of the regularizing Bayesian approach. The implementation of the method is demonstrated using the example of agriculture in the Tula region.

Keywords: probability distribution density, Bayesian intelligent technologies, soft norms, aggregation, complex system.

Bibliography: 15 titles.

For citation:
Zhukov, R. A., Prokopchina, S. V. 2024, "On the formation of soft norms for evaluating the functioning of complex systems", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 3, pp. 351–358.

1. Введение

Нормы для функционирования технических систем ассоциируют с их техническими требованиями и характеристиками в соответствии со стандартами [1, 2], в том числе для программных систем [3]. Под нормой (нормативом) будем понимать (ожидаемое, заданное) плановое значение признака (характеристик, результатов, факторов) либо их совокупности, определяющее штатный (стандартный) режим функционирования сложной системы, ее подсистем или элементов. Нормы для ряда факторов экологических подсистем регламентируются стандартами в области экологии и природопользования (предельно допустимые концентрации (ПДК), предельно допустимые сбросы (ПДС) и др.) [4]. Что же касается сложных систем, таких как социо-эколого-экономические системы и их подсистемы (социальная, экономическая, экологическая), то выбор нормативов для результатов их функционирования является проблемой, поскольку системы работают в условиях неопределенности; результат – результативный признак – систем зависит от множества факторов, оценка влияния которых требует привлечение экономико-статистического аппарата обработки и анализа данных с построением соответствующих моделей связи результативных и факторных признаков, характеризующих сбалансированность функционирования сложных систем [5]. Следовательно, для таких систем возникает необходимость формирования нечетких (мягких) норм – вероятных диапазонов значений норм [6] на основе построения t-норм, вероятностных норм или s-норм.

2. Методология и материалы исследования

В исследовании будем использовать методологию байесовских интеллектуальных измерений (БИИ) в рамках регуляризирующего байесовского подхода (РБП) [7].

Пусть имеется набор значений i факторов $q^{(i)}(t)$ для периодов времени t $(i = 1, .., I)$. Причем, $q^{(i)}(t) \in [q^{(i)}_{min} - \sigma^{(i)}; q^{(i)}_{max} + \sigma^{(i)}]$; $\sigma^{(i)}$ - корректировка интервала (диапазона), имеющего смысл динамических ограничений. Будем называть факторы базовыми, если для них нормы $q^{(i)}_{norm}$ известны, либо нормы определяются по формуле:

$$q^{(i)}_{norm} = (q^{(i)}_{min} + q^{(i)}_{max})/2. \tag{1}$$

Корректировка интервала $\sigma^{(i)}$ определяется по формуле:

$$\sigma^{(i)} = q^{(i)}_{norm}/3. \tag{2}$$

Для формирования априорных шкал необходимо задать число реперов J_r для числовой шкалы, которые будут определять для каждого $q^{(i)}(t)$ пару чисел $(h^{(i)}_j(t); p^{(i)}_j(t))$, где $h^{(i)}_j(t)$ -

значение фактора $q^{(i)}(t)$, соответствующее положению репера на шкале (список результатов или значимых альтернативных решений из множества решений $H_J(t)$ $(j = 1, ..., J_r))$; $p_j^{(i)}(t)$ - вероятность, того, что значение $q^{(i)}(t) = h_j^{(i)}(t)$. Обычно J_r задается нечетным. Лингвистическая шкала содержит 9 классов J_c (предельно ниже нормы, критически ниже нормы, значительно ниже нормы, ниже нормы, норма, выше нормы, значительно выше нормы, критически выше нормы, предельно выше нормы) [8]. Число реперов J_r или классов J_c соответствует набору гипотез $H_j^{(i)} : q^{(i)}(t) = h_j^{(i)}(t)$ - i эталонных распределений для случайной величины $h^{(i)}$. В качестве эталонных распределений можно выбрать нормальные распределения с математическим ожиданием $h_j^{(i)}(t)$ и $\sigma_{norm}^{(i)} = (q_{max}^{(i)} - q_{min}^{(i)})/(n_r + 1)$. Для лингвистической шкалы осуществляется аналогичная процедура, причем $h_j^{(i)}(t)$ соответствуют серединам интервала классов лингвистической шкалы, а длины интервалов, расположенных ниже нормы и выше нормы, определяются отдельно $(j = 1, .., J_c)$. Тогда в простейшем случае вероятность $P^a(H_j^{(i)})$ j эталонной гипотезы определяется по формуле:

$$P^a(H_j^{(i)}) = 1/Jr; P^a(H_j^{(i)}) = 1/J_c, \tag{3}$$

где a — обозначение априорной оценки параметра.

Пусть S – событие, заключающееся в совместном появлении значений оценок индикатора $\tilde{h}_j^{(i)}(t)$.

Тогда апостериорная (обозначим как ap) вероятность совместного появления значений индикаторов при условии справедливости гипотезы $H_j^{(i)}$ $P^{ap}(H_j^{(i)}|S)$ будет определяться как:

$$P^{ap}(H_j^{(i)}|S) = P^a(H_j^{(i)})P(S|H_j^{(i)})/\sum_{j=1}^{J} P^a(H_j^{(i)})P(S|H_j^{(i)}). \tag{4}$$

Здесь $J = J_r$ или $J = J_c$, а вероятность гипотезы при условии появления события S можно определить по формуле:

$$P(S|H_j^{(i)}) = \int_{-\infty}^{q_j^{(i)}(t)} f(x, h_j^{(i)}(t), \sigma_{norm}^{(i)})dx, \tag{5}$$

где $f(x, h_j^{(i)}(t), \sigma_{norm}^{(i)})$ – плотность нормального распределения с математическим ожиданием $h_j^{(i)}(t)$ и дисперсией $(\sigma_{norm}^{(i)})^2$.

Для других распределений формула (5) будет аналогичной за исключением параметров выбранного эталонного распределения.

Предположим, что информация об объекте, характеризуемом фактором $q^{(i)}(t)$ в период t, получена из L различных источников, и которая образует множество $X^{(i)}(t)$, содержащее значения $x_l^{(i)}$ $(l = 1, .., L)$. Тогда для агрегирования информации из двух источников (двухпотоковое измерение) можно воспользоваться формулой, аналогичной байесовской свертке [6]:

$$P_{k,j,t}^{ap}(x_1^{(i)}(t)|x_2^{(i)}(t)) = \frac{P^{ap}(H_k^{(i)}|S)P^{ap}(H_j^{(i)}|S)}{\sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{J} P^{ap}(H_k^{(i)}|S)P^{ap}(H_j^{(i)}|S)}, \tag{6}$$

где K, J – значимые альтернативные значения для первого и второго источника информации (потока) соответственно.

Для свертки трех значений фактора в период t в числителе и знаменателе формулы (6) первые сомножители необходимо заменить на $P_{k,j,t}^{ap}(x_1^{(i)}(t)|x_2^{(i)}(t))$.

Продолжая рекурсию, получим вероятность совместного появления значений индикатора $h_j^{(i)}(t)$ множества $X^{(i)}(t)$. Аналогичная процедура проводится для каждого $x_l^{(i)}(t)$ $(l = 1, .., L)$. Результат обозначим как $P^{ap}_{k,j,t}(x_1^{(i)}(t)|\bigcup_{s=1\setminus l\neq s}^{L} x_s^{(i)}(t))$.
Тогда свертка по всем $x_s^{(l)}(t)$ будет определяться как:

$$P^{ap}(h_j^{(i)}(t)|\{Mx_l^{(i)}(t)\}) = \frac{1}{L} P^{ap}_{k,j,t}(x_1^{(i)}(t)|\bigcup_{s=1\setminus l\neq s}^{L} x_s^{(i)}(t)), \tag{7}$$

где $\{Mx_l^{(i)}(t)\}$ можно связать с множеством метрологических требований измерения информационных потоков $\{MX^{(i)}(t)\}$. Обозначим такую операцию «*». Результаты измерения определяются условиями реализации измерения $Y^{(i)}(t)$, включающие в себя множество метрологических требований $\{MX^{(i)}(t)\}$, множество априорной информации A, ограничений и допущений O. Тогда с учетом условий $Y^{(i)}(t)$ соответствующую вероятность обозначим $P^{ap}(h_j^{(i)}(t)|\{Mx_l^{(i)}(t)\}|Y^{(i)}(t))$.

В случае, если известна априорная информация, построенная из множества информационных потоков, с учетом условий реализации измерений $Y^{(i)}(t)$, то рекурсивно используя формулы (6) и (7), можно получить соответствующие значения вероятности $P^a(H_j^{(i)})$ j эталонной гипотезы, заменив формулу (3). Обозначим такие вероятности $P^{ap}_{j,t-1}(h_j^{(i)}(t-1)|\{Mx_l^{(i)}(t-1)\}|$ $Y^{(i)}(t-1))$, где $t-1$ описывает, что априорная информация получена ранее. Пусть имеется фактор $q^{(m)}(t)$ с известными динамическими ограничениями, и для которого первоначально установлена норма в соответствии с формулой (1). Остальные $I-1$ факторов, являются влияющими. Тогда мягкая норма для m фактора в период времени t может быть определена набором пар чисел $(h_j^{(m)}(t); P^{ap}_{norm}(h_j^{(m)}(t)|\{Mx_l^{(m)}(t)\}|Y^{(m)}(t)))$, где $j = 1, \ldots, J$ и $J = Jr = Jc$. Вероятность $P^{ap}_{norm}(h_j^{(m)}(t)|\{Mx_l^{(m)}(t)\}|Y^{(m)}(t))$ – вероятность того, что норма для фактора $q^{(m)}(t)$ соответствует $h_j^{(m)}(t)$, – будет определяться посредством формулы:

$$\begin{aligned} P^{ap}_{norm}(h_j^{(m)}(t)|\{Mx_l^{(m)}(t)\}|Y^{(m)}(t)) = [P^{ap}_{j,t-1}(h_j^{(m)}(t-1)|\{Mx_l^{(m)}(t-1)\}|Y^{(m)}(t-1))\times \\ \times P(\tilde{h}_j^{(m)}(t)|\{Mx_l^{(m)}(t)\}|Y^{(m)}(t))]/[\sum_{j=1}^{J} P^{ap}_{j,t-1}(h_j^{(m)}(t-1)|\{Mx_l^{(m)}(t-1)\}|Y^{(m)}(t-1))\times \\ \times P(\tilde{h}_j^{(m)}(t)|\{Mx_l^{(m)}(t)\}|Y^{(m)}(t))], \end{aligned} \tag{8}$$

где $P(\tilde{h}_j^{(m)}(t)|\{Mx_l^{(m)}(t)\}|Y^{(m)}(t))$ определяется байесовской сверткой – рекурсивного применения формулы (6) и формулы (7):

$$P(\tilde{h}_j^{(m)}(t)|\{Mx_l^{(m)}(t)\}|Y^{(m)}(t)) = \frac{1}{I-1} \sum_{i=1\setminus m\neq i}^{I} P^{ap}_{k,j,t}(h_j^{(i)}(t)|\bigcup_{s=1\setminus m\neq s}^{I} h_j^{(s)}(t)|\{Mx_l^{(s)}(t)\}|Y^{(s)}(t)). \tag{9}$$

Таким образом, для фактора $q^{(m)}(t)$ для каждого из периодов времени t можно установить собственную норму $q^{(m)}_{norm}(t)$ с учетом влияющих факторов – условий, в которых функционирует сложная система.

3. Результаты

Для демонстрации реализации метода рассмотрим вид деятельности по общероссийскому классификатору видов экономической деятельности (ОКВЭД2) Раздел А. «Сельское, лесное хозяйство, охота, рыболовство и рыбоводство». Для раздела А выберем факторы: объем валового регионального продукта (ВРП), стоимость основных производственных фондов (ОФ) и среднегодовую численность занятых (ЧЗ). Отметим, что эти факторы используются для построения модели связи между результатами (ВРП) и влияющими факторами (ОФ, ЧЗ) производства в виде степенной мультипликативной производственной функции, аналогичной функции Кобба-Дугласа, используемых при оценке сбалансированности функционирования сложных систем в качестве нормативных моделей и моделей функционирования [9], в том числе при построении агрегированных функций [10] и дальнейшего их использования при решении оптимизационных задач [11]. В качестве информационной базы будем использовать открытые данные Федеральной службы государственной статистики (Росстат) для Тульской области за 2007–2022 г. [12], а также рейтинга регионов в 2022 г. [13]. С целью обеспечения сопоставимости стоимостных факторов в разные периоды времени скорректируем их на уровень инфляции и приведем к уровню 2007 года в рамках гипотезы об инвариантности процессов относительно моделей [14].

Для построения мягких норм будем использовать программную платформу «Инфоаналитик 2.0» [15].

На рис. 1 представлена мягкая норма ВРП раздела А, рассчитанная для 2022 года.

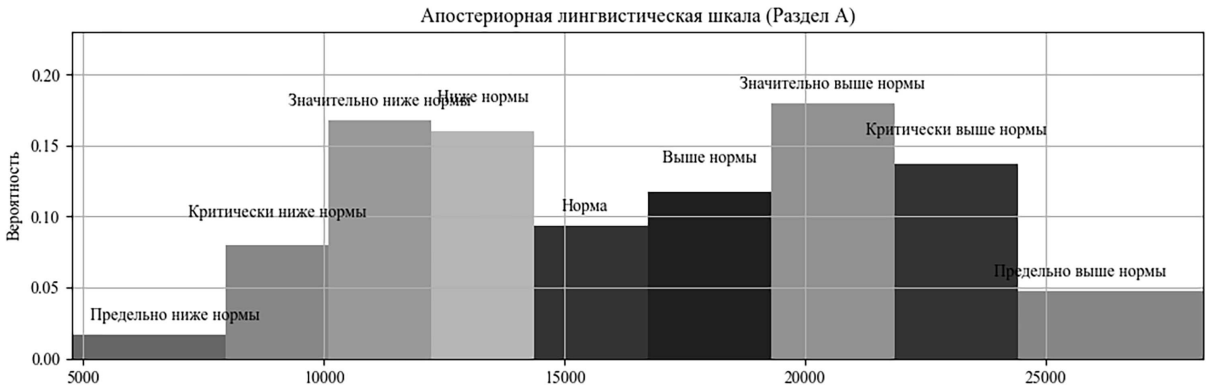


Рис. 1: Мягкая норма для ВРП Раздел А Тульской области в 2022 г., млн руб.

Как видно из рис. 1 мягкая норма есть набор значений с соответствующими вероятностями, представленных на лингвистической шкале.

Результаты расчета средневзвешенных норм для 2007–2022 гг. представлены на рис. 2.

Из рис. 2 видно, что за счет изменяющихся условий функционирования субъектов хозяйствования Тульской области по разделу А (ОКВЭД2) изменяются и соответствующие нормы, установка которых взамен, например, среднего значения за все периоды наблюдения представляется корректным, поскольку учитываются факторы, влияющие результативный признак (ВРП).

Действительно, если проанализировать изменение стоимости основных производственных фондов и численности занятых в сфере сельского хозяйства, то их тенденции разнонаправлены. Причем стоимость ОФ увеличивается, а ЧЗ уменьшается. Это накладывает ограничения на возможный объем ВРП по разделу А, поскольку эти признаки являются основными факторами производства. В связи с такими изменениями мягкие нормы меняются во времени, а, следовательно, их можно считать мягкими динамическими нормами.

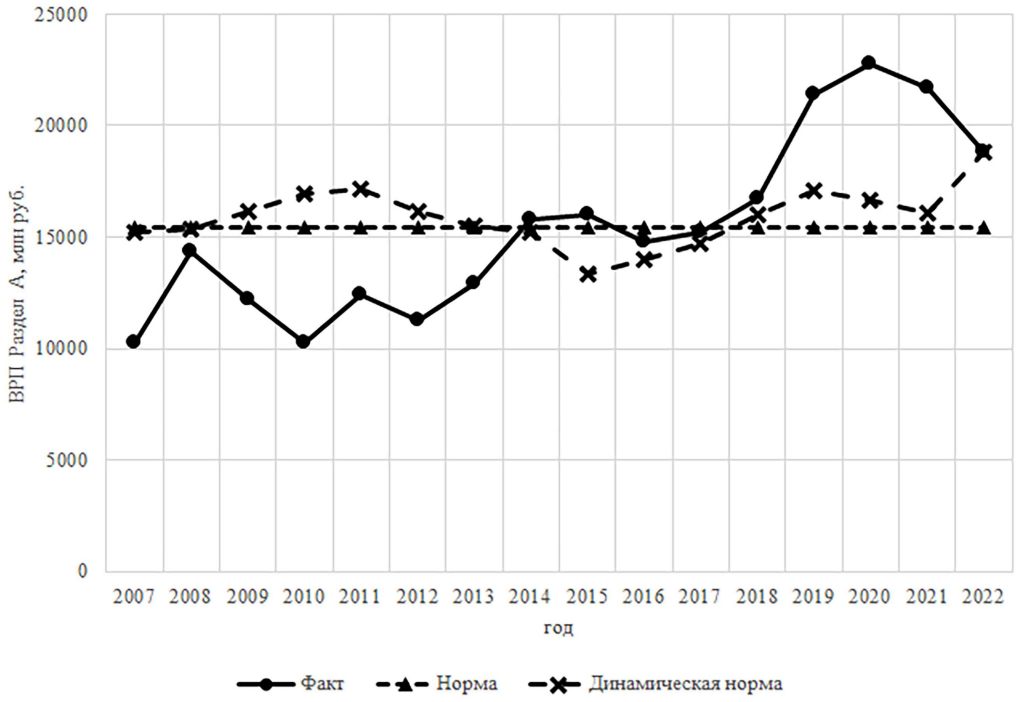


Рис. 2: Средневзвешенные динамические нормы для ВРП Раздел А Тульской области в 2007 – 2022 гг., млн руб.

Представленный метод может иметь приложения в различных областях деятельности, в том числе, для оценки функционирования технических систем, технико-экономических систем, а также социо-эколого-экономических систем, последние из которых идентифицируются как наиболее сложные системы, обладающие высокой степенью неопределенности. В таких условиях применение методологии байесовских интеллектуальных измерений представляется обоснованным и целесообразным.

4. Заключение

Представленный и примененный на примере Тульской области метод формирования мягких норм может выступать в качестве составляющей оценки результативности функционирования элемента сложной системы. В случае рассмотрения нескольких результативных признаков и их агрегирования в рамках принятой классификации в интегральный индикатор посредством свертки частных факторов может служить оценочной характеристикой для подсистемы или сложной системы в целом.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андреев, А. В. Теоретические основы надежности технических систем: учебное пособие А. В. Андреев, В. В. Яковлев, Т. Ю. Короткая. — СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2018. 164 с.

2. Техническое регулирование: технические регламенты и стандартизация : учебное пособие / сост. И. Ю. Матушкина, Л. А. Онищенко. — Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2018. 208 с.

3. Белик, А. Г. Качество и надежность программных систем : учеб. пособие / А. Г. Белик, В. Н. Цыганенко ; Минобрнауки России, ОмГТУ. — Омск : Изд – во ОмГТУ, 2018. 80 с.

4. Мезенина, О. Б. Экономика природопользования: экономическая эффективность природоохранных затрат промышленного предприятия: учебное пособие. — Екатеринбург: УГЛТУ, 2023. 88 с.

5. Zhukov, R., Kuznetsov, G., Manokhin, E., Gorodnichev, S., Plinskaya, M. Balanced functioning of socio-economic systems: regional perspective // Journal of Law and Sustainable Development. 2023. Vol. 11. No. 12. P. e1922.

6. Прокопчина, С. В. Основы теории шкалирования в экономике: учебное пособие. — М.: ИД «НАУЧНАЯ БИБЛИОТЕКА», 2021. 272 с.

7. Прокопчина, С. В. Байесовские интеллектуальные измерения. — М.: Изд. Дом «НАУЧНАЯ БИБЛИОТЕКА», 2021. 495 с.

8. Прокопчина, С. В. Байесовские интеллектуальные технологии в задачах моделирования закона распределения в условиях неопределенности: монография. М.: Издательский дом «НАУЧНАЯ БИБЛИОТЕКА», 2020. 292 с.

9. Жуков, Р. А. Подход к оценке функционирования иерархических социально-экономических систем и принятию решений на базе программного комплекса «ЭФРА» // Бизнес-информатика. 2020. Т. 14. № 3. С. 82-95.

10. Жуков, Р. А., Козлова, Н. О. О плотности распределения вероятностей агрегированной случайной величины для оценки функционирования сложных систем: трехмерный случай // Чебышевский сборник. 2022. Т. 23. № 3 (84). С. 255-261.

11. Zhukov, R. A., Kozlova N. O., Manokhin E. V., Myasnikova E. B., Melay E. A. Multi-criteria optimization as the methodology of ensuring sustainable development of regions: Tula region of the Russian Federation // International Journal of Sustainable Development and Planning. 2023. Vol. 18. No. 4. Pp. 1057-1068.

12. Федеральная служба государственной статистики Российской Федерации. URL: https://gks.ru.

13. Рейтинг социально-экономического развития регионов в 2022 году. URL: https://realnoevremya.ru/attachments/1760.

14. Жуков, Р. А., Плинская М. А., Манохин Е. В. Оценка функционирования регионов на основе производственных функций с приведенными стоимостными факторами // Journal of Applied Economic Research. 2023. Т. 22. № 3. С. 657-682.

15. Жуков, Р.А., Прокопчина С.В. Программный комплекс «Инфоаналитик 2.0». Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ No 2024617544 от 03.04.2024.

REFERENCES

1. Andreev, A. V. 2018, “Theoretical foundations of reliability of technical systems”, *St. Petersburg, Publishing House of the Polytechnic University*, 164 p.

2. Matushkina, I. Y., Onishchenko L. A. 2018, “Technical regulation: technical regulations and standardization: a textbook”, *Yekaterinburg, Ural University Publishing House,*, 208 p.

3. Belik, A. G. 2018, “Quality and reliability of software systems: textbook”, *Omsk, Publishing House of OmSTU*, 80 p.

4. Mezenina, O. B. 2023, “Economics of environmental management: economic efficiency of environmental protection costs of an industrial enterprise: a textbook”, *Yekaterinburg, UGLTU*, 88 p.

5. Zhukov, R., Kuznetsov, G., Manokhin, E., Gorodnichev, S., Plinskaya, M. 2023, “Balanced functioning of socio-economic systems: regional perspective”, *Journal of Law and Sustainable Development*, vol. 11, no. 12, pp. e1922.

6. Prokopchina, S. V. 2021, “Fundamentals of the theory of scaling in economics: textbook”, *M., Publishing house “SCIENTIFIC LIBRARY”*, 272 p.

7. Prokopchina, S. V. 2021, “Bayesian intellectual measurements”, *M., Publishing house “SCIENTIFIC LIBRARY”*, 495 p.

8. Prokopchina, S. V. 2020, “Bayesian intelligent technologies in problems of modeling the distribution law under uncertainty: monograph”, *M., Publishing house “SCIENTIFIC LIBRARY”*, 292 p.

9. Zhukov R. A. 2020, “An approach to assessing the functioning of hierarchical socio-economic systems and decision-making based on the EFRA software package”, *Business Informatics*, vol. 14, no. 3, pp. 82-95.

10. Zhukov, R. A., Kozlova, N.O. 2022, “On the probability distribution densities of an aggregated random variable for evaluating the functioning of complex systems: a three-dimensional case”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 23, no. 3 (84), pp. 255-261.

11. Zhukov, R. A., Kozlova, N. O., Manokhin, E. V., Myasnikova, E. B., Melay, E. A. 2023, “Multi-criteria optimization as the methodology of ensuring sustainable development of regions: Tula region of the Russian Federation”, *International Journal of Sustainable Development and Planning*, vol. 18, no. 4, pp. 1057-1068.

12. Federal State Statistics Service of the Russian Federation. URL: https://gks.ru.

13. Rating of socio-economic development of regions in 2022.
URL: https://realnoevremya.ru/attachments/1760.

14. Zhukov, R. A., Plinskaya, M. A., Manokhin, E. V. 2023, “Assessment of the Regions Functioning Based on Production Functions with the Above Cost Factors”, *Journal of Applied Economic Research*, vol. 22, no. 3, pp. 657–682.

15. Zhukov R.A., Prokopchina S.V. The Infoanalyst 2.0 software package. Certificate of state registration of the computer program No. 2024617544 dated 04/03/2024.

Получено: 30.04.2024
Принято в печать: 04.09.2024

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 25. Выпуск 3.

УДК 517 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-359-364

Мера трансцендентности числа Лиувилля в p-адической области

Е. С. Крупицын

Крупицын Евгений Станиславович — кандидат физико-математических наук, Институтт математики и информатики МПГУ (г. Москва).
e-mail: krupitsin@gmail.com

Аннотация

В статье установлены оценки многочлена от полиадического Лиувиллева числа в p-адической области.

Ключевые слова: полиадическое число Лиувилля, трансцендентность.

Библиография: 14 названий.

Для цитирования:
Крупицын, Е. С. Мера трансцендентности числа Лиувилля в p-адической области // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 3, с. 359–364.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 25. No. 3.

UDC 517 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-359-364

A measure of the transcendence of the Liouville number in the p-adic domain

E. S. Krupitsyn

Krupitsyn Evgeny Stanislavovich — candidate of physical and mathematical sciences, Institute of Mathematics and Computer Science of MSPU (Moscow).
e-mail: krupitsin@gmail.com

Abstract

The paper presents a lover estimate for the p-adic value of a polynomial evaluated at polyadic Liouville number.

Keywords: polyadic Liouville numbers, transcendence

Bibliography: 14 titles.

For citation:
Krupitsyn, E. S. 2024, “A measure of the transcendence of the Liouville number in the p-adic domain” , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 3, pp. 359–364.

1. Введение

В ряде работ [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11], [12], [13], [14] существенно используется понятие полиадического Лиувиллева числа.

В работах [2], [3], [4], [5] устанавливается бесконечная линейная независимость значений гипергеометрических рядв с праметрами — полиадическими числами Лиувилля. В работе [1] установлено, что при определенных условиях на параметры рядов вида

$$F_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1))n \dots (\alpha_r)_n}{(\beta_1))n \dots (\beta_s)_n} z^n,$$
$$F_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1 + 1))n \dots (\alpha_r + 1)_n}{(\beta_1 + 1))n \dots (\beta_s + 1)_n} z^n$$

хотя бы одно из чисел $F_0(\xi), F_1(\xi)$, где ξ — натуральное число или полиадическое число Лиувилля, трансцендентное в бесконечном множестве полей p-адических чисел.

Перейдем к точным формулировкам. Полиадическим числом называется элемент прямого произведения колец целых p-адических чисел, взятого по всем простым числам p. Его канонический вид

$$\mathfrak{a} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot n!, \quad a_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad a_n \leqslant n.$$

Этот ряд сходится во всех полях p-адических чисел и его сумму в поле p-адических чисел обозначим $\mathfrak{a}^{(p)}$.

Полиадическое число $\mathfrak{a}$ назовем *полиадическим числом Лиувилля*, если для любых чисел P и n существует такое целое число A, что для всех простых чисел $p \leqslant P$ выполняется неравенство

$$|\mathfrak{a}^{(p)} - A| < |A|^{-n}.$$

Разумеется, полиадическое число Лиувилля является трансцендентным элементом любого поля p-адических чисел [6], [7].

В работах [12], [13] устанавлены оценки многочленов и линейных форм от полиадических чисел Лиувилля. В этих оценках содержатся величины, точные значения которых не указаны. Цель этой работы — получение явных оценок меры трансцендентности в p-адическом поле для полиадических чисел указанного ниже вида.

2. Основной результат

Пусть $\lambda_0 = 1$ и для любого простого числа p такого, что $p \leqslant \left[e^{\lambda_0}\right] + 1$ выполнено $ord_p \mu_0 = \left[e^{\lambda_0}\right] + 1$.

Пусть далее $\lambda_1 = \lambda_0 + \mu_0$ и для любого простого числа p такого, что $p \leqslant \left[e^{\lambda_1}\right] + 1$ выполнено $ord_p \mu_1 = \left[e^{\lambda_1}\right] + 1$.

На k-м шаге имеем

$$\lambda_k = \lambda_{k-1} + \mu_{k-1} \tag{1}$$

и для любого простого числа p такого, что

$$p \leqslant \left[e^{\lambda_k}\right] + 1 \tag{2}$$

выполнено

$$ord_p \mu_k = \left[e^{\lambda_k}\right] + 1. \tag{3}$$

Обозначим

$$\lambda = \lambda_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k. \tag{4}$$

Из (1) – (4) следует, что λ является полиадическим числом Лиувилля.

Теорема 1. *Для любого натурального числа d существует постоянная H_0 такая, что для любого ненулевого многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами степени не выше d и высоты $H \geqslant H_0$ и любого простого числа p, удовлетворяющего неравенству*

$$p \leqslant \left[\exp\left(C_1 e^{2H}\right)\right] + 1 \tag{5}$$

выполнено неравенство

$$|P(\lambda)|_p \geqslant e^{-dC_3 e^{2H}}, \tag{6}$$

где $C_3 > C_1 > C_0 = 2\ln 2$.

Доказательство. Для любого натурального числа k имеет место равенство

$$P(\lambda) = P(\lambda_k) + P'(\lambda_k)(\lambda - \lambda_k) + \frac{P''(\lambda_k)}{2}(\lambda - \lambda_k)^2 + \ldots + \frac{P^{(d)}(\lambda_k)}{d!}(\lambda - \lambda_k)^d. \tag{7}$$

Так как $P(x)$ имеет целые коэффициенты, а числа λ_k — натуральные, все числа

$$P'(\lambda_k), \quad \frac{P''(\lambda_k)}{2}, \quad \ldots, \quad \frac{P^{(d)}(\lambda_k)}{d!}$$

являются целыми. Кроме того, согдасно (1) – (4)

$$\lambda - \lambda_k = \sum_{l=k}^{\infty} \mu_l$$

и

$$|\lambda - \lambda_k|_p| = \mu_k|_p, \tag{8}$$

$$\left| P'(\lambda_k)(\lambda - \lambda_k) + \frac{P''(\lambda_k)}{2}(\lambda - \lambda_k)^2 + \ldots + \frac{P^{(d)}(\lambda_k)}{d!}(\lambda - \lambda_k)^d \right|_p \leqslant |\mu_k|_p \tag{9}$$

для всех простых чисел p, удовлетворяющих неравенству (2).

По лемме о модуле старшего члена [14], если

$$\lambda_k > H + 1, \tag{10}$$

то $P(\lambda_k) \neq 0$ и, следовательно,

$$|P(\lambda_k)|_p \geqslant \frac{1}{|P(\lambda_k)|} \geqslant \frac{1}{dH\lambda_k^d} = e^{-\ln H - \ln d - d\ln \lambda_k}. \tag{11}$$

Если выполнено неравенство

$$|\mu_k|_p < e^{-\ln H - \ln d - d\ln \lambda_k}, \tag{12}$$

то из (7), (9), (11) и (12) следует оценка

$$|P(\lambda)|_p = |P(\lambda_k)|_p \geqslant e^{-\ln H - \ln d - d\ln \lambda_k}. \tag{13}$$

Так как

$$\mu_{k-1} = \prod_{p\leqslant\left[e^{\lambda_{k-1}}\right]+1} p^{\left[e^{\lambda_{k-1}}\right]+1} = \prod_{p\leqslant\left[e^{\lambda_{k-1}}\right]+1} e^{\ln p\left(\left[e^{\lambda_{k-1}}\right]+1\right)} =$$
$$= \exp\left(\left[e^{\lambda_{k-1}}\right]+1\right) \sum_{p\leqslant\left[e^{\lambda_{k-1}}\right]+1} \ln p \leqslant \exp\left(C_0\left(\left[e^{\lambda_{k-1}}\right]+1\right)^2\right). \tag{14}$$

Здесь использована известная оценка $\sum\limits_{p\leqslant x} \leqslant C_0 x$, причем при $x \geqslant 2$ можно положить $C_0 = 2\ln 2$.

Если число H достаточно велико для того, чтобы выполняется неравенство

$$\lambda_{k-1} \leqslant H+1, \tag{15}$$

т.е. $H \geqslant H_1$, тогда из (14) и (15) получим

$$\lambda_k = \lambda_{k-1} + \mu_{k-1} \leqslant H+1+\exp\left(\left(C_0\left[e^{H+1}+1\right]\right)^2\right) \leqslant \exp\left(C_1 e^{2H}\right) \tag{16}$$

при $H \geqslant H_2$ для любого $C_1 > C_0$.

Тогда

$$|\mu_k|_p = p^{-\left(\left[e^{\lambda_k}\right]+1\right)} = e^{-\left(\left[e^{\lambda_k}\right]+1\right)\ln p} < e^{-\left(\left[e^{\lambda_k}\right]+1\right)\ln 2} <$$
$$< e^{-\left(\left[e^{\exp\left(C_1 e^{2H}\right)}\right]+1\right)\ln 2} \tag{17}$$

и условие (12), согласно (16), следует из неравенства

$$\left(\left[e^{\exp\left(C_1 e^{2H}\right)}\right]+1\right)\ln 2 > \ln H + \ln d + dC_1 e^{2H}. \tag{18}$$

Это неравенство выполнено для всех $H \geqslant H_3$, где H_3 зависит от числа d.

При этом, согласно (13), (16)

$$|P(\lambda)|_p \geqslant e^{-\ln H-\ln d-d\ln\lambda_k} \geqslant e^{-\ln H-\ln d-dC_1 e^{2H}} \geqslant e^{-dC_3 e^{2H}}$$

при $H \geqslant H_4$.

Выбирая $H_0 = \max(H_1, H_2, H_3, H_4)$ получим утверждение теоремы. □

3. Заключение

Получение оценок снизу многочленов и линейных форм от p-адических чисел Лиувилля оказывается несколько более простой задачей, чем оценка многочлена от комплексных чисел Лиувилля.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чирский В. Г. Трансцендентность p-адических значений обобщённых гипергеометрических рядов с трансцендентными полиадическими параметрами // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. — 2023. — Т. 510. — С. 29-32.

2. Чирский В. Г. Арифметические свойства значений в полиадической лиувиллевой точке рядов эйлерова типа с полиадическим лиувиллевым параметром // Чебышевский сборник. — 2021. — Т. 22, № 2. — С. 304–312.

3. Чирский В. Г. Арифметические свойства значений обобщённых гипергеометрических рядов с полиадическими трансцендентными параметрами // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. — 2022. — Т. 506. — С. 95–107.

4. Чирский В. Г. Бесконечная линейная независимость с ограничениями на подмножество простых чисел значений рядов эйлерова типа с полиадическим лиувиллевым парамером // Чебышевский сборник. — 2022. — Т. 23, № 1. — С. 153–166

5. Чирский В. Г. Новые задачи теории трансцендентных полиадических чисел // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. — 2022. — Т. 505. — С. 63–65.

6. Chirskii V. G. On polyadic liouville numbers // Doklady Mathematics. — 2022. — Vol. 106, no. S2. — P. S161–S164.

7. Чирский В. Г. Полиадические числа Лиувилля // Чебышевский сборник. — 2021. — Т. 22, № 3. — С. 245–255.

8. Chirskii V. G. Arithmetic properties of an euler-type series with polyadic liouville parameter // Russian Journal of Mathematical Physics. — 2021. — Vol. 28, no. 3. — P. 293–302.

9. Чирский В. Г. Арифметические свойства рядов эйлерова типа с параметром – лиувиллевым полиадическим числом // Доклады Академии наук. — 2020. — Т. 494. — С. 65–67.

10. Chirskii V. G. Arithmetic properties of generalized hypergeometric series // Russian Journal of Mathematical Physics. — 2020. — Vol. 27, no. 2. — P. 175–184.

11. Chirskii V. G. Product formula, global relations and polyadic integers // Russian Journal of Mathematical Physics. — 2019. — Vol. 26, no. 3. — P. 286–305.

12. Крупицын Е. С. Оценка многочлена от глобально трансцендентного числа // Чебышевский сборник. — 2017. — Т. 18, № 4. — С. 245–254.

13. Крупицын Е. С. Арифметические свойства рядов некоторых классов // Чебышевский сборник. — 2019. — Т. 20, № 2. — С. 374-382.

14. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. — М.: Наука. — 1968.

REFERENCES

1. Chirskii, V. G. 2023, “Transcendence of p-adic measurements of generally accepted hypergeometric series with transcendental polyadic parameters”, *Reports of the Russian Academy of Sciences. Mathematics, computer science, management processes.*, vol. 510, pp. 29–32.

2. Chirskii, V. G. 2022, “Arithmetic properties of values at polyadic liouville points of euler-type series with polyadic liouville parameter”, *Doklady Mathematics*, Vol. 106, № . 2, pp. 150–153.

3. Chirskii, V. G. 2022, “Arithmetic properties of the values of generalized hypergeometric series with polyadic transcendental parameters”, *Doklady Mathematics.*, Vol. 106, № . 2, pp. 386—397.

4. Chirskii, V. G. 2022, “Infinite linear independence with constraints on a subset of prime numbers for values of euler-type series with polyadic liouville parameter”, *Doklady Mathematics.*, Vol. 106, № . 2, pp. 154–160.

5. Chirskii, V. G. 2022, “New problems in the theory of transcendental polyadic numbers”, *Doklady Mathematics.*, Vol. 106, № . 1, pp. 265-–267.

6. Chirskii, V. G. 2022, “On polyadic liouville numbers”, *Doklady Mathematics.* — 2022. — Vol. 106, no. S2. — pp. 161—164.

7. Chirskii, V. G. 2022, “Polyadic liouville numbers”, *Doklady Mathematics.* — 2022. — Vol. 106, no. S2. — pp. 137–141.

8. Chirskii, V. G. 2021, “Arithmetic properties of an euler-type series with polyadic liouville parameter”, *Russian Journal of Mathematical Physics.*, Vol. 28, № . 3, pp. 293—302.

9. Chirskii, V. G. 2020, “Arithmetic properties of euler-type series with a liouvillean polyadic parameter”, *Doklady Mathematics.*, Vol. 102, № . 2, pp. 68-–70.

10. Chirskii, V. G. 2020, “Arithmetic properties of generalized hypergeometric series”, *Russian Journal of Mathematical Physics.*, Vol. 27, № . 2, pp. 175—184.

11. Chirskii, V. G. 2019, “Product formula, global relations and polyadic integers”, *Russian Journal of Mathematical Physics.*, Vol. 26, № . 3, pp. 286—305.

12. Krupitsyn, E. S. 2017, “Estimation of a polynomial in a globally transcendental number”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 18, № . 4, pp. 245-–254.

13. Krupitsyn, E. S. 2019, “Arithmetic properties of series of some classes”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, № 2, pp. 374–382.

14. Kurosh, A.G. 1968, “Course of higher algebra”, *Moscow.: Science.*

Получено: 31.03.2024
Принято в печать: 04.09.2024

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 25. Выпуск 3.

УДК 511.36 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-365-372

Бесконечная алгебраическая независимость некоторых почти полиадических чисел

В. Ю. Матвеев

Матвеев Владимир Юрьевич — кандидат физико-математических наук, Российская академия народного хозяйства и государственной службе при Президенте РФ (г. Москва).
e-mail: salomaa@mail.ru

Аннотация

В работе рассматриваются F–ряды $f_{i,j}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_i)_n (\beta_j z)^n$, где α_i, β_j – некоторые рациональные числа. Эти ряды удовлетворяют системе линейных дифференциальных уравнений первого порядка с коэффициентами из $\mathbb{C}(z)$. Используя предыдущие результаты, полученные с помощью подхода, предложенного в одной из работ В.Х. Салихова, устанавливается алгебраическая независимость этих рядов над $\mathbb{C}(z)$. Применение общей теоремы об арифметических свойствах F–рядов из работ В.Г. Чирского, позволяет утверждать бесконечную алгебраическую независимость значений этих рядов. Это означает, что для любого многочлена $P(x_{1,1}, \ldots, x_{m,n})$ с целыми коэффициентами, отличного от тождественного нуля и любого целого числа $\xi \neq 0$, существует бесконечное множество простых чисел p таких что в поле $\mathbb{Q}_p$ выполняется неравенство $\left| P\left(f_{1,1}^{(p)}(\xi), \ldots, f_{m,n}^{(p)}(\xi)\right)\right|_p \neq 0$. Здесь символы $f_{ij}^{(p)}(\xi)$ обозначают суммы рядов $\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_i)_n (\beta_j \xi)^n$ в поле $\mathbb{Q}_p$.

Ключевые слова: Бесконечная алгебраическая независимость, почти полиадические числа.

Библиография: 17 названий.

Для цитирования:
Матвеев, В. Ю. Бесконечная алгебраическая независимость некоторых почти полиадических чисел // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 3, с. 365–372.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 25. No. 3.

UDC 511.36 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-365-372

Infinite algebraic independence of some almost polyadic numbers

V. Y. Matveev

Matveev Vladimir Yur'evich — candidate of physical and mathematical sciences, Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration (Moscow).
e-mail: salomaa@mail.ru

Abstract

The paper considers F-series $f_{i,j}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_i)_n (\beta_j z)^n$, where α_i, β_j are some rational numbers. These series satisfy a system of first-order linear differential equations with coefficients from $\mathbb{C}(z)$. Using previous results obtained using the approach proposed in one of the works of V.Kh. Salikhov, the algebraic independence of these series over $\mathbb{C}(z)$ is established. Application of the general theorem on the arithmetic properties of F-series from the works of V.G. Chirsky, allows us to assert the infinite algebraic independence of the values of these series. This means that for any polynomial $P(x_{1,1}, \ldots, x_{m,n})$ with integer coefficients other than the identical zero and any integer $\xi \neq 0$, there is an infinite set of prime numbers p such that in the field $\mathbb{Q}_p$ the inequality $\left| P\left(f_{1,1}^{(p)}(\xi), \ldots, f_{m,n}^{(p)}(\xi)\right)\right|_p \neq 0$. Here the symbols $f_{ij}^{(p)}(\xi)$ denote the sums of the series $\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_i)_n (\beta_j \xi)^n$ in the field $\mathbb{Q}_p$.

Keywords: Infinite algebraic independence, almost polyadic numbers.

Bibliography: 17 titles.

For citation:
Matveev, V. Yu. 2024, "Infinite algebraic independence of some almost polyadic numbers" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 3, pp. 365–372.

1. Введение

Работа посвящена применению обобщения метода Зигеля-Шидловского на полиадическую область к конкретным рядам, обобщающим классический ряд Эйлера, расходящийся в поле комплексных чисел. В направлении обобщения метода Зигеля-Шидловского на полиадическую область имеется достаточно много работ [17],[3]. В последнее время большое внимание привлекают ряды – параметры которых – полиадические числа Лиувилля [5]–[16].

Дадим необходимые определения.

Элементы кольца целых полиадических чисел $\mathfrak{a} \in \mathfrak{G}_t$ имеют каноническое представление в виде ряда

$$\mathfrak{a} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n! \tag{1}$$

где $a_n \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Кольцо $\mathfrak{G}_\tau$ является прямым произведением колец $\mathbb{Z}_{p_i}$ по всем простым числам p_i, при этом ряд $\mathfrak{a}$ сходится в любом $\mathbb{Z}_{p_i}$ и его сумма в этом кольце обозначается $a^{(p_i)}$.

В работе [3] предложена следующая классификация полиадических чисел.

Назовем полиадическое число $\mathfrak{a}$ *алгебраическим*, если существует отличный от нуля многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами такой, что полиадическое число $P(\mathfrak{a})$ равно нулю, т.е. для любого простого числа p в кольце $\mathbb{Z}_p$ выполнено равенство $P(a^{(p)}) = 0$.

Полиадическое число, которое не является алгебраическим, естественно называть *трансцендентным полиадическим числом*. В этом случае для любого отличного от нуля многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами существует хотя бы одно простое число p такое, что в кольце $\mathbb{Z}_p$ выполнено неравенство $P(a^{(p)}) \neq 0$.

Термин *почти полиадическое число* использован для обозначения того случая, когда рассматриваемый ряд сходится во всех полях $\mathbb{Q}_p$, кроме, быть может, конечного их числа.

Назовем почти полиадическое число $\mathfrak{a}$ *алгебраическим*, если существует отличный от нуля многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами такой, что почти полиадическое число $P(\mathfrak{a})$ равно нулю, т.е. для любого простого числа p кроме конечного числа простых, для которых рассматриваемый ряд расходится в $\mathbb{Q}_p$, в кольце $\mathbb{Z}_p$ выполнено равенство $P(a^{(p)}) = 0$.

Почти полиадическое число, которое не является алгебраическим, естественно называть *трансцендентным почти полиадическим числом*. В этом случае для любого отличного от

нуля многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами существует хотя бы одно простое число p такое, что в кольце $\mathbb{Z}_p$ выполнено неравенство $P(a^{(p)}) \neq 0$.

Будем называть почти полиадическое число *бесконечно трансцендентным*, если для любого отличного от нуля многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами существует бесконечное множество простых чисел p таких, что в кольце $\mathbb{Z}_p$ выполнено неравенство $P(a^{(p)}) \neq 0$.

Наконец, будем называть почти полиадическое число *глобально трансцендентным*, если для любого отличного от нуля многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами и любого простого числа p в кольце $\mathbb{Z}_p$ выполнено неравенство $P(a^{(p)}) \neq 0$.

Отметим, что из бесконечной трансцендентности $\mathfrak{a}$ не следует трансцендентность $a^{(p)}$ хотя бы для одного простого числа p.

Почти полиадические числа $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_m$ называются *алгебраически независимыми*, если для любого отличного от нуля многочлена $P(x_1, \ldots, x_m)$ с целыми коэффициентами существует хотя бы одно простое число p такое, что в кольце $\mathbb{Z}_p$ выполнено неравенство $P(a_1^{(p)}, \ldots, a_m^{(p)}) \neq 0$.

Будем называть почти полиадические числа *бесконечно алгебраически независимыми*, если для любого отличного от нуля многочлена $P(x_1, \ldots, x_m)$ с целыми коэффициентами существует бесконечное множество простых чисел p таких, что в кольце $\mathbb{Z}_p$ выполнено неравенство $P(a_1^{(p)}, \ldots, a_m^{(p)}) \neq 0$.

2. Основные результаты

Рассмотрим ряды $f_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_i)_n (\beta_j z)^n$.

В работе доказываются теоремы.

Теорема 1. *Пусть α_i, β_j, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, l$ рациональные числа, удовлетворяющие уровнениям*

$$\begin{array}{ll} \textit{при } j \neq s & \beta_j \neq \beta_s, \\ \textit{при } i \neq r & \alpha_i - \alpha_r \notin \mathbb{Z} \end{array}$$

Пусть $\xi \in \mathbb{Z}$, $\xi \neq 0$. Тогда полиадические числа $f_{1,1}(\xi), \ldots, f_{m,n}(\xi)$ – бесконечно алгебраически независимы.

Доказательство. Сначала требуется доказать алгебраическую независимость рядов (1) над полем $\mathbb{C}(z)$. Для этого мы применим теорему из [1], доказанную методом, предложенным В.Х. Салиховым в работе [2], для E–функций. Сформулируем эту теорему из [1].

Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha)_n (\beta z)^n = y$$

удовлетворяет уравнению

$$y' = \frac{1 - \alpha\beta z}{\beta z^2} y - \frac{1}{\beta z^2}$$

Поэтому $f_{ij}(z)$ удовлетворяют системе уравнений

$$y_{ij}{}' = \frac{1 - \alpha_i \beta_j z}{\beta_j z^2} y_{ij} - \frac{1}{\beta_j z^2}; i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, l \tag{2}$$

Эта система после умножения на $\beta_j z^2$ каждого из уравнений примет вид

$$\beta_j z^2 y_{ij}{}' - (1 - \alpha_i \beta_j z)\, y_{ij} = -1$$

Обозначим $\beta_j z^2 = P_{1,ij}$, $-(1 - \alpha_i \beta_j z) = P_{0,ij}$, $Q_{ij} = -1$ тогда уравнения (2) примут вид

$$P_{1,ij}{y_{ij}}' + P_{0,ij}y_i = Q_{ij}.$$

Пусть

$$\begin{gathered} P_{1,i}y_i' + P_{0,i}y_i = Q_i, i = 1, \ldots, m \\ \text{где } P_{0,i}, P_{1,i}, Q_i \in \mathbb{Q}(z). \end{gathered} \tag{3}$$

$$\exp\left(\int \left(\frac{P_{0,i}(z)}{P_{1,i}(z)} - \frac{P_{0,j}(z)}{P_{1,j}(z)}\right) dz\right) \notin \mathbb{C}(z), \quad i \neq j. \tag{4}$$

Тогда $f_1(z), i = 1, \ldots, m$ алгебраически независимы над $\mathbb{C}(z)$ Рассмотрим

$$\begin{gathered} \frac{P_{0,i,j}}{P_{1,i,j}} - \frac{P_{0,r,s}}{P_{1,r,s}} = \\ \frac{-(1-\alpha_i\beta_j z)}{\beta_j z^2} + \frac{(1-\alpha_r\beta_s z)}{\beta_s z^2} = \\ \left(\frac{1}{\beta_s} - \frac{1}{\beta_j}\right)\cdot\frac{1}{z^2} + \frac{\alpha_i}{z} - \frac{\alpha_r}{z} = \\ \left(\frac{1}{\beta_s} - \frac{1}{\beta_j}\right)\cdot\frac{1}{z^2} + \frac{(\alpha_i - \alpha_r)}{z} = \\ \int\left(\frac{P_{0,i,j}}{P_{1,i,j}} - \frac{P_{0,r,s}}{P_{1,r,s}}\right)dz = \\ (\alpha_i - \alpha_r)\cdot\ln z + \left(\frac{1}{\beta_j} - \frac{1}{\beta_s}\right)\cdot\frac{1}{z}; \\ \exp\int\left(\frac{P_{0,i,j}}{P_{1,i,j}} - \frac{P_{0,r,s}}{P_{1,r,s}}\right)dz = z^{\alpha_i-\alpha_r}\cdot e^{\left(\frac{1}{\beta_j}-\frac{1}{\beta_s}\right)\cdot\frac{1}{z}}. \end{gathered}$$

если $\beta_i \neq \beta_s$, то эта величина не входит в $\mathbb{C}(z)$, какими бы ни были α_i и α_r. Если $\beta_j = \beta_s$, то эта величина становится равной $z^{\alpha_i-\alpha_r}$ и она не принадлежит $\mathbb{C}(z)$, если $\alpha_i - \alpha_r \notin \mathbb{Z}$ для всех i, r, $i \neq r$.

В работе В.Г Чирского [3] сформулирована и доказана следующая теорема:

Теорема 2. *Пусть $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ входят в класс F–рядов $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot n!\xi^n$, $a_n \in \mathbb{Q}$ составляют решение системы линейных дифференциальных уравнений*

$$Y_i' = \sum_{j=1}^{m} B_{i,j}(z)Y_i + B_{i,0}(z), \quad i = 1, \ldots, m, \tag{5}$$

где $B_{i,j} \in \mathbb{Q}(z)$. Пусть $T_0(z) \in \mathbb{Z}[z]$ и $T_0(z)\cdot B_{i,j}(z) \in \mathbb{Z}[z]$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 0, \ldots, m$ причем степень $T_0(z)$– наименьшая возможная, а коэффициенты $T_0(z)$–взаимно простые целые числа и алгебраически независимы над $\mathbb{Q}(z)$. Пусть число $\xi \in \mathbb{Z}$, $\xi \neq 0$ и отлично от особых точек системы (5). Тогда почти полиадические числа $\mathfrak{a}_i = \sum_{n=1}^{\infty} a_{i,n} \cdot n!\xi^n$, $i = 1, \ldots, n$, $a_{i,n} \in \mathbb{Z}$ бесконечно алгебраически независимы.

Так как $f_{i,j}(z)$ ходят в класс F– рядов, все условия этой теоремы выполнены и теорема 1 доказана. □

Пусть

$$\xi = \sum_{k=0}^{\infty} \theta_k, \tag{6}$$

$$\Theta_n = \sum_{k=0}^{n} \theta_k. \tag{7}$$

Пусть Ξ – ряд (4), где θ_k – целые числа из поля $\mathbb{K}$, сходящийся во всех полях $\mathbb{K}_v$, $v \in V_0$. Пусть $\epsilon > 0$, $0 < \delta < 1$ и существует бесконечное множество номеров n таких, что для всех простых чисел p удовлетворяющих неравенству

$$p \leq m \exp\left(\ln^{1+2\epsilon} \left|\overline{\Theta_n}\right|\right) \tag{8}$$

и любого нормирования v, продолжающего p – адическое нормирование в поле $\mathbb{K}$, выполняется неравенство

$$|\Xi - \Theta_n|_v < \exp\left(-\left(\exp\left(\ln^{1+\epsilon} \left|\overline{\Theta_n}\right|\right) \ln^{1+2\epsilon} \left|\overline{\Theta_n}\right|\right)\right) > \exp\left(\ln^{2+\epsilon} \left|\overline{\Theta_n}\right|\right) \tag{9}$$

Теорема 3. *Пусть α_i, β_j, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, l$ рациональные числа, удовлетворяющие уравнениям*

$$\begin{array}{ll} \textit{при } j \neq s & \beta_j \neq \beta_s, \\ \textit{при } i \neq r & \alpha_i - \alpha_r \notin \mathbb{Z} \end{array}$$

Пусть $\Xi \in \mathbb{Z}$, $\Xi \neq 0$. Тогда полиадические числа $f_{1,1}(\Xi), \ldots, f_{m,n}(\Xi)$ – бесконечно алгебраически независимы.

Доказательства теоремы 3 следуют из приведенных выше рассуждений и теоремы 2 статьи [4].

3. Заключение

Работа продолжает исследования автора (ссылку на статью). Планируется исследовать статистические свойства этих рядов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Матвеев, В. Ю. Свойства элементов прямых произведений полей // Чебышевский сборник.- 2019.- Т. 20.- Вып. 2 (70).- С. 386 – 393.

2. Салихов, В. Х. Об алгебраической независимости значений E-функций, удовлетворяющих линейным дифференциальным уравнениям первого порядка // Матем. заметки.- 2019.- Т.13.- № 1.- С. 29 – 40.

3. Chirskii, V. G. Product formula, global relations and polyadic integers // Russian Journal of Mathematical Physics, издательство Maik Nauka/Interperiodica Publishing (Russian Federation).-2019.- Т. 26.- № 3.- С. 286 – 305

4. Юденкова, Е. Ю. Бесконечная линейная и алгебраическая независимость значений F-рядов в полиадических лиувиллевых точках // Чебышевский сборник.- 2021.- Т. 22.- Вып. 2.-с. 334 – 346

5. Чирский, В. Г. Трансцендентность некоторых 2-адических чисел // Чебышевский сборник.- 2023.- Т. 24.- № 5.- С. 194 – 200. DOI

6. Чирский, В. Г. Трансцендентность p–адических значений обобщённых гипергеометрических рядов с трансцендентными полиадическими параметрами // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления, издательство Российская академия наук (Москва).- 2023.- Т. 510.- С. 29 – 32. DOI

7. Chirskii, V. G. On Polyadic Liouville Numbers // Doklady Mathematics, издательство Maik Nauka/Interperiodica Publishing (Russian Federation).- 2022.- Т. 106.- № S2. -С. 161 – 164.

8. Chirskii, V. G. Arithmetic Properties of Values at Polyadic Liouville Points of Euler-Type Series with Polyadic Liouville Parameter // Doklady Mathematics, издательство Maik Nauka/Interperiodica Publishing (Russian Federation).- 2022.- Т. 106.- № S2.- С. 150 – 153. DOI

9. Chirskii, V. G. Infinite Linear Independence with Constraints on a Subset of Prime Numbers for Values of Euler-Type Series with Polyadic Liouville Parameter // Doklady Mathematics, издательство Maik Nauka/Interperiodica Publishing (Russian Federation).- 2022.- Т. 106.- № S2.- С. 154 – 160. DOI

10. Chirskii, V. G. Arithmetic Properties of Polyadic Integers // Doklady Mathematics, издательство Maik Nauka/Interperiodica Publishing (Russian Federation).- 2022.- Т. 106, № S2, С. 142 – 146. DOI

11. Chirskii, V. G. Arithmetic Properties of the Values of Generalized Hypergeometric Series with Polyadic Transcendental Parameters // Doklady Mathematics, издательство Maik Nauka/Interperiodica Publishing (Russian Federation).- 2022.- Т. 106.- № 2.- С. 386 – 397. DOI

12. Чирский, В. Г. Арифметические свойства значений обобщённых гипергеометрических рядов с полиадическими трансцендентными параметрами // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления, издательство Российская академия наук (Москва).- 2022.- Т. 506.- С. 95 – 107. DOI

13. Чирский, В. Г., Новые задачи теории трансцендентных полиадических чисел // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления, издательство Российская академия наук (Москва).- 2022.- Т. 505.- С. 63 – 65. DOI

14. Чирский, В. Г. Полиадические числа Лиувилля // Чебышевский сборник.- 2021.- Т. 22.- № 3.- С. 245 – 255 DOI

15. Chirskii, V. G. Arithmetic Properties of Euler-Type Series with a Liouvillean Polyadic Parameter // Доклады Академии наук, издательство ФГБУ «Издательство Наука» (Москва).-2020.- Т. 102.- № 2.- С. 68 – 70.

16. Чирский, В. Г. Арифметические свойства рядов эйлерова типа с параметром – лиувиллевым полиадическим числом // Доклады Академии наук, издательство ФГБУ «Издательство Наука» (Москва).- 2020.- Т. 494.- С. 65 – 67. DOI

17. Chirskii, V. G. Arithmetic properties of Generalized Hypergeometric Series // Russian Journal of Mathematical Physics, издательство Maik Nauka/Interperiodica Publishing (Russian Federation).- 2020.- Т. 27.- № 2.-С. 175 – 184. DOI

REFERENCES

1. Matveev, V. Yu. 2019, “Properties of elements of direct products of fields”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, № . 2, pp. 383—390.

2. Salikhov, V. Kh. 1973, “The algebraic independence of the values of E-functions satisfying linear first-order differential equations”, *Matem. zametki*, Vol. 13., № 1, pp. 29 – 40.

3. Chirskii, V. G. 2019, "Product formula, global relations and polyadic integers", *Russian Journal of Mathematical Physics, izdatel'stvo Maik Nauka/Interperiodica Publishing (Russian Federation)*, Vol 26, № 3, pp. 286 – 305.

4. Yudenkova, E. Y. 2021, "Infinite linear and algebraic independence of values of F-series at polyadic Liouvillea points", *Chebyshevskii sbornik*, Vol. 22, Iss. 2, pp. 334 – 346.

5. Chirskii, V. G. 2023, "Transcendence of certain 2-adic numbers", *Chebyshevskii sbornik*, Vol. 24, Iss. 5, pp.. 194 – 200. DOI

6. Chirskii, V. G. 2023, "Transcendence of p-adic values of generalized hypergeometric series with transcendental polyadic parameters", *Doklady Rossiyskoy akademii nauk. Matematika, informatika, protsessy upravleniya, izdatel'stvo Rossiyskaya akademiya nauk (Moskva)*, Vol. 510, pp. 29 – 32. DOI

7. Chirskii, V. G. 2022, "On Polyadic Liouville Numbers", *Doklady Mathematics, izdatel'stvo Maik Nauka/Interperiodica Publishing (Russian Federation)*, Vol 106, № S2, pp. 161 – 164. DOI

8. Chirskii, V. G. 2022, "Arithmetic Properties of Values at Polyadic Liouville Points of Euler-Type Series with Polyadic Liouville Parameter", *Doklady Mathematics, издательство Maik Nauka/Interperiodica Publishing (Russian Federation)*, Vol. 106, № S2, pp. 150 – 153. DOI

9. Chirskii, V. G. 2022, "Infinite Linear Independence with Constraints on a Subset of Prime Numbers for Values of Euler-Type Series with Polyadic Liouville Parameter", *Doklady Mathematics, izdatel'stvo Maik Nauka/Interperiodica Publishing (Russian Federation)*, Vol. 106, № S2, pp. 154 – 160. DOI

10. Chirskii, V. G. 2022, "Arithmetic Properties of Polyadic Integers", *Doklady Mathematics, izdatel'stvo Maik Nauka/Interperiodica Publishing (Russian Federation)*, tom 106, № S2, pp. 142 – 146. DOI

11. Chirskii, V. G. 2022, "Arithmetic Properties of the Values of Generalized Hypergeometric Series with Polyadic Transcendental Parameters", *Doklady Mathematics, izdatel'stvo Maik Nauka/Interperiodica Publishing (Russian Federation)*, Vol. 106, № 2, pp. 386 – 397. DOI

12. Chirskii, V. G. 2022, "Arithmetic properties of the values of generalized hypergeometric series with polyadic transcendental parameters", *Doklady Rossijskoj Akademii Nauk. Mathematika, Informatika, Processy Upravlenia, izdatel'stvo Rossiyskaya akademiya nauk (Moskva)*, Vol. 506, pp. 95 – 107. DOI

13. Chirskii, V. G. 2022, "New problems in the theory of transcendental polyadic numbers", *Doklady Mathematics, izdatel'stvo Maik Nauka/Interperiodica Publishing (Russian Federation)*, Vol. 106, № 1, pp. 265 – 267. DOI

14. Chirskii, V. G. 2022, "Polyadic Liouville Numbers", *Chebyshevskii Sbornik*, Vol. 106, № S2, pp. 137 – 141. DOI

15. Chirskii, V. G. 2020, "Arithmetic Properties of Euler-Type Series with a Liouvillean Polyadic Parameter", *Doklady Akademii nauk, izdatel'stvo FGBU "Izdatel'stvo Nauka" (Moskva)*, Vol. 102, № 2, pp.. 68 – 70

16. Chirskii, V. G. 2021, "Arithmetic Properties of an Euler-Type Series with Polyadic Liouville Parameter", *Russian Journal of Mathematical Physics, издательство Maik Nauka/Interperiodica Publishing (Russian Federation)*, Vol. 28, № 3, pp. 293 – 302. DOI

17. Chirskii, V. G. 2020, “Arithmetic properties of Generalized Hypergeometric Series”, *Russian Journal of Mathematical Physics, издательство Maik Nauka/Interperiodica Publishing (Russian Federation)*, Vol. 27, № 2, pp. 175 – 184. DOI

Получено: 21.04.2024
Принято в печать: 04.09.2024

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 25. Выпуск 3.

УДК 511.352 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-373-380

О специальных экстремальных множествах, связанных с таблицей умножения П. Эрдёша

Ю.Н. Штейников

Штейников Юрий Николаевич — Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт»; Федеральный научный центр «Научно-исследовательский институт системных исследований РАН» (г. Москва).
e-mail: yuriisht@gmail.com

Аннотация

В статье исследуется следующая задача, возникающая из теории произведений множеств. Пусть имеются два конечных подмножества из множества натуральных чисел, которые всюду в статье будут обозначаться как A и B. Полагаем, что они являются подмножеством интервала чисел $[1, Q]$. Вводим по определению множество, которое называется множеством произведения AB, элементы которого представляются в виде произведения элементов из A, B, иными словами такие ab, где $a \in A, b \in B$. В данной статье изучается задача об экстремально больших множествах A конечного интервала $[1, Q]$, которые обладают асимтотически наибольшим возможным произведением, то есть асимптотически наибольшим значением $|AA|$ равным $|A|^2/2$. В работе [2], была получена новая нетривиальная нижняя оценка на размер такого множества A по сравнению с предыдущим результатом статьи К.Форда [1]. В данной статье мы представляем метод , который улучшает предыдущий результат, а также рассматриваем другую версию этой задачи. В целом мы следуем и развиваем формулировки, аргументы, идеи и подходы предложенные в работах [1], [2].

Ключевые слова: натуральные числа, плотность, произведение.

Библиография: 12 названий.

Для цитирования:
Штейников, Ю. Н. О специальных экстремальных множествах, связанных с таблицей умножения П. Эрдёша // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 3, с. 373–380.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 25. No. 3.

UDC 511.352 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-373-380

On special extremal sets associated with the multiplication table of P. Erdős

Yu.N. Shteinikov

Shteinikov Yuri Nikolayevich — National Research Center «Kurchatov Institute»; Federal Research Center “Research Institute of System Research of the RAS” (Moscow).
e-mail: yuriisht@gmail.com

Abstract

This article investigates the following problem arising from the theory of products of sets. Let there be two finite subsets of the set of natural numbers, which throughout the article will be denoted as A and B. We assume that they are a subset of the interval of numbers $[1, Q]$. By definition, we introduce a set called the product set AB, the elements of which are represented as a product of elements from A, B, in other words, such elements ab, where $a \in A, b \in B$. This article studies the problem of extremely large sets A of a finite interval $[1, Q]$ that have the asymptotically largest possible product, that is, the asymptotically largest value of $|AA|$ equal to $|A|^2/2$. In the paper [2], a new non-trivial lower bound for the size of such a set A was obtained in comparison with the previous result of the paper by K. Ford [1] and also of the paper [2]. In this article we present a method that improves the previous result, and also introduce another version of this problem. In general, we follow and develop the formulations, arguments, ideas and approaches proposed in the works [1], [2].

Keywords: integer numbers, density, product.

Bibliography: 12 titles.

For citation:
Shteinikov, Yu. N. 2024, "On special extremal sets associated with the multiplication table of P. Erdős" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 3, pp. 373–380.

1. Введение

В общепринятой терминологии произведением числовых множеств A и B называется множество AB, которое задается так:

$$AB = \{ab : a \in A, b \in B\}.$$

Пусть $[N]$ обозначает интервал целых чисел $\{1, 2, \dots, N\}$, и величина $M_N = |[N][N]|$.

Одной из знаменитых задач, поставленной П. Эрдешем, о таблице умножения задает вопрос о правильном порядке роста значения M_N при $N \longrightarrow \infty$. В свою очередь П.Эрдеш установил [3]

$$M_N = \frac{N^2}{(\log N)^{2\theta + o(1)}},$$

где

$$2\theta = \frac{1}{2} - \frac{1 + \log\log 2}{\log 4} = 0.08607...$$

Кевин Форд в 2018 году улучшил это утверждение и доказал помимо остального ([4]), что

$$M_N \asymp \frac{N^2}{(\log N)^{2\theta} (\log\log N)^{3/2}}. \tag{1}$$

Возникшие из этой известной задачи П. Эрдеша естественно возникли ряд других математических вопросов, предложенные Х. Силлеруело с соавторами в статье [5]. Их исследование было посвящено изучению произведений и частных случайных подмножеств интервалов. Там же в упомянутой работе был представлен следующий вопрос.

1. Верно ли , что если $A \subset [N]$ и $|AA| \sim |A|^2/2$, то $|A| = o(N/\log^{1/2} N)$?

Отметим простое наблюдение, если $|AA| \sim |A|^2/2$, то тогда $|A|$ не может расти по порядку быстрее чем $M_N^{1/2}$.

С другой стороны Кевиным Фордом в работе [1] удалось доказать существование множества $A \subset [N]$ со свойством $|AA| \sim |A|^2/2$, размер которого близок к $M_N^{1/2}$. Им впервые получен отрицательный ответ на указанный выше вопрос. Более точно его результат выглядит следующим образом.

Теорема 1. *Пусть $D > 7/2$. Тогда для каждого $N \geq 10$ найдется множество $A \subset [N]$ размера*

$$|A| \geq \frac{N}{(\log N)^{\theta}(\log\log N)^{D}}, \tag{2}$$

для которого $|AA| \sim |A|^2/2$, при $N \longrightarrow \infty$.

Из приведенных выше рассуждений можно заключить, что показатель степени у логарифма в теореме является точным.

Говоря кратко, вывод этого утверждения основан на анализе структуры множества $[N][N]$, а именно на свойстве простых сомножителей чисел из $[N][N]$ и существенно использует результаты статей [4],[6]. Возникает вопрос об уточнении степени повторного логарифма в исходной оценке Теоремы 1. В статье [2] был уточнен предыдущий результат и была доказана такая теорема.

Теорема 2. *Пусть $D > 13/4$. Тогда при достаточно большом N найдется множество $A \subset [N]$ размера*

$$|A| \geq \frac{N}{(\log N)^{\theta}(\log\log N)^{D}}, \tag{3}$$

для которого $|AA| \sim |A|^2/2$, при $N \longrightarrow \infty$.

Целью же настоящей статьи является представить доказательство следующей теоремы.

Теорема 3. *Существует положительная абсолютная $\delta > 0$, и пусть $D > 13/4 - \delta$. Тогда при достаточно большом N найдется множества $A, B \subset [N]$ таких, что*

$$|A||B| \geq \frac{N^2}{(\log N)^{2\theta}(\log\log N)^{2D}}, \tag{4}$$

для которого $|AB| \sim |A||B|$, при $N \longrightarrow \infty$.

Мы придерживаемся схеме предложенной в упомянутой работе [1].

Следуя результатам [4], заключаем, что почти все элементы $[N][N]$ имеют асимптотически $\log\log N/\log 2$ простых делителей. По аналогии с [1], мы вводим в рассмотрение числовые множества A, элементы которых имеют асимптотически $\log\log N/\log 4$ простых сомножителей.

Кратко опишем некоторые этапы доказательства этих теорем по пунктам.

1)Для рассматриваемого выше множества A согласно [1] выписываем оценку на его размер.

2) Оцениваем сверху мультипликативную энергию A. Окажется, что ее значение близко к минимально возможной величине. Читателям напомним, что мультипликативная энергия $E(A)$ множества A, задается так:

$$E(A) := |\{a_1, a_2, b_1, b_2 \in A : a_1 b_1 = a_2 b_2\}|. \tag{5}$$

Верхнюю оценку для $E(A)$ мы получаем по схеме из [1], с дополнительным оптимизациями.

3) Выбираем случайные подмножества нулевой плотности $A^{'}$ во множестве A. Данные подмножества $A^{'}$ будут иметь уже асимптотически наименьшую возможную мультипликативную энергию: $E(A^{'}) \sim 2|A^{'}|^2$. Отсюда будет следовать, что множество $A^{'}$ будет подходящим для Теоремы 3.

Последующие разделы статьи имеют свою цель вывод Теоремы 3.

2. Предварительные утверждения.

Пусть p обозначает простое число, $\omega(n)$ есть количество простых делителей числа n, $\omega(n,t)$ – число простых делителей $p \le t$ числа n. Обозначим

$$\pi(x,k) = \{1 \le n \le x : \omega(n) = k\}. \tag{6}$$

Следующее утверждение может быть найдено в работе [7].

Лемма 1. *Пусть $x \ge 3$ и $1 \le k \le C \log\log x$ для некоторого фиксированного $C > 0$ и по определению $y = \frac{k}{\log\log x}$. Тогда имеет место*

$$|\pi(x,k)| = F(y)\frac{x}{\log x}\frac{(\log\log x)^{k-1}}{(k-1)!}\left(1 + O\left(\frac{1}{\log\log x}\right)\right), \tag{7}$$

где

$$F(y) = \frac{1}{\Gamma(y+1)}\prod_{p\in P}\left(1 + \frac{y}{p-1}\right)\left(1 - \frac{1}{p}\right)^y$$

Для сведения представим неравенство, связывающее размер произведения AA и энергию $E(A)$ множества A :

$$|AA| \ge \frac{|A|^4}{E(A)}. \tag{8}$$

Для технических выкладок нужен результат об оценке суммы мультипликативной функции.

Лемма 2. *Пусть f- действительнозначная мультипликативная функция такая, что $0 \le f(p^a) \le 1.9^a$ для всех простых чисел p и натуральных a. Тогда для любого $x > 1$ справедлива оценка*

$$\sum_{n\le x} f(n) \ll \frac{x}{\log x}\exp\left(\sum_{p\le x}\frac{f(p)}{p}\right). \tag{9}$$

Это утверждение есть следствие теоремы Х.Хальберстама и Х.Э. Рихтера. В явном виде это утверждение содержится в теореме 01 книги [7] .

Для специального случая функции $f(n) = \lambda^{\omega(n)}$ или $f(n) = \lambda^{\omega(n,t)}$ будет применяться это утверждение. Применяя предыдущую лемму к функции $f(n) = \lambda^{\omega(n,t)}$ и используя простую выкладку, мы получаем неравенство :

$$\sum_{n\le x}\lambda^{\omega(n,t)} \ll x(\log t)^{\lambda-1}. \tag{10}$$

3. Доказательство теоремы 3.

Пусть $K = [\frac{\log\log N}{\log 4}]$. По определению пусть

$$A = \left\{\frac{N}{2} \le n \le N : \mu(n) \ne 0, \omega(n) = K, \omega(n,t) \le \frac{\log_2 t}{\log 4} + 2 (3 \le t \le N)\right\}. \tag{11}$$

Нижняя оценка на размер A была представлена в [1].

Далее мы переходим к вопросу об оценке мультипликативной энергии множества A.

В работе [2] мы сопоставили каждому решению (a_1, b_1, a_2, b_2) взаимно однозначно мы сопоставили четверку $(\beta_{1,1}, \beta_{1,2}, \beta_{2,1}, \beta_{2,2})$, такую что :

$$a_1 = \beta_{1,1}\beta_{1,2}, b_1 = \beta_{2,1}\beta_{2,2}, a_2 = \beta_{1,1}\beta_{2,1}, b_2 = \beta_{1,2}\beta_{2,2}, \tag{12}$$

и также дополнительное свойство

$$\gcd(\beta_{1,1}, \beta_{1,2}) = \gcd(\beta_{2,1}, \beta_{2,2}) = \gcd(\beta_{1,1}, \beta_{2,1}) = \gcd(\beta_{1,2}, \beta_{2,2}) = 1. \tag{13}$$

Следующим шагом мы разбиваем все четверки $(\beta_{1,1}, \beta_{1,2}, \beta_{2,1}, \beta_{2,2})$ на "диадические интервалы а именно не теряя общности считаем, что $\min(\beta_{1,1}, \beta_{2,2}) \gg N^{1/2}$ и пусть

$$T \le \beta_{1,2} \le 2T. \tag{14}$$

Тогда можно сделать вывод, что

$$T/2 \le \beta_{1,2}, \beta_{2,1} \le 4T, \quad N/8T \le \beta_{1,1}, \beta_{2,2} \le 2N/T \tag{15}$$

Для данного T эти четверки обозначим через $\mathfrak{P}_T$. Чтобы посчитать все возможные такие четверки, мы проссумируем по всем T, пробегающие степени двойки вплоть до граничного значения.

Теперь приступим к оценке энергии и некоторым ее модификациям в доказательстве

Для удобства обозначим через $z_T = \frac{\log_2(4T)}{\log 4} + 2$. Исходя из предыдущих формул получаем :

$$\begin{gathered} \omega(\beta_{1,1}) + \omega(\beta_{1,2}) + \omega(\beta_{2,1}) + \omega(\beta_{2,2}) = 2K, \\ \omega(\beta_{1,2}) = \omega(\beta_{2,1}), \quad \omega(\beta_{1,1}) = \omega(\beta_{2,2}) \\ \omega(\beta_{1,1}, 4T) + \omega(\beta_{1,2}, 4T) + \omega(\beta_{2,1}, 4T) + \omega(\beta_{2,2}, 4T) \le 2z_T. \end{gathered} \tag{16}$$

Поскольку $\beta_{1,2}, \beta_{2,1} \le 4T$, то

$$\omega(\beta_{1,2}, 4T) = \omega(\beta_{1,2}), \omega(\beta_{2,1}, 4T) = \omega(\beta_{2,1}).$$

Вводим параметры $\lambda_1 = 1/2, \lambda_2 = 1/\log 4$. По определению пусть U_T задается выражением:

$$\begin{gathered} U_T = \sum_{\beta_{1,1}, \beta_{2,2} \le 2N/T} \sum_{\beta_{1,2}, \beta_{2,1} \le 4T} \lambda_2^{\omega(\beta_{1,1}) + \omega(\beta_{1,2}) + \omega(\beta_{2,1}) + \omega(\beta_{2,2}) - 2K} \times \\ \lambda_1^{\omega(\beta_{1,1}, 4T) + \omega(\beta_{1,2}, 4T) + \omega(\beta_{2,1}, 4T) + \omega(\beta_{2,2}, 4T) - 2z_T} = \\ = \lambda_1^{-2z_T} \lambda_2^{-2k} \left(\sum_{\beta \le 4T} \lambda_2^{\omega(\beta)} \lambda_1^{\omega(\beta)} \right)^2 \left(\sum_{\beta \le 2N/T} \lambda_2^{\omega(\beta)} \lambda_1^{\omega(\beta, 4T)} \right)^2. \end{gathered} \tag{17}$$

Величина U_T связана с набором четверок $(\beta_{1,1}, \beta_{2,2}, \beta_{1,2}, \beta_{2,1}) \in \mathfrak{P}_T$. Каждый такой набор $(\beta_{1,1}, \beta_{2,2}, \beta_{1,2}, \beta_{2,1}) \in \mathfrak{P}_T$ входит в величину U_T с весом ≥ 1.

Тем не менее U_T не отмечает равенство величин $\omega(\beta_{1,2}) = \omega(\beta_{2,1}), \omega(\beta_{1,1}) = \omega(\beta_{2,2})$. Мы будем это использовать.

Рассмотрим главный случай. Пусть $\omega(\beta_{1,2}) = \omega(\beta_{2,1}) \ge \delta \log\log T_1$ для какого-нибудь фиксированного малого параметра $\delta > 0$. Пусть $t = \omega(\beta_{1,2})$ и в нашем случае фиксировано. Для удобства введем множества :

$$M_l = \{(\beta_{1,2}, \beta_{2,1}) : \beta_{1,2}, \beta_{2,1} \le T_1 : \omega(\beta_{1,2}) = t - l, \omega(\beta_{2,1}) = t + l\}. \tag{18}$$

Зафиксируем пару $(\beta_{1,1}, \beta_{2,2})$. Для нее $(\beta_{1,1}, \beta_{2,2})$ множество $(\beta_{1,2}, \beta_{2,1})$ лежит в M_0. Теперь же для произвольного $l \in [1, \delta^{1/2}(\log\log T_1)^{1/2}]$ рассмотрим множество четверок :

$$V_l := (\beta_{1,1}, \beta_{2,2}, \beta_{1,2}, \beta_{2,1}) \quad \textit{где} \quad (\beta_{1,2}, \beta_{2,1}) \in M_l. \tag{19}$$

Стоит отметить, что четверки из множества V_l входят в значение U_T с таким же значением, что и нужные нам четверки. Но при этом для $l \neq 0$ четверки из V_l не удовлетворяют соотношению $\omega(\beta_{1,2}) = \omega(\beta_{2,1})$. Далее посмотрим как соотносятся размер множеств M_l с размером множества M_0. Сформулируем это в виде отдельного утверждения.

Лемма 3. *Для $l \in [1, \delta^{1/2}(\log\log T_1)^{1/2}]$ и в вышеуказанных обозначениях справедливо неравенство $|M_l| \gg |M_0|$.*

Доказательство. Если параметр $l \in [1, \delta^{1/2}(\log\log T_1)^{1/2}]$ то отсюда следует, что $|M_l| = |\pi(T_1, t-l)||\pi(T_1, t+l)|$. Можем тогда записать $\frac{|M_0|}{|M_l|}$. Отсюда заключаем, что

$$\frac{|M_0|}{|M_l|} \ll \exp\left(O\left(\sum_{l \leq \delta^{1/2}(\log\log T_1)^{1/2}} \frac{l}{t}\right)\right).$$

При $t \geq \delta \log\log T_1$ легко получить утверждение нашей леммы.

□

Из предыдущей леммы мы можем сделать следующий вывод. Правильных четверок $(\beta_{1,1}, \beta_{2,2}, \beta_{1,2}, \beta_{2,1}) \in \mathfrak{P}_T$ по порядку не превосходит $U_T/(\log\log T_1)^{1/2}$. С помощью Леммы 2 легко оценить величину U_T и имеется оценка в работе [1]. Мы берем оценку из этой работы: $U_T \ll \frac{N^2}{(\log N)^{2\theta}\log T_1}$. Отсюда делаем вывод, что количество этих четверок $(\beta_{1,1}, \beta_{2,2}, \beta_{1,2}, \beta_{2,1}) \in \mathfrak{P}_T$ не превосходит

$$O\left(\frac{N^2}{(\log N)^{2\theta}(\log T)(\log\log T)^{1/2}}\right). \tag{20}$$

В дальнейшем остается просуммировать по параметру T из диадического разбиения.

Чтобы вывести утверждение теоремы достаточно провести данные выкладки для разных K_1, K_2 таких, что K_1 соответствует множеству A, а K_2 для множества B. При этом проделать все выкладки для всевозможных K_1, K_2. На этом мы завершаем доказательство Теоремы 3.

4. Заключение

Отметим, что некоторые результаты о произведениях и частных подмножеств натуральных чисел содержатся в работах [11], [10], [12], [9], [8], и в приведенной ниже литературе. Работа выполнена в рамках государственного задания FNEF-2022-0011.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Форд К., Экстремальные свойства произведений множеств // Труды МИАН,2018 Т. 303, С.239–245.

2. Ю. Н. Штейников, Множества с экстремальным свойством произведения и его вариации // Матем. заметки, 2023, 114:6, С. 922–930.

3. Erdős, Paul. An asymptotic inequality in the theory of numbers // Vestnik Leningrad. Univ. 15:13, P. 41–49.

4. Ford, Kevin . The distribution of integers with a divisor in a given interval // Annals of Mathematics. Second Series. 168: 2, P. 367–433.

5. Силлеруело Х, Рамана Д. С., Рамаре О. Частные и произведения подмножеств нулевой плотности множества натуральных чисел // Труды МИАН, 2017, Т.296, С. 58–71 .

6. Ford K., Integers with a divisor in (y, 2y] //Anatomy of integers, CRM Proc. Lect. Notes, 46, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008, P. 65–80.

7. Hall R. R., Tenenbaum G. Divisors // 1988, Cambridge Tracts Math., 90, Cambridge Univ. Press, Cambridge.

8. Shteinikov Yu., On the product sets of rational numbers // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 2017, Vol. 296, Issue 1, P 243-250.

9. Cilleruelo J. A note on product sets of rationals // International Journal of Number Theory 2016, Vol. 12, N. 05, P. 1415-1420.

10. Cilleruelo J., Garaev M. Congruences involving product of intervals and sets with small multiplicative doubling modulo a prime and applications // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., 2016. Vol. 160, Issue 03, P. 477-494.

11. Konyagin S., Shkredov I. On Sum Sets of Sets Having Small Product Set // Proc. Steklov Inst. Math. 2015, Vol. 290, P. 288–299.

12. Konyagin S., Shkredov I. New results on sums and products in R, Proc. // Steklov Inst. Math., 2016. № 294 , P. 78-88.

REFERENCES

1. Ford, K. 2018, “Extremal properties of product sets”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, Vol. 303, pp. 220-226.

2. Shteinikov, Yu. N. 2023, “Sets with Extremal Product Property and Its Variations”, *Mathematical Notes*, Vol. 114, no. 6, pp. 1357–1364.

3. Erdős, Paul. “An asymptotic inequality in the theory of numbers”, *Vestnik Leningrad. Univ.*, Vol.15, no. 13, pp. 41–49.

4. Ford, K. “The distribution of integers with a divisor in a given interval”, *Annals of Mathematics. Second Series.* Vol.168, no. 2, pp. 367–433.

5. Cilleruelo, J., Ramana, D.S., Ramare, O. 2017, “Quotients and product sets of thin subsets of the positive integers”, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, vol. 296, no. 1, pp. 52-64.

6. Ford, K. 2008, “Integers with a divisor in $(y, 2y]$”, *Anatomy of integers, CRM Proc. Lect. Notes*, 46, *Amer. Math. Soc., Providence*, pp. 65–80.

7. Hall, R. R., Tenenbaum, G. 1988, “Divisors”, *Cambridge Tracts Math.,* 90, Cambridge Univ. Press, Cambridge.

8. Shteinikov, Yu. 2017, “On the product sets of rational numbers”, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics,* 2017, vol. 296, no. 1, pp. 243-250.

9. Cilleruelo, J. 2016, “A note on product sets of rationals”, *International Journal of Number Theory*, 2016, Vol. 12, no. 05, pp. 1415-1420.

10. Cilleruelo, J., Garaev, M. 2016, "Congruences involving product of intervals and sets with small multiplicative doubling modulo a prime and applications", *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.*, vol. 160, no. 03, pp. 477-494.

11. Konyagin, S., Shkredov, I. 2015, "On Sum Sets of Sets Having Small Product Set", *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 290, pp. 288–299.

12. Konyagin, S., Shkredov, I. 2016, "New results on sums and products in R", *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2016. vol. 294 , pp. 78-88.

Получено: 12.03.2024
Принято в печать: 04.09.2024

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 25. Выпуск 3.

УДК 51-72 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-381-395

Нестационарное рассеяние звука упругим цилиндром с непрерывно-неоднородным покрытием

Н. В. Ларин, А. Э. Белкин

Ларин Николай Владимирович — доктор физико-математических наук, Тульский государственный университет (г. Тула).
e-mail: larinaelen@mail.ru
Белкин Антон Эдуардович — аспирант, Тульский государственный университет (г. Тула).
e-mail: antonedurd2020@mail.ru

Аннотация

Рассматривается падение плоской нестационарной звуковой волны на находящийся в идеальной жидкости однородный упругий цилиндр с покрытием в виде упругого цилиндрического слоя с непрерывно изменяющимися по толщине плотностью и модулями упругости. Полагается, что фронт падающей волны параллелен оси вращения цилиндра. Отыскивается поле давления в рассеянной телом звуковой волне.

Построена математическая модель рассматриваемого дифракционного процесса, основанная на линеаризованной модели гидродинамики идеальной сжимаемой жидкости и модели линейной теории упругости. Акустическое давление в жидкости, равное сумме давлений в падающем и рассеянном полях, является решением волнового уравнения. Распространение упругих волн в однородном цилиндре описывается двумя волновыми уравнениями относительно скалярного и векторного потенциалов упругих смещений. При этом в силу постановки задачи векторное уравнение приводится к скалярному уравнению. Волновой процесс в неоднородном упругом покрытии описывается общими уравнениями движения сплошной среды и законом Гука. Помимо указанных выше уравнений модель включает: нулевые начальные условия, условия свободного проскальзывания на внешней поверхности покрытия, условия жесткого сцепления на внутренней поверхности покрытия, условие затухания на бесконечности для рассеянного акустического поля и условие ограниченности для волновых полей в теле.

К уравнениям построенной модели применяется интегральное преобразование Лапласа по времени и метод разделения переменных по радиальной и угловой координатам. В пространстве изображений искомые давление и потенциалы представляются в виде разложений в ряды по модифицированным цилиндрическим функциям Бесселя с учетом условий излучения и ограниченности. Изображения компонент вектора смещения, нормального и касательного напряжений в покрытии ищутся в виде рядов Фурье с неизвестными, зависящими от радиальной координаты коэффициентами. Для их определения построена краевая задача для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Краевая задача сведена к задачам с начальными условиями. Переход в пространство оригиналов осуществлен численно. Представлены результаты расчетов давления в рассеянном телом акустическом поле.

Ключевые слова: акустический импульс, цилиндр с покрытием, неоднородный упругий цилиндрический слой, нестационарная задача дифракции.

Библиография: 22 названия.

Для цитирования:
Ларин, Н. В., Белкин, А. Э. Нестационарное рассеяние звука упругим цилиндром с непрерывно-неоднородным покрытием // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 3, с. 381–395.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 25. No. 3.

UDC 51-72 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-381-395

Unsteady sound scattering by an elastic cylinder with a continuously non-uniform coating

N. V. Larin, A. E. Belkin

Larin Nikolai Vladimirovich — doctor of physical and mathematical sciences, Tula State University (Tula).
e-mail: larinaelen@mail.ru
Belkin Anton Eduardovich — postgraduate student, Tula State University (Tula).
e-mail: antonedurd2020@mail.ru

Abstract

Incidence of a plane non-stationary sound wave on a homogeneous elastic cylinder in ideal liquid with a coating in the form of an elastic cylindrical layer with a density and elastic moduli continuously changing in thickness is considered. It is assumed that the front of the incident wave is parallel to the axis of rotation of the cylinder. The pressure field in the sound wave scattered by the body is found.

Mathematical model of the diffraction process under consideration is constructed, based on the linearized model of hydrodynamics of an ideal compressible fluid and a model of the linear theory of elasticity. The acoustic pressure in the fluid, equal to the sum of the pressures in the incident and scattered fields, is a solution to the wave equation. The propagation of elastic waves in a homogeneous cylinder is described by two wave equations with respect to the scalar and vector potentials of elastic displacements. In this case, due to the formulation of the problem, the vector equation is reduced to a scalar equation. The wave process in an inhomogeneous elastic coating is described by the general equations of motion of a continuous medium and Hooke's law. In addition to the above equations, the model includes: zero initial conditions, free slip conditions on the outer surface of the coating, rigid adhesion conditions on the inner surface of the coating, attenuation at infinity condition for the scattered acoustic field, and a boundedness condition for wave fields in the body.

Integral Laplace transform with respect to time and the method of separating variables by radial and angular coordinates are applied to the equations of the constructed model. In the image space, the sought pressure and potentials are represented as expansions in series in modified cylindrical Bessel functions taking into account the radiation and boundedness conditions. Images of the components of the displacement vector, normal and tangential stresses in the coating are sought in the form of Fourier series with unknown coefficients depending on the radial coordinate. To determine them, a boundary value problem is constructed for a system of linear ordinary differential equations of the first order. The boundary value problem is reduced to problems with initial conditions. The transition to the space of originals is carried out numerically. The results of pressure calculations in the acoustic field scattered by the body are presented.

Keywords: acoustic pulse, coated cylinder, inhomogeneous elastic cylindrical layer, non-stationary diffraction problem.

Bibliography: 22 titles.

For citation:
Larin, N. V., Belkin A. E. 2024, "Unsteady sound scattering by an elastic cylinder with a continuously non-uniform coating" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 3, pp. 381–395.

1. Введение

Проблеме математического моделирования покрытий для изменения звукоотражающих свойств твердых тел в задачах дифракции гармонических звуковых волн посвящен ряд работ. Для тел имеющих форму бесконечно длинного кругового цилиндра, находящегося в заполненном акустической средой безграничном пространстве, эта проблема обсуждалась, например, в работах [1–5]. В [1] рассматривалось перфорированное покрытие в виде набора резонаторов Гельмгольца, распределенных по окружности абсолютно твердой цилиндрической оболочки, в [2] – покрытие с протяженной реакцией, в [3] – покрытие в виде однородной упругой цилиндрической оболочки, нанесенное на аналогичную оболочку большей толщины. В [4] для изменения звукоотражающих свойств абсолютно твердого цилиндра предложено неоднородное покрытие в виде упругого цилиндрического слоя с непрерывно изменяющимися по толщине плотностью и модулями упругости. При этом покрытие считается тонким по сравнению с радиусом цилиндра. В [5] такое покрытие применяется для минимизации акустического поля, рассеянного упругим цилиндром.

В реальных условиях длительность воздействия на тело падающей звуковой волны конечна и характеристики рассеяния звука телом под воздействием акустического импульса имеют свои существенные отличия от соответствующих характеристик рассеяния гармонической волны. Поэтому изучение нестационарного взаимодействия звуковых волн с телами является важным. В данной работе предложенное в [4, 5] непрерывно-неоднородное покрытие рассматривается применительно к упругому цилиндру при падении на него плоского акустического импульса. Краткое решение этой нестационарной дифракционной задачи при использовании интегрального преобразования Фурье по времени содержится в [6].

Отметим, что в нестационарных задачах дифракции звука в качестве непрерывно-неоднородных упругих рассеивателей цилиндрической формы рассматривались трансверсально-изотропный цилиндрический слой с жидкостью в полости [7] и сплошной упругий цилиндр [8]. В [9] рассмотрена дифракция плоских нестационарных упругих волн на непрерывно-неоднородном по толщине трансверсально-изотропном упругом цилиндрическом слое с однородным упругим заполнителем.

Актуальности исследований звукоотражающих свойств непрерывно-неоднородных тел способствуют развитие и внедрение в производство аддитивных технологий, позволяющих создавать функционально-градиентные материалы с непрерывно изменяющимися в объеме изделия свойствами. Непрерывно-неоднородное по толщине покрытие также может быть реализовано системой слоев из однородных материалов. Численная реализация этой возможности показана в стационарных задачах распространения [10] и дифракции [11, 12] волн. Такой подход применялся и в нестационарных динамических задачах для исследования волновых процессов в непрерывно-неоднородных телах [13-15].

2. Постановка задачи

Рассмотрим однородный изотропный упругий бесконечно длинный цилиндр радиусом r_0, имеющий покрытие в виде коаксиального неоднородного изотропного упругого цилиндрического слоя с внешним радиусом r_1 (рис. 1). Материал цилиндра имеет плотность ρ_0 и упругие постоянные Ламе λ_0, μ_0. Плотность материала покрытия $\rho = \rho(r)$ и его модули упругости $\lambda = \lambda(r)$, $\mu = \mu(r)$ являются непрерывными функциями координаты r цилиндрической системы координат (r, φ, z), ось z которой совпадает с осью вращения цилиндра. Окружающая тело жидкость – идеальная, ее равновесная плотность ρ_f, скорость звука c.

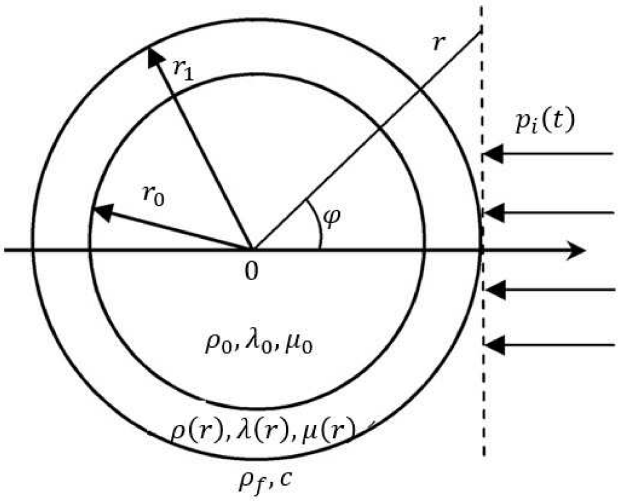


Рис. 1: Геометрия задачи

Пусть плоская нестационарная звуковая волна давления вида

$$p_i = A_i f\left(ct + r\cos\varphi - r_1\right)\left[H\left(ct + r\cos\varphi - r_1\right) - H\left(c\left(t - T\right) + r\cos\varphi - r_1\right)\right], \tag{1}$$

фронт которой параллелен оси цилиндра, в момент времени $t = 0$ касается поверхности покрытия $r = r_1$ в направлении $\varphi = 0$. Здесь A_i – постоянная, имеющая размерность давления; $f\left(x\right)$ – заданная плотность сигнала; $H\left(x\right)$ – единичная функция Хевисайда; T – продолжительность воздействия волны.

Определим давление в рассеянной телом звуковой волне.

3. Математическая модель

В силу постановки задачи рассеянное телом и возбужденные в нем волновые поля не зависят от координаты z.

Акустическое давление в окружающей тело жидкости описывается волновым уравнением [16]

$$\Delta p - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0, \tag{2}$$

где $p = p_i + p_s$; p_s – давление в рассеянной волне. При этом скорость частиц жидкости $\mathbf{v}$ связана с акустическим давлением соотношением

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_f}\mathrm{grad}p.$$

Распространение волн в однородном упругом цилиндре описывается волновыми уравнениями [17]

$$\Delta\Psi - \tfrac{1}{c_l^2}\tfrac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = 0, \quad \Delta\mathbf{\Phi} - \tfrac{1}{c_\tau^2}\tfrac{\partial^2\mathbf{\Phi}}{\partial t^2} = 0, \tag{3}$$

где Ψ и $\mathbf{\Phi}$ – потенциалы смещения продольных и поперечных упругих волн соответственно; $c_l = \sqrt{\left(\lambda_0 + 2\mu_0\right)/\rho_0}$ и $c_\tau = \sqrt{\mu_0/\rho_0}$ – скорости распространения этих волн. В силу постановки

задачи единственной отличной от нуля составляющей векторного потенциала $\mathbf{\Phi}$ будет составляющая по оси z, т.е. $\mathbf{\Phi} = \Phi \mathbf{e}_z$, где $\mathbf{e}_z$ – единичный вектор оси z. Тогда векторное уравнение (3) сводится к скалярному уравнению

$$\Delta\Phi - \frac{1}{c_\tau^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = 0. \tag{4}$$

При этом вектор смещения частиц в однородном упругом цилиндре определяется из выражения

$$\mathbf{u}^0 = \mathrm{grad}\Psi + \mathrm{rot}\mathbf{\Phi}.$$

Распространение малых возмущений в неоднородном упругом покрытии описывается общими уравнениями движения сплошной среды. В цилиндрической системе координат эти уравнения имеют вид [18]

$$\begin{gathered}\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{r\varphi}}{\partial\varphi} + \frac{\sigma_{rr}-\sigma_{\varphi\varphi}}{r} = \rho\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2},\\ \frac{\partial\sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\varphi\varphi}}{\partial\varphi} + \frac{2}{r}\sigma_{r\varphi} = \rho\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial t^2},\end{gathered} \tag{5}$$

где радиальная u_r и угловая u_φ компоненты вектора смещения $\mathbf{u}$ связаны с компонентами тензора напряжений σ_{rr}, $\sigma_{\varphi\varphi}$, $\sigma_{r\varphi}$ в покрытии законом Гука [18]:

$$\begin{gathered}\sigma_{rr} = (\lambda+2\mu)\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\lambda}{r}\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi} + u_r\right), \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{\lambda+2\mu}{r}\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi} + u_r\right) + \lambda\frac{\partial u_r}{\partial r},\\ \sigma_{r\varphi} = \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r}\right).\end{gathered} \tag{6}$$

Волновые поля должны удовлетворять начальным и граничным условиям, условию затухания на бесконечности и условию ограниченности.

Начальные условия (при $t = 0$) имеют вид [19, 20]

$$p_s = \frac{\partial p_s}{\partial t} = 0, \quad \Psi = \frac{\partial\Psi}{\partial t} = 0, \quad \Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial t} = 0, \quad \mathbf{u} = \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} = 0. \tag{7}$$

На внешней поверхности покрытия (при $r = r_1$) выполняются граничные условия [19, 20]

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} = \frac{\partial v_r}{\partial t}, \quad \sigma_{rr} = -p, \quad \sigma_{r\varphi} = 0, \tag{8}$$

(v_r – радиальная компонента вектора скорости частиц жидкости $\mathbf{v}$), а на внутренней поверхности покрытия (при $r = r_0$) – граничные условия [5]

$$u_r = u_r^0, \quad u_\varphi = u_\varphi^0, \quad \sigma_{rr} = \sigma_{rr}^0, \quad \sigma_{r\varphi} = \sigma_{r\varphi}^0. \tag{9}$$

Соотношения между компонентами тензора напряжений σ_{rr}^0, $\sigma_{r\varphi}^0$ и компонентами вектора смещения u_r^0, u_φ^0 в однородном упругом цилиндре записываются в виде (6), где функции λ, μ следует заменить постоянными λ_0, μ_0 соответственно. Из этих соотношений, используя запись компонент вектора смещения $\mathbf{u}^0$ через функции Ψ и Φ

$$u_r^0 = \frac{\partial\Psi}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}, \quad u_\varphi^0 = \frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi} - \frac{\partial\Phi}{\partial r},$$

получим

$$\sigma_{rr}^0 = \frac{\lambda_0}{c_l^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} + 2\mu_0\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2} + 2\mu_0\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2\Phi}{\partial r\partial\varphi} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right),$$

$$\sigma_{r\varphi}^0 = \frac{2\mu_0}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial r} - \frac{\Psi}{r}\right) - \mu_0\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}\right).$$

Условие затухания на бесконечности (при $r \longrightarrow \infty$) имеет вид [19, 20]

$$p_s \longrightarrow 0.$$

Условие ограниченности привлекается при отыскании волновых полей в цилиндре с покрытием. Оно требует ограниченности решений дифференциальных уравнений (3)-(5) в занимаемой телом области.

4. Решение задачи с применением интегрального преобразования Лапласа

Безразмерные величины со звездочками, которые далее при решении задачи опускаем, введем по формулам

$$\xi_1^* = \frac{\xi_1}{r_1}, \quad \xi_1 = \left\{r, u_r^0, u_\varphi^0, u_r, u_\varphi\right\},$$

$$t^* = \frac{c}{r_1}t, \quad \Psi^* = \frac{\Psi}{r_1^2}, \quad \Phi^* = \frac{\Phi}{r_1^2}, \quad \rho_0^* = \frac{\rho_0}{\rho_f}, \quad \rho^* = \frac{\rho}{\rho_f},$$

$$\xi_2^* = \frac{\xi_2}{\rho_f c^2}, \quad \xi_2 = \left\{A_i, p_i, p_s, \lambda_0, \mu_0, \lambda, \mu, \sigma_{rr}^0, \sigma_{r\varphi}^0, \sigma_{rr}, \sigma_{r\varphi}\right\}.$$

Перепишем выражение (1) для падающего акустического импульса в безразмерном виде

$$p_i = A_i f\left(t + r\cos\varphi - 1\right)\left[H\left(t + r\cos\varphi - 1\right) - H\left((t - T) + r\cos\varphi - 1\right)\right].$$

Применим для решения задачи интегральное преобразование Лапласа [20, 21]:

$$X^L(r,\varphi;s) = \int_0^\infty X(r,\varphi,t)\, e^{-st}dt, \quad X(r,\varphi,t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{w-i\infty}^{w+i\infty} X^L(r,\varphi;s)\, e^{st}ds, \quad w > 0,$$

где s – параметр преобразования; $X^L(r,\varphi;s)$ – изображение функции $X(r,\varphi,t)$.

Используя теорему сложения для цилиндрических функций, запишем изображение падающего импульса в виде

$$p_i^L(r,\varphi;s) = A_i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n(s)\, I_n(sr)\exp(in\varphi),$$

где

$$\gamma_n(s) = (-1)^n f^L(s)\exp(-s), \quad f^L(s) = \int_0^T f(t)\, e^{-st}dt,$$

$I_n(x)$ – модифицированная цилиндрическая функция Бесселя порядка n.

Для определения изображения давления в рассеянном акустическом поле из (2) получаем уравнение

$$\Delta p_s^L - s^2 p_s^L = 0,$$

решение которого с учетом условия излучения на бесконечности будем искать в виде

$$p_s^L(r,\varphi;s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(s)\,\gamma_n(s)\, K_n(sr)\exp(in\varphi), \tag{10}$$

где $K_n(x)$ – модифицированная цилиндрическая функция Ганкеля первого рода порядка n; $a_n(s)$ – неизвестные коэффициенты.

Для определения изображений потенциалов смещения упругих волн в однородном цилиндре из скалярных уравнений (3), (4) получаем уравнения

$$\Delta\Psi^L - \tfrac{s^2}{c_l^2}\Psi^L = 0, \quad \Delta\Phi^L - \tfrac{s^2}{c_\tau^2}\Phi^L = 0,$$

решения которых с учетом условия ограниченности будем искать в виде

$$\begin{array}{l} \Psi^L(r,\varphi;s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(s)\,\gamma_n(s)\,I_n(sr/c_l)\exp(in\varphi), \\ \Phi^L(r,\varphi;s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(s)\,\gamma_n(s)\,I_n(sr/c_\tau)\exp(in\varphi), \end{array} \tag{11}$$

где $b_n(s)$, $c_n(s)$ – неизвестные коэффициенты.

В непрерывно-неоднородном упругом покрытии компоненты вектора смещения u_r, u_φ и компоненты тензора напряжений σ_{rr}, $\sigma_{r\varphi}$ – периодические функции координаты φ с периодом 2π. Поэтому изображения этих функций будем искать в виде

$$\begin{array}{l} u_r^L(r,\varphi;s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_{1n}(r;s)\,\gamma_n(s)\exp(in\varphi), \\ u_\varphi^L(r,\varphi;s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_{2n}(r;s)\,\gamma_n(s)\exp(in\varphi), \\ \sigma_{rr}^L(r,\varphi;s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sigma_{1n}(r;s)\,\gamma_n(s)\exp(in\varphi), \\ \sigma_{r\varphi}^L(r,\varphi;s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sigma_{2n}(r;s)\,\gamma_n(s)\exp(in\varphi), \end{array} \tag{12}$$

где $u_{1n}(r;s)$, $u_{2n}(r;s)$, $\sigma_{1n}(r;s)$, $\sigma_{2n}(r;s)$ – неизвестные, зависящие от r функции.

Используя представления (12), из соотношений (6) для нормального и касательного напряжений выразим производные $u_{1n}^{'}$, $u_{2n}^{'}$ через функции σ_{1n}, σ_{2n} (здесь и далее штрихом обозначена производная по аргументу). Объединяя полученные выражения с уравнениями движения (5), разрешенными относительно $\sigma_{1n}^{'}$, $\sigma_{2n}^{'}$, приходим к следующей системе линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с неизвестными u_{1n}, u_{2n}, σ_{1n}, σ_{2n} для каждого $n = 0, \pm1, \pm2, ...$:

$$\begin{array}{l} \mathbf{U}_n^{'} = A_n\mathbf{U}_n + B_n\mathbf{S}_n, \\ \mathbf{S}_n^{'} = C_n\mathbf{U}_n + D_n\mathbf{S}_n, \end{array} \tag{13}$$

где

$$\mathbf{U}_n = (u_{1n}, u_{2n})^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{S}_n = (\sigma_{1n}, \sigma_{2n})^{\mathrm{T}},$$

$$A_n = -\tfrac{1}{r}\begin{pmatrix} \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} & in\frac{\lambda}{\lambda+2\mu} \\ in & -1 \end{pmatrix}, \quad B_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda+2\mu} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu} \end{pmatrix},$$

$$C_n = \tfrac{1}{r^2}\begin{pmatrix} \alpha+\rho s^2r^2 & in\alpha \\ -in\alpha & n^2\alpha+\rho s^2r^2 \end{pmatrix}, \quad D_n = -\tfrac{1}{r}\begin{pmatrix} \frac{2\mu}{\lambda+2\mu} & in \\ in\frac{\lambda}{\lambda+2\mu} & 2 \end{pmatrix},$$

$$\alpha = 4\mu(\lambda+\mu)/(\lambda+2\mu).$$

Из граничных условий (8) для каждого n находим выражение для коэффициентов $a_n(s)$ в разложении (10)

$$r = 1: \quad a_n(s) = -\tfrac{su_{1n}(1;s)+A_iI_n'(s)}{K_n'(s)} \tag{14}$$

и краевые условия для системы дифференциальных уравнений (13) на внешней поверхности покрытия

$$r = 1: \quad E_n \mathbf{U}_n + \mathbf{S}_n = \mathbf{F}_n, \tag{15}$$

где

$$\mathbf{F}_n = \frac{A_i}{sK_n'(s)} \begin{pmatrix} 1, & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \quad E_n = -\frac{sK_n(s)}{K_n'(s)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Из граничных условий (9) для каждого n имеем

$$r = r_0: \quad \mathbf{U}_n = G_n \mathbf{K}_n, \mathbf{S}_n = L_n \mathbf{K}_n,$$

где

$$\mathbf{K}_n = \left(b_n(s), c_n(s)\right)^{\mathrm{T}}, \quad G_n = \begin{pmatrix} Z_{11}^{(n)} & in\frac{Z_{02}^{(n)}}{r} \\ in\frac{Z_{01}^{(n)}}{r} & -Z_{12}^{(n)} \end{pmatrix},$$

$$L_n = \begin{pmatrix} 2\mu_0 Z_{21}^{(n)} + \lambda_0 s_1^2 Z_{01}^{(n)} & 2in\mu_0 \frac{1}{r}\left(Z_{12}^{(n)} - \frac{Z_{02}^{(n)}}{r}\right) \\ 2in\mu_0 \frac{1}{r}\left(Z_{11}^{(n)} - \frac{Z_{01}^{(n)}}{r}\right) & -\mu_0\left(Z_{22}^{(n)} - \frac{Z_{12}^{(n)}}{r} + n^2 \frac{Z_{02}^{(n)}}{r^2}\right) \end{pmatrix},$$

$$Z_{0j}^{(n)} = I_n(s_j r), \quad Z_{1j}^{(n)} = s_j I_n'(s_j r), \quad Z_{2j}^{(n)} = s_j^2 I_n''(s_j r); \quad j = 1, 2,$$

$$s_1 = s/c_l, \quad s_2 = s/c_\tau.$$

Откуда находим выражения для коэффициентов $b_n(s)$, $c_n(s)$ в рядах (11)

$$r = r_0: \quad \mathbf{K}_n = G_n^{-1} \mathbf{U}_n \tag{16}$$

и краевые условия для системы дифференциальных уравнений (13) на внутренней поверхности покрытия

$$r = r_0: \quad M_n \mathbf{U}_n + \mathbf{S}_n = 0, \tag{17}$$

где $M_n = -L_n G_n^{-1}$.

Из выражений (14), (16) следует, что волновые поля в жидкости и однородном упругом цилиндре могут быть определены лишь после нахождения поля смещений в непрерывно-неоднородном упругом покрытии, для чего необходимо решить краевую задачу (13), (15), (17).

Заметим, что в силу постановки задачи функции u_r и σ_{rr} будут симметричны относительно плоскости $\varphi = 0, \pi$, а функции u_φ и $\sigma_{r\varphi}$ – антисимметричны относительно этой плоскости. То же самое можно сказать и об изображениях этих функций. Поэтому выполняются соотношения

$$u_{1,-n}(r; s) = u_{1n}(r; s), \quad u_{2,-n}(r; s) = -u_{2n}(r; s),$$

$$\sigma_{1,-n}(r; s) = \sigma_{1n}(r; s), \quad \sigma_{2,-n}(r; s) = -\sigma_{2n}(r; s).$$

Отсюда следует, что при решении краевой задачи (13), (15), (17) достаточно ограничиться только неотрицательными значениями индекса n. Кроме того, используя известные соотношения для модифицированных цилиндрических функций

$$I_{-n}(x) = I_n(x), \quad K_{-n}(x) = K_n(x),$$

из (14) получаем

$$a_{-n}(s) = a_n(s). \tag{18}$$

Следуя работе [22], сведем краевую задачу к задачам с начальными условиями. Найдем два линейно независимых решения дифференциальных уравнений (13), удовлетворяющих граничным условиям (17). В качестве начальных условий для них могут быть выбраны условия

$$r = r_0: \quad \mathbf{U}_{jn} = \left(\delta_{1j}, \quad \delta_{2j} \right)^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{S}_{jn} = -M_n \mathbf{U}_{jn}; j = 1, 2, \tag{19}$$

где δ_{mj}, $(m = 1, 2)$ – символ Кронекера.

Система (13) и условия (17) являются однородными. Поэтому решением системы (13), которое удовлетворяет условиям (17), будет являться любая линейная комбинация, составленная из решений указанных задач Коши, т.е.

$$\mathbf{U}_n = N_1 \mathbf{U}_{1n} + N_2 \mathbf{U}_{2n}, \quad \mathbf{S}_n = N_1 \mathbf{S}_{1n} + N_2 \mathbf{S}_{2n},$$

где N_1, N_2 - произвольные постоянные. Эти постоянные определим из краевого условия (15). Для этого необходимо решить систему линейных алгебраических уравнений

$$r = 1: N_1 (E_n \mathbf{U}_{1n} + \mathbf{S}_{1n}) + N_2 (E_n \mathbf{U}_{2n} + \mathbf{S}_{2n}) = \mathbf{F}_n.$$

Определив множители N_1, N_2, найдем функции u_{1n}, u_{2n}. Теперь по формулам (14), (16) вычислим коэффициенты $a_n(s)$, $b_n(s)$, $c_n(s)$. В результате из выражений (10), (11) определим изображения функций, описывающих волновые поля в жидкости и однородном упругом цилиндре.

Вычислить оригиналы искомых функций можно, воспользовавшись формулой обратного преобразования Лапласа.

5. Результаты расчетов

Оценим влияние покрытия на звукоотражающие свойства упругого цилиндра.

Воспользовавшись формулой обратного преобразования Лапласа

$$p_s(r, \varphi, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{w-i\infty}^{w+i\infty} p_s^L(r, \varphi; s)\, e^{st} ds, w > 0,$$

и заменяя в ней параметр преобразования s на $s(\omega) = w + i\omega$, полагая при этом для определенности $w = 1$, получим

$$p_s(r, \varphi, t) = \frac{e^t}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} p_s^L(r, \varphi; s(\omega))\, e^{i\omega t} d\omega.$$

Последнее выражение с учетом (10) записывается в виде

$$p_s(r, \varphi, t) = \frac{e^t}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(s(\omega))\, \gamma_n(s(\omega))\, K_n(s(\omega) r) \exp[i(n\varphi + \omega t)]\, d\omega. \tag{20}$$

Интеграл (20) подлежит численному расчету. При этом входящий в $\gamma_n(s(\omega))$ образ $f^L(1 + i\omega)$ лишь в ограниченном диапазоне изменения ω принимает существенно отличные

от нуля значения. Поэтому в выражении (20) бесконечные пределы интегрирования заменяются конечными пределами.

На основе полученного решения задачи, с использованием формулы (20), проведены расчеты давления (действительной части величины p_s, то есть Rep_s) в рассеянной звуковой волне для алюминиевого цилиндра ($\rho_0 = 2700$кг/м^3, $\lambda_0 = 5.3 \cdot 10^{10}$Н/м^2, $\mu_0 = 2.6 \cdot 10^{10}$Н/м^2) радиусом $r_0 = 1$м, имеющего покрытие толщиной 0.2м и находящегося в воде ($\rho_f = 1000$кг/м^3, $c = 1485$м/с). Рассматривалось как однородное покрытие из полимерного материала с плотностью $\rho^0 = 1070$кг/м^3 и упругими постоянными Ламе $\lambda^0 = 3.9 \cdot 10^9$Н/м^2, $\mu^0 = 9.8 \cdot 10^8$Н/м^2 (поливинилбутираль), так и покрытие с непрерывной неоднородностью двух видов. Материальные параметры покрытия, соответствующие неоднородности первого ($j = 1$) и второго ($j = 2$) видов, описывались зависимостями

$$\rho_j(r) = \rho^0 f_j(r), \lambda_j(r) = \lambda^0 f_j(r), \mu_j(r) = \mu^0 f_j(r),$$

где

$$f_j(r) = a\left(0.2 + \exp\left[-4 \cdot \left(\frac{r - r_{j-1}}{r_1 - r_0}\right)^2\right]\right), r_0 \leqslant r \leqslant r_1; j = 1, 2,$$

множитель $a = 1.56$ выбран так, чтобы среднее значение функции $f_j(r)$ по толщине слоя равнялось единице.

Расчеты выполнялись для случая, когда тело находится под воздействием плоского акустического импульса с безразмерными амплитудой $A_i = 1$, длительностью $T = 2$ и плотностью сигнала $f(t) = \sin(\pi t)$ (рис. 2,а).

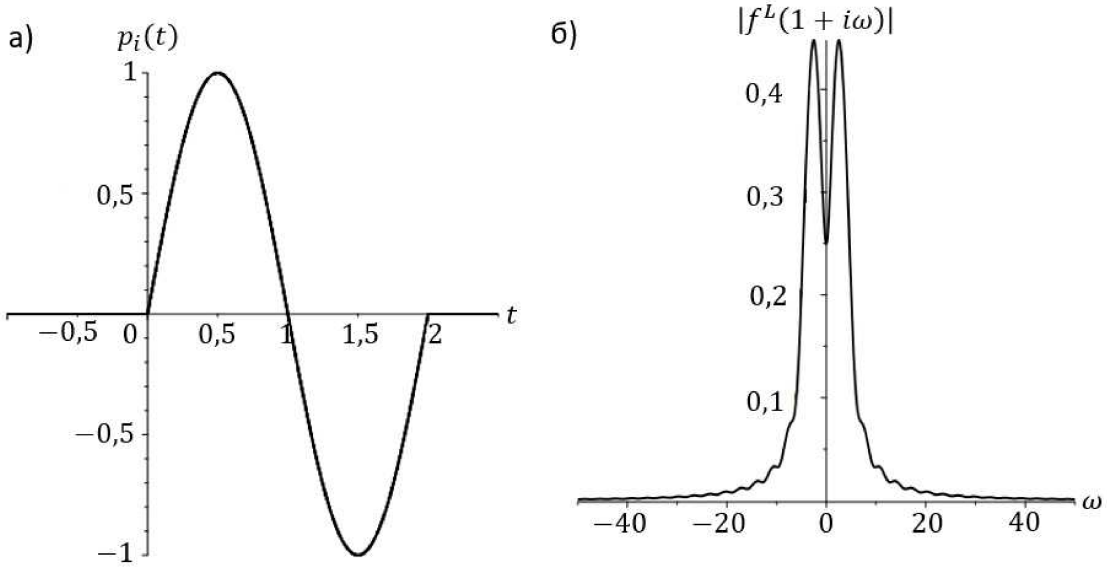


Рис. 2: $p_i(t) = \sin(\pi t)[H(t) - H(t-2)]$ (а) и $\left|f^L(1+i\omega)\right|$ (б)

Интеграл (20) вычислялся по формуле трапеций на отрезке интегрирования $[-\Omega, \Omega]$. Было установлено, что с учетом изображения f^L наиболее оптимальным является значение $\Omega = 50$, поскольку дальнейшее увеличение Ω практически не сказывается на результатах расчетов. Уже при $|\omega| = 50$ значения $\left|f^L(1+i\omega)\right|$ становятся меньше 0.001 и с ростом $|\omega|$ быстро убывают (рис. 2,б). Точность вычисления интеграла (20) контролировалась сгущением введенной на отрезке интегрирования сетки вдвое.

Суммирование ряда (20) проводилось усечением. Расчеты показали, что целесообразно индекс n изменять от $-N_0$ до N_0, где $N_0 = 22$, так как дальнейшее увеличение числа членов ряда не приводит к заметному изменению суммы ряда.

Решение задач Коши (13), (19) получено методом Рунге-Кутты четвертого порядка точности с автоматическим выбором шага интегрирования. Последний выбирался так, чтобы при решении краевой задачи относительная погрешность значений $u_{jn}(r_m; s(\omega))$ и $\sigma_{jn}(r_m; s(\omega))$ $(j = 1, 2;\ m = 0, 1)$ для каждого фиксированного ω не превосходила 0.1%.

Дополнительно были проведены контрольные расчеты, в которых сравнивались две временные зависимости величины Rep_s для алюминиевого цилиндра без покрытия. Одна из этих зависимостей рассчитывалась на основе построенного выше решения дифракционной задачи в случае, когда в расчетах покрытие полагалось однородным и имело те же материальные константы, что и оснащенный им цилиндр. Другая зависимость строилась на основе дополнительно решенной авторами дифракционной задачи. Ее постановка аналогична описанной в п. 2, только в качестве рассеивателя рассматривался однородный упругий цилиндр радиусом r_1 без покрытия. При этом определение рассеянного цилиндром поля p_s сводилось к решению системы трех алгебраических уравнений с неизвестными $a_n(s)$, $b_n(s)$, $c_n(s)$, построенной из граничных условий (8), записанных для величин u_r^0, σ_{rr}^0, $\sigma_{r\varphi}^0$ в терминах потенциалов Ψ и Φ в пространстве изображений. Проведенные контрольные расчеты показали хорошее совпадение построенных временных зависимостей.

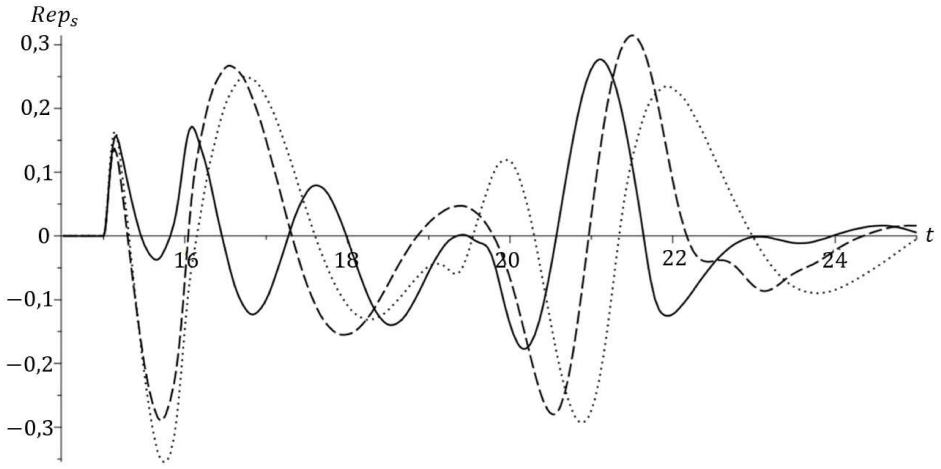


Рис. 3: Зависимость давления в рассеянной волне от времени при $r = 16r_1$, $\varphi = 0$

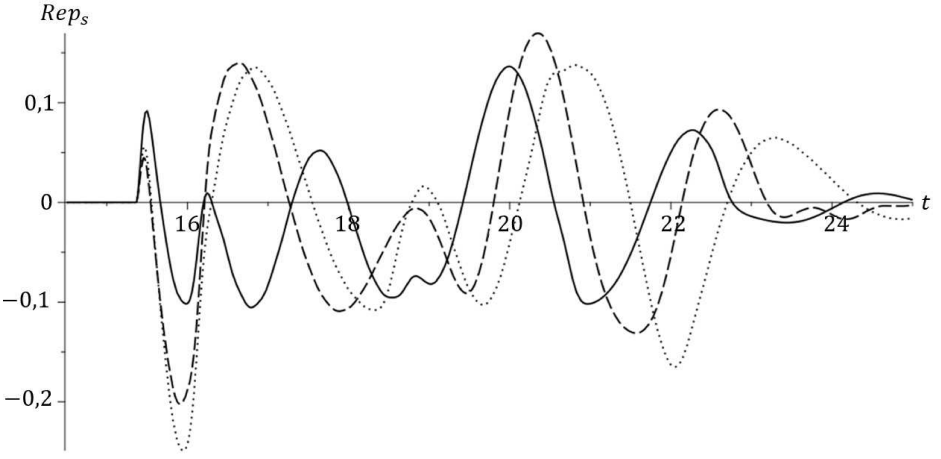


Рис. 4: Зависимость давления в рассеянной волне от времени при $r = 16r_1$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$

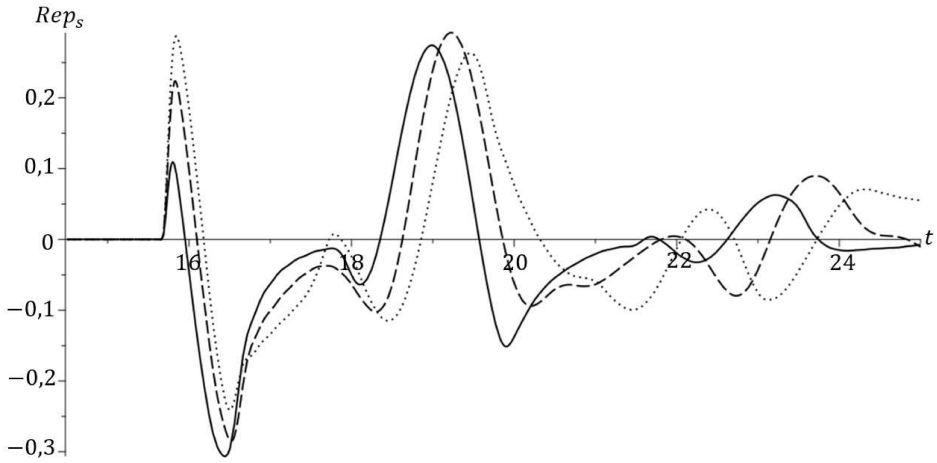


Рис. 5: Зависимость давления в рассеянной волне от времени при $r = 16r_1$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$

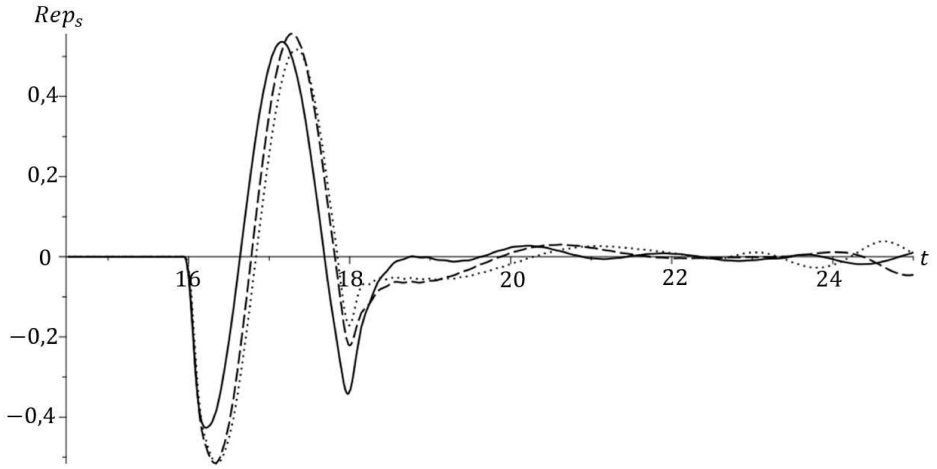


Рис. 6: Зависимость давления в рассеянной волне от времени при $r = 16r_1$, $\varphi = \pi$

На рис. 3–6 представлены графики зависимости давления в рассеянной волне от времени в четырех точках наблюдения, одинаково удаленных от тела. На рисунках сплошная линия соответствует однородному покрытию, пунктирная (штриховая) линия – непрерывно-неоднородному покрытию первого (второго) вида.

Различие на рис. 3–6 кривых обусловленное влиянием неоднородности покрытия свидетельствует о возможности изменения звукоотражающих свойств цилиндрического тела, находящегося под воздействием акустического импульса, за счет непрерывной неоднородности покрытия. Кроме того, из приведенных графиков видно, что с увеличением угла φ увеличивается время прихода рассеянной волны в рассматриваемые точки наблюдения. Это объясняется постепенным огибанием цилиндра рассеянной волной.

6. Заключение

В настоящей работе на основе решения нестационарной задачи дифракции звука на упругом цилиндре с непрерывно-неоднородным упругим покрытием показана возможность изменения с помощью такого покрытия звукоотражающих свойств цилиндрического тела, находящегося под воздействием акустического импульса.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иванов, В.П. Анализ поля дифракции на цилиндре с перфорированным покрытием // Акустический журн. 2006. Т.52. №6. С. 791-798.

2. Бобровницкий, Ю.И. Нерассеивающее покрытие для цилиндра // Акустический журн. 2008. Т.54. №6. С.879-889.

3. Косарев, О.И. Дифракция звука на упругой цилиндрической оболочке с покрытием // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2012. Т.46. №1. С.34-37.

4. Толоконников, Л.А. Рассеяние звуковых волн цилиндром с неоднородным упругим покрытием / А.Г. Романов. Л.А. Толоконников // Прикладная математика и механика. 2011. Т.75. №5. С.850-857.

5. Толоконников, Л.А. Моделирование неоднородного покрытия упругого цилиндра с заданными звукоотражающими свойствами / Л.А. Толоконников, Н.В. Ларин, С.А. Скобельцын // Прикладная механика и техническая физика. 2017. Т.58. №4. С.189-199.

6. Белкин, А.Э. Дифракция нестационарного акустического импульса на упругом теле с неоднородным покрытием // Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории: Материалы XXII Международной конференции, посвящённой 120-летию со дня рождения академика Андрея Николаевича Колмогорова и 60-летию со дня открытия школы-интерната № 18 при Московском университете, Тула, 26-29 сентября 2023 года. – Тула: Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого, 2023. – С.345-349.

7. Гаев, А.В. Нестационарное рассеяние плоского акустического импульса неоднородным трансверсально-изотропным цилиндрическим слоем // Известия ТулГУ. Серия: Информатика. 2002. Т.8. Вып.3. С.51-56.

8. Белкин, А.Э. Решение задачи дифракции плоского акустического импульса на упругом неоднородном цилиндре с помощью метода конечных элементов / А.Э. Белкин, Д.Р. Бирюков // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2024. Вып.1. С.68-83.

9. Медведский, А.Л. Дифракция плоских нестационарных упругих волн на неоднородном трансверсально изотропном цилиндре / А.Л. Медведский, Д.В. Тарлаковский // Материалы XVIII Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Т.2. М.: ООО «ТР-принт», 2012. – С.53.

10. Глушков, Е.В. Поверхностные волны в материалах с функционально-градиентными покрытиями / Е.В. Глушков, Н.В. Глушкова, С.И. Фоменко, Ч. Жанг // Акустический журнал. 2012. Т.58. №3. С.370-385.

11. Ларин, Н.В. Рассеяние плоской звуковой волны упругим цилиндром с дискретно-слоистым покрытием / Н.В. Ларин, Л.А. Толоконников // Прикладная математика и механика. 2015. Т.79. №2. С.242-250.

12. Толоконников, Л.А. Моделирование непрерывно-неоднородного покрытия упругого шара системой однородных упругих слоев в задаче рассеяния звука // Прикладная математика и механика. 2017. Т.81. Вып.6. С.699-707.

13. Коровайцева, Е.А. Об исследовании переходных волновых процессов в линейно-вязкоупругих телах с учетом непрерывной неоднородности материала / Е.А. Коровайцева, С.Г. Пшеничнов // Проблемы прочности и пластичности. 2016. Т.78. №3. С.262-270.

14. Korovaytseva, E.A. Study of transient wave processes in continuously inhomogeneous elastic and viscoelastic bodies. Chapter 1 / E.A. Korovaytseva, S.G. Pshenichnov // Modeling of the Soil-Structure Interaction: Selected Topics. Mechanical Engineering Theory and Applications: Nova Science Publishers, Inc. New York. 2020. P.1-28.

15. Pshenichnov, S. Transient Wave Propagation in Functionally Graded Viscoelastic Structures / S. Pshenichnov, R. Ivanov, M. Datcheva // Mathematics. 2022. 10. 4505. https://doi.org/10.3390/math10234505.

16. Исакович, М.А. Общая акустика. М.: Наука, 1973. – 496с.

17. Седов, Л.И. Механика сплошной среды. Т.2. М.: Наука, 1970. – 568с.

18. Новацкий, В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. – 872с.

19. Векслер, Н.Д. Дифракция плоской звуковой волны на полой упругой сфере // Акустический журн. 1975. Т.21. №5. С.694-700.

20. Метсавээр, Я.А. Дифракция акустических импульсов на упругих телах / Я.А. Метсавээр, Н.Д. Векслер, А.С. Стулов – М: Наука, 1979. – 239с.

21. Крылов, В.И. Методы приближенного преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа / В.И. Крылов, Н.С. Скобля – М.: Наука, 1974. – 223с.

22. Скобельцын, С.А. Рассеяние звуковых волн трансверсально-изотропным неоднородным цилиндрическим слоем / С.А. Скобельцын, Л.А. Толоконников // Акустический журн. 1995. Т.41. №1. С.134-138.

REFERENCES

1. Ivanov, V.P. 2006, “Analysis of the diffraction field on a cylinder with a perforated coating”, *Acoust. journal*, vol. 52, no. 6, pp. 791-798.

2. Bobrovnitsky, Yu.I. 2008, “Non-scattering coating for a cylinder”, *Acoust. journal*, vol. 54, no. 6, pp. 879-889.

3. Kosarev, O.I. 2012, “Sound diffraction on an elastic cylindrical shell with a coating”, *Problems of mechanical engineering and machine reliability*, vol. 46, no. 1, pp. 34-37.

4. Romanov, A.G. & Tolokonnikov L.A. 2011, “Scattering of sound waves by a cylinder with an inhomogeneous elastic coating”, *Applied Mathematics and Mechanics*, vol. 75, no. 5, pp. 850-857.

5. Tolokonnikov, L.A., Larin, N.V. & Skobeltsyn, S.A. 2017, “Modeling of an Inhomogeneous Coating of an Elastic Cylinder with Specified Sound-Reflecting Properties”, *Applied Mechanics and Technical Physics*, vol. 58, no. 4, pp. 189-199.

6. Belkin, A.E. “Diffraction of a Non-Stationary Acoustic Pulse by an Elastic Body with an Inhomogeneous Coating”, *Algebra, Number Theory, Discrete Geometry and Multiscale Modeling: Modern Problems, Applications and Problems of History: proceedings of the XXII International Conference named after A.N. Kolmogorov. Tula*, 2023, pp. 345-349.

7. Gaev, A.V. 2002, "Non-stationary scattering of a plane acoustic pulse by an inhomogeneous transversely isotropic cylindrical layer", *Bulletin of Tula State University. Series: Computer Science*, vol. 8, issue 3, pp. 51-56.

8. Belkin, A.E. & Biryukov, D.R. 2024, "Solution of the problem of diffraction of a plane acoustic pulse by an elastic inhomogeneous cylinder using the finite element method",*Bulletin of TvSU. Series: Applied Mathematics*, issue 1, pp. 68-83.

9. Medvedskiy, A.L. & Tarlakovskiy, D.V. "Diffraction of plane non-stationary elastic waves by an inhomogeneous transversely isotropic cylinder", *Dynamic and Technological Problems of Mechanics of Structures and Continuous Media: proceedings of the XVIII International Symposium named after A.G. Gorshkov*, vol. 2, Moscow, 2012, pp. 53.

10. Glushkov, E.V., Glushkova, N.V., Fomenko, S.I. & Zhang, Z. 2012, "Surface waves in materials with functionally gradient coatings", *Acoust. journal*, vol. 58, no. 3, pp. 370-385.

11. Larin, N.V. & Tolokonnikov, L.A. 2015, "Scattering of a plane sound wave by an elastic cylinder with a discretely layered coating", *Applied Mathematics and Mechanics*, vol. 79, no. 2, pp. 242-250.

12. Tolokonnikov, L.A. 2017, "Modeling of a continuously inhomogeneous coating of an elastic sphere with a system of homogeneous elastic layers in the problem of sound scattering", *Applied Mathematics and Mechanics*, vol. 81, issue 6, pp. 699-707.

13. Korovaytseva, E.A. & Pshenichnov, S.G. 2016, "On the study of transient wave processes in linearly viscoelastic bodies taking into account continuous inhomogeneity of the material", *Problems of Strength and Plasticity*, vol. 78, no. 3, pp. 262-270.

14. Korovaytseva, E.A. & Pshenichnov, S.G. 2020, "Study of transient wave processes in continuously inhomogeneous elastic and viscoelastic bodies. Chapter 1", *Modeling of the Soil-Structure Interaction: Selected Topics. Mechanical Engineering Theory and Applications*, pp. 1-28.

15. Pshenichnov, S., Ivanov, R. & Datcheva, M. 2022, "Transient Wave Propagation in Functionally Graded Viscoelastic Structures", *Mathematics*, no. 10. 4505. doi: https://doi.org/10.3390/math10234505.

16. Isakovich, M.A. 1973, "General Acoustics", *Moscow, Nauka*, 496 pp.

17. Sedov, L.I. 1970, "Continuum Mechanics", *Moscow, Nauka*, vol. 2, 568 pp.

18. Novatsky, V. 1975, "Theory of Elasticity", *Moscow, Mir*, 872 pp.

19. Veksler, N.D. 1975, "Diffraction of a Plane Sound Wave by a Hollow Elastic Sphere", *Acoust. journal*, vol. 21, no. 5, pp. 694-700.

20. Metsaveer, Ya.A., Veksler N.D. & Stulov A.S. 1979, "Diffraction of acoustic pulses on elastic bodies", *Moscow, Nauka*, 239 pp.

21. Krylov, V.I. & Skoblya, N.S. 1974, "Methods of approximate Fourier transform and inversion of the Laplace transform", *Moscow, Nauka*, 223 pp.

22. Skobeltsyn, S.A. & Tolokonnikov, L.A. 1995, "Scattering of sound waves by a transversely isotropic inhomogeneous cylindrical layer", *Acoust. journal*, vol. 41, no. 1, pp. 134-138.

Получено: 17.03.2024
Принято в печать: 04.09.2024

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 25. Выпуск 3.

УДК 510 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-396-407

О канонической рамсеевской теореме Эрдёша и Радо: короткое доказательство с использованием теории ультрафильтров

Н. А. В. Мир, Н. Л. Поляков

Мир Наджя Абдул Вахидовна — Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (г. Москва).
e-mail: nadzhyamir@yandex.ru
Поляков Николай Львович — кандидат физико-математических наук, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (г. Москва).
e-mail: npolyakov@hse.ru

Аннотация

В статье дается короткое доказательство канонической рамсеевской теоремы Эрдёша и Радо с использованием теории ультрафильтров.

Ключевые слова: теорема Рамсея, каноническая рамсеевская теорема, ультрафильтр, ультрарасширение, квази-нормальный ультрафильтр

Библиография: 25 названий.

Для цитирования:
Мир, Н. А. В., Поляков, Н. Л. О канонической рамсеевской теореме Эрдёша и Радо: короткое доказательство с использованием теории ультрафильтров // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 3, с. 396–407.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 25. No. 3.

UDC 510 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-396-407

On the canonical Ramsey theorem of Erdős and Rado: a short proof using ultrafilter theory

N. A. V. Mir, N. L. Polyakov

Mir Nadja AbdulVahidovna — National Research University “Higher School of Economics” (Moscow).
e-mail: nadzhyamir@yandex.ru
Polyakov Nikolay Lvovich — candidate of physical and mathematical science, National Research University “Higher School of Economics” (Moscow).
e-mail: npolyakov@hse.ru

Abstract

The paper gives a short proof of the canonical Ramsey theorem of Erdős and Rado using ultrafilter theory.

Keywords: Ramsey theorem, canonical Ramsey theorem, ultrafilter, ultrafilter extension, quasi-normal ultrafilter

Bibliography: 25 titles.

For citation:
Mir, N. A. V., Polyakov, N. L. 2024, "On the canonical Ramsey theorem of Erdős and Rado: a short proof using ultrafilter theory" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 3, pp. 396–407.

1. Введение

Знаменитая теорема Рамсея [1] (инфинитная версия), опубликованная в 1930 г., утверждает, что для любого конечного разбиения (раскраски) множества $[\omega]^n$ n-элементных подмножеств множества ω найдется бесконечное однородное множество $X \subseteq \omega$ (см. [2], Теорема 9.1, а также подробное обсуждение в [3]). Каноническая рамсеевская теорема Эрдёша и Радо, см. [3] (раздел 5.5., теорема 3) есть естественное обобщение теоремы Рамсея на случай произвольных (не обязательно конечных) разбиений. Она утверждает, что для любого разбиения множества $[\omega]^n$ существует бесконечное каноническое подмножество $X \subseteq \omega$. Детальные формулировки приведены в настоящей работе в разделе 1.1. Впервые доказательство этой теоремы было опубликовано в работе [4] в 1950 г., однако оно оказалось неожиданно сложным по сравнению с известными на тот момент доказательствами теоремы Рамсея. Как справедливо отмечает Мате в [5], «это объясняет, почему каноническая рамсеевская теорема часто приводится без доказательства (см., напр., [6]) или только с доказательством для случая $n = 2$ (см., напр., [3]), который не имеет достаточной общности». Во второй половине XX – начале XXI в. было опубликовано несколько альтернативных доказательств. Их можно найти в работах [7, 8, 9, 10, 11] и [5], из которых работы Радо [8] и Мате [5] мотивированы прежде всего стремлением придать доказательству простоту и ясность.

Начиная с середины XX века для доказательства многих комбинаторных фактов начинает использоваться теория ультрафильтров. Наиболее впечатляющие примеры – простое и изящное доказательство теоремы Рамсея в [3] (раздел 6.2, Теорема 2) и доказательство Галвина и Глайзера теоремы Хиндмана о конечных суммах, впервые опубликованное в [12]. Другие примеры можно найти в монографии [13]. Однако, насколько нам известно, ни одно «ультрафильтровое» доказательство канонической рамсеевской теоремы не было опубликовано.

В данной работе мы восполняем этот пробел и даем короткое доказательство канонической рамсеевской теоремы с использованием теории ультрафильтров. Оно опирается на некоторые основные факты, которые можно найти в монографиях [14] и [15], а также на простейшие свойства ультрарасширения функций произвольной арности. Последнее понятие было введено в начале XXI в. независимо Горанко [18] и Савельевым [19, 20] и (среди прочего) изучалось в работах [21, 22, 23, 24]. В разделе 1.2 мы даем все определения и факты, необходимые для нашего доказательства.

1.1. Теорема Рамсея и каноническая рамсеевская теорема Эрдёша и Радо

В этом разделе мы приводим детальные формулировки теоремы Рамсея и канонической рамсеевской теоремы Эрдёша и Радо.

Для любого множества X и натурального числа (конечного ординала) $n \in \omega$ множество всех n-элементных подмножеств множества X обозначается символом $[X]^n$:

$$[X]^n = \{\boldsymbol{x} \subseteq X : |\boldsymbol{x}| = n\}.$$

Множество $\mathcal{P} \subseteq \mathscr{P}(Z)$ называется *разбиением* множества Z, если

1. $\emptyset \notin \mathcal{P}$,
2. $\bigcup \mathcal{P} = Z$ и
3. $(\forall X, Y \in \mathcal{P})\, X \cap Y = \emptyset \vee X = Y$.

Определение 1. *Для любого натурального числа $n \geq 1$ и разбиения $\mathcal{P}$ множества $[X]^n$ множество $Y \subseteq X$ называется* однородным *для $\mathcal{P}$, если существует множество $P \in \mathcal{P}$, для которого $[Y]^n \subseteq P$.*

Теорема 1 (Рамсей [1]). *Для любого натурального числа $n \geq 1$ и конечного разбиения $\mathcal{P}$ множества $[\omega]^n$ существует бесконечное множество $X \subseteq \omega$ однородное для $\mathcal{P}$.*

Используя естественную биекцию между множеством $[\omega]^n$ и множеством возрастающих n-ок натуральных чисел, эту теорему можно переформулировать в терминах функций $f : \omega^n \longrightarrow \omega$.

Определение 2. *Для любого натурального числа $n \geq 1$ и множества $X \subseteq \omega$ функция $f : \omega^n \longrightarrow \omega$ называется постоянной вверх на множестве X, если*

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) = f(y_0, y_1, \ldots, y_{n-1})$$

для всех $x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} \in X$ и $y_0 < y_1 < \ldots < y_{n-1} \in X$.

Теорема 2 (Рамсей [1], эквивалентная формулировка). *Любая функция $f : \omega^n \longrightarrow \omega$, где $1 \leq n < \omega$, с конечным множеством значений постоянна вверх на некотором бесконечном множестве $X \subseteq \omega$.*

Теорема Рамсея имеет много различных версий и обобщений, см., напр., [3]. Одно из обобщений носит название каноническая рамсеевская теорема Эрдёша и Радо.

Для любого разбиения $\mathcal{P}$ множества Z соответствующее отношение эквивалентности обозначается символом $\approx_{\mathcal{P}}$:

$$x \approx_{\mathcal{P}} y \Leftrightarrow (\exists P \in \mathcal{P})\, x, y \in P$$

для всех $x, y \in Z$.

Для каждого $X \subseteq \omega$ и $i < |X|$ i-ый (в естественном порядке) элемент $x \in X$ обозначается символом $X_{[i]}$:

$$x = X_{[i]} \Leftrightarrow (x \in X \wedge |x \cap X| = i).$$

Определение 3. *Пусть дано разбиение $\mathcal{P}$ множества $[\omega]^n$, $1 \leq n < \omega$, и множество (индексов) $I \subseteq n$. Множество $X \subseteq \omega$ называется* I-каноническим для $\mathcal{P}$ *если*

$$\boldsymbol{p} \approx_{\mathcal{P}} \boldsymbol{q} \Leftrightarrow \bigwedge_{i \in I} (\boldsymbol{p}_{[i]} = \boldsymbol{q}_{[i]})$$

*для всех $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in [X]^n$. Множество $X \subseteq \omega$ называется каноническим для $\mathcal{P}$, если оно I-*каноническое *для $\mathcal{P}$ для некоторого множества $I \subseteq n$.*

Теорема 3 (Эрдёш и Радо [4]). *Для любого натурального числа $n \geq 1$ и разбиения $\mathcal{P}$ множества $[\omega]^n$ существует бесконечное множество $X \subseteq \omega$ каноническое для $\mathcal{P}$.*

Эту теорему можно переформулировать в терминах функций $f : \omega^n \longrightarrow \omega$.

Определение 4. *Для каждого натурального числа $n \geq 1$ функция $f : \omega^n \longrightarrow \omega$ называется* выборочно инъективной вверх на множестве $X \subseteq \omega$ относительно множества (индексов) $I \subseteq n$, *если*

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) = f(y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}) \Leftrightarrow \bigwedge_{i \in I}(x_i = y_i)$$

для всех $x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} \in X$ и $y_0 < y_1 < \ldots < y_{n-1} \in X$. Функция $f : \omega^n \longrightarrow \omega$ называется выборочно инъективной вверх на множестве $X \subseteq \omega$, *если она выборочно инъективна вверх на множестве $X \subseteq \omega$ относительно некоторого непустого множества индексов $I \subseteq n$.*

Пустая конъюнкция, как это обычно принято, полагается тождественной истиной. Поэтому, если функция $f : \omega^n \longrightarrow \omega$ выборочно инъективна вверх на множестве X относительно пустого множества I, то она постоянна вверх на множестве X.

Теорема 4 (Эрдёш и Радо [4], эквивалентная формулировка). *Любая функция $f : \omega^n \longrightarrow \omega$, где $1 \leq n < \omega$, либо постоянна вверх на некотором бесконечном множестве $X \subseteq \omega$, либо выборочно инъективна вверх на некотором бесконечном множестве $X \subseteq \omega$.*

Очевидно, теорема Рамсея немедленно следует из канонической рамсеевской теоремы.

1.2. Теория ультрафильтров: некоторые основные сведения

В этом разделе мы приводим все определения и факты из теории ультрафильтров, которые мы будем использовать для доказательства канонической рамсеевской теоремы. Некоторые сведения, выходящие за эти рамки, приводятся в виде замечаний.

Множество всех подмножеств множества A обозначается символом $\mathscr{P}(A)$. *Ультрафильтром* на множестве A называется (см., напр., [16], глава 15) произвольное множество $\mathfrak{u} \subseteq \mathscr{P}(A)$, удовлетворяющее следующим условиям: для любых множеств $B, C \subseteq A$

1. если $B \in \mathfrak{u}$ и $C \subseteq B$, то $C \in \mathfrak{u}$,
2. если $B \in \mathfrak{u}$ и $C \in \mathfrak{u}$, то $B \cap C \in \mathfrak{u}$,
3. $B \in \mathfrak{u}$ тогда и только тогда, когда $A \setminus B \notin \mathfrak{u}$.

Множество всех ультрафильтров на множестве A обозначается символом $\boldsymbol{\beta}A$.

Каждый ультрафильтр вида $\{S \subseteq A : a \in S\}$, где $a \in A$, называется *главным ультрафильтром* (порожденным элементом a). Все ультрафильтры на множестве A, которые не являются главными, называются *неглавными*. ZFC влечет существование неглавных ультрафильтров на каждом бесконечном множестве A. Главный ультрафильтр, порожденный элементом $a \in A$ обычно отождествляется с самим элементом a и, как правило, обозначается той же буквой.

Определение 5. *Для каждой функции $f : A \longrightarrow B$ ультрарасширение $\widetilde{f}$ есть функция из множества $\boldsymbol{\beta}A$ в множество $\boldsymbol{\beta}B$, которая определяется следующим образом:*

$$\widetilde{f}(\mathfrak{u}) = \{S \subseteq B : (\forall X \in \mathfrak{u})(\exists x \in X)\, f(x) \in S\}$$

для всех $\mathfrak{u} \in \boldsymbol{\beta}A$.

Предложение 1. *Пусть даны множества A, B, функция $f : A \longrightarrow B$ и ультрафильтры $\mathfrak{u} \in \boldsymbol{\beta}A$, $\mathfrak{v} \in \boldsymbol{\beta}B$. Пусть при этом для каждого множества $X \in \mathfrak{u}$ ультрафильтр $\mathfrak{v}$ содержит множество $f[X] = \{f(x) : x \in X\}$. Тогда $\widetilde{f}(\mathfrak{u}) = \mathfrak{v}$.*

Доказательство. Пусть $\widetilde{f}(\mathfrak{u}) \neq \mathfrak{v}$. Тогда существует такое множество $S \subseteq B$, что $S \in \mathfrak{v}$ и $S \notin \widetilde{f}(\mathfrak{u})$. По определению ультрарасширения функции f последнее означает, что для некоторого множества $X \in \mathfrak{u}$ выполнено $(\forall x \in X)\, f(x) \notin S$, т.е. $f[X] \cap S = \emptyset$. Значит, $f[X] \notin \mathfrak{v}$, что и требуется.

Замечание 1. *Утверждение, обратное к Предложению 1 тоже верно, см. [15], лемма 3.30, однако оно не используется в дальнейших рассуждениях. Для случая $A = B = \omega$ оно немедленно вытекает из нижеследующего Предложения 3.*

Теорема 5. *Для любого множества A, ультрафильтра $\mathfrak{u} \in \boldsymbol{\beta}A$ и функции $f : A \longrightarrow A$ если $\widetilde{f}(\mathfrak{u}) = \mathfrak{u}$, то $f(x) = x$ для всех x из некоторого множества $X \in \mathfrak{u}$.*

Доказательство можно найти, например, в [15], теорема 3.34 или в [14], теорема 9.2.

Для каждой функции $f : A^n \longrightarrow B$ ее ультрарасширение $\widetilde{f} : (\boldsymbol{\beta}A)^n \longrightarrow \boldsymbol{\beta}B$ определяется рекурсией по n. Напомним, что каждая нуль-местная функция $f : A \longrightarrow B$ отождествляется с некоторой константой $c_f \in B$. Для каждого натурального числа $n \geq 1$, функции $f : A^n \longrightarrow B$ и элемента $x \in A$ символом $f_{(x)}$ обозначим функцию из множества A^{n-1} в множество B, которая получена из функции f фиксированием первого аргумента, т.е. удовлетворяет условию:

$$f_{(x)}(x_1, \ldots, x_{n-1}) = f(x, x_1, \ldots, x_{n-1})$$

для всех $x, x_1, \ldots, x_{n-1} \in A$.

Определение 6. *Пусть дана функция $f : A \longrightarrow B$.*

i. Если $n = 0$ функция $\widetilde{f}$ есть нуль-местная функция, которая отождествляется с константой, равной главному ультрафильтру, порожденному константой c_f, т.е. $\widetilde{f} = \{S \subseteq B : c_f \in S\}$.

ii. Если $n > 0$, то

$$\widetilde{f}(\mathfrak{u}_0, \mathfrak{u}_1, \ldots, \mathfrak{u}_{n-1}) = \{S \subseteq B : (\forall X \in \mathfrak{u}_0)(\exists x \in X)\, S \in \widetilde{f_{(x)}}(\mathfrak{u}_1, \ldots, \mathfrak{u}_{n-1})\}.$$

Корректность этого определения обоснована в работах [18, 19]. Обоснование сводится к рутинной проверке того факта, что для любых ультрафильтров $\mathfrak{u}_0, \ldots, \mathfrak{u}_{n-1} \in \boldsymbol{\beta}A$ множество $\widetilde{f}(\mathfrak{u}_0, \mathfrak{u}_1, \ldots, \mathfrak{u}_{n-1})$ есть ультрафильтр на B. Легко проверить, что при $n = 1$ мы получаем определение, которое эквивалентно определению 5. Равносильные определения см. в [24].

Если в пункте *ii.* определения 6 поменять местами кванторы произвольности и существования, то определена будет та же самая функция $\widetilde{f}$. Это следует из следующего предложения.

Предложение 2. *Пусть $\mathfrak{u} \in \boldsymbol{\beta}A$. Тогда для любой теоретико-множественной формулы $\varphi(x)$ (возможно, с параметрами) выполнено*

$$(\forall X \in \mathfrak{u})(\exists x \in X)\, \varphi(x) \Leftrightarrow (\exists Y \in \mathfrak{u})(\forall y \in Y)\, \varphi(y)$$

Доказательство. Пусть формула $(\forall X \in \mathfrak{u})(\exists x \in X)\, \varphi(x)$ истинна. Тогда множество $\{x \in A : \neg\varphi(x)\}$ не принадлежит ультрафильтру $\mathfrak{u}$. Значит, ультрафильтру $\mathfrak{u}$ принадлежит дополнение этого множества, т.е. множество $Y = \{x \in A : \varphi(x)\}$. Следовательно, истинна формула $(\exists Y \in \mathfrak{u})(\forall y \in Y)\, \varphi(y)$.

Пусть, наоборот, истинна формула $(\exists Y \in \mathfrak{u})(\forall y \in Y)\, \varphi(y)$. Выберем какое-нибудь множество $Y \in \mathfrak{u}$ с условием $(\forall y \in Y)\, \varphi(y)$. В каждом элементе X ультрафильтра $\mathfrak{u}$ выберем элемент $x \in X \cap Y$. Очевидно, этот элемент удовлетворяет формуле $\varphi(x)$. Следовательно, истинна формула $(\forall X \in \mathfrak{u})(\exists x \in X)\, \varphi(x)$. Доказательство окончено.

Предложение 3. *Для любого неглавного ультрафильтра $\mathfrak{u} \in \boldsymbol{\beta}\omega$, множества $X \in \mathfrak{u}$, натурального числа n и функции $f : \omega^n \longrightarrow \omega$ множество*

$$\{f(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) : x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} \in X\}$$

принадлежит ультрафильтру $\widetilde{f}(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}, \ldots, \mathfrak{u})$.

Доказательство. Индукцией по n. База индукции ($n = 0$) очевидна. Пусть $n > 0$ и предложение верно для всех функций $g : \omega^{n-1} \longrightarrow \omega$. Обозначим

$$S = \{f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) : x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} \in X\}.$$

Для каждого множества $Y \in \mathfrak{u}$ выберем произвольный элемент $a_Y \in Y \cap X$ и обозначим

$$X(a_Y) = \{x \in X : x > a_Y\} \text{ и } S(a_Y) = \{f_{(a_Y)}(x_1, \dots, x_{n-1}) : x_1 < \dots < x_{n-1} \in X(a_Y)\}.$$

Поскольку ультрафильтр $\mathfrak{u}$ неглавный, каждое из множеств $X(a_Y)$ принадлежит ультрафильтру $\mathfrak{u}$. Поэтому по предположению индукции ультрафильтр $\widetilde{f_{(a_Y)}}(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}, \dots, \mathfrak{u})$ содержит множество $S(a_Y)$, а значит, и множество $S \supseteq S(a_Y)$. Для завершения доказательства остается воспользоваться определением 6.

Для получения наиболее короткого доказательства канонической рамсеевской теоремы мы будем использовать понятие квази-нормального ультрафильтра.

Определение 7. *Ультрафильтр $\mathfrak{u} \in \beta\omega$ называется квази-нормальным, если он неглавный, и для любой последовательности $X_0, X_1, \dots$ элементов ультрафильтра $\mathfrak{u}$ существует такой элемент X ультрафильтра $\mathfrak{u}$, что для любых $i < j \in X$ выполнено $j \in X_i$.*

В монографии [14] (теорема 9.6) можно найти много различных характеризаций квази-нормальных ультрафильтров. В частности, ультрафильтр $\mathfrak{u}$ квази-нормальный тогда и только тогда, когда он селективный, тогда и только тогда, когда он минимальный относительно предпорядка Рудин-Кейслера, и т.д. Из этого вытекает, что квази-нормальные ультрафильтры на ω существуют в предположении истинности континуум-гипотезы (а также некоторых других предположений, включая аксиому Мартина), см., напр., [2].[1]

Для удобства рассуждений мы будем использовать следующее техническое предложение.

Предложение 4. *Пусть $\mathfrak{u}$ есть квази-нормальный ультрафильтр на ω, $Y \in \mathfrak{u}$, и для каждого элемента $y \in Y$ задано множество $X_y \in \mathfrak{u}$. Тогда существует такое множество $Z \subseteq \omega$, что*

1. *$Z \in \mathfrak{u}$,*
2. *$Z \subseteq Y$,*
3. *для любых $i < j \in Z$ выполнено $j \in X_i$.*

Доказательство. Дополним семейство $\{X_y\}_{y \in Y}$ до некоторой последовательности $\{X_i\}_{i \in \omega}$ элементов ультрафильтра $\mathfrak{u}$. Выберем множество X со свойствами из Определения 7. Очевидно, множество $Z = X \cap Y$ удовлетворяет всем необходимым условиям.

2. Свойства квази-нормальных ультрафильтров и новое доказательство канонической рамсеевской теоремы

Для каждого натурального числа n, функции $f : \omega^n \longrightarrow \omega$ и множества $X \subseteq \omega$ мы будем использовать обозначение

$$f^{\uparrow}[X] = \{f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) : x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} \in X\}.$$

Определение 8. *Множество $\mathfrak{B} \subseteq \mathscr{P}(A)$ называется базой ультрафильтра $\mathfrak{u} \in \beta A$, если $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{u}$, и для каждого множества $X \in \mathfrak{u}$ существует множество $Y \in \mathfrak{B}$, для которого $Y \subseteq X$.*

[1] Однако, существование селективных ультрафильтров независимо от ZFC, см. [25] или [6].

Теорема 6. *Пусть* $\mathfrak{u}$ *есть квази-нормальный ультрафильтр на* ω, $n < \omega$ *и* $f : \omega^n \longrightarrow \omega$. *Тогда множество*

$$\{f^{\uparrow}[X] : X \in \mathfrak{u}\}$$

есть база ультрафильтра $\widetilde{f}(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}, \ldots, \mathfrak{u})$.

Доказательство. По предложению 3 каждое из множеств $f^{\uparrow}[X]$, $X \in \mathfrak{u}$, принадлежит ультрафильтру $\widetilde{f}(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}, \ldots, \mathfrak{u})$. Поэтому достаточно доказать, что для каждого множества $S \in \widetilde{f}(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}, \ldots, \mathfrak{u})$ существует множество $X \in \mathfrak{u}$, для которого $f^{\uparrow}[X] \subseteq S$.

Докажем это утверждение индукцией по n. База индукции ($n = 0$) очевидна. Пусть $n > 0$ и утверждение теоремы верно для всех функций $g : \omega^{n-1} \longrightarrow \omega$. Пусть $S \in \widetilde{f}(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}, \ldots, \mathfrak{u})$. Тогда по определению 6 и предложению 2 существует множество $Y \in \mathfrak{u}$, для которого $S \in \widetilde{f_{(y)}}(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}, \ldots, \mathfrak{u})$ для всех $y \in Y$. По предположению индукции для каждого элемента $y \in Y$ существует множество $X_y \in \mathfrak{u}$, для которого

$$f^{\uparrow}_{(y)}[X_y] \subseteq S.$$

Выберем какое-нибудь множество Z, удовлетворяющее условиям предложения 4. Тогда для любой последовательности $x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} \in Z$ выполнено $\{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}\} \subseteq X_{x_0}$. Значит,

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) = f_{(x_0)}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \in S,$$

что и требуется. Доказательство закончено.

Теорема 7. *Пусть* $\mathfrak{u}$ *есть квази-нормальный ультрафильтр на* ω, $X \in \mathfrak{u}$, $n < \omega$ *и* $I \subseteq n$. *Пусть функции* $f, g : \omega^n \longrightarrow \omega$ *выборочно инъективны на множестве* X *относительно множества* I, *и имеет место равенство*

$$\widetilde{f}(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}, \ldots, \mathfrak{u}) = \widetilde{g}(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}, \ldots, \mathfrak{u}).$$

Тогда существует такое множество $Y \in \mathfrak{u}$, *что*

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) = g(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$$

для всех $x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} \in Y$.

Доказательство. Легко проверить, что существует такая функция $\varphi : \omega \longrightarrow \omega$, что

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) = \varphi(g(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}))$$

для всех $x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} \in X$. Покажем, что имеет место равенство

$$\widetilde{f}(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}, \ldots, \mathfrak{u}) = \widetilde{\varphi}(\widetilde{g}(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}, \ldots, \mathfrak{u})).$$

В силу предложения 1 достаточно показать, что для каждого множества $S \in \widetilde{g}(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}, \ldots, \mathfrak{u})$ множество $\varphi[S]$ принадлежит ультрафильтру $\widetilde{f}(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}, \ldots, \mathfrak{u})$. Пусть $S \in \widetilde{g}(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}, \ldots, \mathfrak{u})$. Используя теорему 6, выберем множество $Z \in \mathfrak{u}$, для которого $g^{\uparrow}[Z] \subseteq S$. и положим $S' = g^{\uparrow}[Z \cap X]$. По теореме 6 (или предложению 3) множество S' принадлежит ультрафильтру $\widetilde{g}(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}, \ldots, \mathfrak{u})$, а множество

$$\begin{aligned}\varphi[S'] &= \{\varphi(g(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})) : x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} \in Z \cap X\} \\ &= \{f(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) : x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} \in Z \cap X\}\end{aligned}$$

принадлежит ультрафильтру $\widetilde{f}(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}, \ldots, \mathfrak{u})$. Значит, множество $\varphi[S] \supseteq \varphi[S']$ тоже принадлежит ультрафильтру $\widetilde{f}(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}, \ldots, \mathfrak{u})$.

Теперь по условию мы имеем

$$\widetilde{\varphi}(\widetilde{g}(\mathfrak{u},\mathfrak{u},\ldots,\mathfrak{u})) = \widetilde{g}(\mathfrak{u},\mathfrak{u},\ldots,\mathfrak{u}).$$

По теореме 5 существует такой элемент S'' ультрафильтра $\widetilde{g}(\mathfrak{u},\mathfrak{u},\ldots,\mathfrak{u})$, что $\varphi(x) = x$ для всех $x \in S''$. Вновь используя теорему 6, найдем такое множество $Y \in \mathfrak{u}$, что $g^{\uparrow}[Y] \subseteq S''$. Очевидно, оно удовлетворяет заключению теоремы. Доказательство закончено.

Замечание 2. *Утверждение, обратное Теореме 7, также верно, причем для произвольного ультрафильтра* $\mathfrak{u}$ *и функций* f *и* g*, см, напр. [11]. Однако этот факт мы не используем в нашей работе.*

Теорема 8. *Пусть* $\mathfrak{u}$ *есть квази-нормальный ультрафильтр на* ω*. Тогда для каждого натурального числа* n *и функции* $f : \omega^n \longrightarrow \omega$ *ультрафильтр* $\mathfrak{u}$ *содержит такое множество* $X \subseteq \omega$*, что функция* f *либо постоянна вверх на множестве* X*, либо выборочно инъективна вверх на множестве* X*.*

Доказательство. Докажем теорему индукцией по n. База индукции ($n = 0$) очевидна. Пусть $n > 0$, и предположение индукции верно.

По предположению индукции для каждого $i \in \omega$ существует такое множество $U_i \in \mathfrak{u}$ и такое множество $I_i \subseteq n-1$, что функция $f_{(i)}$ выборочно инъективна вверх на множестве U_i относительно множества I_i. Поскольку множество $\mathscr{P}(n-1)$ конечно, ультрафильтр $\mathfrak{u}$ содержит такое множество U, что $I_i = I_j$ для всех $i, j \in U$. Для простоты будем записывать просто I вместо I_i для некоторого (равносильно, любого) элемента $i \in U$.

Случай 1: множество $V = \{x \in \omega : \widetilde{f}(\mathfrak{u},\mathfrak{u},\ldots,\mathfrak{u}) = \widetilde{f}_{(x)}(\mathfrak{u},\ldots,\mathfrak{u})\}$ принадлежит ультрафильтру $\mathfrak{u}$.

Положим $Y = U \cap V$.

Пусть a есть произвольный элемент множества Y. По теореме 7 для каждого элемента $y \in Y$ существует множество $X'_y \in \mathfrak{u}$, для которого

$$f(y, x_0, x_1, \ldots, x_{n-2}) = f_{(y)}(x_0, x_1, \ldots, x_{n-2}) = f_{(a)}(x_0, x_1, \ldots, x_{n-2}) = f(a, x_0, x_1, \ldots, x_{n-2})$$

для всех $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} \in X'_y$.

Для каждого $y \in Y$ положим $X_y = X'_y \cap U_y$ и выберем множество Z, удовлетворяющее условиям предложения 4.

Покажем, что для всех $x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-2} \in Z$, $y_0 < y_1 < \ldots < y_{n-2} \in Z$ выполнены условия

1. $f(i, x_0, \ldots, x_{n-2}) = f(j, x_0, \ldots, x_{n-2})$ для всех таких $i, j \in Z$, что $i < x_0$ и $j < y_0$;
2. $f(i, x_0, \ldots, x_{n-2}) = f(i, y_0, \ldots, y_{n-2}) \Leftrightarrow \bigwedge\limits_{i \in I} x_i = y_i$ для каждого такого $i \in Z$, что $i < \min\{x_0, y_0\}$.

Действительно, первое из них сразу следует из включения $\{x_0, x_1, \ldots, x_{n-2}\} \subseteq X'_i \cap X'_j$, а второе – из включений $Z \subseteq U$ и $\{x_0, x_1, \ldots, x_{n-2}, y_0, y_1, \ldots, y_{n-2}\} \subseteq U_i$.

Остается заметить, что из этих условий следует, что для всех $x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} \in Z$, $y_0 < y_1 < \ldots < y_{n-1} \in Z$ выполнено:

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) = f(y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}) \Leftrightarrow \bigwedge_{i \in I'} x_i = y_i,$$

где $I' = \{i + 1 : i \in I\}$.

Случай 2: множество $V = \{x \in \omega : \widetilde{f}(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}, \ldots, \mathfrak{u}) = \widetilde{f}_{(x)}(\mathfrak{u}, \ldots, \mathfrak{u})\}$ не принадлежит ультрафильтру $\mathfrak{u}$. Тогда $\omega \setminus V = \{x \in \omega : \widetilde{f}(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}, \ldots, \mathfrak{u}) \neq \widetilde{f}_{(x)}(\mathfrak{u}, \ldots, \mathfrak{u})\} \in \mathfrak{u}$.

Положим $Y = U \cap (\omega \setminus V)$.

Покажем, что для каждого элемента $y \in Y$ существует такое множество X'_y, что

$$f^{\uparrow}[X'_y] \cap f^{\uparrow}_{(y)}[X'_y] = \emptyset.$$

Для этого выберем любое множество S, для которого $S \in \widetilde{f}(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}, \ldots, \mathfrak{u})$ и $\omega \setminus S \in \widetilde{f}_{(y)}(\mathfrak{u}, \ldots, \mathfrak{u})$. По теореме 6 существуют множества $P, Q \in \mathfrak{u}$, для которых

$$f^{\uparrow}[P] \subseteq S \quad \text{и} \quad f^{\uparrow}_{(y)}[Q] \subseteq \omega \setminus S.$$

Очевидно, можно положить $X'_y = P \cap Q$.

Для каждого $y \in Y$ положим $X_y = X'_y \cap U_y$ и выберем множество Z, удовлетворяющее условиям предложения 4.

Покажем, что для всех $x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-2} \in Z$, $y_0 < y_1 < \ldots < y_{n-2} \in Z$ выполнены условия

1. $f(i, x_0, \ldots, x_{n-2}) = f(j, y_0, \ldots, y_{n-2}) \Rightarrow i = j$ для всех таких $i, j \in Z$, что $i < x_0$ и $j < y_0$;
2. $f(i, x_0, \ldots, x_{n-2}) = f(i, y_0, \ldots, y_{n-2}) \Leftrightarrow \bigwedge\limits_{i \in I} x_i = y_i$ для каждого такого $i \in Z$, что $i < \min\{x_0, y_0\}$.

Второе из них вновь вытекает из включений $Z \subseteq U$ и $\{x_0, x_1, \ldots, x_{n-2}, y_0, y_1, \ldots, y_{n-2}\} \subseteq U_i$. Для доказательства первого допустим, что $f(i, x_0, \ldots, x_{n-2}) = f(j, y_0, \ldots, y_{n-2})$ для некоторых различных $i < x_0$, $j < y_0$, и придем к противоречию. Без ограничения общности будем считать, что $i < j$. Тогда имеет место включение $\{j, x_0, x_1, \ldots, x_{n-2}, y_0, y_1, \ldots, y_{n-2}\} \subseteq X'_i$. Значит, $f(i, x_0, \ldots, x_{n-2})$ принадлежит множеству $f^{\uparrow}_{(i)}[X'_i]$, а $f(j, y_0, \ldots, y_{n-2})$ принадлежит множеству $f^{\uparrow}[X'_i]$. Между тем, эти множества имеют пустое пересечение, что и дает противоречие.

Остается заметить, что из этих условий следует, что для всех $x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} \in Z$, $y_0 < y_1 < \ldots < y_{n-1} \in Z$ выполнено:

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) = f(y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}) \Leftrightarrow \bigwedge_{i \in I''} x_i = y_i,$$

где $I'' = \{0\} \cup \{i + 1 : i \in I\}$. Это окончательно доказывает теорему.

Каноническая рамсеевская теорема Эрдёша и Радо есть очевидное следствие Теоремы 8 (в предположении существования квази-нормального ультрафильтра на ω).

3. Заключение

В работе дано короткое доказательство канонической рамсеевской теоремы с использованием теории ультрафильтров (теорема 8). Оно использует классические результаты этой теории и недавнюю концепцию ультрарасширения функций произвольной арности. Предшествующие доказательству теоремы 6 и 7 публикуются впервые и представляют самостоятельный интерес. В доказательстве использован факт существования квази-нормальных ультрафильтров на ω, независимый от ZFC (и вытекающий, например, из континуум-гипотезы). Остается открытым вопрос, можно ли его элиминировать с сохранением простоты доказательства (сама по себе каноническая рамсеевская теорема, конечно, не требует предположений, выходящих за

рамки ZFC).[2] Также остается открытым вопрос о том, можно ли получить короткое «ультрафильтровое» доказательство теоремы 1 из [11], которая является «не-рамсеевской» частью канонической рамсеевской теоремы. Она утверждает, что для каждого натурального числа $n \geq 1$ и разбиения $\mathcal{P}$ множества $[\omega]^n$ существует такое конечное разбиение $\mathcal{Q}$ множества $[\omega]^{2n}$, что каждое однородное для $\mathcal{Q}$ множество X есть конечное объединение множеств канонических для $\mathcal{P}$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ramsey F.P. On a problem of formal logic // Proc. London Math. Soc.- 1930.- Vol. 30.- P. 264–286.
2. Jeh T. Set theory. The Third Millennium Edition, revised and expanded // Springer.- 2002.- 769 p.
3. Graham R.L., Rothschild B.L. & Spencer J.H., Solymosi J. Ramsey Theory // John Wiley and Sons.- NY.- 1990.- 99 p.
4. Erdős P., Rado R. A combinatorial theorem // J. London Math. Soc.- 1950.- Vol. 25.- P.- 249–255.
5. Matet P. An easier proof of the Canonical Ramsey Theorem // Colloquium Mathematicum.- 2016.- Vol. 145.- p. 187–191.
6. Halbeisen L.J. Combinatorial Set Theory // Springer Monographs in Mathematics.- London.- 2012.- 594 p.
7. Erdős P., Rado R. Combinatorial Theorems on Classifications of Subsets of a Given Set // Proc. London Math. Soc.- 1952.- Vol. s3–2.- № 1.- P. 417–439.
8. Rado R. Note on Canonical Partitions // Bul. of the London Math. Soc.- 1986.- Vol. 18.- № 2.- p. 123–126.
9. Mileti J. R. The canonical Ramsey theorem and computability theory // Trans. Amer. Math. Soc.- 2008.- Vol. 360.- P. 1309–1341.
10. Lefmann H., Rödl V. On Erdős-Rado numbers // Combinatorica.- 1995.- Vol. 15.- 85–104.
11. Polyakov N.L. On the Canonical Ramsey Theorem of Erdős and Rado and Ramsey Ultrafilters // Dokl. Math.- 2023.- Vol. 108.- P. 392–401.
12. Comfort W. Ultrafilters: Some old and some new results // Bull. Amer. Math. Soc.- 1977.- Vol. 83.- P. 417–455.
13. Di Nasso M., Goldbring I., Lupini M. Nonstandard Methods in Ramsey Theory and Combinatorial Number Theory // Springer.- 2019.- 206 p.
14. Comfort W.W., Negrepontis S. The theory of ultrafilters //Springer, Berlin.- 1974.- 481 p.
15. Hindman N., Strauss D. Algebra in the Stone–Čech Compactification. 2nd ed., revised and expanded // W. de Gruyter.- Berlin–N.Y.- 2012.- 591 p.
16. Jeh T. Lectures in Set Theory: With Particular Emphasis on the Method of Forcing // Springer-Verlag.- 1971.- 148 p.

[2] О теориях, достаточных для доказательства канонической рамсеевской теоремы, см. [9].

17. Polyakov N. L., Shamolin M. V. On a generalization of Arrow's impossibility theorem // Dokl. Math.- 2014.- Vol. 89.- P. 290–292.

18. Goranko V. Filter and ultrafilter extensions of structures: universal-algebraic aspects // Preprint.- 2007.- 30 p.

19. Saveliev D. I. Ultrafilter extensions of models // Lecture Notes in AICS.- 2011.- Vol. 6521.- P. 162–177.

20. Saveliev D. I. On ultrafilter extensions of models // S.-D. Friedman et al. (eds.). The Infinity Project Proc. CRM Documents 11, Barcelona.- 2012.- P. 599–616.

21. Saveliev D. I., Shelah S. Ultrafilter extensions do not preserve elementary equivalence // Math. Log. Quart.- 2019.- Vol. 65.- P. 511–516.

22. Saveliev D. I. On idempotents in compact left topological universal algebras // Topology Proc.- 2014.- Vol. 43.- P. 37–46.

23. Poliakov N. L., Saveliev D. I. On two concepts of ultrafilter extensions of first-order models and their generalizations // Logic, Language, Information, and Computation, Lecture Notes in Computer Science, eds. J. Kennedy, R. J. G. B. de Queiroz, Springer, Berlin, Heidelberg.- 2017.- Vol. 10388.- P. 336–348.

24. Poliakov N. L., Saveliev D. I. On ultrafilter extensions of first-order models and ultrafilter interpretations. Arch. Math. Logic.- 2021.- Vol. 60.- P. 625–681.

25. Wimmers E. The Shelah P-point independence theorem // Israel Journal of Mathematics.- 1982.- Vol. 43.- № 1.- P. 28–48.

REFERENCES

1. Ramsey F. P. 1930, "On a problem of formal logic", *Proc. London Math. Soc.*, Vol. 30, pp. 264–286.

2. Jeh, T. 2002,"Set theory. The Third Millennium Edition, revised and expanded", Springer, 769 p.

3. Graham, R. L., Rothschild, B. L., Spencer, J. H., Solymosi, J. 2015, "Ramsey Theory. 3rd ed.", *John Wiley and Sons, NY*, 99 p.

4. Erdős, P., Rado, R. 1950, "A combinatorial theorem", *J. London Math. Soc.*, Vol. 25, pp. 249–255.

5. Matet, P. 2016, "An easier proof of the Canonical Ramsey Theorem", *Colloquium Mathematicum*, Vol. 145, pp. 187–191.

6. Halbeisen, L. J. 2012, "Combinatorial Set Theory", Springer, London, 594 p.

7. Erdős, P., Rado, R. 1952, "Combinatorial Theorems on Classifications of Subsets of a Given Set", *Proc. London Math. Soc.*, vol. s3–2, no. 1, pp. 417–439.

8. Rado, R. 1986, "Note on Canonical Partitions", *Bul. of the London Math. Soc.*, vol. 18, no. 2, pp. 123–126.

9. Mileti, J. R. 2008, "The canonical Ramsey theorem and computability theory", *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 360, pp. 1309–1341.

10. Lefmann, H., Rödl, V. 1995, "On Erdős-Rado numbers", *Combinatorica*, vol. 15, pp. 85–104.

11. Polyakov, N. L. 2023, "On the Canonical Ramsey Theorem of Erdős and Rado and Ramsey Ultrafilters", *Dokl. Math.*, vol. 108, pp. 392–401.

12. Comfort, W. 1977, "Ultrafilters: Some old and some new results", *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 83, pp. 417–455.

13. Di Nasso, M., Goldbring, I., Lupini M,. 2019, "Nonstandard Methods in Ramsey Theory and Combinatorial Number Theory", Springer, 206 p.

14. Comfort, W. W., Negrepontis, S. 1974, "The theory of ultrafilters", Springer, Berlin, 481 p.

15. Hindman, N., Strauss, D. 2012, "Algebra in the Stone–Čech Compactification. 2nd ed., revised and expanded", W. de Gruyter, Berlin–N.Y., 591 p.

16. Jeh, T. 1971, "Lectures in Set Theory: With Particular Emphasis on the Method of Forcing", Springer-Verlag, 148 p.

17. Polyakov, N. L., Shamolin M. V. 2014, "On a generalization of Arrow's impossibility theorem", *Dokl. Math.*, vol. 89, pp. 290–292.

18. Goranko, V. 2007, "Filter and ultrafilter extensions of structures: universal-algebraic aspects", preprint, 30 p.

19. Saveliev, D. I. 2011, "Ultrafilter extensions of models", *Lecture Notes in AICS*, vol. 6521, pp. 162–177.

20. Saveliev, D. I. 2012, "On ultrafilter extensions of models", *In: S.-D. Friedman et al. (eds.). The Infinity Project Proc. CRM Documents 11, Barcelona*, pp. 599–616.

21. Saveliev, D. I., Shelah, S. 2019, "Ultrafilter extensions do not preserve elementary equivalence", *Math. Log. Quart.*, vol. 65, pp. 511–516.

22. Saveliev, D. I. 2014, "On idempotents in compact left topological universal algebras", *Topology Proc.*, vol. 43, pp. 37–46.

23. Poliakov, N. L., Saveliev, D. I. 2017, "On two concepts of ultrafilter extensions of first-order models and their generalizations", *Logic, Language, Information, and Computation, Lecture Notes in Computer Science, eds. J. Kennedy, R. J. G. B. de Queiroz, Springer, Berlin, Heidelberg*, vol. 10388, pp. 336–348.

24. Poliakov, N. L., Saveliev, D. I. 2021, "On ultrafilter extensions of first-order models and ultrafilter interpretations", *Arch. Math. Logic*, vol. 60, pp. 625–681.

25. Wimmers, E. 1982, "The Shelah P-point independence theorem", *Israel Journal of Mathematics*, vol. 43, no. 1, pp. 28–48.

Получено: 14.04.2024
Принято в печать: 04.09.2024

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 25. Выпуск 3.

УДК 539.3:534.26 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-408-418

Рассеяние плоской звуковой волны цилиндром с неоднородным упругим покрытием в движущейся среде[1]

Л. А. Толоконников, С. Л. Толоконников

Толоконников Лев Алексеевич — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет (г. Тула).
e-mail: TolokonnikovLA@mail.ru
Толоконников Сергей Львович — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: tolsl@mail.ru

Аннотация

В статье рассматривается задача о рассеянии плоской монохроматической звуковой волны, падающей наклонно на круговой абсолютно жесткий цилиндр, покрытый радиально-неоднородным изотропным упругим слоем. Цилиндр находится в однородной идеальной сжимаемой жидкости, движущейся вдоль образующей цилиндра с постоянной дозвуковой скоростью.

Получено аналитическое решение задачи.

Представлены результаты численных расчетов диаграмм направленности рассеянного акустического поля в дальней зоне при разных законах неоднородности покрытия и значениях числа Маха.

Ключевые слова: рассеяние, звуковые волны, цилиндр, неоднородное упругое покрытие, движущаяся идеальная жидкость.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:
Толоконников, Л. А., Толоконников, С. Л. Рассеяние плоской звуковой волны цилиндром с неоднородным упругим покрытием в движущейся среде // Чебышевский сборник, 2024, т.25, вып.3, с. 408–418.

[1]Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства просвещения РФ по теме «Теоретико-числовые методы в приближенном анализе и их приложения в механике и физике» (соглашение № 073-00033-24-01 от 09.02.2024).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 25. No. 3.

UDC 539.3:534.26 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-408-418

Scattering of a plane sound wave by a cylinder with an inhomogeneous elastic coating in a moving medium

L. A. Tolokonnikov, S. L. Tolokonnikov

Tolokonnikov Lev Alexeevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State University (Tula).
e-mail: TolokonnikovLA@mail.ru
Tolokonnikov Sergey Lvovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: tolsl@mail.ru

Abstract

In the article the problem of scattering of a plane monochromatic sound wave incident obliquely on a circular absolutely rigid cylinder covered by a radially inhomogeneous isotropic elastic layer is considered. The cylinder is located in a homogeneous ideal compressible fluid moving along forming of the cylinder with a constant subsonic speed.

The results of numerical calculations of directional patterns of a scattered acoustic field in the far zone for different laws of coating heterogeneity and values of the Mach number are presented.

Keywords: scattering, sound waves, cylinder, inhomogeneous elastic coating, moving ideal fluid.

Bibliography: 15 titles.

For citation:
Tolokonnikov, L. A., Tolokonnikov, S. L. 2024, "Scattering of a plane sound wave by a cylinder with an inhomogeneous elastic coating in a moving medium" , *Chebyshevskii sbornik*, vol.25, no.3, pp. 408–418.

1. Введение

Рассеяние звуковых волн на телах цилиндрической формы с неоднородными покрытиями рассматривалось в ряде работ. Рассеяние плоской звуковой волны цилиндром с непрерывно-неоднородным упругим покрытием исследовано в [1, 2]. В [1] рассмотрен случай нормального падения волны на абсолютно жесткий цилиндр, а в [2] — случай наклонного падения на упругий цилиндр. В работе [3] решена задача о рассеянии плоских звуковых волн на дискретно-неоднородном упругом цилиндре. Решение задач о дифракции сферических и цилиндрических звуковых волн на упругом цилиндре с радиально-неоднородным покрытием получены в [4 – 6]. Рассеяние звуковых волн упругим цилиндром конечной длины с неоднородным покрытием изучено в [7]. В указанных выше работах полагалось, что цилиндрическое тело находится в неподвижной среде. В [8] рассмотрено рассеяние плоской звуковой волны ограниченной цилиндрической оболочкой в движущейся среде в предположении, что края оболочки закреплены в жесткий безграничный цилиндрический экран.

В настоящей работе находится решение задачи о рассеянии плоской монохроматической звуковой волны, падающей наклонно на круговой цилиндр, покрытый радиально-неоднородным упругим слоем и находящийся в движущейся среде.

2. Постановка задачи

Рассмотрим бесконечный абсолютно жесткий цилиндр радиуса r_0. Цилиндр имеет покрытие в виде неоднородного изотропного упругого слоя, внешний радиус которого равен r_1. Введем прямоугольную декартову систему координат x, y, z, ось z которой совпадает с осью вращения цилиндра. Свяжем с координатами x, y, z цилиндрические координаты r, φ, z. Полагаем, что модули упругости λ и μ материала неоднородного цилиндрического слоя описываются дифференцируемыми функциями цилиндрической радиальной координаты r, а плотность ρ — непрерывной функцией координаты r. Цилиндр находится в однородной идеальной сжимаемой жидкости, характеризуемой плотностью ρ_1 и скоростью звука c. Жидкость движется с постоянной скоростью V, меньшей скорости звука, вдоль образующей цилиндра в положительном направлении оси z.

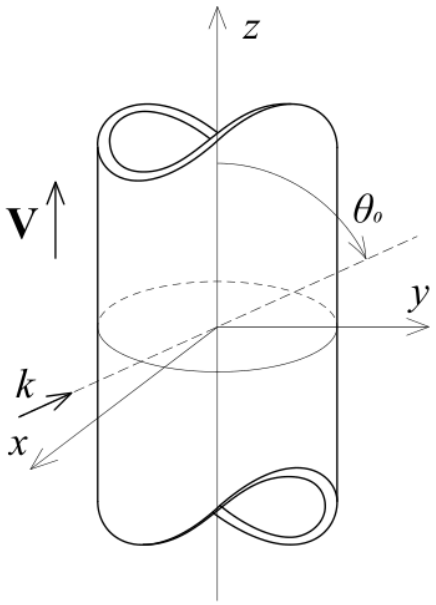


Рис. 1: Геометрия задачи

Пусть на цилиндр наклонно падает плоская монохроматическая звуковая волна давления p_i. Без ограничения общности будем полагать, что волновой вектор падающей волны $\mathbf{k}$ лежит в плоскости xOz и азимутальный угол падения волны $\varphi_0 = 0$. С положительным направлением оси z волновой вектор составляет полярный угол θ_0 (рис. 1).

Определим отраженную от цилиндра волну, а также найдем поле смещений в неоднородном слое.

3. Аналитическое решение задачи

Распространения звука в однородной, поступательно движущейся среде со скоростью $\mathbf{V}$ описывается уравнением [9]

$$\Delta p - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{2}{c^2}(\mathbf{V}\cdot\bigtriangledown\frac{\partial p}{\partial t}) - \frac{1}{c^2}(\mathbf{V}\cdot\bigtriangledown)(\mathbf{V}\cdot\bigtriangledown)p = 0. \tag{1}$$

В случае гармонических колебаний с временной зависимостью $e^{-i\omega t}$ и при $\mathbf{V} = (0, 0, V)$ уравнение (1) принимает вид

$$\Delta p + 2iMk\frac{\partial p}{\partial z} - M^2\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + k^2 p = 0. \tag{2}$$

Здесь p — звуковое давление во внешней среде; $k = \omega/c$ — волновое число; $M = V/c < 1$ — число Маха; t — время.

Представим падающую плоскую волну в виде

$$p_i = A_0 \exp[i(k_r r\cos\varphi + k_z z - \omega t)], \tag{3}$$

где A_0 — амплитуда волны. В дальнейшем временной множитель $e^{-i\omega t}$ будем опускать.

Для падающей волны (3) с отношением $k_z/k_r = \operatorname{ctg}\theta_0$ из уравнения (2), записанного в цилиндрической системе координат ($\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$), получим

$$k_r = \frac{k\sin\theta_0}{1 + M\cos\theta_0}, \quad k_z = \frac{k\cos\theta_0}{1 + M\cos\theta_0}. \tag{4}$$

Давление в полном акустическом поле $p = p_i + p_s$, где p_s — звуковое давление в рассеянной волне. Акустическое поле будет симметрично относительно плоскости xOz.

Давление p_i представим в виде [10]

$$p_i(r,\varphi,z) = A_0 e^{ik_z z}\sum_{n=0}^{\infty}(2-\delta_{0n})i^n J_n(k_r r)\cos n\varphi, \tag{5}$$

где J_n — цилиндрическая функция Бесселя порядка n.

С учетом условия излучения на бесконечности [10] давление p_s будем искать в виде

$$p_s(r,\varphi,z) = e^{ik_z z}\sum_{n=0}^{\infty} A_n H_n(k_r r)\cos n\varphi, \tag{6}$$

где H_n — цилиндрическая функция Ганкеля первого рода порядка n. Разложение (6) удовлетворяет уравнению (2) при выполнении соотношений (4).

Уравнения движения неоднородного изотропного упругого цилиндрического слоя в цилиндрической системе координат в случае установившихся колебаний имеют вид [11]

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{r\varphi}}{\partial\varphi} + \frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr}-\sigma_{\varphi\varphi}}{r} = -\omega^2\rho(r)u_r;\\
&\frac{\partial\sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\varphi\varphi}}{\partial\varphi} + \frac{\partial\sigma_{\varphi z}}{\partial z} + \frac{2}{r}\sigma_{r\varphi} = -\omega^2\rho(r)u_\varphi;\\
&\frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\varphi z}}{\partial\varphi} + \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r}\sigma_{rz} = -\omega^2\rho(r)u_z,
\end{aligned} \tag{7}$$

где u_r, u_φ, u_z — компоненты вектора смещения $\mathbf{u}$ частиц неоднородного слоя; σ_{ij} — компоненты тензора напряжений в неоднородном слое.

Соотношения между компонентами тензора напряжений σ_{ij} и вектора смещения $\mathbf{u}$ в неоднородном изотропном упругом покрытии записываются следующим образом [11]:

$$\sigma_{rr} = \lambda(r)\mathrm{div}\mathbf{u} + 2\mu(r)\frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \lambda(r)\mathrm{div}\mathbf{u} + 2\mu(r)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{u_r}{r}\right),$$

$$\sigma_{zz} = \lambda(r)\mathrm{div}\mathbf{u} + 2\mu(r)\frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \sigma_{r\varphi} = \mu(r)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r}\right),$$

$$\sigma_{rz} = \mu(r)\left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}\right), \quad \sigma_{\varphi z} = \mu(r)\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial\varphi}\right),$$

где $\mathrm{div}\mathbf{u} = \dfrac{\partial u_r}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_r\right) + \dfrac{\partial u_z}{\partial z}$.

Используя эти соотношения, запишем уравнения (7) через компоненты вектора смещения $\mathbf{u}$. Получим

$$(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \left(\lambda' + 2\mu' + \frac{\lambda+2\mu}{r}\right)\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\mu}{r^2}\frac{\partial^2 u_r}{\partial \varphi^2} + \mu\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} +$$

$$+\frac{(\lambda+\mu)}{r}\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r \partial \varphi} + \frac{1}{r}\left(\lambda' - \frac{\lambda+3\mu}{r}\right)\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} +$$

$$+(\lambda+\mu)\frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z} + \lambda'\frac{\partial u_z}{\partial z} + \left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{\lambda+2\mu}{r^2} + \omega^2\rho\right)u_r = 0,$$

$$\frac{(\lambda+\mu)}{r}\frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial \varphi} + \frac{1}{r}\left(\mu' + \frac{\lambda+3\mu}{r}\right)\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \mu\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r^2} + \frac{(\lambda+2\mu)}{r^2}\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \varphi^2} + \left(\mu' + \frac{\mu}{r}\right)\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} +$$

$$\mu\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial z^2} + \frac{(\lambda+\mu)}{r}\frac{\partial^2 u_z}{\partial \varphi \partial z} + \left(-\frac{\mu'}{r} - \frac{\mu}{r^2} + \omega^2\rho\right)u_\varphi = 0, \tag{8}$$

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial z} + \left(\mu' + \frac{\lambda+\mu}{r}\right)\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{(\lambda+\mu)}{r}\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \varphi \partial z} + \mu\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{\mu}{r^2}\frac{\partial^2 u_z}{\partial \varphi^2} +$$

$$(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \left(\mu' + \frac{\mu}{r}\right)\frac{\partial u_z}{\partial r} + \omega^2\rho u_z = 0,$$

где штрих означает дифференцирование по r.

Так как неоднородность материала покрытия проявляется лишь в радиальном направлении, то зависимость компонент вектора смещения $\mathbf{u}$ от координаты z, согласно закону Снеллиуса, имеет вид $e^{ik_z z}$. Компоненты вектора смещения $\mathbf{u}$ в неоднородном упругом слое являются периодическими функциями координаты φ с периодом 2π. Поэтому функции $u_r(r,\varphi,z)$, $u_\varphi(r,\varphi,z)$ и $u_z(r,\varphi,z)$ будем искать в виде

$$u_r = e^{ik_z z}\sum_{n=0}^{\infty} u_{1n}(r)\cos n\varphi, \quad u_\varphi = e^{ik_z z}\sum_{n=0}^{\infty} u_{2n}(r)\sin n\varphi,$$

$$u_z = e^{ik_z z}\sum_{n=0}^{\infty} u_{3n}(r)\cos n\varphi. \tag{9}$$

При этом вид зависимостей от φ в этих разложениях определяется соображениями симметрии вектора смещения $\mathbf{u}$ относительно плоскости $\varphi = 0,\ \pi$.

Подставляя выражения (9) в уравнения (8), получим следующую систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных функций $u_{1n}(r)$, $u_{2n}(r)$ и $u_{3n}(r)$ для каждого n:

$$\hat{A}_n\mathbf{U}_n'' + \hat{B}_n\mathbf{U}_n' + \hat{C}_n\mathbf{U}_n = 0, \tag{10}$$

где $\mathbf{U}_n = (u_{1n}, u_{2n}, u_{3n})^T$; $\hat{A}_n = (a_{nij})_{3\times3}, \hat{B}_n = (b_{nij})_{3\times3}, \hat{C}_n = (c_{nij})_{3\times3}$ — матрицы третьего порядка;

$$a_{n11} = (\lambda+2\mu)r^2, \quad a_{n22} = a_{n33} = \mu r^2, \quad a_{nij} = 0 \quad (i \neq j),$$

$$b_{n11} = (\lambda'+2\mu')r^2 + (\lambda+2\mu)r, \quad b_{n12} = n(\lambda+\mu)r, \quad b_{n13} = ik_z(\lambda+\mu)r^2,$$

$$b_{n21} = -n(\lambda+\mu)r, \quad b_{n22} = \mu' r^2 + \mu r, \quad b_{n23} = 0,$$

$$b_{n31} = ik_z(\lambda+\mu)r^2, \quad b_{n32} = 0, \quad b_{n33} = \mu' r^2 + \mu r,$$

$$c_{n11} = \lambda' r - \lambda - (n^2 + 2 + k_z^2 r^2)\mu + \omega^2 \rho r^2, \quad c_{n12} = n\left(\lambda' r - \lambda - 3\mu\right),$$

$$c_{n13} = ik_z \lambda' r^2, \quad c_{n21} = -n\left(\mu' r + \lambda + 3\mu\right),$$

$$c_{n22} = -\mu' r - n^2\lambda - (2n^2 + k_z^2 r^2 + 1)\mu + \omega^2\rho r^2, \quad c_{n23} = -ink_z(\lambda+\mu)r,$$

$$c_{n31} = ik_z[\mu' r^2 + (\lambda+\mu)r], \quad c_{n32} = ink_z(\lambda+\mu)r,$$

$$c_{n33} = -(n^2 + 2k_z^2 r^2)\mu - k_z^2 \lambda r^2 + \omega^2 \rho r^2.$$

Коэффициенты A_n разложения (6) и функции $u_{1n}(r), u_{2n}(r), u_{3n}(r)$ из разложений (9) подлежат определению из граничных условий.

Граничное условие на внешней поверхности неоднородного слоя (при $r = r_1$), связывающее акустическое давление в жидкости и смещение частиц упругой среды, имеет вид [8, 12, 13]

$$\left.\frac{\partial p}{\partial r}\right|_{r=r_1} = \rho\omega^2 \left(1 + i\frac{M}{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 u_r(r_1, \varphi, z). \tag{11}$$

Кроме того, граничные условия при $r = r_1$ заключаются в равенстве нормального напряжения и акустического давления и в отсутствии касательных напряжений

$$r = r_1: \qquad \sigma_{rr} = -p, \quad \sigma_{r\varphi} = 0, \quad \sigma_{rz} = 0. \tag{12}$$

На внутренней поверхности слоя $r = r_0$ должен быть равен нулю вектор смещения частиц упругой среды

$$r = r_0: \qquad u_r = 0, \quad u_\varphi = 0, \quad u_z = 0. \tag{13}$$

Подставляя (5), (6) и первое выражение (9) в (11), находим коэффициенты A_n, выраженные через величины $u_{1n}(r_1)$

$$A_n = \frac{1}{k_r H_n'(k_r r_1)} \left[-A_0 k_r (2 - \delta_{0n}) i^n J_n'(k_r r_1) + \rho\omega^2 \left(1 - \frac{M}{k}k_z\right)^2 u_{1n}(r_1)\right] \tag{14}$$

где штрихи означают дифференцирование по аргументу.

Из оставшихся неиспользованными граничных условий с учетом (14) и выражения для вронскиана $J_n(x)H_n'(x) - J_n'(x)H_n(x) = \dfrac{2i}{\pi x}$ получаем шесть краевых условий, которым должно удовлетворять решение системы дифференциальных уравнений (10)

$$\begin{gathered} \left(\frac{1}{r^2}\hat{A}_n \mathbf{U}_n' + \hat{D}_n \mathbf{U}_n\right)\Big|_{r=r_1} = \hat{E}_n, \\ \mathbf{U}_n|_{r=r_0} = 0, \end{gathered} \tag{15}$$

где элементы матриц $\hat{D}_n = (d_{nij})_{3\times 3}$, $\hat{E}_n = (e_{nj})_{3\times 1}$ определяются следующими выражениями:

$$d_{n11} = \frac{\lambda}{r} + \rho\omega^2 \left(1 - \frac{M}{k}k_z\right)^2 \frac{H_n(k_r r)}{k_r H_n'(k_r r)}, \quad d_{n12} = \frac{n\lambda}{r}, \quad d_{n13} = ik_z\lambda,$$

$$d_{n21} = -\frac{n\mu}{r}, \quad d_{n22} = -\frac{\mu}{r}, \quad d_{n31} = ik_z\mu, \quad d_{n23} = d_{n32} = d_{n33} = 0,$$

$$e_{n1} = -\frac{2i^{n+1}A_0(2-\delta_{0n})}{\pi k_r r_1 H_n'(k_r r_1)}, \quad e_{n2} = e_{n3} = 0.$$

Краевая задача (10), (15) может быть решена различными методами.

После решения краевой задачи (10), (15) по формуле (14) вычисляются коэффициенты A_n. В результате получаем аналитическое описание волновых полей вне и внутри упругого покрытия с помощью выражений (6) и (9).

Рассмотрим дальнюю зону рассеянного акустического поля.

Используя асимптотическую формулу для цилиндрической функции Ганкеля первого рода при больших значениях аргумента [14] ($k_r r >> 1$)

$$H_n(k_r r) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi k_r r}} \exp\left[i\left(k_r r - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right],$$

из (6) находим

$$p_s = \sqrt{\frac{r_0}{2r}} \exp\left[i\left(k_z z + k_r r - \frac{\pi}{4}\right)\right] F(\varphi),$$

где

$$F(\varphi) = \frac{2}{\sqrt{\pi k_r r_0}} \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n A_n \cos n\varphi. \tag{16}$$

Выражения (6), (14) и (16) можно использовать для расчета акустического поля, рассеянного движущимся цилиндром в неподвижной среде. Для этого следует перейти от системы координат r, φ, z к системе координат r^1, φ^1, z^1, движущейся со средой, с помощью соотношений

$$r^1 = r, \quad \varphi^1 = \varphi, \quad z^1 = z + Vt.$$

В системе координат r^1, φ^1, z^1 жидкость неподвижна, а цилиндр движется со скоростью V в направлении, противоположном оси z_1.

Отметим, что частота колебаний в движущейся системе координат r, φ, z будет отличаться от частоты колебаний в неподвижной системе координат r^1, φ^1, z^1 (относительно среды). Если расстояние R от центра системы r, φ, z до точки наблюдения изменяется не слишком быстро, то частота колебаний ω_1 для неподвижного относительно среды наблюдателя определятся по формуле [9]

$$\omega_1 = \omega\left(1 - M\frac{z}{R}\right)/(1 - M^2),$$

выражающей эффект Доплера.

4. Численные исследования

С помощью выражения (16) для амплитуды рассеяния в дальней зоне поля $\mid F(\varphi) \mid$ были рассчитаны диаграммы направленности, позволяющие оценить звукоотражающие свойства тела в различных направлениях.

Были проведены расчеты $\mid F(\varphi) \mid / A_0$ для цилиндра, находящегося в воде ($\rho_1 = 10^3$ кг/м^3, $c = 1485$ м/с), при нормальном падении плоской волны ($\theta_0 = \pi/2$). Полагалось, что отношение внешнего радиуса цилиндрического слоя r_1 к внутреннему радиусу r_0 равно 1.1, а $r_0 = 1$ м. Расчеты проводились как для однородного покрытия с плотностью $\overline{\rho} = 1.07 \cdot 10^3$ кг/м^3 и модулями упругости $\overline{\lambda} = 3.9 \cdot 10^9$ Н/м^2, $\overline{\mu} = 9.8 \cdot 10^8$ Н/м^2 (поливинил), так и

для неоднородного покрытия, механические характеристики которого менялись по толщине цилиндрического слоя по законам

$$\rho = \overline{\rho} f(r), \quad \lambda = \overline{\lambda}, \quad \mu = \overline{\mu},$$

$$f_1(r) = 5 - 4\left(\frac{r_1 - r}{r_1 - r_0}\right)^2, \quad f_2(r) = 5 - 4\left(\frac{r - r_0}{r_1 - r_0}\right)^2.$$

Зависимости $f_1(r)$ и $f_2(r)$ выбраны такими, что их графики являются зеркальным отображением друг друга относительно прямой $r = (r_0 + r_1)/2$. При этом на внешней поверхности покрытия функция $f_1(r)$ достигает максимума, а на внутренней поверхности покрытия — минимума. Функция $f_2(r)$ достигает тех же максимальных и минимальных значений, но уже на внутренней и внешней поверхностях покрытия.

На рис. 2 – 4 представлены диаграммы направленности, рассчитанные для волнового размера цилиндра $kr_0 = 5$ при разных значениях числа Маха M.

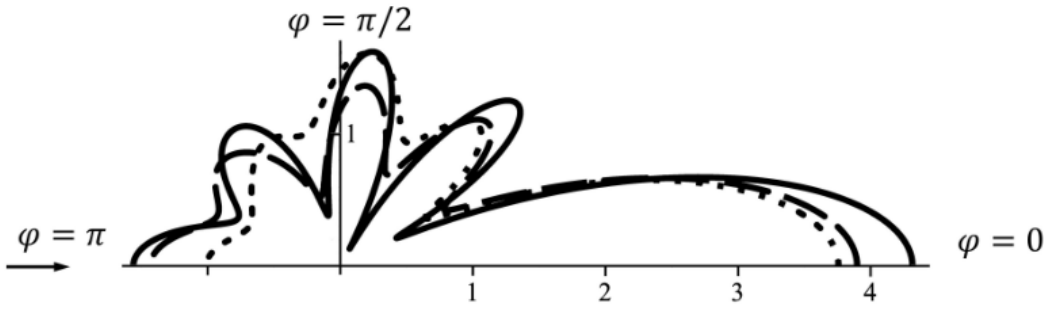


Рис. 2: Диаграммы направленности при $M = 0$

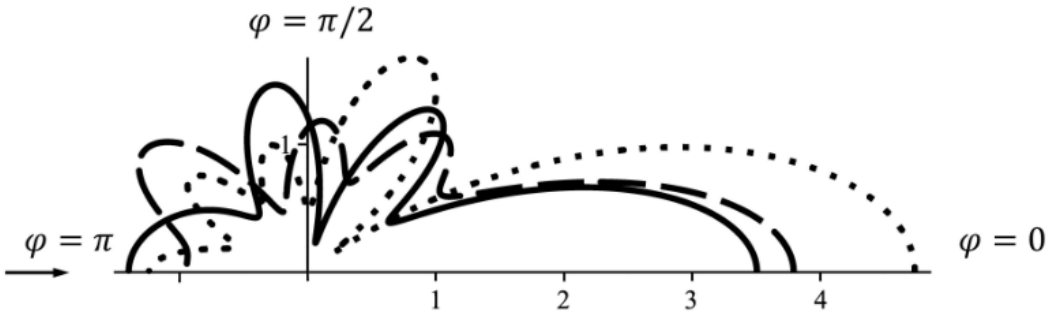


Рис. 3: Диаграммы направленности при $M = 0.3$

На лучах диаграмм отложены значения безразмерной амплитуды рассеяния $|F|/A_0$, вычисленной для соответствующих значений угла φ. Ввиду симметрии рассеянного акустического поля при нормальном падении плоской волны диаграммы приведены для значений φ из интервала $0^\circ \leqslant \varphi \leqslant 180^\circ$. На рисунках сплошная линия соответствует однородному покрытию, штриховая — неоднородному покрытию вида $f_1(r)$, пунктирная — неоднородному покрытию вида $f_2(r)$. Стрелкой показано направление распространения падающей плоской волны.

Расчеты показали, что диаграммы направленности рассеянного поля в дальней зоне существенно изменяются при различных значениях числа M для разных законов неоднородности упругого покрытия.

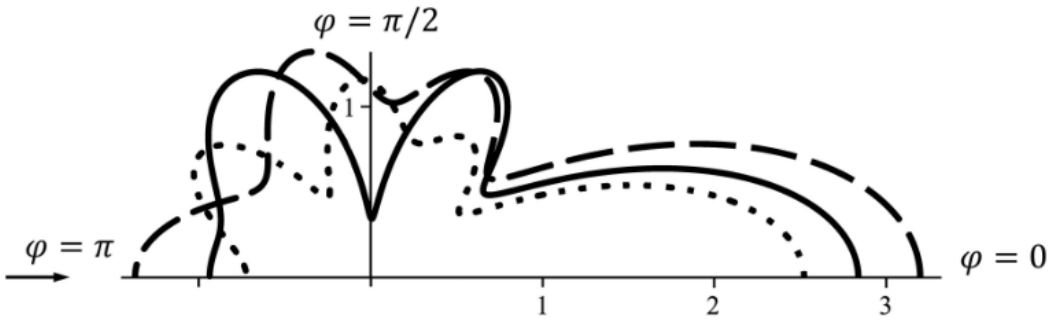


Рис. 4: Диаграммы направленности при $M = 0.6$

5. Заключение

В настоящей работе получено аналитическое решение задачи о рассеянии плоской звуковой волны, наклонно падающей на абсолютно жесткий цилиндр с неоднородным упругим покрытием, расположенный в движущейся идеальной жидкости. Исследовано рассеянное акустическое поле в дальней зоне. Проведенные численные расчеты выявили характерные черты влияния различных законов неоднородности материала покрытия и значений числа Маха на дифракционную картину.

С помощью покрытий в виде непрерывно неоднородного упругого слоя можно измененить звукоотражающие свойства цилиндрического тела. Такой слой легко реализовать с помощью системы тонких однородных упругих слоев. Получить требуемые характеристики рассеяния можно, если найти соответствующие зависимости для параметров неоднородного упругого слоя. Для этого следует решить обратную задачу об определении законов неоднородности покрытия, например, используя подход, предложенный в работе [15].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Романов А. Г., Толоконников Л. А. Рассеяние звуковых волн цилиндром с неоднородным упругим покрытием // Прикладная математика и механика. 2011. Т. 75. Вып. 5. С. 850-857.

2. Толоконников Л. А. Рассеяние наклонно падающей плоской звуковой волны упругим цилиндром с неоднородным покрытием // Изв. Тульского гос. ун-та. Естественные науки. 2013. Вып. 2. Часть 2. С. 265-274.

3. Ларин Н. В., Толоконников Л. А. Рассеяние плоской звуковой волны упругим цилиндром с дискретно-слоистым покрытием // Прикладная математика и механика. 2015. Т. 79. Вып. 2. С. 242-250.

4. Толоконников Л. А. Дифракция сферической звуковой волны на упругом цилиндре с неоднородным покрытием // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19. Вып. 4. С. 215-226.

5. Толоконников Л. А., Ефимов Д. Ю. Дифракция цилиндрических звуковых волн на упругом цилиндре с радиально-неоднородным покрытием // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22. Вып. 1. С. 460-472.

6. Толоконников Л. А., Ефимов Д. Ю. Рассеяние упругим цилиндром с неоднородным покрытием звуковых волн, излучаемых произвольно расположенным линейным источником // Математическое моделирование. 2024. Т. 36. № 1. С. 71-84.

7. Толоконников Л. А., Ефимов Д. Ю. Рассеяние звуковых волн упругим цилиндром конечной длины с неоднородным покрытием // Математическое моделирование. 2023. Т. 35. № 4. С. 3-23.

8. Лямшев Л. М. Отражение звука цилиндрической оболочкой в движущейся среде // Акуст. журн. l963. Т. 9. № 3. С. 329—335.

9. Блохинцев Д. И. Акустика неоднородной движущейся среды. М.: Наука, 1981. 208 с.

10. Шендеров Е. Л. Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 352 с.

11. Новацкий В. Теория упругости. Т. 2. М.: Мир, 1975. 872 с.

12. Morse P. M., Ingard K. U. Linear acoustical theory. Berlin — Gottingen — Heidelberg: Handbuch der Physik. Band XI/1. 1961, 128 p.

13. Шендеров Е. Л. Излучение звука в движущуюся среду // Акуст. журн. l966. Т. 12. № 1. С. 98—104.

14. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 832 с.

15. Толоконников Л. А., Ларин Н. В., Скобельцын С. А. Моделирование неоднородного покрытия упругого цилиндра с заданными звукоотражающими свойствами // Прикладная механика и техническая физика. 2017. № 4. С. 189-199.

REFERENCES

1. Romanov, A. G., Tolokonnikov, L. A. 2011, “The scattering of acoustic waves by a cylinder with a non-uniform elastic coating”, *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 75, no. 5, pp. 595-600.

2. Tolokonnikov, L. A. 2013, “Scattering of an obliquely incident plane sound wave by an elastic cylinder with a non-uniform covering”, *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no. 2-2, pp. 265-274, [in Russian].

3. Larin, N. V., Tolokonnikov, L. A. 2015, “The scattering of a plane sound wave by an elastic cylinder with a discrete-layered covering”, *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 79. no 2, pp. 164-169.

4. Tolokonnikov, L. A. 2018, “Diffraction of a spherical sound wave by an elastic cylinder with an non-uniform coating”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 4, pp. 215–226, [in Russian].

5. Tolokonnikov, L. A., Efimov, D. Yu. 2021, “Diffraction of cylindrical sound waves by an elastic cylinder with an radially inhomogeneous coating”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 1, pp. 460-472, [in Russian].

6. Tolokonnikov, L. A., Efimov, D. Yu. 2024, “Scattering by an elastic cylinder with an inhomogeneous coating of sound waves”, *Mathematical Models and Computer Simulations*, vol. 16, no. 3, pp. 373-382.

7. Tolokonnikov, L. A., Efimov, D. Yu. 2023, “Scattering of sound Waves by a finite length elastic cylinder with an inhomogeneous coating”, *Mathematical Models and Computer Simulations*, vol. 15, no. 5, pp. 863-876.

8. Lyamshev, L. M. 1963, “Reflection of sound by a cylindrical shell in a moving medium”, *Akust. Zhurnal*, vol. 9, no. 3, pp. 329—335, [in Russian].

9. Blohintsev, D. I. 1981, “Acoustics of an inhomogeneous moving medium”, *Nauka , Moscow*, 208 p., [in Russian].

10. Shenderov, E. L. 1972, “Wave problems of underwater acoustics”, *Sudostroenie, Leningrad*, 352 p., [in Russian].

11. Nowacki, W. 1975, “Teoria sprezystosci”, *Mir, Moscow*, 872 p., [in Russian].

12. Morse P. M., Ingard, K. U. 1961, “Linear acoustical theory”, *Handbuch der Physik. Band XI/1, Berlin — Gottingen — Heidelberg*, 128 p.

13. Shenderov, E. L. 1966, “Sound radiation of a piston into a moving medium”, *Akust. Zhurnal*, vol. 13, no. 1, pp. 98-104, [in Russian].

14. Abramowitz, M., Stegun, I. A. 1965, “Handbook of Mathematical Functions”, *Dover Publications, Inc, New York*, 1046 p.

15. Tolokonnikov, L. A., Larin, N. V., Skobel’tsyn, S. A. 2017, “Modeling of inhomogeneous coating of an elastic cylinder with given sound-reflecting properties”, *J. Appl. Mech. and Techn. Physics*, vol. 58, no 4, pp. 733-742.

Получено: 16.03.2024
Принято в печать: 04.09.2024

РЕДКОЛЛЕГИЯ

Том 25 Выпуск 3

Главный редактор

Чубариков Владимир Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математических и компьютерных методов анализа, президент механико-математического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.
e-mail: chubarik2020@mail.ru

Заместители главного редактора

Добровольский Николай Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой алгебры, математического анализа и геометрии Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого.
e-mail: dobrovol@tsput.ru

Нижников Александр Иванович — доктор педагогических наук, профессор, заведующий кафедрой математической физики Московского педагогического государственного университета, заслуженный работник высшей школы РФ.
e-mail: ainizhnikov@mail.ru, nizhnikov.ai@mail.ru

Ответственные секретари

Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры прикладной математики и информатики Тульского государственного университета; доцент кафедры алгебры, математического анализа и геометрии Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого.
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Реброва Ирина Юрьевна — кандидат физико-математических наук; декан факультета математики, физики и информатики; доцент кафедры алгебры, математического анализа и геометрии Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого.
e-mail: i_rebrova@mail.ru

Члены редколлегии

Боровков Алексей Иванович — доктор технических наук, профессор, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого.
e-mail: borovkov@spbstu.ru

Быковский Виктор Алексеевич — доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, заместитель директора по научной работе Института прикладной математики Дальневосточного отделения Российской академии наук (ИПМ ДВО РАН), директор Хабаровского отделения ИПМ ДВО РАН.
e-mail: vab@iam.khv.ru

Востоков Сергей Владимирович — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры алгебры и теории чисел Санкт-Петербургского университета, президент фонда им. Л. Эйлера.
e-mail: sergei.vostokov@gmail.com

Георгиевский Дмитрий Владимирович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теории упругости механико-математического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.
e-mail: georgiev@mech.math.msu.su

Горбачёв Владимир Иванович — доктор физико-математических наук, профессор, механико-математический факультет Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.
e-mail: vigorby@mail.ru

Гриценко Сергей Александрович — доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики 1-го Финансового университета при Правительстве РФ; профессор механико-математического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.
e-mail: s.gritsenko@gmail.com

Демидов Сергей Сергеевич — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры теории вероятностей механико-математического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова; заведующий кабинетом истории и методологии математики и механики, заведующий отделом истории физико-математических наук Института истории естествознания и техники РАН; главный редактор журнала «Историко-математические исследования»; президент Международной академии истории науки.
e-mail: serd42@mail.ru

Дурнев Валерий Георгиевич — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой компьютерной безопасности и математических методов обработки информации Ярославского государственного университета.
e-mail: durnev@univ.uniyar.ac.ru

Зубков Андрей Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математической статистики и случайных процессов механико-математического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова; заведующий отделом дискретной математики Математического института им. В. А. Стеклова РАН.
e-mail: zubkov@mi.ras.ru

Иванов Александр Олегович — доктор физико-математических наук, механико-математический факультет Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.
e-mail: aoiva@mech.math.msu.su

Иванов Валерий Иванович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики и информатики Института прикладной математики и компьютерных наук Тульского государственного университета.
e-mail: ivaleryi@mail.ru

Королёв Максим Александрович — доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Математического института им. В. А. Стеклова РАН.
e-mail: korolevma@mi-ras.ru

Кузнецов Валентин Николаевич — доктор технических наук, профессор, Саратовский государственный технический университет им. Ю. А. Гагарина.
e-mail: kuznetsovvn@info.sgu.ru

Матиясевич Юрий Владимирович — доктор физико-математических наук, профессор, академик Российской академии наук, советник РАН Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова РАН, президент Санкт-Петербургского математического общества.
e-mail: yumat@pdmi.ras.ru

Мищенко Сергей Петрович — доктор физико-математических наук, профессор, Ульяновский государственный университет.
e-mail: mishchenkosp@mail.ru

Нестеренко Юрий Валентинович — доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН, заведующий кафедрой теории чисел механико-математического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.
e-mail: nester@mi.ras.ru

Панин Владимир Алексеевич — доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАЕН, действительный член Академии информатизации образования, президент Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого.
e-mail: tgpu@tula.net

Пачев Урусби Мухамедович — доктор физико-математических наук, профессор кафедры алгебры и дифференциальных уравнений Кабардино-Балкарского государственного университета им. Х. М. Бербекова.
e-mail: urusbi@rambler.ru

Семёнов Алексей Львович — доктор физико-математических наук, профессор, академик Российской академии наук, академик Российской академии образования, заведующий кафедрой математической логики и теории алгоритмов Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.
e-mail: alsemno@ya.ru

Толоконников Лев Алексеевич — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет.
e-mail: tolokonnikovla@mail.ru

Чирский Владимир Григорьевич — доктор физико-математических наук, доцент, профессор механико-математического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ.
e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Аллаков Исмаил — доктор физико-математических наук, профессор, профессор Термезского государственного университета (Узбекистан).
e-mail: iallakov@mail.ru

Белов Алексей Яковлевич — доктор физико-математических наук, федеральный профессор математики, профессор университета Бар-Илана (Израиль).
e-mail: Kanelster@gmail.com

Берник Василий Иванович — доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Института математики НАН Беларуси (Белоруссия).
e-mail: bernik@im.bas-net.by

Лауринчикас Антанас — доктор физико-математических наук, профессор, действительный член АН Литвы, заведующий кафедрой теории вероятностей и теории чисел Вильнюсского университета (Литва).
e-mail: antanas.laurincikas@mif.vu.lt

Лю Юнпин — доктор наук, профессор, руководитель Исследовательского центра современного математического анализа Пекинского педагогического университета (Китай).
e-mail: ypliu@bnu.edu.cn

Мисир Джумаил оглы Марданов — доктор физико-математических наук, профессор, директор Института математики и механики Национальной академии наук Азербайджана (Азербайджан).
e-mail: rmi@lan.ab.az

Мусин Олег Рустамович — доктор физико-математических наук, профессор факультета математики Техасского университета в Браунсвилле (США).
e-mail: oleg.musin@utb.edu, omusin@gmail.com

Рахмонов Зарулло Хусейнович — доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент АН Республики Таджикистан, директор Института математики Таджикской АН (Таджикистан).
e-mail: zarullo_r@tajik.net, zarullo-r@rambler.ru

Салиба Холем Мансур — кандидат физико-математических наук, доцент факультета естественных и прикладных наук университета Нотр-Дам-Луэз (Ливан).
e-mail: qwe123@rocketmail.com

Табари Абдулло Хабибулло — доктор физико-математических наук, профессор, член корреспондент Академии наук Таджикистана; ректор Кулябского государственного университета им. Абуабдуллаха Рудаки (Таджикистан).
e-mail: rektor@kgu.tj

Фукшанский Леонид Евгеньевич — доктор математических наук, профессор, Колледж Клермонт Маккенна (США).
e-mail: lenny@cmc.edu

Шяучюнас Дарюс — доктор математических наук, профессор, старший научный сотрудник Научного института Шяуляйского университета (Литва).
e-mail: darius.siauciunas@su.lt

THE EDITORIAL BOARD

Volume 25 Issue 3

The main editor

Chubarikov Vladimir Nikolaevich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Chair of Mathematical and Computer Methods of Analysis, President of the Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.
e-mail: chubarik2020@mail.ru

The assistants of the main editor:

Dobrovolsky Nikolai Mihailovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Chair of Algebra, Mathematical Analysis and Geometry, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University.
e-mail: dobrovol@tsput.ru

Nijnikov Alexander Ivanovich — Dr. Sci. in Pedagogy, Professor, Head of the Chair of Mathematical Physics, Moscow Pedagogical State University; Honored Worker of Higher Education of the Russian Federation.
e-mail: ainizhnikov@mail.ru, nizhnikov.ai@mail.ru

Executive secretaries

Dobrovolsky Nikolai Nikolaevich — PhD in Physics and Mathematics, Junior Lecturer of the Chair of Applied Mathematics and Computer Science, Tula State University; Associate Professor of the Chair of Algebra, Mathematical Analysis and Geometry, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University.
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Rebrova Irina Yuryevna — PhD in Physics and Mathematics, Dean of the Department of Mathematics, Physics and Computer Science, Associate Professor of the Chair of Algebra, Mathematical Analysis and Geometry, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University.
e-mail: i_rebrova@mail.ru

Editorial Board

Borovkov Aleksey Ivanovich — Dr. Sci. in Engineering, Professor, Peter the Great St.Petersburg Polytechnic University.
e-mail: borovkov@spbstu.ru

Bykovsky Victor Alekseevich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Deputy Director for Research, Institute for Applied Mathematics, Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences (IAM FEB RAS), Director of the Institute of Applied Mathematics, Khabarovsk Division.
e-mail: vab@iam.khv.ru

Vostokov Sergey Vladimirovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Professor of the Chair of Algebra and Number Theory, St. Petersburg State University, President of Euler Foundation.
e-mail: sergei.vostokov@gmail.com

Georgievsky Dmitry Vladimirovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Chair of Elasticity Theory, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.
e-mail: georgiev@mech.math.msu.su

Gorbachev Vladimir Ivanovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.
e-mail: vigorby@mail.ru

Gritsenko Sergey Alexandrovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor of the Chair of Mathematics, Financial University; Professor, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.
e-mail: s.gritsenko@gmail.com

Demidov Sergey Sergeyivich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Professor of the Chair of Probability Theory, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University; Head of the Department of History and Methodology of Mathematics and Mechanics, Head of the Department of History of Physics and Mathematics, S.I.Vavilov Institute for the History of Science and Technology, RAS (IHST RAS); Editor-in-chief of the journal «Istoriko-Matematicheskie Issledovaniya»; President of the International Academy of the History of Science.
e-mail: serd42@mail.ru

Durnev Valery Georgievich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Chair of Computer Security and Mathematical Methods of Information Processing, P.G. Demidov Yaroslavl State University.
e-mail: durnev@univ.uniyar.ac.ru

Zubkov Andrey Mihailovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Chair of Mathematical Statistics and Random Processes, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University; Head of the Department Department of Discrete Mathematics, Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences.
e-mail: zubkov@mi.ras.ru

Ivanov Aleksandr Olegovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.
e-mail: aoiva@mech.math.msu.su

Ivanov Valery Ivanovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Chair of Applied Mathematics and Computer Science, Institute of Applied Mathematics and Computer Science, Tula State University.
e-mail: ivaleryi@mail.ru

Korolev Maxim Aleksandrovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Leading Researcher, Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences.
e-mail: korolevma@mi-ras.ru

Kuznetsov Valentin Nikolaevich — Dr. Sci. in Engineering, Professor, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov.
e-mail: kuznetsovvn@info.sgu.ru

Matiyasevich Yuri Vladimirovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Academician of the Russian Academy of Sciences, Adviser at the Russian Academy of Sciences, St. Petersburg Department of Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, President of the St. Petersburg Mathematical Society.
e-mail: yumat@pdmi.ras.ru

Mishchenko Sergey Petrovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Ulyanovsk State University.
e-mail: mishchenkosp@mail.ru

Nesterenko Yury Valentinovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Head of the Chair of Number Theory, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.
e-mail: nester@mi.ras.ru

Panin Vladimir Alexeyevich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Corresponding Member of the Russian Academy of Natural Sciences, Full Member of the Academy of

Informatization of Education, President of Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University.
e-mail: tgpu@tula.net

Pachev Urusbi Mukhamedovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor of the Chair of Algebra and Differential Equations, Kabardino-Balkarian State University named after H. M. Berbekov.
e-mail: urusbi@rambler.ru

Semenov Alexey Lvovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Academician of the Russian Academy of Sciences, Academician of the Russian Academy of Education, Head of the Chair of Mathematical Logic and Theory of Algorithms, Lomonosov Moscow State University.
e-mail: alsemno@ya.ru

Tolokonnikov Lev Alekseevich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Tula State University.
e-mail: tolokonnikovla@mail.ru

Fomin Aleksandr Aleksandrovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Department of Algebra of the Moscow Pedagogical State University.

Chirsky Vladimir Grigoryevich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Associate Professor, Professor of the Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University, The Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration.
e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Allakov Ismail — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Professor of Termez Davlat University (Uzbekistan).
e-mail: iallakov@mail.ru

Belov Alexey Yakovlevich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Federal Professor of Mathematics, Professor, Bar-Ilan University (Israel).
e-mail: Kanelster@gmail.com

Bernik Vasily Ivanovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Principal Researcher of the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (Belarus).
e-mail: bernik@im.bas-net.by

Laurinchikas Antanas — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Full Member of the Lithuanian Academy of Sciences, Head of the Chair of Probability Theory and Number Theory, Vilnius University (Lithuania).
e-mail: antanas.laurincikas@mif.vu.lt

Liu Yongping — Dr. Sci., Professor, Head of the Research Center for Modern Mathematical Analysis (School of Mathematical Sciences), Beijing Normal University (China).
e-mail: ypliu@bnu.edu.cn

Mardanov Misir Jumayil oglu — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Director of the Institute of Mathematics and Mechanics, Azerbaijan National Academy of Science (Azerbaijan).
e-mail: rmi@lan.ab.az

Musin Oleg Rustamovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Department of Mathematics, University of Texas Rio Grande Valley (UTRGV) (USA)
e-mail: oleg.musin@utb.edu, omusin@gmail.com

Rahmonov Zarullo Huseinovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Corresponding Member of the Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan, Director of the Institute of Mathematics, Tajik Academy of Sciences (Tajikistan).
e-mail: zarullo_r@tajik.net, zarullo-r@rambler.ru

Mansour Saliba Holem — PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor, Faculty of Natural and Applied Sciences, Notre Dame University–Louaize (Lebanon).
e-mail: qwe123@rocketmail.com

Habibullo Abdullo — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Corresponding Member of the Academy of Sciences of Tajikistan; Rector of Higher education institution «Kulob State University named after Abuabdulloh Rudaki» (Tajikistan).
e-mail: rektor@kgu.tj

Fukshansky Leonid — Dr. Sci. in Mathematics, Professor, Claremont McKenna College (USA).
e-mail: lenny@cmc.edu

Šiaučiūnas Darius – Professor, Dr. Sci. in Mathematics, Senior Researcher, Institute of Regional Development, Šiauliai University (Lithuania).
e-mail: darius.siauciunas@su.lt

TABLE OF CONTENTS

Volume 25 Issue 3

A. I. Shafarevich, E. I. Deza, N. M. Dobrovolskii, A. O. Ivanov, A. I. Kozko, E. S. Krupitsyn, V. Y. Matveev, Y. V. Nesterenko, A. L. Semenov, V. N. Chubarikov, M. V. Shamolin, N. N. Dobrovolskii. Vladimir Grigorievich Chirskii (on the 75-th anniversary of his birth) 5

I. Allakov, B. Kh. Erdonov. On the simultaneous representation of numbers by the sum of five prime numbers 11

P. Bal, R. Das, S. Sarkar. On Strongly Star Ideal compactness of Topological Spaces 37

P. V. Granin, N. S. Kalinin, A. S. Saakyan. Sandpile patterns on a regular graph of degree eight 47

A. I. Denisov, I. V. Denisov. Solving inequalities using radical and adjacent functions 70

V. K. Zakharov, T. V. Rodionov. Characterization of the Dedekind and countably Dedekind extensions of the lattice linear space of continuous bounded functions by means of order boundaries 86

A. O. Ivanov, O. S. Shcherbakov. Existence of irreducible multitours of multiplicity 2 101

A. V. Kazakova. The faithful enveloping rings of the nil-triangular ring of type G_2 and their automorphisms 118

A. V. Kachkina. The Sturm—Liouville operator with a rapidly growing potential and the asymptotics of its spectrum 143

A. S. Kashina, L. M. Tsybulya. Apollonius problem for two objects and its research 158

A. I. Kozko. Estimates of approximations of functions by trigonometric polynomials in spaces with an asymmetric norm and sign-sensitive weight 177

A. I. Kozko, L. M. Luzhina, A. Yu. Popov, V. G. Chirskii. Reduction of the mathematical model of some problems of mathematical economics to systems of differential equations that can be solved in quadratures 187

V. Yu. Matveev. Infinite algebraic independence of some almost polyadic numbers 365

O. E. Mirzaev, T. G. Khasanov. Isospectral and partially isospectral Dirac operators on the finite interval 201

A. I. Nizhnikov, O. E. Yaremko, N.N. Yaremko. Appel polynomials associated with Fourier transforms and their applications to differential equations 213

S. V. Tikhonov. Quaternion algebras with unitary involutions having the same subfields 226

A. S. Ugarov, I. V. Dobrynina. On problem of generalized conjugation of words in a generalized tree structures of Artin groups 236

A. S. Ugarov, I. V. Dobrynina. On an algorithm for solving the problem of power conjugacy of words in generalized tree structures of Artin groups 248

V. G. Chirskii. Arithmetic properties of values of divergent in $\mathbb{C}$ series 259

M. V. Shamolin. Tensor invariants of fifth-order dynamical systems with dissipation 270

R. R. Shefrukova. On the validity of 0-1 law for shallow first order properties of very sparse random graphs 299

BRIEF MESSAGE

Yu. V. Andrianova, V. B. Sherstyukov. A certain formula of Liouville 335

V. A. Gorelov, K. I. Orlov, P. E. Volkov. About one Briot-Bouqet equation 343

R. A. Zhukov, , S. V. Prokopchina. On the formation of soft norms for evaluating the functioning of complex systems 351

E. S. Krupitsyn. A measure of the transcendence of the Liouville number in the p-adic domain 359

Yu. N. Shteinikov. On special extremal sets associated with the multiplication table of P. Erdős 373

HISTORY OF MATHEMATICS AND APPLICATIONS

N. V. Larin, A. E. Belkin. Unsteady sound scattering by an elastic cylinder with a continuously non-uniform coating 381

N. A.-V. Mir, N. L. Polyakov. On the canonical Ramsey theorem of Erdős and Rado: a short proof using ultrafilter theory 396

L. A. Tolokonnikov, S. L. Tolokonnikov. Scattering of a plane sound wave by a cylinder with an inhomogeneous elastic coating in a moving medium 408

РЕДКОЛЛЕГИЯ 419

THE EDITORIAL BOARD 423

TABLE OF CONTENTS 427