

ISSN 2226-8383

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Министерство просвещения Российской Федерации
Российская академия наук
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
Московский педагогический государственный университет
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
Тульский государственный университет

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Научно-теоретический журнал

Том XXV

Выпуск 2 (93)

Тула
2024

Учредитель: ФГБОУ ВО
«ТГПУ им. Л. Н. Толстого»

Адрес редакции:
300026, г. Тула, пр. Ленина, 125.
Тел. +79156812638
8(4872)374051

E-mail: cheb@tspu.ru
URL: <http://www.chebsbornik.ru>

Издается с 2001 года.
Выходит 5 раз в год.
Регистрационный номер
СМИ: ПИ № ФС77-80049

В журнале публикуются оригинальные статьи по направлениям современной математики: теория чисел, алгебра и математическая логика, теория функций вещественного и комплексного переменного, функциональный анализ, дифференциальные уравнения, математическая физика, геометрия и топология, теория вероятностей и математическая статистика, численные методы, теория оптимизации и др. Также публикуются статьи о памятных датах и юбилеях.

Журнал включен в перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание ученых степеней кандидата наук и доктора наук (перечень ВАК), индексируются и/или реферируются: Scopus, MathSciNet, Zentralblatt MATH, Russian Science Citation Index (RSCI), РЖ Математика, Mathematical Reviews, РИНЦ, Google Scholar Metrics.

Журнал выходит под эгидой Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, Министерства просвещения Российской Федерации, Российской академии наук, Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Московского педагогического государственного университета, Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого, Тульского государственного университета

Главный редактор

В. Н. Чубариков (Россия, г. Москва)

Ответственные секретари:

Н. Н. Добровольский (Россия, г. Тула)

И. Ю. Реброва (Россия, г. Тула)

Заместители главного редактора:

Н. М. Добровольский (Россия, г. Тула)

А. И. Нижников (Россия, г. Москва)

Редакционная коллегия:

А. И. Боровков (Россия, г. Санкт-Петербург)

В. А. Быковский (Россия, г. Хабаровск)

С. В. Востоков (Россия, г. Санкт-Петербург)

Д. В. Георгиевский (Россия, г. Москва)

В. И. Горбачев (Россия, г. Москва)

С. А. Гриценко (Россия, г. Москва)

С. С. Демидов (Россия, г. Москва)

В. Г. Дурнев (Россия, г. Ярославль)

А. М. Зубков (Россия, г. Москва)

А. О. Иванов (Россия, г. Москва)

В. И. Иванов (Россия, г. Тула)

М. А. Королёв (Россия, г. Москва)

В. Н. Кузнецов (Россия, г. Саратов)

Ю. В. Матиясевич (Россия, г. Санкт-Петербург)

С. П. Мищенко (Россия, г. Ульяновск)

Ю. В. Нестеренко (Россия, г. Москва)

В. А. Панин (Россия, г. Тула)

У. М. Пачев (Россия, г. Нальчик)

А. Л. Семёнов (Россия, г. Москва)

Л. А. Толоконников (Россия, г. Тула)

А. А. Фомин (Россия, г. Москва)

В. Г. Чирский (Россия, г. Москва)

И. Аллаков (Узбекистан, г. Термез)

А. Я. Белов (Израиль, г. Рамат Ган)

В. И. Берник (Беларусь, г. Минск)

А. Лауринчикас (Литва, г. Вильнюс)

Лю Юнпин (Китай, г. Пекин)

М. Дж. Марданов (Азербайджан, г. Баку)

О. Р. Мусин (США, г. Браунсвилл)

З. Х. Рахмонов (Таджикистан, г. Душанбе)

А. Х. Табари (Таджикистан, г. Куляб)

Л. Фукшанский (США, г. Клермонт)

Д. Шяучюнас (Литва, г. Шяуляй)

СОДЕРЖАНИЕ

Том 25 Выпуск 2

А. Я. Белов, В. М. Бухштабер, В. Б. Васильев, Ю. П. Вирченко, С. К. Куижева, А. Г. Кусраев, Д. К. Мамий, А. Б. Муравник, А. В. Псху, С. А. Розанова, З. А. Саидов, А. Л. Семенов, С. М. Ситник, А. Л. Скубачевский, А. П. Солдатов, Э. Л. Шишкина, А. Г. Ягола. Султан Нажмуудинович Асхабов (к 70-летию со дня рождения)	5
Ю. В. Нестеренко, В. А. Быковский, В. Н. Чубариков, В. Г. Чирский, О. Н. Герман, Н. М. Добровольский. Александр Иванович Галочкин (к 80-летию со дня рождения) . . .	20
Н. Ф. Алексиадис. Аналог теоремы Колмогорова о суперпозициях непрерывных функций для функциональных систем полиномиальных и рациональных функций	29
Д. А. Долгов. О цепных дробях с рациональными неполными частными	43
В. И. Иванов. Обобщенное преобразование Данкля на прямой в обратных задачах теории приближений	67
А. Я. Канель-Белов, В. О. Кирова. Устойчивость выработки в блочных средах	82
А. Я. Канель-Белов, В. О. Кирова. Геометрия блочных сред	102
Е. В. Ларкин, В. С. Сальников, С. А. Скобелыцын. Модель контроллера с установленной программой поллинга для систем с векторным управлением	127
З. Х. Рахмонов, Ф. З. Рахмонов. Асимптотическая формула в проблеме Варинга с почти пропорциональными слагаемыми	139
Г. У. Уразбоев, И. И. Балтаева, О. Б. Исмоилов. Теория рассеяния для нагруженного уравнения Кортевега—де Фриза отрицательного порядка	169
Х. Аль-Ассад. Об оценках Хуа Ло-Кэна тригонометрических сумм в полях алгебраических чисел	181
Ле Ван Хонг. Хроматичность полных расщепленных графов	208
Д. А. Цибульский. Специальные случаи интерполяционной теоремы для классического исчисления предикатов	222

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

А. И. Денисов, И. В. Денисов. Опорные барьерные функции для нелинейных параболических задач	235
С. Э. Нохрин, В. Т. Шевалдин. О достаточных условиях существования решения бесконечно-разностного уравнения с переменными коэффициентами	243
Р. В. Тарабрин, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский. Непрерывность рядов Дирихле s -мерных решёток	251
Р. В. Тарабрин, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский. Ряды Дирихле второго рода для неприводимых решёток, повторяющихся умножением	260

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ И ПРИЛОЖЕНИЯ

Н. Н. Добровольский, Д. Ю. Ефимов, Л. А. Толоконников. Неосесимметричная задача дифракции цилиндрических звуковых волн на упругом цилиндре с неоднородным покрытием, расположенном вблизи границы упругого полупространства	269
Д. Ю. Ефимов. Дифракция звука от точечного источника на цилиндре с упругим покрытием, окруженном неоднородным жидким слоем	286
Н. А. Зверев, А. В. Земсков, В. М. Яганов. Моделирование механодиффузионных процессов в полном цилиндре, находящемся под действием нестационарных объемных возмущений	296
М. Ю. Соколова, Д. В. Христич. Акустические волны в гипотупругих телах. I. Изотропные материалы	318
М. Ю. Соколова, Д. В. Христич. Акустические волны в гипотупругих телах. II. Анизотропные материалы	334
Л. А. Толоконников, С. Л. Толоконников. Излучение звука цилиндром, обтекаемым стационарным потоком идеальной жидкости	350

ПАМЯТНЫЕ ДАТЫ

Памяти Юрия Александровича Дробышева	359
Мартин Давидович Гриндлингер (25.03.1932 – 20.05.2024)	362
Сергей Петрович Новиков (20.03.1938 – 6.06.2024)	364
Ашот Енофович Устьян (1.09.1937 – 9.06.2024)	366

РЕДКОЛЛЕГИЯ	368
-------------------	-----

THE EDITORIAL BOARD	372
---------------------------	-----

TABLE OF CONTENTS	376
-------------------------	-----

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 25. Выпуск 2.

УДК 51(091)

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-2-5-19

**Султан Нажмуудинович Асхабов
(к 70-летию со дня рождения)**

А.Я. Белов, В.М. Бухштабер, В.Б. Васильев, Ю.П. Вирченко, С.К. Куижева, А.Г. Кусраев,
Д.К. Мамий, А.Б. Муравник, А.В. Псху, С.А. Розанова, З.А. Саидов, А.Л. Семенов,
С.М. Ситник, А.Л. Скубачевский, А.П. Солдатов, Э.Л. Шишкина, А.Г. Ягола

Аннотация

Статья посвящена 70-летию юбилею Асхабова Султана Нажмуудиновича, доктора физико-математических наук, профессора Чеченского государственного университета имени А.А. Кадырова, известного специалиста в области нелинейных интегральных, интегро-дифференциальных и дискретных уравнений.

Ключевые слова: дискретные, интегральные и интегро-дифференциальные уравнения, монотонная нелинейность, ядра Гильберта и Коши, суммарно-разностные ядра.

Библиография: 99 названий.

Для цитирования:

А.Я. Белов, В.М. Бухштабер, В.Б. Васильев, Ю.П. Вирченко, С.К. Куижева, А.Г. Кусраев, Д.К. Мамий, А.Б. Муравник, А.В. Псху, С.А. Розанова, З.А. Саидов, А.Л. Семенов, С.М. Ситник, А.Л. Скубачевский, А.П. Солдатов, Э.Л. Шишкина, А.Г. Ягола. Султан Нажмуудинович Асхабов (к 70-летию со дня рождения) // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 2, с. 5–19.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 25. No. 2.

UDC 51(091)

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-2-5-19

**Sultan Nazhmudinovich Askhabov
(on his 70-th birthday)**

A. Ya. Belov, V.M. Buchstaber, V.B. Vasilyev, Yu.P. Virchenko, S.K. Kuizheva, A.G. Kusraev,
D.K. Mamiya, A.B. Muravnik, A.V. Pskhu, S.A. Rozanova, Z.A. Saidov, A.L. Semenov,
S.M. Sitnik, A.L. Skubachevsky, A.P. Soldatov, E.L. Shishkina, A.G. Yagola

Abstract

The article is devoted to the 70-th anniversary of Sultan Nazhmudinovich Askhabov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Kadyrov Chechen State University, a well-known specialist in the field of nonlinear integral, integrodifferential, and discrete equations.

Keywords: discrete, integral and integro-differential equations, monotonic nonlinearity, Hilbert and Cauchy kernels, sum-difference kernels.

Bibliography: 99 titles.

For citation:

A. Ya. Belov, V.M. Buchstaber, V.B. Vasilyev, Yu.P. Virchenko, S.K. Kuizheva, A.G. Kusraev, D.K. Mamiya, A.B. Muravnik, A.V. Pskhu, S.A. Rozanova, Z.A. Saidov, A.L. Semenov, S.M. Sitnik, A.L. Skubachevsky, A.P. Soldatov, E.L. Shishkina, A.G. Yagola, 2024. "Sultan Nazhmudinovich Askhabov (on his 70-th birthday)", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 2, pp. 5–19.



Асхабов Султан Нажмуудинович

23 марта 2024 г. исполнилось 70 лет Асхабову Султану Нажмуудиновичу, доктору физико-математических наук, профессору Чеченского государственного университета имени А.А. Кадыева.

С.Н. Асхабов родился в 1954 г. в Казахстане. В 1972 году окончил 41-ю среднюю школу города Грозного. Отец, Асхабов Нажмудин Асхабович (1917-1978), участник Великой Отечественной войны, в 1957 году, после окончания курсов при ЦК КПСС, был направлен в партийные органы Чечено-Ингушской АССР. Работал первым секретарем Веденского и Урус-Мартановского РК КПСС, заместителем заведующего отделом Чечено-Ингушского обкома КПСС, министром пищевой промышленности республики. С 1966 года - начальником управления топливной промышленности ЧИАССР. Мать, Асхабова (Магомадова) Яха Магомедовна (1925-2005), была домохозяйкой. В семье к образованию детей относились серьезно. Два старших сына уехали учиться в Москву. Салаудин поступил в Московское высшее техническое училище, ныне - Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана, Салман - в Московский авиационный институт. Получили высшее образование и дочери: Хазан и Марият. Третий - младший сын, Султан, как принято у кавказских народов, должен был остаться в родительском доме. В 1972 году он поступил в Чечено-Ингушский государственный университет на физико-математический факультет.

Асхабов С.Н. серьезно увлекся точной наукой именно в студенческие годы, выбрав одно из новейших направлений в современной математике. На третьем курсе университета состоялось его знакомство с будущим научным руководителем профессором Х.Ш. Мухтаровым, который предложил изучить рукопись готовящейся к опубликованию книги [78], написанной

им совместно с академиком АН Азерб. ССР А.И. Гусейновым. Эта научная работа, посвященная нелинейным сингулярным интегральным уравнениям, произвела большое впечатление на Асхабова С.Н., открыла математику как страну поэзии, требующую порой смелости и далеко идущей фантазии. Исследование таких уравнений имело и имеет не только теоретическое, но и прикладное значение: они возникают при решении задачи об определении поля возмущенных скоростей и давлений в области вокруг тонкого равномерно пронизываемого крыла бесконечного размаха (профиля), а также нагрузок, действующих на это крыло, при безотрывном его обтекании идеальной невязкой несжимаемой жидкостью, задачи о деформации кругового бесконечного цилиндра в двумерном потоке идеальной жидкости в предположении, что цилиндр является изотропным, однородным и подчиняется обычному закону Гука, задачи об обтекании пористого круглого цилиндра плоско-параллельным потоком идеальной несжимаемой жидкости при произвольном законе фильтрации, задачи определения дебитов нефтяных скважин в плоском пласте при произвольной форме контура питания и многих других. Поэтому, когда стал вопрос о дальнейшей специализации, Асхабов С.Н. без колебаний выбрал именно эту малоисследованную область математики.

Дипломная работа молодого математика, выполненная в этом направлении, получила высокую оценку и была экспонирована в числе лучших на выставке ВДНХ СССР в Москве.

В 1977 году Асхабов С.Н. окончил с отличием Чечено-Ингушский государственный университет имени Л.Н. Толстого (ЧИГУ) по специальности «Математика» и поступил в аспирантуру при Дагестанском государственном университете имени В.И. Ленина.

9 апреля 1982 года в Ростовском государственном университете Асхабов С.Н. защитил диссертацию «Применение метода монотонных операторов к решению нелинейных сингулярных интегральных уравнений и их систем» на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 - Дифференциальные уравнения и математическая физика (научн. рук. Х.Ш. Мухтаров, офиц. оппоненты: В.Н. Монахов, избранный академиком РАН в 2003 году, и В.С. Рабинович). Основным математический результат - доказаны глобальные теоремы существования и единственности решения для различных классов нелинейных сингулярных интегральных уравнений с ядрами Гильберта и Коши, нелинейных интегральных уравнений типа свертки с произвольными параметрами, а также для систем таких уравнений в пространствах Лебега. Впервые показано, что решения указанных уравнений могут быть найдены методом последовательных приближений пикаровского типа при любых (не обязательно «малых») значениях параметров. Полученные результаты были применены к решению одной задачи об обтекании двух пронизываемых профилей потоком идеальной несжимаемой жидкости. В своём выступлении оппонент В.Н. Монахов подчеркнул, что в диссертации не накладывается никаких ограничений на параметр λ перед нелинейной частью рассматриваемых уравнений, что имеет важное не только теоретическое, но и прикладное значение, заметив при этом, что доказанные ранее результаты «для малых значений параметров можно получать с наперёд заданной скоростью!».

В основу диссертационного исследования был положен метод монотонных (по Браудеру-Минти) операторов [77], позволивший при достаточно легко обозримых ограничениях на нелинейность, доказать глобальные, т.е. без ограничений на величину параметров и область существования решений, теоремы о разрешимости основных классов нелинейных сингулярных интегральных уравнений и уравнений типа свертки. Отметим в этой связи, что применявшиеся ранее методы, основанные либо на принципе Шаудера или принципе сжимающих отображений, либо на теореме существования неявной функции или на некоторых её модификациях, приводили к жестким ограничениям либо на нелинейность, либо на параметры. Например, при исследовании нелинейных сингулярных интегральных уравнений с помощью принципа сжимающих отображений или принципа Шаудера предполагалось, что нелинейность удовлетворяет условию Липшица, а параметр перед ней является достаточно **малым** по абсолютной величине. В результате линейный случай если и охватывается, то лишь частично (ограничения

на параметр зачастую оказывались излишними). Если же такие уравнения исследовались на основе теоремы о неявной функции, то необходимое для ее применения условие о дифференцируемости нелинейности в случае пространств Лебега приводило к вырождению нелинейности, т.е. уравнение становилось фактически линейным, а в случае пространств Гельдера приводило к жестким и мало обозримым ограничениям на нелинейность [79].

В некоторых случаях приходилось даже согласовывать рост нелинейности и характер особенности ядра.

После защиты кандидатской диссертации С.Н. Асхабов продолжил заниматься научной работой и на его работы обратили внимание ведущие ученые, как отечественные, так и зарубежные (см. реферат члена-корреспондента АН СССР Л.Д. Кудрявцева (РЖМат, 1983, 12Б629), статьи Лотара фон Вольферсдорфа [97-99], монографию Элиаса Вегерта [96] и др.). Отметим, в частности, следующий его результат. Оказывается, разрешимость уравнения $u + \lambda G F u = f$ в весовом пространстве $L_p(\Gamma, \rho)$, Γ - отрезок, G - сингулярный интегральный оператор, F - оператор Немыцкого, доказывается без условия коэрцитивности.

С 1984 года С.Н. Асхабов переписывался с Л. Вольферсдорфом и Э. Вегертом, они регулярно обменивались своими опубликованными работами. В 1994 году С.Н. Асхабов был приглашен в Германию (Technische Universitat Bergakademie Freiberg) на полугодовую стажировку, однако начавшиеся боевые действия на территории Чеченской Республики, сорвали её.

В мае 1991 г. Асхабов С.Н. был избран заведующим кафедрой математического анализа Чечено-Ингушского государственного университета. Под его руководством при поддержке академика АН СССР С.М. Никольского и члена-корреспондента АН СССР Л.Д. Кудрявцева сотрудники кафедры активно занимались научно-исследовательской работой. Полученные результаты докладывались Асхабовым С.Н. в Отделе теории функций Математического института имени В.А. Стеклова РАН и были высоко оценены. Это послужило основанием того, что 19 апреля 1991 года на имя проректора по научной работе ЧИГУ поступило письмо, подписанное академиком-секретарем Отделения математики АН СССР академиком АН СССР А.А. Гончаром, в котором сообщалось, что тема научных исследований «Интегральные и дифференциальные операторы в различных функциональных пространствах и их приложения», проводимых в Чечено-Ингушском государственном университете включена в план работ, координируемых Отделением математики АН СССР.

Полученные в те годы результаты нашли отражение в работах известных как отечественных, так и зарубежных математиков [81], [87], [90]-[92], [94], [95]. Они вошли в монографию Асхабова С.Н. и Бетилгириева М.А. [19], которую ряд специалистов, в частности С.Б. Якубович, приняли как классическую (см. MR 2004g:45004 и Zbl 1049.45006).

В этой монографии был развит метод весовых метрик (аналог метода Адама Белецкого [76], [82], лауреата приза Стефана Банаха) применительно к интегральным уравнениям типа свертки со степенной нелинейностью в различных конусах пространства непрерывных функций. Такие уравнения возникают, например, при описании процессов инфильтрации жидкости через стенки цилиндрического резервуара и распространения ударных волн в трубах, наполненных газом [94], поэтому их исследование имеет не только теоретическое, но и прикладное значение. В 2004 и 2009 годах Асхабовым С.Н. были опубликованы две монографии [20] и [25] (см. отзывы М.О. Корпусова (MR 2006h:45004 и Zbl 1096.45002) и П.П. Забрейко (MR 2012d:45001)).

В 2009 году Асхабов С.Н. подготовил к защите докторскую диссертацию и доложил основные свои результаты на совместном заседании семинаров «Функциональный анализ» и «Дифференциальные и функционально-дифференциальные уравнения» под руководством члена-корреспондента РАН В.Д. Степанова и профессора А.Л. Скубачевского в РУДН и на Семинаре по теории функций многих действительных переменных и ее приложениям к задачам математической физики (Семинар Никольского) Математического института имени

В.А. Стеклова РАН под руководством члена-корреспондента РАН О.В. Бесова. Оба доклада «Уравнения с дробными интегралами Римана-Лиувилля и монотонной нелинейностью» (13.10.2009) и «Интегральные уравнения с монотонными нелинейностями в пространствах Лебега» (28.10.2009), после детального обсуждения, получили одобрение названных специалистов и члена-корреспондента РАН С.И. Похожаева.

15 июня 2010 года в Белгородском государственном университете Асхабов С.Н. защитил диссертацию «Сингулярные интегральные уравнения и уравнения типа свертки с монотонной нелинейностью» на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 - Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление (офиц. оппоненты А.Б. Шабат, А.А. Килбас, А.В. Глушак). Основные математические результаты: Построены новые классы сингулярных интегральных операторов, действующих из весовых пространств Лебега в сопряженные с ними пространства и обладающих свойством положительности по Бохнеру. Без ограничений на абсолютную величину параметров доказаны глобальные теоремы существования и единственности решения для различных классов нелинейных сингулярных интегральных уравнений с ядрами Гильберта и Коши в вещественных и комплексных пространствах Лебега с общим (не обязательно степенным) весом. Доказана коэрцитивность обратного оператора для оператора Немыцкого, что позволило создать новый метод исследования нелинейных интегральных уравнений. Получены теоремы о строгой положительности интегральных операторов общего вида, частными случаями которых являются операторы дробного интегрирования, риссовы потенциалы и логарифмические потенциалы. При этом обобщаются известные результаты С. Геллерстедта, Ф. Трикоми, А.М. Нахушева и дополняются некоторые результаты К. Андерсена, Э. Сойера, Д.В. Прохорова, В.Д. Степанова, касающиеся операторов типа потенциала и Римана-Лиувилля. Развита метод весовых метрик (аналог метода Адама Белецкого) применительно к дискретным и интегральным уравнениям типа свертки со степенной нелинейностью в различных конусах. Получены неулучшаемые двусторонние априорные оценки для решений таких уравнений, представляющие и самостоятельный интерес, позволяющие строить полные весовые метрические пространства, инвариантные относительно операторов, порождаемых этими уравнениями.

После защиты докторской диссертации Асхабовым С.Н. был получен ряд новых результатов по теории нелинейных сингулярных интегральных уравнений с ядрами Гильберта и Коши, (см. монографию [33]).

В июне 2014 года Асхабов С.Н. был приглашен в Нальчик, где проходила всероссийская научная конференция молодых ученых «Современные вопросы математической физики, математической биологии и информатики», посвященная памяти академика А.А. Самарского. Его пленарный доклад «Нелинейные уравнения с обобщенными операторами типа потенциала» получил высокую оценку президента Адыгской (Черкесской) международной академии наук (АМАН) А.М. Нахушева, который предложил С.Н. Асхабову представить полученные результаты для опубликования в очередном выпуске журнала «Доклады АМАН» [36] и пригласил баллотироваться в члены-корреспонденты на предстоящих выборах в АМАН. В докладе методом монотонных (по Браудеру-Минти) операторов были доказаны глобальные теоремы о существовании, единственности и способах нахождения решений для трех различных классов нелинейных уравнений (см. [36]), содержащих оператор

$$(P_{01}^{\varphi}u)(x) = \int_0^1 \varphi(|x-t|)u(t) dt, \quad x \in [0, 1].$$

При этом важную роль сыграл следующий результат Асхабова С.Н.: если $1 < p \leq 2$, функция $\varphi \in L_{p'/2}(0, 1)$, $p' = p/(p-1)$, непрерывна, невозрастает, выпукла вниз в промежутке $(0, 1]$ и $\int_0^1 \varphi(x) dx \geq 0$, то оператор P_{01}^{φ} действует непрерывно из $L_p(0, 1)$ в $L_{p'}(0, 1)$ и положителен.

Этот результат при $\varphi(x) = x^{\alpha-1}$, $0 < \alpha < 1$, охватывает потенциал Рисса, а при $\varphi(x) = -\ln(x)$ - логарифмический потенциал. В частном случае, при $p = 2$ и неотрицательной невозрастающей дифференцируемой (с возрастающей производной) функцией $\varphi(x)$, положительность оператора P_{01}^φ была установлена другим путем А.М. Нахушевым [80].

22 августа 2014 года состоялось годовичное общее собрание АМАН на котором Асхабов С.Н. был избран членом-корреспондентом по Отделению математических наук и нанотехнологических технологий АМАН.

В 2013-2015, 2018-2020 гг. Асхабов С.Н. руководил проектами №13-01-00422 «Интегро-дифференциальные и функционально-дифференциальные уравнения», №18-41-200001 «Нелинейные дискретные, интегральные и интегро-дифференциальные уравнения типа свертки» при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований. С 2020 года руководит выполнением государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ по проекту «Нелинейные сингулярные интегро-дифференциальные уравнения и краевые задачи» (проект FEGS-2020-0001). С 2022 года Асхабов С.Н. принимает участие в реализации проекта РНФ (Российский научный фонд) под руководством профессора А.Я. Белова.

Некоторые из полученных им результатов приведены в монографии известного специалиста в области интегральных уравнений Германа Бруннера [86].

Отметим, что в работах Асхабова С.Н. [3, 38, 39, 58, 60, 61, 65] впервые исследованы методом монотонных (по Браудеру-Минти) операторов различные классы нелинейных дискретных, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений типа свертки как в вещественных, так и комплексных пространствах Лебега. Приведем один из результатов [58].

Теорема 1. Пусть $p \geq 2$, ядро $h(x) \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_{p/2}(\mathbb{R})$ и удовлетворяет условию

$$\operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-ixt} dt \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Если нелинейность $F(x, z)$ удовлетворяет условиям

- 1) существуют $c(x) \in L_q^+(\mathbb{R})$ и $d_1 > 0$ такие, что для почти всех $x \in \mathbb{R}$ и любого $z \in \mathbb{C}$ выполняется неравенство: $|F(x, z)| \leq c(x) + d_1 \cdot |z|^{p-1}$;
- 2) существуют $D(x) \in L_1^+(\mathbb{R})$ и $d_2 > 0$ такие, что для почти всех $x \in \mathbb{R}$ и всех $z \in \mathbb{C}$ выполняется неравенство: $\operatorname{Re} \{F(x, z) \cdot \bar{z}\} \geq d_2 \cdot |z|^p - D(x)$;
- 3) для почти всех $x \in \mathbb{R}$ и всех $z_1 \neq z_2 \in \mathbb{C}$ выполняется неравенство:

$$\operatorname{Re} \left\{ [F(x, z_1) - F(x, z_2)] \cdot \overline{(z_1 - z_2)} \right\} > 0;$$

то уравнение

$$u(x) + \int_{-\infty}^{\infty} h(x-t) F[t, u(t)] dt = f(x) \quad (1)$$

имеет единственное решение $u^*(x) \in L_p(\mathbb{R})$ при любом $f(x) \in L_p(\mathbb{R})$. При этом, если условия 1) и 3) выполняются с $c(x) = 0$ и $D(x) = 0$, справедлива оценка: $\|u^*\|_p \leq \frac{d_1}{d_2} \cdot \|f\|_p$.

Заметим, что уравнение (1) описывает общий класс нелинейных сервомеханизмов (следящих систем), где $f(x)$ есть входящий сигнал, а $h(x)$ есть ответный импульс системы, а также возникает в теории электрических сетей (сигнальной трансмиссии через общую электрическую сеть), содержащих нелинейные элементы (нелинейный резистор). При $f(x) = 0$ уравнение (1) описывает детерминистические модели пространственного распространения эпидемии или благоприятного гена среди популяции вдоль линии с различными нелинейностями в эпидемической и генетической моделях, а также используется как математическая модель

некоторых инфекционных заболеваний или как уравнение роста некоторых видов популяции (см. монографию [25] и указанную в ней библиографию).

С 2011 года Султан Нажмуудинович является экспертом научно-технической сферы ФГБНУ «Научно-исследовательский институт - Республиканский исследовательский научно-консультационный центр экспертизы» (НИИ РИНКЦЭ) Министерства образования и науки РФ. Им проведено около 50 экспертиз по оценке результативности научной деятельности организаций, подведомственных Минобрнауки РФ, по Конкурсу на получение грантов для государственной поддержки ведущих научных школ РФ, по Конкурсу на получение грантов Президента РФ для государственной поддержки молодых российских ученых, а также экспертиза участников 5Топ100 проектов ведущих университетов РФ - участников программы повышения конкурентоспособности вузов среди ведущих мировых научно-образовательных центров. Он является также экспертом РНФ (Российский научный фонд) и РАО (Российская академия образования).

С 1992 г. Асхабов С.Н. является членом Американского математического общества. С 1993 г. штатный референт Международного журнала «Mathematical Reviews» (USA). С 2016 г. рецензент журналов РАН, представленных на портале MathNet.ru.

С 2000 по 2005 год Асхабов С.Н. работал в Адыгее по приглашению ректора Майкопского государственного технологического университета А.К. Тхакушинова (ставшим впоследствии Президентом республики Адыгея). Здесь были созданы все условия для успешной работы и плодотворной научной деятельности: снималось и оплачивалось жилье, предоставлялся бесплатный доступ в интернет, оплачивались все командировочные расходы. За это время им были опубликованы две монографии [19, 20] и свыше двадцати научных статей. В эти же годы Асхабов С.Н. плодотворно работал по совместительству на факультете математики и компьютерных наук Адыгейского государственного университета. Он читал студентам прекрасные курсы лекций и пользовался большим уважением коллектива факультета. В 2004 году он был провозглашен Человеком года в области образования и науки Американским биографическим институтом и в 2005 году избран советником-экспертом правления этого института.

Следует отметить вклад Асхабова С.Н. в развитие образования в Чеченской Республике. В 2008 году им была создана при Президентском лицее г. Грозного республиканская физико-математическая школа по подготовке одаренных учащихся средних школ Чеченской Республики к конкурсам и олимпиадам по математике и физике. Начиная с 2009 года учащиеся этой школы трижды принимали участие в Международных турнирах городов, проходивших в Карачаево-Черкесской Республике.

В октябре 2013 года по его инициативе при ЧГУ была открыта и успешно функционировала математическая школа для одаренных детей, учащихся 9–11 классов гимназий, лицеев и средних общеобразовательных школ Чеченской республики.

С 2006 по 2016 гг. Асхабов С.Н. возглавлял факультет математики и компьютерных технологий Чеченского государственного университета (ЧГУ). В эти и последующие годы по его приглашению ЧГУ для научного сотрудничества посетили известные российские математики, а также математики из Англии и Алжира. Первым Чеченскую Республику, ещё до отмены контртеррористической операции (КТО), посетил выдающийся математик, лауреат Государственной премии РФ в области науки и техники, Алексей Борисович Шабат [56], который прочитал курс лекций по уравнениям математической физики студентам четвертого курса факультета математики и компьютерных технологий ЧГУ. В дальнейшем А.Б. Шабат ежегодно посещал Чеченскую Республику, читал лекции, делал доклады и оказывал квалифицированную помощь аспирантам и соискателям ученых степеней ЧГУ. Асхабов С.Н. с гордостью подчеркивает, что в день своего 80-летия Алексей Борисович был, как близкий друг, с женой у него дома и они вместе отпраздновали его Юбилей.

Много внимания Асхабов С.Н. уделяет учебно-методической работе, им опубликовано бо-

более десяти учебных пособий по комплексному, математическому и функциональному анализу, теории вероятностей и математической статистике, которые успешно используются в вузах Чеченской Республики.

19 мая 2014 г. состоялось заседание Научно-методического совета (НМС) по математике Министерства образования и науки РФ в повестке которого значился доклад Асхабова С.Н. «Научные исследования и развитие математического образования в вузах Чеченской Республики». В докладе были подробно освещены основные достижения и проблемы развития математического образования в ЧР. Заседание завершилось выборами в НМС. В результате открытого голосования Асхабов С.Н. был единогласно избран членом НМС по математике Минобрнауки РФ. Кроме того, решением Президиума НМС по математике Минобрнауки РФ от 20 мая 2014 года было утверждено Чеченское региональное отделение НМС по математике Минобрнауки РФ под председательством Асхабова С.Н. Решение подписал Председатель Президиума НМС по математике Минобрнауки РФ, академик РАН С.В. Емельянов.

В 2018 году на базе Чеченского государственного педагогического университета (ЧГПУ) Асхабов С.Н. организовал Международную научно-практическую конференцию «Современная математика и ее приложения», в которой приняли участие ведущие российские и зарубежные ученые.

Более 10 лет Асхабов С.Н. руководит научными семинарами «Интегро-дифференциальные операторы дробного порядка и их приложения» (ЧГУ) и «Современная математика и ее приложения» (ЧГПУ), на которых выступили с докладами известные ученые-математики из России (А.Я. Белов, А.Л. Скубачевский, А.П. Солдатов, Л.Е. Россковский, А.Б. Шабат), Англии (А.В. Михайлов), Алжира (А. Дебуш) и других стран.

Трудовая и научная деятельность С.Н. Асхабова отмечены наградами федерального и регионального уровней: Почетная грамота Министерства образования и науки Российской Федерации (2005 г.); Нагрудный знак «Почётный работник высшего профессионального образования Российской Федерации» (2008 г.); Благодарственное письмо Министерства науки и высшего образования РФ, Российского союза ректоров (2020 г.); Почетные грамоты Главы Чеченской Республики (2022 г., 2023 г.), Администрации Главы и Правительства Чеченской Республики (2018 г., 2021 г.); Премия в номинации «Образование» РОО «Интеллектуальный центр Чеченской Республики» с вручением символа «Серебряная сова» (2021 г.).

Биография Асхабова С.Н. опубликована в энциклопедиях «Who's Who in the World» и «Who's Who in Science and Engineering» (USA), а также в энциклопедии «Dictionary of International Biography», издающейся английским биографическим центром в Кембридже.

В последние годы Асхабов С.Н. занимается исследованием краевых задач для нелинейных сингулярных интегро-дифференциальных уравнений с ядрами Гильберта и Коши в пространствах Лебега, начальных задач для интегро-дифференциальных уравнений с суммарно-разностными ядрами, в том числе с ядрами Теплица-Ганкеля, в различных конусах пространства непрерывных функций, а также мало изученных к настоящему времени интегральных уравнений с монотонной нелинейностью и ядром, зависящим от суммы независимой переменной и переменной интегрирования. Им получены критерии положительности по Бохнеру интегральных и интегро-дифференциальных операторов типа свертки и даны их приложения к соответствующим нелинейным интегральным и интегро-дифференциальным уравнениям. При этом обобщается известное неравенство М. Шлайфа для сингулярного интегро-дифференциального оператора с ядром Коши. В частности, им впервые изучены интегро-дифференциальные уравнения различных порядков со степенной нелинейностью и суммарно-разностными ядрами методом весовых метрик в различных конусах пространства дифференцируемых функций [53, 54, 57, 59, 67, 68, 70, 73, 75]. Приведем один из результатов [59].

Теорема 2. Пусть $\alpha > 1$ и выполнены условия

$$k \in C^1[0, \infty), \quad k'(x) \text{ не убывает на } [0, \infty), \quad k(0) = 0 \text{ и } k'(0) > 0,$$

$a \in C^1[0, \infty)$, $a(x)$ не убывает на $[0, \infty)$ и $a(x) > 0$ при $x > 0$.

Тогда нелинейное интегро-дифференциальное уравнение типа свертки

$$u^\alpha(x) = a(x) \int_0^x k(x-t)u'(t)dt, \quad x > 0, \quad (2)$$

имеет единственное решение $u^*(x)$ в классе

$$Q_0^1 = \{u(x) : u \in C[0, \infty) \cap C^1(0, \infty), u(0) = 0 \text{ и } u(x) > 0 \text{ при } x > 0\}.$$

Это решение удовлетворяет неравенствам $F(x) \leq u^*(x) \leq G(x)$, где

$$F(x) = \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}k'(0)\right)^{1/(\alpha-1)} a^{1/\alpha}(x) \left(\int_0^x a^{1/\alpha}(t)dt\right)^{1/(\alpha-1)},$$

$$G(x) = \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^{1/(\alpha-1)} a^{1/\alpha}(x) \left(\int_0^x a^{1/\alpha}(t)k'(t)dt\right)^{1/(\alpha-1)},$$

и его можно найти методом последовательных приближений пикаровского типа.

Заметим, что $F(x) = G(x) = u^*(x)$ при $k(x) = C \cdot x$, $C > 0$, т.е. полученные в теореме неравенства неумлучшаемы. В работе [59] выписаны последовательные приближения и приведена оценка скорости их сходимости к точному решению в терминах специальной весовой метрики.

Нелинейные уравнения вида (2) с разностными, суммарными и суммарно-разностными ядрами (ядрами Теплица-Ганкеля) возникают при решении многих задач гидроаэродинамики (в частности, при описании процессов инфильтрации жидкости из цилиндрического резервуара и распространения ударных волн в трубах, наполненных газом), теории упругости, популяционной генетики и других (см. [25], [94]).

В настоящее время Асхабовым С.Н. опубликовано 4 монографии и свыше 100 научных работ в центральной отечественной и зарубежной печати. Результаты доложены на международных конференциях и симпозиумах в Москве, Санкт-Петербурге, Белгороде, Новосибирске, Обнинске, Владикавказе, Воронеже, Ростове, Самаре, Нальчике, Ереване, Харькове и других городах. Они процитированы многими учеными-математиками из Англии, Германии, Японии, Польши, России, Беларуси и других стран (см., например, [81], [84]–[99]).

Свой юбилей С.Н. Асхабов встречает полным жизненных сил, в расцвете творческой и деловой активности. Друзья, коллеги и ученики желают Султану Нажмуудиновичу многих лет жизни, доброго здоровья и новых открытий.

СПИСОК ИЗБРАННЫХ ПУБЛИКАЦИЙ С. Н. АСХАБОВА

1. Асхабов С.Н. Исследование нелинейных сингулярных интегральных уравнений методом монотонных операторов // Известия СКНЦ ВШ. Естественные науки. 1980, №2. С. 3-5.
2. Асхабов С.Н. О применимости метода монотонных операторов к нелинейным сингулярным уравнениям в $L_2(-\infty, \infty)$ // Доклады АН Азерб.ССР. 1980. Т. 36, №7. С. 28-31.
3. Асхабов С.Н. Применение метода монотонных операторов к некоторым нелинейным уравнениям типа свертки и сингулярным интегральным уравнениям // Известия ВУЗов. Математика. 1981, №9. С. 64-66.

4. Асхабов С.Н., Мухтаров Х.Ш. Оценки решений некоторых нелинейных уравнений типа свертки и сингулярных интегральных уравнений // Доклады АН СССР. 1986. Т. 288, №2. С. 275-278.
5. Асхабов С.Н., Карапетянц Н.К., Якубов А.Я. Об одном нелинейном уравнении типа свертки // Дифференциальные уравнения. 1986. Т. 22, №9. С. 1606-1609.
6. Асхабов С.Н. Исследование нелинейных сингулярных интегральных уравнений (НСИУ) с ядром Гильберта методом монотонных операторов // Известия СКНЦ ВШ. Естественные науки. 1986. №3. С. 33-36.
7. Асхабов С.Н., Мухтаров Х.Ш. Об одном классе нелинейных интегральных уравнений типа свертки // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, №3. С. 512-514.
8. Асхабов С.Н., Карапетянц Н.К., Якубов А.Я. Дискретные уравнения типа свертки со степенной нелинейностью // Доклады АН СССР. 1987. Т. 296, №3. С. 521-524.
9. Асхабов С.Н., Карапетянц Н.К. Дискретные уравнения типа свертки с монотонной нелинейностью // Дифференциальные уравнения. 1989. Т. 25, №10. С. 1777-1784.
10. Асхабов С.Н., Карапетянц Н.К., Якубов А.Я. Интегральные уравнения типа свертки со степенной нелинейностью и их системы // Доклады АН СССР. 1990. Т. 311, №5. С. 1035-1039.
11. Askhabov S.N., Betilgiriev M.A. Nonlinear Convolution Type Equations // Seminar Analysis Operat. Equat. and Numer. Anal. 1989/90. Karl-Weierstras-Institut fur Mathematik. Berlin. 1990. P. 1-30.
12. Асхабов С.Н., Бетилгириев М.А. Нелинейные интегральные уравнения типа свертки с почти возрастающими ядрами в конусах // Дифференциальные уравнения. 1991. Т. 27, №2. С. 321-330.
13. Askhabov S.N. Integral Equations of Convolution Type With Power Nonlinearity // Colloquium Mathematicum. 1991. Vol. LXII. Fask. 1. P. 49-65.
14. Askhabov S.N., Betilgiriev M.A. A-priori Estimates for the Solution of a Class of Nonlinear Convolution Equations // Zeitschrift fur Analysis und ihre Anwendungen. 1991. Vol. 10, №2. P. 201-204.
15. Askhabov S.N. Singular Integral Equations with Monotone Nonlinearity in Complex Lebesgue Spaces // Zeitschrift fur Analysis und ihre Anwendungen. 1992. Vol. 11, №1. P. 77-84.
16. Асхабов С.Н., Карапетянц Н.К. Дискретные уравнения типа свертки с монотонной нелинейностью в комплексных пространствах // РАН. Доклады Академии наук. 1992. Т. 322, №6. С. 1015-1018.
17. Асхабов С.Н., Карапетянц Н.К. Convolution – type discrete equations with monotonous nonlinearity in complex spaces // J. Integral Equations Math. Phys. 1992, Vol. 1, №1. P. 44-66.
18. Асхабов С.Н., Бетилгириев М.А. Априорные оценки решений нелинейного интегрального уравнения типа свертки и их приложения // Математические заметки. 1993. Т. 54, №5. С. 3-12.
19. Асхабов С.Н., Бетилгириев М.А. Интегральные уравнения типа свертки со степенной нелинейностью. Ростов-н/Д: Издат. центр ДГТУ, 2001. – 154 с.

20. Асхабов С.Н. Сингулярные интегральные уравнения и уравнения типа свертки с монотонной нелинейностью. Майкоп: МГТУ, 2004. – 388 с.
21. Асхабов С.Н. Нелокальные задачи для нелинейных интегральных уравнений с разностными ядрами // Междун. конф. «Функц. пространства, теория приближений, нелинейный анализ», посвященная столетию академика С.М. Никольского: Тезисы докл. М.: МИРАН, 2005. – С. 35.
22. Асхабов С.Н. Нелинейные интегральные уравнения типа свертки на отрезке // Известия ВУЗов. Сев.-Кав. регион. Естеств. науки. 2007, №1. С. 3-5.
23. Асхабов С.Н. Нелинейные уравнения с интегралами дробного порядка // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2007. Т. 9, №1. С. 9-14.
24. Askhabov S.N. Nonlinear equations with integrals of fractional order in weighted Lebesgue spaces // Материалы междун. конф. «Дифф. уравнения, теория функций и прил.», посв. 100-летию со дня рожд. академика И.Н. Векуа. Новосибирск, 28 мая – 2 июня 2007 г. С. 389-390.
25. Асхабов С.Н. Нелинейные уравнения типа свертки. М.: Физматлит, 2009. – 304 с.
26. Асхабов С.Н. Интегральные уравнения с ядрами типа потенциала и монотонной нелинейностью в комплексных пространствах Лебега // Научные ведомости БелГУ. Математика. Физика. 2010. №5(76). Вып. 18. С. 33-47.
27. Askhabov S.N. Nonlinear Singular Integral Equations in Lebesgue Spaces // Journal of Mathematical Sciences. 2011. Vol. 173, No. 2. P. 155-171.
28. Асхабов С.Н. Приближенное решение нелинейных уравнений с весовыми операторами типа потенциала // Уфимский математический журнал. 2011. Т. 3, №4. С. 8–13.
29. Асхабов С.Н. Нелинейные уравнения с весовыми ядрами типа потенциала в комплексных пространствах Лебега // Научные ведомости БелГУ. Математика. Физика. 2011. №23(118). Вып. 25. С. 5-20.
30. Асхабов С.Н. Нелинейные уравнения с весовыми операторами типа потенциала в пространствах Лебега // Вестник Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2011, №4(25). С. 160-164.
31. Асхабов С.Н., Джабраилов А.Л. Нелинейные уравнения с интегралами дробного порядка на полуоси // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2012. Т. 14, №1. С. 28-34.
32. Асхабов С.Н., Джабраилов А.Л. Приближенное решение нелинейных уравнений типа свертки на отрезке // Уфимский математический журнал. 2013. Т. 5, №2. С. 3-11.
33. Асхабов С.Н. Нелинейные сингулярные интегральные уравнения в пространствах Лебега. Грозный: изд-во ЧГУ, 2013. – 136 с.
34. Асхабов С.Н. Нелинейные интегральные уравнения с ядрами типа потенциала на полуоси // Владикавказский математический журнал. 2013. Т. 15, №4. С. 3-11.
35. Askhabov S.N. Approximate solution of non-linear discrete equations of convolution type // Journal of Mathematical Sciences. 2014. Vol. 201, №5. P. 566-580.

36. Асхабов С.Н. Нелинейные уравнения с обобщенными операторами типа потенциала в пространствах Лебега // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2014. Т. 16, №2. С. 12-16.
37. Асхабов С.Н. Состояние и перспективы развития математического образования в Чеченской Республике // НМС по математике МОиН РФ: деятельность и история. Ульяновск: УлГТУ, 2014. С. 150–158.
38. Асхабов С.Н. Уравнения типа свертки с монотонной нелинейностью на отрезке // Дифференциальные уравнения. 2015. Т. 51, №9. С. 1182–1188.
39. Асхабов С.Н. Нелинейные уравнения типа свертки в пространствах Лебега // Математические заметки. 2015. Т. 97. Вып. 5. С. 643–654.
40. Асхабов С.Н. Сингулярное интегро-дифференциальное уравнение с монотонной нелинейностью в весовом пространстве Лебега // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук, 2015. Т. 17, №3. С. 9–12.
41. Асхабов С.Н. Периодические решения уравнений типа свертки с монотонной нелинейностью // Уфимский математический журнал. 2016. Т. 8, №1. С. 22-37.
42. Асхабов С.Н., Бостанов Р.А. Сингулярные интегральные и интегро-дифференциальные уравнения с монотонной нелинейностью // В кн.: Актуальные проблемы теории уравнений в частных производных. Тез. докл. межд. научной конф., посвященной памяти академика А.В. Бицадзе. Москва: МГУ, 2016. С. 53.
43. Асхабов С.Н. Сингулярные интегро-дифференциальные уравнения с ядром Гильберта и монотонной нелинейностью // Владикавказский математический журнал. 2017. Т.19, №3. С. 11–20.
44. Асхабов С.Н. Критерии положительности интегрального и интегро-дифференциального операторов свертки в периодическом случае // Вестник АН ЧР. 2017. №3(36). С. 5–11.
45. Асхабов С.Н. Нелинейные сингулярные интегро-дифференциальные уравнения с произвольным параметром // Математические заметки. 2018. Т. 103, Вып. 1. С. 20–26.
46. Асхабов С.Н. Условия положительности операторов с разностными ядрами в рефлексивных пространствах // Итоги науки и техники. Серия: Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. М.: ВИНТИ РАН, 2018. Т. 149. С. 3–13.
47. Askhabov S.N. Nonlinear integral equations with potential-type kernels on a segment // Journal of Mathematical Sciences. 2018. Vol. 235, № 4. P. 375–391.
48. Асхабов С.Н. Обобщенный оператор типа потенциала в весовых пространствах Лебега // Вестник АН ЧР. 2018, №6. С. 9–15.
49. Асхабов С.Н. Критерий положительности интегро-дифференциального оператора свертки и его применение // Современные методы теории краевых задач: материалы межд. конф., посвященной 90-летию академика В.А. Ильина. М.: «МАКС Пресс», 2018. С. 46.
50. Асхабов С.Н. Об одном классе нелинейных сингулярных интегро-дифференциальных уравнений с ядром Гильберта // Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Проблемы математического образования: материалы докл. Пятой Межд. конф., посв. 95-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН Л.Д. Кудрявцева (Москва, РУДН, 26–29 ноября 2018 г.). М.: РУДН, 2018. С. 19–21.

51. Асхабов С.Н. О критериях положительности интегро-дифференциальных операторов свертки // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2019. Т. 19, №1. С. 16–21.
52. Асхабов С.Н. Интегро-дифференциальные уравнения типа свертки со степенной нелинейностью // Современные проблемы математики и механики. Материалы междунар. конф., посвящ. 80-летию академика В.А. Садовниченко. – М.: МАКС Пресс, 2019. С. 11–14.
53. Асхабов С.Н. Интегро-дифференциальное уравнение типа свертки со степенной нелинейностью и неоднородностью в линейной части // Дифференциальные уравнения. 2020. Т. 56, №6. С. 786–795.
54. Асхабов С.Н. Нелинейное интегро-дифференциальное уравнение типа свертки с переменным коэффициентом и неоднородностью в линейной части // Владикавказский математический журнал. 2020. Т. 22, №4. С. 14–25.
55. Askhabov S.N. Positivity conditions for operators with difference kernels in reflexive spaces // Journal of Mathematical Sciences. 2020. Vol. 250, №5. P. 717–727.
56. Адлер В.Э., Асхабов С.Н., Кулаев Р.Ч., Кусраев А.Г., Кутателадзе С.С., Погребков А.К., Решетняк Ю.Г. Памяти Алексея Борисовича Шабата (08.08.1937–24.03.2020) // Владикавказский математический журнал. 2020. Т. 22, №2. С. 100–102.
57. Асхабов С.Н. Интегро-дифференциальное уравнение типа свертки со степенной нелинейностью и переменным коэффициентом // Дифференциальные уравнения. 2021. Т. 57, №3. С. 387–398.
58. Асхабов С.Н. Нелинейные интегральные уравнения типа свертки в комплексных пространствах // Уфимский математический журнал. 2021. Т. 11, №1. С. 17–30.
59. Askhabov S.N. Nonlinear convolution integro-differential equation with variable coefficient // Fractional Calculus and Applied Analysis. 2021. Vol. 24, №3. P. 848–864.
60. Асхабов С.Н. Градиентный метод решения нелинейных дискретных и интегральных уравнений с разностными ядрами // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2021. Т. 192. С. 26–37.
61. Асхабов С.Н. Нелинейные интегро-дифференциальные уравнения с разностными ядрами // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2021. Т. 198. С. 22–32.
62. Асхабов С.Н. Интегральное уравнение с суммарным ядром и неоднородностью в линейной части // Дифференциальные уравнения. 2021. Т. 57, №9. С. 1210–1219.
63. Асхабов С.Н. Система интегро-дифференциальных уравнений типа свертки со степенной нелинейностью // Сибирский журнал индустриальной математики. 2021. Т. 24, №3. С. 5–18.
64. Асхабов С.Н. Система неоднородных интегральных уравнений типа свертки со степенной нелинейностью // Владикавказский математический журнал. 2022. Т. 24, №1. С. 5–14.
65. Askhabov S.N. Method of maximal monotonic operators in the theory of non-linear integro-differential equations of convolution type // Journal of Mathematical Sciences. 2022. Vol. 260, № 3. P. 275–285.

66. Askhabov S.N. Nonlinear integral equations with potential-type kernels in the nonperiodic case // Journal of Mathematical Sciences. 2022. Vol. 263, № 4. P. 463-474.
67. Askhabov S.N. On an integro-differential second order equation with difference kernels and power nonlinearity // Bulletin of the Karaganda University. 2022. №2(106). P. 38-48.
68. Асхабов С.Н. Интегро-дифференциальное уравнение с суммарно-разностным ядром и степенной нелинейностью // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2022. Т. 507, №1. С. 10-14.
69. Асхабов С.Н. Интегральное уравнение Вольтерра со степенной нелинейностью // Чебышевский сборник. 2022. Т. 23, №5. С. 6-19.
70. Асхабов С.Н. Начальная задача для интегро-дифференциального уравнения с разностными ядрами и неоднородностью в линейной части // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Темат. обзоры. 2023. Т. 225. С. 3-13.
71. Askhabov S.N. A system of inhomogeneous integral equations of convolution type with power nonlinearity // Siberian Mathematical Journal. 2023. Vol. 64, No. 3. P. 691-698.
72. Асхабов С.Н. Интегральные уравнения с монотонной нелинейностью и ядром, зависящим от суммы аргументов // Вестник Академии наук Чеченской Республики. 2023, №4(63). С. 5-13.
73. Асхабов С.Н. Интегро-дифференциальное уравнение Вольтерра произвольного порядка со степенной нелинейностью // Чебышевский сборник. 2023. Т. 24, №4. С. 86-103.
74. Askhabov S.N. Integral Equations with Sum Kernel and Monotonic Nonlinearity // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2024. Vol. 45, №1. P. 376-382.
75. Асхабов С.Н. Начальная задача для нелинейного интегро-дифференциального уравнения типа свертки третьего порядка // Дифференциальные уравнения. 2024. Т. 60, №4.

РАБОТЫ ДРУГИХ АВТОРОВ

76. Белецкий А. Заметка о применении метода Банаха-Каччиополи-Тихонова в теории обыкновенных дифференциальных уравнений // Бюллетень Польской Академии Наук. 1956. Отд. III. Т. 4, №5. С. 255-258.
77. Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. - М.: Мир, 1978. - 336 с.
78. Гусейнов А.И., Мухтаров Х.Ш. Введение в теорию нелинейных сингулярных интегральных уравнений - М.: Наука, 1989. - 416 с.
79. Забрейко П.П. Неявные функции и монотонные по Минти операторы в банаховых пространствах. Докл. АН Беларуси. 1995. Т. 39, N 2. С. 17-21.
80. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. М: Физматлит, 2003. - 272 с.
81. Цалюк З.Б. Нелинейные уравнения Вольтерра с неубывающим ядром // Изв. ВУЗов. Матем. 1995. №8. С. 74-77.
82. Эдвардс Р. Функциональный анализ. М.: Мир, 1969. - 1072 с.

-
83. Amann H. Uber die existenz und iterative berechnung einer losung der Hammerstein'schen gleichung // Aequat. Math. 1968. Vol. 1. P. 242-266.
 84. Bernstein S. Nonlinear singular integral equations involving the Hilbert transform in Clifford analysis // Z. Anal. Anwend. 1999. Vol. 18, №2. P. 379-391.
 85. Boykov I., Roudnev V., Boykova A. Hypersingular Integral Equations of Prandtl's Type: Theory, Numerical Methods, and Applications // Axioms. 2022. Vol. 11, №12. P. 1-19.
 86. Brunner H. Volterra integral equations: an introduction to the theory and applications. – Cambridge: Univ. Press, 2017. – 387 p.
 87. Bushell P.J., Okrasinski W. Nonlinear Volterra integral equations and the Apéry identities // Bull. London Math. Soc. 1992. Vol. 24. P. 478-484.
 88. Junghanns P., von Wolfersdorf L. On the monotonicity of some singular integral operators // Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2012. Vol. 35, №8. P. 894-922.
 89. Khosravi H., Allahyari R., Haghighi A. S. Existence of solutions of functional integral equations of convolution type using a new construction of a measure of noncompactness on $L_p(\mathbb{R}^+)$ // Applied Mathematics and Computation. 2015. Vol. 260. P. 140-147.
 90. Fečkan M. Nonnegative solutions of nonlinear integral equations // Comment. Math. Univ. Carolinae. 1995. Vol. 36, №4. P. 615-627.
 91. Karapetiants N.K., Kilbas A.A., Saigo M., Samko S.G. Upper and lower bounds for solution of nonlinear Volterra convolution integral equations with power nonlinearity // J. Integral Equat. Appl. 2000. Vol. 12, №4. P. 421-448.
 92. Kilbas A.A., Saigo M. On solution of nonlinear Abel-Volterra integral equation // J. Math. Anal. Appl. - 1999. Vol. 229. P. 41-60.
 93. Kosel U., Wolfersdorf L.v. Nichtlineare singuläre Integralgleichungen // Seminar Analysis. Operator Equat. Numer. Anal. 1985/1986. Karl-Weierstraß Institut für Mathematik, Berlin. 1986. P. 93-128.
 94. Okrasinski, W. Nonlinear Volterra equations and physical applications // Extracta Math. 1989. Vol. 4, №2. P. 51-74.
 95. Saigo M., Kilbas A.A. On Asymptotic Solutions of Nonlinear and Linear Abel-Volterra Integral Equations. II // In Investigations in Jack's lemma and related topics, Surikaiseikikenkyusho Kokyuroku. 1994. Vol. 881. P. 112-129.
 96. Wegert E. Nonlinear boundary value problems for holomorphic functions and singular integral equations. - Berlin: Acad. Verlag, 1992. - 240 p.
 97. Wolfersdorf L.v. Monotonicity methods for nonlinear singular integral and integro-differential equations // ZAMM. 1983. Vol. 63. №6. P. 249-259.
 98. Wolfersdorf L.v. Some recent developments in the theory of nonlinear singular integral equations // Z. Anal. Anwend. 1987. Vol. 6. №1. P. 83-92.
 99. Wolfersdorf L.v. Einige klassen quadratischer integralgleichungen // Sitz. Sach. Akad. Wiss. Leipzig. Math.-naturwiss. Klasse. 2000. B. 128. H. 2. S. 1-34.

УДК 51(091)+511.46

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-2-20-29

Александр Иванович Галочкин (к 80-летию со дня рождения)

Ю. В. Нестеренко, В. А. Быковский, В. Н. Чубариков, В. Г. Чирский, О. Н. Герман,
Н. М. Добровольский



Александр Иванович родился 14 мая 1944 г. в г. Уржуме, маленьком, но очень старом и красивом городке Кировской области (первое упоминание в 1584 г.). Окончив школу в 1962 г. он поступил учиться на механико-математический факультет МГУ. После окончания факультета в 1967 г. и аспирантуры защитил 14 мая 1971 г. кандидатскую диссертацию «О диофантовых приближениях чисел некоторых классов». В студенческие годы и в аспирантуре его научным руководителем был профессор Шидловский Андрей Борисович. С 1970 года и по настоящее время А. И. Галочкин непрерывно работает на кафедре теории чисел механико-математического факультета МГУ сначала в должности ассистента, а с 1 сентября 1978 г. в должности доцента. В 2009 году он защитил докторскую диссертацию "Об арифметических свойствах значений аналитических функций некоторых классов". С 2011 г. он профессор механико-математического факультета МГУ.

А. И. Галочкин крупный учёный и известный специалист по теории чисел. Его работы по теории трансцендентных чисел и, в частности, исследования арифметических свойств значений E -функций и G -функций Зигеля, оценки линейных форм от значений гипергеометрических функций, широко известны в России и многих странах. По приглашениям зарубежных учебных и научных организаций он читал лекции о полученных им результатах в университетах Монголии, Японии и Финляндии, участвовал в международных научных конференциях по теории чисел в Германии, Литве, Белоруссии. Им опубликовано более 50 печатных работ.

Прежде, чем рассказывать подробнее о научных достижениях А. И. Галочкина, скажем несколько слов о теории трансцендентных чисел. Существование трансцендентных (не алгебраических) чисел впервые доказал в 1844 году Жозеф Лиувиль, фактически построивший примеры таких чисел. Например, он доказал, что число $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n!}$ трансцендентно. В 1873 г. Шарль Эрмит доказал трансценденность числа e . И Лиувиль, и Эрмит были иностранными членами Российской Академии наук, Эрмит даже был её Почётным членом.



Жозеф Лиувиль (1809–1882)



Шарль Эрмит (1822–1901)

В 1882 году Фердинанд Линдемман установил трансцендентность числа π и тем доказал невозможность квадратуры круга с помощью циркуля и линейки — задачи, которую пытались решить ещё древние греки. Между прочим, Линдемман был научным руководителем Давида Гильберта — одного из великих математиков, сформулировавшего на рубеже XIX и XX столетий ряд проблем, работа над которыми должна была по его мнению определить основные направления развития математики в XX столетии. Одной из таких проблем под номером 7 было утверждение о трансцендентности чисел вида a^b при алгебраических числах a, b и условиях, что a отлично от 0 и 1, и b иррационально. Эта гипотеза была полностью доказана в 1934 г. Александром Осиповичем Гельфондом и несколько позже с рядом существенных отличий Теодором Шнайдером. В эквивалентной формулировке, как утверждение о трансцендентности при некоторых условиях чисел вида $\log_a b$ эта гипотеза высказывалась ещё Леонардом Эйлером.



Фердинанд Линдемман (1852–1939)



Давид Гильберт (1862–1943)



Леонард Эйлер (1707–1783)



Александр Осипович Гельфонд (1906–1968)



Теодор Шнайдер (1911–1988)

Гельфонд был заведующим кафедрой теории чисел мехмата МГУ с 1948 по 1968 годы и, естественно занимался вместе со своими учениками не только комплексным анализом, но и теорией чисел, в частности исследованиями проблем, связанных с трансцендентностью чисел. После смерти Гельфонда кафедру унаследовал Андрей Борисович Шидловский, а руководить научным семинаром Гельфонда стали его ученики А. Б. Шидловский и Наум Ильич Фельдман, оба выдающиеся специалисты в теории трансцендентных чисел.



Андрей Борисович Шидловский (1915–2007)



Наум Ильич Фельдман (1918–1994)

А. Б. Шидловский, математические интересы которого были связаны в основном с исследованиями трансцендентности и алгебраической независимости значений Е-функций Зигеля, создал большую школу в теории трансцендентных чисел, в частности его учеником был А. И. Галочкин. Класс Е-функций (функций в некотором смысле похожих на экспоненту e^z) был определён в 1929 году Карлом Зигелем в связи с исследованиями алгебраической независимости значений целых гипергеометрических функций второго порядка.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $\mathbb{K}$ — алгебраическое числовое поле конечной степени. Функция

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} \frac{z^{\nu}}{\nu!}, \quad a_{\nu} \in \mathbb{K},$$

называется Е-функцией, если при любом $\varepsilon > 0$ выполняются следующие условия

$$1) \quad |\overline{a_{\nu}}| = O(\nu^{\varepsilon \nu});$$

2) существует последовательность $\{q_n\}$ натуральных чисел таких, что

$$q_n a_{\nu} \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}, \quad q_n = O(n^{\varepsilon n}), \quad n = 0, 1, \dots; \quad 0 \leq \nu \leq n.$$

Е-функции образуют кольцо, замкнутое относительно дифференцирования. А. Б. Шидловский существенно усилил метод Зигеля. Он установил следующий критерий алгебраической независимости значений Е-функций.

ТЕОРЕМА 1 (Теорема Шидловского). Пусть совокупность Е-функций

$$f_1(z), \dots, f_s(z) \tag{1}$$

составляет решение системы линейных дифференциальных уравнений

$$y'_i = Q_{i0}(z) + \sum_{j=1}^s Q_{ij}(z)y_j, \quad 1 \leq i \leq s; \quad Q_{ij}(z) \in \mathbb{K}(z), \tag{2}$$

α — алгебраическое число, отличное от нуля и от полюсов всех функций $Q_{ij}(z)$.

Тогда для алгебраической независимости значений

$$f_1(\alpha), \dots, f_s(\alpha) \tag{3}$$

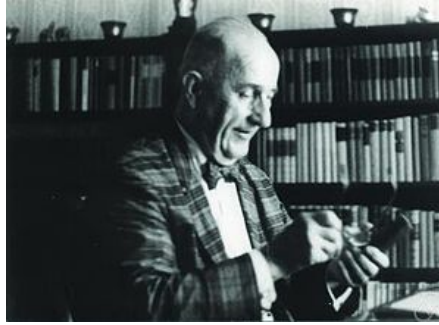
над полем $\mathbb{Q}$ необходима и достаточна алгебраическая независимость функций (1) над полем $\mathbb{C}(z)$.

Впоследствии этот результат был распространен А. Б. Шидловским на случай алгебраически зависимых Е-функций. Все приложения метода, созданного Зигелем и Шидловским и, в частности, теоремы Шидловского, связаны с обобщёнными гипергеометрическими функциями

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{[a_1 + 1, \nu] \cdots [a_u + 1, \nu]}{[b_1 + 1, \nu] \cdots [b_v + 1, \nu]} z^{t\nu}, \quad t = v - u > 0, \tag{4}$$

где $[\lambda + 1, \nu] = (\lambda + 1) \cdots (\lambda + \nu)$, $[\lambda + 1, 0] = 1$, а все числа $b_j \neq -1, -2, \dots$.

В 1929 г. К. Зигель доказал, что, если все параметры a_i, b_j — рациональные числа, то функция (4) является Е-функцией и удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению с коэффициентами — рациональными функциями. Но были известны примеры Е-функций с иррациональными параметрами.



Карл Людвиг Зигель (1896–1981)

Следующая теорема устанавливает необходимое и достаточное условие того, чтобы общая гипергеометрическая функция (4) являлась Е-функцией. Она носит окончательный характер и была доказана А. И. Галочкиным в 1981 году.

ТЕОРЕМА 2. *Для того, чтобы функция (4) с комплексными параметрами $a_1, \dots, a_u; b_1, \dots, b_v$, отличными от $-1, -2, \dots$, и такими, что*

$$a_j \neq b_k, \quad 1 \leq j \leq u; \quad 1 \leq k \leq v,$$

была Е-функцией, необходимо и достаточно, чтобы все числа a_j, b_k были рациональными, либо иррациональными среди них могли быть разбиты на такие пары a_{j_s}, b_{j_s} , $1 \leq s \leq r$, что все разности $a_{j_s} - b_{j_s}$ были бы неотрицательными целыми рациональными числами.

Среди многочисленных количественных результатов, доказанных А. И. Галочкиным мы выделим здесь точные по высоте оценки линейных форм от значений гипергеометрических функций. Начнём с первого подобного результата, доказанного в 1978 г. с очень точной оценкой рациональных приближений к числу e .

ТЕОРЕМА 3 (Теорема Девиса). *Пусть ε произвольное фиксированное число из интервала $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$.*

1. Для любой пары целых чисел p, q с $q > q_0(\varepsilon)$ выполняется неравенство

$$\left| e - \frac{p}{q} \right| > \left(\frac{1}{2} - \varepsilon \right) \frac{\ln \ln q}{q^2 \ln q}.$$

2. Существует бесконечная последовательность рациональных чисел p/q , $q > 0$ таких, что

$$\left| e - \frac{p}{q} \right| < \left(\frac{1}{2} + \varepsilon \right) \frac{\ln \ln q}{q^2 \ln q}.$$

Для доказательства Девис использовал интегральные представления для числителей и знаменателей подходящих дробей к числу e .

В 1981-х году А. Н. Коробову удалось доказать следующую оценку снизу линейной формы, отличающуюся от соответствующей оценки сверху лишь на постоянный множитель.

ТЕОРЕМА 4 (Теорема А. Н. Коробова). . Пусть $s, a, a+b, c$ — натуральные числа и

$$\psi_n(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^{n+s\nu}}{(as)^\nu \nu!} \prod_{x=1}^{n+s\nu} (ax+b)^{-1},$$

Тогда для любых целых чисел $h_0, h_1, \dots, h_s$ при

$$H = \max(|h_0|, \dots, |h_s|) > 3$$

справедливо неравенство

$$\left| h_0 \psi_0 \left(\frac{1}{c} \right) + \dots + h_s \psi_s \left(\frac{1}{c} \right) \right| > \gamma H^{-s} \left(\frac{\ln \ln H}{\ln H} \right)^{\frac{s+1}{2}}.$$

Положительная постоянная γ не зависит от H , причем существует бесконечная последовательность линейных форм, для которой выполняется противоположное неравенство, с некоторой большей константой γ_1 .

В 1984 году А. И. Галочкин существенно обобщил теорему Коробова. Этот результат не превзойдён до сих пор. Пусть $\mathbb{I}$ — поле рациональных чисел или мнимое квадратичное поле, числа $\lambda_j \in \mathbb{I}$, отличны от $-1, -2, \dots$, и упорядочены по убыванию последовательности $\sigma_j = \{\Re \lambda_j\}$, где $\{\alpha\}$ — дробная доля числа α . Пусть также $a \in \mathbb{Z}_{\mathbb{I}}$, $a \neq 0$, — таково, что $a\lambda_j \in \mathbb{Z}_{\mathbb{I}}$, $1 \leq j \leq s$. Обозначим

$$\psi(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{a^{m\nu} (\nu!) [\lambda_1 + 1, \nu] \cdots [\lambda_s + 1, \nu]}, \quad m = s + 1, \quad (5)$$

и определим

$$\Delta = \min_{1 \leq j \leq s} \left(\frac{j-1}{s} + \sigma_j - \frac{\sigma_1 + \dots + \sigma_s}{s} \right)$$

Функция $\psi(z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$a^m \delta(\delta + \lambda_1) \cdots (\delta + \lambda_s) y = zy, \quad \delta = z \frac{d}{dz}. \quad (6)$$

ТЕОРЕМА 5. Пусть $b \in \mathbb{Z}_{\mathbb{I}}$, $b \neq 0$, числа $\lambda_j \in \mathbb{I}$ не все равны нулю и

$$R = h_0 \psi \left(\frac{1}{b} \right) + h_1 \psi' \left(\frac{1}{b} \right) + \dots + h_s \psi^s \left(\frac{1}{b} \right), \quad H = \max_{0 \leq k \leq s} |h_k| \geq 3,$$

$$\Phi(x) = x^{-s} (\ln x)^{-s(1-\Delta)} (\ln \ln x)^{s(r-\Delta)}.$$

Тогда существуют эффективно вычисляемые положительные постоянные

$$C_j = C_j(a, b, \lambda_1, \dots, \lambda_s),$$

такие, что справедливы следующие утверждения:

1) Выполняется неравенство

$$|R| > C_1 \Phi(H).$$

2) Существует бесконечное количество форм R , для которых

$$|R| < C_2 \Phi(H).$$

В формулировке этой теоремы присутствует зависящее от параметров число r , определяемое в работе А. И. Галочкина. Для краткости мы это определение здесь опускаем.

Приведем пример на применение теоремы 5

ПРИМЕР 1. Пусть

$$\psi(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^{\nu}}{(\nu!)^{s+1}}.$$

В этом примере

$$\sigma_1 = \dots = \sigma_s = 0, \Delta = 0, r = s.$$

Поэтому в теореме 5

$$\Phi(x) = x^{-s}(\ln x)^{-s}(\ln \ln x)^{s^2}.$$

В 1929 г. Зигель определил ещё один класс функций, при исследовании которых могли использоваться идеи, предложенные им для исследования значений E — функций. Функции, входящие в этот класс, он назвал G — функциями. Их определение отличалось от определения E -функций лишь отсутствием факториалов в знаменателях коэффициентов определяющих их степенных рядов, см. (1), а также экспоненциальными оценками для роста чисел, сопряженных с коэффициентами рядов, а также для роста общих знаменателей коэффициентов. Основные примеры также были связаны с гипергеометрическими функциями но теперь определяющие их ряды Тейлора должны были иметь конечный радиус сходимости. В случае гипергеометрических рядов с рациональными параметрами, см. (4), должно выполняться условие $u = v$. Множество G -функций, как и множество E -функций, образует кольцо, производная G -функции также есть G -функция. Конкретные примеры G -функций: $\ln(1+z)$, $(1+z)^r$, $r \in \mathbb{Q}$. Сложность возникающих в этой области проблем можно проиллюстрировать замечанием, что вопрос об иррациональности значений G -функции $(1 - z^n)^{1/n}$ в рациональных точках равносильно Большой теореме Ферма.

К. Зигель ограничился лишь краткими замечаниями о возможности исследования арифметических свойств значений G -функций и сформулировал без доказательства несколько утверждений о значениях алгебраических функций и некоторых интегралов от них. Первые попытки применить метод К. Зигеля для исследования арифметической природы значений G -функций в алгебраических точках были сделаны в работах М. С. Нурмагомедова, но доказанные результаты были настолько слабы, что не позволяли устанавливать даже иррациональность каких-либо чисел.

Среди рассуждений К. Зигеля упоминалось свойство сокращения факториалов у G -функций. Не было ни его определения, ни примеров его использования, но Зигель писал, что оно важно для доказательства сформулированных им результатов. Истинный смысл этого понятия был вскрыт в 1974 году А. И. Галочкиным. Он установил точное определение этого свойства и применил его в исследованиях значений некоторых G -функций.

Для любого многочлена $Q(x) \in \mathbb{Z}[x]$ и при любом целом $k \geq 0$ выполняется включение $\frac{1}{k!}Q^{(k)}(x) \in \mathbb{Z}[x]$ — это свойство сокращения факториалов для многочленов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $\mathbb{K}$ — конечное расширение поля рациональных чисел и совокупность G -функций $f_1(z), \dots, f_s(z)$, составляет решение системы линейных дифференциальных уравнений (2). Тогда при любом целом $k \geq 0$ с некоторыми рациональными функциями $Q_{kij}(z)$ выполняются равенства

$$y_i^{(k)} = Q_{ki0}(z) + \sum_{j=1}^s Q_{kij}(z)y_j; \quad Q_{kij}(z) \in \mathbb{K}(z),$$

$$1 \leq i \leq s \quad k = 1, 2, \dots$$

Говорят, что эта совокупность G — функций имеет свойство сокращения факториалов, если существуют ненулевой многочлен $T(z) \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}[z]$ и натуральные числа a_n , $n = 1, 2, \dots$, такие, что

$$\frac{a_n}{k!} (T(z))^k Q_{kij}(z) \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}[z], \quad 1 \leq k \leq n, \quad 1 \leq i \leq s, \quad 0 \leq j \leq s,$$

причём с некоторыми постоянными Λ и γ , не зависящими от n выполняются неравенства

$$a_n < \gamma \Lambda^n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (7)$$

Здесь и далее буквами $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$ обозначается кольцо целых чисел поля $\mathbb{K}$.

ПРИМЕР 2. Для $s = 1$ и G — функции $f_1(z) = -\ln(1 - z)$ имеем

$$f_1^{(k)}(z) = (k - 1)!(1 - z)^{-k},$$

так что выбрав a_n равным наименьшему общему кратному чисел $1, 2, \dots, n$, получим

$$\frac{a_n}{k!} (1 - z)^k Q_{k10}(z) = \frac{a_n}{k} \in \mathbb{Z}[z], \quad 1 \leq k \leq n,$$

Учитывая, что согласно асимптотическому закону распределения простых чисел наименьшее общее кратное чисел $1, 2, \dots, n$ растёт не быстрее, чем $e^{(1+\varepsilon)n}$, заключаем что для функции $\ln(1 - z)$ выполняется условие сокращения факториалов.

В 1974 году А. И. Галочкин доказал условные оценки для линейных форм с целыми коэффициентами от значений G — функций в рациональных точках, близких к нулю. Дополнительно предполагалась выполнимость условия сокращения факториалов для рассматриваемых G — функций. Для некоторых функций ему удалось доказать условие сокращения факториалов, что дало безусловные результаты. Например, он доказал, что для любых натуральных чисел d, H и любого многочлена $P(x_1, \dots, x_s) \neq 0$ с целыми рациональными коэффициентами степени не выше d , высоты, не превосходящей H , любых попарно различных чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ из поля $\mathbb{I}$ и любого натурального q , превосходящего некоторую границу, зависящую от s , всех чисел α_j и поля $\mathbb{I}$, выполняется неравенство

$$\left| P \left(\ln \left(1 + \frac{\alpha_1}{q} \right), \dots, \ln \left(1 + \frac{\alpha_s}{q} \right) \right) \right| > q^{-\lambda} H^{-\mu}, \quad (8)$$

где λ и μ положительные постоянные, зависящие от всех чисел α_j и дополнительно от числа d .

Все постоянные в работе были явно вычислены, но мы опускаем их, чтобы не перегружать статью техническими подробностями.

В частности из этого результата следовало, что при любом натуральном $q > e^{795}$ число

$$\ln \left(1 - \frac{1}{q} \right) \ln \left(1 + \frac{1}{q} \right)$$

иррационально. Граница для q впоследствии была снижена, но всё ещё достаточно велика.

В 1985 году Д. В. и Г. В. Чудновским удалось доказать, что условие сокращения факториалов выполняется для любого набора G — функций, удовлетворяющих однородным линейным системам дифференциальных уравнений, определённым над полем $\mathbb{Q}(z)$. В частности, при этом была доказана следующая теорема о линейной независимости и оценках снизу для линейных форм с целыми коэффициентами в достаточно малых рациональных точках, см. теорему Чудновских ниже. Г. В. Чудновский также доказал аналог утверждения А. И. Галочкина (8) для любых G -функций, удовлетворяющих однородным системам дифференциальных уравнений вида .

$$y_i^{(k)} = \sum_{j=1}^s Q_{kij}(z) y_j; \quad Q_{kij}(z) \in \mathbb{Q}(z). \quad (9)$$

ТЕОРЕМА 6 (Теорема Чудновских). Пусть G -функции $f_1(x), \dots, f_s(x)$ составляют решение системы дифференциальных уравнений, их ряды Тейлора имеют рациональные коэффициенты, а сами функции вместе с 1 линейно независимы над полем $\mathbb{C}(z)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ и произвольного $r = \frac{a}{b} \neq 0$, с такими целыми a, b , что $|b|^\varepsilon > c \mid a \mid^{(s+1)(s+\varepsilon)}$, где $c = c(f_1, \dots, f_s, \varepsilon) > 0$, числа $1, f_1(r), \dots, f_s(r)$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$. Более того, для произвольных чисел $H_0, H_1, \dots, H_s \in \mathbb{Z}$ выполняется неравенство

$$\mid H_0 + H_1 f_1(r) + \dots + H_s f_s(r) \mid > H^{-s-\varepsilon}$$

с $H = \max(|H_0|, |H_1|, \dots, |H_s|)$, с условием $H > h = h(f_1, \dots, f_s, \varepsilon, r) > 0$. Здесь постоянные c и h эффективно вычислимы.

В 1996 году А. И. Галочкину удалось доказать условие сокращения факториалов для G -функций, удовлетворяющих и неоднородным системам дифференциальных уравнений.

Ограниченность объёма статьи вынуждает нас остановиться с описанием важных научных результатов А. И. Галочкина. Скажем теперь и о других сторонах его деятельности.

Профессор А. И. Галочкин педагог высокой квалификации. Его блестящие лекции по теории чисел всегда зарождали интерес у слушателей к этой науке. Много лет он ведёт занятия по математическому анализу на механико-математическом факультете, читает лекции и ведёт практические занятия по обязательному курсу теории чисел, читает специальные курсы, руководит специальными семинарами. Среди читавшихся им спецкурсов выделим "Введение в теорию трансцендентных чисел" "Приближения чисел рациональными дробями" "Теоретико-числовые методы и алгоритмы" "Диофантовы приближения и трансцендентные числа". Успешно руководит он научной деятельностью студентов и аспирантов. Его учебник и задачник по теории чисел используются в преподавании на механико-математическом факультете МГУ.

Много сил и времени Александр Иванович уделял и уделяет работе со школьниками. Он ежегодно участвует в подготовке и проведении Московской математической олимпиады и математической олимпиады механико-математического факультета МГУ. Составленные им задачи регулярно предлагались на этих олимпиадах. Он был одним из авторов сборников задач Московской математической олимпиады. А. И. Галочкин преподавал математику в 1134 московской школе, стараясь подготовить учащихся к восприятию более трудных, чем в обычной школьной программе, разделов математики и, в частности, к обучению в физико-математических классах, успешному дальнейшему обучению в МГУ и других высших учебных заведениях.

Добавим ещё, что Александр Иванович большой любитель рыбной ловли. Ежегодно со своими друзьями он на 2-3 недели отправляется в лодочное путешествие по российским рекам и возвращается с впечатляющими фотографиями своих рыбных трофеев.

Поздравляем Александра Ивановича с юбилеем и желаем ему обильных уловов, в том числе и в науке.

Ю. В. Нестеренко, В. А. Быковский, В. Н. Чубариков, В. Г. Чирский, О. Н. Герман, Н. М. Добровольский

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 25. Выпуск 2.

УДК 519.716

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-2-29-42

**Аналог теоремы Колмогорова
о суперпозициях непрерывных функций
для функциональных систем
полиномиальных и рациональных функций¹**

Н. Ф. Алексиадис

Алексиадис Никос Филиппович — Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова; Национальный исследовательский университет «МЭИ» (г. Москва).
e-mail: aleksiadis@yandex.ru

Аннотация

Функциональная система представляет собой множество функций с некоторым набором операций, применяемых к этим функциям и приводящих к получению других функций из этого же множества.

Функциональные системы являются одним из основных объектов дискретной математики и математической кибернетики, поскольку они являются математическими моделями реальных и абстрактных управляющих систем.

Проблематика функциональных систем обширна. Одной из основных задач является проблема полноты, состоящая в описании таких подсистем функций, которые являются полными, т.е. из этих функций с помощью заданных операций над ними можно получить все функции.

К проблеме полноты примыкает известная теорема Колмогорова² о представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиций непрерывных функций одной переменной и сложения (формулировку этой теоремы см. ниже).

Целью настоящей статьи является следующая задача: *имеет ли место аналог теоремы Колмогорова о представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиций непрерывных функций одной переменной и сложения для функциональных систем полиномиальных функций и функциональных систем рациональных функций?*

Оказывается, что поставленный вопрос (аналог теоремы Колмогорова) имеет отрицательный ответ для функциональных систем полиномиальных функций с натуральными и целыми коэффициентами, а для функциональных систем полиномиальных функций с рациональными и действительными коэффициентами и для функциональных систем рациональных функций с рациональными и действительными коэффициентами — ответ положительный. Эти теоремы и являются основными результатами данной статьи.

Ключевые слова: функциональная система, проблема полноты, полная система, суперпозиция, полином, рациональная функция, теорема Колмогорова.

Библиография: 7 названий.

Для цитирования:

Н. Ф. Алексиадис. Аналог теоремы Колмогорова о суперпозициях непрерывных функций для функциональных систем полиномиальных и рациональных функций // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 2, с. 29–42.

¹Работа выполнена в МГУ им. М.В. Ломоносова

²Она решает в более общем виде 13-ю проблему Гильберта

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 25. No. 2.

UDC 519.716

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-2-29-42

**An analogue of Kolmogorov's theorem
on superpositions of continuous functions
for functional systems of polynomial and rational functions³**

N. Ph. Aleksiadis

Aleksiadis Nikos Philippovich — Lomonosov Moscow State University; National Research University "MPEI" (Moscow).

e-mail: aleksiadis@yandex.ru

Abstract

A functional system is a set of functions endowed with a set of operations on these functions. The operations allow one to obtain new functions from the existing ones.

Functional systems are mathematical models of real and abstract control systems and thus are one of the main objects of discrete mathematics and mathematical cybernetic.

The problems in the area of functional systems are extensive. One of the main problems is deciding completeness that consists in the description of all subsets of functions that are complete, i.e. generate the whole set.

The well-known Kolmogorov theorem ⁴ on the representation of continuous functions of several variables in the form of superpositions of continuous functions of one variable and addition adjoins the completeness problem (see the formulation of this theorem below).

The purpose of this paper is the following problem: *is there an analogue of Kolmogorov's theorem on the representation of continuous functions of several variables in the form of superpositions of continuous functions of one variable and addition for functional systems of polynomial functions and functional systems of rational functions?*

It turns out that the problem posed (an analogue of Kolmogorov's theorem) has a negative answer for functional systems of polynomial functions with natural and integer coefficients, and for functional systems of polynomial functions with rational and real coefficients and for functional systems of rational functions with rational and real coefficients - the answer is positive. These theorems are the main results of this paper.

Keywords: functional system, completeness problem, complete system, superposition, polynomial, rational function, Kolmogorov's theorem.

Bibliography: 7 titles.

For citation:

N. Ph. Aleksiadis, 2024. "An analogue of Kolmogorov's theorem on superpositions of continuous functions for functional systems of polynomial and rational functions", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 2, pp. 29–42.

³The work was performed at Lomonosov Moscow State University

⁴It solves Hilbert's 13-th problem in a more general way

1. Введение

Эта статья является расширенной версией моего доклада об аналоге теоремы Колмогорова о суперпозициях непрерывных функций для функциональных систем полиномиальных и рациональных функций, сделанного в сентябре 2023 года на XXII Международной конференции «Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории», посвященной 120-летию со дня рождения академика А. Н. Колмогорова [1] и ее можно считать продолжением цикла моих статей о проблеме полноты для функциональных систем полиномиальных и рациональных функций [2]-[4].

Приведем предварительные сведения из теории функциональных систем, необходимые для дальнейшего изложения.

При изложении материала в основном используется терминология книг [6] и [7].

Говорят, что *функция* $f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$ *существенно зависит от переменной* x_i , если существуют такие два набора (из области определения этой функции)

$$(c_1, \dots, c_{i-1}, a, c_{i+1}, \dots, c_n) \text{ и } (c_1, \dots, c_{i-1}, b, c_{i+1}, \dots, c_n)$$

значений переменных $x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n$, что

$$f(c_1, \dots, c_{i-1}, a, c_{i+1}, \dots, c_n) \neq f(c_1, \dots, c_{i-1}, b, c_{i+1}, \dots, c_n).$$

В этом случае мы говорим, что x_i является *существенной переменной функции*

$$f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

Если x_i не является существенной переменной $f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$, то она называется *фиктивной (несущественной) переменной функции* $f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$.

Пусть $f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$ и $g(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$ две произвольные заданные функции и пусть x_i фиктивная переменная функции $f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$. Если для любых $c_1, \dots, c_{i-1}, c_i, c_{i+1}, \dots, c_n$ значений переменных $x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n$ имеем

$$f(c_1, \dots, c_{i-1}, c_i, c_{i+1}, \dots, c_n) = g(c_1, \dots, c_{i-1}, c_{i+1}, \dots, c_n),$$

то говорят, что функция

$$g(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

получается из функции

$$f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

удалением (изъятием) фиктивной переменной x_i и, наоборот, функция

$$f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

получена из функции

$$g(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

добавлением фиктивной переменной x_i .

Если одна функция может быть получена из другой функции путем добавления или изъятия некоторых фиктивных переменных, то эти две функции являются *равными*.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В дальнейшем будем считать, что вместе с функцией f заданы и все равные ей функции, т.е. функции рассматриваем с точностью до фиктивных переменных.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если дана конечная система функций $f_1, f_2, \dots, f_m$ (где $m \geq 1$), то можно считать, что все они зависят от одних и тех же переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, т.е. имеют вид

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если дана функция, отличная от константы, то путем отождествления переменных из нее можно получить равную ей функцию, все переменные которой являются существенными.

Функциональная система (ф.с.) представляет собой множество функций с некоторым набором операций, применяемых к этим функциям и приводящих к получению других функций из этого же множества, т.е. функциональная система — это пара вида $\mathbf{F} = (F, O)$, где F — множество функций, а O — множество операций над этими функциями, при этом каждая операция из O замкнута относительно множества F .

Для произвольного подмножества $A \subseteq F$ обозначим через $[A]$ множество всех функций из F , которые получаются из функций множества A с помощью конечного числа применения операций из O . Множество $[A]$ называется замыканием множества A .

Множество A ($A \subseteq F$) называется замкнутым в функциональной системе $\mathbf{F}$, если $[A] = A$. Замкнутое множество принято называть замкнутым классом.

Множество A ($A \subseteq F$) называется полным в функциональной системе $\mathbf{F}$, если $[A] = F$.

Полное множество принято называть полной системой.

Проблематика теории функциональных систем обширна. Одной из основных проблем является проблема полноты, состоящая в описании всех подмножеств A множества функций F , которые являются полными в ф.с. $\mathbf{F}$, т.е. $[A] = F$.

К проблеме полноты примыкает известная теорема Колмогорова о представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиций непрерывных функций одной переменной и сложения.

ТЕОРЕМА 1 (Колмогоров [5]). При любом целом $n \geq 2$ существуют такие определенные на единичном отрезке $E^1 = [0; 1]$ непрерывные действительные функции $\varphi^{pq}(x)$, что каждая определенная на n -мерном единичном кубе E^n непрерывная действительная функция $f(x_1, \dots, x_n)$ представима в виде

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{q=1}^{2n+1} \chi_q \left[\sum_{p=1}^n \psi^{pq}(x_p) \right],$$

где функции $\chi_q(y)$ действительны и непрерывны.

Теорему Колмогорова можно сформулировать на языке полноты систем функции следующим образом.

ТЕОРЕМА 2. В функциональной системе непрерывных функций, отображающих конечномерный единичный куб в единичный отрезок, множество всех одноместных функций и функция от двух переменных $x + y$ образуют полную систему.

В настоящей статье рассматривается особый подход к решению проблемы полноты для специального класса функций, а именно, аналог теоремы Колмогорова о представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиций непрерывных функций одной переменной и сложения для функциональных систем полиномиальных функций соответственно с натуральными, целыми, рациональными и действительными коэффициентами и для функциональных систем рациональных функций с рациональными и действительными коэффициентами.

2. Определение функциональных систем полиномиальных и рациональных функций

Введем несколько стандартных обозначений, необходимых для дальнейшего изложения.

N — множество всех натуральных чисел (включая число 0),

Z — множество всех целых чисел,

Q — множество всех рациональных чисел,

R — множество всех действительных чисел,

$\equiv$ — обозначим, по определению, тождественно равно,

Для удобства полагаем, что $0^0 = 1$.

Более того договоримся, что во всех ниже рассмотренных функциональных системах в качестве множества операций O берем *операции суперпозиции*:

- перестановка переменных,
- переименование переменных без отождествления,
- отождествление переменных,
- введение фиктивной переменной,
- удаление фиктивной переменной,
- подстановка одной функции в другую.

Сначала определим функциональную систему полиномиальных функций с натуральными коэффициентами.

Выражение вида $cx_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_n^{k_n}$, где $n, k_1, k_2, \dots, k_n \in N$ и $c \in N$ называется *мономом с натуральным коэффициентом*, зависящим от n переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$; при этом, когда $n = 0$, тогда заданный моном является просто константой c , т.е. мономом с натуральным коэффициентом, зависящим от 0-го числа переменных.

Конечная сумма мономов с натуральными коэффициентами называется *полиномом с натуральными коэффициентами*.

Функция вида

$$f(x_1, \dots, x_n) : \underbrace{N \times N \times \dots \times N}_n \rightarrow N,$$

которая задается с помощью полинома с натуральными коэффициентами, называется *полиномиальной функцией с натуральными коэффициентами*.

Следует обратить внимание на то, что аргументы полиномиальных функций с натуральными коэффициентами и сами эти функции принимают только натуральные значения.

Полиномиальные функции с натуральными коэффициентами будем называть также *pn-функциями*⁵. Далее наряду с термином “полиномиальная функция с натуральными коэффициентами” будем употреблять термин “полином с натуральными коэффициентами”, а вместо термина “pn-функция” будем употреблять термин “pn-полином”, т.е. мы отождествляем функцию с формулой, с помощью которой она задается.

Обозначим через F_{PN} множество всех полиномиальных функций с натуральными коэффициентами.

Функциональная система полиномиальных функций с натуральными коэффициентами $\mathbf{F}_{PN}$ — это пара $\mathbf{F}_{PN} = (F_{PN}, O)$, где F_{PN} — множество всех полиномиальных функций с натуральными коэффициентами, а O — множество операций суперпозиции над полиномиальными функциями с натуральными коэффициентами.

⁵p — это первая буква слова polynomial, а n — первая буква слова natural

Заметим, что определение функциональной системы полиномиальных функций с натуральными коэффициентами $\mathbf{F}_{PN} = (F_{PN}, O)$ корректное, так как любая суперпозиция функций из F_{PN} является опять функцией из F_{PN} .

Теперь определим функциональную систему полиномиальных функций с целыми коэффициентами.

Выражение вида $cx_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_n^{k_n}$, где $n, k_1, k_2, \dots, k_n \in N$, а $c \in Z$ называется *мономом с целым коэффициентом*, зависящим от n переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$; при этом, когда $n = 0$, тогда заданный моном является просто константой c , т.е. мономом с целым коэффициентом, зависящим от 0-го числа переменных.

Конечная сумма мономов с целыми коэффициентами называется *полиномом с целыми коэффициентами*.

Функция вида

$$f(x_1, \dots, x_n) : \underbrace{Z \times Z \times \dots \times Z}_n \rightarrow Z,$$

которая задается с помощью полинома с целыми коэффициентами, называется *полиномиальной функцией с целыми коэффициентами*.

Следует обратить внимание на то, что аргументы полиномиальных функций с целыми коэффициентами и сами эти функции принимают только целые значения.

Полиномиальные функции с целыми коэффициентами называем еще и *pz-функциями*⁶. Далее наряду с термином “*полиномиальная функция с целыми коэффициентами*” будем употреблять термин “*полином с целыми коэффициентами*”, а вместо термина “*pz-функция*” будем употреблять термин “*pz-полином*”, т.е. мы отождествляем функцию с формулой, с помощью которой она задается.

Обозначим через F_{PZ} множество всех полиномиальных функций с целыми коэффициентами.

Функциональная система полиномиальных функций с целыми коэффициентами $\mathbf{F}_{PZ}$ — это пара $\mathbf{F}_{PZ} = (F_{PZ}, O)$, где F_{PZ} — множество всех полиномиальных функций с целыми коэффициентами, а O — множество операций суперпозиции над полиномиальными функциями с целыми коэффициентами.

Заметим, что определение функциональной системы полиномиальных функций с целыми коэффициентами $\mathbf{F}_{PZ} = (F_{PZ}, O)$ корректное, так как любая суперпозиция функций из F_{PZ} является опять функцией из F_{PZ} .

Далее определим функциональную систему полиномиальных функций с рациональными коэффициентами.

Выражение вида $cx_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_n^{k_n}$, где $n, k_1, k_2, \dots, k_n \in N$, а $c \in Q$ называется *мономом с рациональным коэффициентом*, зависящим от n переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$; при этом, когда $n = 0$, тогда заданный моном является просто константой c , т.е. мономом с рациональным коэффициентом, зависящим от 0-го числа переменных.

Конечная сумма мономов с рациональными коэффициентами называется *полиномом с рациональными коэффициентами*.

Функция вида

$$f(x_1, \dots, x_n) : \underbrace{Q \times Q \times \dots \times Q}_n \rightarrow Q,$$

которая задается с помощью полинома с рациональными коэффициентами, называется *полиномиальной функцией с рациональными коэффициентами*.

Следует обратить внимание на то, что аргументы полиномиальных функций с рациональными коэффициентами и сами эти функции принимают только рациональные значения.

⁶p — это первая буква слова polynomial, а z — первая буква слова zahlen (от немецкого “число”)

Полиномиальные функции с рациональными коэффициентами будем называть также *rq-функциями*⁷. Далее наряду с термином “полиномиальная функция с рациональными коэффициентами” будем употреблять термин “полином с рациональными коэффициентами”, а вместо термина “rq-функция” будем употреблять термин “rq-полином”, т.е. мы отождествляем функцию с формулой, с помощью которой она задается.

Обозначим через F_{RQ} множество всех полиномиальных функций с рациональными коэффициентами.

Функциональная система полиномиальных функций с рациональными коэффициентами $\mathbf{F}_{RQ}$ — это пара $\mathbf{F}_{RQ} = (F_{RQ}, O)$, где F_{RQ} — множество всех полиномиальных функций с рациональными коэффициентами, а O — множество операций суперпозиции над полиномиальными функциями с рациональными коэффициентами.

Заметим, что определение функциональной системы полиномиальных функций с рациональными коэффициентами $\mathbf{F}_{RQ} = (F_{RQ}, O)$ корректное, так как любая суперпозиция функций из F_{RQ} является опять функцией из F_{RQ} .

Определим еще функциональную систему полиномиальных функций с действительными коэффициентами.

Выражение вида $cx_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_n^{k_n}$, где $n, k_1, k_2, \dots, k_n \in N$, а $c \in R$ называется *мономом с действительным коэффициентом*, зависящим от n переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$; при этом, когда $n = 0$, тогда заданный моном является просто константой c , т.е. мономом с действительным коэффициентом, зависящим от 0-го числа переменных.

Конечная сумма мономов с действительными коэффициентами называется *полиномом с действительными коэффициентами*.

Функция вида

$$f(x_1, \dots, x_n) : \underbrace{R \times R \times \dots \times R}_n \rightarrow R,$$

которая задается с помощью полинома с действительными коэффициентами, называется *полиномиальной функцией с действительными коэффициентами*.

Ясно, что аргументы полиномиальных функций с действительными коэффициентами и сами эти функции принимают только действительные значения.

Полиномиальные функции с действительными коэффициентами будем называть также *pr-функциями*⁸. Далее наряду с термином “полиномиальная функция с действительными коэффициентами” будем употреблять термин “полином с действительными коэффициентами”, а вместо термина “pr-функция” будем употреблять термин “pr-полином”, т.е. мы отождествляем функцию с формулой, с помощью которой она задается.

Обозначим через F_{PR} множество всех полиномиальных функций с действительными коэффициентами.

Функциональная система полиномиальных функций с действительными коэффициентами $\mathbf{F}_{PR}$ — это пара $\mathbf{F}_{PR} = (F_{PR}, O)$, где F_{PR} — множество всех полиномиальных функций с действительными коэффициентами, а O — множество операций суперпозиции над полиномиальными функциями с действительными коэффициентами.

Заметим, что определение функциональной системы полиномиальных функций с действительными коэффициентами $\mathbf{F}_{PR} = (F_{PR}, O)$ корректное, так как любая суперпозиция функций из F_{PR} является опять функцией из F_{PR} .

Теперь определим функциональную систему рациональных функций с рациональными коэффициентами.

⁷ p — это первая буква слова polynomial, а q — первая буква слова quotient (от английского “частное”)

⁸ p — это первая буква слова polynomial, а r — первая буква слова real

Функция вида

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{g(x_1, \dots, x_n)}{h(x_1, \dots, x_n)},$$

где $g(x_1, \dots, x_n)$ и $h(x_1, \dots, x_n)$ — полиномиальные функции с рациональными коэффициентами, называется *рациональной функцией с рациональными коэффициентами*.

Следует обратить внимание на то, что аргументы рациональных функций с рациональными коэффициентами и сами эти функции принимают только рациональные значения.

Рациональные функции с рациональными коэффициентами будем называть также *rq-функциями*⁹.

Обозначим через F_{RQ} множество всех рациональных функций с рациональными коэффициентами.

Функциональная система рациональных функций с рациональными коэффициентами $\mathbf{F}_{RQ}$ — это пара $\mathbf{F}_{RQ} = (F_{RQ}, O)$, где F_{RQ} — множество всех рациональных функций с рациональными коэффициентами, а O — множество операций суперпозиции над рациональными функциями с рациональными коэффициентами.

Заметим, что определение функциональной системы рациональных функций с рациональными коэффициентами $\mathbf{F}_{RQ} = (F_{RQ}, O)$ корректное, так как любая суперпозиция функций из F_{RQ} является опять функцией из F_{RQ} .

И наконец, определим функциональную систему рациональных функций с действительными коэффициентами.

Функция вида

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{g(x_1, \dots, x_n)}{h(x_1, \dots, x_n)},$$

где $g(x_1, \dots, x_n)$ и $h(x_1, \dots, x_n)$ — полиномиальные функций с действительными коэффициентами, называется *рациональной функцией с действительными коэффициентами*.

Ясно, что аргументы рациональных функций с действительными коэффициентами и сами эти функции принимают только действительные значения.

Рациональные функции с действительными коэффициентами будем называть также *rr-функциями*¹⁰.

Обозначим через F_{RR} множество всех рациональных функций с действительными коэффициентами.

Функциональная система рациональных функций с действительными коэффициентами $\mathbf{F}_{RR}$ — это пара $\mathbf{F}_{RR} = (F_{RR}, O)$, где F_{RR} — множество всех рациональных функций с действительными коэффициентами, а O — множество операций суперпозиции над рациональными функциями с действительными коэффициентами.

Заметим, что определение функциональной системы рациональных функций с действительными коэффициентами $\mathbf{F}_{RR} = (F_{RR}, O)$ корректное, так как любая суперпозиция функций из F_{RR} является опять функцией из F_{RR} .

ЗАМЕЧАНИЕ 4. *Следует отметить, что в функциональных системах полиномиальных функций (соответственно, с натуральными, целыми, рациональными, действительными коэффициентами) все функции являются всюду определенными, а в функциональных системах рациональных функций (соответственно, с рациональными, действительными коэффициентами) есть и не всюду определенные, т.е. частичные функции (в том числе и нигде не определенная функция).*

⁹г — это первая буква слова rational, а q — первая буква слова quotient (от английского “частное”)

¹⁰первая буква г в обозначении — это первая буква слова rational, а вторая буква г в обозначении — первая буква слова real

3. Об аналоге теоремы Колмогорова о суперпозициях непрерывных функций для функциональных систем полиномиальных и рациональных функций

В настоящей статье рассматривается особый подход к решению проблемы полноты для специального класса функций, а именно, аналог теоремы Колмогорова о представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиций непрерывных функций одной переменной и сложения для функциональных систем полиномиальных функций (соответственно с натуральными, целыми, рациональными и действительными коэффициентами) и для функциональных систем рациональных функций (соответственно с рациональными и действительными коэффициентами).

ЗАМЕЧАНИЕ 5. *Следует уточнить такой факт. В теореме Колмогорова задано множество всех одноместных функций, а это множество не все воспринимают однозначно: одни считают, что оно состоит из всех одноместных функций, которые существенно зависят от своей переменной, а другие не требуют существенной зависимости от всех переменных, т.е. среди одноместных функций есть и такие, которые существенно не зависят от своей переменной (имеются функции от 0-го числа переменных, т.е. константы)¹¹. Но, оказывается, что это непринципиально: множество всех одноместных функций содержит или не содержит функций, которые фиктивно зависят от своей переменной, т.е. содержит или не содержит констант, т.к. во всех ниже рассмотренных функциональных системах¹² из множества всех одноместных функций, которые существенно зависят от своей переменной и функции $f(x, y) = x + y$ (которая у нас также имеется) с помощью операций суперпозиции можно получить все соответствующие константы.*

ЗАМЕЧАНИЕ 6. *Несмотря на то, что во всех ниже рассмотренных функциональных системах используется один и тот же подход получения констант, мы все-таки будем получать константы в каждой функциональной системе отдельно, а не сразу для всех функциональных систем, т.к. у всех этих систем свои соответствующие константы.*

Сначала рассмотрим функциональную систему полиномиальных функций с натуральными коэффициентами $\mathbf{F}_{PN}$.

ТЕОРЕМА 3. *В функциональной системе $\mathbf{F}_{PN}$ аналог теоремы Колмогорова не имеет места: множество всех одноместных функций и функции $x + y$ из F_{PN} не является полной системой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через K_+ множество, состоящее из всех одноместных функций и функции $x + y$ из F_{PN} .

Нужно доказать, что класс $[K_+]$ не содержит всех функций из F_{PN} . Для этого достаточно показать, что в замкнутом классе $[K_+]$ нет функции xy . А для этого, в свою очередь, достаточно доказать, что в F_{PN} состоит из таких pn -функций, которые содержат члены вида sxy только с четными коэффициентами, т.е. $s = 2l$, где l – любое целое число, (в частности, и 0). С этой целью построим по индукции (относительно k) последовательность множеств pn -полиномов

$$H_1, H_2, H_3, \dots, H_k, \dots$$

¹¹Автор как специалист в области дискретной математики придерживается второй точки зрения, поскольку в дискретной математике нет такого требования для функций относительно существенных переменных. Например, в теории булевых функций известно, что число всех булевых функций, зависящих от n переменных, равно 2^{2^n} , куда входят и функции с фиктивными аргументами

¹²кроме функциональной системы полиномов с натуральными коэффициентами, где и не нужны константы, поскольку для этой системы не имеет места аналог теоремы Колмогорова

Базис индукции. При $k = 1$ положим $H_1 = K_+$.

Индуктивный переход. Пусть уже построены множества $H_1, H_2, \dots, H_k$; тогда H_{k+1} определим как множество всевозможных суперпозиций вида $g(h_1, \dots, h_m)$, где g - функция из K_+ , а $h_1, \dots, h_m$ - либо переменные, либо функции из H_k .

Легко заметить, что $H_k \subseteq H_{k+1}$ и $\cup_{k=1}^{\infty} H_k = [K_+]$.

Теперь если докажем, что ни одно множество из последовательности $H_1, H_2, H_3, \dots$ не содержит функцию с указанным выше свойством, то тем самым будет доказано, что класс $[K_+]$ не содержит функцию xy .

А это сделаем опять с помощью математической индукции по k .

Базис индукции. Очевидно, что H_1 состоит из таких функций, которые содержат член вида sxy только с нулевым коэффициентом, т.е. все эти функции содержат член вида sxy только с четными коэффициентами.

Индуктивный переход. Пусть H_k состоит из таких функций, которые содержат член вида sxy только с четными коэффициентами. Тогда покажем, что и множество H_{k+1} также состоит из таких функций, которые содержат член вида sxy только с четными коэффициентами.

Рассмотрим произвольную суперпозицию $g(h_1, \dots, h_m)$ из H_{k+1} где $h_1, \dots, h_m$ - либо переменные, либо функции из H_k , а $g(x_1, \dots, x_m) \in H_k$.

Возможны следующие случаи.

1. $g = x + y$; тогда ясно, что $m = 2$ и $g(h_1, \dots, h_m) = h_1 + h_2$.

Так как по индуктивному допущению функции h_1 и h_2 содержат член вида sxy только с четными коэффициентами, то очевидно, что функция $h_1 + h_2$ содержит член вида sxy только с четными коэффициентами.

2. g - функция одной переменной, тогда ясно, что $m = 1$ и $g(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$, т.е. $g(h_1, \dots, h_m) = a_n h_1^n + \dots + a_1 h_1 + a_0$. Так как h_1 содержит член вида sxy только с четными коэффициентами, то и сумма $a_n h_1^n + \dots + a_1 h_1 + a_0$, и тем самым, суперпозиция $g(h_1, \dots, h_m)$ содержит член вида sxy только с четными коэффициентами.

Итак, $H_k (k = 1, 2, 3, \dots)$ состоит из таких функций, которые содержат член вида sxy только с четными коэффициентами. Но, с другой стороны, $[K_+] = \cup_{l=1}^{\infty} H_l$. Следовательно, $[K_+]$ состоит из таких pn -полиномов, которые содержат члены вида sxy только с четными коэффициентами (т.е. $c = 2l$, где l - любое целое число).

Из вышесказанного следует, что класс $[K_+]$ не содержит функцию xy . Поэтому система K_+ не является полной в $\mathbf{F}_{PN}$. Это означает, что в функциональной системе $\mathbf{F}_{PN}$ аналог теоремы Колмогорова не имеет места. $\square$

Теперь рассмотрим функциональную систему полиномиальных функций с целыми коэффициентами $\mathbf{F}_{PZ}$.

ТЕОРЕМА 4. *В функциональной системе $\mathbf{F}_{PZ}$ аналог теоремы Колмогорова не имеет места: множество всех одноместных функций и функции $x + y$ из F_{PZ} не является полной системой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Теорема доказывается аналогично теореме 3. $\square$

Теперь рассмотрим функциональную систему полиномиальных функций с рациональными коэффициентами $\mathbf{F}_{PQ}$.

ТЕОРЕМА 5. *В функциональной системе $\mathbf{F}_{PQ}$ имеет место аналог теоремы Колмогорова: множество всех одноместных функций и функции $x + y$ из F_{PQ} является полной системой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть K_+ множество, состоящее из всех одноместных функций и функции $x + y$ из F_{PQ} .

Нужно доказать, что класс K_+ является полной системой, т.е. $[K_+] = F_{PQ}$.

Обозначим через

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &\equiv x + y, f_2(x) \equiv x^2, f_3(x) \equiv -x^2, f_4(x) \equiv 1/2x, \\ f_5(x) &\equiv -x, f_6(x) \equiv x + 1, f_q(x) \equiv qx \ (\forall q \in Q). \end{aligned}$$

Очевидно, что

$$f_1(x, y), f_2(x), f_3(x), f_4(x), f_5(x), f_6(x), f_q(x) \in K_+,$$

Сначала докажем, что из всех одноместных функций и функции $x + y$ с помощью операций суперпозиции можно получить все числа из Q .

Действительно, имеем

$$f_1(f_2(x), f_3(x)) = 0; f_6(0) = 1, f_q(1) = q \ (\forall q \in Q).$$

Итак, $Q \subset [K_+]$.

Далее легко заметить, что

$$\begin{aligned} g_1(x, y) &\equiv f_2(f_1(x, y)) = x^2 + 2xy + y^2 \in K_+; \\ g_2(x, y) &\equiv f_1(g_1(x, y), f_3(x)) = 2xy + y^2 \in K_+; \\ g_3(x, y) &\equiv f_1(g_2(x, y), f_3(y)) = 2xy \in K_+; \\ g_4(x, y) &\equiv f_4(g_3(x, y)) = xy \in K_+; \end{aligned}$$

Итак, класс $[K_+]$ содержит подсистему $\{x + y, xy, q\}$, где q - любое рациональное число, которая является полной в $\mathbf{F}_{PQ}$. Следовательно, K_+ полная система в функциональной системе $\mathbf{F}_{PQ}$. $\square$

Рассмотрим еще функциональную систему полиномиальных функций с действительными коэффициентами $\mathbf{F}_{PR}$.

ТЕОРЕМА 6. *В функциональной системе $\mathbf{F}_{PR}$ имеет место аналог теоремы Колмогорова: множество всех одноместных функций и функции $x + y$ из $\mathbf{F}_{PR}$ является полной системой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть K_+ множество, состоящее из всех одноместных функций и функции $x + y$ из $\mathbf{F}_{PR}$.

Нужно доказать, что класс K_+ является полной системой т.е. $[K_+] = \mathbf{F}_{PR}$.

Обозначим через

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &\equiv x + y, f_2(x) \equiv x^2, f_3(x) \equiv -x^2, f_4(x) \equiv 1/2x, \\ f_5(x) &\equiv -x, f_6(x) \equiv x + 1, f_r(x) \equiv rx \ (\forall r \in R). \end{aligned}$$

Очевидно, что

$$f_1(x, y), f_2(x), f_3(x), f_4(x), f_5(x), f_6(x), f_r(x) \in K_+,$$

Сначала докажем, что из всех одноместных функций и функции $x + y$ с помощью операций суперпозиции можно получить все числа из R .

Действительно, имеем

$$f_1(f_2(x), f_3(x)) = 0; f_6(0) = 1, f_r(1) = r \ (\forall r \in R).$$

Итак, $R \subset [K_+]$.

Далее легко заметить, что

$$g_1(x, y) \equiv f_2(f_1(x, y)) = x^2 + 2xy + y^2 \in K_+;$$

$$g_2(x, y) \equiv f_1(g_1(x, y), f_3(x)) = 2xy + y^2 \in K_+;$$

$$g_3(x, y) \equiv f_1(g_2(x, y), f_3(y)) = 2xy \in K_+;$$

$$g_4(x, y) \equiv f_4(g_3(x, y)) = xy \in K_+;$$

Итак, класс $[K_+]$ содержит подсистему $\{x + y, xy, r\}$, где r - любое действительное число, которая является полной в $\mathbf{F}_{PR}$. Следовательно, K_+ полная система в функциональной системе $\mathbf{F}_{PR}$. $\square$

Теперь рассмотрим функциональную систему рациональных функций с рациональными коэффициентами $\mathbf{F}_{RQ}$.

ТЕОРЕМА 7. *В функциональной системе $\mathbf{F}_{RQ}$ аналог теоремы Колмогорова имеет место: множество всех одноместных функций и функции $x + y$ из F_{RQ} является полной системой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть K_+ множество, состоящее из всех одноместных функций и функции $x + y$ из F_{RQ} .

Нужно доказать, что класс K_+ является полной системой, т.е. $[K_+] = F_{RQ}$.

Обозначим через

$$f_1(x, y) \equiv x + y, f_2(x) \equiv x^2, f_3(x) \equiv -x^2, f_4(x) \equiv 1/2x,$$

$$f_5(x) \equiv -x, f_6(x) \equiv x + 1, f_7(x) = \frac{1}{x}, f_q(x) \equiv qx \ (\forall q \in Q).$$

Очевидно, что

$$f_1(x, y), f_2(x), f_3(x), f_4(x), f_5(x), f_6(x), f_7(x), f_q(x) \in K_+,$$

Сначала докажем, что из всех одноместных функций и функции $x + y$ с помощью операций суперпозиции можно получить все числа из Q .

Действительно, имеем

$$f_1(f_2(x), f_3(x)) = 0; f_6(0) = 1, f_q(1) = q \ (\forall q \in Q).$$

Итак, $Q \subset [K_+]$.

Далее легко заметить, что

$$g_1(x, y) \equiv f_2(f_1(x, y)) = x^2 + 2xy + y^2 \in K_+;$$

$$g_2(x, y) \equiv f_1(g_1(x, y), f_3(x)) = 2xy + y^2 \in K_+;$$

$$g_3(x, y) \equiv f_1(g_2(x, y), f_3(y)) = 2xy \in K_+;$$

$$g_4(x, y) \equiv f_4(g_3(x, y)) = xy \in K_+;$$

$$g_5(x, y) \equiv g_4(x, f_7(y)) = \frac{x}{y};$$

Итак, класс $[K_+]$ содержит подсистему $\{q, x + y, xy, \frac{x}{y}\}$, где q - любое рациональное число, которая является полной в $\mathbf{F}_{RQ}$. Следовательно, K_+ полная система в функциональной системе $\mathbf{F}_{RQ}$. $\square$

И, наконец, рассмотрим функциональную систему рациональных функций с действительными коэффициентами $\mathbf{F}_{RR}$.

ТЕОРЕМА 8. В функциональной системе $\mathbf{F}_{RR}$ аналог теоремы Колмогорова имеет место: множество всех одноместных функций и функции $x + y$ из F_{RR} является полной системой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть K_+ множество, состоящее из всех одноместных функций и функции $x + y$ из F_{RR} .

Нужно доказать, что класс K_+ является полной системой, т.е. $[K_+] = F_{RR}$.

Обозначим через

$$f_1(x, y) \equiv x + y, f_2(x) \equiv x^2, f_3(x) \equiv -x^2, f_4(x) \equiv 1/2x,$$

$$f_5(x) \equiv -x, f_6(x) \equiv x + 1, f_7(x) = \frac{1}{x}, f_r(x) \equiv rx \ (\forall r \in R).$$

Очевидно, что

$$f_1(x, y), f_2(x), f_3(x), f_4(x), f_5(x), f_6(x), f_7(x), f_r(x) \in K_+,$$

Сначала докажем, что из всех одноместных функций и функции $x + y$ с помощью операций суперпозиции можно получить все числа из R .

Действительно, имеем

$$f_1(f_2(x), f_3(x)) = 0; f_6(0) = 1, f_r(1) = r \ (\forall r \in R).$$

Итак, $R \subset [K_+]$.

Далее легко заметить, что

$$g_1(x, y) \equiv f_2(f_1(x, y)) = x^2 + 2xy + y^2 \in K_+;$$

$$g_2(x, y) \equiv f_1(g_1(x, y), f_3(x)) = 2xy + y^2 \in K_+;$$

$$g_3(x, y) \equiv f_1(g_2(x, y), f_3(y)) = 2xy \in K_+;$$

$$g_4(x, y) \equiv f_4(g_3(x, y)) = xy \in K_+;$$

$$g_5(x, y) \equiv g_4(x, f_7(y)) = \frac{x}{y};$$

Итак, класс $[K_+]$ содержит подсистему $\{r, x - y, xy, \frac{x}{y}, \}$, где r – любое действительное число, которая является полной в $\mathbf{F}_{RR}$. Следовательно, K_+ полная система в функциональной системе $\mathbf{F}_{RR}$. $\square$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алексиадис Н. Ф. Об аналоге теоремы Колмогорова о суперпозициях непрерывных функций для функциональных систем полиномиальных и рациональных функций // Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории. Материалы XXII Международной конференции, посвященной 120-летию со дня рождения академика А. Н. Колмогорова (Тула, 26–29 сентября 2023 года). Тула, 2023. с. 140–144.
2. Алексиадис Н. Ф. Рациональные А-функции с рациональными коэффициентами // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 4, с. 11–19. (DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-11-19).
3. Алексиадис Н. Ф. Замкнутые классы в функциональной системе полиномов с действительными коэффициентами // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 1, с. 5–14. (DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-1-5-14).

4. Алексиадис Н. Ф. Базисы полных систем рациональных функций с рациональными коэффициентами // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 2, с. 2–11 (DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-2-2-11).
5. Колмогоров А. Н. О представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиций непрерывных функций одной переменной и сложения // ДАН СССР, 1957, т. 114, вып. 5, с. 953–956.
6. Кудрявцев В. Б. Функциональные системы. — М.: Изд-во МГУ, 1982. 157 с.
7. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. — М.: Изд-во Наука, 1986. 384 с.

REFERENCES

1. Aleksiadis, N. Ph. 2023, “On the analogue of Kolmogorov’s theorem on superpositions of continuous functions for functional systems of polynomial and rational functions”, *Proc. 22-th Int. Conf. “Algebra, number theory and discrete geometry: modern problems, applications and problems of history”*, p. 140–144.
2. Aleksiadis, N. Ph. 2022, “Rational A-functions with rational coefficients”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 4, pp. 11–19. (DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-11-19)
3. Aleksiadis, N. Ph., “Closed classes in the functional system of polynomials with real coefficients”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 2, pp. 11–19. (DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-1-5-14)
4. Aleksiadis N. Ph., 2023, “Bases of complete systems of rational functions with rational coefficients”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 2, pp. 2–11 (DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-2-2-11)
5. Kolmogorov A. N. “On the representation of continuous functions of several variables in the form of superpositions of continuous functions of one variable and addition”, *DAN USSR*, 1957, vol. 114, issue 5, pp. 953–956.
6. Kudryavtsev, V. B. 1982, “Functional systems”, *Moscow: Publishing House of Mekh-mat. fac. MSU.*, 157 p.
7. Yablonsky, S. V. 1986, “Introduction to discrete mathematics”, *Moscow.:Science*, 384 p.

Получено: 30.12.2023

Принято в печать: 28.06.2024

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 25. Выпуск 2.

УДК 511.41

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-2-43-66

О цепных дробях с рациональными неполными частными¹

Д. А. Долгов

Долгов Дмитрий Александрович — Институт вычислительной математики и информационных технологий, Казанский (Приволжский) федеральный университет (г. Казань).
e-mail: Dolgov.kfu@gmail.com

Аннотация

Алгоритм Соренсона с левым сдвигом — один из быстрых алгоритмов вычисления наибольшего общего делителя двух натуральных чисел. В начале его работы фиксируется натуральное число $k > 2$, которое является параметром. На каждом шаге алгоритма выполняется поиск линейной комбинации входных чисел текущего шага, причем наименьшее из них предварительно домножается на параметр k , пока не начнет превосходить наибольшего. После этого наибольшее число замещается абсолютным значением линейной комбинации. Результатом работы алгоритма является наибольший общий делитель исходных чисел, умноженный на некоторое число, называемое побочным множителем. Для алгоритма Соренсона была доказана оценка числа шагов в худшем случае, приведен пример. Фиксация некоторой бесконечной последовательности K натуральных чисел больших двух позволяет получить обобщенный алгоритм Соренсона. В нем на каждом шаге вместо числа k будет задействовано определенное значение параметра $k_i \in K$, соответствующее текущему шагу алгоритма. В остальном алгоритмы полностью совпадают друг с другом.

Цепные дроби с рациональными неполными частными с левым сдвигом возникают в ходе применения к отношению натуральных чисел a, b обобщенного k -арного алгоритма Соренсона с левым сдвигом. С ними связаны особые формы континуантов, то есть многочленов, при помощи которых выражаются числитель и знаменатель подходящей дроби. Для таких континуантов найдены формулы, позволяющие представить континуант n -го порядка в виде некоторой комбинации континуантов меньших порядков. Были найдены условия при которых последовательность континуантов увеличивающегося порядка является строго возрастающей. Также были найдены условия, при которых приближения рациональных чисел, выполненные при помощи цепных дробей с рациональными неполными частными, можно однозначно сравнивать.

Ключевые слова: цепные дроби, континуант, наибольший общий делитель, Диофантовы приближения.

Библиография: 17 названий.

Для цитирования:

Д. А. Долгов. О цепных дробях с рациональными неполными частными // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 2, с. 43–66.

¹Работа выполнена за счет средств Программы стратегического академического лидерства Казанского (Приволжского) федерального университета («ПРИОРИТЕТ-2030»).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 25. No. 2.

UDC 511.41

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-2-43-66

On the continued fraction with rational partial quotients²

D. A. Dolgov

Dolgov Dmitry Alexandrovich — Institute of Computational Mathematics and Information Technologies, Kazan (Volga Region) Federal University (Kazan).

e-mail: Dolgov.kfu@gmail.com

Abstract

The Sorenson left shift k -ary gcd algorithm is one of the fastest greatest common divisor algorithms of two natural numbers. At the beginning a natural number $k > 2$ is fixed, which is a parameter of algorithm. At each step we multiply smaller of two input numbers of current step, until it does not become greater of the second number. Then we calculate linear combination between this number and the bigger of two input numbers. After that we replace the bigger of two input numbers by absolute value of the linear combination. At the end of the algorithm we obtain greatest common divisor of the two original numbers, which has been multiplied by some natural number. Spurious factor has appeared in the answer. We have proven estimation of the worst case of steps and obtained example of this case. Fixation of some endless sequence K of natural numbers (each value is greater than 2) allows us to obtain the generalized Sorenson left shift k -ary gcd algorithm. There at i -th step the value of $k_i \in K$ is used instead of fixed parameter k . Both algorithms are completely coincide except this moment.

Continued fractions with rational partial quotients with left shift arise at applying of the generalized Sorenson left shift k -ary gcd algorithm to the ratio of two natural numbers a and b . We can bind these continued fractions and polynomials of the special form, which called continuants. Numerator and denominator of such continued fractions can be expressed by continuants. Formulas have been found that allow us to express continuants of the n -th order as some combination of continuants of a smaller order. Conditions were found at which a sequence of continuants of increasing order is strictly increasing. We also found conditions that allow unambiguous comparison of convergents of rational numbers that had performed by using continued fractions with rational partial quotients.

Keywords: continued fraction, continuant, greatest common divisor, Diophantine approximation.

Bibliography: 17 titles.

For citation:

D. A. Dolgov, 2024. “On the continued fraction with rational partial quotients”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 2, pp. 43–66.

1. Introduction

The Euclidean algorithm is one of the most famous algorithms for calculating the greatest common divisor (gcd) of two natural numbers ³ a, b (here and further $a > b > 1$). At each step

²This paper has been supported by the Kazan Federal University Strategic Academic Leadership Program (“PRIORITY-2030”).

³Natural numbers are the non-negative integers without zero.

input number a is replaced by input number b , input number b is replaced by smallest non-negative remainder r from division of a by b :

$$a = bt + r, \quad t = \lfloor a/b \rfloor, \quad 0 \leq r < t.$$

The algorithm runs until the second argument vanishes. Then first argument is equals to $\gcd(a, b)$. The classical Euclidean algorithm corresponds to the expansion of the number a/b into a (regular) continued fraction

$$\frac{a}{b} = t_0 + \frac{1}{t_1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{t_h}}}$$

of the length $h = h(a/b)$, where t_0 is integer, and the numbers $t_1, \dots, t_h$ are natural, $t_i \geq 2$, $i \geq 1$. The integers $t_0, t_1, \dots, t_h$ are called partial quotients. Note that continued fractions are related to many other mathematical objects (refer to [1], [2]).

In addition to the Euclidean algorithm, there are other algorithms that calculate $\gcd$ of two natural numbers. Among them, it is worth noting k -ary algorithms first introduced by Sorenson: the right-shift algorithm and the left-shift algorithm (refer to [3]). They quickly calculate the $\gcd$, which is used in various mathematical algorithms (refer to [4, 5, 6]). Modification of the first algorithm allows us to increase its performance (refer to [7, 8]), calculate multiplicatively inverse elements in the ring of integers modulo a number (refer to [9]), and also allows to get rid of spurious factors that arise during execution of algorithm (refer to [10]).

In what follows we will need the Sorenson k -ary left-shift $\gcd$ algorithm. Here is its description. Let us fix some integer $k > 2$ and set $a_0 = a$, $b_0 = b$. At each step of this algorithm a pair of input numbers (a_i, b_i) is replaced by new pair (a_{i+1}, b_{i+1}) by the next rule. First we find the integer e_i from the following relation:

$$c_i \leq a_i < kc_i, \quad (1)$$

where $c_i = b_i k^{e_i}$. Further integers x_i and y_i are selected that satisfy the conditions

$$\gcd(x_i, y_i) = 1, \quad 0 < y_i \leq k, \quad (2)$$

for which the inequality holds

$$\left| \frac{c_i}{a_i} - \frac{x_i}{y_i} \right| \leq \frac{1}{y_i(k+1)}. \quad (3)$$

After that we select a new pair of numbers

$$(a_{i+1}, b_{i+1}) = (b_i, |y_i c_i - x_i a_i|), \quad \text{if } i \geq 0, \quad (4)$$

or

$$(a_{i+1}, b_{i+1}) = (b_{i+1}, a_{i+1}), \quad \text{if } b_{i+1} > a_{i+1}. \quad (5)$$

We will assume that the number x_i belongs to the interval $(0, k]$ because all other cases of choosing this number do not satisfy inequality (3). The choice of numbers x_i, y_i is carried out by enumerating possible variants and checking the feasibility of this inequality. The existence of such numbers is guaranteed by Dirichlet's lemma on Diophantine approximations (refer to [11, chapter X lemma 2]).

The algorithm terminates when one of the arguments a_i, b_i vanishes: in this case, the second argument becomes the answer. However, during algorithm execution at the i -th step a "spurious"

Algorithm 1 Main loop of the left-shift k -ary gcd

```

if  $a < b$  then
     $swap(a, b)$ 
end if
while  $b \neq 0$  do
    compute  $c = k^e b$  such that  $c \leq a < ck$ 
    find  $x, y \leq k$  such that  $c/a \approx x/y$ 
     $a = |yc - xa|$ 
    if  $a < b$  then
         $swap(a, b)$ 
    end if
end while

```

factor $\alpha_i = \gcd(b_i, x_i)$ may appear, therefore, the result of the Sorenson algorithm will be a certain number that differs from the $\gcd(a, b)$ by the factor $\prod_{i=1}^n \alpha_i$. In Sorenson's paper, this factor was removed using a special phase of the algorithm, performed after the main loop, called "trivial division". It consists of searching through possible divisors of the answer among all prime numbers from 2 to k and then removing them. This phase was also performed at the beginning of the algorithm in order to find small common divisors of the input numbers. Subsequently, they were stored as a product by which each input number a_0, b_0 was divided. At the end, the saved product was added to the answer obtained as a result of running the "trivial division" phase again. This made it possible to save small common divisors of the input numbers because they could have been deleted regardless of the presence of a spurious factor. Here, usage of this phase of the algorithm is omitted, as well as precomputation of some numbers, which is used during the performing algorithm.

Instead of the precomputation phase, you can take the answer a_n obtained during the main loop in n steps and find gcd using the following scheme (this idea was proposed in modification of the Sorenson right shift k -ary gcd algorithm (refer to [12])):

$$\gcd(\gcd(a_0, a_n), b_0),$$

besides these two gcd calculation are performed using algorithms, in which there are no any spurious factors. For example, it is Euclidean algorithm or binary algorithm (refer to [13]).

Below is an example of how the algorithm works. Let us fix parameter k to 7, input numbers a_0 and b_0 equals to 4415 and 60, respectively. At the zero step, first we find the value of e_0 . It equals to 2. After that we select the values of the numbers x_0, y_0 , so that inequality (3) is performed. Let us set them to 2 and 3, respectively. Further, we calculate a new pair of numbers a_1, b_1 according to rules (4), (5). It equals to (60, 10). It is easy to see that the $\gcd(a_1, b_1)$ is equals to 10, although gcd of the input numbers a_0 and b_0 is equals to 5. Result does not match, due to the fact that at this step of the algorithm a spurious factor $\gcd(b_0, x_0)$ equals to 2 is appeared. The next step also begins with searching value of e_1 . It equals to 0. The numbers $x_1 = 1, y_1 = 6$ satisfy inequality (3). At the end of this step search for a new pair of numbers (a_2, b_2) is performed again. Value of b_2 is equals to 0, so the number a_2 , which equals to 10, will be the answer after division by the spurious factor, which equals to 2.

Sorenson showed that for pairs of numbers (a, b) , that are chosen according to the rules

$$a = \sum_{i=0}^m k^{2^i}, b = 1, \quad (6)$$

the number of steps is equal to $m + 1$, and for the number m the next estimate will be fair

$$m = \Omega(\log(ab)/\log(k)). \quad (7)$$

Estimate (7) has been proven only for numbers of type (6). Subsequently, for two numbers having n binary digits, Sorenson proved the asymptotic of the number of steps in the worst case equal to $\Theta(n/\log(k))v$ using estimate (7). No worst-case examples of the algorithm work were given. Also, the question of the constant in the estimate bounded from above remained open until now. In paragraph 4, we give an example of the worst case of the algorithm, and prove the following result:

THEOREM 1. *For arbitrary integers $a \geq b > 1$ the main loop of the Sorenson left-shift k -ary algorithm calculates gcd in no more than $\lfloor \log(a)/\log(k) \rfloor + \lfloor \log(b)/\log(k) \rfloor + 1$ steps.*

Using the Sorenson right-shift k -ary gcd algorithm, we can obtain continued fractions with rational partial quotients with right shift. For brevity, we call such fractions as continued fractions of the first kind. There are two main types of such fractions: continued fractions of the first type

$$\frac{y_0\gamma_0}{x_0\beta_0} + \frac{k_0}{\left(\frac{y_1x_0\beta_0\gamma_1}{\gamma_0x_1\beta_1} + \frac{k_1}{\left(\ddots + \frac{k_{n-1}}{y_n \prod_{\substack{0 \leq i < n, \\ i \not\equiv n \pmod{2}}} x_i\beta_i \prod_{\substack{0 \leq t \leq n, \\ t \equiv n \pmod{2}}} \gamma_t} \right)} \right)},$$

and continued fractions of the second type

$$\frac{y_0\gamma_0}{x_0\beta_0} + \frac{k_0\gamma_0}{x_0\beta_0 \left(\frac{y_1\gamma_1}{x_1\beta_1} + \frac{k_1\gamma_1}{\ddots + \frac{k_{n-1}\gamma_{n-1}x_n\beta_n}{x_{n-1}\beta_{n-1}y_n\gamma_n}} \right)}.$$

The numerators and denominators of such fractions can be expressed using polynomials of a special kind called continuants. Previously, the properties of extreme values of such continuants with restrictions on the variables were studied, and a construction similar to the triangle of Fibonacci polynomials was obtained (refer to [14]).

This paper is introduced a generalized Sorenson left-shift k -ary gcd algorithm, finite continued fractions with rational partial quotients with left shift and corresponding continuants. We have obtained formulas expansion of continuants. We give conditions, under which it is possible to construct strictly increasing sequences of continuants, convergents of rational numbers. Also in this paper, we present an accurate estimate of the number of steps of the Sorenson left-shift k -ary gcd algorithm in the worst case.

2. The Generalized Sorenson algorithm

Consider the following generalized Sorenson algorithm. Instead of the number k , some infinite sequence of numbers $K = \{k_i\}_{i=0}^{\infty}$ is fixed, consisting of natural numbers $k_i \geq 2$. At the next step of the algorithm, a pair of numbers (a_{i+1}, b_{i+1}) is constructed using formulas that are obtained from (1) – (5) by replacing k to k_i . If we multiply each half of inequality (3) by the number y_i , come to the one denominator on the left side, and then flip each parts of the inequality, then we

get expression $a_i/|y_i c_i - x_i a_i| \geq (k_i + 1)$. This fact ensures convergence of the generalized Sorenson algorithm to the solution.

Let $\bar{k} = \min(k_i)$, $k_i \in K$. Then the number of steps of the generalized Sorenson algorithm does not exceed the magnitude $\lfloor \log(a)/\log(\bar{k}) \rfloor + \lfloor \log(b)/\log(\bar{k}) \rfloor + 1$. The author suggests that this estimate, made by analogy with theorem 1, can be improved.

3. Finite continued fractions with rational partial quotients

The generalized Sorenson algorithm leads to a new expansion of the number a/b into a (regular) continued fraction with rational partial quotients with a left shift ⁴, which for brevity we will call *continued fraction of the second kind*. Denote by g_i the four numbers (y_i, x_i, k_i, e_i) . The number y_0 is integer, and x_0, x_i, y_i are non-zero integers when i is greater than one.

There are two main types of expansion of the number a/b into a continued fraction of the second kind. For brevity, we will call them expansions of the third and fourth types. The third type continued fraction has the following form

$$\frac{y_0}{x_0} k_0^{e_0} + \frac{\delta_0}{\left(\frac{x_0 y_1}{x_1} k_1^{e_1} + \frac{\delta_1}{\left(\frac{y_n k_n}{x_n} \prod_{\substack{i < n, \\ i \not\equiv n \pmod{2}}} x_i \right)} \right)} = [g_0; g_1, \dots, g_n]_3, \quad (8)$$

where the value $\delta_i = \delta_i(a_i, c_i, x_i, y_i)$ is defined as

$$\delta_i = \begin{cases} -1, & \text{if } c_i y_i - x_i a_i \geq 0. \\ 1, & \text{if } c_i y_i - x_i a_i < 0. \end{cases} \quad (9)$$

THEOREM 2. *Let the finite sequences of numbers $\{x_i\}_{i=0}^n$, $\{y_i\}_{i=0}^n$ have been obtained by applying the generalized Sorenson left-shift k -ary gcd algorithm for the input numbers a, b and a pre-fixed infinite sequence K of natural numbers greater than two. If the following inequalities are true for each i*

$$a_i > b_i > |y_i c_i - x_i a_i|, \quad (10)$$

then the number a/b can be represented as a third type continued fraction.

The proof of the theorem and all following results are given in a separate section.

If continued fractions have been contained a large number of elements, and besides that each element needs to be shown, then it is not always convenient to represent such fractions with formula (8). In such cases it is convenient to use an alternative notation of the continued fraction, so that the sum of the elements will be written in a line:

$$\frac{y_0 k_0^{e_0}}{x_0} + \frac{\delta_0}{\frac{x_0 y_1 k_1^{e_1}}{x_1} + \frac{\delta_1}{\frac{x_1 y_2 k_2^{e_2}}{x_2 x_0} + \frac{\delta_2}{\frac{x_0 x_2 y_3 k_3^{e_3}}{x_3 x_1} + \dots}}$$

⁴The left shift in the name is a reference to the Sorenson left-shift k -ary gcd algorithm, which is used when decomposing the number a/b . If we select $k = 2^s$, then multiplication by k is the same as performing a bitwise left shift operation by s positions (refer to [15]). This analogy is reflected in the name of the algorithm.

The fourth type continued fraction has the following form

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{y_i k_i^{e_i}}{x_i} \prod_{j=0}^{i-1} \frac{\delta_j}{x_j} + \frac{x_n}{y_n k_n^{e_n}} \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\delta_i}{x_i} = [g_0; g_1, \dots, g_n]_4, \quad (11)$$

where the value δ_i is defined as in theorem 2.

THEOREM 3. *Let the finite sequences of numbers $\{x_i\}_{i=0}^n$, $\{y_i\}_{i=0}^n$ have been obtained by applying the generalized Sorenson left-shift k -ary gcd algorithm for the input numbers a , b and a pre-fixed infinite sequence K of natural numbers greater than two. If the following inequalities are true for each j under the condition $0 \leq j \leq n-1$*

$$b_j \leq |y_j c_j - x_j a_j| < a_j, \quad (12)$$

and for j equal to n , conditions (10) are satisfied, then the number a/b can be represented as a fourth type continued fraction.

The indices “3” and “4” after the square brackets to the right of the continued fraction in theorems 2, 3 mean the third and fourth types of expansion into continued fractions of the second kind. Note that at the last n -th step of the algorithm at expansion into a fourth type continued fraction formula (10) will be fulfilled instead of conditions (12).

The fourth type continued fraction has another form of notation:

$$\frac{y_0}{x_0} k_0^{e_0} + \frac{\delta_0}{x_0} \cfrac{\left(\frac{y_1}{x_1} k_1^{e_1} + \frac{\delta_1}{x_1} \cfrac{\left(\dots \cfrac{\left(\frac{y_{n-1}}{x_{n-1}} k_{n-1}^{e_{n-1}} + \frac{\delta_{n-1}}{x_{n-1} y_n k_n^{e_n}} \right)}{x_n} \right)}{\left(\frac{|y_i c_i - x_i a_i|}{b_i} \right)} \right)}{\left(\frac{|y_i c_i - x_i a_i|}{b_i} \right)}. \quad (13)$$

If we consider a part of this construction, which had obtained at the i -th step excluding the previous steps of the algorithm, then we can obtain the following:

$$\frac{y_i k_i^{e_i}}{x_i} + \frac{\delta_i}{x_i} \cfrac{\left(\frac{|y_i c_i - x_i a_i|}{b_i} \right)}{\left(\frac{|y_i c_i - x_i a_i|}{b_i} \right)} = \frac{y_i k_i^{e_i}}{x_i} + \frac{\delta_i |y_i c_i - x_i a_i|}{x_i b_i}. \quad (14)$$

The right part is obtained by opening the brackets in the left part and writing all the values in a line. Then, continued fraction (13) can be represented as (11). Here and further we will use continued fraction (11) as more compact.

We need to make a small remark regarding the last n -th step in theorem 3. Condition (10) is fulfilled instead of condition (12). If n steps were not enough to expand the number a/b into a fourth type continued fraction and at least one more step is required, on which condition (10) must be satisfied, then in this case we will assume that we are dealing with a combination of fractions of the fourth and third types.

Expansion into continued fractions of the third and fourth types is ambiguous. This is due to the fact that at each step of the algorithm there can be several pairs of numbers (x, y) that satisfy inequality (3). For example, the inequality $|8/13 - x/y| < 1/(4y)$ is satisfied by pairs $(1, 2)$, $(2, 3)$.

Example 1. Consider an example of expansion into a third type continued fraction. The following table shows the calculation results:

Step №	a_i	b_i	$ y_i c_i - x_i a_i $	k_i	e_i	x_i	y_i	δ_i
0	1117	505	107	3	0	1	2	1
1	505	107	30	5	0	1	5	-1
2	107	30	17	3	1	1	1	1
3	30	17	5	5	0	3	5	1
4	17	5	2	3	1	1	1	1
5	5	2	0	7	0	2	5	-1

Using this table and formula (8), we can get at a fraction

$$\frac{1117}{505} = 2 + \frac{1}{5 - \frac{1}{3 + \frac{1}{\frac{5}{3} + \frac{1}{3 \left(3 + \frac{1}{\left(\frac{5}{2} \right)} \right)}}}}$$

Example 2. Consider an example of expansion into a fourth type continued fraction. The following table shows the calculation results:

Step №	a_i	b_i	$ y_i c_i - x_i a_i $	k_i	e_i	x_i	y_i	δ_i
1	291	11	54	4	2	2	3	1
2	54	11	12	3	1	1	2	-1
3	12	11	1	11	0	1	1	1
4	11	1	0	13	0	1	11	-1

Using this table and formula (11), we can get at a fraction

$$\frac{291}{11} = \frac{3}{2} \times 16 + \frac{1}{2} \times \left(3 \times 2 - \left(1 + \frac{1}{11} \right) \right).$$

This expansion ended at the third step, since at the fourth step $b_4 = 1$ and $a_4 < k_4$. In general, when given a certain sequence K , the expansion into a continued fraction can end much earlier. If in this example at the second step we take the number 54 as the parameter k_i , and define the pair (x_i, y_i) as $(11, 54)$, then expansion into a continued fraction will be finished at the second step. This means that the ratio of the numbers 54/11 will not actually expand into any continued fraction. In this case, the last element in formula (11) will disappear and it will take the following form:

$$\sum_{i=0}^n \frac{y_i k_i^{e_i}}{x_i} \prod_{j=0}^{i-1} \frac{\delta_j}{x_j}.$$

Such cases of “stopping” number expansion into a continued fraction are not considered in the article.

For given integers a, b , a combination of continued fractions of type (8), (11) is observed, when conditions (10) and (12) alternate subject to condition $i \neq j$. Expansion of the number a/b into a

second kind continued fraction is not the only one, since at the next step of the algorithm there may be several pairs of numbers x_i, y_i that satisfy conditions (1) – (3).

The numerator and denominator of a continued fraction of the second kind can be expressed using *continuant*. A continuant of the third type is defined as a determinant

$$\langle g_0, g_1, \dots, g_n \rangle_3 = \det \begin{pmatrix} y_0 k_0^{e_0} & \delta_0 & 0 & 0 & 0 \cdots 0 \\ -x_1 & y_1 k_1^{e_1} & \delta_1 & 0 & 0 \cdots 0 \\ 0 & -x_2 & y_2 k_2^{e_2} & \delta_2 & 0 \cdots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 \cdots 0 & 0 & 0 & -x_n & y_n k_n^{e_n} \end{pmatrix}, \quad (15)$$

where x_i, y_i, k_i, e_i are elements of corresponding continued fraction, and the value of δ_i is determined according to rule (9). In particular, $\langle g_0 \rangle_3 = y_0 k_0^{e_0}$, $\langle g_0, g_1 \rangle_3 = y_0 y_1 k_0^{e_0} k_1^{e_1} + \delta_0 x_1$. Moreover, by definition we assume $\langle \rangle_3 = 1$.

LEMMA 1. *Let $[g_0; g_1, g_2, \dots, g_n]_3$ be the expansion of the number a/b into a third type continued fraction, with $n \geq 3$. Then the following formulas are true:*

1. $\langle g_0, \dots, g_n \rangle_3 = y_n k_n^{e_n} \langle g_0, \dots, g_{n-1} \rangle_3 + \delta_{n-1} x_n \langle g_0, \dots, g_{n-2} \rangle_3$;
2. $\langle g_0, g_1, \dots, g_n \rangle_3 = y_0 k_0^{e_0} \langle g_1, \dots, g_n \rangle_3 + \delta_0 x_1 \langle g_2, \dots, g_n \rangle_3$;
3. $\langle g_0, \dots, g_n \rangle_3 = \langle g_0, \dots, g_j \rangle_3 \langle g_{j+1}, \dots, g_n \rangle_3 + \delta_j x_{j+1} \langle g_0, \dots, g_{j-1} \rangle_3 \langle g_{j+2}, \dots, g_n \rangle_3$, where the number j satisfies the condition $1 \leq j \leq n$.

Moreover, the following equality is true:

$$\frac{a}{b} = \frac{\langle g_0, g_1, g_2, \dots, g_n \rangle_3}{x_0 \langle g_1, g_2, \dots, g_n \rangle_3}.$$

A continuant of the fourth type is defined as a determinant

$$\det \begin{pmatrix} \delta_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & (-1)^{n+1} w_0 & 0 \\ x_1 & \delta_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & (-1)^{n+2} w_1 & 0 \\ 0 & x_2 & \delta_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & (-1)^{n+3} w_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & \delta_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 & (-1)^{n+4} w_3 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \delta_{n-3} & 0 & (-1)^{2n-2} w_{n-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x_{n-2} & \delta_{n-2} & (-1)^{2n-1} w_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x_{n-1} & w_{n-1} & \delta_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -x_n & w_n \end{pmatrix}, \quad (16)$$

where $w_i = y_i k_i^{e_i}$. Again x_i, y_i, k_i, e_i are elements of continued fraction, and the function δ_i is defined according to rule (9). Continuants of the fourth type are denoted as $\langle g_0, \dots, g_n \rangle_4$. In particular, $\langle g_0 \rangle_4 = y_0 k_0^{e_0}$, $\langle g_0, g_1 \rangle_4 = y_0 y_1 k_0^{e_0} k_1^{e_1} + \delta_0 x_1$, $\langle \rangle_4 = 1$.

LEMMA 2. *Let $[g_0; g_1, g_2, \dots, g_n]_4$ be the expansion of the number a/b into a fourth type continued fraction, with $n \geq 3$. Then the following formulas are true:*

$$\langle g_0, \dots, g_n \rangle_4 = \delta_0 \langle g_1, \dots, g_n \rangle_4 + \langle g_0 \rangle_4 \langle g_n \rangle_4 \prod_{i=1}^{n-1} x_i.$$

Moreover, the following equality is true:

$$\frac{a}{b} = \frac{\langle g_0, g_1, g_2, \dots, g_n \rangle_4}{\langle g_n \rangle_4 \prod_{i=0}^{n-1} x_i}.$$

Due to the fact that matrix (16) is not diagonal, a continuant of the fourth type of n -th order can not be represented as a sum of products of continuants of lower orders by performing an arbitrary partition of the original continuant following the example of paragraph 3 of lemma 1.

LEMMA 3. *If at least one of the conditions is performed*

- $\delta_i = 1$ for any $0 \leq i < n$,
 - $\delta_j = -1$ **and** $y_i k_i^{e_i} - x_i > 1$ for any $0 \leq i \leq n, 0 \leq j < n$,
 - $\delta_{n-1} = -1$ **and** $y_n k_n^{e_n} - x_n > 1$, and for other values $\delta_i = 1, 0 \leq i < n-1$,
- (17)

then for an arbitrary n the following inequalities are true:

$$0 < \langle g_0 \rangle_3 < \langle g_0, g_1 \rangle_3 < \dots \langle g_0, g_1, \dots, g_n \rangle_3. \quad (18)$$

If one of three conditions (17) is performed at expansion into the third type continued fraction, then the third type continuants, with the help of which the numerators and denominators are expressed, will strictly increase.

Example 3. Consider an example of an increasing sequence of the third type continuants. The following table shows the calculation results:

Step №	a_i	b_i	$ y_i c_i - x_i a_i $	k_i	e_i	x_i	y_i	δ_i	Condition
0	117520	1371	173	7	2	4	7	-1	true
1	1371	173	13	2	3	1	1	-1	true
2	173	13	5	3	2	2	3	-1	true
3	13	5	0	13	0	5	13	-1	true

The following values of the continuants are obtained: $\langle g_0 \rangle_3 = 7^3 = 343$, $\langle g_0, g_1 \rangle_3 = 7^3 \times 8 - 1 = 2743$, $\langle g_0, g_1, g_2 \rangle_3 = 2743 \times 9 \times 3 - 2 \times 343 = 73375$, $\langle g_0, g_1, g_2, g_3 \rangle_3 = 73375 \times 13 - 5 \times 2743 = 940160$. The last column in the table shows the fulfillment of inequality (3), which corresponds to the “true” value. Hence we get that $\langle g_0 \rangle_3 < \langle g_0, g_1 \rangle_3 < \langle g_0, g_1, g_2 \rangle_3 < \langle g_0, g_1, g_2, g_3 \rangle_3$.

Growth the sequence of continuants of the fourth type is equivalent to fulfillment several inequalities, as indicated by the following

LEMMA 4. *If at least one of conditions (17) is satisfied for zero- and first-order continuants, if $\langle g_0, g_1, g_2 \rangle_4 > \langle g_0, g_1 \rangle_4$, $\delta_{-1} = 1$, and also for all $2 < i \leq n$ the following inequality holds*

$$\delta_0 \delta_1 \cdots \delta_{i-2} (\langle g_{i-1}, g_i, g_{i+1} \rangle_4 - \langle g_{i-1}, g_i \rangle_4) > (\langle g_i \rangle_4 - x_i \langle g_{i+1} \rangle_4) \sum_{j=0}^{i-1} \delta_{j-1} y_j k_j^{e_j} \prod_{z=j+1}^{i-1} x_z, \quad (19)$$

then for an arbitrary n the following inequalities are true:

$$0 < \langle g_0 \rangle_4 < \langle g_0, g_1 \rangle_4 < \dots \langle g_0, g_1, \dots, g_n \rangle_4. \quad (20)$$

Example 4. Consider an example of an increasing sequence of the fourth type continuants. The following table shows the calculation results:

Step №	a_i	b_i	$ y_i c_i - x_i a_i $	k_i	e_i	x_i	y_i	δ_i	Condition
0	518	11	221	3	2	1	3	1	false
1	221	11	112	6	1	2	5	1	false
2	112	11	2	5	1	1	2	1	true
3	11	2	0	11	0	2	11	-1	true

Using this table, we will find the corresponding values of the continuants. So, we get the following values: $\langle g_0 \rangle_4 = 27$, $\langle g_0, g_1 \rangle_4 = 3 \times 9 \times 5 \times 6 + 2 = 812$, $\langle g_0, g_1, g_2 \rangle_4 = (5 \times 6 \times 2 \times 5 + 1) + 3 \times 3^2 \times 2 \times 2 \times 5 = 841$. Now find the value of the fourth-order continuant. So, we get the following values: $\langle g_2, g_3 \rangle_4 = 2 \times 5 \times 11 + 2 = 112$, $\langle g_1, g_2, g_3 \rangle_4 = 112 + 5 \times 6 \times 11 = 442$, $\langle g_0, g_1, g_2, g_3 \rangle_4 = 442 + 3 \times 3^2 \times 2 \times 11 = 1036$. We get that $\langle g_0 \rangle_4 < \langle g_0, g_1 \rangle_4 < \langle g_0, g_1, g_2 \rangle_4 < \langle g_0, g_1, g_2, g_3 \rangle_4$.

In example 4 condition (3) is not always taken into account. This means that a pair of numbers (x_i, y_i) may be not the best approximation to the fraction $b_i k_i^{e_i} / a_i$ in the general case. The last column “Condition” indicates that this condition is fulfilled (true) or not fulfilled (false). The question of the existence of an increasing sequence of continuants of arbitrary length ($n \geq 3$) remains open, provided that formula (3) is fulfilled.

Definition 1. *The rational numbers*

$$\frac{p_{i,(0,0)}}{q_{i,(0,0)}} = [g_0]_i, \frac{p_{i,(0,1)}}{q_{i,(0,1)}} = [g_0; g_1]_i, \frac{p_{i,(0,2)}}{q_{i,(0,2)}} = [g_0; g_1, g_2]_i, \dots, \frac{p_{i,(0,n)}}{q_{i,(0,n)}} = [g_0; g_1, \dots, g_n]_i$$

are called the convergents of i -th type of the number p/q , expressed using the fraction $[g_0; g_1, \dots, g_n]_i$.

The first numeral in the index of convergent of the number $p_{i,(0,j)} / q_{i,(0,j)}$ indicates the appropriate type of continued fraction. For example, when $i = 3$, we use third type continued fraction. If some part of the continued fraction is considered, for example, $[g_l; g_{l+1}, \dots, g_n]_i$, then the corresponding convergents also begin from the l -th element: $p_{i,(l,l)} / q_{i,(l,l)}$, $p_{i,(l,l+1)} / q_{i,(l,l+1)}$, $p_{i,(l,l+2)} / q_{i,(l,l+2)}$ etc.

The following lemma allows us to calculate convergents of the third type without resorting to calculating the values of the continuants. You just need to perform the product of matrices.

LEMMA 5. *Let the number $n > 1$ and the product of matrices $A = \prod_{i=0}^n A_i$ are set, where*

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \delta_0 & y_i k_i^{e_i} \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} P & P' \\ Q & Q' \end{pmatrix}, \quad (21)$$

then

$$P = \frac{\delta_n \langle g_1, \dots, g_{n-1} \rangle_3}{\prod_{i=1}^n x_i}, P' = \frac{\langle g_1, \dots, g_n \rangle_3}{\prod_{i=1}^n x_i},$$

$$Q = \frac{\delta_n \langle g_0, \dots, g_{n-1} \rangle_3}{\prod_{i=0}^n x_i}, Q' = \frac{\langle g_0, \dots, g_n \rangle_3}{\prod_{i=0}^n x_i}, \det(A) = \prod_{i=0}^n \frac{\delta_i}{x_i}.$$

Corollary 1.

$$\frac{Q}{P} = \frac{p_{3,(0,n-1)}}{q_{3,(0,n-1)}}, \frac{Q'}{P'} = \frac{p_{3,(0,n)}}{q_{3,(0,n)}}.$$

The proof of corollary 1 follows automatically from lemmas 1, 5.

Consider convergents of rational numbers, which had been obtained using (regular) continued fractions. Let's number them in order, adding the corresponding index to them. All convergents with even indices form a strictly increasing sequence, and all convergents with odd indices form a strictly decreasing sequence (refer to [16]). But despite this, in the general case nothing similar can be done for convergents $p_{i,(0,0)} / q_{i,(0,0)}, p_{i,(0,1)} / q_{i,(0,1)}, \dots$. Look at example 1 again. We calculate all convergents of the number $1117/505$. Then we get

$$\frac{p_{3,(0,0)}}{q_{3,(0,0)}} = 2, \frac{p_{3,(0,1)}}{q_{3,(0,1)}} = \frac{10+1}{5} = \frac{11}{5}, \frac{p_{3,(0,2)}}{q_{3,(0,2)}} = \frac{3 \cdot 11 - 2}{5 \cdot 3 - 1} = \frac{31}{14}, \frac{p_{3,(0,3)}}{q_{3,(0,3)}} = \frac{5 \cdot 31 + 3 \cdot 11}{5 \cdot 14 + 3 \cdot 5} = \frac{188}{85},$$

$$\frac{p_{3,(0,4)}}{q_{3,(0,4)}} = \frac{3 \cdot 188 + 31}{85 \cdot 3 + 14} = \frac{595}{269}, \frac{p_{3,(0,5)}}{q_{3,(0,5)}} = \frac{5 \cdot 595 + 2 \cdot 188}{5 \cdot 269 + 2 \cdot 85} = \frac{1117}{505}.$$

Let's compare all convergents with each other:

$$\frac{p_{3,(0,0)}}{q_{3,(0,0)}} < \frac{p_{3,(0,1)}}{q_{3,(0,1)}} < \frac{p_{3,(0,3)}}{q_{3,(0,3)}} < \frac{p_{3,(0,5)}}{q_{3,(0,5)}} < \frac{p_{3,(0,4)}}{q_{3,(0,4)}} < \frac{p_{3,(0,2)}}{q_{3,(0,2)}}.$$

It is possible to identify conditions, under which successive convergents will be strictly greater or lesser than each other. Comparison of convergents of the third type n and $n+1$ order $p_{3,(0,n)}/q_{3,(0,n)}$, $p_{3,(0,n+1)}/q_{3,(0,n+1)}$ is equivalent to comparing magnitudes $\delta_0 q_{3,(1,n)}/p_{3,(1,n)}$, $\delta_0 q_{3,(1,n+1)}/p_{3,(1,n+1)}$. Their calculation can be simplified. To do this, you need to perform a certain number of expansions of the continuants in numerators and denominators, grouping the common parts together. This idea underlies the following results. Moreover, in some cases it is not even necessary to completely calculate the value of continuant.

THEOREM 4. *If the following inequality is true*

$$\frac{\langle g_{n-1}, g_n \rangle_3}{x_{n-1} \langle g_n \rangle_3} > \frac{\langle g_{n-1}, g_n, g_{n+1} \rangle_3}{x_{n-1} \langle g_n, g_{n+1} \rangle_3}, \quad (22)$$

$\delta_j = 1$ for all $0 \leq j < n$ and the number n is odd, then

$$\frac{p_{3,(0,n)}}{q_{3,(0,n)}} > \frac{p_{3,(0,n+1)}}{q_{3,(0,n+1)}}. \quad (23)$$

If condition (22) is performed, $\delta_j = 1$ for all $0 \leq j < n$ and the number n is even, then

$$\frac{p_{3,(0,n)}}{q_{3,(0,n)}} < \frac{p_{3,(0,n+1)}}{q_{3,(0,n+1)}}.$$

THEOREM 5. *If inequality (22) is true, $\delta_j = -1$ for all $0 \leq j < n$, then inequality (23) is true.*

THEOREM 6. *If for all positive integers t the equalities $\delta_{2t} = 1$, $\delta_{2t+1} = -1$ are satisfied, condition (22) is true, and for a natural number n and a positive integer i , $0 \leq i \leq n-1$, condition*

- $n-1 \equiv 0 \pmod{4}$ or $n-1 \equiv 2 \pmod{4}$ is true, then for $i \equiv 0 \pmod{4}$ and $i \equiv 1 \pmod{4}$ inequality

$$\frac{p_{3,(n-1-i,n)}}{q_{3,(n-1-i,n)}} > \frac{p_{3,(n-1-i,n+1)}}{q_{3,(n-1-i,n+1)}} \quad (24)$$

is true, and for $i \equiv 2 \pmod{4}$ and $i \equiv 3 \pmod{4}$ inequality (24) is satisfied with a minus sign “ $<$ ”.

- $n-1 \equiv 1 \pmod{4}$ or $n-1 \equiv 3 \pmod{4}$ is true, then for $i \equiv 0 \pmod{4}$ and $i \equiv 2 \pmod{4}$ inequality (24) is true, and for $i \equiv 1 \pmod{4}$ and $i \equiv 3 \pmod{4}$ inequality (24) is satisfied with a minus sign “ $<$ ”.

Theorem 6 can also be used to compare two convergents. To do this, you only need to know the remainder of dividing the number $n - 1$ by 4 and use one of the conditions.

If in condition (22) sign will change to the opposite, then signs of comparisons in inequalities of theorems 4, 6, 5 will also change.

It is quite difficult to obtain results similar to theorems 4, 6, 5 for convergents of the fourth type. Nevertheless, this task can be reduced to comparing the following magnitudes.

PROPOSITION 1. *The task of comparing convergents of the fourth type*

$$\frac{p_{4,(0,n)}}{q_{4,(0,n)}} \text{ and } \frac{p_{4,(0,n+1)}}{q_{4,(0,n+1)}}$$

is equivalent to comparing magnitudes

$$\frac{\delta_0 \langle g_1, \dots, g_n \rangle_4}{\langle g_n \rangle_4} \text{ and } \frac{\delta_0 \langle g_1, \dots, g_n \rangle_4}{x_n \langle g_{n+1} \rangle_4}.$$

4. Estimation of the number of steps in the Sorenson algorithm

PROOF OF THEOREM 1.

Proof of this theorem, as in the Sorenson theorem (refer to [3], lemma 3.2) is based on the method of mathematical induction. Let s, m are positive integers, $s \geq m$, and the numbers a, b are defined as

$$a = \sum_{i=0}^s t_i k^i, \quad b = \sum_{j=0}^m q_j k^j, \quad (25)$$

where $t_i, q_i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$. Hence the inequality $0 < b \leq a < k^{s+1}$ is true. Let's prove that $\gcd(a, b)$ is calculated at $\lfloor \log(a)/\log(k) \rfloor + \lfloor \log(b)/\log(k) \rfloor + 1$ step.

Let the numbers a, b take any values on the interval $[1, k-1]$, then m, s are equal to zero. The value of e is equal to zero, and as a pair of numbers (x, y) , satisfying inequality (3), we can take (b, a) . If they are not coprime (refer to formula (2)), then divide both numbers x, y by their $\gcd$. Thus, it will take 1 step to calculate $\gcd(a, b)$.

Let the inequalities $0 < m \leq M, 0 < s \leq M$ are true. Suppose that for all pairs of numbers (a, b) defined using formula (25), the induction assumption is true. Then the number of steps is $2m + 1$ in the worst case. We prove the induction hypothesis for pairs of numbers (a', b') defined using the magnitudes $m = M + 1, s = S, m < s$:

$$a' = \sum_{i=0}^S t'_i k^i, \quad b' = \sum_{j=0}^{M+1} q'_j k^j, \quad 1 \leq t'_i, q'_j \leq k, \quad a' \geq b'. \quad (26)$$

After the value e' has been calculated and the numbers (x', y') has been choosen that satisfy inequality (3), we obtain

$$a'' = |b' k^{e'} y' - a' x'| < \frac{a'}{k+1} < \left\lfloor \frac{a'}{k} \right\rfloor = \sum_{i=0}^S t'_{i+1} k^i, \quad a'' > b'. \quad (27)$$

Further, for the input numbers (a'', b') , we calculate e' , select the numbers (x', y') and find a linear combination, as in formula (27), where instead of a' under formula module (27) there will be a'' . This procedure continues for no more than $S - M - 1$ step, including the one described. After that the number a'' can be represented as the sum of the powers of k , and each of them will be multiplied by a number from 0 to k , as in formula (26), but the summation will be carried out up

to $M + 1$. If $a'' < b'$, then swap their values. After that we again calculate e' , select the numbers (x', y') and find a linear combination of the numbers a'', b' , as in formula (27):

$$a'' = |b'k^{e'}y' - a''x'|. \quad (28)$$

The new value of a'' is $\sum_{i=0}^M t''_i k^i$, and the inequality $0 \leq t''_i < k$ is true. If at this step $a'' < b'$, then swap their values again and run another step of the procedure described above.

As a result, we obtain that the numbers a'', b' are expressed as the sums $\sum_{i=0}^M \bar{t}_i k^i$, $\sum_{j=0}^M t''_j k^j$, moreover the inequality $0 \leq \bar{t}_i, t''_j k$ is true. And for such numbers, according to the assumption of induction, the number of steps does not exceed $2m + 1$.

We have done no more than $S - M - 1$ linear combinations after that we could perform a total of 2 exchanges and linear combinations. As a result, the total number of steps does not exceed $S - M - 1 + 2 + 2M + 1 = S + (M + 1) + 1$. The proof is done. $\square$

Here is an example of how the algorithm works in the worst case. Let the following numbers be given: $a = 1000351$, $b = 38530$, $k = 25$. The following table shows the calculation results. Columns named “poly(a)”, “poly(b)”, means representation of the numbers a, b as sum of the powers of k . The fourth column, named r , contains all the values $|ybk^e - ax|$. Note that the last step, where one of the numbers is zero, is not included in the total number of steps, since no calculations occur there. In the end there were 8 steps.

a	b	r	$poly(a)$	$poly(b)$	e	x	y
1000351	38530	37101	$2k^4 + 13k^3 + 25k^2 + 14k + 1$	$2k^3 + 11k^2 + 16k + 5$	1	1	1
38530	37101	1429	$2k^3 + 11k^2 + 16k + 5$	$2k^3 + 9k^2 + 9k + 1$	0	1	1
37101	1429	1376	$2k^3 + 9k^2 + 9k + 1$	$2k^2 + 7k + 4$	1	1	1
1429	1376	53	$2k^2 + 7k + 4$	$2k^2 + 5x + 1$	0	1	1
1376	53	51	$2k^2 + 5x + 1$	$2k + 3$	1	1	1
53	51	2	$2k + 3$	$2k + 1$	0	1	1
51	2	1	$2k + 1$	2	1	1	1
2	1	0	2	1	0	1	2

In example, at each step of algorithm, ratio between the numbers a, bk^e is approximately equal to one. The numbers x, y are equal to one (except for the last step of algorithm). All this leads to the fact that at each step ratio of largest of the numbers and result of the linear combination is approximately equal to k , which is consistent with inequality (3): $|byk^e - xa| \leq a/(k + 1)$.

5. Proofs

All proofs in this article is presented in full without abbreviations.

PROOF OF THEOREM 2. Let a_0 and b_0 are the input numbers of the generalized Sorenson left-shift gcd algorithm, and the magnitude s_i is equal to $|y_i c_i - x_i a_i|$. Using rules (4), (5) and determining magnitude (9), you can get the formula $\delta_0 s_0 + y_0 c_0 = x_0 a_0$. Division both parts by $x_0 b_0$ leads to the expression

$$\frac{a_0}{b_0} = \frac{y_0 k_0^{e_0}}{x_0} + \frac{\delta_0}{x_0 \left(\frac{b_0}{s_0} \right)}. \quad (29)$$

At the first step of the algorithm, we move on to a pair of numbers $(a_1, b_1) = (b_0, s_0)$, moreover $b_0 > s_0$. In view of this, at expansion of the numbers a_1, b_1 into a continued fraction of the third type, expression (29) is represented as

$$\frac{a_0}{b_0} = \frac{y_0 k_0^{e_0}}{x_0} + \frac{\delta_0}{\frac{y_1 x_0 k_1^{e_1}}{x_1} + \frac{\delta_1}{\left(\frac{x_1}{x_0} \times \left(\frac{b_1}{s_1}\right)\right)}}. \quad (30)$$

Further, the process of expansion into a continued fraction of the third type continues similarly to the previous steps. We will assume that formula (8) is correct at the t steps of algorithm. Using the principle of mathematical induction, we prove that it is also true at the $(t+1)$ -th step, where the value of $t+1$ does not exceed n . Consider expansion of the number a_t/b_t taking into account all the multipliers x_i obtained in the previous steps of the algorithm:

$$\frac{y_t k_t^{e_t} \prod_{\substack{i < t, \\ i \not\equiv t \pmod{2}}} x_i}{x_t \prod_{\substack{j < t, \\ j \equiv t \pmod{2}}} x_j} + \frac{\delta_n}{\left(\frac{b_t x_t \prod_{\substack{j < t, \\ j \equiv t \pmod{2}}} x_j}{s_t \prod_{\substack{i < t, \\ i \not\equiv t \pmod{2}}} x_i} \right)} \quad (31)$$

Now let's perform expansion of the number $a_{t+1}/b_{t+1} = b_t/s_t$. The denominator of the right term can be written as

$$\frac{y_{t+1} k_{t+1}^{e_{t+1}} \prod_{\substack{j < t+1, \\ j \not\equiv t+1 \pmod{2}}} x_j}{x_{t+1} \prod_{\substack{i < t, \\ i \equiv t+1 \pmod{2}}} x_i} + \frac{\delta_t}{\left(\frac{b_{t+1} x_{t+1} \prod_{\substack{i < t, \\ i \equiv t+1 \pmod{2}}} x_i}{s_{t+1} \prod_{\substack{j < t+1, \\ j \not\equiv t+1 \pmod{2}}} x_j} \right)}. \quad (32)$$

Thus, we obtained the necessary product of the elements x_i in numerators and denominators of formula (32). The proof is done. $\square$

PROOF OF THEOREM 3. The zero step of the algorithm completely coincides with its description in the proof of theorem (2). As a result of this step, we can obtain the expression

$$\frac{a_0}{b_0} = \frac{y_0 k_0^{e_0}}{x_0} + \frac{\delta_0 s_0}{x_0 b_0}. \quad (33)$$

At the first step of the algorithm, we get a pair of numbers $(a_1, b_1) = (s_0, b_0)$, moreover $s_0 \geq b_0$. In view of this, at expansion the numbers a_1, b_1 into a continued fraction of the fourth type, expression (33) is represented in the form

$$\frac{a_0}{b_0} = \frac{y_0 k_0^{e_0}}{x_0} + \frac{\delta_0}{x_0} \left(\frac{y_1 k_1^{e_1}}{x_1} + \frac{\delta_1 s_1}{x_1 b_1} \right). \quad (34)$$

Then the process of expansion into a fourth type continued fraction continues in the same way as at the previous steps. Let's assume that formula (11) is correct at t steps of the algorithm. Using the principle of mathematical induction, we prove that it's also true at the $(t+1)$ -th step, where the value of $t+1$ does not exceed n . Consider expansion of the number a_t/b_t taking into account all the multipliers x_i that had been obtained in the previous steps of the algorithm:

$$\sum_{i=0}^{t-1} \frac{y_i k_i^{e_i}}{x_i} \prod_{j=0}^{i-1} \frac{\delta_j}{x_j} + \frac{s_t}{b_t} \prod_{i=0}^t \frac{\delta_i}{x_i} \quad (35)$$

Now let's perform expansion of number $a_{t+1}/b_{t+1} = b_t/s_t$. Fraction (35) can be written as

$$\sum_{i=0}^{t-1} \frac{y_i k_i^{e_i}}{x_i} \prod_{j=0}^{i-1} \frac{\delta_j}{x_j} + \prod_{i=0}^{t-1} \frac{\delta_i}{x_i} \left(\frac{y_t k_t^{e_t}}{x_t} + \frac{\delta_t s_t}{x_t b_t} \right). \quad (36)$$

If $t + 1$ is the last step of the algorithm, then this means that conditions (10) are performed instead of conditions (12). Then, the number b_t/s_t will be represented as $y_{t+1}k_{t+1}^{e_{t+1}}/x_{t+1}$ and substituted into formula (36). This proves formula (11). $\square$

T. Muir introduced continuant (refer to [17]), as a determinant of the tridiagonal matrix $E_{1,n}$:

$$\det(E_{1,n}) = \det \begin{pmatrix} h_1 & l_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ m_1 & h_2 & l_2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_2 & h_3 & l_3 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & m_{n-2} & h_{n-1} & l_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & m_{n-1} & h_n \end{pmatrix}. \quad (37)$$

He obtained a formula for the expansion of a continuant of arbitrary order (refer to [17, p. 518]). We write this formula in terms of the expansion of determinant of the matrix $E_{1,n}$ of n -th order:

$$\det(E_{1,n}) = \det(E_{1,r}) \det(E_{r+1,n}) - l_{r-1} m_{r-1} \det(E_{1,r-1}) \det(E_{r+2,n}). \quad (38)$$

The matrix $E_{i,j}$ is defined in the same way as the matrix $E_{1,n}$:

$$\det(E_{i,j}) = \det \begin{pmatrix} h_i & l_i & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ m_i & h_{i+1} & l_{i+1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_{i+1} & h_{i+2} & l_{i+2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & m_{j-2} & h_{j-1} & l_{j-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & m_{j-1} & h_j \end{pmatrix}.$$

PROOF OF LEMMA 1. It is easy to see that the formulas of points 1-3 are obtained by simply substituting the corresponding values of the matrix elements from formula (15) to formula (38).

Since third type continued fractions are connected to the generalized Sorenson left-shift algorithm, then to prove the last point of the lemma we use integer sequences $\{a_i\}_{i=0}^n$, $\{b_i\}_{i=0}^n$ defined using the algorithm and principle of mathematical induction. At the penultimate step of the algorithm, we can obtain formula (29), in which all indices are equal to $n - 1$. Expanding the number b_{n-1}/s_{n-1} into a continued fraction we obtain the expression

$$\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} = \frac{y_{n-1} k_{n-1}^{e_{n-1}}}{x_{n-1}} + \frac{\delta_{n-1}}{\frac{y_n x_{n-1} k_n^{e_n}}{x_n}} = \frac{\langle g_{n-1}, g_n \rangle_3}{x_{n-1} \langle g_n \rangle_3}. \quad (39)$$

Consider the ratio of the magnitudes a_t , b_t at the $(t + 1)$ -th step of algorithm. Let condition $0 < t < n$ is satisfied and the formula

$$\frac{a_t}{b_t} = \frac{\langle g_t, \dots, g_n \rangle_3}{x_t \langle g_{t+1}, \dots, g_n \rangle_3}$$

is true. Consider the ratio of the magnitudes a_{t-1} , b_{t-1} at the t -th step of algorithm:

$$\frac{a_{t-1}}{b_{t-1}} = \frac{y_{t-1}k_{t-1}^{e_{t-1}}}{x_{t-1}} + \frac{\delta_{t-1}}{\left(\frac{x_{t-1}a_t}{b_t}\right)} = \frac{y_{t-1}k_{t-1}^{e_{t-1}}}{x_{t-1}} + \frac{\delta_{t-1}x_t\langle g_{t+1}, \dots, g_n \rangle_3}{x_{t-1}\langle g_t, \dots, g_n \rangle_3}. \quad (40)$$

After several mathematical operations, we obtain the same denominator for both fractions in formula (40) and obtain expression

$$\frac{a_{t-1}}{b_{t-1}} = \frac{\langle g_{t-1}, \dots, g_n \rangle_3}{x_{t-1}\langle g_t, \dots, g_n \rangle_3}.$$

The lemma is proved. $\square$

PROOF OF LEMMA 2. It is easy to see that the formula of continuant expansion is obtained from the formula of matrix determinant expansion (16) by the first row.

As in the proof of lemma (1), here we again use integer sequences $\{a_i\}_{i=0}^n$, $\{b_i\}_{i=0}^n$, which are determined using algorithm, and also the principle of mathematical induction. At the penultimate step of the algorithm, expanding the number b_{n-1}/s_{n-1} into a fraction, we obtain formula (39). It's equals to $\langle g_{n-1}, g_n \rangle_4 / (x_{n-1}\langle g_n \rangle_4)$.

Consider the ratio of the magnitudes a_t , b_t at the $(t+1)$ -th step of algorithm. Let condition $0 < t < n$ is satisfied and the formula

$$\frac{a_t}{b_t} = \frac{\langle g_t, g_{t+1}, g_{t+2}, \dots, g_n \rangle_4}{\langle g_n \rangle_4 \prod_{i=t}^{n-1} x_i}$$

is true. Consider the ratio of the magnitudes a_{t-1} , b_{t-1} at the t -th step of algorithm:

$$\begin{aligned} \frac{a_{t-1}}{b_{t-1}} &= \frac{y_{t-1}k_{t-1}^{e_{t-1}}}{x_{t-1}} + \frac{\delta_{t-1}a_t}{x_{t-1}b_t} = \frac{y_{t-1}k_{t-1}^{e_{t-1}}}{x_{t-1}} + \frac{\delta_{t-1}\langle g_t, g_{t+1}, g_{t+2}, \dots, g_n \rangle_4}{x_{t-1}\langle g_n \rangle_4 \prod_{i=t}^{n-1} x_i} = \\ &= \frac{\langle g_{t-1} \rangle_4 \langle g_n \rangle_4 \prod_{i=t}^{n-1} x_i + \delta_{t-1}\langle g_t, g_{t+1}, g_{t+2}, \dots, g_n \rangle_4}{x_{t-1}\langle g_n \rangle_4 \prod_{i=t}^{n-1} x_i} = \frac{\langle g_{t-1}, \dots, g_n \rangle_4}{\langle g_n \rangle_4 \prod_{i=t-1}^{n-1} x_i} \end{aligned}$$

The lemma is proved. $\square$

PROOF OF LEMMA 3. The numbers x_i , y_i are positive (refer to introduction), and $x_i \leq y_i$ (refer to inequality (3)). It follows that for $\delta_i = 1$ and for all $i < n$ continuants of the third and fourth types are strictly positive and form a strictly increasing sequence. If $\delta_i = -1$, then the situation is already ambiguous, and each case needs to be analyzed separately. At the beginning, instead of a certain comparison sign, we will put a question mark, which will be replaced by a comparison sign as the proof progresses.

To prove inequalities (18), we use the method of mathematical induction. Obviously, $\langle g_0 \rangle_3 > 0$. Now let's compare the zeroth and first order continuants:

$$y_0 y_1 k_0^{e_0} k_1^{e_1} - x_1 ? y_0 k_0^{e_0}$$

Division by $y_0 k_0^{e_0}$ will allow us to compare $y_1 k_1^{e_1} - x_1 / (y_0 k_0^{e_0}) ? 1$. If the second condition from system (17) is satisfied, then instead of the sign “?” you can put a “>” sign. Further, assume that for all continuants up to the n -th order, formula (18) is true (here it is possible to fulfill the conditions $\delta_j = 1$, $0 \leq j < n$ or $y_i k_i^{e_i} - x_i > 1$ for all $0 \leq i \leq n$).

Division by $y_0 k_0^{e_0}$ will allow us to compare $y_1 k_1^{e_1} - x_1 / (y_0 k_0^{e_0}) ? 1$. If the second condition from system (17) is satisfied, then instead of the sign “?” you can put a “>” sign. Further, assume that for all continuants up to the n th order, formula (18) is true (here it is possible to fulfill the conditions $\delta_j = 1$, $0 \leq j < n$ or $y_i k_i^{e_i} - x_i > 1$ for all $0 \leq i \leq n$). We will prove this formula for

continuants of $(n+1)$ -th order by comparing a continuant of $(n+1)$ -th order with a continuant of n -th order, simultaneously performing an expansion of the first of them (the magnitude δ_n is equal to -1 according to the initial guess):

$$y_{n+1}k_{n+1}^{e_{n+1}}\langle g_0, \dots, g_n \rangle_3 - x_{n+1}\langle g_0, \dots, g_{n-1} \rangle_3 \text{ ? } \langle g_0, \dots, g_n \rangle_3.$$

Since the induction assumption is valid for all previous continuants, then division both sides by $\langle g_0, \dots, g_n \rangle_3 > 0$, we obtain the expression

$$y_{n+1}k_{n+1}^{e_{n+1}} - x_{n+1} \frac{\langle g_0, \dots, g_{n-1} \rangle_3}{\langle g_0, \dots, g_n \rangle_3} \text{ ? } 1.$$

Condition 2 from formula (17) is satisfied. This allows you to replace the “?” sign to the “>” sign. $\square$

PROOF OF LEMMA 4. Consider the continuants of $i+1$ and i order, compare them with each other and simultaneously perform an expansion of each of them. As in previous proofs, we will put a question mark at the beginning when comparing two magnitudes. So,

$$\begin{aligned} & \langle g_0, \dots, g_{i+1} \rangle_4 \text{ ? } \langle g_0, \dots, g_i \rangle_4 \\ & \delta_0 \langle g_1, \dots, g_{i+1} \rangle_4 + \langle g_0 \rangle_4 \langle g_{i+1} \rangle_4 \prod_{j=1}^i x_j \text{ ? } \delta_0 \langle g_1, \dots, g_i \rangle_4 + \langle g_0 \rangle_4 \langle g_i \rangle_4 \prod_{z=1}^{i-1} x_z \end{aligned}$$

Perform another expansion of the continuants, grouping them with each other. We get expression

$$\delta_0 \delta_1 (\langle g_2, \dots, g_{i+1} \rangle_4 - \langle g_2, \dots, g_i \rangle_4) \text{ ? } \langle g_0 \rangle_4 \prod_{z=1}^{i-1} x_z (\langle g_i \rangle_4 - x_i \langle g_{i+1} \rangle_4) + \delta_0 \langle g_1 \rangle_4 \prod_{z=2}^{i-1} x_z (\langle g_i \rangle_4 - x_i \langle g_{i+1} \rangle_4)$$

Performing further expansion of continuants, taking into account condition $\delta_{-1} = 1$, allows us to obtain expression

$$\delta_0 \delta_1 \dots \delta_{i-2} (\langle g_{i-1}, g_i, g_{i+1} \rangle_4 - \langle g_{i-1}, g_i \rangle_4) \text{ ? } \sum_{j=0}^{i-1} \delta_{j-1} \langle g_j \rangle_4 \prod_{z=j+1}^{i-1} x_z (\langle g_i \rangle_4 - x_i \langle g_{i+1} \rangle_4). \quad (41)$$

If instead of the sign “?” we put “>”, then the original continuant of the $(i+1)$ -th order will be greater than continuant of the i -th order. Execution of formula (41) for all $2 < i \leq n$, together with the other conditions, which is specified in condition of the lemma, allows us to construct a strictly increasing sequence of continuants. $\square$

PROOF OF LEMMA 5. At the beginning, we will prove formulas for the magnitudes P , Q , P' , Q' . Product of the matrices A_0 , A_1 is equal to

$$\begin{pmatrix} \frac{\delta_1}{x_1} & \frac{y_1 k_1^{e_1}}{x_1} \\ \frac{y_0 k_0^{e_0} \delta_1}{x_0 x_1} & \frac{y_0 y_1 k_0^{e_0} k_1^{e_1} + \delta_0 x_1}{x_0 x_1} \end{pmatrix} \quad (42)$$

It is easy to verify veracity of the statement for resulting matrix. Now let's assume that for the first n matrices, statement of the theorem is true. We prove this for $n+1$ products of matrices. We get expressions

$$P = \frac{\delta_{n+1} \langle g_1, \dots, g_n \rangle_3}{\prod_{i=1}^{n+1} x_i}, \quad P' = \left(\frac{\delta_n \langle g_1, \dots, g_{n-1} \rangle_3}{\prod_{i=1}^n x_i} + \frac{y_{n+1} k_{n+1}^{e_{n+1}} \langle g_1, \dots, g_n \rangle_3}{x_{n+1} \prod_{i=1}^n x_i} \right),$$

$$Q = \frac{\delta_{n+1} \langle g_0, \dots, g_n \rangle_3}{\prod_{i=0}^{n+1} x_i}, \quad Q' = \left(\frac{\delta_n \langle g_0, \dots, g_{n-1} \rangle_3}{\prod_{i=0}^n x_i} + \frac{y_{n+1} k_{n+1}^{e_{n+1}} \langle g_0, \dots, g_n \rangle_3}{x_{n+1} \prod_{i=0}^n x_i} \right). \quad (43)$$

Usage of lemma 1 makes it easy to prove formulas for the magnitudes P' , Q' .

Now we can prove the formula for the determinant of the matrix. In the case of matrix (42) determinant is equal to δ_0/x_0 . Let the formula for the determinant obtained by multiplying n matrices be fulfilled. Let's find the determinant of matrix (43). It equals to

$$\frac{\delta_{n+1} (\langle g_1, \dots, g_n \rangle_3 \langle g_0, \dots, g_{n+1} \rangle_3 - \langle g_0, \dots, g_n \rangle_3 \langle g_1, \dots, g_{n+1} \rangle_3)}{\left(\prod_{i=1}^{n+1} x_i \right) \left(\prod_{j=0}^{n+1} x_j \right)}$$

Performing the expansion of $(n+1)$ -th order continuants, we obtain the expressions

$$\frac{\delta_{n+1} \delta_n (\langle g_1, \dots, g_n \rangle_3 \langle g_0, \dots, g_{n-1} \rangle_3 - \langle g_0, \dots, g_n \rangle_3 \langle g_1, \dots, g_{n-1} \rangle_3)}{\left(\prod_{i=1}^{n+1} x_i \right) \left(\prod_{j=0}^n x_j \right)}.$$

Further, we decompose the n th order continuants and obtain the expressions

$$\frac{\delta_{n+1} \delta_n \delta_{n-1} (\langle g_1, \dots, g_{n-2} \rangle_3 \langle g_0, \dots, g_{n-1} \rangle_3 - \langle g_0, \dots, g_{n-2} \rangle_3 \langle g_1, \dots, g_{n-1} \rangle_3)}{\left(\prod_{i=1}^{n+1} x_i \right) \left(\prod_{j=0}^{n-1} x_j \right)}.$$

Continuing this procedure, we obtain the final formula for the determinant of matrix (43). $\square$

PROOF OF THEOREM 4. Instead of some comparison sign, for now we will put the sign “?”. We will define the comparison sign at the end of the proof. Let us decompose numerators and denominators of convergents. We get inequality

$$\frac{y_0 k_0^{e_0}}{x_0} + \frac{\delta_0 x_1 \langle g_2, \dots, g_n \rangle_3}{x_0 \langle g_1, \dots, g_n \rangle_3} ? \frac{y_0 k_0^{e_0}}{x_0} + \frac{\delta_0 x_1 \langle g_2, \dots, g_{n+1} \rangle_3}{x_0 \langle g_1, \dots, g_{n+1} \rangle_3}.$$

Subtract $y_0 k_0^{e_0}/x_0$ from each part, multiply by x_0 , invert the ratio of continuants and obtain the inequality

$$\frac{\delta_0}{\left(\frac{\langle g_1, \dots, g_n \rangle_3}{x_1 \langle g_2, \dots, g_n \rangle_3} \right)} ? \frac{\delta_0}{\left(\frac{\langle g_1, \dots, g_{n+1} \rangle_3}{x_1 \langle g_2, \dots, g_{n+1} \rangle_3} \right)}.$$

Further we will perform $n-2$ decompositions of continuants and $n-2$ upheavals. We will get continued fractions

$$\frac{\delta_0}{\left(\frac{y_1 k_1^{e_1}}{x_1} + \frac{\delta_1}{\left(\frac{x_1 y_2 k_2^{e_2}}{x_2} + \frac{\delta_2}{\left(\dots + \frac{\delta_{n-2}}{\left(\frac{\langle g_{n-1}, g_n \rangle_3 \prod_{\substack{0 \leq i < n-1, \\ i \not\equiv n-1 \pmod{2}}} x_i \right)}{\left(\frac{x_{n-1} \langle g_n \rangle_3 \prod_{\substack{0 \leq j < n-1, \\ j \equiv n-1 \pmod{2}}} x_j \right)} \right)} \right)} \right)} \right)} \quad (44)$$

and

$$\delta_0 \left(\frac{y_1 k_1^{e_1}}{x_1} + \frac{\delta_1}{x_2 \left(\frac{x_1 y_2 k_2^{e_2}}{x_2} + \frac{\delta_2}{\left(\cdots + \frac{\delta_{n-2}}{x_{n-1} \frac{\langle g_{n-1}, g_n, g_{n+1} \rangle_3 \prod_{\substack{0 \leq i < n-1, \\ i \not\equiv n-1 \pmod{2}}} x_i}{\langle g_n, g_{n+1} \rangle_3 \prod_{\substack{0 \leq j < n-1, \\ j \equiv n-1 \pmod{2}}} x_j} \right)} \right)} \right) \quad (45)$$

In the resulting formulas, only the terms differ

$$\frac{\langle g_{n-1}, g_n \rangle_3 \prod_{\substack{0 \leq i < n-1, \\ i \not\equiv n-1 \pmod{2}}} x_i}{x_{n-1} \langle g_n \rangle_3 \prod_{\substack{0 \leq j < n-1, \\ j \equiv n-1 \pmod{2}}} x_j} \quad \text{and} \quad \frac{\langle g_{n-1}, g_n, g_{n+1} \rangle_3 \prod_{\substack{0 \leq i < n-1, \\ i \not\equiv n-1 \pmod{2}}} x_i}{x_{n-1} \langle g_n, g_{n+1} \rangle_3 \prod_{\substack{0 \leq j < n-1, \\ j \equiv n-1 \pmod{2}}} x_j}. \quad (46)$$

Taking into account condition (22), and the sequence $\{\delta_i\}$ fixed by condition, and necessity to flip over the ratio of continuants, we can conclude that

$$\frac{p_{3,(n-2,n)}}{q_{3,(n-2,n)}} < \frac{p_{3,(n-2,n+1)}}{q_{3,(n-2,n+1)}}.$$

Further comparing the convergents $p_{3,(n-3,n)}/q_{3,(n-3,n)}$ and $p_{3,(n-3,n+1)}/q_{3,(n-3,n+1)}$, we get that they will change the sign of comparison:

$$\frac{p_{3,(n-3,n)}}{q_{3,(n-3,n)}} > \frac{p_{3,(n-3,n+1)}}{q_{3,(n-3,n+1)}}.$$

After a few steps, in a similar way the ratio of continuants will be considered, in which the first element will be g_1 . We perform their comparison, after which we change its sign to the opposite one due to the necessity reverse the ratio of continuants. This ratio is multiplied by δ_0 (refer to formulas (44), (45)). Therefore, the comparison sign will depend only on the parity or oddness of n under conditions specified above. $\square$

PROOF OF THEOREM 5. The proof is similar to the proof of theorem 4. After $(n-1)$ expansion of continuant and upheaval of the ratio of continuants, formulas (44), (45) will be obtained. The only different terms will be elements of formula (46).

Taking into account condition (22), and fixed sequence $\{\delta_i\}$ by condition, as well as the need to reverse the ratio of continuants, we can conclude that

$$\frac{p_{3,(n-2,n)}}{q_{3,(n-2,n)}} > \frac{p_{3,(n-2,n+1)}}{q_{3,(n-2,n+1)}}.$$

Further, comparing the convergents $p_{3,(n-3,n)}/q_{3,(n-3,n)}$ and $p_{3,(n-3,n+1)}/q_{3,(n-3,n+1)}$, we obtain that they have the same comparison sign again:

$$\frac{p_{3,(n-3,n)}}{q_{3,(n-3,n)}} > \frac{p_{3,(n-3,n+1)}}{q_{3,(n-3,n+1)}}.$$

Following this procedure, the desired result is obtained. $\square$

PROOF OF THEOREM 6. Let $n-1 \equiv 0 \pmod{4}$. Condition (22) is satisfied. Let us denote by $f_{s,t}$ result of the following expression:

$$\frac{\langle g_s, \dots, g_t \rangle_3 \prod_{\substack{0 \leq i < s, \\ i \not\equiv s \pmod{2}}} x_i}{x_s \langle g_{s+1}, \dots, g_t \rangle_3 \prod_{\substack{0 \leq i < s, \\ i \equiv s \pmod{2}}} x_j} = \frac{y_s \prod_{\substack{0 \leq i < s, \\ i \not\equiv s \pmod{2}}} x_i}{x_s \prod_{\substack{0 \leq i < s, \\ i \equiv s \pmod{2}}} x_j} + \frac{\delta_s}{f_{s+1,t}}. \quad (47)$$

We can compare the elements of the sequences of magnitudes $\{f_{s,t}\}$, $\{f_{s,t+1}\}$ with each other. Taking into account the results of lemma 1, the following inequalities are true:

$$f_{n-1,n} > f_{n-1,n+1}, \quad f_{n-2,n} > f_{n-2,n+1}, \quad f_{n-3,n+1} < f_{n-3,n+1}, \\ f_{n-4,n} < f_{n-4,n+1}, \quad f_{n-5,n} > f_{n-5,n+1}.$$

Let the following inequalities are true for natural v , $1 < v < (n-4)/4$:

$$f_{n-4v-1,n} > f_{n-4v-1,n+1}, \quad f_{n-4v-2,n} > f_{n-4v-2,n+1}, \\ f_{n-4v-3,n+1} < f_{n-4v-3,n+1}, \quad f_{n-4v-4,n} < f_{n-4v-4,n+1},$$

Consider the following 4 values of the elements of each of the sequences $\{f_{s,t}\}$, $\{f_{s,t+1}\}$ separately. According to the definition of magnitude $f_{s,t}$, it can be expressed in terms of magnitude $f_{s+1,t}$. Inasmuch as $n-1 \equiv 0 \pmod{4}$, then $n-1 \equiv 0 \pmod{2}$. Hence, $n-4v-5$ is even number, so $\delta_{n-4v-5} = 1$. Therefore, comparing magnitudes $f_{n-4v-5,n}$ and $f_{n-4v-5,n+1}$, we obtain inequality

$$\frac{y_{n-4v-5} \prod_{\substack{0 \leq i < n-4v-5, \\ i \not\equiv n-4v-5 \pmod{2}}} x_i}{x_{n-4v-5} \prod_{\substack{0 \leq j < n-4v-5, \\ j \equiv n-4v-5 \pmod{2}}} x_j} + \frac{1}{f_{n-4v-4,n}} > \frac{y_{n-4v-5} \prod_{\substack{0 \leq i < n-4v-5, \\ i \not\equiv n-4v-5 \pmod{2}}} x_i}{x_{n-4v-5,n} \prod_{\substack{0 \leq j < n-4v-5, \\ j \equiv n-4v-5 \pmod{2}}} x_j} + \frac{1}{f_{n-4v-4,n+1}}.$$

The number $n-4v-6$ is odd, so therefore, expanding the value of magnitudes $f_{n-4v-6,n}$, $f_{n-4v-6,n+1}$, we get inequality

$$\frac{y_{n-4v-6} \prod_{\substack{0 \leq i < n-4v-6, \\ i \not\equiv n-4v-6 \pmod{2}}} x_i}{x_{n-4v-6} \prod_{\substack{0 \leq j < n-4v-6, \\ j \equiv n-4v-6 \pmod{2}}} x_j} - \frac{1}{f_{n-4v-5,n}} > \frac{y_{n-4v-6} \prod_{\substack{0 \leq i < n-4v-6, \\ i \not\equiv n-4v-6 \pmod{2}}} x_i}{x_{n-4v-6,n} \prod_{\substack{0 \leq j < n-4v-6, \\ j \equiv n-4v-6 \pmod{2}}} x_j} - \frac{1}{f_{n-4v-5,n+1}}.$$

The following inequality can also be proven by comparison magnitudes $1/f_{n-4v-6,n}$ and $1/f_{n-4v-6,n+1}$. Hence, the inequality $f_{n-4v-7,n} < f_{n-4v-7,n+1}$ is obtained. Comparing expressions with each other $-1/f_{n-4v-7,n}$ and $-1/f_{n-4v-7,n+1}$, we get inequality $f_{n-4v-8,n} < f_{n-4v-8,n+1}$. This proves the first point of the theorem. The remaining points can be proved in the same way. $\square$

PROOF OF PROPOSITION 1. Let us write down fourth type continued fractions corresponding to the convergents under consideration, and also perform an expansion of continuants. We get expressions

$$\frac{\delta_0 \langle g_1, \dots, g_n \rangle_4 + \langle g_0 \rangle_4 \langle g_n \rangle_4 \prod_{i=1}^{n-1} x_i}{\langle g_n \rangle_4 \prod_{i=0}^{n-1} x_i} \text{ and } \frac{\delta_0 \langle g_1, \dots, g_{n+1} \rangle_4 + \langle g_0 \rangle_4 \langle g_{n+1} \rangle_4 \prod_{i=1}^n x_i}{\langle g_{n+1} \rangle_4 \prod_{i=0}^n x_i}$$

Multiply both parts by $\prod_{i=0}^{n-1} x_i$, then we get expression

$$\frac{\delta_0 \langle g_1, \dots, g_n \rangle_4}{\langle g_n \rangle_4} + \langle g_0 \rangle_4 \prod_{i=1}^{n-1} x_i \text{ and } \frac{\delta_0 \langle g_1, \dots, g_{n+1} \rangle_4}{x_n \langle g_{n+1} \rangle_4} + \langle g_0 \rangle_4 \prod_{i=1}^{n-1} x_i.$$

Reducing common parts, we obtain the required values. $\square$

6. Conclusion

In this paper, the generalized Sorenson left-shift gcd algorithm was introduced. It coincides with the original Sorenson algorithm, except that instead of the parameter k , an infinite sequence of natural numbers K is fixed, each element of which is greater than two. For the original Sorenson algorithm, an estimate of the number of steps in the worst case is obtained, an example is given. An evaluation of the generalized algorithm is also given. However, the author believes that it can be improved.

Also in this article, continued fractions with rational partial quotients with a left shift were introduced, and continuants, with the help of which one can express the numerator and denominator of such fractions. The question of search conditions, under which the sequence of continuants with increasing order is strictly increasing was investigated. Conditions have been found, under which convergents of rational numbers made using continued fractions with rational partial quotients can be unambiguously compared. Applying these conditions to all obtained convergents allows us to determine whether such sequence will be strictly increasing or not.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Morier-Genoud S., Ovsienko V. Farey Boat: Continued Fractions and Triangulations, Modular Group and Polygon Dissections. // Jahresber. Dtsch. Math. 2019. Vol. 121, pp. 91–136.
2. Çanakçı İ., Schiffler R. Snake graphs and continued fractions // European Journal of Combinatorics. 2020. Vol. 86.
3. Sorenson J. Two Fast GCD Algorithms // J. of Algorithms. 1994. Vol. 16, № 1, pp. 110-144.
4. Morrison D., Angel E. Speeding Up Bresenham's Algorithm // IEEE Computer Graphics and Applications. 1991. Vol. 11, №6. P. 16-17.
5. Zhang Z. Finding c_3 -strong pseudoprimes // MATHEMATICS OF COMPUTATION. 2004. Vol. 74, № 250, pp. 1009-1024.
6. Xiao L., Xia X. -G. , Wang W. Multi-Stage Robust Chinese Remainder Theorem // IEEE Transactions on Signal Processing. 2014. Vol. 62, № 18. P. 4772-4785.
7. Weber, K. The Accelerated Integer GCD Algorithm // ACMTrans.Math. Software. 1995. Vol. 21, № 1. P. 111-122.
8. Dolgov, D. GCD calculation in the search task of pseudoprime and strong pseudoprime numbers // Lobachevskii J Math. 2016. Vol. 37, № 6. P. 734-739.
9. Долгов Д. А. О расширенном алгоритме Джебелеана–Вебера–Седжелмасы вычисления наибольшего общего делителя // Чебышевский сборник. 2018. Vol. 19, №2. P. 421-431.
10. Долгов Д. А. К-арный алгоритм вычисления НОД без побочных множителей // XVI Международная конференция «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории», Тула. 2019. P. 162-165.

11. Карацуба А. А. Основы аналитической теории чисел // Наука, Москва. 1983.
12. Jebelean T. A generalization of the binary GCD algorithm // ISAAC, Kiev. 1993. P. 1-5.
13. Stein J., Computational problems associated with Racah algebra // J. Comp. Phys. 1967. Vol. 1, №3. P. 397-405.
14. Долгов Д. А. О континуантах цепных дробей с рациональными неполными частными // Дискрет. матем. 2022. Vol. 34, № 3. P. 34-51.
15. Strastrup B. The C++ Programming Language // Addison-Wesley Professional. 2013.
16. Bosma W., Kraaikamp C., Hommersom S., Keune M., Kooloos C., van Loon W., Loos R., Omiljan E., Popma G., Venhoek D., Zwart M. // Continued fractions. URL: <https://www.math.ru.nl/~bosma/Students/CF.pdf> 2012.
17. Muir T. A Treatise on the Theory of Determinants // Dover Publications. 1960. P. 766.

REFERENCES

1. Morier-Genoud, S., Ovsienko, V., 2019. "Farey Boat: Continued Fractions and Triangulations, Modular Group and Polygon Dissections", *Jahresber. Dtsch. Math.*, vol. 121, pp. 91–136.
2. Çanakçı, İ., Schiffler, R., 2020. "Snake graphs and continued fractions", *European Journal of Combinatorics*, vol. 86.
3. Sorenson, J., 1994. "Two Fast GCD Algorithms", *J. of Algorithms*, vol. 16, no. 1, pp. 110-144.
4. Morrison, D., Angel, E., 1991. "Speeding Up Bresenham's Algorithm", *IEEE Computer Graphics and Applications*, vol. 11, no. 06, pp. 16-17.
5. Zhang, Z., 2004. "Finding c_3 -strong pseudoprimes" *MATHEMATICS OF COMPUTATION*, vol. 74, no. 250, pp. 1009-1024.
6. Xiao, L., Xia X. -G., Wang W., 2014. "Multi-Stage Robust Chinese Remainder Theorem", *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 62, no. 18, pp. 4772-4785.
7. Weber, K., 1995. "The Accelerated Integer GCD Algorithm", *ACM Trans. Math. Software*, vol. 21, no. 1, pp. 111-122.
8. Dolgov, D., 2016. "GCD calculation in the search task of pseudoprime and strong pseudoprime numbers", *Lobachevskii J Math*, vol. 37, no. 6, pp. 734-739.
9. Dolgov, D. A., 2018. "An extended Jebelean–Weber–Sedjelmaci GCD algorithm (in russian)", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 19, no. 2, pp. 421-431.
10. Dolgov, D. A., 2019. "The K-ary gcd algorithm without spurious factors (in russian)", *XVI International Conference "Algebra, number theory and discrete geometry: Modern problems, applications and problems of history"*, Tula, pp. 162-165.
11. Karatsuba, A. A., 1983. "Principles of Analytic Number Theory", *Nauka, Moscow*.
12. Jebelean, T., 1993. "A generalization of the binary GCD algorithm", *ISSAC, KIEV*, pp. 1-5.
13. Stein, J., 1967. "Computational problems associated with Racah algebra", *J. Comp. Phys.*, vol. 1, no. 3, pp. 397-405.

14. Dolgov, D. A., 2022. "Continuants of continued fractions with rational incomplete quotients (in russian)", *Diskr. Mat.*, vol. 34, no. 3, pp. 34-51.
15. Strastrup, B., 2013. "The C++ Programming Language", *Addison-Wesley Professional*.
16. Bosma, W., Kraaikamp, C., Hommersom, S., Keune, M., Kooloos, C., van Loon, W., Loos, R., Omiljan, E., Popma, G., Venhoek, D., Zwart, M., 2012. "Continued fractions". URL: <https://www.math.ru.nl/~bosma/Students/CF.pdf>
17. Muir, T., 1960. "A Treatise on the Theory of Determinants", *Dover Publications*, p. 766.

Получено: 08.01.2024

Принято в печать: 28.06.2024

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 25. Выпуск 2.

УДК 517.5

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-2-67-81

Обобщенное преобразование Данкля на прямой
в обратных задачах теории приближений¹

В. И. Иванов

Иванов Валерий Иванович — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет (г. Тула); Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова; Московский центр фундаментальной и прикладной математики (г. Москва).

e-mail: ivaleryi@mail.ru

Аннотация

Изучается обобщенный гармонический анализ Данкля на прямой, зависящий от параметра $r \in \mathbb{N}$. Случай $r = 0$ отвечает обычному гармоническому анализу Данкля. Все конструкции зависят от параметра $r \geq 1$. С помощью оператора обобщенного сдвига определяются разности и модули гладкости. С помощью дифференциально-разностного оператора определяется пространство Соболева. Исследуется приближение функций из пространства $L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$ целыми функциями экспоненциального типа не выше σ из класса $f \in B_{p,\lambda}^{\sigma,r}$, обладающих свойством $f^{(2s+1)}(0) = 0$, $s = 0, 1, \dots, r-1$. Для целых функций из класса $f \in B_{p,\lambda}^{\sigma,r}$ доказываются неравенства, которые используются в обратных задачах теории приближений. В зависимости от поведения величин наилучшего приближения функции дается оценка модуля гладкости функции, а так же модуля гладкости от степени ее дифференциально-разностного оператора второго порядка. Дается условие асимптотического равенства между наилучшим приближением функции и ее модулем гладкости.

Ключевые слова: Обобщенное преобразование Данкля, оператор обобщенного сдвига, свертка, модуль гладкости, целые функции экспоненциального типа, обратные неравенства теории приближений.

Библиография: 11 названий.

Для цитирования:

В. И. Иванов. Обобщенное преобразование Данкля на прямой в обратных задачах теории приближений // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 2, с. 67–81.

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-71-30001, <https://rscf.ru/projects/23-71-30001/>, в МГУ им. М.В. Ломоносова.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 25. No. 2.

UDC 517.5

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-2-67-81

Generalized Dunkl transform on the line
in inverse problems of approximation theory

V. I. Ivanov

Ivanov Valerii Ivanovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State University (Tula); Lomonosov Moscow State University; Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics (Moscow).

e-mail: ivaleryi@mail.ru

Abstract

The generalized Dunkl harmonic analysis on the line, depending on the parameter $r \in \mathbb{N}$, is studied. The case $r = 0$ corresponds to the usual Dunkl harmonic analysis. All designs depend on the parameter $r \geq 1$. Using the generalized shift operator, differences and moduli of smoothness are determined. Using the differential-difference operator, the Sobolev space is defined. We study the approximation of functions from space $L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$ by entire functions of exponential type not higher than σ from the class $f \in B_{p,\lambda}^{\sigma,r}$ that have the property $f^{(2s+1)}(0) = 0$, $s = 0, 1, \dots, r-1$. For entire functions from the class $f \in B_{p,\lambda}^{\sigma,r}$, inequalities are proved that are used in inverse problems of approximation theory. Depending on the behavior of the values of the function best approximation, an estimate is given of the modulus of smoothness of the function, as well as the modulus of smoothness on the degree of its second-order differential-difference operator. A condition is given for asymptotic equality between the best approximation of the function and its modulus of smoothness.

Keywords: Generalized Dunkl transform, generalized translation operator, convolution, modulus of smoothness, entire functions of exponential type, inverse inequalities of approximation theory.

Bibliography: 11 titles.

For citation:

V. I. Ivanov, 2024. “Generalized Dunkl transform on the line in inverse problems of approximation theory”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 2, pp. 67–81.

1. Введение

В 2012 г. С. Бен Саид, Т. Кобаяши и Б. Орстед [1] определили двупараметрическое (k, a) -обобщенное унитарное преобразование Фурье. В одномерном случае оно является интегральным оператором

$$\mathcal{F}_{k,a}(f)(y) = c_{k,a} \int_{\mathbb{R}} b_{k,a}(xy) f(x) |x|^{2k+a-2} dx \quad (1)$$

с ядром

$$b_{k,a}(x) = j_\lambda\left(\frac{2}{a}|x|^{a/2}\right) + \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1+2/a)} \frac{x}{(ai)^{2/a}} j_{\lambda+\frac{2}{a}}\left(\frac{2}{a}|x|^{a/2}\right).$$

Здесь $a > 0$, $2k + a - 1 > 0$, $c_{k,a}^{-1} = 2a^\lambda \Gamma(\lambda+1)$, $\lambda = (2k-1)/a$, $J_\lambda(x)$ — функция Бесселя, $j_\lambda(x) = 2^\lambda \Gamma(\lambda+1) x^{-\lambda} J_\lambda(x)$ — нормированная функция Бесселя.

При $k = 0$, $a = 2$ оно совпадает с классическим преобразованием Фурье, а при $a = 2 - s$ преобразованием Данкля (см. [2, 3]).

Пусть $\lambda \geq -1/2$, $d\nu_\lambda(x) = (2^{\lambda+1}\Gamma(\lambda+1))^{-1}|x|^{2\lambda+1}dx$ — мера на $\mathbb{R}$, $1 \leq p \leq \infty$, $L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$ — лебегово пространство измеримых комплекснозначных функций с конечной нормой

$$\|f\|_{p, d\nu_\lambda} = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p d\nu_\lambda(x) \right)^{1/p} < \infty, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$L^\infty(\mathbb{R}, d\nu_\lambda) = C_b(\mathbb{R})$ — множество непрерывных ограниченных функций с нормой $\|f\|_\infty = \sup_{\mathbb{R}} |f(x)|$, $C^\infty(\mathbb{R})$ — множество бесконечно дифференцируемых функций, $C_\Pi^\infty(\mathbb{R})$ — множество бесконечно дифференцируемых функций, имеющих полиномиальный рост на бесконечности, $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ — пространство Шварца бесконечно дифференцируемых и быстро убывающих на бесконечности функций.

В [4], отправляясь от преобразования (1) при $a = 2/(2r+1)$, $r \in \mathbb{Z}_+$ и $\lambda = (2r+1)(k-1/2) \geq -1/2$, с помощью замены переменной получено двухпараметрическое семейство унитарных преобразований

$$\mathcal{F}_r^\lambda(f)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e_{r,\lambda}(-xy) d\nu_\lambda(x) \quad (2)$$

с ядром

$$e_{r,\lambda}(xy) = j_\lambda(xy) + i(-1)^r \frac{(xy)^{2r+1}}{2^{2r+1}(\lambda+1)_{2r+1}} j_{\lambda+2r+1}(xy). \quad (3)$$

При $r = 0$ оно совпадает с преобразованием Данкля и $\mathcal{F}_0^\lambda(\mathcal{S}(\mathbb{R})) = \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Если $r \geq 1$ и $\mathcal{S}_r(\mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) : f^{(2s+1)}(0) = 0\}$, то $\mathcal{F}_r^\lambda(\mathcal{S}_r(\mathbb{R})) = \mathcal{S}_r$. Таким образом, преобразование (2) при $r \geq 1$ хоть и имеет свои особенности, но очень похоже на преобразование Данкля. Мы называем его (r, λ) -обобщенным преобразованием Данкля или просто обобщенным преобразованием Данкля. Его изучение продолжено в работах [5, 6, 7].

Помимо обобщенного преобразования Данкля обобщенный гармонический анализ Данкля на прямой со степенным весом $|x|^{2\lambda+1}$ осуществляется с помощью дифференциального разностного оператора, называемого обобщенным лапласианом Данкля,

$$\Delta_{\lambda,r} f(x) = f''(x) + \frac{2\lambda+1}{x} f'(x) - (2r+1)(\lambda+r+1/2) \frac{f(x) - f(-x)}{x^2} \quad (4)$$

и операторами обобщенного сдвига

$$\tau^y f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e_{r,\lambda}(yz) e_{r,\lambda}(xz) \mathcal{F}_r^\lambda(f)(z) d\nu_\lambda(z) \quad (5)$$

и

$$T^y f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} j_\lambda(yz) e_{r,\lambda}(xz) \mathcal{F}_r^\lambda(f)(z) d\nu_\lambda(z). \quad (6)$$

В многомерном гармоническом анализе Данкля ($r = 0$) ограниченность оператора (5) известна только при $p = 2$, поэтому его заменой стал оператор сдвига (6) (см. [10]). Он также используется в гармоническом анализе Бесселя (см. например, [8, 9]). В одномерном случае ограниченность оператора (5) в пространствах $L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$ известна уже для всех $r \in \mathbb{Z}_+$, поэтому естественно работать именно с ним. В работе [7] при $r \geq 1$ с его помощью доказаны прямые теоремы теории приближений в пространствах $L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$. В настоящей работе, продолжающей [7], доказываются обратные теоремы теории приближений в пространствах $L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$, также использующие оператор обобщенного сдвига (5).

Сформулируем основные наши результаты.

Теорема 6. Если $m, n, r \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$, то для любой $f \in L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$

$$\omega_{m,r}\left(\frac{1}{n}, f\right)_{p,d\nu_\lambda} \lesssim \frac{1}{n^{2m}} \sum_{j=0}^n (j+1)^{2m-1} E_{j,r}(f)_{p,d\nu_\lambda}.$$

Теорема 7. Если $1 \leq p \leq \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$ и некоторого $k \in \mathbb{N}$ числовой ряд $\sum_{j=1}^\infty j^{2k-1} E_{j,r}(f)_{p,d\nu_\lambda}$ сходится, то $f \in W_{p,\lambda}^{k,r}$ и для $m, r \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \omega_{m,r}\left(\frac{1}{n}, (-\Delta_{\lambda,r})^k f\right)_{p,d\nu_\lambda} &\lesssim \frac{1}{n^{2m}} \sum_{j=0}^n (j+1)^{2(m+k)-1} E_{j,r}(f)_{p,d\nu_\lambda} \\ &+ \sum_{j=n+1}^\infty j^{2k-1} E_{j,r}(f)_{p,d\nu_\lambda}. \end{aligned}$$

Теорема 8. Пусть $1 \leq p \leq \infty$, $m, r, n \in \mathbb{N}$. Асимптотическое равенство

$$E_{n,r}(f)_{p,d\nu_\lambda} \asymp \omega_{m,r}(1/n, f)_{p,d\nu_\lambda}$$

справедливо для любой $f \in L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$ тогда и только тогда, когда

$$\omega_{m,r}(1/n, f)_{p,d\nu_\lambda} \asymp \omega_{m+1,r}(1/n, f)_{p,d\nu_\lambda}.$$

Для целых функций экспоненциального типа из класса $B_{p,\lambda}^{\sigma,r}$ доказаны достаточно общие неравенства.

Теорема 4. Если $\sigma > 0$, $n_1, n_2 \geq 0$, $m_1, m_2 \geq 0$, $\rho = n_1 + m_1 - n_2 - m_2 \geq 0$, $1 \leq p \leq \infty$, $0 < \delta \leq t \leq 1/(2\sigma)$, и $f \in B_{p,\lambda}^{\sigma,r}$, то

$$\delta^{-2m_1} \|\Delta_{\delta,r}^{m_1} (-\Delta_{\lambda,r})^{n_1} f\|_{p,d\nu_\lambda} \lesssim \sigma^{2\rho} t^{-2m_2} \|\Delta_{t,r}^{m_2} (-\Delta_{\lambda,r})^{n_2} f\|_{p,d\nu_\lambda}.$$

Характерной особенностью получаемых результатов является тот факт, что в одном весовом пространстве $L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$ мы имеем бесконечно много неравенств, зависящих от параметра $r \in \mathbb{N}$.

Пусть $A, B > 0$. Мы будем писать $A \lesssim B$, если выполнено неравенство $A \leq cB$ с константой $c > 0$, зависящей только от несущественных параметров, $A \asymp B$, если выполнено неравенство $c^{-1}B \leq A \leq cB$.

В настоящей работе в секции 2 приводятся некоторые элементы обобщенного гармонического анализа Данкля. В секции 3 доказываются неравенства для целых функций экспоненциального типа. В секции 6 доказываются обратные теоремы теории приближений, указывается условие асимптотического равенства между наилучшим приближением и модулем гладкости.

2. Некоторые элементы обобщенного гармонического анализа Данкля

Приведем некоторые свойства обобщенного гармонического анализа Данкля из [4, 5, 6, 7].

Пусть $\lambda > -1/2$. Обобщенное преобразование Данкля $\mathcal{F}_r^\lambda$ имеет равномерно ограниченное ядро. Оно является унитарным оператором и для $f \in L^2(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$ справедливо равенство Планшереля

$$\int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}_r^\lambda(f)(y)|^2 d\nu_\lambda(y) = \int_{-\infty}^\infty |f(x)|^2 d\nu_\lambda(x).$$

Обратный оператор имеет вид

$$(\mathcal{F}_r^\lambda)^{-1}(g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e_{r,\lambda}(xy)g(y) d\nu_\lambda(y).$$

В пространстве Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ сходимость определяется счетным семейством полунорм

$$\rho_{j,N}(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |(1+x^2)^N D^j f(x)|, \quad j, N \in \mathbb{Z}_+, \quad Df(x) = f'(x),$$

относительно которой $\mathcal{S}_r(\mathbb{R})$ — замкнутое подпространство и $\text{codim } \mathcal{S}_r(\mathbb{R}) = r$.

Пусть $\mathcal{S}_r(\mathbb{R}_+) = \mathcal{S}(\mathbb{R}_+)$ — подпространство Шварца четных функций, $\mathcal{S}'_r(\mathbb{R})$ — пространство обобщенных функций на $\mathcal{S}_r(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}'_r(\mathbb{R}_+) = \mathcal{S}'(\mathbb{R}_+)$ — пространство четных обобщенных функций медленного роста. Если для функции $\varphi \in \mathcal{S}_r(\mathbb{R})$, φ_e и φ_o — ее четная и нечетная составляющие, то обобщенная функция $f_e \in \mathcal{S}'_r(\mathbb{R})$ ($f_o \in \mathcal{S}'_r(\mathbb{R})$) называется четной (нечетной), если

$$(f_e, \varphi)_\lambda = (f_e, \varphi_e)_\lambda \quad ((f_o, \varphi)_\lambda = (f_o, \varphi_o)_\lambda), \quad \varphi \in \mathcal{S}_r(\mathbb{R}).$$

Множества четных обобщенных функций на $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ и $\mathcal{S}_r(\mathbb{R})$ совпадают. Для нечетных обобщенных функций эти множества различаются. Если f_o — нечетная обобщенная функция на $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, то на $\mathcal{S}_r(\mathbb{R})$ нечетными обобщенными функциями будут все функции f_o/x^{2s} , $s = 1, \dots, r$. Регулярный линейный непрерывный функционал на $\mathcal{S}_r(\mathbb{R})$, определяемый функцией f и мерой $d\nu_\lambda$, будет иметь запись

$$(f, \varphi)_\lambda = \int_{\mathbb{R}} f \varphi d\nu_\lambda, \quad \varphi \in \mathcal{S}_r(\mathbb{R}).$$

Обобщенное преобразование Данкля можно продолжить на $\mathcal{S}'_r(\mathbb{R})$ по правилу

$$(\mathcal{F}_r^\lambda(f), \varphi)_\lambda = (f, \mathcal{F}_r^\lambda(\varphi))_\lambda, \quad f \in \mathcal{S}'_r(\mathbb{R}), \quad \varphi \in \mathcal{S}_r(\mathbb{R}). \quad (7)$$

Ядро (3) является собственной функцией обобщенного лапласиана Данкля (4)

$$(-\Delta_{\lambda,r})_x e_{r,\lambda}(xy) = |y|^2 e_{r,\lambda}(xy).$$

Оператор $\Delta_{\lambda,r}: \mathcal{S}_r(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}_r(\mathbb{R})$ и для $f \in \mathcal{S}_r(\mathbb{R})$ и $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_{\mathbb{R}} (-\Delta_{\lambda,r})^n f(x) e_{r,\lambda}(xy) d\nu_\lambda(x) = |y|^{2n} \int_{\mathbb{R}} f(x) e_{r,\lambda}(xy) d\nu_\lambda(x).$$

Распространим степень обобщенного лапласиана Данкля на $\mathcal{S}'_r(\mathbb{R})$ равенством

$$((-\Delta_{\lambda,r})^n f, \varphi)_\lambda = (f, (-\Delta_{\lambda,r})^n \varphi)_\lambda, \quad f \in \mathcal{S}'_r(\mathbb{R}), \quad \varphi \in \mathcal{S}_r(\mathbb{R}), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (8)$$

В силу (7) можем также использовать обобщенное преобразование Данкля

$$\mathcal{F}_r^\lambda((-\Delta_{\lambda,r})^n f) = (\cdot)^{2n} \mathcal{F}_r^\lambda(f), \quad f \in \mathcal{S}'_r(\mathbb{R}). \quad (9)$$

Пусть $A = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xyt}$. Для оператора обобщенного сдвига (5) получено интегральное представление

$$\begin{aligned} \tau^y f(x) = & \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left\{ f(A) \left(1 - P_{2r+1}^{(\lambda-1/2)}(t) + P_{2r+1}^{(\lambda-1/2)}\left(\frac{x-yt}{A}\right) + P_{2r+1}^{(\lambda-1/2)}\left(\frac{y-xt}{A}\right) \right) \right. \\ & \left. + f(-A) \left(1 - P_{2r+1}^{(\lambda-1/2)}(t) - P_{2r+1}^{(\lambda-1/2)}\left(\frac{x-yt}{A}\right) - P_{2r+1}^{(\lambda-1/2)}\left(\frac{y-xt}{A}\right) \right) \right\} dm_\lambda(t), \end{aligned}$$

и оценки его норм в пространствах $L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$ для всех $1 \leq p \leq \infty$, $y \in \mathbb{R}$, $\lambda > -1/2$,

$$\|\tau^y\|_{p \rightarrow p} \leq M_{r,\lambda}^\tau. \quad (10)$$

Пусть

$$C_0^\infty(\mathbb{R}) = C^\infty(\mathbb{R}), \quad C_r^\infty(\mathbb{R}) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) : f^{(2s+1)}(0) = 0, s = 0, 1, \dots, r-1\}, \quad r \geq 1.$$

Так как $e_{\lambda,r} \in C_\Pi^\infty(\mathbb{R}) \cap C_r^\infty(\mathbb{R})$, то для $\varphi \in \mathcal{S}_r(\mathbb{R})$ и $f \in \mathcal{S}_r'(\mathbb{R})$

$$\mathcal{F}_r^\lambda(\tau^y \varphi)(z) = e_{\lambda,r}(yz) \mathcal{F}_r^\lambda(\varphi)(z), \quad \mathcal{F}_r^\lambda(\tau^y f) = e_{\lambda,r}(y(\cdot)) \mathcal{F}_r^\lambda(f). \quad (11)$$

В частности,

$$\mathcal{F}_r^\lambda(\tau^y \varphi), \tau^y \varphi \in \mathcal{S}_r(\mathbb{R}). \quad (12)$$

Пусть $m \in \mathbb{N}$, I — тождественный оператор,

$$\Delta_{y,r}^m f(x) = (I - \tau^y)^m f(x) = \sum_{s=0}^m (-1)^s \binom{m}{s} (\tau^y)^s f(x), \quad (13)$$

— разность порядка m , определяемая оператором обобщенного сдвига τ^t , зависящим от r ,

$$\omega_{m,r}(\delta, f)_{p,d\nu_\lambda} = \sup_{0 < y \leq \delta} \|\Delta_{y,r}^m f(x)\|_{p,d\nu_\lambda} \quad (14)$$

— модуль гладкости функции $f \in L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$. При $m = 0$ полагаем $\Delta_{y,r}^m f(x) = f(x)$.

Если $f \in \mathcal{S}_r(\mathbb{R})$, то в силу (5),

$$\mathcal{F}_r^\lambda(\Delta_{y,r}^m f)(z) = e_{r,\lambda}^m(yz) \mathcal{F}_r^\lambda(f)(z), \quad (15)$$

где

$$e_{r,\lambda}^m(t) = \sum_{s=0}^m (-1)^s \binom{m}{s} (e_{r,\lambda}(t))^s = (1 - e_{r,\lambda}(t))^m. \quad (16)$$

Для функции $e_{r,\lambda}^m$ выполнены следующие свойства

$$\begin{aligned} c_{\lambda,r,m}^{-1} \min(1, t^{2m}) &\leq |e_{r,\lambda}^m(t)| \leq c_{\lambda,r,m} \min(1, t^{2m}), \\ e_{r,\lambda}^m, \frac{e_{r,\lambda}^m(x)}{x^{2m}}, \frac{x^{2m}}{e_{r,\lambda}^m(x)} &\in C_r^\infty(\mathbb{R}) \cap C_\Pi^\infty(\mathbb{R}). \end{aligned} \quad (17)$$

Для $f \in \mathcal{S}_r'(\mathbb{R})$ мы можем определить распределения

$$\mathcal{F}_r^\lambda(\Delta_{y,r}^m f) = e_{r,\lambda}^m(y(\cdot)) \mathcal{F}_r^\lambda(f). \quad (18)$$

Лемма 1. Если $m \in \mathbb{Z}_+$, $n \in \mathbb{N}$, $f \in L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$, то

$$\|\Delta_{y,r}^{m+n} f\|_{p,d\nu_\lambda} \lesssim \|\Delta_{y,r}^m f\|_{p,d\nu_\lambda}.$$

Смотрим свертку пары функций $\varphi \in \mathcal{S}_r(\mathbb{R})$, $\psi \in C_r^\infty(\mathbb{R}) \cap C_\Pi^\infty(\mathbb{R})$,

$$(\psi *_\tau \varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}} \psi(y) \tau^x \varphi(-y) d\nu_\lambda(y).$$

Лемма 2. Если $\varphi \in \mathcal{S}_r(\mathbb{R})$, $\psi \in C_r^\infty(\mathbb{R}) \cap C_\Pi^\infty(\mathbb{R})$, то $(\psi *_\tau \varphi) \in \mathcal{S}_r(\mathbb{R})$ и

$$\mathcal{F}_r^\lambda((\psi *_\tau \varphi))(y) = \mathcal{F}_r^\lambda(\psi)(y) \mathcal{F}_r^\lambda(\varphi)(y) \in \mathcal{S}_r(\mathbb{R}).$$

Пусть $\check{\psi}(y) = \psi(-y)$. Используя лемму 2, для $f \in \mathcal{S}'_r(\mathbb{R})$, $\psi \in C_r^\infty(\mathbb{R}) \cap C_\Pi^\infty(\mathbb{R})$ определим обобщенную свертку $(f *_\tau \psi)$ равенством

$$((f *_\tau \psi), \varphi)_\lambda = (f, (\check{\psi} *_\tau \varphi))_\lambda, \quad \varphi \in \mathcal{S}_r(\mathbb{R}). \quad (19)$$

Отметим, что

$$\mathcal{F}_r^\lambda((f *_\tau \psi)) = \mathcal{F}_r^\lambda(\psi) \mathcal{F}_r^\lambda(f). \quad (20)$$

Для свертки мы будем применять следующий вариант неравенства Юнга (см. [5]).

Теорема 1. Пусть $1 \leq p, q \leq \infty$, $1/p + 1/q \geq 1$ и $1/s = 1/p + 1/q - 1$. Если $f \in L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$, $g \in L^q(\mathbb{R}, d\nu_\lambda) \cap C_r^\infty(\mathbb{R}) \cap C_\Pi^\infty(\mathbb{R})$, то

$$\|(f *_\tau g)\|_{s, d\nu_\lambda} \leq M_{r, \lambda}^\tau \|f\|_{p, d\nu_\lambda} \|g\|_{q, d\nu_\lambda}.$$

Доказательство. Пусть $1/\mu = 1/p - 1/s$ и $1/\nu = 1/q - 1/s$. Тогда $1/\mu \geq 0$, $1/\nu \geq 0$ и $1/s + 1/\mu + 1/\nu = 1$.

Применяя неравенство Гельдера, получим

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}} f(y) \tau^x g(-y) d\nu_\lambda(y) \right| &\leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f(y)|^p |\tau^x g(-y)|^q d\nu_\lambda(y) \right)^{1/s} \\ &\times \left(\int_{\mathbb{R}} |f(y)|^p d\nu_\lambda(y) \right)^{1/\mu} \left(\int_{\mathbb{R}} |\tau^x g(-y)|^q d\nu_\lambda(y) \right)^{1/\nu} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}} |f(y)|^p |\tau^x g(-y)|^q d\nu_\lambda(y) \right)^{1/s} \|f\|_{p, d\nu_\lambda}^{p/\mu} \|\tau^x g(-y)\|_{q, d\nu_\lambda}^{q/\nu}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (10)

$$\begin{aligned} &\|(f *_\tau g)\|_{s, d\nu_\lambda} \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(y)|^p |\tau^{-y} g(x)|^q d\nu_\lambda(y) d\nu_\lambda(x) \right)^{1/s} \|f\|_{p, d\nu_\lambda}^{p/\mu} \|\tau^x g(-y)\|_{q, d\nu_\lambda}^{q/\nu} \\ &\leq \|f\|_{p, d\nu_\lambda} \|\tau^{-y} g(x)\|_{q, d\nu_\lambda}^{q/s} \|\tau^x g(-y)\|_{q, d\nu_\lambda}^{q/\nu} \leq M_{r, \lambda}^\tau \|f\|_{p, d\nu_\lambda} \|g\|_{q, d\nu_\lambda}. \end{aligned}$$

Теорема 1 доказана.

3. Некоторые неравенства для целых функций экспоненциального типа

Пусть $\sigma > 0$, $1 \leq p \leq \infty$, $\lambda > -1/2$. Рассмотрим два класса целых функций экспоненциального типа.

Функция $f \in B_{p, \lambda}^{\sigma, r}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, если f — целая функция экспоненциального типа не выше σ и $f \in L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda) \cap C_r^\infty(\mathbb{R})$. Функция $f \in \tilde{B}_{p, \lambda}^{\sigma, r}$, если $f \in L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda) \cap C_r^\infty(\mathbb{R})$ и для ее аналитического продолжения на $\mathbb{C}$ выполняется неравенство

$$|f(z)| \leq c_f e^{\sigma |\operatorname{Im} z|}, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

На самом деле, эти классы совпадают (см. [10]).

В [7] для этих классов установлена теорема Пэли–Винера.

Теорема 2. Пусть $1 \leq p \leq \infty$. Функция $f \in B_{p,\lambda}^{\sigma,r}$ тогда и только тогда, когда

$$f \in L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda) \cap C_r^\infty(\mathbb{R}) \text{ и } \operatorname{supp} \mathcal{F}_r^\lambda(f) \subset [-\sigma, \sigma].$$

Далее применяем работы [10, 11]. Пусть $1 \leq p \leq \infty$, $1/p + 1/p' = 1$, $\eta \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_+)$,

$$\eta(x) = 1, \quad |x| \leq 1; \quad \eta(x) > 0, \quad 1 < |x| < 2; \quad \eta(x) = 0, \quad |x| \geq 2,$$

$$\mathcal{F}_r^\lambda(\eta(\cdot/\sigma))(y) = \sigma^{2\lambda+2} \mathcal{F}_r^\lambda(\eta)(\sigma y), \quad \|\mathcal{F}_r^\lambda(\eta(\cdot/\sigma))\|_{p', d\nu_\lambda} = \sigma^{\frac{2\lambda+2}{p}} \|\mathcal{F}_r^\lambda(\eta)\|_{p', d\nu_\lambda}. \quad (21)$$

Теорема 3. Если $\sigma > 0$, $0 < p \leq q \leq \infty$, $f \in B_{p,\lambda}^{\sigma,r}$, то

$$\|f\|_{q, d\nu_\lambda} \lesssim \sigma^{(2\lambda+2)(1/p-1/q)} \|f\|_{p, d\nu_\lambda}.$$

Доказательство. Пусть $f \in B_{p,\lambda}^{\sigma,r}$, $p \geq 1$, $q = \infty$. Так как по теореме 2 $\operatorname{supp} \mathcal{F}_r^\lambda(f) \subset [-\sigma, \sigma]$, то согласно (19), (20)

$$f(x) = (f *_\tau \mathcal{F}_r^\lambda(\eta(\cdot/\sigma)))(x), \quad \mathcal{F}_r^\lambda(f)(y) = \eta(y/\sigma) \mathcal{F}_r^\lambda(f)(y).$$

По теореме 1, (21)

$$\begin{aligned} \|f\|_\infty &\leq M_{r,\lambda}^\tau \|f\|_{p, d\nu_\lambda} \|\mathcal{F}_r^\lambda(\eta(\cdot/\sigma))\|_{p', d\nu_\lambda} \\ &\leq M_{r,\lambda}^\tau \sigma^{(2\lambda+2)/p} \|f\|_{p, d\nu_\lambda} \|\mathcal{F}_r^\lambda(\eta)\|_{p', d\nu_\lambda} \lesssim \sigma^{(2\lambda+2)/p} \|f\|_{p, d\nu_\lambda}. \end{aligned}$$

Таким образом, теорема 3 для $q = \infty$, $1 \leq p < \infty$ доказана.

При $0 < p < 1$ воспользуемся следующим приемом из [10]

$$\|f\|_{1, d\nu_\lambda} \leq \|f\|_\infty^{1-p} \|f\|_{p, d\nu_\lambda}^p \lesssim \sigma^{2\lambda+2} \|f\|_{1, d\nu_\lambda} \|f\|_\infty^{-p} \|f\|_{p, d\nu_\lambda}^p.$$

Откуда теорема 3 вытекает и для $q = \infty$, $0 < p < 1$.

Если $0 < p \leq q < \infty$, то

$$\begin{aligned} \|f\|_{q, d\nu_\lambda} &= \| |f|^{1-p/q} |f|^{p/q} \|_{q, d\nu_\lambda} \leq \|f\|_\infty^{1-p/q} \|f\|_{p, d\nu_\lambda}^{p/q} \\ &\lesssim \sigma^{(2\lambda+2)(1-p/q)/p} \|f\|_{p, d\nu_\lambda}^{1-p/q} \|f\|_{p, d\nu_\lambda}^{p/q} \lesssim \sigma^{(2\lambda+2)(1/p-1/q)} \|f\|_{p, d\nu_\lambda}. \end{aligned}$$

Теорема 3 доказана.

Лемма 3. Если $\sigma, t > 0$, $n, m \geq 1$, $1 \leq p \leq \infty$, $f \in B_{p,k}^{\sigma,r}$, то

$$\Delta_{t,r}^m (-\Delta_{\lambda,r})^n f, \quad (-\Delta_{\lambda,r})^n \Delta_t^m f \in L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda),$$

и

$$\Delta_{t,r}^m (-\Delta_{\lambda,r})^n f = (-\Delta_{\lambda,r})^n \Delta_{t,r}^m f.$$

Доказательство. Пусть $f \in \mathcal{S}'_r$ и $\operatorname{supp} \mathcal{F}_r^\lambda(f) \subset [-\sigma, \sigma]$. Применяя (17), (19), (20), получим

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_r^\lambda(\Delta_{t,r}^m (-\Delta_{\lambda,r})^n f) &= \mathcal{F}_r^\lambda((- \Delta_{\lambda,r})^n \Delta_{t,r}^m f) = (\cdot)^{2n} e_{r,\lambda}^m(ty) \mathcal{F}_r^\lambda(f) \\ &= (\cdot)^{2n} e_{r,\lambda}^m(ty) \eta(\cdot/\sigma) \mathcal{F}_r^\lambda(f) = g \mathcal{F}_r^\lambda(f) = \mathcal{F}_r^\lambda(f *_\tau \mathcal{F}_r^\lambda(g)), \end{aligned}$$

где

$$g(y) = t^{2m} y^{2(n+m)} \frac{e_{r,\lambda}^m(ty)}{(ty)^{2m}} \eta(y/\sigma), \quad \mathcal{F}_r^\lambda(g) \in \mathcal{S}_r.$$

Следовательно, по теореме 1

$$(f *_\tau \mathcal{F}_r^\lambda(g)) = \Delta_{t,r}^{m_1}(-\Delta_{\lambda,r})^n f = (-\Delta_{\lambda,r})^n \Delta_{t,r}^{m_1} f \in B_{p,\lambda}^{\sigma,r}.$$

Лемма 4 доказана.

Теорема 4. Если $\sigma > 0$, $n_1, n_2 \geq 0$, $m_1, m_2 \geq 0$, $\rho = n_1 + m_1 - n_2 - m_2 \geq 0$, $1 \leq p \leq \infty$, $0 < \delta \leq t \leq 1/(2\sigma)$, и $f \in B_{p,\lambda}^{\sigma,r}$, то

$$\delta^{-2m_1} \|\Delta_{\delta,r}^{m_1}(-\Delta_{\lambda,r})^{n_1} f\|_{p,d\nu_\lambda} \lesssim \sigma^{2\rho} t^{-2m_2} \|\Delta_{t,r}^{m_2}(-\Delta_{\lambda,r})^{n_2} f\|_{p,d\nu_\lambda}. \quad (22)$$

Доказательство. Пусть $f \in \mathcal{S}'_r$ и $\text{supp } \mathcal{F}_r^\lambda(f) \subset [-\sigma, \sigma]$,

$$\mathcal{F}_r^\lambda(\Delta_{\delta,r}^{m_1}(-\Delta_{\lambda,r})^{n_1} f) = (\cdot)^{2(n_1-n_2)} \frac{e_{r,\lambda}^{m_1}(\delta(\cdot))}{e_{r,\lambda}^{m_2}(t(\cdot))} \eta((\cdot)/\sigma) (\cdot)^{2n_2} e_{r,\lambda}^{m_2}(t(\cdot)) \mathcal{F}_r^\lambda(f).$$

Так для $0 < t \leq 1/(2\sigma)$

$$\eta(y/\sigma) = \eta(y/\sigma)\eta(ty),$$

то

$$\begin{aligned} \delta^{-2m_1} \mathcal{F}_r^\lambda(\Delta_{\delta,r}^{m_1} f) &= \sigma^{2\rho} t^{-2m_2} \chi(\cdot/\sigma) \varphi_\theta(t \cdot) \mathcal{F}_r^\lambda(\Delta_{\delta,r}^{m_2} f) \\ &= \sigma^{2\rho} t^{-2m_2} \mathcal{F}_r^\lambda(\Delta_{\delta,r}^{m_2}(-\Delta_{\lambda,r})^{n_2} f *_\tau (\mathcal{F}_r^\lambda(\chi(\cdot/\sigma)) *_\tau \mathcal{F}_r^\lambda(\varphi_\theta(t \cdot)))). \end{aligned}$$

для

$$\begin{aligned} \theta = \frac{\delta}{t} &\in (0, 1], \quad \chi(y) = y^{2\rho} \eta(y) \in \mathcal{S}_r(\mathbb{R}), \quad \psi_1(y) = \frac{e_{r,\lambda}^{m_1}(y)}{y^{2m_1}} \in C_r^\infty(\mathbb{R}) \cap C_\Pi^\infty(\mathbb{R}), \\ \psi_2(y) &= \frac{e_{r,\lambda}^{m_2}(y)}{y^{2m_2}} \in C_r^\infty(\mathbb{R}) \cap C_\Pi^\infty(\mathbb{R}), \quad \varphi_\theta(y) = \frac{\psi_1(\theta y)}{\psi_2(y)} \eta(y) \in \mathcal{S}_r(\mathbb{R}) \times C^\infty([0, 1]). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\delta^{-2m_1} \Delta_{\delta,r}^{m_1}(-\Delta_{\lambda,r})^{n_1} f = \sigma^{2\rho} t^{-2m_2} (\Delta_{\delta,r}^{m_2}(-\Delta_{\lambda,r})^{n_2} f *_\tau (\mathcal{F}_r^\lambda(\chi(\cdot/\sigma)) *_\tau \mathcal{F}_r^\lambda(\varphi_\theta(t \cdot)))).$$

Так как

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_r^\lambda(\chi(\cdot/\sigma)) &\in \mathcal{S}_r(\mathbb{R}), \quad \|\mathcal{F}_r^\lambda(\chi(\cdot/\sigma))\|_{1,d\nu_\lambda} = \|\mathcal{F}_r^\lambda(\chi)\|_{1,d\nu_\lambda}, \\ \mathcal{F}_r^\lambda(\varphi_\theta(t \cdot)) &\in \mathcal{S}_r(\mathbb{R}), \quad \|\mathcal{F}_r^\lambda(\varphi_\theta(t \cdot))\|_{1,d\nu_\lambda} = \|\mathcal{F}_r^\lambda(\varphi_\theta)\|_{1,d\nu_\lambda}, \end{aligned}$$

и $f \in L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$, то из теоремы 1 получим

$$\begin{aligned} \delta^{-2m_1} \|\Delta_{\delta,r}^{m_1}(-\Delta_{\lambda,r})^{n_1} f\|_{p,d\nu_\lambda} &\leq \sigma^{2\rho} t^{-2m_2} \|(\chi)\|_{1,d\nu_\lambda} \max_{0 \leq \theta \leq 1} \|\mathcal{F}_r^\lambda(\varphi_\theta)\|_{1,d\nu_\lambda} \|\Delta_{t,r}^{m_2}(-\Delta_{\lambda,r})^{n_2} f\|_{p,d\nu_\lambda} \\ &\lesssim \sigma^\rho t^{-m_2} \|\Delta_t^{m_2}(-\Delta_{\lambda,r})^{n_2} f\|_{p,d\nu_\lambda} \end{aligned}$$

Остается доказать, что функция $n(\theta) = \|\mathcal{F}_r^\lambda(\varphi_\theta)\|_{1,d\mu_k}$ непрерывна на отрезке $[0, 1]$.

Пусть $\lambda > -1/2$,

$$\mathcal{H}_\lambda(f)(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x) j_\lambda(xy) d\nu_\lambda(x)$$

— преобразование Ганкеля четной функции f .

Для функции $\varphi_\theta(x) = \varphi_{\theta 1}(x) + x^{2r+1}\varphi_{\theta 2}(x)$, $\varphi_{\theta 1}, \varphi_{\theta 2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_+)$, получим

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_r^\lambda(\varphi_\theta)(y) &= \int_{\mathbb{R}} \varphi_{\theta 1}(x) j_\lambda(xy) d\nu_\lambda(x) + i(-1)^r y^{2r+1} \int_{\mathbb{R}} \varphi_{\theta 2}(x) j_{\lambda+2r+1}(xy) d\nu_{\lambda+2r+1}(x) \\ &= \mathcal{H}_\lambda(\varphi_{\theta 1})(y) + i(-1)^r y^{2r+1} \mathcal{H}_{\lambda+2r+1}(\varphi_{\theta 2})(y).\end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}_r^\lambda(\varphi_\theta)(y)| d\nu_\lambda(y) &\leq \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{H}_\lambda(\varphi_{\theta 1})(y)| d\nu_\lambda(y) + \int_{\mathbb{R}} |y^{2r+1} \mathcal{H}_{\lambda+2r+1}(\varphi_{\theta 2})(y)| d\nu_\lambda(y) \\ &\leq c_\lambda \int_0^\infty \left| \int_0^2 \varphi_{\theta 1}(x) j_\lambda(xy) x^{2\lambda+1} dx \right| y^{2\lambda+1} dy \\ &\quad + c_{\lambda,r} \int_0^\infty \left| \int_0^2 \varphi_{\theta 2}(x) j_{\lambda+2r+1}(xy) x^{2(\lambda+2r+1)+1} dx \right| y^{2\lambda+2r+2} dy.\end{aligned}\tag{23}$$

Так как

$$\frac{d}{dx} (j_{\lambda+1}(yx) x^{2\lambda+2}) = (2\lambda+2) j_\lambda(yx) x^{2\lambda+1},$$

то интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned}\int_0^2 \varphi_{\theta 1}(x) j_\lambda(yx) x^{2\lambda+1} dx &= \frac{1}{2\lambda+2} \int_0^2 \varphi_{\theta 1}(x) d(j_{\lambda+1}(yx) x^{2\lambda+2}) \\ &= -\frac{1}{2\lambda+2} \int_0^2 \frac{(\varphi_{\theta 1}(x))'}{x} j_{\lambda+1}(yx) x^{2\lambda+3} dx = \dots \\ &= (-1)^s \left(\prod_{j=1}^s (2\lambda+2s) \right)^{-1} \int_0^2 \varphi_{\theta 1}^{[s]}(x) j_{\lambda+s}(yx) x^{2\lambda+2s+1} dx,\end{aligned}$$

где

$$\varphi_{\theta 1}^{[s]}(x) := \frac{\frac{d}{dx} \varphi_{\theta 1}^{[s-1]}(x)}{x} \in C^\infty(\mathbb{R}_+ \times [0, 1]).$$

Так образом,

$$\left| \int_0^2 \varphi_{\theta 1}(x) j_\lambda(yx) x^{2\lambda+1} dx \right| \lesssim \frac{1}{(y+1)^{\lambda+s+1/2}}$$

при $s > \lambda + 3/2$. Аналогично,

$$\left| \int_0^2 \varphi_{\theta 2}(x) j_{\lambda+2r+1}(yx) x^{2(\lambda+2r+1)+1} dx \right| \lesssim \frac{1}{(y+1)^{\lambda+2r+1+s+1/2}}.$$

Применяя оценки (22), получим оценку

$$n(\theta) \lesssim \int_0^\infty (1+y)^{-(s-\lambda-1/2)} dy < \infty,$$

и непрерывность $n(\theta)$. Терема 4 доказана.

Приведем некоторые частные случаи неравенства (21).

Следствие 1. (С.Н. Бернштейн, С.М. Никольский) Если $\sigma > 0$, $r, n \geq 1$, $1 \leq p \leq \infty$, $f \in B_{p,\lambda}^{\sigma,r}$, то

$$\|(-\Delta_{\lambda,r})^n f\|_{p,d\nu_\lambda} \lesssim \sigma^{2n} \|f\|_{p,d\nu_\lambda}.$$

Следствие 2. Если $\sigma, \delta > 0$, $r, m \geq 1$, $1 \leq p \leq \infty$, $f \in B_{p,\lambda}^{\sigma,r}$, то

$$\omega_{m,r}(\delta, f)_{p,d\nu_\lambda} \lesssim (\sigma\delta)^{2m} \|f\|_{p,d\nu_\lambda}.$$

Следствие 3. (С.Н. Никольский, С.Б. Стечкин) Если $\sigma > 0$, $r \geq 1$, $n \geq m$, $1 \leq p \leq \infty$, $0 < t \leq 1/(2\sigma)$, $f \in B_{p,\lambda}^{\sigma,r}$, то

$$\|(-\Delta_{\lambda,r})^n f\|_{p,d\nu_\lambda} \lesssim \sigma^{2(n-m)} t^{-2m} \|\Delta_{t,r}^m f\|_{p,d\nu_\lambda}.$$

Следствие 4. (R.P. Voas) Если $\sigma > 0$, $m \geq 1$, $1 \leq p \leq \infty$, $0 < \delta \leq t \leq 1/(2\sigma)$, $f \in B_{p,\lambda}^{\sigma,r}$, то

$$\delta^{-2m} \|\Delta_{\delta,r}^m f\|_{p,B_{p,\lambda}^{\sigma,r}} \lesssim t^{-2m} \|\Delta_{t,r}^m f\|_{p,d\mu_k}.$$

4. Обратные теоремы теории приближений

Пусть

$$E_{\sigma,r}(f)_{p,d\nu_\lambda} = \inf\{\|f - g\|_{p,d\nu_\lambda} : g \in B_{p,\lambda}^{\sigma,r}\}$$

— величина наилучшего приближения функции $f \in L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$ целыми функциями экспоненциального типа не выше σ .

Как и в [10] доказывается, что величина наилучшего приближения достигается.

Теорема 5. Для любой функции $f \in L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$, $1 \leq p \leq \infty$, существует функция $g^* \in B_{p,\lambda}^{\sigma,r}$ такая, что $E_{\sigma,r}(f)_{p,d\nu_\lambda} = \|f - g^*\|_{p,d\nu_\lambda}$.

Теорема 6. Если $m, n, r \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$, то для любой $f \in L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$

$$\omega_{m,r}\left(\frac{1}{n}, f\right)_{p,d\nu_\lambda} \lesssim \frac{1}{n^{2m}} \sum_{j=0}^n (j+1)^{2m-1} E_{j,r}(f)_{p,d\nu_\lambda}. \quad (24)$$

Доказательство. По теореме 5, для любого $\sigma > 0$ и для любой $f_\sigma \in B_{p,\lambda}^{\sigma,r}$ такой, что

$$\|f - f_\sigma\|_{p,d\nu_\lambda} = E_{\sigma,r}(f)_{p,d\nu_\lambda}, \quad E_{0,r}(f)_{p,d\nu_\lambda} = \|f\|_{p,d\nu_\lambda}.$$

Для любого $s \in \mathbb{Z}_+$,

$$\begin{aligned} \omega_{m,r}(1/n, f)_{p,d\nu_\lambda} &\leq \omega_{m,r}(1/n, f - f_{2^{s+1}})_{p,d\nu_\lambda} + \omega_{m,r}(1/n, f_{2^{s+1}})_{p,d\nu_\lambda} \\ &\lesssim E_{2^{s+1},r}(f)_{p,d\nu_\lambda} + \omega_{m,r}(1/n, f_{2^{s+1}})_{p,d\nu_\lambda}. \end{aligned}$$

Используя лемму 5 из [7], получим

$$\begin{aligned} \omega_{m,r}(1/n, f_{2^{s+1}})_{p,d\nu_\lambda} &\lesssim n^{-2m} \|(-\Delta_{\lambda,r})^m f_{2^{s+1}}\|_{p,d\nu_\lambda} \\ &\lesssim \frac{1}{n^{2m}} \left(\|(-\Delta_{\lambda,r})^m f_1\|_{p,d\nu_\lambda} + \sum_{j=0}^s \|(-\Delta_{\lambda,r})^m (f_{2^{j+1}} - f_{2^j})\|_{p,d\nu_\lambda} \right). \end{aligned}$$

Тогда неравенство Бернштейна из следствия 1 влечет, что

$$\begin{aligned} \|(-\Delta_{\lambda,r})^m f_{2^{j+1}} - (-\Delta_{\lambda,r})^m f_{2^j}\|_{p,d\nu_\lambda} &\lesssim 2^{2m(j+1)} \|f_{2^{j+1}} - f_{2^j}\|_{p,d\nu_\lambda} \\ &\lesssim 2^{2m(j+1)} E_{2^j,r}(f)_{p,d\nu_\lambda}, \\ \|(-\Delta_{\lambda,r})^m f_1\|_{p,d\nu_\lambda} &\lesssim E_{0,r}(f)_{p,d\nu_\lambda}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\omega_{m,r}(1/n, f_{2^{s+1}})_{p,d\nu_\lambda} \lesssim \frac{1}{n^{2m}} \left(E_{0,r}(f)_{p,d\nu_\lambda} + \sum_{j=0}^s 2^{2m(j+1)} E_{2^j,r}(f)_{p,d\nu_\lambda} \right).$$

Принимая во внимание, что

$$\sum_{l=2^{j-1}+1}^{2^j} l^{2m-1} E_{l,r}(f)_{p,d\nu_\lambda} \geq 2^{2m(j-1)} E_{2^j,r}(f)_{p,d\nu_\lambda}, \quad (25)$$

получим

$$\begin{aligned} \omega_{m,r}(1/n, f_{2^{s+1}})_{p,d\nu_\lambda} &\lesssim \frac{1}{n^{2m}} \left(E_{0,r}(f)_{p,d\nu_\lambda} + 2^{2m} E_{1,r}(f)_{p,d\nu_\lambda} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^s 2^{2m} \sum_{l=2^{j-1}+1}^{2^j} l^{2m-1} E_{l,r}(f)_{p,d\nu_\lambda} \right) \lesssim \frac{1}{n^{2m}} \sum_{j=0}^{2^s} (j+1)^{2m-1} E_{j,r}(f)_{p,d\nu_\lambda}. \end{aligned}$$

Выбирая s таким, что $2^s \leq n < 2^{s+1}$, получим (24). Теорема 6 доказана.

Теорема 7. Если $1 \leq p \leq \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$ и при $k \in \mathbb{N}$ числовой ряд $\sum_{j=1}^\infty j^{2k-1} E_{j,r}(f)_{p,d\mu_k}$ сходится, то $f \in W_{p,\lambda}^{k,r}$ и для $m, r \in \mathbb{N}$

$$\omega_{m,r}\left(\frac{1}{n}, (-\Delta_{\lambda,r})^k f\right)_{p,d\nu_\lambda} \lesssim \frac{1}{n^{2m}} \sum_{j=0}^n (j+1)^{2(m+k)-1} E_{j,r}(f)_{p,d\nu_\lambda} \quad (26)$$

$$+ \sum_{j=n+1}^\infty j^{2k-1} E_{j,r}(f)_{p,d\nu_\lambda} \quad (27)$$

Доказательство. Докажем неравенство (26). Рассмотрим функциональный ряд

$$(-\Delta_{\lambda,r})^k f_1 + \sum_{j=0}^\infty \left((-\Delta_{\lambda,r})^k f_{2^{j+1}} - (-\Delta_{\lambda,r})^k f_{2^j} \right). \quad (28)$$

В силу неравенства Бернштейна из следствия 1

$$\|(-\Delta_{\lambda,r})^k f_{2^{j+1}} - (-\Delta_{\lambda,r})^k f_{2^j}\|_{p,d\nu_\lambda} \lesssim 2^{2k(j+1)} E_{2^j,r}(f)_{p,d\nu_\lambda} \lesssim \sum_{l=2^{j-1}+1}^{2^j} l^{2k-1} E_{l,r}(f)_{p,d\nu_\lambda}.$$

Поэтому функциональный ряд (28) сходится к функции $g \in L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$. Покажем, что $g = (-\Delta_{\lambda,r})^k f$ и $f \in W_{p,\lambda}^{k,r}$. Рассмотрим частичную сумму

$$S_N = (-\Delta_{\lambda,r})^k f_1 + \sum_{j=0}^N \left((-\Delta_{\lambda,r})^k f_{2^{j+1}} - (-\Delta_{\lambda,r})^k f_{2^j} \right).$$

Тогда

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}_r^\lambda(g), \psi)_\lambda &= (g, \mathcal{F}_r^\lambda(\psi))_\lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} (S_N, \mathcal{F}_r^\lambda(\psi))_\lambda = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} (\mathcal{F}_r^\lambda(S_N), \psi)_\lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} (|y|^r \mathcal{F}_r^\lambda(f_{2^{N+1}}), \psi)_\lambda = (|y|^k \mathcal{F}_r^\lambda(f), \psi)_\lambda, \end{aligned}$$

где $\psi \in \mathcal{S}_r(\mathbb{R})$. Следовательно, $(\mathcal{F}_r^\lambda(g), \psi)_\lambda = (|y|^r \mathcal{F}_r^\lambda(f), \psi)_\lambda$ и $g = (-\Delta_{\lambda,r})^k f$, где $g \in L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$.

Чтобы получить (26), напомним

$$\omega_{m,r}(1/n, (-\Delta_{\lambda,r})^k f)_{p,d\nu_\lambda} \leq \omega_{m,r}(1/n, (-\Delta_{\lambda,r})^k f - S_N)_{p,d\nu_\lambda} + \omega_{m,r}(1/n, S_N)_{p,d\nu_\lambda}.$$

Первые члены оцениваются следующим образом

$$\begin{aligned}\omega_{m,r}(1/n, (-\Delta_{\lambda,r})^k f - S_N)_{p,d\nu_\lambda} &\lesssim \|(-\Delta_{\lambda,r})^k f - S_N\|_{p,d\nu_\lambda} \\ &\lesssim \sum_{j=N+1}^{\infty} 2^{2k(j+1)} E_{2^j,r}(f)_{p,d\nu_\lambda} \lesssim \sum_{l=2^{N+1}}^{\infty} l^{2k-1} E_{l,r}(f)_{p,d\nu_\lambda}.\end{aligned}$$

Кроме этого, согласно следствию 2

$$\begin{aligned}\omega_{m,r}(1/n, S_N)_{p,d\nu_\lambda} &\leq \omega_{m,r}(1/n, (-\Delta_{\lambda,r})^k f_1)_{p,d\nu_\lambda} \\ &\quad + \sum_{j=0}^N \omega_{m,r}(1/n, (-\Delta_{\lambda,r})^k f_{2^{j+1}} - (-\Delta_{\lambda,r})^k f_{2^j})_{p,d\nu_\lambda} \\ &\lesssim \frac{1}{n^{2m}} \left(E_{0,r}(f)_{p,d\nu_\lambda} + \sum_{j=0}^N 2^{2(m+k)(j+1)} E_{2^j,r}(f)_{p,d\nu_\lambda} \right).\end{aligned}$$

Используя (25) и выбирая N таким образом, что $2^N \leq n < 2^{N+1}$ закончим доказательство (26). Теорема 7 доказана.

Теорема 8. Пусть $1 \leq p \leq \infty$, $m, r, n \in \mathbb{N}$. Асимптотическое равенство

$$E_{n,r}(f)_{p,d\nu_\lambda} \asymp \omega_{m,r}(1/n, f)_{p,d\nu_\lambda}$$

справедливо для любой $f \in L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$ тогда и только тогда, когда

$$\omega_{m,r}(1/n, f)_{p,d\nu_\lambda} \asymp \omega_{m+1,r}(1/n, f)_{p,d\nu_\lambda}. \quad (29)$$

Доказательство. Вначале предполагаем справедливость равенства (29). Так как [7]

$$\omega_{m,r}(nt, f)_{p,d\nu_\lambda} \lesssim n^{2m} \omega_{m,r}(t, f)_{p,d\nu_\lambda},$$

то

$$\omega_{m+1,r}(nt, f)_{p,d\nu_\lambda} \lesssim n^{2m} \omega_{m+1,r}(t, f)_{p,d\nu_\lambda}. \quad (30)$$

Это и неравенство Джексона [7] дают

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n^{2(m+1)}} \sum_{j=0}^n (j+1)^{2(m+1)-1} E_{j,r}(f)_{p,d\nu_\lambda} \\ &\lesssim \frac{1}{n^{2(m+1)}} \sum_{j=0}^n (j+1)^{2(m+1)-1} \omega_{m+1,r}\left(\frac{1}{j+1}, f\right)_{p,d\nu_\lambda} \\ &\lesssim \omega_{m+1,r}\left(\frac{1}{n}, f\right)_{p,d\nu_\lambda}.\end{aligned}$$

Кроме этого, из теоремы 6 вытекает неравенство

$$\begin{aligned}\omega_{m+1,r}\left(\frac{1}{ln}, f\right)_{p,d\nu_\lambda} &\lesssim \frac{1}{(ln)^{2(m+1)}} \sum_{j=0}^{ln} (j+1)^{2(m+1)-1} E_{j,r}(f)_{p,d\nu_\lambda} \\ &\lesssim \frac{1}{l^{2(m+1)}} \omega_{m+1,r}\left(\frac{1}{n}, f\right)_{p,d\nu_\lambda} \\ &\quad + \frac{1}{(ln)^{2(m+1)}} \sum_{j=n+1}^{ln} (j+1)^{2m+1} E_{j,r}(f)_{p,d\nu_\lambda},\end{aligned}$$

или, другими словами,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n^{2(m+1)}} \sum_{j=n+1}^{ln} (j+1)^{2m+1} E_{j,r}(f)_{p,d\nu_\lambda} \\ & \gtrsim Cl^{2(m+1)} \omega_{m+1,r}\left(\frac{1}{ln}, f\right)_{p,d\nu_\lambda} - \omega_{m+1,r}\left(\frac{1}{n}, f\right)_{p,d\nu_\lambda}. \end{aligned}$$

Применяя аналогично (30), получим

$$\frac{1}{n^{2(m+1)}} \sum_{j=n+1}^{ln} (j+1)^{2m+1} E_{j,r}(f)_{p,d\nu_\lambda} \gtrsim (Cl^2 - 1) \omega_{m+1,r}\left(\frac{1}{n}, f\right)_{p,d\nu_\lambda}.$$

Принимая во внимание монотонность $E_{j,r}(f)_{p,d\nu_\lambda}$ и выбирая l достаточно большим, для $E_{n,r}(f)_{p,d\nu_\lambda}$ и $\omega_{m,r}(1/n, f)_{p,d\nu_\lambda}$ устанавливаем асимптотическое равенство.

Чтобы доказать обратное утверждение запишем простые неравенства из [7]

$$\omega_{m+1,r}\left(\frac{1}{n}, f\right)_{p,d\nu_\lambda} \leq c \omega_{m,r}\left(\frac{1}{n}, f\right)_{p,d\nu_\lambda} \lesssim E_{n,r}(f)_{p,d\nu_\lambda} \lesssim \omega_{m+1,r}\left(\frac{1}{n}, f\right)_{p,d\nu_\lambda}.$$

Теорема 8 доказана.

5. Заключение

В статье [7] и в настоящей работе изучены прямые и обратные задачи теории приближений в пространствах $L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$ классом $B_{p,\lambda}^{\sigma,r}$ целых функций экспоненциального типа не выше σ и со свойством $f^{(2s+1)}(0)=0$, $s = 0, 1, \dots, r-1$. Это только одно из применений обобщенного гармонического анализа Данкля на прямой, зависящего от параметра $r \in \mathbb{N}$. Следующее применение обобщенного гармонического анализа Данкля будет посвящено изучению модельных интегральных операторов так как, как потенциал Рисса и преобразование Рисса.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ben Saïd S., Kobayashi T., Orsted B. Laguerre semigroup and Dunkl operators // Compos. Math. 2012. Vol. 148, no. 4. P. 1265–1336.
2. Dunkl C. F. Integral kernels with reflection group invariance // Canad. J. Math. 1991. Vol. 43. P. 1213–1227.
3. Rösler M. Dunkl operators. Theory and applications: in Orthogonal Polynomials and Special Functions // Lecture Notes in Math. Springer-Verlag, 2002. Vol. 1817. P. 93–135.
4. Gorbachev D., Ivanov V., Tikhonov S. On the kernel of the (κ, a) -Generalized Fourier transform // Forum of Mathematics, Sigma. 2023. Vol. 11: e72 1–25. Published online by Cambridge University Press: 14 August 2023. Doi: <https://doi.org/10.1017/fms.2023.69>.
5. Иванов В. И. Недеформированное обобщенное преобразование Данкля на прямой // Матем. заметки. 2023. Т. 114, № 4. С. 509–524.
6. Иванов В. И. Оператор сплетения для обобщенного преобразования Данкля на прямой // Чебышевский сборник. 2023. Т. 24, вып. 4. С. 48–62.
7. Иванов В. И. Обобщенное одномерное преобразование Данкля в прямых теоремах теории приближений // Матем. заметки. 2024. Т. 116, № 2. С. 269–284.

8. Платонов С. С. Гармонический анализ Бесселя и приближение функций на полупрямой // Изв. РАН. Сер. матем. 2007. Т. 71, № 5. С. 149–196.
9. Платонов С. С. Обобщенные сдвиги Бесселя и некоторые задачи теории приближений функций на полупрямой // Сиб. матем. журн. 2009. Т. 50, № 1. С. 154–174.
10. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Tikhonov S Yu. Positive L_p -Bounded Dunkl-Type Generalized Translation Operator and Its Applications // Constr. Approx. 2023. Vol. 49, no. 3. P. 555–605.
11. Gorbachev D. V., Ivanov V. I. Fractional Smoothness in L_p with Dunkl Weight and Its Applications // Math. Notes. 2019. Vol. 106, no. 4. P. 537–561.

REFERENCES

1. Saïd S., Kobayashi, T., Orsted, B., 2012. “Laguerre semigroup and Dunkl operators”, *Compos. Math.*, vol. 148, no. 4, pp. 1265–1336.
2. Dunkl, C. F., 1991. “Integral kernels with reflection group invariance”, *Canad. J. Math.*, vol. 43, pp. 1213–1227.
3. R’osle,r M., 2002. “Dunkl operators. Theory and applications: in Orthogonal Polynomials and Special Functions”, *Lecture Notes in Math. Springer-Verlag*, vol. 1817, pp. 93–135.
4. Gorbachev, D., Ivanov, V., Tikhonov, S., 2023. “On the kernel of the (κ, a) -Generalized Fourier transform”, *Forum of Mathematics, Sigma*, vol. 11: e72 1–25. Published online by Cambridge University Press: 14 August 2023. Doi: <https://doi.org/10.1017/fms.2023.69>.
5. Ivanov, V. I., 2023. “Undeformed generalized Dunkl transform on the line”, *Math. Notes.*, vol. 114, no. 4, pp. 509–524.
6. Ivanov, V. I., 2023. “The intertwining operator for the generalized Dunkl transform on the line”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 4, pp. 48–62.
7. Ivanov, V. I., 2024. “Generalized one-dimensional Dunkl transform in direct problems of approximation theory”, *Math. Notes.*, vol. 116, no. 2, pp. 269–284.
8. Platonov, S. S., 2007. “Bessel harmonic analysis and approximation of functions on the half-line”, *Izv. Math.*, vol. 71, no. 5, pp. 1001–1048.
9. Platonov, S. S., 2009. “Bessel generalized translations and some problems of approximation theory for functions on the half-line”, *Siberian Math. J.*, vol. 50, no. 1, pp. 123–140.
10. Gorbachev, D. V., Ivanov, V. I., Tikhonov, S Yu., 2019. “Positive L_p -Bounded Dunkl-Type Generalized Translation Operator and Its Applications”, *Constr. Approx.*, vol. 49, no. 3, pp. 555–605.
11. Gorbachev, D. V., Ivanov, V. I., 2019. “Fractional Smoothness in L_p with Dunkl Weight and Its Applications”, *Math. Notes.*, vol. 106, no. 4, pp. 537–561.

Получено: 17.02.2024

Принято в печать: 28.06.2024

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 25. Выпуск 2.

УДК 517

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-2-82-101

Устойчивость выработки в блочных средах¹

А. Я. Канель-Белов, В. О. Кирова

Канель-Белов Алексей Яковлевич — Магнитогорский государственный технический университет имени Г. И. Носова (г. Магнитогорск).

e-mail: Kanelster@gmail.com

Кирова Валерия Орлановна — Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (г. Москва).

Kirova_vo@mail.ru

Аннотация

При решении вопроса об устойчивости выработки часто сталкиваются с ситуацией, когда разрушение происходит только за счет движения цельных блоков, а не их разрушения, из-за прочности породы и горного давления. В таком случае возникает вопрос о том, способна ли форма блока (и выработанного пространства рядом с ним) двигаться под действием силы тяжести или горного давления внутрь выработки. Важно учесть роль сил трения и определить относительное число опасных блоков, которые могут выпасть в выработку. Аналогичные проблемы возникают при изучении разломов, когда выдвинувшиеся блоки могут препятствовать движению вдоль разлома. Для решения задач, связанных с кинематикой блока при учете указанных сил, были разработаны решения, представленные в работах Гудмана и Ши-Ген-Хуа. В данной статье представлен краткий обзор метода Гудмана с модифицированными доказательствами основных теорем, а также рассмотрены задачи, связанные с определением среднего числа опасных блоков. Предполагается, что трещины группируются в конечное число систем взаимнопараллельных трещин, которые моделируются плоскостями. Рассматриваются две модели - пуассоновская и равноотстоящая, отличающиеся распределением расстояний между трещинами.

Ключевые слова: Эргодический подход, эргодическая теорема

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:

А. Я. Канель-Белов, В. О. Кирова. Устойчивость выработки в блочных средах // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 2, с. 82–101.

¹Работа выполнена при поддержке гранта РНФ 22-19-20073.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 25. No. 2.

UDC 517

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-2-82-101

Stability of production in block environments

A. Ya. Kanel-Belov, V. O. Kirova

Kanel-Belov Alexey Yakovlevich — Nosov Magnitogorsk State Technical University (Magnitogorsk).

e-mail: Kanelster@gmail.com

Kirova Valeria Orlanovna — National Research University “Higher School of Economics” (Moscow).

Kirova_vo@mail.ru

Abstract

When solving the issue of the stability of workings, they often face a situation where destruction occurs only due to the movement of solid blocks, and not their destruction, due to the strength of the rock and rock pressure. In this case, the question arises as to whether the shape of the block (and the worked-out space next to it) is capable of moving under the influence of gravity or rock pressure into the workings. It is important to take into account the role of friction forces and determine the relative number of dangerous blocks that can fall into the mine. Similar problems arise when studying faults, when protruding blocks can impede movement along the fault. To solve problems related to the kinematics of the block, taking into account these forces, the solutions presented in the works of Goodman and Shi-Gen-Hua were developed. This article provides a brief overview of the Goodman method with modified proofs of the main theorems, as well as the tasks associated with determining the average number of dangerous blocks. It is assumed that cracks are grouped into a finite number of systems of mutually parallel cracks, which are modeled by planes. Two models are considered - Poisson and equidistant, differing in the distribution of distances between cracks.

Keywords: Ergodic approach, ergodic theorem

Bibliography: 16 titles.

For citation:

A. Ya. Kanel-Belov, V. O. Kirova, 2024. “Stability of production in block environments”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 2, pp. 82–101.

1. Основные положения метода Гудмана**1.1. Теоремы Shi-Gen-Hua**

Изложим в несколько модифицированном виде основные положения этого метода, ограничившись вначале для простоты случаем, когда можно не учитывать влияние сил трения.

Рассмотрим прежде всего один отдельно взятый блок B . Каковы возможные направления его движения?

Во-первых, блок может двигаться только в ту сторону от своей грани, не выходящей полностью на поверхность выработки, где находится он сам (иначе блок упрется в окружающую породу). С каждой гранью, таким образом, связано полупространство направлений. Вектор возможного перемещения должен принадлежать пересечению всех этих полупространств. Если это пересечение нулевое, то блок в заклинен, если нет — то он может двигаться.

Таким образом, если знать направления всех граней блока, то вопрос о его подвижности можно решить, однако в действительности мы знаем только направления тех граней блока, которые примыкают к поверхности выработки.

В этом случае условия, задаваемые такими гранями — первую группу условий называют *условиями незаклиненности* и вместо рассмотрения остальных граней блока, рассматривают вторую группу условий.

Если, блок B движется, то какая-то из его граней Γ , выходящая на поверхность выработки, движется вглубь выработки. мы должны взять для каждой точки границы Γ множество направлений движения, ведущих вглубь выработки.

Направление реального движения $\vec{v}$ лежит в каждом таком множестве, а, следовательно, и в их пересечении имеем второе условие.

Если рассматривать выражение блока B под действием только силы тяжести, то множество направлений, удовлетворяющим только первым двум условиям нужно пересечь с полупространством направлений, ведущих вниз; если $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ — вектор такого перемещения, то $\bar{z} < 0$.

THEOREM 1 (Shi-Gen-Hua.). *Блок B является замковым тогда и только тогда, когда пересечение множеств направлений, задаваемых всеми условиями — непусто. Замковым называется блок, который может двигаться.*

В чем идея доказательства? Рассмотрим грани блока, примыкающие к поверхности выработки $\Gamma_1, \dots, \Gamma_l$. Пусть Π_i — полупространство направлений, разрешенных Γ_i . Если Γ_i продолжить мысленно вглубь породы, то их пересечение образует область, содержащую B . Если эта область O сама по себе может двигаться вглубь выработки, то блок B и подавно: он получается из O сечением полупространствами, соответствующими его остальным граням. На самом деле верно и обратное. Назовем блок в бесконечным, если область O , соответствующая блоку, бесконечна (выработку мы считаем полупространством).

THEOREM 2. *Блок B подвижен только тогда, когда он конечный.*

Рассмотрим теперь случай, когда выработка представляет собой полупространство. Пусть оно задано уравнением $z \leq 0$. множество направлений возможного перемещения блока можно представить чисто геометрически.

Пусть α_i — плоскости граней Γ_i . Перенесем плоскости $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ параллельно самим себе в точку 0. Тогда получим конус направлений, в которых грани $\Gamma_1, \dots, \Gamma_l$ разрешают блоку B двигаться, образованный пересечением образов полупространств Π_i при этом переносе.

Множество направлений, ведущих вглубь выработки, можно отождествлять с множеством лучей исходящих из точки 0 (см.рис.). так, что множество векторов возможного перемещения можно отождествлять с конусом. Поскольку направления вектора можно естественным образом отождествлять с точкой на единичной сфере, то конусу направлений возможных перемещений соответствует область на единичной сфере. Гудман и Shi-Gen-Hua изображают эту область на плоскости с помощью стереографической проекции. При этом множество направлений возможных перемещений изображаются как сферический многоугольник.

Мы же воспользуемся центральной проекцией. между множеством всех лучей: соответствующим допустимым направлениям движения и множеством точек плоскости $\beta : z = -I$ имеет место взаимно-однозначное соответствие: каждому лучу соответствует точка его пересечений с плоскостью β и обратно. При этом конусу направлений возможного движения соответствует многоугольник M на плоскости β . Пусть $\tilde{x}, \tilde{y}$ — координаты на плоскости β , если $A(x, y, -I)$ — точка на плоскости β , то $\tilde{x}(A) = x, \tilde{y}(A) = y$.

Полупространству направлений

$$a_i x + b_i y + c_i z \leq 0$$

соответствует полуплоскость

$$\tilde{a}_i x + \tilde{b}_i y + \tilde{c}_i z \geq 0.$$

1.2. Аналитическое описание множества направлений возможного перемещения. Графическое представление этого множества

Дадим вначале аналитическое описание первой группы условий.

Пусть $a_i x + b_i y + c_i z = d_i$ – уравнение плоскости грани Γ_i ; ограничимся вначале случаем выпуклого блока B . Пусть тогда блок B лежит в полупространстве $a_i x + b_i y + c_i z \leq d_i$. Пусть $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ – один из векторов возможного перемещения B . Тогда

$$a_i x + b_i y + c_i z \leq 0. \quad (1)$$

Неравенство выше определяет полупространство направлений, разрешенных Γ_i .

Таким образом, множество векторов $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, удовлетворяющие первой группе условий будет задаваться системой неравенств:

$$\begin{cases} a_1 \bar{x} + b_1 \bar{y} + c_1 \bar{z} \leq 0 \\ \vdots \\ a_s \bar{x} + b_s \bar{y} + c_s \bar{z} \leq 0 \end{cases} \quad (2)$$

где знак $\leq$ или $\geq$ стоит в зависимости от того, лежит ли блок B в полупространстве

$$a_i \bar{x} + b_i \bar{y} + C_i \bar{z} \leq e_i$$

или в полупространстве

$$a_i \bar{x} + b_i \bar{y} + C_i \bar{z} \geq e_i.$$

Перейдем теперь к аналитическому описанию второй группы условий.

Если выработка полупространство

$$Ax + By + Cz \leq d,$$

то к первой группе условий следует добавить неравенство:

$$A\bar{x} + B\bar{y} + C\bar{z} \leq 0 \quad (3)$$

Камера в окрестности ребра задается двумя неравенствами:

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z \leq D_1 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z \geq D_2. \end{cases}$$

Поэтому к неравенствам первой группы для блока, находящегося на ребре камеры нужно добавить неравенства:

$$\begin{cases} A_1 \bar{x} + B_1 \bar{y} + C_1 \bar{z} \leq 0 \\ A_2 \bar{x} + B_2 \bar{y} + C_2 \bar{z} \geq 0. \end{cases} \quad (4)$$

Если камера в окрестности угла задается неравенствами

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z \leq D_1 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z \geq D_2 \\ A_3 x + B_3 y + C_3 z \leq D_3 \end{cases}$$

то к неравенствам первой группы следует добавить

$$\begin{cases} A_1\bar{x} + B_1\bar{y} + C_1\bar{z} \leq 0 \\ A_2\bar{x} + B_2\bar{y} + C_2\bar{z} \geq 0 \\ A_3\bar{x} + B_3\bar{y} + C_3\bar{z} \leq 0. \end{cases} \quad (5)$$

Аналогичные ограничения получены также в [6] для выработок разной формы.

Наконец, дополнительное условие выпадения под действием силы тяжести описывается неравенством $\bar{z} \leq 0$. Рассмотрим теперь этот случай.

Рассмотрим плоскость β . множество точек, соответствующее направлениям возможного перемещения задается неравенствами:

$$\begin{cases} A_1\tilde{x} + B_1\tilde{y} + C_1 \geq 0 \\ \dots \\ A_1\tilde{x} + B_1\tilde{y} + C_1 \leq 0 \end{cases} \quad (6)$$

где знак соответствующего неравенства из (6) противоположен соответствующему знаку из (2).

Аналогичным образом переписываются неравенства (3):

$$A\tilde{x} + B\tilde{y} + C \geq 0, \quad (7)$$

$$\begin{cases} A_1\tilde{x} + B_1\tilde{y} + C_1 \geq 0 \\ A_2\tilde{x} + B_2\tilde{y} + C_2 \leq 0, \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} A_1\tilde{x} + B_1\tilde{y} + C_1 \geq 0 \\ A_2\tilde{x} + B_2\tilde{y} + C_2 \leq 0 \\ A_3\tilde{x} + B_3\tilde{y} + C_3 \geq 0. \end{cases} \quad (9)$$

Блок B является неподвижным, если множество векторов возможного перемещения нулевого, либо многоугольник $M = \emptyset$, либо объединенная система неравенств (6),(7) несовместна. Либо, что то же самое, несовместна система неравенств (2),(3).

Для теоретических целей удобнее иметь геометрическое представление, для вычислений – алгебраическое.

1.3. Учет сил трения

Пусть на блок B действует результирующая сила $\vec{R}$. Грань Γ позволяет B двигаться, если угол между $\vec{R}$ и нормалью к Γ больше $\Phi_{\text{тр}}$. Утверждается, что блок B может двигаться, если это ему позволяет каждая его грань.

Множество направлений $\vec{R}$, в которых блок B может двигаться определяется как пересечение множеств разрешенных Γ_i и изображается графически. Решается задача о минимальной опорой силе, требуемой для поддержания устойчивости блока и ее направлений.

1.4. Решение вопроса об устойчивости блока по его следу

В случае, если трещины группируются в конечное число систем и находятся в общем положении, то можно решать вопрос об устойчивости блока по его следу. рассмотрим в начале для простоты случай, когда выработка полупространство. тогда пересечение системы трещин с поверхностью выработки есть система параллельных отрезков и сечения разных систем почти наверняка представляют собой системы отрезков по разному направлению. Зная направление каждой системы можно по следу трещины определить, какой системе она принадлежит, а тем самым и ее направление.

На подвижность блока B , таким образом, в случае учета сил трения оказывает влияние только его *тип*, т.е. набор систем трещин, образующий грани B , с учетом того, по какую сторону от грани лежит сам блок – это следует из теоремы Shi-Gen-ния и теории Гудмана. Таким образом, по следу блока можно определить его тип, а тем самым и его подвижность.

Поскольку типов конечное число, то можно составить каталог с помощью которого по следу блока легко определять, опасен он или нет.

Поскольку блоков много, много больше числа типов, каталог выгодно составить один раз. Это обстоятельство позволяет резко сократить трудоемкость оценки устойчивости.

Поскольку, в зависимости от направления выработки и коэффициентов трения разные типы блоков могут являться опасными, возникает задача отыскания распределения блоков по типам.

2. Оценки для относительного числа опасных блоков

В этом параграфе рассматривается случай, когда выработка полупространство. В этом случае полупространство выработки и полупространство, занятое породой, можно поменять местами. Возникающая симметрия используется для получения оценок на число опасных блоков.

Покажем, что относительное число замковых блоков не превосходит 30%. В самом деле: продолжим плоскости трещин вглубь выработки и затем произведем симметрию относительно поверхности выработки. От этой процедуры ни углы между трещинами, ни углы между трещинами и поверхностью выработки, ни статистические свойства трещин не изменяются.

При этом каждому блоку B соответствует блок B' с тем же следом. Если блок B был подвижным, то покажем, что блок B' будет неподвижным, тем самым будет получена оценка в 50% как по количеству блоков, так и по относительной площади следов.

Покажем, что блок B' неограниченный. В самом деле: если у B' продолжить грани Γ_i , примыкающие к поверхности и перенести все полупространства Π_i соответствующие Γ_i в одну точку, то в пересечении их полупространством, занятым породой, Получится конус, отличающийся от конуса направлений движения блока B симметрии относительно поверхности выработки. Но раз блок B подвижен, то этот конус не пуст и значит если у B' продолжить плоскости Γ_i , то их пересечение с полупространством породы неограниченно. Имеем следующую теорему:

THEOREM 3. *В случае, когда выработка есть полупространство: относительное число подвижных блоков не больше 50%. относительная площадь их оснований также не больше 50%.*

Если участок выработки выпуклый, то он отличается от полупространства лишней породой, что не способствует подвижности взятого блока B и таким образом, число замковых блоков и подавно не больше 50%.

Естественно возникает вопрос о точности оценки. если след блока треугольник, то неподвижному блоку соответствует подвижный. В самом деле: пересечение полупространств Π_1, Π_2, Π_3 (как, в прочем и любых трех, у которых границы не параллельны одной прямой, а мы предполагаем случай общего положения) есть бесконечный конус K . Ясно, что либо пересечение K с полупространством, занятым выработкой, либо с полупространством занятым породой бесконечно. В первом случае блок B замковый, во втором – B' .

Что можно сказать о блоках, след которых – многоугольник? Можно привести пример блока B , след которого – четырехугольник такого, что и B' и B заклинены.

Преобразование, описанное выше (продолжение внутрь и симметрия) поворачивает плоскости трещин на 180° относительно оси OZ' перпендикулярной поверхности выработки. Естественно рассмотреть, что будет, если это преобразование делать не со всеми системами.

Нетрудно убедиться, что тогда статистические свойства среды вообще говоря, изменятся. В частности, это почти наверняка произойдет в случае, если трещины группируются в системы.

Однако такое преобразование можно производить для случая разбиения пространства пуассоновским полем плоскостей. В этом случае можно получить некоторые дополнительные оценки на число замковых блоков, поскольку блок и преобразованный равновероятны.

Пусть многоугольник M является следом блока B , $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ – грани B , примыкающие к сторонам M , и $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ – плоскости, проходящие через эти грани. Каждую плоскость α_i можно заменить на симметричную относительно γ – плоскости поверхности выработки плоскость α'_i с тем же следом.

Получаются различные блоки. Какое относительное число λ замковых? Оно зависит от направлений $\alpha_1, \dots, \alpha_k$. Приведем оценки.

Во-первых, $\lambda \leq I/2$, причем равенство может достигаться при любом числе сторон K .

Пример. Случай, когда $\lambda = I/2$. Эти грани почти перпендикулярны к поверхности выработки. Их преобразование ничего не дает. Все определяет преобразование α_1 .

С другой стороны, покажем, что для n -угольников $\lambda \geq 2^{-n}$. Для этого достаточно показать, что среди 2^n блоков, отличающихся друг от друга описанным выше преобразованием, есть хотя бы один замковый.

Рассмотрим плоскость $\beta : z' = -I$ и введем координаты $(\tilde{x}, \tilde{y})$ на плоскости β . Оси (OZ) соответствует точка на плоскости $\beta(0; 0)$; а каждой плоскости α_i соответствует полуплоскость $\Gamma_i : A_i \tilde{x} + b_i \tilde{y} + \tilde{c}_i \leq 0$ или $a_i x + b_i y + c_i \geq 0$.

Плоскости α'_i соответствует полуплоскость: $a_i \tilde{x} + b_i \tilde{y} + (-c_i) \leq 0$ или $a_i \tilde{x} + b_i \tilde{y} + (-c_i) \geq 0$ с заменой c_i на $-c_i$. Тем самым с помощью описанных выше преобразований можно добиться того, что точка $(0, 0)$ будет принадлежать пересечению полуплоскостей разрешенных каждой гранью направлений и тем самым обеспечит подвижность.

С другой стороны, если M есть пересечение $K = K/3$ треугольников и не имеет параллельных сторон, то в этом случае $\lambda \leq 2^{-k_1}$ поскольку для заклиненности достаточно, чтобы заклинивали три грани.

Последняя оценка, вытекает из независимости систем и из соображений эргодичности и в равноотстоящей или пуассоновской, модели для случая конечного числа систем.

3. Отыскание распределения блоков по типам

Мы предполагаем, что трещины группируются в конечное число систем, а выработка – полупространство.

Из теории Гудмана следует, что на подвижность блока оказывает влияние только его тип, т.е. номера систем трещин, следы которых ограничивают след блока, с указанием полупространств, в которых лежит сам блок. Знание распределения блоков по типам важно для понимания геометрии массива. Поскольку тип блока определяется его следом, то фактически задача нахождения распределения блоков по типам является двумерной (а если рассмотреть теорию Гудмана в плоском случае – то линейной). Отметим, что задача, решенная в п. 4 параграфа 3 (определение числа монолитных блоков первого порядка) является частным случаем задачи нахождения распределения блоков по типам.

3.1. Определение понятий, необходимых в дальнейшем

Дадим строгое определение понятия *типа*.

Пусть уравнения плоскостей i -ой системы имеют вид:

$$a_i x + b_i y + c_i z = \text{const.} \quad (10)$$

Тип блока B – это набор пар чисел

$$\{(i_1, e_1), (i_2, e_2), \dots, (i_k, e_k)\}$$

где $i_1, \dots, i_k$ – номера систем, образующих грани B , след которых образует стороны M – следа B . При этом $e_\alpha = +I$, если B лежит в полупространстве $a_{i_\alpha}x + b_{i_\alpha}y + c_{i_\alpha}z \leq d_\alpha$,

где $a_{i_\alpha}x + b_{i_\alpha}y + c_{i_\alpha}z = d_\alpha$ – уравнение α -й грани B и $e_\alpha = -I$, если B лежит в полупространстве $a_{i_\alpha}x + b_{i_\alpha}y + c_{i_\alpha}z \geq d_\alpha$.

Сформулируем теперь понятие типа в терминах только следов.

Пусть поверхность выработки задается равенством $z = 0$, а внутренность – неравенством $z < 0$. В этом случае *пересечение поверхности выработки* с полупространством $a_{i_\alpha}x + b_{i_\alpha}y + c_{i_\alpha}z \leq d_\alpha$ есть полуплоскость $a_{i_\alpha}x + b_{i_\alpha}y \leq d_\alpha$. Назовем полуплоскость *нижней*, если она соответствует неравенству $\leq$, и *верхней*, если она соответствует неравенству $\geq$, и тем самым определим величины e_α : $e_\alpha = +I$, если M лежит в верхней полуплоскости, и $e_\alpha = -I$, если M лежит в нижней.

В плоском случае теории Гудмана, т.е. когда пространство, занятое породой полагается полуплоскостью, его граница – прямой, а след блока – отрезком, след системы трещин – система точек, тип блока можно определить как пару (i, j) , где i – номер системы, содержащей начало отрезка, а j – номер системы, содержащей его конец.

3.2. Отыскание распределения блоков по типам

В данном параграфе все рассуждения проводятся только для поверхности выработки, трещины и блоки отождествляются с их следами.

3.3. Введение необходимых величин

Выберем 0 – начало координат, прямые i -ой системы будут задаваться уравнениями

$$a_i x + b_i y = \text{const},$$

$$a_i^2 + b_i^2 = I,$$

и d_i – средние расстояния между соседними прямыми i -ой системы.

Уравнения двух прямых i -ой системы, ближайших к точке 0, имеют вид:

$$a_i x + b_i y = h_i^+; \quad a_i x + b_i y = -h_i^-, \quad (11)$$

где $h_i^+, h_i^- \geq 0$. В равноотстоящей модели $h_i^+ + h_i^- = d_i$. Почти наверняка $h_i^+, h_i^- > 0$.

С i -ой системой связан линейный функционал $f_i(x, y) = a_i x + b_i y$, представляющий собой проекцию вектора с координатами (x, y) на нормаль к i -ой системе. Уравнение прямой i -ой системы имеет вид. $f_i(x, y) = \text{const}$.

Пусть $(X_{ij}(h_i, h_j), Y_{ij}(h_i, h_j))$ – точка пересечения прямых $A_i x + b_i y = h_i$ и $A_j x + b_j y = h_j$. Тогда

$$X_{ij} = \frac{b_j h_i - b_i h_j}{b_j A_i - b_i A_j}, Y_{ij} = \frac{-A_j h_i + A_i h_j}{b_j A_i - b_i A_j}. \quad (12)$$

Пусть φ_{ijk} – проекция вектора (X_{ij}, Y_{ij}) на нормаль к k -ой системе. Тогда

$$\varphi_{ijk} = A_k X_{ij} + b_k Y_{ij}$$

или

$$\varphi_{ijk} = \frac{b_j A_k - b_k A_j}{b_j A_i - b_i A_j} \cdot h_i + \frac{b_k A_i - b_i A_k}{b_j A_i - b_i A_j} \cdot h_j, \quad (13)$$

или $\varphi_{ijk} = \lambda_{ijk} h_i + \lambda_{jik} h_j$, где

$$\lambda_{ijk} = \frac{b_j A_k - b_k A_j}{b_j A_i - b_i A_j} = \frac{\begin{vmatrix} A_k & b_k \\ A_j & b_j \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_k & b_k \\ A_j & b_j \end{vmatrix}}. \quad (14)$$

Проекция Π_l многоугольника M на нормаль к l -й системе равна

$$\Pi_l = \max f_l(B_i) - \min f_l(B_i), \quad (15)$$

где $B_l, \dots, B_k$ — вершины M . Соотношение (15) можно переписать в несколько другом виде:

$$\begin{aligned} \Pi_l &= \max \varphi_{ijl}(\tilde{h}_i, \tilde{h}_j) - \min \varphi_{ijl}(\tilde{h}_i, \tilde{h}_j), \\ \Pi_l &= \max(\lambda_{ijl} h_i - \lambda_{jil} h_j) - \min(\lambda_{ijl} h_i - \lambda_{jil} h_j), \end{aligned} \quad (16)$$

где максимум и минимум берутся по парам систем (i, j) , образующих вершины M .

Через $\overline{\max}$ (и, соответственно, $\overline{\min}$ будем обозначать второй по величине элемент набора.

3.4. Выражения для относительного числа блоков данного типа

Мы будем рассматривать распределения с точки зрения площадного закона, т.е. в предположении, что данная точка о содержит многоугольник M .

В общих чертах отличие между натуральным и площадным законами можно объяснить так: точка 0 попадает в многоугольник M с кратностью, пропорциональной его площади. Выпишем теперь условия пересечения прямой с многоугольником M .

Прямая $L : a_k x + b_k y = h$ пересекает M , если

$$\min_{ijk} h \leq h \leq \max_{ijk} h, \quad (17)$$

и отсекает одну вершину, образуя многоугольник M' , у которого на одну вершину больше, чем M , если

$$\overline{\max}_{ij} \varphi_{ijk} < -h < \max_{ij} \varphi_{ijk}$$

— верхнее отсечение угла, либо

$$\overline{\min}_{ij} \varphi_{ijk} < -h < \min_{ij} \varphi_{ijk}$$

— нижнее отсечение угла.

Пусть 0 — начало координат, M — многоугольник, содержащий 0 . С каждой i -й системой связаны величины h_i^+, h_i^- .

k -я система добавляет к M только верхнюю сторону, если верны неравенства

$$\overline{\max}_{ij} \varphi_{ijk} < -h^+ < \max_{ij} \varphi_{ijk},$$

$$-h^- < \min_{ij} \varphi_{ijk},$$

и только нижнюю сторону, если верны неравенства:

$$\overline{\min}_{ij} \varphi_{ijk} > -h^+ > \min_{ij} \varphi_{ijk},$$

$$-h^+ > \min_{ij} \varphi_{ijk}.$$

Добавляются и верхняя и нижняя стороны, если

$$\overline{\max}_{ij} \varphi_{ijk} < -h^+ < \max_{ij} \varphi_{ijk},$$

$$\overline{\min}_{ij} \varphi_{ijk} > -h^- > \min_{ij} \varphi_{ijk}.$$

Наконец, прямая k -й системы не пересекает M , если

$$-h^- < \overline{\min}_{ij} \varphi_{ijk},$$

$$-h^+ < \overline{\max}_{ij} \varphi_{ijk}.$$

Поскольку $0 \in M$, $\max_{ij} \varphi_{ijk} > 0$, $\min_{ij} \varphi_{ijk} < 0$.

Выпишем теперь формулу для вероятности P_l того, что многоугольник M не пересечен прямыми l -ой системы.

Для равноотстоящей модели:

$$P^{\text{равн}}(M) = (d_l - \Pi_l M) / d_l, \quad \text{где } X^+ = \begin{cases} X & \text{при } X > 0, \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases} \quad (18)$$

где d_l – расстояние между соседними следами l -ой системы.

Для пуассоновской модели:

$$P_l^{\text{Пуасс}}(M) = \exp(-\Pi_l M / d_l). \quad (19)$$

Воспользовавшись выражением (16) для проекции $\Pi_l M$ многоугольника M на нормаль к l -ой системе, равенства (18),(19) можно переписать в виде:

$$P^{\text{равн}}(M) = \left(d_l + \min \varphi_{ij\bar{l}} \max \varphi_{ijl} \right)^+ / d_l, \quad (20)$$

$$P^{\text{Пуасс}}(M) = \exp \left[\left(\min \varphi_{ij\bar{l}} \max \varphi_{ijl} \right) / d_l \right]. \quad (21)$$

Рассмотрим разбиение плоскости системами прямых и многоугольник разбиения M , содержащий точку 0 . Его тип, т.е. какими системами образованы его стороны – зависит, конечно, от значения параметров h_i^+ , h_i^- , характеризующих сдвиг. Поскольку направления прямых постоянны, меняются только параметры сдвига, важно выяснить зависимость типа M от значений h_i .

Пусть $D_{\mathfrak{Y}}$ – множество наборов h_i^+ , h_i^- , соответствующих данному типу $\mathfrak{Y}$.

Пусть стороны любого многоугольника M образуют системы с номерами $i_1, \dots, i_m$. Забудем временно про другие системы, тогда через $\hat{D}_{\mathfrak{Y}}$ мы обозначим множество значений параметров $h_{i_1}, \dots, h_{i_m}$ таких, что точка 0 попадает в многоугольник M типа $\mathfrak{Y}$. В равноотстоящем случае $h_i^+ + h_i^- = d_i$, поэтому h_i^+ определяют h_i^- и мы будем рассматривать множества $\bar{D}_{\mathfrak{Y}}$, $\hat{\bar{D}}_{\mathfrak{Y}}$ значений параметров h_i^+ в этом случае.

Относительное число блоков типа $\mathfrak{Y}$ в равноотстоящем случае с точки зрения площадного закона $\mathfrak{N}_{\mathfrak{Y}}^{\text{равн}}$ в равноотстоящей модели равно:

$$\mathfrak{N}_{\mathfrak{Y}}^{\text{равн}} = \frac{I}{D_{i_1} \dots D_{i_k}} \int_{\hat{D}_{\mathfrak{Y}}} \prod_{l \neq i_1 \dots i_k} P^{\text{равн}} d_{i_1} \dots d_{i_k}. \quad (22)$$

Смысл этого равенства состоит в том, что вероятность для M иметь тип $\mathfrak{Y}$ ищется как произведение вероятностей того, что системы с номерами $i_1, \dots, i_k$ действительно образуют многоугольник M типа $\mathfrak{Y}$ и вероятности того, что остальные системы не пересекают M .

Мы воспользовались теоремой эргодичности.

Воспользовавшись равенством (18), формулу (22) можно переписать в виде:

$$\mathcal{N}_{\mathfrak{Y}}^{\text{равн}} = I/D \cdot \int_{\hat{D}_{\mathfrak{Y}}} \prod_{l \neq i_1, \dots, i_k} [d_l - \max \varphi_{ijl} + \min \varphi_{ijl}] dh_{i_1} \dots dh_{i_k},$$

где

$$D = \prod_{i=1}^n d_i. \quad (23)$$

В Пуассоновской модели для относительного числа $\mathcal{N}_{\mathfrak{Y}}^{\text{Пуасс}}$ справедлива формула:

$$\mathcal{N}_{\mathfrak{Y}}^{\text{Пуасс}} = I/D \cdot \int_{\hat{D}_{\mathfrak{Y}}} P_1^{\text{Пуасс}} \dots P_n^{\text{Пуасс}} dh_{i_1}^{e_1} \dots dh_{i_k}^{e_k}, \quad (24)$$

где $i_1, \dots, i_k$ – системы, образующие тип $\mathfrak{Y}$, e_i – это $+$ или $-$. Присутствуют те $dh_{\alpha}^{\pm}$, у которых прямые $a_{\alpha}x + b_{\alpha}y = -h_{\alpha}^{-}$ или $a_{\alpha}x + b_{\alpha}y = h_{\alpha}^{+}$ образуют тип $\mathfrak{Y}$.

Смысл равенства (24) заключается в следующем: рассматриваются значения параметров $h_{i_k}^e$, которым соответствует набор прямых, образующих стороны многоугольника данного типа. Однако, этого мало, нужно еще, чтобы M не был пересечен другими прямыми. Поскольку модель пуассоновская, нужно учесть и возможность пересечения прямыми самих систем с номерами $i_1, \dots, i_k$, соответствующие вероятности равны $P_{i_1}^{\text{Пуасс}}, \dots, P_{i_k}^{\text{Пуасс}}$ прямые i -й системы ничего не знают друг про друга.

Равенство (24) можно переписать в виде:

$$\mathcal{N}_{\mathfrak{Y}}^{\text{Пуасс}} = \int_{\hat{D}_{\mathfrak{Y}}} \exp \left(-l \sum \Pi_1(M)/d_1 \right) dh_{i_1}^{e_1} \dots dh_{i_k}^{e_k}, \quad (25)$$

или в виде

$$\mathcal{N}_{\mathfrak{Y}}^{\text{Пуасс}} = \int_{\hat{D}_{\mathfrak{Y}}} \exp \left(-l \sum_l \frac{\max_{ij} \varphi_{ijl} - \min_{ij} \varphi_{ijl}}{d_l} \right) dh_{i_1}^{e_1} \dots dh_{i_k}^{e_k}. \quad (26)$$

Чтобы перейти от площадного закона к натуральному, нужно учесть, что в формулах (22),(24) каждый блок учитывается с кратностью пропорциональной площади. Пусть $\bar{S}$ – средняя площадь блока. Для натурального закона формулы (22),(24) переписутся в следующем виде. Для равноотстоящей модели:

$$\hat{\mathcal{N}}_{\mathfrak{Y}}^{\text{равн}} = \bar{S}/D \cdot \int_{\hat{D}_{\mathfrak{Y}}} \prod_{l \neq i_1 \dots i_k} S(M)^{-l} [d_l - \max \varphi_{ijl} + \min \varphi_{ijl}]^{+} dh_{i_1} \dots dh_{i_k}.$$

Для пуассоновской модели:

$$\hat{\mathcal{N}}_{\mathfrak{Y}}^{\text{Пуасс}} = \bar{S}/D \cdot \int_{\hat{D}_{\mathfrak{Y}}} \exp \left(-l \sum_l \frac{\max_{ij} \varphi_{ijl} - \min_{ij} \varphi_{ijl}}{d_l} \right) dh_{i_1}^{e_1} \dots dh_{i_k}^{e_k} S(M)^{-l},$$

где $S(M)$ – площадь многоугольника M типа $\mathfrak{Y}$, образованного системами с номерами $i_1, \dots, i_k$.

Однако задача определения $S(M)$ не очень проста: чтобы избежать определения $S(M)$ при нахождении натурального закона распределения блоков по типам, следует пойти другим путем.

Мы будем определять относительное число блоков данного типа $\mathfrak{Y}$. Перенумеровав системы, можно считать, что тип $\mathfrak{Y}$ образован системами с номерами $1, \dots, k$ причем направления систем с номерами $1, \dots, k$ меняется по часовой стрелке.

Кроме того, одна из вершин M образована пересечением прямых первой и второй системы. Взяв эту точку 0 за начало координат и выбрав подходящим образом направление осей, получим $h_1 = h_2 = 0$ и кроме того e_1, e_2 имеют значение $+$.

Пусть τ_{12} – количество точек пересечения первой и второй систем в пересечении на единицу площади (или, что тоже самое количество $1, 2$ - элементарных блоков).

Относительное число блоков данного типа $\mathfrak{Y}$ с точки зрения натурального закона мы будем искать так: для каждой точки 0 пересечения прямых первой и второй системы, рассмотрим многоугольник M с вершиной 0 (один из четырех) такой, что e_1 и e_2 имеют значение $+$ (и $h_1^- = h_2^- = 0$). Найдем вероятность $P_{\mathfrak{Y}}$ того, что M имеет тип $\mathfrak{Y}$. Относительное число блоков типа $\mathfrak{Y}$ в единице объема, таким образом, равно $P_{\mathfrak{Y}} \cdot V_{cp} \tau_{12}$ а относительное число блоков типа $\mathfrak{Y}$ с точки зрения натурального закона равно $P_{\mathfrak{Y}} \cdot \tau_{12} / \tau$, где $\tau = V_{cp}^{-1}$ – это относительное число блоков в единице объема. Таким образом, относительное число блоков типа $\mathfrak{Y}$ равно $P_{\mathfrak{Y}} \cdot V_{cp} \tau_{12}$, и задача сводится к задаче определения $P_{\mathfrak{Y}}$.

Величина $P_{\mathfrak{Y}}$ ищется аналогично величине $\mathcal{N}_{\mathfrak{Y}}$, только по h_1^- и h_2^- (а в равноотстоящей модели по h_1^+ и h_2^+) интегрировать не надо – эти величины фиксированы. Формулы для натурального закона примут следующий вид.

Для равноотстоящей модели:

$$\hat{\mathcal{N}}_{\mathfrak{Y}}^{\text{равн}} = V_{cp} \tau_{12} \frac{d_1 d_2}{D} \int_{\hat{D}_{\mathfrak{Y}}} \prod_{l > k} [d_l - \max \varphi_{ijl} + \min \varphi_{ijl}]^+ dh_3 \dots dh_k. \quad (27)$$

Для пуассоновской модели:

$$\hat{\mathcal{N}}_{\mathfrak{Y}}^{\text{Пуасс}} = V_{cp} \tau_{12} \frac{d_1 d_2}{D} \int_{\hat{D}_{\mathfrak{Y}}} \exp \left(-l \sum_l \frac{\max_{ij} \varphi_{ijl} - \min_{ij} \varphi_{ijl}}{d_l} \right) dh_{i_1}^{e_1} \dots dh_{i_k}^{e_k} S(M)^{-l}. \quad (28)$$

Область значений параметров h^+, h^- задается дополнительным условием $h_1^- = h_2^- = 0$. Определение величин $\max_{ij} \varphi_{ijl}, \overline{\max_{ij} \varphi_{ijl}}, \min_{ij} \varphi_{ijl}, \overline{\min_{ij} \varphi_{ijl}}$.

Основная идея определения значения функционала, связанного с $l-1$ системой в крайней точке многоугольника M заключается в том, что крайняя вершина определяется только направлением и образующих ее прямых. Занумеровав стороны M в направлении часовой стрелки мы затем должны найти две стороны, такие, что направление l -й системы заключено между их направлением. Такая пара сторон выбирается двумя способами *верхним* и *нижним*. Перейдем к точному изложению.

Пусть $\vec{n}_1, \dots, \vec{n}_k$ – векторы нормали к сторонам многоугольника M , направленные внутрь, взятые в направлении по часовой стрелки.

Назовем прямую L l -й системы заданной уравнением $a_1 x + b_1 y = c$ *верхней*, если мы рассматриваем полупространство $a_1 x + b_1 y \leq c$ и *нижней*, если рассматриваем полупространство

$a_1x + b_1y \geq c$. Прямая, с указанием верхняя она или нижняя, характеризуется вектором нормали $\vec{n}$, направленным в сторону рассматриваемой полуплоскости и расстоянием h до 0.

Отложим из т. 0 векторы $\vec{n}_1, \dots, \vec{n}_k$. Введем для удобства циклическую нумерацию. Положим $\vec{n}_{k+c} = \vec{n}_c$ для всех натуральных c . Пусть вектор $\vec{n}_c$ попадет между $\vec{n}_i$ и $\vec{n}_{i+1}$, а вектор $\vec{n}_1$ попадет между $\vec{n}_p$ и $\vec{n}_{p+1}$.

С точки зрения l -й системы крайние точки M – это угловые точки между i -ой и $i+1$ -й, а также p -й и $p+1$ -й сторонами.

Как легко видеть, $\max_{\alpha\beta} \varphi_{\alpha\beta,l} = \varphi_{i,i+l,l}, \min_{\alpha\beta} \varphi_{\alpha\beta,l} = \varphi_{p,p+l,l}$. Поэтому

$$\Pi_1(M) = \varphi_{i,i+l,l} - \varphi_{p,p+l,l} = \lambda_{i,i+l,l} - h_i^{e_i} - \lambda_{i+l,i,l} - h_{i+l}^{e_{i+l}} \lambda_{p,p+l,l} - h_i^{e_p} - \lambda_{p+l,p,l} - h_{p+l}^{e_{p+l}}. \quad (29)$$

Вершина M , в которой линейный функционал достигает второе по величине значение, будет соседней с той, где он максимален.

Поэтому:

$$\overline{\max}_{\alpha\beta} \varphi_{\alpha\beta,l} = \max [\varphi_{i-1,i,l}, \varphi_{i+1,i+2,l}], \quad (30)$$

и аналогично

$$\overline{\min}_{\alpha\beta} \varphi_{\alpha\beta,l} = \min [\varphi_{p,p-1,l}, \varphi_{p+1,p+2,l}]. \quad (31)$$

3.5. Определение площади многоугольника M .

Мы сохраняем всю нумерацию и все обозначения предыдущего параграфа.

Пусть $S_{ijk}(h_i, h_j, h_k)$ – площадь треугольника, образованного прямыми

$$a_i x + b_i y = h_i; a_j x + b_j y = h_j; a_k x + b_k y = h_k.$$

или

$$S_{ijk} = (X_{ij} - X_{ik})(Y_{ij} - Y_{jk}) - (X_{ij} - X_{jk})(Y_{ij} - Y_{ik}) \quad (32)$$

где X_{ij}, Y_{ij} определяются равенствами (12).

Пусть теперь системы, образующие многоугольник занумерованы как в предыдущем пункте. Основная идея состоит в том, что площадь многоугольника N' , получаемого из N отсечением угла, ищется как разность площади N и площади отрезаемого треугольника. Многоугольник N можно получить с помощью отрезания треугольников от треугольника.

Пусть многоугольник N' получается из N отсечением угла сверху l -й системой, тогда:

$$S(N') = S(N) - S_{i,j+l,l}.$$

Вернемся к нашему многоугольнику M . Если с M последовательно делать следующую процедуру: удалить сторону, а остальные продолжить, то в конце концов получится треугольник. Такая процедура соответствует добавлению треугольников.

Пусть i -я, j -я, m -я стороны M , будучи продолженными, образуют треугольник, содержащий M .

Справедлива формула:

$$S(M) = S_{ijm} - \sum_{\tau=j}^{m-1} S_{\tau,m,\tau+1} - \sum_{\tau=i}^{j-1} S_{\tau,j,\tau+1} - \sum_{\tau=m}^{i-1} S_{\tau,\tau+1,i}. \quad (33)$$

Напомним, что нумерация индексов циклическая. Смысл формулы (33) состоит в том, что всякий раз следующая по часовой стрелке сторона отсекает один треугольник. Формулы (32),(33) позволяют эффективно находить площади блоков. Отметим также, что чаще всего встречаются трех, четырех и пятиугольники. В относящихся к ним формулах можно явно вычислить интегралы. Полученные формулы приведены в приложении.

3.6. Случай разброса направлений

В этом случае следует говорить о плотности вероятности того, что выбранный блок имеет тип $\mathfrak{Y}$ а в понятие типа включить направления сторон.

Мы будем рассматривать только пуассоновскую модель, поскольку результат в пределе от большого числа $n \rightarrow \infty$ равноотстоящих систем, каждая из которых дает малый вклад таков же, как и для $n \rightarrow \infty$ пуассоновских систем.

Назовем типом $\mathfrak{Y}$ блока M набор направлений нормалей к сторонам M , ведущих внутрь M . Нумеровать эти нормали мы будем по направлению часовой стрелки.

Пусть $\lambda(\vec{l})$ характеризует интенсивность линейного процесса с направлением нормали $\vec{l}$, иными словами, $\lambda = dN/2 d\varphi$, где dN – мат. ожидание числа точек пересечения единичного вектора $\vec{l}$ с прямыми, нормаль к которым образует с $\vec{l}$ угол не больше $d\varphi$. Как известно, вероятность P того, что многоугольник M не пересечен системами, равна

$$P = \exp \left[- \int \Pi_{\vec{l}(\varphi)}(M) \lambda_{\vec{l}(\varphi)} d\varphi \right] \quad (34)$$

Сравним (34) с формулами для $P_{\text{Пуасс}}$.

С помощью перехода к пределу при числе систем $n \rightarrow \infty$ получаем равенства для площадного закона:

$$\mathcal{N}_{\mathfrak{Y}} = \int_{\mathfrak{D}_{\mathfrak{Y}}} \exp \left[- \int \Pi_{\vec{l}}(M) \lambda_{\vec{l}} d\vec{l} \right] dh_1 \cdots dh_k, \quad (35)$$

Для натурального закона:

$$\hat{\mathcal{N}}_{\mathfrak{Y}} = \frac{\lambda_{\vec{l}_1} \cdot \lambda_{\vec{l}_2} \cdot |\vec{l}_1 \wedge \vec{l}_2|}{\tau} \int_{D'_{\mathfrak{Y}}} \exp \left[- \int \Pi_{\vec{l}}(M) \lambda_{\vec{l}} d\vec{l} \right] dh_3 \cdots h_k \quad (36)$$

где $\tau = S_{cp}^{-l}, h_i, D_{\mathfrak{Y}}$ и $D'_{\mathfrak{Y}}$ – имеют тот же смысл, т.е. h_i – это расстояние от прямой, образующей i -ю сторону до 0 и меняется от 0 до ∞ , $D_{\mathfrak{Y}}$ множество наборов значений $\{h_i\}$, таких, что заданный ими набор прямых образует стороны многоугольника M , содержащего точку 0. $D'_{\mathfrak{Y}}$ – соответственно, множество наборов $\{h_i\}$, таких, что две прямые, проходящие через 0 с нормальными $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ вместе с остальными прямыми, образовывали многоугольник M , содержащий точку 0.

Соотношения (35) можно переписать в несколько другом виде. Заметим, что:

$$\Pi_{\vec{l}}(M) \lambda_{\vec{l}} d\vec{l} = \sum_{i=1}^k \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} f_l(X_{i,i+l}; Y_{i,i+l}) dl \quad (37)$$

Напомним, что $f_l(X_{i,i+l}; Y_{i,i+l})$ есть проекция i -й вершины на прямую, параллельную $\vec{l}$ и проходящую через 0.

Здесь α_i – аргумент, $\vec{n}_i$ – вектора нормали, соответствующей i -ой стороне. Если аргумент $\vec{l}$ заключен между α_i и α_{i+1} , то i -я точка будет крайней. Формула (37) соответствует равенству (21). Как и в предыдущих пунктах вершины имели циклическую нумерацию, так и в

формулах (34),(35),(37) углы расположены на окружности и $\int_{\alpha}^{\beta'}$ понимается как интеграл по соответствующей дуге.

Окончательно имеем:

$$\mathcal{N}_{\mathfrak{Y}} = \int_{\mathfrak{D}_{\mathfrak{Y}}} \exp \left(- \int \sum_{i=1}^k \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \cos(\varphi - \alpha_i) \lambda d\varphi \cdot \sqrt{X_{i,i+l}^2 Y_{i,i+l}^2} dl \right) dh_1 \cdots dh_k, \quad (38)$$

$$\hat{\mathcal{N}}_{\mathfrak{Y}} = \frac{\lambda \vec{l}_1 \lambda \vec{l}_2 |\vec{l}_1 \Lambda \vec{l}_2|}{\tau} \times \int_{\mathfrak{D}'_{\mathfrak{Y}}} \exp \left(- \sum_{i=1}^k \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \cos(\varphi - \alpha_i) \lambda d\varphi \sqrt{X_{i,i+l}^2 Y_{i,i+l}^2} dl \right) dh_3 \cdots dh_k \quad (39)$$

4. Использование идеи движущейся прямой

Для пуассоновской модели использование соображений параграфа 4 позволяет упростить формулы (24). Изучение многоугольника M целесообразно проводить, двигаясь последовательно по его сторонам. Фактически мы это и делали. Более того, смысл условия на значения параметров h_l , соответствующих области $D_{\mathfrak{Y}}$ – это условия на прямые, которые должны образовывать соседние стороны.

Метод движущейся прямой позволяет учитывать эти условия автоматически и следить только за парой сторон. Все геометрические соображения предыдущего пункта здесь учтены автоматически. мы подчеркиваем, что метод движущейся прямой соответствует и наиболее эффективному изучению одного многоугольника.

Рассмотрим многоугольник M типа $\mathfrak{Y}$. Движущаяся прямая будет параллельна оси OX . Пусть k – число вершин M . Ориентируем M по часовой стрелке, пусть k_1 – число сторон M , образующих с осью OX угол меньше 90° , а k_2 – число сторон M , образующих с осью OX угол больше 90° .

Будем изучать процесс движения оси OX .

Если в начальный момент OX занимает *нижнее* положение, касаясь M снизу, то в момент t ось OX будет касаться M сверху.

5. Метод Гудмана для плоскости

Рассмотрим теперь задачу распределения блоков по типам, возникающую при изучении метода Гудмана, для плоскости. При этом выработка предполагается полуплоскостью, а ее граница – прямой. Эту прямую мы будем обозначать M . След системы трещин будет системой точек (равноотстоящей если соседние трещины системы равноотстоят друг от друга и соответственно, пуассоновской, если они распределены по закону Пуассона), а след блока будет отрезком. Его типом будет пара (i, j) , где i – номер системы точек, к которому принадлежит левый конец отрезка, а j – номер системы точек, к которой принадлежит его правый конец. Чтобы можно было говорить о *правых* и *левых* концах границу выработки следует ориентировать. задача отыскания распределения отрезков по типам возникает из задач плоского равновесия, подобно тому, как задача отыскания распределения многоугольников по типам возникает из задач пространственного равновесия. Задача равновесия для плоского случая возникает, хотя и очень редко, в случае, когда блоки имеют цилиндрическую форму, а выработка проходит параллельно их осям.

Задачи отыскания распределения отрезков по типам возникает также и при изучении кер-на; кроме того, они представляет и самостоятельный интерес.

Как обычно, мы изучим пуассоновскую и равноотстоящую модели.

Пусть $A_1, \dots, A_k$ - системы точек, d_i - средние расстояния между соседними точками системы A_i .

Для наугад выбранного отрезка прямой M длины L , как B пуассоновском, так и в равноотстоящем случаях, математическое ожидание числа точек A_i , попавших в него, равно L/d_i , а математическое ожидание общего числа точек, попавших в него, равно $L \cdot \sum_{i=1}^k I/d_i = L \cdot \lambda$, где $\lambda = \sum_{i=1}^k I/d_i$.

Рассмотрим пуассоновскую модель. Пусть точка $A \in A_i$. Какова вероятность P_j того, что, соседняя справа точка B из объединения всех A_α принадлежит A_j ? Обозначим через P_{jl} плотность вероятности того, что $B \in A_j$ и положим $p_m = \operatorname{ctg} \alpha_m$, $q_m = \lambda_m \cdot \sin(\alpha_m - \alpha_{m-l}) / \sin \alpha_{m-l}$, где

$$r_m = \sum_{\alpha_i > \alpha_m} \sin(\alpha_i - \alpha_m) / \sin \alpha_m \cdot \lambda_i, N^m = N_\Pi(m, l, t).$$

Тогда можем записать:

$$\frac{\partial N_\Pi}{\partial t} + \frac{\partial N_\Pi}{\partial l} \cdot p_m + q_m N^{m-l} - r_m N^m = 0. \quad (40)$$

Уравнения (40) можно проинтегрировать с помощью преобразования Лапласа.

Рассмотрим прямую L , параллельную ОХ, пересекающую случайное разбиение плоскости. Рассмотрим те многоугольники, которые L пересекает. Назовем *нижней частью* блока ту его часть, которая находится под секущей прямой.

Рассмотрим процесс движения левого конца сечения при движении секущей прямой (движение правого конца изучается аналогично). Через $N_L(m, l, t)$ мы обозначаем плотность числа блоков в единице длины сечения, проекция нижней части которых на ось OY равна t , а координаты X смещения левого конца относительно начального положения равна l , и кроме того, левым концом пройдено m вершин; $I < m \leq k_2$, причем все вершины образованы прямыми, образующими тип $\mathfrak{Y}$ в нужном порядке.

Аналогично определяется $N_L(m, l, t)$, где $I < m \leq k_1$.

Относительное число блоков, имеющих тип $\mathfrak{Y}$ по отношению к натуральному закону, равно:

$$\bar{N}_{\mathfrak{Y}} = \bar{d} \int_0^\infty dt/t \int_{-\infty}^\infty N_\Pi(k_1, l, t) N_L(k_2, -l, t) dl \quad (41)$$

где d - средняя проекция многоугольника на ось OY . Знаменатель t введен потому, что при оси ОХ многоугольники учитываются с кратностями, пропорциональными проекции на ось OY ; для перехода к натуральному закону это нужно компенсировать, для чего и введен знаменатель t . Достаточно уметь определять только N_Π (N_L находится симметрично).

Точно так же, как и в параграфе 4 составляется уравнение:

$$\frac{\partial N_\Pi}{\partial t} + \frac{\partial N_\Pi}{\partial l} \operatorname{ctg} \alpha_m + \lambda_m N_\Pi(m - I, l, t) \sin(\alpha_m - \alpha_{m-l}) / \sin \alpha_{m-l} \quad (42)$$

$$- \left(\sum_{\alpha_i > \alpha_m} \sin(\alpha_i - \alpha_m) / \sin \alpha_m \cdot \lambda_i \right) N_\Pi(m, l, t) = 0. \quad (43)$$

$|AB| = 1$, а через $\hat{P}_{jl}$ - плотность вероятности того, что точка C - ближайшая справа к точке A , точка системы A_j находится на расстоянии равном l .

Как легко видеть, справедливы равенства:

$$P_j = \int_0^\infty P_{jl} dl, \quad (44)$$

$$\hat{P}_{jl} = \exp(-l/d_j) / d_j. \quad (45)$$

Пусть $Q_j(R)$ – есть вероятность того, что наугад взятый отрезок длины R не содержит ни одной точки систем $A_1, \dots, A_{j-1}, A_{j+1}, \dots, A_k$.

Заметим, что:

$$P_{jl} = \hat{P}_{jl} \cdot \hat{Q}_j(l). \quad (46)$$

С другой стороны из-за независимости систем:

$$\hat{Q}_j(l) = \prod_{i \neq j} \tilde{Q}_j(l), \quad (47)$$

где $\tilde{Q}_j(l)$ – вероятность того, что отрезок длины l не попала ни одна точка из A_j . Очевидно, что $\tilde{Q}_j(l) = \exp(-l/d_i)$. Поэтому

$$\hat{Q}_j(l) = \exp\left(-l \cdot \sum_{i \neq j} I/d_i\right), \quad (48)$$

Следовательно,

$$P_{jl} = d_j \cdot \exp\left[-l \cdot \sum_{i \neq j} I/d_i\right]. \quad (49)$$

Окончательно имеем:

$$P_j = I/d_j^{-1} \int_0^\infty \exp(-l \cdot \lambda) d\lambda = d_j^{-1/\lambda} = d_j^{-1} \left[\sum I/d_i\right]^{-1}. \quad (50)$$

Пусть $L \rightarrow \infty$. Тогда число N_{ij} отрезков типа (i, j) , попавших в L , в единице длины равно произведению P_j на число точек A_i в единице длины или

$$N_{ij} = d_i^{-1} d_j^{-1} / \lambda. \quad (51)$$

Относительное же число отрезков типа (i, j) – $\hat{N}_{ij}$ равно N_{ij}/λ , поскольку λ – это общее число отрезков в единице длины, или:

$$\hat{N}_{ij} = d_i^{-1} d_j^{-1} / \lambda^2. \quad (52)$$

Заметим, что

$$\sum_{i,j} \hat{N}_{ij} = \left[\sum_{i,j} d_i^{-1} d_j^{-1}\right] / \lambda^2 = \left[\sum_i d_i^{-1}\right] \times \left[\sum_j d_j^{-1}\right] / \lambda^2 = \lambda \cdot \lambda / \lambda^2 = I$$

– как и должно быть.

Равноотстоящая модель. Рассмотрим случай, когда расстояния между соседними трещинами в системах равны. След i -ой системы A_i – система точек с расстоянием между соседними точками d_i . Пусть нумерация систем такова, что d_l – минимально. Рассмотрим отрезки, на которые системы $A_1, \dots, A_k$ разбивают прямую. Пусть P_{ij} – вероятность того, что наугад взятый отрезок имеет тип (i, j) или что то же самое, относительное число отрезков типа (i, j) . Пусть $\tilde{P}(l, i)$ – вероятность того, что случайно выбранный на прямой M интервал длины l не содержит точек A_i . Если $1 \geq d_i$, то $\tilde{P}(l, i) = 0$. Как легко видеть

$$\tilde{P}(l, i) = (d_i - l)^+ / d_i. \quad (53)$$

Пусть $A \subseteq \{I, \dots, k\}$ – подмножество множества индексов $\{I, \dots, K\}$; через $P_A(l)$ мы будем обозначать вероятность того, что на произвольно взятый интервал длины l на прямой M попадут точки B точности из семейств A_i , где $i \in A$ и только они. Через $\tilde{P}_A(l)$ мы будем обозначать эту вероятность, но при условии, что левый конец интервала принадлежит A_i .

Через $|A|$ мы будем обозначать число элементов множества A .

Справедливы равенства:

$$\tilde{P}_A(l) = \prod_i \hat{P}_{A,l}(l), \quad (54)$$

$$\tilde{P}_{A,m}(l) = \prod_{i \neq m} \hat{P}_{A,l}(l), \quad (55)$$

где $\hat{P}_{A,l}(l) = P(l, i)$, если $i \in A$ и $\hat{P}_{A,l}(l) = I - P(l, i)$ – в противном случае.

Заметим, что $P_{i,i} = 0$ при $i \neq I$, поскольку на отрезок типа (I, I) длина которого равна d_i , обязательно попадет точка из A_l . Найдем $P_{l,l}$. Пусть $\bar{P}_{l,l}$ число отрезков типа (I, I) в единице длины на прямой M . Отметим, что число точек из A_l в единице длины равно

$$I/d_l \bar{P}_{l,l} = I/d_l \times P,$$

где P – вероятность того, что наугад взятый интервал длины d_l не содержит точек из $A_2, \dots, A_k$.

Иначе говоря:

$$\bar{P}_{l,l} = I/d_l \prod_{i=2}^k (d_i - d_l) / d_i. \quad (56)$$

Поскольку число точек всех систем (а следовательно, и отрезков) в единице длины равно λ , $P_{l,l} = \bar{P}_{l,l} / \lambda$. Или:

$$P_{l,l} = \frac{I/d_l}{\sum I/i} \prod_{i=2}^k (d_i - d_l) / d_i. \quad (57)$$

Найдем $P_{l,j}$. Рассмотрим отрезок $[AB]$ с вершинами в соседних точках системы A_l . Его длина равна d_l .

Вероятность того, что в отрезок $[AB]$ попадут точки систем A_i , где $i \in A$, и только они равна

$$\prod_{i=2}^k \hat{P}_{A,i}.$$

Если $j \notin A$, то при этом условии вероятность того, что соседняя справа точка систем к точке A принадлежит A_j , равна 0. Если же $j \in A$, то эта условная вероятность равна $I/|A|$, поскольку на отрезок AB длины d в этом случае попадет только по одной точке из A_i , где $i \in A$, и распределения этих точек на отрезке $[AB]$ равномерны и независимы. Окончательно имеем:

$$\bar{P}_{l,j} = \sum_{j \in A, l \notin A} I/|A| \cdot \tilde{P}_{A,l}(d_l). \quad (58)$$

Или

$$P_{l,j} = \frac{I/d_l}{\sum I/d_i} \cdot \sum_{j \in A, l \notin A} I/|A| \prod_{i=2}^k \hat{P}_{A,i}(d_l). \quad (59)$$

Найдем P_{ij} при $i \neq I, j \neq I, i \neq j$. Рассмотрим произвольную точку $A \in A_i$. Рассмотрим точку B справа от точки A , такую, что отрезок AB имеет длину d_l . Точно также устанавливается равенство:

$$\bar{P}_{i,j} = \sum_{l \in \mathcal{A}} I/|\mathcal{A}| \cdot \tilde{P}_{\mathcal{A},i}(d_l). \quad (60)$$

Откуда:

$$P_{i,j} = \frac{I/d_i}{\sum I/d_l} \cdot \sum_{\substack{A \ni j \\ A \ni l}} I/|\mathcal{A}| \prod_{m \neq l} \hat{P}_{\mathcal{A},m,l}(d_l). \quad (61)$$

Формулы (57),(58),(60) и определяют искомые вероятности.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кендал М., Моран П. Геометрические вероятности // М.: наука, 1972.
2. Сантано Д. Интегральная геометрия и геометрические вероятности // М.: наука, 1983.
3. Ж.Маттерон. Случайные множества и интегральная геометрия // Мир, 1978.
4. Анощенко Н.Н. Геометрический анализ трещиноватости и блочности месторождений облицовочного камня // М.: МГИ, 1983.
5. Р.В. Амбарцумян, И.Мекке, Д.Штоян. Введение в стохастическую геометрию // М.:Наука 1989.
6. Goodman, Shi-Gew-Hua. Block theory and some it's applications to rock mechanics // Prentice tcall, Ine. Englewood elitts, New sersey, 1985.
7. А.Я. Канель-Белов, В.В. Павлова, В.О. Кирова. Геометрические свойства сред, разбитых трещинами на блоки // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 5, с. 208–216.
8. Батугин С. А., Бирюков А. В., Крылатчанов Р. М. Гранулометрия геоматериалов // Новосибирск, Наука, Сибирское отделение, 1989.
9. Касселс Дж. В. Введение в теорию диофантовых приближений // Москва, Изд-во иностранной литературы, 1961.
10. Количко А. В. Опыт оценки блочности трещиноватого массива скальных пород // Труды Гидропроекта, Сб.14, Москва–Ленинград, Энергия, 1966.
11. Кендалл М., Моран П. Геометрические вероятности // М.:Науна 1972.
12. Никитин В. В. Разработка Горно–Геометрического метода прогнозирования выхода блоков для рациональной отработки месторождений облицовочного камня. // Дисс. на соиск. канд. техн. наук, Москва, МГИ, 1987. с.97. Геометрия блочных сред 24.
13. Садовский М. А. Естественная кусковатость горной породы // Докл. АН СССР, 1979, т. 247, N4 – с. 829–831.
14. Садовский М. А., Болховитинов Л. Г., Писаренко В. Ф. О свойствах дискретности горных пород // Москва, Ин-т физики Земли им. О. Ю. Шмидта, 1981 (36с.).

15. Садовский М. А., Болховитинов Л. Г., Писаренко В. Ф. О свойстве дискретности горных пород // *Физика Земли*, 1982, № 12, с. 3—18.
16. Садовский М. А. О распределении твердых отдельностей // *ДАН СССР*, 1983, т.269, №1, с.69—72.

REFERENCES

1. Kendal, M., Moran, P., 1972. "Geometric Probabilities", *M.: Nauka*.
2. Santano, D., 1983. "Integral Geometry and Geometric Probabilities", *M.: Nauka*.
3. Matheron, J. 1978. "Random Sets and Integral Geometry", *M.: Mir*.
4. Anoshenko, H.H., 1983. "Geometric analysis of fracturing and blockiness of deposits of facing stone", *M.: MI'I*.
5. Hambartsumian, R.V., Mekke, I., Shtoyan, D., 1989. "Introduction to Stochastic Geometry", *M.: Nauka*.
6. Goodman, Shi-Gew-Hua, 1985. "Block theory and some of it's applications to state mechanics", *Prentice Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey*.
7. Kanel-Belov, A.Ya., Pavlova, V.V., Kirova, V.O., 2023. "Geometric properties of rocks, broken into blocks by cracks", *Chebyshevskii Sbornik*, Vol. 24, Iss. 5, pp. 208—216.
8. Batugin, S. A., Biryukov, A. V., Krylatchanov, R. M., 1989. "Granulometry of geomaterials", *Novosibirsk, Nauka, Siberian Branch*.
9. Kassels, J.V., 1961. "Introduction to the Theory of Diophantine Approximations", *Moscow, Publishing House of Foreign Literature*.
10. Kolichko, A. V., 1966. "Experience in assessing the blockiness of a fractured rock massif", *Proceedings Hydroproject, Collection 14, Moscow-Leningrad, Energia*.
11. Kendall, M., Moran, P., 1972. "Geometric Probabilities", *M. Nauchna*.
12. Nikitin, V. V., 1987, *Development of the Mining-Geometric Method of Block Yield Prediction for rational mining of the deposits of facing stone*, Dissertation for a Candidate of Sci. Sci. (Technical Sciences), Moscow, MGI, 1987. с.97. Geometry of Block Media 24.
13. Sadovskii, M. A., 1979. "Natural lumpiness of rock", *Dokl. of the USSR Academy of Sciences*, Vol. 247, № 4, pp. 829—831.
14. Sadovskii, M. A., Bolkhovitinov, L. G., Pisarenko, V. F., 1981. "On the properties of discreteness of rocks", *Moscow, Schmidt Institute of Physics of the Earth. O. Yu. Schmidt*, 36 p.
15. Sadovskii, M. A., Bolkhovitinov, L. G., Pisarenko, V. F., 1982. "On the discreteness property of rocks", *Physics of the Earth*, № 12, p. 3—18.
16. Sadovskii M. A., 1983. "On the Distribution of Solid Separations", *DAN USSR*, Vol. 269, № 1, pp. 69—72.

Получено: 05.04.2024

Принято в печать: 28.06.2024

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 25. Выпуск 2.

УДК 517

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-2-102-126

Геометрия блочных сред¹

А. Я. Канель-Белов, В. О. Кирова

Канель-Белов Алексей Яковлевич — Магнитогорский государственный технический университет имени Г. И. Носова (г. Магнитогорск).

e-mail: Kanelster@gmail.com

Кирова Валерия Орлановна — Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (г. Москва).

Kirova_vo@mail.ru

Аннотация

Для изучения блочного массива важно уметь определять относительное число блоков, удовлетворяющих данному свойству. Так, при разработке месторождения облицовочного камня возникает необходимость по данным о трещиноватости определить распределение блоков по объемам. Будем полагать (если не оговорено противное), что трещины моделируются неограниченными плоскостями и группируются в системы примерно параллельных трещин. Ниже рассматриваются модель равностоящих трещин и пуассоновская модель, в которой предполагается, что пересечения каждой системы трещин с прямой L общего положения образуют пуассоновское множество точек, и кроме того, объединения любого числа этих множеств точек пересечения также образуют пуассоновские множества точек. Для модели равностоящих трещин (мы будем в дальнейшем ее называть равностоящей моделью) доказана эргодическая теорема, связывающая средние по объему и по реализациям для чисел блоков, удовлетворяющим данному свойству. Разработана основанная на этой теореме программа для ЭВМ. Также рассмотрены задачи определения среднего объема блока, распределения блоков по объемам и выхода так называемых тарифных (т.е. имеющих определенные размеры и форму) блоков при разработке месторождения облицовочного камня камнерезными машинами.

Ключевые слова: Эргодический подход, эргодическая теорема

Библиография: 17 названий.

Для цитирования:

А. Я. Канель-Белов, В. О. Кирова. Геометрия блочных сред // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 2, с. 102–126.

¹Работа выполнена при поддержке гранта РНФ 22-19-20073 «Комплексное исследование возможности применения самозаклинивающихся структур для повышения жесткости материалов и конструкций»

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 25. No. 2.

UDC 517

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-2-102-126

Geometry of block environs

A. Ya. Kanel-Belov, V. O. Kirova

Kanel-Belov Alexey Yakovlevich — Nosov Magnitogorsk State Technical University (Magnitogorsk).

e-mail: Kanelster@gmail.com

Kirova Valeria Orlanovna — National Research University “Higher School of Economics” (Moscow).

Kirova_vo@mail.ru

Abstract

To study a block array, it is important to be able to determine the relative number of blocks that satisfy a given property. Thus, when developing a deposit of facing stone, it becomes necessary to determine the distribution of blocks by volume based on data on fracturing. We will assume (unless otherwise stated) that the cracks are modeled by unbounded planes and are grouped into systems of approximately parallel cracks. Below we consider the model of equidistant cracks and the Poisson model, in which it is assumed that the intersections of each system of cracks with a generic line L form a Poisson set of points, and in addition, the unions of any number of these sets of intersection points also form Poisson sets of points. For the model of equally spaced cracks (we will henceforth call it the equally spaced model), an ergodic theorem is proven that relates the averages over volume and over realizations for the number of blocks satisfying this property. A computer program based on this theorem has been developed. The problems of determining the average volume of a block, the distribution of blocks by volume and the yield of so-called tariff (i.e., having a certain size and shape) blocks when developing a deposit of facing stone using stone-cutting machines are also considered.

Keywords: Ergodic approach, ergodic theorem

Bibliography: 17 titles.

For citation:

A. Ya. Kanel-Belov, V. O. Kirova, 2024. “Geometry of block environs”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 2, pp. 102–126.

1. Доказательство свойств эргодичности и вывод необходимых соотношений.

Эргодический подход основан на равенстве средних по объему и по реализациям, что позволяет вместо моделирования всего массива описать локальные его участки, вычислив локальную характеристику такого участка, усреднение которой по реализациям и даст искомую. эффективную характеристику массива. При усреднении по реализациям каждый локальный участок учитывается с весом, пропорциональным частоте его появления в массиве. Таким образом, определение локальной характеристики участка и частоты (плотности мат. ожидания) его появления являются основными задачами при данном подходе.

В этом параграфе будут получены эргодические теоремы для разбиения пространства n системами равностоящих плоскостей и других аналогичных задач. Также в этом и следующем

параграфе мы будем рассматривать задачу определения относительного числа N_V , блоков, имеющих объем больше V для пространства, разбитого n системами плоскостей $A_1, \dots, A_n$, моделирующих трещины.

При этом для каждой i -системы A_i расстояния между соседними плоскостями постоянны и равны d_i .

Отметим, что задача отыскания распределения блоков по объемам равносильна задаче определения N_V , поскольку P_V — плотность вероятности того, что монолитный блок имеет объем V , равна:

$$P_V = \lim_{dV \rightarrow 0} (N_V - N_{V+dV}) / dV. \quad (1)$$

Если число систем $n < 3$, то плоскости не разбивают пространство на ограниченные части, а если $n = 3$, то они разбивают пространство на одинаковые параллелепипеды, так что этот случай тривиален. Поэтому мы будем рассматривать только случай, когда $n > 3$. (Изучая разбиение плоскости n системами параллельных равностоящих прямых мы будем предполагать, что $n > 2$ по тем же причинам).

Основные идеи. Рассмотрим три системы трещин A_1, A_2, A_3 . Они разбивают пространство на параллелепипеды, которые называют *блоками первого порядка*. Каждый из них в свою очередь, разбит плоскостями остальных $n - 3$ систем $A_4, \dots, A_n$ на монолитные блоки. Монолитным мы будем называть блок, не пересеченный ни одной трещиной.

Блок первого порядка B примем в качестве локального участка; его разбиение системами $A_4, \dots, A_n$ описывается $n - 3$ параметрами $f_4, \dots, f_n$, характеризующим сдвиг систем $A_4, \dots, A_n$ относительно B ; параметр f_i соответствует системе A_i .

В качестве f_i мы примем расстояние от фиксированной вершины B до подходящей плоскости системы A_i ; при этом $0 \leq f_i \leq d_i$. Оказывается, что все f_i равновероятны и независимы, т.е. относительное число N блоков B таких, что $f_i < f'_i < f_i + df_i$ равно $\prod_{i=4}^n df_i / d_i$.

Ниже будет придан сказанному точный смысл. Число частей $\bar{N}_V$, объем которых превосходит V , в пересчете на единицу объема, находится по формуле:

$$N_V = \frac{1}{V_{1,2,3}} \frac{1}{d_4 \cdots d_n} \int_0^{d_4} \cdots \int_0^{d_n} (f_4, \dots, f_n) df_4 \cdots df_n, \quad (2)$$

где $N_V(f_4, \dots, f_n)$ — число блоков, объем которых превосходит V , получившихся при разбиении, задаваемом набором параметров

$\{f_1, \dots, f_n\} \cdot V_{1,2,3}$ — объем B — блока первого порядка, порожденного системами A_1, A_2, A_3 .

Относительное число N_V блоков, объем которых превосходит V отличается от N множителем N_0 , где N_0 — среднее количество блоков в единице объема.

При практическом вычислении выбор тройки систем целесообразно проводить так, чтобы $V_{1,2,3}$ (и следовательно, среднее число частей разбиения B) был бы минимален.

Перейдем к формальной постановке задач. Среднее число N_V монолитных блоков, объем которых превосходит V в пересчете на единицу объема мы определим как среднее по решетке через предел:

$$N_V = \lim_{n \rightarrow \infty} M_{n,V} / n, \quad (3)$$

где $M_{n,V}$ — число монолитных блоков, объем которых больше V в кубе с ребрами длины n , параллельными осями координат. Из доказанного ниже будет следовать, что этот предел существует. Аналогично можно определить N_α — среднее число блоков в единице объема, удовлетворяющих свойству α , если соответствующий предел, аналогичный пределу (3), существует.

Уравнения плоскостей из A_i имеют вид:

$$X \cos \varphi_i \sin \psi_i + Y \cos \varphi_i \cos \psi_i + Z \sin \psi_i = \text{const} \quad (4)$$

Причем $\cos \varphi_1 \sin \psi_1 > 0$ в силу выбора нормального вектора.

Предположим также, что все системы находятся в общем положении, так что величины $\{\cos \varphi_i, d_i, \cos \psi_i\}$ алгебраически независимы.

Поскольку породный массив часто имеет сложную структуру из-за сильно выраженной системы пастельных трещин, имеет смысл и плоский аналог задачи. В этой случае величины N_S, N_S определяются аналогично, только блок первого порядка B определяется парой систем прямых A_1, A_2, S - его площадь; справедлива формула аналогичная (2):

$$\bar{N}_s = \frac{1}{s_{1,2}} \frac{1}{d_3 \dots d_n} \int_0^{d_3} \dots \int_0^{d_n} N_s(f_3, \dots, f_n) df_3 \dots df_n \quad (2')$$

Уравнения линий трещин i -системы A_i имеют вид:

$$X \cdot \sin \varphi_i + Y \cdot \cos \varphi_i = 0.$$

При этом также предполагается, что трещины находятся в общем положении, т.е. величины $\{\cos \varphi_i, d_i\}$ алгебраически независимы. Задача нетривиальна при $n > 2$.

1.1. Случай трех систем прямых на плоскости.

Прежде чем доопределить необходимые пространственные понятия и заняться изучением общей задачи, рассмотрим первый нетривиальный случай разбиения плоскости тремя системами прямых A_1, A_2, A_3 .

С помощью аффинного преобразования можно добиться того, чтобы системы A_1, A_2 , разбивали плоскость на единичные квадраты.

Выбрав подходящим образом направления координатных осей, можно считать, что уравнения прямых из A_3 имеют вид:

$$ax + by = \text{const}, \quad (4)$$

где $a > 0, b > 0, a = \cos \varphi, b = \sin \varphi$.

Случаю общего положения исходных систем соответствует случай, когда для преобразованных систем A'_i величины a/d и b/d - иррациональны, где d - расстояние между соседними прямыми в преобразованной системе A'_3 .

Рассмотрим теперь разбиение плоскости 3-мя системами прямых A_1, A_2, A_3 .

Каждый блок первого порядка B определяется однозначно парой целых чисел (x, y) являющихся в образованной трещинами систем A_1, A_2 системе координат координатами его левого нижнего угла.

Разбиение блока B системой A_3 определяется расстоянием f от точки $O(x, y)$ до ближайшей прямой из A_3 , лежащей выше O .

Очевидно, что $0 \leq f < d = d_3$. Покажем, что значения f равномерно распределены на отрезке $[0, d]$, т.е. относительное число блоков первого порядка, для которых $f_1 \leq f < f_2$, где $0 \leq f_1 \leq f_2$, равно $(f_2 - f_1)/d$.

Тем самым среднее число $\bar{N}_S$ блоков площади $> S$ в пересчете на единицу площади будет равным:

$$\bar{N}_S = \frac{1}{d} \int_0^d N_S(f) df \quad (2'')$$

где $N_S(f)$ - определяется аналогично $N_s(f_3, \dots, f_n)$.

Докажем равномерную распределенность f . Равномерное распределение для f следует из того, что равномерно распределены величины $\{\alpha \cdot n\}$, (где $n \in \mathbb{Z}$, $\{X\}$ – дробная часть X), т.е. предел отношения числа целых чисел n на отрезке $[-K, K]$ при $K \rightarrow \infty$ для которых $0 \leq h_1 \leq \{\alpha n\} \leq h_2 \leq 1$ к числу $2K + I$ – всех целых чисел на этом отрезке есть $h_2 - h_1$. В самом деле: при сдвиге B на вектор (α, β) значени f меняется следующим образом:

$$f' = d \cdot \{(f - \alpha a - \beta b)/d\} = d \cdot \{f/d - \alpha a/d - \beta b/d\}. \quad (5)$$

Поскольку $a/d \notin \mathbb{Q}$ из (5) следует равномерная распределенность f . В горизонтальном ряде квадратов единичной решетки, отличающихся сдвигом на векторы, параллельные оси OX значения f_i распределены равномерно; в разных же горизонтальных рядах f отличается сдвигом, поэтому равномерная распределенность f есть и для усреднения по плоскости.

1.2. Определение необходимых величин.

Для доказательства формул (2) и (2') в общем случае необходимо проверить независимость распределения параметров f_i и кроме того, их нужно более удобно определить, ведь что значит что прямая (или плоскость) лежит "выше" точки O ? В качестве f_i хочется взять расстояние от выбранного угла до подходящей прямой (плоскости) i -й системы. Но точка O находится между двумя прямыми (плоскостями). Какую из них выбрать?

Запишем уравнение прямых i -й системы в нормальном виде:

$$X \cdot a_i + Y \cdot b_i = c_i + k \cdot d_i, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (4)$$

где $a_i^2 + b_i^2 = 1, a_i^2 > 0$. Аналогично, уравнения плоскостей i -й системы в пространственном случае имеют вид:

$$a_i \cdot X + b_i \cdot y + c_i \cdot z = e_i + k \cdot d_i, \quad (4)$$

Причем $a_i > 0, a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 = 1$.

Рассмотрим пространственный случай.

Точка $O(x_0, y_0, z_0)$ заключена между плоскостями α_1 и α_2 :

$$\begin{aligned} \alpha_1 : a_i \cdot X + b_i \cdot Y + c_i \cdot Z &= e_i + k \cdot d_i \\ \alpha_2 : a_i \cdot X + b_i \cdot Y + c_i \cdot Z &= e_i + (k+1) \cdot d_i, \end{aligned} \quad (5)$$

что алгебраически означает:

$$\begin{aligned} a_i \cdot X_0 + b_i \cdot Y_0 + c_i \cdot Z_0 - k \cdot d_i &> 0 > \\ a_i \cdot X_0 + b_i \cdot Y_0 + c_i \cdot Z_0 - (k+1) \cdot d_i &. \end{aligned}$$

Положим $f_i[X_0, Y_0, Z_0]$ равным расстоянию от т. $O(X_0, Y_0, Z_0)$ до α_2 . Как легко убедиться

$$f_i[X_0, Y_0, Z_0] = d_i \cdot \{(-a_i \cdot X_0 - b_i \cdot Y_0 - c_i \cdot Z_0 + e_i) / d_i\}. \quad (6)$$

При параллельном переносе точки $O(X_0, Y_0, Z_0)$, на вектор (X_1, Y_1, Z_1) f_i преобразуются следующим образом:

$$f'_i = d_i \{(f_i - a_i \cdot X_1 - b_i \cdot Y_1 - c_i \cdot Z_1) / d_i\} \quad (5')$$

Для плоского случая имеют место аналогичные формулы:

$$f_i[X_0, Y_0] = d_i \{(-a_i \cdot X_0 - b_i \cdot Y_0 + e_i) / a_i\}. \quad (6')$$

$$f'_i = d_i \{ (f_i - a_i \cdot X_1 - b_i \cdot Y_1) / d_i \} \quad (5'')$$

Сформулируем теперь эргодическую теорему:

Пусть B - блок первого порядка, образованный системами A_1, A_2, A_3 , т. O его вершина. Набор $f_i, i = 4, \dots, n$, определяет разбиение B системами $A_1, \dots, A_n$ и тем самым определена величина $N_V(f_4, \dots, f_n)$ число частей разбиения B , объем которых превосходит V . Величина N_V уже определена выше с помощью формулы (3).

ТЕОРЕМА 1.

$$\overline{N}_V = \frac{1}{V_{1,2,3}} \frac{1}{d_4 \cdots d_n} \int_0^{d_4} \int_0^{d_n} N_V(f_4, \dots, f_n) df_4 \cdots df_n$$

аналогично, для плоского случая

$$\overline{N}_S = \frac{1}{S_{1,2}} \frac{1}{d_3 \cdots d_n} \int_0^{d_3} \cdots \int_0^{d_n} N_S(f_3, \dots, f_n) df_3 \cdots df_n$$

Поставим задачу о математическом ожидании числа добытых тарифных блоков. Пусть Ω - разрабатываемая область массива, настолько большая, что можно пренебрегать граничными блоками и полагать, что она содержит целое число блоков первого порядка. Через $|\Omega|$ мы будем обозначать объем Ω , а через $\overline{M}_V^\Omega$ - математическое ожидание числа блоков объема выше V , находящихся в области Ω , точное определение этой величины будет дано ниже.

ТЕОРЕМА 2.

$$\overline{M}_V^\Omega = |\Omega| \cdot \overline{N}_v. \quad (7)$$

Аналогично, в плоском случае

$$\overline{M}_S^\Omega = |\Omega| \cdot \overline{N}_S,$$

где $|\Omega|$ - площадь области Ω .

В общем случае пусть l - аддитивный функционал, заданный на множестве наборов блоков, т.е. его значение на наборе есть сумма его значений по всем блокам, составляющим набор. Примерами такого функционала являются число блоков в наборе объема больше V или суммарная "стоимость" блоков.

Пусть $\tilde{M}_l^\Omega$ - математическое ожидание, т.е. среднее значение l на наборе монолитных блоков составляющих Ω . Дадим формальное определение величинам $\tilde{M}_l^\Omega$ и $\overline{M}_v^\Omega$, введем нужные понятия.

Рассмотрим систему координат $O(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, связанную с блоком первого порядка B . В этой системе координат A_1, A_2, A_3 образуют целочисленную решетку единичных кубов, каждый куб единичной решетки $B(a, b, c)$ определяется вектором сдвига (a, b, c) относительно начального куба

$$B = B(0, 0, 0) = \{x, y, z \mid 0 \leq x, y, z \leq 1\}.$$

Тем самым определяются функции $f_i(x, y, z)$ - параметры разбиения $B(x, y, z)$ системами $A_4, \dots, A_n$, вычисленные в старой системе координат. При этом

$$f_i(x, y, z) = d_i \cdot \{ (f_i - a_i \cdot x - b_i \cdot y - c_i \cdot z) / d_i \} \quad (6)$$

область Ω задается набором $\{B(a + x_i, b + y_i, c + z_i)\}$ составляющих ее блоков первого порядка; причем расположение Ω относительно решетки задается вектором (a, b, c) , а набор векторов (x_i, y_i, z_i) определяет "форму" Ω . Объем $|\Omega|$ области Ω равен $k \cdot V_{1,2,3}$

Математическое ожидание $\tilde{M}_l^\Omega$ или среднее значение l на частях разбиения области Ω определяется как среднее по решетке:

$$\tilde{M}_l^\Omega = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{8n^3} \left[\sum_{|a|, |b|, |c| \leq n} \sum_{i=1}^k l[a + x_i, b + y_i, c + z_i] \right], \quad (8)$$

Здесь $l[\alpha, \beta, \gamma]$ - значение l на наборе, образованном разбиением $B(\alpha, \beta, \gamma)$ системами $A_4, \dots, A_n$.

Равенство (7) можно упростить, переставив порядок суммирования:

$$\begin{aligned} \tilde{M}_l^\Omega &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{8n^3} \left[\sum_{i=1}^k \sum_{|a|, |b|, |c| \leq n} l[a + x_i, b + y_i, c + z_i] \right] = \\ &= k \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{l}{8n^3} \left[\sum_{|a|, |b|, |c| \leq n} l[a, b, c] \right]. \end{aligned}$$

Окончательно имеем:

$$\tilde{M}_l^\Omega = k \cdot \bar{l}, \quad (8)$$

где $\bar{l}$ - среднее значение $l[x, y, z]$ по решетке. Взяв в качестве l число блоков объема больше V , мы определим M_V .

Через $L(f_4, \dots, f_n)$ мы обозначим значение l на наборе, образованном разбиением B , системами $A_4, \dots, A_n$, определенном параметрами $f_4, \dots, f_n$.

Мы всюду предполагаем, что функция $L(f_4, \dots, f_n)$ интегрируема по Риману.

ТЕОРЕМА 3.

$$\tilde{M}_l^\Omega = \frac{|\Omega|}{V_{1,2,3}} \cdot \frac{1}{d_4 \cdots d_n} \int_0^{d_4} \cdots \int_0^{d_n} L(f_4, \dots, f_n) df_4 \cdots df_n. \quad (7')$$

Аналогично, в плоском случае

$$\tilde{M}_l^\Omega = \frac{|\Omega|}{S_{1,2}} \cdot \frac{1}{d_3 \cdots d_n} \int_0^{d_3} \cdots \int_0^{d_n} L(f_3, \dots, f_n) df_3 \cdots df_n, \quad (7'')$$

где все соответствующие величины для плоского случая определяются аналогично.

Мы будем изучать сечения массива прямыми, при этом каждая система A_i будет системой точек A'_i с расстоянием между соседними точками в $(i-1)$ -ой системе d'_i ; условие общего положения означает линейную независимость над $\mathbb{Q}$ чисел $d'_1, \dots, d'_n$.

В этом случае система A_1 разбивает прямую на отрезки, которые можно называть блоками первого порядка, точно также можно определить необходимые величины. В линейном случае справедлива формула:

$$\tilde{M}_l^\Omega = \frac{|\Omega|}{d_1} \cdot \frac{1}{d_2 \cdots d_n} \int_0^{d_2} \cdots \int_0^{d_n} L(f_2, \dots, f_n) df_2 \cdots df_n. \quad (7''')$$

Приведенные теоремы позволяют сводить задачу отыскания распределения блоков по объемам или, что более обще, находить относительное число блоков, удовлетворяющих данному свойству к изучению разбиения одного блока первого порядка, что позволяет избежать моделирования всего массива. Смысл теоремы состоит, во-первых, в том, что средняя величина l на Ω пропорциональна объему $|\Omega|$, и, во-вторых, что все сдвиги систем A_i относительно B в

случае общего положения равномерно распределены и независимы. Сформулируем последнее утверждение в несколько ином виде, в ряде случаев более удобном для использования.

Определим относительное число блоков решетки M_α , удовлетворяющих свойству α через предел:

$$M_\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} M_{n,\alpha}, \quad (3')$$

где $M_{n,\alpha}$ - относительное число блоков решетки удовлетворяющих свойству α , находящихся в шаре радиуса n .

ТЕОРЕМА 4. *Относительное число блоков первого порядка, таких, что $0 \leq f_i^O \leq f_i \leq f_i^O + \Delta f_i \leq d_i$ равно $\prod_{i=4}^n \Delta f_i / d_i$.*

Аналогичные теоремы имеют место и в n -мерном случае.

Из теоремы 4 непосредственно следует теорема 3 ; из ее плоского и одномерного аналога - соответствующие аналоги теоремы 3 .

Доказательство теоремы 4. Мы рассмотрим только пространственный случай. Для плоского, линейного, или n -мерного случая доказательство аналогично.

Прежде всего: с помощью аффинного преобразования можно добиться того, чтобы V являлся единичным кубом. Из условия общего положения будет следовать, что величины $\{d'_i, \cos \varphi'_i, \cos \psi'_i\}$ будут алгебраически независимы. Начиная с этого момента только этот случай мы и будем рассматривать. Удобно также вместо f_i иметь дело с $\lambda_i = f_i / d_i$. Достаточно показать, что относительное число кубов единичной решетки для которых $0 \leq \lambda_i^O \leq \lambda_i \leq \lambda_i + \Delta \lambda_i \leq 1$ равно $\prod_{i=4}^n \Delta \lambda_i$. Из равенства (5) следует, что при сдвиге на вектор (x, y, z) величины λ_i преобразуются по формуле:

$$\lambda'_i = \{\lambda_i - x \cdot \bar{a}_i - y \cdot \bar{b}_i - z \cdot \bar{c}_i\}, \quad (9)$$

где $\bar{a}_i = a'_i / d'_i, \bar{b}_i = b'_i / d'_i, \bar{c}_i = c'_i / d'_i$.

Из условия общего положения следует линейная независимость над $\mathbb{Q}$ набора $\{a_i, b_i, c_i\} i = 4, \dots, n$. (т.е. нет линейных соотношений с рациональными коэффициентами).

Утверждение теоремы 4 следует теперь из теоремы о равномерной распределенности и независимости величин $\{n\alpha_i\}$, где $n \in \mathbb{N}, \alpha_i$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$.

1.3. Соображения эргодичности в общем случае.

Доказанные выше теоремы о равномерной распределенности и независимости сдвигов дают основания к тому, чтобы попытаться применить эргодический подход в общем случае.

Пусть теперь трещины одной системы не равноотстоят друг относительно друга и направления трещин в системе меняются, однако в масштабах порядка размера блока трещины можно предполагать плоскостями .

В этом случае, кроме набора параметров $\{\lambda_i\}$, характеризующих сдвиги, следует также рассмотреть набор $\{\alpha_i\}$ - характеризующий локальные межтрещинные расстояния и набор $\{\beta_i\}$, характеризующий направления трещин. Мету dP в пространстве параметров $\{\lambda_i, \alpha_i, \beta_i\}^*$, по которой следует производить интегрирование, следует искать в виде:

$$dP = d\lambda_1 \dots d\lambda_n \cdot \mu(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) d\alpha_1 \dots d\alpha_p d\beta_1 \dots d\beta_q. \quad (10)$$

Величина же $\bar{N}_V$ будет равна:

$$\bar{N}_V = \int N_V(\vec{\lambda}, \vec{\alpha}, \vec{\beta}) dP / V_c \quad (11)$$

где V_c - средний объем блока I-го порядка.

В. В. Павловой разработана на основе этой методики программа.

2. Распределение блоков по объемам.

Эргодическая теорема, доказанная в предыдущем параграфе, позволяет упростить нахождение распределения блоков по объемам. Для случая трех систем прямых на плоскости получены явные формулы для распределения блоков по площадям. Для случая четырех систем в пространстве также можно получить явные формулы, однако последние будут включать несколько десятков случаев и содержать достаточно громоздкие формулы для общего решения кубического уравнения, так что пользы от них нет, поэтому для вычисления числа N_V - блоков объема выше V нужно определить N_V для каждого разбиения блока первого порядка, а затем численно проинтегрировать по формуле (I6).

Решим задачу для случая четырех систем плоскостей (для общего случая будет приведена теорема, позволяющая эффективно вычислять объемы блоков).

2.1. Случай четырех систем плоскостей.

Как уже упоминалось выше, это первый нетривиальный случай.

Для этого случая разработана программы, основанная на явном вычислении объемов. Эта программа строит гистограмму распределения блоков по объемам примерно за 2 секунды на ЭВМ типа NORD. Опишем соответствующие формулы.

Плотность вероятности $P(V)$ того, что блок имеет объем V вычисляется следующим образом:

$$P(V) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} (\bar{N}_V - \bar{N}_{V+\Delta V}) / \Delta V. \quad (1)$$

Достаточно уметь определять $\bar{N}_V$ или пропорциональную величину блоков объема выше V в одном блоке первого порядка. С помощью подходящего аффинного преобразования задачу можно свести к случаю, когда системы A_1, A_2, A_3 разбивают пространство на решетку единичных кубов, а нормальные уравнения плоскостей системы A_4 имеют вид:

$$a_1 \cdot X + a_2 \cdot Y + a_3 \cdot Z = \text{const}, \quad (12)$$

где $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1; a_1, a_2, a_3 \geq 0$.

В случае общего положения $a_1, a_2, a_3 > 0$ и кроме того a_1, a_2, a_3 линейно независимы над $\mathbb{Q}$. На самом деле достаточно только иррациональности одного из чисел a_1, a_2, a_3 ; этот случай можно из случая общего положения получить предельным переходом.

Пусть f - расстояние от т. O - начала координат до ближайшей плоскости из A_4 , лежащей "выше" O , т.е. уравнение которой имеет вид $a_j x + a_j y + a_j z = C > 0$.

Напомним, что в рассматриваемой системе координат B задается следующим образом:

$$B = \{x, y, z \mid 0 \leq x, y, z \leq 1\}$$

где

Пусть $\text{Vol}(d)$ - объем пересечения B с полупространством Π_d ,

$$\Pi_d : a_j x + a_i y + a_j z \leq d.$$

Система A_4 разбивает B на следующие части:

$$\{0 < x, y, z < 1 \mid f + i \cdot d < a_1 \cdot x + a_2 \cdot y + a_3 \cdot z \leq f + (i + 1) \cdot d\},$$

где d - расстояние между соседними плоскостями системы A_4 . Объем V_i i -й части равен:

$$V_i = \text{Vol}(f + i \cdot d) - \text{Vol}(f + (i - 1) \cdot d). \quad (13)$$

Таким образом, для вычисления V_i достаточно уметь определять $\text{Vol}(x)$. Как обычно, через X^+ мы обозначим $\max(x, 0)$. Пусть $\text{TR}(x) = I$ при $x > 0$, иначе $\text{TR}(x) = 0$.

ТЕОРЕМА 5.

$$\begin{aligned} \text{Vol}(x) = & \left[x^3 - [(x - a_1)^+]^3 - [(x - a_2)^+]^3 - [(x - a_3)^+]^3 + \right. \\ & [(x - a_1 - a_2)^+]^3 + [(x - a_2 - a_3)^+]^3 + [(x - a_1 - a_3)^+]^3 \\ & \left. [(x - a_1 - a_2 - a_3)^+]^3 \right] / [6 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot a_3] \end{aligned} \quad (14)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.

$$\tilde{N}_V(f) = \sum_{k=0}^{(a_1+a_2+a_3)/d} \text{Tr}[\text{Vol}(f + (k+1)d) - \text{Vol}(f + kd) - V] + \text{Tr}[\text{Vol}(d) - V] \cdot D \quad (14)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.

$$\tilde{N}_V = 1/d \cdot \int^d \tilde{N}_V(f) df$$

Интегрирование в программе осуществляется как усреднение шагом $d \cdot 0,01$.

2.2. Доказательство теоремы.

Пересечение полупространства Π_x с положительным октантом $x, y, z \geq 0$ есть тетраэдр объема $(X^+)^3 / [6 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot a_3]$; а пересечение Π_x с результатом параллельного переноса положительного октанта на вектор (α, β, γ) имеет объем:

$$((x - \alpha a_1 - \beta a_2 - \gamma a_3)^+)^3 / [6 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot a_3].$$

Фактически выписанные в (14) члены отвечают объемам пересечения Π_x со сдвигами положительного октанта на векторы $(I, O, 0), (O, I, 0), (0, O, I), (I, I, O), (O, I, I), (I, O, I), (I, I, I)$, т.е. в вершины B .

По сути дела соотношение (14) – это формула Эйлера для включений-исключений: записывая объем $(X^+)^3 / (6 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot a_3)$ пересечения Π_x с положительным октантом $\mathcal{O}$ мы некоторые области подсчитали зря; а именно - пересечение Π_x со сдвигами $\mathcal{O}$ на векторы $(I, O, O); (O, I, 0); (O, O, I)$; вычтем соответствующие объемы. Но тогда мы дважды, вычли объем пересечения Π_x со сдвигами $\mathcal{O}$ на векторы $(I, I, 0); (O, I, I); (I, O, I)$ и трижды - со сдвигом $\mathcal{O}$ вектор (I, I, I) . прибавим соответствующие объемы. Но тогда окажется, что мы лишний раз прибавили пересечения Π_x со сдвигом $\mathcal{O}$ на вектор (I, I, I) , что компенсируется последним членом формулы.

В $\mathbb{R}^n$ имеет место аналогичная формула для объема пересечения $\Pi_x : sa_i \cdot X_i < d$, где $a_i > 0$ с единичным кубом $0 \leq x_i \leq 1$, если $\sum a_i^2 = 1$. В этом случае:

$$\text{Vol}(d) = \frac{1}{n! \prod_{i=1}^n a_i} \sum_{I \subset \{1, \dots, n\}} (-1)^{\#I} (d - \sum_{i \in I} a_i)^{+n}, \quad (14')$$

где $\#I$ - число элементов множества I . Доказательство равенства (14') аналогично. Например, если $n = 2$, то

$$\begin{aligned} \text{Vol}(d) = & \left[d^2 - ((d - a_1)^+)^2 - ((d - a_2)^+)^2 + \right. \\ & \left. + ((d - a_1 - a_2)^+)^2 \right] / (2a_1 \cdot a_2). \end{aligned} \quad (14'')$$

И в тривиальном случае $n = 1$ равенство (14) превращается в равенство:

$$\text{Vol}(d) = [d^+ - (d - a)^+] / a = d^+ - (d - 1)^+$$

Т.к. тогда $a = a_i = 1$ в силу нормировки.

3. О нахождении распределения блоков по объемам в общем случае

При нахождении распределения блоков по объемам возникают задачи эффективного многократного вычисления объемов многогранников, грани которых параллельны данному конечному набору плоскостей. Сам объем вычисляется много раз при различных сдвигах, и для эффективного вычисления выгодно вычислить сначала все нужные величины, связанные с направлениями граней.

Достаточно, оказывается, уметь определять коэффициенты в формулах для объема тетраэдра в зависимости от свободных членов уравнений плоскостей его граней. Оказывается, что при массовом вычислении объема каждый раз тратится только несколько умножений. Мы покажем, что если у многогранника M грани находятся в общем положении, то задача вычисления объема M сводится, как и в случае четырех систем плоскостей, с помощью соображений включения-исключения к задаче вычисления объемов тетраэдров, грани которых лежат на $\mathcal{R}$ -семействе плоскостей, являющихся продолжением граней M .

Грани M находятся в общем положении, если никакие две не параллельны, никакие 3 не параллельны одной прямой. Соображения включения-исключения удобно формулировать на языке линейных комбинаций характеристических функций: через χ_M обозначим характеристическую функцию множества M (т.е. $\chi_M(x) = 1$, если $x \in M$, иначе $\chi_M(x) = 0$). Равенство функций мы понимаем в смысле почти всюду, пренебрегая тем, что точки граней могут считаться несколько раз. Через $V(M)$ мы обозначаем множества M .

ТЕОРЕМА 6. *Если все грани m находятся в общем положении, то найдутся тетраэдры T_i , грани которых лежат на $\mathcal{R}$ и целые числа λ_i такие, что:*

$$\chi_M = \sum \lambda_i \chi_{T_i}$$

В этом случае $V(M) = \sum \lambda_i V(T_i)$.

Если грани u не находятся в общем положении, то найдутся многогранники N_i , грани которых лежат на $\mathcal{R}$ такие, что: параллелепипедом, либо трехгранной призмой, либо пирамидой, у которой основание параллелограмм.

Доказательство теоремы. Поскольку $\mathcal{R}$ разбивает M на выпуклые части, можно считать, что M - выпуклый многогранник. В случае общего положения у M найдутся четыре грани, продолжение которых образует тетраэдр T , содержащий M . T получается из M дополнением многогранниками M_i , чьи грани лежат на $\mathcal{R}$, а число граней каждого M_i , очевидно, меньше числа граней M . Индукция по числу граней. Общий случай вытекает из того факта, что выпуклый многогранник, не имеющий звездчатых форм - это в точности описанный выше, так что у M найдутся несколько граней, продолжение которых будет таким многогранником.

Отметим, что даже для случая не общего положения можно ограничиться вычислением объемов тетраэдров с помощью метода малых шевелений.

Программа основанная на явном вычислении объемов, работает 1 сек. на малой ЭВМ и строит гистограмму.

4. Применение полученных результатов к определению выхода блоков. Сравнение теоретической и экспериментальной зависимостей.

4.1. Описание гистограммы.

Гистограмма распределения блоков по объемам, полученная в результате работы программы для разбиения пространства четырьмя системами плоскостей. Здесь A_1, A_2, A_3 — разбивают пространство на единичные кубы, система A_4 нормальна к диагонали куба и расстояния между соседними плоскостями A_4 равны 0,557, что близко к одной трети длины диагонали куба.

Аналогичные гистограммы получены и в ряде других случаев. Все они имеют две характерные особенности. Во-первых, это пик при $V \rightarrow 0$. Во-вторых, это максимум при относительно больших V и минимум при средних. Эти качественные особенности подтверждаются в работах маркшейдеров.

Эти графики имеют те же самые особенности. Различие состоит в поведении в окрестности нуля, но это связано с тем, что мелкие блоки, как неинтересные, маркшейдерами не учитывались.

4.2. Обсуждение результатов

Дадим теперь объяснение зависимости на интуитивном уровне. Рассмотрим для простоты случай четырех систем. Пусть $V_i(f)$ — объем i -й части разбиения B , задаваемым сдвигом системы A_4 . Если f изменится на df , то $V_i(f)$ изменится на $dV_i(f) = V'_i(f)df$.

Но так как все сдвиги f равновероятны, плотность вероятности того, что объем i -й части равен V , пропорциональна $df/dV_i = V'_i(f)$. Таким образом, плотность вероятности того, что часть имеет объем V тем больше, чем меньше меняется объем V в зависимости от f .

Перейдем к объяснению гистограмм. Когда f мало, объем первой части, ближайшей к углу пропорционален f^3 , а его производная — f^2 . Таким образом, плотность вероятности $P(V)$ при $V \rightarrow 0$ имеет асимптотику $V^{-2/3}$. Этим объясняется поведение $P(V)$ при малых V .

Перейдем теперь к объяснению "Горбика". Будем двигать полосу вдоль B , т.е. будем рассматривать пересечение B с полосой

$$\alpha \leq A_1 \cdot X + A_2 \cdot Y + A_3 \cdot Z < \alpha + d,$$

изменяя параметр α .

Вначале объем пересечения растёт, затем падает, а когда становится максимальным, то меняется мало. Отсюда — второй максимум.

Тот же эффект присутствует и при распределении расстояний между соседними точками пересечения скважин с трещинами массива.

Вероятно, описанный выше механизм появления вторых максимумов работает и в ряде других ситуаций.

5. Оценка числа блоков в массиве и определение среднего объема блока.

В этом параграфе мы рассмотрим задачу определения среднего объема блока для модели, в которой трещины являются неограниченными плоскостями, а также рассмотрим плоскую задачу для модели, в которой каждая трещина растёт до пересечения с соседней.

5.1. Модель, в которой трещины считаются неограниченными

плоскостями. Выше для этой модели была рассмотрена задача отыскания распределения блоков по объемам в предположении, что соседние трещины "в системах находятся на одинаковом расстоянии друг относительно друга. Однако, если искать только средний объем блока V_c (или обратную величину $\tau = V_{cp}^{-1}$, равную среднему числу блоков, приходящихся на единицу объема, то предположение о распределении расстояний между трещинами в системах не требуется. Важно только, чтобы для каждой системы существовало бы среднее расстояние d_i между соседними трещинами и для отыскания τ достаточно знать эти величины.

Мы приведем явные формулы для V_c , случай n систем будет сведен к случаю трех систем.

Введем необходимые определения. Назовем блок j -й и k -й систем. i, j, k - элементарные блоки являются блоками первого порядка и, вообще говоря, не являются монолитными, поскольку i, j, k - элементарный блок может быть разбит плоскостями остальных систем. Пусть $V_{i,j,k}$ - средний объем i, j, k - элементарного блока, а $\tau_{i,j,k} = V_{i,j,k}^{-1}$ - среднее число i, j, k элементарных блоков, приходящееся на единицу объема. Задача определения $\tau_{i,j,k}$ - это и есть случай трех систем, к которому сводится общий случай.

Легко убедиться, что

$$V_{i,j,k} = d_i d_j d_k |\vec{n}_i \wedge \vec{n}_j \wedge \vec{n}_k|^{-1}, \quad (17)$$

$$\tau_{i,j,k} = d_i^{-1} d_j^{-1} d_k^{-1} |\vec{n}_i \wedge \vec{n}_j \wedge \vec{n}_k|, \quad (17')$$

где, как обычно, $\vec{n}_i$ - единичные векторы нормали к i -й системы, $|\vec{n}_i \wedge \vec{n}_j \wedge \vec{n}_k|$ - модуль смешанного произведения $\vec{n}_i, \vec{n}_j, \vec{n}_k$, т.е. объем параллелепипеда, построенного на этих векторах.

Пусть направления всех $\vec{n}_i$ находятся в общем положении, т.е. $|\vec{n}_i \wedge \vec{n}_j \wedge \vec{n}_k| \neq 0$, если $i \neq j \neq k$. Тогда справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 7.

$$\tau = \sum_{i \neq j \neq k} \tau_{i,j,k} \quad (18)$$

СЛЕДСТВИЕ 1.

$$V_c = \left[\sum_{i \neq j \neq k} V_{i,j,k}^{-1} \right]^{-1} \quad (18')$$

$$\tau = \sum d_i^{-1} d_j^{-1} d_k^{-1} |\vec{n}_i \wedge \vec{n}_j \wedge \vec{n}_k|, \quad (18'')$$

$$V_c = \left[\sum d_i^{-1} d_j^{-1} d_k^{-1} |\vec{n}_i \wedge \vec{n}_j \wedge \vec{n}_k| \right]^{-1} \quad (18''')$$

Заметим, что формула (18'') справедлива и в том случае, когда некоторые плоскости могут находиться не в общем положении и какие-то три могут быть параллельны одной прямой. В этом случае $\tau_{i,j,k}$ следует положить равным нулю, а $V_{i,j,k}$ - бесконечности.

Соотношение (18'') получается для этого случая предельным переходом. Важно только, чтобы нашлись такие i, j, k , что $|\vec{n}_i \wedge \vec{n}_j \wedge \vec{n}_k|$ было бы отлично от нуля, т.е. A_i, A_j, A_k не были бы параллельны одной прямой, иначе системы $A_1, \dots, A_n$ не разбивают пространство на ограниченные части. Заметим, что если существуют средние расстояния d_i, d_j, d_k , то определен и средний объем $V_{i,j,k}$.

Доказательство теоремы

Докажем (18), установив взаимно-однозначное соответствие между монолитными блоками и блоками первого порядка.

Выберем направление, не перпендикулярное ни к одной из линий пересечения плоскостей системы A_i и $A_j; V_i, V_j$. Назовем это направление направлением "вверх". у каждого монолитного блока определен тогда "верхний" угол и этот угол образуют три системы с номерами, скажем i, j, k . (Поскольку системы A_i находятся в общем положении, мы предполагаем, что никакие 4 плоскости не пересекаются в одной точке).

Таким образом, каждому монолитному блоку соответствует i, j, k - элементарный блок с тем же "верхним" углом. Верно и обратное: у каждого i, j, k - элементарного блока есть "верхний" угол, а, следовательно, и монолитный блок к нему прилегающий. Теорема доказана.

5.2. Модель, в которой трещины являются неограниченными плоскостями, но не группируются в системы.

В этом случае пусть $R(\vec{n})$ характеризует распределение трещин по направлениям (см.гл.2). В случае N систем с нормальными $\vec{n}_i$ функция $R(\vec{n})$ имеет вид

$$R(n) = \sum_{i=1}^N \delta(\vec{n}, \vec{n}_i) d_i^{-1} + \sum_{i=1}^N \delta(\vec{n}_1, \vec{n}_i) d_i^{-1} \quad (19)$$

Рассматривая, распределение для $N \rightarrow \infty$ систем, трещин, аппроксимирующее непрерывное, и переходя к пределу, будем иметь:

$$\tau = \int_{S^2 \times S^2 \times S^2} R(\vec{n}_1) R(\vec{n}_2) R(\vec{n}_3) |\vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 \wedge \vec{n}_3| d^2 \vec{n}_1 d^2 \vec{n}_2 d^2 \vec{n}_3 \quad (20)$$

Для N - мерного пространства точно также можно определить $i_1, \dots, i_n$ - элементарные блоки и соответствующие величины.

Точно также $\tau = \sum_{I \subset \{1, \dots, k\}, |I|=N} \tau_I$.

И аналогично

$$\begin{aligned} \tau_I &= \prod_{i \in I} d_i^{-1} \left| \hat{i}_{i \in I} \vec{n}_i \right|; \\ \tau &= \sum_{\#I=n} \prod_{i \in I} d_i^{-1} \left| \bigwedge_{i \in I} \vec{n}_i \right|; \tau = V_c^{-1}. \end{aligned} \quad (21)$$

В случае непрерывно распределенных направлений:

$$V_c = \int_{S^{n-1} \times \dots \times S^{n-1}(\text{нраз})} \dots \int \prod_i R(\vec{n}_i) \left| \bigwedge_{i \in I} \vec{n}_i \right| d^{n-1} \vec{n}_i \dots d^{n-1} \vec{n}_N. \quad (22)$$

Наш вывод, использующий идею аппроксимации является значительно более простым и прозрачным, по сравнению с имеющимися.

5.3. Модель, в которой каждая трещина растет только до слияния с соседней.

В реальном массиве очень часто трещина растет только до слияния с соседней. Получается картина подобная той, что показана

Задачи, вытекающие из рассмотрения моделей, в которых каждая трещина растет только до слияния с соседней, очень сложны, мы рассмотрим только плоскую задачу и покажем, как искать в этом случае среднюю площадь.

Предположим, что трещины находятся в общем положении, так что в каждой вершине сходятся только две трещины. Трещина считается тонкой, так что вероятность того, что три

или более растущих трещины "столкнуться" в одной точке мы считаем пренебрежимо малой. (Точно так же для пространственного случая пренебрежимо мала вероятность того, что 4 или больше трещин пройдут через одну точку).

Перейдем теперь к рассмотрению плоской задачи.

ТЕОРЕМА 8. *Произведение среднего числа трещин на единицу площади на среднюю площадь S_c области равно единице.*

Доказательство. Пусть $n = S_c^{-1}$ – среднее число монолитных областей в пересчете на единицу площади, K – соответственно число вершин, l – трещин. Точки встречи трещины с другими трещинами разбивают трещины на сегменты, m – число таких сегментов в единице площади. Поскольку у трещины две вершины, $K = 2l$.

Поскольку к каждой вершине примыкают 3 сегмента, а каждый сегмент ограничен двумя вершинами, $3K = 2m$, откуда $m = 3l$.

Из формулы Эйлера для плоского графа (число всех вершин - число ребер + число граней = 2, двойной пренебрегаем) вытекает, что $K - m + n = 0$. Откуда $n = 1$. Теорема доказана.

Из доказательства следует, что теорема верна и для криволинейных трещин.

Теорема позволяет также находить среднюю площадь монолитного участка поверхности образца после того, как трещины разовьются, зная среднее число трещин на единице площади.

6. Задачи об определении выхода блоков при разработке месторождения облицовочного камня камнерезными машинами.

В этом параграфе мы рассмотрим задачи о числе прямоугольных монолитных блоков, которые можно "вырезать" из массива. Будут рассмотрены две различные постановки задачи, отвечающие двум разным технологическим процессам.

При разработке месторождения стенового или облицовочного камня камнерезными машинами из массива выпиливаются блоки, имеющие форму прямоугольного параллелепипеда $D_1 \times D_2 \times D_3$. Длины ребер D_1, D_2, D_3 мы будем называть $\therefore$ тарифными размерами. Те выпиливаемые блоки, которые пересечены трещинами, бракуются. Таким образом, представляет интерес задача определения выхода целых блоков.

Разработка месторождения производится по горизонтали, каждый такой горизонт можно считать частью пространства, заключенного между 2 горизонтальными плоскостями, находящимися на расстоянии D_3 .

Для каждого горизонта выемка производится вдоль направления Фронта горных работ (ФГР), затем сам ФГР передвигается вглубь горизонта на расстояние D_1 .

Расстояния между горизонтальными распилами равны D_3 , между вертикальными распилами, параллельными ФГР, равны D_1 .

Распилы этих систем проводятся строго на равном расстоянии друг относительно друга и моделируются двумя перпендикулярными системами плоскостей с равными расстояниями между соседними плоскостями в каждой системе.

Когда выпиливается блок, то проводятся еще два вертикальных распила, перпендикулярных ФГР, расстояние между которыми равно D_2 . Однако, в самой процедуре проведения этих распилов возможны варианты.

Для первого технологического процесса (применяемого при разработке месторождения стенового камня) распилы каждой системы проводятся на равных расстояниях, так что все три системы распилов моделируются тремя перпендикулярными равноотстоящими системами плоскостей, с расстояниями между соседними плоскостями в системах равными D_1, D_2, D_3 .

В этом случае задача сводится к задаче отыскания относительного числа монолитных блоков первого порядка.

Для второго процесса две системы распилов, параллельные ФГР проводятся точно также и разбивают пространство на равные бруски, а вот распилы третьей системы, перпендикулярные ФГР, доразбивающие каждый такой брусок, для каждого бруска всякий раз регулируются так, чтобы повысить выход целых блоков. Ниже будет решена задача для оптимального выбора распилов.

Назовем горизонтальные распилы первой системой распилов или просто первой системой, систему распилов, перпендикулярную ФГР второй, а оставшуюся - третьей. Расстояния между соседними распилами соответственно первой, второй и третьей систем при выпиливании блока равны $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$.

мы предположим, что распилы второй системы регулируются оптимальным образом. Поясним это. Пусть добыча происходит слева направо (направление указано). можно считать, что две системы распилов, параллельных ФГР уже проведены и разбивают пространство на бруски.

Пусть B - один из таких брусков.

Оптимальная стратегия, позволяющая выпилить из B в максимально возможное число монолитных тарифных блоков размера $\mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2 \times \mathcal{D}_3$, состоит в следующем:

1. Если можно провести справа от ранее проведенного распила второй системы распил на расстоянии $\mathcal{D}_2$ так, чтобы был выпилен монолитный блок, это следует сделать.
2. В противном случае проводится самый левый из распилов, который не пересекается с трещинами и не совпадает с ранее проведенным

Выход монолитных блоков размера $\mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2 \times \mathcal{D}_3$ для второго технологического процесса в пересчете на единицу объема равен выходу таких блоков из бруска. В пересчете на единицу длины длинного ребра B , деленный на $\mathcal{D}_1 \cdot \mathcal{D}_3$. Последняя задача сводится уже к одномерной задаче определения числа отрезков длины $\mathcal{D}_2$ в пересчете на единицу длины, которые можно вырезать из прямой с выброшенными системами отрезков.

Уточним это соображение. Рассмотрим проекцию на направление ФГР. Вторая система проектируется в систему точек, вырезаемой тарифный блок - в отрезок длины $\mathcal{D}_2$.

Сечения в плоскостях i -й системы A_i проектируются в отрезки длины d_i , среднее расстояние (расстояние между серединами) между соседними такими отрезками равно δ_i . Обозначим i -ю систему отрезков через α_i . Расстояние между отрезками из α_i пропорционально расстоянию между соответствующими плоскостями из A_i , поэтому имеет тот же закон распределения.

Вырезанный монолитный блок проектируется в область, не пересекающуюся ни с одним из отрезков систем α_i .

Множество точек, не закрытых ни одним из отрезков систем α_i образует набор интервалов. Назовем такие интервалы свободными. из свободного интервала длины x можно вырезать $f(x) = [x/\mathcal{D}_2]$ отрезков длины $\mathcal{D}_2$, где $[x]$ - целая часть x . С коэффициентом $\mathcal{D}_1 \mathcal{D}_3$ выходу в пересчете на единицу длины ребра B или, что то же самое, пределу

$$Q = \lim_{l \rightarrow \infty} N(l)/l$$

где $N(l)$ - число блоков, которые можно вырезать из части B , являющейся прямоугольным параллелепипедом с ребрами $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_3$. Пусть $L(l)$ - проекция этой части на (OX) . Тогда:

$$N(l) = \sum_x f(x), \quad (23)$$

где x пробегает свободные интервалы, находящиеся внутри l . Таким образом, постановка задачи является такой:

На прямой даны n систем отрезков d_i , среднее расстояние между соседними отрезками i -й системы равно δ_i , закон распределения расстояний между соседними отрезками из α_i известен.

Найти λ - среднюю сумму $f(x)$ по свободным интервалам в пересчете на единицу длины, т.е. предел:

$$\lim_{l \rightarrow \infty} 1/2l * \sum_{\text{середина } x \text{ принадлежит } [-l, l]} f(x)$$

Ниже будут получены явные выражения для d_i и δ_i через параметры, описывающие положение систем A_i и направление ФГР.

Для первого процесса задача ставится так: даны 3 системы плоскостей, разбивающие пространство на блоки первого порядка, являющиеся прямоугольными параллелепипедами. Соседние плоскости первой системы удалены на расстояние $\mathcal{D}_1$, второй и третьей системы на $\mathcal{D}_2$ и $\mathcal{D}_3$ соответственно. Кроме того, имеются еще n систем плоскостей с известными направлениями, средними расстояниями и законом распределения расстояний между соседними.

Требуется определить относительное число монолитных блоков первого порядка, порожденных первыми тремя системами.

На выход блоков, как для первого, так и для второго процесса оказывает влияние закон распределения расстояний в системах.

Мы рассмотрим две модели: равноотстоящую и пуассоновскую, которые представляют крайние случаи распределения расстояний между трещинами. Сравнение результатов этих двух моделей позволяет судить о влиянии разброса расстояний между трещинами и тем самым об обоснованности предположений, лежащих в основе моделей.

Заметим, что выход блоков для пуассоновской модели больше. Это связано с тем, что разброс межтрещинных расстояний приводит к тому, что где-то трещины располагаются реже (а где-то чаще). Но для выхода блоков "много трещин" это все равно, что "очень много". Зато важно, что появляются места с более редкими трещинами.

Ниже задача определения выхода блоков решена для четырех различных ситуаций:

1. 1-й процесс - равноотстоящая модель.
2. 1-й процесс - пуассоновская модель.
3. 2-й процесс - равноотстоящая модель.
4. 2-й процесс - пуассоновская модель.

В первом случае выход получается минимальным, в четвертом максимальным. Эти соображения служат одним из тестов для проверки алгоритмов. Сравнения результатов для первого и второго процесса позволяют судить о значении выбора распиллов.

На основе решения задач 1, 2, 3, 4 была разработана программа.

7. Задание плоскостей и вычисление вспомогательных величин.

В ближайших трех параграфах плоскости i -системы задаются нормальными уравнениями:

$$a_1x + b_1y + c_1z = \text{const}$$

при этом $a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 = 1$ или

$$a_i = \sin \alpha_i \cos \beta_i$$

$$b_i = \sin \alpha_i \sin \beta_i$$

$$c_i = \cos \alpha_i$$

где α_i – угол падения плоскостей i -й системы, а β_i – азимут простираения.

Через ψ обозначается азимут ФГР, а через d_i – средние расстояния между трещинами i -й системы. Пусть R_{ij} – координаты ребер вырезаемого тарифного блока B (R_{3j} – вертикального,

R_{1j} параллельному ФГР, R_{2j} - горизонтального нормального ФГР, $j = 1, 2, 3$ соответствует координатам x, y, z). Тогда:

$$\begin{aligned} R_{11} &= D_1 \cos \psi, & R_{21} &= -D_2 \sin \psi, & R_{31} &= R_{32} = 0 \\ R_{12} &= -D_1 \sin \psi, & R_{22} &= -D_2 \cos \psi, & R_{33} &= D_3, \\ R_{13} &= 0, & R_{23} &= 0. \end{aligned}$$

Длина проекции Γ_i блока Π на нормаль к i -й системе равна сумме длин проекций его ребер:

$$\begin{aligned} \Gamma_i &= |R_{11}a_i + R_{12}b_i + R_{13}c_i| + |R_{21}a_i + R_{22}b_i + R_{23}c_i| + \\ &+ |R_{31}a_i + R_{32}b_i + R_{33}c_i| = D_1 |\cos a_i + \sin b_i| + \\ &+ D_2 |-\sin a_i + \cos b_i| + D_3 |c_i| \end{aligned} \quad (24)$$

Пересчитаем все величины в систему координат, связанную с Π , т.е, систему координат с базисными векторами $\vec{e}_1 = R_{1j}, \vec{e}_2 = R_{2j}, \vec{e}_3 = R_{3j}$. В этой системе координат блок Π есть множество точек x', y', z' , таких, что $0 \leq x', y', z' \leq 1$. Переход к этой системе координат представляет собой аффинное преобразование, переводящее Π в единичный куб.

В новой системе координат уравнения плоскостей i -й системы имеют вид:

$$a'_i x + b'_i y + c'_i z = \text{const},$$

где

$$\begin{aligned} a'_i &= a_i R_{11} + b_i R_{12} + c_i R_{13}, \\ b'_i &= a_i R_{21} + b_i R_{22} + c_i R_{23}, \\ c'_i &= a_i R_{31} + b_i R_{32} + c_i R_{33}. \end{aligned} \quad (25)$$

Удобно все коэффициенты a'_i, b'_i, c'_i разделить на нормировочный коэффициент $\mathbf{x}_i = \sqrt{a_i^2 + b_i^2 + c_i^2}$.

Положим $a_i^1 = a'_i / \mathbf{x}_i; b_i^1 = b'_i / \mathbf{x}_i; c_i^1 = c'_i / \mathbf{x}_i$.

Окончательно, уравнения плоскостей i -й системы имеют вид:

$$a_i^1 x + b_i^1 y + c_i^1 z = \text{const}.$$

Средние расстояния между плоскостями i -й системы в новой системе координат равны $d_i^1 = d_i^1 / \mathbf{x}_i$ а проекция Γ_i^1 на нормаль к i -й системе равна:

$$\Gamma_i^1 = |a_i^1| + |b_i^1| + |c_i^1|. \quad (24')$$

Ниже, если не оговорено противное, все координаты будут относиться к описанной выше системе.

Пусть B_r - брус: $B_r = \{x, y, z \mid 0 \leq x, y, z \leq 1\}$

(длинная ось B_r параллельна ФГР)

Проекция сечения B_r плоскостью i -й системы на ось OX есть отрезок, длина которого равна:

$$s_i = (|b_i^1| + |c_i^1|) / |a_i^1| \quad (26)$$

Среднее расстояние DS_i между серединами таких отрезков равно:

$$DS_i = d_i^1 / |a_i^1| \quad (27)$$

7.1. Определение выхода блоков для первого процесса.

Как было сказано выше, в этом случае задача ставится так: даны решетка параллелепипедов (блоков первого порядка), длины ребер которых равны $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$ и n систем плоскостей. Требуется определить выход (относительное число) монолитных блоков первого порядка. Ниже в этом пункте будут решены задачи 1, 2 предыдущего пункта. Проводимые при этом рассуждения не зависят от выбора системы координат.

Средний выход блоков равен вероятности P того, что наугад взятый блок первого порядка, образованный системами распилов A_1, A_2, A_3 , является монолитным. Как для пуассоновской, так и для равноотстоящей модели справедливо равенство:

$$P = \prod_{i=1}^n P_i. \quad (28)$$

где P_i - вероятность того, что блок первого порядка не пересечен трещинами i -й системы. Равенство (28), очевидное для пуассоновской модели, для равноотстоящей модели вытекает из результатов 3.1. через $P^{\text{равн}}$ ($P_i^{\text{равн}}$). Мы будем обозначать выход блоков в равноотстоящей модели через $P^{\text{равн}}$ и через $P_i^{\text{Пуасс}}$ - в пуассоновской.

Пусть Γ_i - проекция блока первого порядка B на нормаль к i -й системе, d_i - расстояния между соседними трещинами i -й системы через x^+ мы как обычно обозначаем $\text{MAX}(X, 0)$.

Из равномерной распределенности сдвигов i -й системы относительно B , доказанной в 3.1. следует равенство для равноотстоящей модели:

$$P_i^{\text{равн}} = (d_i - \Gamma_i)^+ / d_i. \quad (29)$$

Из (28) и (29) следует, что:

$$P^{\text{равн}} = \prod_{i=1}^n (d_i - \Gamma_i) / d_i, \quad (30)$$

где $p^{\text{равн}}$ выход блоков для равноотстоящей модели.

Аналогично, рассматривая проекцию B на нормаль к i -й системе, мы для пуассоновской модели приходим к следующей задаче:

На прямой дано пуассоновское множество точек, средние расстояния между соседними точками равны d_i . Найти вероятность P_i того, что наугад взятый отрезок длины Γ_i не закроет ни одной точки.

Как хорошо известно из теории геометрических вероятностей, в этом случае

$$P_i^{\text{пуасс}} = \exp(-\Gamma_i / d_i). \quad (31)$$

Учитывая (28) и (31) для пуассоновской модели, окончательно имеем:

$$P^{\text{пуасс}} = \prod_{i=1}^n \exp(-\Gamma_i / d_i) = \exp\left(-\sum_{i=1}^n \Gamma_i / d_i\right) \quad (32)$$

В системе координат, связанный с B $\Gamma_i^1 = |a_i^1| + |b_i^1| + |c_i^1|$ и поэтому окончательные выражения для выхода блоков в этой системе координат примут вид:

$$P_i^{\text{равн}} = \prod_{i=1}^n [d_i^1 - |a_i^1| - |b_i^1| - |c_i^1|] / d_i^1, \quad (30')$$

$$P_i^{\text{пуасс}} = \exp\left[-\sum_{i=1}^n [|a_i^1| + |b_i^1| + |c_i^1|] / d_i^1\right] \quad (32')$$

где индекс I наверху обозначает, что все величины берутся в системе координат, связанной с B .

7.2. Определение выхода блоков для второго процесса.

Прежде всего с помощью аффинного преобразования задача сводится к случаю, когда $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2 = \mathcal{D}_3 = I$, а азимут ФГР ψ равен 0. После преобразования вырезаемый блок является единичным кубом.

После перехода к проекциям на направление ФГР и сведения таким образом к линейному случаю, задача сводится к следующей:

На прямой l дано n систем отрезков, которые мы будем называть закрытыми отрезками. Отрезки i -й системы A_i имеют длину DS_i . Средние расстояния между серединами соседних отрезков i -й системы равны S_i . Определить среднее число λ отрезков длины 1, которое можно вырезать из частей прямой l , не закрытых отрезками в пересчете на единицу длины.

Равенство (2I) можно переписать в виде:

$$\lambda = \lim 1/2L \sum [x] = \sum_{k=1}^{\infty} N_k, \quad (21')$$

где x – свободный интервал на отрезке $[-L, L]$, и N_k – среднее число свободных интервалов длины, большей чем k , в пересчете на единицу длины. Запишем окончательно:

$$\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} N_k. \quad (33)$$

Число отрезков системы A_i на участке длины L равно L/DS_i , а всего отрезков всех систем равно $L \cdot DQ$, где

$$DQ = \sum_{i=1}^n 1/S_i \quad (34)$$

Предполагается также, что прямая l ориентирована так, что можно говорить о "начале" и "конце" каждого отрезка.

Перейдем теперь к разбору случаев пуассоновской и равноотстоящей модели.

7.3. Пуассоновская модель.

Выход блоков мы будем обозначать $\lambda_{\text{пуасс}}$. В этом случае середины отрезков систем A_i образуют пуассоновское множество точек со средним расстоянием $1/DS_i$. Пусть E – случайно выбранный конец отрезка системы A_i . Вероятность P_j того, что E не закрыта (не является внутренней точкой) отрезка A_j равна вероятности того, что произвольно выбранная точка не закрыта точками A_j . При $i \neq j$ это очевидно, при $i = j$ это, следует из рассмотрения системы A_i как объединения очень большого числа систем A_k , порожденных пуассоновскими процессами средней малой интенсивности.

Справедливо равенство:

$$P_j = \exp(-S_j/DS_j). \quad (35)$$

Формула (35) следует из того, что S_j/DS_j – это относительная суммарная длина отрезков из A_j в пересчете на единицу длины. Доказательство (35) основано на рассмотрении системы A_j как объединения систем A_k малой интенсивности. В этом случае

$$P_j = \prod_{\alpha=1}^n P_j^\alpha = \prod_{\alpha=1}^n \left(1 - \frac{S_j}{N \cdot DS_j} + o\left(\frac{S_j}{N \cdot DS_j}\right)^2 \right),$$

т.е.

$$P_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{S_j}{N \cdot DS_j} + o\left(\frac{S_j}{N \cdot DS_j}\right)^2 \right)^n = \exp(-S_j/D_j) \quad (36)$$

Вероятность P того, что E не закрыта никаким из отрезков систем A_i равна:

$$P = \prod_{j=1}^n P_j = \exp\left(-\sum_{j=1}^n S_j/D_j\right) \quad (37)$$

Пусть E - начало свободного интервала.

Покажем, что вероятность P_X того, что расстояние от т. E до начала ближайшего закрытого отрезка превышает X равна:

$$P_X = \exp(-X * DQ) = \exp\left[-X \sum_{j=1}^n 1/DS_j\right] \quad (38)$$

В самом деле: с тем же успехом, что и серединами, отрезки систем A_j можно задавать начальными точками. Условие незакрытости E - это условия на начальные точки, находящиеся левее E , которые не зависят от точек, находящихся правее E . Если забыть о длинах отрезков из A_i , то объединения процессов, порождающих все A_j , можно рассматривать как один пуассоновский процесс интенсивности DQ . Вероятность же того, что ближайшее слева начало от наугад выбранной точки отстоит на расстоянии больше X равна $\exp(-X * DQ)$, что и требуется.

Определим теперь относительное число N_X свободных отрезков длины больше X в пересчете на единицу длины.

Число середин отрезков систем $\{A_j\}$, а следовательно, и концов, в пересчете на единицу длины равно DQ , P - вероятность того, что конец не закрыт другим отрезком. Итак, относительное число свободных отрезков в единице длины равно DQP . Каждый такой отрезок с вероятностью P_x имеет длину больше X .

Таким образом, справедливо равенство:

$$N_X = \left[\sum_{j=1}^n 1/DS_j \right] * \exp\left(-\sum_{j=1}^n S_j/DS_j\right) * \exp\left(-X \sum_{j=1}^n 1/DS_j\right). \quad (39)$$

Воспользовавшись (33) найдем $\lambda_{\text{пуасс}}$:

$$\begin{aligned} \lambda_{\text{пуасс}} &= \sum_{k=1}^{\infty} N_k = DQ \exp\left(-\sum_{j=1}^n S_j/DS_j\right) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-kDQ) = \\ &= \exp\left(-\sum_{j=1}^n S_j/DS_j\right) \cdot DQ \cdot \exp(-DQ)/(1 - \exp(-DQ)) \end{aligned}$$

Окончательно имеем:

$$\lambda_{\text{пуасс}} = \exp(-S_j/DS_j) \cdot DQ \cdot \exp(-DQ)/(1 - \exp(-DQ)), \quad (40)$$

где $DQ = \sum_{j=1}^n 1/DS_j$. Заметим, что если $DQ \rightarrow 0$, т.е. трещины располагаются редко, то $DQ \exp(-DQ)/(1 - \exp(-DQ)) \rightarrow 1$ и $\lambda_{\text{пуасс}} \exp\left(-\sum_{j=1}^n S_j/DS_j\right)$

В этом случае свободные интервалы имеют большую (стремящуюся к бесконечности) среднюю длину и число вырезанных отрезков длины l равно относительной длине свободных интервалов.

7.4. Равноотстоящая модель.

В этом случае каждая система A_i отрезков представляет собой систему отрезков длины S_i . Соседние отрезки находятся на равном расстоянии DS_i между собой. Поскольку предполагается, что все параметры, описывающие положение ФГР и системы трещин находятся в общем положении, так что все величины DS_i алгебраически независимы и выполняются все свойства равномерного распределения независимости сдвигов. Это дает возможность любую точку, связанную с набором систем считать случайно взятой по отношению к другим системам, причем все сдвиги других систем относительно этой точки можно считать равномерно распределенными и независимыми.

Пусть $L \rightarrow \infty$. Число отрезков (а, следовательно, и их концов) из A_j на участке длины L равно L/D_j . Пусть Q_j - число свободных интервалов, начало которых совпадает с концом отрезка из A_j .

Поскольку вероятность P_j того, что наугад взятая точка не закрыта отрезком из A_j , равна $(DS_l - S_l)^+ / DS_l$, то из замечания о независимости сдвигов, сделанного выше, вытекает равенство

$$Q_j = I/DS_j \cdot \prod_{l \neq j} (DS_l - S_l)^+ / DS_l. \quad (41)$$

Множитель $\prod_{l \neq j} (DS_l - S_l)^+ / DS_l$ имеет смысл вероятности того, что случайно взятая точка не закрыта отрезком из A_l . В отличие от пуассоновского случая, произведение берется по $l \neq j$, а не по всем l от 1 до n .

Если $S_j > D_j$ при некотором j , то система A_j не оставляет свободных отрезков и выход в этом случае равен нулю.

Пусть E - начало свободного отрезка, являющееся одновременно концом отрезка из A_j . Вероятность P_j того, что начало ближайшего отрезка из $A_l (j \neq 1)$ находится на расстоянии больше x от E равна:

$$P_{j,l}^X = (DS_l - S_l - X)^+ / (DS_l - S_l). \quad (42)$$

Покажем это. Расстояние между концом и началом соседних отрезков системы A_j равно $DS_j - S_j$, область же точек, находящихся между концом и началом двух соседних отрезков системы A_j , которые могут служить началами свободных отрезков длины больше X есть интервал длины $(DS_j - S_j - X)^+$, начало которого совпадает с концом первого отрезка A_j , а конец - отстоит на расстоянии t от начала второго. Отсюда и вытекает (42).

При $l = j$, $P_{j,l}^X = 1$, если $X \leq DS_j - S_j$ и $P_{j,l}^X = 0$ при $X \geq DS_j - S_j$.

Из (42) и результатов 4.1. вытекает, что вероятность P_j того, что наугад взятый свободный интервал, начало которого лежит на A_j имеет длину больше X , равна:

$$P_j^X = \prod_{l \neq j} (DS_l - S_l - x)^+ / (DS_l - S_l). \quad (43)$$

Таким образом, число свободных интервалов $N_{X,j}$ длины больше X , начало которых находится на конце отрезка из A_j на участке длины равно $P_j \cdot Q_j$ или

$$N_{X,j} = \frac{L}{DS_j} \prod_{l \neq j} \frac{(DS_l - S_l)^+}{DS_l} \cdot \prod_{l \neq j} \frac{DS_l - S_l - X)^+}{DS_l - S_l}$$

После упрощения получим:

$$N_{X,j} = L \cdot \frac{1}{DS_j - S_j - X} \prod_{l=1}^n \frac{(DS_l - S_l - X)^+}{DS_l - S_l} \quad (44)$$

Общее число N_X отрезков, длины большей, чем X , в пересчете на единицу длины равно

$$I/L \cdot \sum_{j=1}^n N_{X,j} \quad \text{или} \quad N_X = \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{DS_j - S_j - X} \right) \prod_{j=1}^n \frac{(DS_j - S_j - X)^+}{DS_j - S_j}. \quad (45)$$

Пусть $m = \min_j (DS_j - S_j)$. Если $m \leq 0$, то $\lambda^{\text{равн}} = 0$.

Воспользовавшись (33) имеем:

$$\lambda^{\text{равн}} = \sum_{X=1}^{\infty} N_X = \sum_{X=1}^m N_X.$$

Отсюда окончательно получаем:

$$\lambda^{\text{равн}} = \sum_{X=1}^m \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{DS_j - S_j - X} \right) \prod_{j=1}^n \frac{DS_j - S_j - X}{DS_j - S_j} \quad (46)$$

Мы заменили $(DS_j - S_j - X)^+$, на $DS_j - S_j - X$, поскольку $DS_j - S_j - X > 0$.

На основании формул (40), (46) была составлена программа, позволяющая для каждого направления ФГР от 0^0 до 180^0 , определять выход блоков для четырех описанных выше ситуаций, а также находить оптимальное направление ФГР для каждого случая. Для неоднородного месторождения выход блоков определяется как взвешенное, среднее.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Анощенко Н.Н. Геометрический анализ трещиноватости и блочности месторождений облицовочного камня // МГИ, 1983.
2. Р.В. Амбарцумян, Й.Мекке, Д.Штоян. Введение в стохастическую геометрию // М.:Наука, 1989.
3. А.Я. Канель-Белов, В.В. Павлова, В.О. Кирова Геометрические свойства сред, разбитых трещинами на блоки // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 5, с. 208-216.
4. Батугин С. А., Бирюков А. В., Крылатчанов Р. М., Гранулометрия геоматериалов // Новосибирск, Наука, Сибирское отделение, 1989.
5. Касселс Дж. В., Введение в теорию диофантовых приближений // Москва, Изд-во иностранной литературы, 1961.
6. Количко А. В., Опыт оценки блочности трещиноватого массива скальных пород // Труды Гидропроекта, Сб.14, Москва–Ленинград, Энергия, 1966.

7. Кендалл М., Моран П. Геометрические вероятности // М.:Наука 1972.
8. М. Маттерон. Случайные множества и интегральная геометрия // М: Мир, 1978.
9. Никитин В. В., Разработка Горно–Геометрического метода прогнозирования выхода блоков для рациональной отработки месторождений облицовочного камня // Дисс. на соиск. канд. техн. наук, Москва, МГИ, 1987. с.97.
10. Садовский М. А., Естественная кусковатость горной породы // Докл. АН СССР, 1979, т. 247, N4 – с. 829–831.
11. Садовский М. А., Болховитинов Л. Г., Писаренко В. Ф., О свойствах дискретности горных пород // Москва, Ин-т физики Земли им. О. Ю. Шмидта, 1981 (36с.).
12. Садовский М. А., Болховитинов Л. Г., Писаренко В. Ф., О свойстве дискретности горных пород. Физика Земли // 1982, N12, с. 3–18.
13. Садовский М. А., О распределении твердых отдельных частей // ДАН СССР, 1983, т.269, N1, с.69–72.
14. Сантало Д. Интегральная геометрия и геометрические вероятности // М.:Наука, 1983.
15. Чернышев С. Н., Трещины горных пород // Москва, Наука, 1983.
16. Pavlova V. V., Study of Geometrical Properties of Blocks in a Jointed Rock Mass Using Statistical Geometry. // Proceedings of the 23-rd International Symposium on the Application of Computers and Operations Research in the Mineral Industry, Tucson, Arisona, USA, April 7–11, 1992, pp.367–373.
17. Goodman, Gen-hua Shi. Block theory and some it's applications to rock engineering // Prentice-Hall, 1985.

REFERENCES

1. Anoshchenko, N.N., 1983. “Geometric analysis of fracturing and blockiness of facing stone deposits”, *MGI*.
2. Ambartsumyan, R.V., Mekke, J., Shtoyan, D, 1989. “Introduction to Stochastic geometry”, *Moscow:Nauka*.
3. Kanel-Belov, A.Ya., Pavlova, V.V., Kirova, V.O., 2023. “Geometric properties of media broken into blocks by cracks”, *Chebyshevskii Sbornik*, Vol. 24, Iss. 5, pp. 208–216.
4. Batugin, S. A., Biryukov, A. V., Krylatchanov, R. M., 1989. “Granulometry of geomaterials”, *Novosibirsk, Nauka, Siberian Branch*.
5. Cassels, J. V., 1961. “Introduction to the theory of diophantine approximations”, *Moscow, Publishing House of Foreign Literature*.
6. Kolechko A. V., 1966. “Experience in assessing the blockiness of a fractured rock mass”, *Trudy Gidroproekt, Sat.14, Moscow–Leningrad, Energiya*.
7. Kendall, M., Moran, P., 1972. “Geometric probabilities”, *Moscow:Nauka*.
8. Masteron, M., 1978. “Random sets and integral geometry”, *Moscow: Mir*.

9. Nikitin, V. V., Development of a mining and geometric method for predicting block yield for rational mining of facing stone deposits // Diss. on the job. Candidate of Technical Sciences, Moscow, Moscow State University, 1987. p.97.
10. Sadovsky, M. A., 1979. "Natural lumpiness of rock", *Dokl. USSR Academy of Sciences*, Vol. 247, № 4, pp. 829–831.
11. Sadovsky, M. A., Bolkhovitinov, L. G., Pisarenko, V. F., 1981. "On the properties of rock discreteness", *Moscow, O.Y.Schmidt Institute of Physics of the Earth*, 1981 (36s.).
12. Sadovsky, M. A., Bolkhovitinov, L. G., Pisarenko, V. F., 1982. "On the discreteness property of rocks", *Physics of the Earth*, № 12, pp. 3–18.
13. Sadovsky, M. A., 1983. "On the distribution of solid separations", *DAN USSR*, Vol. 269, № 1, pp. 69–72.
14. Santalo, D., 1983. "Integral geometry and geometric probabilities", *Moscow: Nauka*.
15. Chernyshev, S. N., 1983. "Rock cracks", *Moscow, Nauka*.
16. Pavlova, V. V., 1992. "Study of Geometrical Properties of Blocks in a Jointed Rock Mass Using Statistical Geometry", *Proceedings of the 23-rd International Symposium on the Application of Computers and Operations Research in the Mineral Industry, Tucson, Arisona, USA, April 7–11*, pp. 367–373.
17. Goodman, Gen-hua Shi., 1985. "Block theory and some it's applications to rock engineering", *Prentice-Hall*.

Получено: 05.04.2024

Принято в печать: 28.06.2024

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 25. Выпуск 2.

УДК 004.046

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-2-127-138

Модель контроллера с установленной программой поллинга для систем с векторным управлением¹

Е. В. Ларкин, В. С. Сальников, С. А. Скобельцын

Ларкин Евгений Васильевич — доктор технических наук, профессор, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: elarkin@mail.ru

Сальников Владимир Сергеевич — доктор технических наук, профессор, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: vsalnikov.prof@yandex.ru

Скобельцын Сергей Алексеевич — доктор физико-математических наук, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: skbl@rambler.ru

Аннотация

Разработан подход к конструированию программ цифровых контроллеров, выполняющих функции управления опросом сенсоров и исполнительных устройств, а также расчета векторных управляющих воздействий на объект. Исследованы три типа векторных алгоритмов расчета управляющих воздействий: решение систем разностных уравнений, вычисление цифровой свертки и ПИД регулятор. Показано, что контроллер, как реальный физический прибор, при реализации на нем программы поллинга является времязадающим элементом, и обеспечивает не только заданный период опроса периферийных устройств, но и задержки по времени между транзакциями. Произведена оценка временных интервалов по полумарковской модели алгоритма поллинга с гамильтоновым циклом управления транзакциями. На модели замкнутой линейной векторной системы управления показано влияние задержек по времени на такие характеристики системы, как перерегулирование и время выхода на установившийся режим. Разработана методика синтеза алгоритма поллинга по матричной модели системы управления, учитывающей реальные характеристики контроллера как прибора, включаемого в контур векторной обратной связи.

Ключевые слова: векторное управление, алгоритм поллинга, транзакция, задержка по времени, полумарковский процесс.

Библиография: 19 названий.

Для цитирования:

Е. В. Ларкин, В. С. Сальников, С. А. Скобельцын. Модель контроллера с установленной программой поллинга для систем с векторным управлением // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 2, с. 127–138.

¹Работа выполнена при поддержке гранта РНФ 24-29-20256

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 25. No. 2.

UDC 004.046

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-2-127-138

The controller with installed polling program model for vector control systems

Е. В. Ларкин, В. С. Сальников, С. А. Скобельцын

Larkun Evgeny Vasilievich — doctor of technical sciences, professor, Tula State University (Tula).

e-mail: elarkin@mail.ru

Salnikov Vladimir Sergeyevich — doctor of technical sciences, professor, Tula State University (Tula).

e-mail: vsalnikov.prof@yandex.ru

Skobel'tsyn Sergey Alekseevich — doctor of physical and mathematical sciences, Tula State University (Tula).

e-mail: skbl@rambler.ru

Abstract

An approach to digital controller's programs design, that perform the functions both sensors and actuators polling control, and control actions calculation, id worked out. Three types of control action computation vector algorithms: the solving systems of difference equations, calculation the digital convolution and PID controller are investigated: It is shown that the controller, as a real physical device, when implementing a polling program on it, is a time-setting element, and provides not only a specified peripheral devices polling period, but also time delays between transactions. An estimation of time intervals using the semi-Markov model of the polling algorithm with a Hamiltonian transaction management cycle is made. The model of a closed linear vector control system shows the influence of time delays on such system characteristics as overshoot and time to reach steady state. A method has been developed for polling algorithm synthesis using a control system matrix model that takes into account the real characteristics of the controller as the device included in the vector feedback loop.

Keywords: vector control, polling algorithm, transaction, time delay, semi-Markov process.

Bibliography: 19 titles.

For citation:

Е. В. Ларкин, В. С. Сальников и С. А. Скобельцын, 2024. "The controller with installed polling program model for vector control systems", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 2, pp. 127–138.

1. Введение

Основным направлением развития современной промышленности является широкое внедрение цифровых систем управления технологическим оборудованием на всех этапах производства [1], что предполагает использование в качестве аппаратной платформы контроллеров с последовательной интерпретацией команд программы управления [2]. Наиболее просто реализуемым и часто встречающимся способом организации доступа к сенсорам, измеряющим контролируемые параметры объекта управления, и исполнительным устройствам, осуществляющим воздействие на объект, является программный опрос периферийного оборудования, поллинг [3, 4]. Вследствие того, что программа поллинга интерпретируется контроллером в

реальном физическом времени, подобная реализация позволяет, с одной стороны, достаточно просто задавать требуемые периоды опроса сенсоров и приводов. С другой стороны, при реализации законов управления поллинг естественным образом приводит к возникновению задержек по времени между транзакциями, которые изменяют динамику работы цифровой системы управления в целом, по сравнению с аналоговой системой с теми же законами управления [5, 6]. В то же время, ухудшение динамики системы управления при переходе на цифровые платформы не должно приводить к снижению качества выпускаемой продукции, в связи с чем возникает научная задача учета реальных физических характеристик контроллеров с установленной программой поллинга при анализе и синтезе систем векторного управления. Методики оценки временных интервалов и учета оценок при синтезе систем цифрового управления распространены в инженерной практике недостаточно, что подтверждает актуальность исследований в данной области.

2. Модель контроллера с программой поллинга

В типовой системе цифрового векторного управления, приведенной на рис. 1, объект управления (ОУ) и цифровой контроллер (К) разделены интерфейсом И. В контроллере текущее время определяется дискретной переменной n , вне цифрового контроллера события развиваются в физическом времени t .

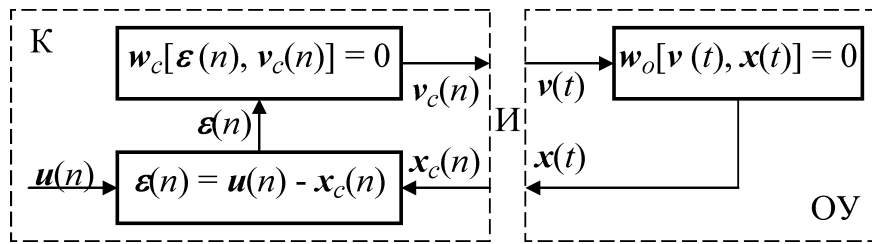


Рис. 1: Структурная схема цифровой векторной системы управления

Система функционирует следующим образом. Желаемое состояние ОУ задается цифровым вектором $\mathbf{u}(n) = [u_1(n), \dots, u_k(n), \dots, u_K(n)]$, где k – номер регулируемого параметра; K – количество регулируемых параметров. Текущее состояние ОУ, $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), \dots, x_k(t), \dots, x_K(t)]$, измеряется с помощью сенсоров подсистемы и через интерфейс И в виде потока данных $\mathbf{x}_c(n) = [x_{c,1}(n), \dots, x_{c,k}(n), \dots, x_{c,K}(n)]$, где $x_{c,k}(n)$ – код, формируемый на интерфейсе, по результатам оценки k -го параметра состояния $x_k(t)$ в дискретный момент времени n , вводится в контроллер. В контроллере из векторов $\mathbf{x}_c(n)$ и $\mathbf{u}(n)$ формируется вектор кода ошибки

$$\boldsymbol{\varepsilon}(n) = \mathbf{u}(n) - \mathbf{x}_c(n), \quad (1)$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}(n) = [\varepsilon_1(n), \dots, \varepsilon_k(n), \dots, \varepsilon_K(n)]$ – K -элементный вектор разности между желаемым и текущим состояниями системы.

На следующем этапе в соответствии с выбранным законом управления

$$\mathbf{w}_c[\boldsymbol{\varepsilon}(n), \mathbf{v}_c(n)] = 0, \quad (2)$$

формируется поток векторов управляющих кодов $\mathbf{v}_c(n) = [v_{c,1}(n), \dots, v_{c,k}(n), \dots, v_{c,K}(n)]$, подаваемых после преобразования в аналоговые сигналы $\mathbf{v}(t) = [v_1(t), \dots, v_k(t), \dots, v_K(t)]$ на исполнительные устройства ОУ.

Обработка данных (2) может быть реализована по одному из следующих алгоритмов: решение системы конечно-разностных уравнений [7], вычисление свертки [8]; реализация ПИД

регулятора [9, 10]. Каждый из перечисленных алгоритмов обеспечивает свою точность реализации закона управления и временную вычислительную сложность.

Алгоритмы, основанные на решении *системы конечно-разностных уравнений*, в общем случае имеют вид

$$\begin{aligned} w_{c,D,l} [n, \Delta^{0(v,1)} v_{c,1}(n), \Delta^{1(v,1)} v_{c,1}(n), \dots, \Delta^{m(v,1)} v_{c,1}(n), \dots, \Delta^{M(v,1)} v_{c,1}(n), \dots, \\ \Delta^{0(v,k)} v_{c,k}(n), \Delta^{1(v,k)} v_{c,k}(n), \dots, \Delta^{m(v,k)} v_{c,k}(n), \dots, \Delta^{M(v,k)} v_{c,k}(n), \dots, \\ \Delta^{0(v,K)} v_{c,K}(n), \Delta^{1(v,K)} v_{c,K}(n), \dots, \Delta^{m(v,K)} v_{c,K}(n), \dots, \Delta^{M(v,K)} v_{c,K}(n), \dots, \\ \Delta^{0(\varepsilon,l)} \varepsilon_l(n), \Delta^{1(\varepsilon,l)} \varepsilon_l(n), \dots, \Delta^{m(\varepsilon,l)} \varepsilon_l(n), \dots, \Delta^{M(\varepsilon,l)} \varepsilon_l(n)] = 0; \\ 1 \leq l \leq K, \end{aligned} \quad (3)$$

где $w_{c,D,l} [\dots]$ – скалярные функции; $\Delta^{m(v,k)} v_{c,k}(n)$, $\Delta^{m(\varepsilon,l)} \varepsilon_l(n)$ – конечные разности; $m(\varepsilon, l)$, $m(v, k)$ – индекс-функции, обозначающие порядок конечной разности, в которых символы, перечисленные в скобках, указывают на переменную, к которой относятся, и на индекс переменной в системе; $M(\varepsilon, l)$ и $M(v, k)$ – максимальные значения порядков;

$$\Delta^\kappa \rho(n) = \sum_{\iota=0}^{\kappa} (-1)^\iota \cdot C_\kappa^\iota \cdot \rho(n + \kappa - \iota), \quad C_\kappa^\iota = \frac{\kappa!}{\iota! (\kappa - \iota)!}.$$

Решение системы (3) без учета начальных условий может быть представлено в следующем виде: $v_{c,k}(n) = w_{v,k} [\varepsilon_1(n), \dots, \varepsilon_l(n), \dots, \varepsilon_K(n)]$. Вычислительная сложность алгоритма (3) определяется видом функций $w_{c,D,l} [\dots]$ и значениями порядков $M(\varepsilon, l)$ и $M(v, k)$.

Алгоритм свертки в общем случае имеет вид

$$\begin{aligned} v_{c,k}(n) = w_{\tilde{n},C,k} \{ \varepsilon_1[n], \dots, \varepsilon_1[n - m(v, k, 1)], \dots, \varepsilon_1[n - M(v, k, 1)], \tilde{v}_{k,1}[0], \dots, \tilde{v}_{k,1}[m(v, k, 1)], \\ \dots, \tilde{v}_{k,1}[M(v, k, 1)], \dots, \varepsilon_l[n], \dots, \varepsilon_l[n - m(v, k, l)], \dots, \varepsilon_l[n - M(v, k, l)], \tilde{v}_{k,l}[0], \dots, \\ \tilde{v}_{k,l}[m(v, k, l)], \dots, \tilde{v}_{k,l}[M(v, k, l)], \varepsilon_K[n], \dots, \varepsilon_K[n - m(v, k, K)], \dots, \varepsilon_K[n - M(v, k, K)], \\ \tilde{v}_{k,K}[0], \dots, \tilde{v}_{k,K}[m(v, k, K)], \dots, \tilde{v}_{k,K}[M(v, k, K)] \}, \quad 1 \leq k \leq K, \end{aligned} \quad (4)$$

где $w_{c,C,k} \{\dots\}$, $1 \leq k \leq K$ – скалярные функции, в общем случае нелинейные, от значений элементов вектора $\varepsilon(n)$, как текущих, так и полученных ранее; $[n - m(v, k, l)]$ – ранее прошедшие дискретные моменты времени; $\tilde{v}_{k,l}[m(v, k, l)]$, $0 \leq m(v, k, l) \leq M(v, k, l)$ – дискретные значения импульсного отклика фильтра сигнала ε_l при формировании сигнала $v_{c,k}$; $M(v, k, l) + 1$, $1 \leq k, l \leq K$ – величины апертур соответствующих фильтров.

Точность воспроизведения закона управления и вычислительная сложность процедуры расчета управляющего воздействия $v_{c,k}$ при обработке сигнала ошибки ε_l по каждому регулируемому параметру x_k напрямую определяются величиной апертуры $M(v, k, l) + 1$. При необходимости достижения высокой точности вычислительная сложность алгоритма свертки может быть весьма значительной.

Одной из разновидностей законов управления, реализуемых в алгоритме свертки, является алгоритм $w_{c,PID}$ ПИД регулятора, имеющий вид

$$v_{c,PID,k}(n) = \sum_{l=1}^K \left\{ \tilde{w}_{k,l,P} \varepsilon_l(n) + \tilde{w}_{k,l,D} [\varepsilon_l(n) - \varepsilon_l(n-1)] + \tilde{w}_{k,l,In} \sum_{m(In,k,l)=0}^n \varepsilon_l[m(In, k, l)] \right\}, \quad (5)$$

где $\tilde{w}_{k,l,P}$, $\tilde{w}_{k,l,D}$, $\tilde{w}_{k,l,In}$ – коэффициенты при пропорциональной (P), дифференциальной (D) и интегральной составляющей (In), соответственно; $[\varepsilon_l(n) - \varepsilon_l(n-1)]$ – конечная разность;

$\sum_{m(In,k,l)=0}^n \varepsilon_l[m(In, k, l)]$ – конечная сумма; $1 \leq k, l \leq K$.

Следует отметить, что конечная сумма значений $\varepsilon_l [m(In, k, l)]$ накапливается в процессе пошаговой реализации алгоритма (5) на предыдущих этапах и не оказывает существенного влияния на его вычислительную сложность.

Элементы вектора $\mathbf{x}_c(n)$ вводятся, а вектора $\mathbf{u}_c(n)$ выводятся из контроллера в результате работы программы поллинга (polling). В общем случае алгоритм поллинга имеет структуру, показанную на рис. 2 [11] и включает неисполнимые операторы $a_{0(a)}$ «Начало» и $a_{J(a)+1}$ «Конец», а также исполнимые операторы $a_{1(a)}, \dots, a_{j(a)}, \dots, a_{J(a)}$, реализующие функции транзакций и обработки данных. Циклическим алгоритм делает обратная связь $[a_{J(a)+1}, a_{0(a)}]$, показанная на рис. 2 штриховой стрелкой.

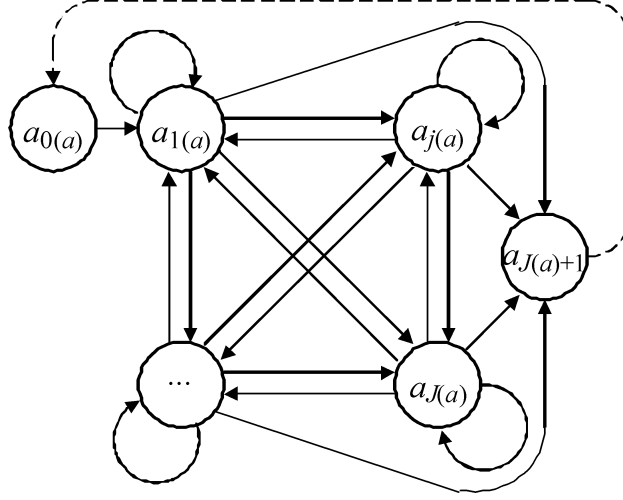


Рис. 2: Структура программы поллинга

Исполнимые операторы алгоритма осуществляют как опрос периферийных устройств, так и программную обработку данных. Принято в структуре, подобной приведенной на рис. 2, представлять только операторы транзакций, а обработку данных включать в операторы транзакций [11, 12]. Вследствие того, что техническими средствами контроллера алгоритм интерпретируется в реальном физическом времени t последовательно, оператор за оператором, между транзакциями естественным образом образуются временные интервалы, наличие которых должно учитываться при включении контроллера в контур управления.

Величины временных интервалов могут быть оценены с применением полумарковской модели интерпретации алгоритма [13, 14, 15]

$$\mu = \{A, \mathbf{h}(\mathbf{t})\}, \quad (6)$$

где $A = \{a_{0(a)}, a_{1(a)}, \dots, a_{j(a)}, \dots, a_{J(a)}, a_{J(a)+1}\}$ – множество состояний полумарковского процесса, совпадающее с множеством операторов алгоритма; $\mathbf{h}(t) = [h_{j(a), n(a)}(t)] = \mathbf{p} \otimes \mathbf{f}(\mathbf{t})$ – $[J(a) + 2] \times [J(a) + 2]$ полумарковская матрица; $\mathbf{p} = [p_{j(a), n(a)}]$ – $[J(a) + 2] \times [J(a) + 2]$ стохастическая матрица; $\mathbf{f}(t) = [f_{j(a), n(a)}(t)]$ – $[J(a) + 2] \times [J(a) + 2]$ матрица плотностей распределения времени пребывания процесса в состояниях множества A до переключения в сопряженные состояния.

Правильно сконструированный алгоритм обладает следующими свойствами:

– для каждого оператора алгоритма (состояния полумарковского процесса) $a_{j(a)}$, существует хотя бы один путь $a_{0(a)} \rightarrow a_{j(a)}$ и хотя бы один путь $a_{j(a)} \rightarrow a_{J(a)+1}$, т.е. алгоритм поллинга является циклическим без закливания, а полумарковский процесс при замкнутой обратной связи является возвратным.

– на вероятности переключения из операторов (состояний) $a_{j(a)}$ накладываются ограничения

$$\sum_{n(a)=0(a)}^{J(a)} p_{j(a),n(a)} = \begin{cases} 1, & j(a) \neq J(a) + 1 \text{ или } j(a) = J(a) + 1 \text{ (обратная связь замкнута);} \\ 0, & j(a) = J(a) + 1 \text{ (обратная связь разомкнута);} \end{cases}$$

– на время интерпретации операторов алгоритма (пребывания в состояниях полумарковского процесса) $a_{j(a)}$, накладываются ограничения:

$$0 < T_{j(a),n(a)\min} \leq \arg f_{j(a),n(a)}(t) \leq T_{j(a),n(a)\max} < \infty, \quad \int_0^{\infty} f_{j(a),n(a)}(t) dt = 1.$$

Таким образом, в полумарковской матрице $\mathbf{h}(t)$ модели (6) с разомкнутой обратной связью $[J(a) + 1]$ -я строка имеет вид $[0, \dots, 0, \dots, 0]$, а в модели $\mathbf{h}'(t)$ с замкнутой обратной связью она равна $[f_{J(a)+1,0(a)}(t), \dots, 0, \dots, 0]$, где $f_{J(a)+1,0(a)}(t)$ – плотность распределения времени работы операционной системы контроллера по перезапуску программы.

Одной из важных характеристик программы поллинга является период следования транзакций [8]. Для самого общего случая он может быть оценен по модели (6) согласно следующей зависимости

$$f_c(t) = \mathbf{I}_{0(a)}^R L^{-1} \left[\sum_{\xi=1}^{\infty} \{L[\mathbf{h}(t)]\}^{\xi} \right] \mathbf{I}_{J(a)+1}^C * f_{J(a)+1,0(a)}(t), \quad (7)$$

где $f_c(t)$ – плотность распределения времени от текущего до следующего перезапуска программы поллинга; $\mathbf{I}_{0(a)}^R$ – $[J(a) + 2]$ -элементный вектор-строка, нулевой элемент которого равен единице, а остальные элементы равны нулю; $\mathbf{I}_{J(a)+1}^C$ – $[J(a) + 2]$ -элементный вектор-столбец, последний, $[J(a) + 1]$ -й элемент которого равен единице, а остальные элементы равны нулю; $L[\dots]$, $L^{-1}[\dots]$ – прямое и обратное преобразование Лапласа, соответственно.

Математическое ожидание от $f_c(t)$ дает собственно период опроса T_c , а дисперсия D_c – оценку шума поллинга

$$T_c = \int_0^{\infty} t f_c(t) dt; \quad D_c = \int_0^{\infty} (t - T_c)^2 f_c(t) dt.$$

В реальном алгоритме поллинга (полумарковской модели (6)) на структуру может быть наложено следующее ограничение: в течение одного цикла каждое устройство ОУ (сенсор или привод) опрашивается по одному разу, а следовательно, исполнимые операторы $a_{1(a)}, \dots, a_{j(a)}, \dots, a_{J(a)}$ (последовательность смены состояний полумарковского процесса) образуют гамильтонов цикл на графе, показанном на рис. 2. Схема линейно-циклического алгоритма, представляющего один из возможных гамильтоновых циклов, приведена на рис. 3 а, где показано $a_{k(H)} \in \{a_{1(a)}, \dots, a_{j(a)}, \dots, a_{J(a)}\}$, $1(H) \leq k(H) \leq 2K(H)$.

Кроме интервала опроса T_c алгоритм поллинга формирует также и временные интервалы между транзакциями (рис. 3 б). Транзакции ввода данных от сенсоров отмечены стрелками с круглым наконечником, транзакции вывода управляющих воздействий на приводы отмечены стрелкам с ромбическим наконечником. Без нарушения общности можно считать, что внутри гамильтонова цикла первой транзакцией является ввод элемента $x_{c,1}$ вектора состояния $\mathbf{x}_c$, после чего в порядке, определенном алгоритмом, вводятся оставшиеся элементы указанного вектора и выводятся элементы вектора $\mathbf{v}_c$.

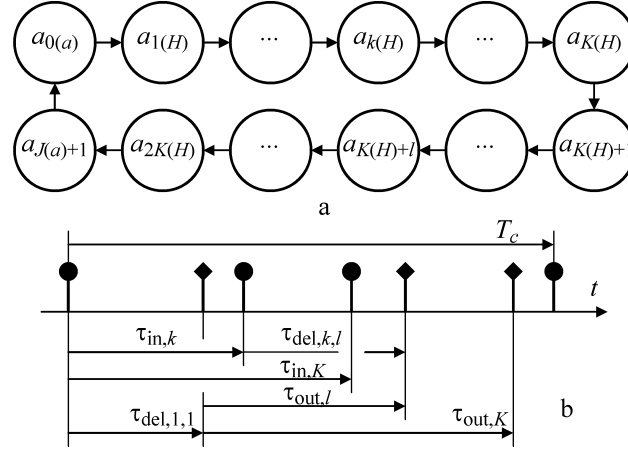


Рис. 3: Реализация гамильтонова пути на исполнимых операторах (а) и порядок следования транзакций (b)

Временные интервалы между началом ввода $x_{c,1}$ и началами вводов $x_{c,2}, \dots, x_{c,k}, \dots, x_{c,K}$ порождают перекося данных $\tau_{in,1}, \dots, \tau_{in,k}, \dots, \tau_{in,K}$ при вводе, где $\tau_{in,1} = 0$. Временные интервалы $\tau_{out,1}, \dots, \tau_{out,k}, \dots, \tau_{out,K}$ между началом вывода элемента $v_{c,1}$ вектора $\mathbf{v}_c$ и началами выводов элементов $v_{c,2}, \dots, v_{c,l}, \dots, v_{c,K}$, порождают перекося данных $\tau_{out,1}, \dots, \tau_{out,l}, \dots, \tau_{out,K}$ при выводе $\mathbf{v}_c$. Временной интервал $\tau_{del,k,l}$, алгоритмически формируемый между вводом $x_{c,k}$ и выводом $v_{c,l}$, дает часть времени чистого запаздывания формирования l -го элемента вектора управления относительно k -го элемента вектора состояния. Полное время чистого запаздывания определяется используемым в системе алгоритмом обработки данных ($w_{c,D}$, $w_{c,C}$ или $w_{c,PID}$)

$$\tau_{k,l} = \tau_{del,k,l} + N_w T_c, \quad (8)$$

где $\tau_{del,k,l} = (\tau_{del,1,1} + \tau_{out,l}) - \tau_{in,k}$; N_w – количество вводов элементов вектора $\mathbf{x}_c$, которые необходимо совершить для расчета $v_{c,l}$.

В алгоритме (3) $N_w = \max \{M(v, 1), \dots, M(v, k), \dots, M(v, K)\}$. В алгоритме (4) $N_w = \max \{M(v, k, 1), \dots, M(v, k, l), \dots, M(v, k, K)\}$. В алгоритме (5) $N_w = 1$, поскольку в общем случае в алгоритме используется конечная разность порядка не выше первого, а конечная сумма накапливается в течение всех циклов работы алгоритма.

Текущее значение дискретного аргумента n может быть представлено в виде $n = t/T_c$. В этом случае при $T_c \rightarrow 0$ конечные разности в (3), (5) преобразуются в производные. Конечная сумма в (5) и дискретная свертка в (4) преобразуются в интеграл и континуальную свертку, соответственно. Общее для (3), (4), (5) выражение (2), после линеаризации, добавления к нему (1) и применения к системе преобразования Лапласа может быть представлено как

$$\mathbf{V}_c(s) = \mathbf{W}_{\tilde{n}}(s) \cdot [\mathbf{U}(s) - \mathbf{X}_{\tilde{n}}(s)], \quad (9)$$

где $\mathbf{V}_c(s) = L[\mathbf{v}_c^\theta(t)]$, $\mathbf{U}(s) = L[\mathbf{u}^\theta(t)]$, $\mathbf{x}_c(t)$, $\mathbf{v}_c(t)$, $\mathbf{u}(t)$ – векторы, получаемые из $\mathbf{x}_c(n)$; $\mathbf{v}_c(n)$, $\mathbf{u}(n)$ путем подстановки вместо дискретного аргумента n непрерывного времени t ; θ – операция транспонирования; $\mathbf{W}_c(s) = [W_{c,k,l}(s)]$ – матрица передаточных функций; $W_{c,k,l}(s) = V_{c,k}(s)/\varepsilon_l(s)$ – передаточные функции, определяемые из реализованных алгоритмов (3), (4) или (5); $\varepsilon(s) = L[\varepsilon(t)]$; $\varepsilon(t)$ – вектор, получаемый из $\varepsilon(n)$ путем подстановки вместо дискретного аргумента n непрерывного времени t ; s – переменная Лапласа (оператор дифференцирования).

В свою очередь, линейный ОУ может быть представлен как

$$\mathbf{X}(s) = \mathbf{W}_o(s) \cdot \mathbf{V}(s), \quad (10)$$

где $\mathbf{V}(s) = L[v^\theta(t)]$; $\mathbf{X}(s) = L[x^\theta(t)]$; $\mathbf{W}_o(s) = [W_{o,k,l}(s)]$ – матрица передаточных функций, которая получается из модели ОУ $\mathbf{w}_o[\mathbf{v}(t), \mathbf{x}(t)] = 0$ (рис. 1) с помощью операций линеаризации и выполнения преобразования Лапласа.

Из (9) и (10) следует, что без учета временного фактора формирование состояний ОУ описывается матричной системой

$$\mathbf{X}(s) = [\mathbf{E} + \mathbf{W}_c(s) \cdot \mathbf{W}_o(s)]^{-1} \cdot \mathbf{W}_c(s) \cdot \mathbf{W}_o(s) \cdot \mathbf{U}(\omega), \quad (11)$$

где $\mathbf{E}$ – единичная диагональная $K \times K$ матрица.

Задержки по времени при выводе элементов вектора $\mathbf{V}(s)$ относительно момента ввода элементов вектора $\mathbf{X}(s)$, оцененные в соответствии с (8), согласно теореме о смещении в действительной области могут быть представлены в виде $K \times K$ матрицы передаточных функций интерфейса И

$$W_I(s) = \begin{bmatrix} \exp(-s\tau_{1,1}) & \dots & \exp(-s\tau_{1,l}) & \dots & \exp(-s\tau_{1,K}) \\ & & \dots & & \\ \exp(-s\tau_{k,1}) & \dots & \exp(-s\tau_{k,l}) & \dots & \exp(-s\tau_{k,K}) \\ & & \dots & & \\ \exp(-s\tau_{K,1}) & \dots & \exp(-s\tau_{K,l}) & \dots & \exp(-s\tau_{K,K}) \end{bmatrix}. \quad (12)$$

С учетом (12) выражение (11) принимает вид

$$\mathbf{X}(s) = [\mathbf{E} + \mathbf{W}_I(s) \cdot \mathbf{W}_c(s) \cdot \mathbf{W}_o(s)]^{-1} \cdot \mathbf{W}_I(s) \cdot \mathbf{W}_c(s) \cdot \mathbf{W}_o(s) \cdot \mathbf{U}(\omega). \quad (13)$$

Матрица передаточных функций интерфейса оказывает существенное влияние на динамику процесса программного управления. Изменение динамических характеристик замкнутой системы обусловлено изменением характеристического уравнения, которое в данном случае принимает вид

$$\det[\mathbf{E} + \mathbf{W}_I(s) \cdot \mathbf{W}_c(s) \cdot \mathbf{W}_o(s)] = 0. \quad (14)$$

Отличительной особенностью (14) является наличие в характеристическом уравнении комплексных экспонент, которые зависят от временных интервалов (8), создаваемых алгоритмом поллинга. Комплексные экспоненты изменяют местоположение корней на комплексной плоскости [16, 17], а следовательно, и характер переходных процессов [18, 19].

3. Методика конструирования программ поллинга

Из изложенного следует методика конструирования программ поллинга, реализующих системы векторного управления сложными многоконтурными объектами. Исходными данными для реализации методики является модель ОУ и технические требования к цифровому контроллеру, как к платформе для размещения управляющей программы.

Порядок моделирования системы управления с контроллером на основе программы поллинга представляется следующим:

1) Разработка математической модели ОУ $\mathbf{w}_o[\mathbf{v}(t), \mathbf{x}(t)] = 0$, включающей модель собственно объекта, а также модели приводов и сенсоров, обеспечивающих функционирование ОУ.

2) Выбор закона управления $\mathbf{w}_c[\varepsilon(n), \mathbf{v}_c(n)] = 0$ для реализации в виде алгоритма и программы поллинга.

3) Определение платформы для реализации системы управления и проверка реализуемости выбранного закона на заданной платформе.

4) Моделирование процесса управления без учета задержек по времени, вносимых контроллером как реальным физическим прибором, реализующим алгоритм поллинга в реальном времени. При необходимости корректировка закона управления.

5) Оценка задержек по времени между транзакциями в алгоритме поллинга и моделирование системы управления с их учетом. При невыполнении требований к системе управления корректировка алгоритма поллинга, закона управления, выбранной цифровой платформы и/или обеспечивающей аппаратуры ОУ.

Рассмотрим применение методики на примере, в котором ОУ описывается матричным уравнением

$$\begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{s} \begin{bmatrix} \frac{20}{0.0002s^2 + 0.03s + 1} & \frac{5}{0.04s + 1} \\ -\frac{5}{0.04s + 1} & \frac{20}{0.0002s^2 + 0.03s + 1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix}.$$

Вследствие того, что в ОУ присутствует астатизм первого порядка, из ПИД регулятора исключен канал интегрирования и закон управления имеет вид ПД регулятора:

$$\begin{pmatrix} 0.15 [\varepsilon_1(n) - \varepsilon_1(n-1)] + 1.5\varepsilon_1(n) \\ 0.15 [\varepsilon_2(n) - \varepsilon_2(n-1)] + 1.5\varepsilon_2(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.01 [v_1(n) - v_1(n-1)] + v_1(n) \\ 0.01 [v_2(n) - v_2(n-1)] + v_2(n) \end{pmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1(n) \\ \varepsilon_2(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1(n) - x_1(n) \\ u_2(n) - x_2(n) \end{bmatrix}.$$

На вход системы подаются единичные ступенчатые функции Хевисайда

$$u_1(n) = u_2(n) = \begin{cases} 0, & \text{при } n \leq 0; \\ 1, & \text{при } n > 0. \end{cases}$$

Результат моделирования представлен на рис. 4, где на рис. 4 а показан переходный процесс в модели, не учитывающей запаздывание в контурах обратной связи; на рис. 4 б, с, d учтено запаздывание τ , которое равно, соответственно, 0.0025, 0.005 и 0.0079 с.

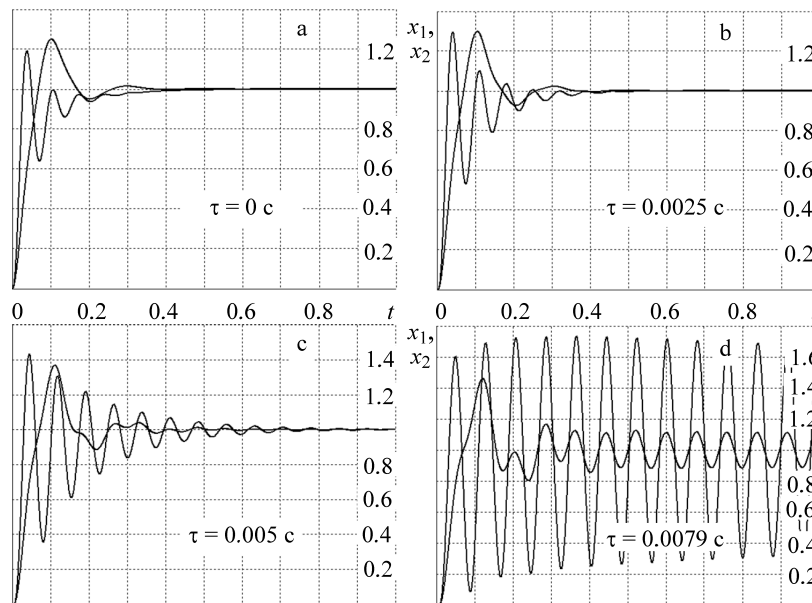


Рис. 4: Переходные процессы в системе без учета (а)
и с учетом задержек (b, с, d) вносимых программой поллинга

Как следует из примера, с увеличением времени запаздывания в указанных диапазонах время выхода системы на установившийся режим равно, соответственно 0.4 с, 0.45 с, 0.9 с, > 1 с (неустойчивое функционирование). Перерегулирование при реакции системы на единичную функцию Хевисайда равно: по каналу x_1 – 25%, 30%, 35%, 45%; по каналу x_2 – 20%, 30%, 40%, 60%.

4. Заключение

Основным результатом данной работы следует считать модель функционирования цифрового контроллера как физического прибора, осуществляющего расчет вектора управляющих воздействий на многоконтурный объект на основании информации, получаемой от сенсоров, в реальном физическом времени.

Подобная модель позволяет оценить задержки по времени, вносимые контроллером и учитывать эти задержки при синтезе алгоритма поллинга. Практическим результатом является методика конструирования программ поллинга для систем векторного управления.

Дальнейшие исследования в данной области могут быть направлены на установление зависимостей, прямую связывающих временную вычислительную сложность программы поллинга, структурную сложность объекта управления и требуемые параметры функционирования системы управления.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Malin Löfving M., Säfsten K., Winroth M. Manufacturing strategy formulation, leadership style and organizational culture in small and medium-sized enterprises // IJMTM. 2016. Vol. 30. No. 5. P. 306–325.
2. Landau I.D., Zito G. Digital Control Systems, Design, Identification and Implementation. Springer, 2006. 484 p.
3. Larkin E.V., Ivutin A.N. Estimation of Latency in Embedded Real-Time Systems // 3-rd Mediterranean Conference on Embedded Computing (MECO-2014). 2014. June 15-19. Budva, Montenegro, 2014. P. 236–239.
4. Kilian C. T. Modern control technology: Components and systems. Thompson Delmar Learning. 2000. 608 p.
5. Babishin V., Taghipour S. Optimal maintenance policy for multicomponent systems with periodic and opportunistic inspections and preventive replacements // Applied Mathematical Modelling. 2016. V. 40. №. 23. P. 10480–10505.
6. Åström J., Wittenmark B. Computer Controlled Systems: Theory and Design. Tsinghua University Press. Prentice Hall, 2002. 557 p.
7. Meyer-Baese U. Digital signal processing. Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, 2004. 523 p.
8. Yeh Y.-C., Chu Y., Chiou C.W. Improving the sampling resolution of periodic signals by using controlled sampling interval method // Computers & Electrical Engineering, 2014. Vol. 40. N. 4. P. 1064–1071.
9. Ang K.N., Chong G., Li Y. PID control system analysis, design and technology // IEEE Transactions of control systems technology. 2005. V. 13. N 4. P. 559–576.

10. O'Dwier A. PID compensation of time delay processes 1999-2002: a survey // Proceedings of the American control conference, USA, Denver, Colorado. 2003. P. 1494–1499.
11. Larkin E. V., Nguyen V. S., Privalov A. N. Simulation of digital control systems by nonlinear objects // Lecture Notes on Data Engineering and Communications Technologies. 2022. V. 124. P. 711–721.
12. Larkin E., Privalov A., Bogomolov A., Akimenko T. Digital Control of Continuous Production with Dry Friction at Actuators // Smart Innovation, Systems and Technologies, 2022. V. 232. P. 427–436.
13. Bielecki T. R., Jakubowski J., Niewęgłowski M. Conditional Markov chains: Properties, construction and structured dependence // Stochastic Processes and their Applications. V. 127, N. 4. 2017. P. 1125–1170.
14. Ching W. K., Huang X., Ng M. K., Siu T. K. Markov Chains: Models, Algorithms and Applications / International Series in Operations Research & Management Science. V. 189. Springer Science + Business Media NY, 2013. 241 p.
15. Janssen J., Manca R. Applied Semi-Markov processes. Springer US, 2006. 310 p.
16. Toshiharu Sugie. Simple explanation of Routh-Hurwitz criterion for undergraduate education // Systems, control and information. 2021. Vol. 65. N 7. P. 257–270.
17. Bodoson M. Explaining Routh-Hurwitz criterion: A tutorial presentation // IEEE Control systems magazine. 2020. Vol. 40, N 1. P. 45–51.
18. Wu M., He Y., She J. H., Liu G. P. Delay-dependent criteria for robust stability of time-varying delay systems // Automatica, 2004. Vol. 40, N. 8. P. 1435–1439.
19. Zhang X. M., Min W. U., Yong H. E. Delay dependent robust control for linear systems with multiple time-varying delays and uncertainties // Control & Decision, 2004. Vol. 19. N. 5. P. 496–500.

REFERENCES

1. Malin Löfving, M., Säfsten, K. & Winroth, M. 2016. “Manufacturing strategy formulation, leadership style and organizational culture in small and medium-sized enterprises”, *IJMTM*, no. 30 (5), pp. 306–325.
2. Landau, I. D. & Zito, G. 2006. *Digital Control Systems, Design, Identification and Implementation*, Springer, 484 pp.
3. Larkin, E. V. & Ivutin, A. N. 2014. “Estimation of Latency in Embedded Real-Time Systems”, *3-rd Mediterranean Conference on Embedded Computing (MECO-2014)*, June 15-19. Budva, Montenegro, pp. 236–239.
4. Kilian, C. T. 2000. *Modern control technology: Components and systems*, Thompson Delmar Learning, 608 pp.
5. Babishin, V. & Taghipour, S. 2016. “Optimal maintenance policy for multicomponent systems with periodic and opportunistic inspections and preventive replacements”, *Applied Mathematical Modelling*, no. 40 (23), pp. 10480–10505.

6. Åström, J. & Wittenmark, B. 2002. *Computer Controlled Systems: Theory and Design*, Tsinghua University Press. Prentice Hall, 557 pp.
7. Meyer-Baese, U. 2004. *Digital signal processing*, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, 523 pp.
8. Yeh, Y.-C., Chu, Y. & Chiou C. W. 2014. “Improving the sampling resolution of periodic signals by using controlled sampling interval method”, *Computers & Electrical Engineering*, no. 40 (4), pp. 1064–1071.
9. Ang, K. N., Chong, G. & Li, Y. 2005. “PID control system analysis, design and technology”, *IEEE Transactions of control systems technology*, no. 13 (4), pp. 559–576.
10. O’Dwier A. 2003. “PID compensation of time delay processes 1999-2002: a survey”, *Proceedings of the American control conference*, USA, Denver, Colorado, pp. 1494–1499.
11. Larkin E. V., Nguyen V. S. & Privalov A. N. 2022. “Simulation of digital control systems by nonlinear objects”, *Lecture Notes on Data Engineering and Communications Technologies*, vol. 124, pp. 711–721.
12. Larkin, E., Privalov, A., Bogomolov, A. & Akimenko, T. 2022. “Digital Control of Continuous Production with Dry Friction at Actuators”, *Smart Innovation, Systems and Technologies*, vol. 232, pp. 427–436.
13. Bielecki T. R., Jakubowski, J. & Niewęgłowski, M. 2017. “Conditional Markov chains: Properties, construction and structured dependence”, *Stochastic Processes and their Applications*, no. 127 (4), pp. 1125–1170.
14. Ching, W. K., Huang, X., Ng, M. K. & Siu, T. K. 2013. “Markov Chains: Models, Algorithms and Applications”, *International Series in Operations Research & Management Science*, vol. 189. Springer Science + Business Media NY, 241 pp.
15. Janssen, J. & Manca, R. 2006. *Applied Semi-Markov processes*, Springer US, 310 pp.
16. Toshiharu, Sugie. 2021. “Simple explanation of Routh-Hurwitz criterion for undergraduate education”, *Systems, control and information*, no. 65 (7), pp. 257–270.
17. Bodoson, M. 2020. “Explaining Routh-Hurwitz criterion: A tutorial presentation”, *IEEE Control systems magazine*, no. 40 (1), pp. 45–51.
18. Wu, M., He, Y., She, J. H. & Liu, G. P. 2004. “Delay-dependent criteria for robust stability of time-varying delay systems”, *Automatica*, no. 40 (8), pp. 1435–1439.
19. Zhang, X. M., Min, W. U. & Yong, H. E. 2004. “Delay dependent robust control for linear systems with multiple time-varying delays and uncertainties”, *Control & Decision*, no. 19 (5), pp. 496–500.

Получено: 06.02.2024

Принято в печать: 28.06.2024

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 25. Выпуск 2.

УДК 511. 344

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-2-139-168

Асимптотическая формула в проблеме Варинга с почти пропорциональными слагаемыми

З. Х. Рахмонов, Ф. З. Рахмонов

Рахмонов Зарулло Хусенович — доктор физико-математических наук, профессор, академик НАН Таджикистана; Институт математики им. А. Джураева (г. Душанбе).

e-mail: zarullo-r@rambler.ru, zarullo.rakhmonov@gmail.com

Рахмонов Фируз Заруллович — кандидат физико-математических наук, Институт математики им. А. Джураева (г. Душанбе).

e-mail: rakhmonov.firuz@gmail.com

Аннотация

При $n \geq 3$ получена асимптотическая формула для количества представлений достаточно большого натурального N в виде суммы $r = 2^n + 1$ слагаемых, каждое из которых является n -ой степенью натуральных чисел x_i , $i = \overline{1, r}$, удовлетворяющих условиям

$$|x_i^n - \mu_i N| \leq H, \quad H \geq N^{1-\theta(n,r)+\varepsilon}, \quad \theta(n,r) = \frac{2}{(r+1)(n^2-n)},$$

где $\mu_1, \dots, \mu_r$ — положительные фиксированные числа и $\mu_1 + \dots + \mu_r = 1$. Этот результат является усилением теоремы Е. М. Райта.

Ключевые слова: проблема Варинга, почти пропорциональные слагаемые, короткая тригонометрическая сумма Г. Вейля, малая окрестность центров больших дуг.

Библиография: 30 названий.

Для цитирования:

З. Х. Рахмонов, Ф. З. Рахмонов. Асимптотическая формула в проблеме Варинга с почти пропорциональными слагаемыми // Чебышёвский сборник, 2024, т. 25, вып. 2, с. 139–168.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 25. No. 2.

UDC 511. 344

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-2-139-168

Asymptotic formula in the Waring's problem with almost proportional summands

Z. Kh. Rakhmonov, F. Z. Rakhmonov

Rakhmonov Zarullo Khusenovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, academician of the NAS of Tajikistan; A. Dzhuraev Institute of Mathematics (Dushanbe).

e-mail: zarullo-r@rambler.ru, zarullo.rakhmonov@gmail.com

Rakhmonov Firuz Zarullovich — candidate of physical and mathematical sciences, A. Dzhuraev Institute of Mathematics (Dushanbe).

e-mail: rakhmonov.firuz@gmail.com

Abstract

For $n \geq 3$, an asymptotic formula is derived for the number of representations of a sufficiently large natural number N as a sum of $r = 2^n + 1$ summands, each of which is an n -th power of natural numbers x_i , $i = \overline{1, r}$, satisfying the conditions

$$|x_i^n - \mu_i N| \leq H, \quad H \geq N^{1-\theta(n,r)+\varepsilon}, \quad \theta(n,r) = \frac{2}{(r+1)(n^2-n)},$$

where $\mu_1, \dots, \mu_r$ are positive fixed numbers, and $\mu_1 + \dots + \mu_r = 1$. This result strengthens the theorem of E.M. Wright.

Keywords: Waring problem, almost proportional summands, short exponential sum of G. Weyl, small neighborhood of centers of major arcs.

Bibliography: 30 titles.

For citation:

Z. Kh. Rakhmonov, F. Z. Rakhmonov, 2024. "Asymptotic formula in the Waring's problem with almost proportional summands", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 2, pp. 139–168.

1. Введение

Проблему Варинга с почти пропорциональными слагаемыми впервые исследовал М. Е. Райт [1, 2]. Для количества представлений достаточно большого числа N в виде

$$x_1^n + x_2^n + \dots + x_r^n = N, \quad (1)$$

где $x_1, x_2, \dots, x_r$ — натуральные числа и

$$|x_i^n - \mu_i N| \leq N^{1-\theta}, \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_r = 1,$$

где $\mu_1, \dots, \mu_r$ — положительные фиксированные числа, а число $\theta = \theta(n, r)$ определяется из соотношения

$$\theta(n, r) = \frac{1}{n} \min \left(\frac{(r-2^n)(2^{n-1}+1)}{(nr+n-2^n-3)2^{n-1}+r}, \frac{r-(n-2)2^{n-1}-4}{r+2^{n-1}-4}, \frac{r-2^{n-1}}{nr-2^{n-1}+n-1} \right), \quad (2)$$

он нашёл асимптотическую формулу при

$$r \geq r(n) = (n-2)2^{n-1} + 5. \quad (3)$$

Отсюда, в частности для $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ при $r = (n-2)2^{n-1} + 5$, имеем

n	3	4	5	6	7	8	9	10
$r(n) = (n-2)2^{n-1} + 5$	9	21	53	133	325	773	1797	4101
$\theta(n, r)$	$\frac{1}{51}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{325}$	$\frac{1}{966}$	$\frac{1}{2695}$	$\frac{1}{6279}$	$\frac{1}{18441}$	$\frac{1}{46090}$

Таблица 1

В 2010 г. Дерк Деймон [3] пользуясь теоремой о среднем И. М. Виноградова и процедурой «биномиального спуска», при $r \geq r_n$, где

$$\begin{aligned} r_2 &= 9, \quad r_3 = 19, \quad r_4 = 49, \quad r_5 = 113, \quad r_6 = 243, \quad r_7 = 417, \quad r_8 = 675, \quad r_9 = 1083, \\ r_{10} &= 1773, \quad r_n = 2 \left[\frac{5n^2}{3} \ln n + \frac{29n^2}{30} \ln \ln n + \frac{7n^2}{3} \ln \ln \ln n + Cn^2 \right] + 1, \quad n > 10, \end{aligned} \quad (4)$$

C — абсолютная постоянная, доказал асимптотическую формулу для числа решений уравнения (1), при выполнении условий

$$X - Y \leq x_j \leq X + Y, \quad 1 \leq j \leq r, \quad X = \left[\left(\frac{N}{r} \right)^{\frac{1}{n}} \right], \quad Y = \sqrt{X} Y_n, \quad Y_n = (\ln X)^{r_{n-1}},$$

где Y_2 — функция от X , стремящаяся к бесконечности вместе с X , (см. также [4, 5]).

Заметим, что теорема М. Райта об асимптотической формуле в проблеме Варинга с почти пропорциональными слагаемыми при $\mu_1 = \dots = \mu_r = \frac{1}{r}$, то есть при

$$\sqrt[n]{\frac{N}{r}} - N^{1-\theta} \leq x_j \leq \sqrt[n]{\frac{N}{r}} + N^{1-\theta}.$$

превращается в теорему об асимптотической формуле в проблеме Варинга с почти равными слагаемыми с параметрами $\theta = \theta(n, r)$ и $r = r(n)$, которые определяются в формулах (2) и (3). Эта асимптотическая формула в сильнее теоремы Дерка Деймона в смысле количества слагаемых при $n = 3, 4, 5, 6, 7$.

Воспользовавшись поведением коротких тригонометрических сумм Г. Вейля вида

$$T(\alpha; x, y) = \sum_{x-y < m \leq x} e(\alpha m^n),$$

в больших дугах [6, 7] в сочетании с нетривиальными оценками этих сумм в малых дугах [8], были доказаны асимптотические формулы для количества решений в следующих аддитивных задачах с почти равными слагаемыми:

- в проблеме Варинга с почти равными слагаемыми для $n = 3, 4, 5$ [9, 10, 11, 7], то есть для количества решений диофантова уравнения (5) с условиями

$$\left| x_i - \left(\frac{N}{2^n + 1} \right)^{\frac{1}{n}} \right| \leq H, \quad i = 1, \dots, 2^n + 1, \quad H \geq N^{\frac{1}{n} - \theta(n) + \varepsilon},$$

при

$$\theta(3) = \frac{1}{30}, \quad \theta(4) = \frac{1}{108}, \quad \theta(5) = \frac{1}{340}.$$

- в обобщении [12, 6, 13] тернарной проблемы Эстермана с почти равными слагаемыми о представлении достаточно большого натурального числа в виде

$$p_1 + p_2 + m^n = N,$$

при $n = 2, 3, 4$, в простых числах p_1, p_2 и натурального m , с условиями

$$\left| p_i - \frac{N}{3} \right| \leq H, \quad i = 1, 2, \quad \left| m^n - \frac{N}{3} \right| \leq H, \quad H \geq N^{1-\theta(n)} \mathcal{L}^{c_n},$$

соответственно при

$$\theta(2) = \frac{1}{4}, \quad c_2 = 2; \quad \theta(3) = \frac{1}{6}, \quad c_3 = 3; \quad \theta(4) = \frac{1}{12}, \quad c_4 = \frac{40}{3}.$$

В этой работе доказано, что теорема Е. М. Райта об асимптотической формуле в обобщении проблемы Варинга с почти пропорциональными слагаемыми имеет место при условии

$$\theta(n, r) = \frac{2}{(r+1)(n^2 - n)}, \quad r = 2^n + 1. \quad (5)$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть N — достаточно большое натуральное число, $n \geq 3$ — натуральное число, $r = 2^n + 1$, $\mu_1, \dots, \mu_r$ — положительные фиксированные числа, удовлетворяющие условию

$$\mu_1 + \dots + \mu_r = 1,$$

$J_{n,r}(N, H)$ — число решений диофантова уравнения (1) с условиями

$$|x_i^n - \mu_i N| \leq H, \quad i = 1, \dots, r \quad \theta(n, r) = \frac{2}{(r+1)(n^2 - n)}. \quad (6)$$

Тогда при $H \geq N^{1-\theta(n,r)+\varepsilon}$ справедлива асимптотическая формула:

$$J_{n,r}(N, H) = \frac{2^r \gamma(n, r)}{n^r} \prod_{i=1}^r \mu_i^{-1+\frac{1}{n}} \mathfrak{S}(N) \frac{H^{r-1}}{N^{r-\frac{r}{n}}} + O\left(\frac{H^{r-1}}{N^{r-\frac{r}{n}} \mathcal{L}}\right),$$

где $\gamma(n, r)$ — абсолютная постоянная, которая определяется соотношением

$$\gamma(n, r) = \frac{r^{r-1} - \frac{r}{1!}(r-2)^{r-1} + \frac{r(r-1)}{2!}(r-4)^{r-1} - \frac{r(r-1)(r-2)}{3!}(r-6)^{r-1} + \dots}{2^r(r-1)!},$$

$\mathfrak{S}(N)$ — особый ряд, сумма которого превосходит некоторое положительное постоянное, а постоянное под знаком O зависит от чисел $\mu_1, \dots, \mu_r$.

Отсюда, в частности, имеем

n	3	4	5	6	7	8	9	10
$r = 2^n + 1$	9	17	33	64	129	257	513	1025
$\theta(n, r)$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{108}$	$\frac{1}{340}$	$\frac{1}{990}$	$\frac{1}{2730}$	$\frac{1}{7224}$	$\frac{1}{18504}$	$\frac{1}{46170}$

Таблица 2

Из теоремы 1 следует асимптотическая формула в обобщении проблемы Варинга с почти равными слагаемыми.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть N — достаточно большое натуральное число, $n \geq 3$ — натуральное число, $r = 2^n + 1$, $J_{n,r}(N, H)$ — число решений диофантова уравнения (1) с условиями

$$\left| x_i^n - \frac{N}{r} \right| \leq H, \quad i = 1, \dots, r \quad \theta(n, r) = \frac{2}{(r+1)(n^2 - n)}.$$

Тогда при $H \geq N^{1-\theta(n,r)+\varepsilon}$ справедлива асимптотическая формула:

$$J_{n,r}(N, H) = \frac{2^r r^{r-\frac{r}{n}} \gamma(n, r)}{n^r} \mathfrak{S}(N) \frac{H^{r-1}}{N^{r-\frac{r}{n}}} + O\left(\frac{H^{r-1}}{N^{r-\frac{r}{n}} \mathcal{L}}\right).$$

Заметим, что теорема 1 является усилением теоремы Е. М. Райта, а из формулы (4) и таблицы 2 следует также, что следствие 1 сильнее теоремы Дерка Деймона в смысле количества слагаемых при $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$.

Доказательство теоремы 1 проводится круговым методом Харди-Литтлвуда-Рамануджана в форме тригонометрических сумм И. М. Виноградова и при $n = 3$ ранее был доказан в работе [14]. Основными утверждениями, позволившими получить новые значения (5) для параметров $\theta(n, r)$ и r , являются:

- асимптотическая формула для коротких тригонометрических сумм Г. Вейля вида $T(\alpha; x, y)$ в малой окрестности центра больших дуг (следствие 2 теоремы 2);

- нетривиальная оценка сумм $T(\alpha; x, y)$ в больших дугах за исключением малой окрестности их центров (следствие 3 теоремы 2);
- нетривиальная оценка сумм $T(\alpha; x, y)$ в малых дугах (лемма 1);
- теорема 3 о среднем значении коротких тригонометрических сумм Г. Вейля вида $T(\alpha; x, y)$.

Р. Вон [15] изучая суммы Г.Вейля вида $T(\alpha, x)$ в больших дугах, воспользовавшись оценкой Хуа Ло-кена для полных тригонометрических сумм вида

$$S_b(a, q) = \sum_{k=1}^q e\left(\frac{ak^n + bk}{q}\right), \quad S(a, q) = S_0(a, q),$$

(лемма 3), методом Ван дер Корпута доказал:

$$T(\alpha, x) = \sum_{m \leq x} e(\alpha m^n) = \frac{S(a, q)}{q} \int_0^x e(\lambda t^n) dt + O\left(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon} (1 + x^n |\lambda|)^{\frac{1}{2}}\right).$$

При условии, что α очень хорошо приближается рациональным числом со знаменателем q , то есть при выполнении условия

$$|\lambda| \leq \frac{1}{2nqx^{n-1}},$$

он также доказал:

$$T(\alpha, x) = \frac{x S(a, q)}{q} \int_0^1 e(\lambda t^n) dt + O\left(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right). \quad (7)$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\tau \geq 2n(n-1)x^{n-2}y$, тогда при $\{n|\lambda|x^{n-1}\} \leq \frac{1}{2q}$ имеет место формула

$$T(\alpha; x, y) = \frac{S(a, q)}{q} T(\lambda; x, y) + O\left(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right),$$

а при $\{n|\lambda|x^{n-1}\} > \frac{1}{2q}$ имеет место оценка

$$|T(\alpha, x, y)| \ll q^{1-\frac{1}{n}} \ln q + \min(yq^{-\frac{1}{n}}, \lambda^{-\frac{1}{2}} x^{1-\frac{n}{2}} q^{-\frac{1}{n}}).$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $\tau \geq 2n(n-1)x^{n-2}y$, $|\lambda| \leq \frac{1}{2nqx^{n-1}}$, тогда имеет место соотношение

$$T(\alpha; x, y) = \frac{y}{q} S(a, q) \gamma(\lambda; x, y) + O(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}),$$

$$\gamma(\lambda; x, y) = \int_{-0,5}^{0,5} e\left(\lambda \left(x - \frac{y}{2} + yt\right)^n\right) dt.$$

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $\tau \geq 2n(n-1)x^{n-2}y$, $\frac{1}{2nqx^{n-1}} < |\lambda| \leq \frac{1}{q\tau}$, тогда имеет место оценка

$$T(\alpha; x, y) \ll q^{1-\frac{1}{n}} \ln q + \min\left(yq^{-\frac{1}{n}}, x^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}\right).$$

Следствие 2 является обобщением формулы (7) для коротких тригонометрических сумм Г. Вейля вида $T(\alpha; x, y)$. Частный случай теоремы 2 при $n = 3$ ранее был доказан в [6] и является уточнением теоремы 1 работы [7]. Доказательство теоремы 2 проводится методом оценки специальных тригонометрических сумм Ван дер Корпута с применением формулы суммирования Пуассона [16] и оценки Хуа Ло-кена для полных тригонометрических сумм $S_b(a, q)$ (лемма 3).

ТЕОРЕМА 3. Пусть x и y — натуральные числа, $\sqrt{x} < y \leq x(\ln x)^{-1}$, тогда имеет место оценка

$$\int_0^1 |T(\alpha; x, y)|^{2^k} d\alpha \ll y^{2^k - k + \varepsilon}, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Эта теорема является обобщением теоремы Хуа Ло-кена ([17], лемма 2.5) о среднем значении тригонометрической суммы $T(\alpha, x)$, то есть оценки

$$\int_0^1 |T(\alpha, x)|^{2^k} d\alpha \ll x^{2^k - k + \varepsilon}, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Обозначения. $N > N_0$ — натуральное число, ε — произвольное положительное число, не превосходящее 0.00001, $\mathcal{L} = \ln N$.

2. Вспомогательные утверждения

ЛЕММА 1. [8]. Пусть $x \geq x_0 > 0$, $y_0 < y \leq 0,01x$, $\tau(h)$ — функция делителей, α — вещественное число,

$$\left| \alpha - \frac{a}{q} \right| \leq \frac{1}{q^2}, \quad (a, q) = 1,$$

тогда справедлива оценка

$$|T(\alpha; x, y)| \leq 2y \left(4n! \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{y} + \frac{q \ln q}{y^n} \right) \max_{h < y^{n-1}} \tau(h) \right)^{\frac{1}{2^{n-1}}},$$

Эта оценка нетривиальна при $q \gg 2^{2n-1} 4n! \tau(y^{n-1})$, то есть при $q \gg y^\varepsilon$.

ЛЕММА 2. [16]. Пусть $f(u)$ — действительная функция, $f''(u) > 0$ в интервале $[a, b]$, α , β , η произвольные числа с условиями $\alpha \leq f'(a) \leq f'(b) \leq \beta$ и $0 < \eta < 1$. Тогда

$$\sum_{a < n \leq b} e(f(n)) = \sum_{\alpha - \eta < h \leq \beta + \eta} \int_a^b e(f(u) - hu) du + O(\eta^{-1} + \ln(\beta - \alpha + 2)),$$

где постоянная в знаке O является абсолютной.

ЛЕММА 3. [18]. Пусть $(a, q) = 1$, q — натуральное число, b — произвольное целое число, δ — произвольное положительное число, не превосходящее 0.00001. Тогда имеем

$$S_b(a, q) = \sum_{k=1}^q e\left(\frac{ak^n + bk}{q}\right) \ll q^{\frac{1}{2} + \delta}(b, q).$$

ЛЕММА 4. [19]. Пусть действительная функция $f(u)$, и монотонная функция $g(u)$ удовлетворяют условиям: $f'(u)$ — монотонна, $|f'(u)| \geq m_1 > 0$ и $|g(u)| \leq M$. Тогда справедлива оценка:

$$\int_a^b g(u) e(f(u)) du \ll \frac{M}{m_1}.$$

ЛЕММА 5. [19]. Пусть $(a, q) = 1$, q — натуральное число. Тогда имеем

$$S(a, q) = \sum_{k=1}^q e\left(\frac{ak^n}{q}\right) \ll q^{1 - \frac{1}{n}},$$

где постоянная под знаком Виноградова зависит от n .

ЛЕММА 6. [19]. Пусть при $a \leq u \leq b$ вещественная функция $f(u)$ имеет производную n -го порядка ($n > 1$), причём при некотором $A > 0$ выполняется неравенство $A \leq |f^{(n)}(u)|$. Тогда справедлива оценка

$$\int_a^b e(f(u)) du \leq \min(b-a, 6nA^{-\frac{1}{n}}).$$

ЛЕММА 7. ([20] стр. 174). При $m > 0$ и натуральном r имеет место формула

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\sin^r mt}{t^r} dt = & \frac{\pi m^{r-1}}{2^r (r-1)!} \left(r^{r-1} - \frac{r}{1!} (r-2)^{r-1} + \right. \\ & \left. + \frac{r(r-1)}{2!} (r-4)^{r-1} - \frac{r(r-1)(r-2)}{3!} (r-6)^{r-1} + \dots \right). \end{aligned}$$

3. Доказательство теоремы 2 о поведении коротких тригонометрических сумм Г. Вейля в больших дугах

Пользуясь ортогональным свойством полной линейной рациональной тригонометрической суммы, находим

$$T(\alpha; x, y) = \sum_{x-y < m \leq x} e\left(\frac{ak^n}{q} + \lambda m^n\right) \sum_{\substack{k=0 \\ k \equiv m \pmod{q}}}^{q-1} 1 = \frac{1}{q} \sum_{b=0}^{q-1} T_b(\lambda; x, y) S_b(a, q), \quad (8)$$

где

$$T_b(\lambda; x, y) = \sum_{x-y < m \leq x} e\left(\lambda m^n - \frac{bm}{q}\right), \quad T(\lambda; x, y) = T_0(\lambda; x, y).$$

Далее не ограничивая общности будем читать, что $\lambda \geq 0$. Случай $\lambda \leq 0$, сводится к случаю $\lambda \geq 0$, если формуле (8) придадим форму

$$\overline{T(\alpha; x, y)} = \frac{1}{q} \sum_{b=0}^{q-1} T_{q-b}(-\lambda; x, y) S_{q-b}(q-a, q) = \frac{1}{q} \sum_{b=0}^{q-1} T_b(-\lambda; x, y) S_b(q-a, q).$$

Имея в виду, что $n\lambda x^{n-1} - \{n\lambda x^{n-1}\}$ – целое число, представим $T_b(\lambda; x, y)$ в виде

$$\begin{aligned} T_b(\lambda; x, y) &= \sum_{x-y < m \leq x} e(f_b(m)), \\ f_b(m) &= \lambda m^n - (n\lambda x^{n-1} - \{n\lambda x^{n-1}\})m - \frac{bm}{q}. \end{aligned}$$

Находим производную первого и второго порядка функции $f_b(m)$:

$$f'_b(m) = n\lambda(m^{n-1} - x^{n-1}) + \{n\lambda x^{n-1}\} - \frac{b}{q}, \quad f''_b(m) = n(n-1)\lambda m^{n-2} \geq 0.$$

Следовательно функция $f'_b(m)$, $m \in (x-y, x]$ является неубывающей, поэтому при любом b , $b = 0, 1, \dots, q-1$ имеет место неравенство

$$f'_b(x-y) < f'_b(m) \leq f'_b(x). \quad (9)$$

Оценивая $f'_b(x)$ сверху, имеем:

$$f'_b(x) = \{n\lambda x^{n-1}\} - \frac{b}{q} < 1 - \frac{b}{q}. \quad (10)$$

Для оценки снизу $f'_b(x-y)$ воспользовавшись неравенством

$$W = \sum_{k=2}^{n-1} (-1)^k C_{n-1}^k x^{n-1-k} y^k \geq 0, \quad n \geq 3, \quad 3x \geq (n-3)y, \quad (11)$$

а также условиями $|\lambda| \leq \frac{1}{q\tau}$ и $\tau \geq 2n(n-1)x^{n-2}y$, имеем

$$\begin{aligned} f'_b(x-y) &= -n\lambda \left(x^{n-1} - (x-y)^{n-1} \right) + \{n\lambda x^{n-1}\} - \frac{b}{q} = \\ &= -n(n-1)\lambda x^{n-2}y + n\lambda W + \{n\lambda x^{n-1}\} - \frac{b}{q} \geq \\ &\geq -n(n-1)\lambda x^{n-2}y - \frac{b}{q} \geq -\frac{n(n-1)x^{n-2}y}{q\tau} - \frac{b}{q} \geq -1 + \frac{1}{2q}. \end{aligned}$$

Отсюда, из (10) и (9), получим

$$-1 + \frac{1}{2q} < f'_b(m) < 1 - \frac{1}{q}.$$

С учётом этого неравенства, применяя к сумме $T_b(\lambda; x, y)$ формулу суммирования Пуассона (лемма 2), при $\alpha = -1$, $\beta = 1$, $\eta = 0, 5$, получим

$$T_b(\lambda; x, y) = \sum_{h=-1}^1 I_b(h) + O(1), \quad (12)$$

$$I_b(h) = \int_{x-y}^x e(f_b(u, h)) du, \quad f_b(u, h) = f_b(u) - hu.$$

Функция

$$f'_b(u, h) = n\lambda(u^{n-1} - x^{n-1}) + \{n\lambda x^{n-1}\} - \frac{b}{q} - h$$

на отрезке $u \in [x-y, x]$ является неубывающей функцией, поэтому имеет место неравенство

$$f'_b(x-y, h) \leq f'_b(u, h) \leq f'_b(x, h).$$

Воспользовавшись формулой (11), а также условиями $|\lambda| \leq \frac{1}{q\tau}$ и $\tau \geq 2n(n-1)x^{n-2}y$, эту неравенство представим в виде

$$\{n\lambda x^{n-1}\} - \frac{b}{q} - h - \eta < f'_b(u, h) \leq \{n\lambda x^{n-1}\} - \frac{b}{q} - h, \quad (13)$$

$$\eta = n(n-1)\lambda x^{n-2}y - n\lambda W \leq n(n-1)\lambda x^{n-2}y \leq \frac{n(n-1)x^{n-2}y}{q\tau} \leq \frac{1}{2q}.$$

Далее, подставляя (12) при $b \neq 0$ в (8), найдём

$$\begin{aligned} T(\alpha; x, y) &= \frac{S_0(a, q)}{q} T_0(\lambda; x, y) + \sum_{h=-1}^1 \mathcal{T}(h) + \mathcal{R}, \\ \mathcal{T}(h) &= \frac{1}{q} \sum_{b=1}^{q-1} I_b(h) S_b(a, q), \quad \mathcal{R} \ll \frac{1}{q} \sum_{b=1}^{q-1} |S_b(a, q)|. \end{aligned} \quad (14)$$

Пользуясь леммой 3 при $\delta = 0, 5\varepsilon$ оценим остаточный член $\mathcal{R}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &\leq \frac{1}{q} \sum_{b=1}^{q-1} |S_b(a, q)| \ll q^{-\frac{1}{2}+\delta} \sum_{b=1}^{q-1} (b, q) = q^{-\frac{1}{2}+\delta} \sum_{d|q} d \sum_{\substack{1 \leq b \leq q-1 \\ (b, q)=d}} 1 = \\ &= q^{-\frac{1}{2}+\delta} \sum_{d|q} d \varphi\left(\frac{q}{d}\right) \leq q^{\frac{1}{2}+\delta} \tau(q) \ll q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}. \end{aligned} \quad (15)$$

Оценим сверху суммы $\mathcal{T}(1)$ и $\mathcal{T}(-1)$. Полагая $h = 1$ в (13), получим

$$f'_b(u, 1) \leq \{n\lambda x^{n-1}\} - \frac{b}{q} - 1 \leq -\frac{b}{q} < 0,$$

и оценивая интеграл $|I_b(1)|$ по величине первой производной (лемма 4), имеем

$$|I_b(1)| = \left| \int_{x-y}^x e(f_b(u, 1)) du \right| \ll \frac{q}{b}.$$

Воспользовавшись этой оценкой, а затем леммой 3 при $\delta = 0, 5\varepsilon$, имеем

$$\mathcal{T}(1) = \frac{1}{q} \sum_{b=1}^{q-1} I_b(1) S_b(a, q) \ll \sum_{b=1}^{q-1} \frac{|S_b(a, q)|}{b} \ll q^{\frac{1}{2}+\delta} \sum_{b=1}^{q-1} \frac{(b, q)}{b} \ll q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}. \quad (16)$$

Полагая $h = -1$ в (13), имеем

$$f'_b(u, -1) > \{n\lambda x^{n-1}\} + \frac{q-b}{q} - \eta \geq \frac{q-b}{2q}.$$

Интеграл $I(-1, b)$ также оценим по величине первой производной (лемма 4). Имеем

$$|I_b(-1)| = \left| \int_{x-y}^x e(f_b(u, -1)) du \right| \ll \frac{q}{q-b}.$$

Отсюда, поступая аналогично случаю оценки $\mathcal{T}(1)$, получим

$$\mathcal{T}(-1) = \sum_{b=1}^{q-1} \frac{I_b(-1) S_b(a, q)}{q} \ll \sum_{b=1}^{q-1} \frac{|S_b(a, q)|}{q-b} \ll q^{\frac{1}{2}+\delta} \sum_{b=1}^{q-1} \frac{(b, q)}{b} \ll q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}. \quad (17)$$

Подставляя оценки $\mathcal{T}(1)$, $\mathcal{T}(-1)$ и $\mathcal{R}$ соответственно из (16), (17) и (15) в правую часть (14), получим

$$T(\alpha; x, y) = \frac{S_0(a, q)}{q} T_0(\lambda; x, y) + \mathcal{T}(0) + O\left(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right). \quad (18)$$

Теперь воспользовавшись этим соотношением отдельно докажем первую и вторую утверждения теоремы, то есть соответственно в случаях $\{n\lambda x^{n-1}\} \leq \frac{1}{2q}$ и $\{n\lambda x^{n-1}\} > \frac{1}{2q}$.

1. Случай $\{n\lambda x^{n-1}\} \leq \frac{1}{2q}$. Оценим $\mathcal{T}(0)$. Для этого, полагая $h = 0$ в (13), имеем

$$f'_b(u, 0) \leq \{n\lambda x^{n-1}\} - \frac{b}{q} \leq \frac{1-2b}{2q} \leq -\frac{b}{2q} < 0.$$

Пользуясь этим неравенством, оценивая интеграл $I_b(0)$ по величине первой производной (лемма 4), найдём

$$|I_b(0)| = \left| \int_{x-y}^x e(f_b(u, 0)) du \right| \ll \frac{q}{b}.$$

Поступая аналогично случаю оценки $\mathcal{T}(1)$, получим

$$\mathcal{T}(0) = \sum_{b=1}^{q-1} \frac{I_b(0)S_b(a, q)}{q} \ll \sum_{b=1}^{q-1} \frac{|S_b(a, q)|}{b} \ll q^{\frac{1}{2}+\delta} \sum_{b=1}^{q-1} \frac{(b, q)}{b} \ll q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}.$$

Подставляя эту оценку в правую часть (18), а также имея в виду что

$$S_0(a, q) = S(a, q) \quad T(\lambda; x, y) = T_0(\lambda; x, y),$$

получим первое утверждение теоремы.

2. Случай $\{n\lambda x^{n-1}\} > \frac{1}{2q}$. Применяя к сумме $T_0(\lambda; x, y)$ в соотношении (18) формулу (12), а затем переходя к оценкам и воспользовавшись оценкой $S_b(a, q) \ll q^{1-\frac{1}{n}}$ (лемма 5), находим

$$\begin{aligned} T(\alpha; x, y) &= \frac{S_0(a, q)}{q} \left(\sum_{h=-1}^1 I_0(h) + O(1) \right) + \mathcal{T}(0) + O\left(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right) = \\ &= \frac{S_0(a, q)}{q} (I_0(-1) + I_0(1)) + \sum_{b=0}^{q-1} \frac{I_b(0)S_b(a, q)}{q} + O\left(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right) \ll \\ &\ll q^{-\frac{1}{n}} (I_0(-1) + I_0(1) + \mathcal{R}(0)) + q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\mathcal{R}(0) = \sum_{b=0}^{q-1} I_b(0). \quad (20)$$

В соотношении (13) полагая $b = 0$ и $h = -1$, имеем

$$f'_0(u, -1) > \{n\lambda x^{n-1}\} + 1 - \eta \geq 1 - \frac{1}{2q} \geq \frac{1}{2},$$

и воспользовавшись этим неравенством, оценивая интеграл $I_0(-1)$ по величине первой производной (лемма 4), найдём

$$|I_0(-1)| = \left| \int_{x-y}^x e(f_0(u, -1)) du \right| \ll 1. \quad (21)$$

Интеграл $I_0(1)$ оценим по величине производного второго порядка (лемма 6). Для этого пользуясь неравенством $f''_0(u, 1) \geq n(n-1)\lambda(x-y)^{n-2} \gg \lambda x^{n-2}$, найдём

$$|I_0(1)| = \left| \int_{x-y}^x e(f_0(u, 1)) du \right| \ll \min\left(y, \lambda^{-\frac{1}{2}} x^{1-\frac{n}{2}}\right). \quad (22)$$

Оценим теперь сумму $\mathcal{R}(0)$. Определим натуральное число r соотношением

$$\frac{r}{2q} \leq \{n\lambda x^{n-1}\} < \frac{r+1}{2q}, \quad 1 \leq r \leq 2q-1.$$

Отсюда, из неравенства (13) при $h = 0$ и условия $\eta \leq \frac{1}{2q}$, найдём

$$f'_b(u, 0) > \{n\lambda x^{n-1}\} - \frac{b}{q} - \eta \geq \frac{r-2b-1}{2q}, \quad (23)$$

$$f'_b(u, 0) \leq \{n\lambda x^{n-1}\} - \frac{b}{q} < \frac{r-2b+1}{2q}. \quad (24)$$

Пусть $r = 2\rho - \text{чётное}$ ($1 \leq \rho \leq q - 1$). Отрезок суммирования $0 \leq b \leq q - 1$ в сумме $\mathcal{R}(0)$ разобьём на следующие три множества:

$$0 \leq b \leq \rho - 1, \quad b = \rho, \quad \rho + 1 \leq b \leq q - 1,$$

соответственно в первом из которых правая часть неравенства (23) больше нуля, а в третьем — правая часть неравенства (24) меньше нуля, то есть

$$\begin{aligned} f'_b(u, 0) &> \frac{2\rho - 2b - 1}{2q} \geq \frac{\rho - b}{2q}, & 0 \leq b \leq \rho - 1, \\ f'_b(u, 0) &< \frac{2\rho - 2b + 1}{2q} \leq \frac{\rho - b}{2q}, & \rho + 1 \leq b \leq q - 1. \end{aligned}$$

Воспользовавшись этими неравенствами, оценивая интеграл $I_b(0)$ по величине первой производной, найдём

$$I_b(0) = \int_{x-y}^x e(f_b(u, 0)) du \ll \frac{q}{|\rho - b|}, \quad b \neq \rho.$$

В случае $b = \rho$, пользуясь соотношением

$$f''_\rho(u,) = n(n-1)\lambda(x-y)^{n-2} \gg \lambda x^{n-2},$$

оценивая интеграл $I_\rho(0)$ по величине производной второго порядка (лемма 6), найдём

$$|I_\rho(0)| \ll \min\left(y, \lambda^{-\frac{1}{2}} x^{1-\frac{n}{2}}\right).$$

Подставляя найденные оценки для $I_b(0)$ в (20), получим

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(0) &= \sum_{\substack{b=0 \\ b \neq \rho}}^{q-1} I_b(0) + I_\rho(0) \ll \sum_{\substack{b=0 \\ b \neq \rho}}^{q-1} \frac{q}{|\rho - b|} + \min\left(y, \lambda^{-\frac{1}{2}} x^{1-\frac{n}{2}}\right) \ll \\ &\ll q \ln q + \min\left(y, \lambda^{-\frac{1}{2}} x^{1-\frac{n}{2}}\right). \end{aligned}$$

Пусть теперь $r = 2\rho + 1 - \text{нечётное}$ ($0 \leq \rho \leq q - 1$). Отрезок суммирования $0 \leq b \leq q - 1$ в сумме R_0 разобьём на следующие три множества:

$$0 \leq b \leq \rho - 1, \quad b = \rho, \rho + 1, \quad \rho + 2 \leq b \leq q - 1,$$

соответственно в первом из которых правая часть неравенства (23) больше нуля, а в третьем — правая часть неравенства (24) меньше нуля, то есть

$$\begin{aligned} f'_b(u, 0) &> \frac{2\rho - 2b - 1}{2q} \geq \frac{\rho - b}{2q}, & 0 \leq b \leq \rho - 1, \\ f'_b(u, 0) &< \frac{2\rho + 1 - 2b + 1}{2q} \leq \frac{\rho - b}{2q}, & \rho + 2 \leq b \leq q - 1. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$I_b(0) = \int_{x-y}^x e(f_b(u, 0)) du \ll \frac{q}{|\rho - b|}, \quad b \neq \rho - 1, \quad b \neq \rho.$$

В случае $b = \rho - 1$ или $b = \rho$, поступая аналогично предыдущей оценке $I_\rho(0)$, найдём

$$|I_b(0)| \ll \min\left(y, \lambda^{-\frac{1}{2}} x^{1-\frac{n}{2}}\right).$$

Подставляя найденные оценки для $I_b(0)$ в (20), получим

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(0) &= \sum_{\substack{b=0 \\ b \neq \rho-1, \rho}}^{q-1} I_b(0) + I_{\rho-1}(0) + I_{\rho}(0) \ll \sum_{\substack{b=0 \\ b \neq \rho-1, \rho}}^{q-1} \frac{q}{|\rho - b|} + \min \left(y, \lambda^{-\frac{1}{2}} x^{1-\frac{n}{2}} \right) \ll \\ &\ll q \ln q + \min \left(y, \lambda^{-\frac{1}{2}} x^{1-\frac{n}{2}} \right). \end{aligned}$$

Подставляя оценки для $I_0(-1)$ и $I_0(1)$ соответственно из формул (21) и (22) и оценку для $\mathcal{R}(0)$, в (19), получим второе утверждение теоремы.

4. Доказательство теоремы 3 о среднем значении короткой тригонометрической суммы $T(\alpha; x, y)$

ЛЕММА 8. Пусть Δ_k означает k -ое применение разностного оператора, так что для любой функции действительного переменного $f(u)$

$$\begin{aligned} \Delta_1(f(u); h) &= f(u+h) - f(u), \\ \Delta_{k+1}(f(u); h_1, \dots, h_{k+1}) &= \Delta_1(\Delta_k(f(u); h_1, \dots, h_k); h_{k+1}). \end{aligned} \quad (25)$$

Тогда при $k = 1, \dots, n-1$ имеет место соотношение

$$\Delta_k(u^n; h_1, \dots, h_k) = h_1 \dots h_k g_k(u; h_1, \dots, h_k),$$

где $g_k = g_k(u; h_1, \dots, h_k)$ является формой $n-k$ -го порядка с целыми коэффициентами, имеющей относительно u степень $n-k$ и старший коэффициент $n(n-1) \dots (n-k+1)$, то есть

$$g_k(u; h_1, \dots, h_k) = \frac{n!}{(n-k)!} u^{n-k} + \dots$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя формулу (25), найдём

$$\begin{aligned} \Delta_1(u^n; h_1) &= (u+h_1)^n - u^n = \sum_{i_1=1}^n C_n^{i_1} h_1^{i_1} u^{n-i_1}, \\ \Delta_2(u^n; h_1, h_2) &= \Delta_1(\Delta_1(u^n; h_1); h_2) = \Delta_1 \left(\sum_{i_1=1}^n C_n^{i_1} h_1^{i_1} u^{n-i_1}; h_2 \right) = \\ &= \sum_{i_1=1}^n C_n^{i_1} h_1^{i_1} (u+h_2)^{n-i_1} - \sum_{i_1=1}^n C_n^{i_1} h_1^{i_1} u^{n-i_1} = \sum_{i_1=1}^n C_n^{i_1} h_1^{i_1} \sum_{i_2=1}^{n-i_1} C_{n-i_1}^{i_2} h_2^{i_2} u^{n-i_1-i_2}. \end{aligned}$$

Последовательно применяя формулу (25), легко можно показать, при $k = 1, 2, \dots, n-1$, что имеет место

$$\Delta_k(u^n; h_1, \dots, h_k) = \sum_{i_1=1}^n C_n^{i_1} h_1^{i_1} \dots \sum_{i_k=1}^{n-i_1-\dots-i_{k-1}} C_{n-i_1-\dots-i_{k-1}}^{i_k} h_k^{i_k} u^{n-i_1-\dots-i_k}.$$

Из этой формулы следует, что имеет место формула

$$\Delta_k(u^n; h_1, \dots, h_k) = h_1 \dots h_k g_k(u; h_1, \dots, h_k),$$

где $g_k = g_k(u; h_1, \dots, h_k)$ является формой $n-k$ -го порядка с целыми коэффициентами, имеющей относительно u степень $n-k$ и старший коэффициент $n(n-1) \dots (n-k+1)$, то есть

$$g_k(u; h_1, \dots, h_k) = \frac{n!}{(n-k)!} u^{n-k} + \dots$$

ЛЕММА 9. Пусть $f = f(m)$ – многочлен степени n , x и y – целые положительные числа, $y < x$,

$$\mathbb{T}(f; x, y) = \sum_{x-y < m \leq x} e(f(m)),$$

тогда при $k = 1, \dots, n-1$ имеет место

$$|\mathbb{T}(f; x, y)|^{2^k} \leq (2y)^{2^k - k - 1} \sum_{|h_1| < y} \dots \sum_{|h_k| < y} \mathbb{T}_k,$$

$$\mathbb{T}_k = \left| \sum_{m \in I_k(x, y; h_1, \dots, h_k)} e(\Delta_k(f(m); h_1, \dots, h_k)) \right|,$$

где интервалы $I_k(x, y; h_1, \dots, h_k)$ определяются соотношениями:

$$I_1(x, y; h_1) = (x - y, x] \cap (x - y - h_1, x - h_1],$$

$$I_k(x, y; h_1, \dots, h_k) = I_{k-1}(x, y; h_1, \dots, h_{k-1}) \cap I_{k-1}(x - h_k, y; h_1, \dots, h_{k-1}).$$

т.е. интервал $I_{k-1}(x - h_k, y; h_1, \dots, h_{k-1})$ получается из $I_{k-1}(x, y; h_1, \dots, h_{k-1})$ сдвигом на $-h_k$ всех интервалов, пересечением которых он является.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство проводим методом математической индукции по k . При $k = 1$ имеем

$$|\mathbb{T}(f; x, y)|^2 = \sum_{x-y < m \leq x} \sum_{x-y-m < h \leq x-m} e(f(m+h) - f(m)) =$$

$$= \sum_{|h| < y} \sum_{m \in I_1(x, y; h_1)} e(\Delta_1(f(m); h)) \leq \sum_{|h| < y} \mathbb{T}_1.$$

Предположим, что утверждение леммы выполняется при k , $1 \leq k \leq n-2$, то есть

$$|\mathbb{T}(f(m); x, y)|^{2^k} \leq (2y)^{2^k - k - 1} \sum_{|h_1| < y} \sum_{|h_2| < y} \dots \sum_{|h_k| < y} \mathbb{T}_k.$$

Возводя обе части этого неравенства в квадрат, затем последовательно применяя к суммам по $h_1, \dots, h_k$ неравенство Коши, найдём

$$|\mathbb{T}(f(m); x, y)|^{2^{k+1}} \leq (2y)^{2^{k+1} - (k+1) - 1} \sum_{|h_1| < y} \dots \sum_{|h_k| < y} \mathbb{T}_k^2. \quad (26)$$

Из эквивалентности соотношений $m_1 \in I_k(x, y; h_1, \dots, h_k)$ и $m_1 - m \in I_k(x - m, y; h_1, \dots, h_k)$, имеем

$$\mathbb{T}_k^2 = \sum_{\substack{m \in I_k(x, y; h_1, \dots, h_k) \\ m_1 - m \in I_k(x - m, y; h_1, \dots, h_k)}} e(\Delta_k(f(m_1); h_1, \dots, h_k) - \Delta_k(f(m); h_1, \dots, h_k)).$$

Обозначая разность $m_1 - m$ через h_{k+1} , затем сделав сумму по h_{k+1} внешней, воспользовавшись эквивалентностью соотношений $h_{k+1} \in I_k(x - m, y; h_1, \dots, h_k)$ и $m \in I_k(x - h_{k+1}, y; h_1, \dots, h_k)$ и соотношением (25), имеем

$$\mathbb{T}_k^2 = \sum_{|h_{k+1}| < y} \sum_{\substack{m \in I_k(x, y; h_1, \dots, h_k) \\ m \in I_k(x - h_{k+1}, y; h_1, \dots, h_k)}} e(\Delta_{k+1}(f(m); h_1, \dots, h_{k+1})) =$$

$$= \sum_{|h_{k+1}| < y} \sum_{m \in I_{k+1}(x, y; h_1, \dots, h_{k+1})} e(\Delta_{k+1}(f(m); h_1, \dots, h_{k+1})) \leq \sum_{|h_{k+1}| < y} \mathbb{T}_{k+1}.$$

Подставляя правую часть последнего неравенства в (26), получим утверждение леммы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Воспользуемся методом математической индукции по k . При $k = 1$ воспользовавшись тем, что при $x - y < m_1, m_2 \leq x$ диофантовы уравнения $m_1^n = m_2^n$ и $m_1 = m_2$ эквивалентны, имеем

$$\int_0^1 |T(\alpha; x, y)|^2 d\alpha = \sum_{x-y < m_1, m_2 \leq x} \int_0^1 e(\alpha(m_1^n - m_2^n)) d\alpha = \sum_{x-y < m_1 \leq x} 1 \ll y.$$

Пусть теперь утверждение теоремы имеет место при $2 \leq k \leq n - 1$, то есть

$$\int_0^1 |T(\alpha; x, y)|^{2^k} d\alpha \leq y^{2^k - k + \varepsilon}. \quad (27)$$

В лемме 9, полагая $f(m) = \alpha m^n$, имеем

$$|T(\alpha; x, y)|^{2^k} \leq (2y)^{2^k - k - 1} \sum_{|h_1| < y} \dots \sum_{|h_k| < y} \left| \sum_{m \in I_k} e(\alpha \Delta_k(m^n; h_1, \dots, h_k)) \right|.$$

Воспользовавшись леммой 8, находим

$$\Delta_k(m^n; h_1, \dots, h_k) = h_1 \dots h_k g_k(m; h_1, \dots, h_k),$$

где $g_k = g_k(m; h_1, \dots, h_k)$ является формой $n - k$ -го порядка с целыми коэффициентами, имеющей относительно m степень $n - k$ и старший коэффициент $n(n - 1) \dots (n - k + 1)$, то есть

$$g_k(m; h_1, \dots, h_k) = \frac{n!}{(n - k)!} m^{n - k} + \dots$$

Отсюда и из условий $x - y < m \leq x$, $|h_i| < y$, $i = 1, \dots, k$, $\sqrt{x} < y \leq x(\ln x)^{-1}$ следует, что существует x_0 , такое что при $x > x_0$, выполняется неравенство

$$g_k(m; h_1, \dots, h_k) > 0. \quad (28)$$

Обозначая через $r(h)$ — число решений диофантова уравнения

$$h_1 \dots h_k g_k(m; h_1, \dots, h_k) = h,$$

относительно переменных m и $h_1 \dots h_k$, $|h_i| < y$, $m \in I_k$, найдём

$$|T(\alpha; x, y)|^{2^k} \leq (2y)^{2^k - k - 1} \sum_h r(h) e(\alpha h), \quad (29)$$

Заметим, что, если $h \neq 0$, то $r(h) \ll \tau_{k+1}(h) \ll h^\varepsilon$. Из неравенства (28) следует, что уравнение

$$h_1 \dots h_k g_k(m; h_1, \dots, h_k) = 0$$

имеет только решение вида $(0, h_2, \dots, h_k, m)$, $(h_1, 0, h_3, \dots, h_k, m)$, $\dots$, $(h_1, \dots, h_{k-1}, 0, m)$, для количества которых справедлива оценка

$$r(0) \leq k \sum_{|h_2| < y} \dots \sum_{|h_k| < y} \sum_{m \in I_3} 1 \leq k(2y)^{k-1} |I_k| \leq k2^{k-1} y^k.$$

С другой стороны,

$$|T(\alpha; x, y)|^{2^k} = \sum_h \rho(h) (-\alpha h), \quad (30)$$

где $\rho(h)$ – число решений уравнения

$$s_1^n + \dots + s_\nu^n - t_1^n - \dots - t_\nu^n = h, \quad x - y < s_1, t_1, \dots, s_\nu, t_\nu \leq x, \quad \nu = 2^k.$$

В равенстве (30), полагая $\alpha = 0$, находим

$$\sum_h \rho(h) = |T(0; x, y)|^{2^k} \leq y^{2^k}. \quad (31)$$

Пользуясь предположением индукции, то есть соотношением (27), имеем

$$\rho(0) = \int_0^1 |T(\alpha; x, y)|^{2^k} d\alpha \leq y^{2^{k-k+\varepsilon}}.$$

Умножая (29) и (30), интегрируя по α , а затем воспользовавшись значениями $r(0)$, $\rho(0)$, оценкой $r(h) \ll h^\varepsilon$ и соотношением (31), найдём

$$\begin{aligned} \int_0^1 |T(\alpha; x, y)|^{2^{k+1}} d\alpha &\leq (2y)^{2^k-k-1} \int_0^1 \sum_h r(h) e(\alpha h) \sum_{h'} \rho(h') e(-\alpha h') d\alpha = \\ &= (2y)^{2^k-k-1} \left(r(0)\rho(0) + \sum_{h \neq 0} r(h)\rho(h) \right) \leq \\ &\leq (2y)^{2^k-k-1} \left(r(0)\rho(0) + \max_{h \neq 0} r(h) \sum_{h \neq 0} \rho(h) \right) \ll \\ &\ll y^{2^k-k-1} \left(y^k \cdot y^{2^{k-k+\varepsilon}} + y^\varepsilon \cdot y^{2^k} \right) \ll y^{2^{k+1}-k-1+\varepsilon}. \end{aligned}$$

5. Доказательство теоремы 1

Не ограничивая общности, будем считать, что

$$H = N^{1-\theta(n,r)+\varepsilon}, \quad \theta(n,r) = \frac{2}{(n^2-n)(r+1)}, \quad \mu_1 \leq \dots \leq \mu_r. \quad (32)$$

Пользуясь обозначениями

$$\begin{aligned} N_k &= (\mu_k N + H)^{\frac{1}{n}}, & H_k &= (\mu_k N + H)^{\frac{1}{n}} - (\mu_k N - H)^{\frac{1}{n}}, \\ \tau &= 2(n-1)nN_1^{n-2}H_1, & \mathfrak{a}\tau &= 1, \end{aligned}$$

число решений диофантова уравнения (1) при выполнении условий (6) представим в виде

$$\begin{aligned} J_{n,r}(N, H) &= \int_{-\mathfrak{a}}^{1-\mathfrak{a}} e(-\alpha N) \prod_{k=1}^r \sum_{|m^n - \mu_k N| \leq H} e(\alpha m^n) d\alpha = \\ &= \int_{-\mathfrak{a}}^{1-\mathfrak{a}} e(-\alpha N) \prod_{k=1}^r (T(\alpha; N_k, H_k) + \theta_k) d\alpha, \end{aligned}$$

где $|\theta_k|$ равен 1, если $N_k - H_k$ — целое число, и 0 в противном случае. Верхняя граница N_k и длина H_k суммы $T(\alpha; N_k, H_k)$ относительно параметров N и H выражаются через следующие асимптотические формулы

$$N_k = \mu_k^{\frac{1}{n}} N^{\frac{1}{n}} \left(1 + \frac{H}{\mu_k N} \right)^{\frac{1}{n}} = \mu_k^{\frac{1}{n}} N^{\frac{1}{n}} \left(1 + O\left(\frac{H}{N}\right) \right), \quad (33)$$

$$H_k = \mu_k^{\frac{1}{n}} N^{\frac{1}{n}} \left(\left(1 + \frac{H}{\mu_k N} \right)^{\frac{1}{n}} - \left(1 - \frac{H}{\mu_k N} \right)^{\frac{1}{n}} \right) = \frac{2H}{n\mu_k^{1-\frac{1}{n}} N^{1-\frac{1}{n}}} \left(1 + O\left(\frac{H^2}{N^2}\right) \right). \quad (34)$$

При $\nu = 1, 2, \dots, r$ и $1 \leq i_1 < \dots < i_\nu \leq r$, вводя обозначение

$$\mathcal{D}_\nu = \mathcal{D}(i_1, \dots, i_\nu) = \{1, 2, \dots, r\} \setminus \{i_1, \dots, i_\nu\}$$

и воспользовавшись тождеством

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^r (T(\alpha; N_k, H_k) + \theta_k) &= \prod_{k=1}^r T(\alpha; N_k, H_k) + \\ &+ \sum_{\nu=1}^{r-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_\nu \leq r} \prod_{j=1}^\nu T(\alpha; N_{i_j}, H_{i_j}) \prod_{k \in \mathcal{D}_\nu} \theta_k + \prod_{k=1}^r \theta_k, \end{aligned}$$

представим $J_{n,r}(N, H)$, в виде

$$\begin{aligned} J_{n,r}(N, H) &= \int_{-\varepsilon}^{1-\varepsilon} e(-\alpha N) \prod_{k=1}^r T(\alpha; N_k, H_k) d\alpha + R_{n,r}(N, H), \\ R_{n,r}(N, H) &= \sum_{\nu=1}^{r-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_\nu \leq r} \prod_{k \in \mathcal{D}_\nu} \theta_k \int_{-\varepsilon}^{1-\varepsilon} e(-\alpha N) \prod_{j=1}^\nu T(\alpha; N_{i_j}, H_{i_j}) d\alpha. \end{aligned} \quad (35)$$

В сумме $R_1(N, H)$, переходя к оценкам, и пользуясь тем, что среднее геометрическое неотрицательных чисел, не превосходит их среднего арифметического, а затем сопоставляя каждой ν число k , которое однозначно определяется соотношением $2^k \leq \nu < 2^{k+1}$, помня, что $r-1 = 2^n$, имеем

$$\begin{aligned} R_{n,r}(N, H) &\leq \sum_{\nu=1}^{r-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_\nu \leq r} \int_0^1 \prod_{j=1}^\nu |T(\alpha; N_{i_j}, H_{i_j})| d\alpha \leq \\ &\leq \sum_{\nu=1}^{r-1} \frac{I(\nu)}{\nu} = I(1) + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\nu=2^k}^{2^{k+1}-1} \frac{I(\nu)}{\nu} + \frac{I(r-1)}{r-1}, \\ I(\nu) &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_\nu \leq r} \sum_{j=1}^\nu \int_0^1 |T(\alpha; N_{i_j}, H_{i_j})|^\nu d\alpha. \end{aligned} \quad (36)$$

При $2 \leq \nu \leq r-1$ оценим сверху $I(\nu)$. Пользуясь тривиальной оценкой суммы $|T(\alpha; N_{i_j}, H_{i_j})|$ и теоремой 3, имеем

$$\begin{aligned} I(\nu) &\leq \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_\nu \leq r} \sum_{j=1}^\nu \max |T(\alpha; N_{i_j}, H_{i_j})|^{\nu-2^k} \int_0^1 |T(\alpha; N_{i_j}, H_{i_j})|^{2^k} d\alpha \leq \\ &\leq \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_\nu \leq r} \sum_{j=1}^\nu |H_{i_j}|^{\nu-2^k} \cdot |H_{i_j}|^{2^k-k+\varepsilon} \leq \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_\nu \leq r} \sum_{j=1}^\nu |H_{i_j}|^{\nu-k+\varepsilon}. \end{aligned}$$

Подставляя эту оценку в правую часть (36), и воспользовавшись тривиальной оценкой $J(1)$, а затем пользуясь неравенством $H_k \ll HN^{\frac{1}{n}-1}$, которое следует из (34), найдём

$$\begin{aligned}
R_{n,r}(N, H) &\ll \sum_{1 \leq i_1 \leq r} H_{i_1} + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\nu=2^k}^{2^{k+1}-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_\nu \leq r} \sum_{j=1}^{\nu} |H_{i_j}|^{\nu-k+\varepsilon} + \\
&+ \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{r-1} \leq r} \sum_{j=1}^{r-1} |H_{i_j}|^{r-1-n+\varepsilon} \ll rHN^{\frac{1}{n}-1} + \\
&+ \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\nu=2^k}^{2^{k+1}-1} C_r^\nu \nu \left(HN^{\frac{1}{n}-1} \right)^{\nu-k+\varepsilon} + C_r^{r-1} (r-1) \left(HN^{\frac{1}{n}-1} \right)^{r-1-n+\varepsilon} \ll \\
&\ll HN^{\frac{1}{n}-1} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(HN^{\frac{1}{n}-1} \right)^{2^{k+1}-1-k+\varepsilon} + \left(HN^{\frac{1}{n}-1} \right)^{r-1-n+\varepsilon} \ll \\
&\ll \left(\frac{H}{N^{1-\frac{1}{n}}} \right)^{r-1-n+\varepsilon} = \frac{H^{r-1}}{N^{r-\frac{r}{n}}} \left(\frac{N^{1-\frac{1}{n^2}+\frac{n-1}{n^2(n-\varepsilon)}\varepsilon}}{H} \right)^{n-\varepsilon}.
\end{aligned}$$

Отсюда, имея в виду, что

$$1 - \frac{1}{n^2} + \frac{n-1}{n^2(n-\varepsilon)}\varepsilon \leq 1 - \theta(n) + 0,5\varepsilon,$$

находим

$$R_{n,r}(N, H) \ll \frac{H^{r-1} \mathcal{L}^{\frac{1}{n}}}{N^{r-\frac{r}{n}}} \left(\frac{N^{1-\theta(n)+\varepsilon}}{H} \right)^{n-\varepsilon} N^{-0,5\varepsilon(n-\varepsilon)} \ll \frac{H^{r-1}}{N^{r-\frac{r}{n}} \mathcal{L}}.$$

Отсюда и из (35) имеем

$$J_{n,r}(N, H) = \int_{-\varepsilon}^{1-\varepsilon} e(-\alpha N) \prod_{k=1}^r T(\alpha; N_k, H_k) d\alpha + O\left(\frac{H^{r-1}}{N^{r-\frac{r}{n}} \mathcal{L}} \right). \quad (37)$$

Согласно теореме Дирихле о приближении действительных чисел рациональными числами, каждое α из промежутка $[-\varepsilon, 1-\varepsilon]$ представимо в виде

$$\alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad (a, q) = 1, \quad 1 \leq q \leq \tau, \quad |\lambda| \leq \frac{1}{q\tau}. \quad (38)$$

Легко видеть, что в этом представлении $0 \leq a \leq q-1$, причём $a=0$ лишь при $q=1$. Через $\mathfrak{M}$ обозначим те α , для которых в представлении (38) выполняется условие $q \leq H_r \mathcal{L}^{-1}$. Через $\mathfrak{m}$ обозначим оставшиеся α . Множество $\mathfrak{M}$ состоит из непересекающихся отрезков. Разобьём множество $\mathfrak{M}$ на множества $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}_1 &= \bigcup_{1 \leq q \leq H_r \mathcal{L}^{-1}} \bigcup_{\substack{a=0 \\ (a,q)=1}}^{q-1} \mathfrak{M}_1(a, q), \quad \mathfrak{M}_1(a, q) = \left[\frac{a}{q} - \eta_q \leq \alpha \leq \frac{a}{q} + \eta_q \right], \\
\mathfrak{M}_2 &= \mathfrak{M} \setminus \mathfrak{M}_1, \quad \eta_q = \frac{1}{2nqN_r^{n-1}}, \quad \eta = \frac{\mathcal{L}}{2nH_r N_{r-1}} \leq \eta_q.
\end{aligned} \quad (39)$$

Обозначая через $J(\mathfrak{M}_1)$, $J(\mathfrak{M}_2)$ и $J(\mathfrak{m})$ соответственно интегралы по множествам $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ и $\mathfrak{m}$, с учётом (37) получим

$$J_{n,r}(N, H) = J(\mathfrak{M}_1) + J(\mathfrak{M}_2) + J(\mathfrak{m}) + O\left(\frac{H^{r-1}}{N^{r-\frac{r}{n}} \mathcal{L}} \right). \quad (40)$$

В последней формуле первый член, то есть $J(\mathfrak{M}_1)$ доставляет главный член асимптотической формулы для $J_{n,r}(N, H)$, а $J(\mathfrak{M}_2)$ и $J(\mathfrak{m})$ входят в его остаточный член.

5.1. Вычисление интеграла $J(\mathfrak{M}_1)$

По определению интеграла $J(\mathfrak{M}_1)$ имеем:

$$J(\mathfrak{M}_1) = \sum_{q \leq H_r \mathcal{L}^{-1}} \sum_{\substack{a=0 \\ (a,q)=1}}^{q-1} \int_{|\lambda| \leq \eta_q} \prod_{k=1}^r T\left(\frac{a}{q} + \lambda; N_k, H_k\right) e\left(-\left(\frac{a}{q} + \lambda\right)N\right) d\lambda. \quad (41)$$

Для суммы $T\left(\frac{a}{q} + \lambda; N_k, H_k\right)$ выполняются оба условия следствия 2 теоремы 2. Действительно, ввиду соотношений (33), (34) и (32) имеет место неравенство

$$\begin{aligned} \tau &= 2(n-1)nN_1^{n-2}H_1 = \frac{4(n-1)H}{\mu_1^{\frac{1}{n}}N^{\frac{1}{n}}} \left(1 + O\left(\frac{H}{N}\right)\right) \geq \\ &\geq \frac{4(n-1)H}{\mu_k^{\frac{1}{n}}N^{\frac{1}{n}}} \left(1 + O\left(\frac{H}{N}\right)\right) = 2(n-1)nN_k^{n-2}H_k, \end{aligned} \quad (42)$$

а из соотношений $|\lambda| \leq \eta_q$, $\eta_q = \frac{1}{2nqN_r^{n-1}}$ и $\frac{1}{2nqN_r^{n-1}} \leq \frac{1}{2qN_k^{n-1}}$ следует, что

$$|\lambda| \leq \frac{1}{2nqN_r^{n-1}}.$$

Поэтому согласно этому следствию для $k = 1, \dots, r$ имеем

$$T\left(\frac{a}{q} + \lambda, N_k, H_k\right) = \frac{H_k S(a, q)}{q} \gamma(\lambda; N_k, H_k) + R, \quad R \ll q^{\frac{1}{2} + \varepsilon}.$$

Умножая обе части этих формул по всем $k = 1, 2, \dots, r$, а затем применяя тождество

$$\prod_{k=1}^r (a_k + b) = \prod_{k=1}^r a_k + b^r + \sum_{\nu=1}^{r-1} b^{r-\nu} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_\nu \leq r} \prod_{k=1}^\nu a_{i_k},$$

при $a_k = \frac{H_k S(a, q)}{q} \gamma(\lambda; N_k, H_k)$ и $b = R$, получим

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^r T\left(\frac{a}{q} + \lambda, N_k, H_k\right) &= \frac{S^r(a, q)}{q^r} \prod_{k=1}^r H_k \gamma(\lambda; N_k, H_k) + R^r + \\ &+ \sum_{\nu=1}^{r-1} R^{r-\nu} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_\nu \leq r} \prod_{k=1}^\nu \frac{H_{i_k} S(a, q)}{q} \gamma(\lambda; N_{i_k}, H_{i_k}). \end{aligned}$$

Пользуясь соотношениями $R \ll q^{\frac{1}{2} + \varepsilon}$, и $|S(a, q)| \ll q^{\frac{n-1}{n}}$ (лемма 5), последние два слагаемые оценим сверху:

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^r T\left(\frac{a}{q} + \lambda, N_k, H_k\right) - \frac{S^r(a, q)}{q^r} \prod_{k=1}^r H_k \gamma(\lambda; N_k, H_k) &\ll \\ &\ll \sum_{\nu=1}^{r-1} q^{\left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)(r-\nu) - \frac{\nu}{n}} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_\nu \leq r} \prod_{k=1}^\nu H_{i_k} |\gamma(\lambda; N_{i_k}, H_{i_k})| + q^{0,5r+r\varepsilon}. \end{aligned}$$

Отсюда и из формулы (41) находим

$$J(\mathfrak{M}_1) = \prod_{i=1}^r H_i \sum_{q \leq H_r \mathcal{L}^{-1}} \mathcal{A}(r, q) \sum_{\substack{a=0 \\ (a,q)=1}}^{q-1} \frac{S^r(a, q)}{q^r} e\left(-\frac{aN}{q}\right) + R_1(\mathfrak{M}_1) + R_2(\mathfrak{M}_1), \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(r, q) &= \int_{|\lambda| \leq \eta_q} \prod_{k=1}^r \gamma(\lambda; N_k, H_k) e(-\lambda N) d\lambda, \\ R_1(\mathfrak{M}_1) &\ll \sum_{\nu=1}^{r-1} \sum_{q \leq H_r \mathcal{L}^{-1}} q^{\sigma(\nu)} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_\nu \leq r} \int_{|\lambda| \leq \eta_q} \prod_{k=1}^\nu H_{i_k} |\gamma(\lambda; N_{i_k}, H_{i_k})| d\lambda, \\ \sigma(\nu) &= \left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right) r + 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n} + \varepsilon\right) \nu, \\ R_2(\mathfrak{M}_1) &\ll \sum_{q \leq H_r \mathcal{L}^{-1}} q^{0,5r+r\varepsilon} \varphi(q) \cdot 2\eta_q = \frac{1}{nN_r^{n-1}} \sum_{q \leq H_r \mathcal{L}^{-1}} \varphi(q) q^{0,5r-1+r\varepsilon}. \end{aligned} \quad (44)$$

5.2. Оценка $R_2(\mathfrak{M}_1)$

Воспользовавшись формулами (34) и (33), имеем

$$\begin{aligned} R_2(\mathfrak{M}_1) &\ll \frac{1}{N_r^{n-1}} \left(\frac{H_r}{\mathcal{L}}\right)^{0,5r+1+r\varepsilon} \ll N^{\frac{1-n}{n}} \left(\frac{H}{N^{\frac{n-1}{n}} \mathcal{L}}\right)^{0,5r+1+r\varepsilon} = \\ &= \frac{H^{r-1}}{N^{r-\frac{r}{n}} \mathcal{L}^{0,5r+1+r\varepsilon}} \left(\frac{N^{1-\frac{1}{n}}}{H}\right)^{\frac{r}{2}-2-r\varepsilon}. \end{aligned}$$

Отсюда имея в виду, что

$$1 - \frac{1}{n} < 1 - \theta(n), \quad \frac{r}{2} - 2 - r\varepsilon > 2,$$

а также пользуясь соотношением $H = N^{1-\theta(n,r)+\varepsilon}$, находим

$$R_2(\mathfrak{M}_1) \ll \frac{H^{r-1}}{N^{r-\frac{r}{n}} \mathcal{L}^{0,5r+1+r\varepsilon}} \left(\frac{N^{1-\theta(n)+\varepsilon}}{H}\right)^{\frac{r}{2}-2-r\varepsilon} N^{-\varepsilon(\frac{r}{2}-2-r\varepsilon)} \ll \frac{H^{r-1}}{N^{r-\frac{r}{n}} \mathcal{L}^{r-1}}. \quad (45)$$

5.3. Оценка $R_1(\mathfrak{M}_1)$

Оценим сначала тригонометрический интеграл

$$\gamma(\lambda; N_{i_k}, H_{i_k}) = \int_{-0,5}^{0,5} e(f_{i_k}(u)) du, \quad f_{i_k}(u) = \lambda \left(N_{i_k} - \frac{H_{i_k}}{2} + H_{i_k} u \right)^n.$$

Воспользовавшись соотношениями (33) и (34), при $i = 1, \dots, n$, находим

$$N_k^{n-i} H_k^i = \frac{2^i N^{1-i} H^i}{n \mu_k^{i-1}} \left(1 + O\left(\frac{H}{N}\right) \right), \quad \frac{H_k}{N_k} = \frac{2H}{n \mu_k N} \left(1 + O\left(\frac{H}{N}\right) \right). \quad (46)$$

Пользуясь этими соотношениями оценим снизу $f'_{i_k}(u)$. Имеем

$$\begin{aligned} |f'_{i_k}(u)| &= n |\lambda| H_{i_k} \left(N_{i_k} - \frac{H_{i_k}}{2} + H_{i_k} u \right)^{n-1} \geq n |\lambda| H_{i_k} (N_{i_k} - H_{i_k})^{n-1} = \\ &= n |\lambda| N_{i_k}^{n-1} H_{i_k} \left(1 - \frac{H_{i_k}}{N_{i_k}} \right)^{n-1} = 2 |\lambda| H \left(1 + O\left(\frac{H}{N}\right) \right) \geq |\lambda| H. \end{aligned}$$

Отсюда и из леммы 4, найдём

$$|\gamma(\lambda; N_{i_k}, H_{i_k})| \leq \min \left(1, \frac{1}{|\lambda|H} \right). \quad (47)$$

Подставляя эту оценку в правую часть (44), получим

$$\begin{aligned} R_1(\mathfrak{M}_1) &\ll \sum_{\nu=1}^{r-1} \sum_{q \leq H_r \mathcal{L}^{-1}} q^{\sigma(\nu)} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_\nu \leq r} \int_{|\lambda| \leq \eta_q} \prod_{k=1}^{\nu} H_{i_k} \min \left(1, \frac{1}{|\lambda|H} \right) d\lambda = \\ &= 2 \sum_{\nu=1}^{r-1} I(\nu) \sum_{q \leq H_r \mathcal{L}^{-1}} q^{\sigma(\nu)} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_\nu \leq r} \prod_{k=1}^{\nu} H_{i_k}, \\ I(\nu) &= \int_0^{\eta_q} \min \left(1, \frac{1}{\lambda^\nu H^\nu} \right) d\lambda. \end{aligned} \quad (48)$$

Воспользовавшись условием $q \leq H_r \mathcal{L}^{-1}$, а затем и соотношением (46), находим

$$\eta_q H = \frac{H}{2nqN_r^{n-1}} \geq \frac{H\mathcal{L}}{2nH_r N_r^{n-1}} = \frac{H\mathcal{L}}{2n \cdot \frac{2H}{n} (1 + O(\frac{H}{N}))} = \frac{\mathcal{L}}{4(1 + O(\frac{H}{N}))} \geq \frac{\mathcal{L}}{5},$$

то есть $H^{-1} < \eta_q$. При $\nu \geq 2$, разбивая отрезок интегрирования в интеграле $I(\nu)$ на отрезки $[0, H^{-1}]$ и $[H^{-1}, \eta_q]$, имеем

$$I(\nu) = \int_0^{H^{-1}} d\lambda + \frac{1}{H^\nu} \int_{H^{-1}}^{\eta_q} \frac{d\lambda}{\lambda^\nu} = \frac{1}{H} \left(1 + \frac{1}{\nu-1} \left(1 - \left(\frac{1}{\eta_q H} \right)^{\nu-1} \right) \right) \leq \frac{\nu}{(\nu-1)H}.$$

В случае $\nu = 1$ аналогично получим

$$I(1) = \int_0^{H^{-1}} d\lambda + \frac{1}{H} \int_{H^{-1}}^{\eta_q} \frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{1}{H} + \frac{\ln(\eta_q H)}{H} \leq \frac{\mathcal{L}}{H}.$$

Воспользовавшись соотношениями (34) и (32), найдём

$$\prod_{k=1}^{\nu} H_{i_k} = \prod_{k=1}^{\nu} \frac{2H}{n\mu_{i_k}^{1-\frac{1}{n}} N^{1-\frac{1}{n}}} \left(1 + O\left(\frac{H^2}{N^2}\right) \right) \ll \left(\frac{H}{N^{1-\frac{1}{n}}} \right)^\nu.$$

Подставляя правую часть этого неравенства и оценку для интеграла $I(\nu)$ в (48), а затем пользуясь при $k = r$ формулой (34), имеем

$$\begin{aligned} R_1(\mathfrak{M}_1) &\ll \sum_{\nu=1}^{r-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_\nu \leq r} \frac{\mathcal{L}^{1+\nu}}{H} \left(\frac{H}{N^{1-\frac{1}{n}} \mathcal{L}} \right)^\nu \sum_{q \leq H_r \mathcal{L}^{-1}} q^{\sigma(\nu)} \ll \\ &\ll \sum_{\nu=1}^{r-1} C_r^\nu \frac{\mathcal{L}^{1+\nu}}{H} \left(\frac{H}{N^{1-\frac{1}{n}} \mathcal{L}} \right)^{\sigma(\nu)+\nu+1} \ll \frac{\mathcal{L}^r}{H} \left(\frac{H}{N^{1-\frac{1}{n}} \mathcal{L}} \right)^{\sigma(r-1)+r} = \\ &= \frac{H^{r-1}}{N^{r-\frac{r}{n}}} \mathcal{L}^{\frac{r}{n}-\frac{3}{2}-\frac{1}{n}-\varepsilon} \left(\frac{N^{1-\frac{1}{n}}}{H} \right)^{\frac{r}{n}-\frac{3}{2}-\frac{1}{n}-\varepsilon}. \end{aligned}$$

Отсюда, имея в виду, что

$$1 - \frac{1}{n} < 1 - \theta(n), \quad \frac{r}{n} - \frac{3}{2} - \frac{1}{n} - \varepsilon > 1,$$

и пользуясь соотношением $H = N^{1-\theta(n,r)+\varepsilon}$, находим

$$\begin{aligned} R_1(\mathfrak{M}_1) &\ll \frac{H^{r-1}}{N^{r-\frac{r}{n}}} \mathcal{L}^{\frac{r}{n}-\frac{3}{2}-\frac{1}{n}-\varepsilon} \left(\frac{N^{1-\theta(n,r)+\varepsilon}}{H} \right)^{\frac{r}{n}-\frac{3}{2}-\frac{1}{n}-\varepsilon} N^{-\varepsilon(\frac{r}{n}-\frac{3}{2}-\frac{1}{n}-\varepsilon)} = \\ &= \frac{H^{r-1}}{N^{r-\frac{r}{n}}} \mathcal{L}^{\frac{r}{n}-\frac{3}{2}-\frac{1}{n}-\varepsilon} \cdot N^{-\varepsilon(\frac{r}{n}-\frac{3}{2}-\frac{1}{n}-\varepsilon)} \ll \frac{H^{r-1}}{N^{r-\frac{r}{n}} \mathcal{L}^{r-1}}. \end{aligned} \quad (49)$$

5.4. Вычисление интеграла $\mathcal{A}(r, q)$

Имеем

$$\mathcal{A}(r, q) = \int_{|\lambda| \leq \eta_q} \prod_{k=1}^r \gamma(\lambda; N_k, H_k) e(-\lambda N) d\lambda, \quad \eta_q = \frac{1}{2nqN_r^{n-1}}.$$

Разбивая интервал интегрирования на интервалы $|\lambda| \leq \eta$ и $\eta < |\lambda| \leq \eta_q$, где число η определяется в формуле (39), и обозначая интегралы по этим интервалам соответственно через $\mathcal{A}_1(r, q)$ и $\mathcal{A}_2(r, q)$, получим

$$\mathcal{A}(r, q) = \mathcal{A}_1(r, q) + \mathcal{A}_2(r, q). \quad (50)$$

Заметим, что число η определяется в формуле (39) и согласно (46), имеем

$$\eta = \frac{\mathcal{L}}{2nH_rN_r^{n-1}} = \frac{\mathcal{L}}{4H(1+O(\frac{H}{N}))} \leq \frac{\mathcal{L}}{H}. \quad (51)$$

В формуле (50) интеграл $\mathcal{A}_1(r, q)$ доставляет главный член асимптотической формулы для $\mathcal{A}(r, q)$, а $\mathcal{A}_2(r, q)$ входит в его остаточный член. Найдём сначала асимптотическую формулу для $\mathcal{A}_1(r, q)$. Пользуясь соотношением $N_k^n = \mu_k N + H$, формулами (46) и (51), имеем

$$\begin{aligned} f_k(u) &= \lambda \left(N_k + H_k \left(u - \frac{1}{2} \right) \right)^n = \lambda N_k^n + \lambda \sum_{i=1}^n C_n^i N_k^{n-i} H_k^i \left(u - \frac{1}{2} \right)^i = \\ &= \mu_k N \lambda + 2H \lambda u + O\left(\frac{H^2}{N} |\lambda|\right) + \lambda \sum_{i=2}^n C_n^i \frac{2^i N^{1-i} H^i}{n \mu_k^{i-1}} \left(u - \frac{1}{2} \right)^i \left(1 + O\left(\frac{H}{N}\right) \right) \\ &= \mu_k N \lambda + 2H \lambda u + R_3(N, H), \quad R_3(N, H) \ll \frac{H^2}{N} \eta \ll \frac{H \mathcal{L}}{N}. \end{aligned}$$

Отсюда имея в виду, что $e(R_3(N, H)) = 1 + O(HN^{-1} \mathcal{L})$, найдём

$$e(f_k(u)) = e(\mu_k N \lambda) e(2H u \lambda) + O\left(\frac{H \mathcal{L}}{N}\right).$$

Следовательно

$$\gamma(\lambda; N_k, H_k) = e(\mu_k N \lambda) \frac{\sin(2\pi H \lambda)}{2\pi H \lambda} + R_4(N, H), \quad R_4(N, H) \ll \frac{H \mathcal{L}}{N}.$$

Умножая обе части этих формул по всем $k = 1, 2, \dots, r$, применяя тождество

$$\prod_{k=1}^r (a_k + b) = \prod_{k=1}^r a_k + b^r + \sum_{\nu=1}^{r-1} b^{r-\nu} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_\nu \leq r} \prod_{k=1}^\nu a_{i_k},$$

а затем, воспользовавшись условием $\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_r = 1$, имеем

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^r \gamma_n(\lambda; N_k, H_k) &= \prod_{k=1}^r \left(e(\mu_k N \lambda) \frac{\sin(2\pi H \lambda)}{2\pi H \lambda} + R_4(N, H) \right) = \\ &= \frac{\sin^r(2\pi H \lambda)}{(2\pi H \lambda)^r} e(N \lambda) + R_5(N, H), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} R_5(N, H) &= R_4^r(N, H) + \sum_{\nu=1}^{r-1} R_4^{r-\nu}(N, H) \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_\nu \leq r} \prod_{k=1}^{\nu} e(\mu_{i_k} N \lambda) \frac{\sin(2\pi H \lambda)}{2\pi H \lambda} = \\ &= R_4^r(N, H) + \sum_{\nu=1}^{r-1} \frac{\sin^\nu(2\pi H \lambda)}{(2\pi H \lambda)^\nu} R_4^{r-\nu}(N, H) \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_\nu \leq r} e\left(\lambda N \sum_{k=1}^{\nu} \mu_{i_k}\right) \ll \\ &\ll \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{|\sin(2\pi H \lambda)|^\nu}{|2\pi \lambda H|^\nu} \left(\frac{H \mathcal{L}}{N}\right)^{r-\nu} \ll \frac{H^r \mathcal{L}^r}{N^r} + \frac{|\sin(2\pi H \lambda)|^{r-1}}{|2\pi \lambda H|^{r-1}} \cdot \frac{H \mathcal{L}}{N}. \end{aligned}$$

Отсюда, из определения интеграла $\mathcal{A}_1(k, q)$ и (51), находим

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1(r, q) &= \int_{|\lambda| \leq \eta} \left(\frac{\sin^r(2\pi H \lambda)}{(2\pi H \lambda)^r} e(N \lambda) + R_5(N, H) \right) e(-\lambda N) d\lambda = \\ &= \frac{1}{\pi H} \int_0^{2\pi H \eta} \frac{\sin^r t}{t^r} dt + R_6(N, H) + R_7(N, H), \\ R_6(N, H) &\ll \int_{|\lambda| \leq \eta} \frac{H^r \mathcal{L}^r}{N^r} d\lambda \leq \frac{2H^{r-1} \mathcal{L}^{r+1}}{N^r} = \frac{1}{H \mathcal{L}^7} \cdot \frac{H^r \mathcal{L}^{r+8}}{N^r} \ll \frac{1}{H \mathcal{L}^7}, \\ R_7(N, H) &\ll \frac{H \mathcal{L}}{N} \int_{|\lambda| \leq \eta} \frac{\sin^{r-1}(2\pi H \lambda)}{(2\pi H \lambda)^{r-1}} d\lambda = \frac{\mathcal{L}}{\pi N} \int_0^{2\pi H \eta} \frac{\sin^{r-1} t}{t^{r-1}} dt \ll \frac{1}{H \mathcal{L}^7}. \end{aligned}$$

Заменив интеграл по t близким к нему несобственным интегралом, независимым от $2\pi H \eta$, а также воспользовавшись при $i = 1$ формулой (46), получим

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1(r, q) &= \frac{1}{\pi H} \int_0^\infty \frac{\sin^r t}{t^r} dt + R_8(N, H) + O\left(\frac{1}{H \mathcal{L}^7}\right), \\ R_8(N, H) &= \frac{1}{\pi H} \int_{2\pi H \eta}^\infty \frac{\sin^r t}{t^r} dt \leq \frac{1}{\pi H} \cdot \frac{1}{(2\pi H \eta)^r} \ll \frac{1}{H^{r+1} \eta^r} = \\ &= \frac{1}{H^{r+1}} \cdot \left(\frac{2nN_r^{n-1} H_r}{\mathcal{L}}\right)^r \ll \frac{1}{H^{r+1} \mathcal{L}^r} \left(\frac{2H}{n}\right)^r \ll \frac{1}{H \mathcal{L}^r}. \end{aligned}$$

Пользуясь для вычисления несобственного интеграла леммой 7 при $m = 1$, имеем

$$\mathcal{A}_1(r, q) = \frac{\gamma(n, r)}{H} + O\left(\frac{1}{H \mathcal{L}^7}\right). \quad (52)$$

$$\gamma(n, r) = \frac{r^{r-1} - \frac{r}{1!}(r-2)^{r-1} + \frac{r(r-1)}{2!}(r-4)^{r-1} - \frac{r(r-1)(r-2)}{3!}(r-6)^{r-1} + \dots}{2^r(r-1)!}.$$

Теперь оценим сверху интеграл $\mathcal{A}_2(r, q)$. Воспользовавшись оценкой (47), затем соотношением (51), имеем

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_2(r, q) &\leq 2 \int_{\eta}^{\eta_q} \prod_{k=1}^r |\gamma(\lambda; N_k, H_k)| d\lambda \leq 2 \int_{\eta}^{\eta_q} \min\left(1, \frac{1}{\lambda^r H^r}\right) d\lambda = \\ &= \frac{2}{H^r} \int_{\eta}^{\eta_q} \frac{d\lambda}{\lambda^r} = \frac{2}{(r-1)H^r} \left(\frac{1}{\eta^{r-1}} - \frac{1}{\eta_q^{r-1}}\right) \leq \frac{2}{(r-1)H^r \eta^{r-1}} = \\ &= \frac{2}{(r-1)H^r} \cdot \left(\frac{4H(1 + O(\frac{H}{N}))}{\mathcal{L}}\right)^{r-1} \ll \frac{1}{H \mathcal{L}^{r-1}}.\end{aligned}$$

Из этой оценки и формулы (52) ввиду (50), находим

$$\mathcal{A}(r, q) = \frac{\gamma(n, r)}{H} + O\left(\frac{1}{H \mathcal{L}^{r-1}}\right). \quad (53)$$

5.5. Вывод асимптотической формулы для интеграла $J(\mathfrak{M}_1)$

Подставляя правые части формул (53), (49) и (45) в (43), найдём

$$J(\mathfrak{M}_1) = \frac{\gamma(n, r)}{H} \mathfrak{S}\left(N, \frac{H_r}{\mathcal{L}}\right) \prod_{i=1}^r H_i + R_9(N, H) + O\left(\frac{H^{r-1}}{N^{r-\frac{r}{n}} \mathcal{L}^{r-1}}\right), \quad (54)$$

$$\mathfrak{S}\left(N, \frac{H_r}{\mathcal{L}}\right) = \sum_{q \leq H_r \mathcal{L}^{-1}} \sum_{\substack{a=0 \\ (a, q)=1}}^{q-1} \frac{S^r(a, q)}{q^r} e\left(-\frac{aN}{q}\right),$$

$$R_9(N, H) \ll \frac{1}{H \mathcal{L}^{r-1}} \prod_{i=1}^r H_i \sum_{q \leq H_r \mathcal{L}^{-1}} \left| \sum_{\substack{a=0 \\ (a, q)=1}}^{q-1} \frac{S^r(a, q)}{q^r} e\left(-\frac{aN}{q}\right) \right|.$$

Вычислим двойную сумму $\mathfrak{S}(N, H_r \mathcal{L}^{-1})$. Для этого сумму по q заменим близким к ней бесконечным рядом $\mathfrak{S}(N)$, независимым от $H_r \mathcal{L}^{-1}$. Воспользовавшись леммой 5, соотношениями (33) и (34), а затем явными значениями параметров H и r , то есть формулой (32), имеем

$$\begin{aligned}\left| \sum_{q > H_r \mathcal{L}^{-1}} \sum_{\substack{a=0 \\ (a, q)=1}}^{q-1} \frac{S^r(a, q)}{q^r} e\left(-\frac{aN}{q}\right) \right| &\ll \sum_{q > H_r \mathcal{L}^{-1}} q^{-\frac{r}{n}+1} \ll \\ &\ll \left(\frac{H_r}{\mathcal{L}}\right)^{-\frac{r}{n}+2} \ll \left(\frac{N^{1-\frac{1}{n}} \mathcal{L}}{H}\right)^{\frac{r}{n}-2} \ll \frac{1}{\mathcal{L}^{r-1}}.\end{aligned}$$

Следовательно

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}\left(N, \frac{H_r}{\mathcal{L}}\right) &= \mathfrak{S}(N) + O\left(\frac{1}{\mathcal{L}^{r-1}}\right), \\ \mathfrak{S}(N) &= \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{\substack{a=0 \\ (a, q)=1}}^{q-1} \frac{S^r(a, q)}{q^r} e\left(-\frac{aN}{q}\right).\end{aligned} \quad (55)$$

Заметим, что сумма особого ряда $\mathfrak{S}(N)$ превосходит некоторое положительное число $c(N)$ (см. [17], теоремы 4.6).

Применяя формулу (34), имеем

$$\prod_{i=1}^r H_i = \frac{2^r H^r}{n^r N^{r-\frac{r}{n}}} \prod_{i=1}^r \mu_i^{-1+\frac{1}{n}} \left(1 + O\left(\frac{H^2}{N^2}\right) \right). \quad (56)$$

Для оценки $R_9(N, H)$, пользуясь последней формулой и леммой 5 и условием $\frac{r}{n} - 1 \geq 2$, имеем

$$R_9(N, H) \ll \frac{H^{r-1}}{N^{r-\frac{r}{n}} \mathcal{L}^{r-1}} \sum_{q \leq H_r \mathcal{L}^{-1}} \frac{1}{q^{\frac{r}{n}-1}} \ll \frac{H^{r-1}}{N^{r-\frac{r}{n}} \mathcal{L}^{r-1}}. \quad (57)$$

Подставляя (55), (56) и (57) в (54), найдём

$$J(\mathfrak{M}_1) = \frac{2^r \gamma(n, r)}{n^r} \prod_{i=1}^r \mu_i^{-1+\frac{1}{n}} \mathfrak{S}(N) \frac{H^{r-1}}{N^{r-\frac{r}{n}}} + O\left(\frac{H^{r-1}}{N^{r-\frac{r}{n}} \mathcal{L}^{r-1}}\right). \quad (58)$$

5.6. Оценка интеграла $J(\mathfrak{M}_2)$

Имеем

$$J(\mathfrak{M}_2) = \int_{\mathfrak{M}_2} \prod_{k=1}^r T(\alpha; N_k, H_k) e(-\alpha N) d\alpha. \quad (59)$$

Суммы $T(\alpha; N_k, H_k)$ в произведении $\prod_{k=1}^r T(\alpha; N_k, H_k)$ симметричны, поэтому не ограничивая общности будем считать, что выполняется соотношение

$$\max_{1 \leq k \leq r} \max_{\alpha \in \mathfrak{M}_2} |T(\alpha; N_k, H_k)| = \max_{\alpha \in \mathfrak{M}_2} |T(\alpha; N_\nu, H_\nu)|, \quad 1 \leq \nu \leq r.$$

С учётом этого равенства, переходя в интеграле (59) к оценкам, и пользуясь тем, что среднее геометрическое неотрицательных чисел не превосходит их среднего арифметического, а затем, применяя теорему 3 и соотношение $H_\nu \leq H_1 \ll HN^{-1+\frac{1}{n}}$, последовательно имеем

$$\begin{aligned} J(\mathfrak{M}_2) &\leq \max_{\alpha \in \mathfrak{M}_2} |T(\alpha; N_\nu, H_\nu)| \int_0^1 \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq \nu}}^r |T(\alpha; N_k, H_k)| d\alpha \leq \\ &\leq \max_{\alpha \in \mathfrak{M}_2} |T(\alpha; N_\nu, H_\nu)| \frac{1}{r-1} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq \nu}}^r \int_0^1 |T(\alpha; N_k, H_k)|^{r-1} d\alpha \ll \\ &\ll \max_{\alpha \in \mathfrak{M}_2} |T(\alpha; N_\nu, H_\nu)| \frac{1}{r-1} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq \nu}}^r H_k^{2^n - n + \varepsilon} \ll \\ &\ll \left(\frac{H}{N^{1-\frac{1}{n}}} \right)^{2^n - n + \varepsilon} \max_{\alpha \in \mathfrak{M}_2} |T(\alpha; N_\nu, H_\nu)| = \\ &= \frac{H^{r-1}}{N^{r-\frac{r}{n}}} \cdot \frac{N^{n-\frac{1}{n}-\frac{n-1}{n}\varepsilon}}{H^{n-\varepsilon}} \max_{\alpha \in \mathfrak{M}_2} |T(\alpha; N_\nu, H_\nu)|. \end{aligned} \quad (60)$$

Оценим $T(\alpha; N_\nu, H_\nu)$ для α из множества $\mathfrak{M}_2$. Если $\alpha \in \mathfrak{M}_2$, то

$$\alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad (a, q) = 1, \quad \eta_q < |\lambda| \leq \frac{1}{q\tau}, \quad 1 \leq q \leq \frac{H_r}{\mathcal{L}}, \quad \eta_q = \frac{1}{2nqN_r^{n-1}}.$$

Рассмотрим два возможных случая: $\eta_q < |\lambda| \leq \frac{1}{2nqN_\nu^{n-1}}$ и $\frac{1}{2nqN_\nu^{n-1}} < |\lambda| \leq \frac{1}{q\tau}$.

Случай 1. Для суммы $T(\alpha; N_\nu, H_\nu)$ согласно соотношению (42) выполняется неравенство

$$\tau = 2(n-1)nN_1^{n-2}H_1 \geq 2(n-1)nN_\nu^{n-2}H_\nu,$$

то есть первое условие следствия 2 теоремы 2, а второе условие следует из условия рассматриваемого случая

$$|\lambda| \leq \frac{1}{2nqN_r^{n-1}}.$$

Согласно этому следствию имеем

$$T(\alpha; N_\nu, H_\nu) = \frac{H_\nu S(a, q)}{q} \gamma(\lambda; N_\nu, H_\nu) + O\left(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right). \quad (61)$$

Оценивая тригонометрический интеграл $\gamma(\lambda; N_\nu, H_\nu)$, воспользовавшись оценкой (47), находим

$$\gamma(\lambda; N_\nu, H_\nu) \leq \min\left(1, \frac{1}{H|\lambda|}\right) \leq \frac{1}{H\eta_q} = \frac{2nqN_r^{n-1}}{H} \ll \frac{qN^{\frac{n-1}{n}}}{H}.$$

Подставляя эту оценку и оценку суммы $S(a, q)$ из леммы 5 в (61), а затем с пользовавшись формулой (34), получим

$$\begin{aligned} |T(\alpha; N_\nu, H_\nu)| &\ll \frac{H}{N^{\frac{n-1}{n}} q^{\frac{1}{n}}} \cdot \frac{qN^{\frac{n-1}{n}}}{H} + q^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \ll q^{\frac{n-1}{n}} \ll \\ &\ll \left(\frac{H_r}{\mathcal{L}}\right)^{\frac{n-1}{n}} \ll \left(\frac{H}{n\mu_k^{1-\frac{1}{n}} N^{1-\frac{1}{n}} \mathcal{L}}\right)^{\frac{n-1}{n}} \ll \frac{H^{\frac{n-1}{n}}}{N^{\frac{(n-1)^2}{n^2}} \mathcal{L}^{1-\frac{1}{n}}}. \end{aligned}$$

Подставляя последнюю оценку в (60), находим

$$\begin{aligned} J(\mathfrak{M}_2) &\ll \frac{H^{r-1}}{N^{r-\frac{r}{n}}} \cdot \frac{N^{n-\frac{1}{n}-\frac{n-1}{n}\varepsilon}}{H^{n-\varepsilon}} \cdot \frac{H^{\frac{n-1}{n}}}{N^{\frac{(n-1)^2}{n^2}} \mathcal{L}^{1-\frac{1}{n}}} = \frac{H^{r-1}}{N^{r-\frac{r}{n}} \mathcal{L}^{1-\frac{1}{n}}} \left(\frac{N^{\frac{\deg(N)}{\deg(H)}}}{H}\right)^{\deg(H)}, \\ \deg(N) &= n - \frac{1}{n} - \frac{n-1}{n}\varepsilon - \frac{(n-1)^2}{n^2} = n - 1 + \frac{1}{n} - \varepsilon - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}\varepsilon, \\ \deg(H) &= n - \varepsilon - \frac{n-1}{n} = n - 1 + \frac{1}{n} - \varepsilon, \\ \frac{\deg(N)}{\deg(H)} &= 1 - \frac{1-n\varepsilon}{n^3-n^2+n-n^2\varepsilon} = 1 - \frac{1}{n^3-n^2+n} + \eta(n), \\ \eta(n) &= \frac{n^2-n}{(n^2-n+1)(n^2-n+1-n\varepsilon)} \varepsilon \leq \frac{\varepsilon}{n^2-n+1}. \end{aligned}$$

Отсюда, имея в виду, что

$$1 - \frac{1}{n^3-n^2+n} + \eta(n) \leq 1 - \theta(n) + 0,5\varepsilon$$

находим

$$\begin{aligned} J(\mathfrak{M}_2) &\ll \frac{H^{r-1}}{N^{r-\frac{r}{n}} \mathcal{L}^{1-\frac{1}{n}}} \left(\frac{N^{1-\frac{1}{n^3-n^2+n}+\eta(n)}}{H}\right)^{\deg(H)} \ll \\ &\ll \frac{H^{r-1}}{N^{r-\frac{r}{n}} \mathcal{L}^{1-\frac{1}{n}}} \left(\frac{N^{1-\theta(n)+\varepsilon}}{H}\right)^{\deg(H)} N^{-0,5\varepsilon \deg(H)} \ll \frac{H^{r-1}}{N^{r-\frac{r}{n}} \mathcal{L}^{r-1}}. \end{aligned} \quad (62)$$

Случай 2. В этом случае для суммы $T(\alpha; N_\nu, H_\nu)$ выполняются оба условия следствия 3 теоремы 2, то есть

$$\tau = 2(n-1)nN_1^{n-2}H_1 \geq 2(n-1)nN_\nu^{n-2}H_\nu, \quad \frac{1}{2qN_\nu^{n-1}} < |\lambda| \leq \frac{1}{q\tau}.$$

Согласно этому следствию, условиям $H_r < N_r \mathcal{L}^{-1}$ и $q \leq H_r \mathcal{L}^{-1}$, а также соотношениям (33) и (34), имеем

$$\begin{aligned} |T(\alpha; N_\nu, H_\nu)| &\ll q^{\frac{n-1}{n}} \ln q + \min \left(H_\nu q^{-\frac{1}{n}}, N_\nu^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}} \right) \leq \\ &\leq q^{1-\frac{1}{n}} \ln q + N_\nu^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}} \ll H_r^{1-\frac{1}{n}} \mathcal{L}^{\frac{1}{n}} + N_r^{\frac{1}{2}} H_r^{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}} \mathcal{L}^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} = \\ &= N_r^{\frac{1}{2}} H_r^{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}} \mathcal{L}^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} \left(H_r^{\frac{1}{2}} N_r^{-\frac{1}{2}} \mathcal{L}^{\frac{1}{2}} + 1 \right) \ll \\ &\ll N_r^{\frac{1}{2}} H_r^{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}} \mathcal{L}^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} \ll H^{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}} N^{-\frac{1}{2}+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}} \mathcal{L}^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (60), находим

$$\begin{aligned} J(\mathfrak{M}_2) &\ll \frac{H^{r-1}}{N^{r-\frac{r}{n}}} \cdot \frac{N^{n-\frac{1}{n}-\frac{n-1}{n}\varepsilon}}{H^{n-\varepsilon}} \cdot H^{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}} N^{-\frac{1}{2}+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}} \mathcal{L}^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} = \\ &= \frac{H^{r-1}}{N^{r-\frac{r}{n}} \mathcal{L}^{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}} \left(\frac{N^{\frac{\deg(N)}{\deg(H)}}}{H} \right)^{\deg(H)}, \\ \deg(N) &= n - \frac{1}{n} - \frac{n-1}{n}\varepsilon - \frac{1}{2} + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2} = n - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} - \varepsilon - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}\varepsilon, \\ \deg(H) &= n - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} - \varepsilon, \\ \frac{\deg(N)}{\deg(H)} &= 1 - \frac{1-n\varepsilon}{n^3-0,5n^2+n-n^2\varepsilon} = 1 - \frac{1}{n^3-0,5n^2+n} + \eta(n), \\ \eta(n) &= \frac{n^2-0,5n}{(n^2-0,5n+1)(n^2-0,5n+1-n\varepsilon)} \varepsilon \leq \frac{\varepsilon}{n^2-n+1}. \end{aligned}$$

Отсюда, имея в виду, что

$$1 - \frac{1}{n^3-0,5n^2+n} + \eta(n) \leq 1 - \theta(n) + 0,5\varepsilon,$$

находим

$$\begin{aligned} J(\mathfrak{M}_2) &\ll \frac{H^{r-1}}{N^{r-\frac{r}{n}} \mathcal{L}^{\frac{n-1}{n}}} \left(\frac{N^{1-\frac{1}{n^3-0,5n^2+n}+\eta(n)}}{H} \right)^{\deg(H)} \ll \\ &\ll \frac{H^{r-1}}{N^{r-\frac{r}{n}} \mathcal{L}^{\frac{n-1}{n}}} \left(\frac{N^{1-\theta(n)+\varepsilon}}{H} \right)^{\deg(H)} N^{-0,5\deg(H)} \ll \frac{H^{r-1}}{N^{r-\frac{r}{n}} \mathcal{L}^{r-1}}. \end{aligned} \quad (63)$$

5.7. Оценка интеграла $J(\mathfrak{m})$

Поступая аналогично, как в случае оценки $J(\mathfrak{M}_2)$, имеем

$$J(\mathfrak{m}) \ll \frac{H^{r-1}}{N^{r-\frac{r}{n}}} \cdot \frac{N^{n-\frac{1}{n}-\frac{n-1}{n}\varepsilon}}{H^{n-\varepsilon}} \max_{\alpha \in \mathfrak{m}} |T(\alpha; N_\nu, H_\nu)|, \quad 1 \leq \nu \leq r. \quad (64)$$

Оценим $T(\alpha; N_\nu, H_\nu)$ для α из множества $\mathbf{m}$. Если $\alpha \in \mathbf{m}$, то

$$\alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad (a, q) = 1, \quad |\lambda| \leq \frac{1}{q\tau}, \quad \frac{H_r}{\mathcal{L}} < q \leq \tau, \quad \tau = 2n(n-1)N_1^{n-2}H_1.$$

Пользуясь леммой 1, обозначением $r = 2^n + 1$, затем соотношениями

$$H_\nu \asymp \frac{H}{N^{1-\frac{1}{n}}}, \quad N_\nu \asymp N^{\frac{1}{n}}, \quad \frac{H}{N^{1-\frac{1}{n}}\mathcal{L}} \ll q \ll \frac{H}{N^{\frac{1}{n}}}$$

которые являются следствиями формул (34) и (33), имеем

$$\begin{aligned} T(\alpha; N_\nu, H_\nu) &\ll H_\nu^{1+\varepsilon} \left(\frac{1}{H_\nu} + \frac{1}{q} + \frac{q}{H_\nu^n} \right)^{\frac{2}{r-1}} \ll \\ &\ll \frac{H^{1+\varepsilon}}{N^{(1-\frac{1}{n})(1+\varepsilon)}} \left(\frac{N^{1-\frac{1}{n}}\mathcal{L}}{H} + \frac{H}{N^{\frac{1}{n}}} \cdot \frac{N^{n-1}}{H^n} \right)^{\frac{2}{r-1}} = \\ &= \frac{H^{1-\frac{2n-2}{r-1}+\varepsilon}}{N^{(1-\frac{1}{n})(1+\varepsilon)-(n-1-\frac{1}{n})\frac{2}{r-1}}} \left(\frac{H^{n-2}\mathcal{L}}{N^{n-2}} + 1 \right)^{\frac{2}{r-1}}. \end{aligned}$$

Подставляя эту оценку в (64), находим

$$\begin{aligned} J(\mathbf{m}) &\ll \frac{H^{r-1}}{N^{r-\frac{r}{n}}} \cdot \frac{N^{n-\frac{1}{n}-\frac{n-1}{n}\varepsilon}}{H^{n-\varepsilon}} \cdot \frac{H^{1-\frac{2n-2}{r-1}+\varepsilon}}{N^{(1-\frac{1}{n})(1+\varepsilon)-(n-1-\frac{1}{n})\frac{2}{r-1}}} = \\ &= \frac{H^{r-1}}{N^{r-\frac{r}{n}}} \left(\frac{N^{\frac{\deg(N)}{\deg(H)}}}{H} \right)^{\deg(H)}, \end{aligned} \quad (65)$$

где

$$\begin{aligned} \deg(N) &= \frac{1}{r-1} \left((r+1)(n-1) - (2r-2)\varepsilon - \frac{2}{n} + \frac{2}{n}(r-1)\varepsilon \right), \\ \deg(H) &= \frac{rn-r+n-1}{r-1} - 2\varepsilon = \frac{(r+1)(n-1) - (2r-2)\varepsilon}{r-1}. \end{aligned}$$

Воспользовавшись значениями $\deg(N)$ и $\deg(H)$, а также обозначением $r-1 = 2^n$, имеем

$$\begin{aligned} \frac{\deg(N)}{\deg(H)} &= 1 - \frac{2 - (2r-2)\varepsilon}{(r+1)(n^2-n) - (2r-2)n\varepsilon} = 1 - \theta(n, r) + \eta(n), \\ \eta(n) &= \frac{2}{(r+1)(n^2-n)} - \frac{2 - (2r-2)\varepsilon}{(r+1)(n^2-n) - (2r-2)n\varepsilon} = \\ &= \frac{\left(1 - \frac{2}{(r+1)(n-1)}\right)(2r-2)\varepsilon}{(r+1)(n^2-n) - (2r-2)n\varepsilon} = \frac{\left(1 - \frac{2}{(2^n+2)(n-1)}\right)2^{n+1}\varepsilon}{(n-1 + 2^{1-n}(n-1) - 2\varepsilon)2^n n} \leq \\ &\leq \frac{2\varepsilon}{(n-1)n} \leq \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Из этой оценки и из (65), пользуясь соотношением $H = N^{1-\theta(n,r)+\varepsilon}$, находим

$$\begin{aligned} J(\mathbf{m}) &\ll \frac{H^{r-1}}{N^{r-\frac{r}{n}}} \left(\frac{N^{1-\theta(n,r)+\frac{\varepsilon}{2}}}{H} \right)^{\deg(H)} = \\ &= \frac{H^{r-1}}{N^{r-\frac{r}{n}}} \left(\frac{N^{1-\theta(n,r)+\varepsilon}}{H} \right)^{\deg(H)} N^{-\frac{\deg(H)}{2}\varepsilon} \ll \frac{H^{r-1}}{N^{r-\frac{r}{n}}\mathcal{L}^{r-1}}. \end{aligned}$$

Подставляя найденные оценки для $J(\mathfrak{M}_1)$, $J(\mathfrak{M}_2)$ и $J(\mathbf{m})$ соответственно из (58), (62), (63) и (65) в (40) получим утверждение теоремы 1.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Wright E. M. Proportionality conditions in Waring's problem // *Mathematische Zeitschrift*. 1934. V. 38. P. 730 – 746.
2. Wright E. M. An extension of Waring's problem // *Philos. Trans. R. Soc. Lond.* 1933. Ser. A 232. P. 1 – 26.
3. Dirk Daemen. The asymptotic formula for localized solutions in Waring's problem and approximations to Weyl sums // *Bull. London Math. Soc.*, 2010. V. 42. P. 75 – 82.
4. Dirk Daemen. Localized solutions in Waring's problem: the lower bound // *Acta Arithmetica*. 2010. V. 142. № 2. P. 129 – 143.
5. Dirk Daemen. On sums of 13 'almost equal' cubes // *Quart. J. Math.* 2010. V. 61, P. 29 – 32.
6. Рахмонов З. Х. Кубическая задача Эстермана с почти равными слагаемыми // *Математические заметки*. 2014. Т. 95. вып. 3. С. 445 – 456.
7. Рахмонов З. Х., Назрублов Н. Н., Рахимов А. О. Короткие суммы Г.Вейля и их приложения // *Чебышевский сборник*. 2015. Т. 16. В. 1(53). С. 232 – 247.
8. Рахмонов З. Х., Азамов А. З., Назрублов Н. Н. Короткие тригонометрические суммы Г. Вейля в малых дугах // *Доклады Академии наук Республики Таджикистан*. 2018 г. Т. 61. № 7-8. С. 609–614.
9. Рахмонов З. Х., Мирзоабдугафуров К. И. Проблема Варинга для кубов с почти равными слагаемыми // *Доклады Академии наук Республики Таджикистан*, 2008. Т. 51. № 2. С. 83 – 86.
10. Рахмонов З. Х., Азамов А. З. Асимптотическая формула в проблеме Варинга для четвертых степеней с почти равными слагаемыми // *Доклады Академии наук Республики Таджикистан*. 2011. Т. 54. № 3. С. 34 – 42.
11. Рахмонов З. Х., Назрублов Н. Н. Проблема Варинга для пятых степеней с почти равными слагаемыми // *Доклады Академии наук Республики Таджикистан*. 2014. Т. 57. № 11 – 12. С. 823 – 830.
12. Рахмонов З. Х. Тернарная задача Эстермана с почти равными слагаемыми // *Математические заметки*. 2003. Т. 74. вып. 4. С. 564 – 572.
13. Рахмонов Ф. З., Рахимов А. О. Об одной аддитивной задаче с почти равными слагаемыми // *Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам*. Издательство: Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского. ISSN: 1810-4134. 2016. № 8. С. 87 – 89.
14. Рахмонов З. Х. Обобщение проблемы Варинга для девяти почти пропорциональных кубов // *Чебышевский сборник*. 2023. Т. 24. № 3. С. 71-94
15. Vaughan R. C. Some remarks on Weyl sums // *Topics in Classical Number Theory, Colloquia. Math. Soc. Janos Bolyai*, 34. 1981. P. 1585 – 1602.
16. Карацуба А. А., Королёв М. А. Теорема о замене тригонометрической суммы более короткой // *Известия РАН. Серия математическая*. 2007. Т. 71. № 2. С. 123 – 150.
17. Вон Р. Метод Харди–Литтлвуда — Москва: Мир, 1985.

18. Хуа Ло-Ген Метод тригонометрических сумм и её применения в теории чисел — Москва: Мир, 1964.
19. Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н. Теория кратных тригонометрических сумм — Москва: Наука. 1987 г.
20. Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа. ч. 1. Основные операции анализа — Изд. 2-е. Перев. с англ. Москва: Физматгиз, 1963 г. -342 с.

REFERENCES

1. Wright E. M., 1934, "Proportionality conditions in Waring's problem", *Mathematische Zeitschrift*, vol. 38, pp. 730-746.
2. Wright E. M., 1933, "An extension of Waring's problem", *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A*, vol. 232. pp. 1-26.
3. Dirk Daemen, 2010., "The asymptotic formula for localized solutions in Waring's problem and approximations to Weyl sums", *Bull. London Math. Soc.*, vol. 42, pp. 75-82.
4. Dirk Daemen, 2010, "Localized solutions in Waring's problem: the lower bound", *Acta Arithmetica*, vol. 142, pp. 129-143.
5. Dirk Daemen, 2010, "On sums of 13 'almost equal' cubes", *Quart. J. Math.*, vol. 61, pp. 29-32. doi:10.1093/qmath/han024
6. Rakhmonov, Z. Kh., 2014, "The Estermann cubic problem with almost equal summands", *Mathematical Notes*, vol. 95, Is. 3-4, pp. 407-417. doi.org/10.1134/S0001434614030122.
7. Rakhmonov Z. Kh., & Nazrubloev N. N., Rakhimov A.O., 2015, "Short Weyl sums and their applications", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 16, Is. 1, pp. 232-247, (in Russian).
8. Rakhmonov Z. Kh., & Azamov A.Z., Nazrubloev N. N., 2018, "Of short Weyl's exponential sum in minor arcs", *Doklady Akademii nauk Respubliki Tajikistan*, vol. 61, no 7-8, pp. 609-614, (in Russian).
9. Rakhmonov Z. Kh., & Mirzoabdugafurov K. I., 2008, "Waring's problem for cubes with almost equal summands", *Doklady Akademii nauk Respubliki Tajikistan*, vol. 51, no 2, pp. 83-86, (in Russian).
10. Rakhmonov Z. Kh., & Azamov A.Z., 2011, "An asymptotic formula in Waring's problem for fourth powers with almost equal summands", *Doklady Akademii nauk Respubliki Tajikistan*, vol. 54, no 3, pp. 34-42, (in Russian).
11. Rakhmonov Z. Kh., & Nazrubloev N. N., 2014, "Waring's problem for fifth powers with almost equal summands", *Doklady Akademii nauk Respubliki Tajikistan*, vol. 57, no 11-12, pp. 823-830, (in Russian).
12. Rakhmonov Z. Kh., 2003, "Estermann's ternary problem with almost equal summands", *Mathematical Notes*, vol. 74, Is. 4, pp. 534-542. doi.org/10.1023/A:1026199928464.
13. Rakhmonov F. Z., & Rakhimov A. O., 2015, "On an additive problem with almost equal summands", *Issledovaniya po algebre, teorii chisel, funktsional'nomu analizu i smezhnym voprosam. Izdatel'stvo: Saratovskiy natsional'nyy issledovatel'skiy gosudarstvennyy universitet im. N.G. Chernyshevskogo*, ISSN: 1810-4134, no 8, pp. 87-89, (in Russian).

14. Rakhmonov Z. Kh., 2023, “Generalization of Waring’s problem for nine almost proportional cubes”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 24, Is. 3, pp. 71–94, (in Russian).
15. Vaughan R. C., 1981, “Some remarks on Weyl sums”, *Topics in Classical Number Theory, Colloquia. Math. Soc. Janos Bolyai*, 34. 1981. P. 1585 – 1602.
16. Karatsuba A. A. & Korolev M. A. 2007. “A theorem on the approximation of a trigonometric sum by a shorter one”, *Izvestiya: Mathematics*, 71(2), pp. 341 – 370.
17. Vaughan R. C., 1981. “The Hardy-Littlewood method”, *Cambridge Tracts in Mathematics*, vol. 80, Cambridge University Press, Cambridge, 172 p.
18. Hua Loo-Keng, 1964. “Method of Trigonometric Sums and Its Applications in Number Theory”, *Nauka, Moscow, 190 p. (Russian translation)*; *Abschätzungen von Exponentialsummen und ihre Anwendung in der Zahlentheorie. 2. völlig neu bearb. Auf*, Enzyklopädie Math. Wiss. Band. I, 2. Teil, Heft 13, Art. 29. Leipzig: B. G. Teubner Verlag. 123 S. (1959).
19. Arkhipov G. I. & Chubarikov V. N. & Karatsuba A. A. 2004. “Trigonometric sums in number theory and analysis”, *Berlin–New-York: Walter de Gruyter*, 554 p.
20. Whittaker G. E., & Watson T. N., 1915. “A Course of Modern Analysis. Part 1.”, *The processes of analysis. Part 2. The transcendental functions*, Cambridge, Cambridge University Press, 620.

Получено: 21.01.2024

Принято в печать: 28.06.2024

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 25. Выпуск 2.

УДК 517.946

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-2-169-180

**Теория рассеяния для нагруженного уравнения
Кортевега—де Фриза отрицательного порядка**

Г. У. Уразбоев, И. И. Балтаева, О. Б. Исмоилов

Уразбоев Гайрат Уразалиевич — доктор физико-математических наук, Ургенчский государственный университет; Институт математики им. В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан (Хорезмский филиал) (г. Ургенч, Узбекистан).

email: gayrat71@mail.ru

Балтаева Ирода Исмаиловна — кандидат физико-математических наук, Ургенчский государственный университет (г. Ургенч, Узбекистан).

email: iroda-b@mail.ru

Исмоилов Охунджон Бахром оглы — Институт математики им. В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан (Хорезмский филиал) (г. Ургенч, Узбекистан).

*e-mail: bakhromboyevich.oxunjon@gmail.com***Аннотация**

В данной работе мы рассматриваем нагруженное уравнение Кортевега—де Фриза отрицательного порядка. Определена эволюция спектральных данных оператора Штурма—Лиувилля с потенциалом, связанным с решением нагруженного уравнения Кортевега—де Фриза отрицательного порядка. Полученные результаты позволяют применить метод обратной задачи для решения нагруженного уравнения Кортевега—де Фриза отрицательного порядка в классе быстро убывающих функций. Приведен пример иллюстрирующий полученные результаты с графиками.

Ключевые слова: Оператор Штурма—Лиувилля, нагруженное уравнение, нагруженное уравнение Кортевега—де Фриза отрицательного порядка, солитонное решение, обратные задачи рассеяния.

Библиография: 23 названий.

Для цитирования:

Г. У. Уразбоев, И. И. Балтаева, О. Б. Исмоилов. Теория рассеяния для нагруженного уравнения Кортевега—де Фриза отрицательного порядка // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 2, с. 169–180.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 25. No. 2.

UDC 517.946

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-2-169-180

Scattering theory for the loaded negative order Korteweg–de Vries equation

G. U. Urazboev, I. I. Baltaeva, O. B. Ismoilov

Urazboev Gayrat Urazaliyevich — doctor of physical and mathematical sciences, Urgench State University; V. I. Romanovsky Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan (Khorezm Branch) (Urgench, Uzbekistan).

email: gayrat71@mail.ru

Baltaeva Iroda Ismailovna — candidate of physical and mathematical sciences, Urgench State University (Urgench, Uzbekistan).

email: iroda-b@mail.ru

Ismailov Oxunjon Bakhrom ugli — V. I. Romanovsky Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan (Khorezm Branch) (Urgench, Uzbekistan).

e-mail: bakhromboyevich.oxunjon@gmail.com

Abstract

In this paper, we consider the loaded negative order Korteweg–de Vries equation. The evolution of the spectral data of the Sturm–Liouville operator with a potential associated with the solution of the loaded negative order Korteweg–de Vries equation is determined. The obtained results make it possible to apply the inverse problem method to solve the loaded negative order Korteweg–de Vries equation in the class of rapidly decreasing functions. An example of the given problem is given with graphs of the solution.

Keywords: Sturm–Liouville operator, loaded equation, loaded negative order Korteweg–de Vries equation, soliton solution, inverse scattering problems.

Bibliography: 23 titles.

For citation:

Urazboev, G. U., Baltaeva, I. I., Ismoilov, O. B. 2024, “Scattering theory for the loaded negative order Korteweg–de Vries equation”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 2, pp. 169–180.

1. Introduction

In 1967 American scientists Gardner, Green, Kruskal, and Miura [1] proposed the inverse scattering problem method for the Sturm–Liouville equation as a method for solving the Cauchy problem for the Korteweg–de Vries (KdV) equation.

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0.$$

Shortly thereafter in 1968, Lax [2] generalized their ideas substantially. Namely, he gave the compatibility condition for linear problems a convenient operator form, presenting the compatibility condition in the form of a commutativity condition for linear differential operators and auxiliary linear problems:

$$L_t = [L, A]$$

where $[L, A] = LA - AL$ commutator of operators L and A , L - Sturm-Liouville operator

$$Ly \equiv -y'' + u(x, t)y,$$

a A - some skew-symmetric operators act in a Hilbert space. This method is called the method of the inverse scattering transform (IST) since it essentially uses the solution of the problem of reconstructing the potential of the Sturm-Liouville operator on the entire axis from scattering data (the inverse problem of scattering theory). The use of the Lax abstract form of the compatibility conditions turned out to be very useful and convenient for many questions related to nonlinear equations integrable by the inverse problem method. Thus, the universality of the method of the inverse scattering problem was shown by considering other operators instead of the operator for which the solution of the inverse scattering problem is known. Soliton equations with self-consistent sources have an important part of physical applications, for example, the KdV equation with a self-consistent source describes the interaction of long and short capillary-gravity waves [3, 4, 5, 6, 7, 8].

Most of the studies about the study of integrable equations with a self-consistent source are related to nonlinear evolution equations of positive order. The works [9, 10] are devoted to the study of the KdV equation of negative order. In particular, J. M. Verosky [9], when studying symmetries and negative powers of a recursive operator, obtained the following KdV equation of negative order:

$$\begin{cases} u_t = v_x, \\ v_{xxx} + 4uv_x + 2u_xv = 0. \end{cases}$$

S. Y. Lou [10] presented additional symmetries based on the invertible recursive operator of the KdV system, and, in particular, derived the KdV equation of negative order in the following form:

$$u_t = 2vv_x, \quad v_{xx} + uv = 0, \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\frac{v_{xx}}{v} \right)_t + 2vv_x = 0.$$

The study of integrable hierarchies of negative order plays an important role in the theory of pointed solitons. The works [11, 12, 13] studied the hierarchy, the Hamiltonian structure, an infinite set of conservation laws, N -soliton, and quasi-periodic wave solutions for the negative-order KdV equation. The problem of soliton solutions for the negative order KdV equation in the class of rapidly decreasing functions was considered in [14].

In connection with intensive research on problems of optimal control of the agro-economical system, long-term forecasting, and regulating the level of ground waters and soil moisture, it has become necessary to investigate a new class of equations called "loaded equations". Knezer [15] and Lichtenstein [16] investigated such equations for the first time. Then the term "loaded equation" was used and introduced Nakhushev in [17], where the most general definition of a loaded equation is given, various loaded equations are classified in detail, and numerous applications are described in [18, 19].

Recently works [20, 21, 22, 23] studied integration of the loaded nonlinear equations where has many applications in arterial mechanics via the (G'/G) - expansion method and Inverse scattering problem method.

This paper aims to study the integration of the loaded negative order Korteweg-de Vries equation in the "rapidly decreasing" class via the inverse scattering problem.

2. Statement of problem

We consider the following loaded negative order Korteweg-de Vries equation

$$\begin{cases} u_t = 2vv_x + \gamma(t)u(0, t)u_x, \\ v_{xx} = uv, \end{cases} \quad (1)$$

where $\gamma(t)$ is a given continuous function. Under initial conditions

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in R, \quad (2)$$

The initial function $u_0(x)$ has the following properties:

1. $\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|) |u_0(x)| dx < \infty$.
2. The operator $L(0)y \equiv -y'' + u_0(x)y = \lambda y, x \in R^1$ has exactly N number of negative eigenvalues $\lambda_1(0), \lambda_2(0), \dots, \lambda_N(0)$.

Let's assume that, the functions $u(x, t)$ is sufficiently smooth, and $u(x, t), v(x, t)$ tends to its limits rapidly enough when $x \rightarrow \pm\infty$ and satisfying following conditions:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left((1 + |x|) |u| + \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| \right) dx < \infty, \\ v^2(x, t) \rightarrow 1, \quad v_x(x, t) \rightarrow 0, \quad v_{xx}(x, t) \rightarrow 0, \quad \text{in } |x| \rightarrow \infty. \quad (3)$$

3. Scattering problem

In this section, the dependence of the function $u(x, t)$ on t will be omitted. Consider the Sturm-Liouville equations on the axis

$$Lg \equiv -g'' + u(x)g = k^2 g, \quad -\infty < x < \infty, \quad (4)$$

with potential function $u(x)$ satisfying the condition of "rapidly decreasing"

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|) |u(x)| dx < \infty. \quad (5)$$

This section contains information on the direct and inverse scattering problems for problem (4)-(5) which is necessary for our further exposition. Condition (5) provides that equation (4) possesses the Jost solutions $f(x, k)$ and $g(x, k)$ with the following asymptotic formulas

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x, k) e^{ikx} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x, k) e^{-ikx} = 1, \quad \text{Im} k = 0. \quad (6)$$

When k are real, the pairs $\{f(x, k), f(x, -k)\}$ and $\{g(x, k), g(x, -k)\}$ are of pairs of linearly independent solutions for equation (4).

Therefore,

$$g(x, k) = -b(-k)f(x, k) + a(k)f(x, -k). \quad (7)$$

The Jost solutions $f(x, k)$ and $g(x, k)$ admits an analytic continuation into the upper half-plane $\text{Im} k > 0$ via variable k .

The coefficients $a(k)$ and $b(k)$ have following properties:

$$a(k) = -\frac{1}{2ik} W \{f, g\}, \quad (8)$$

where $W \{f, g\} = fg' - f'g$, and for real k

$$|a(k)|^2 = 1 + |b(k)|^2. \quad (9)$$

The function $a(k)$ admits an analytic continuation into the upper half-plane $\text{Im} k > 0$ and has a finite number of simple zeroes $k_n = i\chi_n$, $n = 1, 2, \dots, N$, meanwhile, $\lambda_n = -\chi_n^2$ is an eigenvalue of L_0 .

For $Imz > 0$ the function $a(z)$ recovers from its zero $i\chi_n$, $n = 1, 2, \dots, N$ and $r^+(k) = \frac{b(-k)}{a(k)}$ —given function in $Imk = 0$,

$$a(z) = \prod_{j=1}^N \frac{z - i\chi_j}{z + i\chi_j} \exp \left\{ -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(1 - |r^+(k)|^2)}{k - z} dk \right\}.$$

From (7), (8) and properties the function's $a(k)$

$$g(x, i\chi_j) = B_j f(x, i\chi_j), \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (10)$$

Solutions $f(x, k), g(x, k)$ have the following representations

$$\begin{aligned} f(x, k) &= e^{ikx} + \int_x^{\infty} A^+(x, k) e^{ikz} dz, \\ g(x, k) &= e^{-ikx} + \int_{-\infty}^x A^-(x, k) e^{-ikz} dz, \end{aligned} \quad (11)$$

where the kernels $A^+(x, z), A^-(x, z)$ are real functions and connected with the potential function $u(x)$ by the equalities

$$u(x) = -2 \frac{d}{dx} A^+(x, x), \quad u(x) = 2 \frac{d}{dx} A^-(x, x). \quad (12)$$

The kernel $A^+(x, y)$ in representation (11) is a solution of the Gelfand-Levitan-Marchenko integral equation

$$\Omega^+(x + y) + A^+(x, y) + \int_x^{\infty} A^+(x, z) \Omega^+(z + y) dz = 0, \quad (y > x), \quad (13)$$

where

$$\Omega^+(x) = - \sum_{j=1}^N \frac{iB_j}{\frac{da(z)}{dz}|_{z=i\chi_j}} \exp(-\chi_j x) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} r^+(k) e^{ikx} dx,$$

a $a(z)$ —analytic continuation of the function $a(k)$, ($Imk = 0$) into the upper half plane.

Then, the potential function $u(x)$ is determined from the equality (12).

The set $\{r^+(k), B_1, B_2, \dots, B_N, \chi_1, \chi_2, \dots, \chi_N\}$ is called scattering data for the problem (4)-(5). The direct problem consists of determining scattering data by the potential function $u(x)$, and the inverse problem consists in recovering the potential function $u(x)$ of the equation (4) by the scattering data.

It's easy to check that, the functions

$$h_n(x) = \frac{\frac{d}{dk} (g(x, k) - B_n f(x, k))|_{k=i\chi_n}}{\dot{a}(i\chi_n)} \quad (14)$$

are solutions of the equations $L_0 y = -\chi_n^2 y$. By equality (14), we obtain the following asymptotic expressions

$$h_n \sim e^{\chi_n x} \quad \text{in } x \rightarrow \infty, \quad (15)$$

$$h_n \sim -B_n e^{-\chi_n x} \quad \text{in } x \rightarrow -\infty. \quad (16)$$

Using (15) and (16) we obtained

$$W \{h_n(x), f(x, i\chi_n)\} = -2\chi_n,$$

$$W \{h_n(x), g(x, i\chi_n)\} = -2B_n \chi_n, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (17)$$

4. Evolution of scattering data

In this section, we will consider the system of equations:

$$u_t = 2vv_x + G, \quad v_{xx} = uv, \quad (18)$$

where $G(x, t)$ — sufficiently smooth function for any non-negative t satisfying the conditions

$$G(x, t) = o(1) \text{ in } x \rightarrow \pm\infty.$$

Equation (18) is considered with initial condition (2). Similar to the work [7] we can bring the following main lemma:

LEMMA 6. *If the potential of the operator $L(t) = -\frac{d^2}{dx^2} + u(x, t)$ are solutions of problem (18)-(2) in the class of functions satisfying conditions (3), then the scattering data of the operator $L(t)$ changes over t as follows:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial r^+}{\partial t} &= -\frac{i}{k}r^+ - \frac{1}{2ika^2(k)} \int_{-\infty}^{\infty} Gg^2 dx, \quad \text{Im}k = 0, \\ \frac{dB_n}{dt} &= -\frac{B_n}{\chi_n} - \frac{1}{2\chi_n} \int_{-\infty}^{\infty} Gg(x, i\chi_n, t)h_n(x, t)dx, \\ \frac{d\chi_n}{dt} &= -\frac{1}{2\chi_n} \int_{-\infty}^{\infty} G\Phi_n^2(x, t)dx. \quad n = 1, 2, 3, \dots, N. \end{aligned}$$

where $\Phi_n(x, t)$ is the normalized eigenfunction of the operator $L(t)$ corresponding to the eigenvalue $\lambda_n = -\chi_n^2(t)$.

We apply the result of Lemma 1 for

$$G(x, t) \equiv \gamma(t)u(0, t)u_x. \quad (19)$$

Let's find the evolution of the eigenvalues of the operator $L(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial r^+}{\partial t} &= -\frac{i}{k}r^+ - \frac{\gamma(t)u(0, t)}{2ika^2} \int_{-\infty}^{\infty} u_x g^2 dx, \\ \int_{-\infty}^{\infty} u_x g^2 dx &= u g^2 \Big|_{-\infty}^{\infty} - 2 \int_{-\infty}^{\infty} u g g' dx = -2 \int_{-\infty}^{\infty} (k^2 g + g'') g' dx = \\ &= - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R [k^2 (g^2)' + ((g')^2)'] dx = 4k^2 a(k) b(-k). \end{aligned}$$

Consequently, for $\text{Im}k = 0$ we get

$$\frac{\partial r^+}{\partial t} = \left(-\frac{i}{k} + 2ik\gamma(t)u(0, t) \right) r^+. \quad (20)$$

Let us apply Lemma 1 for

$$\frac{d\chi_n}{dt} = -\frac{\gamma(t)u(0, t)}{2\chi_n} \int_{-\infty}^{\infty} u_x \phi_n^2 dx,$$

according to the following calculation

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} u_x \phi_n^2 dx &= -2 \int_{-\infty}^{\infty} u \phi_n \phi_n' dx = -2 \int_{-\infty}^{\infty} (\chi_n^2 \phi_n + \phi_n'') \phi_n' dx = \\ &= -2 \int_{-\infty}^{\infty} (-\chi_n^2 (\phi_n^2)' + (\phi_n'^2)') dx = 0. \end{aligned}$$

Hence,

$$\frac{d\chi_n}{dt} = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots, N. \quad (21)$$

According to the representation (11) and by virtue of asymptotic formulas (16), (17) we have:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} u_x g_n h_n dx &= - \int_{-\infty}^{\infty} u (g_n' h_n + g_n h_n') dx = - \int_{-\infty}^{\infty} (g' (h_n'' + \lambda_n h_n) + \\ &+ h_n' (g_n'' + \lambda_n g_n)) dx = - \int_{-\infty}^{\infty} ((g' h_n')' + \lambda_n (g_n h_n)') dx = 4\chi_n^2 B_n. \end{aligned}$$

With a glance at this calculation, we get

$$\frac{dB_n}{dt} = - \left(\frac{1}{\chi_n} + 2\chi_n \gamma(t) u(0, t) \right) B_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots, N. \quad (22)$$

By using the obtained equalities (20), (21), and (22), we have to infer the following theorem.

THEOREM 1. *If the functions $u(x, t), v(x, t)$ are a solution to the problem (1)-(3), then the scattering data of the operator $L(t) \equiv -\frac{d^2}{dx^2} + u(x, t)$ change in t as follows*

$$\frac{\partial r^+}{\partial t} = \left(-\frac{i}{k} + 2ik\gamma(t)u(0, t) \right) r^+, \quad \text{Im} k = 0,$$

$$\frac{dB_n}{dt} = - \left(\frac{1}{\chi_n} + 2\chi_n \gamma(t) u(0, t) \right) B_n,$$

$$\frac{d\chi_n}{dt} = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

We note that for the nKdV equation, this result was obtained in [14]. The resulting equality completely determines the evolution of the scattering data, which makes it possible to apply the inverse problem method for solving problems (1)-(3).

4.1. Example

We will solve the following Cauchy's problem:

$$u_t = 2vv_x + \gamma(t)u(0, t)u_x, \quad v_{xx} = uv,$$

$$u|_{t=0} = -\frac{2}{\cosh^2 x},$$

where

$$\gamma(t) = \frac{1}{4} \sqrt{1+t^2} (\sqrt{1+t^2} - 2).$$

For finding the general solution to this problem we use the inverse scattering problem method. First of all, we find a solution of the Direct Problem for the following equation:

$$-y'' - \frac{2}{\cosh^2 x} y = k^2 y, -\infty < x < \infty,$$

We find the Jost solutions

$$f(x, k) = \frac{ik - thx}{ik - 1} e^{ikx},$$

$$g(x, k) = \frac{ik + thx}{ik - 1} e^{-ikx}.$$

According to equalities (8) and (9)

$$a(k) = -\frac{1}{2ik} W \{f(x, k)g(x, k)\} = \frac{k - i}{k + i}, \quad b(k) = 0.$$

Since the function $a(k)$ has only one zero $k = i$ to $\chi_1 = 1$, $N = 1$. In addition,

$$f(x, i) = \frac{1 + thx}{2} e^{-x}, \quad g(x, i) = \frac{1 - thx}{2} e^x.$$

Thus

$$B_1 = \frac{g(x, i)}{f(x, i)} = 1.$$

As a result, we obtain the following Scattering Data

$$N = 1, \quad a(k) = \frac{k - i}{k + i}, \quad r^+(k, 0) = 0, \quad B_1(0) = 1, \quad \chi_1(0) = 1.$$

Using Theorem 1 we find the evolution of Scattering Data depending on t :

$$r^+(k, t) = 0, \quad B_1(t) = \exp^{2\delta(t)}, \quad \chi_1(t) = 1,$$

here

$$\delta(t) = -\frac{t}{2} - \int_0^t \gamma(t) u(0, t) dt.$$

We find a solution to the Inverse scattering problem using this Scattering Data. The solution of considering equation is defined by the following formulae:

$$A^+(x, y; t) = -\frac{2 \exp^{-x-y+2\delta(t)}}{1 + \exp^{-2x+2\delta(t)}},$$

As a result, from (12) the general solution $u(x, t)$ and $v(x, t)$ of the considering problem are expressed as follows:

$$u(x, t) = -\frac{2}{\cosh^2(x + t - \operatorname{arcsinh}(t))}, \quad v(x, t) = \tanh(x + t - \operatorname{arcsinh}(t)).$$

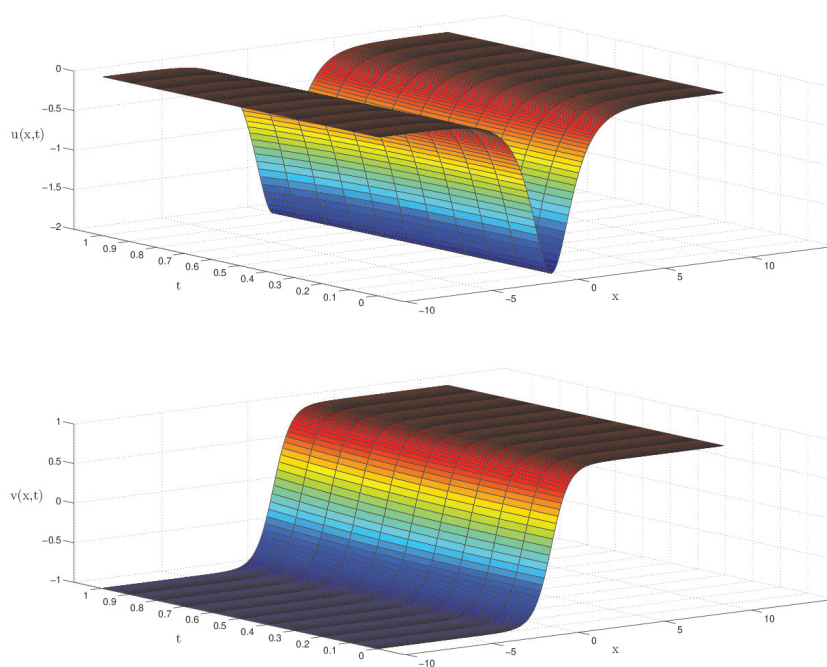


Рис. 1: Soliton solution of the loaded negative order KdV equation

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gardner C. S., Greene J. M., Kruskal M. D., Miura R. M. Method for Solving Korteweg-Devries Equation // Phys. Rev. Lett. 1967. Vol. 19. P. 1095–1097.
2. Lax P. D. Integrals of Nonlinear Equations of Evolution and Solitary Waves // Communications on Pure and Applied Mathematics. 1968. Vol. 21. P. 467–490.
3. Leon J., Latifi A. Solution of an initial-boundary value problem for coupled nonlinear waves // J. Phys. A. 1990. Vol. 23. P. 1385–1403.
4. Mel'nikov V. K. Exact solutions of the Korteweg-de Vries equation with a self-consistent source // Phys. Lett. 1988. Vol. 128. P. 488–492.
5. Mel'nikov V. K. Integration of the Korteweg-de Vries equation with a source // Inverse Problem. 1990. Vol. 6. P. 233–246.
6. Khasanov A. B., Khasanov T. G. Integration of a Nonlinear Korteweg-de Vries Equation with a Loaded Term and a Source // J. Appl. Ind. Math. 2022. Vol. 16. P. 227–239.
7. Khasanov A. B., Urazboev G. U. Integration of the sine-Gordon equation with a self-consistent source of the integral type in the case of multiple eigenvalues // Russ Math. 2009. Vol. 53. P. 45–55.
8. Urazboev G. U., Hasanov M. M. Integration of the negative order Korteweg-de Vries equation with a self-consistent source in the class of periodic functions // Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki. 2022. Vol. 32. P. 228–239.
9. Verosky J. M. Negative powers of Olver recursion operators // J. Math. Phys. 1991. Vol. 32. P. 1733–1736.

10. Lou S. Y. Symmetries of the KdV equation and four hierarchies of the integrodifferential KdV equation // J. Math. Phys. 1994. Vol. 35. P. 2390–2396.
11. Qiao Z., Li J. Negative-order KdV equation with both solitons and kink wave solutions // Europhys. Lett. 2011. Vol. 94. P. 50003.
12. Zhijun Q., Engui F. Negative-order Korteweg–de Vries equations // Phys. Rev. E. 2012. Vol. 86. P. 016601.
13. Rodriguez M., Li J., Qiao Z. Negative Order KdV Equation with No Solitary Traveling Waves // Mathematics. 2022. Vol. 10. P. 48–58.
14. Urazboev G. U., Baltaeva I. I., Ismoilov O. B. Integration of the negative order Korteweg–de Vries equation by the inverse scattering method // Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki. 2023. Vol. 33. P. 523–533.
15. Kneser A. Belastete Integralgleichungen // Rendiconti del Circolo Mathematiko di Palermo. 1914. Vol. 38. P. 169–197.
16. Lichtenstein L. Vorlesungen uber einege Klassen nichtlinear Integral gleichungen und Integral differential gleichungen nebst // Anwendungen. Berlin: Springer. 1931.
17. Nakhushev A. M. The Darboux problem for a certain degenerate second order loaded integrodifferential equation // Differential Equations. 1976. Vol. 12. P. 103–108.
18. Kozhanov A. I. Nonlinear loaded equations and inverse problems // Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. 2004. Vol. 44. P. 1095–1097.
19. Baltaeva U., Baltaeva I., Agarwal P. Cauchy problem for a high-order loaded integro-differential equation // Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2022. Vol. 45. P. 8115–8124.
20. Urazboev G. U., Baltaeva I. I. Integration of Camassa-Holm equation with a self-consistent source of integral type // Ufa Mathematical Journal. 2022. Vol. 14, pp. 77–86.
21. Yakhshimuratov A. B., Matyokubov M. M. Integration of a Loaded Korteweg-de Vries Equation in a Class of Periodic Functions // Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Matematika. 2016. Vol. 69. P. 87–92
22. Urazboev G. U., Baltaeva I. I., Rakhimov I. D. The Generalized (G'/G)-Expansion Method for the Loaded Korteweg–de Vries Equation // Journal of Applied and Industrial Mathematics. 2021. Vol. 15. P. 679–685
23. Feckan M., Urazboev G., Baltaeva I. Inverse scattering and loaded Modified Korteweg-de Vries equation // Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics. 2022. Vol. 15. P. 176–185.

REFERENCES

1. Gardner, C. S., Greene, J. M., Kruskal, M. D. & Miura, R. M., 1967. “Method for Solving Korteweg-Devries Equation”, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 19, pp. 1095–1097.
2. Lax, P. D., 1968. “Integrals of Nonlinear Equations of Evolution and Solitary Waves”, *Communications on Pure and Applied Mathematics.*, vol. 21, pp. 467–490.

3. Leon, J. & Latifi, A., 1990. "Solution of an initial-boundary value problem for coupled nonlinear waves", *J. Phys. A.*, vol. 23, pp. 1385–1403.
4. Mel'nikov, V. K., 1988. "Exact solutions of the Korteweg-de Vries equation with a self-consistent source", *Phys. Lett.*, vol. 128, pp. 488–492.
5. Mel'nikov, V. K., 1990. "Integration of the Korteweg-de Vries equation with a source", *Inverse Problem.*, vol. 6, pp. 233–246.
6. Khasanov, A. B. & Khasanov, T. G., 2022. "Integration of a Nonlinear Korteweg–de Vries Equation with a Loaded Term and a Source", *J. Appl. Ind. Math.*, vol. 16, pp. 227–239.
7. Khasanov, A. B. & Urazboev, G. U., 2009. "Integration of the sine-Gordon equation with a self-consistent source of the integral type in the case of multiple eigenvalues", *Russ Math.*, vol. 53, pp. 45–55.
8. Urazboev, G. U. & Hasanov, M. M., 2022. "Integration of the negative order Korteweg-de Vries equation with a self-consistent source in the class of periodic functions", *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki.*, vol. 32, pp. 228–239.
9. Verosky, J. M., 1991. "Negative powers of Olver recursion operators", *J. Math. Phys.*, vol. 32, pp. 1733–1736.
10. Lou, S. Y., 1994. "Symmetries of the KdV equation and four hierarchies of the integrodifferential KdV equation", *J. Math. Phys.*, vol. 35, pp. 2390–2396.
11. Qiao, Z. & Li, J., 2011. "Negative-order KdV equation with both solitons and kink wave solutions", *Europhys. Lett.*, vol. 94, pp. 50003.
12. Zhijun, Q. & Engui, F., 2012. "Negative-order Korteweg–de Vries equations", *Phys. Rev. E.*, vol. 86, pp. 016601.
13. Rodriguez, M., Li, J. & Qiao, Z., 2022. "Negative Order KdV Equation with No Solitary Traveling Waves", *Mathematics.*, vol. 10, pp. 48–58.
14. Urazboev, G. U., Baltaeva, I. I. & Ismoilov, O. B., 2023. "Integration of the negative order Korteweg–de Vries equation by the inverse scattering method", *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki.*, vol. 33, pp. 523–533.
15. Kneser, A., 1914. "Belastete Integralgleichungen", *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo.*, vol. 38, pp. 169–197.
16. Lichtenstein, L., 1931. "Vorlesungen uber einige Klassen nichtlinear Integral gleichungen und Integral differential gleichungen nebst", *Anwendungen. Berlin: Springer.*
17. Nakhushev, A. M., 1976. "The Darboux problem for a certain degenerate second order loaded integrodifferential equation", *Differential Equations.*, vol. 12, pp. 103–108.
18. Kozhanov, A. I., 2004. "Nonlinear loaded equations and inverse problems", *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, vol. 44, pp. 1095–1097.
19. Baltaeva, U., Baltaeva, I. & Agarwal, P., 2022. "Cauchy problem for a high-order loaded integrodifferential equation", *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, vol. 45, pp. 8115–8124.
20. Urazboev, G. U., Baltaeva, I. I., 2022. "Integration of Camassa-Holm equation with a self-consistent source of integral type", *Ufa Mathematical Journal*, vol. 14, pp. 77–86.

21. Yakhshimuratov, A.B. & Matyokubov, M.M., 2016. "Integration of a Loaded Korteweg-de Vries Equation in a Class of Periodic Functions", *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Matematika.*, vol. 69, pp. 87–92
22. Urazboev, G.U., Baltaeva, I.I. & Rakhimov, I.D., 2021. "The Generalized (G'/G) -Expansion Method for the Loaded Korteweg–de Vries Equation", *Journal of Applied and Industrial Mathematics.*, vol. 15, pp. 679–685
23. Feckan, M., Urazboev, G. & Baltaeva, I., 2022. "Inverse scattering and loaded Modified Korteweg-de Vries equation", *Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics.*, vol. 15, pp. 176–185.

Получено: 21.03.2024

Принято в печать: 28.06.2024

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 25. Выпуск 2.

УДК 511

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-2-181-207

Об оценках Хуа Ло-Кэна тригонометрических сумм в полях алгебраических чисел

Х. Аль-Ассад

Хафез Аль-Ассад — Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: 1hbrh0@gmail.com

Аннотация

В настоящей работе дано обобщение метода Хуа Ло-Кэна оценки рациональных тригонометрических сумм с многочленом в экспоненте в алгебраических числовых полях, которые являются расширением поля рациональных чисел. В кольце целых этого алгебраического поля были рассмотрены целые и дробные идеалы. Для полной системы вычетов по любому целому идеалу Хуа Ло-Кен доказал аналог формулы Эйлера – Фурье, которая позволяет с помощью утверждения о кратности корней полиномиального сравнения по простому идеалу (“деревьев Хуа Ло-Кэна”) свести к задаче p -адического подъема решений. Последнее обстоятельство позволяет привести оценку суммы к получению оценок числа решений полиномиальных сравнений по модулю степени простого идеала. Далее, следуя оценкам Чень Джин-Руна в поле рациональных чисел, в работе найдены более точные константы для подобных оценок в алгебраических числовых полях.

Ключевые слова: Оценка Хуа Ло-Кэна, деревья Хуа Ло-Кэна, тригонометрические суммы, поля алгебраических чисел.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:

Х. Аль-Ассад. Об оценках Хуа Ло-Кэна тригонометрических сумм в полях алгебраических чисел // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 2, с. 181–207.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 25. No. 2.

UDC 511

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-2-181-207

On Hua Loo-Keng's Estimates of Exponential Sums in Algebraic Number Fields

H. Al-Assad

Hafez Al-Assad — Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: 1hbrh0@gmail.com

Abstract

This paper provides a generalization of the Hua Loo-Keng estimation method of rational trigonometric sums with a polynomial in exponent in algebraic number fields, which are extensions of the field of rational numbers. In the ring of integers of this algebraic number field we consider integer and fractional ideals. For a complete system of residues for any integer ideal, Hua Loo-Keng proved an analogue of the Euler–Fourier formula, which, using results regarding the multiplicity of roots of a polynomial congruence modulo a prime ideal (“Hua Loo-Keng trees”), allows the problem to be reduced to the p-adic lifting of solutions, and this allows us to reduce the problem of estimating the sum to estimating the number of solutions of polynomial congruences modulo a power of a prime ideal. Furthermore, building upon Chen Jingrun’s estimates in the field of rational numbers, we obtain improved constants for similar estimates in algebraic numeric fields.

Keywords: Hua Loo-Keng’s Estimate, Hua Loo-Keng Trees, Exponential sums, Algebraic number fields.

Bibliography: 15 titles.

For citation:

H. Al-Assad, 2024, “On Hua Loo-Keng’s estimates of exponential sums in algebraic number fields”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 2, pp. 181–207.

1. Введение

Рациональные тригонометрические суммы многочленов представляют собой суммы вида

$$S(f, q) = \sum_{x \bmod q} e^{2\pi i \frac{f(x)}{q}},$$

где $q \geq 1$ — рациональное целое число, и

$$f(x) = \alpha_m x^m + \dots + \alpha_1 x$$

многочлен с целыми коэффициентами, такой что $(\alpha_m, \dots, \alpha_1, q) = 1$.

Эти суммы уже давно представляют интерес из-за их глубокой связи с модулярной арифметикой в кольце вычетов по модулю q .

В частности, они возникают в методе круга Харди-Литтлвуда-Виноградова для оценки числа решений диофантовых уравнений. В частности, рассматривается разрешимость данного уравнения во-первых в действительных числах, а во-вторых, по модулю любого рационального целого q . Последняя часть обычно бывает более глубокой и трудной, и существенную роль в ней играют рациональные тригонометрические суммы; они эффективно отвечают за разрешимость по модулю q .

В 1940 г. Хуа Ло-Кен [4] нашел оптимальную оценку

$$S(f, q) = O_{m, \epsilon}(q^{1 - \frac{1}{m} + \epsilon}),$$

где $\epsilon > 0$ произвольное. Последующие работы Ченя Чжун-руна [11],[12] и Василия Нечаева [13] убрали ϵ из оценки. В 1984 г. Ци Мингао и Дин Пин [14] получили оценку

$$|S(f, q)| \leq e^{2m} q^{1 - \frac{1}{m}}.$$

В 1949 г. Хуа Ло-Кен [2] обобщил этот результат на случай поля алгебраических чисел степени d , получив оценку

$$S(f, Q) = \sum_{x \bmod Q} e^{2\pi i T(f(x))} = O_{m, \epsilon, d}(N(Q)^{1 - \frac{1}{m} + \epsilon}),$$

где T и N обозначают след и норму соответственно, Q — целый идеал, а идеал $A(f) = (\alpha_m, \dots, \alpha_1)$ удовлетворяет $A(f) = \frac{B\delta^{-1}}{Q}$, где δ — дифферента, а B — целый идеал с $(B, Q) = 1$.

В данной работе мы получим более сильный результат в случае $Q = P^l$, где P — простой идеал, в виде

$$|S(f, P^l)| \leq C_d(m) N(P)^{l(1 - \frac{1}{m})},$$

где $C_d(m)$ — константа, зависящая только от d и m .

Кроме того, мы будем использовать наш усиленный результат, чтобы убрать ϵ и вычислить константу в символе O , когда данное числовое поле имеет число классов равно 1 (т.е. кольцо целых является кольцом главных идеалов), а идеал $A(f)$ удовлетворяет условию $A(f) = \frac{B}{Q}$, для некоторых целых идеалов B и Q , где Q такой, что $(Q, \delta) = 1$.

В частности, для таких идеалов мы получаем

$$|S(f, Q)| \leq e^{\frac{5}{2}d^2(2d+1)} e^{3.442md} N(Q)^{1 - \frac{1}{m}}.$$

В другом направлении Хуа Ло-Кен в [3] (см. также [10]) использовал метод «дерева» для построения решений полиномиальных сравнений по модулю рационального простого числа, что позволило ему решить проблему сходимости особого ряда в проблеме Пруэ-Тэрри-Эскотта. Для этого он рассмотрел элемент x по модулю p^l , где p — рациональное простое число, в виде

$$x = x_1 + x_2 p + \dots + x_s p^s,$$

где $0 \leq x_j < p$ для $1 \leq j \leq s$, и использовал это представление для построения решений полиномиальных сравнений по модулю p^l .

Это позволило ему получить новую оценку вида

$$|S(f, p^l)| \leq m p^{l-h},$$

где h — положительное целое число, зависящее от делимости коэффициентов f на p .

В данной работе мы обобщим этот метод на кольцо целых полей алгебраических чисел и впоследствии получим аналогичную оценку

$$|S(f, P^l)| \leq (m-1) N(P)^{l-h}.$$

Наконец, мы объединим наши оценки, чтобы получить новую оценку в теореме 8.1.

Данная статья расширяет работу В.Н. Чубарикова в [1], опираясь преимущественно на идеи Хуа Ло-Кэна в [2], В.Н. Чубариков, А.А. Карацуба и Г.И. Архипов в [5], и Ван Юань в [6].

2. Определения и терминология

Обозначим через $\mathbb{K}$ поле алгебраических чисел с дифферентой δ и степенью d .

Обозначим R кольцо целых $\mathbb{K}$.

Обозначим функции следа и нормы $\mathbb{K}$ через

$$T(u) = \sum_{j=1}^d \sigma_j(u), \quad N(u) = \prod_{j=1}^d \sigma_j(u).$$

Определением

$$E(u) = e^{2\pi i T(u)}.$$

Для любого многочлена $f(x) = \alpha_m x^m + \dots + \alpha_1 x$ с коэффициентами из $\mathbb{K}$ обозначим $A(f) = (\alpha_m, \dots, \alpha_1)$ дробный идеал, порожденный коэффициентами f .

На протяжении всей работы P всегда будет обозначать простой идеал.

Для любого идеала Q мы определим $V_P(Q)$ как наибольшее рациональное целое такое, что $Q \in P^{V_P(Q)}$ (см., например, [8], с.438), и полагаем

$$e = V_P(\delta),$$

так что $e + 1$ — индекс ветвления P .

Обозначим через q рациональное простое число в $\mathbb{Z}$ такое, что $N(P) = q^c$, для некоторого $c \geq 1$ (см., например, [7], с.276-277).

3. Полиномиальные сравнения по модулю простого идеала

В этом разделе мы приводим результаты о числе решений полиномиальных сравнений по модулю простого идеала, аналогичны подобным результатам в случае сравнений по рациональному простому модулю.

ЛЕММА 1. ([6], с.15). Пусть $A = (\alpha_m, \dots, \alpha_0)$ — целый идеал $\mathbb{K}$, и пусть P — простой идеал такой, что $P \nmid A$.

Тогда число решений сравнения

$$f(x) = \alpha_m x^m + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0 \equiv 0 \pmod{P},$$

учитывая их кратность, не превосходит m .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В этом доказательстве под корнем многочлена понимается корень данного многочлена по модулю P .

Докажем лемму индукцией по m .

Базовый случай $m = 1$ выполняется из-за условия $P \nmid A$ и поскольку P — простой идеал. Предположим, что лемма справедлива для $m - 1$.

Предположим, что f имеет h несравнимые корни $r_1, \dots, r_h$, так что

$$r_{j_1} \not\equiv r_{j_2} \pmod{P}, \forall j_1 \neq j_2.$$

Предположим, что r_j имеет кратность λ_j , и что $\sum_{j=1}^h \lambda_j > m$.

Без ограничения общности будем считать, что корень r_1 имеет минимальную кратность $\lambda_1 \geq 1$. Рассмотрим многочлен

$$f(x) - f(r_1) = \alpha_m (x^m - r_1^m) + \dots + \alpha_1 (x - r_1) = (x - r_1)g(x),$$

где g — многочлен степени $m - 1$ со старшим коэффициентом α_m .

Поскольку для всех $2 \leq j \leq h$ имеем

$$f(r_j) \equiv f(r_1) \equiv 0 \pmod{P}, \quad r_j \not\equiv r_1 \pmod{P},$$

тогда, поскольку P простой идеал, отсюда следует, что

$$g(r_j) \equiv 0 \pmod{P}.$$

Сначала мы покажем, что r_1 является корнем g с кратностью $\lambda_1 - 1$, причем некорень считается имеющим кратность 0.

Действительно, из определения g имеем

$$f^{(k)}(x) = (x - r_1)g^{(k)}(x) + (k - 1)g^{(k-1)}(x).$$

Если $\lambda_1 = 1$, то r_1 не является корнем f' и, следовательно, не является корнем g . В противном случае мы увидим, что для всех $k \leq \lambda_1$, r_1 является корнем $f^{(k)}$ и, следовательно, является корнем $g^{(k-1)}$. Для $k = \lambda_1 + 1$ мы знаем, что r_1 не является корнем $f^{(\lambda_1+1)}$ и поэтому не может быть корнем $g^{(\lambda_1)}$.

Таким образом, мы показали, что r_1 является корнем g кратности $\lambda_1 - 1$. Аналогичное рассуждение показывает, что r_j является корнем g кратности λ_j для $2 \leq j \leq h$.

Отсюда следует, что корни $r_1, \dots, r_h$ группы g имеют общую кратность

$$\left(\sum_{j=1}^h \lambda_j \right) - 1 > m - 1,$$

но поскольку $\deg(g) = m - 1$, то это противоречит предположению индукции. $\square$

В качестве простого, но полезного следствия из предыдущей леммы получаем следующее предложение.

PROPOSITION 1. ([6], с.15). Пусть $A = (\alpha_m, \dots, \alpha_1)$ — дробный идеал такой, что $A\delta = \frac{R}{P^l}$, где R — целый идеал, P — простой идеал такой, что $(R, P) = 1$ и $l \geq 1$ — рациональное целое число. Пусть

$$f(x) = \alpha_m x^m + \dots + \alpha_1 x.$$

Тогда число решений сравнения

$$f(x) \equiv 0 \pmod{P^{-l+1}},$$

учитывая их кратность, не превосходит m .

ЛЕММА 2. ([6], с.15). Пусть P — простой идеал, а f — многочлен с целыми коэффициентами. Пусть a — корень кратности λ сравнения $f(x) \equiv 0 \pmod{P}$.

Пусть $\pi \in R$ — целое, которое делится на P , но не делится на P^2 , и пусть v — наибольшее рациональное целое число такое, что

$$P^u | f(\pi x + a) - f(a).$$

Пусть

$$g(x) = \pi^{-u} (f(\pi x + a) - f(a)).$$

Тогда $u \leq \lambda$, и число решений сравнения

$$g(x) \equiv 0 \pmod{P},$$

учитывая их кратность, не превосходит λ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала мы покажем, что, поскольку a является корнем кратности λ сравнения $f(x) \equiv 0 \pmod{P}$, то мы можем записать f как

$$f(x) = (x - a)^\lambda h(x) + \pi_1 r(x), \quad (1)$$

для некоторого $\pi_1 \in P$, такого, что $P \nmid h(a)$ и $\deg(r) < \lambda$.

Действительно, по формуле Тейлора имеем

$$f(x) = \sum_{j=0}^m \frac{f^{(j)}(a)}{j!} (x-a)^j = (x-a)^\lambda h(x) + r_1(x), \quad (2)$$

где

$$h(x) = \sum_{j=\lambda}^m \frac{f^{(j)}(a)}{j!} (x-a)^{j-\lambda}, \quad r_1(x) = \sum_{j=0}^{\lambda-1} \frac{f^{(j)}(a)}{j!} (x-a)^j, \quad \deg(r_1) < \lambda.$$

Легко видеть, что $P \nmid h(a)$, поскольку

$$h(a) = \frac{f^{(\lambda)}(a)}{\lambda!} \not\equiv 0 \pmod{P}.$$

Более того, поскольку a имеет кратность λ , мы знаем, что существует h_1 такой, что

$$f(x) \equiv (x-a)^\lambda h_1(x) \pmod{P}. \quad (3)$$

Сравнивая (2) и (3) по модулю P , получаем

$$(x-a)^\lambda h(x) + r_1(x) \equiv (x-a)^\lambda h_1(x) \pmod{P},$$

что, поскольку $\deg(r_1) < \lambda$, означает, что $r_1(x) \equiv 0 \pmod{P}$, и поэтому r_1 можно записать как $r_1 = \pi_1 \cdot r$ для $\pi_1 \in P$, где $\deg(r) < \lambda$, что и это доказывает (1).

Следовательно, имеем

$$\begin{aligned} \pi^{-u}(f(\pi x + a) - f(a)) &= \pi^{-u}\left((\pi x)^\lambda h(\pi x + a) + \pi_1(r(\pi x + a) - r(a))\right) = \\ &= \pi^{\lambda-u} x^\lambda h(\pi x + a) + (\pi_1 \pi^{-u})(r(\pi x + a) - r(a)). \end{aligned}$$

Отсюда ясно, что $v \leq \lambda$, что и доказывает первое утверждение леммы. Более того, это показывает, что $\deg(h) \leq \lambda$, и поэтому второе утверждение леммы следует из применения леммы 3.1 к h . $\square$

4. Свойства ортогональности и мультипликативности тригонометрических сумм

В этом разделе мы приводим результаты, касающиеся свойств ортогональности и мультипликативности тригонометрических сумм, аналогичны подобным результатам в рациональном случае. Последнее позволит нам ограничить наше внимание тригонометрическими суммами над идеалами, равными степени простого идеала.

ЛЕММА 3. ([6], с.16). Пусть Q — целый идеал, а $\alpha \in R$ — целое число. Пусть η пробегает полную систему вычетов $(Q\delta)^{-1}$ по модулю δ^{-1} . Тогда

$$\sum_{\eta} E(\alpha\eta) = \sum_{\eta} e^{2\pi i T(\alpha\eta)} = \begin{cases} N(Q) & \text{если } Q|\alpha, \\ 0 & \text{если } Q \nmid \alpha. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $Q|\alpha$, то $\alpha\eta \in \delta^{-1}$, что дает $E(\alpha\eta) = 1$, и тогда

$$\sum_{\eta} E(\eta\alpha) = N(Q).$$

Предположим, что $Q \nmid \alpha$. Сначала мы покажем, что существует некоторый $\eta \in (Q\delta)^{-1}$, скажем η_0 , такой, что $\eta\alpha \notin \delta^{-1}$.

Если $\eta\alpha \in \delta^{-1}$ для всех $\eta \in (Q\delta)^{-1}$, то $\delta^{-1}|\alpha(Q\delta)^{-1}$, и поэтому $Q|\alpha$, что является противоречием.

По определению δ^{-1} существует целое число γ такое, что $E(\gamma\eta_0\alpha) \neq 1$. Поскольку $\gamma\eta_0 \in (Q\delta)^{-1}$, имеем

$$\sum_{\eta} E(\eta\alpha) = \sum_{\eta} E(\gamma\eta_0\alpha + \eta\alpha) = E(\gamma\eta_0\alpha) \sum_{\eta} E(\eta\alpha),$$

которые, поскольку $E(\gamma\eta_0\alpha) \neq 1$, дает

$$\sum_{\eta} E(\eta\alpha) = 0.$$

□

ЛЕММА 4. ([6], p.16). Пусть $A = (\alpha_m, \dots, \alpha_1)$, Q, Q_1, Q_2, B — целые идеалы такие, что

$$Q = Q_1 Q_2, (Q_1, Q_2) = 1, A = \frac{B\delta^{-1}}{Q}, (B, Q) = 1,$$

и пусть

$$f(x) = \alpha_m x^m + \dots + \alpha_1 x.$$

Тогда существуют многочлены

$$f_j(x) = \alpha_{m,j} x^m + \dots + \alpha_{1,j} x,$$

для $j = 1, 2$, с идеалами $A_j = (\alpha_{j,m}, \dots, \alpha_{j,1})$, такими, что существуют целые идеалы B_1, B_2 с

$$A_1 = \frac{B_1\delta^{-1}}{Q_1}, A_2 = \frac{B_2\delta^{-1}}{Q_2}, (B_1, Q_1) = (B_2, Q_2) = 1,$$

и так, что

$$S(f, Q) = S(f_1, Q_1)S(f_2, Q_2).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $(Q_1, Q_2) = 1$, то существуют целые числа k_1, k_2 такие, что

$$(k_1, Q) = Q_1, (k_2, Q) = Q_2.$$

Полагая $k = \lambda_1 k_1 + \lambda_2 k_2$, мы видим по китайской теореме об остатках, что при пробегании λ_1, λ_2 по полным системам вычетов по модулю Q_1, Q_2 соответственно, k пробегает полную систему вычетов по модулю Q .

Следовательно, имеем

$$S(f, Q) = \sum_{k \bmod Q} E(f(k)) = \sum_{\lambda_1 \bmod Q_1} \sum_{\lambda_2 \bmod Q_2} E(f(\lambda_1 k_1 + \lambda_2 k_2)) =$$

$$= \sum_{\lambda_1 \bmod Q_1} E(f(\lambda_1 k_1)) \sum_{\lambda_2 \bmod Q_2} E(f(\lambda_2 k_2)) = S(f_1, Q_1) S(f_2, Q_2),$$

где $f_j(k) = f(kk_j)$. Утверждение об идеалах B_1 и B_2 очевидно. $\square$

5. Метод деревьев Хуа Ло-Кена для тригонометрических сумм по идеалам, равным степени простого идеала

В этом разделе мы представляем обобщение метода деревьев Хуа Ло-Кена, на основе [1], и получаем соответствующую оценку тригонометрических сумм по идеалам, равным степени простого идеала. Мы также представим результаты по тригонометрическим суммам, которые будут использоваться в последующих разделах.

Благодаря теореме об уникальной факторизации идеалов в полях алгебраических чисел, лемма 4.2 позволяет нам ограничить наши рассмотрения идеалами, равными степени простого идеала, поскольку любой целый идеал может быть однозначно выражен как произведение таких идеалов.

Таким образом, в остальной части работы, пусть $A(f) = (\alpha_m, \dots, \alpha_1)$ — дробный идеал такой, что

$$A = \frac{B\delta^{-1}}{P^l}; (B, P) = 1 \quad (4)$$

где B — целый идеал, P — простой идеал, и $l \geq 1$ — рациональное целое число.

Более того, π всегда обозначает элемент R такой, что $\pi \in P, \pi \notin P^2$ (см., например, [8], с.441).

Пусть

$$f(x) = \alpha_m x^m + \dots + \alpha_1 x.$$

Будем рассматривать полные тригонометрические суммы

$$S(f, P^l) = \sum_{x \bmod P^l} E(f(x)).$$

Пусть t — наибольшее рациональное целое число такое, что $P^t | A(f')A(f)^{-1}$. Поскольку $A(f) | A(f')$, имеем $t \geq 0$.

Очевидно, что каждый $x \bmod P^l$ однозначно выражается как $x = y + \pi^{l-t-1}z$ для $y \bmod P^{l-t-1}, z \bmod P^{t+1}$, и поэтому имеем

$$S(f, P^l) = \sum_{y \bmod P^{l-t-1}} \sum_{z \bmod P^{t+1}} E(f(y + \pi^{l-t-1}z)) = \sum_{v \bmod P} S_v, \quad (5)$$

где

$$S_v = \sum_{\substack{y \bmod P^{l-t-1} \\ y \equiv v \bmod P}} \sum_{z \bmod P^{t+1}} e^{2\pi i T(f(y + \pi^{l-t-1}z))}.$$

ЛЕММА 5. ([1], с.9). Если $l \geq 2(t+1)$, и v не является решением сравнения $\pi^{l-t}f'(v) \equiv 0 \bmod P$, то

$$S_v = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя формулу Тейлора, получаем

$$f(y + \pi^{l-t-1}z) = \sum_{j=0}^m \frac{f^{(j)}(y)}{j!} (\pi^{l-t-1}z)^j \equiv f(y) + \pi^{l-t-1}zf'(y) \pmod{P^{l-t}},$$

что, поскольку $l \geq 2(t+1)$, дает

$$\begin{aligned} S_v &= \sum_{\substack{y \pmod{P^{l-t-1}} \\ y \equiv v \pmod{P}}} \sum_{z \pmod{P^{t+1}}} e^{2\pi i T(f(y) + \pi^{l-t-1}zf'(y))} = \\ &= \sum_{\substack{y \pmod{P^{l-t-1}} \\ y \equiv v \pmod{P}}} e^{2\pi i T(f(y))} \sum_{z \pmod{P^{t+1}}} e^{2\pi i T(\pi^{l-t}f'(v)\pi^{-1}z)}. \end{aligned}$$

Применение леммы 4.1 к внутренней сумме дает

$$\sum_{z \pmod{P^{t+1}}} e^{2\pi i T(\pi^{l-t}f'(v)\pi^{-1}z)} = 0 \implies S_v = 0.$$

□

Для каждого решения v сравнения $\pi^{l-t}f'(v) \equiv 0 \pmod{P}$ положим

$$\tilde{f}_1(y) = f(y+v) - f(v) = \sum_{j=1}^m \tilde{\alpha}_{j,1} y^j.$$

Тогда имеем тождества

$$\tilde{\alpha}_{j,1} = \sum_{l=0}^{m-j} \alpha_{j+l} \binom{j+l}{j} v^l; 1 \leq j \leq m. \quad (6)$$

Определим теперь

$$f_1(y) = \tilde{f}_1(\pi y) = \sum_{j=1}^m \pi^j \tilde{\alpha}_{j,1} y^j = \sum_{j=1}^m \alpha_{j,1} y^j, \quad (7)$$

и определим индекс $u = u(v)$ как наибольшее рациональное целое число такое, что $P^u | A(f_1)A(f)^{-1}$.

Из (6) ясно, что $A(f)|A(f_1)$, и поэтому $u \geq 0$. Более того, из определения u следует, что

$$A(f_1) = \frac{B_1 \delta^{-1}}{P^{l-u}}; (B_1, P) = 1$$

для какого-то целого идеала B_1 .

ЛЕММА 6. ([1], с. 9). Если $l \geq 2(t+1)$, тогда

$$S(f, P^l) = \sum_v' N(P^{u-1}) E(f(v)) S(f_1, P^{l-u}),$$

где апостроф означает, что суммирование ведется по решениям сравнения $\pi^{l-t}f'(v) \equiv 0 \pmod{P}$ в полной системы вычетов по модулю P .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если v является решением сравнения $\pi^{l-t}f'(v) \equiv 0 \pmod{P}$, тогда

$$\begin{aligned}
S_v &= \sum_{\substack{y \pmod{P^{l-t-1}} \\ y \equiv v \pmod{P}}} \sum_{z \pmod{P^{t+1}}} E(f(y + \pi^{l-t-1}z)) = \\
&= \sum_{\substack{y \pmod{P^{l-t-1}} \\ y \equiv v \pmod{P}}} E(f(y)) \sum_{z \pmod{P^{t+1}}} E(f(y + \pi^{l-t-1}z) - f(y)) = \\
&= \sum_{\substack{y \pmod{P^{l-t-1}} \\ y \equiv v \pmod{P}}} E(f(y)) \sum_{z \pmod{P^{t+1}}} E(\pi^{l-t-1}f'(y)z) = \\
&= N(P^{t+1}) \sum_{\substack{y \pmod{P^{l-t-1}} \\ y \equiv v \pmod{P}}} E(f(y)) = N(P^{t+1})E(f(v)) \sum_{y \pmod{P^{l-t-2}}} E(f(\pi y + v) - f(v)) = \\
&= N(P^{t+1})E(f(v)) \sum_{y \pmod{P^{l-t-2}}} E(f_1(y)) = N(P^{u-1})E(f(v))S(f_1, P^{l-u}).
\end{aligned}$$

Если v не является решением сравнения $\pi^{l-t}f'(v) \equiv 0 \pmod{P}$, то лемма 5.1 дает $S_v = 0$, и тогда утверждение леммы следует от (5). $\square$

Определим w как наибольшее рациональное целое число такой, что $P^w | k$ для некоторого $1 \leq k \leq m$. В лемме 6.2 мы покажем, что

$$w = (e + 1) \left\lfloor \frac{\ln m}{\ln q} \right\rfloor.$$

Следующая конструкция является обобщением метода Хуа Ло-Кена.

Полагая $f_0 = f$ и $u_1(v_0) = u(v)$, мы индуктивно определяем функции f_k и индексы $u_k = u_k(v_{k-1})$ аналогично построению f_1 и $u(v)$ перед леммой 5.2.

Предположим, что для $k \geq 1$

$$f_{k-1}(y) = \alpha_{m,k-1}y^m + \dots + \alpha_{1,k-1}y; \quad A(f_{k-1}) = \frac{B_{k-1}\delta^{-1}}{P^{l-u_1-\dots-u_{k-1}}} \quad (8)$$

уже определена, где B_{k-1} — целый идеал такой, что $(B_{k-1}, P) = 1$, и пусть t_{k-1} — наибольшее рациональное целое число такое, что $P^{t_{k-1}} | A(f'_{k-1})A(f_{k-1})^{-1}$.

Поскольку $A(f_{k-1}) | A(f'_{k-1})$, имеем $t_{k-1} \geq 0$.

Для каждого решения v_{k-1} сравнения

$$\pi^{l-u_1-\dots-u_{k-1}-t_{k-1}} f'_{k-1}(x) \equiv 0 \pmod{P},$$

положим

$$\tilde{f}_k(y) = f_{k-1}(y + v_{k-1}) - f_{k-1}(v_{k-1}) = \sum_{j=1}^m \tilde{\alpha}_{j,k} y^j.$$

Тогда имеем тождества

$$\tilde{\alpha}_{j,k} = \sum_{l=0}^{m-j} \alpha_{j+l,k-1} \binom{j+l}{j} v_{k-1}^l. \quad (9)$$

Определим теперь

$$f_k(y) = \tilde{f}_k(\pi y) = \sum_{j=1}^m \pi^j \tilde{\alpha}_{j,k} y^j = \sum_{j=1}^m \alpha_{j,k} y^j, \quad (10)$$

и определим индекс $u_k = u_k(v_{k-1})$ как наибольшее рациональное целое число такое, что $P^{u_k} | A(f_k) A(f_{k-1})^{-1}$.

От (9) следует, что $A(f_{k-1}) | A(f_k)$, и поэтому $u_k \geq 0$. Более того, из определения u_k следует, что

$$A(f_k) = \frac{B_k \delta^{-1}}{P^{l-u_1-\dots-u_k}}. \quad (11)$$

Для удобства положим

$$U_k = \sum_{j=1}^k u_j, \quad l_k = l - U_k, \quad l_0 = l.$$

Повторяем эту конструкцию до шага с номером h , который определяется условиями

$$l - U_{h-1} \geq 2(w+1), \quad l - U_h < 2(w+1).$$

PROPOSITION 2. Для $1 \leq k \leq h-1$, имеем неравенство

$$t_k \leq w.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По построению мы знаем, что

$$A(f_k) = \frac{B_k \delta^{-1}}{P^{l_k}},$$

для некоторого целого идеала B_k с $(B_k, P) = 1$, и поэтому $V_P(A(f_k)) = -l_k - e$.

По определению w мы видим, что

$$V_P(A(f'_k)) \leq w + V_P(A(f_k)) = w - l_k - e \implies w \geq l_k + V_P(A(f'_k)) = t_k.$$

□

ТЕОРЕМА 1. Если $h > 0$, то

$$S(f, P^l) = \sum_{v_0, \dots, v_{h-1}}' N(P^{U_h-h}) E(f_0(v_0) + \dots + f_{h-1}(v_{h-1})) S(f_h, P^{l-U_h}).$$

где апостроф означает, что суммирование ведется по решениям сравнений $\pi^{l_k-t_k} f'_k(v_k) \equiv 0 \pmod{P}$, для $0 \leq k \leq h-1$, в полной системы вычетов по модулю P .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем утверждение теоремы повторным применением леммы 5.2.

Поскольку $h > 0$, имеем $l \geq 2(w+1)$, и поэтому для $1 \leq k \leq h-1$ имеем $w \geq t_k$ по предложению 5.1, что по определению h показывает, что $l_k \geq 2(t_k+1)$.

Следовательно, индуктивно, для $1 \leq k \leq h-1$ предположим, что имеем

$$S(f, P^l) = \sum_{v_0, \dots, v_{k-1}}' N(P^{U_k-k}) E(f_0(v_0) + \dots + f_{k-1}(v_{k-1})) S(f_k, P^{l-U_k}).$$

Поскольку $l_k \geq 2(t_k+1)$, то можем применить лемму 5.2 и получить

$$S(f_k, P^{l-U_k}) = \sum_{v_k}^I N(P^{u_{k+1}-1}) E(f_k(v_k)) S(f_{k+1}, P^{l-U_{k+1}}).$$

□

ЛЕММА 7. *Количество наборов индексов $\{u_1, \dots, u_h\}$ не превосходит $m - 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{v_{0,j_0}\}_{j_0=1}^{J_0}$ — множество несравнимых решений сравнения $\pi^{l-t} f'_0(x) \equiv 0 \pmod{P}$, где v_{0,j_0} имеет кратность λ_{0,j_0} . По предложению 3.1 мы знаем, что

$$\sum_{j_0=1}^{J_0} \lambda_{0,j_0} \leq m - 1.$$

Теперь для каждого v_{0,j_0} пусть, $\{v_{1,j_0,j_1}\}_{j_1=1}^{J_1(j_0)}$ — множество несравнимых решений сравнения $\pi^{l_1-t_1} f'_1(x) \equiv 0 \pmod{P}$, где v_{1,j_0,j_1} имеет кратность λ_{1,j_0,j_1} .

Индуктивно предположим, что

$$\sum_{j_0=1}^{J_0} \cdots \sum_{j_{k-1}=1}^{J_{k-1}(j_0, \dots, j_{k-2})} \lambda_{k-1, j_0, \dots, j_{k-1}} \leq m - 1. \quad (12)$$

По лемме 3.2 мы знаем, что

$$\sum_{j_k=1}^{J_k(j_0, \dots, j_{k-1})} \lambda_{k, j_0, \dots, j_k} \leq \lambda_{k-1, j_0, \dots, j_{k-1}}. \quad (13)$$

Следовательно, по (12) и (13) имеем

$$\sum_{j_0=1}^{J_0} \cdots \sum_{j_k=1}^{J_k(j_0, \dots, j_{k-1})} \lambda_{k, j_0, \dots, j_k} \leq \sum_{j_0=1}^{J_0} \cdots \sum_{j_{k-1}=1}^{J_{k-1}(j_0, \dots, j_{k-2})} \lambda_{k-1, j_0, \dots, j_{k-1}} \leq m - 1.$$

По индукции мы видим, что

$$\sum_{j_0=1}^{J_0} \sum_{j_1=1}^{J_1(j_0)} \cdots \sum_{j_{h-1}=1}^{J_{h-1}(j_0, \dots, j_{h-2})} \lambda_{h-1, j_0, \dots, j_{h-1}} \leq m - 1,$$

а поскольку $\lambda_{h-1, j_0, \dots, j_{h-1}} \geq 1$, количество множеств $\{v_{0,j_0}, \dots, v_{h-1, j_0, \dots, j_{h-1}}\} = \{v_0, \dots, v_{h-1}\}$ не превосходит $m - 1$, что эквивалентно утверждению леммы, по определению u_k . □

PROPOSITION 3. *Имеем*

$$\{j; V_P(\pi^{l_{k-1}+e} \tilde{\alpha}_{j,k}) = 0\} \neq \emptyset, \quad \{j; V_P(\pi^{l_k+e} \alpha_{j,k}) = 0\} \neq \emptyset.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\alpha_{j,k} \in A(f_k) \implies A(f_k) | \alpha_{j,k} \implies V_P(\alpha_{j,k}) \geq V_P(A(f_k)) = -l_k - e. \quad (14)$$

Поскольку $V_P(A(f_{k-1})) = -l_{k-1} - e$, то не может быть, что $V_P(\alpha_{j,k-1}) > -l_{k-1} - e$ для всех $1 \leq j \leq m$.

Поэтому, по (14) (для $k-1$), можем положить $s' = \max \{j; V_P(\alpha_{j,k-1}) = -l_{k-1} - e\}$, и тогда (9) дает

$$V_P(\tilde{\alpha}_{s',k}) = V_P(\alpha_{s',k-1}) = -l_{k-1} - e \implies V_P(\pi^{l_{k-1}+e}\tilde{\alpha}_{s',k}) = 0,$$

что показывает, что первое множество в утверждении теоремы непусто.

Аналогично, поскольку $V_P(A(f_k)) = -l_k - e$, то не может быть, что $V_P(\alpha_{j,k}) > -l_k - e$ для всех $1 \leq j \leq m$.

Применяя (14) видим, что мы можем положить $r' = \max\{j; V_P(\alpha_{j,k}) = -l_k - e\}$, и тогда

$$V_P(\pi^{l_k+e}\alpha_{r,k}) = 0,$$

что показывает, что второе множество в утверждении теоремы непусто. $\square$

ЛЕММА 8. *Имеем цепочку неравенств*

$$m \geq u_1 \geq \dots \geq u_h \geq 2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала мы докажем, что $m \geq u_k \geq u_{k+1}$ для $1 \leq k \leq h-1$.

По предположению 5.2, пусть

$$s = \max\{j; V_P(\pi^{l_{k-1}+e}\tilde{\alpha}_{j,k}) = 0\},$$

тогда ясно, что $m \geq s$, и по (10) имеем

$$\pi^s(\pi^{l_{k-1}+e}\tilde{\alpha}_{s,k}) = \pi^{l_{k-1}+e}\alpha_{s,k}. \quad (15)$$

По определению s , (14) и (15) имеем

$$\begin{aligned} s &= V_P(\pi^s(\pi^{l_{k-1}+e}\tilde{\alpha}_{s,k})) = V_P(\pi^{l_{k-1}+e}\alpha_{s,k}) = l_{k-1} + e + V_P(\alpha_{s,k}) = \\ &= l_{k-1} + e - l_k - e = u_k, \end{aligned}$$

что дает

$$m \geq s \geq u_k. \quad (16)$$

Теперь, снова по предположению 5.2, пусть

$$r = \max\{j; V_P(\pi^{l_k+e}\alpha_{j,k}) = 0\},$$

и тогда (10) дает

$$\pi^r(\pi^{l_k+e}\tilde{\alpha}_{r,k}) = \pi^{l_k+e}\alpha_{r,k}. \quad (17)$$

Кроме того, согласно (9) имеем

$$\tilde{\alpha}_{j,k} \in A(f_{k-1}) \implies A(f_{k-1})|\tilde{\alpha}_{j,k} \implies V_P(\tilde{\alpha}_{j,k}) \geq V_P(A(f_{k-1})) = -l_{k-1} - e. \quad (18)$$

По определению r и (17), применяя (18) с $j = r$ дает

$$\begin{aligned} 0 &= V_P(\pi^{l_k+e}\alpha_{r,k}) = V_P(\pi^{l_k+e+r}\tilde{\alpha}_{r,k}) = l_k + e + r + V_P(\tilde{\alpha}_{r,k}) \geq \\ &\geq l_k + e + r - l_{k-1} - e = r - u_k \implies u_k \geq r. \end{aligned} \quad (19)$$

По (9) имеем тождество

$$\tilde{\alpha}_{r,k+1} = \sum_{l=0}^{m-j} \alpha_{r+l,k} \binom{r+l}{r} v_k^l,$$

итак, по определению r (в частности, его максимальность) это показывает, что $V_P(\pi^{l_k+e}\tilde{\alpha}_{r,k+1}) = 0$, что согласно (17) дает

$$\begin{aligned} r &= V_P(\pi^r(\pi^{l_k+e}\tilde{\alpha}_{r,k+1})) = V_P(\pi^{l_k+e}\alpha_{r,k+1}) = l_k + e + V_P(\alpha_{r,k+1}) \geq \\ &\geq l_k + e - l_{k+1} - e = u_{k+1} \implies r \geq u_{k+1}. \end{aligned} \quad (20)$$

В силу (16), (19) и (20) имеем цепочку неравенств

$$m \geq s \geq u_k \geq r \geq u_{k+1}. \quad (21)$$

Теперь мы покажем, что $u_k \geq 2$.

Мы знаем из (10) и (11), что

$$u_k = r' + V_P(\tilde{\alpha}_{r',k}) + l_{k-1} + e,$$

где

$$r' + V_P(\tilde{\alpha}_{r',k}) = \min \{j + V_P(\tilde{\alpha}_{j,k}); 1 \leq j \leq m\}.$$

Из (9) и 14 (при $k-1$) сразу видно, что

$$V_P(\tilde{\alpha}_{j,k}) \geq V_P(A(f_{k-1})) = -l_{k-1} - e,$$

так что если $r' \geq 2$, то будем иметь

$$u_k = r' + V_P(\tilde{\alpha}_{r',k}) + l_{k-1} + e \geq r' \geq 2. \quad (22)$$

Если $r' = 1$, тогда знаем, что

$$\tilde{\alpha}_{1,k} = f'_{k-1}(v_{k-1}) \implies V_P(\tilde{\alpha}_{1,k}) \geq 1 - l_{k-1},$$

что дает

$$u_k = 1 + V_P(\tilde{\alpha}_{1,k}) + l_{k-1} + e \geq 2 + e \geq 2. \quad (23)$$

Заметим, что (22) и (23) показывают, что $u_k \geq 2$, что вместе с (21) завершает доказательство леммы. $\square$

ТЕОРЕМА 2. *Справедлива оценка*

$$|S(f, P^l)| \leq (m-1)N(P^{l-h}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $l < 2(w+1)$, то $h = 0$ и утверждение теоремы тривиально. Предположим, что $l \geq 2(w+1)$, и тогда $h > 0$.

Применяя теорему 5.1, видим, что

$$S(f, P^l) = \sum_{v_0, \dots, v_{h-1}} N(P^{U_h-h}) E(f_0(v_0) + \dots + f_{h-1}(v_{h-1})) S(f_h, P^{l-U_h}).$$

По лемме 5.3 мы знаем, что количество наборов $\{u_1, \dots, u_k\}$ не превосходит $m-1$, что вместе с тривиальными оценками $|S(f_h, P^{l-U_h})| \leq N(P^{l-U_h})$ и $|E(x)| = 1$ дает

$$|S(f, P^l)| \leq (m-1)N(P^{U_h-h})N(P^{l-U_h}) = (m-1)N(P^{l-h}).$$

$\square$

6. Усиленная форма оценки Хуа Ло-Кэна в случае идеала, равного степени простого идеала

В этом разделе мы представляем более сильную форму оценки Хуа Ло-Кэна [2] в случае идеала, равного степени простого идеала, основываясь на [5], глава 2 (оригинальная работа в [11]). Начнем с представления некоторых вспомогательных результатов.

PROPOSITION 4. ([5], с.56). Пусть $N > 1$ – вещественное число, а $k, r, \lambda_1, \dots, \lambda_r$ – рациональные целые числа такие, что $1 \leq r \leq k$ и $\lambda_1, \dots, \lambda_r > 0$. Тогда

$$\max_{\lambda_1 + \dots + \lambda_r = k} \sum_{j=1}^r N^{\lambda_j} \leq \max(kN, N^k).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $\lambda' \geq \lambda \geq 1$, поскольку $N > 1$, имеем

$$(N^{\lambda'} - N)(N^{\lambda-1} - 1) > 0 \implies N^{\lambda'+\lambda-1} + N \geq N^{\lambda'} + N^{\lambda}.$$

Следовательно, имеем

$$\sum_{j=1}^r N^{\lambda_j} \leq N^{\lambda_1+\lambda_2-1} + \sum_{j=3}^r N^{\lambda_j} + N,$$

и повторное применение этого рассуждения дает

$$\sum_{j=1}^r N^{\lambda_j} \leq N^{\lambda_1+\dots+\lambda_r-r+1} + (r-1)N,$$

что дает оценку

$$\max_{\lambda_1+\dots+\lambda_r=k} \sum_{j=1}^r N^{\lambda_j} \leq N^{k-r+1} + (r-1)N = h(r).$$

Так как $N > 1$, то $h''(r) = N^{k-r+1}(\ln N)^2 > 0$, и поэтому в отрезке $[1, k]$ у нас есть

$$\max_{\lambda_1+\dots+\lambda_r=k} \sum_{j=1}^r N^{\lambda_j} \leq \max(h(1), h(k)) = \max(kN, N^k).$$

□

ЛЕММА 9. Если $q > m$, то $t = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, $(\alpha_j) = \frac{B_j}{P^{s_j}}$, где B_j – дробный идеал такой, что $V_P(B_j) = 0$. Тогда у нас есть

$$A(f) = \sum_{j=1}^m \frac{B_j}{P^{s_j}}. \quad (24)$$

По дистрибутивному свойству сложения идеалов мы можем сгруппировать равные степени P в (24), что дает

$$A(f) = \sum_{j=1}^{m'} \frac{\tilde{B}_j}{P^{r_j}}; \quad \tilde{B}_j = \sum_{k; V_P(\alpha_k) = -r_j} B_k,$$

где рациональные целые числа $r_1 > \dots > r_{m'}$ — разные элементы набора индексов $\{s_j\}_{j=1}^m$. Покажем, что $V_P(\tilde{B}_j) = 0$.

Если $V_P(\tilde{B}_j) = V \neq 0$, то для каждого $1 \leq k \leq m$ пишем $B_k = \frac{C_k}{D_k}$, где C_k, D_k — целые идеалы с $(C_k, D_k) = 1$. Теперь, поскольку $V_P(B_k) = 0$, имеем $V_P(D_k) = 0$. Определим целый идеал

$$\tilde{D}_k = \prod_{k'; V_P(\alpha_{k'}) D_{k'} = -r_j, k' \neq k} \implies V_P(\tilde{D}_k) = 0.$$

Ясно, что

$$\tilde{B}_j \prod_{k; V_P(\alpha_k) = -r_j} D_k = \sum_{k; V_P(\alpha_k) = -r_j} C_k \tilde{D}_k,$$

и поэтому

$$\begin{aligned} V_P(\tilde{B}_j) = V &\implies V_P(\tilde{B}_j \prod_{k; V_P(\alpha_k) = -r_j} D_k) = V \implies \\ &\implies V_P(\sum_{k; V_P(\alpha_k) = -r_j} C_k \tilde{D}_k) = V \implies V > 0 \end{aligned}$$

поскольку $\sum_{k; V_P(\alpha_k) = -r_j} C_k \tilde{D}_k$ — целый идеал. Кроме того, имеем

$$\begin{aligned} V_P(\sum_{k; V_P(\alpha_k) = -r_j} C_k \tilde{D}_k) = V &\implies \sum_{k; V_P(\alpha_k) = -r_j} C_k \tilde{D}_k \subseteq P^V \implies \\ &\implies C_k \tilde{D}_k \subseteq P^V \implies V_P(C_k \tilde{D}_k) \geq V, \end{aligned}$$

что является противоречием тому, что $V_P(C_k) = V_P(\tilde{D}_k) = 0$.

Следовательно, имеем $V_P(\tilde{B}_j) = 0$ и тогда

$$V_P(A(f)) = -r_1. \quad (25)$$

Мы знаем, что

$$A(f') = \sum_{j=1}^m \frac{jB_j}{P^{s_j}},$$

и аналогично (24) запишем

$$A(f) = \sum_{j=1}^{m'} \frac{\tilde{B}_j}{P^{r_j}}; \quad \tilde{B}_j = \sum_{k; V_P(\alpha_k) = -r_j} k B_k.$$

Так как $q > m$ и q — рациональное простое число в $\mathbb{Z}$, то $(k, q) = 1$ для всех $1 \leq k \leq m$, откуда следует, что $(k, P) = 1$, и поэтому $(kB_k, P) = 1$.

Аналогично видим, что $V_P(\tilde{B}_j) = 0$ и, следовательно, что

$$V_P(A(f')) = -r_1. \quad (26)$$

Таким образом, согласно (25) и (26), по определению t имеем

$$V_P(A(f)) = V_P(A(f')) \implies t = 0.$$

□

ЛЕММА 10. *Справедливо тождество*

$$w = (e + 1) \left\lfloor \frac{\ln m}{\ln q} \right\rfloor.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы знаем (см., например, [8], с.427), что

$$P \cap \mathbb{Z} = (q),$$

и что

$$q = P^{e+1}Q; (Q, P) = 1 \implies q \in P^{e+1}, q \notin P^{e+2},$$

для некоторого целого идеала Q , и тогда $V_P(q) = e + 1$.

Рассмотрим рациональное целое число k с $1 \leq k \leq m$. Запишем $k = q^{r(k)}k'$, где $(k', q) = 1$, и тогда имеем

$$V_P(k) = V_P(q^{r(k)}) + V_P(k') = V_P(q^{r(k)}) = r(k)V_P(q) = r(k)(e + 1). \quad (27)$$

Легко видеть, что

$$\max \{r(k); 1 \leq k \leq m\} = \left\lfloor \frac{\ln m}{\ln q} \right\rfloor,$$

откуда, вместе с (27), непосредственно следует утверждение леммы. $\square$

ТЕОРЕМА 3. *Пусть $N(P) = q^c$, где $c \geq 1$ рациональное целое число. Справедлива общая оценка*

$$|S(f, P^l)| \leq C_d(m)N(P)^{l(1-\frac{1}{m})},$$

где

$$C_d(m) = \begin{cases} m^d & \text{если } q > m, N(P) \geq (m-1)^{\frac{m}{m-2}}, \\ \frac{m-1}{m} m^{\frac{3}{m}} & \text{если } q > m, N(P) \leq (m-1)^{\frac{m}{m-2}}, \\ m^{\frac{d(2d+1)}{m}} & \text{если } q \leq m, N(P) \geq (m-1)^{\frac{m}{m-2}}, \\ (m-1)m^{\frac{d(2d+1)}{m}} & \text{если } q \leq m, N(P) \leq (m-1)^{\frac{m}{m-2}}. \end{cases}$$

Более того, справедлива конкретная оценка

$$|S(f, P^l)| \leq C_d(m, P)N(P)^{l(1-\frac{1}{m})},$$

где

$$C_d(m, P) = \begin{cases} m^d & \text{если } q > m, N(P) \geq (m-1)^{\frac{m}{m-2}}, \\ \frac{m-1}{m} m^{\frac{3}{m}} & \text{если } q > m, N(P) \leq (m-1)^{\frac{m}{m-2}}, \\ m^{\frac{c(2e+3)}{m}} & \text{если } q \leq m, N(P) \geq (m-1)^{\frac{m}{m-2}}, \\ (m-1)m^{\frac{c(2e+3)}{m}} & \text{если } q \leq m, N(P) \leq (m-1)^{\frac{m}{m-2}}. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала мы докажем конкретную оценку, а затем из нее выведем общую оценку.

Для удобства положим $N = N(P)$. Мы рассматриваем несколько случаев. Во всех случаях доказательство будет проводиться индукцией по l .

Случай 1. $q > m$:

По лемме 6.2 имеем $t = 0$. Если $l < 2(t + 1)$, то $l = 1$, и лемма следует из оценки Морделла ([6], с.17, а оригинальная работа в [15]).

$$|S(f, P)| \leq m^d N^{1-\frac{1}{m}}. \quad (28)$$

Предположим, что $l \geq 2$. Пусть $v_1, \dots, v_r$ — несравнимые решения сравнения $\pi^l f'(v) \equiv 0 \pmod{P}$ такие, что v_j имеет кратность λ_j , и пусть $\sum_{j=1}^r \lambda_j = n$. Далее, обозначим через $\sigma_j = u(v_j)$ индексы в конструкции после леммы 5.1.

Используя разложение в ряд Тейлора

$$g_j(y) = f(\pi y + v_j) - f(v_j) = \sum_{k=1}^m \frac{\pi^k y^k}{k!} f^{(k)}(v_j),$$

лемму 3.2 и (11), видим, что

$$V_P \left(\frac{\pi^{\lambda_j+1}}{(\lambda_j+1)!} \pi^{l+e} f^{(\lambda_j+1)}(v_j) \right) \leq \lambda_j + 1 \implies \sigma_j \leq \lambda_j + 1. \quad (29)$$

По лемме 3.1 мы знаем, что

$$n \leq m - 1. \quad (30)$$

Применение неравенства треугольника к (5) дает

$$|S(f, P^l)| \leq \sum_{j=1}^r |S_{v_j}|. \quad (31)$$

Если $l > \sigma_j$, то в доказательстве леммы 5.2 было показано, что

$$|S_{v_j}| = N^{\sigma_j-1} |S(g_j, P^{l-\sigma_j})|. \quad (32)$$

Случай 1а. $N \geq (m-1)^{\frac{m}{m-2}}$:

По (28) и предположению индукции в (32), имеем

$$|S_{v_j}| \leq m^d N^{\sigma_j-1} N^{(l-\sigma_j)(1-\frac{1}{m})}, \quad (33)$$

причем эта оценка верна и в том случае, если $\sigma_j \geq l$, так как в этом случае она следует из тривиальной оценки $|S_{v_j}| \leq N^{l-1}$.

Следовательно, по (31) и (33), получаем

$$\begin{aligned} |S(f, P^l)| &\leq m^d \sum_{j=1}^r N^{\sigma_j-1} N^{(l-\sigma_j)(1-\frac{1}{m})} = \\ &= m^d N^{l(1-\frac{1}{m})} \sum_{j=1}^r N^{-1+\frac{\sigma_j}{m}}. \end{aligned} \quad (34)$$

Поскольку по (29) и лемма 3.1 имеем $\sigma_j \leq \lambda_j + 1 \leq m$, то предложение 6.1 дает

$$\sum_{j=1}^r N^{-1+\frac{\sigma_j}{m}} \leq N^{-1+\frac{1}{m}} \sum_{j=1}^r N^{\frac{\lambda_j}{m}} \leq N^{-1+\frac{1}{m}} \max((m-1)N^{\frac{1}{m}}, N^{1-\frac{1}{m}}). \quad (35)$$

Легко видеть, что

$$N \geq (m-1)^{\frac{m}{m-2}} \implies \max((m-1)N^{\frac{1}{m}}, N^{1-\frac{1}{m}}) = N^{1-\frac{1}{m}}. \quad (36)$$

Подстановка (35) и (36) в (34) дает

$$\sum_{j=1}^r N^{-1+\frac{\sigma_j}{m}} \leq 1 \implies |S(f, P^l)| \leq m^d N^{l(1-\frac{1}{m})},$$

что и доказывает утверждение теоремы в данном случае.

Случай 16. $N \leq (m-1)^{\frac{m}{m-2}}$:

Сначала докажем оценку

$$|S(f, P^l)| \leq n N^{-1+\frac{3}{m}} N^{l(1-\frac{1}{m})}. \quad (37)$$

По определению сразу видно, что $r \leq n$, поэтому базовый случай $l = 2$ следует из тривиальной оценки

$$|S(f, P^2)| \leq \sum_{j=1}^r |S_{v_j}| \leq r N \leq n N^{1+\frac{1}{m}}.$$

Предполагая, что (37) справедлива для всех $2 \leq l \leq L$, мы докажем, что она справедлива для $l = L + 1$.

По определению σ_j и поскольку в силу (29) имеем $\sigma_j \leq \lambda_j + 1$, мы видим, что

$$g_j(y) \equiv \sum_{k=1}^{\lambda_j+1} \frac{\pi^k y^k}{k!} f^{(k)}(v_j) \bmod P,$$

и значит, по лемме 3.1 число решений сравнения $\pi^{l-\sigma_j} g'_j(y) \equiv 0 \bmod P$ не превосходит λ_j .

Если $\sigma_j < L$, то предположение индукции дает

$$\begin{aligned} |S_{v_j}| &= N^{\sigma_j-1} |S(g_j, P^{L+1-\sigma_j})| \leq \lambda_j N^{\sigma_j-2+\frac{3}{m}+(L+1-\sigma_j)(1-\frac{1}{m})} \leq \\ &\lambda_j N^{-2+\frac{\lambda_j+1}{m}+\frac{3}{m}} N^{(L+1)(1-\frac{1}{m})}. \end{aligned} \quad (38)$$

Если $\sigma_j \geq L$, используем тривиальную оценку $|S_{v_j}| \leq N^L$.

Сначала предположим, что $L > \sigma_j$ для всех $1 \leq j \leq r$. Тогда, поскольку $\lambda_j \leq m-1$ по лемме 3.1, то подстановка (38) в (31) дает

$$\begin{aligned} |S(f, P^{L+1})| &\leq \sum_{j=1}^r |S_{v_j}| \leq N^{-2+\frac{3}{m}} N^{(L+1)(1-\frac{1}{m})} \sum_{j=1}^r \lambda_j N^{\frac{\lambda_j+1}{m}} \leq \\ &\leq N^{-1+\frac{3}{m}} N^{(L+1)(1-\frac{1}{m})} \sum_{j=1}^r \lambda_j = n N^{-1+\frac{3}{m}} N^{(L+1)(1-\frac{1}{m})}, \end{aligned}$$

что завершает доказательство (37) если $L > \sigma_j$ для всех $1 \leq j \leq r$.

Предположим теперь, не ограничивая общности, что $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_{r_1} \geq L > \sigma_{r_1+1} \geq \dots \geq \sigma_r$.

Положим $\sum_{j=1}^{r_1} \lambda_j = n_1$ и $\sum_{j=r_1+1}^r \lambda_j = n_2$, а тогда $n_1 + n_2 = n$.

Для $1 \leq j \leq r_1$ по (29) имеем

$$\lambda_j + 1 \geq \sigma_j \geq L \implies n_1 + r_1 \geq r_1 L \implies \frac{n_1}{r_1} + 1 \geq L,$$

что дает

$$L = (L+1)(1-\frac{1}{m}) - 1 + \frac{2}{m} + \frac{L-1}{m} \leq (L+1)(1-\frac{1}{m}) - 1 + \frac{2}{m} + \frac{n_1}{r_1 m}.$$

Положим $h_1(y) = yN^{\frac{n_1}{ym}}$. Тогда имеем

$$h'_1(y) = N^{\frac{n_1}{ym}} \left(1 - \frac{n_1 \ln(N)}{ym}\right) \implies h''_1(y) = N^{\frac{n_1}{ym}} \frac{n_1^2 (\ln(N))^2}{y^3 m^2},$$

и поэтому $h''_1(y) \geq 0$, что дает

$$r_1 N^{\frac{n_1}{r_1 m}} \leq \max(N^{\frac{n_1}{m}}, n_1 N^{\frac{1}{m}}) \quad (39)$$

Теперь мы покажем, что $n_1 N^{\frac{1}{m}} \geq N^{\frac{n_1}{m}}$.

Положим $h_2(y) = yN^{\frac{1}{m}} - N^{\frac{y}{m}}$. Тогда имеем

$$h'_2(y) = N^{\frac{1}{m}} - \frac{1}{m} \ln(N) N^{\frac{y}{m}} \implies h''_2(y) = \frac{-1}{m^2} (\ln(N))^2 N^{\frac{y}{m}},$$

и поэтому $h''_2(y) \leq 0$, $h_2(1) = 0$.

Более того, поскольку $(m-1)^{\frac{m}{m-2}} \geq N > m$, то $h'_2(1) \geq 0$ и $h_2(m-1) \geq 0$.

Следовательно, имеем $h_2(y) \geq 0$ для $1 \leq y \leq m-1$, и поскольку по (30) и определению n_1 имеем $n_1 \leq n \leq m-1$, то это дает

$$n_1 N^{\frac{1}{m}} \geq N^{\frac{n_1}{m}}. \quad (40)$$

Поэтому, подставив (40) в (39), учитывая (31), (38) и тривиальную оценку $|S_{v_j}| \leq N^L$, получим

$$\begin{aligned} |S(f, P^{L+1})| &\leq \sum_{j=1}^{r_1} |S_{v_j}| + \sum_{j=r_1+1}^r |S_{v_j}| \leq r_1 N^L + N^{-2+\frac{3}{m}} N^{(L+1)(1-\frac{1}{m})} \sum_{j=r_1+1}^r \lambda_j N^{\frac{\lambda_j+1}{m}} \leq \\ &\leq N^{-1+\frac{2}{m}} N^{(L+1)(1-\frac{1}{m})} \left(r_1 N^{\frac{n_1}{r_1 m}} + \sum_{j=r_1+1}^r \lambda_j N^{\frac{\lambda_j+1}{m}-1+\frac{1}{m}} \right) \leq \\ &\leq N^{-1+\frac{2}{m}} N^{(L+1)(1-\frac{1}{m})} (n_1 N^{\frac{1}{m}} + n_2 N^{\frac{1}{m}}) \leq n N^{-1+\frac{3}{m}} N^{(L+1)(1-\frac{1}{m})}, \end{aligned}$$

что завершает доказательство (37) если $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_{r_1} \geq L > \sigma_{r_1+1} \geq \dots \geq \sigma_r$.

Так как $q > m$, то $N \geq m$, а так как $-1 + \frac{3}{m} \leq 0$, учитывая (30), то в силу (37) имеем

$$|S(f, P^l)| \leq n N^{-1+\frac{3}{m}} N^{l(1-\frac{1}{m})} \leq \frac{m-1}{m} m^{\frac{3}{m}} N^{l(1-\frac{1}{m})},$$

что и доказывает утверждение теоремы в данном случае.

Случай 2. $q \leq m$:

Предположим сначала, что $l < 2(t+1)$. В этом случае воспользуемся тривиальной оценкой

$$|S(f, P^l)| \leq N^l = N^{\frac{l}{m}} N^{l(1-\frac{1}{m})} \leq N^{\frac{2t+1}{m}} N^{l(1-\frac{1}{m})},$$

что в силу предложения 5.1, леммы 6.2 и того факта, что $q \leq m$, дает

$$\begin{aligned} |S(f, P^l)| &\leq N^{\frac{2(e+1)\ln(m)}{m\ln(q)} + \frac{\ln(m)}{m\ln(q)}} N^{l(1-\frac{1}{m})} = \\ &= m^{\frac{2(e+1)\ln(N)}{m\ln(q)} + \frac{\ln(N)}{m\ln(q)}} N^{l(1-\frac{1}{m})} = m^{\frac{c(2e+3)}{m}} N^{l(1-\frac{1}{m})}. \end{aligned} \quad (41)$$

Для $l \geq 2(t+1)$ доказываем индукцией по l .

Случай 2а. $N \geq (m-1)^{\frac{m}{m-2}}$:

Этот случай аналогичен случаю 1а. По предположению индукции (41) получаем

$$|S_{v_j}| = m^{\frac{c(2e+3)}{m}} N^{\sigma_j-1} |S(g_j, P^{l-\sigma_j})| \leq N^{\sigma_j-1} N^{(l-\sigma_j)(1-\frac{1}{m})}, \quad (42)$$

причем эта оценка верна и в том случае, если $\sigma_j \geq l$, так как в этом случае она следует из тривиальной оценки $|S_{v_j}| \leq N^{l-1}$.

Подстановка (42) в (31) дает

$$\begin{aligned} |S(f, P^l)| &\leq m^{\frac{c(2e+3)}{m}} \sum_{j=1}^r N^{\sigma_j-1} N^{(l-\sigma_j)(1-\frac{1}{m})} = \\ &= m^{\frac{c(2e+3)}{m}} N^{l(1-\frac{1}{m})} \sum_{j=1}^r N^{-1+\frac{\sigma_j}{m}}. \end{aligned} \quad (43)$$

Поскольку $\sigma_j \leq \lambda_j + 1 \leq m$ в силу (29) и леммы 3.1, то предложение 6.1 дает

$$\sum_{j=1}^r N^{-1+\frac{\sigma_j}{m}} \leq N^{-1+\frac{1}{m}} \sum_{j=1}^r N^{\frac{\lambda_j}{m}} \leq N^{-1+\frac{1}{m}} \max((m-1)N^{\frac{1}{m}}, N^{1-\frac{1}{m}}). \quad (44)$$

Мы знаем, что

$$N \geq (m-1)^{\frac{m}{m-2}} \implies \max((m-1)N^{\frac{1}{m}}, N^{1-\frac{1}{m}}) = N^{1-\frac{1}{m}}, \quad (45)$$

и поэтому подстановка (44) и (45) в (43) дает

$$\sum_{j=1}^r N^{-1+\frac{\sigma_j}{m}} \leq 1 \implies |S(f, P^l)| \leq m^{\frac{c(2e+3)}{m}} N^{l(1-\frac{1}{m})},$$

что и доказывает утверждение теоремы в данном случае.

Случай 2б. $N \leq (m-1)^{\frac{m}{m-2}}$:

По предположению индукции (41), если $l > \sigma_j$, получим

$$|S_{v_j}| = N^{\sigma_j-1} |S(g_j, P^{l-\sigma_j})| \leq m^{\frac{c(2e+3)}{m}} \lambda_j N^{\sigma_j-1} N^{(l-\sigma_j)(1-\frac{1}{m})}, \quad (46)$$

и эта оценка справедлива и в том случае, если $\sigma_j \geq l$, так как в этом случае она следует из тривиальной оценки $|S_{v_j}| \leq N^{l-1}$.

Следовательно, поскольку $\sigma_j \leq \lambda_j + 1 \leq m$ в силу (29) и леммы 3.1, то подстановка (46) в (31) дает

$$|S(f, P^l)| \leq m^{\frac{c(2e+3)}{m}} N^{l(1-\frac{1}{m})} N^{-1} \sum_{j=1}^r \lambda_j N^{\frac{\lambda_j+1}{m}} \leq nm^{\frac{c(2e+3)}{m}} N^{l(1-\frac{1}{m})},$$

что, поскольку $n \leq m-1$ по (30), дает

$$|S(f, P^l)| \leq (m-1)m^{\frac{c(2e+3)}{m}} N^{l(1-\frac{1}{m})},$$

что и доказывает утверждение теоремы в данном случае.

Этим завершается доказательство конкретной оценки во всех случаях.

Общая оценка непосредственно следует из неравенств $c \leq d$ и $e \leq d-1$, оба из которых легко следуют из применения теоремы об уникальной факторизации идеалов в полях алгебраических чисел к (q) :

$$(q) = \prod_{j=1}^{s'} \tilde{P}_j^{e_j-1} \implies q^d = \prod_{j=1}^{s'} N(\tilde{P}_j^{e_j+1}) = q^{\sum_{j=1}^{s'} c_j(e_j+1)} \implies d = \sum_{j=1}^{s'} c_j(e_j+1),$$

где $e_j + 1$ — индекс ветвления простого идеала $\tilde{P}_j$. $\square$

7. Усиленная форма оценки Хуа Ло-Кена для определенного класса многочленов, когда число классов равен 1

В этом разделе мы получим более сильную форму теоремы 6.1 в частном случае, когда $\mathbb{K}$ имеет число классов равен 1, а идеал A имеет вид

$$A = \frac{B}{P^l}; (B, P) = 1,$$

для некоторого целого идеала B , что позволит получить более сильную форму оценки Хуа Ло-Кена в [2] для идеалов Q , удовлетворяющих $(Q, \delta) = 1$.

Начнем со вспомогательной леммы, которая будет играть роль, аналогичную лемме 4.1.

ЛЕММА 11. *Пусть P — простой идеал такой, что $P \nmid \delta$, а $\alpha \in R$ — целое число. Пусть η пробегает полную систему вычетов P^{-c} по модулю R , где $c \geq 1$ — некоторое рациональное целое число.*

Тогда

$$\sum_{\eta} E(\alpha\eta) = \sum_{\eta} e^{2\pi i T(\alpha\eta)} = \begin{cases} N(P^c) & \text{если } P^c | \alpha, \\ 0 & \text{если } P^c \nmid \alpha. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $P^c | \alpha$, то $\alpha\eta \in R$, что дает $E(\alpha\eta) = 1$, и тогда

$$\sum_{\eta} E(\eta\alpha) = N(P^c).$$

Мы покажем, что существует $\eta \in P^{-c}$, скажем η_0 , такая, что $\eta\alpha \notin \delta^{-1}$.

Если $\eta\alpha \in \delta^{-1}$ для всех $\eta \in P^{-c}$, то $\delta^{-1} | \alpha P^{-c}$, и тогда $P^c | \alpha \delta^{-1}$.

Поскольку P — простой идеал и $P^c \nmid \alpha$, то $P^{c'} | \delta^{-1}$ для некоторого $c' \geq 1$, что является противоречием.

По определению δ^{-1} существует целое число γ такое, что $E(\gamma\eta_0\alpha) \neq 1$. Поскольку $\gamma\eta_0 \in P^{-c}$, имеем

$$\sum_{\eta} E(\eta\alpha) = \sum_{\eta} E(\gamma\eta_0\alpha + \eta\alpha) = E(\gamma\eta_0\alpha) \sum_{\eta} E(\eta\alpha) \implies \sum_{\eta} E(\eta\alpha) = 0,$$

поскольку $E(\gamma\eta_0\alpha) \neq 1$. $\square$

ТЕОРЕМА 4. *Пусть $N(P) = q^c$, где $c \geq 1$ — целое рациональное число. Тогда мы имеем общую оценку*

$$|S(f, P^l)| \leq C_d(m) N(P)^{l(1-\frac{1}{m})},$$

где

$$C_d(m) = \begin{cases} 1 & \text{если } q > m, N(P) \geq (m-1)^{\frac{2m}{m-2}}, \\ (m-1)^{\frac{2}{m}} & \text{если } q > m, (m-1)^{\frac{2m}{m-2}} > N(P) \geq (m-1)^{\frac{m}{m-2}}, \\ \frac{m-1}{m} m^{\frac{3}{m}} & \text{если } q > m, N(P) < (m-1)^{\frac{m}{m-2}}, \\ m^{\frac{d(2d+1)}{m}} & \text{если } q \leq m, N(P) \geq (m-1)^{\frac{m}{m-2}}, \\ (m-1)m^{\frac{d(2d+1)}{m}} & \text{если } q \leq m, N(P) < (m-1)^{\frac{m}{m-2}}. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство полностью аналогично доказательству теоремы 6.1, за исключением случая 1а, где вместо использования оценки Морделла ([6], с.17) мы теперь можем использовать оценку Вейля для экспоненциальных сумм над конечными полями [9].

Действительно, поскольку P простой идеал, то R/P — конечное поле. Более того, поскольку число классов $\mathbb{K}$ равен 1, мы знаем, что P — главный идеал, скажем, с $P = (\pi)$.

Поскольку $A = \frac{B}{P}$, то каждое α_j можно выразить как

$$\alpha_j = \frac{b_j}{\pi},$$

и имеем

$$e^{2\pi i T(\frac{b_j + r\pi}{\pi} x^j)} = e^{2\pi i T(\frac{b_j}{\pi} x^j)}$$

для любого $r \in R$, откуда следует, что $\chi(y) = e^{2\pi i T(\frac{y}{\pi})}$ — аддитивный характер конечного поля R/P .

Следовательно, сумма действительно является экспоненциальной суммой по конечному полю, и оценка Вейля [9] в этом случае дает

$$|S(f, P)| \leq (m-1)N^{\frac{1}{2}} \iff |S(f, P)| \leq \min(N^{\frac{1}{m}}, (m-1)N^{\frac{-1}{2} + \frac{1}{m}})N^{1 - \frac{1}{m}},$$

где эквивалентность следует из тривиальной оценки $|S(f, P)| \leq N$.

Как и в случае 1а теоремы 6.1, получаем

$$|S(f, P^l)| \leq \max(1, \min(N^{\frac{1}{m}}, (m-1)N^{\frac{-1}{2} + \frac{1}{m}}))N^{l(1 - \frac{1}{m})}. \quad (47)$$

Если $N \leq (m-1)^2$, то

$$\min(N^{\frac{1}{m}}, (m-1)N^{\frac{-1}{2} + \frac{1}{m}}) = N^{\frac{1}{m}} \quad 1 \leq N^{\frac{1}{m}} \leq (m-1)^{\frac{2}{m}}, \quad (48)$$

и поэтому подстановка (48) в (47) дает

$$|S(f, P^l)| \leq (m-1)^{\frac{2}{m}} N^{l(1 - \frac{1}{m})}.$$

Если $N \geq (m-1)^2$ и $N \leq (m-1)^{\frac{2m}{m-2}}$, то

$$\min(N^{\frac{1}{m}}, (m-1)N^{\frac{-1}{2} + \frac{1}{m}}) = (m-1)N^{\frac{-1}{2} + \frac{1}{m}}, \quad 1 \leq (m-1)N^{\frac{-1}{2} + \frac{1}{m}} \leq (m-1)^{\frac{2}{m}}, \quad (49)$$

и поэтому в этом случае также подстановка (49) в (47) дает

$$|S(f, P^l)| \leq (m-1)^{\frac{2}{m}} N^{l(1 - \frac{1}{m})}.$$

Наконец, если $N \geq (m-1)^{\frac{2m}{m-2}}$, то $N \geq (m-1)^2$, и поэтому

$$\min(N^{\frac{1}{m}}, (m-1)N^{\frac{-1}{2} + \frac{1}{m}}) = (m-1)N^{\frac{-1}{2} + \frac{1}{m}} \leq 1, \quad (50)$$

и подстановка (50) в (47) дает

$$|S(f, P^l)| \leq N^{l(1 - \frac{1}{m})}.$$

□

PROPOSITION 5. Пусть $\tilde{q}$ — рациональное простое число. Тогда число простых идеалов $\tilde{P}_j$ в R , у которых $N(\tilde{P}_j) = q^{c_j}$ для некоторого $c_j \geq 1$, не превосходит d

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме об уникальной факторизации идеалов в полях алгебраических чисел, имеем

$$(\tilde{q}) = \prod_{j=1}^{s'} \tilde{P}_j^{e_j+1} \implies q'^d = \prod_{j=1}^{s'} N(\tilde{P}_j^{e_j+1}) \implies d = \sum_{j=1}^{s'} c_j(e_j + 1) \geq s'$$

где e_j — индекс ветвления простого идеала $\tilde{P}_j$. $\square$

Теперь сформулируем и докажем следующую усиленную форму теоремы Хуа Ло-Кена, в нашем частном случае.

ТЕОРЕМА 5. Пусть Q — целый идеал с $(Q, \delta) = 1$. Тогда справедлива оценка

$$|S(f, Q)| \leq e^{\frac{5}{2}d^2(2d+1)} e^{3.442md} N(Q)^{1-\frac{1}{m}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме об уникальной факторизации идеалов в полях алгебраических чисел мы знаем, что Q однозначно выражается как

$$Q = \prod_{j=1}^s P_j^{r_j}, \quad r_j \geq 0, \quad (51)$$

где P_j — различные простые идеалы, а $r_j \in \mathbb{Z}$.

Следовательно, по (51) и лемме 4.2 имеем

$$S(f, Q) = \prod_{j=1}^s S(f_j, P_j^{r_j}),$$

для некоторых многочленов f_j степени m (а не многочленов из построения деревьев Хуа Ло-Кена в разделе 5, хоть обозначения совпадают), и поэтому, поскольку $(P_j, \delta) = 1$ для $1 \leq j \leq s$, то по теореме 4 это дает

$$|S(f, Q)| \leq \prod_{j=1}^s C_{d,j}(m) N(P_j^{r_j})^{1-\frac{1}{m}} = N(Q)^{1-\frac{1}{m}} \prod_{j=1}^s C_{d,j}(m), \quad (52)$$

где $C_{d,j}(m)$ — константа из теоремы 7.1, соответствующая P_j .

Для любого натурального числа $x \in \mathbb{Z}$, обозначаем через $\pi(x)$ обычную рациональную функцию распределения простых чисел в $\mathbb{Z}$,

$$\pi(x) = |\{k \in \mathbb{Z}; k \leq x, k \text{ является простым в } \mathbb{Z}\}|,$$

и обозначаем через $\tilde{\pi}(x)$ функция распределения простых идеалов в R ,

$$\tilde{\pi}(x) = |\{P \subseteq R; N(P) \leq x, P \text{ является простым идеалом в } R\}|.$$

Мы знаем, что $N(P) = q^c$, где q — простое число в $\mathbb{Z}$, и поэтому предложение 7.1 дает

$$N(P) \leq x \implies q \leq x \implies \tilde{\pi}(x) \leq d\pi(x). \quad (53)$$

Положим $A = (m-1)^{\frac{2m}{m-2}}$ и $B = (m-1)^{\frac{m}{m-2}}$.

Теперь оценим $\prod_{j=1}^s C_{d,j}(m)$. Из формулировки теоремы 7.1 непосредственно следует, что

$$\prod_{j=1}^s C_{d,j}(m) \leq ((m-1)^{\frac{2}{m}})^{\tilde{\pi}(A)-\tilde{\pi}(B)} \left(\frac{m-1}{m} m^{\frac{3}{m}}\right)^{\tilde{\pi}(B)} \left(m^{\frac{d(2d+1)}{m}}\right)^{d\pi(m)} ((m-1)m^{\frac{d(2d+1)}{m}})^{d\pi(m)}, \quad (54)$$

где степень $d\pi(m)$ следует из предложения 7.1.

Поэтому, по (53) имеем

$$\prod_{j=1}^s C_{d,j}(m) \leq e^{F(m)}, \quad (55)$$

где

$$\begin{aligned} F(m) = \ln(m) & \left(\left(\frac{3}{m} - 1 \right) d\pi(B) + d\pi(m) \left(\frac{2d(2d+1)}{m} \right) \right) + \\ & + \ln(m-1) \left(\frac{2d}{m} \pi(A) + \left(1 - \frac{2}{m} \right) d\pi(B) + d\pi(m) \right). \end{aligned} \quad (56)$$

Имеем $\frac{3}{m} - 1 \leq 0$, и используя известную оценку $\pi(x) \leq \frac{5x}{4\ln(x)}$ при $x \geq 3$ (см., например, [5], с.61) в (56) получим

$$F(m) \leq \frac{5}{2} d^2 (2d+1) + \ln(m-1) \left(\frac{5dA}{2m \ln(A)} + \frac{5dB(m-2)}{4m \ln(B)} + \frac{5dm}{4 \ln(m)} \right). \quad (57)$$

Вычисляем

$$\frac{5dA \ln(m-1)}{2m \ln(A)} = md \left(\frac{5(m-2)(m-1)^{\frac{2m}{m-2}}}{4m^3} \right) \leq 0.792md, \quad (58)$$

где последнее неравенство следует из элементарного математического анализа.

Аналогичным образом получим

$$\frac{5dB(m-2) \ln(m-1)}{4m \ln(B)} = md \left(\frac{5(m-2)^2(m-1)^{\frac{m}{m-2}}}{4m^3} \right) \leq 1.4md, \quad (59)$$

и

$$\frac{5dm \ln(m-1)}{4 \ln(m)} \leq 1.25dm. \quad (60)$$

Поэтому подстановка (58), (59) и (60) в (57) дает

$$F(m) \leq \frac{5}{2} d^2 (2d+1) + 3.442md,$$

что вместе с (55) завершает доказательство. $\square$

8. Новая оценка и некоторые наблюдения

Заметим, что константу $e^{\frac{5}{2}d^2(2d+1)}e^{3.442md}$ в теореме 7.2 можно существенно улучшить, используя более точные оценки $\pi(x)$ и $\tilde{\pi}(x)$, а также числа простых идеалов, удовлетворяющих каждому из случаев теоремы 7.1.

Заметим также, что для доказательства аналога теоремы 7.2 в общем случае нам не обязательно нужна столь сильная оценка, как у Вейля. Действительно, если бы мы имели какую-либо оценку вида

$$|S(f, P)| \leq C' N^{1-\frac{1}{m}-\epsilon}; \quad \epsilon > 0,$$

для некоторой постоянной C' , то аналогично доказательству теоремы 7.1, в тех же терминах получаем, что

$$N^\epsilon \geq C' \implies C_d(m) = 1.$$

Наконец, отметим, что объединение теоремы 5.1 и теоремы 6.1 дает следующую новую оценку.

ТЕОРЕМА 6. *Справедлива оценка*

$$|S(f, P^l)| \leq C_d(m)(m-1)N(P)^{l(1-\frac{1}{m})+\frac{U_h}{m}-h}.$$

Легко видеть, что теорема 8.1 дает лучшую оценку, чем теорема 5.2, поскольку $l \geq U_h$, и также лучшую оценку, чем теорема 6.1, поскольку по лемме 5.4 $mh \geq U_h$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. В.Н. Чубариков. О кратных рациональных тригонометрических суммах над полем алгебраических чисел // Чебышевский сборник, 22:4 (2021), 306–323.
2. Hua L-K. On Exponential Sums Over an Algebraic Number Field // Canadian Journal of Mathematics. 1951;3:44-51. doi:10.4153/CJM-1951-006-4.
3. Hua L-K. On the number of solutions of Tarry's problem // Acta Sci. Sinica. — 1952. — V.1. — P.1–76.
4. Hua, L. On An Exponential Sum. Journal of the London Mathematical Society, 1938, s1-13: 54-61. <https://doi.org/10.1112/jlms/s1-13.1.54>
5. Архипов Г.И., Карацуба А.А., Чубариков В.Н. Теория кратных тригонометрических сумм // М.: Наука. Физматлит. 1987.
6. Wang Yuan. Diophantine Equations and Inequalities in Algebraic Number Fields. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1991.
7. Anthony Knapp. Advanced Algebra // Birkhäuser Boston, 2006.
8. Anthony Knapp, Basic Algebra // Birkhäuser Boston, 2006.
9. Weil, A. (1948). On Some Exponential Sums // Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 34(5), 204–207. <http://www.jstor.org/stable/88420>.
10. Чубариков В. Н. Деревья Хуа Ло-кена в теории сравнений // Математические вопросы кибернетики. Вып. 16. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. — С. 73–78.
11. Chen Jingrun. On Professor Hua's Estimate of Exponential Sums // Scientia Sinica, 20 (1977), 6: 711-719.
12. Chen Jingrun. On the representation of natural number as a sum of terms of the form $\frac{x(x+1)\cdots(x+k-1)}{k!}$ // Acta Mathematica Sinica, (1959), 264-270.
13. Nechaev V.I. An estimate of the complete rational trigonometric sum // Math. Notes, 17 (1975), No. 6, 504-511.
14. Qi Minggao and Ding Ping. On Estimate of complete trigonometric sums // China Ann. Math. B 6 (1985) 109-120.
15. Mordell, L. J. On a sum analogous to a Gauss's sum, Quart // J. Math., (Oxford), vol. 3 (1932), 161–167.

REFERENCES

1. Chubarikov, V. N., 2021. “On multiple rational trigonometric sums over a field of algebraic numbers”, *Chebyshevskii Sbornik*, Vol. 22, Iss. 4, pp. 306–323.
2. Hua, L-K., 1951. “On Exponential Sums Over an Algebraic Number Field”, *Canadian Journal of Mathematics*, 3:44-51. doi:10.4153/CJM-1951-006-4.
3. Hua, L-K., 1952. “On the number of solutions of Tarry’s problem”, *Acta Sci. Sinica*, Vol. 1. pp. 1–76.
4. Hua, L-K., 1938. “On An Exponential Sum”, *Journal of the London Mathematical Society*, s1-13:54-61. <https://doi.org/10.1112/jlms/s1-13.1.54>.
5. Arkhipov, G. I., Karatsuba, A. A., Chubarikov, V. N., 1987. “Theory of multiple trigonometric sums”, *M.: Nauka. Fizmatlit*.
6. Wang Yuan, 1991. “Diophantine Equations and Inequalities in Algebraic Number Fields”, *Springer Verlag, Berlin, Heidelberg*.
7. Anthony Knapp, 2006. “Advanced Algebra”, *Birkhäuser Boston*.
8. Anthony Knapp, 2006. “Basic Algebra”, *Birkhäuser Boston*, 2006.
9. Weil, A., 1948. “On Some Exponential Sums”, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 34(5), pp. 204–207. <http://www.jstor.org/stable/88420>.
10. Chubarikov, V. N., 2007. “Hua Lo-ken trees in the theory of comparisons”, *Mathematical issues of cybernetics*, Iss. 16. — *M.: FIZMATLIT*, pp. 73–78.
11. Chen Jingrun, 1977. “On Professor Hua’s Estimate of Exponential Sums”, *Scientia Sinica*, 20, 6: pp. 711-719.
12. Chen Jingrun, 1959. “On the representation of natural number as a sum of terms of the form $\frac{x(x+1)\cdots(x+k-1)}{k!}$ ”, *Acta Mathematica Sinica*, pp. 264–270.
13. Nechaev, V. I., 1975. “An estimate of the complete rational trigonometric sum”, *Math. Notes*, 17, № . 6, pp. 504–511.
14. Qi Minggao & Ding Ping, 1985. “On Estimate of complete trigonometric sums”, *China Ann. Math.* Vol. 6, pp. 109–120.
15. Mordell, L. J., 1932. “On a sum analogous to a Gauss’s sum”, *Quart. J. Math. (Oxford)*, Vol. 3, pp. 161–167.

Получено: 27.03.2024

Принято в печать: 28.06.2024

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 25. Выпуск 2.

УДК 519.1

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-2-208-221

Хроматичность полных расщепленных графов

Ле Ван Хонг

Хонг Ван Ле — Ханойский университет промышленности (г. Ханой, Вьетнам).*e-mail: hungmath68@gmail.com*

Аннотация

Соединение нулевого графа O_m и полного графа K_n , $O_m + K_n = S(m, n)$, называется полным разделенным графом. В этой статье мы характеризуем хроматическую уникальность, определяем хроматический номер списка и характеризуем уникальную раскрашиваемость списка для полного графа разделения $G = S(m, n)$. Мы докажем, что G хроматически уникален тогда и только тогда, когда $1 \leq m \leq 2$, $ch(G) = n + 1$, G является уникальным раскрашиваемым графом с 3-списком тогда и только тогда, когда $m \geq 4$, $n \geq 4$ и $m + n \geq 10$, $m(G) \leq 4$ на каждые $1 \leq m \leq 5$ и $n \geq 6$. Также доказано некоторое свойство графа $G = S(m, n)$, когда он представляет собой k -листовой раскрашиваемый граф.

Ключевые слова: хроматически уникальный, список-хроматическое число, уникально списочный раскрашиваемый граф, полный расщепляемый граф.

Библиография: 40 названий.

Для цитирования:

Ле Ван Хонг. Хроматичность полных расщепленных графов // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 2, с. 208–221.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 25. No. 2.

UDC 519.1

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-2-208-221

The chromaticity of complete split graphs

Hung Xuan Le

Hung Xuan Le — Hanoi University of Industry (Hanoi, Vietnam).*e-mail: hungmath68@gmail.com*

Abstract

The join of null graph O_m and complete graph K_n , $O_m + K_n = S(m, n)$, is called a complete split graph. In this paper, we characterize chromatically unique, determine list-chromatic number and characterize unique list colorability of the complete split graph $G = S(m, n)$. We shall prove that G is chromatically unique if and only if $1 \leq m \leq 2$, $ch(G) = n + 1$, G is uniquely 3-list colorable graph if and only if $m \geq 4$, $n \geq 4$ and $m + n \geq 10$, $m(G) \leq 4$ for every $1 \leq m \leq 5$ and $n \geq 6$. Some the property of the graph $G = S(m, n)$ when it is k -list colorable graph also proved.

Keywords: chromatically unique, list- chromatic number, uniquely list colorable graph, complete split graph.

Bibliography: 40 titles.

For citation:

Le Xuan Hung, 2024. “The chromaticity of complete split graphs”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 2, pp. 208–221.

1. Introduction

All graphs considered in this paper are finite undirected graphs without loops or multiple edges. If G is a graph, then $V(G)$, $E(G)$ (or V , E in short) and $\overline{G}$ will denote its vertex-set, its edge-set and its complementary graph, respectively. The set of all neighbours of a subset $S \subseteq V(G)$ is denoted by $N_G(S)$ (or $N(S)$ in short). Further, for $W \subseteq V(G)$ the set $W \cap N_G(S)$ is denoted by $N_W(S)$. If $S = \{v\}$, then $N(S)$ and $N_W(S)$ are denoted shortly by $N(v)$ and $N_W(v)$, respectively. For a vertex $v \in V(G)$, the degree of v (resp., the degree of v with respect to W), denoted by $\deg(v)$ (resp., $\deg_W(v)$), is $|N_G(v)|$ (resp., $|N_W(v)|$). The subgraph of G induced by $W \subseteq V(G)$ is denoted by $G[W]$. The null graphs and complete graphs of order n are denoted by O_n and K_n , respectively. Unless otherwise indicated, our graph-theoretic terminology will follow [2].

An *acyclic* graph, one not containing any cycles, is called *forest*. A connected forest is called a *tree*, a tree of order n is denoted by T_n .

Let $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$ be two graphs such that $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Their *union* $G = G_1 \cup G_2$ has, as expected, $V(G) = V_1 \cup V_2$ and $E(G) = E_1 \cup E_2$. Their *join* defined is denoted $G_1 + G_2$ and consists of $G_1 \cup G_2$ and all edges joining V_1 with V_2 .

A graph $G = (V, E)$ is called a *split graph* if there exists a partition $V = I \cup K$ such that $G[I]$ and $G[K]$ are null and complete graphs, respectively. We will denote such a graph by $S(I \cup K, E)$. The join of null graph O_m and complete graph K_n , $O_m + K_n = S(m, n)$, is called a *complete split graph*. The notion of split graphs was introduced in 1977 by Földes and Hammer [14]. A role that split graphs play in graph theory is clarified in [14] and in [7], [9], [27], [30], [34], [35], [36]. These graphs have been paid attention also because they have connection with packing and knapsack problems [11], with the matroid theory [15], with Boolean functions [31], with the analysis of parallel processes in computer programming [18] and with the task allocation in distributed systems [19]. Many generalizations of split graphs have been made. The newest one is the notion of bisplit graphs introduced by Brandstädt et al. [6].

Let $G = (V, E)$ be a graph and λ is a positive integer.

A λ -*coloring* of G is a bijection $f : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, \lambda\}$ such that $f(u) \neq f(v)$ for any adjacent vertices $u, v \in V(G)$. The smallest positive integer λ such that G has a λ -coloring is called the *chromatic number* of G and is denoted by $\chi(G)$. We say that a graph G is n -*chromatic* if $n = \chi(G)$.

Let $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, two λ -colorings f and g are considered different if and only if $f(v_k) \neq g(v_k)$ for some $k = 1, 2, \dots, n$. Let $P(G, \lambda)$ (or simply $P(G)$ if there is no danger of confusion) denote the number of distinct λ -colorings of G . It is well-known that for any graph G , $P(G, \lambda)$ is a polynomial in λ , called the *chromatic polynomial* of G . The notion of chromatic polynomials was first introduced by Birkhoff [4] in 1912 as a quantitative approach to tackle the four-color problem. Two graphs G and H are called *chromatically equivalent* or in short χ -*equivalent*, and we write in notation $G \sim H$, if $P(G, \lambda) = P(H, \lambda)$. A graph G is called *chromatically unique* or in short χ -*unique* if $G' \cong G$ (i.e., G' is isomorphic to G) for any graph G' such that $G' \sim G$. For examples, all cycles are χ -unique [25]. The notion of χ -unique graphs was first introduced and studied by Chao and Whitehead [10] in 1978. The readers can see the surveys [22], [25], [26] and [36] for more informations about χ -unique graphs.

Let $(L_v)_{v \in V}$ be a family of sets. We call a coloring f of G with $f(v) \in L_v$ for all $v \in V$ is a *list coloring from the lists L_v* . We will refer to such a coloring as an L -coloring. The graph G is called λ -*list-colorable*, or λ -*choosable*, if for every family $(L_v)_{v \in V}$ with $|L_v| = \lambda$ for all v , there is a coloring of G from the lists L_v . The smallest positive integer λ such that G has a λ -choosable is

called the *list-chromatic number*, or *choice number* of G and is denoted by $ch(G)$.

Let G be a graph with n vertices and suppose that for each vertex v in G , there exists a list of k colors L_v , such that there exists a unique L -coloring for G , then G is called a *uniquely k -list colorable graph* or a $UkLC$ graph for short. The idea of uniquely colorable graph was introduced independently by Dinitz and Martin [13] and by Mahmoodian and Mahdian [29] (Mahmoodian and Mahdian have obtained some results on the uniquely k -list colorable complete multipartite graphs). There have been many interesting and insightful research results on these issues for different graph classes (see [16], [20], [21], [23], [24], [29]). However, these are still issues that have not been resolved thoroughly, so much more attention is needed.

In this paper, we shall characterize chromatically unique, determine list-chromatic number and characterize unique list colorability of the complete split graph $G = S(m, n)$. Namely, we shall prove that G is chromatically unique if and only if $1 \leq m \leq 2$ (Section 2), $ch(G) = n + 1$ (Section 3), G is uniquely 3-list colorable graph if and only if $m \geq 4$, $n \geq 4$ and $m + n \geq 10$, $m(G) \leq 4$ for every $1 \leq m \leq 5$ and $n \geq 6$ (Section 5), some the property of the graph G when it is k -list colorable graph also proved (Section 4).

2. Chromatically unique

For a graph G and a positive integer k , a partition $\{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ of $V(G)$ is called a k -independent partition in G if each A_i is a non-empty independent set of G . Let $\alpha(G, k)$ denote the number of k -independent partitions in G . Hence, $P(G, \lambda) = \sum_{1 \leq k \leq n} \alpha(G, k)(\lambda)_k$ where $(\lambda)_k = \lambda(\lambda - 1) \dots (\lambda - k + 1)$.

The polynomial $\sigma(G, x) = \sum_{1 \leq k \leq n} \alpha(G, k)x^k$ is called the σ -polynomial of G . For convenience, simply denote $\sigma(G, x)$ by $\sigma(G)$ and $G \cong H$ by $G = H$. The following lemmas will be used to prove our main results.

LEMMA 7 ([25]). *If K_n is a complete graph on n vertices then $\chi(K_n) = n$ and G is χ -unique.*

LEMMA 8 ([32]). *Let G and H be two χ -equivalent graphs. Then*

- (i) $|V(G)| = |V(H)|$;
- (ii) $|E(G)| = |E(H)|$;
- (iii) $\chi(G) = \chi(H)$;
- (iv) G is connected if and only if H is connected;
- (v) G is 2-connected if and only if H is 2-connected.

LEMMA 9 ([32]). (i) *All trees of the same order are χ -equivalent;*

(ii) *A tree T_n is χ -unique if and only if $1 \leq n \leq 3$.*

LEMMA 10 ([8]). *Let G and H be two disjoint graphs. Then*

$$\sigma(G + H, x) = \sigma(G, x)\sigma(H, x).$$

LEMMA 11 ([28]). *Let G and H be two graphs. Then $P(G, \lambda) = P(H, \lambda)$ if and only if $\sigma(G, x) = \sigma(H, x)$.*

LEMMA 12 ([36]). *Let $G = S(I \cup K, E)$ be a split graph with $|K| = n$ and $k = \max\{\deg(u) \mid u \in I\}$. Then*

- (i) G is n -chromatic if and only if $k < n$;
- (ii) G is $(n + 1)$ -chromatic if and only if $k = n$.

LEMMA 13 ([21]). *The graph $G = K_2^m + K_n$ is χ -unique.*

Now we characterize χ -unique complete split graphs.

THEOREM 1. $G = S(m, n)$ is chromatically unique if and only if $1 \leq m \leq 2$.

PROOF. Let $V(G) = I \cup K$ is a partition of $V(G)$ such that $G[I] = O_m$, $G[K] = K_n$, $G = G[I] + G[K]$, $I = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ and $K = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$.

First we prove the necessity. Suppose that $G = S(m, n)$ is χ -unique. For suppose on the contrary that $m \geq 3$. If $n = 1$ then $G = T_{m+1}$, where T_{m+1} is a tree of order $m + 1$. By (ii) of Lemma 9, G is not χ -unique because $m + 1 \geq 4$, a contradiction. So $n \geq 2$. Set $G' = (I' \cup K', E')$ with

$$I' = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}, K' = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

and $E' = E_1 \cup E_2 \cup E_3$ with

$$E_1 = \{v_1 u_1, u_2 u_3, \dots, u_{m-1} u_m\},$$

$$E_2 = \{u_i v_j \mid i = 1, 2, \dots, m, j = 2, \dots, n\},$$

$$E_3 = \{v_i v_j \mid i \neq j; i, j = 1, 2, \dots, n\}.$$

It is not difficult to see that

$$G = G'[\{v_2, v_3, \dots, v_n\}] + G'[\{v_1, u_1, u_2, \dots, u_m\}] = K_{n-1} + T_{m+1},$$

$$G' = G'[\{v_2, v_3, \dots, v_n\}] + G'[\{v_1, u_1, u_2, \dots, u_m\}] = K_{n-1} + T'_{m+1},$$

where T_{m+1} and T'_{m+1} are trees of order $m + 1$. By (i) of Lemma 9, $P(T_{m+1}, \lambda) = P(T'_{m+1}, \lambda)$. By Lemma 10 and Lemma 11, it follows that $P(G, \lambda) = P(G', \lambda)$, i.e., $G \sim G'$. It is clear that

$$|\{u \in V(G) \mid \deg_G(u) = \Delta(G) = m + n - 1\}| = |\{v_1, v_2, \dots, v_n\}| = n,$$

$$|\{u \in V(G') \mid \deg_{G'}(u) = \Delta(G') = m + n - 1\}| = |\{v_2, v_3, \dots, v_n\}| = n - 1.$$

So, $G \not\sim G'$ and G is not χ -unique, a contradiction. Thus, $1 \leq m \leq 2$.

Now we prove the sufficiency. Suppose that $1 \leq m \leq 2$. If $m = 1$ then G is a complete graph K_{n+1} . By Lemma 7, G is χ -unique. If $m = 2$ then $G = K_2^1 + K_n$. By Lemma 13, G is χ -unique. $\square$

3. List-chromatic number

We need the following Lemmas 14, 15 to prove our results.

LEMMA 14 ([12]). *For a graph G , $ch(G) \geq \chi(G)$.*

We determine list-chromatic number for complete graphs.

LEMMA 15. *If K_n is a complete graph on n vertices then $ch(K_n) = n$.*

PROOF. By Lemma 7 and Lemma 14, $ch(K_n) \geq n$. Set $V(K_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ and L_{v_i} is a list of colors of V_i such that $|L_{v_i}| = n$ for every $i = 1, 2, \dots, n$. Let f be a coloring of K_n such that

$$f(v_1) \in L_{v_1}, f(v_2) \in L_{v_2} \setminus \{f(v_1)\}, \dots, f(v_n) \in L_{v_n} \setminus \{f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_{n-1})\}.$$

Then f is n -choosable for K_n , i.e., $ch(K_n) \leq n$. Thus, $ch(K_n) = n$. $\square$

Now we determine list-chromatic number for complete split graphs.

THEOREM 2. *List-chromatic number of $G = S(m, n)$ is*

$$ch(G) = n + 1.$$

PROOF. By (ii) of Lemma 12 and Lemma 14, $ch(G) \geq n + 1$. Let $V(G) = I \cup K$ is a partition of $V(G)$ such that $G[I] = O_m$, $G[K] = K_n$, $I = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ and $K = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Let

$$L_{u_1}, L_{u_2}, \dots, L_{u_m}, L_{v_1}, L_{v_2}, \dots, L_{v_n}$$

be the lists of colors of

$$u_1, u_2, \dots, u_m, v_1, v_2, \dots, v_n,$$

respectively, such that

$$|L_{u_1}| = |L_{u_2}| = \dots = |L_{u_m}| = |L_{v_1}| = |L_{v_2}| = \dots = |L_{v_n}| = n + 1.$$

By Lemma 15, there exists $(n + 1)$ -choosable g of $G[K \cup \{u_1\}] = K_{n+1}$ with the lists of colors $L_{v_1}, L_{v_2}, \dots, L_{v_n}, L_{u_1}$. Let f be the coloring of G such that

$$f(v_i) = g(v_i) \text{ for every } i = 1, 2, \dots, n,$$

$$f(u_1) = g(u_1),$$

$$f(u_i) \in L_{u_i} \setminus g(N(u_i)) \text{ for every } i = 2, 3, \dots, m.$$

Then f is $(n + 1)$ -choosable for G , i.e., $ch(G) \leq n + 1$. Thus $ch(G) = n + 1$. $\square$

4. Property of $S(m, n)$ when it is k -list colorable

If a graph G is not uniquely k -list colorable, we also say that G has property $M(k)$. So G has the property $M(k)$ if and only if for any collection of lists assigned to its vertices, each of size k , either there is no list coloring for G or there exist at least two list colorings. The least integer k such that G has the property $M(k)$ is called the m -number of G , denoted by $m(G)$. This conception was originally introduced by Mahmoodian and Mahdian in [29].

LEMMA 16 ([29]). *Each $UkLC$ graph is also a $U(k - 1)LC$ graph.*

LEMMA 17 ([29]). *The graph G is $UkLC$ if and only if $k < m(G)$.*

LEMMA 18 ([29]). *A connected graph G has the property $M(2)$ if and only if every block of G is either a cycle, a complete graph, or a complete bipartite graph.*

LEMMA 19 ([29]). *For every graph G we have $m(G) \leq |E(\overline{G})| + 2$.*

LEMMA 20 ([29]). *Every $UkLC$ graph has at least $3k - 2$ vertices.*

For example, one can easily see that the graph $S(2, 2)$ has the property $M(3)$ and it is $U2LC$, so $m(S(2, 2)) = 3$.

PROPOSITION 1. *Let $G = S(m, n)$ be a $UkLC$ graph with $k \geq 2$. Then*

(i) $m \geq 2$;

(ii) $k < \frac{m^2 - m + 4}{2}$;

(iii) $k \leq \lfloor \frac{m + n + 2}{3} \rfloor$.

PROOF. (i) If $m = 1$ then G is a complete graph K_{n+1} . Lemma 18, G has the property $M(2)$, a contradiction.

(ii) It is not difficult to see that $|E(\overline{G})| = \frac{m(m-1)}{2}$. By Lemma 19, we have

$$m(G) \leq |E(\overline{G})| + 2 = \frac{m^2 - m + 4}{2}.$$

By Lemma 17, we have $k < \frac{m^2-m+4}{2}$.

(iii) Assertion (iii) follows immediately from Lemma 20. $\square$

Let $G = S(m, n)$ be a ULC graph with $V(G) = I \cup K$, $G[I] = O_m$, $G[K] = K_n$, $m \geq 2$, $n \geq 1$, $k \geq 3$.
Set

$$I = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}, K = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}.$$

Suppose that, for the given k -list assignment L :

$$L_{u_i} = \{a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,k}\} \text{ for every } i = 1, \dots, m,$$

$$L_{v_i} = \{b_{i,1}, b_{i,2}, \dots, b_{i,k}\} \text{ for every } i = 1, \dots, n,$$

there is a unique k -list color f :

$$f(u_i) = a_{i,1} \text{ for every } i = 1, \dots, m,$$

$$f(v_i) = b_{i,1} \text{ for every } i = 1, \dots, n.$$

THEOREM 3. (i) $b_{i,1} \neq b_{j,1}$, where $1 \leq i, j \leq n$ and $i \neq j$;

(ii) $a_{i,1} \neq b_{j,1}$, where $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$;

(iii) $a_{i,1} \notin \{a_{j,2}, a_{j,3}, \dots, a_{j,k}\}$, where $i, j = 1, 2, \dots, m$.

PROOF. (i) Since $G[K] = K_n$, it is not difficult to see that $b_{i,1} = f(v_i) \neq f(v_j) = b_{j,1}$, where $1 \leq i, j \leq n$ and $i \neq j$.

(ii) Since $G[K \cup \{u_i\}] = K_{n+1}$ for every $i = 1, \dots, m$, it is not difficult to see that

$$a_{i,1} = f(u_i) \neq f(v_j) = b_{j,1},$$

where $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.

(iii) If $i = j$, then it is obvious that the conclusion is true. If $i \neq j$, then we suppose that there exists i_0, j_0 such that $i_0, j_0 = 1, \dots, m$; $i_0 \neq j_0$ and $a_{i_0,1} \in \{a_{j_0,2}, a_{j_0,3}, \dots, a_{j_0,k}\}$. It is clear that $a_{i_0,1} \neq a_{j_0,1}$. Let f' be the coloring of G such that

$$(a) \ f'(u_{j_0}) = a_{i_0,1};$$

$$(b) \ f'(u_i) = a_{i,1} \text{ for every } i \in \{1, \dots, m\}, i \neq j_0;$$

$$(c) \ f'(v_i) = b_{i,1} \text{ for every } i = 1, \dots, n.$$

Then f' is a k -list coloring for G and $f' \neq f$, a contradiction. $\square$

Set $\overline{f(v)} = L_v \setminus \{f(v)\}$ for every $v \in V(G) = I \cup K$.

THEOREM 4. (i) $2 \leq |f(I)|$;

(ii) $|f(I)| \leq m - 2$, where $m \geq 4$;

(iii) $\cup_{v \in I} \overline{f(v)} \subseteq f(K)$;

(iv) $\cup_{v \in V(G)} \overline{f(v)} \subseteq f(V(G))$;

(v) There exists $i \in \{1, \dots, n\}$ such that $\overline{f(v_i)} \subseteq f(I)$.

PROOF. (i) For suppose on the contrary that $|f(I)| = 1$, then $a_{1,1} = a_{2,1} = \dots = a_{m,1} = a$. Set $H = G - I$, it is not difficult to see that H is a complete graph K_n . We assign the following lists L'_v for the vertices v of H :

If $a \in L_v$ then $L'_v = L_v \setminus \{a\}$,

If $a \notin L_v$ then $L'_v = L_v \setminus \{b\}$, where $b \in L_v$ and $b \neq f(v)$.

It is clear that $|L'_v| = k - 1 \geq 2$ for every $v \in V(H)$. By Lemma 18, H has the property $M(2)$. So by Lemma 16, H has the property $M(k - 1)$. It follows that with lists L'_v , there exist at least two list colorings for the vertices v of H . So it is not difficult to see that with lists L_v , there exist at least two list colorings for the vertices v of G , a contradiction.

(ii) For suppose on the contrary that $|f(I)| \geq m - 1$. We consider separately two cases.

Case 1: $|f(I)| = m - 1$.

Without loss of generality, we may assume that $a_{1,1} = a_{2,1}$ and $a_{i,1} \neq a_{j,1}$ for every $i, j \in \{2, \dots, m\}, i \neq j$. Set graph $G' = (V', E')$, with

$$V' = I \cup K, E' = (E(G) \cup \{u_i u_j | i, j = 1, 2, \dots, m; i \neq j\}) \setminus \{u_1 u_2\}.$$

It is clear that G' is complete split graph $S(2, m+n-2)$ with $V(G') = I' \cup K'$, where

$$I' = \{u_1, u_2\}, K' = \{u_3, u_4, \dots, u_m, v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

Since $a_{1,1} = a_{2,1}$, it is not difficult we have got a contradiction.

Case 2: $|f(I)| = m$.

In this case, $a_{i,1} \neq a_{j,1}$ for every $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}, i \neq j$. Set graph $G'' = (V'', E'')$, with

$$V'' = I \cup K, E'' = E(G) \cup \{u_i u_j | i, j = 1, 2, \dots, m; i \neq j\}.$$

It is clear that G'' is a complete graph K_{m+n} . By Lemma 18, G'' has the property $M(2)$, so with lists L_v , there exist at least two list colorings for the vertices v of G'' . Since $V(G) = V(G'')$, it is not difficult to see that with lists L_v , there exist at least two list colorings for the vertices v of G , a contradiction.

(iii) For suppose on the contrary that $\cup_{v \in I} \overline{f(v)} \not\subseteq f(K)$. Then there exists i_0, j_0 such that $a_{i_0, j_0} \notin f(K)$ with $1 \leq i_0 \leq m, 2 \leq j_0 \leq k$. Let f' be the coloring of G such that

- (a) $f'(u_{i_0}) = a_{i_0, j_0}$;
- (b) $f'(u_i) = a_{i,1}$ for every $i \in \{1, \dots, m\}, i \neq i_0$;
- (c) $f'(v_i) = b_{i,1}$ for every $i = 1, \dots, n$.

Then f' is a k -list coloring for G and $f' \neq f$, a contradiction.

(iv) For suppose on the contrary that $\cup_{v \in I \cup K} \overline{f(v)} \not\subseteq f(V(G))$. We consider separately two cases.

Case 1: There exists i_0, j_0 such that $a_{i_0, j_0} \notin f(V(G))$ with $1 \leq i_0 \leq m, 2 \leq j_0 \leq k$.

Let f' be the coloring of G such that

- (a) $f'(u_{i_0}) = a_{i_0, j_0}$;
- (b) $f'(u_i) = a_{i,1}$ for every $i \in \{1, \dots, m\}, i \neq i_0$;
- (c) $f'(v_i) = b_{i,1}$ for every $i = 1, \dots, n$.

Then f' is a k -list coloring for G and $f' \neq f$, a contradiction.

Case 2: There exists i_0, j_0 such that $b_{i_0, j_0} \notin f(V(G))$ with $1 \leq i_0 \leq n, 2 \leq j_0 \leq k$.

Let f'' be the coloring of G such that

- (a) $f''(u_i) = a_{i,1}$ for every $i \in \{1, \dots, m\}$;
- (b) $f''(v_{i_0}) = b_{i_0, j_0}$;
- (c) $f''(v_i) = b_{i,1}$ for every $i \in \{1, \dots, n\}, i \neq i_0$.

Then f'' is a k -list coloring for G and $f'' \neq f$, a contradiction.

(v) For suppose on the contrary that $\overline{f(v_i)} \not\subseteq f(I)$ for every $i \in \{1, \dots, n\}$, then $|\overline{f(v_i)} \setminus f(I)| \geq 1$ for every $i \in \{1, \dots, n\}$. So $|L_{v_i} \setminus f(I)| \geq 2$ for every $i \in \{1, \dots, n\}$. Set graph

$$H = G - I = G[K] = K_n.$$

Let $L'_{v_i} \subseteq L_{v_i} \setminus f(I)$ such that $|L'_{v_i}| = 2$ for every $i \in \{1, \dots, n\}$. By Lemma 18, H has the property $M(2)$, it follows that with lists L'_{v_i} , there exist at least two list colorings for the vertices v_i for every $i \in \{1, \dots, n\}$. So it is not difficult to see that with lists L_v , there exist at least two list colorings for the vertices v of G , a contradiction. $\square$

5. Uniquely 3-list colorable complete split graphs

We need the following Lemmas 21–29 to prove our results.

- LEMMA 21. (i) $m(S(1, n)) = 2$ for every $n \geq 1$;
(ii) $m(S(r, 1)) = 2$ for every $r \geq 1$;
(iii) $m(S(2, n)) = 3$ for every $n \geq 2$.

PROOF. (i) It is clear that $S(1, n)$ is a complete graph for every $n \geq 1$, by Lemma 18, $m(S(1, n)) = 2$ for every $n \geq 1$.

(ii) It is clear that $S(r, 1)$ is a complete bipartite graph for every $r \geq 1$, by Lemma 18, $m(S(r, 1)) = 2$ for every $r \geq 1$.

(iii) By Lemma 18, $G = S(2, n)$ is U2LC for every $n \geq 2$.

It is not difficult to see that $|E(\overline{G})| = 1$. By Lemma 19, $m(S(2, n)) \leq 3$ for every $n \geq 2$.

Thus, $m(S(2, n)) = 3$ for every $n \geq 2$. $\square$

LEMMA 22 ([16]). $m(S(3, n)) = 3$ for every $n \geq 2$;

LEMMA 23 ([16]). For every $r \geq 2$, $m(S(r, 3)) = 3$.

LEMMA 24 ([17]). Graphs $S(5, 4)$ and $S(4, 4)$ have property $M(3)$.

LEMMA 25 ([33]). The graph $S(4, 5)$ has property $M(3)$.

LEMMA 26. $G = S(4, n)$ has the property $M(4)$ for every $n \geq 2$;

PROOF. Let $G = S(4, n)$ is a complete split graph with $V(G) = I \cup K$, $G[I] = O_4$, $G[K] = K_n$, $n \geq 2$. Set

$$I = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}, K = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}.$$

For suppose on the contrary that graph $G = S(4, n)$ is U4LC. So there exists a list of 4 colors L_v for each vertex $v \in V(G)$, such that there exists a unique L -coloring f for G . By (i) and (ii) of Theorem 4, $|f(I)| = 2$.

Let $f(I) = \{a, b\}$. Set graph $H = G - I$, it is not difficult to see that H is a complete graph K_n . We assign the following lists L'_v for the vertices v of H :

- (a) If $a, b \in L_v$ then $L'_v = L_v \setminus \{a, b\}$,
- (b) If $a \in L_v, b \notin L_v$ then $L'_v = L_v \setminus \{a, c\}$, where $c \in L_v$ and $c \neq f(v)$,
- (c) If $a \notin L_v, b \in L_v$ then $L'_v = L_v \setminus \{b, c\}$, where $c \in L_v$ and $c \neq f(v)$,
- (d) If $a, b \notin L_v$ then $L'_v = L_v \setminus \{c, d\}$, where $c, d \in L_v$, $c \neq d$ and $c, d \neq f(v)$.

It is clear that $|L'_v| = 2$ for every $v \in V(H)$. By Lemma 18, H has the property $M(2)$. It follows that with lists L'_v , there exist at least two list colorings for the vertices v of H . So it is not difficult to see that with lists L_v , there exist at least two list colorings for the vertices v of G , a contradiction. $\square$

- LEMMA 27 ([39]). (i) For every $n \geq 2$, $S(5, n)$ has the property $M(4)$;
(ii) If $n \geq 5$ then $m(S(5, n)) = 4$.

LEMMA 28 ([38]). For every $m \geq 1, k \geq 2$, $S(m, 2k - 3)$ has the property $M(k)$.

LEMMA 29 ([38]). For every $n \geq 1, k \geq 2$, $S(2k - 3, n)$ has the property $M(k)$.

Now we prove our results.

THEOREM 5. The graph $G = S(m, n)$ is uniquely 3-list colorable graph if and only if $m \geq 4$, $n \geq 4$ and $m + n \geq 10$.

PROOF. Firrst we prove the necessity. Suppose that $G = S(m, n)$ is U3LC. If $m < 4$ or $n < 4$ then by Lemma 28 and Lemma 29, it is not difficult to see that G has the property $M(3)$, a contradiction. Therefore, $m \geq 4$ and $n \geq 4$. It follows that $m + n \geq 8$. If $m + n = 8$ then $m = 4$ and $n = 4$, by Lemma 24, G has property $M(3)$, a contradiction. If $m + n = 9$ then $(m, n) \in \{(4, 5), (5, 4)\}$, by Lemma 24 and Lemma 25, G has property $M(3)$, a contradiction. Thus, $m + n \geq 10$.

Now we prove the sufficiency. Suppose that $m \geq 4$, $n \geq 4$ and $m + n \geq 10$. Let $V(G) = I \cup K$, $G[I] = O_m$, $G[K] = K_n$, $I = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$, $K = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. We prove G is U3LC by induction on $m + n$. If $m + n = 10$, then we consider separately three cases.

(i) $m = 4$ and $n = 6$.

We assign the following lists for the vertices of G :

$$L_{u_1} = \{1, 3, 4\}, L_{u_2} = \{1, 7, 8\}, L_{u_3} = \{2, 5, 6\}, L_{u_4} = \{2, 7, 8\};$$

$$L_{v_1} = \{1, 2, 3\}, L_{v_2} = \{1, 2, 4\}, L_{v_3} = \{1, 2, 5\}, L_{v_4} = \{1, 2, 6\}, L_{v_5} = \{1, 2, 7\}, L_{v_6} = \{1, 2, 8\}.$$

A unique coloring f of G exists from the assigned lists:

$$f(u_1) = 1, f(u_2) = 1, f(u_3) = 2, f(u_4) = 2;$$

$$f(v_1) = 3, f(v_2) = 4, f(v_3) = 5, f(v_4) = 6, f(v_5) = 7, f(v_6) = 8.$$

(ii) $m = 5$ and $n = 5$.

We assign the following lists for the vertices of G :

$$L_{u_1} = \{1, 4, 5\}, L_{u_2} = \{1, 3, 6\}, L_{u_3} = \{2, 3, 7\}, L_{u_4} = \{2, 4, 5\}, L_{u_5} = \{2, 6, 7\};$$

$$L_{v_1} = \{1, 2, 3\}, L_{v_2} = \{1, 2, 4\}, L_{v_3} = \{1, 2, 5\}, L_{v_4} = \{1, 2, 6\}, L_{v_5} = \{1, 2, 7\}.$$

A unique coloring f of G exists from the assigned lists:

$$f(u_1) = 1, f(u_2) = 1, f(u_3) = 2, f(u_4) = 2, f(u_5) = 2;$$

$$f(v_1) = 3, f(v_2) = 4, f(v_3) = 5, f(v_4) = 6, f(v_5) = 7.$$

(iii) $m = 6$ and $n = 4$.

We assign the following lists for the vertices of G :

$$L_{u_1} = \{1, 3, 5\}, L_{u_2} = \{1, 4, 5\}, L_{u_3} = \{2, 3, 6\}, L_{u_4} = \{2, 3, 4\}, L_{u_5} = \{2, 4, 6\}, L_{u_6} = \{2, 5, 6\};$$

$$L_{v_1} = \{1, 2, 3\}, L_{v_2} = \{1, 2, 4\}, L_{v_3} = \{1, 2, 5\}, L_{v_4} = \{1, 2, 6\}.$$

A unique coloring f of G exists from the assigned lists:

$$f(u_1) = 1, f(u_2) = 1, f(u_3) = 1, f(u_4) = 2, f(u_5) = 2, f(u_6) = 2;$$

$$f(v_1) = 3, f(v_2) = 4, f(v_3) = 5, f(v_4) = 6.$$

Now let $m + n > 10$ and assume the assertion for smaller values of $m + n$. We consider separately two cases.

Case 1: $m \geq 5$.

Set $G' = G - u_m = S(m - 1, n)$. By the induction hypothesis, for each vertex v in G' , there exists a list of 3 colors L'_v , such that there exists a unique f' for G' . We assign the following lists for the vertices of G :

$$L_{u_m} = L'_{u_{m-1}}, L_v = L'_v \text{ if } v \in V(G').$$

A unique coloring f of G exists from the assigned lists:

$$f(u_m) = f'(u_{m-1}), f(v) = f'(v) \text{ if } v \in V(G').$$

Case 2: $n \geq 5$.

Set $G' = G - v_n = S(m, n - 1)$. By the induction hypothesis, for each vertex v in G' , there exists a list of 3 colors L'_v , such that there exists a unique f' for G' . We assign the following lists for the vertices of G :

$$L_{v_n} = \{f'(v_{n-1}), f'(v_{n-2}), t\} \text{ with } t \notin f'(G'), L_v = L'_v \text{ if } v \in V(G').$$

A unique coloring f of G exists from the assigned lists:

$$f(v_n) = t, f(v) = f'(v) \text{ if } v \in V(G'). \quad \square$$

COROLLARY 1. $m(S(4, n)) = 4$ for every $n \geq 6$.

PROOF. It follows from Theorem 5 and Lemma 26. $\square$

THEOREM 6. $m(S(r, n)) \leq 4$ for every $1 \leq r \leq 5$ and $n \geq 6$.

PROOF. It follows from Lemma 21 to Lemma 27. $\square$

6. Conclusion

The coloring problem and the list coloring problem are interesting topics in graph theory. Coloring graphs found application in many practical problems, for example, coding theory or security. Clearly, to estimate the chromatic as well as the chromatic uniqueness is very important. So far there have been many research results on this topic for different graph layers. However, the problem has not been generally solved, and further research is needed. This article contributes to enriching the research results on the problem of listing colors.

The main results of the paper have identified the characterized chromatically unique (Theorem 1), list-chromatic number (Theorem 2) and characterized unique list colorability (Theorem 5 and Theorem 6) of complete split graph $G = S(m, n)$. Some the property of the graph $G = S(m, n)$ when it is k -list colorable graph also proved (Theorem 3 and Theorem 4). The desire in the future will achieve deeper results on the issues raised in this article.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бехзад, М. Графы и хроматическое число // Докторская диссертация (Мичиганский государственный университет), 1965.
2. Бехзад М., Чартранд Г. // Введение в теорию графов, Эллис и Бэкон, Бостон, 1971.
3. Бехзад М., Чартранд Г., Купер Дж. Числа раскраски полных графов // Журнал Лондонского мат. общ., 42 (1967), С. 226 - 228.
4. Биркгоф Г. Д. Детерминантная формула для числа способов раскраски карты // Анналы математики, 14 (2), (1912), С. 42–46.
5. Бонди Дж. А., Мурти У. С. Р. Теория графов с приложениями // МакМиллан, 1976.
6. Брандстадт А., Хаммер П. Л., Ле В. Б., Лозин В.В. Бисплитные графы // Дискретная математика, 299 (2005), С. 11–32.
7. Чен Б. Л., Фу Х. Л., Ко М. Т. Общее хроматическое число и хроматический индекс расщепленных графов // Журнал комбинаторной математики и комбинаторных вычислений, 17 (1995), С. 137–146.
8. Брент Ф. Расширения хроматического многочлена и логконкавильность // Транс американская математическая школа, 332 (1992), С. 729 – 756.
9. Буркард Р. Э., Хаммер П. Л. Замечание о гамильтоновых расщепленных графах // Журнал комбинаторной теории. Серия А., Вып. 28 (1980), С. 245–248.
10. Чао К. Ю., Уайтхед Э. Г. мл. О хроматической эквивалентности графов // Теория и приложения графов, под ред. Й. Алави и Д.Р. Лика, Конспекты лекций по математике, 642 (1978), С. 121 -131.
11. Чватал В., Хаммер П. Л. Агрегация неравенств в целочисленном программировании // Анналы дискретной математики, 1 (1977), С. 145–162.
12. Дистель Р. Теория графов // Шпрингер - Верлаг, Нью-Йорк, 2000.

13. Диниц Дж. Х., Мартин У. Дж. Полином обусловленности уникально списочного раскрашиваемого графа // Австралийский журнал по комбинаторике, 11 (1995), С. 105–115.
14. Фолдес С., Хаммер П. Л. Разделенные рафы // Восьмая Юго-Восточная конференция по комбинированию., Теория графов и вычисления (Университет штата Луизиана, Батон-Руж, Ла., 1977), С. 311–315. Конгресс Нумерантиум, № XIX, Утилита Математика, Виннипег, штат Мэн., 1977.
15. Фолдес С., Хаммер П. Л. О классе графов, порождающих матроиды // Комбинаторика (Успехи Пятого венгерского коллоквиума, Кестхей 1976) vol. 1, С. 331–352. Математические интервью в Обществе Яноша Больяи 18, Северная Голландия, Амстердам - Нью-Йорк, 1978.
16. Гебле М., Махмудян Э.С. Об уникальном списке раскрашиваемых графов // Арс Комбинатория, 59 (2001), С. 307–318.
17. Хе У. Дж., Ван Ю. Н., Шен Ю.Ф., Ма Х. О свойстве $M(3)$ некоторых полных многочастных графов // Австралийский журнал комбинаторики, в печати.
18. Хендерсон П. Б., Залкштейн Ю. Теоретико-графовая характеристика класса синхронизирующих PV_{chunk} примитивов // СИАМ Журнал по вычислительной технике, 6 (1977), С. 88–108.
19. Хишам А. Х., Хешам Эль-Ревини. Распределение задач в распределенных системах: модель расщепленного графа // Журнал комбинаторной математики и комбинаторных вычислений, 14 (1993), С. 15–32.
20. Ле Сюань Хунг, Листовое хроматическое число и хроматическая уникальность графа $K_2^r + O_k$ // Математические Подборки, Национальный университет Трухильо, Вып 06(01): 26 - 30 (2019).
21. Ле Сюань Хунг, Раскраски графа $K_2^m + K_n$ // Журнал Сибирского федерального университета. Математика & Физика, 2020, 13(3), С. 297 – 305.
22. Ле Сюань Хунг, Хроматичность соединения дерева и нулевого графа, *Прикладная дискретная математика* 2020, Вып. 50, С. 93 – 101.
23. Ле Сюань Хунг, Уникальная раскрашиваемость списка графа $K_2^n + K_r$, *Прикладная Дискретная Математика* 2022, Вып. 55, С. 88 – 94.
24. Ле Сюань Хунг, 2022, Уникальная списочная раскрашиваемость полных трехсторонних графов, *Чебышевский сборник*, Т. 23, № 2, С. 170-178.
25. Ко К. М., Тео К. Л. Поиск уникальных по цвету графов // Графы и комбинаторика, 6 (1990) 259 – 285.
26. Ко К. М., Тео К. Л., Поиск хроматически уникальных графов II // Дискретная математика, 172 (1997), С. 59 – 78.
27. Кратш Д., Лехель Й., Мюллер Х. Жесткость, гамильтоничность и расщепленные графы // Дискретная математика, 150 (1996), С. 231–245.
28. Liu R. Y. Новый метод нахождения хроматического многочлена графа и его приложения // Кэсюэ Тунбао, 32 (1987), С. 1508 – 1509.

29. Махдиан М., Махмудян Э.С. Характеристика уникально 2-списочных раскрашиваемых графов // *Арс Комбинатория*, 51 (1999), С. 295–305.
30. Пимюллер Дж. Необходимые условия для гамильтонова расщепления графов // *Дискретная математика*, 54 (1985), С. 39–47.
31. Пелед Ю. Н. Регулярные булевы функции и их политопы. Глава VI // Докторская диссертация, Университет Ватерлоо, кафедра комбинаторики и оптимизации, 1975.
32. Рид Р. С. Введение в хроматические многочлены // *Журнал комбинаторной теории*. Серия А, 4 (1968), С. 52 – 71.
33. Шэнь Ю. Ф., Ван Ю. Н. В уникальном списке раскрашиваемых полных многогранных графиков // *Арс Комбинатория*, 88 (2008), С. 367-377.
34. Нго Дак Тан, Ле Ван Хонг. Гамильтоновы циклы в расщепленных графах с большой минимальной степенью // *Обсуждение математической теории графов* 24 (2004), С. 23 – 40.
35. Нго Дак Тан, Ле Ван Хонг. Об условии Беркарда-Хаммера для гамильтоновых расщепленных графов // *Дискретная математика* 296 (2005), С. 59 – 72.
36. Нго Дак Тан, Ле Ван Хонг. О раскрасках расщепленных графов // *Вьетнамский Математический Журнал*, том 31, номер 3, 2006, С. 195 – 204.
37. Визинг В. Г. Об оценке хроматического класса p -графа // *Дискретный анализ*, 3 (1964) 23–30. (In Russian).
38. Ван И., Ван Ю., Чжан Х. Некоторые выводы об уникальных k -листовых раскрашиваемых полных многочастичных графах // *Journal of Applied Mathematics*, pp. 5, ID 380 861 (2013). DOI <http://dx.doi.org/10.1155/2013/380861>
39. Ван И., Шен И., Чжэн Г., Хе В. Об уникально 4-списочных раскрашиваемых полных многочастичных графах // *Арс Комбинатория*, vol.93, 2009, С. 203-214.
40. Уилсон Р. Дж. Введение в теорию графов // Лонгман групп, Лондон (1975).

REFERENCES

1. Behzad, M., 1965, *Graphs and thei chromatic number*. Doctoral Thesis (Michigan State University).
2. Behzad, M., Chartrand, G., 1971. “Introduction to the theory of graphs”, *Allyn and Bacon, Boston*,.
3. Behzad, M., Chartrand, G., Cooper, J., 1967. “The coloring numbers of complete graphs”, *J. London Math. Soc.* 42, pp. 226 – 228.
4. Birkhoff, G. D., 1912. “A determinant formula for the number of ways of coloring a map”, *Annals of Math.*, 14 (2), pp. 42–46.
5. Bondy, J. A., Murty, U.S.R., 1976. “Graph theory with applications”, *MacMillan*.
6. Brandstädt, A., Hammer, P. L., Le, V. B., Lozin, V. V., 2005. “Bisplit graphs”, *Discrete Math.*, 299, pp. 11–32.

7. Chen, B.-L., Fu, H.-L., Ko, M. T., 1995. "Total chromatic number and chromatic index of split graphs", *J. Combin. Math. Combin. Comput.*, 17, pp. 137–146.
8. Brent, F., 1992. "Expansions of chromatic polynomial and log-concavity", *Trans. Amer. Math. Soc.* 332, pp. 729 – 756.
9. Burkard, R. E., Hammer, P. L., 1980. "A note on hamiltonian split graphs", *J. Combin. Theory Ser.* Vol. 28, pp. 245–248.
10. Chao, C. Y., Whitehead, Jr. E. G., 1978. "On chromatic equivalence of graphs", *Theory and Applications of Graphs*, ed. Y. Alavi and D.R. Lick, Springer Lecture Notes in Math. 642, pp. 121 – 131.
11. Chvatal, V., Hammer, P. L., 1977. "Aggregation of inequalities in integer programming", *Annals Disc. Math.* 1, pp. 145–162.
12. Diestel, R., 2000. "Graph Theory", *Springer – Verlag New York*.
13. Dinitz, J. H., Martin, W.J., 1995. "The stipulation polynomial of a uniquely list colorable graph", *Austran. J. Combin.* 11, pp. 105–115.
14. Földes, S., Hammer, P. L., 1977. "Split graphs", *Proc. Eighth Southeastern Conf. on Combin., Graph Theory and Computing (Louisiana State Univ., Baton Rouge, La.)*, pp. 311–315. *Congressus Numerantium, No XIX, Utilitas Math., Winnipeg, Man., 1977*.
15. Földes, S., Hammer, P. L., 1976, 1978. "On a class of matroid-producing graphs", *Combinatorics (Proc. Fifth Hungarian Colloq.)*, Keszthely, vol. 1, 331–352., *Colloq. Math. Soc. Janós Bolyai 18, North-Holland, Amsterdam–New York*.
16. Ghebleh, M., Mahmoodian, E. S., 2001. "On uniquely list colorable graphs", *Ars Combin.*, 59, pp. 307–318.
17. He, W. J., Wang, Y. N., Shen, Y. F., Ma, X., "On property M(3) of some complete multipartite graphs", *Australasian Journal of Combinatorics*, to appear.
18. Henderson, P.B., Zalcstein, Y., 1977. "A graph-theoretic characterization of the PV_{chunk} class of synchronizing primitive", *SIAM J. Comput.*, 6, pp. 88–108.
19. Hesham, H. A., Hesham, El-R., 1993. "Task allocation in distributed systems: a split graph model", *J. Combin. Math. Combin. Comput.*, 14, pp. 15–32.
20. Le Xuan Hung, 2019. "List-chromatic number and chromatically unique of the graph $K_2^r + O_k$ ", *Selecciones Matemáticas, Universidad Nacional de Trujillo*, Vol. 06(01), pp. 26–30.
21. Le Xuan Hung, 2020. "Colorings of the graph $K_2^m + K_n$ ", *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics*, 13(3), pp. 297 – 305.
22. Le Xuan Hung, 2020. "The chromaticity of the join of tree and null graph", *Prikladnaya Diskretnaya Matematika*, № 50, pp. 93 – 101.
23. Le Xuan Hung, 2022. "Unique list colorability of the graph $K_2^n + K_r$ ", *Prikladnaya Diskretnaya Matematika*, № . 55, pp. 88 – 94.
24. Le Xuan Hung, 2022, "Uniquely list colorability of complete tripartite graphs", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 2, pp. 170–178.

25. Koh, K. M., Teo, K. L., 1990. "The search for chromatically unique graphs", *Graphs Combin.*, 6, pp. 259 – 285.
26. Koh, K. M., Teo, K. L., 1997. "The search for chromatically unique graphs II", *Discrete Math.*, 172, pp. 59 – 78.
27. Kratsch, D., Lehel, J., Müller, H., 1996. "Toughness, hamiltonicity and split graphs", *Discrete Math.*, 150, pp. 231–245.
28. Liu, R. Y., 1987. "A new method to find the chromatic polynomial of a graph and its applications", *Kexue Tongbao*, 32, pp. 1508 – 1509.
29. Mahdian, M., Mahmoodian, E. S., 1999. "A characterization of uniquely 2-list colorable graphs", *Ars Combin.*, 51, pp. 295–305.
30. Peemöller, J., 1985. "Necessary conditions for hamiltonian split graphs", *Discrete Math.*, 54, pp. 39–47.
31. Peled, U. N., 1975. "Regular Boolean functions and their polytope", *Chapter VI, Ph. D. Thesis, Univ. of Waterloo, Dept. Combin. and Optimization.*
32. Read, R. C., 1968. "An introduction to chromatic polynomials", *J. Combin. Theory*, 4 (1968), pp. 52 – 71.
33. Shen, Y. F., Wang, Y. N., 2008. "On uniquely list colorable complete multipartite graphs", *Ars Combin.*, 88, pp. 367–377.
34. Ngo Dac Tan and Le Xuan Hung, 2004. "Hamilton cycles in split graphs with large minimum degree", *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, 24, pp. 23 – 40.
35. Ngo Dac Tan and Le Xuan Hung, 2005. "On the Burkard-Hammer condition for hamiltonian split graphs", *Discrete Mathematics*, 296, pp. 59 – 72.
36. Ngo Dac Tan and Le Xuan Hung, 2006. "On colorings of split graphs", *Acta Mathematica Vietnamica*, Vol. 31, № . 3, pp. 195 – 204.
37. Vizing, V. G., 1964. "On an estimate of the chromatic class of a p -graph", *Discret. Analiz.*, 3, pp. 23–30. (In Russian)
38. Wang, Y., Wang, Y., Zhang, X., 2013. "Some conclusion on unique k -list colorable complete multipartite graphs", *J. Appl. Math.*, pp. 5, Art. ID 380,861. DOI <http://dx.doi.org/10.1155/2013/380861>
39. Wang, Y., Shen, Y., Zheng, G., He, W., 2009. "On uniquely 4-list colorable complete multipartite graphs", *Ars Combinatoria*, vol.93, pp. 203–214.
40. Wilson, R.J., 1975. "Introduction to graph theory", *Longman group ltd, London.*

Получено: 11.12.2023

Принято в печать: 28.06.2024

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 25. Выпуск 2.

УДК 510.635

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-2-222-234

Специальные случаи интерполяционной теоремы для
классического исчисления предикатов

Д. А. Цибульский

Цибульский Дмитрий Алексеевич — аспирант, Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН (г. Санкт-Петербург).

e-mail: cybulski@pdmi.ras.ru

Аннотация

В статье доказываются специальные случаи интерполяционной теоремы для классического исчисления предикатов без функциональных символов и равенства. Накладывая ограничения на интерполируемые формулы, можно доказать существование интерполянта особого вида: универсального, экзистенциального, хорновского и универсального хорновского. Наиболее интересен случай универсального хорновского интерполянта: аксиомы многих алгебраических систем задаются универсальными хорновскими формулами. Результаты, полученные в данной работе, могут быть полезны как с точки зрения теории доказательств, так и в приложениях, например, при решении задач искусственного интеллекта и разработке языков логического программирования. Статья написана в духе теории доказательств, основным инструментом для решения задачи служат секвенциальные исчисления и такие техники преобразования выводов, как обращение применений правил вывода, перестановка применений правил по С. К. Клини и прополка по В. П. Оревкову.

Статья состоит из введения, разбитой на 3 параграфа основной части и заключения. Введение содержит краткий исторический обзор и обсуждение актуальности работы. В первом параграфе основной части вводятся необходимые определения и формулируется главный результат. Второй параграф посвящён описанию построенного В. П. Оревковым секвенциального исчисления **KGL**. Третий отведён доказательству основной теоремы. Заключение содержит обсуждение полученных результатов и краткий обзор перспектив дальнейшей работы.

Ключевые слова: интерполяционная теорема, классическое исчисление предикатов, универсальный интерполянт, хорновский интерполянт.

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:

Д. А. Цибульский. Специальные случаи интерполяционной теоремы для классического исчисления предикатов // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 2, с. 222–234.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 25. No. 2.

UDC 510.635

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-2-222-234

Special cases of the interpolation theorem for classical predicate calculus

D. A. Cybulski

Cybulski Dmitry Alekseevich — postgraduate student, St. Petersburg Branch of the Steklov Mathematical Institute of the RAS (St. Petersburg).

e-mail: cybulski@pdmi.ras.ru

Abstract

The article proves special cases of the interpolation theorem for the classical predicate calculus without functional symbols and equality. By imposing restrictions on the interpolated formulas, it is possible to prove the existence of an interpolant of a special kind: universal, existential, Horn and universal Horn. The most interesting case is the universal Horn interpolant: the axioms of many algebraic systems are given by universal Horn formulas. The results obtained in this work can be useful both from the point of view of proof theory and in applications, for example, when solving problems of artificial intelligence and developing logical programming languages. The article is written in the spirit of proof theory, the main tools are sequential calculus and such techniques for proof transforming as reversing the applications of inference rules, rearranging the applications of rules according to S. K. Kleene and weeding according to V. P. Orevkov.

The article consists of an introduction, the main part divided into 3 paragraphs, and a conclusion. The introduction contains a brief historical overview and discussion of the relevance of the work. In the first paragraph of the main part, the necessary definitions are introduced and the main result is formulated. The second paragraph is devoted to the description of the sequential calculus **KGL** constructed by V. P. Orevkov. The third one is devoted to the proof of the main theorem. The conclusion contains a discussion of the results obtained and a brief overview of the prospects for further work.

Keywords: interpolation theorem, classical predicate calculus, universal interpolant, Horn interpolant

Bibliography: 16 titles.

For citation:

D. A. Cybulski, 2024. “Special cases of the interpolation theorem for predicate calculus”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 2, pp. 222–234.

1. Введение

Интерполяционная теорема — это утверждение следующего вида: Пусть секвенция $A \rightarrow B$ доказуема в исчислении **I**, причём выполнены некоторые *дополнительные условия*. Тогда существует формула C , все параметры которой общие для A и B и такая, что в **I** доказуемы секвенции $A \rightarrow C$ и $C \rightarrow B$. Формула C называется *интерполянт*ом формул A и B .

Говоря неформально, интерполяционная теорема означает следующее: если из формулы A выводима формула B , то формулы A и B имеют “общую часть” — интерполянт. Интерполянт выявляет структурные свойства формул, которые играют главную роль в доказательстве.

Для классической логики предикатов интерполяционная теорема была доказана У. Крейгом в 1957. Дополнительным условием теоремы Крейга стало наличие общего для A и B предикатного параметра (см. [1]). В 1959 Р. К. Линдон опубликовал доказательство ¹⁾ усиленной интерполяционной теоремы для случая, когда секвенции $A \rightarrow$ и $\rightarrow B$ недоказуемы (см. [2]). В 1962 К. Шютте распространил интерполяционную теорему Крейга на интуиционистскую логику предикатов (см. [5]). Впоследствии интерполяционные теоремы были доказаны разными авторами и для других логик. Например, Л. Л. Максимовой были получены варианты интерполяционной теоремы для суперинтуиционистских и модальных логик (см. [6] и [7]).

Среди следствий интерполяционной теоремы упомянем теоремы Бета об определмости и Робинсона о непротиворечивости (см. [8]–[10]).

Данная работа посвящена *специальным случаям* интерполяционной теоремы для классического исчисления предикатов без функциональных знаков и равенства. Накладывая ограничения на структуру формул A и B , можно доказать существование интерполанта специального вида. Такие утверждения полезны

1. В теории доказательств, поскольку позволяют уточнить формулировки теоремы Бета об определмости и теоремы Робинсона о непротиворечивости (см. ниже);
2. В решении задач искусственного интеллекта, где успешно используются универсальные хорновские формулы;
3. При разработке языков программирования, основанных на хорновском программировании.

В качестве примера к пункту 1 сформулируем теорему Робинсона для теорий с хорновскими аксиомами.

Пусть S_1 и S_2 — формальные системы (или множества формул), построенные на основе классического исчисления предикатов. Пусть каждая из систем S_1 и S_2 просто непротиворечива, причём все аксиомы S_1 представлены хорновскими формулами. Допустим, что объединение $S_1 \cup S_2$ теорий противоречиво. Тогда существует такая замкнутая хорновская формула I , которая содержит только общие предикаты теорий S_1 и S_2 , что I выводима в S_1 , а $\neg I$ выводима в S_2 .

Доказательство этого специального случая получается элементарной модификацией доказательства общей теоремы Робинсона при помощи пункта 7 нашей основной теоремы.

Работа написана в духе теории доказательств. Все представленные методы — синтаксические; понятие интерпретации не используется.

Определениям и формулировкам результатов работы посвящён параграф 2.1. В параграфе 2.2 описывается построенное В. П. Оревковым классическое исчисление предикатов **KGL**. Доказательства полученных результатов приведены в параграфе 2.3.

Автор рад возможности выразить признательность В. П. Оревкову, по инициативе которого написана данная работа.

2. Основной текст статьи

2.1. Определения и формулировки.

Пусть V — вхождение подформулы в формулу A исчисления предикатов. Если V представлено самой формулой A , будем говорить, что V *входит в A положительно*. Пусть теперь

¹⁾ Доказательство Линдона, как показал в 1960 М. А. Тайцлин, было неверным [3]. В 1963 году корректное доказательство теоремы Линдона дал Л. А. Хенкин [4].

A имеет один из следующих видов: $\forall xA'$, $\exists xA'$, $\neg A'''$, $(A' \vee A'')$, $(A' \& A'')$, $(A''' \supset A')$. Будем говорить, что V входит в A положительно (отрицательно), если V входит в A' или в A'' положительно (отрицательно) либо в A''' отрицательно (положительно). Положительные (отрицательные) вхождения подформулы в секвенцию суть положительные (отрицательные) вхождения в заключение секвенции и отрицательные (положительные) вхождения в её посылки. Знак вхождения логического символа в формулу (в секвенцию) определяется как знак вхождения наименьшей содержащей его подформулы.

Пусть A и B — формулы исчисления предикатов без функциональных знаков и равенства. Формулу C будем называть *интерполянт* A и B (по Линдону), если она удовлетворяет условиям:

- 1) Секвенция $A \rightarrow C$ доказуема в исчислении предикатов;
- 2) Секвенция $C \rightarrow B$ доказуема в исчислении предикатов;
- 3) В C входят положительно лишь те предикаты, что входят положительно как в A , так и в B ;
- 4) В C входят отрицательно лишь те предикаты, что входят отрицательно как в A , так и в B ;
- 5) В C входят свободно лишь общие для A и B свободные переменные.

Пусть $\circ$ — один из логических символов $\forall, \exists, \neg, \vee, \& \text{amp}, \supset$. Положительное (отрицательное) вхождение $\circ$ в формулу будем называть *вхождением типа $\circ^+$ (типа $\circ^-$)*.

Формула исчисления предикатов называется

- *позитивной*, если она не содержит вхождений символов $\supset, \neg$;
- *хорновской*, если она не содержит вхождений типа $\vee^+, \supset^-, \neg^-$;
- *универсальной*, если она не содержит вхождений типа $\forall^-, \exists^+$;
- *экзистенциальной*, если она не содержит вхождений типа $\forall^+, \exists^-$.

Формулы этих классов обладают следующими теоретико-модельными свойствами: позитивные — устойчивы при переходах к гомоморфным образам; хорновские — мультипликативно устойчивы; универсальные — устойчивы при переходах к подсистемам; экзистенциальные — устойчивы при переходах к надсистемам (см. [11]).

Сформулируем основной результат данной работы.

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА. Пусть A и B — предикатные формулы, не содержащие функциональных знаков. Допустим, что выполняются условия:

- 1) секвенция $A \rightarrow B$ доказуема в классическом исчислении предикатов;
- 2) ни секвенция $A \rightarrow$, ни секвенция $\rightarrow B$ не доказуемы в классическом исчислении предикатов.

Тогда имеют место следующие утверждения:

1. Предположим, что существует доказательство секвенции $A \rightarrow B$, в котором не применяются правила $\forall \rightarrow, \rightarrow \exists$ и сечения. Тогда существует интерполянт формул A и B , построенный с помощью связок исчисления высказываний из общих подформул формул A и B , в которые не входят свободно связанные переменные этих формул.

2. Предположим, что B — универсальная формула. Тогда существует универсальный интерполянт формул A и B .

3. Допустим, что выполняются следующие условия:

- 1) A — универсальная формула,
- 2) каждая свободная переменная A является свободной переменной B .

Тогда существует универсальный интерполянт формул A и B .

4. Предположим, что B — универсальная хорновская формула. Тогда существует универсальный хорновский интерполянт формул A и B .

5. Допустим, что выполняются следующие условия:

- 1) A — универсальная хорновская формула,
- 2) каждая свободная переменная A является свободной переменной B .

Тогда существует универсальный хорновский интерполянт формул A и B .

6. Допустим, что выполняются следующие условия:

- 1) A — хорновская формула,
- 2) B — универсальная формула.

Тогда существует универсальный хорновский интерполянт формул A и B .

7. Допустим, что A — хорновская формула. Тогда существует хорновский интерполянт формул A и B .

8. Предположим, что B — хорновская формула и в B не содержится вхождений типа $\exists^+$. Тогда существует хорновский интерполянт формул A и B , который не содержит вхождений типа $\exists^+$.

2.2. Исчисление KGL.

Классическое исчисление предикатов **KGL** было описано В. П. Оревковым в [12].

В дальнейшем посредством $\Gamma, \Delta, \Theta, \Xi, \Pi, \Sigma$ (возможно, с индексами, штрихами и звёздочками) мы будем обозначать (конечные) списки формул исчисления предикатов, а посредством A, B, C (возможно, с индексами и звёздочками) — формулы исчисления предикатов. Выражение $[S]_t^x$ будет обозначать результат подстановки термина t вместо всех свободных вхождений переменной x в формулу или секвенцию S при условии, что терм t свободен для подстановки вместо свободных вхождений переменной x в S .

Аксиомы исчисления **KGL** — это секвенции вида

$$\Gamma_1, A, \Gamma_2 \rightarrow \Delta_1, A, \Delta_2.$$

Логические правила исчисления **KGL** имеют вид

$$\frac{\Gamma \rightarrow B, \Delta_1, (A \supset B), \Delta_2}{\Gamma \rightarrow \Delta_1, (A \supset B), \Delta_2} \rightarrow \supset_1; \quad \frac{\Gamma, A \rightarrow \Delta_1, (A \supset B), \Delta_2}{\Gamma \rightarrow \Delta_1, (A \supset B), \Delta_2} \rightarrow \supset_2;$$

$$\frac{\Gamma_1, (A \supset B), \Gamma_2 \rightarrow A, \Delta; \quad \Gamma_1, (A \supset B), \Gamma_2, B \rightarrow \Delta}{\Gamma_1, (A \supset B), \Gamma_2 \rightarrow \Delta} \supset \rightarrow;$$

$$\begin{array}{c}
\frac{\Gamma \rightarrow A, \Delta_1, (A \& B), \Delta_2; \quad \Gamma \rightarrow B, \Delta_1, (A \& B), \Delta_2}{\Gamma \rightarrow \Delta_1, (A \& B), \Delta_2} \rightarrow \&; \\
\frac{\Gamma_1, (A \& B), \Gamma_2, A \rightarrow \Delta}{\Gamma_1, (A \& B), \Gamma_2 \rightarrow \Delta} \& \rightarrow_1; \quad \frac{\Gamma_1, (A \& B), \Gamma_2, B \rightarrow \Delta}{\Gamma_1, (A \& B), \Gamma_2 \rightarrow \Delta} \& \rightarrow_2; \\
\frac{\Gamma \rightarrow A, \Delta_1, (A \vee B), \Delta_2}{\Gamma \rightarrow \Delta_1, (A \vee B), \Delta_2} \rightarrow \vee_1; \quad \frac{\Gamma \rightarrow B, \Delta_1, (A \vee B), \Delta_2}{\Gamma \rightarrow \Delta_1, (A \vee B), \Delta_2} \rightarrow \vee_2; \\
\frac{\Gamma_1, (A \vee B), \Gamma_2, A \rightarrow \Delta; \quad \Gamma_1, (A \vee B), \Gamma_2, B \rightarrow \Delta}{\Gamma_1, (A \vee B), \Gamma_2 \rightarrow \Delta} \vee \rightarrow; \\
\frac{\Gamma, A \rightarrow \Delta_1, \neg A, \Delta_2}{\Gamma \rightarrow \Delta_1, \neg A, \Delta_2} \rightarrow \neg; \quad \frac{\Gamma_1, \neg A, \Gamma_2 \rightarrow A, \Delta}{\Gamma_1, \neg A, \Gamma_2 \rightarrow \Delta} \neg \rightarrow; \\
\frac{\Gamma \rightarrow [A]_a^x, \Delta_1, \forall x A, \Delta_2}{\Gamma \rightarrow \Delta_1, \forall x A, \Delta_2} \rightarrow \forall; \quad \frac{\Gamma_1, \forall x A, \Gamma_2, [A]_t^x \rightarrow \Delta}{\Gamma_1, \forall x A, \Gamma_2 \rightarrow \Delta} \forall \rightarrow; \\
\frac{\Gamma \rightarrow [A]_t^x, \Delta_1, \exists x A, \Delta_2}{\Gamma \rightarrow \Delta_1, \exists x A, \Delta_2} \rightarrow \exists; \quad \frac{\Gamma_1, \exists x A, \Gamma_2, [A]_a^x \rightarrow \Delta}{\Gamma_1, \exists x A, \Gamma_2 \rightarrow \Delta} \exists \rightarrow.
\end{array}$$

Структурное правило *сечения* исчисления **KGL** имеет вид

$$\frac{\Gamma \rightarrow A, \Delta; \quad \Gamma, A \rightarrow \Delta}{\Gamma \rightarrow \Delta}.$$

В правилах $\rightarrow \forall$ и $\exists \rightarrow$ исчисления **KGL** переменная a не входит свободно в формулы заключения правила.

Переменную a в применении L правила $\rightarrow \forall$ или $\exists \rightarrow$ называют *собственной переменной применения правила L* .

Терм t в применении L правила $\forall \rightarrow$ или $\rightarrow \exists$ называют *собственным термом применения правила L* .

Пусть L — одно из правил исчисления **KGL**. Вхождения формул в посылку L , преобразуемые L , называют *боковыми вхождениями применения правила L* . Антецедентное боковое вхождение лежит в посылке L непосредственно перед $\rightarrow$, а сукцедентное — непосредственно после $\rightarrow$. Вхождение формулы в заключение L , в которое L преобразует боковые вхождения, называют *главным вхождением применения правила L* . Формулу, которой представлено главное или боковое вхождение применения L , называют соответственно *главной* или *боковой формулой применения L* .

Вхождения формулы A в сукцедент и в антецедент аксиомы S исчисления **KGL** называют *главными вхождениями аксиомы S* , а формулу A — *главной формулой аксиомы S* .

В секвенциальных исчислениях части одних секвенций в доказательствах преобразуются в части других секвенций. Чтобы корректно описывать такие переходы, С. К. Клини разработал язык отношений родства в доказательствах. Мы будем пользоваться этой терминологией (см. [10]). В частности, вхождение V формулы в доказательство D в качестве члена секвенции (в качестве подформулы) называется *потомком (образом) вхождения W формулы в D в качестве члена секвенции (в качестве подформулы)*, если W преобразуется применениями правил вывода в V . В этом случае W называется *предком (прообразом) вхождения V* .

Отметим некоторые свойства исчисления **KGL**.

Доказательство D называется *регулярным*, если главные формулы всех аксиом в D элементарны. Всякая доказуемая в **KGL** секвенция, очевидно, обладает регулярным доказательством.

Будем говорить, что вхождение формулы в доказательство *прослеживается до аксиом*, если среди предков этого вхождения есть главное вхождение аксиомы. Доказательство D называется *прополотым*, если все боковые вхождения применений правил вывода в D прослеживаются до аксиом. Всякая доказуемая в **KGL** секвенция обладает прополотым доказательством (см. [13]).

Пусть D — регулярное доказательство в исчислении **KGL** секвенции

$$\Gamma \rightarrow \Delta_1, \forall x A, \Delta_2.$$

Индукцией по высоте доказательство D , не увеличивая высоты, можно перестроить в регулярное доказательство секвенции

$$\Gamma \rightarrow \Delta_1, [A]_a^x, \Delta_2,$$

где переменная a не входит в секвенции D ни свободно, ни связано.

Таким образом, все применения в D правила $\rightarrow \forall$, образы главных вхождений которых совпадают с вхождением $\forall x A$, перемещаются к последней секвенции доказательства.

Заметим, что в D могут применяться сечения. Аналогично можно построить алгоритм обращения правил $\exists \rightarrow$, $\neg \rightarrow$ и $\rightarrow \neg$.

Пусть D — регулярное доказательство в исчислении **KGL** секвенции

$$\Gamma_1, (A \& B), \Gamma_2 \rightarrow \Delta.$$

Индукцией по высоте доказательство D можно перестроить в регулярное доказательство секвенции

$$\Gamma_1, A, B, \Gamma_2 \rightarrow \Delta.$$

Аналогично можно построить алгоритм обращения правил $\rightarrow \vee$ и $\rightarrow \supset$.

Пусть D — регулярное доказательство в исчислении **KGL** секвенции

$$\Gamma_1, (A \supset B), \Gamma_2 \rightarrow \Delta.$$

Индукцией по высоте доказательство D можно перестроить в регулярное доказательство секвенции

$$\Gamma_1, \Gamma_2 \rightarrow A, \Delta$$

и в регулярное доказательство секвенции

$$\Gamma_1, B, \Gamma_2 \rightarrow \Delta.$$

Аналогично можно построить алгоритм обращения правил $\rightarrow \&$ и $\vee \rightarrow$.

Аналогичный алгоритм обращения правил $\rightarrow \exists$ и $\forall \rightarrow$ построить нельзя.

Более подробно обратимость правил секвенциальных исчислений доказывается, например, в [14].

Для исчисления **KGL** справедлива основная теорема Г. Генцена: всякая доказуемая секвенция может быть доказана без использования правила сечения (см. [15]).

С. К. Клини была доказана теорема о перестановочности применений правил вывода в секвенциальных исчислениях (см. [16]). Для наших нужд подойдёт следующая её формулировка:

*Пусть D — доказательство секвенции S в исчислении **KGL** и пусть $X \uplus Y$ — такое разбиение множества вхождений логических символов секвенции S , что*

- *Если $L \in Y$ — вхождение логического символа, находящееся в области действия вхождения L' , то $L' \in Y$.*
- *Если $L \in Y$ — вхождение квантора, которому принадлежит применение одного из правил $\forall \rightarrow$ и $\rightarrow \exists$, а L' — вхождение квантора, которому принадлежит применение одного из правил $\rightarrow \forall$ и $\exists \rightarrow$, то $L' \in Y$ или L' находится в области действия L .*

Тогда применения логических правил в D можно, не изменяя заключительной секвенции, переставить так, что применения логических правил, принадлежащие вхождению логических символов из X , будут выше применений правил, принадлежащих вхождению логических символов из Y .

Частным случаем теоремы о перестановочности применений правил является теорема Г. Генцена о средней секвенции (см. [15]).

Мы расширим понятие *средней секвенции* и будем называть так секвенции, выше которых в доказательстве располагаются все применения, принадлежащие символам из X , и только они.

2.3. Доказательство основной теоремы.

Пусть Γ — непустой список формул. Посредством $\&\Gamma$ (посредством $\vee\Gamma$) обозначим конъюнкцию (дизъюнкцию) членов Γ . Запись $A \supset$ (запись $\supset A$) будет обозначать формулу $\neg A$ (формулу A).

ЛЕММА. Пусть D — регулярное пропалотое доказательство без сечений в исчислении **KGL** секвенции $A \rightarrow B$, в котором выше применений правил, принадлежащих A , нет применений правил, принадлежащих B .

Предположим, что $S_1, \dots, S_k$ — список всех “средних” секвенций доказательства D . Выше S_i нет применений, принадлежащих B , а ниже нет применений, принадлежащих A . Секвенция S_i имеет вид

$$A, \Sigma_i \rightarrow \Pi_i, B.$$

В поддоказательстве секвенции S_i не прослеживаемы до аксиом вхождения формулы B и неэлементарных формул списков Σ_i и Π_i . Удалив в поддоказательстве секвенции S_i не прослеживаемые до аксиом вхождения формул, получим доказательство секвенции

$$A, \Sigma'_i \rightarrow \Pi'_i,$$

где Σ'_i и Π'_i — подписки элементарных формул списков Σ_i и Π_i .

Тогда интерполянтотом формул A и B является универсальная формула

$$C \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \dots x_n \bigwedge_{i=1}^k (\&\Sigma'_i \supset \vee \Pi'_i),$$

где $x_1, x_2 \dots x_n$ — все переменные, которые входят свободно в формулу B или в формулу списка $\Sigma_1, \Pi_1, \Sigma_2, \Pi_2, \dots, \Sigma_k, \Pi_k$, но не входят свободно в A .

1. Очевидно, что C содержит лишь общие (по Линдону) для A и B параметры.

2. Эскиз доказательства секвенции $A \rightarrow C$ представлен деревом:

$$\frac{\frac{\frac{A, \Sigma'_1 \rightarrow \Pi'_1}{A, \&\Sigma'_1 \rightarrow \Pi'_1}}{A, \&\Sigma'_1 \rightarrow \vee \Pi'_1} \quad \dots \quad \frac{\frac{A, \Sigma'_k \rightarrow \Pi'_k}{A, \&\Sigma'_k \rightarrow \Pi'_k}}{A, \&\Sigma'_k \rightarrow \vee \Pi'_k}}{A \rightarrow (\&\Sigma'_1 \supset \vee \Pi'_1) \quad \dots \quad A \rightarrow (\&\Sigma'_k \supset \vee \Pi'_k)} \quad \dots \quad \frac{A \rightarrow \bigwedge_{i=1}^k (\&\Sigma'_i \supset \vee \Pi'_i)}{A \rightarrow \forall x_1, x_2 \dots x_n \bigwedge_{i=1}^k (\&\Sigma'_i \supset \vee \Pi'_i)}.$$

3. Доказуемость секвенции $C, \Sigma_i \rightarrow \Pi_i, B$ следует из доказуемости

$$\big\&_{i=1}^k (\&\Sigma'_i \supset \vee \Pi'_i), \Sigma_i \rightarrow \Pi_i, B.$$

Эта секвенция, в свою очередь, следует из тривиально выводимых

$$(\&\Sigma'_1 \supset \vee \Pi'_1), \dots, (\&\Sigma'_k \supset \vee \Pi'_k), \Sigma_i \rightarrow \Pi_i, B.$$

при помощи введения конъюнкции в антецедент.

4. Доказательство секвенции $C \rightarrow B$ получается из D заменой поддоказательств секвенций S_i доказательствами $C, \Sigma_i \rightarrow \Pi_i, B$. Ограничения на переменные в кванторных правилах сохраняются, поскольку C содержит лишь те переменные, что входят в A .

Перейдём к доказательству основной теоремы. Главная идея: перестроить доказательство секвенции $A \rightarrow B$ таким образом, чтобы можно было воспользоваться леммой либо её модификацией. Не оговаривая особо, посредством $S_1, \dots, S_k$ мы будем обозначать список всех “средних” секвенций $S_i : A, \Sigma_i \rightarrow \Pi_i, B$, посредством Σ'_i и Π'_i — подписки прослеживаемых до аксиом (элементарных) формул списков Σ_i и Π_i , а посредством $\bar{x}$ — список всех переменных, которые входят свободно в формулу B или в формулу списка $\Sigma_1, \Pi_1, \Sigma_2, \Pi_2, \dots, \Sigma_k, \Pi_k$, но не входят свободно в A . Условие 2) основной теоремы гарантирует существование по крайней мере одной “средней” секвенции.

1. Применим к выводу D секвенции $A \rightarrow B$ процесс, описанный в доказательстве теоремы 40 из книги [10]. Мы получим доказательства D^A и D^B секвенций $A \rightarrow C$ и $C \rightarrow B$, где C — интерполянт по Линдону формул A и B . В частности, в C входят только общие переменные формул A и B и не входят собственные переменные применений кванторных правил. Заметим, что вхождению C в заключительные секвенции D^A и D^B не принадлежат применения кванторных правил. Действительно, в D не применяются правила $\forall \rightarrow$ и $\rightarrow \exists$, и следовательно, ни одна из переменных, входящих в предки C , не исчезает. Кванторы, соответственно, при построении C не вводятся; C строится из общих подформул A и B с помощью пропозициональных связок. Связанные переменные этих формул не входят свободно в C в силу чистоты переменных в доказательстве P и пункта б) определения интерполянта по Линдону.

В дальнейшем будем рассматривать регулярные доказательства без сечений.

2. В любом доказательстве секвенции $A \rightarrow B$ универсальной формуле B принадлежат лишь применения обратимых правил. Спустим применения правил, принадлежащие B , к доказываемой секвенции. По лемме универсальная формула

$$\forall \bar{x} \big\&_{i=1}^k (\&\Sigma'_i \supset \vee \Pi'_i)$$

есть интерполянт A и B .

3. Разобьём множества применений правил вывода на два класса: к “верхнему” отнесём принадлежащие вхождению A в заключительную секвенцию, к “нижнему” — те, что принадлежат вхождению B . Заметим, что вхождению A в заключительную секвенцию не принадлежат применения правил $\rightarrow \forall$ и $\exists \rightarrow$, так как им соответствовали бы вхождения кванторов типа $\forall^-$ и $\exists^+$. Таким образом, мы можем перестроить доказательство секвенции $A \rightarrow B$ в соответствии с разбиением. По лемме универсальная формула

$$\forall \bar{x} \big\&_{i=1}^k (\&\Sigma'_i \supset \vee \Pi'_i)$$

есть интерполянт A и B .

4. В доказательстве секвенции $A \rightarrow B$ универсальной хорновской формуле B не принадлежат применения правил $\forall \rightarrow, \rightarrow \exists, \rightarrow \vee, \supset \rightarrow, \neg \rightarrow$. Все правила, принадлежащие B , во-первых, обратимы, во-вторых, при обращении сингулярной (т.е. содержащей не более одной формулы в сукцеденте) секвенции дают сингулярные секвенции. Спустим применения правил, принадлежащие B , к доказываемой секвенции. Списки Π'_i содержат не более одной формулы. Универсальная хорновская формула

$$\forall \bar{x} \& (\& \Sigma'_i \supset \Pi'_i)$$

есть интерполянт A и B .

5. Перестроим доказательство аналогично пункту 3. Заметим, что хорновской формуле A не принадлежат применения правил $\vee \rightarrow, \rightarrow \supset, \rightarrow \neg$. Следовательно, списки Π'_i содержат не более одной формулы. Универсальная хорновская формула

$$\forall \bar{x} \& (\& \Sigma'_i \supset \Pi'_i)$$

будет интерполянтом A и B .

6. Перестроим доказательство аналогично пункту 2 и воспользуемся наблюдением из пункта 5.
7. Пусть $A^* \equiv A$ и $B^* \equiv B$ — предварённые формулы. По теореме о средней секвенции существует такое доказательство D секвенции $A^* \rightarrow B^*$, что все применения пропозициональных правил в D находятся выше секвенции $S : A, \Sigma, A_1, \dots, A_m \rightarrow B_1, \dots, B_n, \Pi, B$ и принадлежат вхождениям бескванторных формул $A_1, \dots, A_m$ и $B_1, \dots, B_n$, а все применения кванторных правил в D располагаются ниже S . Спустим применения правил, принадлежащие вхождениям $B_1, \dots, B_n$, к секвенции S . Пусть в поддоказательстве D , оканчивающемся секвенцией S , “средние” секвенции суть $S_1, \dots, S_k$,

$$S_i : A, \Sigma, A_1, \dots, A_m, \Sigma_i \rightarrow \Pi_i, B_1, \dots, B_m, \Pi, B.$$

Формулы $A_1, \dots, A_m$ — предки хорновской A^* , и им не принадлежат применения правил $\vee \rightarrow, \rightarrow \supset, \rightarrow \neg$, следовательно, в сукцедентах секвенций $S_1, \dots, S_k$ до аксиом прослеживается не более одной формулы. По лемме хорновская формула

$$\& (\& \Sigma'_i \supset \Pi'_i)$$

есть интерполянт

$$\&_{i=1}^m A_i \quad \text{и} \quad \bigvee_{i=1}^n B_i.$$

Интерполянт C формул A^* и B^* (и следовательно, формул A и B) получается из данной хорновской формулы квантованием некоторых переменных.

8. Спустим все применения правил, принадлежащие B и не принадлежащие применениям правила $\forall \rightarrow$, к заключительной секвенции. Мы придём к “псевдосредним” секвенциям $S_1, \dots, S_k$ вида $S_i : A, \Xi_i, \Sigma_i \rightarrow \Pi_i, B$, где Ξ_i — списки формул, начинающихся с $\forall$. При этом в списках Π_i (аналогично 4) до аксиом прослеживается не более одной формулы. Формулы списков Ξ_i — позитивные.

Пусть $A^* \equiv A$ — предварённая формула и пусть списки Ξ_i^* получены из Ξ_i заменой формул эквивалентными им предварёнными. Положим $S_i^* : A^*, \Xi_i^*, \Sigma_i \rightarrow \Pi_i$. Переход

от $S_1, \dots, S_k$ к $S_1^*, \dots, S_k^*$ правомерен, поскольку формула $B^* \equiv B$, полученная заменой вхождений подформул списков Ξ_i соответствующими формулами списков Ξ_i^* — хорновская и не содержит $\exists^+$.

Пусть $A^*, \Xi_i^*, \Sigma_i, \Gamma_i, \Delta_i \rightarrow \Pi_i$ — “средняя” секвенция подходящего доказательства S_i^* ; поддерево между “средней” и заключительной секвенцией обозначим посредством D_i . Квантование формул списков Γ_i даёт A^* ; формул списков Δ_i — списки Ξ_i^* . Спустив применения правил, принадлежащие вхождениям формул списка Δ_i , придём к секвенциям $A^*, \Xi_i^*, \Sigma_i, \Gamma_i, \Delta_i, \Theta_{ij} \rightarrow \Pi_i$, где Θ_{ij} , $j \in [1 : l_i]$, суть списки атомов. Будем считать, что, во-первых, списки Θ_{ij}, Σ_i и Π_i не содержат общих формул, а во-вторых, что секвенции $\Gamma_i \rightarrow$ недоказуемы. Списки $\Theta'_{ij}; \Sigma'_i; \Pi'_i$ получим из $\Theta_{ij}; \Sigma_i; \Pi_i$ удалением вхождений формул, не прослеживаемых до аксиом.

Положим

$$C_i \Leftarrow \left(\bigvee_{j=1}^{l_i} \&\Theta'_{ij} \&\Sigma'_i \right), \quad i \in [1 : k].$$

Нетрудно построить доказательства D_i^1, D_i^2, D_i^3 секвенций

$$\Gamma_i, C_i \rightarrow \Pi'_i; \quad \Delta_i, \Sigma_i \rightarrow \Pi_i, C_i; \quad \Pi'_i, \Delta_i, \Sigma_i \rightarrow \Pi_i.$$

Таким образом, $(C_i \supset \Pi'_i)$ — интерполянт списков Γ_i и $\neg\Delta_i, \neg\Sigma_i, \Pi_i$.

Введём кванторы в Γ_i и Δ_i в последовательности, определяемой деревом D_i . Если собственная переменная v применения L правила $\forall \rightarrow$ исчезает в результате этого применения из потомков Γ_i (потомков Δ_i), в доказательствах, полученных из D_i^1 и D_i^2 квантованием переменных из Γ_i и Δ_i , следующим шагом надлежит связать переменную v в потомке C_i всеобщностью (существованием), если, конечно, v входит в C_i .

В результате построим доказательства секвенций

$$A^*, C_i^* \rightarrow \Pi'_i; \quad \Xi_i^*, \Sigma_i \rightarrow \Pi_i, C_i^*; \quad \Pi'_i, \Xi_i^*, \Sigma_i \rightarrow \Pi_i.$$

Формулы C_i^* получены из C_i присоединением кванторных приставок.

Итак, мы доказали $A \rightarrow (C_i^* \supset \Pi'_i)$ и $(C_i^* \supset \Pi'_i), \Xi_i^*, \Sigma_i \rightarrow \Pi_i$ для всех $i \in [1 : k]$. Отсюда несложно вывести

$$A \rightarrow \forall \bar{x} \&_{i=1}^k (C_i^* \supset \Pi'_i) \quad \text{и} \quad \forall \bar{x} \&_{i=1}^k (C_i^* \supset \Pi'_i) \rightarrow B,$$

где $\bar{x}$ — список всех переменных, входящих свободно в формулы списка $C_1^*, \Pi'_1, \dots, C_k^*, \Pi'_k$ и не входящих свободно в B .

ЗАМЕЧАНИЕ. Если из формулировок пунктов **3** и **5** убрать условие 2), то в интерполянт может понадобиться ввести кванторы существования. Пусть, например, R — одноместный предикатный символ. Тогда $R(a)$ — универсальная хорновская формула, но для секвенции $R(a) \rightarrow \exists x R(x)$ не существует универсального интерполянта.

3. Заключение

Нами получен ряд достаточных условий существования интерполянтов специального вида: универсального, хорновского, универсального хорновского, хорновского без вхождений типа $\exists^+$. Дуализация доказательств даёт также достаточные условия существования экзистенциальных и экзистенциальных хорновских интерполянтов.

Мы показали, что интерполянт во многих случаях сохраняет структурные свойства интерполируемых формул. Дальнейшая работа по теме может состоять как в более глубоком исследовании этой структурной связи, так и в приложении полученных результатов к нуждам теории доказательств. Кроме того, интересно рассмотреть ту же задачу для интуиционистской логики предикатов и для других нестандартных логик.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Craig W. Linear Reasoning. A New Form of the Herbrand–Gentzen Theorem. // Jour. symbolic logic, Vol. 22, P. 250-268.
2. Lyon R. C. An Interpolation Theorem in the Predicate Calculus. // Pacific jour. math., Vol. 9, P. 129-142.
3. Тайцлин М. А. Реферат на ст. Линдона. // Jour. symbolic logic., Vol. 25, P. 273-274.
4. Henkin L. A. An Extension of the Craig–Lyndon Interpolation Theorem. // Ibid., Vol. 28, P. 201-216.
5. Schütte K. Der Interpolationssatz der intuitionistischen Prädikaten-logik. // Math. Ann., Vol. 148, P. 192-200.
6. Максимова Л. Л. Теорема Крейга в суперинтуиционистских логиках и амальгамируемые многообразия псевдобулевых алгебр. // Алгебра и логика, т. 16:6, с. 643-681.
7. Maksimova L. On Variable Separation in Modal and Superintuitionistic Logics. // Studia Logica, Vol. 55, P. 99-112.
8. Beth E. W. On Padoa’s Method in the Teory of Definition. // Ibid., Vol. 56, P. 330-339.
9. Robinson A. A Result of Consistency and It’s Application to the Theory of Definition. // Kon. Ned. Akad., Amsterdam, Proc., Ser. A, Vol. 59, P. 47-58.
10. Kleene S. C. Mathematical Logic. // John Wiley & Sons, inc., 1967, New York, P. 394-441.
11. Мальцев А. И. Алгебраические системы. // Наука, 1970, Москва, с. 163-192.
12. Оревкин В. П. Верхние оценки удлинения выводов при устранении сечений. // Записки науч. семинаров ЛОМИ, т. 137, с. 87-98.
13. Оревкин В. П. О гливенковских классах секвенций. // Труды ордена Ленина Мат. института им. Стеклова, т. 98, с. 131-154.
14. Ершов Ю. Л., Палютин Е. А. Математическая логика. // Наука, 1987, Москва, с. 209-214.
15. Gentzen G. Untersuchungen über das logische Schließen. I, II. // Math. Zeitschrift, Vol. 39, P. 176-210, 405-443.
16. Kleene S. C. Permutability of inferences in Gentzen’s caculi LK and LJ. // Memories of the Am. math. society, Vol. 10, P. 1-26.

REFERENCES

1. Craig, W. "Linear Reasoning. A New Form of the Herbrand–Gentzen Theorem", *Jour. symbolic logic*, vol. 22, pp. 250-268.
2. Lyndon, R. C. "An Interpolation Theorem in the Predicate Calculus", *Pacific jour. math.*, vol. 9, pp. 129-142.
3. Tayclin, M. A. "Abstract of Lyndon's article", *Jour. symbolic logic.*, vol. 25, pp. 273-274.
4. Henkin, L. A. "An Extension of the Craig–Lyndon Interpolation Theorem", *Ibid.*, vol. 28, pp. 201-216.
5. Schütte, K. "Der Interpolationssatz der intuitionistischen Prädikaten-logik", *Math. Ann.*, vol. 148, pp. 192-200.
6. Maksimova, L. "Craig's Theorem for Superintuitionistic Logics and Amalgamated Varieties of Pseudo-Boolean Algebras", *Algebra and Logic*, vol. 16:6, pp. 643-681.
7. Maksimova, L. "On Variable Separation in Modal and Superintuitionistic Logics", *Studia Logica*, vol. 55, pp. 99-112.
8. Beth, E. W. "On Padoa's Method in the Teory of Definition. *Ibid.*, vol. 56, pp. 330-339.
9. Robinson, A. "A Result of Consistency and It's Application to the Theory of Definition. *Kon. Ned. Akad.*, Amsterdam, Proc., Ser. A, vol. 59, pp. 47-58.
10. Kleene, S. C. "Mathematical Logic", *John Wiley & Sons, inc.*, 1967, New York, pp. 394-441.
11. Maltsev, A. I., 1970. "Algebraic Systems", *Nauka*, Moscow, pp. 163-192.
12. Orevkov, V. P. "Upper Bounds of Inference Elongation When Eliminating Cuts", *Zapiski nauchnykh seminarov POMI*, vol. 137, pp. 87-98.
13. Orevkov, V. P. "On Glivenko's Classes of Sequents", *Trudy ordena Lenina Matematicheskogo Instituta Steklova*, vol. 98, pp. 131-154.
14. Ershov, Yu. L., Paliutin, E. A., 1987. "Mathematical Logic", *Nauka*, Moskov, pp. 209-214.
15. Gentzen, G. "Untersuchungen über das logische Schließen. I, II", *Math. Zeitschrift*, vol. 39, pp. 176-210, 405-443.
16. Kleene, S. C. "Permutability of inferences in Gentzen's caculi LK and LJ", *Memories of the Am. math. society*, vol. 10, pp. 1-26.

Получено: 11.03.2024

Принято в печать: 28.06.2024

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 25. Выпуск 2.

УДК 517.9

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-2-235-242

Опорные барьерные функции для нелинейных параболических задач

А. И. Денисов, И. В. Денисов

Денисов Алексей Игоревич — аспирант, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: den_tspu@mail.ru

Денисов Игорь Васильевич — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: den_tspu@mail.ru

Аннотация

В рамках нелинейного метода угловых пограничных функций существование решений нелинейных краевых задач доказывается через построение барьерных функций. Барьерные функции конструируются через выделенные специальным образом опорные барьеры. Сами опорные барьеры также могут выступать в роли барьерных функций. Получаемые неравенства в свою очередь представляют самостоятельный функциональный интерес.

Ключевые слова: нелинейные краевые задачи, барьерные функции, функциональные неравенства.

Библиография: 7 названий.

Для цитирования:

А. И. Денисов, И. В. Денисов. Опорные барьерные функции для нелинейных параболических задач // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 2, с. 235–242.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 25. No. 2.

UDC 517.9

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-2-235-242

The support barrier functions for nonlinear parabolic problems

A. I. Denisov, I. V. Denisov

Denisov Alexey Igorevich — postgraduate student, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: den_tspu@mail.ru

Denisov Igor Vasil'evich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: den_tspu@mail.ru

Abstract

Within the framework of the nonlinear method of angular boundary functions, the existence of solutions to nonlinear boundary value problems is proven through the construction of barrier functions. Barrier functions are constructed through specially designated support barriers. The support barriers themselves can also act as barrier functions. The resulting inequalities, in turn, are of independent functional interest.

Keywords: nonlinear boundary value problems, barrier functions, functional inequalities.

Bibliography: 7 titles.

For citation:

A. I. Denisov, I. V. Denisov, 2024. "The support barrier functions for nonlinear parabolic problems", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 2, pp. 235–242.

1. Постановка задачи

С целью получения необходимых барьерных функций рассмотрим начально-краевую задачу для нелинейного сингулярно возмущенного параболического уравнения:

$$\varepsilon^2 \left(a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} \right) = F(u, x, t, \varepsilon), \quad (x, t) \in \Omega,$$

$$u(x, 0, \varepsilon) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$u(0, t, \varepsilon) = \psi_1(t), \quad u(1, t, \varepsilon) = \psi_2(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

где $\Omega = \{(x, t) | 0 < x < 1, 0 < t < T\}$ – прямоугольник. Предположим, что выполнены следующие условия.

Условие 1. Функции $F(u, x, t, \varepsilon)$, $\varphi(x)$, $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ являются достаточно гладкими и в угловых точках прямоугольника Ω выполняются условия согласованности начально-краевых значений

$$\varphi(0) = \psi_1(0), \quad \varphi(1) = \psi_2(0).$$

Условие 2. Вырожденное уравнение $F(u, x, t, 0) = 0$ в замкнутом прямоугольнике $\bar{\Omega}$ имеет решение, которое обозначается как $u = \bar{u}_0(x, t)$.

Условие 3. Производная $F'_u(\bar{u}_0(x, t), x, t, 0) > 0$ в замкнутом прямоугольнике $\bar{\Omega}$.

Условие 4. Начальная задача

$$\frac{d\Pi_0}{d\tau} = -F(\bar{u}_0(x, 0) + \Pi_0, x, 0, 0), \quad \Pi_0(x, 0) = \varphi(x) - \bar{u}_0(x, 0),$$

имеет решение $\Pi_0(x, \tau)$ при $\tau \geq 0$, удовлетворяющее условию $\Pi_0(x, \infty) = 0$ (здесь параметр $x \in [0, 1]$).

Условие 5. Для систем

$$\frac{dz_1}{dy} = z_2, \quad a^2 \frac{dz_2}{dy} = F(\bar{u}_0(k, t) + z_1, k, t, 0),$$

прямые $z_1 = \psi_{1+k}(t) - \bar{u}_0(k, t)$ пересекают сепаратрисы, входящие в точку покоя $(z_1, z_2) = (0, 0)$ при $y \rightarrow \infty$ (здесь t - параметр, $k = 0$ или 1).

Применим нелинейный метод угловых пограничных функций, в рамках которого, как и в линейном случае, решение задачи ищется в виде асимптотического ряда по параметру $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$u(x, t, \varepsilon) = \bar{u} + (\Pi + Q + Q^*) + (P + P^*).$$

Здесь $\bar{u}$ – регулярная часть асимптотики, играющая роль внутри прямоугольника Ω , Π , Q и Q^* – погранслойные функции, играющие роль вблизи сторон прямоугольника Ω соответственно $t = 0$, $x = 0$ и $x = 1$, P и P^* – угловые пограничные функции, играющие роль вблизи вершин прямоугольника Ω соответственно $(0, 0)$ и $(1, 0)$.

Формальная процедура построения регулярной части асимптотики и погранслойных функций хорошо отработана (см. [1]). Однако для понимания используемых обозначений необходимы минимальные пояснения алгоритма, более подробно см. [2]. Каждая часть асимптотики строится в виде ряда по степеням ε . Регулярная часть:

$$\bar{u}(x, t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \bar{u}_k(x, t),$$

погранслойные функции:

$$\Pi(x, \tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \Pi_k(x, \tau), \quad Q(\xi, t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k Q_k(\xi, t), \quad Q^*(\xi_*, t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k Q_k^*(\xi_*, t),$$

угловые пограничные функции:

$$P(\xi, \tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k P_k(\xi, \tau), \quad P^*(\xi_*, \tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k P_k^*(\xi_*, \tau),$$

где

$$\xi = \frac{x}{\varepsilon}, \quad \xi_* = \frac{1-x}{\varepsilon}, \quad \tau = \frac{t}{\varepsilon^2}$$

– растянутые переменные.

Наиболее сложной в алгоритме является нелинейная задача для нахождения главного члена угловой части асимптотики. Для $P_0(\xi, \tau)$ задача ставится в первой четверти плоскости растянутых переменных (ξ, τ) :

$$\mathbb{R}_+^2 := \{(\xi, \tau) \mid \xi > 0, \tau > 0\},$$

и имеет вид

$$L(P_0) = 0 \quad \text{в области} \quad \mathbb{R}_+^2, \quad (1)$$

$$P_0(0, \tau) = -\Pi_0(0, \tau), \quad P_0(\xi, 0) = -Q_0(\xi, 0), \quad (2)$$

$$P_0(\xi, \tau) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \xi + \tau \rightarrow \infty, \quad (3)$$

где

$$L(Z) := a^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial \xi^2} - \frac{\partial Z}{\partial \tau} - F(\bar{u}_0 + \Pi_0 + Q_0 + Z) + F(\bar{u}_0 + \Pi_0) + F(\bar{u}_0 + Q_0) \quad (4)$$

и $F(u) = F(u, 0, 0, 0)$. Для определенности будем считать, что в угловой точке $(0, 0)$ граничное значение φ больше корня вырожденного уравнения $\bar{u}_0$. Кроме этого, будем рассматривать случай, когда функция $F(u)$ положительна на промежутке $[\bar{u}_0, \varphi]$.

Для доказательства существования решения задачи (1)–(4) используется метод верхних и нижних решений (см. [3] – [5]), который заключается в том, что задача

$$L(Z) = 0 \quad \text{в области} \quad D,$$

$$Z = h \quad \text{на границе} \quad \partial D$$

имеет решение Z в границах

$$Z_- \leq Z \leq Z_+,$$

если в области D выполняются неравенства

$$L(Z_+) \leq 0, \quad L(Z_-) \geq 0, \quad Z_- \leq Z_+,$$

а на ее границе

$$Z_- \leq h \leq Z_+.$$

Основную трудность в применении этого метода представляет построение барьерных функций. Кроме роли барьерных эти функции, в нашем случае, еще должны удовлетворять экспоненциальным оценкам убывания.

Определение. Барьерную функцию $Z(\xi, \tau)$ назовем опорной, если ее использование в качестве барьера задачи (1)–(4) приводит к неравенству, линейному относительно функции $F(u)$.

Опорные барьерные функции впервые появились в работах [6], [7], однако отдельно не изучались. К настоящему моменту удалось выделить три опорных барьерных функции. Рассмотрим эти функции, из которых, при необходимости, конструируются более сложные барьеры.

2. Первая опорная барьерная функция

Первая опорная барьерная функция – нулевая:

$$Z_1 = 0.$$

Для этой функции на границе области $\mathbb{R}_+^2$ выполняются неравенства

$$Z_1(0, \tau) = 0 > -\Pi_0(0, \tau), \quad Z_1(\xi, 0) = 0 > -Q_0(\xi, 0).$$

Поэтому Z_1 может претендовать только на роль верхнего барьера. Внутри области $\mathbb{R}_+^2$ для верхнего барьера должно выполняться неравенство $L(Z_1) \leq 0$. Имеем

$$L(Z_1) = -F(\bar{u}_0 + \Pi_0 + Q_0) + F(\bar{u}_0 + \Pi_0) + F(\bar{u}_0 + Q_0). \quad (5)$$

Для краткости обозначим

$$\Pi_0(0, \tau) = s, \quad Q_0(\xi, 0) = t. \quad (6)$$

В результате выражение (5) примет вид

$$L(Z_1) = -F(\bar{u}_0 + s + t) + F(\bar{u}_0 + s) + F(\bar{u}_0 + t),$$

и можно сформулировать следующее утверждение.

ЛЕММА 1. Функция

$$Z_1 = 0$$

является верхним барьером для решения $P_0 = P_0(\xi, \tau)$ задачи (1)–(4), если при любых значениях s и t из промежутка $(0, \varphi - \bar{u}_0]$ величина

$$L(0) = -F(\bar{u}_0 + s + t) + F(\bar{u}_0 + s) + F(\bar{u}_0 + t) \leq 0. \quad (7)$$

3. Вторая опорная барьерная функция

Вторая опорная барьерная функция имеет вид

$$Z_2 = -\frac{\Pi_0 Q_0}{\varphi - \bar{u}_0}.$$

Такой вид продиктован соотношением

$$\Pi_0 + Q_0 - \frac{\Pi_0 Q_0}{\varphi - \bar{u}_0} = (\varphi - \bar{u}_0) \left(1 - \left(1 - \frac{\Pi_0}{\varphi - \bar{u}_0} \right) \left(1 - \frac{Q_0}{\varphi - \bar{u}_0} \right) \right), \quad (8)$$

из которого следует, что величина

$$\bar{u}_0 + \Pi_0 + Q_0 + Z_2 \in (\bar{u}_0; \varphi].$$

На границе области $\mathbb{R}_+^2$ имеем

$$Z_2(0, \tau) = -\Pi_0(0, \tau),$$

$$Z_2(\xi, 0) = -Q_0(\xi, 0),$$

$$Z_2(\xi, \tau) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \xi + \tau \rightarrow \infty.$$

Поэтому Z_2 может претендовать на роль как верхнего, так и нижнего барьера. Внутри области $\mathbb{R}_+^2$ имеем

$$\begin{aligned} L(Z_2) &= -a^2 \frac{\Pi_0}{\varphi - \bar{u}_0} \frac{d^2 Q_0}{d\xi^2} + \frac{Q_0}{\varphi - \bar{u}_0} \frac{d\Pi_0}{d\tau} - F\left(\bar{u}_0 + \Pi_0 + Q_0 - \frac{\Pi_0 Q_0}{\varphi - \bar{u}_0}\right) + \\ &\quad + F(\bar{u}_0 + \Pi_0) + F(\bar{u}_0 + Q_0) = \\ &= -\frac{\Pi_0}{\varphi - \bar{u}_0} F(\bar{u}_0 + Q_0) - \frac{Q_0}{\varphi - \bar{u}_0} F(\bar{u}_0 + \Pi_0) - F\left(\bar{u}_0 + \Pi_0 + Q_0 - \frac{\Pi_0 Q_0}{\varphi - \bar{u}_0}\right) + \\ &\quad + F(\bar{u}_0 + \Pi_0) + F(\bar{u}_0 + Q_0) = \\ &= \left(1 - \frac{\Pi_0}{\varphi - \bar{u}_0}\right) F(\bar{u}_0 + Q_0) + \left(1 - \frac{Q_0}{\varphi - \bar{u}_0}\right) F(\bar{u}_0 + \Pi_0) - F\left(\bar{u}_0 + \Pi_0 + Q_0 - \frac{\Pi_0 Q_0}{\varphi - \bar{u}_0}\right) = \\ &= \left(1 - \frac{s}{\varphi - \bar{u}_0}\right) F(\bar{u}_0 + t) + \left(1 - \frac{t}{\varphi - \bar{u}_0}\right) F(\bar{u}_0 + s) - F\left(\bar{u}_0 + s + t - \frac{st}{\varphi - \bar{u}_0}\right) \end{aligned}$$

при обозначениях (6). Таким образом, верно следующее утверждение.

ЛЕММА 2. *Функция*

$$Z_2 = -\frac{\Pi_0 Q_0}{\varphi - \bar{u}_0}$$

является барьером для решения $P_0 = P_0(\xi, \tau)$ задачи (1)–(4), если при любых значениях s и t из промежутка $(0, \varphi - \bar{u}_0]$ выражение

$$L(Z_2) = \left(1 - \frac{s}{\varphi - \bar{u}_0}\right) F(\bar{u}_0 + t) + \left(1 - \frac{t}{\varphi - \bar{u}_0}\right) F(\bar{u}_0 + s) - F\left(\bar{u}_0 + s + t - \frac{st}{\varphi - \bar{u}_0}\right) \quad (9)$$

сохраняет свой знак.

4. Третья опорная барьерная функция

Третья опорная барьерная функция определяется с помощью погранслойных функций $\Pi_0 = \Pi_0(0, \tau)$ и $Q_0 = Q_0(\xi, 0)$ как

$$Z_3 = -2\sqrt{\Pi_0 Q_0}.$$

Выбор такого вида продиктован соотношением

$$\Pi_0 + Q_0 - 2\sqrt{\Pi_0 Q_0} = \left(\sqrt{\Pi_0} - \sqrt{Q_0}\right)^2, \quad (10)$$

которое показывает, что величина

$$\bar{u}_0 + \Pi_0 + Q_0 + Z_3 \in [\bar{u}_0; \varphi),$$

так как $\Pi_0, Q_0 \in (0; \varphi - \bar{u}_0]$.

Задача для определения функции $\Pi_0 = \Pi_0(0, \tau)$ имеет вид

$$-\frac{d\Pi_0}{d\tau} = F(\bar{u}_0 + \Pi_0), \quad \Pi_0(0, 0) = \varphi - \bar{u}_0$$

(см. [2]). Поэтому

$$\frac{d\Pi_0}{d\tau} = -F(\bar{u}_0 + \Pi_0),$$

и решение $\Pi_0(0, \tau)$ представляет собой функцию, убывающую от $\Pi_0(0, 0) = \varphi - \bar{u}_0 > 0$ до $\Pi_0(0, \infty) = 0$.

Задача для определения функции $Q_0(\xi, 0)$ имеет вид

$$a^2 \frac{d^2 Q_0}{d\xi^2} = F(\bar{u}_0 + Q_0), \quad Q_0(0, 0) = \varphi - \bar{u}_0, \quad Q_0(\infty, 0) = 0,$$

(также см. [2]). Поэтому

$$\frac{d^2 Q_0}{d\xi^2} = \frac{1}{a^2} F(\bar{u}_0 + Q_0),$$

и, понижая порядок уравнения, получаем

$$\left(\frac{dQ_0}{d\xi}\right)^2 = \frac{2}{a^2} \int_0^{Q_0} F(\bar{u}_0 + u) du.$$

Выбираем случай отрицательной производной:

$$\frac{dQ_0}{d\xi} = -\frac{2}{a^2} \int_0^{Q_0} F(\bar{u}_0 + u) du,$$

и решение $Q_0(\xi, 0)$, которое является функцией, убывающей от $Q_0(0, 0) = \varphi - \bar{u}_0 > 0$ до $Q_0(\infty, 0) = 0$.

На границе области $\mathbb{R}_+^2$ имеем

$$Z_3(0, \tau) = -2\sqrt{(\varphi - \bar{u}_0)\Pi_0} < -\Pi_0,$$

$$Z_3(\xi, 0) = -2\sqrt{(\varphi - \bar{u}_0)Q_0} < -Q_0,$$

$$Z_3(\xi, \tau) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \xi + \tau \rightarrow \infty,$$

поэтому Z_3 может претендовать только на роль нижнего барьера.

Внутри области $\mathbb{R}_+^2$ имеем

$$\begin{aligned} L\left(-2\sqrt{\Pi_0 Q_0}\right) &= -2a^2\sqrt{\Pi_0}\frac{d^2\sqrt{Q_0}}{d\xi^2} - 2\sqrt{Q_0}\frac{d\sqrt{\Pi_0}}{d\tau} - \\ &- F\left(\bar{u}_0 + \Pi_0 + Q_0 - 2\sqrt{\Pi_0 Q_0}\right) + F(\bar{u}_0 + \Pi_0) + F(\bar{u}_0 + Q_0). \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь

$$\begin{aligned} -2a^2\sqrt{\Pi_0}\frac{d^2\sqrt{Q_0}}{d\xi^2} &= -2a^2\sqrt{\Pi_0}\frac{d}{d\xi}\left(\frac{d\sqrt{Q_0}}{d\xi}\right) = -2a^2\sqrt{\Pi_0}\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{2\sqrt{Q_0}}\frac{dQ_0}{d\xi}\right) = \\ &= -2a^2\sqrt{\Pi_0}\left(-\frac{1}{4Q_0\sqrt{Q_0}}\left(\frac{dQ_0}{d\xi}\right)^2 + \frac{1}{2\sqrt{Q_0}}\frac{d^2Q_0}{d\xi^2}\right) = \\ &= -2a^2\sqrt{\Pi_0}\left(-\frac{1}{4Q_0\sqrt{Q_0}}\frac{2}{a^2}\int_0^{Q_0}F(\bar{u}_0 + u)du + \frac{1}{2\sqrt{Q_0}}\frac{1}{a^2}F(\bar{u}_0 + Q_0)\right) = \\ &= \frac{\sqrt{\Pi_0}}{Q_0\sqrt{Q_0}}\int_0^{Q_0}F(\bar{u}_0 + u)du - \frac{\sqrt{\Pi_0}}{\sqrt{Q_0}}F(\bar{u}_0 + Q_0), \end{aligned}$$

а

$$-2\sqrt{Q_0}\frac{d\sqrt{\Pi_0}}{d\tau} = -\frac{\sqrt{Q_0}}{\sqrt{\Pi_0}}\frac{d\Pi_0}{d\tau} = \frac{\sqrt{Q_0}}{\sqrt{\Pi_0}}F(\bar{u}_0 + \Pi_0).$$

Собираем все вместе и с учетом замены (6) получаем

$$\begin{aligned} L(Z_3) &= \frac{\sqrt{s}}{t\sqrt{t}}\int_0^tF(\bar{u}_0 + u)du - \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{t}}F(\bar{u}_0 + t) - \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{s}}F(\bar{u}_0 + s) - \\ &- F\left(\bar{u}_0 + s + t - 2\sqrt{st}\right) + F(\bar{u}_0 + s) + F(\bar{u}_0 + t) = \\ &= \left(1 - \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{t}}\right)F(\bar{u}_0 + t) + \left(1 - \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{s}}\right)F(\bar{u}_0 + s) - F\left(\bar{u}_0 + s + t - 2\sqrt{st}\right) + \frac{\sqrt{s}}{t\sqrt{t}}\int_0^tF(\bar{u}_0 + u)du. \end{aligned}$$

Таким образом, верно следующее утверждение.

ЛЕММА 3. Функция

$$Z_3 = -2\sqrt{\Pi_0 Q_0}$$

является нижним барьером для решения $P_0 = P_0(\xi, \tau)$ задачи (1)–(4), если при любых значениях s и t из промежутка $(0, \varphi - \bar{u}_0]$ величина

$$\begin{aligned} L(Z_3) &= \left(1 - \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{t}}\right)F(\bar{u}_0 + t) + \left(1 - \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{s}}\right)F(\bar{u}_0 + s) - \\ &- F\left(\bar{u}_0 + s + t - 2\sqrt{st}\right) + \frac{\sqrt{s}}{t\sqrt{t}}\int_0^tF(\bar{u}_0 + u)du \geq 0. \end{aligned} \quad (12)$$

5. Сравнение опорных барьерных функций

При любых значениях s и t из промежутка $(0, \varphi - \bar{u}_0]$ справедливо неравенство

$$2\sqrt{st} - \frac{st}{\varphi - \bar{u}_0} = \sqrt{st}\left(2 - \frac{\sqrt{st}}{\varphi - \bar{u}_0}\right) > 0.$$

Поэтому

$$-2\sqrt{st} < -\frac{st}{\varphi - \bar{u}_0}$$

и имеет место следующее утверждение.

ЛЕММА 4. Опорные барьерные функции находятся между собой в следующем порядке:

$$Z_3 < Z_2 < Z_1.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. - М.: Высшая школа, 1990.
2. Денисов А.И., Денисов И.В. Нелинейный метод угловых пограничных функций для сингулярно возмущенных параболических задач с кубическими нелинейностями // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 1, с. 25–40.
3. Amann H. On the Existence of Positive Solutions of Nonlinear Elliptic Boundary Value Problems // Indiana Univ. Math. J. 1971. Vol.21, № 2. P. 125 - 146.
4. Sattinger D.H. Monotone Methods in Nonlinear Elliptic and Parabolic Boundary Value Problems // Indiana Univ. Math. J. 1972. V. 21. № 11. P. 979 - 1000.
5. Amann H. // Nonlinear Analysis: coll. of papers in honor of E.H. Rothe / Ed. by L. Cesari et al. - New York etc: Acad press, cop. 1978. – XIII. P. 1 - 29.
6. Денисов И.В. Об асимптотическом разложении решения сингулярно возмущенного эллиптического уравнения в прямоугольнике // Асимптотические методы теории сингулярно возмущенных уравнений и некорректно поставленных задач: Сб. научн. тр. - Бишкек: Илим, 1991. - С. 37.
7. Денисов И.В. Квазилинейные сингулярно возмущенные эллиптические уравнения в прямоугольнике // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. - Т.35. № 11. 1995. - С. 1666-1678. (English transl.: Denisov I.V. Quasilinear Singularly Perturbed Elliptic Equations in a Rectangle // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1995. Vol. 35. № 11. pp. 1341-1350.)

REFERENCES

1. Vasilyeva, A. B., Butuzov, V. F. 1990. "Asymptotic methods in the theory of singular perturbations", *M.: Higher school*.
2. Denisov A.I., Denisov I.V., 2024. "Nonlinear method of angular boundary functions for singularly perturbed parabolic problems with cubic nonlinearities" , *Chebyshevskii Sbornik*, Vol. 25, № . 1, pp. 25–40.
3. Amann H., 1971. "On the Existence of Positive Solutions of Nonlinear Elliptic Boundary Value Problems", *Indiana Univ. Math. J.*, Vol.21, № 2. pp. 125–146.
4. Sattinger D.H., 1972. "Monotone Methods in Nonlinear Elliptic and Parabolic Boundary Value Problems", *Indiana Univ. Math. J.*, Vol.21. № 11. pp. 979–1000.
5. Amann H., 1978. "Nonlinear Analysis: coll. of papers in honor of E.H. Rothe / Ed. by L. Cesari et al.", *New York etc: Acad press, cop.* – XIII. pp. 1–29.
6. Denisov I.V., 1991. "On the asymptotic expansion of the solution of a singularly perturbed elliptic equation in a rectangle", *Asymptotic methods of the theory of singularly perturbed equations and ill-posed problems: Collection of articles. scientific. tr.* - Bishkek: Ilim, p. 37.
7. Denisov I.V., 1995. "Quasilinear Singularly Perturbed Elliptic Equations in a Rectangle", *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, Vol. 35. № 11. pp. 1341-1350.

Получено: 06.03.2024

Принято в печать: 28.06.2024

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 25. Выпуск 2.

УДК 517, 518.85

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-2-243-250

О достаточных условиях существования решения бесконечно-разностного уравнения с переменными коэффициентами

С. Э. Нохрин, В. Т. Шевалдин

Нохрин Сергей Эрнестович — кандидат физико-математических наук, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН (г. Екатеринбург).

e-mail: varyag2@mail.ru

Шевалдин Валерий Трифонович — доктор физико-математических наук, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН (г. Екатеринбург).

e-mail: valerii.shevaldin@imm.uran.ru

Аннотация

В работе рассматривается разностное уравнение вида $\sum_{l=0}^r a_{k,l} Z_{k+l} = y_k$ ($k \in \mathbb{Z}$), где $r \in \mathbb{N}$, $y = \{y_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ — заданная числовая последовательность из пространства l_p ($1 \leq p < \infty$), при условии, что матрица $A = (a_{k,l})$, $a_{k,l} \in \mathbb{R}$, обладает свойством, близким к наличию доминантной диагонали. С помощью теоремы о неподвижной точке выписаны достаточные условия на коэффициенты $a_{k,l}$, при которых данное уравнение имеет единственное решение $Z = \{Z_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$, принадлежащее пространству l_p , и для нормы этого решения приведена числовая оценка сверху.

Ключевые слова: разностное уравнение, последовательности, пространство l_p , норма решения.

Библиография: 12 названий.

Для цитирования:

С. Э. Нохрин, В. Т. Шевалдин. О достаточных условиях существования решения бесконечно-разностного уравнения с переменными коэффициентами // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 2, с. 243–250.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 25. No. 2.

UDC 517, 518.85

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-2-243-250

Sufficient conditions for the existence of the solution of an infinite-difference equation with variable coefficients

S. E. Nohrin, V. T. Shevaldin

Nohrin Sergei Ernestovich — candidate of physical and mathematical sciences, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics (Ural Branch) of the RAS (Yekaterinburg).

e-mail: varyag2@mail.ru

Shevaldin Valerii Trifonovich — doctor of physical and mathematical sciences, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics (Ural Branch) of the RAS (Yekaterinburg).

e-mail: valerii.shevaldin@imm.uran.ru

Abstract

The paper discusses a difference equation of the form $\sum_{l=0}^r a_{k,l} Z_{k+l} = y_k$ ($k \in \mathbb{Z}$), where $r \in \mathbb{N}$, $y = \{y_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ is a given numerical sequence from the space l_p ($1 \leq p < \infty$), provided that the matrix $A = (a_{k,l})$, $a_{k,l} \in \mathbb{R}$, satisfies some condition close to the presence of a dominant diagonal. With the help of the fixed point theorem, sufficient conditions are written for the coefficients $a_{k,l}$, at which the equation has a unique solution $Z = \{Z_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$, belonging to the space l_p . For the norm of this solution, a numerical estimate is given from above.

Keywords: difference equation, sequences, space l_p , solution norm.

Bibliography: 12 titles.

For citation:

S. E. Nohrin, V. T. Shevaldin, 2024, "Sufficient conditions for the existence of the solution of an infinite-difference equation with variable coefficients", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 2, pp. 243–250.

1. Введение

При решении задач экстремальной интерполяции последовательностей действительных чисел в постановке Яненко — Стечкина — Субботина (см., например, [1]–[6]) в качестве экстремальных функций естественным образом появляются интерполяционные сплайны и их обобщения. Для доказательства их существования применяются различные методы (см. [1]–[11]), так или иначе связанные с решением разностных уравнений с постоянными (в случае равномерной сетки точек интерполяции) или с переменными коэффициентами (если сетка узлов интерполяции, заданная на оси $\mathbb{R}$ или на отрезке, является произвольной).

В этих задачах в работах [4]–[6] возникли бесконечно-разностные уравнения вида

$$\sum_{l=0}^r a_{k,l} Z_{k+l} = y_k \quad (k \in \mathbb{Z}), \quad (1)$$

где $a_{k,l} \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{N}$ и $y = \{y_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ — заданная числовая последовательность из пространства l_p ($1 \leq p \leq \infty$), и изучались свойства матрицы $A = (a_{k,l})$, которые обеспечивали существование и единственность решения уравнения (1), принадлежащего пространству l_p ($1 \leq p \leq \infty$).

Напомним, что под пространством $l_p = l_p(\mathbb{Z})$ понимается пространство последовательностей действительных чисел $Z = \{Z_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ с нормой

$$\|Z\|_{l_p} = \begin{cases} \sup_{k \in \mathbb{Z}} |Z_k|, & p = \infty, \\ \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |Z_k|^p \right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty. \end{cases}$$

Сформулируем один общий результат о решении уравнения (1), когда это уравнение имеет постоянные коэффициенты, т. е. если $a_{k,l} = a_l$ ($l = 0, 1, \dots, r$) не зависят от k .

ТЕОРЕМА 1. *Если все нули многочлена $U_r(x) = \sum_{l=0}^r a_l x^l$ ($a_l \in \mathbb{R}$, $a_r \neq 0$) отрицательны и просты, $U_r(-1) \neq 0$, то разностное уравнение*

$$\sum_{l=0}^r a_l Z_{k+l} = y_k \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

где $y = \{y_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \in l_p$ ($1 \leq p \leq \infty$), имеет единственное решение $Z^0 = \{Z_k^0\}_{k \in \mathbb{Z}} \in l_p$, выражаемое формулой

$$Z_k^0 = \sum_{s \in \mathbb{Z}} b_{-s-k} y_s,$$

где $\sum_{s \in \mathbb{Z}} b_s x^s = 1/(U_r(x))$, для которого справедлива оценка $\|Z^0\|_{l_p} \leq \frac{\|y\|_{l_p}}{|U_r(-1)|}$.

Существование решения разностного уравнения в этой теореме доказано М. Г. Крейном [8], а оценка сверху нормы этого решения получена Ю. Н. Субботиным [1, 2].

В цитированных работах М. Г. Крейна и Ю. Н. Субботина имеются и другие результаты, касающиеся достаточных условий существования и единственности решений и более общих разностных уравнений, в частности, вида

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} a_{l+k} Z_l = y_k \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

где $y = \{y_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \in l_p$ ($1 \leq p \leq \infty$), но мы не будем здесь на них останавливаться.

В случае $p = \infty$ обширная библиография по решению разностных уравнений вида

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} a_{k,l} Z_l = y_k \quad (k \in \mathbb{Z}), \quad y = \{y_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \in l_\infty, \quad (2)$$

изложена в недавних работах [9, 10] Ю. С. Волкова и С. И. Новикова. В монографии [11] Л. В. Канторовича и В. И. Крылова установлено, что достаточным условием существования единственного ограниченного решения уравнения (2) является требование, что матрица $A = (a_{k,l})$ является вполне регулярной. Приведем одно определение из [9].

DEFINITION 1. *Считаем, что бесконечная матрица $A = (a_{k,l})$ ($k, l \in \mathbb{Z}$) (см. (2)) имеет доминирующую диагональ, если можно указать такое число $m \in \mathbb{Z}$, что при всех $k \in \mathbb{Z}$ будут выполняться неравенства*

$$|a_{k,k+m}| - \sum_{l \in \mathbb{Z} \setminus (k+m)} |a_{k,l}| \geq \rho > 0 \quad (k \in \mathbb{Z})$$

для некоторого положительного числа ρ .

В [9] доказано, что если матрица $A = (a_{k,l})$ ($k, l \in \mathbb{Z}$) имеет доминирующую диагональ, то эта матрица является вполне регулярной, и, как следствие, из результатов [11] получено, что система уравнений (2) для любой ограниченной последовательности $y = \{y_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ имеет единственное ограниченное решение $Z = \{Z_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$, и справедлива оценка $\|Z\|_{l_\infty} \leq \sup_{k \in \mathbb{Z}} \frac{|y_k|}{\rho_k}$, где $\rho_k = |a_{k,k+m}| - \sum_{l \in \mathbb{Z} \setminus \{k+m\}} |a_{k,l}|$.

В случае, если $y \in l_p$ ($1 \leq p < \infty$), достаточные условия существования решений уравнений (1) и (2) практически не изучены (есть небольшое обсуждение в работе [2] Ю. Н. Субботина, см. также библиографию в [9]).

Ситуация с решением разностных уравнений с переменными коэффициентами (например, вида (1)) схожа с общей теорией решения неоднородных линейных дифференциальных уравнений r -го порядка с переменными коэффициентами: хорошо разработана теория решений таких уравнений с постоянными коэффициентами, а в гораздо меньшей степени исследованы уравнения, если эти коэффициенты — переменные функции. Отметим еще, что уравнения в конечных разностях исследовались в монографии [12] А. О. Гельфонда.

В данной работе в случае $1 \leq p < \infty$ нам не удалось развить теорему 1 Крейна — Субботина на случай произвольной матрицы $A = (a_{k,l})$. Далее указаны довольно жесткие достаточные условия на коэффициенты этой матрицы (по форме близкие к существованию доминирующей диагонали), обеспечивающие существование и единственность решения уравнения (1), если его правая часть $y = \{y_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ принадлежит пространству l_p ($1 \leq p < \infty$), и при этих ограничениях найдена оценка сверху для нормы этого решения в пространстве l_p .

2. Существование решения разностного уравнения и его оценка

Рассмотрим уравнение (1). Выделим в матрице $A = (a_{k,l})$ столбец, соответствующий параметру m : $0 \leq m \leq r$ с элементами $\{a_{k,m}\}_{k \in \mathbb{Z}}$. Обозначим

$$\mu_k = \sum_{l=0}^r a_{k,l} \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

и далее считаем, что все $\mu_k \neq 0$ ($k \in \mathbb{Z}$).

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнено следующее условие а): существует такое положительное число α , что

$$K = r \cdot \sup_{\substack{l=0,1,\dots,r; \\ k \in \mathbb{Z}}} \left| \frac{a_{k,l}}{\mu_k} \right| + \sup_{k \in \mathbb{Z}} \left| \frac{\mu_k - a_{k,m}}{\mu_k} \right| < \alpha < 1.$$

Тогда для любой последовательности $y = \{y_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \in l_p$ ($1 \leq p < \infty$) разностное уравнение (1) имеет решение $Z = \{Z_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \in l_p$, причем это решение единственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство теоремы 2 сведем к проверке выполнения условия теоремы о неподвижной точке при сжимающем отображении в полном метрическом пространстве $l_p = l_p(\mathbb{Z})$ ($p \geq 1$). Именно такой метод применялся при доказательстве существования и единственности интерполяционных сплайнов с произвольными узлами в работах [5] и [6]. С учетом определения чисел $\mu_k = \sum_{l=0}^r a_{k,l}$ перепишем уравнение (1) в виде

$$\sum_{l=0, l \neq m}^r a_{k,l}(Z_{k+m} - Z_{k+l}) = -y_k + \mu_k Z_{k+m}.$$

Поскольку числа $\mu_k \neq 0$ ($k \in \mathbb{Z}$), то отсюда следует равенство

$$Z_{k+m} = \frac{1}{\mu_k} \left[y_k + \sum_{l=0, l \neq m}^r a_{k,l} (Z_{k+m} - Z_{k+l}) \right]. \quad (3)$$

Обозначим $\bar{Z} = \{Z_{k+m}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ и рассмотрим нелинейный оператор $T : \bar{Z} \rightarrow T\bar{Z}$, где

$$T\bar{Z} = T\{Z_{k+m}\} = \frac{1}{\mu_k} \left[y_k + \sum_{l=0, l \neq m}^r a_{k,l} (Z_{k+m} - Z_{k+l}) \right] \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Докажем, что при выполнении условия а) теоремы 2 этот оператор является сжимающим в полном пространстве l_p ($1 \leq p < \infty$). В самом деле, пусть $\bar{Z}^{(1)}, \bar{Z}^{(2)} \in l_p$; тогда

$$\begin{aligned} \|T(\bar{Z}^{(1)} - \bar{Z}^{(2)})\|_{l_p} &= \left\| \left\{ \frac{1}{\mu_k} \sum_{l=0, l \neq m}^r a_{k,l} (Z_{k+m}^{(1)} - Z_{k+l}^{(1)}) - \frac{1}{\mu_k} \sum_{l=0, l \neq m}^r a_{k,l} (Z_{k+m}^{(2)} - Z_{k+l}^{(2)}) \right\} \right\|_{l_p} \leq \\ &\leq \left\| \left\{ \frac{1}{\mu_k} \sum_{l=0, l \neq m}^r a_{k,l} (Z_{k+m}^{(1)} - Z_{k+m}^{(2)}) \right\} \right\|_{l_p} + \left\| \left\{ \frac{1}{\mu_k} \sum_{l=0, l \neq m}^r a_{k,l} (Z_{k+l}^{(2)} - Z_{k+l}^{(1)}) \right\} \right\|_{l_p} \leq \\ &\leq \sup_{k \in \mathbb{Z}} \left| \frac{\mu_k - a_{k,m}}{\mu_k} \right| \cdot \|\bar{Z}^{(1)} - \bar{Z}^{(2)}\|_{l_p} + \sup_{\substack{l=0,1,\dots,r; \\ k \in \mathbb{Z}; l \neq m}} \left| \frac{a_{k,l}}{\mu_k} \right| \cdot r \cdot \|\bar{Z}^{(1)} - \bar{Z}^{(2)}\|_{l_p} = K \|\bar{Z}^{(1)} - \bar{Z}^{(2)}\|_{l_p}. \end{aligned}$$

Поэтому по теореме о неподвижной точке при сжимающем отображении уравнение (3), а, следовательно, и уравнение (1) при любой правой части $y \in l_p$ имеет решение $Z = \{Z_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$, это решение единственно и принадлежит пространству l_p . Теорема 2 доказана.

ПРИМЕР 3. Пусть для любого $k \in \mathbb{Z}$ числа $a_{k,m} = 1$, $a_{k,l} = \frac{1}{r+1}$ ($l = 0, 1, \dots, m-1, m+1, \dots, r$). Тогда матрица $A = (a_{k,l})$ системы (1) имеет доминирующий столбец, число $K = \frac{2r}{2r+1} < 1$, и система (1) имеет единственное решение $Z = \{Z_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \in l_p$.

ПРИМЕР 4. Пусть для любого $k \in \mathbb{Z}$ числа $a_{k,m} = 1$, $a_{k,m+1} = \frac{r}{r+1}$ ($r \geq 2$), а остальные $a_{k,l}$ ($l \neq m, l \neq m+1$) равны 0. Матрица $A = (a_{k,l})$ системы (1) имеет доминирующий столбец, но условие а) теоремы 2 не выполнено, поскольку число $K = \frac{r^2+r}{2r+1} > 1$ при $r \geq 2$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполнено условие а) теоремы 2 и еще условие б) :

$$L = \inf_{k \in \mathbb{Z}} |a_{k,m}| - r \cdot \sup_{\substack{l=0,1,\dots,r; \\ k \in \mathbb{Z}; l \neq m}} |a_{k,l}| > 0.$$

Тогда для любого числа $p : 1 \leq p < \infty$ и произвольной последовательности $y = \{y_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \in l_p$ справедлива следующая оценка решения уравнения (1) :

$$\|Z\|_{l_p} \leq \frac{\|y\|_{l_p}}{L}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу свойств нормы имеем

$$\begin{aligned} \|y\|_{l_p} &= \left\| \left\{ \sum_{l=0}^r a_{k,l} Z_{k+l} \right\} \right\|_{l_p} \geq \| \{a_{k,m} Z_{k+m}\} \|_{l_p} - \left\| \left\{ \sum_{l=0, l \neq m}^r a_{k,l} Z_{k+l} \right\} \right\|_{l_p} \geq \\ &\geq \inf_{k \in \mathbb{Z}} |a_{k,m}| \cdot \|Z\|_{l_p} - r \cdot \sup_{\substack{l=0,1,\dots,r; \\ k \in \mathbb{Z}; l \neq m}} |a_{k,l}| \cdot \|Z\|_{l_p} = L \cdot \|Z\|_{l_p}. \end{aligned}$$

Из этого неравенства следует утверждение теоремы 3.

ПРИМЕР 5. В [6] вторым автором статьи на произвольной сетке $\Delta = \{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ числовой оси $\mathbb{R}$ рассмотрена задача Яненко — Стечкина — Субботина экстремальной интерполяции функций с наименьшим значением нормы в пространстве $L_p(\mathbb{R})$ ($1 \leq p \leq \infty$) второй производной при условии, что нормы вторых разделенных разностей интерполируемых значений ограничены в пространстве $l_p = l_p(\mathbb{Z})$. При получении оценок сверху для нормы второй производной в этой задаче возникли разностные уравнения вида (см. [6, формула (3.6)]):

$$A_k Z_{k+2} + B_k Z_{k+1} + C_k Z_k = y_k \quad (k \in \mathbb{Z}), \quad y = \{y_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \in l_p, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{h_{k+1}(h_k + h_{k+1})}{(h_k + 2h_{k+1} + h_{k+2})^2}, \quad C_k = \frac{h_k(h_k + h_{k+1})}{(h_{k-1} + 2h_k + h_{k+1})^2}, \\ B_k &= \frac{h_k(h_{k-1} + h_k)}{(h_{k-1} + 2h_k + h_{k+1})^2} \left[\frac{q}{h_k + h_{k+1}} + \frac{q+1}{h_{k-1} + h_k} \right] + \\ &\quad \frac{h_{k+1}(h_{k+1} + h_{k+2})}{(h_k + 2h_{k+1} + h_{k+2})^2} \left[\frac{q}{h_k + h_{k+1}} + \frac{q+1}{h_{k+1} + h_{k+2}} \right] \\ &\quad \left(q = \frac{p}{p-1}, \quad h_k = x_{k+1} - x_k \right). \end{aligned}$$

В [6] методом теоремы 2 при $r = 2$ и любом $p : 1 < p < \infty$ доказано, что для любой сетки узлов $\Delta = \{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ система (4) имеет единственное решение $Z = \{Z_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \in l_p$, число $K \leq 17/18$, а методом теоремы 3 установлено, что $L = 1/18$.

3. Заключение

Достаточные условия для решения разностного уравнения вытекают в настоящей работе только из применяемого нами подхода к решению (при этом само решение выписать явно не удастся), связанного с принципом сжимающих отображений, и, возможно, могут быть ослаблены.

Результаты настоящей работы могут найти применение при разработке численных методов решения дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных при замене дифференциальных операторов разностными.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Субботин Ю. Н. О связи между конечными разностями и соответствующими производными // Труды МИАН СССР. 1965. Т. 78. С. 24–42.
2. Субботин Ю. Н. Экстремальные задачи функциональной интерполяции и интерполяционные в среднем сплайны // Труды МИАН СССР. 1975. Т. 138. С. 118–173.
3. Шевалдин В. Т. Некоторые задачи экстремальной интерполяции в среднем для линейных дифференциальных операторов // Тр. МИАН СССР. 1983. Т. 164. С. 203–240.
4. Новиков С. И., Шевалдин В. Т. О связи между второй разделенной разностью и второй производной // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2020. Т. 26, № 2. С. 216–224. doi: 10.21538/0134-4889-2020-26-2-216-224.
5. Шевалдин В. Т., Субботин Ю. Н. Экстремальная функциональная интерполяция в пространстве L_p на произвольной сетке числовой оси // Матем. сборник. 2022. Т. 213, № 4. С. 123–144. doi: 10.4213/sm9628.

6. Шевалдин В. Т. Экстремальная интерполяция с наименьшим значением нормы второй производной в пространстве $L_p(\mathbb{R})$ // Известия РАН. Серия матем. 2022. Т. 86, № 1. С. 219–236. doi: 10.4213/im9125.
7. Субботин Ю. Н., Новиков С. И., Шевалдин В. Т. Экстремальная функциональная интерполяция и сплайны // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2018. Т. 24, № 3. С. 200–225. doi: 10.21538/0134-4889-2018-24-3-200-225.
8. Крейн М. Г. Интегральные уравнения на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов // Успехи мат. наук. 1958. Т. 13, № 5. С. 3–120.
9. Волков Ю. С., Новиков С. И. Оценки решений бесконечных систем линейных уравнений и задача интерполяции кубическими сплайнами на прямой // Сиб. матем. журн. 2022. Т. 63, № 4. С. 814–830. doi: 10.33048/smzh.2022.63.408.
10. Volkov Yu. S., Novikov S. I. Estimates for solutions of bi-infinite systems of linear equations // Eur. J. Math. 2022. Vol. 8, no. 2. Pp. 722–731. doi: 10.1007/s40879-021-00528-y.
11. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. М.: Физматгиз, 1962. 695 с.
12. Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей. М.: Наука, 1967. 376 с.

REFERENCES

1. Subbotin, Yu. N. 1965. “On the connection between finite differences and corresponding derivatives”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 78, pp. 24–42 (in Russian).
2. Subbotin, Yu. N. 1977. “Extremal problems of functional interpolation and mean interpolation splines”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 138, pp. 127–185.
3. Shevaldin, V. T. 1985. “Some problems of extremal interpolation in the mean for linear differential operators”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 164, pp. 233–273.
4. Novikov, S. I., Shevaldin, V. T. 2020. “On the connection between the second divided difference and the second derivative”, *Tr. In-ta Matematiki I Mekhaniki UrO RAN*, vol. 26, no. 2, pp. 216–224. doi: 10.21538/0134-4889-2020-26-2-216-224 (in Russian).
5. Subbotin, Yu. N., Shevaldin, V. T. 2022. “Extremal functional L_p -interpolation on an arbitrary mesh on the real axis”, *Sbornik: Mathematics*, vol. 213, no. 4, pp. 556–577. doi: 10.1070/SM9628.
6. Shevaldin, V. T. 2022. “Extremal interpolation with the least value of the norm of the second derivative in $L_p(\mathbb{R})$ ”, *Izvestiya: Mathematics*, vol. 86, no. 1, pp. 203–219. doi: 10.1070/IM9125.
7. Subbotin, Yu. N., Novikov, S. I., Shevaldin, V. T. 2018. “Extremal function interpolation and splines”, *Tr. In-ta Matematiki I Mekhaniki UrO RAN*, vol. 24, no. 3, pp. 200–225. doi: 10.21538/0134-4889-2018-24-3-200-225 (in Russian).
8. Krein, M. G. 1958. “Integral equations on the half-line with a kernel depending on the difference of the arguments”, *Uspekhi Mat. Nauk*, vol. 138, no. 5 (83), pp. 3–120 (in Russian).
9. Volkov, Yu. S., Novikov, S. I. 2022. “Estimates of solutions to uniform systems of linear equations and the problem of interpolation by cubic splines on the real line”, *Siberian Math. J.*, vol. 63, no. 4, pp. 677–90. doi: <https://doi.org/10.1134/S0037446622040085>.

10. Volkov, Yu.S., Novikov, S.I. 2022. "Estimations for solutions of bi-infinite systems of linear equations", *Eur. J. Math.*, vol. 8, no. 2. P. 722–731. doi: <https://doi.org/10/1007/s40879-021-00528-y>.
11. Kantorovich, L. V., Krylov, V. I. 1962. "Approximate methods of higher analysis". *M.: Fizmatgiz. Publ.*, 695 p.
12. Gel'fond, A. O. 1967. "Calculus of finite differences", *M.: Nauka Publ.*, 376 p.

Получено: 13.04.2024

Принято в печать: 28.06.2024

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 25. Выпуск 2.

УДК 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-2-251-259

Непрерывность рядов Дирихле s -мерных решёток¹

Р. В. Тарабрин, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский

Тарабрин Роман Владимирович — аспирант, Оренбургский государственный университет (г. Оренбург).

e-mail: reanimators@rambler.ru

Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Реброва Ирина Юрьевна — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: i_rebrova@mail.ru

Добровольский Николай Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: dobrovol@tsput.ru

Аннотация

В работе исследуются ряды Дирихле s -мерных решёток. В частности, доказана теорема, что ряды Дирихле s -мерных решёток непрерывны на пространстве решёток в области их абсолютной сходимости.

В заключении рассмотрены актуальные задачи для рядов Дирихле s -мерных решёток, требующие дальнейшего исследования.

Ключевые слова: дзета-функция Римана, ряд Дирихле, гиперболическая дзета-функция решётки.

Библиография: 5 названий.

Для цитирования:

Р. В. Тарабрин, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский. Непрерывность рядов Дирихле s -мерных решёток // Чебышевский сборник. 2024. Т. 25, вып. 2, С. 251–259.

¹Работа выполнена по гранту РФФИ № 23-21-00317 «Геометрия чисел и диофантовы приближения в теоретико-числовом методе в приближенном анализе».

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 25. No. 2.

UDC 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-2-251-259

Continuity of Dirichlet series of s -dimensional lattices²

Р. В. Тарабрин, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский

Tarabrin Roman Vladimirovich — postgraduate student, Orenburg State University (Orenburg).

e-mail: reanimators@rambler.ru

Dobrovol'skii Nikolai Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Rebrova Irina Yuryevna — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: i_rebrova@mail.ru

Dobrovol'skii Nikolai Mihailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: dobrovol@tspu.ru

Abstract

In this work, Dirichlet series of s -dimensional lattices are studied. In particular, the theorem is proved that the Dirichlet series of s -dimensional lattices are continuous on the space of lattices in the region of their absolute convergence.

In conclusion, current problems for Dirichlet series of s -dimensional lattices that require further research are considered.

Keywords: Riemann zeta function, Dirichlet series, hyperbolic lattice zeta function.

Bibliography: 5 titles.

For citation:

R. V. Tarabrin, N. N. Dobrovolsky, I. Yu. Rebrova, N. M. Dobrovolsky, 2024. "Continuity of Dirichlet series of s -dimensional lattices", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 2, pp. 251–259.

1. Введение и постановка задачи

Пусть $\Lambda \subset \mathbb{R}^s$ — произвольная полная s -мерная решётка. В этой работе будут использоваться только полные решётки, поэтому для краткости слово полная будем опускать.

Рассмотрим множество $\mathbb{D}(\Lambda)$ — произвольных рядов Дирихле вида

$$f(\Lambda|\alpha) = \sum_{\vec{x} \in \Lambda \setminus \{\vec{0}\}} \frac{a(\vec{x})}{q(\vec{x})^\alpha} \quad \alpha = \sigma + it, \quad \sigma > \sigma_f \geq \sigma_f^*,$$

где σ_f — абсцисса абсолютной сходимости и σ_f^* — абсцисса сходимости, а функция $a(\vec{x})$ является непрерывной функцией на всём пространстве $\mathbb{R}^s$ и функция усечённой нормы $q(\vec{x})$ задается равенством $q(\vec{x}) = \bar{x}_1 \cdot \dots \cdot \bar{x}_s$ и для любого вещественного x полагаем $\bar{x} = \max(1, |x|)$.

²The work has been prepared by the RSF grant № 23-21-00317 "Geometry of numbers and Diophantine approximations in the number-theoretic method in approximate analysis"

Заметим, что ряд Дирихле s -мерной решётки является кратным рядом, а поэтому абсцисса абсолютной сходимости и абсцисса сходимости совпадают, так как порядок членов ряда не определён, и, следовательно, сумма ряда должна быть определена для любого порядка суммирования членов ряда, а это свойство абсолютно сходящихся рядов.

Можно ряд $f(\Lambda|\alpha)$ записать как обычный обобщенный ряд Дирихле:

$$f(\Lambda|\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A(\lambda_n)}{\lambda_n^\alpha}, \quad A(\lambda_n) = \sum_{\vec{x} \in \Lambda, q(\vec{x})=\lambda_n} a(\vec{x}),$$

$$Q_{sp}(\Lambda) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\} = \{\lambda \mid \lambda = q(\vec{x}), \vec{x} \in \Lambda \setminus \{\vec{0}\}\},$$

$Q_{sp}(\Lambda)$ — усеченный норменный спектр решётки Λ . Отсюда следует, что абсцисса абсолютной сходимости может уменьшиться, так как

$$|A(\lambda_n)| \leq \sum_{\vec{x} \in \Lambda, q(\vec{x})=\lambda_n} |a(\vec{x})|,$$

а понятие абсциссы сходимости приобретает содержательный смысл.

Как хорошо известно [4, 5], для любых обычных рядов Дирихле справедливо неравенство $\sigma_f \leq \sigma_f^* + 1$. В случае, если решётка Λ — целочисленная решётка, мы получаем обычный ряд Дирихле. Но если Λ — произвольная нецелочисленная решётка, то ряд Дирихле, вообще говоря, будет обобщенным.

Поэтому первая цель данной работы доказать, что справедлива оценка для абсциссы абсолютной сходимости и абсциссы сходимости для ряда Дирихле произвольной решётки Λ .

Для области сходимости ряда Дирихле s -мерной решётки $f(\Lambda|\alpha)$ важную роль играет скорость роста функции $a(\vec{x})$. Нетрудно видеть, что если для любого $\sigma > 0$ найдётся последовательность точек $\vec{x}_{\sigma,1}, \vec{x}_{\sigma,2}, \dots \in \Lambda$ с $q(\vec{x}_{\sigma,1}) < q(\vec{x}_{\sigma,2}) < \dots$, для которой $|a(\vec{x}_{\sigma,\nu})| > q(\vec{x}_{\sigma,\nu})^\sigma$, $\nu = 1, 2, \dots$, то для абсциссы сходимости будет выполнено неравенство $\sigma_f^* > \sigma$, и в силу произвольности $\sigma > 0$ ряд Дирихле будет расходиться на всей комплексной плоскости.

Отсюда следует, что вторая цель данной работы — найти связь между скоростью роста или убывания функции $a(\vec{x})$ и величиной абсциссы сходимости соответствующего ряда Дирихле.

Частным случаем ряда Дирихле s -мерной решётки Λ является гиперболическая дзета-функция решётки $\zeta_H(\alpha|\Lambda)$, которая задается равенством

$$\zeta_H(\Lambda|\alpha) = \sum_{\vec{x} \in \Lambda \setminus \{\vec{0}\}} \frac{1}{q(\vec{x})^\alpha}.$$

В работе [1] доказано, что гиперболическая дзета-функция решёток непрерывна на метрическом пространстве s -мерных решёток. Возникает естественный вопрос о справедливости этого утверждения для произвольного ряда Дирихле s -мерной решётки. Ответ на этот вопрос будет третьей целью данной работы.

2. Соотношения между абсциссой абсолютной сходимости и абсциссой сходимости

Как известно, гиперболическим параметром решётки Λ называется величина $q(\Lambda)$ заданная равенством

$$q(\Lambda) = \lambda_1 = \min(\lambda \in Q_{sp}(\Lambda)) = \min_{\vec{x} \in \Lambda \setminus \{\vec{0}\}} q(\vec{x}).$$

По теореме Абеля (см. [4], стр. 106) в области сходимости справедливо равенство

$$f(\Lambda|\alpha) = \alpha \int_{q(\Lambda)}^{\infty} \frac{A^*(x)}{x^{\alpha+1}} dx, \quad A^*(x) = \sum_{\lambda_n \leq x} A(\lambda_n).$$

ТЕОРЕМА 1. Для любого ряда Дирихле s -мерной решётки $f(\Lambda|\alpha)$ справедливо неравенство $\sigma_f - \sigma_f^* \leq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если несобственный интеграл для ряда Дирихле $f(\Lambda|\alpha)$ сходится в точке $\alpha = \sigma + it$, $\sigma \geq \sigma_f^*$, то справедливы соотношения

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|A^*(x)|}{x^{\sigma+1}} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|a(x)|}{x^\sigma} = 0.$$

Далее заметим, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{\vec{x} \in \Lambda, q(\vec{x})=\lambda_n} 1}{\lambda_n^{1+\varepsilon}} = \sum_{\vec{x} \in \Lambda \setminus \{\vec{0}\}} \frac{1}{q(\vec{x})^{1+\varepsilon}} = \zeta_H(\Lambda|1+\varepsilon).$$

Но абсцисса абсолютной сходимости гиперболической дзета-функции решётки $\zeta_H(\Lambda|\alpha)$ равна 1. Поэтому ряд для $\zeta_H(\Lambda|1+\varepsilon)$ абсолютно сходится для любого $\varepsilon > 1$. Отсюда следует, что ряд Дирихле

$$f(\Lambda|\sigma + it + 1 + \varepsilon)$$

абсолютно сходится для любого $\varepsilon > 1$. Тем самым доказано, что $\sigma_f - \sigma_f^* \leq 1$. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Хотя, как уже было отмечено выше, в общем случае ряд Дирихле s -мерной решётки, вообще говоря, будет обобщенным рядом Дирихле, но в данном случае область абсолютной сходимости гиперболической дзета-функции решётки совпадает с областью абсолютной сходимости дзета-функции Римана, что и обеспечивает перенос свойства сходимости обычных рядов Дирихле на случай ряда Дирихле s -мерной решётки.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Для функции числителя $a(\vec{x})$ ряда Дирихле выполняется очевидное условие

$$\lim_{q(\vec{x}) \rightarrow \infty} \frac{|a(\vec{x})|}{q(\vec{x})^{\sigma_f + \varepsilon}} = 0$$

для любого $\varepsilon > 0$, если абсцисса абсолютной сходимости вещественное число.

В частности, для любого $\sigma_0 > \sigma_f$ найдется константа $C = C(\sigma_0, \varepsilon) > 0$, такая, что выполнены неравенства

$$|a(\vec{x})| \leq C q(\vec{x})^{\sigma_f + \varepsilon}, \quad 0 < \varepsilon \leq \sigma_0 - \sigma_f,$$

при этом $C(\sigma_0, \varepsilon)$ — убывающая функция на промежутке $0 < \varepsilon \leq \sigma_0 - \sigma_f$.

Если ряд Дирихле s -мерной решётки $f(\Lambda|\alpha)$ сходится на всей комплексной плоскости (т. е. $\sigma_f = -\infty$), то

$$\lim_{q(\vec{x}) \rightarrow \infty} \frac{|a(\vec{x})|}{q(\vec{x})^\sigma} = 0$$

для любого вещественного σ .

3. Скорость изменения функции коэффициентов и область сходимости ряда Дирихле многомерной решётки

Прежде всего дадим несколько определений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $\sigma > 0$, тогда говорим, что непрерывная функция $a(\vec{x})$ имеет σ -степенной рост с константой $C > 0$, если для любого $\vec{x} \in \mathbb{R}^s$ выполнено неравенство $|a(\vec{x})| \leq C \cdot q(\vec{x})^\sigma$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $\sigma > 0$, тогда говорим, что непрерывная функция $a(\vec{x})$ имеет σ -степенное убывание с константой $C > 0$, если для любого $\vec{x} \in \mathbb{R}^s$ выполнено неравенство $|a(\vec{x})| \leq C \cdot q(\vec{x})^{-\sigma}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть $\sigma > 0$, тогда говорим, что непрерывная функция $a(\vec{x})$ имеет σ -экспоненциальное убывание с константой $C > 0$, если для любого $\vec{x} \in \mathbb{R}^s$ выполнено неравенство $|a(\vec{x})| \leq C \cdot e^{-\sigma \cdot q(\vec{x})}$.

Нам потребуется следующая теорема из работы [2]. Пусть $K(T) = \{\vec{x} | q(\vec{x}) \leq T\}$ — гиперболический крест, $D(T|\Lambda)$ — количество ненулевых точек решётки Λ в гиперболическом кресте $K(T)$.

ТЕОРЕМА 2. Для любой решётки Λ при $T \geq 3$ справедливо асимптотическое равенство

$$D(T|\Lambda) = \frac{2^s T \ln^{s-1} T}{(s-1)! \det \Lambda} + \Theta C(\Lambda) \frac{T \ln^{s-2} T}{\det \Lambda},$$

где $C(\Lambda) = 2^s e(a_0 + 2)^s$ и $|\Theta| \leq 1$.

В формулировке этой теоремы используются следующие обозначения. Пусть $\vec{\lambda}_j = (\lambda_{j1}, \dots, \lambda_{js})$ ($j = 1, \dots, s$) — произвольный фиксированный базис решётки Λ и

$$A = A(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_s) = \max_{1 \leq j \leq s} \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^s |\lambda_{\nu j}|,$$

тогда $a_0 = a_0(\Lambda) = \min \bar{A}(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_s)$, где минимум берется по всем базисам решётки Λ .

ТЕОРЕМА 3. Для любой решётки Λ и функции $a(\vec{x})$ со σ -степенным ростом с константой $C > 0$ для абсциссы абсолютной сходимости ряда Дирихле s -мерной решётки $f(\Lambda|\alpha)$ справедливо неравенство $\sigma_f \leq \sigma + 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, для $\alpha = \sigma_1 + it$ из определения скорости роста функции $a(\vec{x})$ имеем:

$$\begin{aligned} |f(\Lambda|\alpha)| &\leq \sum_{\vec{x} \in \Lambda \setminus \{\vec{0}\}} \frac{|a(\vec{x})|}{q(\vec{x})^{\sigma_1}} \leq \sum_{\vec{x} \in \Lambda \setminus \{\vec{0}\}} \frac{C}{q(\vec{x})^{\sigma_1 - \sigma}} = C(\sigma_1 - \sigma) \int_{q(\Lambda)}^{\infty} \frac{D(x|\Lambda)}{x^{\sigma_1 - \sigma + 1}} dx \ll \\ &\ll (\sigma_1 - \sigma) \int_{q(\Lambda)}^{\infty} \frac{x \ln^{s-1} x}{x^{\sigma_1 - \sigma + 1}} dx < \infty \end{aligned}$$

при $\sigma_1 > \sigma + 1$. Отсюда следует, что $\sigma_f \leq \sigma + 1$. $\square$

ТЕОРЕМА 4. Для любой решётки Λ и функции $a(\vec{x})$ со σ -степенной скоростью убывания с константой $C > 0$ для абсциссы абсолютной сходимости ряда Дирихле s -мерной решётки $f(\Lambda|\alpha)$ справедливо неравенство $\sigma_f \leq -\sigma + 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, для $\alpha = \sigma_1 + it$ из определения скорости убывания функции $a(\vec{x})$ имеем:

$$\begin{aligned} |f(\Lambda|\alpha)| &\leq \sum_{\vec{x} \in \Lambda \setminus \{\vec{0}\}} \frac{|a(\vec{x})|}{q(\vec{x})^{\sigma_1}} \leq \sum_{\vec{x} \in \Lambda \setminus \{\vec{0}\}} \frac{C}{q(\vec{x})^{\sigma_1 + \sigma}} = C(\sigma_1 + \sigma) \int_{q(\Lambda)}^{\infty} \frac{D(x|\Lambda)}{x^{\sigma_1 + \sigma + 1}} dx \ll \\ &\ll (\sigma_1 + \sigma) \int_{q(\Lambda)}^{\infty} \frac{x \ln^{s-1} x}{x^{\sigma_1 + \sigma + 1}} dx < \infty \end{aligned}$$

при $\sigma_1 > -\sigma + 1$. Отсюда следует, что $\sigma_f \leq -\sigma + 1$. $\square$

ТЕОРЕМА 5. Для любой решётке Λ и функции $a(\vec{x})$ со σ -экспоненциальной скоростью убывания с константой $C > 0$ для абсциссы абсолютной сходимости ряда Дирихле s -мерной решётки $f(\Lambda|\alpha)$ справедливо равенство $\sigma_f = -\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, для $\alpha = \sigma_1 + it$ из определения скорости убывания функции $a(\vec{x})$ имеем:

$$\begin{aligned} |f(\Lambda|\alpha)| &\leq \sum_{\vec{x} \in \Lambda \setminus \{\vec{0}\}} \frac{|a(\vec{x})|}{q(\vec{x})^{\sigma_1}} \leq \sum_{\vec{x} \in \Lambda \setminus \{\vec{0}\}} \frac{C}{q(\vec{x})^{\sigma_1} e^{\sigma q(\vec{x})}} = C \int_{q(\Lambda)}^{\infty} D(x|\Lambda) \left(\frac{\sigma_1}{x^{\sigma_1+1} e^{\sigma x}} + \frac{\sigma}{x^{\sigma_1} e^{\sigma x}} \right) dx \ll \\ &\ll \int_{q(\Lambda)}^{\infty} x \ln^{s-1} x \left(\frac{\sigma_1}{x^{\sigma_1+1} e^{\sigma x}} + \frac{\sigma}{x^{\sigma_1} e^{\sigma x}} \right) dx < \infty \end{aligned}$$

при $\sigma_1 > -\infty$. Отсюда следует, что $\sigma_f = -\infty$. $\square$

4. Непрерывность рядов Дирихле многомерных решёток

Как известно (см. [3], стр. 160–165), пространство решеток является метрическим пространством, и, если последовательность решеток $\{\Lambda_n\}$ сходится к решетке Λ , то существует последовательность невырожденных матриц

$$A_n = \begin{pmatrix} a_{11}^{(n)} & \dots & a_{1s}^{(n)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1}^{(n)} & \dots & a_{ss}^{(n)} \end{pmatrix} \quad (n = 1, 2, \dots), \quad \det A_n \neq 0,$$

сходящихся к единичной матрице

$$I = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \dots & \delta_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{s1} & \dots & \delta_{ss} \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j \\ 0 & \text{при } i \neq j, \end{cases}$$

т.е.

$$\|A_n - I\| = s \cdot \max_{1 \leq i, j \leq s} |a_{ij}^{(n)} - \delta_{ij}| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

и таких, что

$$\Lambda_n = A_n \cdot \Lambda.$$

ЛЕММА 1. Если $\Lambda_n \rightarrow \Lambda$ при $n \rightarrow \infty$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_0(\Lambda_n) = a_0(\Lambda).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [1]. $\square$

ЛЕММА 2. Для $\alpha = \sigma + it$ при $\sigma \geq \sigma_0 > \sigma_f + 1 > -\infty$, $T \geq 3$ и для любого ε с $0 < \varepsilon < \sigma_0 - \sigma_f - 1$ справедлива приближенная формула

$$f(\Lambda|\alpha) = \sum'_{\vec{x} \in \Lambda \cap K(T)} \frac{a(\vec{x})}{q(\vec{x})^\alpha} + \frac{C \Theta_1(\alpha, T) c_1(s) \frac{(\sigma_0 - \sigma_f - \varepsilon)}{(\sigma_0 - \sigma_f - \varepsilon) - 1} \left(\frac{1}{((\sigma_0 - \sigma_f - \varepsilon) - 1)^{s-1}} + \ln^{s-1} T \right)}{\det \Lambda \cdot T^{\sigma_0 - 1}},$$

где $|\Theta_1(\alpha, T)| \leq 1$, $c_1(s) = 2^s \cdot 24(s-2)!(a_0(\Lambda) + 2)^s$ и $C > 0$ — некоторая константа, зависящая от функции $a(\vec{x})$ и константы ε .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разобьем ряд Дирихле для решетки Λ на две части

$$\begin{aligned} f(\Lambda|\alpha) &= \sum'_{\vec{x} \in \Lambda \cap K(T)} \frac{a(\vec{x})}{q(\vec{x})^\alpha} + R(\Lambda, T|\alpha), \\ R(\Lambda, T|\alpha) &= \sum_{\substack{\vec{x} \in \Lambda, \\ q(\vec{x}) > T}} \frac{a(\vec{x})}{q(\vec{x})^\alpha}. \end{aligned} \quad (1)$$

Переходя к оценкам по модулю каждого слагаемого в (1), получим

$$|R(\Lambda, T|\alpha)| \leq |R(\Lambda, T|\sigma)| \leq R^*(\Lambda, T|\sigma_0),$$

где

$$R^*(\Lambda, T|\sigma_0) = \sum_{\substack{\vec{x} \in \Lambda, \\ q(\vec{x}) > T}} \frac{|a(\vec{x})|}{q(\vec{x})^{\sigma_0}}.$$

Согласно замечанию 2, найдётся $C = C(\sigma_0, \varepsilon) > 0$, такое что $|a(\vec{x})| < Cq(\vec{x})^{\sigma_f + \varepsilon}$ для любого $0 < \varepsilon < \sigma_0 - \sigma_f - 1$. Отсюда следует, что

$$R^*(\Lambda, T|\sigma_0) \leq C \sum_{\substack{\vec{x} \in \Lambda, \\ q(\vec{x}) > T}} \frac{1}{q(\vec{x})^{\sigma_0 - \sigma_f - \varepsilon}} = CR_1(\Lambda, T|\sigma_0).$$

По теореме Абеля

$$R_1(\Lambda, T|\sigma_0) = (\sigma_0 - \sigma_f - \varepsilon) \int_T^\infty \frac{D(x|\Lambda) - D(T|\Lambda)}{x^{\sigma_0 - \sigma_f - \varepsilon + 1}} dx.$$

Отсюда и из теоремы 2 следует

$$\begin{aligned} R_1(\Lambda, T|\sigma_0) &\leq (\sigma_0 - \sigma_f - \varepsilon) \int_T^\infty \left(\frac{2^s x \ln^{s-1} x}{(s-1)! \det \Lambda} + \frac{2^{s+2}(a_0(\Lambda) + 2)^s x \ln^{s-2} x}{\det \Lambda} \right) \frac{dx}{x^{(\sigma_0 - \sigma_f - \varepsilon) + 1}} = \\ &= \frac{2^s(\sigma_0 - \sigma_f - \varepsilon)}{\det \Lambda} \left(\frac{1}{(s-1)!} \int_T^\infty \frac{\ln^{s-1} x}{x^{(\sigma_0 - \sigma_f - \varepsilon)}} dx + 4(a_0(\Lambda) + 2)^s \int_T^\infty \frac{\ln^{s-2} x}{x^{(\sigma_0 - \sigma_f - \varepsilon)}} dx \right) = \\ &= \frac{2^s(\sigma_0 - \sigma_f - \varepsilon)}{\det \Lambda} \left(\frac{1}{(s-1)!} \frac{\sum_{k=0}^{s-1} \frac{(s-1)!}{((\sigma_0 - \sigma_f - \varepsilon) - 1)^{s-k} k!} \ln^k T}{T^{(\sigma_0 - \sigma_f - \varepsilon) - 1}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{4(a_0(\Lambda) + 2)^s \sum_{k=0}^{s-2} \frac{(s-2)!}{((\sigma_0 - \sigma_f - \varepsilon) - 1)^{s-1-k} k!} \ln^k T}{T^{(\sigma_0 - \sigma_f - \varepsilon) - 1}} \right) \leq \\ &\leq \frac{2^s(\sigma_0 - \sigma_f - \varepsilon)}{\det \Lambda} \left(\frac{3 \left(\frac{1}{((\sigma_0 - \sigma_f - \varepsilon) - 1)^s} + \frac{\ln^{s-1} T}{(\sigma_0 - \sigma_f - \varepsilon) - 1} \right)}{T^{(\sigma_0 - \sigma_f - \varepsilon) - 1}} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{+12(s-2)!(a_0(\Lambda)+2)^s \left(\frac{1}{((\sigma_0 - \sigma_f - \varepsilon) - 1)^{s-1}} + \frac{\ln^{s-2} T}{(\sigma_0 - \sigma_f - \varepsilon) - 1} \right)}{T^{(\sigma_0 - \sigma_f - \varepsilon) - 1}} \Bigg) \leq \\
& \leq \frac{2^s \cdot 24(s-2)!(a_0(\Lambda) + 2)^s \frac{(\sigma_0 - \sigma_f - \varepsilon)}{(\sigma_0 - \sigma_f - \varepsilon) - 1} \left(\frac{1}{((\sigma_0 - \sigma_f - \varepsilon) - 1)^{s-1}} + \ln^{s-1} T \right)}{\det \Lambda \cdot T^{(\sigma_0 - \sigma_f - \varepsilon) - 1}}
\end{aligned}$$

и лемма доказана с $c_1(s, \Lambda) = 2^s \cdot 24(s-2)!(a_0(\Lambda) + 2)^s$. $\square$

ТЕОРЕМА 6. Если последовательность решеток $\{\Lambda_n\}$ сходится к решетке Λ , то последовательность рядов Дирихле $f(\Lambda_n|\alpha)$ равномерно сходится к ряду Дирихле $f(\Lambda|\alpha)$ в любой полуплоскости $\sigma \geq \sigma_0 > \sigma_f$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Lambda_0 = \Lambda$. Определим величины

$$a = \max_{n \geq 0} a_0(\Lambda_n), \quad b = \min_{n \geq 0} \det \Lambda_n.$$

Ясно, что $b > 0$. И так как последовательность Λ_n сходящаяся, то из леммы 1 вытекает, что величина a конечная. Выберем $T_1 = T_1(\varepsilon_1)$ из условия

$$\frac{2^s \cdot 24(s-2)!(a+2)^s \frac{(\sigma_0 - \sigma_f - \varepsilon)}{(\sigma_0 - \sigma_f - \varepsilon) - 1} (((\sigma_0 - \sigma_f - \varepsilon) - 1)^{-s+1} + \ln^{s-1} T_1)}{b \cdot T_1^{(\sigma_0 - \sigma_f - \varepsilon) - 1}} < \frac{\varepsilon_1}{3}, \quad (2)$$

тогда при $T \geq T_1$ для любого $n \geq 0$ имеем

$$|R(\Lambda_n, T|\alpha)| \leq |R(\Lambda_n, T_1|\sigma_0)| < \frac{\varepsilon_1}{3}$$

в полуплоскости $\alpha = \sigma + it$, $\sigma \geq \sigma_0 > \sigma_f$. Рассмотрим крест $K(2T_1)$ и все ненулевые точки решетки Λ принадлежащие этому гиперболическому кресту. Пусть это точки $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N$, где $N = D(2T_1|\Lambda)$.

Для сходящейся к единичной матрице I последовательности матриц A_n , определенной условиями

$$\Lambda_n = A_n \Lambda, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = I.$$

Рассмотрим точки $\vec{y}_1^{(n)} = A_n \vec{x}_1, \dots, \vec{y}_N^{(n)} = A_n \vec{x}_N$ из решетки Λ_n . В силу сходимости $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n \vec{x}_j = \vec{x}_j$ ($j = 1, \dots, N$) можно утверждать, что найдется $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такое, что для любого $n > n_0$ все точки $\vec{y}_j^{(n)}$, для которых $\vec{x}_j \in K(T_1)$, будут принадлежать кресту $K(2T_1)$ и каждая точка $\vec{y}_j^{(n)}$, принадлежащая кресту $K(T_1)$, имеет прообраз $\vec{x}_j$, принадлежащий кресту $K(2T_1)$.

Отсюда следует, что для $\alpha = \sigma + it$, $\sigma \geq \sigma_0$

$$\begin{aligned}
|f(\Lambda_n|\alpha) - f(\Lambda|\alpha)| & \leq \left| f(\Lambda_n|\alpha) - \sum_{j=1}^N \frac{a(\vec{y}_j^{(n)})}{(\vec{y}_{j1}^{(n)} \cdot \dots \cdot \vec{y}_{js}^{(n)})^\alpha} \right| + \\
& + \left| \sum_{j=1}^N \frac{a(\vec{y}_j^{(n)})}{(\vec{y}_{j1}^{(n)} \cdot \dots \cdot \vec{y}_{js}^{(n)})^\alpha} - \sum_{j=1}^N \frac{a(\vec{x}_j)}{(\vec{x}_{j1} \cdot \dots \cdot \vec{x}_{js})^\alpha} \right| + \left| f(\Lambda|\alpha) - \sum_{j=1}^N \frac{a(\vec{x}_j)}{(\vec{x}_{j1} \cdot \dots \cdot \vec{x}_{js})^\alpha} \right| \leq
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq |R(\Lambda_n, T_1 | \sigma_0)| + |R(\Lambda, T_1 | \sigma_0)| + \sum_{j=1}^N \left| \frac{a(\vec{y}_j^{(n)})}{(\bar{y}_{j1}^{(n)} \cdot \dots \cdot \bar{y}_{js}^{(n)})^{\sigma_0}} - \frac{a(\vec{x}_j)}{(\bar{x}_{j1} \cdot \dots \cdot \bar{x}_{js})^{\sigma_0}} \right| \leq \\ &\leq \frac{2\varepsilon_1}{3} + \sum_{j=1}^N \left| \frac{a(\vec{y}_j^{(n)})}{(\bar{y}_{j1}^{(n)} \cdot \dots \cdot \bar{y}_{js}^{(n)})^{\sigma_0}} - \frac{a(\vec{x}_j)}{(\bar{x}_{j1} \cdot \dots \cdot \bar{x}_{js})^{\sigma_0}} \right|. \end{aligned}$$

Выбирая $n_1 = n_1(\varepsilon_1)$ из условия

$$\left| \frac{a(\vec{y}_j^{(n)})}{(\bar{y}_{j1}^{(n)} \cdot \dots \cdot \bar{y}_{js}^{(n)})^{\sigma_0}} - \frac{a(\vec{x}_j)}{(\bar{x}_{j1} \cdot \dots \cdot \bar{x}_{js})^{\sigma_0}} \right| \leq \frac{\varepsilon_1}{3N}$$

при $n \geq n_1$, получим $|f(\Lambda_n | \alpha) - f(\Lambda | \alpha)| \leq \varepsilon_1$ при $n \geq \max(n_0(\varepsilon_1), n_1(\varepsilon_1))$, и теорема полностью доказана. $\square$

5. Заключение

Так как пространство s -мерных решёток является гладким многообразием, то возникает естественный вопрос о дифференцируемости рядов Дирихле s -мерных решёток на гладком многообразии.

Авторы выражают свою благодарность профессору В. Н. Чубарикову за полезные обсуждения и внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Добровольский Н. М., Реброва И. Ю., Рощеня А. Л. Непрерывность гиперболической дзета-функции решеток // Мат. заметки. Т. 63, вып. 4. 1998. С. 522–526.
2. Н. М. Добровольский, А. Л. Рощеня. О числе точек решетки в гиперболическом кресте // Матем. заметки. Т. 63, вып. 3. 1998. С. 363–369.
3. Касселс Дж. Введение в геометрию чисел. М.: Мир, 1965.
4. Чандрасекхаран К. Введение в аналитическую теорию чисел. — М.: Мир, 1974. — 188 с.
5. Чудаков Н. Г. Введение в теорию L -функций Дирихле. — М. – Л.: ОГИЗ, 1947. — 204 с.

REFERENCES

1. Dobovol'skii, N. M., Rebrova, I. YU. & Roshhenya, A. L., 1998, "Continuity of the hyperbolic Zeta function of lattices", *Matematicheskie zametki*, vol. 63, no. 4, pp. 522–526.
2. Dobovol'skii, N. M., Roshhenya, A. L., 1998, "On the number of lattice points in a hyperbolic cross", *Matematicheskie zametki*, vol. 63, no. 4, pp. 363–369.
3. Cassels J., 1965, "Introduction to the geometry of numbers", *M.: Mir*.
4. Chandrasekharan K., 1974, *Vvedenie v analiticheskuyu teoriyu chisel*, Izd-vo Mir, Moskva, 188 p.
5. Chudakov N. G., 1947, *Introduction to the theory of L-Dirichlet functions* — M.-L.: OGIZ, — 204 p.

Получено: 12.04.2024

Принято в печать: 28.06.2024

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 25. Выпуск 2.

УДК 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-2-260-268

**Ряды Дирихле второго рода для неприводимых решёток,
повторяющихся умножением¹**

Р. В. Тарабрин, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский

Тарабрин Роман Владимирович — аспирант, Оренбургский государственный университет (г. Оренбург).

e-mail: reanimators@rambler.ru

Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Добровольский Николай Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: dobrovol@tspu.ru

Аннотация

В работе построена теория рядов Дирихле второго рода для неприводимых решёток, повторяющихся умножением. В частности, доказана теорема, что ряды Дирихле второго рода для неприводимых решёток, повторяющихся умножением, образуют алгебру над полем комплексных чисел.

В заключении рассмотрены актуальные задачи для рядов Дирихле второго рода для неприводимых решёток, повторяющихся умножением, требующие дальнейшего исследования.

Ключевые слова: дзета-функция Римана, ряд Дирихле.

Библиография: 6 названий.

Для цитирования:

Р. В. Тарабрин, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский. Ряды Дирихле второго рода для неприводимых решёток, повторяющихся умножением // Чебышевский сборник.- 2024.- Т. 25.- вып. 2.- С. 260–268.

¹Работа выполнена по гранту РФФИ № 23-21-00317 «Геометрия чисел и диофантовы приближения в теоретико-числовом методе в приближенном анализе».

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 25. No. 2.

UDC 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-2-260-268

Dirichlet series of the second kind for irreducible lattices repeated by multiplication²

R. V. Tarabrin, N. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii

Tarabrin Roman Vladimirovich — postgraduate student, Orenburg State University (Orenburg).*e-mail: reanimators@rambler.ru***Dobrovol'skii Nikolai Nikolaevich** — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).*e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com***Dobrovol'skii Nikolai Mikhailovich** — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).*e-mail: dobrovol@tspu.ru***Abstract**

The work constructs a theory of Dirichlet series of the second kind for irreducible lattices repeated by multiplication. In particular, the theorem is proven that Dirichlet series of the second kind for irreducible lattices repeated by multiplication form an algebra over the field of complex numbers.

In conclusion, current problems for Dirichlet series of the second kind for irreducible lattices repeated by multiplication are considered, requiring further research.

Keywords: Riemann zeta function, Dirichlet series.

Bibliography: 6 titles.

For citation:

Tarabrin, R. V., Dobrovolsky, N. N., Dobrovolsky, N. M. 2024, “Dirichlet series of the second kind for irreducible lattices repeated by multiplication”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 2, pp. 260–268.

1. Введение

Хорошо известно, что максимальная неприводимая решётка, повторяющаяся умножением, в пространстве $\mathbb{R}^s$ задается чисто вещественным алгебраическим полем F_s степени s над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$ (см. [3]).

Если F_s — чисто вещественное алгебраическое расширение степени s поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Z}_{F_s}$ — кольцо целых алгебраических чисел поля F_s , то s -мерной решёткой является множество $\Lambda(F_s)$, следующим образом образованное с помощью $\mathbb{Z}_{F_s}$:

$$\Lambda(F_s) = \{(\Theta^{(1)}, \dots, \Theta^{(s)}) \mid \Theta^{(1)} \in \mathbb{Z}_{F_s}\}, \quad (1)$$

где $\Theta^{(1)}, \dots, \Theta^{(s)}$ — система алгебраически сопряженных чисел, и если d — дискриминант поля F_s (см. [2]), то $\det \Lambda(F_s) = \sqrt{d}$.

²The work has been prepared by the RSF grant № 23-21-00317 “Geometry of numbers and Diophantine approximations in the number-theoretic method in approximate analysis”

Прежде всего, следуя за работой [4], заметим, что гиперболическая дзета-функция решёток является рядом Дирихле. Действительно, дадим несколько определений и обозначений.

Норменным спектром решётки Λ называется множество значений нормы на ненулевых точках решётки Λ :

$$N_{sp}(\Lambda) = \{\lambda \mid \lambda = N(\vec{x}), \vec{x} \in \Lambda \setminus \{\vec{0}\}\}.$$

Напомним, что нормой точки $\vec{x}$ называется величина $N(\vec{x}) = |x_1 \cdot \dots \cdot x_s|$.

Соответственно усеченным норменным спектром решётки Λ — множество значений усеченной нормы на ненулевых точках решётки:

$$Q_{sp}(\Lambda) = \{\lambda \mid \lambda = q(\vec{x}), \vec{x} \in \Lambda \setminus \{\vec{0}\}\},$$

где усечённая норма точки $\vec{x}$ задается равенством $q(\vec{x}) = \overline{x_1} \cdot \dots \cdot \overline{x_s}$ и для любого вещественного x полагаем $\overline{x} = \max(1, |x|)$.

Усеченный норменный спектр является дискретным числовым множеством, то есть

$$Q_{sp}(\Lambda) = \{\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_k < \dots\} \quad \text{и} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = \infty.$$

Очевидно, что

$$N(\Lambda) = \inf_{\lambda \in N_{sp}(\Lambda)} \lambda, \quad q(\Lambda) = \min_{\lambda \in Q_{sp}(\Lambda)} \lambda = \lambda_1.$$

Порядком точки спектра называется количество точек решётки с заданным значением нормы. Если таких точек решётки бесконечно много, то говорят, что точка спектра имеет бесконечный порядок. Порядок точки λ норменного спектра обозначается через $n(\lambda)$, а порядок точки λ усеченного норменного спектра, соответственно, через $q(\lambda)$.

Понятие порядка точки спектра позволяет лучше понять определение гиперболической дзета-функции решётки $\Lambda(T) = T \cdot \Lambda(F_s)$. В нем вместо нормы точки $\vec{x}$ фигурирует усеченная норма:

$$\zeta_H(\Lambda(T)|\alpha) = \sum'_{\Theta \in \mathbb{Z}_{F_s}} \left(\overline{T\Theta^{(1)}} \dots \overline{T\Theta^{(s)}} \right)^{-\alpha} \quad (2)$$

Можно привести пример решётки Λ , для которой ряд

$$\sum'_{\vec{x} \in \Lambda} |x_1 \cdot \dots \cdot x_s|^{-\alpha}$$

расходится при любом α .

Действительно, пусть $\Lambda = T \cdot \Lambda(F_s)$ — алгебраическая решётка, тогда

$$\sum'_{\vec{x} \in \Lambda} |x_1 \cdot \dots \cdot x_s|^{-\alpha} = \sum'_{w \in \mathbb{Z}_F} |T^s \cdot N(w)|^{-\alpha}, \quad (3)$$

где $N(w)$ — норма целого алгебраического числа из кольца $\mathbb{Z}_{F_s}$. В силу теоремы Дирихле о единицах ряд в правой части равенства (3) расходится при любом α , так как в кольце $\mathbb{Z}_{F_s}$ целых алгебраических чисел чисто вещественного алгебраического поля F_s степени s имеется бесконечно много единиц ε и для них $|N(\varepsilon)| = 1$. Таким образом в этом случае каждая точка норменного спектра имеет бесконечный порядок, что и приводит к расходимости при любом α .

Для любой неприводимой решётки Λ , повторяющейся умножением, можно рассмотреть ряды Дирихле второго рода, в которых в знаменателе стоит норма алгебраического числа,

она же норма соответствующей точки решётки, а числители удовлетворяют дополнительному условию, что сумма всех числителей для точек с одинаковой нормой абсолютно сходится.

$$f(\alpha|\Lambda, a(\cdot)) = \sum_{\vec{x} \in \Lambda \setminus \{\vec{0}\}} \frac{a(\vec{x})}{|x_1 \cdot \dots \cdot x_s|^\alpha} = \sum_{k=1}^{\infty} A(\lambda_k) \lambda_k^{-\alpha} \quad \alpha = \sigma + it, \quad \sigma > \sigma_f \geq \sigma_f^*,$$

где σ_f — абсцисса абсолютной сходимости и σ_f^* — абсцисса сходимости, а λ_k — точки норменного спектра $N_{sp}(\Lambda)$, который определяется равенством

$$N_{sp}(\Lambda) = \{\lambda \mid \lambda = N(\vec{x}), \vec{x} \in \Lambda \setminus \{\vec{0}\}\}, \quad N(\vec{x}) = |x_1 \cdot \dots \cdot x_s|,$$

и

$$A(\lambda_k) = \sum_{|x_1 \cdot \dots \cdot x_s| = \lambda_k} a(\vec{x}), \quad \sum_{|x_1 \cdot \dots \cdot x_s| = \lambda_k} |a(\vec{x})| < \infty.$$

Так как выполняется очевидное включение $N_{sp}(\Lambda) \subset \mathbb{N}$ и норменный спектр $N_{sp}(\Lambda)$ является моноидом натуральных чисел, то получаем связь с теорией рядов Дирихле для моноидов натуральных чисел (см. [6]).

В частности, если нам даны два ряда Дирихле второго рода для произвольной неприводимой решётки Λ , повторяющейся умножением: $f(\alpha|\Lambda, a(\cdot))$ и $f(\alpha|\Lambda, b(\cdot))$, то можно рассмотреть их произведение в силу абсолютной сходимости рядов $A(\lambda_n)$ и $B(\lambda_m)$:

$$f(\alpha|\Lambda, a(\cdot)) \cdot f(\alpha|\Lambda, b(\cdot)) = f(\alpha|\Lambda, c(\cdot)) = \sum_{k=1}^{\infty} C(\lambda_k) \lambda_k^{-\alpha},$$

где

$$c(\vec{x}) = \sum_{\vec{y} \cdot \vec{z} = \vec{x}} a(\vec{y})b(\vec{z}), \quad C(\lambda_k) = \sum_{|x_1 \cdot \dots \cdot x_s| = \lambda_k} c(\vec{x}) = \sum_{\lambda_n \lambda_m = \lambda_k} A(\lambda_n)B(\lambda_m).$$

Таким образом, если мы через $\mathbb{D}(\Lambda)$ обозначим множество рядов Дирихле второго рода для произвольной неприводимой решётки Λ , повторяющейся умножением, то это будет коммутативная алгебра с единицей, так как $1 \in \mathbb{D}(\Lambda)$.

Цель данных исследований — построение теории рядов Дирихле второго рода для решёток Λ , повторяющихся умножением.

2. Теорема Дирихле о единицах и общий вид рядов Дирихле второго рода с мультипликативной функцией

Обозначим через $\mathbb{U}_{F_s}$ группу алгебраических единиц кольца целых алгебраических чисел $\mathbb{Z}_{F_s}$ чисто вещественного алгебраического поля F_s . Согласно теореме Дирихле эта бесконечная группа имеет $s - 1$ образующую — фундаментальные единицы. Пусть $\mathbb{Z}_{F_s}^*$ — мультипликативный моноид ненулевых целых алгебраических чисел кольца целых алгебраических чисел $\mathbb{Z}_{F_s}$. Пусть Ω_s — система целых алгебраических чисел ω по одному из каждого класса фактор моноида $\mathbb{Z}_{F_s}^* \setminus \mathbb{U}_{F_s}$, тогда $\mathbb{Z}_{F_s}^* = \bigcup_{\omega \in \Omega_s} \omega \cdot \mathbb{U}_{F_s}$. Будем считать, что всегда $1 \in \Omega_s$. Ясно, что справедливо равенство $\omega_1 \cdot \omega_2 = \omega_3 \cdot \varepsilon$, где $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \Omega_s$, $\varepsilon \in \mathbb{U}_{F_s}$ и ω_3, ε однозначно определяются по ω_1, ω_2 .

На основании вышесказанного можно на Ω_s определить алгебраическую операцию

$$\omega_1 * \omega_2 = \omega_3,$$

где ω_3, ε однозначно определяются по ω_1, ω_2 с помощью равенства $\omega_1 \cdot \omega_2 = \omega_3 \cdot \varepsilon$. Таким образом, множество Ω_s превращается в мультипликативный моноид относительно операции $*$.

Будем говорить, что на Ω_s определена мультипликативная функция $b(\cdot)$, если справедливо равенство

$$b(\omega_1 * \omega_2) = b(\omega_1) \cdot b(\omega_2).$$

Будем через $\vec{x}(\omega) = (\omega^{(1)}, \dots, \omega^{(s)})$ обозначать точку алгебраической решётки $\Lambda(F_s)$, соответствующую целому алгебраическому числу $\omega \in \mathbb{Z}_{F_s}$. Если $\vec{x} \cdot \vec{y} = (x_1 y_1, \dots, x_s y_s)$ — произведение двух точек, то справедливо равенство для точек алгебраической решётки $\Lambda(F_s)$:

$$\vec{x}(\omega_1) \cdot \vec{x}(\omega_2) = \vec{x}(\omega_3) \cdot \vec{x}(\varepsilon),$$

при этом сомножители в правой части равенства однозначно определяются сомножителями в левой части.

С другой стороны, для любой точки $\vec{x}(\omega) \in \Lambda(F_s)$ однозначно определены $\omega^* \in \Omega_s$ и $\varepsilon^* \in \mathbb{U}_{F_s}$ такие, что

$$\vec{x}(\omega) = \vec{x}(\omega^*) \cdot \vec{x}(\varepsilon^*).$$

Для дальнейшего нам потребуется функция числа делителей алгебраического числа $\omega_3 \in \Omega_s$, которая обозначается через $d(\omega_3)$ и определяется равенством

$$d(\omega_3) = \sum_{\substack{\omega_1, \omega_2 \in \Omega_s, \varepsilon \in \mathbb{U}_{F_s} \\ \omega_3 = \omega_1 \cdot \omega_2 \cdot \varepsilon}} 1.$$

В силу предыдущего можно определить функцию числа делителей произвольной точки $\vec{x}(\omega_3)$ алгебраической решётки $\Lambda(F_s)$:

$$d(\vec{x}(\omega_3)) = \sum_{\substack{\omega_1, \omega_2 \in \Omega_s, \varepsilon \in \mathbb{U}_{F_s} \\ \vec{x}(\omega_3) = \vec{x}(\omega_1) \cdot \vec{x}(\omega_2) \cdot \vec{x}(\varepsilon)}} 1 = d(\omega_3).$$

Обозначим через $\zeta_{D_0}(\alpha|F_s)$ дзета-функцию Дедекинда главных идеалов (ω) чисто-вещественного поля F_s (см. [5]):

$$\zeta_{D_0}(\alpha|F_s) = \sum_{(\omega)} |N(\omega)|^{-\alpha},$$

которую можно записать как

$$\zeta_{D_0}(\alpha|F_s) = \sum_{\omega \in \Omega_s} |N(\omega)|^{-\alpha} \quad (\alpha = \sigma + it, \quad \sigma > 1).$$

Пусть на группе $\mathbb{U}_{F_s}$ алгебраических единиц кольца целых алгебраических чисел $\mathbb{Z}_{F_s}$ чисто-вещественного алгебраического поля F_s определена произвольная функция $a(\varepsilon)$ ($\varepsilon \in \mathbb{U}_{F_s}$), которая удовлетворяет условию сходимости

$$\sum_{\varepsilon \in \mathbb{U}_{F_s}} |a(\varepsilon)| < \infty.$$

Таким образом, для величины

$$A(\mathbb{U}_{F_s}, a(\cdot)) = \sum_{\varepsilon \in \mathbb{U}_{F_s}} a(\varepsilon)$$

справедливо неравенство $|A(\mathbb{U}_{F_s}, a(\cdot))| < \infty$. Будем кроме того требовать выполнение условия невырожденности: $A(\mathbb{U}_{F_s}, a(\cdot)) \neq 0$.

Теперь мы можем записать общий вид ряда Дирихле второго рода с мультипликативной функцией числителя для неприводимых решёток, повторяющихся умножением. Рассмотрим

алгебраическую решетку $\Lambda(T) = T \cdot \Lambda(F_s)$ с растущим детерминантом $\det(T \cdot \Lambda(F_s)) = T^s \sqrt{d}$ ($t \rightarrow \infty$):

$$\begin{aligned} f(\alpha|\Lambda(T), b(\cdot), a(\cdot)) &= \sum_{\vec{x}(\omega) \in \Lambda(F_s)} \frac{b(\omega^*)a(\varepsilon^*)}{(T^s \cdot N(\vec{x}))^\alpha} = \sum_{\omega \in \Omega_s} \sum_{\varepsilon \in \mathbb{U}_{F_s}} \frac{b(\omega)a(\varepsilon)}{|T^s \cdot N(\omega)|^\alpha} = \\ &= \frac{A(\mathbb{U}_{F_s}, a(\cdot))}{T^{s\alpha}} \sum_{\omega \in \Omega_s} \frac{b(\omega)}{|N(\omega)|^\alpha}. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 1. Для любого $\sigma > 1$ справедливо равенство

$$f(\alpha|\Lambda(T), 1, a(\cdot)) = \frac{A(\mathbb{U}_{F_s}, a(\cdot))}{T^{s\alpha}} \cdot \zeta_{D_0}(\alpha|F_s).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, в силу абсолютной сходимости ряда для величины $A(\mathbb{U}_{F_s}, a(\cdot))$ имеем:

$$\begin{aligned} f(\alpha|\Lambda(T), 1, a(\cdot)) &= \sum_{\omega \in \Omega_s} \frac{1}{T^{s\alpha}|N(\omega)|^\alpha} \cdot A(\mathbb{U}_{F_s}, a(\cdot)) = \frac{A(\mathbb{U}_{F_s}, a(\cdot))}{T^{s\alpha}} \cdot \sum_{\omega \in \Omega_s} \frac{1}{|N(\omega)|^\alpha} = \\ &= \frac{A(\mathbb{U}_{F_s}, a(\cdot))}{T^{s\alpha}} \cdot \zeta_{D_0}(\alpha|F_s). \end{aligned}$$

□

Будем говорить, что функция $a(\varepsilon)$ ($\varepsilon \in \mathbb{U}_{F_s}$) нормированная, если $A(\mathbb{U}_{F_s}, a(\cdot)) = 1$. Очевидно, что функция $a^*(\varepsilon) = \frac{a(\varepsilon)}{A(\mathbb{U}_{F_s}, a(\cdot))}$ будет нормированной. Нетрудно видеть, что справедливо равенство

$$f(\alpha|\Lambda(T), b(\cdot), a(\cdot)) = f\left(\alpha|\Lambda(T), b(\cdot)A(\mathbb{U}_{F_s}, a(\cdot)), \frac{a(\varepsilon)}{A(\mathbb{U}_{F_s}, a(\cdot))}\right).$$

Таким образом, если $a^*(\varepsilon)$ — нормированный сомножитель числителя ряда Дирихле второго рода для неприводимой решётки, повторяющийся умножением, то справедливо равенство

$$f(\alpha|\Lambda(T), b(\cdot), a^*(\cdot)) = \frac{1}{T^{s\alpha}} \sum_{\omega \in \Omega_s} \frac{b(\omega)}{|N(\omega)|^\alpha}.$$

Мы получили парадоксальный результат, что значение ряда Дирихле второго рода с мультипликативным числителем для неприводимой решётки, повторяющийся умножением, не зависит от нормированного сомножителя числителя ряда Дирихле.

Второй парадоксальный результат состоит в том, что справедливо равенство

$$f(\alpha|\Lambda(T), b(\cdot), a^*(\cdot)) = \frac{1}{T^{s\alpha}} f(\alpha|\Lambda(F_s), b(\cdot), a^*(\cdot)).$$

Из этого равенства следует, что вопрос об асимптотике рядов Дирихле второго рода с мультипликативным числителем и нормированным сомножителем для неприводимой решётки, повторяющийся умножением, становится тривиальным.

3. Алгебра рядов Дирихле второго рода

Рассмотрим вопрос о алгебраической природе множества рядов Дирихле второго рода для неприводимых решёток, повторяющихся умножением. Как уже было отмечено выше, $\mathbb{D}(\Lambda)$ — множество рядов Дирихле второго рода для произвольной неприводимой решётки Λ , повторяющейся умножением, является коммутативной алгеброй с единицей.

На функцию $b(\cdot)$ наложим дополнительное условие мультипликативности

$$b(\omega_1)b(\omega_2) = b(\omega_1\omega_2) = b(\omega_1\omega_2\varepsilon)$$

для любого $\varepsilon \in \mathbb{U}_{F_s}$.

ЛЕММА 1. Для любой мультипликативной функции $b(\cdot)$ справедливо равенство

$$\sum_{\substack{\omega_1, \omega_2 \in \Omega_s, \varepsilon \in \mathbb{U}_{F_s} \\ \omega_3 = \omega_1 \cdot \omega_2 \cdot \varepsilon}} b(\omega_1)b(\omega_2) = b(\omega_3)d(\omega_3).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, из равенства $\omega_3 = \omega_1 \cdot \omega_2 \cdot \varepsilon$ и мультипликативности функции $b(\cdot)$ следует, что $b(\omega_1)b(\omega_2) = b(\omega_3)$ и

$$\sum_{\substack{\omega_1, \omega_2 \in \Omega_s, \varepsilon \in \mathbb{U}_{F_s} \\ \omega_3 = \omega_1 \cdot \omega_2 \cdot \varepsilon}} b(\omega_1)b(\omega_2) = b(\omega_3) \sum_{\substack{\omega_1, \omega_2 \in \Omega_s, \varepsilon \in \mathbb{U}_{F_s} \\ \omega_3 = \omega_1 \cdot \omega_2 \cdot \varepsilon}} 1 = b(\omega_3)d(\omega_3).$$

□

ТЕОРЕМА 2. Пусть даны два ряда Дирихле второго рода для неприводимой решётки Λ , повторяющихся умножением, $f(\alpha|\Lambda, b(\cdot), a(\cdot))$ и $f(\alpha|\Lambda, b(\cdot), c(\cdot))$. Тогда для суммы и произведения этих рядов Дирихле второго рода справедливы равенства

$$f(\alpha|\Lambda, b_1(\cdot), a(\cdot)) + f(\alpha|\Lambda, b_2(\cdot), c(\cdot)) = f\left(\alpha \left| \Lambda, b_1(\cdot)A(\mathbb{U}_{F_s}, a(\cdot)) + b_2(\cdot)A(\mathbb{U}_{F_s}, \frac{a^*(\cdot) + c^*(\cdot)}{2}) \right.\right), \quad (4)$$

$$f(\alpha|\Lambda, b(\cdot), a(\cdot)) \cdot f(\alpha|\Lambda, b(\cdot), c(\cdot)) = f(\alpha|\Lambda, b(\cdot)d(\cdot), e(\cdot)), \quad (5)$$

где $e(\varepsilon) = \sum_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \in \mathbb{U}_{F_s}, \varepsilon = \varepsilon_1 \varepsilon_2} a(\varepsilon_1)c(\varepsilon_2)$ и $d(\cdot)$ — функция числа делителей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, для суммы двух рядов Дирихле второго рода имеем:

$$\begin{aligned} f(\alpha|\Lambda, b_1(\cdot), a(\cdot)) + f(\alpha|\Lambda, b_2(\cdot), c(\cdot)) &= \sum_{\omega \in \Omega_s} \sum_{\varepsilon \in \mathbb{U}_{F_s}} \frac{b_1(\omega)a(\varepsilon)}{|N(\omega)|^\alpha} + \sum_{\omega \in \Omega_s} \sum_{\varepsilon \in \mathbb{U}_{F_s}} \frac{b_2(\omega)c(\varepsilon)}{|N(\omega)|^\alpha} = \\ &= \sum_{\omega \in \Omega_s} \frac{b_1(\omega)A(\mathbb{U}_{F_s}, a(\cdot)) + b_2(\omega)A(\mathbb{U}_{F_s}, c(\cdot))}{|N(\omega)|^\alpha} \frac{1}{2} \sum_{\varepsilon \in \mathbb{U}_{F_s}} (a^*(\varepsilon) + c^*(\varepsilon)) = \\ &= \sum_{\omega \in \Omega_s} \sum_{\varepsilon \in \mathbb{U}_{F_s}} \frac{(b_1(\omega)A(\mathbb{U}_{F_s}, a(\cdot)) + b_2(\omega)A(\mathbb{U}_{F_s}, c(\cdot))) \left(\frac{a^*(\varepsilon) + c^*(\varepsilon)}{2} \right)}{|N(\omega)|^\alpha} = \\ &= f\left(\alpha \left| \Lambda, b_1(\cdot)A(\mathbb{U}_{F_s}, a(\cdot)) + b_2(\cdot)A(\mathbb{U}_{F_s}, \frac{a^*(\cdot) + c^*(\cdot)}{2}) \right.\right). \end{aligned}$$

Для произведения этих рядов в области абсолютной сходимости $\sigma > 1$ в силу мультипликативности нормы алгебраического числа и мультипликативности функции $b(\cdot)$ имеем:

$$\begin{aligned} f(\alpha|\Lambda, b(\cdot), a(\cdot)) \cdot f(\alpha|\Lambda, b(\cdot), c(\cdot)) &= \sum_{\omega_1 \in \Omega_s} \sum_{\varepsilon_1 \in \mathbb{U}_{F_s}} \frac{b(\omega_1)a(\varepsilon_1)}{|N(\omega_1)|^\alpha} \sum_{\omega_2 \in \Omega_s} \sum_{\varepsilon_2 \in \mathbb{U}_{F_s}} \frac{b(\omega_2)c(\varepsilon_2)}{|N(\omega_2)|^\alpha} = \\ &= \sum_{\omega_3 \in \Omega_s} \frac{1}{|N(\omega_3)|^\alpha} \sum_{\substack{\omega_1, \omega_2 \in \Omega_s, \varepsilon \in \mathbb{U}_{F_s} \\ \omega_3 = \omega_1 \cdot \omega_2 \cdot \varepsilon}} b(\omega_1)b(\omega_2)A(\mathbb{U}_{F_s}, a(\cdot))A(\mathbb{U}_{F_s}, c(\cdot)) = \\ &= \sum_{\omega_3 \in \Omega_s} \frac{b(\omega_3)}{|N(\omega_3)|^\alpha} d(\omega_3) \sum_{\varepsilon \in \mathbb{U}_{F_s}} \sum_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \in \mathbb{U}_{F_s}, \varepsilon = \varepsilon_1 \varepsilon_2} a(\varepsilon_1)c(\varepsilon_2) = \sum_{\omega_3 \in \Omega_s} \frac{b(\omega_3)d(\omega_3)}{|N(\omega_3)|^\alpha} \sum_{\varepsilon \in \mathbb{U}_{F_s}} e(\varepsilon). \end{aligned}$$

□

4. Заключение

В работе [5] достаточно сложными рассуждениями для гиперболической дзета-функции алгебраической решётки $\Lambda(T)$ получена асимптотическая формула

$$\zeta_H(\Lambda(T)|\alpha) = \frac{2(\det \Lambda)^\alpha}{R(s-1)!} \sum_{\nu=0}^{s-1} C_{s-1}^\nu \frac{(\ln \det \Lambda(T) - \ln \det \Lambda)^{s-1-\nu} (-1)^\nu \zeta_{D_0}^{(\nu)}(\alpha|F_s)}{(\det \Lambda(T))^\alpha} + R(\Lambda(T), \alpha, \theta), \quad (6)$$

где

$$R(\Lambda(T), \alpha, \theta) = O\left(\frac{\ln^{s-2}(\det \Lambda(T))}{(\det \Lambda(T))^\alpha}\right) \quad \text{и} \quad R - \text{регулятор поля.}$$

Для величины $R(\Lambda(T), \alpha, \theta)$ найдено выражение

$$\begin{aligned} R(\Lambda(T), \alpha, \theta) = & \sum_{(\omega)} \frac{2}{(T^s |N(\omega)|)^\alpha} \frac{1}{R \cdot (s-1)!} \sum_{\nu=0}^{s-2} C_{s-1}^\nu (\ln T^s + \ln |N(\omega)|)^\nu (s \cdot \theta a)^{s-1-\nu} + \\ & + \sum_{(\omega)} \frac{2}{(T^s |N(\omega)|)^\alpha} \sum_{p=1}^{s-1} \sum_{\vec{j} \in D(p)} \frac{C(\vec{j}, p) e^{\theta(s-p)\alpha a}}{R} \sum_{m=0}^{p-1} \frac{(s-m)! C_{p-1}^m \cdot (\ln T^s + \ln |N(\omega)| + \theta(2p-s)a)^m}{(p-1)!(s-p-1)! \alpha^{s-m+1}}, \\ & R(\Lambda(T), \alpha, \theta) = O\left(\frac{\ln^{s-2}(\det \Lambda(T))}{(\det \Lambda(T))^\alpha}\right). \end{aligned}$$

Области $D(p)$ целочисленных векторов, заданны равенством

$$D(p) = \left\{ (j_1, \dots, j_s) \mid \begin{array}{l} 1 \leq j_1 < \dots < j_p \leq s, \ 1 \leq j_{p+1} < \dots < j_s < s, \\ \{j_1, \dots, j_s\} = \{1, \dots, s\} \end{array} \right\}.$$

Сравнивая эту асимптотическую формулу с утверждением теоремы 1, мы видим, что асимптотическая формула для ряда Дирихле второго рода гораздо проще и её вывод практически тривиален.

Возникают новые вопросы об аналитическом продолжении ряда Дирихле второго рода. Очевидно, этот вопрос эквивалентен вопросу об аналитическом продолжении дзета-функции Дедекинда главных идеалов. Здесь необходимо отметить, что этот вопрос остается открытым, хотя для дзета-функции Дедекинда известно (см. [1]), что дзета-функции Дедекинда имеет аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость кроме точки $\alpha = 1$, где полюс первого порядка.

Дзета-функция Дедекинда главных идеалов отличается от дзета-функции Дедекинда и ранее, как нам известно, не рассматривалась. Они совпадают только для алгебраических полей, в которых все идеалы кольца целых алгебраических чисел являются главными идеалами, то есть число классов дивизоров равно 1. Поэтому необходимы новые дополнительные исследования для ответа на поставленные вопросы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бернштайн Д., Гелбарт С. Введение в программу Ленгпендса, 2008
2. Гекке Э. Лекции по теории алгебраических чисел. М.; Л.: Гостехиздат, 1940.
3. Б. Н. Делоне, Д. К. Фаддеев. Теория иррациональностей третьей степени // Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 11, Изд-во АН СССР, М.–Л., 1940, С. 3–340.

4. Л. П. Добровольская, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский. Гиперболические дзета-функции сеток и решёток и вычисление оптимальных коэффициентов // Чебышевский сборник 2012. Т. 13, вып. 4(44). С. 4–107.
5. Н. Н. Добровольский. О двух асимптотических формулах в теории гиперболической дзета-функции решёток // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, вып. 3, С. 109–134.
6. Н. Н. Добровольский, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, И. Н. Балаба, И. Ю. Реброва. Алгебра рядов Дирихле моноида натуральных чисел // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 1, С. 180–196.

REFERENCES

1. Bernstein D., Gelbart S. 2008, “Introduction to the Langpends Program”.
2. Hecke E. 1940, “Lectures on the theory of algebraic numbers”, *M.; L.: Gostekhizdat*.
3. Delone, B. N., Faddeev, D. K. 1940, “The theory of irrationalities of the third degree”, *Tr. Math. V. A. Steklov Institute, 11, Publishing House of the USSR Academy of Sciences, M.-L.*, pp. 3-340.
4. Dobrovol'skaya, L. P., Dobrovol'skii, M. N., Dobrovol'skii, N. M. & Dobrovol'skii, N. N. 2012, “The hyperbolic Zeta function of grids and lattices, and calculation of optimal coefficients”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 13, no. 4(44), pp. 4–107.
5. Dobrovol'skii, N. N. 2018, “On two asymptotic formulas in the theory of hyperbolic Zeta function of lattices”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 3, pp. 109–134.
6. Dobrovol'skii, N. N., Dobrovol'skii, M. N., Dobrovol'skii, N. M., Balaba, I. N., Rebrova, I. Yu. 2019, “Dirichlet series algebra of a monoid of natural numbers”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 180–196.

Получено: 12.04.2024

Принято в печать: 28.06.2024

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 25. Выпуск 2.

УДК 539.3:534.26

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-2-269-285

Неосесимметричная задача дифракции цилиндрических звуковых волн на упругом цилиндре с неоднородным покрытием, расположенном вблизи границы упругого полупространства¹

Н. Н. Добровольский, Д. Ю. Ефимов, Л. А. Толоконников

Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Ефимов Дмитрий Юрьевич — аспирант, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: bogart.efimov@yandex.ru

Толоконников Лев Алексеевич — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: tolokonnikovla@mail.ru

Аннотация

В статье рассматривается задача дифракции цилиндрической звуковой волны на однородном изотропном упругом цилиндре с радиально-неоднородным упругим покрытием, расположенном вблизи границы полупространств в случае, когда линейный источник находится в плоскости, параллельной поверхности полупространства, и не является параллельным оси цилиндра. Полагается, что цилиндр находится в полупространстве, заполненном идеальной однородной жидкостью, граничащем с однородным упругим полупространством.

Для представления рассеянного поля в идеальной жидкости используется представление в виде интеграла Гельмгольца-Кирхгофа. Колебания неоднородного изотропного упругого тела описываются уравнениями линейной теории упругости. Для нахождения поля смещений в неоднородном покрытии построена краевая задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

На основе решения прямой задачи рассмотрена обратная задача об определении законов неоднородности покрытия, обеспечивающих наименьшее звукоотражение в заданном частотном диапазоне. Построен функционал, выражающий усредненную интенсивность рассеяния звука в заданном диапазоне частот. Построенный функционал записывается в виде двойного интеграла, оценить который аналитически не представляется возможным. Полученный интеграл рассчитан численно по квадратурной формуле на основе параллелепипедальной сетки Коробова.

Представлены численные расчеты угловых характеристик рассеянного поля. Выявлено существенное влияние непрерывно-неоднородных покрытий на дифракционную картину рассеянного поля.

Ключевые слова: дифракция, звуковые волны, однородный упругий цилиндр, неоднородное упругое покрытие, параллелепипедальные сетки Коробова.

Библиография: 26 названий.

¹Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства просвещения РФ соглашение № 073-00033-24-01 от 09.02.2024 тема научного исследования «Теоретико-числовые методы в приближенном анализе и их приложения в механике и физике»

Для цитирования:

Н. Н. Добровольский, Д. Ю. Ефимов, Л. А. Толоконников. Неосесимметричная задача дифракции цилиндрических звуковых волн на упругом цилиндре с неоднородным покрытием, расположенном вблизи границы упругого полупространства // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 2, с. 269–285.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 25. No. 2.

UDC 539.3:534.26

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-2-269-285

A non-axisymmetric diffraction problem of cylindrical sound waves on an elastic cylinder with an inhomogeneous coating located near the boundary of an elastic half-space

N. N. Dobrovol'skii, D. Yu. Efimov, L. A. Tolokonnikov

Dobrovol'skii Nikolai Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Efimov Dmitrii Yurevich — postgraduate student, Tula State University (Tula).

e-mail: bogart.efimov@yandex.ru

Tolokonnikov Lev Alexeevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State University (Tula).

e-mail: tolokonnikovla@mail.ru

Abstract

The article considers the problem of diffraction of a cylindrical sound wave on a homogeneous isotropic elastic cylinder with a radially inhomogeneous elastic coating located near the boundary of half-spaces in the case when the linear source is in a plane parallel to the surface of the half-space and is not parallel to the axis of the cylinder. It is assumed that the cylinder is located in a half-space filled with an ideal homogeneous liquid bordering on a homogeneous elastic half-space.

To represent the scattered field in an ideal liquid, a representation in the form of the Helmholtz-Kirchhoff integral is used. The oscillations of an inhomogeneous isotropic elastic body are described by the equations of the linear theory of elasticity. To find the displacement field in an inhomogeneous coating, a boundary value problem for a system of second-order ordinary differential equations is constructed.

Based on the solution of the direct problem, the inverse problem of determining the laws of coating heterogeneity that provide the least sound reflection in a given frequency range is considered. A functional is constructed expressing the average intensity of sound scattering in a given frequency range. The constructed functional is written in the form of a double integral, which cannot be evaluated analytically. The resulting integral is calculated numerically using a quadrature formula based on a parallelepipedal Korobov grid.

Numerical calculations of the angular characteristics of the scattered field are presented. A significant effect of continuously inhomogeneous coatings on the diffraction pattern of the scattered field has been revealed.

Keywords: diffraction, sound waves, uniform elastic cylinder, inhomogeneous elastic coating, parallelepipedal Korobov grids.

Bibliography: 26 titles.

For citation:

N. N. Dobrovol'skii, D. Yu. Efimov, L. A. Tolokonnikov, 2024. "A non-axisymmetric diffraction problem of cylindrical sound waves on an elastic cylinder with an inhomogeneous coating located near the boundary of an elastic half-space", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 2, pp. 269–285.

1. Введение

Исследованию дифракции звука на бесконечных идеальных и упругих цилиндрах посвящено большое количество работ. Среди них в ряде работ рассматривались цилиндрические рассеиватели с покрытиями, позволяющими изменять звукоотражающие характеристики тела. Существуют различные виды покрытий, наносимых на твердые тела. Например, перфорированные покрытия [1], покрытия с протяженной реакцией [2], однородные упругого покрытия [3]. Покрытие в виде дискретной системы коаксиальных однородных упругих слоев было изучено в [4]. Значительный интерес представляют упругие непрерывно-неоднородные покрытия, позволяющие эффективно изменять звукоотражающие характеристики рассеяния тел. Дифракция звуковых волн на абсолютно жестком и однородном изотропном упругом сплошных цилиндрах с изотропными непрерывно-неоднородными покрытиями исследовалась в [5, 6].

В упомянутых выше работах в качестве источника первичного волнового возмущения использовалась плоская звуковая волна. Однако звуковую волну можно считать плоской, если расстояние от источника звука до рассеивателя значительно больше длины волны. На практике приходится учитывать криволинейность фронта падающей волны. Поэтому изучение дифракции звуковых волн, излучаемых цилиндрическими и сферическими источниками, представляет значительный интерес.

Рассеяние цилиндрической волны на упругом цилиндре рассматривалось в [7], а задача дифракции цилиндрических звуковых волн упругим цилиндром с непрерывно-неоднородным покрытием решена в [8]. В работах [7, 8], как и в большинстве известных работ по теории дифракции, где в качестве источника волнового возмущения выбирается линейный источник звуковых колебаний, полагается, что ось источника параллельна оси вращения цилиндрического рассеивателя, что значительно упрощает задачу. Дифракция звуковых волн, излучаемых произвольно расположенным линейным источником, на абсолютно жестком и однородном изотропном упругом с непрерывно-неоднородным покрытием сплошных цилиндрах рассматривалась в [9, 10].

Во всех перечисленных ранее работах полагалось, что цилиндрические тела располагаются в безграничном пространстве. Однако в реальности тела находятся в присутствии ограничивающих поверхностей, влияние которых на рассеянное акустическое поле является значительным. В работах [11, 12] методом мнимых источников решались задачи рассеяния плоской звуковой волны упругим цилиндром с радиально-неоднородным покрытием, расположенном вблизи идеальной (абсолютно жесткой или акустически мягкой) поверхности. В [1] рассматривался случай нормального падения, а в [12] – случай наклонного падения. В [13] с использованием интегрального уравнения Гельмгольца-Кирхгофа получено решение задачи дифракции звука на однородном изотропном упругом цилиндре, находящемся вблизи упругого или импедансного полупространства. Используя тот же подход, в [14] была рассмотрена задача дифракции цилиндрических звуковых волн на упругом цилиндре с неоднородным покрытием, расположенном вблизи поверхности упругого полупространства. При этом в [13, 14] источником первичного возмущения волновой системы являлся линейный источник звука, ось которого была параллельна оси цилиндрического рассеивателя.

В настоящей работе рассматривается задача дифракции цилиндрической звуковой волны на бесконечном однородном изотропном упругом цилиндре с непрерывно-неоднородным

изотропным упругим покрытием, расположенном вблизи границы однородного изотропного полупространства в случае, когда линейный источник находится в плоскости, параллельной поверхности полупространства и не является параллельным оси цилиндра.

2. Постановка задачи

Рассмотрим бесконечный однородный изотропный упругий цилиндр радиуса R_0 , материал которого характеризуется плотностью ρ_0 и упругими постоянными λ_0 и μ_0 . Цилиндр имеет покрытие в виде радиально-неоднородного изотропного упругого слоя с внешним радиусом R_1 . Свяжем с цилиндром прямоугольную декартову x, y, z и цилиндрическую r, φ, z системы координат так, чтобы их координатные оси z совпадали с осью вращения цилиндра. Полагаем, что модули упругости λ и μ материала покрытия описываются дифференцируемыми функциями радиальной координаты r , а его плотность ρ – непрерывной функцией координаты r . Цилиндр с покрытием находится в идеальной жидкости с плотностью ρ_* и скоростью звука c , граничащей с однородным изотропным упругим полупространством с плотностью ρ_1 и упругими постоянными λ_1 и μ_1 . Ось цилиндра параллельна границе упругого полупространства и отстоит от неё на расстоянии l . В системе координат x, y, z граница упругого полупространства определяется уравнением $y = -l$, $l > 0$.

Пусть из жидкого полупространства на цилиндр с покрытием падает гармоническая цилиндрическая волна, излучаемая бесконечно длинным линейным источником, расположенным в плоскости, параллельной поверхности упругого полупространства, ось которого не является параллельной оси цилиндра.

Начало O координатных систем x, y, z и r, φ, z выберем на оси z так, чтобы из точки O выходил общий перпендикуляр к оси z и линейному источнику. Длину этого перпендикуляра обозначим через d . Ось y направим так, чтобы указанный перпендикуляр лежал на этой оси. Будем считать, что линейный источник пересекает положительную часть оси y в точке $y = d$, $d > 0$. Осуществим параллельный перенос вдоль оси y до точки O прямой, на которой лежит линейный источник. Пусть полученная прямая будет общей осью z_1 прямоугольной x_1, y_1, z_1 и цилиндрической r_1, φ_1, z_1 систем координат с началом в точке O . При этом ось y_1 совместим с осью y . Обозначим через α угол между осями z и z_1 (рис. 1).

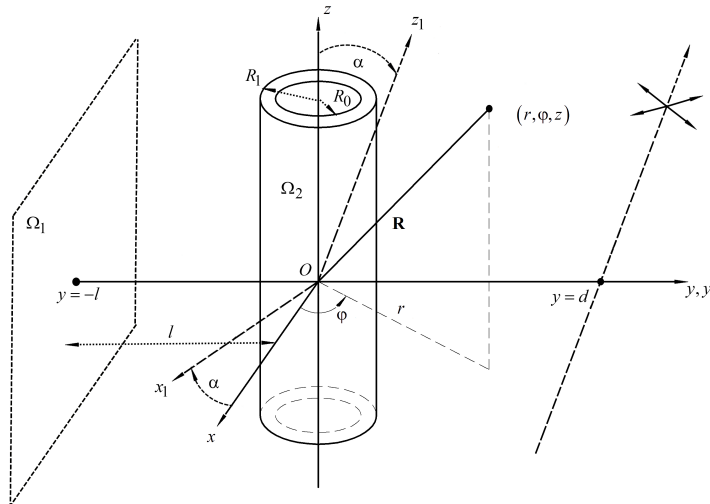


Рис. 1: Геометрия задачи.

Потенциал скорости падающей цилиндрической волны в системе координат x_1, y_1, z_1 запишется в виде

$$\Psi_0 = AH_0(kR) \exp(-i\omega t), \quad R = \sqrt{x_1^2 + (y_1 + d)^2}, \quad (1)$$

где A – амплитуда волны; $H_0(x)$ – цилиндрическая функция Ганкеля первого рода нулевого порядка; $k = \omega/c$ – волновое число жидкости; ω – круговая частота; t – время. В дальнейшем временной множитель $\exp(-i\omega t)$ будем опускать.

Определим акустическое поле в жидком полупространстве и поля смещений в однородном цилиндре и неоднородном упругом слое.

3. Аналитическое решение

Потенциал скорости полного акустического поля в жидком полупространстве будем искать в виде [13]

$$\Psi = \Psi_0 + \Psi_{S1} + \Psi_{S2}, \quad (2)$$

где Ψ_{S1} – потенциал скорости волны, отраженной от границы полупространства, Ψ_{S2} – потенциал скорости рассеянной цилиндром волны (с учетом многократного переотражения между цилиндром и упругим полупространством).

Скорость частиц $\mathbf{v}$ и акустическое давление p в содержащей жидкости определяются формулами

$$\mathbf{v} = \text{grad } \Psi, \quad p = i\rho_*\omega \Psi.$$

Полное звуковое поле в жидком полупространстве удовлетворяет интегральному уравнению Гельмгольца-Кирхгофа [13, 14]

$$\Psi(\mathbf{R}_1) = AG(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_d) + \iint_{\Omega} \left[\Psi(\mathbf{R}_2) \frac{\partial G(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2)}{\partial n} - \frac{\partial \Psi(\mathbf{R}_2)}{\partial n} G(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) \right] d\Omega. \quad (3)$$

Здесь $G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_d)$ и $G(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2)$ – двумерная и трехмерная функции Грина для уравнения Гельмгольца; $\mathbf{R}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, 0)$, $\mathbf{r}_d = (0, d, 0)$; $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$, Ω_1 – поверхность упругого полупространства, Ω_2 – внешняя поверхность покрытия цилиндра. При интегрировании по поверхности Ω_1 точка $\mathbf{R}_2$ находится на поверхности полупространства и дифференцирование выполняется по внешней нормали к поверхности Ω_1 , а в интеграле по поверхности Ω_2 точка $\mathbf{R}_2$ находится на поверхности цилиндра и дифференцирование происходит по внешней нормали к поверхности Ω_2 .

Для того, чтобы в (3) исключить интегрирование по бесконечной поверхности Ω_1 , и учесть множественные переотражения между цилиндрическим рассеивателем и упругой границей, воспользуемся подходом, предложенным в [13]. Будем использовать функцию Грина вида

$$G(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) = G_0(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) + G_1(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2), \quad (4)$$

где $G_1(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2)$ – некоторая функция, представляющая акустическое поле, полученное при отражении первичной волны $G_0(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2)$ от поверхности Ω_1 . Таким образом функция Грина (4) определяет поле точечного источника в пространстве внешнем к поверхности Ω_1 , т.е. является функцией Грина полупространства.

Перепишем интегральное уравнение (3) в цилиндрической системе координат r, φ, z . При этом сравнивая выражения (2) и (3) с учетом (4) заметим, что $\Psi_0 = AG_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_d)$, $\Psi_{S1} = AG_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_d)$.

Прямоугольные координаты x, y, z и x_1, y_1, z_1 связаны между собой соотношениями

$$x_1 = x \cos \alpha + z \sin \alpha, \quad y = y_1, \quad z_1 = -x \sin \alpha + z \cos \alpha. \quad (5)$$

Воспользуемся интегральным соотношением [15]

$$H_0 \left(k \sqrt{x_1^2 + (y_1 + d)^2} \right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\eta} \exp [i (\xi x_1 + \eta |y_1 + d|)] d\xi, \quad (6)$$

где $\eta = \sqrt{k^2 - \xi^2}$.

С учетом (1), (5) и (6) получаем для потенциала скорости падающей волны следующее выражение в цилиндрической системе координат r, φ, z :

$$\Psi_0 = \frac{A}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\eta} \exp [i\xi (r \cos \varphi \cos \alpha + z \sin \alpha) + i\eta |r \sin \varphi + d|] d\xi. \quad (7)$$

При $|\xi| > k$ величина η становится мнимой. Выбор знака корня $\sqrt{k^2 - \xi^2}$ из условия $\text{Im } \mu \geq 0$ обеспечивает ограниченность поля падающей волны Ψ_0 при $r \rightarrow \infty$. Таким образом, $\eta = \sqrt{k^2 - \xi^2}$ при $-k \leq \xi \leq k$ и $\eta = i\sqrt{\xi^2 - k^2}$ при $|\xi| > k$.

Заметим, что на поверхности цилиндра $r \sin \varphi + d > 0$. Будем иметь

$$\Psi_0 = \frac{A}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp (id\eta)}{\eta} \exp (i\xi z \sin \alpha) \exp [ir (\xi \cos \varphi \cos \alpha + \eta \sin \varphi)] d\xi. \quad (8)$$

Заменим в выражении, стоящем в (8), величины ξ и η величинами β и γ с помощью соотношений $\xi \cos \alpha = \beta \sin \gamma$, $\eta = -\beta \cos \gamma$. Тогда вместо (8) получим

$$\Psi_0 = \frac{A}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp (id\eta)}{\eta} \exp (i\xi z \sin \alpha) \exp [-i\beta r \sin (\varphi - \gamma)] d\xi, \quad (9)$$

где $\beta = \sqrt{k^2 - \xi^2 \sin^2 \alpha}$, $\gamma = \arctg (-\xi \cos \alpha / \eta)$.

Подынтегральное выражение в (9) имеет вид плоской волны, падающей наклонно на цилиндр. При этом $(\xi \sin \alpha)^2 + \beta^2 = k^2$.

Используя известное разложение [16]

$$\exp [\pm i\beta r \sin (\varphi - \gamma)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\pm 1)^n J_n (\beta r) \exp [in (\varphi - \gamma)], \quad (10)$$

где $J_n(x)$ – цилиндрическая функция Бесселя порядка n , получим разложение падающей цилиндрической звуковой волны по цилиндрическим волновым функциям

$$\Psi_0 = \frac{A}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp (id\eta)}{\eta} \exp (i\xi z \sin \alpha) \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n J_n (\beta r) \exp [in (\varphi - \gamma)] d\xi. \quad (11)$$

Потенциал Ψ_{S1} описывает волну, отраженную от плоскости. Он удовлетворяет уравнению Гельмгольца и граничным условиям на поверхности границы раздела жидкой и упругой среды, заключающимся в равенстве нормальных скоростей частиц упругой среды и жидкости, равенстве на ней нормального напряжения и акустического давления, отсутствии касательных напряжений:

при $y_1 = -l$:

$$-i\omega u_{y_1} = \frac{\partial (\Psi_0 + \Psi_{S1})}{\partial y_1}, \quad \sigma_{y_1 y_1} = -i\omega \rho_* (\Psi_0 + \Psi_{S1}), \quad \sigma_{x_1 y_1} = 0.$$

где u_{y_1} и $\sigma_{y_1 y_1}$, $\sigma_{x_1 y_1}$ – нормальная компонента вектора смещения и компоненты тензора напряжений в упругом полупространстве в прямоугольной системе координат x_1, y_1, z_1 .

Потенциал Ψ_{S1} в прямоугольной системе координат x_1, y_1, z_1 будет иметь вид

$$\Psi_{S1} = \frac{A}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A_1(\xi) \exp[i(\xi x_1 + \eta(d - y_1))] \frac{d\xi}{\eta},$$

где $A_1(\xi) = \exp(i2l\eta) A'_1(\xi)$. Коэффициент $A'_1(\xi)$ находится при решении задачи об отражении плоской волны, направление распространения которой задается горизонтальной ξ и вертикальной $-\eta$ компонентами волнового вектора $\mathbf{k}_1$, в системе координат с началом отсчета, лежащим на границе упругого полупространства и приведен в работе [17]. В цилиндрической системе координат r, φ, z потенциал Ψ_{S1} с учетом (10) примет вид

$$\Psi_{S1} = \frac{A}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A_1(\xi) \frac{\exp(id\eta)}{\eta} \exp(i\xi z \sin \alpha) \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta r) \exp[in(\varphi + \gamma)] d\xi. \quad (12)$$

Поле, рассеянное упругим цилиндром с радиально-неоднородным упругим покрытием, в соответствии с (2), (3) будем искать в виде интеграла Гельмгольца-Кирхгофа [18]

$$\Psi_{S2}(\mathbf{R}) = \iint_{\Omega_2} \left[\Psi(\mathbf{R}_2) \frac{\partial G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2)}{\partial n} - \frac{\partial \Psi(\mathbf{R}_2)}{\partial n} G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2) \right] d\Omega_2. \quad (13)$$

Здесь $\mathbf{R}$ – точка наблюдения в цилиндрической системе координат (r, φ, z) .

Трехмерная функция Грина (4) согласно [19] в цилиндрической системе координат имеет вид

$$G_0(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2) = \frac{i}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}_o(h) dh,$$

$$\tilde{G}_o(h) = e^{ih(z-z_2)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in(\varphi-\varphi_2)} \begin{cases} J_n(k_h r) H_n(k_h r_2), & r < r_2; \\ J_n(k_h r_2) H_n(k_h r), & r > r_2, \end{cases}$$

$$k_h = \sqrt{k^2 - h^2}. \quad (14)$$

$$G_1(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2) = \frac{i}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ih(z-z_2)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(k_h r) \exp(in\varphi) \times$$

$$\times \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m J_m(k_h r_2) \exp(-im\varphi_2) g_{n+m}(h) dh,$$

$$g_s(h) = \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} A_2(\theta, h) \exp[i(2k_h l \cos \theta + s\theta)] d\theta. \quad (15)$$

где $H_n(x)$ – цилиндрическая функция Ганкеля первого рода порядка n ; Γ – контур Зоммерфельда на комплексной плоскости θ (пределы интегрирования от $-\pi/2 + i\infty$ до $\pi/2 - i\infty$). $A_2(\theta, h)$ – коэффициент отражения плоской волны единичной амплитуды, падающей на упругое полупространство. Коэффициент $A_2(\theta, h)$ находится при решении задачи об отражении плоской волны, направление распространения которой задается волновым вектором

$\mathbf{k}_2 = (k_h \xi/k, -k_h \eta/k, h) = (k_h \sin \theta, -k_h \cos \theta, h)$, в системе координат с началом отсчета, лежащим на границе упругого полупространства и приведен в работе [19].

Различные подходы к вычислению интегральных коэффициентов $g_s(h)$, входящих в (15), обсуждались в работах [14, 19].

Теперь воспользуемся результатами работы [10].

Согласно [10] компоненты вектора смещения в неоднородном упругом покрытии представляются в виде рядов Фурье

$$\begin{aligned} u_r &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi z \sin \alpha} \sum_{q=-\infty}^{\infty} U_{1q}(r, \xi) \exp[iq(\varphi - \gamma)] d\xi, \\ u_\varphi &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi z \sin \alpha} \sum_{q=-\infty}^{\infty} U_{2q}(r, \xi) \exp[iq(\varphi - \gamma)] d\xi, \\ u_z &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi z \sin \alpha} \sum_{q=-\infty}^{\infty} U_{3q}(r, \xi) \exp[iq(\varphi - \gamma)] d\xi, \end{aligned} \quad (16)$$

где функции $U_{1q}(r, \xi)$, $U_{2q}(r, \xi)$, $U_{3q}(r, \xi)$ для каждого q и ξ являются решением следующей системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\hat{\mathbf{A}}_q \mathbf{U}_q'' + \hat{\mathbf{B}}_q \mathbf{U}_q' + \hat{\mathbf{C}}_q \mathbf{U}_q = 0, \quad (17)$$

где $\mathbf{U}_q = (U_{1q}(r, \xi), U_{2q}(r, \xi), U_{3q}(r, \xi))^T$; $\hat{\mathbf{A}}_q$, $\hat{\mathbf{B}}_q$, $\hat{\mathbf{C}}_q$ – матрицы третьего порядка с элементами, приведенными в [10].

Граничные условия на внешней поверхности покрытия заключаются в равенстве нормальных скоростей частиц неоднородной упругой среды и жидкости, равенстве на ней нормального напряжения и акустического давления, отсутствии касательных напряжений

при $r = R_1$:

$$-i\omega u_r = v_r, \quad \sigma_{rr} = -p, \quad \sigma_{r\varphi} = 0, \quad \sigma_{rz} = 0, \quad (18)$$

где u_r и v_r – нормальные компоненты векторов смещения и скорости; σ_{rr} , $\sigma_{r\varphi}$, σ_{rz} – компоненты тензора напряжений в упругом неоднородном покрытии.

Используя обобщенный закон Гука [20] с учетом (16), будем иметь

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \left[(\lambda + 2\mu) U_{1q}'(r, \xi) + \frac{\lambda}{r} (U_{1q}(r, \xi) + iqU_{2q}(r, \xi) + i\xi r U_{3q}(r, \xi) \sin \alpha) \right] \Phi_q(\varphi, z, \xi) d\xi, \\ \sigma_{r\varphi} &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \mu \left[\frac{iq}{r} U_{1q}(r, \xi) + U_{2q}'(r, \xi) - \frac{U_{2q}(r, \xi)}{r} \right] \Phi_q(\varphi, z, \xi) d\xi, \\ \sigma_{rz} &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \mu [U_{3q}'(r, \xi) + i\xi U_{1q}(r, \xi) \sin \alpha] \Phi_q(\varphi, z, \xi) d\xi, \end{aligned} \quad (19)$$

где $\Phi_q(\varphi, z, \xi) = \exp\{i[\xi z \sin \alpha + q(\varphi - \gamma)]\}$.

Подставим в правую часть уравнения (2) формулы (11)-(13) и устремим точку наблюдения на поверхность Ω_2 . Подставим в левую часть (3) полное акустическое поле, выраженное через нормальное напряжение на поверхности цилиндра с помощью второго граничного условия (18). Далее подставим функцию Грина (4) в виде суммы (14) и (15) в подынтегральное

выражение из (13), где следует воспользоваться нижней строкой формулы (14). При этом дифференцирование по нормали будем выполнять по переменной r_2 . После проведения указанных операций следует положить $r = r_2 = R_1$. Далее воспользуемся первыми двумя граничными условиями (18). Подставим в подынтегральное выражение потенциал полного акустического поля и его нормальную производную на поверхности цилиндра, выраженные через компоненты вектора смещения при помощи условий равенства на ней нормальных скоростей частиц упругой среды и жидкости и равенстве нормального напряжения и акустического давления. С учетом выражений (16) осуществим интегрирование по поверхности цилиндра ($d\Omega_2 = R_1 d\varphi_2 dz_2$, $\varphi_2 \in [0, 2\pi]$, $z_2 \in (-\infty, \infty)$). Осуществляя интегрирование по переменной z_2 будем пользоваться следующими свойствами [21]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp[i(h - \xi \sin \alpha) z_2] dz_2 = 2\pi \delta(h - \xi \sin \alpha),$$

$$\int_a^b f(h) \delta(h - \xi \sin \alpha) dh = f(\xi \sin \alpha), \quad h \in [a, b],$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака.

В результате получаем краевое условие для нахождения частного решения системы (17) при $r = R_1$

$$F_{1q}U'_{1q}(R_1, \xi) + F_{2q}^{(1)}U_{1q}(R_1, \xi) + F_{3q}U_{2q}(R_1, \xi) + F_{4q}U_{3q}(R_1, \xi) +$$

$$+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[F_{1n}U'_{1n}(R_1, \xi) + F_{2n}^{(2)}U_{1n}(R_1, \xi) + F_{3n}U_{2n}(R_1, \xi) + F_{4n}U_{3n}(R_1, \xi) \right] F_{5qn} = X_q(\xi)$$

$$q = -\infty, \dots, \infty, \quad q \in \mathbb{Z}, \quad \xi = -\infty, \dots, \infty, \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad (20)$$

где

$$F_{1q} = \frac{i}{\rho_* \omega} [\lambda(R_1) + 2\mu(R_1)],$$

$$F_{2q}^{(j)} = \frac{i}{\rho_* \omega} \left[\frac{\lambda(R_1)}{R_1} + \omega^2 \rho_* \frac{Z_q^{(j)}(\beta R_1)}{\beta Z_q'^{(j)}(\beta R_1)} \right], \quad F_{3q} = -\frac{q\lambda(R_1)}{R_1 \rho_* \omega},$$

$$F_{4q} = -\frac{\xi \lambda(R_1) \sin \alpha}{\rho_* \omega}, \quad F_{5qn} = (-1)^n \frac{J_n'(\beta R_1)}{H_q'(\beta R_1)} g_{n+q}(\xi \sin \alpha),$$

$$Z_q^{(1)}(\beta R_1) = H_q(\beta R_1), \quad Z_q^{(2)}(\beta R_1) = J_q(\beta R_1),$$

$$X_q(\xi) = -\frac{2A \exp(id\eta)}{i\pi^2 \eta \beta R_1 H_q'(\beta R_1)} [(-1)^q + A_1(\xi) \exp(i2q\gamma)].$$

Другие краевые условия, которым должна удовлетворять система (17) при $r = R_1$, находим из третьего и четвертого граничных условий (18) с учетом (19)

$$iqU_{1q}(R_1, \xi) + R_1 U_{2q}'(R_1, \xi) - U_{2q}(R_1, \xi) = 0,$$

$$U_{3q}'(R_1, \xi) + i\xi U_{1q}(R_1, \xi) \sin \alpha = 0. \quad (21)$$

На внутренней поверхности покрытия при переходе через границу раздела упругих сред должны быть непрерывны составляющие вектора смещения частиц, нормальные и тангенциальные напряжения

при $r = R_0$:

$$u_r = u_{0r}, \quad u_\varphi = u_{0\varphi}, \quad u_z = u_{0z}, \quad \sigma_{rr} = \sigma_{0rr}, \quad \sigma_{r\varphi} = \sigma_{0r\varphi}, \quad \sigma_{rz} = \sigma_{0rz}, \quad (22)$$

где u_{0r} , $u_{0\varphi}$, u_{0z} и σ_{0rr} , $\sigma_{0r\varphi}$, σ_{0rz} – компоненты вектора смещения и компоненты тензора напряжений в однородном упругом цилиндре.

В результате преобразований, аналогичных приведенным в [10], из (22) получаем еще три условия, которым должна удовлетворять система (16) при $r = R_0$

$$\left(\frac{1}{r^2} \hat{\mathbf{A}}_q \mathbf{U}'_q + \mathbf{T}_q \mathbf{U}_q \right)_{r=R_0} = 0. \quad (23)$$

Компоненты матрицы $\mathbf{T}_q$ в уравнении (23) приведены в [10].

Решений краевой задачи (17), (20), (21), (23) может быть найдено методом сплайн-коллокации [22] для $q = -N, -N + 1, \dots, 0, 1, \dots, N - 1, N$, где в качестве порядка усечения выбирается величина $N = 2[kR_1] + 1$, где $[\cdot]$ – целая часть числа. Используя найденные на поверхности рассеивателя значения функций $U_{1q}(R_1, \xi)$, $U_{2q}(R_1, \xi)$, $U_{3q}(R_1, \xi)$, а также первые два граничные условия (18), получаем аналитическое описание потенциала скорости полного акустического поля и нормальной составляющей скорости на поверхности цилиндра.

Полное рассеянное поле определим выражением

$$\Psi_S = \Psi_{S1} + \Psi_{S2}, \quad (24)$$

где Ψ_{S1} определяется формулой (10), а Ψ_{S2} интегральным выражением (11).

Подставим в (13) первые два граничных условия (18), а также функцию Грина в виде (4), в которой первое слагаемой определяется нижней строчкой формулы (14), а второе слагаемое формулой (15). Интегрируя по поверхности цилиндра, получаем

$$\begin{aligned} \Psi_{S2}(\mathbf{R}) = & \frac{i\pi R_1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\xi z \sin \alpha) \sum_{q=-\infty}^{\infty} [W_{1q} U'_{1q}(R_1, \xi) + W_{2q} U_{1q}(R_1, \xi) + \\ & + W_{3q} U_{2q}(R_1, \xi) + W_{4q} U_{3q}(R_1, \xi)] \times \\ & \times \left[H_q(\beta r) \exp(iq\varphi) + (-1)^q \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta r) \exp(in\varphi) g_{n+q}(\xi \sin \alpha) \right] \exp(-iq\gamma) d\xi, \end{aligned} \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} W_{1q} = & \frac{i[\lambda(R_1) + 2\mu(R_1)]}{\rho_* \omega} \beta J'_q(\beta R_1), \quad W_{2q} = \frac{i\lambda(R_1)}{R_1 \rho_* \omega} \beta J'_q(\beta R_1) + i\omega J_q(\beta R_1), \\ W_{3q} = & -\frac{q\lambda(R_1)}{R_1 \rho_* \omega} \beta J'_q(\beta R_1), \quad W_{4q} = -\frac{\xi \lambda(R_1) \sin \alpha}{\rho_* \omega} \beta J'_q(\beta R_1). \end{aligned}$$

4. О решении обратной задачи

На основе прямой задачи можно определить такие законы неоднородности материала покрытия, для которых будем иметь наименьшее усредненное рассеяние звука в заданном диапазоне частот $\omega \in [\omega_1, \omega_2]$ в фиксированной точке наблюдения $(r, \varphi, z) = (r_*, \varphi_*, z_*)$.

Будем считать, что функции ρ , λ , μ аппроксимированы многочленами второй степени относительно переменной r , то есть будем рассматривать следующие законы параболические законы неоднородности трансверсально-изотропного упругого материала покрытия:

$$\zeta(r) = \zeta^0 \cdot \bar{\zeta}(r), \quad (26)$$

где

$$\bar{\zeta}(r) = \zeta^{(0)} + \zeta^{(1)}r + \zeta^{(2)}r^2, \quad (27)$$

где ζ^0 – характерная величина материала покрытия. Здесь и далее под символом η подразумевается каждая из величин ρ, λ, μ .

В качестве меры звукового рассеяния введем величину $I(\omega) = |\Psi_S(\omega)/A|^2$ – интенсивность звукового рассеяния. Построим функционал вида

$$\Phi[\rho, \lambda, \mu] = \frac{1}{(\omega_2 - \omega_1)} \int_{\omega_1}^{\omega_2} I(\omega) d\omega, \quad (28)$$

определенный на классе квадратичных функций (26) и выражающий усредненную интенсивность рассеяния звука в заданном диапазоне частот.

Для построенного функционала найдем такие значения коэффициентов функций (27), при которых он достигает минимального значения. Для функций (27), определенных на отрезке $[R_0, R_1]$, введем ограничения

$$C_{1\zeta} \leq \bar{\zeta}(r) \leq C_{2\zeta}, \quad (29)$$

где $C_{1\zeta}, C_{2\zeta}$ – некоторые положительные константы.

Геометрически каждое из неравенств (29) задает в прямоугольной системе координат с осью абсцисс r и осью ординат $f(r)$ бесконечное множество кривых, лежащих в прямоугольной области

$$G(\zeta^{(0)}, \zeta^{(1)}, \zeta^{(2)}) = \{(r, f) : R_0 \leq r \leq R_1, C_{1\zeta} \leq f \leq C_{2\zeta}\}.$$

В области G каждая функция $f(r)$ единственным образом определяется тремя точками $G_{0\zeta}(R_0, f_{0\zeta}), G_{1\zeta}(\bar{r}, f_{1\zeta}), G_{2\zeta}(R_1, f_{2\zeta})$, где $\bar{r} = (R_0 + R_1)/2, f_{q\zeta} \in [C_{1\zeta}, C_{2\zeta}] (q = 0, 1, 2)$.

Подставляя значения точек $G_{0\zeta}, G_{1\zeta}, G_{2\zeta}$ в выражение (27), приходим к системе трех линейных алгебраических уравнений с неизвестными $\zeta^{(0)}, \zeta^{(1)}, \zeta^{(2)}$. Решая полученную систему, находим

$$\begin{aligned} \zeta^{(0)} &= [f_{0\zeta} R_1 \bar{r} (\bar{r} - R_1) + f_{1\zeta} R_1 R_0 (r_1 - R_0) + f_{2\zeta} \bar{r} R_0 (R_0 - \bar{r})] / \Delta_\zeta, \\ \zeta^{(1)} &= [f_{0\zeta} (R_1^2 - \bar{r}^2) + f_{1\zeta} (R_0^2 - r_1^2) + f_{2\zeta} (\bar{r}^2 - R_0^2)] / \Delta_\zeta, \\ \zeta^{(2)} &= [f_{0\zeta} (\bar{r} - R_1) + f_{1\zeta} (R_1 - R_0) + f_{2\zeta} (R_0 - \bar{r})] / \Delta_\zeta, \\ \Delta_\zeta &= (R_1 - R_0) (R_1 R_0 - R_1 \bar{r} - R_0 \bar{r} + \bar{r}^2). \end{aligned} \quad (30)$$

Выбирая из отрезка $[C_{1\zeta}, C_{2\zeta}]$ значения ординат $f_{0\zeta}, f_{1\zeta}, f_{2\zeta}$ и вычисляя с помощью соотношений (30) значения коэффициентов $\zeta^{(0)}, \zeta^{(1)}, \zeta^{(2)}$, получаем квадратичные законы неоднородности материала покрытия. При этом не все параболические законы подлежат рассмотрению. Если выполняется условие

$$R_0 \leq -\zeta^{(1)} / (2\zeta^{(2)}) \leq R_1,$$

то это означает, что абсцисса вершины параболы принадлежит отрезку $[R_0, R_1]$. В этом случае параболу следует рассматривать только в том случае, если ордината ее вершины принадлежит отрезку $[C_{1\zeta}, C_{2\zeta}]$, то есть, когда выполняется условие

$$C_{1\zeta} \leq \zeta^{(0)} - \zeta^{(1)2} / (4\zeta^{(2)}) \leq C_{2\zeta}.$$

Поиск значений коэффициентов $\zeta^{(0)}, \zeta^{(1)}, \zeta^{(2)}$ функций (27), удовлетворяющих условиям (29) и минимизирующих функцию

$$\Phi(\rho^{(0)}, \rho^{(1)}, \rho^{(2)}, \lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \mu^{(0)}, \mu^{(1)}, \mu^{(2)}) \rightarrow \min, \quad (31)$$

может быть осуществлен с помощью алгоритма имитации отжига аналогично тому, как показано в [23].

Введем для ординаты $f_{q\zeta}$ ($q = 0, 1, 2$) точки $G_{q\zeta}$ на отрезке $[C_{1\zeta}, C_{2\zeta}]$ равномерную сетку $f_{q\zeta}^{(l_{q\zeta})} = C_{1\zeta} + l_{q\zeta}\tilde{h}$. Здесь $l_{q\zeta}$ – номер узла сетки, $\tilde{h} = (C_{2\zeta} - C_{1\zeta})/\tilde{n}$ – шаг сетки, $\tilde{n}$ – количество равных частей, на которые разбит отрезок $[C_{1\zeta}, C_{2\zeta}]$.

Алгоритм имитации отжига относится к алгоритмам типа случайного поиска и сводит задачу поиска минимального значения к некоторому перебору значений Φ на сетке $f_{q\zeta}^{(l_{q\zeta})}$, что приводит к необходимости вычисления большого числа интегралов вида

$$\Phi = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi, \omega) d\xi d\omega. \quad (32)$$

Аналитическая запись подынтегральной функции $F(\xi, \omega)$ не приводится для краткости записи и достаточно очевидна исходя из формул (12), (25), (28).

Оценить интеграл (32) аналитически не представляется возможным, и он подлежит только численному расчету. При этом к несобственному интегралу по переменной ξ может быть применен прием обрезания бесконечных пределов [24]. Подынтегральная функция $F(\xi, \omega)$ определяется дискретным набором значений, вычисляемых в заданных точках (ξ_*, ω_*) при решении краевой задачи (17), (20), (21), (23). Вычислительный процесс решения построенной краевой задачи является достаточно трудоемким, что приводит к необходимости выбора наиболее оптимального метода численного интегрирования для интегралов (32): имеющего достаточно высокую точность и требующего как можно меньшего числа узлов (ξ_*, ω_*) . В качестве такого метода может быть использована квадратурная формула на основе параллелепедальной сетки Коробова [25, 26].

5. Численные исследования

На основе полученного решения были проведены расчеты угловых характеристик рассеянного акустического поля $|\Psi_S(\varphi)/A|$ в дальней зоне при $r_* = 100$ в плоскости $z_* = 0$.

Полагалось, что алюминиевый цилиндр ($\rho_0 = 2.7 \cdot 10^3$ кг/м³, $\lambda_0 = 5.3 \cdot 10^{10}$ Н/м², $\mu_0 = 2.6 \cdot 10^{10}$ Н/м²) радиуса $R_0 = 0.8$ с неоднородным упругим покрытием толщиной 0.2 располагается в полупространстве, заполненном водой ($\rho_* = 10^3$ кг/м³, $c = 1485$ м/с) и отстоит от границы полупространств на расстояние $l = 1 + R_1$. Упругое полупространство характеризуется параметрами: $\rho_1 = 7.85 \cdot 10^3$ кг/м³, $\lambda_1 = 1.2 \cdot 10^{11}$ Н/м², $\mu_1 = 7.9 \cdot 10^{10}$ Н/м² (сталь). Рассматривалось как однородное полимерное покрытие с характерной плотностью $\rho^0 = 1.07 \cdot 10^3$ кг/м³ и характерными модулями упругости $\lambda^0 = 3.9 \cdot 10^9$ Н/м², $\mu^0 = 9.8 \cdot 10^8$ Н/м² (поливинилбутираль), так и неоднородные, механические характеристики которых менялись по законам:

$$\rho = \rho^0 \cdot f(r), \quad \lambda = \lambda^0, \quad \mu = \mu^0,$$

где

$$f(r) = (R_1 - r) / (R_1 - R_0) + 0.5, \quad R_0 \leq r \leq R_1.$$

Полагалось, что линейный источник отстоит от центра основной координатной системы на расстоянии $d = 1 + R_1$ и генерирует звуковую волну единичной амплитуды с частотой, соответствующей волновому размеру тела $kR_1 = 5$.

На рис. 2 – 3 представлены диаграммы направленности рассеянного поля в области $\varphi \in [0, \pi]$. На лучах диаграмм отложены значения безразмерной амплитуды рассеяния, вычисленной для соответствующих значений угла φ . Штриховые линии соответствуют цилиндру с однородным покрытием, сплошные линии – цилиндру с неоднородным покрытием.

На рис. 2 и 3 приведены кривые, рассчитанные для случаев, когда $\alpha = 0$ и $\alpha = \pi/4$ соответственно.

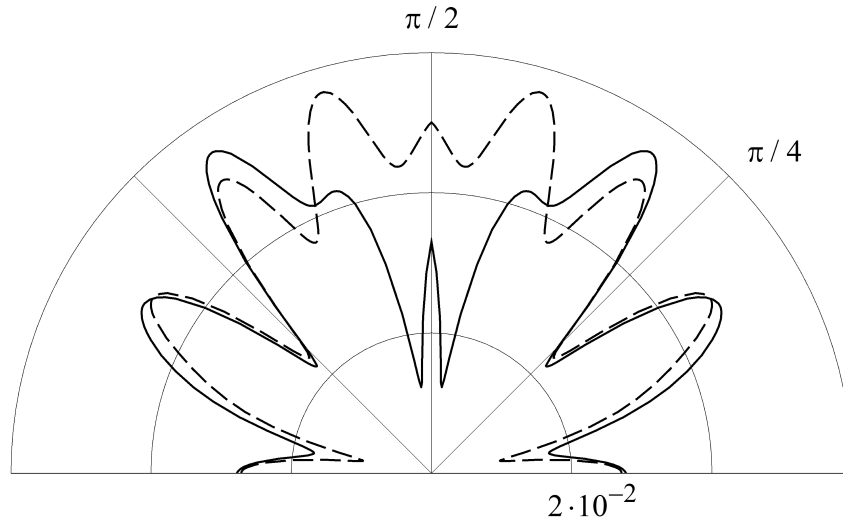


Рис. 2: Диаграммы направленности рассеянного поля, $\alpha = 0$.

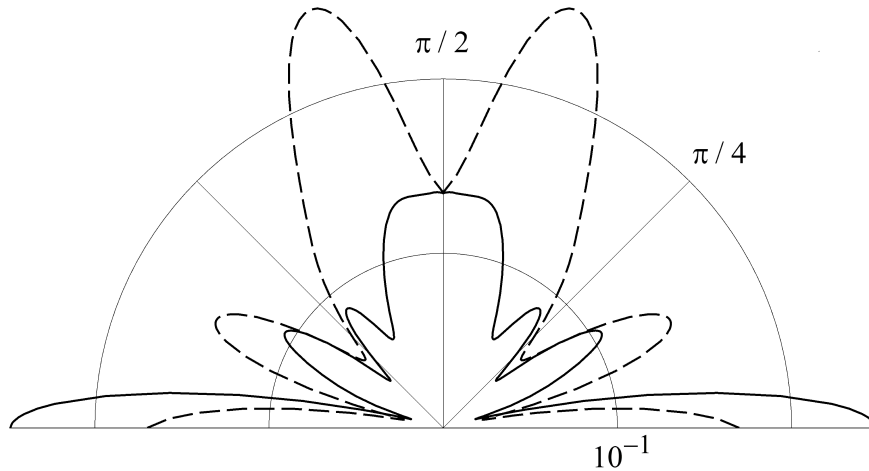


Рис. 3: Диаграммы направленности рассеянного поля, $\alpha = \pi/4$.

Проведены расчеты параметров в законах неоднородности (27), обеспечивающих минимальное рассеяние звука при угле поворота источника $\alpha = \pi/4$.

В ограничениях (29) полагалось $C_{1\zeta} = 0.5$, $C_{2\zeta} = 1.5$ для всех функций $\zeta = \rho, \lambda, \mu$.

При расчетах использовались следующие параметры алгоритма имитации отжига [23] – шаг сетки $\tilde{h} = 0.125$, размерность пространства параметров – $w = 9$, диапазон изменения температуры кристаллизации процесса $[T_{\min}, T_{\max}] = [5.9, 10]$. Для квадратурной формулы на основе параллелепедальной сетки Коробова при вычислении интегралов (32) задавались параметры [26]: $a = 196$, $N = 513$.

Законы неоднородности материала покрытия, обеспечивающие наименьшую интенсив-

ность рассеяния звука цилиндром с покрытием в фиксированной точке наблюдения $(r_*, \varphi_*, z_*) = (100, \pi/2, 0)$ в частотном диапазоне, определяемым изменением волнового размера цилиндра в промежутке $4 \leq kR_1 \leq 5$ имеют вид

$$\begin{aligned}\rho &= 1.07 \cdot 10^3 \cdot 0.5, \\ \lambda &= 3.9 \cdot 10^9 (-12.5r^2 + 27.5r - 13.5), \\ \mu &= 9.8 \cdot 10^8 \cdot (-18.75r^2 + 34.375r - 15).\end{aligned}\quad (33)$$

Для оптимальных законов неоднородности (33) значение функционала $\Phi = 14.93 \cdot 10^{-3}$. Для оценки эффективности покрытия оптимальными звукоотражающими свойствами было рассчитано значение функционала Φ для упругого цилиндра без покрытия, равное $20.8 \cdot 10^{-3}$.

6. Заключение

В настоящей работе получено строгое аналитическое решение задачи дифракции цилиндрической звуковой волны на бесконечном однородном изотропном упругом цилиндре с непрерывно-неоднородным изотропным упругим покрытием, расположенном вблизи границы однородного изотропного полупространства в случае, когда линейный источник находится в плоскости, параллельной поверхности полупространства и не является параллельным оси цилиндра.

На основе полученного аналитического решения проведены численные расчеты, показывающие возможность изменять звукоотражающие свойства упругих цилиндрических тел с помощью непрерывно-неоднородных покрытий.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иванов В.П. Анализ поля дифракции на цилиндре с перфорированным покрытием // Акустический журн. 2006. Т. 52. № 6. С. 791-798.
2. Бобровницкий Ю.И. Нерассеивающее покрытие для цилиндра // Акустический журн. 2008. Т. 54. № 6. С. 879-889.
3. Косарев О.И. Дифракция звука на упругой цилиндрической оболочке с покрытием // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2012. Т. 46. № 1. С. 34-37.
4. Ларин Н.В., Толоконников Л.А. Рассеяние плоской звуковой волны упругим цилиндром с дискретно-слоистым покрытием // Прикладная математика и механика. 2015. Т. 79. Вып. 2. С. 242-250.
5. Романов А.Г., Толоконников Л.А. Рассеяние звуковых волн цилиндром с неоднородным упругим покрытием // Прикладная математика и механика. 2011. Т. 75. Вып. 5. С. 850-857.
6. Толоконников Л.А. Рассеяние наклонно падающей плоской звуковой волны упругим цилиндром с неоднородным покрытием // Известия Тульского гос. ун-та. Естественные науки. 2013. Вып. 2. Часть 2. С. 265-274.
7. Lee F. A. Scattering of a cylindrical wave of sound by an elastic cylinder // Acustica. 1963. Vol. 13, № 3. P. 26-31.
8. Толоконников Л.А., Ефимов Д.Ю. Дифракция цилиндрических звуковых волн на упругом цилиндре с радиально-неоднородным покрытием // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22. Вып. 1. С. 460-472.

9. Корсунский С. В. Неосесимметричная задача дифракции цилиндрических звуковых волн на абсолютно жестком цилиндре // Акустический журн. 1988. Т. 34. № 3. С. 481-484.
10. Толоконников Л. А., Ефимов Д. Ю. Рассеяние упругим цилиндром с неоднородным покрытием звуковых волн, излучаемых произвольно расположенным линейным источником // Математическое моделирование. 2024. Т. 36. №1. С. 71-84.
11. Толоконников Л. А. Дифракция плоской звуковой волны на упругом цилиндре с неоднородным покрытием, находящемся вблизи плоской поверхности // Известия Тульского гос. ун-та. Технические науки. 2018. Вып. 9. С. 276-289.
12. Толоконников Л. А., Ефимов Д. Ю. Рассеяние наклонно падающей плоской звуковой волны упругим цилиндром с неоднородным покрытием, находящимся вблизи плоской поверхности // Чебышевский сборник. 2020. Т. 21. Вып. 4. С. 369-381.
13. Шендеров Е. Л. Дифракция звука на упругом цилиндре, расположенном вблизи поверхности упругого полупространства // Акустический журн. 2002. Т. 48. № 2. С. 266-276.
14. Толоконников Л. А., Ефимов Д. Ю. Дифракция звуковых волн на упругом цилиндре с неоднородным покрытием, расположенном вблизи поверхности упругого полупространства // Прикладная математика и механика. 2021. Т. 85. Вып. 6. С. 779-791.
15. Фелсен Л., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн. Т. 2. М.: Мир, 1978. 557 с.
16. Иванов Е. А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск: Наука и техника, 1968. 584 с.
17. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 344 с.
18. Шендеров Е. Л. Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 352 с.
19. Ефимов Д. Ю. Дифракция звука от точечного источника на упругом цилиндре с неоднородным покрытием, расположенном вблизи упругой границы // Чебышевский сборник. 2023. Т. 24. Вып. 5. С. 289-306.
20. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
21. Курант Р. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 830 с.
22. Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980, 352 с.
23. Толоконников Л. А., Ефимов Д. Ю. Моделирование неоднородного анизотропного покрытия упругого цилиндра, обеспечивающего наименьшее отражение звука // Чебышевский сборник. 2022. Т. 23. Вып. 1. С. 293-311.
24. Калиткин Н. Н. Численные методы. М.: Физматлит, 1978. 512 с.
25. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. (второе издание) М.: МЦНМО, 2004. 288 с.
26. Добровольский Н. Н., Скобельцын С. А., Толоконников Л. А., Ларин Н. В. О применении теоретико-числовых сеток в задачах акустики // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22. Вып. 3. С. 368-382.

REFERENCES

1. Ivanov, V.P. 2006. "Analysis of the field diffracted by a cylinder with a perforated coating", *Acoustical Physics* vol. 52, no 6, pp. 683-690.
2. Bobrovnikskii, Yu.I. 2008. "A nonscattering coating for a cylinder", *Acoustical Physics*, vol. 54, no 6, pp. 758-768.
3. Kosarev, O.I. 2012. "Diffraction of sound by an elastic cylindrical shell with a coating", *Probl. Mashinostr. Nadezh. Mashin*, vol. 46, no 1, pp. 34-37, [in Russian].
4. Larin, N. V. & Tolokonnikov, L. A. 2015. "The scattering of a plane sound wave by an elastic cylinder with a discrete-layered covering", *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 79. no 2, pp. 164-169.
5. Romanov, A. G. & Tolokonnikov, L. A. 2011. "The scattering of acoustic waves by a cylinder with a non-uniform elastic coating", *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 75, no. 5, pp. 595-600.
6. Tolokonnikov, L. A. 2013. "Scattering of an obliquely incident plane sound wave by an elastic cylinder with a non-uniform covering", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no. 2-2, pp. 265-274, [in Russian].
7. Lee F. A. 1963. "Scattering of a cylindrical wave of sound by an elastic cylinder", *Acustica*, vol. 13, no. 3. pp. 26-31.
8. Tolokonnikov, L. A. & Efimov, D. Yu. 2021. " Diffraction of cylindrical sound waves by an elastic cylinder with radially inhomogeneous coating", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 1, pp. 460-472, [in Russian].
9. Korsunskii, S. V. 1988. "The non-axisymmetric diffraction problem of cylindrical sound waves on an absolutely rigid cylinder", *Akust. Zhurnal*, vol. 34, no. 3, pp. 481-484, [in Russian].
10. Tolokonnikov, L. A. & Efimov, D. Yu. 2024. "Scattering by an elastic cylinder with an inhomogeneous coating of sound waves emitted by an arbitrarily located linear source", *Mathematical modeling*, vol. 36, no. 1, pp. 71-84, [in Russian].
11. Tolokonnikov, L. A. 2018. "Diffraction of a plane sound waves by an elastic cylinder with a non-uniform coating situated near to a flat surface", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki* , no. 9, pp. 276-289, [in Russian].
12. Tolokonnikov, L. A. & Efimov D. Yu. 2020. "Scattering of a plane sound waves by an elastic cylinder with a non-uniform coating situated near to a flat surface", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 4, pp. 369-381, [in Russian].
13. Shenderov, E. L. 2002. "Diffraction of sound by an elastic cylinder near the surface of an elastic halfspace", *Acoustical Physics*, vol. 48, no. 2, pp. 225-234.
14. Tolokonnikov, L. A. & Efimov, D. Yu. 2021. "Diffraction of sound waves at an elastic cylinder with an inhomogeneous coating in the vicinity of the boundary of an elastic half-space", *Mechanics of Solids*, vol. 56, no. 8, pp. 1657-1667.
15. Felsen, L. B., Marcuvitz, N. 1973. "Radiation and scattering of waves", *Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey*.
16. Ivanov, E. A. 1968. "Diffraction of electromagnetic waves by two bodies", *Nauka i tekhnika, Minsk*, 584 p., [in Russian].

17. Brekhovskikh, L. M. 1973. "Waves in Layered Media", *Nauka, Moscow*, 344 p., [in Russian].
18. Shenderov, E. L. 1972, "Wave problems of underwater acoustics", *Sudostroenie, Leningrad*, 352 p. [in Russian].
19. Efimov, D. Yu. 2023, "Diffraction of sound from a point source on an elastic cylinder with an inhomogeneous coating located near the elastic boundary", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 5, pp. 289-306, [in Russian].
20. Nowacki, W. 1973. "Teoria sprężystości", *PWN, Warszawa*.
21. Kurant, R. 1964. "Partial Differential Equations", *Mir, Moscow*, 830 p., [in Russian].
22. Zavyialov, Yu. S., Kvasov, B. I. & Miroshnichenko, V. L. 1980. "Spline function methods", *Nauka, Moscow*, 352 p., [in Russian].
23. Tolokonnikov, L. A. & Efimov D. Yu. 2022. "Modeling the inhomogeneous anisotropic coating of an elastic cylinder that provides minimal sound reflection", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 1, pp. 293–311, [in Russian].
24. Kalitkin, N. N. 1978. "Numerical methods", *Fizmatgiz, Moscow*, 512 p., [in Russian].
25. Korobov, N. M. 2004. "Teoretiko-chislovye metody v priblizhennom analize [Number-theoretic methods in approximate analysis]", 2nd ed., MTSNMO, Moscow, Russia.
26. Dobrovol'skii, N. N., Skobel'tsyn, S. A., Tolokonnikov, L. A., Larin, N. V. 2021. "About application of number-theoretic grids in problems of acoustics", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 3, pp. 368-382, [in Russian].

Получено: 04.02.2024

Принято в печать: 28.06.2024

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 25. Выпуск 2.

УДК 539.3:534.26

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-2-286-295

Дифракция звука от точечного источника на цилиндре с упругим покрытием, окруженном неоднородным жидким слоем¹

Д. Ю. Ефимов

Ефимов Дмитрий Юрьевич — аспирант, Тульский государственный университет (г. Тула).
e-mail: bogart.efimov@yandex.ru

Аннотация

В статье рассматривается задача дифракции сферической звуковой волны абсолютно жестким цилиндром с покрытием в виде однородного изотропного упругого слоя с прилегающим неоднородным слоем жидкости. Полагается, что цилиндр с однородным покрытием окружен непрерывно-неоднородным слоем жидкости с произвольным законом неоднородности. Точечный источник гармонических звуковых волн помещен в идеальную однородную жидкость, граничащую с неоднородным слоем.

Акустическое давление в сферической волне представляется в интегральной форме в виде разложения по цилиндрическим волновым функциям. Волновые процессы в упругом слое описываются системой уравнений линейной теории упругости изотропного тела. Для определения волнового поля в неоднородном слое жидкости построена краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка.

Ключевые слова: сферические звуковые волны, упругий цилиндр, неоднородный слой жидкости.

Библиография: 20 названий.

Для цитирования:

Д. Ю. Ефимов. Дифракция звука от точечного источника на цилиндре с упругим покрытием, окруженном неоднородным жидким слоем // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 2, с. 286–295.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 25. No. 2.

UDC 539.3:534.26

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-2-286-295

Diffraction of sound from a point source on a cylinder with an elastic coating surrounded by an inhomogeneous liquid layer

D. Yu. Efimov

Efimov Dmitrii Yurevich — postgraduate student, Tula State University (Tula).
e-mail: bogart.efimov@yandex.ru

¹Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства просвещения РФ соглашение № 073-00033-24-01 от 09.02.2024 тема научного исследования «Теоретико-числовые методы в приближенном анализе и их приложения в механике и физике»

Abstract

The article considers the problem of diffraction of a spherical sound wave by an absolutely rigid cylinder with a coating in the form of a homogeneous isotropic elastic layer with an adjacent inhomogeneous liquid layer. It is assumed that a cylinder with a homogeneous coating is surrounded by a continuously inhomogeneous liquid layer with an arbitrary law of inhomogeneity. A point source of harmonic sound waves is placed in an ideal homogeneous liquid bordering an inhomogeneous layer.

The acoustic pressure in a spherical wave is represented in an integral form as a decomposition in cylindrical wave functions. Wave processes in an elastic layer are described by a system of equations of the linear theory of elasticity of an isotropic body. To determine the wave field in an inhomogeneous liquid layer, a boundary value problem for an ordinary differential equation of the second order is constructed.

Keywords: spherical sound waves, elastic cylinder, inhomogeneous liquid layer.

Bibliography: 20 titles.

For citation:

D. Yu. Efimov, 2024. "Diffraction of sound from a point source on a cylinder with an elastic coating surrounded by an inhomogeneous liquid layer", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 2, pp. 286–295.

1. Введение

Влияние покрытий цилиндрических тел на их звукоотражающие свойства исследовалось в ряде работ. Прямая и обратная задачи дифракции плоской звуковой волны на цилиндре с перфорированным покрытием решены в [1]. Выбраны параметры среды резонаторов перфорированного покрытия, обеспечивающие заданный уровень гашения поля дифракции на цилиндре. В [2, 3] обсуждается задача о нерассеивающем покрытии для цилиндра, делающее его акустически прозрачным. Для снижения рассеяния падающей на цилиндр звуковой волны применено тонкое покрытие с протяженной реакцией. Дифракция плоской звуковой волны на упругой цилиндрической оболочке с однородным упругим покрытием исследована в [4]. Выявлены условия, при которых совместный выбор импедансов покрытия и оболочки позволяет минимизировать рассеянное поле. Дифракция плоской волны цилиндром с покрытием в виде дискретной системы коаксиальных однородных упругих слоев была изучена в [5]. Задачи о рассеянии плоских и цилиндрических звуковых волн жестким цилиндром с непрерывно-неоднородным упругим покрытием решены в [6, 7].

Задачи дифракции сферических звуковых волн на упругих цилиндрических телах с математической точки зрения являются более сложными по сравнению с задачами дифракции плоских и цилиндрических волн. Изучение дифракции сферической звуковой волны на цилиндрическом теле представляет значительный интерес для теории и практики. В этом случае геометрия рассеивающего объекта отлична от геометрии падающей волны, а учет криволинейности волнового фронта весьма важен, когда источник находится на небольшом расстоянии от рассеивателя. Такие задачи исследовались в [8–10]. В [8] рассмотрена задача дифракции сферической звуковой волны однородным упругим цилиндром с применением потенциалов Дебая. В [9] показано, что решение задачи рассеяния сферических звуковых волн на упругом рассеивателе цилиндрической может быть получено с использованием известного решения рассеяния наклонно падающей плоской звуковой волны, а в [10] данный подход был применен для случая упругого цилиндра с неоднородным упругим покрытием. Дифракция звука от точечного источника упругим цилиндром с трансверсально-изотропным неоднородным покрытием исследована в [11].

В настоящей работе рассматривается задача дифракции сферической звуковой волны абсолютно жестким цилиндром с покрытием в виде однородного изотропного упругого слоя с прилегающим неоднородным слоем жидкости.

2. Постановка задачи

Рассмотрим бесконечный абсолютно жесткий цилиндр радиуса r_3 , покрытый однородным изотропным упругим слоем с внешним радиусом r_2 . Материал упругого слоя характеризуется плотностью ρ и упругими постоянными λ и μ . Цилиндр окружен радиально-неоднородным цилиндрическим слоем идеальной жидкости, внешний радиус которого равен r_1 . Цилиндрическая система координат r, φ, z выбрана таким образом, что координатная ось z совпадает с осью вращения цилиндра. Плотность неоднородного жидкого слоя ρ_1 и скорость звука в слое c_1 являются прерывными функциями радиальной координаты: $\rho_1 = \rho_1(r)$, $c_1 = c_1(r)$. Цилиндр с прилегающим неоднородным по толщине жидким слоем помещен в однородную идеальную жидкость с плотностью ρ_0 и скоростью звука c_0 .

Пусть из внешнего пространства на цилиндр падает гармоническая сферическая звуковая волна, излучаемая точечным источником, цилиндрические координаты которого (r_i, φ_i, z_i) . Акустическое давление падающей волны

$$p_0 = A \frac{\exp(ik|\mathbf{R} - \mathbf{R}_i| - i\omega t)}{|\mathbf{R} - \mathbf{R}_i|},$$

где A – амплитуда волны; $k = \omega/c_0$ – волновое число жидкости; $\mathbf{R}$ и $\mathbf{R}_i$ – радиус-векторы точки наблюдения и точки, в которой располагается источник; ω – круговая частота; t – время. В дальнейшем временной множитель $\exp(-i\omega t)$ будем опускать.

Определим звуковое давление во внешнем пространстве, звуковое давление в неоднородном жидком слое и поле смещений в однородном упругом покрытии.

3. Математическая модель задачи

Распространение малых возмущение в однородной идеальной жидкости в случае установившихся колебаний описывается уравнением Гельмгольца [12]

$$\Delta p + k^2 p = 0, \quad (1)$$

где $p = p_0 + p_S$ – давление полного акустического поля; p_S – звуковое давление в рассеянной волне.

Распространение звука в неоднородной идеальной жидкости описывается уравнением [13]

$$\Delta p_1 + \frac{\omega^2}{c_1^2} p_1 - \frac{1}{\rho_1} \text{grad } \rho_1 \text{ grad } p_1 = 0, \quad (2)$$

где p_1 – звуковое давление в неоднородном слое.

Скорости частиц в однородной жидкости $\mathbf{v}$ и в неоднородном слое $\mathbf{v}_1$ определяются по формулам

$$\mathbf{v} = \frac{1}{i\rho_0\omega} \text{grad } p, \quad \mathbf{v}_1 = \frac{1}{i\rho_1\omega} \text{grad } p_1. \quad (3)$$

Уравнения, описывающие распространение малых возмущений в однородном упругом изотропном цилиндрическом слое в случае установившегося режима движения, имеют вид [12]

$$\Delta \Psi + k_l^2 \Psi = 0, \quad (4)$$

$$\Delta \Phi + k_\tau^2 \Phi = 0, \quad (5)$$

где Ψ и Φ – скалярный и векторный потенциалы смещения; $k_l = \omega/c_l$ и $k_\tau = \omega/c_\tau$ – волновые числа продольных и поперечных упругих волн; $c_l = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ и $c_\tau = \sqrt{\mu/\rho}$ – скорости

продольных и поперечных волн. Вектор смещения $\mathbf{u}$ частиц упругого однородного цилиндрического слоя определяется выражением

$$\mathbf{u} = \text{grad } \Psi + \text{rot } \Phi. \quad (6)$$

Представим вектор Φ в виде

$$\Phi = \text{rot } (L \cdot \mathbf{e}_z) + k_\tau M \cdot \mathbf{e}_z,$$

где L и M – функции пространственных координат; $\mathbf{e}_z$ – единичный вектор оси z . Тогда векторное уравнение (5) заменится двумя скалярными уравнениями Гельмгольца относительно функций L и M

$$\Delta L + k_\tau^2 L = 0, \quad (7)$$

$$\Delta M + k_\tau^2 M = 0. \quad (8)$$

В цилиндрической системе координат уравнение Гельмгольца (1) для давления в рассеянной волне и уравнение (2) будут иметь вид

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + k^2 p = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial r^2} + \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\rho_1(r)} \frac{\partial \rho_1}{\partial r} \right) \frac{\partial p_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 p_1}{\partial z^2} + k_1^2(r) p_1 = 0, \quad (10)$$

где $k_1(r) = \omega/c_1(r)$.

Соотношения между компонентами тензора напряжений σ_{ij} и вектора смещения $\mathbf{u}$ в однородном изотропном цилиндрическом слое имеют вид [14]:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \lambda \text{div } \mathbf{u} + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r}, & \sigma_{\varphi\varphi} &= \lambda \text{div } \mathbf{u} + 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} \right), \\ \sigma_{zz} &= \lambda \text{div } \mathbf{u} + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z}, & \sigma_{r\varphi} &= \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \right), \\ \sigma_{rz} &= \mu \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right), & \sigma_{\varphi z} &= \mu \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} \right), \end{aligned} \quad (11)$$

где $\text{div } \mathbf{u} = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_r \right) + \frac{\partial u_z}{\partial z}$.

Используя соотношения (11), выразим компоненты тензора напряжений σ_{rr} , $\sigma_{r\varphi}$, σ_{rz} через функции Ψ , L , M :

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -\lambda k_l^2 \Psi + 2\mu \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^3 L}{\partial r^2 \partial \varphi} - \frac{k_\tau}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial M}{\partial r} - \frac{M}{r} \right) \right), \\ \sigma_{r\varphi} &= \frac{2\mu}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial r} - \frac{1}{r} \Psi + \frac{\partial^2 L}{\partial r \partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial L}{\partial z} \right) - \mu k_\tau \left(\frac{\partial^2 M}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial M}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 M}{\partial \varphi^2} \right), \\ \sigma_{rz} &= \mu \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r \partial z} + 2 \frac{\partial^3 L}{\partial r \partial z^2} + k_\tau^2 \frac{\partial L}{\partial r} + \frac{k_\tau}{r} \frac{\partial^2 M}{\partial \varphi \partial z} \right). \end{aligned} \quad (12)$$

На поверхности абсолютно жесткого цилиндра ($r = r_3$) при переходе через границу раздела абсолютно жесткой и упругой сред должен быть равен нулю вектор смещения частиц упругой среды:

$$u_r = 0, \quad u_\varphi = 0, \quad u_z = 0. \quad (13)$$

Граничные условия на внешней поверхности упругого цилиндрического слоя ($r = r_2$) заключаются в равенстве нормальных скоростей частиц упругого материала цилиндра и неоднородной жидкости, равенстве нормального напряжения и акустического давления, отсутствии касательных напряжений:

$$-i\omega u_r = v_{1r}, \quad \sigma_{rr} = -p_1, \quad \sigma_{r\varphi} = 0, \quad \sigma_{rz} = 0. \quad (14)$$

На внешней поверхности неоднородного жидкого слоя ($r = r_1$) должны быть равны нормальные скорости частиц однородной и неоднородной жидкости, а также непрерывны акустического давления:

$$v_r = v_{1r}, \quad p = p_1. \quad (15)$$

Здесь $v_r = \frac{1}{i\rho_0\omega} \frac{\partial p}{\partial r}$, $v_{1r} = \frac{1}{i\rho_1\omega} \frac{\partial p_1}{\partial r}$.

Таким образом, в математической постановке задача заключается в нахождении решений дифференциальных уравнений (4), (7)-(10), удовлетворяющих граничным условиям (13)-(15). Кроме того, давление p_S должно удовлетворять условию излучения на бесконечности [12]

$$p_S = O(r^{-1}), \quad \frac{\partial p_S}{\partial r} - ikp_S = o(r^{-1}), \quad r \rightarrow \infty.$$

4. Аналитическое решение задачи

Используя теорему сложения для цилиндрических волновых функций [15], представим звуковое давление падающей волны в виде разложения по цилиндрическим волновым функциям

$$p_0 = A \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{p}_0(h) dh, \quad (16)$$

$$\tilde{p}_0(h) = \frac{i}{2} e^{ih(z-z_i)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp[in(\varphi - \varphi_i)] \begin{cases} H_n(k_h r_i) J_n(k_h r), & r < r_i; \\ J_n(k_h r_i) H_n(k_h r), & r > r_i, \end{cases}$$

где $J_n(x)$ – цилиндрическая функция Бесселя порядка n ; $H_n(x)$ – цилиндрическая функция Ганкеля первого рода порядка n ; $k_h = \sqrt{k^2 - h^2}$.

Без ограничения общности положим $z_i = 0$.

С учетом условий излучения на бесконечности функцию p_S будем искать в виде

$$p_S = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ihz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(h) H_n(k_h r) \exp[in(\varphi - \varphi_i)] dh. \quad (17)$$

При $|h| > k$ величина k_h становится мнимой. Выбор знака корня $\sqrt{k^2 - h^2}$ из условия $\text{Im } k_h \geq 0$ обеспечивает условие излучения на бесконечности для звукового давления p_S при $r \rightarrow \infty$. Таким образом, $k_h = \sqrt{k^2 - h^2}$ при $-k \leq h \leq k$ и $k_h = i\sqrt{h^2 - k^2}$ при $|h| > k$.

Функцию p_1 будем искать в виде разложения

$$p_1 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ihz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n(r, h) \exp[in(\varphi - \varphi_i)] dh \quad (18)$$

а функции Ψ , L и M в виде

$$\begin{aligned}\Psi &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ihz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [B_{1n}(h) J_n(k_1 r) + B_{2n}(h) N_n(k_1 r)] \exp[in(\varphi - \varphi_i)] dh, \\ L &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ihz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [C_{1n}(h) J_n(k_2 r) + C_{2n}(h) N_n(k_2 r)] \exp[in(\varphi - \varphi_i)] dh, \\ M &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ihz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [D_{1n}(h) J_n(k_2 r) + D_{2n}(h) N_n(k_2 r)] \exp[in(\varphi - \varphi_i)] dh, \end{aligned} \quad (19)$$

где $N_n(x)$ – цилиндрическая функция Неймана порядка n ; $k_1 = \sqrt{k_l^2 - h^2}$, $k_2 = \sqrt{k_\tau^2 - h^2}$.

Подставляя выражение (18) в уравнение (10), получим линейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами относительно неизвестной функции $R_n(r, h)$ для каждого n и h

$$\frac{\partial^2 R_n}{\partial r^2} + g(r) \frac{\partial R_n}{\partial r} + q(r) R_n = 0, \quad (20)$$

где

$$g(r) = \frac{1}{r} - \frac{1}{\rho_1(r)} \frac{\partial \rho_1}{\partial r}, \quad q(r) = k_1^2(r) - \frac{n^2}{r^2} - h^2.$$

Подставляя разложения (16)-(19) в граничные условия (13)-(15) и используя выражение для вронскиана [11]

$$J_n(k_h r_1) H'_n(k_h r_1) - J'_n(k_h r_1) H_n(k_h r_1) = 2i/(\pi k_h r_1),$$

получим выражения для неизвестных коэффициентов

$$A_n(h) = (2R_n(r_1, h) - AiH_n(k_h r_i) J_n(k_h r_1))/2H_n(k_h r_1), \quad (21)$$

$$\mathbf{K}_n = [\mathbf{M}_n]^{-1} \mathbf{W}_n,$$

где $\mathbf{K}_n = (B_{1n}, B_{2n}, C_{1n}, C_{2n}, D_{1n}, D_{2n})^T$; $\mathbf{W}_n = (R_n(r_2, h), 0, 0, 0, 0, 0)^T$; $\mathbf{M}_n = (m_{mqn})_{6 \times 6}$:

$$\begin{aligned} m_{1,j,n} &= \left(\lambda k_l^2 r_2^2 Y_n^{(j)}(k_1 r_2) - 2\mu k_1^2 r_2^2 Y_n^{(j)}(k_1 r_2) \right) / r_2^2, \quad m_{1,j+2,n} = -2ih\mu k_2^2 Y_n^{(j)}(k_2 r_2), \\ m_{1,j+4,n} &= 2in\mu k_\tau \left(Y_n^{(j)}(k_2 r_2) - k_2 r_2 Y_n^{(j)}(k_2 r_2) \right) / r_2^2, \\ m_{2,j,n} &= 2in\mu \left(k_1 r_2 Y_n^{(j)}(k_1 r_2) - Y_n^{(j)}(k_1 r_2) \right) / r_2^2, \\ m_{2,j+2,n} &= 2nh\mu \left(Y_n^{(j)}(k_2 r_2) - k_2 r_2 Y_n^{(j)}(k_2 r_2) \right) / r_2^2, \\ m_{2,j+4,n} &= k_\tau \mu \left(k_2 r_2 Y_n^{(j)}(k_2 r_2) - k_2^2 r_2^2 Y_n^{(j)}(k_2 r_2) - n^2 Y_n^{(j)}(k_2 r_2) \right) / r_2^2, \\ m_{3,j,n} &= 2ihk_1 \mu Y_n^{(j)}(k_1 r_2), \quad m_{3,j+2,n} = \mu Y_n^{(j)}(k_2 r_2) (k_\tau^2 - 2k_2 h^2), \\ m_{3,j+4,n} &= -nhk_\tau \mu Y_n^{(j)}(k_2 r_2) / r_2, \quad m_{4,j,n} = k_1 Y_n^{(j)}(k_1 r_3), \\ m_{4,j+2,n} &= ihk_2 Y_n^{(j)}(k_2 r_3), \quad m_{4,j+4,n} = ink_\tau Y_n^{(j)}(k_2 r_3) / r_3, \\ m_{5,j,n} &= inY_n^{(j)}(k_1 r_3) / r_3, \quad m_{5,j+2,n} = -nhk_2 Y_n^{(j)}(k_2 r_3) / r_3, \quad m_{5,j+4,n} = -k_\tau k_2 Y_n^{(j)}(k_2 r_3), \end{aligned}$$

$$m_{6,j,n} = ihY_n^{(j)}(k_1 r_3), \quad m_{6,j+2,n} = k_2^2 Y_n^{(j)}(k_2 r_3), \quad m_{6,j+4,n} = 0, \\ j = 1, 2, \quad Y_n^{(1)}(x) = J_n(x), \quad Y_n^{(2)}(x) = N_n(x).$$

И два краевых условия для дифференциального уравнения (20)

$$\alpha_{1n} R'_n(r_1, h) + \beta_{1n} R_n(r_1, h) = d_{1n}(h), \\ \alpha_{2n} R'_n(r_2, h) + \beta_{2n} R_n(r_2, h) = 0, \quad (22)$$

$$\alpha_{1n} = -1/\rho_1(r_1)\omega, \quad \beta_{1n} = k_h H'_n(k_h r_1)/\rho_0 \omega H_n(k_h r_1), \quad d_{1n} = -A H_n(k_h r_i)/\pi r_1 \rho_0 \omega H_n(k_h r_1), \\ \alpha_{2n} = -r_1/\omega^2 \rho_1(r_2), \quad \beta_{2n} = \mathbf{K}_{2n} \mathbf{T}_n.$$

При этом $\mathbf{K}_{2n} = [\mathbf{M}_n]^{-1} \mathbf{W}_{2n}$; $\mathbf{W}_{2n} = (1, 0, 0, 0, 0, 0)^T$; $\mathbf{T}_n = (t_{1n}, t_{2n}, t_{3n}, t_{4n}, t_{5n}, t_{6n})^T$:

$$t_{jn} = k_1 r_2 Y_n^{(j)}(k_1 r_2), \quad t_{j+2,n} = ih k_2 r_2 Y_n^{(j)}(k_2 r_2), \quad t_{j+4,n} = ink_\tau r_2 Y_n^{(j)}(k_2 r_2), \quad j = 1, 2.$$

Так как коэффициенты $A_n(h)$, $B_{1n}(h)$, $B_{2n}(h)$, $C_{1n}(h)$, $C_{2n}(h)$, $D_{1n}(h)$, $D_{2n}(h)$ выражены через значения функции $R_n(r, h)$ при $r = r_1, r_2$, то для их вычисления необходимо найти решение краевой задачи (20), (22). Эта краевая задача может быть решена разными численными и аналитическими методами. Например, разностным методом [16], методом стрельбы [16], методом сплайн-коллокации [17].

5. О решении обратной задачи

На основе прямой задачи можно определить такие параметры материала упругого покрытия, для которых будем иметь наименьшее усредненное рассеяние звука в заданном диапазоне частот $\omega \in [\omega_1, \omega_2]$ в фиксированной точке наблюдения $(r, \varphi, z) = (r_*, \varphi_*, z_*)$.

В качестве меры звукового рассеяния введем величину $I(\omega) = |p_S(\omega)/A|^2$ – интенсивность звукового рассеяния. Построим функцию вида

$$\Phi(\rho, \lambda, \mu) = \frac{1}{(\omega_2 - \omega_1)} \int_{\omega_1}^{\omega_2} I(\omega) d\omega, \quad (23)$$

выражающую усредненную интенсивность рассеяния звука в заданном диапазоне частот.

Для функции (23) необходимо найти такие значения упругих параметров ρ, λ, μ при которых она достигает минимального значения.

Для параметров функции (23) введем ограничения

$$C_{11} \leq \rho \leq C_{12}, \quad C_{21} \leq \lambda \leq C_{22}, \quad C_{31} \leq \mu \leq C_{32}. \quad (24)$$

где $C_{\zeta 1}$, $C_{\zeta 2}$ – некоторые положительные константы ($\zeta = 1, 2, 3$).

Поиск значений упругих параметров ρ, λ, μ , удовлетворяющих условиям (24) и минимизирующих функцию

$$\Phi(\rho, \lambda, \mu) \rightarrow \min, \quad (25)$$

осуществить аналитически не представляется возможным. Однако построенная оптимизационная задача (24), (25) может быть решена численно с использованием какого-либо численного метода многомерной оптимизации [18], что приводит к необходимости вычисления большого числа интегралов вида

$$\Phi = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \int_{-\infty}^{\infty} F(h, \omega) dh d\omega. \quad (26)$$

Аналитическая запись подынтегральной функции $F(h, \omega)$ не приводится для краткости записи и достаточно очевидна исходя из формул (17), (21), (23).

Подынтегральная функция $F(h, \omega)$ рассчитывается в выбранных точках (h_*, ω_*) с использованием краевой задачи (20), (22). Далее интеграл (26) может быть рассчитан численно с использованием многомерных квадратурных формул. Для этого к несобственному интегралу по переменной h следует применить прием обрезания бесконечных пределов [16], а в качестве метода численного интегрирования может быть использована квадратурная формула на основе параллелепедальной сетки Коробова [19, 20].

Отметим, что для повышения эффективности звукоотражающих свойств рассеивателя, покрытие может быть реализовано не из одного однородного упругого слоя, а из N однородных упругих слоев аналогично тому как показано в работе [5].

6. Заключение

В настоящей работе получено точное решение задачи дифракции сферической звуковой волны абсолютно жестким цилиндром с покрытием в виде однородного изотропного упругого слоя с прилегающим неоднородным слоем жидкости. Так как геометрия фронта падающей сферической волны не совпадает с геометрией цилиндрического рассеивателя, то решение рассматриваемой акустической задачи на основе построенной математической модели оказывается весьма затруднительным. Для построения аналитического решения давление в падающей сферической волне представляется в интегральной форме в виде разложения по цилиндрическим волновым функциям. Построенное решение справедливо для произвольного закона неоднородности жидкого слоя.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иванов В.П. Анализ поля дифракции на цилиндре с перфорированным покрытием // Акустический журн. 2006. Т. 52. № 6. С. 791-798.
2. Бобровницкий Ю.И. Нерассеивающее покрытие для цилиндра // Акустический журн. 2008. Т. 54. № 6. С. 879-889.
3. Бобровницкий Ю.И., Морозов К.Д., Томилина Т.М. Периодическая поверхностная структура с экстремальными акустическими свойствами // Акустический журн. 2010. Т. 56. № 2. С. 147-151.
4. Косарев О.И. Дифракция звука на упругой цилиндрической оболочке с покрытием // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2012. Т. 46. № 1. С. 34-37.
5. Ларин Н.В., Толоконников Л.А. Рассеяние плоской звуковой волны упругим цилиндром с дискретно-слоистым покрытием // Прикладная математика и механика. 2015. Т. 79. Вып. 2. С. 242-250.
6. Романов А.Г., Толоконников Л.А. Рассеяние звуковых волн цилиндром с неоднородным упругим покрытием // Прикладная математика и механика. 2011. Т. 75. Вып. 5. С. 850-857.
7. Толоконников Л.А. Дифракция цилиндрических звуковых волн на цилиндре с неоднородным упругим покрытием // Известия Тульского гос. ун-та. Естественные науки. 2013. Вып. 3. С. 202-208.
8. Клещев А.А. Дифракция звука от точечного источника на упругой цилиндрической оболочке // Акустический журн. 2004. Т. 50, № 1. С. 86-89.

9. Li T., Ueda M. Sound scattering of spherical wave incident on a cylinder // J. Acoust. Soc. Amer. 1990. Vol. 87, № 5. P. 1871–1879.
10. Толоконников Л. А. Дифракция сферической звуковой волны на упругом цилиндре с неоднородным покрытием // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19. Вып. 4. С. 215–226.
11. Толоконников Л. А., Ефимов Д. Ю. Дифракция сферической звуковой волны на упругом цилиндре с неоднородным анизотропным покрытием // Чебышевский сборник. 2022. Т. 23. Вып. 4. С. 368–381.
12. Шендеров Е. Л. Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 352 с.
13. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 344 с.
14. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
15. Иванов Е. А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск: Наука и техника, 1968. 584 с.
16. Калиткин Н. Н. Численные методы. М.: Физматлит, 1978. 512 с.
17. Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980, 352 с.
18. Захарова Е. М., Минашина И. К. Обзор методов многомерной оптимизации // Информационные процессы. 2014. Т. 14, Вып. 3. С. 256–274.
19. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. (второе издание) М.: МЦНМО, 2004. 288 с.
20. Добровольский Н. Н., Скобелцын С. А., Толоконников Л. А., Ларин Н. В. О применении теоретико-числовых сеток в задачах акустики // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22. Вып. 3. С. 368–382.

REFERENCES

1. Ivanov, V. P. 2006. “Analysis of the field diffracted by a cylinder with a perforated coating”, *Acoustical Physics* vol. 52, no 6, pp. 683–690.
2. Bobrovnikskii, Yu. I. 2008. “A nonscattering coating for a cylinder”, *Acoustical Physics*, vol. 54, no 6, pp. 758–768.
3. Bobrovnikskii, Yu. I., Morozov, K. D. & Tomilina, T. M. 2010. “A periodic surface structure with extreme acoustic properties”, *Acoustical Physics*, vol. 56, no 2, pp. 127–131.
4. Kosarev, O. I. 2012. “Diffraction of sound by an elastic cylindrical shell with a coating”, *Probl. Mashinostr. Nadezh. Mashin*, vol. 46, no 1, pp. 34–37, [in Russian].
5. Larin, N. V. & Tolokonnikov, L. A. 2015. “The scattering of a plane sound wave by an elastic cylinder with a discrete-layered covering”, *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 79. no 2, pp. 164–169.
6. Romanov, A. G. & Tolokonnikov, L. A. 2011. “The scattering of acoustic waves by a cylinder with a non-uniform elastic coating”, *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 75, no. 5, pp. 595–600.

7. Tolokonnikov, L. A. 2013. "Diffraction of cylindrical sound waves by an cylinder with a nonuniform elastic coating" *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no. 3, pp. 202-208, [in Russian].
8. Kleshchev A. A. 2004. "Diffraction of point-source-generated sound by an elastic cylindrical shell", *Acoustical physics*, vol. 50, no. 1, pp. 74-76.
9. Li T., Ueda M. 1980. "Sound scattering of spherical wave incident on a cylinder", *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 87, no. 5, pp. 1871-1879.
10. Tolokonnikov, L. A. 2018. "Diffraction of a spherical sound wave by an elastic cylinder with an non-uniform coating", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 4, pp. 215–226, [in Russian].
11. Tolokonnikov, L. A. & Efimov D. Yu. 2022. "Diffraction of a spherical sound wave by an elastic cylinder with an non-uniform anisotropic coating", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 4, pp. 368–381, [in Russian].
12. Shenderov, E. L. 1972. "Wave problems of underwater acoustics", Sudostroenie, Leningrad, 352 p. [in Russian].
13. Brekhovskikh, L. M. 1973. "Waves in Layered Media", Nauka, Moscow, 344 p., [in Russian].
14. Nowacki, W. 1973, "Teoria sprzystosci", PWN, Warszawa.
15. Ivanov, E. A. 1968, "Diffraction of electromagnetic waves by two bodies", Nauka i tekhnika, Minsk, 584 p., [in Russian].
16. Kalitkin, N. N. 1978. "Numerical methods", *Fizmatgiz, Moscow*, 512 p., [in Russian].
17. Zavyialov, Yu. S., Kvasov, B. I. & Miroshnichenko, V. L. 1980. "Spline function methods", *Nauka, Moscow*, 352 p., [in Russian].
18. Zakharova, E. M., Minashina, I. K. 2014. "Review of Multidimensional Optimization Techniques", *Informatsionnye Protsessy*, vol. 14, no. 3, pp. 256-274, [in Russian].
19. Korobov, N. M. 2004. "Teoretiko-chislovye metody v priblizhennom analize [Number-theoretic methods in approximate analysis]", 2nd ed., *MTSNMO, Moscow, Russia*.
20. Dobrovolskii, N. N., Skobel'tsyn, S. A., Tolokonnikov, L. A., Larin, N. V. 2021. "About application of number-theoretic grids in problems of acoustics", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 3, pp. 368-382, [in Russian].

Получено: 04.02.2024

Принято в печать: 28.06.2024

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 25. Выпуск 2.

УДК 539.3, 539.8

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-2-296-317

Моделирование механодиффузионных процессов в полом цилиндре, находящемся под действием нестационарных объемных возмущений¹

Н. А. Зверев, А. В. Земсков, В. М. Яганов

Зверев Николай Андреевич — кандидат физико-математических наук, Московский авиационный институт (Национальный исследовательский институт) (г. Москва).

e-mail: nik.zvereff2010@yandex.ru

Земсков Андрей Владимирович — доктор физико-математических наук, Московский авиационный институт (Национальный исследовательский институт); Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: azemskov1975@mail.ru

Яганов Владимир Михайлович — кандидат физико-математических наук, Московский авиационный институт (Национальный исследовательский институт) (г. Москва).

e-mail: avtofur@yandex.ru

Аннотация

Рассматривается одномерная начально-краевая задача для полого ортотропного многокомпонентного цилиндра, находящегося под действием объемных механодиффузионных возмущений. Математическая модель включает в себя систему уравнений упругой диффузии в цилиндрической системе координат, в которой учтены релаксационные диффузионные эффекты, подразумевающие конечные скорости распространения диффузионных потоков.

Поставленная задача решается методом эквивалентных граничных условий, согласно которому рассматривается некоторая вспомогательная задача, решение которой может быть получено с помощью разложения в ряды по собственным функциям упругодиффузионного оператора. Далее строятся соотношения, связывающие правые части граничных условий обеих задач и представляющие собой систему интегральных уравнений Вольтерры 1-го рода. Рассмотрен расчетный пример для трехкомпонентного полого цилиндра.

Ключевые слова: механодиффузия, нестационарные задачи, преобразование Лапласа, функции Грина, метод эквивалентных граничных условий, полый цилиндр.

Библиография: 36 названий.

Для цитирования:

Н. А. Зверев, А. В. Земсков, В. М. Яганов. Моделирование механодиффузионных процессов в полом цилиндре, находящемся под действием нестационарных объемных возмущений // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 2, с. 296–317.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (грант № 23-21-00189, <https://rscf.ru/project/23-21-00189/>).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 25. No. 2.

UDC 539.3, 539.8

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-2-296-317

Modeling of elastic diffusion processes in a hollow cylinder under the action of unsteady volume perturbations

N. A. Zverev, A. V. Zemskov, V. M. Yaganov

Zverev Nikolay Andreevich — candidate of physical and mathematical sciences, Moscow Aviation Institute (National Research Institute) (Moscow).

e-mail: nik.zvereff2010@yandex.ru

Zemskov Andrey Vladimirovich — doctor of physical and mathematical sciences, Moscow Aviation Institute (National Research Institute); Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: azemskov1975@mail.ru

Yaganov Vladimir Mikhailovich — candidate of physical and mathematical sciences, Moscow Aviation Institute (National Research Institute) (Moscow).

e-mail: avtofur@yandex.ru

Abstract

A one-dimensional initial-boundary value problem for a hollow orthotropic multicomponent cylinder under the action of volumetric elastic diffusion perturbations is considered. The mathematical model includes a system of equations of elastic diffusion in a cylindrical coordinate system, which takes into account relaxation diffusion effects, implying finite propagation velocities of diffusion flows.

The problem is solved by the method of equivalent boundary conditions. To do this, we consider some auxiliary problem, the solution of which can be obtained by expanding into series in terms of eigenfunctions of the elastic diffusion operator. Next, we construct relations that connect the right-hand sides of the boundary conditions of both problems, which are a system of Volterra integral equations of the first kind. A calculation example for a three-component hollow cylinder is considered.

Keywords: elastic diffusion, unsteady problems, Laplace transform, Green's functions, method of equivalent boundary conditions, hollow cylinder.

Bibliography: 36 titles.

For citation:

N. A. Zverev, A. V. Zemskov, V. M. Yaganov, 2024. "Modeling of elastic diffusion processes in a hollow cylinder under the action of unsteady volume perturbations", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 2, pp. 296–317.

1. Введение

При проектировании конструкций важнейшей проблемой, связанной с прочностью материалов, является учет влияния диффузионного движения частиц в твердом теле на процесс деформирования. В частности, в работе рассматриваются вопросы, касающиеся моделирования связанных механодиффузионных процессов в телах цилиндрической формы. Данные тела являются основой различных трубопроводов (нефте- и газопроводы, системы отопления), используются в качестве валов и втулок в конструкциях, имеющих очень широкий спектр применения в технике и эксплуатирующихся в условиях взаимодействия с агрессивными средами.

Таким образом, учет взаимодействия полей очень важен при проектировании конструкций и их отдельных элементов, работающих в условиях многофакторных внешних воздействий.

Вопрос о взаимодействии механического и диффузионного полей имеет уже почти столетнюю историю, но и в настоящее время остается актуальным, так как круг исследуемых вопросов в этой области постоянно расширяется за счет того, что в современных моделях учитываются взаимосвязь все большего и большего количества полей различной физической природы. Например, к механическому и диффузионному полям могут быть добавлены, температурные, электромагнитные и химические поля.

В настоящее время практически все модели тепломассопереноса учитывают конечную скорость распространения тепловых и диффузионных возмущений, что обусловлено релаксацией диффузионных потоков [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21]. Это особенно важно при описании высокочастотных и импульсных процессов. В представленных выше работах используются модели: Каттанео, Лорда-Шульмана, Грина-Линсди, Грина-Нагди и т. д. Отдельно можно выделить статьи [1, 10, 17, 19], где для описания релаксационных эффектов используется аппарат дробного дифференцирования.

Несмотря на большое разнообразие имеющихся в настоящее время моделей механодиффузии и термомеханодиффузии, по-прежнему очень сложно обстоит вопрос, связанный с непосредственным решением соответствующих начально-краевых задач. Анализ публикаций показывает, что здесь наиболее полно изучены модели в прямоугольной декартовой системе координат.

Следует отметить работы [1, 2, 3, 4, 5, 10, 11, 12, 14, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28], в которых рассматриваются методы решения указанных задач в криволинейных (в основном в цилиндрической или сферической) системах координат. При их аналитическом решении основной проблемой является нахождение системы собственных функций, являющихся решением соответствующей задачи Штурма-Лиувилля. Этот вопрос достаточно основательно рассмотрен в работе [29], посвященной моделям теплопереноса в сплошных средах, в том числе в телах, имеющих цилиндрическую и сферическую формы. Применительно к связанным задачам механодиффузии и термомеханодиффузии данный вопрос на сегодняшний день в известных научных работах не обсуждался.

При решении нестационарных задач для сплошных сред используются, как правило, интегральные преобразования Лапласа по времени, Фурье и Ганкеля по координате и т. д., что продемонстрировано в работах [1, 4, 5, 7, 10, 11, 12, 14, 15, 18, 20]. При этом обращение интегрального преобразования Лапласа осуществляется численно с помощью метода Дурбина (и его модификаций) [4, 5, 11, 12, 14, 15, 17, 18], алгоритма Gaver–Stehfast [20], а также с помощью квадратурных формул, основанных на использовании сумм Римана и т. д. [1, 7, 10].

Не вдаваясь в обсуждение достоинств и недостатков данных подходов, отметим только, что такие алгоритмы подходят лишь для определенного класса функций. При этом изображения Лапласа, получающиеся при решении конкретных задач, являются настолько громоздкими, что практически проверить возможность применения того или иного метода, для нахождения их оригиналов, далеко не всегда представляется возможным.

Альтернативные подходы, основанные на использовании методов конечных элементов [6, 21] и конечных разностей [22], тоже не решают проблему, потому что, например, при использовании конечно-разностных схем существенным вопросом является анализ этих схем на устойчивость, что, в свою очередь, влияет на сходимость решения, полученного с помощью таких схем, к решению исходной задачи. Это достаточно сложная математическая проблема, связанная с установлением непрерывной зависимости конечно-разностных схем от входных данных, к которым относятся коэффициенты дифференциальных операторов, а также параметры начальных и граничных условий. Такие же проблемы могут возникнуть и при использовании метода конечных элементов. Таким образом, вопросы, связанные с разработкой аналитических методов решения нестационарных задач, и, в частности, задач механодиффу-

зии, также являются актуальными.

В работе рассмотрена модель, описывающая одномерные нестационарные механодиффузионные процессы в полом цилиндре, и предложен алгоритм решения, основанный на использовании преобразования Лапласа по времени, разложении в ряды по собственным функциям упругодиффузионного оператора и методе эквивалентных граничных условий. Данный подход позволяет выразить решение поставленной задачи через известное решение некоторой вспомогательной задачи данного класса, что существенно упрощает проблему обращения преобразования Лапласа, сведя ее к обращению рациональных функций с помощью вычетов и таблиц операционного исчисления.

2. Постановка задачи

Рассматривается полярно-симметричная задача механодиффузии для многокомпонентного ортотропного полого цилиндра, находящегося под действием нестационарных объемных возмущений. Под действием приложенных нагрузок в деформируемом теле возникает восходящий диффузионный поток (эффект Горского), который в свою очередь, вследствие вызываемых им объемных изменений, также влияет на напряженно-деформированное состояние среды.

Математическая постановка задачи, описывающая вышеуказанные физические процессы, включает в себя: линейризованное уравнение движения полого цилиндра, закон сохранения массы в локальной форме, а также N линейризованных уравнений массопереноса с учетом релаксации диффузионных потоков [30, 31, 32, 33]. Замыкают математическую постановку задачи граничные условия. Начальные условия принимаются нулевыми, поскольку изначально цилиндрическое тело находилось в состоянии покоя.

$$\ddot{u} = u'' + \frac{u'}{r} - \frac{u}{r^2} - \sum_{j=1}^N \alpha_j \eta'_j + F_1, \quad \eta_{N+1} = - \sum_{q=1}^N \eta_q, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_q + \tau_q \ddot{\eta}_q = -\Lambda_q \left(u''' + \frac{2u''}{r} - \frac{u'}{r^2} + \frac{u}{r^3} \right) + D_q \left(\eta''_q + \frac{\eta'_q}{r} \right) + F_{q+1}; \\ \left(u' + c_{12} \frac{u}{r} - \sum_{j=1}^N \alpha_j \eta_j \right) \Big|_{r=R_1} = 0, \quad \left(u' + c_{12} \frac{u}{r} - \sum_{j=1}^N \alpha_j \eta_j \right) \Big|_{r=1} = 0, \\ \eta_q|_{r=R_1} = \eta_q|_{r=1} = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Безразмерные величины в (1) и (2) связаны с размерными следующим образом:

$$\begin{aligned} u = \frac{u_r}{r_2}, \quad \tau = \frac{Ct}{r_2}, \quad C^2 = \frac{C_{1111}}{\rho}, \quad \tau_q = \frac{C\tau^{(q)}}{r_2}, \quad c_{12} = \frac{C_{1122}}{C_{1111}}, \\ R_1 = \frac{r_1}{r_2}, \quad r = \frac{r^*}{r_2}, \quad \alpha_q = \frac{\alpha_{11}^{(q)}}{c_{11}}, \quad D_q = \frac{D_{11}^{(q)}}{Cr_2}, \quad \Lambda_q = \frac{m^{(q)} \alpha_{11}^{(q)} D_{11}^{(q)} n_0^{(q)}}{\rho Cr_2 RT_0}. \end{aligned}$$

Здесь t – время; u_r – радиальная компонента вектора механических перемещений; r^* – радиальная координата; ρ – плотность сплошной среды; T_0 – температура сплошной среды; $D_{11}^{(q)}$ – коэффициент диффузии; $m^{(q)}$ – молярная масса q -го вещества в составе многокомпонентной сплошной среды; C_{ijkl} – компоненты тензора упругих постоянных; $\eta_q = n^{(q)} - n_0^{(q)}$ – приращение концентрации q -го вещества в составе многокомпонентной сплошной среды; $\alpha_{11}^{(q)}$ – коэффициент, характеризующий деформации, возникающие вследствие диффузии; $\tau^{(q)}$ – время релаксации диффузионных процессов; R – универсальная газовая постоянная; F_1 –

удельная плотность объёмных сил, F_{q+1} – объёмная плотность источников массопереноса; r_1 и r_2 – внутренний и внешний радиусы полого цилиндра.

3. Алгоритм решения задачи

Функции Грина. Задача (1), (2) решается методом эквивалентных граничных условий [30, 31, 32, 34], согласно которому вначале рассматривается вспомогательная задача, состоящая из исходной системы дифференциальных уравнений и новых граничных условий вида

$$\left(u' + \frac{u}{r} - \sum_{j=1}^N \alpha_j \eta_j \right) \Big|_{r=R_1} = f_{11}^*(\tau), \quad \left(u' + \frac{u}{r} - \sum_{j=1}^N \alpha_j \eta_j \right) \Big|_{r=1} = f_{12}^*(\tau), \quad (3)$$

$$\eta_q|_{r=1} = \eta_q|_{r=R_1} = 0,$$

где функции $f_{1j}^*(\tau)$, стоящие в правых частях граничных условий (3), подлежат определению.

Решение задачи (1), (3) ищется в виде

$$u(r, \tau) = \sum_{k=1}^{N+1} \int_{R_1}^1 \int_0^\tau G_{1k}(r, \xi, \tau - t) F_k(\xi, t) d\xi dt +$$

$$+ \int_0^\tau [G_{111}(r, \tau - t) f_{11}^*(t) + G_{112}(r, \tau - t) f_{12}^*(t)] dt, \quad (4)$$

$$\eta_q(r, \tau) = \sum_{k=1}^{N+1} \int_{R_1}^1 \int_0^\tau G_{q+1,k}(r, \xi, \tau - t) F_k(\xi, t) d\xi dt +$$

$$+ \int_0^\tau [G_{q+1,11}(r, \tau - t) f_{11}^*(t) + G_{q+1,12}(r, \tau - t) f_{12}^*(t)] dt.$$

Здесь $G_{kml}(r, \tau)$ – поверхностные, а $G_{km}(r, \xi, \tau)$ – объёмные функции Грина задачи (1), (3). Поверхностные функции Грина удовлетворяют следующим начально-краевым задачам:

$$\left(G_{1ml}'' + \frac{G_{1ml}'}{r} - \frac{G_{1ml}}{r^2} \right) - \sum_{j=1}^N \alpha_j G_{j+1,ml}' = \ddot{G}_{1ml},$$

$$-\Lambda_q \left(G_{1ml}''' + \frac{2G_{1ml}''}{r} - \frac{G_{1ml}'}{r^2} + \frac{G_{1ml}}{r^3} \right) + D_q \left(G_{q+1,ml}'' + \frac{G_{q+1,ml}'}{r} \right) =$$

$$= \dot{G}_{q+1,ml} + \tau_q \ddot{G}_{q+1,ml}. \quad (5)$$

$$\left(G_{1ml}' + \frac{1}{r} G_{1ml} - \sum_{j=1}^N \alpha_j G_{j+1,ml} \right) \Big|_{r=1} = \delta_{1m} \delta_{1l} \delta(\tau), \quad G_{q+1,ml}|_{r=1} = \delta_{q+1,m} \delta_{1l} \delta(\tau),$$

$$\left(G_{1ml}' + \frac{1}{r} G_{1ml} - \sum_{j=1}^N \alpha_j G_{j+1,ml} \right) \Big|_{r=R_1} = \delta_{1m} \delta_{2l} \delta(\tau), \quad G_{q+1,ml}|_{r=R_1} = \delta_{q+1,m} \delta_{2l} \delta(\tau). \quad (6)$$

Объёмные функции Грина являются решениями следующих задач:

$$\begin{aligned} \left(G''_{1m} + \frac{G'_{1m}}{r} - \frac{G_{1m}}{r^2} \right) - \sum_{j=1}^N \alpha_j G'_{j+1,m} + \delta_{1m} \delta(r - \xi) \delta(\tau) = \ddot{G}_{1m}, \\ -\Lambda_q \left(G'''_{1m} + \frac{2G''_{1m}}{r} - \frac{G'_{1m}}{r^2} + \frac{G_{1m}}{r^3} \right) + D_q \left(G''_{q+1,m} + \frac{G'_{q+1,m}}{r} \right) + \\ + \delta_{q+1,m} \delta(r - \xi) \delta(\tau) = \dot{G}_{q+1,m} + \tau_q \ddot{G}_{q+1,m}; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \left(G'_{1m} + \frac{1}{r} G_{1m} - \sum_{j=1}^N \alpha_j G_{j+1,m} \right) \Big|_{r=1} = 0, \quad G_{q+1,m}|_{r=1} = 0, \\ \left(G'_{1m} + \frac{1}{r} G_{1m} - \sum_{j=1}^N \alpha_j G_{j+1,m} \right) \Big|_{r=R_1} = 0, \quad G_{q+1,m}|_{r=R_1} = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Начальные условия в обеих задачах полагаются нулевыми.

Решение задачи (5), (6) найдено в работе [30]. Выражения для поверхностных функций Грина приведены в Приложении 1. Изложим здесь алгоритм решения задачи (7), (8). Вначале применяем к уравнениям (7) и граничным условиям (8) интегральное преобразование Лапласа по времени. Получаем (индекс L обозначает трансформанту Лапласа, $G_{km}^L = G_{km}^L(r, \xi, s)$, s – параметр преобразования Лапласа)

$$\begin{aligned} \left(G''_{1m} + \frac{G'_{1m}}{r} - \frac{G_{1m}}{r^2} \right) - \sum_{j=1}^N \alpha_j G'_{j+1,m} + \delta_{1m} \delta(r - \xi) = s^2 G_{1m}^L, \\ -\Lambda_q \left(G'''_{1m} + \frac{2G''_{1m}}{r} - \frac{G'_{1m}}{r^2} + \frac{G_{1m}}{r^3} \right) + D_q \left(G''_{q+1,m} + \frac{G'_{q+1,m}}{r} \right) + \\ + \delta_{q+1,m} \delta(r - \xi) = (s + \tau_q s^2) G_{q+1,m}^L; \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \left(G'_{1m} + \frac{1}{r} G_{1m} - \sum_{j=1}^N \alpha_j G_{j+1,m} \right) \Big|_{r=1} = 0, \quad G_{q+1,m}^L|_{r=1} = 0, \\ \left(G'_{1m} + \frac{1}{r} G_{1m} - \sum_{j=1}^N \alpha_j G_{j+1,m} \right) \Big|_{r=R_1} = 0, \quad G_{q+1,m}^L|_{r=R_1} = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Решение задачи (9), (10) ищется в виде рядов

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} G_{1m}^L(r, \xi, s) \\ G_{q+1,m}^L(r, \xi, s) \end{array} \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} G_{1mn}^L(\xi, s) \Psi_1(\lambda_n r) \\ G_{q+1,mn}^L(\xi, s) \Psi_0(\lambda_n r) \end{array} \right\}, \\ \left\{ \begin{array}{l} G_{1mn}^L(\xi, s) \\ G_{q+1,mn}^L(\xi, s) \end{array} \right\} = \frac{1}{\Psi(\lambda_n)} \int_{R_1}^1 r \left\{ \begin{array}{l} G_{1m}^L(r, \xi, s) \Psi_1(\lambda_n r) \\ G_{q+1,m}^L(r, \xi, s) \Psi_0(\lambda_n r) \end{array} \right\} dr, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\Psi_1(\lambda_n r) = Y_0(\lambda_n) J_1(\lambda_n r) - J_0(\lambda_n) Y_1(\lambda_n r),$$

$$\Psi_0(\lambda_n r) = Y_0(\lambda_n) J_0(\lambda_n r) - J_0(\lambda_n) Y_0(\lambda_n r),$$

$$\Psi(\lambda_n) = \frac{1}{2} [\Psi_1(\lambda_n)]^2 - \frac{R_1^2}{2} [\Psi_1(\lambda_n R_1)]^2,$$

где λ_n – числа, удовлетворяющие уравнению $\Psi_0(\lambda_n R_1) = 0$, $J_\nu(\lambda_n r)$ – функция Бесселя I рода порядка ν , $Y_\nu(\lambda_n r)$ – функция Бесселя II рода порядка ν .

Для нахождения коэффициентов рядов (11) первое уравнение в (9) домножаем на $\Psi_1(\lambda_n r)$, а второе – на $\Psi_0(\lambda_n r)$ и интегрируем в промежутке $[R_1, 1]$. При этом для преобразования дифференциальных операторов используем формулы, полученные в работе [30]:

$$\begin{aligned}
& \int_{R_1}^1 r \left[G'_{1m}{}^L(r, \xi, s) + \frac{G_{1m}^L(r, \xi, s)}{r} \right] \Psi_0(\lambda_n r) dr = \lambda_n \Psi(\lambda_n) G_{1mn}^L(\xi, s), \\
& \int_{R_1}^1 r G'_{q+1,m}{}^L(r, \xi, s) \Psi_1(\lambda_n r) dr = r \Psi_1(\lambda_n r) G_{q+1,m}^L(r, \xi, s) \Big|_{R_1}^1 - \lambda_n \Psi(\lambda_n) G_{q+1,mn}^L(\xi, s), \\
& \int_{R_1}^1 \left[G''_{1m}{}^L(r, \xi, s) + \frac{G'_{1m}{}^L(r, \xi, s)}{r} - \frac{G_{1m}^L(r, \xi, s)}{r^2} \right] \Psi_1(\lambda_n r) r dr = -\lambda_n^2 \Psi(\lambda_n) G_{1mn}^L(\xi, s) + \\
& \quad + r \left[G'_{1m}{}^L(r, \xi, s) + \frac{G_{1m}^L(r, \xi, s)}{r} \right] \Psi_1(\lambda_n r) \Big|_{R_1}^1, \\
& \int_{R_1}^1 \left[G''_{q+1,m}{}^L(r, \xi, s) + \frac{G'_{q+1,m}{}^L(r, \xi, s)}{r} \right] \Psi_0(\lambda_n r) r dr = -\lambda_n^2 \Psi(\lambda_n) G_{q+1,mn}^L(\xi, s) + \\
& \quad + \lambda_n r \Psi_1(\lambda_n r) G_{q+1,m}^L(r, \xi, s) \Big|_{R_1}^1, \\
& \int_{R_1}^1 \left[G'''_{1m}{}^L(r, \xi, s) + \frac{2G''_{1m}{}^L(r, \xi, s)}{r} - \frac{G'_{1m}{}^L(r, \xi, s)}{r^2} + \frac{G_{1m}^L(r, \xi, s)}{r^3} \right] \Psi_0(\lambda_n r) r dr = \\
& = \lambda_n r \left[G'_{1m}{}^L(r, \xi, s) + \frac{G_{1m}^L(r, \xi, s)}{r} \right] \Psi_1(\lambda_n r) \Big|_{R_1}^1 - \lambda_n^3 \Psi(\lambda_n) G_{1mn}^L(\xi, s).
\end{aligned}$$

В результате указанных преобразований краевая задача (9), (10) сводится к системе линейных алгебраических уравнений относительно $G_{km}^L(\lambda_n, \xi, s)$, которая имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
& k_{1n}(s) G_{1mn}^L(\xi, s) - \lambda_n \sum_{j=1}^N \alpha_j G_{j+1,mn}^L(\xi, s) = F_{1n}(\xi), \\
& -\Lambda_q \lambda_n^3 G_{1mn}^L(\xi, s) + k_{q+1,n}(s) G_{q+1,mn}^L(\xi, s) = F_{q+1,n}(\xi), \\
& F_{1n}(\xi) = \frac{\delta_{1m}}{\Psi(\lambda_n)} \xi \Psi_1(\lambda_n \xi), \quad F_{q+1,n}(\xi) = \frac{\delta_{q+1,m}}{\Psi(\lambda_n)} \xi \Psi_0(\lambda_n \xi), \\
& k_{1n}(s) = \lambda_n^2 + s^2, \quad k_{q+1,n}(s) = D_q \lambda_n^2 + \tau_q s^2 + s.
\end{aligned}$$

Решая эту систему, получаем

$$\begin{aligned}
G_{11n}^L(\xi, s) &= \frac{\xi \Psi_1(\lambda_n \xi) P_{11n}(s)}{\Psi(\lambda_n) P_n(s)}, \quad G_{1,q+1,n}^L(\xi, s) = \frac{\xi \Psi_0(\lambda_n \xi) P_{1,q+1,n}(s)}{\Psi(\lambda_n) P_n(s)}, \\
G_{q+1,1n}^L(\xi, s) &= \frac{\xi \Psi_1(\lambda_n \xi) P_{q+1,1n}(s)}{\Psi(\lambda_n) Q_{qn}(s)}, \\
G_{q+1,p+1,n}^L(\xi, s) &= \frac{\xi \Psi_0(\lambda_n \xi)}{\Psi(\lambda_n)} \left[\frac{\delta_{qp}}{k_{q+1,n}(s)} + \frac{P_{q+1,p+1,n}(s)}{Q_{qn}(s)} \right].
\end{aligned} \tag{12}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 P_n(s) &= k_{1n}(s) \Pi_n(s) - \lambda_n^4 \sum_{j=1}^N \alpha_j \Lambda_j \Pi_{jn}(s), \quad Q_{qn}(s) = P_n(s) k_{q+1,n}(s), \\
 P_{1,q+1,n}(s) &= \lambda_n \sum_{j=1}^N \alpha_j \Pi_{jn}(s), \quad P_{q+1,kn}(s) = \Lambda_q \lambda_n^3 P_{1kn}(s), \\
 P_{11n}(s) &= \Pi_n(s), \quad \Pi_{jn}(s) = \prod_{k=1, k \neq j}^N k_{k+1,n}(s), \quad \Pi_n(s) = \prod_{j=1}^N k_{j+1,n}(s).
 \end{aligned} \tag{13}$$

Так как функции $P_n(s)$, $P_{1kn}(s)$, $k_{1n}(s)$ и $Q_{qn}(s)$ являются многочленами от s , то решения (12) – рациональные функции. Поэтому переход в пространство оригиналов осуществляется по следующим формулам:

$$\begin{aligned}
 G_{11n}(\xi, \tau) &= \frac{\xi \Psi_1(\lambda_n \xi)}{\Psi(\lambda_n)} \sum_{k=1}^{2N+2} A_{11n}^{(k)}(s_{kn}) \exp(s_{kn} \tau), \\
 G_{1,q+1,n}(\xi, \tau) &= \frac{\xi \Psi_0(\lambda_n \xi)}{\Psi(\lambda_n)} \sum_{k=1}^{2N+2} A_{1,q+1,n}^{(k)}(s_{kn}) \exp(s_{kn} \tau), \\
 G_{q+1,1n}(\xi, \tau) &= \frac{\xi \Psi_1(\lambda_n \xi)}{\Psi(\lambda_n)} \sum_{k=1}^{2N+4} A_{q+1,1n}^{(k)}(s_{kn}) \exp(s_{kn} \tau), \\
 G_{q+1,p+1,n}(\xi, \tau) &= \frac{\xi \Psi_0(\lambda_n \xi)}{\Psi(\lambda_n)} \left[\sum_{l=1}^2 \frac{\delta_{qp} \exp(\chi_{qln} \tau)}{k_{q+1,n}(\chi_{qln})} + \sum_{k=1}^{2N+4} A_{q+1,p+1,n}^{(k)}(s_{kn}) \exp(s_{kn} \tau) \right].
 \end{aligned} \tag{14}$$

Здесь s_{kn} – нули полинома $P_n(s)$, а χ_{qln} – дополнительные нули полинома $k_{q+1,n}(s)$, определяемые по формулам

$$\chi_{q1n} = \frac{-1 - \sqrt{1 - 4\tau_q D_q \lambda_n^2}}{2\tau_q}, \quad \chi_{q2n} = \frac{-1 + \sqrt{1 - 4\tau_q D_q \lambda_n^2}}{2\tau_q}. \tag{15}$$

Таким образом, в соответствии с (11), объемные функции Грина имеют вид

$$\left\{ \begin{array}{l} G_{1m}(r, \xi, \tau) \\ G_{q+1,m}(r, \xi, \tau) \end{array} \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} G_{1mn}(\xi, \tau) \Psi_1(\lambda_n r) \\ G_{q+1,mn}(\xi, \tau) \Psi_0(\lambda_n r) \end{array} \right\},$$

где коэффициенты этих рядов находятся по формулам (14), с учетом равенств (13) и (15).

Метод эквивалентных граничных условий. Для нахождения функций $f_{1j}^*(\tau)$ подставляем решение (4) задачи (1), (3) в граничные условия (2). Получаем уравнения относительно искомых функций $f_{1k}^*(\tau)$:

$$\begin{aligned}
& \int_0^\tau \left[G'_{111}(1, \tau - t) + c_{12} G_{111}(1, \tau - t) - \sum_{j=1}^N \alpha_j G_{j+1,11}(1, \tau - t) \right] f_{11}^*(t) dt + \\
& + \int_0^\tau \left[G'_{112}(1, \tau - t) + c_{12} G_{112}(1, \tau - t) - \sum_{j=1}^N \alpha_j G_{j+1,12}(1, \tau - t) \right] f_{12}^*(t) dt = \varphi_1(\tau), \\
& \int_0^\tau \left[G'_{111}(R_1, \tau - t) + \frac{c_{12}}{R_1} G_{111}(R_1, \tau - t) - \sum_{j=1}^N \alpha_j G_{j+1,11}(R_1, \tau - t) \right] f_{11}^*(t) dt + \\
& + \int_0^\tau \left[G'_{112}(R_1, \tau - t) + \frac{c_{12}}{R_1} G_{112}(R_1, \tau - t) - \sum_{j=1}^N \alpha_j G_{j+1,12}(R_1, \tau - t) \right] f_{12}^*(t) dt = \varphi_2(\tau);
\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_1(\tau) &= - \sum_{k=1}^{N+1} \int_{R_1}^1 \int_0^\tau \varphi_{1k}(1, \xi, \tau - t) F_k(\xi, t) d\xi dt, \\
\varphi_2(\tau) &= - \sum_{k=1}^{N+1} \int_{R_1}^1 \int_0^\tau \varphi_{2k}(R_1, \xi, \tau - t) F_k(\xi, t) d\xi dt,
\end{aligned} \tag{17}$$

$$\varphi_{1k}(1, \xi, \tau - t) = G'_{1k}(1, \xi, \tau - t) + c_{12} G_{1k}(1, \xi, \tau - t) - \sum_{j=1}^N \alpha_j G_{j+1,k}(1, \xi, \tau - t),$$

$$\varphi_{2k}(R_1, \xi, \tau - t) = G'_{1k}(R_1, \xi, \tau - t) + \frac{c_{12}}{R_1} G_{1k}(R_1, \xi, \tau - t) - \sum_{j=1}^N \alpha_j G_{j+1,k}(R_1, \xi, \tau - t).$$

Соотношения (16), (17) представляют собой систему интегральных уравнений Вольтерры 1-го рода. С учетом граничных условий (6)

$$\begin{aligned}
& \int_0^\tau \left[G'_{111}(1, \tau - t) + G_{111}(1, \tau - t) - \sum_{j=1}^N \alpha_j G_{j+1,11}(1, \tau - t) \right] f_{11}^*(t) dt + \\
& + \int_0^\tau \left[G'_{112}(1, \tau - t) + G_{112}(1, \tau - t) - \sum_{j=1}^N \alpha_j G_{j+1,12}(1, \tau - t) \right] f_{12}^*(t) dt = \\
& = \int_0^\tau \delta(\tau - t) f_{11}^*(t) dt = f_{11}^*(\tau), \\
& \int_0^\tau \left[G'_{111}(R_1, \tau - t) + \frac{1}{R_1} G_{111}(R_1, \tau - t) - \sum_{j=1}^N \alpha_j G_{j+1,11}(R_1, \tau - t) \right] f_{11}^*(t) dt + \\
& + \int_0^\tau \left[G'_{112}(R_1, \tau - t) + \frac{1}{R_1} G_{112}(R_1, \tau - t) - \sum_{j=1}^N \alpha_j G_{j+1,12}(R_1, \tau - t) \right] f_{12}^*(t) dt = \\
& = \int_0^\tau \delta(\tau - t) f_{12}^*(t) dt = f_{12}^*(\tau),
\end{aligned}$$

а с учетом (8)

$$\begin{aligned}\varphi_1(\tau) &= (1 - c_{12}) \sum_{k=1}^{N+1} \int_{R_1}^1 \int_0^\tau G_{1k}(1, \xi, \tau - t) F_k(\xi, t) d\xi dt, \\ \varphi_2(\tau) &= \frac{1 - c_{12}}{R_1} \sum_{k=1}^{N+1} \int_{R_1}^1 \int_0^\tau G_{1k}(R_1, \xi, \tau - t) F_k(\xi, t) d\xi dt.\end{aligned}\quad (18)$$

Поэтому система (16) запишется так:

$$\begin{aligned}f_{11}^*(\tau) + (c_{12} - 1) \int_0^\tau G_{111}(1, \tau - t) f_{11}^*(t) dt + (c_{12} - 1) \int_0^\tau G_{112}(1, \tau - t) f_{12}^*(t) dt &= \varphi_1(\tau), \\ \frac{c_{12} - 1}{R_1} \int_0^\tau G_{111}(R_1, \tau - t) f_{11}^*(t) dt + f_{12}^*(\tau) + \frac{c_{12} - 1}{R_1} \int_0^\tau G_{112}(R_1, \tau - t) f_{12}^*(t) dt &= \varphi_2(\tau).\end{aligned}$$

В полученных равенствах, в слагаемых, содержащих интегралы, выполним интегрирование по частям. Учитывая тот факт, что любую дифференцируемую функцию $f(\tau)$ можно представить в виде (точка обозначает производную по времени)

$$f(\tau) - f(0) = \int_0^\tau \dot{f}(t) dt,$$

получаем

$$\begin{aligned}\int_0^\tau a_{11}(\tau - t) \dot{f}_{11}^*(t) dt + \int_0^\tau a_{12}(\tau - t) \dot{f}_{12}^*(t) dt &= \varphi_1(\tau) - \sum_{j=1}^2 a_{1j}(\tau) f_{1j}^*(0), \\ \int_0^\tau a_{21}(\tau - t) \dot{f}_{11}^*(t) dt + \int_0^\tau a_{22}(\tau - t) \dot{f}_{12}^*(t) dt &= \varphi_2(\tau) - \sum_{j=1}^2 a_{2j}(\tau) f_{1j}^*(0).\end{aligned}\quad (19)$$

Здесь

$$\begin{aligned}a_{11}(\tau - t) &= (c_{12} - 1) \tilde{G}_{111}(1, \tau - t) + 1, \quad a_{12}(\tau - t) = (c_{12} - 1) \tilde{G}_{112}(1, \tau - t), \\ a_{21}(\tau - t) &= \frac{c_{12} - 1}{R_1} \tilde{G}_{111}(R_1, \tau - t), \quad a_{22}(\tau - t) = \frac{c_{12} - 1}{R_1} \tilde{G}_{112}(R_1, \tau - t) + 1, \\ \tilde{G}_{11i}(r, \tau) &= \int_0^\tau G_{11i}(r, t) dt.\end{aligned}\quad (20)$$

Решение системы (19) будет зависеть от $f_{1i}^*(0)$. Эти функции в нуле, вообще говоря, не определены и могут принимать любые значения. Поэтому доопределим их, исходя из условия сопряжения начальных и граничных условий в угловых точках рассматриваемой области. С учетом нулевых начальных условий будем полагать:

$$f_{1i}^*(0) = 0.$$

Система интегральных уравнений (19) решается численно. Для аппроксимации интегралов используется формула средних прямоугольников [30, 34]

$$\int_0^{t_m} a_{ij}(t_m - t) \dot{f}_{1l}^*(t) dt = h A_{ij}^{(1/2)} y_l^{(m-1/2)} + h S_{ijl}^{(m-1/2)},$$

где

$$\begin{aligned} t_m &= mh, \quad t_{m-1/2} = \left(m - \frac{1}{2}\right)h, \\ S_{ijl}^{(m-1/2)} &= \sum_{k=1}^{m-1} A_{ij}^{(m-k+1/2)} y_l^{(k-1/2)} \quad (\forall m = \overline{0, N_\tau}), \\ y_l^{(m)} &= \frac{\partial f_{1l}^*(t_m)}{\partial \tau}, \quad y_l^{(m-1/2)} = \frac{\partial f_{1l}^*(t_m - t_{1/2})}{\partial \tau}, \\ A_{ij}^{(m)} &= a_{ij}(t_m), \quad A_{ij}^{(m-k+1/2)} = a_{ij}(t_m - t_{k-1/2}). \end{aligned}$$

Таким образом, система интегральных уравнений (19) сводится к рекуррентной последовательности систем линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \mathbf{y}_{m-1/2} &= \mathbf{b}_{m-1/2}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_{11}^{(1/2)} & A_{12}^{(1/2)} \\ A_{21}^{(1/2)} & A_{22}^{(1/2)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}_{m-1/2} = \begin{pmatrix} y_1^{(m-1/2)} \\ y_2^{(m-1/2)} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{b}_{m-1/2} &= \begin{pmatrix} b_1^{(m-1/2)} \\ b_2^{(m-1/2)} \end{pmatrix}, \quad b_i^{(m-1/2)} = \frac{1}{h} \left(\varphi_i(t_m) - h S_{i11}^{(m-1/2)} - h S_{i22}^{(m-1/2)} \right), \end{aligned}$$

решения которых находим по формулам Крамера:

$$y_1^{(m-1/2)} = \frac{b_1 A_{22}^{(1/2)} - b_2 A_{12}^{(1/2)}}{A_{11}^{(1/2)} A_{22}^{(1/2)} - A_{12}^{(1/2)} A_{21}^{(1/2)}}, \quad y_2^{(m-1/2)} = \frac{b_2 A_{11}^{(1/2)} - b_1 A_{21}^{(1/2)}}{A_{11}^{(1/2)} A_{22}^{(1/2)} - A_{12}^{(1/2)} A_{21}^{(1/2)}}.$$

В результате, решение исходной задачи (1), (2) в точках $\tau = t_i$ запишется так:

$$\begin{aligned} u(r, t_i) &= \sum_{k=1}^{N+1} \int_{R_1}^1 \int_0^{t_i} G_{1k}(r, \xi, t_i - t) F_k(\xi, t) d\xi dt + \\ &+ h \sum_{l=1}^2 \sum_{m=1}^i \tilde{G}_{11l}(r, t_{i-m+1/2}) y_l^{(m-1/2)}, \\ \eta_q(r, t_i) &= \sum_{k=1}^{N+1} \int_{R_1}^1 \int_0^{t_i} G_{q+1,k}(r, \xi, t_i - t) F_k(\xi, t) d\xi dt + \\ &+ h \sum_{l=1}^2 \sum_{m=1}^i \tilde{G}_{q+1,l}(r, t_{i-m+1/2}) y_l^{(m-1/2)}. \end{aligned} \tag{21}$$

4. Предельные переходы к несвязанным и статическим задачам

Полагая $\tau_q = 0$, получаем классическую модель механодиффузии с бесконечной скоростью распространения диффузионных потоков. При этом степень полинома $P(\lambda_n, s)$ изменяется с $2N + 2$ до $N + 2$, а для дополнительных нулей имеют место следующие предельные переходы:

$$\chi_{q1n} \rightarrow -D_q \lambda_n^2, \quad \chi_{q2n} \rightarrow -\infty \quad (\tau_q \rightarrow 0).$$

Тогда:

$$\exp(\chi_{q1n}\tau) \rightarrow \exp(-D_q \lambda_n^2 \tau), \quad \exp(\chi_{q2n}\tau) \rightarrow 0 \quad (\tau_q \rightarrow 0).$$

Полагая далее $\alpha_p = 0$, переходим к классическим моделям упругости и массопереноса для полого цилиндра в задаче (1), (2). Вычисляя соответствующие пределы в (13) и (14) при $\alpha_q \rightarrow 0$, получаем (учитывая, что $\Lambda_q \rightarrow 0$ при $\alpha_q \rightarrow 0$) следующие выражения для функций Грина в несвязанных задачах упругости и диффузии (множители Ω_{ln} приведены в Приложении):

$$G_{ln}^u(\tau) = \frac{\Omega_{ln} \sin \lambda_n \tau}{\Psi(\lambda_n) \lambda_n}, \quad G_{lqn}^\eta(\tau) = \frac{\lambda_n D_q \Omega_{ln}}{\Psi(\lambda_n)} \sum_{j=1}^2 \frac{\exp(\chi_{jqn}\tau)}{k'_{q+1,n}(\chi_{jqn})},$$

$$\tilde{G}_n^u(\xi, \tau) = \frac{\xi \Psi_1(\lambda_n \xi) \sin \lambda_n \tau}{\lambda_n \Psi(\lambda_n)}, \quad \tilde{G}_{qn}^\eta(\xi, \tau) = \frac{\xi \Psi_0(\lambda_n \xi)}{\Psi(\lambda_n)} \sum_{j=1}^2 \frac{\exp(\chi_{jqn}\tau)}{k'_{q+1,n}(\lambda_n, \chi_{jq})}.$$

Для перехода к статическим механодиффузионным режимам, полагаем в уравнениях (1) и граничных условиях (3)

$$f_{1l}^*(\tau) = \tilde{f}_{1l}^* H(\tau), \quad f_{1l}(\tau) = \tilde{f}_{1l} H(\tau), \quad f_{q+1,l}(\tau) = \tilde{f}_{q+1,l} H(\tau),$$

$$F_k(\xi, \tau) = \tilde{F}_k(\xi) H(\tau).$$

Здесь $H(\tau)$ – функция Хевисайда, $\tilde{f}_{1l}^*$, $\tilde{f}_{ml}$ – статические нагрузки.

Обозначим функции Грина статической задачи через G_{mk}^{st} . Тогда, используя предельный переход (символ «*» обозначает свертку по времени)

$$G_{mk}^{st}(r) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} [G_{mk}(r, \tau) * H(\tau)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[s G_{mk}^L(r, s) \frac{1}{s} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} G_{mk}^L(r, s),$$

связывающий функции Грина статической и динамической задач [34, 35], из формул (12) и (13) получаем статические функции Грина для полого цилиндра в виде

$$G_{11}^{st}(r, \xi) = \xi \Phi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Psi_1(\lambda_n \xi)}{\Psi(\lambda_n) \lambda_n^2} \Psi_1(\lambda_n r),$$

$$G_{1,q+1}^{st}(r, \xi) = \xi \alpha_q \Phi_q \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Psi_0(\lambda_n \xi)}{\Psi(\lambda_n) \lambda_n^3} \Psi_1(\lambda_n r),$$

$$G_{q+1,1}^{st}(r, \xi) = \xi \Lambda_q \Phi_q \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Psi_1(\lambda_n \xi)}{\Psi(\lambda_n) \lambda_n} \Psi_0(\lambda_n r),$$

$$G_{q+1,p+1}^{st}(r, \xi) = \frac{\xi (\delta_{qp} + \Lambda_q \alpha_p \Phi_p)}{D_q} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Psi_0(\lambda_n \xi)}{\Psi(\lambda_n) \lambda_n^2} \Psi_0(\lambda_n r),$$

где величины Φ_q и Φ определяются по формулам

$$\Phi = \frac{\prod_{j=1}^N D_j}{\prod_{j=1}^N D_j - \sum_{j=1}^N \alpha_j \Lambda_j \prod_{k=1, k \neq j}^N D_k}, \quad \Phi_q = \frac{\prod_{k=1, k \neq q}^N D_k}{\prod_{j=1}^N D_j - \sum_{j=1}^N \alpha_j \Lambda_j \prod_{k=1, k \neq j}^N D_k}.$$

Статический аналог уравнений (19) и формул (18), (20) в этом случае записывается следующим образом:

$$\tilde{a}_{11}\tilde{f}_{11}^* + \tilde{a}_{12}\tilde{f}_{12}^* = \tilde{\varphi}_1, \quad \tilde{a}_{21}\tilde{f}_{11}^* + \tilde{a}_{22}\tilde{f}_{12}^* = \tilde{\varphi}_2, \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{11} &= 1 + (c_{12} - 1) G_{111}^{st}(1), \quad \tilde{a}_{12} = (c_{12} - 1) G_{112}^{st}(1), \\ \tilde{a}_{21} &= \frac{c_{12} - 1}{R_1} G_{111}^{st}(R_1), \quad \tilde{a}_{22} = 1 + \frac{c_{12} - 1}{R_1} G_{112}^{st}(R_1), \end{aligned}$$

$$\tilde{\varphi}_1 = (1 - c_{12}) \sum_{k=1}^{N+1} \int_{R_1}^1 \tilde{G}_{1k}^{st}(1, \xi) F_k(\xi) d\xi, \quad \tilde{\varphi}_2 = \frac{1 - c_{12}}{R_1} \sum_{k=1}^{N+1} \int_{R_1}^1 \tilde{G}_{1k}^{st}(R_1, \xi) F_k(\xi) d\xi.$$

Решение (22) находим по формулам Крамера

$$\tilde{f}_{11}^* = \frac{\tilde{a}_{22}\tilde{\varphi}_1 - \tilde{a}_{12}\tilde{\varphi}_2}{\tilde{a}_{11}\tilde{a}_{22} - \tilde{a}_{12}\tilde{a}_{21}}, \quad \tilde{f}_{12}^* = \frac{\tilde{a}_{11}\tilde{\varphi}_2 - \tilde{a}_{21}\tilde{\varphi}_1}{\tilde{a}_{11}\tilde{a}_{22} - \tilde{a}_{12}\tilde{a}_{21}}.$$

Таким образом, статический аналог формул (21) запишется так:

$$\begin{aligned} u(r) &= \sum_{k=1}^{N+1} \int_{R_1}^1 \tilde{G}_{1k}(r, \xi) \tilde{F}_k(\xi) d\xi + \sum_{l=1}^2 \sum_{m=1}^i G_{11l}^{st}(r) \tilde{f}_{1l}^*, \\ \eta_q(r) &= \sum_{k=1}^{N+1} \int_{R_1}^1 \tilde{G}_{q+1,k}(r, \xi) \tilde{F}_k(\xi) d\xi + \sum_{l=1}^2 \sum_{m=1}^i G_{q+1,1l}^{st}(r) \tilde{f}_{1l}^*. \end{aligned} \quad (23)$$

5. Пример

В качестве примера рассматриваем трехкомпонентный сплав ($N = 2$, независимые компоненты: цинк 1,0% и медь 4,5%, диффундирующие в дюралюминии), физические характеристики которого следующие [36]:

$$\begin{aligned} C_{12} &= 6.93 \cdot 10^{10} \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}, \quad C_{66} = 2.56 \cdot 10^{10} \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}, \quad T_0 = 700\text{К}, \quad \rho = 2700 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \quad n_0^{(2)} = 0.045, \\ L &= 0.5 \cdot 10^{-2} \text{м}, \quad \alpha_1^{(1)} = 6.55 \cdot 10^7 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}}, \quad \alpha_1^{(2)} = 6.14 \cdot 10^7 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}}, \quad m^{(2)} = 0.064 \frac{\text{кг}}{\text{моль}}, \\ D_1^{(1)} &= 2.62 \cdot 10^{-12} \frac{\text{м}^2}{\text{с}}, \quad D_1^{(2)} = 2.89 \cdot 10^{-15} \frac{\text{м}^2}{\text{с}}, \quad n_0^{(1)} = 0.01, \quad m^{(1)} = 0.065 \frac{\text{кг}}{\text{моль}}. \end{aligned}$$

Положим для расчета

$$F_1(r, \tau) = \Psi_{01}(\lambda_1 r) H(\tau), \quad F_2(r, \tau) = H(\tau). \quad (24)$$

Результаты вычислений представлены на рисунках 1–9.

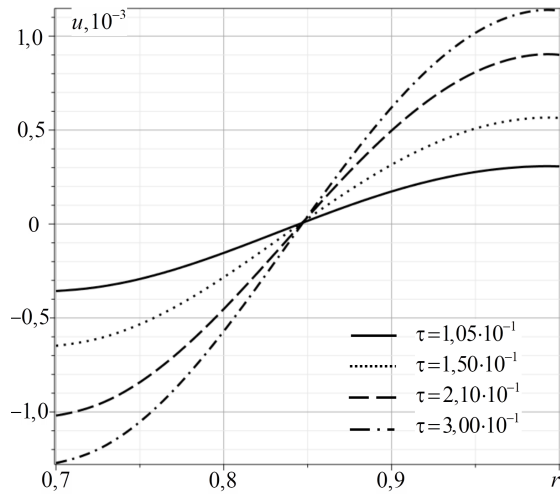


Рис. 1: Перемещения $u(r, \tau)$, соответствующие решению упругодиффузионной задачи.

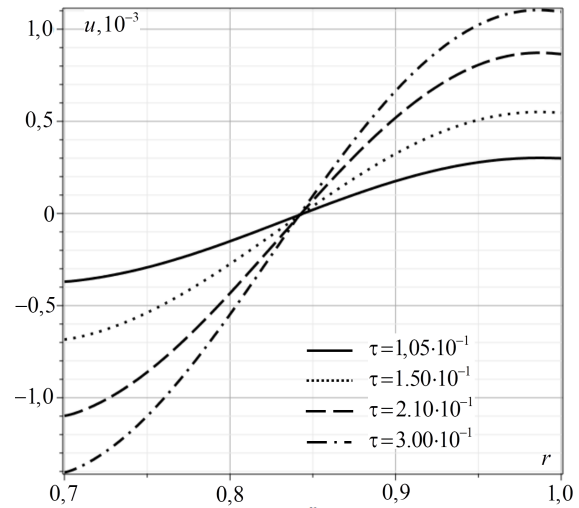


Рис. 2: Перемещения $u(r, \tau)$, соответствующие решению упругой задачи.

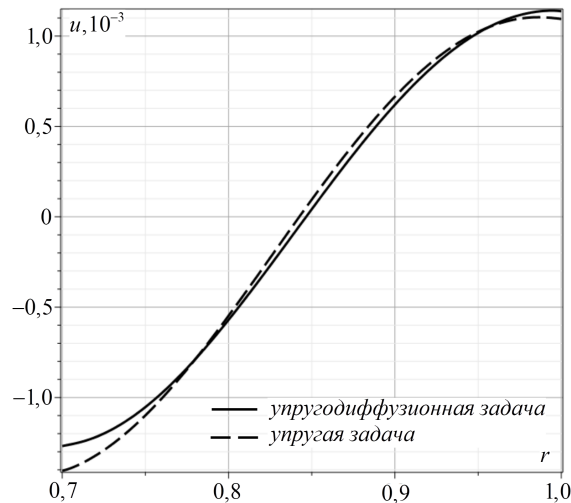


Рис. 3: Сравнение перемещений упругой и упругодиффузионной задач $u(r, \tau)$.

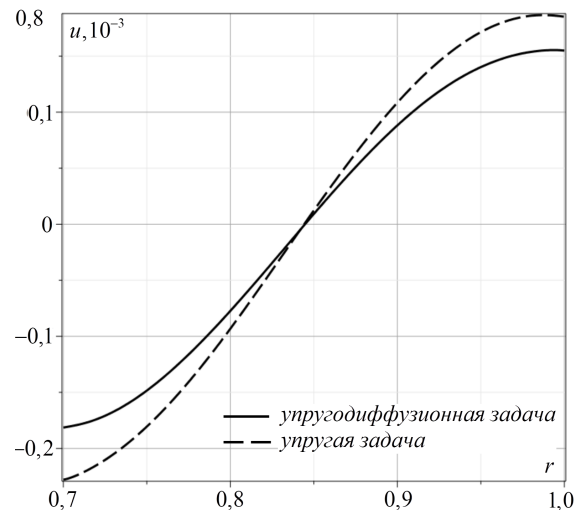


Рис. 4: Сравнение перемещений упругой и упругодиффузионной задач $u(r, \tau)$.

На рисунках 3 и 4 сравниваются поля механических перемещений для упругой задачи (пунктирная линия) и упругодиффузионной задачи. Видно, что диффузионные процессы при заданных нагрузках (24) с течением времени начинают влиять на механическое поле. Однако, как отмечалось ранее [34], это отличие проявляется преимущественно в виде сдвига упругих и упругодиффузионных нестационарных колебаний друг относительно друга. Амплитуды этих колебаний примерно одинаковы, что видно на рисунках 1 и 2. При этом релаксационные диффузионные эффекты не влияют на поле механических перемещений. И в том, и в другом случае, решение имеет вид, представленный на рисунках 3 и 4.

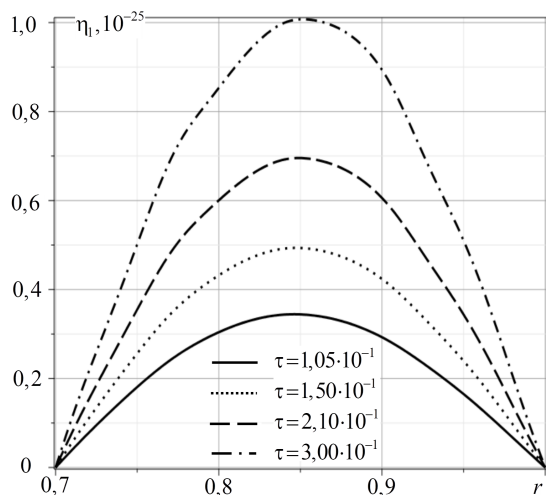


Рис. 5: Приращение концентрации цинка $\eta_1(r, \tau)$ с учетом релаксации (начальные моменты времени)

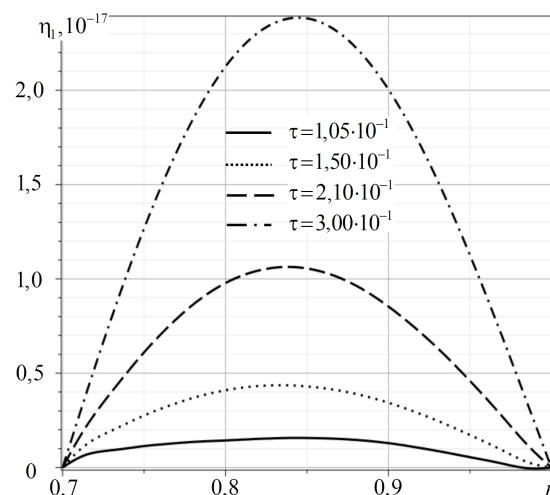


Рис. 6: Приращение концентрации цинка $\eta_1(r, \tau)$ без учета релаксации (начальные моменты времени).

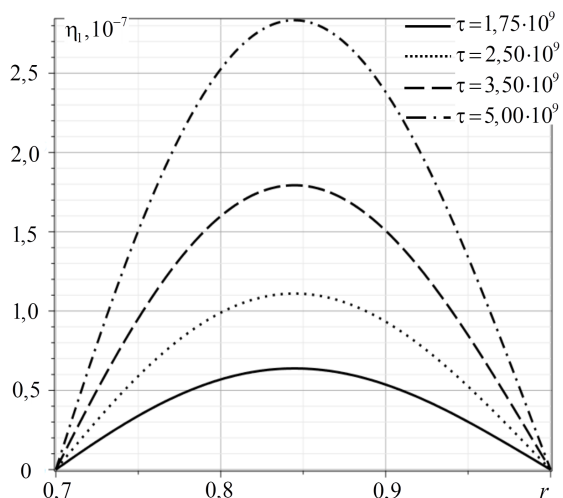


Рис. 7: Приращение концентрации цинка $\eta_1(r, \tau)$ с учетом релаксации (развитие процесса)

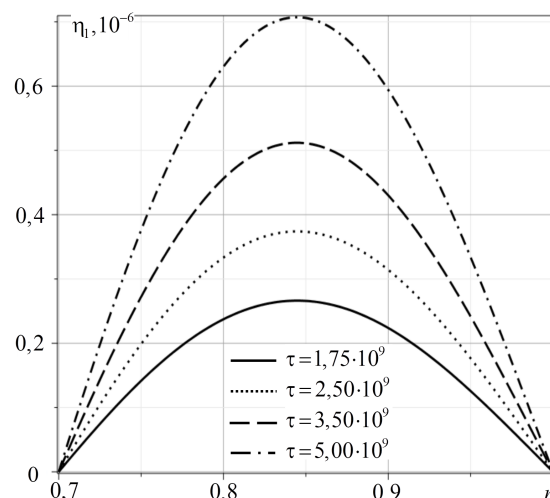
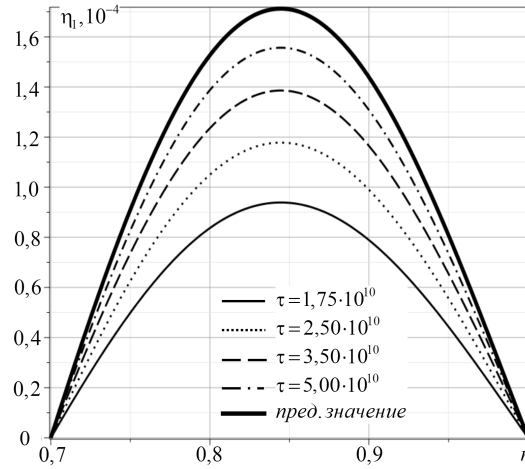


Рис. 8: Приращение концентрации цинка $\eta_1(r, \tau)$ без учета релаксации (развитие процесса).

На рисунках 5–9, на примере первой компоненты вещества (цинк), показаны различные стадии развития процесса диффузии с учетом релаксации и без учета релаксации диффузионных потоков. Видно, сколь существенно влияет релаксация на кинетику массопереноса в начальные моменты времени (рисунки 5, 6), ее постепенное уменьшение с течением времени (рисунки 7, 8) и полное затухание (рисунок 9). Для второй компоненты вещества (медь) имеют место аналогичные результаты. Таким образом, релаксационные эффекты влияют на кинетику массопереноса только в начальные моменты времени, соизмеримые с временами релаксации компонент в составе сплошной среды.


 Рис. 9: Приращение концентрации цинка $\eta_1(r, \tau)$ (предельное развитие процесса).

6. Заключение

Предложена модель и разработан алгоритм решения нестационарной задачи для ортотропного полого многокомпонентного цилиндра, находящегося под действием объемных механодиффузионных возмущений. На примере полого цилиндра, выполненного из трехкомпонентного материала и находящегося в поле действия массовых сил, смоделировано взаимодействие механического и диффузионных полей, а также исследовано влияние релаксационных процессов на кинетику массопереноса.

Приложение

Поверхностные функции Грина $G_{kml}(r, \tau)$, найденные в работе [30], имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 G_{q+1,ml}(r, \tau) &= \sum_{n=1}^{\infty} G_{q+1,mln}(\tau) \Psi_0(\lambda_n r), \quad G_{1ml}(r, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} G_{1mln}(\tau) \Psi_1(\lambda_n r), \\
 G_{1kln}(\tau) &= \frac{1}{\Psi(\lambda_n)} \sum_{m=1}^{2N+2} A_{1kln}^{(m)} \exp(s_{mn}\tau), \quad A_{1kln}^{(m)} = \frac{P_{1kln}(s_{mn})}{P'_n(s_{mn})}, \quad A_{q+1,kln}^{(m)} = \frac{P_{q+1,kln}(s_{mn})}{Q'_n(s_{mn})}, \\
 G_{q+1,1ln}(\tau) &= -\frac{1}{\Psi(\lambda_n)} \left[\sum_{m=1}^{2N+4} A_{q+1,1ln}^{(m)} \exp(s_{mn}\tau) + \lambda_n \Lambda_q \Omega_{ln} \sum_{j=1}^2 \frac{\exp(\chi_{jqn}\tau)}{k'_{q+1,n}(\chi_{jqn})} \right], \\
 G_{q+1,p+1,ln}(\tau) &= \\
 &= -\frac{1}{\Psi(\lambda_n)} \left[\sum_{m=1}^{2N+4} A_{q+1,p+1,ln}^{(m)} \exp(s_{mn}\tau) + \lambda_n (\Lambda_q \alpha_p - D_q \delta_{pq}) \Omega_{ln} \sum_{j=1}^2 \frac{\exp(\chi_{jqn}\tau)}{k'_{q+1,n}(\chi_{jqn})} \right],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{11ln}(s) &= \Omega_{ln} \left[\Pi_n(s) - \lambda_n^2 \sum_{j=1}^N \alpha_j \Lambda_j \Pi_{jn}(s) \right], \\
P_{1,q+1,ln}(\lambda_n, s) &= \lambda_n^2 \alpha_q \Omega_{ln} \left[D_q \Pi_{qn}(s) - \sum_{j=1}^N \alpha_j \Lambda_j \Pi_{jn}(s) \right], \\
P_{q+1,kl n}(s) &= -\Lambda_q \lambda_n^3 P_{1kl n}(s), \\
\Omega_{ln} &= \Psi_{01}(\lambda_n) \delta_{1l} - R_1 \Psi_{01}(\lambda_n R_1) \delta_{2l}.
\end{aligned}$$

Здесь s_{kn} – нули полинома $P_n(s)$, а χ_{qln} – дополнительные нули полинома $k_{q+1,n}(s)$, которые находятся по формулам (15).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Abbas A.I. Eigenvalue approach on fractional order theory of thermoelastic diffusion problem for an infinite elastic medium with a spherical cavity // *Applied Mathematical Modelling*. 2015. Vol. 39, No. 20. P. 6196–6206.
2. Abbas A. Ibrahim, Elmaboud Y. Abd. Analytical solutions of thermoelastic interactions in a hollow cylinder with one relaxation time // *Mathematics and Mechanics of Solids*. 2017. Vol. 22, No 2. P. 210–223.
3. Abo-Dahab S.M. Generalized Thermoelasticity with Diffusion and Voids under Rotation, Gravity and Electromagnetic Field in the Context of Four Theories // *Appl. Math. Inf. Sci.* 2019. Vol. 13, No 2. P. 317–337.
4. Aouadi M. A generalized thermoelastic diffusion problem for an infinitely long solid cylinder // *Intern. J. Mathem. and Mathem. Sci.* 2006. Vol. 2006. P. 1-15.
5. Aouadi M. A problem for an infinite elastic body with a spherical cavity in the theory of generalized thermoelastic diffusion // *International Journal of Solids and Structures*. 2007. Vol. 44. P. 5711-5722.
6. Bhattacharya D., Pal P., Kanoria M. Finite Element Method to Study Elasto-Thermodiffusive Response inside a Hollow Cylinder with Three-Phase-Lag Effect // *International Journal of Computer Sciences and Engineering*. 2019. Vol.7, Is. 1. P. 148–156.
7. Choudhary S., Deswal S. Mechanical loads on a generalized thermoelastic medium with diffusion // *Meccanica*. 2010. Vol. 45. P. 401–413.
8. Davydov S.A., Zemskov A.V. Thermoelastic Diffusion Phase-Lag Model for a Layer with Internal Heat and Mass Sources // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2022. Vol. 183, Part C. 122213.
9. Deswal S., Kalkal K. A two-dimensional generalized electro-magneto-thermoviscoelastic problem for a half-space with diffusion // *International Journal of Thermal Sciences*. 2011. Vol. 50, No 5. P. 749–759.
10. Deswal S., Kalkal K.K., Sheoran S.S. Axi-symmetric generalized thermoelastic diffusion problem with two-temperature and initial stress under fractional order heat conduction // *Physica B: Condensed Matter*. 2016. Vol. 496. P. 57–68.

11. Elhagary M.A. Generalized thermoelastic diffusion problem for an infinitely long hollow cylinder for short times // *Acta Mech.* 2011. Vol. 218. P. 205–215.
12. Elhagary M.A. Generalized thermoelastic diffusion problem for an infinite Medium with a Spherical Cavity // *Int. J. Thermophys.* 2012. Vol. 33. P. 172–183.
13. Kaur I., Lata P. Rayleigh wave propagation in transversely isotropic magneto-thermoelastic medium with three-phase-lag heat transfer and diffusion // *International Journal of Mechanical and Materials Engineering.* 2019. Vol. 14, No 12. <https://doi.org/10.1186/s40712-019-0108-3>
14. Kumar R., Devi S. Deformation of modified couple stress thermoelastic diffusion in a thick circular plate due to heat sources // *CMST.* 2019. Vol. 25, No 4. P. 167–176.
15. Kumar R., Devi S. Effects of Viscosity on a Thick Circular Plate in Thermoelastic Diffusion Medium // *Journal of Solid Mechanics.* 2019. Vol. 11, No 3. P. 581–592.
16. Lata P. Time harmonic interactions in fractional thermoelastic diffusive thick circular plate // *Coupled Systems Mechanics.* 2019. Vol. 8, No 1. P. 39–53.
17. Salama M.M., Kozae A.M., Elsafty M.A., Abelaziz S.S. A half-space problem in the theory of fractional order thermoelasticity with diffusion // *International Journal of Scientific and Engineering Research.* 2015. Vol. 6, Is. 1. P. 358–371
18. Sharma N., Kumar R., Ram P. Plane strain deformation in generalized thermoelastic diffusion // *Int. J. Thermophys.* 2008. Vol. 29. P. 1503–1522.
19. Sharma J. N., Thakur N., Singh S. Propagation characteristics of elasto-thermodiffusive surface waves in semiconductor material half-space // *Therm Stresses.* 2007. Vol. 30. P. 357–380.
20. Tripathi J. J., Kedar G. D., Deshmukh K. C. Two-dimensional generalized thermoelastic diffusion in a half-space under axisymmetric distributions // *Acta Mech.* 2015. Vol. 226. P. 3263–3274.
21. Xia R. H., Tian X. G., Shen Y. P. The influence of diffusion on generalized thermoelastic problems of infinite body with a cylindrical cavity // *International Journal of Engineering Science.* 2009. Vol. 47. P. 669–679.
22. Минов А. В. Исследование напряженно-деформированного состояния полого цилиндра, подверженного термодиффузионному воздействию углерода в осесимметричном тепловом поле, переменном по длине // *Известия вузов. Машиностроение.* 2008. № 10. С. 21–26.
23. Павлина В. С. О влиянии диффузии на температурные напряжения в окрестности цилиндрической полости // *Физико-химическая механика материалов.* 1965. №4. С. 390–394.
24. Hwang C. C., Huang I. B. Diffusion-induced stresses in hollow cylinders for transient state // *IOSR Journal of Engineering (IOSRJEN).* 2012. Vol. 2, Is. 8. P. 166–182.
25. Lee S., Wang W. L., Chen J. R. Diffusion-induced stresses in a hollow cylinder: Constant surface stresses // *Materials Chemistry and Physics.* 2000. Vol. 64, No 2. P. 123–130.
26. Soares J. S. Diffusion of a fluid through a spherical elastic solid undergoing large deformations // *International Journal of Engineering Science.* 2009. V. 47. P. 50–63.
27. Tartibi M., Guccione J. M., Steigmann D. J. Diffusion and swelling in a bio-elastic cylinder // *Mechanics Research Communications.* 2019. Vol. 97. P. 123–128.

28. Yang F. Effect of diffusion-induced bending on diffusion-induced stress near the end faces of an elastic hollow cylinder // *Mechanics Research Communications*. 2013. V. 51. P. 72–77.
29. Карташов Э. М., Кудинов В. А. Аналитические методы теории теплопроводности и ее приложений. Изд. 4, перераб. и сущ. доп. М.: URSS. 2018. 1080 с.
30. Зверев Н. А., Земсков А. В. Моделирование нестационарных механо-dиффузионных процессов в полой цилиндре с учетом релаксации диффузионных потоков // *Математическое моделирование*. 2022. Т. 35, № 1. С. 25–37.
31. Зверев Н. А., Земсков А. В., Тарлаковский Д. В. Нестационарная механо-dиффузия сплошного ортотропного цилиндра, находящегося под действием равномерного давления, с учетом релаксации диффузионных потоков // *Механика композиционных материалов и конструкций*. 2021. Т. 27, № 4. С. 570–586.
32. Zemskov A. V., Tarlakovskii D. V. Method of the equivalent boundary conditions in the unsteady problem for elastic diffusion layer // *Materials Physics and Mechanics*. 2015. No 1, Vol 23. P. 36–41.
33. Зверев Н. А., Земсков А. В., Тарлаковский Д. В. Моделирование одномерных механо-dиффузионных процессов в ортотропном сплошном цилиндре, находящемся под действием нестационарных объемных возмущений, *Вестник Самарского Государственного технического университета. Серия: Физико-математические Науки*. 2022. Т. 26, № 1. с. 62–78.
34. Земсков А. В., Тарлаковский Д. В. Моделирование механо-dиффузионных процессов в многокомпонентных телах с плоскими границами. М.: ФИЗМАТЛИТ. 2021. 288 с.
35. Диткин В. А., Прудников А. П. Справочник по операционному исчислению. М.: Высшая школа. 1965. 568 с.
36. Бабичев А. П., Бабушкина Н. А., Братковский А. М., и др.; под общей редакцией Григорьева И. С., Мейлихова И. З. // *Физические величины: Справочник*. М.: Энергоатомиздат. 1991. 1232 с.

REFERENCES

1. Abbas, A. I. 2015. "Eigenvalue approach on fractional order theory of thermoelastic diffusion problem for an infinite elastic medium with a spherical cavity", *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 39, No. 20, pp. 6196–6206.
2. Abbas, A. Ibrahim & Elmaaboud, Y. Abd. 2017. "Analytical solutions of thermoelastic interactions in a hollow cylinder with one relaxation time", *Mathematics and Mechanics of Solids*, Vol. 2, No. 2, pp. 210–223.
3. Abo-Dahab, S. M. 2019. "Generalized Thermoelasticity with Diffusion and Voids under Rotation, Gravity and Electromagnetic Field in the Context of Four Theories", *Appl. Math. Inf. Sci.*, Vol. 13, No. 2, pp. 317–337.
4. Aouadi, M. 2006. "A generalized thermoelastic diffusion problem for an infinitely long solid cylinder", *Intern. J. Mathem. and Mathem. Sci.*, Vol. 2006, pp. 1–15.
5. Aouadi, M. 2007. "A problem for an infinite elastic body with a spherical cavity in the theory of generalized thermoelastic diffusion", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 44, pp. 5711–5722.

6. Bhattacharya, D. & Pal, P. & Kanoria, M. 2019. "Finite Element Method to Study Elasto-Thermodiffusive Response inside a Hollow Cylinder with Three-Phase-Lag Effect", *International Journal of Computer Sciences and Engineering.*, Vol. 7, Is. 1, pp. 148-156.
7. Choudhary, S. 2010. "Mechanical loads on a generalized thermoelastic medium with diffusion", *Meccanica.*, Vol. 45, pp. 401-413.
8. Davydov, S. A. & Zemskov, A. V. 2022. "Thermoelastic Diffusion Phase-Lag Model for a Layer with Internal Heat and Mass Sources", *International Journal of Heat and Mass Transfer.*, Vol. 183, part. C, 122213
9. Deswal, S. & Kalkal, K. 2011. "A two-dimensional generalized electro-magneto-thermoviscoelastic problem for a half-space with diffusion", *International Journal of Thermal Sciences.*, Vol. 50, No. 5, pp. 749-759.
10. Deswal, S. & Kalkal, K.K. & Sheoran, S.S. 2016. "Axi-symmetric generalized thermoelastic diffusion problem with two-temperature and initial stress under fractional order heat conduction", *Physica B: Condensed Matter.*, Vol. 496, pp. 57-68.
11. Elhagary, M. A. 2011. "Generalized thermoelastic diffusion problem for an infinitely long hollow cylinder for short times", *Acta Mech.*, Vol. 218, pp. 205-215.
12. Elhagary, M. A. 2012. "Generalized thermoelastic diffusion problem for an infinite Medium with a Spherical Cavity", *Int. J. Thermophys.*, Vol. 33, pp. 172-183.
13. Kaur, I. & Lata, P. 2019. "Rayleigh wave propagation in transversely isotropic magneto-thermoelastic medium with three-phase-lag heat transfer and diffusion", *International Journal of Mechanical and Materials Engineering.*, Vol. 14, No. 12. <https://doi.org/10.1186/s40712-019-0108-3>
14. Kumar, R. & Devi, S. 2019. "Deformation of modified couple stress thermoelastic diffusion in a thick circular plate due to heat sources", *CMST.*, Vol. 25, No. 4, pp. 167-176.
15. Kumar, R. & Devi, S. 2019. "Effects of Viscosity on a Thick Circular Plate in Thermoelastic Diffusion Medium", *Journal of Solid Mechanics.*, Vol. 11, No. 3, pp. 581-592.
16. Lata, P. 2019. "Time harmonic interactions in fractional thermoelastic diffusive thick circular plate", *Coupled Systems Mechanics.*, Vol. 8, No. 1, pp. 39-53.
17. Salama, M. M. & Kozae, A. M. & Elsafty, M. A. & Abelaziz, S. S. 2015. "A half-space problem in the theory of fractional order thermoelasticity with diffusion", *International Journal of Scientific and Engineering Research.*, Vol. 6, Is. 1, pp. 358-371.
18. Sharma, N. & Kumar, R. & Ram, P. 2008. "Plane strain deformation in generalized thermoelastic diffusion", *Int. J. Thermophys.*, Vol. 29, pp. 1503-1522.
19. Sharma, J.N. & Thakur, N. & Singh, S. 2007. "Propagation characteristics of elasto-thermodiffusive surface waves in semiconductor material half-space", *Therm Stresses.*, Vol. 30, pp. 357-380.
20. Tripathi, J. J. & Kedar, G. D. & Deshmukh, K. C. 2015. "wo-dimensional generalized thermoelastic diffusion in a half-space under axisymmetric distributions", *Acta Mech.*, Vol. 226, pp. 3263-3274.

21. Xia, R.H. & Tian, X.G. & Shen, Y.P. 2009. "The influence of diffusion on generalized thermoelastic problems of infinite body with a cylindrical cavity", *International Journal of Engineering Science.*, Vol. 47, pp. 669-679.
22. Minov, A. V. 2008. "Issledovanie napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya pologo tsilindra, podverzhennogo termodiffuzionnomu vozdeystviyu ugleroda v osesimmetrichnom teplovom pole, peremennom po dline [Investigation of the stress-strain state of a hollow cylinder subject to thermal diffusion action of carbon in an axisymmetric thermal field, variable along its length].", *Izvestiya vuzov. Mashinostroenie* [BMSTU Journal of mechanical engineering]., No. 10, pp. 21-26. [In Russian]
23. Pavlina, V.S. 1965. "O vliyani diffuzii na temperaturnye napryazheniya v okrestnosti cilindricheskoj polosti [On the effect of diffusion on thermal stresses in the vicinity of a cylindrical cavity]", *Fiziko-himicheskaya mekhanika materialov.*, No. 4, pp. 390-394. [In Russian]
24. Hwang, C.C. & Huang, I.B. 2012. "Diffusion-induced stresses in hollow cylinders for transient state", *IOSR Journal of Engineering (IOSRJEN).*, Vol. 2, Is. 8, pp. 166-182.
25. Lee, S. & Wang, W.L. & Chen, J.R. 2000. "Diffusion-induced stresses in a hollow cylinder: Constant surface stresses", *Materials Chemistry and Physics.*, Vol. 64, No. 2, pp. 123-130.
26. Soares, J.S. 2009. "Diffusion of a fluid through a spherical elastic solid undergoing large deformations", *International Journal of Engineering Science.*, Vol. 47, pp. 50-63.
27. Tartibi, M. & Guccione, J.M. & Steigmann, D.J. 2019. "Diffusion and swelling in a bio-elastic cylinder", *Mechanics Research Communications.*, Vol. 97, pp. 123-128.
28. Yang, F. 2013. "Effect of diffusion-induced bending on diffusion-induced stress near the end faces of an elastic hollow cylinder", *Mechanics Research Communications.*, Vol. 51, pp. 72-77.
29. Kartashov, E.M. & Kudinov, V.A. 2018. "Analiticheskie metody teorii teploprovodnosti i ee prilozhenij [Analytical methods of the theory of heat conduction and its applications].", *Moscow, URSS.*, 1080 p. [In Russian]
30. Zverev, N.A. & Zemskov, A.V. 2022. "Modeling Unsteady Elastic Diffusion Processes in a Hollow Cylinder Taking into Account the Relaxation of Diffusion Fluxes", *Mathematical Modeling.*, Vol. 35, No. 1, pp. 25-37.
31. Zverev, N. A. & Zemskov, A. V. & Tarlakovsky, D. V. 2021. "Nestacionarnaya mekhanodiffuziya sploshnogo ortotropnogo cilindra, nahodyashchegosya pod deystviem ravnomernogo davleniya, s uchetom relaksacii diffuzionnyh potokov [Unsteady elastic diffusion of an orthotropic cylinder under uniform pressure considering relaxation of diffusion fluxes]", *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktzii.*, Vol. 27, No. 4, pp. 570-586. [In Russian]
32. Zemskov, A.V. & Tarlakovskii, D.V. 2015. "Method of the equivalent boundary conditions in the unsteady problem for elastic diffusion layer", *Materials Physics and Mechanics.*, Vol. 23, No. 1, pp. 36-41.
33. Zverev, N. A. & Zemskov, A. V. & Tarlakovsky, D. V. 2022. "Modelling of one-dimensional elastic diffusion processes in an orthotropic solid cylinder under unsteady volumetric perturbations", *Bulletin of the Samara State Technical University. Series: Physical and Mathematical Sciences.*, Vol. 26, No. 1, pp. 62-78.

34. Zemskov, A. V. & Tarlakovskii, D. V. 2021. "Modelirovanie mekhanodiffuzionnyh processov v mnogokomponentnyh telah s ploskimi granicami [Modeling of mechanodiffusion processes in multicomponent bodies with flat boundaries]", *FIZMATLIT.*, 288 p. [In Russian]
35. Ditkin, V. A. & Prudnikov, A. P. 1961. "Spravochnik po operatsionnomu ischisleniyu [Handbook on Operational Calculus]", *Moscow, Vysshaya shkola.*, 524 p. [In Russian]
36. Babichev, A. P., Babushkina, N. A., Bratkovsky, A. M. and others; under the general editorship of Grigoriev, I. S., Meilikhov, I. Z. 1991. "Fizicheskie velichiny: Spravochnik [Physical quantities: Handbook].", *Moscow, Energoatomizdat.*, 1232 p. [In Russian]

Получено: 31.08.2023

Принято в печать: 28.06.2024

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 25. Выпуск 2.

УДК 539.3

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-2-318-333

Акустические волны в гипотупругих телах. I. Изотропные материалы¹

М. Ю. Соколова, Д. В. Христич

Соколова Марина Юрьевна — доктор физико-математических наук, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: m.u.sokolova@gmail.com

Христич Дмитрий Викторович — доктор физико-математических наук, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: dmitrykhristich@rambler.ru

Аннотация

Рассматриваются две модели гипотупругих изотропных материалов, основанные на использовании неголономной меры деформаций, обобщенная яуманновская производная от которой совпадает с тензором деформации скорости. Сформулированы условия, при выполнении которых в таких моделях существует упругий потенциал деформаций. Упругий потенциал и определяющие соотношения выписаны в терминах упругих собственных подпространств изотропного материала. Модели различаются числом упругих констант. Показано, что четырехконстантная модель удовлетворяет требованиям частного постулата изотропии А.А. Ильюшина, а пятиконстантная — не удовлетворяет. Получено уравнение распространения акустических волн в таких материалах.

Исследовано влияние использования частного постулата изотропии в качестве гипотезы на результаты решения динамических задач. Для двух моделей определены фазовые скорости распространения акустических волн при различных видах начальных деформаций. При предварительных чисто объемных деформациях расчеты по пятиконстантной и четырехконстантной моделям дают одинаковый результат. При деформациях, расположенных в девиаторном подпространстве, тензор напряжений имеет составляющую, расположенную в первом упругом собственном подпространстве, а его проекция во второе подпространство при использовании пятиконстантной модели несоосна девиатору деформаций. При этом начально изотропный материал приобретает анизотропию в отношении акустических свойств. Модель материала, удовлетворяющая частному постулату изотропии, в рассматриваемом случае также описывает анизотропию скоростей распространения продольных волн.

Ключевые слова: акустические волны, конечные деформации, фазовые скорости распространения волн, изотропные материалы, гипотупругие материалы, частный постулат изотропии.

Библиография: 21 название.

Для цитирования:

М. Ю. Соколова, Д. В. Христич. Акустические волны в гипотупругих телах. I. Изотропные материалы // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 2, с. 318–333.

¹Работа выполнена при поддержке госзадания Минобрнауки РФ (шифр FEWG-2023-0002).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 25. No. 2.

UDC 539.3

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-2-318-333

Acoustic waves in hypoelastic solids. I. Isotropic materials

M. Yu. Sokolova, D. V. Khristich

Sokolova Marina Sokolova — doctor of physical and mathematical sciences, Tula State University (Tula).

e-mail: m.u.sokolova@gmail.com

Khristich Dmitriy Viktorovich — doctor of physical and mathematical sciences, Tula State University (Tula).

e-mail: dmitrykhristich@rambler.ru

Abstract

Two models of hypoelastic isotropic materials based on the use of a nonholonomic strain measure, the generalized Yaumann derivative of which coincides with the strain rate tensor, are considered. The conditions under which elastic strain potential exists in such models are formulated. The elastic potential and the constitutive relations are written in terms of elastic eigen subspaces of an isotropic material. The models differ in the number of elastic constants. It is shown that the four-constant model satisfies the requirements of A.A.Ilyushin particular postulate of isotropy, and the five-constant model does not satisfy them. The equation of acoustic wave propagation in such materials is obtained.

The influence of the use of the particular isotropy postulate as a hypothesis on the results of dynamic problems solution is investigated. The phase velocities of acoustic wave propagation under various types of initial strains are determined for two models. At preliminary purely volumetric strains, calculations using five-constant and four-constant models give the same result. For strains located in the deviatoric subspace, the stress tensor has a component located in the first elastic eigen subspace, and its projection into the second subspace when using the five-constant model is misaligned to the strain deviator. At the same time, the initially isotropic material acquires anisotropy with respect to acoustic properties. The material model satisfying the particular postulate of isotropy in the case under consideration also describes the anisotropy of longitudinal waves propagation velocities.

Keywords: acoustic waves, finite strains, phase velocities of wave propagation, isotropic materials, hypoelastic materials, particular postulate of isotropy.

Bibliography: 21 titles.

For citation:

M. Yu. Sokolova, D. V. Khristich, 2024. "Acoustic waves in hypoelastic solids. I. Isotropic materials", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 2, pp. 318–333.

Введение

Распространение акустических волн в телах из упругих изотропных материалов является одной из важнейших динамических задач нелинейной теории упругости, которая находит широкое применение как в технике, например, для проведения неразрушающего контроля изделий [1, 2], так и в медицине при проведении ультразвуковых исследований [3]. Следует отметить огромное число публикаций по этой теме. Полный обзор этих публикаций не является целью работы.

Динамические уравнения распространения акустических волн в телах с предварительными конечными деформациями (напряжениями) рассмотрены в классических работах [4, 5, 6], а также в многочисленных публикациях более позднего периода, например, [7, 8, 9, 10, 11]. Авторы этих работ считают среду гиперупругой, т.е. принимают гипотезу о существовании упругого потенциала. Чаще всего используется упругий потенциал полиномиального вида, построенный по тензору деформаций Коши-Грина, что для изотропного материала является моделью Мурнагана [6]. Для таких моделей эксперименты по определению скоростей распространения акустических волн являются хорошо проверенным способом определения констант модели [3, 10, 12]. В силу свойств тензора деформаций Коши-Грина часто бывает затруднительно трактовать физический смысл решения рассматриваемой динамической задачи.

Одним из возможных подходов к построению моделей нелинейно упругих материалов является установление связи между скоростями изменения напряжений и деформаций, т.е. использование модели так называемого гипопругого материала [13]. В данной статье модель гипопругого изотропного материала строится с использованием неголономной меры деформаций, введенной в работах А.А. Маркина [14, 15]. Соотношения модели записываются через инварианты проекций тензора деформаций в собственные упругие подпространства изотропного материала, понятие о которых использовалось в работах [15, 16, 17]. Это позволяет провести анализ нелинейных эффектов, описываемых моделью.

Будут рассмотрены такие конечные деформации материала, в которых главные оси деформаций совпадают с одними и теми же материальными волокнами. Известно, что в этом случае неголономная мера деформаций совпадает с мерой логарифмических деформаций Генки [14, 15]. В статье показано, что при таких деформациях для гипопругого материала в некоторых случаях может быть определен потенциал деформаций. Рассмотрены модели изотропного гипопругого материала двух типов: пятиконстантная, не удовлетворяющая частному постулату изотропии материала А.А. Ильюшина, и четырехконстантная, удовлетворяющая требованиям этого постулата. Одним из следствий гипотезы, называемой частным постулатом изотропии, является соосность девиаторов тензоров напряжений и деформаций, которая нарушается в модели Мурнагана и подобных ей. В данной статье будет проведен анализ вопроса о влиянии выбора модели гипопругого материала на решение динамической задачи об определении фазовых скоростей распространения акустических волн в телах с предварительными конечными деформациями разных видов.

1. Кинематика конечных деформаций

Введем в рассмотрение отсчетную конфигурацию с декартовой системой координат $Ox^1x^2x^3$ и ортонормированным векторным базисом $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$ (точкой обозначено скалярное произведение). Положение каждой материальной точки в этой конфигурации определяется радиус-вектором $\mathbf{x}_0 = x_0^i \mathbf{e}_i$. Полагаем, что в отсчетной конфигурации перемещения, деформации и напряжения в материале отсутствуют. Переход к текущей конфигурации определяется полем перемещений $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}_0, t)$. Тензор-аффино деформаций Φ связан с полем перемещений выражением

$$\Phi = \mathbf{E} + \nabla^0 \mathbf{u}, \quad (1.1)$$

где $\mathbf{E}$ — единичный тензор, $\nabla^0 = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_0}$ — набла-оператор отсчетной конфигурации.

Представление тензора-аффинора деформаций в виде произведения симметричного и ортогонального тензора называют его полярным разложением:

$$\Phi = \mathbf{U} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{V}, \quad (1.2)$$

где $\mathbf{U} = \mathbf{U}^T, \mathbf{V} = \mathbf{V}^T$ — левая и правая меры искажений, $\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$ — ортогональный тензор, сопровождающий деформацию.

В качестве меры конечных деформаций будем использовать неголономную меру деформаций $\mathbf{K}$, введенную в работах А.А. Маркина [14, 15]. Эта мера определяется из дифференциального уравнения, связывающего обобщенную яуманновскую производную тензора $\mathbf{K}$ с тензором деформации скорости $\mathbf{W}$ [15]:

$$\mathbf{K}^\Delta \equiv \dot{\mathbf{K}} + \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{K} - \mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{W}, \quad (1.3)$$

где $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{R}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{R}}$ — тензор спина, $\mathbf{W} = \frac{1}{2} \mathbf{R}^{-1} \cdot (\mathbf{U}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{U}} + \dot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{U}^{-1}) \cdot \mathbf{R}$ — тензор деформации скорости, точкой обозначено дифференцирование по времени t .

Выбор этой меры обусловлен ее свойствами. Во-первых, первый инвариант этой меры связан только с изменением объема материальной частицы, а ее девиатор — с чистым формоизменением. Во-вторых, мера $\mathbf{K}$ энергетически сопряжена с обобщенным тензором напряжений $\boldsymbol{\Sigma} = J\mathbf{S}$, где $J = \det \boldsymbol{\Phi}$ характеризует относительное изменение объема, $\mathbf{S}$ — тензор истинных напряжений Коши, так что дифференциал удельной (отнесенной к начальному объему) потенциальной энергии деформаций W представляется в виде

$$dW = \boldsymbol{\Sigma} \cdot d^\Delta \mathbf{K}. \quad (1.4)$$

Обобщенная яуманновская производная тензора $\mathbf{K}$ определяется относительно вращающегося со скоростью $\boldsymbol{\Omega}$ ортонормированного базиса $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$, положение которого относительно неподвижного базиса отсчетной конфигурации $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ определяется с помощью ортогонального тензора, входящего в полярное разложение аффинора деформаций:

$$\mathbf{n}_i(t) = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{R}(t). \quad (1.5)$$

Как и любая неголономная мера деформаций, мера деформаций $\mathbf{K}$ имеет недостаток, а именно не выражается через перемещения частиц среды в текущей конфигурации. Исключения составляют так называемые изотропные процессы деформирования, в которых главные оси деформаций совпадают с одними и теми же материальными волокнами. В этом случае отсутствуют повороты среды как жесткого целого, т.е. $\mathbf{R} \equiv \mathbf{E}$, и равна нулю скорость вращения материальных волокон, т.е. тензор вихря $\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \mathbf{R}^{-1} \cdot (\mathbf{U}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{U}} - \dot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{U}^{-1}) \cdot \mathbf{R} + \boldsymbol{\Omega} \equiv \mathbf{0}$. В таких процессах неголономная мера деформаций $\mathbf{K}$ совпадает с логарифмическим тензором деформаций Генки $\mathbf{K} \equiv \mathbf{H} = \ln \mathbf{U}$, однозначно определяемым текущей конфигурацией [14, 15].

2. Динамические уравнения распространения акустических волн

Рассмотрим три состояния среды: естественное состояние, в котором деформации и напряжения отсутствуют, начальное состояние с однородным полем конечных деформаций и конечное состояние, переход к которому от начального состояния связан с возмущением поля перемещений. Будем считать, что естественное состояние совпадает с отсчетной конфигурацией. Переход к начальному состоянию связан с полем перемещений $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_i(\mathbf{x}_0, t_i)$ и характеризуется однородной деформацией $\boldsymbol{\Phi}_i = \mathbf{E} + \nabla^0 \mathbf{u}_i$ и тензором напряжений $\mathbf{S}_i = \mathbf{S}(t_i)$. Переход от естественного состояния к начальному считаем квазистатическим, поэтому выполняются условия равновесия:

$$\nabla^i \cdot \mathbf{S}_i \equiv \mathbf{0}, \quad \ddot{\mathbf{u}}_i \equiv \mathbf{0}, \quad (2.1)$$

где $\nabla^i = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i}$ — набла-оператор начального состояния.

В начальном состоянии на поле перемещений $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_i(\mathbf{x}_i, t_i)$ накладываются малые возмущения $\delta \mathbf{u}(\mathbf{x}_i, t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}_i, t_i) \delta t$. Будем считать, что градиенты возмущений также малы, а перемещения в конечном (возмущенном) состоянии определяются выражением

$$\mathbf{u}_f(\mathbf{x}, t_f) = \mathbf{u}_i(\mathbf{x}_0, t_i) + \delta \mathbf{u}(\mathbf{x}_i, t). \quad (2.2)$$

В конечном состоянии выражение для аффинора деформаций имеет вид

$$\Phi_f = \mathbf{E} + \nabla^0 \mathbf{u}_f = \mathbf{E} + \nabla^0 \mathbf{u}_i + \nabla^0 \delta \mathbf{u}.$$

Учитывая связь между операторами Гамильтона в естественном и начальном состояниях $\nabla^i(\cdot) = \Phi_i^{-1} \cdot \nabla^0(\cdot)$ и выражение (1.1), получим представление для аффинора деформаций в конечном состоянии:

$$\Phi_f = \Phi_i \cdot (\mathbf{E} + \nabla^i \delta \mathbf{u}). \quad (2.3)$$

В силу предположения о малости градиентов возмущений перемещений в дальнейших преобразованиях слагаемыми, содержащими $\nabla^i \delta \mathbf{u}$ во второй и более высоких степенях, будем пренебрегать.

Запишем уравнения движения среды в конечном (возмущенном) состоянии:

$$\nabla^f \cdot \mathbf{S}_f = \rho_f \ddot{\mathbf{u}}_f$$

или, учитывая связь между тензорами напряжений $\mathbf{S}$ и Σ , в виде:

$$\nabla^f \cdot J_f^{-1} \Sigma_f = \rho_f \ddot{\mathbf{u}}_f. \quad (2.4)$$

Разложим тензор напряжений Σ_f в окрестности начального состояния по степеням тензора деформаций $\mathbf{K}$:

$$\Sigma_f = \Sigma_i + \left. \frac{\partial \Sigma}{\partial \mathbf{K}} \right|_{\mathbf{K}=\mathbf{K}_i} \cdot (\mathbf{K}_f - \mathbf{K}_i) + O(\|\nabla^i \delta \mathbf{u}\|), \quad (2.5)$$

где $\left. \frac{\partial \Sigma}{\partial \mathbf{K}} \right|_{\mathbf{K}=\mathbf{K}_i} = \mathbf{C}(\mathbf{K}_i)$ — тензор четвертого ранга, имеющий смысл обобщенного тензора жесткости материала.

Пренебрегая членами высших порядков малости, запишем (2.5) в виде

$$\Sigma_f = \Sigma_i + \delta \Sigma_i, \quad \delta \Sigma_i = \mathbf{C}(\mathbf{K}_i) \cdot \delta \mathbf{K}_i. \quad (2.6)$$

В соответствии с определением неголономной меры деформаций (1.3) и представлением тензора деформации скорости $\mathbf{W}$ через поле скоростей $\mathbf{v}(\mathbf{x}_i, t_i)$ [6, 15] выражение для вариации тензора $\mathbf{K}_i$ имеет вид:

$$\delta \mathbf{K}_i = \mathbf{W} \delta t = \frac{1}{2} (\nabla^i \mathbf{v} + \mathbf{v} \nabla^i) \delta t = \frac{1}{2} (\nabla^i \delta \mathbf{u} + \delta \mathbf{u} \nabla^i). \quad (2.7)$$

С учетом представлений (2.6) и (2.7) уравнения движения (2.4) преобразуются к виду:

$$\begin{aligned} \nabla^i \cdot \delta \Sigma_i - \Sigma_i \cdot \nabla^i (\nabla^i \cdot \delta \mathbf{u}) &= \rho_0 \delta \ddot{\mathbf{u}}_f, \\ \nabla^i \delta \mathbf{K}_i \cdot \cdot \mathbf{C}(\mathbf{K}_i) - \Sigma_i \cdot \nabla^i (\nabla^i \cdot \delta \mathbf{u}) &= \rho_0 \delta \ddot{\mathbf{u}}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Уравнения (2.8) являются динамическими уравнениями распространения малых возмущений перемещений, линеаризованными в предположении, что $\|\nabla^i \delta \mathbf{u}\| \rightarrow 0$. Применение этих уравнений в конкретной среде требует конкретизации среды, т.е. установления связи между напряжениями и деформациями в ней.

3. Определяющие соотношения для гипотупругой среды

Материал называют гипотупругим, если определяющие соотношения в нем связывают скорости изменения напряжений со скоростями изменения деформаций [13, 14, 15]. Представим нелинейную связь между объективными производными тензоров Σ и $\mathbf{K}$ в виде:

$$\Sigma^\Delta = \mathbf{N} \cdot \cdot \mathbf{K}^\Delta + \mathbf{K} \cdot \cdot \mathbf{L} \cdot \cdot \mathbf{K}^\Delta, \quad (3.1)$$

где $\mathbf{N}$ и $\mathbf{L}$ — тензоры четвертого и шестого рангов [15], компоненты которых в декартовом базисе обладают свойствами симметрии

$$\begin{aligned} N_{ijkl} &= N_{jikl} = N_{ijlk} = N_{klij}, \\ L_{ijklmn} &= L_{jiklmn} = L_{ijlkmn} = L_{ijklnm} = L_{klijmn} = L_{mnijkl} = L_{ijmnlk}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Полагая компоненты (3.2) постоянными во вращающемся (полярном) базисе (1.5), приходим к требованию:

$$\mathbf{N}^\Delta \equiv 0, \quad \mathbf{L}^\Delta \equiv 0. \quad (3.3)$$

При выполнении условий (3.3) соотношения (3.1) могут быть проинтегрированы:

$$\Sigma = \mathbf{N} \cdot \cdot \mathbf{K} + \frac{1}{2} \mathbf{K} \cdot \cdot \mathbf{L} \cdot \cdot \mathbf{K}. \quad (3.4)$$

Соотношения (3.4) представляют собой определяющие соотношения для гипотупругого материала, записанные в терминах неголономной меры деформаций $\mathbf{K}$. Эти соотношения можно рассматривать и как следствие предположения о существовании упругого потенциала $W(\mathbf{K})$, который можно представить в полиномиальной форме:

$$W = \frac{1}{2} \mathbf{N} \cdot \cdot \cdot \mathbf{K} \mathbf{K} + \frac{1}{6} \mathbf{L} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \mathbf{K} \mathbf{K} \mathbf{K}, \quad (3.5)$$

тогда в соответствии с (1.4) обобщенный тензор напряжений определяется выражением:

$$\Sigma = \frac{\partial W}{\partial \Delta \mathbf{K}}. \quad (3.6)$$

При бесконечно малых деформациях, когда $\mathbf{K} \rightarrow \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla^0 \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla^0) \rightarrow \mathbf{0}$, определяющие соотношения (3.4) совпадают с соотношениями модели Мурнагана [6, 19]

$$\mathbf{S} = \mathbf{N} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \cdot \mathbf{L} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (3.7)$$

поэтому тензор $\mathbf{N}$ можно рассматривать как тензор упругости материала второго порядка, а тензор $\mathbf{L}$ — как тензор упругости третьего порядка, а их компоненты являются упругими постоянными материала второго и третьего порядков соответственно.

В работах [15, 16, 17] используются понятия собственных упругих состояний материала, которые представляют собой собственные подпространства тензора $\mathbf{N}$. Тензор упругости $\mathbf{N}$ можно представить разложением по собственным базисным тензорам в виде

$$\mathbf{N} = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=m} N_\alpha \mathbf{N}^{(\alpha)}, \quad (3.8)$$

где m — количество различных собственных значений тензора $\mathbf{N}$, совпадающее с количеством независимых констант упругости материала. Тогда обобщенный закон Гука [6, 15] можно записать в терминах собственных упругих состояний в виде

$$\mathbf{S} = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=m} N_\alpha \boldsymbol{\varepsilon}^{(\alpha)},$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}^{(\alpha)} = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N}^{(\alpha)}$ — проекция тензора $\boldsymbol{\varepsilon}$ в соответствующее собственное подпространство с базисным тензором $\mathbf{N}^{(\alpha)}$.

Базисные тензоры собственных упругих подпространств определены в работах [15, 16, 17]. Эти тензоры нормируются соотношением $\mathbf{N}^{(\alpha)} \cdot \mathbf{N}^{(\beta)} = \delta^{\alpha\beta} \mathbf{N}^{(\alpha)}$.

Собственные базисные тензоры для тензора шестого ранга $\mathbf{L}$ определяются как такие, что тензор $\mathbf{L}$ может быть представлен разложением

$$\mathbf{L} = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} b_{\alpha} \mathbf{B}^{(\alpha)}, \quad (3.9)$$

где n — количество различных собственных значений тензора $\mathbf{L}$, совпадающее с числом независимых констант упругости третьего порядка.

Если представить тензоры напряжений и деформаций разложениями по собственным упругим подпространствам $\boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=m} \boldsymbol{\varepsilon}^{(\alpha)}$ и $\mathbf{S} = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=m} \mathbf{S}^{(\alpha)}$, то из соотношений (3.7) следует связь между проекциями напряжений $\mathbf{S}^{(\alpha)}$ и деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}^{(\alpha)}$ в собственные подпространства в виде

$$\mathbf{S}^{(\alpha)} = N_{\alpha} \boldsymbol{\varepsilon}^{(\alpha)} + \frac{1}{2} \sum_{\gamma=1}^{\gamma=m} \sum_{\beta=1}^{\beta=n} b_{\beta} \boldsymbol{\varepsilon}^{(\gamma)} \cdot \mathbf{B}^{(\beta)} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{(\alpha)}, \quad (3.10)$$

которая определяет нелинейную (полиномиальную) связь между напряжениями и малыми деформациями. Пренебрегая в (3.10) членами второго порядка малости, приходим к обобщенному закону Гука.

В случае конечных деформаций естественным обобщением соотношений (3.10) на основании (3.4) являются соотношения, связывающие проекции тензоров $\mathbf{K}$ и $\boldsymbol{\Sigma}$ в собственные упругие подпространства материала:

$$\boldsymbol{\Sigma}^{(\alpha)} = N_{\alpha} \mathbf{K}^{(\alpha)} + \frac{1}{2} \sum_{\gamma=1}^{\gamma=m} \sum_{\beta=1}^{\beta=n} b_{\beta} \mathbf{K}^{(\gamma)} \cdot \mathbf{B}^{(\beta)} \cdot \mathbf{K}^{(\alpha)}, \quad (3.11)$$

где $\mathbf{K}^{(\alpha)} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{N}^{(\alpha)}$ и $\boldsymbol{\Sigma}^{(\alpha)} = \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{N}^{(\alpha)}$.

Соотношения (3.4), связывающие обобщенный тензор напряжений $\boldsymbol{\Sigma}$ с неголономной мерой деформаций $\mathbf{K}$, могут быть записаны через обобщенный тензор жесткости $\mathbf{C}(\mathbf{K}) = \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}}{\partial \mathbf{K}} = \frac{\partial^2 W}{\partial \Delta \mathbf{K}^2}$ в виде

$$\boldsymbol{\Sigma} = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=m} \mathbf{C}(\mathbf{K}) \cdot \mathbf{K}^{(\alpha)}, \quad (3.12)$$

причем выражение для тензора жесткости на основании (3.11) имеет вид:

$$\mathbf{C}(\mathbf{K}) = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=m} N_{\alpha} \mathbf{N}^{(\alpha)} + \sum_{\gamma=1}^{\gamma=m} \sum_{\beta=1}^{\beta=n} b_{\beta} \mathbf{K}^{(\gamma)} \cdot \mathbf{B}^{(\beta)}, \quad (3.13)$$

Выражение для потенциала деформаций (3.5) также может быть записано через проекции тензора деформаций в собственные упругие подпространства:

$$W(\mathbf{K}) = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=m} \left(\frac{1}{2} N_{\alpha} \mathbf{K}^{(\alpha)} \cdot \mathbf{K}^{(\alpha)} + \frac{1}{6} \sum_{\gamma=1}^{\gamma=m} \sum_{\beta=1}^{\beta=n} b_{\beta} \mathbf{B}^{(\beta)} \cdot \mathbf{K}^{(\gamma)} \mathbf{K}^{(\beta)} \mathbf{K}^{(\alpha)} \right). \quad (3.14)$$

Модель гипотропного материала, представляемая соотношениями (3.12)–(3.14), пригодна для использования как для изотропных, так и для анизотропных материалов с различным типом симметрии свойств. Конкретизация соотношений (3.12)–(3.14) связана с определением собственных базисных тензоров упругости $\mathbf{N}^{(\alpha)}$ и $\mathbf{B}^{(\alpha)}$ для материалов различных типов.

4. Конечные деформации изотропного материала

Изотропный материал характеризуется двумя константами упругости второго порядка и тремя константами упругости третьего порядка [6, 19, 20]. Тензор $\mathbf{N}$ имеет два различных собственных значения $N_1 = 3K$, $N_2 = 2G$ (K и G — модуль объемной упругости и модуль сдвига материала) и два собственных подпространства: одномерное, соответствующее чисто объемным деформациям, и пятимерное девиаторное, соответствующее чистому формоизменению.

Упругие собственные подпространства изотропного материала имеют базисные тензоры

$$\mathbf{N}^{(1)} = \mathbf{I}^0 \mathbf{I}^0, \quad \mathbf{N}^{(2)} = \mathbf{I}^1 \mathbf{I}^1 + \mathbf{I}^2 \mathbf{I}^2 + \mathbf{I}^3 \mathbf{I}^3 + \mathbf{I}^4 \mathbf{I}^4 + \mathbf{I}^5 \mathbf{I}^5, \quad (4.1)$$

где $\mathbf{I}^i$ — тензоры канонического базиса [15], диадные разложения которых имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{I}^0 &= \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3), \quad \mathbf{I}^1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2), \quad \mathbf{I}^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2) \\ \mathbf{I}^3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1), \quad \mathbf{I}^4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2), \quad \mathbf{I}^5 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Число различных собственных значений тензора $\mathbf{L}$ для изотропного материала равно трем: b_1, b_2, b_3 . Они связаны с константами упругости третьего порядка [6] ν_1, ν_2, ν_3 соотношениями

$$b_1 = 3\sqrt{3}(\nu_1 + 2\nu_2 - 16\nu_3), \quad b_2 = -12\sqrt{3}\nu_2, \quad b_3 = 4\nu_3.$$

Собственные базисные тензоры $\mathbf{B}^{(1)}, \mathbf{B}^{(2)}, \mathbf{B}^{(3)}$ для изотропного материала приведены в работах [19, 20].

Ограничимся рассмотрением изотропных процессов конечного деформирования, в которых главные оси деформаций совпадают с одними и теми же материальными волокнами, в связи с чем в дальнейших соотношениях в качестве меры деформаций используем тензор Генки $\mathbf{H}$. Вычислим проекции тензора деформаций $\mathbf{H}$ в собственные подпространства тензора упругости, характеризующие собственные упругие состояния материала:

$$\begin{aligned} 1D: \quad \mathbf{H}^{(1)} &= \mathbf{H} \cdot \mathbf{N}^{(1)} = h_0 \mathbf{I}^0, \\ 5D: \quad \mathbf{H}^{(2)} &= \mathbf{H} \cdot \mathbf{N}^{(2)} = h_1 \mathbf{I}^1 + h_2 \mathbf{I}^2 + h_3 \mathbf{I}^3 + h_4 \mathbf{I}^4 + h_5 \mathbf{I}^5, \end{aligned} \quad (4.3)$$

где обозначено $h_i = \mathbf{H} \cdot \mathbf{I}^i$.

Отметим, что квадрат тензора $\mathbf{H}^{(1)}$ также принадлежит первому собственному подпространству, а квадрат тензора $\mathbf{H}^{(2)}$ имеет составляющие, принадлежащие подпространствам $1D$ и $5D$, которые обозначим соответственно $\mathbf{H}_1^{(2)}$ и $\mathbf{Q}_2^{(2)}$. Подставляя (4.3) в соотношения (3.11), (3.14), запишем представление для потенциала деформаций изотропного материала в терминах собственных упругих состояний:

$$W = \frac{1}{6}N_1 J_1^2(\mathbf{H}^{(1)}) + \frac{1}{2}N_2 J_2(\mathbf{H}^{(2)}) + \frac{1}{6} \left(\frac{b_1}{3\sqrt{3}} J_1^3(\mathbf{H}^{(1)}) + \frac{b_2}{\sqrt{3}} J_1(\mathbf{H}^{(1)}) J_2(\mathbf{H}^{(2)}) + 6b_3 J_3(\mathbf{H}^{(2)}) \right), \quad (4.4)$$

где $J_1(\mathbf{H}^{(1)}) = \mathbf{H}^{(1)} \cdot \mathbf{E}$, $J_2(\mathbf{H}^{(2)}) = \mathbf{H}^{(2)} \cdot \mathbf{H}^{(2)}$, $J_3(\mathbf{H}^{(2)}) = \det \mathbf{H}^{(2)}$ — инварианты тензоров $\mathbf{H}^{(1)}$ и $\mathbf{H}^{(2)}$.

Выражения для напряжений в случае изотропного материала принимают вид:

$$\begin{aligned}\Sigma^{(1)} &= \sqrt{3}\sigma_0\mathbf{I}^0, \\ \Sigma^{(2)} &= \tau_e\mathbf{H}^{(2)} + \tau_q\mathbf{Q}_2^{(2)},\end{aligned}\quad (4.5)$$

где $\sigma_0 = KJ_1(\mathbf{H}^{(1)}) + \frac{b_1}{6\sqrt{3}}J_1^2(\mathbf{H}^{(1)}) + \frac{b_2}{6\sqrt{3}}J_2(\mathbf{H}^{(2)})$, $\tau_e = 2G + \frac{b_2}{3\sqrt{3}}J_1(\mathbf{H}^{(1)})$, $\tau_q = b_3$ — материальные функции, обозначения которых совпадают с принятыми в работе [19].

Обобщенный тензор жесткости (3.13) в случае изотропного материала принимает вид

$$\mathbf{C} = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=2} N_{\alpha}\mathbf{N}^{(\alpha)} + \sum_{\gamma=1}^{\gamma=2} \sum_{\beta=1}^{\beta=3} b_{\beta}\mathbf{H}^{(\gamma)} \cdot \cdot \mathbf{B}^{(\beta)}, \quad (4.6)$$

Для анализа нелинейных эффектов, описываемых моделью изотропного материала (4.4)–(4.6), рассмотрим деформированные состояния, расположенные в собственных подпространствах тензора упругости. Пусть деформации определяются тензором $\mathbf{H}^{(1)} = h_0\mathbf{I}^0$, $\mathbf{H}^{(2)} = \mathbf{0}$. Исходя из геометрического смысла тензора логарифмических деформаций, это состояние является чисто объемной деформацией. Возникающие при этом напряжения $\Sigma^{(1)} = \left[\sqrt{3}KJ_1(\mathbf{H}^{(1)}) + \frac{1}{6}b_1J_1^2(\mathbf{H}^{(1)}) \right] \mathbf{I}^0$ являются гидростатическими, а наличие константы b_1 позволяет учесть нелинейность их изменения. Касательные напряжения при таких деформациях не возникают.

Если деформации определяются только тензором $\mathbf{H}^{(2)}$, $\mathbf{H}^{(1)} = \mathbf{0}$, то рассматриваемое состояние является чистым формоизменением. Напряжения в этом случае дают ненулевые проекции в оба упругих собственных подпространства: $\Sigma = \Sigma^{(1)} + \Sigma^{(2)}$, причем $\Sigma^{(1)} = \frac{1}{6}b_2J_2(\mathbf{H}^{(2)})\mathbf{I}^0$, $\Sigma^{(2)} = \left(2G + \frac{b_2}{3\sqrt{3}}J_1(\mathbf{H}^{(1)}) \right) \mathbf{H}^{(2)} + b_3\mathbf{Q}_2^{(2)}$. Модель описывает дилатационные эффекты в материале, связанные с появлением гидростатических напряжений при чистом формоизменении. Напряжения $\Sigma^{(2)}$ оказываются в общем случае несоосными деформациям $\mathbf{H}^{(2)}$.

Несоосность девиаторов напряжений и деформаций указывает на то, что модель (4.4)–(4.6) не удовлетворяет требованиям частного постулата изотропии А.А. Ильюшина [18]. Одним из следствий частного постулата изотропии является независимость упругого потенциала от третьего инварианта деформаций [21].

Рассматриваемая модель материала удовлетворит требованиям частного постулата изотропии при условии равенства нулю коэффициента b_3 . Упругий потенциал такой четырехконстантной модели имеет вид

$$W = \frac{1}{6}N_1J_1^2(\mathbf{H}^{(1)}) + \frac{1}{2}N_2J_2(\mathbf{H}^{(2)}) + \frac{1}{6} \left(\frac{b_1}{3\sqrt{3}}J_1^3(\mathbf{H}^{(1)}) + \frac{b_2}{\sqrt{3}}J_1(\mathbf{H}^{(1)})J_2(\mathbf{H}^{(2)}) \right), \quad (4.7)$$

а связь между напряжениями и деформациями в собственных упругих подпространствах определяется соотношениями:

$$\Sigma^{(1)} = \sqrt{3}\sigma_0\mathbf{I}^0, \quad \Sigma^{(2)} = \tau_e\mathbf{H}^{(2)}, \quad (4.8)$$

причем функции σ_0 и τ_e по-прежнему определяются выражениями (3.4).

Обобщенный тензор жесткости материала (4.6) принимает вид

$$\mathbf{C} = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=2} N_{\alpha}\mathbf{N}^{(\alpha)} + \sum_{\gamma=1}^{\gamma=2} \sum_{\beta=1}^{\beta=2} b_{\beta}\mathbf{H}^{(\gamma)} \cdot \cdot \mathbf{B}^{(\beta)}, \quad (4.9)$$

Модель материала (4.7)–(4.9), удовлетворяющая частному постулату изотропии, описывает такие же нелинейные эффекты, что и модель (4.4)–(4.6), однако в этом случае в соответствии

с (4.8) девиаторы напряжений и деформаций соосны. Интерес представляет вопрос, каким образом принятие частного постулата изотропии оказывает влияние на результаты решения динамических задач. Далее этот вопрос проанализирован на примере решения задачи о распространении акустических волн в материале.

5. Плоские гармонические волны в предварительно деформированном изотропном материале

Пусть возмущение поля перемещений из (2.2) связано с прохождением плоской монохроматической волны с полем перемещений

$$\delta \mathbf{u}(\mathbf{x}_i, \tau) = A \mathbf{p} \exp(i(k\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_i + \omega\tau)), \quad \tau = t - t_i, \quad (5.1)$$

где A — амплитуда, $\mathbf{p}$ — вектор поляризации единичной длины, k — волновое число, ω — частота, $\mathbf{n}$ — единичный вектор волновой нормали.

По полю перемещений (5.1) определим вариацию (2.7) тензора деформаций ($\delta \mathbf{K}_i = \delta \mathbf{H}_i$ в рассматриваемых изотропных процессах):

$$\delta \mathbf{H}_i = \frac{1}{2} i k (\mathbf{n} \delta \mathbf{u} + \delta \mathbf{u} \mathbf{n})$$

и ее градиент, входящий в (2.8),

$$\nabla^i \delta \mathbf{H}_i = -\frac{1}{2} k^2 \mathbf{n} (\mathbf{n} \delta \mathbf{u} + \delta \mathbf{u} \mathbf{n}). \quad (5.2)$$

Динамические уравнения (2.8) для изотропных материалов с обобщенным тензором жесткости, определяемым выражениями (4.6) или (4.9), после подстановки в них соотношений (5.1) и (5.2) преобразуются к виду

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{p} = \rho_0 c^2 \mathbf{p}, \quad (5.3)$$

где $\mathbf{A}$ — акустический тензор среды, $c = \frac{\omega}{k}$ — фазовая скорость распространения волны.

Акустический тензор среды с предварительными деформациями $\mathbf{H}_i$ определяется выражением

$$\mathbf{A}(\mathbf{n}, \mathbf{H}_i) = \mathbf{M}(\mathbf{n}, \mathbf{H}_i) - \Sigma_i \cdot \mathbf{n} \mathbf{n}, \quad (5.4)$$

где $\mathbf{M}(\mathbf{n}, \mathbf{H}_i) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{C}(\mathbf{H}_i) \cdot \mathbf{n}$ — обобщенный тензор Кристоффеля.

Тензоры $\mathbf{A}(\mathbf{n}, \mathbf{H}_i)$ и $\mathbf{M}(\mathbf{n}, \mathbf{H}_i)$ определяются свойствами среды и зависят как от направления распространения волны, так и от предварительных деформаций $\mathbf{H}_i$. Из уравнений (5.3) следует, что значение $\rho_0 c^2$ является собственным значением акустического тензора $\mathbf{A}(\mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon}_1)$, а вектор поляризации — его собственным вектором.

При отсутствии предварительных деформаций, когда начальное состояние совпадает с естественным, в изотропном материале в любом направлении распространяются две волны:

продольная со скоростью $c_l = \sqrt{\frac{N_1 + 2N_2}{3\rho_0}}$ и поперечная со скоростью $c_t = \sqrt{\frac{N_2}{2\rho_0}}$.

Рассмотрим предварительные деформации изотропного материала, расположенные в его упругих собственных подпространствах. В первом случае начальное состояние определим полем перемещений $\mathbf{u}_i = (\lambda(t_i) - 1) \mathbf{x}_i$, где λ — кратность удлинений при объемной деформации. В этом случае тензор логарифмических деформаций имеет диадное разложение

$$\mathbf{H}_i = \ln \lambda (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3) = h_0 \mathbf{I}^0, \quad h_0 = \sqrt{3} \ln \lambda,$$

и расположен в первом упругом собственном подпространстве. Напряжения, определяемые по формулам (4.5), равны

$$\Sigma_i = \left(N_1 h_0 + \frac{1}{2} b_1 h_0^2 \right) \mathbf{I}^0. \quad (5.5)$$

Рассмотрим волну, распространяющуюся в направлении вектора $\mathbf{n} = \mathbf{e}_1$. Акустический тензор (5.4) с учетом выражений (4.6) и (5.5) записывается в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{n}, \mathbf{H}_i) = & \frac{1}{3} \left(N_1 + 2N_2 + (b_1 + 2b_2)h_0 - \sqrt{3} \left(N_1 + \frac{b_1}{2}h_0 \right) h_0 \right) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \\ & + \frac{1}{2} \left(N_2 + \frac{1}{3} b_2 h_0 \right) (\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Акустический тензор (5.6) имеет два различных собственных значения, которые определяют скорости распространения продольной c_l и поперечных c_t волн:

$$\begin{aligned} \rho_0 c_l^2 = & \frac{1}{3} \left(N_1 + 2N_2 + (b_1 + 2b_2)h_0 - \sqrt{3} \left(N_1 h_0 + \frac{b_1}{2} h_0^2 \right) \right), \\ \rho_0 c_t^2 = & \frac{1}{2} \left(N_2 + \frac{1}{3} b_2 h_0 \right). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Фазовые скорости (5.7) не содержат константу b_3 , поэтому при использовании четырех-константной модели изотропного материала (4.7)–(4.9), удовлетворяющей частному постулату изотропии, при предварительной чисто объемной деформации скорости распространения продольных и поперечных волн также определяются выражениями (5.7).

На рис. 1 приведены угловые зависимости фазовых скоростей $c_l(\varphi)$ и $c_t(\varphi)$ для различных направлений распространения волны, когда вектор волновой нормали расположен в плоскости $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ и определяется выражением $\mathbf{n} = \cos \varphi \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \mathbf{e}_2$. Предварительные деформации определяются значением $\lambda = 0,95$ (всестороннее сжатие). Здесь же пунктиром приведены угловые зависимости $c_l(\varphi)$ и $c_t(\varphi)$ для случая, когда предварительные деформации отсутствуют. Графики построенных угловых зависимостей показывают, что всестороннее сжатие не приводит к анизотропии акустических свойств изотропного материала.

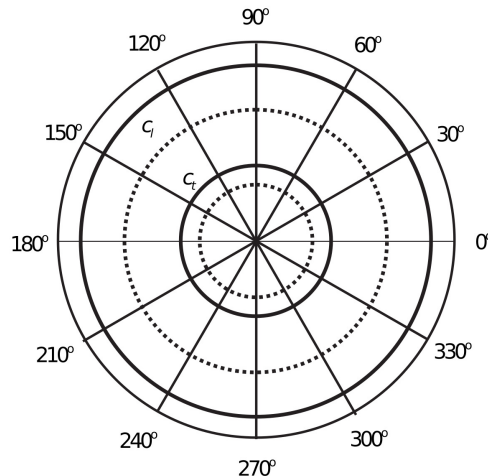


Рис. 1: Угловые зависимости фазовых скоростей $c_l(\varphi)$ и $c_t(\varphi)$ при предварительном всестороннем сжатии

Рассмотрим случай, когда начальное состояние определяется тензором деформаций

$$\mathbf{H}_i = \ln \lambda (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2) = h_2 \mathbf{I}^2, \quad h_2 = \sqrt{2} \ln \lambda,$$

который расположен во втором собственном подпространстве и определяет состояние растяжения–сжатия по двум взаимно перпендикулярным направлениям. При таком деформированном состоянии напряжения (4.5) определяются выражениями

$$\Sigma_i = N_1 h_2 \mathbf{I}^2 + \frac{1}{6\sqrt{3}} b_2 h_2^2 \mathbf{I}^0 - \frac{1}{\sqrt{6}} b_3 h_2^2 \mathbf{I}^1. \quad (5.8)$$

Пусть волна распространяется в направлении, перпендикулярной плоскости деформаций, когда волновой вектор $\mathbf{n} = \mathbf{e}_3$. На основании соотношений (5.4), (4.6) и (5.8) акустический тензор определяется выражением

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{n}, \mathbf{H}_i) = & \frac{1}{3} \left(N_1 + 2N_2 - \frac{1}{2} \left(\frac{b_2}{\sqrt{3}} - 2b_3 \right) h_2^2 \right) \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3 + \\ & + \frac{1}{2} \left(N_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} b_3 h_2 \right) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \frac{1}{2} \left(N_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} b_3 h_2 \right) \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2. \end{aligned} \quad (5.9)$$

В соответствии с выражением для акустического тензора (5.9) в изотропном материале, определяемом моделью (4.4)–(4.6), при рассматриваемых предварительных деформациях распространяется продольная волна с вектором поляризации $\mathbf{p} = \mathbf{e}_3$ и фазовой скоростью

$$\rho_0 c_l^2 = \frac{1}{3} \left(N_1 + 2N_2 - \frac{1}{2} \left(\frac{b_2}{\sqrt{3}} - 2b_3 \right) h_2^2 \right) \quad (5.10)$$

и две поперечные волны: с вектором поляризации $\mathbf{p} = \mathbf{e}_1$ и фазовой скоростью

$$\rho_0 c_{t1}^2 = \frac{1}{2} \left(N_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} b_3 h_2 \right) \quad (5.11)$$

и с вектором поляризации $\mathbf{p} = \mathbf{e}_2$ и фазовой скоростью

$$\rho_0 c_{t2}^2 = \frac{1}{2} \left(N_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} b_3 h_2 \right) \quad (5.12)$$

Из соотношений (5.10)–(5.12) следует, что рассматриваемое начальное состояние материала приводит к тому, что в отношении акустических свойств начально изотропный материал ведет себя как кристалл кубической сингонии. Выражения для фазовых скоростей (5.10)–(5.12) содержат константу b_3 , поэтому при использовании модели изотропного материала, удовлетворяющей частному постулату изотропии, фазовые скорости продольных и поперечных волн вычисляются по формулам:

$$\rho_0 c_l^2 = \frac{1}{3} \left(N_1 + 2N_2 - \frac{b_2}{2\sqrt{3}} h_2^2 \right), \quad \rho_0 c_{t1}^2 = \rho_0 c_{t2}^2 = \frac{1}{2} N_2. \quad (5.13)$$

Выражения (5.13) показывают, что использование четырехконстантной модели изотропного материала при предварительных деформациях растяжения–сжатия позволяет описать появление анизотропии акустических свойств материала только в отношении скорости распространения продольной волны. В этой модели не прогнозируется изменение величины фазовой скорости распространения поперечных волн по отношению к начальному недеформированному состоянию.

Эти выводы иллюстрируются рис. 2, на котором приведены угловые зависимости фазовых скоростей $c_l(\varphi)$ и $c_t(\varphi)$ для различных направлений распространения волны, когда вектор волновой нормали расположен в плоскости $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3$ и определяется выражением $\mathbf{n} = \cos \varphi \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \mathbf{e}_3$. Предварительные деформации определяются значением $\lambda = 0,95$. На этих рисунках пунктиром приведены угловые зависимости $c_l(\varphi)$ и $c_t(\varphi)$ при отсутствии предварительных деформаций. На рис. 2,а графики построены для модели материала (4.4)–(4.6), а на рис. 2,б — для модели материала (4.7)–(4.9), удовлетворяющей частному постулату изотропии.

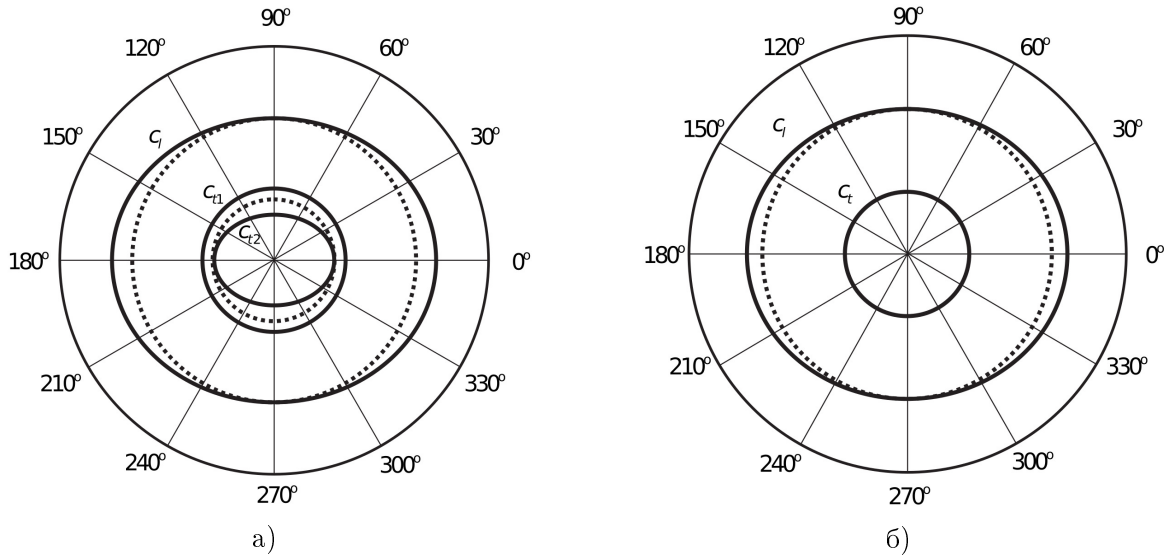


Рис. 2: Угловые зависимости фазовых скоростей $c_l(\varphi)$ и $c_t(\varphi)$ при предварительном растяжении-сжатии в плоскости $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$: а) расчеты по модели материала (4.4)–(4.6), б) расчеты по модели материала (4.7)–(4.9)

Отметим также, что приведенные выражения для фазовых скоростей (5.7), (5.10)–(5.12) достаточны для определения всех пяти констант модели (4.4)–(4.6) по измеренным скоростям распространения продольных и поперечных волн. Выражения (5.7), (5.13), полученные для модели (4.7)–(4.9), удовлетворяющей частному постулату изотропии, также пригодны для идентификации этой модели по результатам динамических экспериментов.

6. Выводы

Для двух моделей гипотетического изотропного материала проведен анализ влияния предварительных конечных деформаций на скорости распространения акустических волн. Показано, что при предварительных чисто объемных деформациях, когда тензоры деформаций и напряжений расположены в первом упругом собственном подпространстве материала, расчеты по пятиконстантной и четырехконстантной моделям дают одинаковый результат.

При предварительных деформациях, расположенных во втором упругом собственном подпространстве, тензор напряжений имеет составляющую, расположенную в первом упругом собственном подпространстве, а его проекция во второе подпространство при использовании пятиконстантной модели несоосна девиатору деформаций. В этом случае оказывается, что начально изотропный материал в отношении акустических свойств приобретает анизотропию.

Полученный результат может быть использован в качестве критерия проверки гипотезы о выполнении в некотором конкретном материале частного постулата изотропии. Если в материале создать предварительное однородное деформированное состояние растяжения-сжатия

и провести эксперимент по измерению фазовых скоростей распространения волн в направлении, перпендикулярном плоскости деформаций, то в соответствии с (5.10)–(5.13) возможны два принципиально разных результата измерений. В первом случае будут зафиксированы три отклика на сигнал, возбуждающий волну, соответствующие одной продольной и двум поперечным волнам. В этом случае материал не удовлетворяет частному постулату изотропии. Во втором случае в ответ на возбуждающий сигнал будет только два отклика, соответствующие продольной и поперечной волнам. В этом случае можно утверждать, что материал удовлетворяет частному постулату изотропии.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пасманик Л. А., Камышев А. В., Радостин А. В., Зайцев В. Ю. Параметры акустической неоднородности для неразрушающей оценки влияния технологии изготовления и эксплуатационной поврежденности на структуру металла // Дефектоскопия. 2020. № 12. С. 24-36.
2. Глушков Е. В., Глушкова Н. В., Голуб М. В., Ерёмин А. А. Резонансный метод обнаружения и идентификации расслоений в композитных пластинах ультразвуковыми бегущими волнами // Известия РАН. Механика твердого тела. 2020. № 6. С. 125-133.
3. Jiang Y., Li G., Qian L.-X., Liang S., Destrade M., Cao Y. Measuring the linear and nonlinear elastic properties of brain tissue with shear waves and inverse analysis // Biomech. Model. Mechanobiol. 2015. Vol. 14, N. 5. P. 1119-1128.
4. Truesdell C. General and exact theory of waves in finite elastic strain // Arch. Ratio. Mech. Anal. 1961. Vol. 8. N 1. P. 263-296.
5. Гузь А. Н. Упругие волны в телах с начальными напряжениями / В двух томах. Киев: Наукова Думка, 1986.
6. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука. 1980. 512 с.
7. Haupt P., Pao Y.-H., Hutter K. Theory of incremental motion in a body with initial elastoplastic deformation // J. Elasticity. 1992. Vol. 28. P. 193-221.
8. Destrade M., Ogden R. W. On stress-dependent elastic moduli and wave speeds // J. Appl. Math. 2013. Vol. 78. N 5. P. 965-997.
9. Роменский Е. И., Лысь Е. В., Чеверда В. А., Эпов М. И. Динамика деформирования упругой среды с начальными напряжениями // Прикладная механика и техническая физика. 2017. Т. 58. № 5. С. 178-189.
10. Белянкова Т. И., Калинин В. В., Шейдаков Д. Н. Модули высших порядков в уравнениях динамики преднапряженного упругого тела // Известия РАН. Механика твердого тела. 2019. № 3. С. 3-15.
11. Yang H., Fu Li-Yun, Fu Bo-Ye, Müller T. M. Acoustoelastic FD simulation of elastic wave propagation in prestressed media // Front. Earth Sci. 2022. Vol. 10.
12. Zhu Q., Burtin C., Binetruy C. Acoustoelastic effect in polyamide 6: Linear and nonlinear behaviour // Polym. Test. 2014. Vol. 40. P. 178-186.
13. Бровко Г. Л. Определяющие соотношения механики сплошной среды: Развитие математического аппарата и основ общей теории. М.: Наука, 2017. 432 с.

14. Маркин А. А., Толоконников Л. А. Меры процессов конечного деформирования // Известия Северо-Кавказского научного центра высшей школы. Естественные науки. 1987. № 2. С. 49-53.
15. Маркин А. А., Соколова М. Ю. Термомеханика упругопластического деформирования. М.: Физматлит, 2013. 320 с.
16. Остросаблин Н. И. О структуре тензора модулей упругости. Собственные упругие состояния // Динамика твердого деформируемого тела. Сибирское отделение АН СССР. Ин-т гидродинамики. 1984. В. 66. С. 113-125.
17. Рыхлевский Я. О законе Гука // Прикладная математика и механика. 1984. Т. 48. В. 3. С. 420-435.
18. Ильюшин А. А. Вопросы общей теории пластичности // Прикладная математика и механика. 1960. Т. 24. В. 3. С. 399-411.
19. Маркин А. А., Соколова М. Ю. Вариант соотношений нелинейной упругости // Известия РАН. Механика твердого тела. 2019. № 6. С. 68-75.
20. Astapov Y., Khristich D., Markin A., Sokolova M. The construction of nonlinear elasticity tensors for crystals and quasicrystals // Int. J. Appl. Mech. 2017. Vol. 9. No. 6. P. 1750080-1-1750080-15.
21. Маркин А. А., Соколова М. Ю., Христич Д. В. Постулат А. А. Ильюшина для анизотропных материалов и вариант определяющих соотношений // Известия РАН. Механика твердого тела. 2011. № 1. С. 38-45.

REFERENCES

1. Pasmanik, L. A., Kamyshev, A. V., Radostin, A. V. & Zaitsev, V. Yu. 2020. "Acoustic inhomogeneity parameters for non-destructive evaluation of the influence of manufacturing technology and operational damage on the metal structure", *Defectoscopy*, no. 12, pp. 24-36.
2. Glushkov, E. V., Glushkova, N. V., Golub, M. V. & Eremin, A. A. 2020. "Resonant Method for Detection and Identification of Delamination in Composite Plates by Elastic Guided Waves", *Mech. Solids*, vol. 55, no. 6, pp. 865-871.
3. Jiang, Y., Li, G., Qian, L.-X., Liang, S., Destrade, M. & Cao Y. 2015. "Measuring the linear and nonlinear elastic properties of brain tissue with shear waves and inverse analysis", *Biomech. Model. Mechanobiol.*, vol. 14, n. 5, p. 1119-1128.
4. Truesdell, C. 1961. "General and exact theory of waves in finite elastic strain", *Arch. Ratio. Mech. Anal.*, vol. 8, n. 1, p. 263-296.
5. Guz', A. N. 1986. "Elastic waves in bodies with initial stresses", in two volumes, *Naukova Dumka, Kiev*, [in Russian].
6. Lurie, A. I. 2012. "Non-linear theory of elasticity", *North Holland*.
7. Haupt, P., Pao, Y.-H. & Hutter, K. 1992. "Theory of incremental motion in a body with initial elasto-plastic deformation", *J. Elast.*, vol. 28, p. 193-221.
8. Destrade, M. & Ogden R. W. 2013. "On stress-dependent elastic moduli and wave speeds", *J. Appl. Math.*, vol. 78, n. 5, p. 965-997.

9. Romenskii, E. I., Lys', E. V., Cheverda, V. A. & Epov, M. I. 2017. "Dynamics of deformation of an elastic medium with initial stresses", *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, vol. 58, no. 5, pp. 914-923.
10. Belyankova, T. I., Kalinchuk, V. V. & Sheidakov, D. N. 2019. "Higher-order moduli in the equations of dynamics of a prestressed elastic body", *Mech. Solids*, n. 3, p. 3-15 [in Russian].
11. Yang, H., Fu Li-Yun, Fu Bo-Ye & Müller, T. M. 2022. "Acoustoelastic FD simulation of elastic wave propagation in prestressed media", *Front. Earth Sci.*, vol. 10.
12. Zhu, Q., Burtin, C. & Binetruy, C. 2014. "Acoustoelastic effect in polyamide 6: Linear and nonlinear behaviour" *Polym. Test.*, vol. 40, p. 178-186.
13. Brovko, G. L. 2017. "Constitutive relations of continuum mechanics: The development of the mathematical apparatus and the foundations of general theory", *Nauka, Moscow*. [in Russian].
14. Markin, A. A. & Tolokonnikov, L. A. 1987. "Measures of the finite deformation processes", *News of the North Caucasus Scientific Center of Higher Education. Natural Sciences*, n. 2, p. 49-53 [in Russian].
15. Markin, A. A. & Sokolova, M. Yu. 2015. "Thermomechanics of elastoplastic deformation", *Cambridge International Science Publishing, Cambridge*.
16. Ostrosablin, N. I. 1984. "On the structure of the elastic moduli tensor. Eigen elastic states", *Dynamics of a solid deformable body*, vol. 66, p. 113-125 [in Russian].
17. Rykhlevsky, J. 1984. "About Hooke's Law", *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 48, n. 3, p. 420-435 [in Russian].
18. Ilyushin, A. A. 1960. "Questions of the general theory of plasticity", *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 24, n. 3, p. 399-411.
19. Markin, A. A. & Sokolova M. Yu. 2019. "A variant of relations of the nonlinear elasticity", *Mech. Solids*, no. 6, p. 68-75 [in Russian].
20. Astapov, Y., Khristich, D., Markin, A. & Sokolova, M. 2017. "The construction of nonlinear elasticity tensors for crystals and quasicrystals", *Int. J. Appl. Mech.*, vol. 9, no. 6, p. 1750080-1-1750080-15.
21. Markin, A. A., Sokolova, M. Yu. & Khristich, D. V. 2011. "A. A. Il'yushin's postulate for anisotropic materials and a version of constitutive relations", *Mech. Solids*, vol. 46, no. 1, p. 30-35.

Получено: 27.03.2024

Принято в печать: 28.06.2024

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 25. Выпуск 2.

УДК 539.3

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-2-334-349

Акустические волны в гипопругих телах. II. Анизотропные материалы¹

М. Ю. Соколова, Д. В. Христич

Соколова Марина Юрьевна — доктор физико-математических наук, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: m.u.sokolova@gmail.com

Христич Дмитрий Викторович — доктор физико-математических наук, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: dmitrykhristich@rambler.ru

Аннотация

Для гипопругих анизотропных материалов выписаны определяющие соотношения нелинейной упругости, устанавливающие связь между обобщенными яуманновскими производными тензора напряжений и неголономной меры деформаций, введенной в работах А.А. Маркина. Связь конкретизирована для анизотропных материалов с кубической симметрией свойств. Соотношения записаны в проекциях в упругие собственные подпространства кубического материала. Проведен анализ взаимного влияния процессов конечного деформирования, принадлежащих различным собственным подпространствам.

Рассмотрены процессы деформирования, в которых главные оси деформаций совпадают с одними и теми же материальными волокнами, положение которых относительно главных осей анизотропии не изменяется. Для таких процессов выписаны упругие потенциалы для двух моделей материалов: общей, содержащей девять упругих констант, и модели, удовлетворяющей обобщению частного постулата А.А. Ильюшина на анизотропные материалы, содержащей шесть констант.

Приведены результаты решения задачи о распространении акустических волн в гипопругих анизотропных материалах с кубической симметрией свойств. В качестве начальных деформаций материала рассмотрены деформации, целиком расположенные в его упругих собственных подпространствах: чисто объемная деформация, растяжение-сжатие в главных осях анизотропии, чистый сдвиг в плоскости главных осей анизотропии. Предварительные конечные чисто объемные деформации не оказывают влияния на форму угловых зависимостей фазовых скоростей распространения волн в вертикальной плоскости, а влияют только на величины фазовых скоростей. При предварительном формоизменении материал приобретает дополнительную анизотропию, а форма угловых зависимостей фазовых скоростей изменяется. Результаты показывают, что в некоторых случаях шестиконстантная модель материала не прогнозирует изменение скоростей распространения поперечных волн при начальных конечных деформациях.

Ключевые слова: акустические волны, конечные деформации, фазовые скорости распространения волн, анизотропные материалы, гипопругие материалы, частный постулат А. А. Ильюшина.

Библиография: 17 названий.

Для цитирования:

М. Ю. Соколова, Д. В. Христич. Акустические волны в гипопругих телах. II. Анизотропные материалы // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 2, с. 334–349.

¹Работа выполнена при поддержке госзадания Минобрнауки РФ (шифр FEWG-2023-0002).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 25. No. 2.

UDC 539.3

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-2-334-349

Acoustic waves in hypoelastic solids. II. Anisotropic materials

M. Yu. Sokolova, D. V. Khristich

Sokolova Marina Yur'evna — doctor of physical and mathematical sciences, Tula State University (Tula).

e-mail: m.u.sokolova@gmail.com

Khristich Dmitriy Viktorovich — doctor of physical and mathematical sciences, Tula State University (Tula).

e-mail: dmitrykhristich@rambler.ru

Abstract

For hypoelastic anisotropic materials, the constitutive relations of nonlinear elasticity are written out. The relations establish a connection between the generalized Yaumann derivatives of the stress tensor and the nonholonomic strain measure introduced in the works of A. A. Markin. The relation is concretized for anisotropic materials with cubic symmetry of properties. The relations are written in projections into elastic eigen subspaces of a cubic material. The analysis of the mutual influence of finite deformation processes belonging to different eigen subspaces is carried out.

Deformation processes in which the main axes of strains coincide with the same material fibers, whose position relative to the main axes of anisotropy does not change, are considered. Elastic potentials for such processes are written out for two material models: a general one containing nine elastic constants, and a model satisfying the generalization of A. A. Ilyushin particular postulate to anisotropic materials and containing six constants.

The results of solution of the problem of acoustic wave propagation in hypoelastic anisotropic materials with cubic symmetry of properties are presented. As initial strains of a material, deformations located entirely in its elastic eigen subspaces are considered: purely volumetric strain, tension-compression in the main axes of anisotropy, pure shear in the plane of the main axes of anisotropy. Preliminary finite purely volumetric deformations do not affect the shape of the angular dependences of the phase velocities of wave propagation in the vertical plane, but only affect the values of the phase velocities. At preliminary shaping, the material acquires additional anisotropy, and the shape of the angular dependencies of the phase velocities changes. The results show that in some cases, the six-constant model of the material does not predict a change in the propagation velocities of transverse waves at initial finite strains.

Keywords: acoustic waves, finite strains, phase velocities of wave propagation, anisotropic materials, hypoelastic materials, A. A. Ilyushin particular postulate.

Bibliography: 17 titles.

For citation:

M. Yu. Sokolova, D. V. Khristich, 2024. "Acoustic waves in hypoelastic solids. II. Anisotropic materials", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 2, pp. 334–349.

Введение

Задача о распространении акустических волн в телах из нелинейно упругих анизотропных материалов лежит в основе динамических методов определения констант таких материалов. В работах [1, 2] приведены основные соотношения для определения констант материалов с кубической симметрией свойств по измеренным фазовым скоростям их распространения. В этих работах полагается, что рассматриваемые материалы являются гиперупругими с упругим потенциалом полиномиального типа, построенным по тензору деформаций Коши-Грина.

Тип симметрии свойств анизотропного материала существенно влияет на выражения для фазовых скоростей распространения волн. Анизотропные материалы, относящиеся по типу симметрии свойств к материалам кубической сингонии, наиболее распространены как среди кристаллов, так и среди искусственно созданных композитов. Упругие свойства кубических материалов удовлетворяют условиям симметрии, присущей точечной группе объемно- или гранецентрированного куба. Для кубического кристалла точечные группы симметрии характеризуются наличием трех поворотных осей четвертого порядка, четырех поворотных осей третьего порядка, и шести осей симметрии второго порядка [3]. Модели линейной и нелинейной упругости кубических материалов рассмотрены в работах [4, 5, 6, 7]. Вопросам распространения акустических волн в анизотропных материалах с кубической симметрией свойств посвящены работы [7, 8].

В данной работе рассматриваются гипоупругие анизотропные материалы, в которых постулируется существование связи между объективной скоростью изменения тензора напряжений и тензором деформации скорости. В общем случае для таких материалов упругий потенциал не может быть записан. В статье рассматриваются условия, накладываемые на тензоры упругости, при выполнении которых определяющие соотношения могут быть проинтегрированы, и может быть записан упругий потенциал. Эти условия связаны с использованием гипотезы о вращении главных осей анизотропии при конечных деформациях, предложенной в работе [3].

Ранее в работах [9, 10] в качестве гипотезы, используемой при построении связи между напряжениями и деформациями, было предложено обобщение частного постулата А.А. Ильюшина на анизотропные материалы. В соответствии с этим обобщением проекции тензоров напряжений и деформаций в каждое упругое собственное подпространство анизотропного материала должны быть соосны. Принятие данной гипотезы позволяет существенно сократить число констант, входящих в определяющие соотношения [10]. В данной статье на примере решения задачи о распространении акустических волн в анизотропном материале с кубической симметрией свойств проведен анализ влияния принятия данной гипотезы на результаты вычисления фазовых скоростей распространения продольных и поперечных волн.

1. Гипоупругие анизотропные среды

При построении моделей гипоупругих анизотропных сред в качестве меры деформаций используем неголономную меру деформаций $\mathbf{Z}$, коротационная производная которой равна тензору деформации скорости $\mathbf{W}$ [9]. Коротационной производной тензора называется его производная относительно ортогонального базиса $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$, вращающегося со скоростью $\Omega_{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{Q}}$, где $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(t)$ — ортогональный тензор, в каждый момент времени определяющий положение вращающегося базиса относительно неподвижного $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$:

$$\mathbf{n}_i = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{Q}(t). \quad (1.1)$$

Скорость изменения тензора $\mathbf{Z}$ относительно базиса $\mathbf{n}_i$ связана с абсолютной производной (по времени t) тензора $\mathbf{Z}_{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Z} \cdot \mathbf{Q}^{-1}$ соотношением $\dot{\mathbf{Z}}^{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{Z}}_{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}$, которое можно преобразовать к виду $\dot{\mathbf{Z}}^{\mathbf{Q}} = \dot{\mathbf{Z}} + \Omega_{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Z} - \mathbf{Z} \cdot \Omega_{\mathbf{Q}}$. Рассматриваемые неголономные меры деформаций

определяются из дифференциального уравнения

$$\dot{\mathbf{Z}}^{\mathbf{Q}} = \mathbf{W}. \quad (1.2)$$

При описании конечных деформаций анизотропных материалов наиболее простые соотношения получаются, если процесс рассматривается в главных осях анизотропии [9]. При деформации анизотропных материалов главные оси анизотропии могут поворачиваться, образуя ортонормированный триэдр. Такой подход к описанию конечных деформаций анизотропных материалов был предложен в работах [3, 9]. В общем случае можно считать, что триэдр главных осей анизотропии изменяет ориентацию в процессе конечного деформирования, и в каждый момент процесса его ориентация определяется ортогональным тензором $\mathbf{Q}^a(t)$:

$$\mathbf{a}_i(t) = \mathbf{a}_i^0 \cdot \mathbf{Q}^a(t), \quad \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j = \delta_{ij}, \quad (1.3)$$

где $\mathbf{a}_i^0 = \mathbf{Q}_i|_{t=t_0}$ — тройка главных осей анизотропии в начальный момент процесса.

Для записи определяющих соотношений в главных осях анизотропии в качестве меры конечных деформаций выберем неголономную меру $\mathbf{Z}$, для которой $\mathbf{Q}(t) \equiv \mathbf{Q}^a(t)$. При этом естественно считать, что $\mathbf{a}_i^0 = \mathbf{e}_i$, т.е. в отсчетной конфигурации неподвижный базис совпадает с главными осями анизотропии. В работах [3, 9] предполагалось, что в процессах конечного деформирования положение осей анизотропии определяется ортогональным тензором $\mathbf{R}$, входящим в полярное разложение аффинора деформаций [9]. В этом случае положение главных осей анизотропии определяется выражением

$$\mathbf{a}_i(t) = \mathbf{a}_i^0 \cdot \mathbf{R}(t). \quad (1.4)$$

В случае, когда $\mathbf{Q}^a(t) = \mathbf{R}(t)$, тройка главных осей анизотропии совпадает с полярным базисом $\mathbf{a}_i = \mathbf{n}_i$, а в качестве коротационной производной меры деформаций $\mathbf{Z}$ следует выбрать обобщенную яуманновскую производную этого тензора [9, 11]. Сама неголономная мера деформаций в этом случае совпадает с мерой деформаций $\mathbf{K}$, введенной в работе [11]:

$$\mathbf{K}^\Delta \equiv \dot{\mathbf{K}} + \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{K} - \mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{W}, \quad (1.5)$$

где $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{R}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{R}}$ — тензор спина, $\mathbf{W} = \frac{1}{2} \mathbf{R}^{-1} \cdot (\mathbf{U}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{U}} + \dot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{U}^{-1}) \cdot \mathbf{R}$ — тензор деформации скорости.

Тензоры $\mathbf{U} = \mathbf{U}^T$ — левая мера искажений и $\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$ — ортогональный тензор, сопровождающий деформацию, входят в полярное разложение аффинора деформаций

$$\boldsymbol{\Phi} \equiv \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}_0} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{R}, \quad (1.6)$$

где $\mathbf{x}_0$ и $\mathbf{x}$ — радиус-векторы произвольной точки среды в отсчетной и текущей конфигурациях.

Определяющие соотношения для гипотупругой анизотропной среды представим в виде связи между обобщенными яуманновскими производными тензора напряжений $\boldsymbol{\Sigma}$ и меры деформаций $\mathbf{K}$ (1.5). Обобщенный тензор напряжений $\boldsymbol{\Sigma}$ связан с тензором истинных напряжений Коши $\mathbf{S}$ известным соотношением $\boldsymbol{\Sigma} = J \mathbf{S}$, где $J = \det \boldsymbol{\Phi}$ характеризует относительное изменение объема, и является энергетически сопряженным с мерой деформаций $\mathbf{K}$ через выражение для удельной (отнесенной к начальному объему) потенциальной энергии деформаций $dW = \boldsymbol{\Sigma} \cdot \cdot d\mathbf{K}^\Delta$.

Запишем нелинейную связь между производными $\boldsymbol{\Sigma}^\Delta$ и $\mathbf{K}^\Delta = \mathbf{W}$ в виде:

$$\boldsymbol{\Sigma}^\Delta = \mathbf{C}(\mathbf{K}) \cdot \cdot \mathbf{K}^\Delta, \quad (1.7)$$

где $\mathbf{C}(\mathbf{K})$ — обобщенный тензор жесткости материала, который рассматривается как функция тензора деформаций $\mathbf{K}$.

Представим обобщенный тензор жесткости анизотропного материала в виде

$$\mathbf{C}(\mathbf{K}) = \mathbf{N} + \mathbf{L} \cdot \cdot \mathbf{K}, \quad (1.8)$$

где $\mathbf{N}$ и $\mathbf{L}$ — тензоры четвертого и шестого рангов [9], компоненты которых в базисе главных осей анизотропии обладают свойствами симметрии

$$\begin{aligned} N_{ijkl} &= N_{jikl} = N_{ijlk} = N_{klij}, \\ L_{ijklmn} &= L_{jiklmn} = L_{ijlkmn} = L_{ijklnm} = L_{klijmn} = L_{mnijkl} = L_{ijmnlk}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Полагая компоненты (1.9) постоянными во вращающемся (полярном) базисе (1.1), приходим к требованию:

$$\mathbf{N}^\Delta \equiv 0, \quad \mathbf{L}^\Delta \equiv 0,$$

при выполнении которого соотношения (1.7) могут быть проинтегрированы и представлены в виде:

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{N} \cdot \cdot \mathbf{K} + \frac{1}{2} \mathbf{K} \cdot \cdot \mathbf{L} \cdot \cdot \mathbf{K}, \quad (1.10)$$

а выражение для упругой потенциальной энергии деформаций принимает вид [12]:

$$W = \frac{1}{2} \mathbf{N} \cdot \cdot \cdot \cdot \mathbf{K} \mathbf{K} + \frac{1}{6} \mathbf{L} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \mathbf{K} \mathbf{K} \mathbf{K}. \quad (1.11)$$

Как и в работах [9, 13, 14], используем представления тензоров $\mathbf{N}$ и $\mathbf{L}$ в виде разложений по собственным базисным тензорам

$$\mathbf{N} = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=m} N_\alpha \mathbf{N}^{(\alpha)}, \quad \mathbf{L} = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} b_\alpha \mathbf{B}^{(\alpha)}, \quad (1.12)$$

где m — количество различных собственных значений тензора $\mathbf{N}$, совпадающее с количеством независимых констант упругости второго порядка, n — количество различных собственных значений тензора $\mathbf{L}$, совпадающее с числом независимых констант упругости третьего порядка, $\mathbf{N}^{(\alpha)}$ и $\mathbf{B}^{(\alpha)}$ — собственные базисные тензоры упругости, различные для материалов с различным типом симметрии упругих свойств.

2. Анизотропные материалы с кубической симметрией свойств

В качестве примера анизотропного материала рассмотрим материалы, по типу симметрии относящиеся к кубической кристаллографической сингонии. Такие материалы будем в дальнейшем называть кубическими. Для таких материалов в работах [9, 12] определены собственные базисные тензоры упругости $\mathbf{N}^{(\alpha)}$ и $\mathbf{B}^{(\alpha)}$. Эти тензоры представляются через базисные тензоры различных рангов, построенных на основании канонического тензорного базиса

$$\begin{aligned} \mathbf{I}^0 &= \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_3), \quad \mathbf{I}^1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2\mathbf{a}_3 \mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2), \quad \mathbf{I}^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2), \\ \mathbf{I}^3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_1), \quad \mathbf{I}^4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_2), \quad \mathbf{I}^5 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{a}_3 \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_3), \end{aligned} \quad (2.1)$$

где векторы $\mathbf{a}_i$ направлены вдоль главных осей анизотропии материала. Их положение в каждый момент времени определяется соотношением (1.4).

По тензорам (2.1) построены базисные тензоры четвертого $\mathbf{I}^{\alpha\beta}$ и шестого $\mathbf{I}^{\alpha\beta\gamma}$ рангов

$$\mathbf{I}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\mathbf{I}^\alpha \mathbf{I}^\beta + \mathbf{I}^\beta \mathbf{I}^\alpha), \quad \mathbf{I}^{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{6} (\mathbf{I}^\alpha \mathbf{I}^\beta \mathbf{I}^\gamma + \mathbf{I}^\beta \mathbf{I}^\alpha \mathbf{I}^\gamma + \mathbf{I}^\gamma \mathbf{I}^\alpha \mathbf{I}^\beta + \mathbf{I}^\alpha \mathbf{I}^\gamma \mathbf{I}^\beta + \mathbf{I}^\beta \mathbf{I}^\gamma \mathbf{I}^\alpha + \mathbf{I}^\gamma \mathbf{I}^\beta \mathbf{I}^\alpha),$$

где $\alpha, \beta, \gamma = 0, 1, \dots, 5$.

Для кубических материалов $m = 3$, $n = 6$, а собственные базисные тензоры упругости имеют вид

$$\mathbf{N}^{(1)} = \mathbf{I}^{00}, \quad \mathbf{N}^{(2)} = \mathbf{I}^{11} + \mathbf{I}^{22}, \quad \mathbf{N}^{(3)} = \mathbf{I}^{33} + \mathbf{I}^{44} + \mathbf{I}^{55}, \quad (2.2)$$

$$\mathbf{B}^{(1)} = \mathbf{I}^{000}, \quad \mathbf{B}^{(2)} = \mathbf{I}^{011} + \mathbf{I}^{022}, \quad \mathbf{B}^{(3)} = \mathbf{I}^{033} + \mathbf{I}^{044} + \mathbf{I}^{055}, \quad (2.3)$$

$$\mathbf{B}^{(4)} = \frac{1}{\sqrt{6}} (\mathbf{I}^{111} - 3\mathbf{I}^{122}), \quad \mathbf{B}^{(5)} = \frac{1}{\sqrt{6}} (\mathbf{I}^{144} + \mathbf{I}^{155} - 2\mathbf{I}^{133}) + \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{I}^{255} - \mathbf{I}^{244}), \quad \mathbf{B}^{(6)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{I}^{345}.$$

Из представлений (2.2) следует, что тензор упругости кубических материалов имеет три собственных подпространства: одномерное (1D) с базисным тензором $\mathbf{N}^{(1)}$, двумерное (2D) с базисным тензором $\mathbf{N}^{(2)}$ и трехмерное (3D) с базисным тензором $\mathbf{N}^{(3)}$.

Далее будем рассматривать только такие процессы конечного деформирования, в которых главные оси деформаций совпадают с одними и теми же материальными волокнами. Известно [9], что в этом случае неголономная мера деформаций $\mathbf{K}$ совпадает с тензором логарифмических деформаций Генки $\mathbf{H}$. Найдем проекции тензора деформаций $\mathbf{H}$ в собственные подпространства тензора упругости, характеризующие собственные упругие состояния материала:

$$\begin{aligned} 1D: \quad \mathbf{H}^{(1)} &= \mathbf{H} \cdot \cdot \mathbf{N}^{(1)} = h_0 \mathbf{I}^0, \\ 2D: \quad \mathbf{H}^{(2)} &= \mathbf{H} \cdot \cdot \mathbf{N}^{(2)} = h_1 \mathbf{I}^1 + h_2 \mathbf{I}^2, \\ 3D: \quad \mathbf{H}^{(3)} &= \mathbf{H} \cdot \cdot \mathbf{N}^{(3)} = h_3 \mathbf{I}^3 + h_4 \mathbf{I}^4 + h_5 \mathbf{I}^5, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где обозначено $h_i = \mathbf{H} \cdot \cdot \mathbf{I}^i$.

С учетом свойств тензора логарифмических деформаций Генки $\mathbf{H}$ [9] из соотношений (2.4) и (2.1) следует, что собственными упругими состояниями кубического материала являются чисто объемное деформирование, соответствующее собственному подпространству 1D, формоизменение в главных осях тензора деформаций, соответствующее собственному подпространству 2D, и чистые сдвиги в подпространстве 3D.

Квадраты тензоров $\mathbf{H}^{(1)}$, $\mathbf{H}^{(2)}$, $\mathbf{H}^{(3)}$ имеют следующие представления [15]:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^{(1)} \cdot \mathbf{H}^{(1)} &= \frac{1}{\sqrt{3}} h_0^2 \mathbf{I}^0, \\ \mathbf{H}^{(2)} \cdot \mathbf{H}^{(2)} &= \frac{1}{\sqrt{3}} (h_1^2 + h_2^2) \mathbf{I}^0 + \mathbf{Q}_2^{(2)}, \quad \mathbf{Q}_2^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{6}} (h_1^2 - h_2^2) \mathbf{I}^1 - \sqrt{\frac{2}{3}} h_1 h_2 \mathbf{I}^2, \\ \mathbf{H}^{(3)} \cdot \mathbf{H}^{(3)} &= \frac{1}{\sqrt{3}} (h_3^2 + h_4^2 + h_5^2) \mathbf{I}^0 + \mathbf{Q}_2^{(3)} + \mathbf{Q}_3^{(3)}, \\ \mathbf{Q}_2^{(3)} &= -\frac{1}{2\sqrt{6}} (2h_3^2 - h_4^2 - h_5^2) \mathbf{I}^1 - \frac{1}{2\sqrt{2}} (h_4^2 - h_5^2) \mathbf{I}^2, \\ \mathbf{Q}_3^{(3)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} h_4 h_5 \mathbf{I}^3 + \frac{1}{\sqrt{2}} h_3 h_5 \mathbf{I}^4 + \frac{1}{\sqrt{2}} h_3 h_4 \mathbf{I}^5. \end{aligned}$$

На основании соотношений (1.11), (1.12), (2.2) и (2.3) для кубического материала получено выражение для удельной потенциальной энергии деформаций

$$W = \frac{1}{2} (N_1 J_1^2(\mathbf{H}^{(1)}) + N_2 J_2(\mathbf{H}^{(2)}) + N_2 J_2(\mathbf{H}^{(3)})) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{18\sqrt{3}} J_1(\mathbf{H}^{(1)}) \left(3b_1 J_1^2(\mathbf{H}^{(1)}) + 2b_2 J_2(\mathbf{H}^{(2)}) + 2b_3 J_2(\mathbf{H}^{(3)}) \right) + \\
& + \frac{1}{24} (3b_4 - 8b_5) J_3(\mathbf{H}^{(2)}) + \frac{1}{6} (b_6 - 2b_5) J_3(\mathbf{H}^{(3)}) + \frac{1}{3} b_5 J_3(\mathbf{H}^{(2)} + \mathbf{H}^{(3)}).
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Используемые в выражении (2.5) инварианты тензоров (2.4) вычисляются по соотношениям $J_1(\mathbf{H}^{(\alpha)}) = \mathbf{H}^{(\alpha)} \cdot \cdot \mathbf{E}$; $J_2(\mathbf{H}^{(\alpha)}) = \mathbf{H}^{(\alpha)} \cdot \cdot \mathbf{H}^{(\alpha)}$; $J_3(\mathbf{H}^{(\alpha)}) = \det(\mathbf{H}^{(\alpha)})$. В выражении для упругого потенциала (2.5) $J_3(\mathbf{H}^{(2)} + \mathbf{H}^{(3)})$ — смешанный инвариант тензоров $\mathbf{H}^{(2)}$ и $\mathbf{H}^{(3)}$, присутствие которого позволяет учитывать взаимное влияние процессов, происходящих в собственных подпространствах $2D$ и $3D$.

Связь между напряжениями и деформациями в собственных подпространствах (2.4) для кубического материала имеет вид:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Sigma}^{(1)} &= \left[N_1 J_1(\mathbf{H}^{(1)}) + \frac{1}{6} \left(b_1 J_1^2(\mathbf{H}^{(1)}) + b_2 J_2(\mathbf{H}^{(2)}) + b_3 J_2(\mathbf{H}^{(3)}) \right) \right] \mathbf{I}^0, \\
\boldsymbol{\Sigma}^{(2)} &= \left(N_2 + \frac{1}{3\sqrt{3}} b_2 J_1(\mathbf{H}^{(1)}) \right) \mathbf{H}^{(2)} + \frac{1}{3} b_4 \mathbf{Q}_2^{(2)} + \frac{1}{3} b_5 \mathbf{Q}_3^{(2)}, \\
\boldsymbol{\Sigma}^{(3)} &= \left(N_3 + \frac{1}{3\sqrt{3}} b_3 J_1(\mathbf{H}^{(1)}) \right) \mathbf{H}^{(3)} + \frac{2}{3} b_5 \mathbf{P}^{(3)} + \frac{1}{6} b_6 \mathbf{Q}_3^{(3)},
\end{aligned} \tag{2.6}$$

где тензор $\mathbf{P}^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{6}} h_1 h_3 \mathbf{I}^3 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{6}} h_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} h_2 \right) h_4 \mathbf{I}^4 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{6}} h_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} h_2 \right) h_5 \mathbf{I}^5$ обладает свойством: $\mathbf{H}^{(3)} \cdot \cdot \mathbf{P}^{(3)} = \mathbf{H}^{(2)} \cdot \cdot \mathbf{Q}_2^{(3)}$.

Анализ нелинейных эффектов, описываемых моделью анизотропного материала с полиномиальным упругим потенциалом (2.5) при малых деформациях, проведен в работе [15]. Для конечных деформаций, принадлежащих первому собственному подпространству, когда $\mathbf{H}^{(1)} = h_0 \mathbf{I}^0$, $\mathbf{H}^{(2)} \equiv \mathbf{0}$ и $\mathbf{H}^{(3)} \equiv \mathbf{0}$, возникают только гидростатические напряжения $\boldsymbol{\Sigma}^{(1)} = \left[N_1 J_1(\mathbf{H}^{(1)}) + \frac{1}{6} b_1 J_1^2(\mathbf{H}^{(1)}) \right] \mathbf{I}^0$, нелинейно зависящие от чисто объемных деформаций h_0 . Если деформации принадлежат второму собственному подпространству, т.е. $\mathbf{H}^{(1)} \equiv \mathbf{0}$, $\mathbf{H}^{(2)} = h_1 \mathbf{I}^1 + h_2 \mathbf{I}^2$ и $\mathbf{H}^{(3)} \equiv \mathbf{0}$, то возникают напряжения $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}^{(1)} + \boldsymbol{\Sigma}^{(2)}$, $\boldsymbol{\Sigma}^{(1)} = \frac{1}{6} b_2 J_2(\mathbf{H}^{(2)}) \mathbf{I}^0$, $\boldsymbol{\Sigma}^{(2)} = N_2 \mathbf{H}^{(2)} + \frac{1}{3} b_4 \mathbf{Q}_2^{(2)}$, которые сводятся к нормальным напряжениям на площадках, ортогональных главным осям анизотропии, и содержат гидростатическую составляющую. Касательные напряжения на таких площадках не возникают. Напряжения $\boldsymbol{\Sigma}^{(2)}$ оказываются несоосными тензору деформаций $\mathbf{H}^{(2)}$. Когда деформации целиком принадлежат третьему собственному подпространству, $\mathbf{H}^{(1)} \equiv \mathbf{0}$, $\mathbf{H}^{(2)} \equiv \mathbf{0}$ и $\mathbf{H}^{(3)} = h_3 \mathbf{I}^3 + h_4 \mathbf{I}^4 + h_5 \mathbf{I}^5$, т.е. являются деформациями чистого сдвига, возникают напряжения $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}^{(1)} + \boldsymbol{\Sigma}^{(2)} + \boldsymbol{\Sigma}^{(3)}$, $\boldsymbol{\Sigma}^{(1)} = \frac{1}{6} b_3 J_2(\mathbf{H}^{(3)}) \mathbf{I}^0$, $\boldsymbol{\Sigma}^{(2)} = \frac{1}{3} b_5 \mathbf{Q}_2^{(3)}$, $\boldsymbol{\Sigma}^{(3)} = N_3 \mathbf{H}^{(3)} + \frac{1}{6} b_6 \mathbf{Q}_3^{(3)}$. Это значит, что на площадках, перпендикулярных главным осям анизотропии, возникают нормальные напряжения второго порядка относительно сдвиговых деформаций. Напряжения в третьем собственном подпространстве $\boldsymbol{\Sigma}^{(3)}$ несоосны с тензором деформаций $\mathbf{H}^{(3)}$.

В работе [10] было сформулировано обобщение частного постулата А.А. Ильюшина на анизотропные материалы, имеющие неоднотелесные собственные подпространства, в соответствии с которым тензоры напряжений $\boldsymbol{\Sigma}^{(\alpha)}$ и деформаций $\mathbf{H}^{(\alpha)}$ в каждом собственном подпространстве соосны. Для того, чтобы модель материала удовлетворяла этой гипотезе, необходимо, чтобы упругий потенциал не зависел от третьих инвариантов тензоров деформаций $\mathbf{H}^{(\alpha)}$. В частности, модель (2.5) удовлетворяет обобщению частного постулата на анизотропные материалы, если коэффициенты b_4 , b_5 , b_6 положить равными нулю. Получим модель кубического

материала с шестью упругими константами

$$W = \frac{1}{2} \left(N_1 J_1^2(\mathbf{H}^{(1)}) + N_2 J_2(\mathbf{H}^{(2)}) + N_3 J_2(\mathbf{H}^{(3)}) \right) + \frac{1}{18\sqrt{3}} J_1(\mathbf{H}^{(1)}) \left(3b_1 J_1^2(\mathbf{H}^{(1)}) + 2b_2 J_2(\mathbf{H}^{(2)}) + 2b_3 J_2(\mathbf{H}^{(3)}) \right). \quad (2.7)$$

Связь между напряжениями и деформациями в этом случае имеет вид:

$$\begin{aligned} \Sigma^{(1)} &= \left[N_1 J_1(\mathbf{H}^{(1)}) + \frac{1}{6} \left(b_1 J_1^2(\mathbf{H}^{(1)}) + b_2 J_2(\mathbf{H}^{(2)}) + b_3 J_2(\mathbf{H}^{(3)}) \right) \right] \mathbf{I}^0, \\ \Sigma^{(2)} &= \left(N_2 + \frac{1}{3\sqrt{3}} b_2 J_1(\mathbf{H}^{(1)}) \right) \mathbf{H}^{(2)}, \\ \Sigma^{(3)} &= \left(N_3 + \frac{1}{3\sqrt{3}} b_3 J_1(\mathbf{H}^{(1)}) \right) \mathbf{H}^{(3)}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

В модели (2.8) во втором и третьем собственных подпространствах тензоры напряжений и деформаций оказываются соосными.

Отметим, что кубические материалы по своим упругим свойствам близки к изотропным материалам. При чисто объемных деформациях в материалах обоих типов возникают только гидростатические напряжения. При таких деформациях эти материалы неразличимы. Из модели нелинейной упругости для кубического материала можно получить модель изотропного материала, если в соотношениях (2.5), (2.6) установить следующие соотношения между константами: $2N_2 = N_3$, $b_2 = b_3$, $3b_4 = 2b_5 = b_6$.

3. Акустические волны в анизотропных материалах с кубической симметрией свойств

Рассмотрим распространение акустических волн в кубических материалах, модели которых определяются соотношениями (2.6) и (2.8). Следуя общепринятому подходу [4, 5, 6, 7], распространение акустических волн будем рассматривать как процесс наложения малых возмущений перемещений на некоторое начальное состояние материала, характеризующееся однородными полями конечных деформаций ($\mathbf{H}_i$) и напряжений (Σ_i).

В начальном состоянии на поле перемещений $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_i(\mathbf{x}_0, t_i)$ накладываются малые возмущения $\delta\mathbf{u}(\mathbf{x}_i, t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}_i, t_i)\delta t$. Будем считать, что градиенты возмущений также малы, а перемещения в конечном (возмущенном) состоянии определяются выражением

$$\mathbf{u}_f(\mathbf{x}, t_f) = \mathbf{u}_i(\mathbf{x}_0, t_i) + \delta\mathbf{u}(\mathbf{x}_i, t). \quad (3.1)$$

Динамические уравнения распространения возмущений перемещений в гипотупругой среде имеют вид

$$\nabla^i \delta\mathbf{K}_i \cdots \mathbf{C}(\mathbf{K}_i) - \Sigma_i \cdot \nabla^i (\nabla^i \cdot \delta\mathbf{u}) = \rho_0 \delta\ddot{\mathbf{u}}, \quad (3.2)$$

где ρ_0 — плотность материала в естественном (недеформированном) состоянии.

В уравнениях (3.2) $\delta\mathbf{K}_i \equiv \delta\mathbf{H}_i$ — вариация тензора деформаций, соответствующая возмущению перемещений $\delta\mathbf{u}(\mathbf{x}_i, t)$. В соответствии с (1.5) вариация тензора деформаций определяется выражением

$$\delta\mathbf{K}_i = \mathbf{W}\delta t = \frac{1}{2} (\nabla^i \mathbf{v} + \mathbf{v}\nabla^i) \delta t = \frac{1}{2} (\nabla^i \delta\mathbf{u} + \delta\mathbf{u}\nabla^i). \quad (3.3)$$

Тензор четвертого ранга $\left. \frac{\partial \Sigma}{\partial \mathbf{K}} \right|_{\mathbf{K}=\mathbf{K}_i} = \mathbf{C}(\mathbf{K}_i)$ имеет смысл обобщенного тензора жесткости материала. Для модели материала (2.6) при рассмотрении процессов, в которых $\mathbf{K}_i \equiv \mathbf{H}_i$, обобщенный тензор жесткости имеет вид:

$$\mathbf{C} = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=3} N_{\alpha} \mathbf{N}^{(\alpha)} + \sum_{\gamma=1}^{\gamma=3} \sum_{\beta=1}^{\beta=6} b_{\beta} \mathbf{H}_i^{(\gamma)} \cdot \cdot \mathbf{B}^{(\beta)}. \quad (3.4)$$

Для модели материала (2.8) в представлении (3.4) требуется изменять β от 1 до 3.

Рассмотрим возмущение поля перемещений, связанное с прохождением плоской монохроматической волны:

$$\delta \mathbf{u}(\mathbf{x}_i, \tau) = A \mathbf{p} \exp(i(k\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_i + \omega\tau)), \quad \tau = t - t_i, \quad (3.5)$$

где A — амплитуда, $\mathbf{p}$ — вектор поляризации единичной длины, k — волновое число, ω — частота, $\mathbf{n}$ — единичный вектор волновой нормали.

По полю перемещений (3.5) определим вариацию (3.3) тензора деформаций ($\delta \mathbf{K}_i = \delta \mathbf{H}_i$ в рассматриваемых изотропных процессах):

$$\delta \mathbf{H}_i = \frac{1}{2} i k (\mathbf{n} \delta \mathbf{u} + \delta \mathbf{u} \mathbf{n})$$

и ее градиент, входящий в (3.2),

$$\nabla^i \delta \mathbf{H}_i = -\frac{1}{2} k^2 \mathbf{n} (\mathbf{n} \delta \mathbf{u} + \delta \mathbf{u} \mathbf{n}). \quad (3.6)$$

Динамические уравнения (3.2) после подстановки в них соотношений (3.1) и (3.6) преобразуются к виду

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{p} = \rho_0 c^2 \mathbf{p},$$

где $\mathbf{A}$ — акустический тензор среды, $c = \frac{\omega}{k}$ — фазовая скорость распространения волны.

Акустический тензор среды с предварительными деформациями $\mathbf{H}_i$ определяется выражением

$$\mathbf{A}(\mathbf{n}, \mathbf{H}_i) = \mathbf{M}(\mathbf{n}, \mathbf{H}_i) - \Sigma_i \cdot \cdot \mathbf{n} \mathbf{n}, \quad (3.7)$$

где $\mathbf{M}(\mathbf{n}, \mathbf{H}_i) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{C}(\mathbf{H}_i) \cdot \mathbf{n}$ — обобщенный тензор Кристоффеля.

Тензоры $\mathbf{A}(\mathbf{n}, \mathbf{H}_i)$ и $\mathbf{M}(\mathbf{n}, \mathbf{H}_i)$ определяются свойствами среды и зависят как от направления распространения волны, так и от предварительных деформаций $\mathbf{H}_i$. Из уравнений (3.7) следует, что значение $\rho_0 c^2$ является собственным значением акустического тензора $\mathbf{A}(\mathbf{n}, \mathbf{H}_i)$, а вектор поляризации — его собственным вектором.

При отсутствии предварительных деформаций, когда начальное состояние совпадает с естественным, в кубическом материале наряду с продольной волной распространяются две поперечные волны с взаимно перпендикулярными векторами поляризации и различными скоростями. Скорости их распространения зависят от свойств материала и от направления распространения волны $\mathbf{n}$. Выражения для фазовых скоростей распространения акустических волн в кубическом материале для волны, распространяющейся вдоль главной оси анизотропии $\mathbf{n} = \mathbf{a}_3$, имеют вид

$$\rho_0 c_l^2 = \frac{1}{3} (N_1 + 2N_2), \quad \rho_0 c_{t1}^2 = \rho_0 c_{t2}^2 = \frac{N_3}{2}. \quad (3.8)$$

Рассмотрим предварительные деформации кубического материала, расположенные в его упругих собственных подпространствах. В первом случае начальное состояние определим полем перемещений $\mathbf{u}_i = (\lambda(t_i) - 1) \mathbf{x}_i$, где λ — кратность удлинений при объемной деформации. В этом случае тензор логарифмических деформаций имеет диадное разложение

$$\mathbf{H}_i = \ln \lambda (\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_3) = h_0 \mathbf{I}^0, \quad h_0 = \sqrt{3} \ln \lambda,$$

и расположен в первом упругом собственном подпространстве. Напряжения, определяемые по формулам (2.6), равны

$$\Sigma_i = \left(N_1 h_0 + \frac{1}{2} b_1 h_0^2 \right) \mathbf{I}^0. \quad (3.9)$$

Рассмотрим волну, распространяющуюся в направлении вектора $\mathbf{n} = \mathbf{a}_3$. Акустический тензор (3.7) с учетом выражений (3.4) и (3.9) записывается в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{n}, \mathbf{H}_i) = & \frac{1}{3} \left(N_1 + 2N_2 + (b_1 + 2b_2)h_0 - \sqrt{3} \left(N_1 + \frac{b_1}{2} h_0 \right) h_0 \right) \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_3 + \\ & + \frac{1}{2} \left(N_3 + \frac{1}{3} b_3 h_0 \right) (\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Акустический тензор (3.10) имеет два различных собственных значения, которые определяют скорости распространения продольной c_l и поперечных $c_{t1} = c_{t2}$ волн. Ось анизотропии $\mathbf{a}_1$ является акустической осью кубического материала. Выражения для скоростей распространения волн имеют вид

$$\begin{aligned} \rho_0 c_l^2 = & \frac{1}{3} \left(N_1 + 2N_2 + (b_1 + 2b_2)h_0 - \sqrt{3} \left(N_1 + \frac{b_1}{2} h_0 \right) h_0 \right), \\ \rho_0 c_{t1}^2 = \rho_0 c_{t2}^2 = & \frac{1}{2} \left(N_3 + \frac{1}{3} b_3 h_0 \right). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Фазовые скорости (3.11) не содержат константы b_4, b_5, b_6 , поэтому при использовании модели кубического материала (2.8), удовлетворяющей обобщению частного постулата на анизотропные материалы, при предварительной чисто объемной деформации скорости распространения продольных и поперечных волн также определяются выражениями (3.11).

На рис. 1 приведены угловые зависимости фазовых скоростей $c_l(\varphi)$, $c_{t1}(\varphi)$ и $c_{t2}(\varphi)$ для различных направлений распространения волны, когда вектор волновой нормали расположен в плоскости $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ и определяется выражением $\mathbf{n} = \cos \varphi \mathbf{a}_1 + \sin \varphi \mathbf{a}_2$. Предварительные деформации определяются значением $\lambda = 0,975$ (всестороннее сжатие). Здесь же пунктиром приведены угловые зависимости фазовых скоростей для случая, когда предварительные деформации отсутствуют. Фазовые скорости, вычисляемые по формулам (3.11), на рис. 1 соответствуют значению угла $\varphi = 90^\circ$. Графики построенных угловых зависимостей показывают, что всестороннее сжатие не приводит к изменению формы построенных кривых.

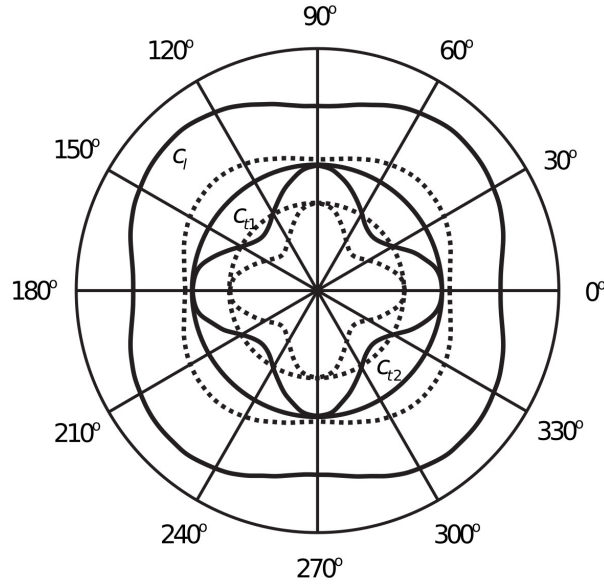


Рис. 1: Угловые зависимости фазовых скоростей $c_l(\varphi)$, $c_{t1}(\varphi)$ и $c_{t2}(\varphi)$ при предварительном всестороннем сжатии

Рассмотрим случай, когда начальное состояние определяется тензором деформаций

$$\mathbf{H}_i = \ln \lambda (\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2) = h_2 \mathbf{I}^2, \quad h_2 = \sqrt{2} \ln \lambda,$$

который расположен во втором упругом собственном подпространстве кубического материала и определяет состояние растяжения–сжатия в главных осях анизотропии. При таком деформированном состоянии напряжения (2.6) определяются выражениями

$$\Sigma_i = \frac{1}{6} b_2 h_2^2 \mathbf{I}^0 - \frac{1}{2\sqrt{6}} b_4 h_2^2 \mathbf{I}^1 + N_2 h_2 \mathbf{I}^2. \quad (3.12)$$

Пусть волна распространяется в направлении, перпендикулярном плоскости деформаций, когда волновой вектор $\mathbf{n} = \mathbf{a}_3$. На основании соотношений (3.4), (3.7) и (3.12) акустический тензор определяется выражением

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{n}, \mathbf{H}_i) = & \frac{1}{3} \left(N_1 + 2N_2 - \frac{1}{2} \left(\frac{b_2}{\sqrt{3}} - b_4 \right) h_2^2 \right) \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_3 + \\ & + \frac{1}{2} \left(N_3 + \frac{1}{3\sqrt{2}} b_5 h_2 \right) \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1 + \frac{1}{2} \left(N_3 - \frac{1}{3\sqrt{2}} b_5 h_2 \right) \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2. \end{aligned} \quad (3.13)$$

В соответствии с выражением для акустического тензора (3.13) в кубическом материале, определяемом моделью (2.6), при рассматриваемых предварительных деформациях распространяется продольная волна с вектором поляризации $\mathbf{p} = \mathbf{a}_3$ и фазовой скоростью

$$\rho_0 c_l^2 = \frac{1}{3} \left(N_1 + 2N_2 - \frac{1}{2} \left(\frac{b_2}{\sqrt{3}} - b_4 \right) h_2^2 \right) \quad (3.14)$$

и две поперечные волны: с вектором поляризации $\mathbf{p} = \mathbf{a}_1$ и фазовой скоростью

$$\rho_0 c_{t1}^2 = \frac{1}{2} \left(N_3 + \frac{1}{3\sqrt{2}} b_5 h_2 \right) \quad (3.15)$$

и с вектором поляризации $\mathbf{p} = \mathbf{a}_2$ и фазовой скоростью

$$\rho_0 c_{t2}^2 = \frac{1}{2} \left(N_3 - \frac{1}{3\sqrt{2}} b_5 h_2 \right). \quad (3.16)$$

Выражения для фазовых скоростей (3.14)–(3.16) содержат константы b_4 и b_5 , поэтому при использовании модели кубического материала, удовлетворяющей обобщению частного постулата на анизотропные материалы, фазовые скорости продольных и поперечных волн вычисляются по формулам:

$$\rho_0 c_l^2 = \frac{1}{3} \left(N_1 + 2N_2 - \frac{b_2}{2\sqrt{3}} h_2^2 \right), \quad \rho_0 c_{t1}^2 = \rho_0 c_{t2}^2 = \frac{1}{2} N_3. \quad (3.17)$$

Выражения (3.17) показывают, что в этом случае не прогнозируется изменение величины фазовой скорости распространения поперечных волн по отношению к начальному недеформированному состоянию.

Эти выводы иллюстрируются рис. 2, на котором приведены угловые зависимости фазовых скоростей для различных направлений распространения волны, когда вектор волновой нормали расположен в плоскости $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_3$ и определяется выражением $\mathbf{n} = \cos \varphi \mathbf{a}_1 + \sin \varphi \mathbf{a}_3$. Предварительные деформации определяются значением $\lambda = 0,975$. На этих рисунках пунктиром приведены угловые зависимости фазовых скоростей при отсутствии предварительных деформаций. Фазовые скорости, вычисляемые по формулам (3.14)–(3.17), на рис. 2 соответствуют значению угла $\varphi = 90^\circ$. На рис. 2,а графики построены для модели материала (2.6), а на рис. 2,б — для модели материала (2.8), удовлетворяющей обобщению частного постулата на анизотропные материалы.

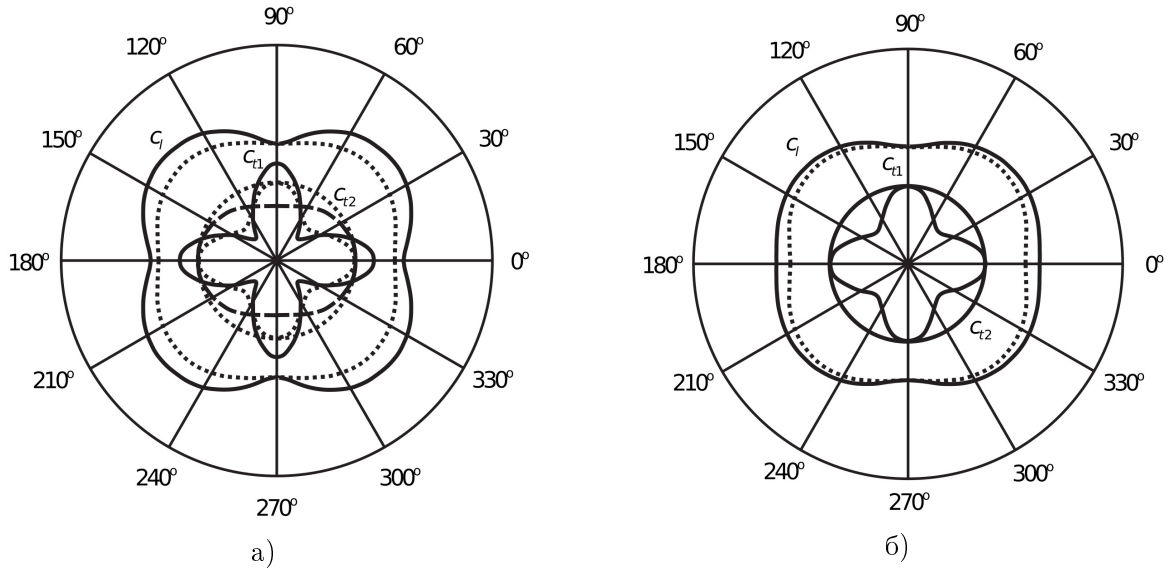


Рис. 2: Угловые зависимости фазовых скоростей $c_l(\varphi)$, $c_{t1}(\varphi)$ и $c_{t2}(\varphi)$ при предварительном растяжении-сжатии в плоскости $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$

Рассмотрим случай, когда начальное состояние определяется тензором деформаций

$$\mathbf{H}_i = \ln \lambda (\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_1) = h_3 \mathbf{I}^3, \quad h_3 = \sqrt{2} \ln \lambda,$$

который расположен в третьем упругом собственном подпространстве кубического материала и определяет состояние чистого сдвига в главных осях анизотропии. При таком деформированном состоянии напряжения (2.6) определяются выражениями

$$\Sigma_i = \frac{1}{6} b_3 h_3^2 \mathbf{I}^0 - \frac{1}{3\sqrt{6}} b_5 h_3^2 \mathbf{I}^1 + N_3 h_3 \mathbf{I}^3. \quad (3.18)$$

Пусть волна распространяется в направлении, перпендикулярном плоскости деформаций, когда волновой вектор $\mathbf{n} = \mathbf{a}_3$. На основании соотношений (3.4), (3.7) и (3.18) акустический тензор определяется выражением

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{n}, \mathbf{H}_i) = & \frac{1}{3} \left(N_1 + 2N_2 - \left(\frac{b_3}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{3}b_5 \right) h_3^2 \right) \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_3 + \\ & + \frac{1}{2} N_3 (\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2) + \frac{1}{12\sqrt{2}} b_6 h_3 (\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_1). \end{aligned} \quad (3.19)$$

В соответствии с выражением для акустического тензора (3.19) в кубическом материале, определяемом моделью (2.6), при рассматриваемых предварительных деформациях распространяется продольная волна с вектором поляризации $\mathbf{p} = \mathbf{a}_3$ и фазовой скоростью

$$\rho_0 c_l^2 = \frac{1}{3} \left(N_1 + 2N_2 - \left(\frac{b_3}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{3}b_5 \right) h_3^2 \right) \quad (3.20)$$

и две поперечные волны: с вектором поляризации $\mathbf{p} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2)$ и фазовой скоростью

$$\rho_0 c_{t1}^2 = \frac{1}{2} \left(N_3 + \frac{1}{6\sqrt{2}} b_6 h_3 \right) \quad (3.21)$$

и с вектором поляризации $\mathbf{p} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2)$ и фазовой скоростью

$$\rho_0 c_{t2}^2 = \frac{1}{2} \left(N_3 - \frac{1}{6\sqrt{2}} b_6 h_3 \right). \quad (3.22)$$

Выражения для фазовых скоростей (3.20)–(3.21) содержат константы b_5 и b_6 , поэтому при использовании модели кубического материала, удовлетворяющей обобщению частного постулата на анизотропные материалы, фазовые скорости продольных и поперечных волн вычисляются по формулам:

$$\rho_0 c_l^2 = \frac{1}{3} \left(N_1 + 2N_2 - \frac{b_3}{2\sqrt{3}} h_3^2 \right), \quad \rho_0 c_{t1}^2 = \rho_0 c_{t2}^2 = \frac{1}{2} N_3. \quad (3.23)$$

Выражения (3.23) показывают, что и в случае, когда начальные деформации лежат в третьем упругом собственном подпространстве, модель материала (2.8) не прогнозирует изменение величины фазовой скорости распространения поперечных волн по отношению к начальному недеформированному состоянию.

Эти выводы иллюстрируются рис. 3, на котором приведены угловые зависимости фазовых скоростей для различных направлений распространения волны, когда вектор волновой нормали расположен в плоскости $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_3$ и определяется выражением $\mathbf{n} = \cos \varphi \mathbf{a}_1 + \sin \varphi \mathbf{a}_3$. Предварительные деформации определяются значением $\lambda = 0,975$. На этих рисунках пунктиром приведены угловые зависимости фазовых скоростей при отсутствии предварительных деформаций. Фазовые скорости, вычисляемые по формулам (3.21)–(3.23), на рис. 3 соответствуют значению угла $\varphi = 90^\circ$. На рис. 3,а графики построены для модели материала (2.6), а на рис. 3,б — для модели материала (2.8), удовлетворяющей обобщению частного постулата на анизотропные материалы.

Выражения для фазовых скоростей в (3.8), (3.11), (3.14)–(3.16), (3.20)–(3.22) достаточны для определения всех девяти констант модели (2.6) по измеренным скоростям распространения продольных и поперечных волн. Выражения (3.8), (3.11), (3.17), (3.23), полученные для модели (2.8), удовлетворяющей обобщению частного постулата на анизотропные материалы, также пригодны для идентификации этой модели по результатам динамических экспериментов.

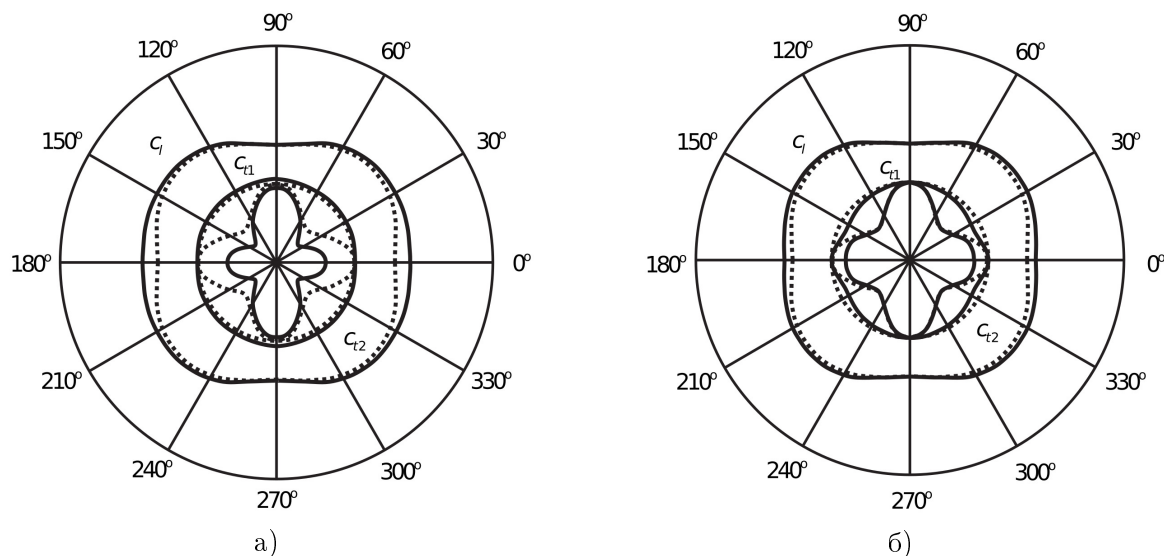


Рис. 3: Угловые зависимости фазовых скоростей $c_l(\varphi)$, $c_{t1}(\varphi)$ и $c_{t2}(\varphi)$ при предварительном чистом сдвиге в плоскости $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$

4. Выводы

Для двух моделей гипопругого анизотропного материала с кубической симметрией свойств проведен анализ влияния предварительных конечных деформаций на скорости распространения акустических волн. Показано, что при предварительных чисто объемных деформациях, когда тензоры деформаций и напряжений расположены в первом упругом собственном подпространстве кубического материала, принятие гипотезы о справедливости обобщения частного постулата на анизотропные материалы не влияет на результаты расчетов фазовых скоростей распространения акустических волн. При деформациях, расположенных во втором и третьем упругих собственных подпространствах, при расчете по модели (2.6), содержащей девять упругих постоянных материала, материал приобретает дополнительную акустическую анизотропию, что проявляется в изменении формы графиков угловых зависимостей фазовых скоростей продольной и поперечных волн. При расчете по модели (2.8), удовлетворяющей обобщению частного постулата на анизотропные материалы, для волн, распространяющихся в направлении вектора $\mathbf{n} = \mathbf{a}_3$, не удастся описать изменение фазовых скоростей распространения поперечных волн.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Thurston R. N., Brugger K. Third-order elastic constants and the velocity of small amplitude waves in homogeneously stressed media // Phys. Rev. 1964. Vol 133. P. A1604–A1610.
2. Brugger K. Pure modes for elastic waves in crystals // J. Appl. Phys. 1965. Vol. 36. № 3. P. 759-768.
3. Черных К. Ф. Введение в анизотропную упругость. М.: Наука, 1988. 192 с.
4. Knowles K. M. The biaxial moduli of cubic materials subjected to an equi-biaxial elastic strain // Journal of Elasticity. 2016. Vol. 124. P. 1-25.
5. Duffy T. S. Single-crystal elastic properties of minerals and related materials with cubic symmetry // American Mineralogist. 2018. Vol. 103. No. 6. P. 977-988.

6. Kambouchev N., Fernandez J., Radovitzky R. A polyconvex model for materials with cubic symmetry // *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*. 2007. Vol. 15. N. 5. P. 451-468.
7. Kube C.M., Turner J.A. Estimates of nonlinear elastic constants and acoustic nonlinearity parameters for textured polycrystals // *Journal of Elasticity*. 2016. Vol. 122. N. 2. P. 157-177.
8. Kube C.M. Scattering of harmonic waves from a nonlinear elastic inclusion // *The Journal of the Acoustical Society of America*. 2017. Vol. 141, № 6.
9. Маркин А. А., Соколова М. Ю. Термомеханика упругопластического деформирования. М.: Физматлит, 2013. 320 с.
10. Маркин А. А., Соколова М. Ю., Христич Д. В. Постулат А. А. Ильюшина для анизотропных материалов и вариант определяющих соотношений // *Известия РАН. Механика твердого тела*. 2011. № 1. С. 38-45.
11. Маркин А. А., Толоконников Л. А. Меры процессов конечного деформирования // *Известия Северо-Кавказского научного центра высшей школы. Естественные науки*. 1987. № 2. С. 49-53.
12. Маркин А. А., Соколова М. Ю., Христич Д. В. Нелинейная упругость кубических кристаллов // *Упругость и неупругость. Материалы Международного научного симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвященного 110-летию со дня рождения А. А. Ильюшина (Москва, 20–21 января 2021 года)* / Под ред. проф. Г. Л. Бровко, проф. Д. В. Георгиевского, проф. И. Н. Молодцова. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2021. С. 100-110.
13. Остросаблин Н. И. О структуре тензора модулей упругости. Собственные упругие состояния // *Динамика твердого деформируемого тела. Сибирское отделение АН СССР. Ин-т гидродинамики*. 1984. В. 66. С. 113-125.
14. Рыхлевский Я. О законе Гука // *Прикладная математика и механика*. 1984. Т. 48. В. 3. С. 420-435.
15. Соколова М. Ю., Христич Д. В. Конечные деформации нелинейно упругих анизотропных материалов // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2021. № 70. С. 103-116.
16. Гузь А. Н. Упругие волны в телах с начальными напряжениями / В двух томах. Киев: Наукова Думка, 1986.
17. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука. 1980. 512 с.

REFERENCES

1. Thurston, R. N. & Brugger, K. 1964. "Third-order elastic constants and the velocity of small amplitude waves in homogeneously stressed media", *Phys. Rev.*, vol 133, pp. A1604–A1610.
2. Brugger, K. 1965, "Pure modes for elastic waves in crystals", *J. Appl. Phys.*, vol. 36, no. 3, pp. 759-768.
3. Chernykh, K. F. 1988. "Introduction to anisotropic elasticity", *Nauka, Moscow*. [in Russian].
4. Knowles, K. M. 2016. "The biaxial moduli of cubic materials subjected to an equi-biaxial elastic strain", *J. Elast.*, vol. 124, p. 1-25.

5. Duffy, T. S. 2018. "Single-crystal elastic properties of minerals and related materials with cubic symmetry", *American Mineralogist*, vol. 103, no. 6, p. 977-988.
6. Kambouchev, N., Fernandez, J. & Radovitzky, R. 2007. "A polyconvex model for materials with cubic symmetry", *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, vol. 15, n. 5, p. 451-468.
7. Kube, C.M. & Turner, J.A. 2016. "Estimates of nonlinear elastic constants and acoustic nonlinearity parameters for textured polycrystals", *J. Elast.*, vol. 122, no. 2, pp. 157-177.
8. Kube, C.M. 2017. "Scattering of harmonic waves from a nonlinear elastic inclusion", *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 141, no. 6.
9. Markin, A.A. & Sokolova, M.Yu. 2015. "Thermomechanics of elastoplastic deformation", *Cambridge International Science Publishing, Cambridge*.
10. Markin, A.A., Sokolova, M.Yu. & Khristich, D.V. 2011. "A.A. Il'yushin's postulate for anisotropic materials and a version of constitutive relations", *Mech. Solids*, vol. 46, no. 1, p. 30-35.
11. Markin, A.A. & Tolokonnikov, L.A. 1987. "Measures of the finite deformation processes", *News of the North Caucasus Scientific Center of Higher Education. Natural Sciences*, n. 2, p. 49-53 [in Russian].
12. Markin, A.A., Sokolova, M.Yu. & Khristich, D.V. 2021. "Nonlinear elasticity of cubic crystals", *Elasticity and anelasticity. Proceedings of the International scientific symposium on problems of the mechanics of deformable bodies dedicated to the 110th anniversary from the birthday of A.A. Ilyushin (Moscow, January 20-21, 2021)*. Edited by Prof. G.L. Brovko, Prof. D.V. Georgievskii, Prof. I.N. Molodtsov. Moscow, Moscow University Press, p. 100-110 [in Russian].
13. Ostrosablin, N.I. 1984. "On the structure of the elastic moduli tensor. Eigen elastic states", *Dynamics of a solid deformable body*, vol. 66, p. 113-125 [in Russian].
14. Rykhlevsky, J. 1984. "About Hooke's Law", *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 48, n. 3, p. 420-435 [in Russian].
15. Sokolova, M.Yu. & Khristich, D.V., 2021. "Finite strains of nonlinear elastic anisotropic materials", *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]*, no. 70, p. 103-116 [in Russian].
16. Guz', A.N. 1986. "Elastic waves in bodies with initial stresses", in two volumes, *Naukova Dumka, Kiev*, [in Russian].
17. Lurie, A.I. 2012. "Non-linear theory of elasticity", *North Holland*.

Получено: 27.03.2024

Принято в печать: 28.06.2024

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 25. Выпуск 2.

УДК 539.3:534.26

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-2-350-358

Излучение звука цилиндром, обтекаемым стационарным потоком идеальной жидкости¹

Л. А. Толоконников, С. Л. Толоконников

Толоконников Лев Алексеевич — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: TolokonnikovLA@mail.ru

Толоконников Сергей Львович — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: tolsl@mail.ru

Аннотация

В статье рассматривается задача об акустическом излучении цилиндра, обтекаемого стационарным потоком идеальной жидкости.

Полагается, что скорость набегающего потока значительно меньшей скорости звука. Поверхность цилиндра совершает гармонические колебания.

Получено приближенное аналитическое решение задачи, построенное с использованием потенциала скорости набегающего на тело потока и потенциала скорости акустического поля неподвижного излучателя.

Рассмотрены частные случаи излучения звука цилиндром.

Представлены результаты численных расчетов диаграмм направленности акустического поля в дальней зоне при разных значениях отношения скорости потока к скорости звука и волнового размера цилиндра.

Ключевые слова: акустическое излучение, цилиндр, идеальная жидкость, потенциальное течение

Библиография: 14 названий.

Для цитирования:

Л. А. Толоконников, С. Л. Толоконников. Излучение звука цилиндром, обтекаемым стационарным потоком идеальной жидкости // Чебышевский сборник, 2024, т.25, вып.2, с. 350–358.

¹Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства просвещения РФ по теме «Теоретико-числовые методы в приближенном анализе и их приложения в механике и физике» (соглашение № 073-00033-24-01 от 09.02.2024).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 25. No. 2.

UDC 539.3:534.26

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-2-350-358

Sound radiation of a cylinder streamlined by a stationary flow of an ideal liquid

L. A. Tolokonnikov, S. L. Tolokonnikov

Tolokonnikov Lev Alexeevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State University (Tula).

e-mail: TolokonnikovLA@mail.ru

Tolokonnikov Sergey Lvovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: tols@mail.ru

Abstract

In the article the problem of the acoustic radiation of a cylinder streamlined by a stationary flow of an ideal liquid is considered

It is assumed that the velocity of the incoming flow is significantly lower than the speed of sound. The surface of the spheroid makes harmonic vibrations.

An approximate analytical solution of the problem was obtained with using the speed potential of the oncoming on the body flow and the speed potential of the stationary radiator acoustic field.

Special cases of sound radiation by a cylinder are considered.

The results of numerical calculations of polar diagrams of the acoustic pressure distribution on the surface of a spheroid at different values of the ratio of the flow velocity to the speed of sound and the wave size of the cylinder are presented.

Keywords: acoustic radiation, cylinder, ideal fluid, potential flow

Bibliography: 14 titles.

For citation:

L. A. Tolokonnikov, S. L. Tolokonnikov, 2024, "Sound radiation of a cylinder streamlined by a stationary flow of an ideal liquid", *Chebyshevskii sbornik*, vol.25, no.2, pp. 350–358.

1. Введение

Анализ звуковых полей, возникающих при излучении элементов различных конструкций, имеет важное значение во многих приложениях акустики, а элементы многих таких конструкций имеют цилиндрическую форму.

Задача об излучении звука круговым цилиндром бесконечной длины в идеальной жидкости хорошо известна (см., например, [1 – 3]). Определены акустические характеристики таких излучателей при произвольном распределении колебательной скорости на их поверхности, а также в частных случаях. В [4, 5] рассматривалось акустическое излучение цилиндра в вязкой жидкости. Оценено влияние вязкости среды на излучение звука. В ряде работ исследовалось излучение звука цилиндром конечной длины, находящихся в идеальной жидкости [6 – 11]. Во всех этих работах полагалось, что цилиндрические излучатели являются неподвижными и помещены в среду, находящуюся в состоянии покоя.

В настоящей работе рассматривается задача об акустическом излучении цилиндра, обтекаемого стационарным потоком идеальной жидкости, скорость которого значительно меньшей скорости звука.

2. Постановка задачи

Рассмотрим круговой цилиндр бесконечной длины и радиуса a , на который перпендикулярно его оси вращения набегают стационарный поток идеальной сжимаемой жидкости. Жидкость характеризуется плотностью ρ и скоростью звука c . Полагаем, что скорость потока много меньше скорости звука ($u \ll c$). Поэтому будем считать, что в результате обтекания цилиндра потоком вихреобразование не происходит и поток является потенциальным.

Пусть осью вращения цилиндра является ось z прямоугольной декартовой системы координат x, y, z , а поток набегают вдоль оси x .

Свяжем с координатами x, y, z цилиндрические координаты r, φ, z .

Цилиндр излучает гармонические звуковые волны с произвольным распределением нормальной составляющей колебательной скорости на его поверхности

$$V_n = f(\varphi) \exp(-i\omega t),$$

где ω — круговая частота; t — время.

Определим акустическое поле цилиндрического излучателя.

3. Аналитическое решение задачи

Получим приближенное аналитическое решение задачи методом Блохинцева [12].

Обозначим через Ψ и Φ потенциалы скорости акустического поля ($\mathbf{v} = \nabla\Psi$) и невозмущенного звуком потока ($\mathbf{u} = \nabla\Phi$) соответственно. Положим $\Psi = \psi \exp(-i\omega t)$.

Согласно [12] распространение гармонических звуковых волн в потенциальном потоке идеальной жидкости описывается уравнением

$$\Delta\psi + k^2\psi + 2i\frac{k}{c}(\nabla\Phi \cdot \nabla\psi) = 0, \quad (1)$$

где $k = \omega/c$ — волновое число. Уравнение (1) получено при пренебрежении членами порядка u^2/c^2 .

Искомый потенциал скорости акустического поля ψ , являющийся решением уравнения (1), должен удовлетворять граничному условию на поверхности тела ($v_n|_S = V_n|_S$)

$$\left. \frac{\partial\psi}{\partial r} \right|_{r=a} = f(\varphi) \quad (2)$$

и условию излучения на бесконечности [2].

Так как скорость потока $u \ll c$, то будем полагать, что жидкость является несжимаемой [12].

Потенциал Φ является решением уравнения Лапласа

$$\Delta\Phi = 0 \quad (3)$$

и должен удовлетворять граничному условию, которое заключается в равенстве нулю нормальной скорости частиц жидкости на поверхности абсолютно жесткого тела

$$\left. \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right|_{r=a} = 0, \quad (4)$$

а в бесконечно удаленной точке (в координатной системе x, y, z) $\nabla\Phi = (0, 0, u_\infty)$, где u_∞ — скорость потока на бесконечности.

Выражение для потенциала Φ имеет вид [13]

$$\Phi = u_{\infty} \left(r + \frac{a^2}{r} \right) \cos \varphi. \quad (5)$$

Приближенное аналитическое решение уравнения (1) будем искать в виде

$$\psi = \psi_0 \exp(-ikc^{-1}\Phi), \quad (6)$$

где ψ_0 — потенциал скорости акустического поля цилиндрического излучателя в отсутствии потока.

Потенциал ψ_0 , являющийся решением уравнения Гельмгольца

$$\Delta\psi_0 + k^2\psi_0 = 0, \quad (7)$$

удовлетворяющий граничному условию при произвольном распределении колебательной скорости на поверхности цилиндра

$$\left. \frac{\partial\psi_0}{\partial r} \right|_{r=a} = g(\varphi) \quad (8)$$

и условию излучения на бесконечности, будем искать в виде

$$\psi_0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n H_n(kr) e^{in\varphi}, \quad (9)$$

где H_n — цилиндрическая функция Ганкеля первого рода порядка n .

Подставив (9) в (8), умножим обе части полученного равенства на $e^{-im\varphi}$ и проинтегрируем по φ в пределах от 0 до 2π . В результате находим

$$A_n = \frac{1}{2\pi k H'_n(ka)} \int_0^{2\pi} g(\varphi) e^{-in\varphi} d\varphi. \quad (10)$$

Здесь штрих означает дифференцирование по аргументу.

Подставляя выражение (6) в уравнение (1) и принимая во внимание (3) и (7), убеждаемся, что (6) удовлетворяет (1) при пренебрежении членами порядка u^2/c^2 .

Теперь подставим (6) в граничное условие (2). С учетом условий (4) и (8) находим, что (6) удовлетворяет условию (2) тогда, когда

$$g(\varphi) = f(\varphi) e^{ikc^{-1}\Phi|_{r=a}}. \quad (11)$$

С учетом (11) и (5) выражение (10) принимает вид

$$A_n = \frac{1}{2\pi k H'_n(ka)} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \exp[i(-n\varphi + 2kac^{-1}u_{\infty} \cos \varphi)] d\varphi. \quad (12)$$

Согласно [12] акустическое давление в каждой точке пространства определяется по формуле

$$p = \rho [i\omega\psi_0 - (\nabla\Phi \cdot \nabla\psi_0)] \exp(-ikc^{-1}\Phi). \quad (13)$$

Учитывая, что в системе координат r, φ, z $\nabla = \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial z}$, имеем

$$(\nabla\Phi \cdot \nabla\psi_0) = u_\infty \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{in\varphi} \left[\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) k H'_n(kr) \cos \varphi - \frac{in}{r^2} \left(r + \frac{a^2}{r}\right) H_n(kr) \sin \varphi \right].$$

На поверхности цилиндра акустическое давление определяется по формуле

$$p|_{r=a} = i \frac{\rho c}{a} \exp(-2ikac^{-1}u_\infty \cos \varphi) \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n H_n(kr) e^{in\varphi} (ka + 2nc^{-1}u_\infty \sin \varphi). \quad (14)$$

Рассмотрим дальнюю зону акустического поля ($kr \gg 1$). Воспользовавшись асимптотической формулой для функции Ганкеля первого рода при больших значениях аргумента [14]

$$H_n(kr) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{i(kr - \pi n/2 - \pi/4)},$$

из (13) получаем

$$p = \frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}} F(\varphi),$$

где

$$F(\varphi) = \frac{\rho c}{a} \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-i\pi/4} ka \left(1 - \frac{u_\infty}{c}\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^{n-1} A_n e^{in\varphi}. \quad (15)$$

4. Частные случаи

1. *Пульсирующий цилиндр.* Если распределение колебательной скорости не зависит от угла φ , то есть $f(\varphi) = V$, то из (12) находим

$$A_n = \frac{V}{2\pi k H'_n(ka)} \int_0^{2\pi} \exp[i(-n\varphi + 2kac^{-1}u_\infty \cos \varphi)] d\varphi. \quad (16)$$

Согласно (14) и (16) на поверхности цилиндра акустическое давление при излучении полосы определяется по формуле

$$p|_{r=a} = i \frac{\rho c V}{2\pi ka} \exp(-2ikac^{-1}u_\infty \cos \varphi) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{H_n(ka)}{H'_n(ka)} e^{in\varphi} (ka + 2nc^{-1}u_\infty \sin \varphi) \times \\ \times \int_0^{2\pi} \exp[i(-n\hat{\varphi} + 2kac^{-1}u_\infty \cos \hat{\varphi})] d\hat{\varphi}.$$

В дальней зоне акустического поля при излучении полосы на основании (15) и (16) имеем

$$F(\varphi) = \frac{\rho c V}{\pi \sqrt{2\pi}} e^{-i\pi/4} \left(1 - \frac{u_\infty}{c}\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\varphi} \frac{(-i)^{n-1}}{H'_n(ka)} \int_0^{2\pi} \exp[i(-n\hat{\varphi} + 2kac^{-1}u_\infty \cos \hat{\varphi})] d\hat{\varphi}. \quad (17)$$

2. *Линейный источник на цилиндре.* Предположим, что на поверхности абсолютно жесткого цилиндра находится линейный источник, расположенный вдоль образующей цилиндра $\varphi = \varphi_0$. При этом колебательная скорость $f(\varphi) = \frac{Q(\varphi_0)}{a} \delta(\varphi - \varphi_0)$, где $Q(\varphi_0)$ — объемная скорость источника, рассчитанная на единицу его длины; δ — дельта-функция Дирака.

Тогда, учитывая, что [2]

$$\int_0^{2\pi} h(\varphi) \delta(\varphi - \varphi_0) d\varphi = \begin{cases} h(\varphi_0), & \text{если } \varphi_0 \text{ внутри } [0, 2\pi], \\ h(\varphi_0)/2, & \text{если } \varphi_0 = 0 \text{ или } \varphi_0 = 2\pi, \end{cases}$$

из (12) получаем

$$A_n = \frac{Q(\varphi_0)}{2\pi k a H'_n(ka)} \exp[i(-n\varphi_0 + 2kac^{-1}u_\infty \cos \varphi_0)],$$

когда φ_0 находится внутри $[0, 2\pi]$. Если φ_0 принимает значение 0 или 2π , то в правую часть формулы следует добавить множитель $1/2$.

3. *Излучение полосы на цилиндре.* Пусть на поверхности цилиндра S находится полоса S_1 , расположенная между образующими цилиндра $\varphi = \varphi_1$ и $\varphi = \varphi_2$ и пульсирующая с нормальной колебательной скоростью постоянной амплитуды V , а остальная часть цилиндра S_2 является абсолютно жесткой. При этом $f(\varphi) = \begin{cases} V & \text{на } S_1, \\ 0 & \text{на } S_2. \end{cases}$

Тогда из (12) получаем

$$A_n = \frac{V}{2\pi k H'_n(ka)} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \exp[i(-n\varphi + 2kac^{-1}u_\infty \cos \varphi)] d\varphi. \quad (18)$$

Согласно (14) и (18) на поверхности цилиндра акустическое давление при излучении полосы определяется по формуле

$$p|_{r=a} = i \frac{\rho c V}{2\pi k a} \exp(-2ikac^{-1}u_\infty \cos \varphi) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{H_n(ka)}{H'_n(ka)} e^{in\varphi} (ka + 2nc^{-1}u_\infty \sin \varphi) \times \\ \times \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \exp[i(-n\hat{\varphi} + 2kac^{-1}u_\infty \cos \hat{\varphi})] d\hat{\varphi}.$$

В дальней зоне акустического поля при излучении полосы на основании (15) и (18) имеем

$$F(\varphi) = \frac{\rho c V}{\pi \sqrt{2\pi}} e^{-i\pi/4} \left(1 - \frac{u_\infty}{c}\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\varphi} \frac{(-i)^{n-1}}{H'_n(ka)} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \exp[i(-n\hat{\varphi} + 2kac^{-1}u_\infty \cos \hat{\varphi})] d\hat{\varphi}. \quad (19)$$

4. *Осциллирующий цилиндр.* Предположим, что абсолютно жесткий цилиндр колеблется около положения равновесия вдоль оси x . Тогда нормальная колебательная скорость на поверхности цилиндра определяется выражением $f(\varphi) = V \cos \varphi$, где V — скорость цилиндра при $\varphi = 0$.

В этом случае из (12) находим

$$A_n = \frac{V}{2\pi k H'_n(ka)} \int_0^{2\pi} \exp[i(-n\varphi + 2kac^{-1}u_\infty \cos \varphi)] \cos \varphi d\varphi.$$

5. Численные исследования

По формулам (17) и (19) были проведены расчеты диаграмм направленности акустического поля в дальней зоне $|F(\varphi)|$ для пульсирующего цилиндра и при излучении полосы на цилиндре. Поверхность S_1 была задана параметрами $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 2\pi$ для пульсирующего цилиндра и $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \pi/6$ при излучении полосы.

При расчетах значения волнового размера цилиндра ka полагались равными 1 и 5, а $u_\infty/c = 0, 0.1, 0.2$.

На рис. 1 представлены диаграммы направленности $|F(\varphi)|/\rho c V$ для пульсирующего цилиндра, а на рис. 2 — для пульсирующей полосы, рассчитанные при $ka = 1$ и $ka = 5$.

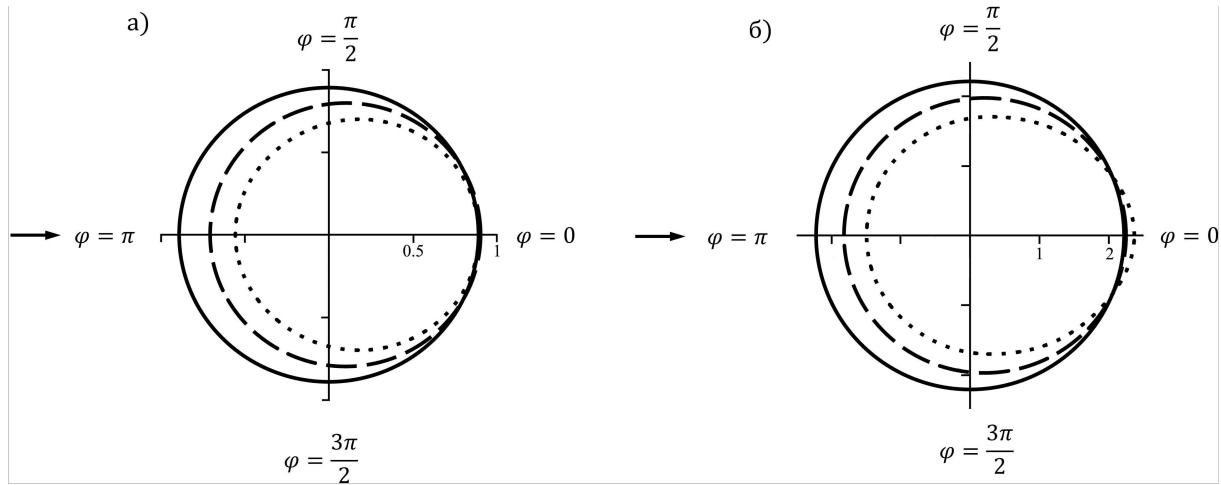


Рис. 1: Диаграммы направленности акустического поля пульсирующего цилиндра, а) $ka = 1$, б) $ka = 5$

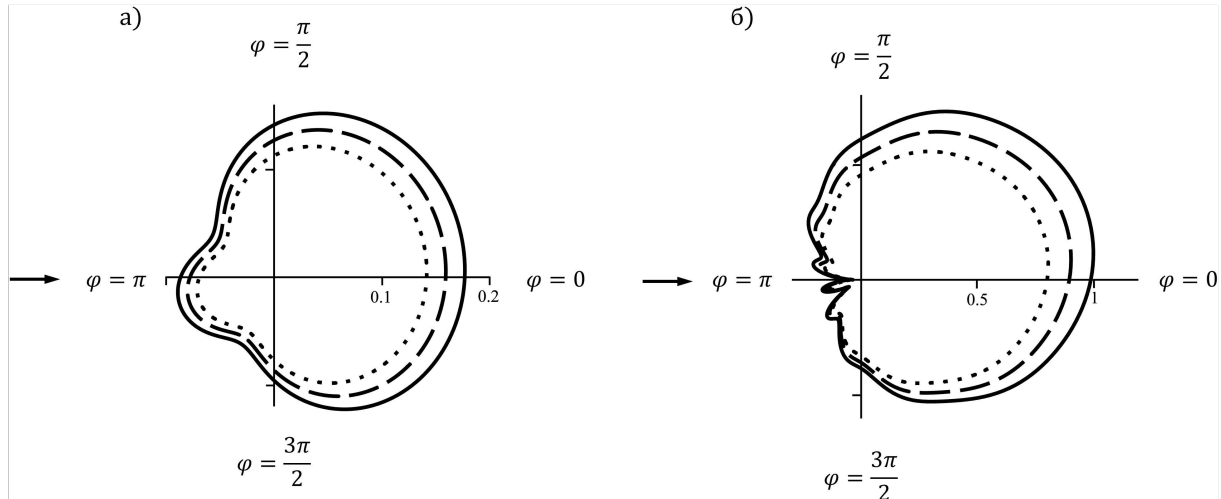


Рис. 2: Диаграммы направленности акустического поля при излучении полосы на поверхности цилиндра, а) $ka = 1$, б) $ka = 5$

Сплошные линии соответствуют случаю $u_\infty/c = 0$, штриховые — $u_\infty/c = 0.1$, пунктирные — $u_\infty/c = 0.2$. Стрелкой показано направление набегающего на цилиндр потока.

6. Заключение

В настоящей работе получено приближенное аналитическое решение задачи об акустическом излучении цилиндра, обтекаемого стационарным потоком идеальной жидкости, скорость которого значительно меньше скорости звука. Полученное аналитическое решение позволяет исследовать акустическое поле излучающего цилиндра при различных законах излучения. Проведенные численные расчеты выявили характерные черты влияния скорости набегающего потока жидкости и волнового размера цилиндра на акустические характеристики цилиндрического излучателя в случаях пульсирующего цилиндра и излучения полосы на поверхности цилиндра.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ржевкин С. Н. Курс лекций по теории звука. М.: Изд-во МГУ, 1960. 336 с.
2. Шендеров Е. Л. Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 352 с.
3. Скучик Е. Основы акустики. Том 2. М.: Мир, 1976. 544 с.
4. Цой П. И. Излучение цилиндра в вязкой среде // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1966. № 5. С. 82 – 92.
5. Кожин В. Н. Излучение и рассеяние звука в вязкой среде // Акуст. журн. 1970. Т. 16. № 2. С. 269 – 274.
6. Copley L. G. Integral equation method for radiation from vibrating bodies // J. Acoust. Soc. Amer. 1967. Vol. 41. No. 4. Part 1. P. 807 – 816.
7. Schenck H. A. Improved integral formulation for acoustic radiation problems // J. Acoust. Soc. Amer. 1968. Vol. 44. No. 1, P. 41 – 58.
8. Fenlon F. H. Calculation of the acoustic radiation field of the surface of a finite cylinder by the method of final residuals // Proc. IEEE. 1969. Vol. 57. No. 3. P. 291 – 306.
9. Вовк И. В., Гринченко В. Т., Коцюба В. С. Об одном методе оценки акустических свойств цилиндрического излучателя конечной высоты // Акуст. журн. 1975. Т. 21. № 5. С. 701 – 705.
10. Sandman B. E. Fluid-loading influence coefficients for a finite cylindrical shell // J. Acoust. Soc. Amer. 1976. Vol. 60. No. 6. P. 1256 – 1264.
11. Козырев В. А., Шендеров Е. Л. О сопротивлении излучения цилиндра конечной высоты // Акуст. журн. 1980. Т. 26. № 3. С. 422 – 432.
12. Блохинцев Д. И. Акустика неоднородной движущейся среды. М.: Наука, 1981. 208 с.
13. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Ч. 1. М.: Физматгиз, 1963. 584 с.
14. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 832 с.

REFERENCES

1. Rzhavkin, S. N. 1960, "A course of lectures on the theory of sound", *Publishing House of Moscow State Univer., Moscow*, 336 p., [in Russian].
2. Shenderov, E. L. 1972, "Wave problems of underwater acoustics", *Sudostroenie, Leningrad*, 352 p., [in Russian].
3. Skudrzyk, E. 1971, "The foundations of acoustics", *Springer-Verlag, New York*, 816 p.
4. Tzoi, P. I. 1966, "Radiation of a cylinder in a viscous medium", *Izv. AN USSR. Mechanics of liquid and gas*, no. 5, pp. 82 – 92, [in Russian].
5. Kozhin, V. N. 1970, "Radiation and scattering of sound by a cylinder in a viscous medium", *Akust. Zhurn.*, vol. 16, no. 2, pp. 269 – 274, [in Russian].
6. Copley, L. G. 1967, "Integral equation method for radiation from vibrating bodies", *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 41, no. 4, part. 1, pp. 807 – 816.
7. Schenck, H. A. 1968, "Improved integral formulation for acoustic radiation problems", *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 44, no. 1, pp. 41 – 58.
8. Fenlon, F. H. 1969, "Calculation of the acoustic radiation field of the surface of a finite cylinder by the method of final residuals", *Proc. IEEE*, vol. 57, no. 3, pp. 291 – 306.
9. Vovk, I. V., Grinchenko, V. T., Kotsuba, V. S. 1975, "On one method of evaluation of acoustic properties of cylindrical radiator of a finite height", *Akust. Zhurn.*, vol. 21, no. 5, pp. 701 – 705, [in Russian].
10. Sandman, B. E. 1976, "Fluid-loading influence coefficients for a finite cylindrical shell", *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 60, no. 6, pp. 1256-1264.
11. Kozirev, V. A., Shenderov, E. L. 1980, "On radiation resistance of cylinder of finite height", *Akust. Zhurn.*, vol. 26, no. 3, pp. 422 – 432, [in Russian].
12. Blohintsev, D. I. 1981, "Acoustics of an inhomogeneous moving medium", *Nauka, Moscow*, 208 p., [in Russian].
13. Kochin, N. E., Kibel, I. A., Roze, N. V. 1963, "Theoretical hydromechanics", *Fizmatgiz, Moscow*, 584 p., [in Russian].
14. Abramowitz, M., Stegun, I. A. 1965, "Handbook of Mathematical Functions", *Dover Publications, Inc, New York*, 1046 p.

Получено: 04.04.2024

Принято в печать: 28.06.2024

Памяти Юрия Александровича Дробышева

24 июня 1955 – 22 апреля 2024

22 апреля 2024 года на 69-м году жизни скончался видный ученый и педагог, доктор педагогических наук, профессор, профессор кафедры бизнес-информатики и высшей математики Калужского филиала Финансового университета при Правительстве Российской Федерации Юрий Александрович Дробышев.

Юрий Александрович родился в городе Абакане Республики Хакасия. В 1962 году поступил в среднюю школу № 16, которую окончил в 1972 г. с Похвальной грамотой Министерства образования РСФСР. В том же году поступил на физико-математический факультет Абаканского государственного педагогического института, который окончил в 1976 г. по специальности «Математик», и направлен на годичную стажировку в Ленинградский государственный университет. В период обучения в пединституте под влиянием Ю. С. Свистунова и Е. А. Фрибуса сформировались научные интересы Ю. А. Дробышева, связанные с историей математики и ее местом в процессе обучения. Большое влияние оказала стажировка на кафедре геометрии Ленинградского государственного университета, которую возглавлял Ю. А. Волков, и работа в геометрическом семинаре.

С 1977 по 1984 гг. Юрий Александрович работал ассистентом, а затем старшим преподавателем кафедры высшей математики Абаканского филиала Красноярского политехнического института, затем перешел на работу в Абаканский педагогический институт.

В 1986 г. поступил в аспирантуру по методике преподавания математики на кафедру математического анализа Московского государственного заочного педагогического института (МГЗПИ). После ее окончания был направлен на работу в Калужский государственный педагогический институт им. К. Э. Циолковского (КГПУ им. К. Э. Циолковского).

Юрий Александрович в 1991 г. под руководством доктора физико-математических наук, профессора Наума Яковлевича Виленкина защитил кандидатскую диссертацию по теме «Методика изучения многочленов с учетом межпредметных связей курсов алгебры и информатики», а в 2011 г. – докторскую диссертацию на тему «Многоуровневая историко-математическая подготовка будущих учителей математики» по специальности 13.00.02 – теория и методика

обучения (математика). В 1994 г. Юрию Александровичу присвоено звание доцента по кафедре методики преподавания математики, а в 2004 г. – звание профессора по кафедре геометрии и методики обучения математики.

В Калужском государственном педагогическом институте Юрий Александрович работал на различных должностях: прошел профессиональный путь от ассистента до ректора, заведовал кафедрами методики начального обучения, геометрии и методики обучения математике. За период работы в должности ректора педагогический институт был переименован в КГПУ им. К. Э. Циолковского, построен новый корпус, открыты новые специальности и направления подготовки, реализована Президентская программа подготовки управленческих кадров для организации народного хозяйства и др.

Юрий Александрович являлся руководителем Президентской программы подготовки управленческих кадров для организации народного хозяйства в КГПУ им. К. Э. Циолковского, ряда грантов РГНФ и РФФИ, проекта «Информатизация системы образования» по направлению «Математика», который реализовался в рамках национального проекта «Образование» Национальным фондом подготовки кадров по заказу Министерства образования и науки Российской Федерации; являлся членом комиссии по реализации национальных проектов при губернаторе Калужской области, председателем Калужского отделения общественной организации «Всероссийское педагогическое собрание», председателем Калужского отделения союза ректоров России, председателем комиссии ГЭК по математике Калужской области и др.

В течении многих лет, совместно с И. В. Дробышевой, издавал ежегодный межвузовский сборник научных трудов «Актуальные проблемы обучения математике», являлся председателем ряда всероссийских и международных конференций. В течении 25 лет проводил в Калуге олимпиаду по математике для младших школьников. Опыт работы Ю. А. Дробышева представлен в учебных пособиях, изданных в издательствах «Первое сентября», «Экзамен». Юрий Александрович является одним из авторов первого учебника по алгебре для 8 класса с углубленным изучением математики.

Под руководством Ю. А. Дробышева подготовлено 7 кандидатов педагогических наук. Юрий Александрович в своей профессиональной деятельности большое внимание уделял работе с талантливыми школьниками и студентами. Для школьников 3-4 классов под его руководством много лет работала творческая мастерская «Увлекательный мир математики». На протяжении многих лет Юрий Александрович являлся членом диссертационных советов по защите кандидатских и докторских диссертаций.

Область научных интересов Ю. А. Дробышева была связана с историей математики, историей математического образования, использованием истории математики в процессе обучения; работой с одаренными детьми; реализацией межпредметных связей математики с другими науками в процессе обучения. Он не оставался безразличным и к концептуальным вопросам развития математического образования, вопросам качественной подготовки учителей математики, продолжая тем самым славные традиции российских математиков П. Л. Чебышева, А. Я. Хинчина, А. Н. Колмогорова.

Юрий Александрович опубликовал более 230 научных и научно-методических работ, в том числе монографий, учебников и учебных пособий, имеющих гриф Министерства образования и науки РФ, РАО, УМО по специальностям педагогического образования.

В течение многих лет Юрий Александрович являлся постоянным участником Международного научного семинара преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов под руководством А. Г. Мордковича, проводимого ежегодно с 1988 года в различных городах России. Очень часто Юрий Александрович осуществлял помощь в организации семинаров, возглавляя секции, обсуждения и мастер-классы. Два семинара в 1998 году (XVII-й) и в 2015 году (XXXIV-й) состоялись в Калуге. Юрий Александрович тогда возглавлял программный и организационный комитеты. Выступая в любой роли на семина-

ре, Юрий Александрович отличался доброжелательным и благодушным отношением ко всем участникам: от юных аспирантов до известных ученых.

За успешную работу в области математического образования Юрий Александрович был награжден: почетной грамотой Министерства образования и науки РФ, нагрудным знаком «Почетный работник высшего профессионального образования Российской Федерации», медалью К. Д. Ушинского, почетным знаком «Президентская программа подготовки управленческих кадров для организации народного хозяйства РФ», медалью «За особые заслуги перед Калужской областью», юбилейной медалью «100 лет профсоюзам России» и другими наградами.

Какую бы должность ни занимал Юрий Александрович, какими бы наградами не обладал, он всегда оставался очень добросердечным, душевным и располагающим к себе человеком, всегда с искренней лучезарной улыбкой. Таким и останется Юрий Александрович в памяти коллег и друзей.

Коллеги, ученики и редакция «Чебышевского сборника» выражают искренние соболезнования родным и близким Юрия Александровича Дробышева в связи с его кончиной.

С. Г. Григорьев, А. И. Нижников, Н. М. Добровольский, В. С. Корнилов, Е. Л. Мардахаева, Ю. А. Семеняченко, И. Ю. Реброва.

Мартин Давидович Гриндлингер
(25.03.1932 – 20.05.2024)



20 мая 2024 года математическая наука понесла тяжёлую утрату. На 93 году жизни в г. Филадельфии в США умер доктор физико-математических наук, профессор Мартин Давидович Гриндлингер.

Мартин Давидович Гриндлингер родился в США, г. Нью-Йорк в семье рабочего 25 марта 1932 года. С 1938 г. по 1949 г. учился в школах Нью-Йорка. С 1949 г. по 1951 г. – студент Корнельского Университета. С 1951 г. по 1954 г. – студент Бруклинского колледжа. Колледж г. Нью-Йорка присудил Мартину Гриндлингеру степень Бакалавра Наук. С 1954 г. по 1958 г. М. Д. Гриндлингер был аспирантом профессора В. Магнуса, одного из основателей комбинаторной теории групп, в Нью-Йоркском Университете.

В 1957 г. он участвовал во Всемирном фестивале молодежи и студентов в Москве. В 1958 г. вступил в брак с советской гражданкой Еленой Ивановной Пятницкой (Капустиной) в г. Москве. В 1959 г. вернулся в США и защитил диссертацию в Нью-Йоркском Университете. В 1960 г. ему была присуждена ученая степень доктора философии.

В 1960 году по приглашению академика А. И. Мальцева Мартин Давидович Гриндлингер приступил к работе на кафедре алгебры Ивановского государственного педагогического института имени Д. А. Фурманова. К этому времени Мартин Давидович уже получил ставшие классическими результаты по проблеме равенства слов в конечноопределенных группах с малым сокращением. Группы с условием малого сокращения часто называют группами Гриндлингера.

В Ивановском педагогическом институте им. Д. А. Фурманова Мартин Давидович работал сначала ассистентом, затем старшим преподавателем, доцентом кафедры высшей алгебры. В 1961 г. Гриндлингер М. Д. стал советским гражданином. В СССР Решением ВАК М. Д. Гриндлингеру присвоена ученая степень кандидата физико-математических наук и ученое звание доцента.

С 1 сентября 1965 г. по 1 августа 1966 г. Мартин Давидович находился на должности старшего научного сотрудника для завершения докторской диссертации, которую он защитил в ноябре 1966 г. Решением ВАК от 20 мая 1967 г. ему присуждена ученая степень доктора физико-математических наук. 30 мая 1969 г. ему выдан аттестат профессора.

С 23 декабря 1967 года М. Д. Гриндлингер работал в ТГПИ им. Л. Н. Толстого заведующим кафедрой высшей алгебры и геометрии. Гриндлингер М. Д. заведовал кафедрой до 1972 г. Доктор физико-математических наук, профессор Мартин Давидович Гриндлингер занимал важное место в научной деятельности Тульского государственного педагогического института им. Л. Н. Толстого.

С самого начала своей трудовой деятельности в ТГПИ им. Л. Н. Толстого он показал себя как выдающийся организатор науки. Мартин Давидович руководил аспирантурой и организовал городской научный алгебраический семинар, который быстро приобрёл международную известность. В работе семинара помимо учеников Мартина Давидовича активно участвовали видные учёные из других регионов страны. Взаимосвязь с ведущими отечественными и зарубежными учёными способствовала плодотворной работе Тульской алгебраической школы. В Туле стал издаваться межвузовский сборник научных трудов «Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп». По тематике исследований М. Д. Гриндлингера защищено более 20 кандидатских и 6 докторских диссертаций.

Сегодня в стенах ТГПУ им. Л.Н. Толстого активно организуется общение учёных математиков алгебраической и теоретико-числовой школ. За последние годы в работе международных конференций в Туле принимали участие учёные с мировыми именами, академики, доктора, кандидаты наук. И среди них большое количество учёных, которые знали лично и имели непосредственное отношение к М. Д. Гриндлингеру, который на протяжении длительного периода времени занимался исследованиями в комбинаторной теории групп, но при этом всегда держал в поле зрения её соприкосновения с другими областями математики.

Коллектив Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого выражает искренние соболезнования родным и близким выдающегося ученого, доктора физико-математических наук, профессора Мартина Давидовича Гриндлингера.

К. А. Подрезов, В. А. Панин, И. Ю. Реброва, В. Н. Чубариков, Н. М. Добровольский, И. Н. Балаба, И. В. Денисов, Б. П. Ваньков, В. С. Ванькова, В. Г. Дурнев, В. Н. Безвертный, И. В. Добрынина

Сергей Петрович Новиков
(20.03.1938 – 6.06.2024)



6 июня 2024 года ушел из жизни великий ученый, академик Сергей Петрович Новиков, автор фундаментальных результатов по математике, математической и теоретической физике.

В 1965 году С. П. Новиков доказал топологическую инвариантность рациональных классов Понтрягина. Этот результат выдвинул его в мировые лидеры математики и во многом определил дальнейшее развитие алгебраической топологии. В 1966 году С. П. Новиков был избран член-корреспондентом, а в 1981 году действительным членом Академии Наук СССР. В 1966 году на Международном Математическом Конгрессе в Москве Новиков выступил с докладом. Расширенное содержание этого доклада было опубликовано в программной статье, в которой на основании своих результатов он предложил новые подходы к классическим и современным проблемам алгебраической топологии. Эта статья открыла новые связи алгебраической топологии с алгебраической геометрией, теорией чисел, теорией дифференциальных уравнений и легла в основу многих последующих результатов алгебраической топологии и её приложений. Прорывные результаты Сергея Петровича по теории структур на многообразиях и теории кобордизмов были удостоены Ленинской премии (1967). Он стал первым отечественным ученым, удостоенным медали Филдса (1970) — высшей награды Международного математического союза.

В 1974 году С. П. Новиков опубликовал статью, в которой открыл конечнозонные (алгебро-геометрические) периодические и квазипериодические операторы Шредингера и конечнозонные (алгебро-геометрические) решения уравнения Кортевега—де Фриза. Эта работа сразу выдвинула его в мировые лидеры большого направления исследований, которое активно развивается на стыке математики и физики до настоящего времени. С. П. Новиков — основоположник алгебро-геометрических методов интегрирования важнейших нелинейных уравнений математической физики, создатель теории многозначных функционалов действия (теории Морса—Новикова). Им открыты топологические явления в нормальных металлах в условиях сильного магнитного поля.

За вклад в науку С. П. Новиков удостоен многих научных наград, в том числе Золотой медали имени Леонарда Эйлера РАН (2012), Золотой медали имени Н. Н. Боголюбова РАН (2009), Премии имени Н. И. Лобачевского РАН (1980). Он был избран почетным членом ряда иностранных академий и научных обществ. В 2020 году С. П. Новикову была присуждена высшая награда РАН — Большая золотая медаль имени М. В. Ломоносова за ведущую роль в возрождении современной топологии в нашей стране, решение фундаментальных проблем топологии, теории нелинейных волн, квантовой механики и теории поля. Свой доклад на общем собрании РАН на церемонии присуждения медали он назвал: "Топология в теоретической физике".

С. П. Новиков был признанным лидером в математической жизни нашей страны, он был главным редактором журнала «Успехи математических наук» (1988–2023), Президентом Московского Математического общества (1985–1996), председателем комиссии "Геометрия и топология" при отделении математики Академии Наук СССР (1984–1991). С. П. Новиков — создатель выдающейся научной школы, автор фундаментальных монографий и учебников. Поставленные им проблемы и выдвинутые гипотезы продолжают оказывать большое влияние на развитие науки.

Память о Сергее Петровиче Новикове навсегда останется в наших сердцах.

В. М. Бухштабер, В. П. Платонов, А. Л. Семенов, В. А. Быковский, Ю. В. Нестеренко, В. Н. Чубариков, Н. М. Добровольский

Ашот Енофович Устян
(1.09.1937 – 9.06.2024)



9 июня пришла горькая весть – не стало выдающегося профессора Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого Ашота Енофовича Устяна.

Ашот Енофович Устян родился 1 сентября 1937 года в селе Кавакрук (с 1948 по 1996 годы – Агараки, с 1996 года – Амжикухуа) Гудаутского района Абхазской АССР.

С 1945 по 1956 учился в Агаракской средней школе, после окончания которой работал садоводом в Агараки. Позднее работал на Астраханском судостроительном заводе, усиленно изучал русский язык. В 1958 году А. Е. Устян поступил на физико-математический факультет Астраханского педагогического института им. С. М. Кирова, который закончил в 1963 году, квалификация – учитель математики и физики. После окончания института работал учителем математики в Криво-Бузанской средней школе, а затем в Агаракской средней школе.

В 1966 году Ашот Енофович поступил в аспирантуру кафедры высшей алгебры Ивановского государственного педагогического института им. Д. А. Фурманова. Его научным руководителем стал доцент Мартин Давидович Гриндлингер.

В 1968 году в связи с переходом научного руководителя М. Д. Гриндлингера в Тульский государственный педагогический институт (ТГПИ) им. Л. Н. Толстого А. Е. Устян переведен в аспирантуру того же института, которую успешно закончил в 1970 году. Его учителями становятся не только профессор М. Д. Гриндлингер, но и декан факультета И. И. Гайдуков.

После окончания аспирантуры Ашот Енофович работает ассистентом кафедры высшей алгебры и геометрии ТГПИ им. Л. Н. Толстого, в 1973 году – заместитель декана математического факультета, в 1974 году – старший преподаватель кафедры алгебры, с 1977 года – декан математического факультета. В 1974 году защитил кандидатскую диссертацию на тему «Некоторые алгоритмические вопросы в полугруппах». В 1979 году ему присвоено ученое звание доцента, в 1993 году он получил должность профессора, а в 1995 году – звание профессора.

С первых дней работы в качестве декана А. Е. Устян особое внимание уделял созданию системы подготовки кадров высшей квалификации для математического факультета. Под его руководством началось сотрудничество с выдающимися учеными Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, стали организовываться и проводиться конференции международного уровня, выпускались математические журналы. Так, на базе Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого проходили международные конференции по современным проблемам алгебры и теории чисел, которые неоднократно

поддерживались грантами РФФИ, выпускались журналы «Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп», «Чебышевский сборник», последний в настоящее время получил международное признание.

Благодаря организаторскому таланту Ашота Енофовича преподавателями факультета защищено десять докторских диссертаций: шесть – по физико-математическим наукам (В. Н. Безверхний, Н. М. Добровольский, С. А. Пихтильников, И. В. Денисов, И. В. Добрынина, И. Н. Балаба) и четыре – по педагогическим наукам (В. В. Персианов, А. Р. Есаян, А. С. Симонов и А. Я. Фридланд).

Для привлечения на факультет увлеченных математикой студентов А. Е. Устьян заново организует юношескую математическую школу. Принимает самое активное участие в проведении областного этапа Всероссийской олимпиады по математике, которая в течение многих лет проходит на базе ТГПУ им. Л. Н. Толстого, тесно сотрудничает с органами образования.

Являясь 33 года бессменным деканом факультета, с 1977 года по 2010 год, Ашот Енофович Устьян внес значительный вклад в организацию математического образования в Тульской области. Он активно вел методическую работу с учителями математики Тульской области и огромную работу по профориентации школьников, его имя известно во всех школах Тулы и области.

А. Е. Устьян особое внимание уделял истории математического факультета ТГПУ им. Л. Н. Толстого. Большое историческое исследование выполнено по анализу учебно-методической, научной и общественной деятельности кафедр факультета и каждого члена коллектива. Ряд работ посвящен научным школам факультета и их руководителям.

Стоит отметить и учебные пособия по алгебре, написанные А. Е. Устьяном, ряд которых имеет гриф УМО по классическому университетскому образованию.

Десятки математических трудов – таков вклад Ашота Енофовича в научную копилку университета.

Ашот Енофович Устьян пользовался огромным уважением и любовью у коллег и студентов, его опыт ученого и педагога востребован и сегодня. Его деятельность имеет заслуженное признание.

Научные и педагогические успехи А. Е. Устьяна отмечены рядом поощрений и наград:

1. Медаль ордена «За заслуги перед Отечеством» II степени.
2. Медаль «Лучший Педагог России».
3. Медаль «Ветеран труда».
4. Значок «Почетный работник высшего профессионального образования РФ».
5. Значок «Отличник народного просвещения».
6. Значок «За отличные успехи в работе» в области высшего образования СССР.
7. Почетные грамоты различных уровней.

Светлая память об Ашоте Енофовиче Устьяне навсегда сохранится в наших сердцах.

Коллектив Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого выражает искренние соболезнования родным и близким выдающегося ученого, кандидата физико-математических наук, профессора Ашота Енофовича Устьяна.

К. А. Подрезов, В. А. Панин, И. Ю. Реброва, В. Н. Чубариков, Н. М. Добровольский, И. Н. Балаба, И. В. Денисов, Б. П. Ваньков, В. С. Ванькова, Н. Н. Добровольский, Ю. М. Мартынюк, В. Г. Дурнев, В. Н. Безверхний, И. В. Добрынина

РЕДКОЛЛЕГИЯ

Том 25 Выпуск 2

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Чубариков Владимир Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математических и компьютерных методов анализа, президент механико-математического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.

e-mail: chubarik2020@mail.ru

ЗАМЕСТИТЕЛИ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

Добровольский Николай Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой алгебры, математического анализа и геометрии Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого.

e-mail: dobrovol@tspu.ru

Нижников Александр Иванович — доктор педагогических наук, профессор, заведующий кафедрой математической физики Московского педагогического государственного университета, заслуженный работник высшей школы РФ.

e-mail: ainizhnikov@mail.ru, nizhnikov.ai@mail.ru

ОТВЕТСТВЕННЫЕ СЕКРЕТАРИ

Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры прикладной математики и информатики Тульского государственного университета; доцент кафедры алгебры, математического анализа и геометрии Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого.

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Реброва Ирина Юрьевна — кандидат физико-математических наук; декан факультета математики, физики и информатики; доцент кафедры алгебры, математического анализа и геометрии Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого.

e-mail: i_rebrova@mail.ru

ЧЛЕНЫ РЕДКОЛЛЕГИИ

Боровков Алексей Иванович — доктор технических наук, профессор, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого.

e-mail: borovkov@spbstu.ru

Быковский Виктор Алексеевич — доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, заместитель директора по научной работе Института прикладной математики Дальневосточного отделения Российской академии наук (ИПМ ДВО РАН), директор Хабаровского отделения ИПМ ДВО РАН.

e-mail: vab@iam.khv.ru

Востоков Сергей Владимирович — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры алгебры и теории чисел Санкт-Петербургского университета, президент фонда им. Л. Эйлера.

e-mail: sergei.vostokov@gmail.com

Георгиевский Дмитрий Владимирович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теории упругости механико-математического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.

e-mail: georgiev@mech.math.msu.su

Горбачёв Владимир Иванович — доктор физико-математических наук, профессор, механико-математический факультет Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.

e-mail: vigorby@mail.ru

Гриценко Сергей Александрович — доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики 1-го Финансового университета при Правительстве РФ; профессор механико-математического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.

e-mail: s.gritsenko@gmail.com

Демидов Сергей Сергеевич — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры теории вероятностей механико-математического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова; заведующий кабинетом истории и методологии математики и механики, заведующий отделом истории физико-математических наук Института истории естествознания и техники РАН; главный редактор журнала «Историко-математические исследования»; президент Международной академии истории науки.

e-mail: serd42@mail.ru

Дурнев Валерий Георгиевич — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой компьютерной безопасности и математических методов обработки информации Ярославского государственного университета.

e-mail: durnev@univ.uniya.ac.ru

Зубков Андрей Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математической статистики и случайных процессов механико-математического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова; заведующий отделом дискретной математики Математического института им. В. А. Стеклова РАН.

e-mail: zubkov@mi.ras.ru

Иванов Александр Олегович — доктор физико-математических наук, механико-математический факультет Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.

e-mail: aoiva@mech.math.msu.su

Иванов Валерий Иванович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики и информатики Института прикладной математики и компьютерных наук Тульского государственного университета.

e-mail: ivaleryi@mail.ru

Королёв Максим Александрович — доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Математического института им. В. А. Стеклова РАН.

e-mail: korolevma@mi-ras.ru

Кузнецов Валентин Николаевич — доктор технических наук, профессор, Саратовский государственный технический университет им. Ю. А. Гагарина.

e-mail: kuznetsovvn@info.sgu.ru

Матиясевич Юрий Владимирович — доктор физико-математических наук, профессор, академик Российской академии наук, советник РАН Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова РАН, президент Санкт-Петербургского математического общества.

e-mail: yumat@pdmi.ras.ru

Мищенко Сергей Петрович — доктор физико-математических наук, профессор, Ульяновский государственный университет.

e-mail: mishchenkosp@mail.ru

Нестеренко Юрий Валентинович — доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН, заведующий кафедрой теории чисел механико-математического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.

e-mail: nester@mi.ras.ru

Панин Владимир Алексеевич — доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН, действительный член Академии информатизации образования, президент Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого.

e-mail: tgpu@tula.net

Пачев Урусби Мухамедович — доктор физико-математических наук, профессор кафедры алгебры и дифференциальных уравнений Кабардино-Балкарского государственного университета им. Х. М. Бербекова.

e-mail: urusbi@rambler.ru

Семёнов Алексей Львович — доктор физико-математических наук, профессор, академик Российской академии наук, академик Российской академии образования, заведующий кафедрой математической логики и теории алгоритмов Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.

e-mail: alsemno@ya.ru

Толоконников Лев Алексеевич — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет.

e-mail: tolokonnikovla@mail.ru

Чирский Владимир Григорьевич — доктор физико-математических наук, доцент, профессор механико-математического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ.

e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Аллаков Исмаил — доктор физико-математических наук, профессор, профессор Термезского государственного университета (Узбекистан).

e-mail: iallakov@mail.ru

Белов Алексей Яковлевич — доктор физико-математических наук, федеральный профессор математики, профессор университета Бар-Илана (Израиль).

e-mail: Kanelster@gmail.com

Берник Василий Иванович — доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Института математики НАН Беларуси (Белоруссия).

e-mail: bernik@im.bas-net.by

Лауринчикас Антанас — доктор физико-математических наук, профессор, действительный член АН Литвы, заведующий кафедрой теории вероятностей и теории чисел Вильнюсского университета (Литва).

e-mail: antanas.laurincikas@mif.vu.lt

Лю Юнпин — доктор наук, профессор, руководитель Исследовательского центра современного математического анализа Пекинского педагогического университета (Китай).

e-mail: ypliu@bnu.edu.cn

Мисир Джумаил оглы Марданов — доктор физико-математических наук, профессор, директор Института математики и механики Национальной академии наук Азербайджана (Азербайджан).

e-mail: rmi@lan.ab.az

Мусин Олег Рустамович — доктор физико-математических наук, профессор факультета математики Техасского университета в Браунсвилле (США).

e-mail: oleg.musin@utb.edu, omusin@gmail.com

Рахмонов Зарулло Хусейнович — доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент АН Республики Таджикистан, директор Института математики Таджикской АН (Таджикистан).

e-mail: zarullo_r@tajik.net, zarullo-r@rambler.ru

Салиба Холем Мансур — кандидат физико-математических наук, доцент факультета естественных и прикладных наук университета Нотр-Дам-Луэз (Ливан).

e-mail: qwe123@rocketmail.com

Табари Абдулло Хабибулло — доктор физико-математических наук, профессор, член корреспондент Академии наук Таджикистана; ректор Кулябского государственного университета им. Абуабдуллаха Рудаки (Таджикистан).

e-mail: rektor@kgu.tj

Фукшанский Леонид Евгеньевич — доктор математических наук, профессор, Колледж Клермонт Маккенна (США).

e-mail: lenny@cmc.edu

Шяучюнас Дарюс — доктор математических наук, профессор, старший научный сотрудник Научного института Шяуляйского университета (Литва).

e-mail: darius.siauciunas@su.lt

THE EDITORIAL BOARD

Volume 25 Issue 2

THE MAIN EDITOR

Chubarikov Vladimir Nikolaevich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Chair of Mathematical and Computer Methods of Analysis, President of the Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

e-mail: chubarik2020@mail.ru

THE ASSISTANTS OF THE MAIN EDITOR:

Dobrovolsky Nikolai Mihailovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Chair of Algebra, Mathematical Analysis and Geometry, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University.

e-mail: dobrovol@tspu.ru

Nijnikov Alexander Ivanovich — Dr. Sci. in Pedagogy, Professor, Head of the Chair of Mathematical Physics, Moscow Pedagogical State University; Honored Worker of Higher Education of the Russian Federation.

e-mail: ainizhnikov@mail.ru, nizhnikov.ai@mail.ru

EXECUTIVE SECRETARIES

Dobrovolsky Nikolai Nikolaevich — PhD in Physics and Mathematics, Junior Lecturer of the Chair of Applied Mathematics and Computer Science, Tula State University; Associate Professor of the Chair of Algebra, Mathematical Analysis and Geometry, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University.

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Rebrova Irina Yuryevna — PhD in Physics and Mathematics, Dean of the Department of Mathematics, Physics and Computer Science, Associate Professor of the Chair of Algebra, Mathematical Analysis and Geometry, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University.

e-mail: i_rebrova@mail.ru

EDITORIAL BOARD

Borovkov Aleksey Ivanovich — Dr. Sci. in Engineering, Professor, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University.

e-mail: borovkov@spbstu.ru

Bykovsky Victor Alekseevich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Deputy Director for Research, Institute for Applied Mathematics, Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences (IAM FEB RAS), Director of the Institute of Applied Mathematics, Khabarovsk Division.

e-mail: vab@iam.khv.ru

Vostokov Sergey Vladimirovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Professor of the Chair of Algebra and Number Theory, St. Petersburg State University, President of Euler Foundation.

e-mail: sergei.vostokov@gmail.com

Georgievsky Dmitry Vladimirovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Chair of Elasticity Theory, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

e-mail: georgiev@mech.math.msu.su

Gorbachev Vladimir Ivanovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

e-mail: vigorby@mail.ru

Gritsenko Sergey Alexandrovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor of the Chair of Mathematics, Financial University; Professor, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

e-mail: s.gritsenko@gmail.com

Demidov Sergey Sergeyivich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Professor of the Chair of Probability Theory, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University; Head of the Department of History and Methodology of Mathematics and Mechanics, Head of the Department of History of Physics and Mathematics, S.I. Vavilov Institute for the History of Science and Technology, RAS (IHST RAS); Editor-in-chief of the journal «Istoriko-Matematicheskie Issledovaniya»; President of the International Academy of the History of Science.

e-mail: serd42@mail.ru

Durnev Valery Georgievich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Chair of Computer Security and Mathematical Methods of Information Processing, P.G. Demidov Yaroslavl State University.

e-mail: durnev@univ.uniya.ac.ru

Zubkov Andrey Mihailovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Chair of Mathematical Statistics and Random Processes, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University; Head of the Department of Discrete Mathematics, Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences.

e-mail: zubkov@mi.ras.ru

Ivanov Aleksandr Olegovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

e-mail: aoiva@mech.math.msu.su

Ivanov Valery Ivanovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Chair of Applied Mathematics and Computer Science, Institute of Applied Mathematics and Computer Science, Tula State University.

e-mail: ivaleryi@mail.ru

Korolev Maxim Aleksandrovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Leading Researcher, Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences.

e-mail: korolevma@mi-ras.ru

Kuznetsov Valentin Nikolaevich — Dr. Sci. in Engineering, Professor, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov.

e-mail: kuznetsovn@info.sgu.ru

Matiyasevich Yuri Vladimirovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Academician of the Russian Academy of Sciences, Adviser at the Russian Academy of Sciences, St. Petersburg Department of Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, President of the St. Petersburg Mathematical Society.

e-mail: yumat@pdmi.ras.ru

Mishchenko Sergey Petrovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Ulyanovsk State University.

e-mail: mishchenkosp@mail.ru

Nesterenko Yuri Valentinovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Head of the Chair of Number Theory, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

e-mail: nester@mi.ras.ru

Panin Vladimir Alexeyevich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Corresponding Member of the Russian Academy of Natural Sciences, Full Member of the Academy of

Informatization of Education, President of Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University.

e-mail: tgpu@tula.net

Pachev Urusbi Mukhamedovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor of the Chair of Algebra and Differential Equations, Kabardino-Balkarian State University named after H. M. Berbekov.

e-mail: urusbi@rambler.ru

Semenov Alexey Lvovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Academician of the Russian Academy of Sciences, Academician of the Russian Academy of Education, Head of the Chair of Mathematical Logic and Theory of Algorithms, Lomonosov Moscow State University.

e-mail: alsemno@ya.ru

Tolokonnikov Lev Alekseevich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Tula State University.

e-mail: tolokonnikovla@mail.ru

Fomin Aleksandr Aleksandrovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Department of Algebra of the Moscow Pedagogical State University.

Chirsky Vladimir Grigoryevich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Associate Professor, Professor of the Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University, The Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration.

e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Allakov Ismail — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Professor of Termez Davlat University (Uzbekistan).

e-mail: iallakov@mail.ru

Belov Alexey Yakovlevich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Federal Professor of Mathematics, Professor, Bar-Ilan University (Israel).

e-mail: Kanelster@gmail.com

Bernik Vasily Ivanovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Principal Researcher of the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (Belarus).

e-mail: bernik@im.bas-net.by

Laurinchikas Antanas — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Full Member of the Lithuanian Academy of Sciences, Head of the Chair of Probability Theory and Number Theory, Vilnius University (Lithuania).

e-mail: antanas.laurincikas@mif.vu.lt

Liu Yongping — Dr. Sci., Professor, Head of the Research Center for Modern Mathematical Analysis (School of Mathematical Sciences), Beijing Normal University (China).

e-mail: ypliu@bnu.edu.cn

Mardanov Misir Jumayil oglu — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Director of the Institute of Mathematics and Mechanics, Azerbaijan National Academy of Science (Azerbaijan).

e-mail: rmi@lan.ab.az

Musin Oleg Rustamovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Department of Mathematics, University of Texas Rio Grande Valley (UTRGV) (USA)

e-mail: oleg.musin@utb.edu, omusin@gmail.com

Rahmonov Zarullo Huseinovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Corresponding Member of the Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan, Director of the Institute of Mathematics, Tajik Academy of Sciences (Tajikistan).

e-mail: zarullo_r@tajik.net, zarullo-r@rambler.ru

Mansour Saliba Holem — PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor, Faculty of Natural and Applied Sciences, Notre Dame University–Louaize (Lebanon).

e-mail: qwe123@rocketmail.com

Habibullo Abdullo — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Corresponding Member of the Academy of Sciences of Tajikistan; Rector of Higher education institution «Kulob State University named after Abuabdulloh Rudaki» (Tajikistan).

e-mail: rektor@kgu.tj

Fukshansky Leonid — Dr. Sci. in Mathematics, Professor, Claremont McKenna College (USA).

e-mail: lenny@cmc.edu

Šiaučiūnas Darius — Professor, Dr. Sci. in Mathematics, Senior Researcher, Institute of Regional Development, Šiauliai University (Lithuania).

e-mail: darius.siauciunas@su.lt

TABLE OF CONTENTS

Volume 25 Issue 2

A. Ya. Belov, V. M. Buchstaber, V. B. Vasilyev, Yu. P. Virchenko, S. K. Kuizheva, A. G. Kusraev, D. K. Mamiya, A. B. Muravnik, A. V. Pskhu, S. A. Rozanova, Z. A. Saidov, A. L. Semenov, S. M. Sitnik, A. L. Skubachevsky, A. P. Soldatov, E. L. Shishkina, A. G. Yagola. Sultan Nazhmudinovich Askhabov (on the 70-th anniversary of his birth)	5
Yu. V. Nesterenko, V. A. Bykovsky, V. N. Chubarikov, V. G. Chirsky, O. N. German, N. M. Dobrovolsky. Alexander Ivanovich Galochkin (on the 80-th anniversary of his birth) ..	20
N. Ph. Aleksiadis. An analogue of Kolmogorov's theorem on superpositions of continuous functions for functional systems of polynomial and rational functions	29
D. A. Dolgov. On the continued fraction with rational partial quotients	43
V. I. Ivanov. Generalized Dunkl transform on the line in inverse problems of approximation theory	67
A. Ya. Kanel-Belov, V. O. Kirova. Stability of production in block environments	82
A. Ya. Kanel-Belov, V. O. Kirova. Geometry of block environs.	102
E. V. Larkun, V. S. Salnikov and S. A. Skobel'tsyn. The controller with installed polling program model for vector control systems	127
Z. Kh. Rakhmonov, F. Z. Rakhmonov. Asymptotic formula in the Waring's problem with almost proportional summands	139
G. U. Urazboev, I. I. Baltaeva, O. B. Ismoilov. Scattering theory for the loaded negative order Korteweg–de Vries equation	169
H. Al-Assad. On Hua Loo-Keng's estimates of exponential sums in algebraic number fields.	181
Le Xuan Hung. The chromaticity of complete split graphs	208
D. A. Cybulski. Special cases of the interpolation theorem for predicate calculus	222
BRIEF MESSAGE	
A. I. Denisov, I. V. Denisov. The support barrier functions for nonlinear parabolic problems ..	235
S. E. Nohrin, V. T. Shevaldin. Sufficient conditions for the existence of the solution of an infinite-difference equation with variable coefficients	243
R. V. Tarabrin, N.N. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, N.M. Dobrovol'skii. Continuity of Dirichlet series of s -dimensional lattices	251
R. V. Tarabrin, N.N. Dobrovol'skii, N.M. Dobrovol'skii. Dirichlet series of the second kind for irreducible lattices repeated by multiplication	260

HISTORY OF MATHEMATICS AND APPLICATIONS

N. N. Dobrovol'skii, D. Yu. Efimov, L. A. Tolokonnikov. A non-axisymmetric diffraction problem of cylindrical sound waves on an elastic cylinder with an inhomogeneous coating located near the boundary of an elastic half-space	269
D. Yu. Efimov. Diffraction of sound from a point source on a cylinder with an elastic coating surrounded by an inhomogeneous liquid layer	286
N. A. Zverev, A. V. Zemskov, V. M. Yaganov. Modeling of elastic diffusion processes in a hollow cylinder under the action of unsteady volume perturbations	296
M. Yu. Sokolova, D. V. Khristich. Acoustic waves in hypoelastic solids. I. Isotropic materials ..	334
M. Yu. Sokolova, D. V. Khristich. Acoustic waves in hypoelastic solids. II. Anisotropic materials	334
L. A. Tolokonnikov, S. L. Tolokonnikov. Sound radiation of a cylinder streamlined by a stationary flow of an ideal liquid'	350

MEMORIAL DATES

In memory of Yury Alexandrovich Drobyshev	359
Martin Davidovich Grindlinger (25.03.1932 – 20.05.2024)	362
Sergei Petrovich Novikov (20.03.1938 – 6.06.2024)	364
Ashot Enofovich Ustyn (1.09.1937 – 9.06.2024)	366
РЕДКОЛЛЕГИЯ	368
THE EDITORIAL BOARD	372
TABLE OF CONTENTS	376