

ISSN 2226-8383

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Министерство просвещения Российской Федерации
Российская академия наук
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
Московский педагогический государственный университет
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
Тульский государственный университет

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Научно-теоретический журнал

ТОМ XXV

ВЫПУСК 1 (92)

Тула
2024

Учредитель: ФГБОУ ВО
«ТГПУ им. Л. Н. Толстого»

Адрес редакции:
300026, г. Тула, пр. Ленина, 125.
Тел. +79156812638
8(4872)374051
Адрес редакции: 300026,
E-mail: cheb@tspu.ru
URL: <http://www.chebsbornik.ru>

Издается с 2001 года.
Выходит 5 раз в год.
Регистрационный номер
СМИ: ПИ № ФС77-80049

В журнале публикуются оригинальные статьи по направлениям современной математики: теория чисел, алгебра и математическая логика, теория функций вещественного и комплексного переменного, функциональный анализ, дифференциальные уравнения, математическая физика, геометрия и топология, теория вероятностей и математическая статистика, численные методы, теория оптимизации и др. Также публикуются статьи о памятных датах и юбилеях.

Журнал включен в перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание ученых степеней кандидата наук и доктора наук (перечень ВАК), индексируются и/или реферируются: Scopus, MathSciNet, Zentralblatt MATH, Russian Science Citation Index (RSCI), РЖ Математика, Mathematical Reviews, РИНЦ, Google Scholar Metrics.

Журнал выходит под эгидой Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, Министерства просвещения Российской Федерации, Российской академии наук, Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Московского педагогического государственного университета, Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого, Тульского государственного университета

Главный редактор

В. Н. Чубариков (Россия, г. Москва)

Заместители главного редактора:

Н. М. Добровольский (Россия, г. Тула)
А. И. Нижников (Россия, г. Москва)

Ответственные секретари:

Н. Н. Добровольский (Россия, г. Тула)
И. Ю. Реброва (Россия, г. Тула)

Редакционная коллегия:

А. И. Боровков (Россия, г. Санкт-Петербург)	В. А. Панин (Россия, г. Тула)
В. А. Быковский (Россия, г. Хабаровск)	У. М. Пачев (Россия, г. Нальчик)
С. В. Востоков (Россия, г. Санкт-Петербург)	А. Л. Семёнов (Россия, г. Москва)
Д. В. Георгиевский (Россия, г. Москва)	Л. А. Толоконников (Россия, г. Тула)
В. И. Горбачев (Россия, г. Москва)	А. А. Фомин (Россия, г. Москва)
С. А. Гриценко (Россия, г. Москва)	В. Г. Чирский (Россия, г. Москва)
С. С. Демидов (Россия, г. Москва)	И. Аллаков (Узбекистан, г. Термез)
В. Г. Дурнев (Россия, г. Ярославль)	А. Я. Белов (Израиль, г. Рамат Ган)
А. М. Зубков (Россия, г. Москва)	В. И. Берник (Беларусь, г. Минск)
А. О. Иванов (Россия, г. Москва)	А. Лауринчикас (Литва, г. Вильнюс)
В. И. Иванов (Россия, г. Тула)	Лю Юнпин (Китай, г. Пекин)
М. А. Королёв (Россия, г. Москва)	М. Дж. Марданов (Азербайджан, г. Баку)
В. Н. Кузнецов (Россия, г. Саратов)	О. Р. Мусин (США, г. Браунсвилл)
Ю. В. Матиясевич (Россия, г. Санкт-Петербург)	З. Х. Рахмонов (Таджикистан, г. Душанбе)
С. П. Мищенко (Россия, г. Ульяновск)	А. Х. Табари (Таджикистан, г. Куляб)
Ю. В. Нестеренко (Россия, г. Москва)	Л. Фукшанский (США, г. Клермонт)
	Д. Шяучюнас (Литва, г. Шяуляй)



СОДЕРЖАНИЕ

Том 25 Выпуск 1

М. Г. Башмакова, Н. В. Сычёва. О некоторых методах оценки показателя иррациональности значений функции $\arctan x$	5
О. Х. Гуломов. Квадратичные формы, соответствующие граням области Вороного совершенной формы от шести переменных	16
А. И. Денисов, И. В. Денисов. Нелинейный метод угловых пограничных функций для сингулярно возмущенных параболических задач с кубическими нелинейностями	26
И. А. Икромов, А. Р. Сафаров. О равномерных оценках осцилляторных интегралов с гладкой фазой	42
И. А. Икромов, А. Р. Сафаров, А. Т. Абсаламов. Об оценке тригонометрических интегралов с квадратичной фазой	52
С. Е. Пустовойтов. Исследование структуры слоения Лиувилля интегрируемого эллиптического бильярда с полиномиальным потенциалом	62
В. Л. Усольцев. О решетках конгруэнций алгебр с оператором и симметрической основной операцией	103
Р. А. Фарахутдинов. О проблеме абстрактной характеристики универсальных графовых автоматов	116
Х. Аль-Ассад. Обобщение теоремы Лежандра о трёх квадратах	127
А. В. Шутов, А. А. Мокрова. О числе изодральных полимино	138
КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ	
Э. Альмухур, М. Кусини, А. Алнана, М. Аль-Лабади. Расстояние Wt - над метрическим пространством b -	155
А. В. Бегунц, Д. В. Горяшин. О взаимной простоте элементов последовательности Битти	164
Д. В. Грицук, А. А. Трофимук. О некотором произведении SM-групп	170
И. Б. Жуков, О. Ю. Иванова. Устранение максимальных скачков	176
П. Л. Иванков. О совместных приближениях значений некоторых гипергеометрических функций	184
ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ И ПРИЛОЖЕНИЯ	
С. В. Даниленко, Ю. М. Мартынюк, И. Ю. Реброва. Пример построения математической модели решения практико-ориентированной задачи	192
Л. А. Толоконников, С. Л. Толоконников. Акустическое излучение сфероида, обтекаемого стационарным потоком идеальной жидкости	205

РЕДКОЛЛЕГИЯ	215
THE EDITORIAL BOARD	219
TABLE OF CONTENTS	223

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 25. Выпуск 1.

УДК 511

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-1-5-15

О некоторых методах оценки показателя иррациональности значений функции $\arctan x$

М. Г. Башмакова, Н. В. Сычёва

Башмакова Мария Геннадьевна — кандидат физико-математических наук, Брянский государственный технический университет (г.Брянск).

e-mail: mariya-bashmakova@yandex.ru

Сычёва Надежда Васильевна — кандидат педагогических наук, Брянский государственный технический университет (г.Брянск).

e-mail: nadegda-P-11@mail.ru

Аннотация

Оценивание качества приближения иррационального или трансцендентного числа рациональными дробями является одним из направлений теории диофантовых приближений. Количественная характеристика такого приближения называется мерой иррациональности числа. С конца 19 века учёными разрабатывались методы оценки меры иррациональности и были получены её значения для огромного количества иррациональных и трансцендентных чисел. Наиболее часто используемый метод получения таких оценок – построение линейных форм с целыми коэффициентами, приближающих данную величину и исследование их асимптотического поведения. Приближающие линейные формы конструируются на основе цепных дробей, аппроксимаций Паде, бесконечных рядов, вещественных и комплексных интегралов. Способы исследования асимптотики таких форм в настоящее время достаточно стандартны, но построение линейной формы, обладающей хорошими приближающими свойствами, и есть главная задача.

Первые оценки значений функции $\arctan x$ были получены М.Хуттнером (1987) на основе интегрального представления гипергеометрической функции Гаусса. В 1993 г. А.Хеймонен, Т.Матала-Ахо, К. Ваананен, доказали общую теорему об оценках мер иррациональности логарифмов рациональных чисел, а позже с помощью приближающей конструкции, использующей полиномы Якоби, получили новые оценки, в частности для значений функции $\arctan x$. В дальнейшем на основе различных интегралов строились как общие методы оценивания значений $\arctan x$, так и специализированные методы для конкретных значений. В работах Е.Б. Томашевской, получившей в 2008 общую оценку для значений $\arctan \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, был использован комплексный интеграл, имеющий симметричную подынтегральную функцию. Свойство симметричности сыграло важную роль при получении оценки, поскольку оно улучшало асимптотические свойства коэффициентов линейной формы. Некоторые интегральные конструкции, использование другими исследователями, также обладали симметричностью разных типов. В данной статье рассмотрены некоторые методы оценивания значений функции $\arctan x$, их особенности, способ исследования, и указаны наилучшие на настоящее время оценки

Ключевые слова: показатель иррациональности, линейная форма.

Библиография: 26 названий.

Для цитирования:

М. Г. Башмакова, Н. В. Сычёва. О некоторых методах оценки показателя иррациональности значений функции $\arctan x$ // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 1, с. 5–15.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 25. No. 1.

UDC 511

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-1-5-15

On some methods of evaluating irrationality measure of the function $\arctan x$ values

M. G. Bashmakova, N. V. Sycheva

Bashmakova Maria Gennadyevna —candidate of physical and mathematical sciences, Bryansk State Technical University (Bryansk).

e-mail: mariya-bashmakova@yandex.ru

Sycheva Nadezhda Vasilyevna —candidate of pedagogical sciences, Bryansk State Technical University (Bryansk).

e-mail: Nadezda-P-11@mail.ru

Abstract

For any irrational or transcendental number estimating of the quality of its approximation by rational fractions is one of the directions in the theory of Diophantine approximations. The quantitative characteristic of such approximation is called the measure (extent) of irrationality of the number. For almost a century and a half, scientists have developed various methods for evaluating the measure of irrationality and have obtained its values for a huge number of irrational and transcendental numbers. Various approaches have been used to obtain the estimates and these approaches improved over time, leading to better estimates. The most commonly used method for obtaining such estimates is construction of linear forms with integer coefficients, which approximate a value, and studying of its asymptotic behavior. Approximating linear forms usually are constructed on the basis of continued fractions, Padé approximants, infinite series, and integrals. Methods for studying the asymptotics of such forms are currently quite standard, but the main problem is invention of a linear form with good approximating properties.

The first estimates of the values of the arctangent function were obtained by M. Huttner in 1987 on the base of integral representation of the Gauss function. In 1993 A. Heimonen, T. Matala-Aho, K. Vaananen, using, like M. Huttner, Padé approximants for the Gaussian hypergeometric function, proved a general theorem for estimating of measures of irrationality of logarithms of rational numbers. Later, the same authors, using an approximating construction with Jacobi polynomials, obtained new estimates, in particular for the values of the function $\arctan x$. Further research used various integral constructions, which allowed to get both general methods for $\arctan x$ values and specialized methods for specific values. In the articles of E.B. Tomashevskaya, who in 2008 received a general estimate for the values of $\arctan \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, was used a complex integral with the property of symmetry of integrand. This property played an important role in obtaining the estimates, since it improved the asymptotic behavior of the coefficients of the linear form. Some integral constructions elaborated by other researchers also had different types of symmetry. In this article, we consider the main methods for estimating the values of the arctangent function, their features, research methods, and the best estimates at the moment.

Keywords: irrationality measure, linear form.

Bibliography: 26 titles.

For citation:

M. G. Bashmakova, N. V. Sycheva, 2024, “On some methods of evaluating irrationality measure of the function $\arctan x$ values” , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 1, pp. 5–15.

1. Введение

Теория диофантовых приближений как раздел теории чисел изучает способы и качество приближения иррациональных и трансцендентных чисел рациональными дробями. Очевидно, что поскольку множество рациональных чисел всюду плотно в множестве вещественных чисел, рациональные числа содержатся в любой сколь угодно малой окрестности приближаемого значения, поэтому вопрос о качестве приближения становится содержательным, если иметь в виду приближения числа дробями с ограниченными знаменателями. Одной из характеристик качества такого приближения выступает величина, называемая мерой иррациональности. Определённая на множестве натуральных чисел q функция $\varphi(q) = \min_{1 \leq b \leq q} |\gamma - \frac{p}{q}|$ где минимум берётся по множеству всех рациональных чисел $\frac{p}{b}, 1 \leq b \leq q$, называется мерой иррациональности числа γ . Эта функция ведёт себя очень нерегулярно, поэтому для неё обычно строятся оценки снизу. Чаще всего рассматривается неравенство вида $|\gamma - \frac{p}{q}| \geq \frac{C}{q^\lambda}$, где C, λ – некоторые положительные постоянные. Нижняя граница $\mu = \mu(\gamma)$ множества чисел λ с некоторой постоянной $C > 0$ при которых неравенство выполняется для любого рационального числа называется мерой (показателем) иррациональности.

Точное значение показателя иррациональности известно лишь для немногих чисел, например, из цепной дроби Эйлера для константы e следует равенство $\mu(e) = 2$, но в большинстве случаев, говоря о показателе иррациональности, имеют в виду оценку сверху. Постоянно исследуемой проблемой в рассматриваемой области является уменьшение оценок для различных величин, «борьба» идёт за лучший показатель. Наиболее часто используемый метод получения таких оценок – построение линейных форм с целыми коэффициентами, приближающих данную величину и исследование их асимптотического поведения. Приближающие линейные формы конструируются на основе цепных дробей, аппроксимаций Паде, бесконечных рядов, вещественных и комплексных интегралов. Способы исследования асимптотики таких форм в настоящее время достаточно стандартны, но построение линейной формы, обладающей хорошими приближающими свойствами, и есть главная задача. Недостаточно приблизить величину любой линейной формой с целыми коэффициентами, значения коэффициентов должны быть достаточно малы и удовлетворять определённым асимптотическим свойствам. Линейная форма, более точно приближающая данное значение, даст лучшую оценку, для усиления которой требуется с каждым разом более тонкий и специальный подход.

Показатели иррациональности для значений гипергеометрической функции, логарифмической функции, классических констант исследовались огромным количеством специалистов теории чисел различными методами, многие из которых стали уже классическими. Э. Борель был первым, кто заметил, что иррациональные числа можно классифицировать по качеству их приближения рациональными дробями. В 1899 г. он опубликовал работу, в которой получил оценку для приближения рациональными числами значения e . В дальнейшем эта тематика активно развивалась. Начиная с работы К. Зигеля 1929 г. применялись различные методы для построения рациональных приближений значений аналитических функций. В данной статье будут рассмотрены методы и оценки значений функции $\arctan x$ в различных точках, поскольку это достаточно узкая тема. Функция $\arctan x$ первоначально менее интересовала исследователей, чем, например, логарифмическая функция, так что методов для её оценки в целом значительно меньше.

2. Интегральные конструкции и методы, использовавшиеся для построения оценок значений $\arctan x$

Элементарные функции $\arctan x$, $\log x$ выражаются через гипергеометрическую функцию Гаусса следующим образом [1]:

$$\arctan z = zF\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}; -z^2\right); \log(z+1) = zF(1, 1; 2; -z) \quad (1)$$

где гипергеометрическая функция Гаусса $F(z)$ может быть определена как

$$F(a, b; c; z) = F_2^1(a, b; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n z^n}{(c)_n n!}, \quad (2)$$

$(c)_n \neq 0, -1, -2, \dots, (a)_0 \neq -1, (a)_n = a(a+1)\dots(a+n-1), n = 1, 2, 3, \dots$ В 1987 г. М.Хуттнер в работе [2] доказал общую теорему об оценках мер иррациональности значений гипергеометрической функции Гаусса вида

$$F_2^1\left(1, 1 + \frac{1}{k}; 1 + \frac{1}{k}; \varepsilon x^k\right),$$

где $\varepsilon = \pm 1; k \geq 2, 0 < x < 1, x^k \in \mathbb{Q}$.

Конструкция М.Хуттнера, основанная на интегральном представлении функции Гаусса, позволила получить оценки для меры иррациональности различных значений функций $\arctan x$, $\log x$ как частных случаев гипергеометрической функции. Например, полученная этим методом оценка М.Хуттнера для $\arctan \frac{1}{3}$ составила $\mu(\arctan \frac{1}{3}) \leq 7.703\dots$ Однако, условие теоремы М. Хуттнера не позволяло получить оценки для значений вида $\arctan \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N}$ при чётных k .

В 1993 г. А.Хеймонен, Т.Матала-Ахо, К. Ваананен [3], используя, как и М.Хуттнер, в работах 1986-1987 г. аппроксимации Паде для гипергеометрической функции Гаусса, доказали общую теорему об оценках мер иррациональности логарифмов рациональных чисел. В этой работе был приведён довольно большой список результатов, улучшающих оценки М.Хуттнера. Позже, в [4], этим же авторами с помощью приближающей гипергеометрическую функцию конструкции, использующей полиномы Якоби, были получены новые оценки, в частности для значений функции $\arctan x$, например $\mu(\sqrt{7} \arctan \frac{1}{\sqrt{7}}) \leq 4.029\dots$ Улучшение известных результатов было достигнуто в основном за счёт применения методики сокращения простых множителей в знаменателях коэффициентов линейных форм, тем самым уменьшающей величину коэффициентов. Эта методика в дальнейшем применялась во всех возможных случаях и в настоящее время она используется постоянно для уменьшения знаменателей коэффициентов линейных форм. Основы этой методики были заложены в работах М.Хата [5] и Г.В.Чудновского [6]. Более подробную информацию можно найти в [7]. В работах [3],[4] было указано много новых конкретных оценок, послуживших важным ориентиром для дальнейших исследований. Большинство полученных в них показателей иррациональности с тех пор были улучшены другими методами.

Примерно с начала 2000-х для оценки мер иррациональности стали активно использоваться интегральные конструкции, обладающие свойством симметричности [7]. Начало этой тенденции положила работа В.Х.Салихова [8], в которой с помощью интеграла с симметричной подынтегральной функцией была улучшена оценка показателя иррациональности для $\log 3$. Чуть позже аналогичным способом В.Х.Салихов [9] получил новую оценку меры иррациональности числа π : $\mu(\pi) \leq 7.606\dots$ Эта классическая константа всегда вызывала интерес у исследователей, её первая оценка были получена в 1953 г. Малером, и в дальнейшем улучшалась М. Миньоттом, Г.В.Чудновским, М.Хата. Результат В.Х.Салихова значительно усиливал

предыдущую оценку М.Хата и оставался лучшим до 2020 г, когда В.В.Зудилин и Д.Зейлбергер получили новую оценку $\mu(\pi) \leq 7.103\dots$ [10]. Эта оценка была получена на основе базовой конструкции В.Х.Салихова, но авторами был разработан специальный метод сокращения простых множителей в знаменателях, ранее никогда не применявшийся. Кроме того, был использован массивный компьютерный перебор для выбора наилучших параметров интеграла.

В дальнейшем для построения рациональных приближений симметричные интегралы стали широко распространены, на их основе было получено много новых интересных результатов, в частности для значений функции $\arctan x$. В 2009 г. Е.Б.Томашевская [11] получила ряд новых оценок для значений вида $\arctan \frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$. Интегральная конструкция, использованная Е.Б.Томашевской, имеет вид

$$I = \frac{1}{i} \int_{h-i}^{h+i} \frac{(x-h-i)^n (x-h)^{2n} (x-h+i)^n}{x^{n+1} (2h-x)^{n+1}} dx = \frac{1}{i} \int_{h-i}^{h+1} R(x) dx \quad (3)$$

где $h = 2k + 1$, $k, n \in \mathbb{N}$. Аналогично интегралам работ [8],[9] она обладает свойством симметричности подынтегральной функции вида $R(2h-x) = R(x)$, что существенно используется при разложении подынтегральной функции на простейшие дроби. Справедливо представление интеграла (3) в виде

$$I = A_1 \arctan \frac{1}{h} + r_1 + r_2, A_1, r_1, r_2 \in \mathbb{Q},$$

который, очевидно, получается при помощи разложения подынтегральной функции на простейшие дроби и последующего интегрирования. На основе этого представления строится линейная форма с целыми коэффициентами для значений вида $\arctan \frac{1}{h}$, $h = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$.

Исследование полученной линейной формы позволяет получить оценки для соответствующих величин, но большинство оценок, получаемых с помощью данной конструкции, совпадало с оценками М.Хуттнера [2]. Однако, за счёт изменения параметров в некоторых частных случаях и применения стандартной методики Чудновского-Хата сокращения простых множителей, Е.Б.Томашевской был получен ряд оценок, улучшивших предыдущие результаты. В частности этот метод дает оценки

$$\mu(\arctan \frac{1}{3}) \leq 6.634\dots, \mu(\arctan \frac{1}{5}) \leq 4.744\dots, \mu(\arctan \frac{1}{6}) \leq 6.240\dots$$

Для параметра вида $h = 2^k$ Е.Б.Томашевской была построена отдельная интегральная конструкция, обладающая симметричностью того же типа. Для оценки величин вида $\arctan \frac{1}{2^k}$ был использован интеграл

$$I = \frac{1}{i} \int_{h-i}^{h+i} \frac{(x-h-i)^{kn} (x-h)^{(2k+4)n} (x-h+i)^{kn}}{x^{kn+1} (2h-x)^{kn+1}} dx; h = 2^k, k \geq 2. \quad (4)$$

Эта интегральная конструкция оказалась крайне удачной из-за большого сокращения степеней двоек, содержащихся в знаменателях. Сокращение множителей уменьшает величину коэффициентов линейной формы, тем самым улучшая её асимптотические свойства. В данном случае степени числа 2, возникающие в числителях коэффициентов, полностью уничтожают эти степени в знаменателе, то есть не требуется дополнительных множителей, чтобы сделать коэффициенты линейной формы целыми. Более того, возможны дополнительные сокращения, то есть умножение обеих частей линейной формы на 2 в отрицательной степени. Получаемые с помощью данного интеграла оценки, не улучшены до сих пор, так, в частности

$$\mu(\arctan \frac{1}{4}) \leq 5.793\dots, \mu(\arctan \frac{1}{8}) \leq 3.672\dots, \mu(\arctan \frac{1}{16}) \leq 3.068\dots$$

Однако, данный интеграл не давал возможности получить оценку для $\arctan \frac{1}{2}$, для этой цели Е.Б.Томашевская [12] использовала специально построенный аналогичный интеграл с симметричностью того же типа, использовавший тот факт, что $\arctan \frac{1}{2} = \arctan \frac{1}{4} + \arctan \frac{2}{9}$. Результат, полученный с помощью этого интеграла, составил $\mu(\arctan \frac{1}{2}) \leq 11.716\dots$

Отметим, что примерно в то же самое время с помощью подобных симметричных интегралов Е.С.Сальниковой [13] было получено много новых интересных результатов для показателей иррациональности различных значений логарифмической функции.

В 2008 г. в работе В.В.Зудилина и К.Виолы [14] была предложена интегральная конструкция, обладающая другим видом симметричности. Хотя оригинальная интегральная конструкция не давала новых оценок, но на её основе дальнейшими исследователями были построены линейные формы для приближения функций $\arctan x, \log x$. Внесение некоторых изменений в интеграл В.В.Зудилина и К.Виолы улучшило арифметические свойства коэффициентов получаемых линейных форм, что позволило усилить ряд результатов. Рассмотренный при этом интеграл, см. [15]:

$$I_n(b) = \int_0^1 \frac{(x^2 - \frac{1}{b^2})^{sn} (1-x^2)^{rn-sn} b^{rn+sn+1} dx}{(b^2 - x^2)^{rn+1}} \quad (5)$$

где $r, s \in \mathbb{N}, r \geq s$ - четные, также обладает свойством симметричности, но другого вида, нежели у Е.Б.Томашевской.

Справедливо соотношение $I_n(b) = I_n(\frac{1}{b})$, что позволяет представить интеграл как линейную форму, коэффициенты которой зависят от величины $b + \frac{1}{b}$.

При выборе в качестве параметра величины $b = \sqrt{k} + \sqrt{k+1}, k \in \mathbb{N}, k > 1$, интегральная конструкция даёт приближения для величины $\sqrt{k} \log \frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{k-1}}$, а при выборе $b = i(\sqrt{k} + \sqrt{k+1}), k \in \mathbb{N}, k > 1$ - для величины $\frac{1}{\sqrt{k}} \arctan \frac{1}{\sqrt{k}}$. Во втором случае порождаемая интегралом линейная форма имеет вид

$$\frac{1}{i\sqrt{k}} I_n(k) = q_{rn} 2^{\nu(k)+\alpha(k)} = B_n + A_{1n} \frac{1}{\sqrt{k}} \arctan \frac{1}{\sqrt{k}}, A_{1n}, B_n \in \mathbb{Z}$$

где $q_N = H.O.K\{1, 2, \dots, N\}, \nu(k), \alpha(k)$ определяются отдельно для каждого k .

Большинство оценок, полученных с помощью данного интеграла, не улучшали предыдущих, но отдельные значения параметра, как это часто бывает, обеспечили лучшее приближение, в частности, была получена новая оценка $\mu(\arctan \frac{1}{3}) \leq 6.199\dots$

Обзор всех оценок, получаемых с помощью данной интегральной конструкции, можно найти в [16],[17]. Заметим, что практически все перечисленные интегральные конструкции давали общий метод построения оценок для семейства величин. Однако довольно часто исследователями строятся приближения для одного конкретного значения. Особый интерес, разумеется, представляют классические константы, например [9], значения дзета-функции [18], или такие значения как $\log 2$ [19], $\log 3$ [8], но отдельно исследуются и менее значимые величины. Так, в 2019 г. в работе [20] была построена интегральная конструкция для оценки именно величины $\arctan \frac{1}{3}$. Применяемый интеграл имел вид

$$Y(\bar{\alpha}) = \frac{1}{i} \int_3^{3+i} \frac{\prod_{j=0}^k (P_j(x))^{\alpha_j n} dx}{x^{n+1} (6-x)^{n+1}} dx \quad (6)$$

где $k \in \mathbb{N}, \bar{\alpha} = \{\alpha_0, \dots, \alpha_k\}, \alpha_j \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, \alpha_j n \in \mathbb{N}, j = 0, 1, \dots, k, P_j(x)$ -многочлены с целыми коэффициентами, имеющие форму $P_j(x) = P_j((x-3)^2)$.

Кроме очевидной симметричности данной интегральной конструкции относительно точки $x = 3$, особую роль сыграли многочлены $P_j(x)$. Эти многочлены были построены так, чтобы

улучшить приближающие свойства линейной формы, а именно уменьшить значение подынтегральной функции за счёт нулей, расположенных на линии интегрирования, и сократить знаменатели коэффициентов линейной формы за счёт своих коэффициентов. Сокращение, проведённое тем же методом, что и для интегралов работ [8], [9] достаточно стандартная процедура, но подбор многочленов и их комбинирование представляет определённые сложности. Сама идея добавления подобных многочленов в интегральную конструкцию была впервые использована в работе К.Ву и Л.Ванга [21], в которой авторы получили таким способом улучшение показателя иррациональности значения $\mu(\log 3)$, немного улучшив результат В.Х.Салихова из [8], а также построил приближения значения $\log 2$ квадратичными иррациональностями. Более подробное описание выбора таких многочленов будет рассмотрено ниже.

Поскольку данная интегральная конструкция была узкоспециализированной и подбор многочленов осуществлялся именно и только для данного значения, соответственно, полученная оценка обновила предыдущий результат и составила $\mu(\arctan \frac{1}{3}) \leq 6.096\dots$

Чуть позже, в работе [22] на основе интегральной конструкции Е.Б.Томашевской аналогичным методом была получена новая оценка для $\mu(\arctan \frac{1}{2})$. В базовую симметричную интегральную конструкцию были добавлены многочлены, улучшающие её арифметические свойства, и подобранные специально с учётом особенностей интеграла. Это позволило улучшить результат Е.Б.Томашевской до $\mu(\arctan \frac{1}{2}) \leq 9.272\dots$

Дальнейшие продвижения в этой теме, тем не менее, не использовали симметричность интеграла. В 2020 г. в работе [23] были построены специализированные интегральные конструкции для оценки величин $\arctan \frac{1}{3}, \arctan \frac{1}{5}$. Подынтегральные функции этих интегралов не имели специальной симметрии и были построены на основе интеграла, предложенного К.Ву в 2002 г. В своей работе [24] К.Ву получил ряд оценок меры линейной независимости для логарифмов рациональных чисел.

В работе [23] на основе интеграла вида

$$I_n = \frac{1}{i} \int_{5-i}^{5+i} \frac{(x-5-i)^{(1-\alpha-\beta_1-\beta_2)n} (x-5+i)^{(1-\alpha-\beta_1-\beta_2)n} (P_0(x))^{\alpha n} (P_1(x))^{\beta_1 n} ((P_2)^{\beta_2 n})}{x^{n+1}} dx \quad (7)$$

где $\alpha, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{Q}, \alpha n, \beta_1 n, \beta_2 n \in \mathbb{N}$, была получена новая оценка $\mu(\arctan \frac{1}{5}) \leq 4.505\dots$

Очевидно, что в данной конструкции также использована идея дополнительных полиномов, улучшающих свойства линейной формы. Хотя они не обладают свойством симметричности, но служат тем же целям, что и при исследовании интегральной конструкции (6) – сокращение знаменателей коэффициентов линейной формы и уменьшение подынтегральной функции за счёт распределения своих нулей. В данном случае были выбраны следующие полиномы: $P_0(x) = (x-5)(5x-26), P_1(x) = 6x^2 - 61x + 56, P_2(x) = 11x^2 - 112x + 286$.

Можно также обратить внимание, что корни этих многочленов: $x_0 = 5, x_1 = \frac{26}{5} = 5.2, x_{2,3} = 5.083 \pm 0.399i, x_{4,5} = 5.090 \pm 0.287i$ лежат на линии интегрирования или близко к ней, что уменьшает подынтегральную функцию. Кроме того, свободные члены многочленов содержат степени множителей 2, 5, 13, возникающих в знаменателях, что позволяет сократить их. Детали можно посмотреть в [23].

В этой же работе был сконструирован и аналогичный интеграл для $\arctan \frac{1}{3}$, который позволил в очередной раз улучшить оценку и получить результат $\mu(\arctan \frac{1}{3}) \leq 5.943\dots$

Чуть позже, подобная конструкция позволила получить новые результаты и для чётных значений знаменателя в выражениях $\arctan \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N}, k > 1$. В [25] были построены индивидуальные интегралы для приближения величин $\arctan \frac{1}{6}, \arctan \frac{1}{10}$. В чётном случае сокращения множителей в знаменателях происходят несколько иначе, что потребовало другого подхода, но принцип построения интеграла можно считать аналогичным.

Новые оценки $\mu(\arctan \frac{1}{6}) \leq 5.536\dots, \mu(\arctan \frac{1}{10}) \leq 4.465\dots$ усилили предыдущие результаты, принадлежавшие ранее Е.Б.Томашевской: $\mu(\arctan \frac{1}{6}) \leq 6.240\dots, \mu(\arctan \frac{1}{10}) \leq 4.594\dots$

Хотя приведённые здесь интегралы (6),(7) первоначально конструировались отдельно, все они удовлетворяли общей аналогии, так что позже эта методика была обобщена в работе [26]. Обобщённая интегральная конструкция приняла вид:

$$Y_n = \frac{1}{i} \int_{r-si}^{r+si} \frac{(x-r-si)^{(1-\alpha-\beta)n} (x-r+si)^{(1-\alpha-\beta)n} (P_0(x))^{\alpha n} (P_1(x))^{\beta n}}{x^{n+1}} dx \quad (8)$$

где $s < r, s \in \mathbb{N}, \alpha, \beta \in \mathbb{Q}, \alpha n, \beta n \in \mathbb{N}$, и полиномы имеют вид:

$$P_0(x) = (x-r)(rx-r^2-s^2), P_1(x) = kx^2 - (2kr+1)x + k(r^2+s^2), k \in \mathbb{N}.$$

Легко видеть, что корни второго многочлена $x_{1,2} = \frac{1}{2k} \pm i \frac{\sqrt{4k^2s^2-4kr-1}}{2k}$, и поскольку они должны лежать вблизи линии интегрирования, существует оптимальный выбор параметра k , дающий наименьшую оценку.

Интеграл 8 порождает линейную форму вида

$$q_n Y_n = A_n \arctan \frac{s}{r} + B_n, A_n, B_n \in \mathbb{Z}.$$

то есть позволяет получать оценки для некоторых значений вида $\arctan \frac{s}{r}, s, r \in \mathbb{N}, s < r$, но не для любых комбинаций параметров, поскольку во многих случаях интегралы имеют плохие асимптотические свойства, не позволяющие получить оценку.

В работе [26] был выписан ряд результатов, получаемых этим способом. Как и для любого общего метода, некоторые из этих оценок не улучшили уже имеющиеся, для некоторых величин пока нет показателей для сравнения, но, например, результат $\mu(\arctan \frac{1}{7}) \leq 3.982\dots$ усиливает предыдущую оценку Е.Б.Томашевской $\mu(\arctan \frac{1}{7}) \leq 4.075\dots$

3. Заключение

Теория рациональных приближений – область теории чисел, которая в последнее время активно развивается. Современные методы получения новых результатов по оценкам меры иррациональности, как правило, требуют не только построения соответствующей приближающей линейной формы, но применения эффективных вычислительных методов при компьютерном обчёте и огромного перебора параметров. Увеличение мощностей современной вычислительной техники, таким образом, помогает улучшать результаты в этой области. Заметим, что совместные приближения для значений различных аналитических функций, в том числе и функции $\arctan x$ также неоднократно исследовались в разное время представителями различных научных школ, и здесь рассмотрены только случаи индивидуальных оценок.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра//Москва: Наука, 1973. 296 с.
2. Huttner M. Irrationalité de certaines integrals hypergéométriques// Journal of Number Theory.1987. Vol. 26. P.166-178.
3. Heimonen A., Matala-Aho T., Väänänen K. On irrationality measures of the values of Gauss hypergeometric function// Manuscripta Math. 1993. Vol. 81. P. 183-202.
4. Heimonen A., Matala-Aho T., Väänänen K. An application of Jacobi type polynomials to irrationality measures// Bulletin of the Australian mathematical society. 1994. Vol. 50, № 2. P. 225-243.

5. Hata M. Rational approximations to π and some other numbers // Acta Arithm. 1993. Vol. LXIII, № 4. P.335-349.
6. Chudnovsky G.V. On the method of Thue-Siegel // Annals of math. 1983. Vol. 117, № 2. P. 325-382.
7. Салихов В.Х., Золотухина Е.С., Башмакова М.Г. Применение симметричных интегралов в теории диофантовых приближений: монография // Брянск: БГТУ, 2021. 124 с.
8. Салихов В.Х. О мере иррациональности $\ln 3$ // Доклады Академии наук.2007. № 417 (6). С.753-755.
9. Салихов В.Х. О мере иррациональности числа π . //Математические заметки. 2010. Т. 88, № 4. С.583-593.
10. Zudilin W., Zeilbergergerger D. The Irrationality Measure of Pi is at most 7.103205334137... // Mosc. J. of Comb. Number Theory. 2020. Vol. 9, № 4. P. 407-419.
11. Томашевская Е.Б. О мере иррациональности числа $\ln 5 + \frac{\pi}{2}$ и некоторых других чисел // Чебышевский сборник.2007. № 8(2). С. 97-108.
12. Томашевская Е.Б. О диофантовых приближениях значений некоторых аналитических функций: специальность 01.01.06 «Математическая логика, алгебра и теория чисел»: дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук // Брян. гос. техн. ун-т. Брянск, 2009. 99 с. Библиогр.: с. 94-99.
13. Сальникова Е.С. Диофантовы приближения $\log 2$ и других логарифмов // Математические заметки. 2008. Т.83, № 2. С.88-96.
14. Viola C., Zudilin W. Hypergeometric transformations of linear forms in one logarithm // Func. Approx. Comment. Math. 2008. Vol. 39, № 2. P.211-222.
15. Башмакова М.Г. О приближении значений гипергеометрической функции Гаусса рациональными дробями //Математические заметки. 2010. Т.88, № 6. С.822-835.
16. Башмакова М.Г., Золотухина Е.С. О показателях иррациональности чисел вида $\sqrt{d} \ln \frac{\sqrt{d+1}}{\sqrt{d-1}}$ // Чебышевский сборник. 2017. Т. 18, № 1(61). С. 29-43.
17. Башмакова М.Г., Золотухина Е.С. Об оценке меры иррациональности чисел вида $\sqrt{4k+3} \ln \frac{\sqrt{4k+3+1}}{\sqrt{4k+3-1}}$ и $\frac{1}{\sqrt{k}} \arctan \frac{1}{\sqrt{k}}$ // Чебышевский сборник. 2018. Т.19, № 2 (66). С.15-29.
18. Zudilin W. One of the numbers $\zeta(5), \zeta(7), \zeta(11)$ is irrational //Uspekhi Matematicheskikh Nauk. 2020. № 56(4). P.149-150.
19. Marcovecchio R. The Rhin-Viola method for $\log 2$ // Acta Arithm. 2009. Vol.139, № 2. pp. 147-184.
20. Салихов В.Х., Башмакова М.Г. О показателе иррациональности $\arctan \frac{1}{3}$ // Известия высших учебных заведений. Математика. 2019. № 1. С.69-75.
21. Wu Q., Wang L. On the irrationality measure of $\log 3$ // Journal of number theory. 2014. № 142. P. 264-273.
22. Салихов В.Х., Башмакова М.Г. Об оценке меры иррациональности $\arctan \frac{1}{2}$ // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, № 4. С.58-68.

23. Салихов В.Х., Башмакова М.Г. Об оценке меры иррациональности некоторых значений $\arctan \frac{1}{n}$ // Известия высших учебных заведений. Математика. 2020. Т.64, № 12. С.29-37.
24. Wu Q. On the linear independence measure of logarithms of rational numbers // Math. of computation. 2002. № 72(242). P. 901-911.
25. Салихов В.Х., Башмакова М.Г. Об оценке меры иррациональности $\arctan \frac{1}{6}, \arctan \frac{1}{10}$ // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории. Сб. мат. XVIII междунар. конф., посв. столетию со дня рожд. проф. Б.М.Бредихина, В.И. Нечаева и С.Б.Стечкина. Тула, 23-26 сент. 2020 г. Тула: ТГПУ. 2020. с. 264-266.
26. Salikhov V. Kh. Bashmakova M. G. On rational approximations for some values of $\arctan \frac{s}{r}$ for natural s and $r, s < r$. // Moscow journal of combinatorics and number theory, 2022. v.11, n. 2, pp. 181-188.

REFERENCES

1. Bateman, H., & Erdélyi, A. 1953, "Higher transcendental functions", *New York-Toronto-London: Mc graw-hill book company, inc.*, 456 p.
2. Huttner, M. 1987. "Irrationalité de certaines integrals hypergéométriques", *Journal of Number Theory.*, Vol. 26, pp.166-178.
3. Heimonen, A., Matala-Aho, T., Väänänen, K. 1993. "On irrationality measures of the values of Gauss hypergeometric function", *Manuscripta Math.*, Vol. 81, pp. 183-202.
4. Heimonen, A., Matala-Aho, T., Väänänen, K. 1994. "An application of Jacobi type polynomials to irrationality measures", *Bulletin of the Australian mathematical society.*, Vol. 50, № 2, pp. 225-243.
5. Hata, M. 1993. "Rational approximations to π and some other numbers", *Acta Arithm.*, Vol. LXIII, № 4, pp.335-349.
6. Chudnovsky, G.V. 1983. "On the method of Thue-Siegel", *Annals of math.* Vol. 117, № 2, pp. 325-382.
7. Salikhov, V.Kh. Zolotukhina E. S., Bashmakova M. G. 2021. "Application of symmetric integrals in the theory of Diophantine approximations: monograph", *Bryank- BSTU*, 124 p. (in russian)
8. Salikhov, V.Kh. 2007. "On the irrationality measure of $\ln 3$ ", *Doclady mathematics.* vol 76, issue 3, pp. 955-957.
9. Salikhov, V.Kh. 2008. "On the irrationality measure of π ", *Russian Mathematical Surveys*, vol. 63, issue 3, pp. 570-572.
10. Zudilin, W., Zeilbergerger, D. 2020. "The Irrationality Measure of Pi is at most 7.103205334137...", *Mosc. J. of Comb. and Number Theory.* Vol. 9, № 4, pp. 407-419.
11. Tomashevskaya, E.B. 2007. "On the measure of irrationality of the number $\ln 5 + \frac{\pi}{2}$ and some other numbers", *Chebyshevskii sbornic.* № 8(2), p. 97-108, (in russian).

12. Tomashevskaya, E. B. 2009. "On Diophantine approximations of the values of some analytic functions: dissertation for the degree of candidate of sciences - 01.01.06 "Mathematical logic, algebra and number theory" ", *Bryansk. BSTU.*, 99 p. (in russian).
13. Salnikova, E. S. 2008. "Diophantine approximations of $\log 2$ and other logarithms", *Mathematical Notes*. Volume 83, Issue 3, pp 389–398.
14. Viola, C., Zudilin, W. 2008. "Hypergeometric transformations of linear forms in one logarithm", *Func. Approx. Comment. Math.* Vol. 39, № 2, pp.211-222.
15. Bashmakova, M. G. 2010. "Approximation of values of the Gauss hypergeometric function by rational fractions", *Mathematical Notes.*, Vol. 88, Issue 6, pp. 785–797.
16. Bashmakova, M. G. Zolotukhina, E. S. 2017. "On irrationality measure of the numbers $\sqrt{d} \ln \frac{\sqrt{d+1}}{\sqrt{d-1}}$ ", *Chebyshevskii sbornic.*, Vol. 18, № 1(61), pp. 29-43. (in russian)
17. Bashmakova, M. G., Zolotukhina, E. S. 2018. "On estimate of irrationality measure of the numbers $\sqrt{4k+3} \ln \frac{\sqrt{4k+3+1}}{\sqrt{4k+3-1}}$ and $\frac{1}{\sqrt{k}} \arctan \frac{1}{\sqrt{k}}$ ", *Chebyshevskii sbornic.*, Vol.19, № 2 (66), pp.15-29. (in russian)
18. Zudilin, W. 2020. "One of the numbers $\zeta(5), \zeta(7), \zeta(11)$ is irrational", *Uspekhi Matematicheskikh Nauk.*, № 56(4), pp.149-150.
19. Marcovecchio, R. 2009. "The Rhin-Viola method for $\log 2$ ", *Acta Arithm.*, Vol.139, № 2. pp. 147-184.
20. Salikhov, V. Kh., Bashmakova, M. G. 2019. "On irrationality measure of $\arctan \frac{1}{3}$ ", *Russian mathematics.*, № 1, pp. 69-75.
21. Wu, Q., Wang, L. 2014. "On the irrationality measure of $\log 3$ ", *Journal of number theory.*, № 142, pp. 264-273.
22. Salikhov, V. Kh., Bashmakova, M. G. 2019. "On irrationality measure of $\arctan \frac{1}{2}$ ", *Chebyshevskii sbornic.*, vol. 20, № 4, pp.58-68. (in russian)
23. Salikhov, V. Kh., Bashmakova, M. G. 2020. "On irrationality measure of some values of $\arctan \frac{1}{n}$ ", *Russian Mathematics.*, vol.64, № 12, pp.29-37.
24. Wu, Q. 2002. "On the linear independence measure of logarithms of rational numbers.", *Math. of computation.*, № 72(242), pp. 901-911.
25. Salikhov, V. Kh., Bashmakova, M. G. 2020. "On irrationality measure of $\arctan \frac{1}{6}, \arctan \frac{1}{10}$ ", *Algebra, number theory and discrete geometry: modern problems, applications and problems of history. Collection of works of XVIII international Conference, dedicated to the centenary of the birth of professors B.M.Brdikhina, V.Y. Nechaeva and S.B.Stechkina.*, Tula: Tolstoy Tula state pedagogical University, pp. 264-266.(in russian)
26. Salikhov, V. Kh., Bashmakova, M. G. 2022. "On rational approximations for some values of $\arctan \frac{s}{r}$ for natural s and $r, s < r$.", *Mosc. J. of Comb. and Number Theory.*, vol.11, no. 2, pp. 181-188.

Получено: 22.09.2023

Принято в печать: 21.03.2024

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 25. Выпуск 1.

УДК 519.644

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-1-16-25

Квадратичные формы, соответствующие граням области Вороного совершенной формы от шести переменных

О. Х. Гуломов

Гуломов Отабек Худайбердиевич — кандидат физико-математических наук, Институт математики им. В. И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан (г. Ташкент, Узбекистан).

e-mail: otabek10@mail.ru

Аннотация

Задача классификации целочисленных квадратичных форм имеет долгую историю, на протяжении которой многие математики внесли свой вклад в ее решение. Бинарные формы были всесторонне изучены Гауссом. Он и позднейшие исследователи наметили также основные пути решения проблемы классификации тернарных форм и форм более высоких размерностей. Величайшими достижениями последующего периода явились глубокое развитие теории рациональных квадратичных форм проведенная Эйхлером полная классификация неопределенных форм в размерностях 3 и выше в терминах спинорных родов.

В работе предлагается алгоритм для вычисления неэквивалентные соответствующий квадратичные формы граням области Вороного второй совершенный формы от много переменных и с помощью этого алгоритма вычислено все соответствующий неэквивалентные квадратичные формы.

Ключевые слова: квадратичных форм, совершенных форм, область Вороного, окрестность Вороного, усовершенствованный алгоритм Вороного.

Библиография: 18 названий.

Для цитирования:

О. Х. Гуломов. Квадратичные формы, соответствующие граням области Вороного совершенной формы от шести переменных // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 1, с. 16–25.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 25. No. 1.

UDC 519.644

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-1-16-25

Quadratic forms corresponding to the faces of the Voronoi domain of perfect form in six variables

O. Kh. Gulomov

Gulomov Otabek Hudaiberdievich — candidate of physical and mathematical sciences, V. I. Romanovsky Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan (Tashkent, Uzbekistan).

e-mail: otabek10@mail.ru

Abstract

The problem of classifying integer quadratic forms has a long history, during which many mathematicians have contributed to its solution. Binary forms were comprehensively studied by Gauss. He and later researchers also outlined the main ways to solve the problem of classifying ternary forms and forms of higher dimensions. The greatest achievements of the subsequent period were the deep development of the theory of rational quadratic forms and the complete classification of indefinite forms in dimensions 3 and higher by Eichler in terms of spinor genera.

The paper proposes an algorithm for calculating non-equivalent quadratic forms corresponding to the faces of the Voronoi domain of the second perfect form in many variables, and using this algorithm, all corresponding non-equivalent quadratic forms are calculated.

Keywords: quadratic forms, perfect forms, Voronoi domain, Voronoi neighborhood, improved Voronoi algorithm.

Bibliography: 18 titles.

For citation:

O. Kh. Gulomov, 2024, "Quadratic forms corresponding to the faces of the Voronoi domain of perfect form in six variables", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 1, pp. 16–25.

1. Введение: постановка задачи

Тематика работе относится к одному из современных разделов геометрической теории чисел – геометрии положительных квадратичных форм. Термин «геометрия положительных квадратичных форм» и выделение этого раздела из геометрии чисел впервые встречаются в фундаментальной работе Б.Н.Делоне [1]

В работе С.С.Рышков, Е.П.Барановский [2] перечислены основные в настоящее время задачи геометрии положительных квадратичных форм и классические методы подхода к этим задачам.

В работе речь идет о классической проблеме Вороного отыскания совершенных форм, тесно связанной с известной проблемой Эрмита арифметических минимумов положительных квадратичных форм.

Эти проблемы являются интересными и нетривиальными задачами геометрической теории чисел, которыми занимались многие математики (Эрмит, Гаусс, Коркин, Золотарев, Минковский, Вороной, Делоне, Рышков, Малышев, Барнс, Владимиров, Скотт, Лармоут, Стаси, Барановский, Шушбаев, Анзин, Умаров и др.). Они появились и в работах С.Л.Соболева [12] и Х.М. Шадиметова [13] в связи с построением решетчатых оптимальных кубатурных формул. Пусть

$$f = f(x) = f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} x_i x_j \quad (1)$$

положительно определенная квадратичная форма от n переменных ($n \geq 2$) с вещественными коэффициентами $a_{ij} = a_{ji}$ ($i, j = 1, \dots, n$), матрицей коэффициентов $A = (a_{ij})$ и определителем $d = d(f) = \det(a_{ij}) > 0$. Форму f можно интерпретировать точкой $f = (a_{11}, \dots, a_{nn}, a_{12}, \dots, a_{n-1n})$ в $N = \frac{n(n+1)}{2}$ - мерном евклидовом пространстве E^N . Множество всех положительно определенных квадратичных формы в E^N образует конус положительности K^N .

Пусть f – положительно определенная квадратичная форма вида (1). Точная нижняя граница

$$m = m(f) = \inf_{x \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} f(x), \quad (2)$$

взятая по всем целым точкам $x \neq 0$, называется арифметическим минимумом формы f . Эта точная нижняя граница достигается, ибо множество $f(x) \leq c$ ограничено для любого $c > 0$.

Пусть

$$\pm m_k = \pm (m_{1k}, \dots, m_{nk}) \quad (k = 1, \dots, s; \quad s = s(f)) \quad (3)$$

все представления минимума $m(f) = f(\pm m_1) = \dots = f(\pm m_s)$. Отсюда, в частности, следует, что $m(f) > 0$. Так как тело $f(x) = m(f)$ строго выпукло, то $1 \leq s \leq 2^n - 1$.

Точки в (3) мы иногда будем называть минимальными точками (векторами), а матрицу

$$M(f) = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{21} & \dots & m_{n1} \\ m_{12} & m_{22} & \dots & m_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{1s} & m_{2s} & \dots & m_{ns} \end{pmatrix} -$$

минимальной матрицей формы f .

Ввиду того, что $m(\lambda f) = \lambda m(f)$, $\lambda > 0$, естественно рассматривать нормированный арифметический минимум

$$\mu(f) = \frac{m(f)}{\sqrt[n]{d(f)}}.$$

Теперь $\mu(\lambda f) = \mu(f)$. Арифметический минимум $m(f)$ есть непрерывная функция от f , заданная на конусе положительности K^N . А. Коркина, G. Zolotareff [3, 4], G. Voronoi [5]. Нормированный арифметический минимум $\mu(f)$ есть непрерывная функция от f , заданная на эквидискриминантной поверхности $\{f : d(f)=1\} \subset K^N$, то есть на множестве положительно определенные квадратичные формы. определителя, равного 1.

Две положительно определенных квадратичных форм $f_1(x)$ и $f_2(y)$ называются целочисленно эквивалентными (эквивалентными, $f_1 \sim f_2$) если существует целочисленная унимодулярная подстановка $x = yU$, переводящая форму $f_1(x)$ в $f_2(y)$, то есть $f_1(yU) = f_2(y)$ или $f_1U = f_2$. В частности, в случае $f_1=f_2=f$ U называется целочисленным автоморфизмом формы f т.е. $fU = f$.

Говорят, что положительно определенная квадратичная форма f – предельная (экстремальная) форма Коркина-Золотарева [3, 4], если f есть точка локального максимума функции $\mu(f)$, то есть если существует такая окрестность $v_f \subset \{f : d(f)=1\}$ точки f , что $\mu(f') \leq \mu(f)$, если $f' \in v_f$.

Говорят, что положительно определенная квадратичная форма f – оптимальная предельная форма Коркина-Золотарева [3, 4], если f есть точка абсолютного максимума функции $\mu(f)$, то есть если $\mu(f') \leq \mu(f)$ для всех $f' \in \{f : d(f)=1\}$.

Известно [3, 4], что число различных классов предельных форм от n переменных для данного n конечно. Отсюда вытекает проблема отыскания неэквивалентных предельных форм для фиксированного n . Это и есть проблема Эрмита арифметических минимумов положительных квадратичных форм. Следовательно, существует оптимальная предельная форма f_0 , для которой $\gamma_n = \sup_{f \in \{f: d(f)=1\}} \mu(f) = \mu(f_0)$. Число γ_n называется постоянной Эрмита. γ_n есть

наибольшее из чисел $\mu(f_1), \dots, \mu(f_t)$, где f_1, \dots, f_t – суть представители всех лучей классов предельных форм. В работах Minkowski Н. [7], К. Роджерс [8], С.С. Рышков [9], задача вычисления постоянной Эрмита получила геометрическую интерпретацию как задача о плотнейшей решетчатой упаковке равных шаров в E^N .

2. Проблема Вороного отыскания совершенных форм и алгоритм Вороного

Отметим одно известное [3, 4] важное свойство предельных форм: представления (3) минимума (2) предельной формы f однозначно определяют форму, т.е. следующая система линейных уравнений

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} m_{ik} m_{jk} = m \quad (k = 1, \dots, s) \quad (4)$$

имеет относительно неизвестных a_{ij} единственное решение. На основе этого свойства Вороным создана теория совершенных форм.

Говорят, что положительно определенная квадратичная форма f является совершенной формой Вороного [5], если системой линейных уравнений (4) коэффициенты $a_{ij} (1 \leq i, j \leq n)$ формы f определяются однозначно.

Так как система (4) однозначно определяет N неизвестных коэффициентов (a_{ij}), то верны неравенства $\frac{n(n+1)}{2} \leq s \leq 2^n - 1$ для любой совершенной формы.

Таким образом, из вышеупомянутого свойства предельной формы и определения совершенной формы следует, что всякая предельная форма является совершенной. Обратное не верно. Начиная с $n=6$, существуют совершенные, но не предельные формы.

Известно [5], что число различных классов совершенных форм от n переменных при данном n конечно. Отсюда вытекает проблема отыскания неэквивалентных совершенных форм для фиксированного n . Это и есть проблема Вороного отыскания совершенных форм. Теперь ясно, что из постановок этих проблем (Эрмита, Вороного) следует, что проблема Эрмита содержится в проблеме Вороного, другими словами, проблема Эрмита сводится к проблеме Вороного.

Согласно теории Вороного [5], каждой совершенной форме f вида (1) ставится в соответствие область $V^N(f) \subset \bar{K}^N$ — N -мерная бесконечная пирамида с конечным числом $(N - 1)$ — мерных граней и с вершиной в начале координат (совершенный гоноэдр [5, 9, 10, 11, 14, 15]) — совокупность всех неотрицательных квадратичных форм, представимых в виде

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} x_i x_j = \sum_{1 \leq k \leq s} \rho_k \lambda_k^2(x_1, \dots, x_n), \quad (5)$$

где \bar{K}^N — замыкание конуса K^N , $\rho_k \geq 0$,

$$\lambda_k = \lambda_k(x) = \lambda_k(x_1, \dots, x_n) = m_{1k}x_1 + \dots + m_{nk}x_n \quad (k = 1, \dots, s).$$

В пространстве E^N область $V^N(f)$ есть множество решений некоторой системы однородных неравенств с неизвестными a_{ij} :

$$\Psi_k(a_{ij}) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} P_{ij}^{(k)} a_{ij} \geq 0 \quad (k = 1, \dots, \sigma). \quad (6)$$

Тогда по алгоритму Вороного [5] совершенные формы f_k , смежные с совершенной формой f , строятся следующим образом:

$$f_k(x) = f(x) + r_k \Psi_k(x) \quad (k = 1, \dots, \sigma), \quad (7)$$

где

$$r_k = \min_{\{x \in Z^n / \{0\} : \Psi_k(x) < 0\}} \left\{ \frac{f(x) - m}{[-\Psi_k(x)]} \right\}, \quad (8)$$

$$\Psi_k(x) = \Psi_k(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} P_{ij}^{(k)} x_i x_j. \quad (9)$$

Выделив из совокупности $\{f, f_1, \dots, f_\sigma\}$ неэквивалентные относительно группы $G(n; Z)$ (группа целочисленных унимодулярных подстановок переменных x_1, \dots, x_n), получаем окрестность Вороного $\{f, f_1, \dots, f_\tau\}$ (см. [2, 5, 6, 9, 10, 11, 14]) совершенной формы f относительно группы $G(n; Z)$ (группа целочисленных унимодулярных подстановок переменных x_1, \dots, x_n), или просто окрестность Вороного, которую обозначают $VN(f; G(n; Z))$ или $VN(f)$.

Основные трудности в реализации алгоритма Вороного следующие: отыскание уравнений всех $(N-1)$ -мерных граней области $V^N(f)$; выделение среди всех $(N-1)$ -мерных граней неэквивалентных относительно группы $G(f)$ целочисленных автоморфизмов совершенной формы f ; нахождение числа r_i и вычисление $VN(f)$.

3. Алгоритм установления эквивалентности положительных квадратичных форм

Прямоугольная $(s \times n)$ матрица всех представлений минимума положительных квадратичных форм f называется минимальной матрицей формы f и обозначается через $M = M(f)$, а миноры n -го порядка этой матрицы называются минимальными определителями формы f (см. [2, 5]). Понятия «минимальная матрица», «минимальный определитель» введены в [2, 5] под другими названиями: соответственно «характеристическая матрица», «характеристический определитель». Минимальный определитель, абсолютная величина которого равна 1, называется базисным определителем формы f , а соответствующая матрица называется базисной подматрицей минимальной матрицы или просто базисной матрицей. В решетке, отвечающей положительным квадратичным форм f , базисной подматрице соответствует основной репер минимальных векторов этой решетки. По минимальной матрице $M(f)$ положительных квадратичных форм f вида (1) вычисляем матрицу $\Gamma = MAM^T$, т.е. симметричную $(s \times s)$ матрицу, составленную из скалярных произведений (m_k, m'_k) представлений минимума m в метрике формы f . При этом каждой базисной подматрице матрицы M будет отвечать подматрица Υ матрицы Γ , являющаяся матрицей Грама, соответствующей этой базисной матрице основного репера минимальных векторов.

ЛЕММА 3. Пусть f_i , где $i = 1, 2$ - две такие п.к.ф. от n переменных с матрицами коэффициентов A_i , что матрица $M_i = M(f_i)$ для каждого $i = 1, 2$ имеет базисную подматрицу. Тогда для того, чтобы положительные квадратичные формы f_1 и f_2 были целочисленно эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы в матрицах $M_i A_i M_i^T = \Gamma_i$ нашлись одинаковые подматрицы Υ_i , отвечающие базисным подматрицам минимальных матриц M_i , соответственно.

Лемма 3 содержит в себе алгоритм для отыскания целочисленной унимодулярной подстановки U , переводящей п.к.ф. f_1 в п.к.ф. f_2 , то есть $f_1(yU) = f_2(y)$. Основой этого алгоритма является отыскание в матрице $\Gamma_1 = M_1 A_1 M_1^T$ подматрицы Υ_2 , отвечающей какому ни будь базисному определителю матрицы $M_2 = M(f_2)$ поэлементно методом перебора.

4. Алгоритм для отыскания граней области Вороного совершенной формы $\varphi_1^n(x_1, \dots, x_n)$

В [5] доказывается, что квадратичные формы (9), соответствующие $\frac{(n+2)(n-1)}{2}$ -мерным граням $\Psi_k = \Psi_k(\varphi_1^n)$ области $V^{\frac{n(n+1)}{2}}(\varphi_1^n)$ совершенной формы

$$\varphi_1^n = \varphi_1^n(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_n^2 + x_1x_3 + \dots + x_{n-1}x_n \tag{10}$$

имеют вид:

$$-x_1x_3, \tag{11}$$

$$x_1x_2 - \delta_{34}x_3x_4 - \dots - \delta_{n-1n}x_{n-1}x_n. \tag{12}$$

Следовательно, чтобы найти совершенной форма, смежные с φ_1^n , необходимо выделить среди форм

$$\delta_{34}x_3x_4 + \dots + \delta_{n-1n}x_{n-1}x_n \tag{13}$$

неэквивалентные относительно группы $G(\varphi_1^n)$ целочисленных автоморфизмов формы φ_1^n , где $\delta_{ij} = 0$ или 1 ($3 \leq i < j \leq n$). Число форм (12) достаточно большое, и равно

$$2^{\frac{(n-2)(n-3)}{2}}. \tag{14}$$

После этого с помощью формулы (7) строятся совершенные формы, смежные с совершенной формой φ_1^n .

В связи с этим предлагается следующий алгоритм. Обозначим через q число членов формы (13) так, что $q \leq \frac{(n-2)(n-3)}{2}$. Каждой переменной x_i ($i=3, \dots, n$) ставим в соответствие натуральное число l_i , равное фактическому количеству переменной x_i в сумме $\delta_{34}x_3x_4 + \dots + \delta_{n-1n}x_{n-1}x_n$, то есть сколько раз переменная x_i фактически участвует в сумме.

Будем говорить, что два натуральных числа l_i, l_j соединены (этот факт будем обозначать через $l_i l_j$), если в сумме (13) есть произведение $x_i x_j$. Тогда форму (13) можно интерпретировать как представление числа $2q$ в виде суммы чисел l_i при условии, что каждое число данного представления имеет возможность для соединения с другими оставшимися числами. Такое ограничение представления числа $2q$ следует из самой природы формы $\delta_{34}x_3x_4 + \dots + \delta_{n-1n}x_{n-1}x_n$. Число натуральных чисел, участвующих в сумме представления числа $2q$, не меньше 2 и не больше $n - 2$.

5. Основной результат

ТЕОРЕМА. Число 20-мерных граней области Вороного $V^{21}(\varphi_1^6)$ совершенной формы φ_1^6 , неэквивалентных относительно группы S_4 перестановок переменных x_3, \dots, x_6 , равно 12.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, по алгоритму имеем $1 \leq q \leq 6$.

I. Если $q = 1$, то 2 представляется в виде: $1100 \rightarrow 0000$ и получаем форму x_3x_4 . Число возможных перестановок 1100 равно $6 \left(\frac{4!}{2!2!} = 6 \right)$, т.е. 1100, 1010, 1001, 0110, 0101, 0011. Все они эквивалентны между собой, так как форма φ_1^6 имеет автоморфизмы, состоящие из перестановок переменных x_3, x_4, x_5, x_6 . Поэтому оставляем только одну $1100(x_3x_4)$.

II. Если $q=2$, то 4 представляется в виде $2110 \rightarrow 0000$, и получаем форму $x_3(x_4 + x_5)$. Число всевозможных перестановок 2110 равно $12 \left(\frac{4!}{1!2!1!} = 12 \right)$, т.е.

$$2110, 2101, 2011, 1210, 1201, 1021, 1120, 1102, 1012, 0112, 0211, 0121. \tag{15}$$

Остальные представления числа 4 (см. (15)) эквивалентны 2110, так как форма φ_1^6 имеет автоморфизмы, состоящие из перестановок переменных x_3, x_4, x_5, x_6 . Здесь всего форм 12, и все они эквивалентны между собой. Пусть $q = 2$, тогда 4 представляется также в виде: 1) $1111 \rightarrow 0000 (x_3x_4 + x_5x_6)$; 2) $1111 \rightarrow 0000 (x_3x_5 + x_4x_6)$; 3) $1111 \rightarrow 0000 (x_3x_6 + x_4x_5)$ – это всевозможные соединения. Их всего три. Они эквивалентны между собой, так как 1111 имеет группу перестановок переменных x_4, x_5, x_6 . Таким образом, при $q=2$ из 15 возможных случаев неэквивалентными оказываются только два: $x_3(x_4+x_5), x_3x_4 + x_5x_6$.

III. Пусть $q=3$, тогда 6 представляется в виде: 1) $3111 \rightarrow 0000$, и получаем форму $x_3(x_4 + x_5 + x_6)$. Число всевозможных перестановок 3111 равно 4 ($\frac{4!}{1!3!} = 4$), т.е. 3111, 1311, 1131, 1113. Остальные представления числа 6 эквивалентны 3111, так как форма φ_1^6 имеет автоморфизмы, состоящие из перестановок переменных x_3, x_4, x_5, x_6 . Всего их 4, и все они эквивалентны между собой. Поэтому остается 1: $3111(x_3(x_4 + x_5 + x_6))$. Дальнейшие рассуждения аналогичны предыдущему случаю.

2) $2220 \rightarrow 0110 \rightarrow 0000$, и получаем форму $x_3(x_4 + x_5) + x_4x_5$. Число всевозможных перестановок равно 4 ($\frac{4!}{1!3!} = 4$), т.е. 2220, 2202, 2022, 0222. Другие (2202, 2022, 0222) представления числа 6 эквивалентны 2220. Всего форм 4, и все они эквивалентны между собой.

3) $2211 \rightarrow 0101 \rightarrow 0000$, и получаем форму $x_3(x_4 + x_5) + x_4x_6$. Число всевозможных перестановок равно 6 ($\frac{4!}{2!2!} = 6$). Остальные представления числа 6 (2121, 2112, 1221, 1212, 1122) эквивалентны 2211. Получается 6 форм, и они эквивалентны между собой. У 2211 есть еще одно соединение $2211 \rightarrow 0110 \rightarrow 0000: x_3(x_4 + x_6) + x_4x_5$, оно эквивалентно 2211 (так как 2211 имеет $x_5 \rightarrow x_6, x_6 \rightarrow x_5$ в качестве автоморфизма). И здесь получается 6 форм, эквивалентных между собой. Таким образом, при $q=3$ из 20 возможных случаев неэквивалентными представлениями оказались только 3: 3111, 2220, 2211.

IV. Пусть $q=4$, тогда 8 представляется в виде: 1) $3221 \rightarrow 0110 \rightarrow 0000$; $x_3(x_4+x_5+x_6) + x_4x_5$. Число всевозможных перестановок равно 12 ($\frac{4!}{1!2!1!} = 12$). Остальные представления числа 8 (их 11) эквивалентны 3221. Дальнейшие рассуждения аналогичны предыдущему случаю.

2) $2222 \rightarrow 0112 \rightarrow 0000$; $x_3(x_4 + x_5) + x_6(x_4 + x_5)$. У 2222 есть еще другие соединения, но все они эквивалентны 2222, так как 2222 имеет группу перестановок переменных x_4, x_5, x_6 ; $2222 \rightarrow 0112 \rightarrow 0000$; $2222 \rightarrow 0121 \rightarrow 0000$; $2222 \rightarrow 0211 \rightarrow 0000$. При $q=4$ из 15 возможных случаев неэквивалентными оказались только 2 представления: 3221, 2222.

V. Пусть $q=5$, тогда 10 представляется в виде: $3322 \rightarrow 0211 \rightarrow 0000$; $x_3(x_4 + x_5 + x_6) + x_4(x_5 + x_6)$. Число всевозможных перестановок равно 6 ($\frac{4!}{2!2!} = 6$). Остальные представления числа 10 (их 5) эквивалентны 3322.

Поэтому, при $q=5$ из 6 представлений остается только 1: 3322.

VI. Если $q=6$, то 12 представляется в виде: $3333 \rightarrow 0222 \rightarrow 0011 \rightarrow 0000$; $x_3(x_4+x_5+x_6) + x_4(x_5+x_6) + x_5x_6$.

VII. В случае, когда $\delta_{34}, \delta_{35}, \delta_{36}, \delta_{45}, \delta_{46}, \delta_{56}$ все одновременно равны нулю, имеем одну форму x_1x_2 .

В силу (14) число всевозможных форм

$$x_1x_2 - \delta_{34}x_3x_4 - \delta_{35}x_3x_5 - \delta_{36}x_3x_6 - \delta_{45}x_4x_5 - \delta_{46}x_4x_6 - \delta_{56}x_5x_6 \quad (16)$$

равно $2^6=64$. С одной стороны, наши приведенные выше рассуждения показывают, что число всевозможных представлений числа $2q$ для $1 \leq q \leq 6$ с учетом соответствующих перестановок чисел и их различных всевозможных соединений также равно $6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 + 1 = 64$. Число всевозможных форм вида (16) и число всевозможных представлений числа $2q$ в виду суммы чисел l_i (при условии, что каждое натуральное число l_i имеет возможность для соединения с другими числами этого представления) совпадают. С другой стороны, как видно из вышеприведенных рассуждений, с помощью алгоритма, приведенного в пункта 2, число

64 значительно сокращается: форм вида (16), неэквивалентных относительно перестановок переменных x_3, \dots, x_6 , будет только 11 ($1 + 2 + 3 + 2 + 1 + 1 + 1$).

Таким образом, в случае $n=6$ число различных неэквивалентных форм вида (15) и (16) равно 12:

- 1) x_1x_2 , 3) $x_1x_2 - x_3(x_4 + x_5)$
- 2) $x_1x_2 - x_3x_4$, 4) $x_1x_2 - x_3x_4 - x_5x_6$,
- 5) $x_1x_2 - x_3(x_4 + x_5 + x_6)$, 9) $x_1x_2 - x_3(x_4 + x_5) - x_6(x_4 + x_5)$,
- 6) $x_1x_2 - x_3(x_4 + x_5) - x_4x_5$, 10) $x_1x_2 - x_3(x_4 + x_5 + x_6) - x_4(x_5 + x_6)$,
- 7) $x_1x_2 - x_3(x_4 + x_5) - x_4x_6$, 11) $x_1x_2 - x_3(x_4 + x_5 + x_6) - x_4(x_5 + x_6) - x_5x_6$,
- 8) $x_1x_2 - x_3(x_4 + x_5 + x_6) - x_4x_5$, 12) $-x_1x_3$.

Каждая из этих форм, в силу теории Вороного [5], определяет 20-мерную грань области Вороного $V^{21}(\varphi_1^6)$ совершенной формы φ_1^6 . Теорема доказано.

6. Заключение

В работе речь идет о классической проблеме Вороного отыскания совершенных форм, тесно связанной с известной проблемой Эрмита арифметических минимумов положительных квадратичных форм.

В работе предложен алгоритм для вычисления неэквивалентных соответствующих квадратичных форм граням области Вороного второй совершенной формы от много переменных и с помощью этого алгоритма вычислены все соответствующий неэквивалентные квадратичные формы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Б. Н. Делоне, Геометрия положительных квадратичных форм. Часть II // УМН, 1938, № 4, 102–164
2. Рышков С. С., Барановский Е. П. Классические методы теории решетчатых упаковок // Успехи математических наук. 1979. Т. 34, № 4(202). С. 3-63.
3. Korkine A., Zolotareff G. Sur les formes quadratiques // Math. Ann. 1873, С.366-389, Полное собр. соч. Е.И.Золотарева. Вып.1 Изд-во АН СССР. 1931.
4. Korkine A., Zolotareff G. Sur les formes quadratiques positives // Math. Ann. 1877. Bd. 11. 242-292. Полное собр. соч. Е.И.Золотарева. Вып.1. Изд-во АН СССР. С.375-434.
5. Вороного Г. О некоторых свойствах положительных совершенных квадратичных форм // Собр. соч. Т. II. 1952. Изд-во АН УССР. С.171-238.
6. Barnes E. S. The complete enumeration of extreme senary forms // Philos. Trans Roy. Soc. London. 1957. V. A249, № A969. P.461-506.
7. Minkowski H. Diskontinui tetsbereich fur Arithmetische Aquivalenz // J.reine and angew. Math. 129. 1905. P.220-284.
8. Rogers C. A. Packing and covering. Cambridge. 1964. Русск. пер.: Роджерс К. Укладки и покрытия. Москва. 1968. 134 с.
9. Рышков С. С. Основные экстремальные задачи геометрии положительных квадратичных форм. // Докторская диссертация. М. 1970. 171 с.

10. Гуломов О. Окрестность Вороного главной совершенной формы от пяти переменных // Чебышевский сборник, 2023, 24(1), с. 219–227
11. Gulomov O. Kh., Khudayarov B. A., Ruzmetov K. Sh., Turaev F. Zh. Quadratic forms related to the voronoi's domain faces of the second perfect form in seven variables // Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Series B: Applications and Algorithms *this link is disabled*, 2021, 28(1), pp. 15–23
12. Соболев С. Л. Введение в теорию кубатурных формул // Москва: Наука, 1974, 808 с.
13. Шадиметов Х. М. Оптимальные решетчатые квадратурные и кубатурная формулы в пространствах Соболева // –Ташкент: Фан ва технология, 2019, -224 с.
14. Shadimetov Kh. M., Gulomov O. Kh. Computing Perfect Forms in Five Variables Using the Improved Voronoi Algorithm // AIP Conference Proceedings, 2023, 2781, 020047
15. Shadimetov Kh. M., Hayotov A. R., Karimov R. S. Optimization of Explicit Difference Methods in the Hilbert Space $W_2^{(2,1)}$ // AIP Conference Proceedings, 2023, 2781, 00054

REFERENCES

1. Delone, B. N., 1938. “Geometry of positive quadratic forms. Part II”, *Uspekhi Mat. Nauk*, no. 4, pp. 102–164.
2. Ryshkov S. S., Baranovskii E. P., 1979. “Classical methods of the theory of lattice packings”, *Uspekhi Mat. Nauk*, vol. 34, no. 4(208), pp. 3–63, 256.
3. Korkine, A., Zolotareff, G., 1873. “Sur les formes quadratiques”, *Math. Ann.*, 6, pp.366–389.
4. Korkine, A., Zolotareff, G., 1877. “Sur les formes quadratiques positives”, *Math. Ann.*, 11. pp. 242–292.
5. Voronoi, G., 1907. “Sur quelques proprietes des formes quadratiques positives par-faites”, *J.reine und angew. Math.*, Bd. 133, pp.97–178.
6. Barnes E. S., 1957. “The complete enumeration of extreme senary forms”, *Philos. Trans Roy. Soc., London*, V. A249, no. A969, P.461-506.
7. Minkowski H., 1905. “Diskontinui tetsbereich fur Arithmetische Aquivalenz”, *J.reine and angew. Math.*, 129, pp.220–284.
8. Rogers, C. A., 1964. “Packing and Covering”, *Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, No. 54*, Cambridge University Press, viii + 109 pp., 30s.
9. Ryshkov S. S., 1970. Basic extremal problems in the geometry of positive quadratic forms. Doctoral dissertation. M. 171 p.
10. Gulomov O. Kh., 2023. “The neighborhood of the Voronoi main perfect form from five variables, Chebyshevskii Sbornik, 241, pp. 219–227.
11. Gulomov O. Kh., Khudayarov B. A., Ruzmetov K. Sh., Turaev F. Zh., 2021. “Quadratic forms related to the voronoi's domain faces of the second perfect form in seven variables”, *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Series B: Applications and Algorithms* *this link is disabled*, Vol. 28, Iss. 1, pp. 15–23.

12. Sobolev S. L., 1974. "Introduction to the Theory of Cubature Formulas", *Moscow, Nauka*, 808 p. (in Russian).
13. Shadimetov Kh. M., 2019. "Optimal lattice quadrature and cubature formulas in Sobolev spaces", *Tashkent: Fan technology*, 224 p.
14. Shadimetov Kh. M., Gulomov O. Kh., 2023. "Computing Perfect Forms in Five Variables Using the Improved Voronoi Algorithm", *AIP Conference Proceedings*, 2781, 020047.
15. Shadimetov Kh. M., Hayotov A. R., Karimov R. S., 2023. "Optimization of Explicit Difference Methods in the Hilbert Space $W_2^{(2,1)}$ ", *AIP Conference Proceedings*, 2781, 00054.

Получено: 12.10.2023

Принято в печать: 21.03.2024

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 25. Выпуск 1.

УДК 517.9

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-1-26-41

**Нелинейный метод угловых пограничных функций для
сингулярно возмущенных параболических задач с кубическими
нелинейностями**

А. И. Денисов, И. В. Денисов

Денисов Алексей Игоревич — аспирант, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: den_tspu@mail.ru

Денисов Игорь Васильевич — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: den_tspu@mail.ru

Аннотация

В прямоугольнике $\Omega = \{(x, t) \mid 0 < x < 1, 0 < t < T\}$ рассматривается начально-краевая задача для сингулярно возмущенного параболического уравнения

$$\varepsilon^2 \left(a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} \right) = F(u, x, t, \varepsilon), \quad (x, t) \in \Omega,$$

$$u(x, 0, \varepsilon) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$u(0, t, \varepsilon) = \psi_1(t), \quad u(1, t, \varepsilon) = \psi_2(t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Исследования проводятся в предположении, что в угловых точках $(k, 0)$ прямоугольника Ω , где $k = 0$ или 1 , функция $F(u) = F(u, k, 0, 0)$ является кубической и имеет вид

$$F(u) = (u - \alpha(k))(u - \beta(k))(u - \bar{u}_0(k)), \quad \text{где } \alpha(k) \leq \beta(k) < \bar{u}_0(k).$$

Используется нелинейный метод угловых пограничных функций, который сочетает в себе (линейный) метод угловых пограничных функций, метод верхних и нижних решений (барьеров) и метод дифференциальных неравенств. При условии $\varphi(k) > \bar{u}_0(k)$ строится полное асимптотическое разложение решения при $\varepsilon \rightarrow 0$ и обосновывается его равномерность в замкнутом прямоугольнике.

Ранее были рассмотрены следующие случаи кубических нелинейностей:

$$F(u) = u^3 - \bar{u}_0^3, \quad \text{где } \bar{u}_0 = \bar{u}_0(k) > 0,$$

в предположении, что граничное значение $\varphi(k) > \bar{u}_0(k)$, а также случай

$$F(u) = u^3 - \bar{u}_0^3, \quad \text{где } \bar{u}_0 = \bar{u}_0(k) < 0,$$

в предположении, что граничное значение $\varphi(k)$ заключено в промежутке

$$\bar{u}_0 < \varphi(k) < \frac{\bar{u}_0}{2} < 0.$$

Ключевые слова: пограничный слой, асимптотическое приближение, сингулярно возмущенное уравнение.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:

А. И. Денисов, И. В. Денисов. Нелинейный метод угловых пограничных функций для сингулярно возмущенных параболических задач с кубическими нелинейностями // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 1, с. 26–41.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 25. No. 1.

UDC 517.9

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-1-26-41

Nonlinear method of angular boundary functions for singularly perturbed parabolic problems with cubic nonlinearities

A. I. Denisov, I. V. Denisov

Denisov Alexey Igorevich — postgraduate student, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: den_tspu@mail.ru

Denisov Igor Vasil'evich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: den_tspu@mail.ru

Abstract

In the rectangle $\Omega = \{(x, t) \mid 0 < x < 1, 0 < t < T\}$ we consider an initial-boundary value problem for a singularly perturbed parabolic equation

$$\varepsilon^2 \left(a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} \right) = F(u, x, t, \varepsilon), \quad (x, t) \in \Omega,$$

$$u(x, 0, \varepsilon) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$u(0, t, \varepsilon) = \psi_1(t), \quad u(1, t, \varepsilon) = \psi_2(t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Research is carried out under the assumption that at the corner points $(k, 0)$ of the rectangle Ω , where $k = 0$ or 1 , the function $F(u) = F(u, k, 0, 0)$ is cubic and has the form

$$F(u) = (u - \alpha(k))(u - \beta(k))(u - \bar{u}_0(k)), \quad \text{где } \alpha(k) \leq \beta(k) < \bar{u}_0(k).$$

The nonlinear method of angular boundary functions is used, which combines the (linear) method of angular boundary functions, the method of upper and lower solutions (barriers), and the method of differential inequalities. Under the condition $\varphi(k) > \bar{u}_0(k)$, a complete asymptotic expansion of the solution for $\varepsilon \rightarrow 0$ is constructed and its uniformity in a closed rectangle is substantiated.

Previously, the following cases of cubic nonlinearities were considered:

$$F(u) = u^3 - \bar{u}_0^3, \quad \text{where } \bar{u}_0 = \bar{u}_0(k) > 0,$$

under the assumption that the boundary value $\varphi(k) > \bar{u}_0(k)$, as well as the case

$$F(u) = u^3 - \bar{u}_0^3, \quad \text{where } \bar{u}_0 = \bar{u}_0(k) < 0,$$

under the assumption that the boundary value $\varphi(k)$ is contained in the interval

$$\bar{u}_0 < \varphi(k) < \frac{\bar{u}_0}{2} < 0.$$

Keywords: boundary layer, asymptotic approximation, singularly perturbed equation.

Bibliography: 15 titles.

For citation:

A. I. Denisov, I. V. Denisov, 2024, “Nonlinear method of angular boundary functions for singularly perturbed parabolic problems with cubic nonlinearities”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 1, pp. 26–41.

1. Введение

Нелинейный метод угловых пограничных функций сочетает в себе (линейный) метод угловых пограничных функций, метод верхних и нижних решений (барьеров) и метод дифференциальных неравенств.

Метод угловых пограничных функций работает, когда в угловых точках границы функция F является линейной по переменной u или ставятся краевые условия второго рода (задача Неймана), что позволяет описать угловой пограничный слой с помощью только линейных задач (см. [1]). Если функция F в угловых точках границы является нелинейной по переменной u и ставятся краевые условия первого рода (задача Дирихле), то метод угловых пограничных функций перестает работать. Поэтому этот метод естественно назвать линейным.

В случае первой краевой задачи с функцией F нелинейной по переменной u в угловых точках границы для доказательства существования подходящих решений нелинейных краевых задач приходится применять метод верхних и нижних решений (барьеров) (см. [2] – [4]). При этом основная трудность заключается в конструировании соответствующих барьеров. В некоторых случаях удается построить гладкие барьеры, пригодные во всей рассматриваемой области. Если же гладкие барьеры не удается построить сразу во всей рассматриваемой области, то приходится строить кусочно–гладкие барьеры, а затем их сглаживать.

Для обоснования построенной асимптотики решения удобно применять метод дифференциальных неравенств (см. [5]).

С помощью нелинейного метода угловых пограничных функций была решена первая краевая задача для различных нелинейных сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений (см. [6] – [15]). Полностью были исследованы задачи с квадратичными нелинейностями в угловых точках границы. Для таких задач пришлось учитывать всего два специфических поведения параболы: ветви вверх или вниз.

Для задач с кубическими нелинейностями специфических случаев существенно больше, чем в случае квадратичных нелинейностей. Кроме возможной смены монотонности приходится учитывать и смену направления выпуклости. К настоящему моменту рассмотрены следующие случаи кубических нелинейностей. В работе [12] в угловых точках границы функция $F(u) = F(u, k, 0, 0)$ имела вид

$$F(u) = u^3 - \bar{u}_0^3, \quad \text{где } \bar{u}_0 = \bar{u}_0(k) > 0,$$

и предполагалось, что граничное значение $\varphi(k) > \bar{u}_0(k)$.

В работе [13] в угловых точках границы функция $F(u) = F(u, k, 0, 0)$ имела вид

$$F(u) = u^3 - \bar{u}_0^3, \quad \text{где } \bar{u}_0 = \bar{u}_0(k) < 0,$$

и предполагалось, что граничное значение $\varphi(k)$ заключено в промежутке

$$\bar{u}_0 < \varphi(k) < \frac{1 + \sqrt{274}}{21} \bar{u}_0 \approx 0,88 \dots \bar{u}_0 < 0.$$

В работе [15], в дополнение к работе [13], для главного члена угловой части асимптотики решения удалось построить барьерные функции другого типа, что позволило существенно усилить результат работы [13], допустив величину граничного значения до середины промежутка

$[u_0, 0]$, где 0 – точка перегиба:

$$\bar{u}_0 < \varphi(k) \leq \frac{\bar{u}_0}{2} < 0.$$

В предлагаемой работе исследования проводятся в предположении, что в угловых точках $(k, 0)$ прямоугольника Ω , где $k = 0$ или 1 , функция $F(u) = F(u, k, 0, 0)$ имеет вид

$$F(u) = (u - \alpha(k))(u - \beta(k))(u - \bar{u}_0(k)), \quad \text{где } \alpha(k) \leq \beta(k) < \bar{u}_0(k),$$

и граничное значение $\varphi(k) > \bar{u}_0(k)$. Для построения асимптотики решения используется нелинейный метод угловых пограничных функций.

2. Постановка задачи

Обозначим через Ω прямоугольник $\{(x, t) \mid 0 < x < 1, 0 < t < T\}$. Рассмотрим начально-краевую задачу вида

$$\varepsilon^2 \left(a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} \right) = F(u, x, t, \varepsilon), \quad (x, t) \in \Omega, \quad (1)$$

$$u(x, 0, \varepsilon) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2)$$

$$u(0, t, \varepsilon) = \psi_1(t), \quad u(1, t, \varepsilon) = \psi_2(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

где ε – малый положительный параметр. Предположим, что выполнены следующие условия.

Условие 1. *Функции $F(u, x, t, \varepsilon)$, $\varphi(x)$, $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ являются достаточно гладкими и в угловых точках прямоугольника Ω выполняются условия согласованности начально-краевых значений*

$$\varphi(0) = \psi_1(0), \quad \varphi(1) = \psi_2(0).$$

Условие 2. *Вырожденное уравнение $F(u, x, t, 0) = 0$ в замкнутом прямоугольнике $\bar{\Omega}$ имеет решение, которое обозначается как $u = \bar{u}_0(x, t)$.*

Заметим, что в силу нелинейности это уравнение может иметь и другие решения.

Условие 3. *Производная $F'_u(\bar{u}_0(x, t), x, t, 0) > 0$ в замкнутом прямоугольнике $\bar{\Omega}$.*

Условие 4. *Начальная задача*

$$\frac{d\Pi_0}{d\tau} = -F(\bar{u}_0(x, 0) + \Pi_0, x, 0, 0), \quad \Pi_0(x, 0) = \varphi(x) - \bar{u}_0(x, 0),$$

имеет решение $\Pi_0(x, \tau)$ при $\tau \geq 0$, удовлетворяющее условию $\Pi_0(x, \infty) = 0$ (здесь параметр $x \in [0, 1]$).

Условие 5. *Для систем*

$$\frac{dz_1}{dy} = z_2, \quad a^2 \frac{dz_2}{dy} = F(\bar{u}_0(k, t) + z_1, k, t, 0), \quad (4)$$

прямые $z_1 = \psi_{1+k}(t) - \bar{u}_0(k, t)$ пересекают сепаратрисы, входящие в точку покоя $(z_1, z_2) = (0, 0)$ при $y \rightarrow \infty$ (здесь t – параметр, $k = 0$ или 1).

В силу условий 1–3 точка $(z_1, z_2) = (0, 0)$ является точкой покоя типа седла систем (4).

При сделанных предположениях нельзя гарантировать существование решения задачи (1)–(3). Кроме этого, даже если решение задачи существует, его явное представление, как правило, получить не удастся. Поэтому для доказательства существования решения задачи (1)–(3) требуются дополнительные условия, которые будут сформулированы ниже.

3. Алгоритм решения задачи

Сначала применяется (линейный) метод угловых пограничных функций, согласно которому решение задачи (1)–(3) ищется в виде асимптотического ряда по параметру $\varepsilon \rightarrow 0$, состоящего из шести частей:

$$u(x, t, \varepsilon) = \bar{u} + (\Pi + Q + Q^*) + (P + P^*). \quad (5)$$

Здесь \bar{u} – регулярная часть асимптотики, играющая роль внутри прямоугольника Ω , Π , Q и Q^* – погранслойные функции, играющие роль вблизи сторон прямоугольника Ω соответственно $t = 0$, $x = 0$ и $x = 1$, P и P^* – угловые пограничные функции, играющие роль вблизи вершин прямоугольника Ω соответственно $(0, 0)$ и $(1, 0)$.

Формальная процедура построения регулярной части асимптотики и погранслойных функций хорошо отработана (см. [1]) и мы приведем ее схематично. В уравнении (1) функция F заменяется выражением, аналогичным (5):

$$F(u, x, t, \varepsilon) = \bar{F} + (\Pi F + QF + Q^*F) + (PF + P^*F). \quad (6)$$

Выражения (5) и (6) подставляются в уравнение (1), которое разделяется на части: регулярную, погранслойные и угловые. Регулярная часть асимптотики строится в виде ряда по степеням ε :

$$\bar{u}(x, t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \bar{u}_k(x, t).$$

Погранслойная часть асимптотики вводится для устранения невязок регулярной части с начальными и граничными условиями. Погранслойные функции Π , Q и Q^* ищутся в виде рядов

$$\Pi(x, \tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \Pi_k(x, \tau), \quad Q(\xi, t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k Q_k(\xi, t), \quad Q^*(\xi_*, t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k Q_k^*(\xi_*, t),$$

где

$$\xi = \frac{x}{\varepsilon}, \quad \xi_* = \frac{1-x}{\varepsilon}, \quad \tau = \frac{t}{\varepsilon^2}$$

– растянутые переменные.

Задача для $\Pi_0 = \Pi_0(x, \tau)$ имеет вид

$$-\frac{\partial \Pi_0}{\partial \tau} = F(\bar{u}_0(x, 0) + \Pi_0, x, 0, 0), \quad \Pi_0(x, 0) = \varphi(x) - \bar{u}_0(x, 0).$$

Здесь x играет роль параметра. В силу условия 4 эта задача имеет решение, для которого в силу условия 3 справедлива экспоненциальная оценка убывания вида

$$|\Pi_0(x, \tau)| \leq C \exp(-\kappa \tau), \quad (7)$$

где C и κ – некоторые положительные постоянные. Задачи для определения функций $\Pi_k = \Pi_k(x, \tau)$, $k \geq 1$, получаются линейными:

$$-\frac{\partial \Pi_k}{\partial \tau} = F'_u(\bar{u}_0(x, 0) + \Pi_0, x, 0, 0) \Pi_k + \pi_k, \quad \Pi_k(x, 0) = -\bar{u}_k(x, 0).$$

Функции π_k представляют собой линейные комбинации функций Π_j , $j < k$, и их производных с коэффициентами, являющимися многочленами от τ . Поэтому, если для функций Π_j , $j < k$, справедливы оценки вида (7), то для функций π_k справедливы оценки того же вида.

Если величина $\varphi(x) - \bar{u}_0(x, 0)$ не равна тождественно нулю, то решения задач для Π_k имеют вид

$$\Pi_k(x, \tau) = -U(x, \tau)\bar{u}_k(x, 0) - U(x, \tau) \int_0^\tau (U(x, \sigma))^{-1} \pi_k(x, \sigma) d\sigma,$$

где

$$U(x, \tau) = \exp \left(- \int_0^\tau F'_u(\bar{u}_0(x, 0) + \Pi_0(x, \lambda), x, 0, 0) d\lambda \right)$$

– фундаментальное решение ($U(x, 0) = 1$) соответствующего однородного уравнения, и справедлива оценка вида

$$|U(x, \tau) (U(x, \sigma))^{-1}| \leq C \exp(-\kappa(\tau - \sigma)),$$

где переменные $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq \sigma \leq \tau$, а постоянные C и κ – положительные числа. Эта оценка позволяет для функции $\Pi_k(x, \tau)$ получить оценку вида (7).

Если величина $\varphi(x) - \bar{u}_0(x, 0) \equiv 0$, то $\Pi_0(x, \tau) \equiv 0$. Коэффициенты при Π_k оказываются постоянными и положительными, то есть задачи упрощаются.

Таким образом рекуррентно определяются коэффициенты ряда для $\Pi(x, \tau, \varepsilon)$.

Задача для $Q_0 = Q_0(\xi, t)$ имеет вид

$$a^2 \frac{\partial^2 Q_0}{\partial \xi^2} = F(\bar{u}_0(0, t) + Q_0, 0, t, 0), \quad Q_0(0, t) = \psi_1(t) - \bar{u}_0(0, t), \quad Q_0(\infty, t) = 0,$$

где t играет роль параметра. Это уравнение эквивалентно системе (4), в которой следует положить $z_1 = Q_0(\xi, t)$, $k = 0$, $y = \xi$. Условия затухания выделяют решения уравнения, для которых справедливы экспоненциальные оценки убывания вида

$$|Q_0(\xi, t)| \leq C \exp(-\kappa\xi), \tag{8}$$

где C и κ – некоторые положительные постоянные. Так как возможен переход с сепаратрисы на сепаратрису, то решение задачи не единственно. Однако, такие случаи мы исключаем и рассматриваем только монотонные решения.

Задачи для определения функций $Q_k(\xi, t)$, $k \geq 1$, линейны:

$$a^2 \frac{\partial^2 Q_k}{\partial \xi^2} = F'_u(\bar{u}_0(0, t) + Q_0, 0, t, 0)Q_k + q_k, \quad Q_k(0, t) = -\bar{u}_k(0, t), \quad Q_k(\infty, t) = 0.$$

Функции q_k представляют собой линейные комбинации функций Q_j , $j < k$, и их производных с коэффициентами, являющимися многочленами от ξ . Поэтому, если для функций Q_j , $j < k$, справедливы экспоненциальные оценки вида (8), то для функций q_k справедливы оценки того же вида.

Если величина $\psi_1(t) - \bar{u}_0(0, t)$ не равна тождественно нулю, то решения задач имеют вид

$$Q_k(\xi, t) = -\frac{\Phi(\xi, t)}{\Phi(0, t)}\bar{u}_k(0, t) - \frac{\Phi(\xi, t)}{a(0, t)} \int_0^\xi \frac{d\lambda}{\Phi^2(\lambda, t)} \int_\lambda^\infty \Phi(\sigma, t)q_k(\sigma, t)d\sigma, \quad \Phi(\xi, t) = \frac{\partial Q_0(\xi, t)}{\partial \xi},$$

и для них справедливы оценки вида (8).

Если величина $\psi_1(t) - \bar{u}_0(0, t) \equiv 0$, то $Q_0(\xi, t) \equiv 0$, а коэффициент при Q_k оказывается постоянным и положительным, то есть задачи упрощаются.

Таким образом рекуррентно определяются коэффициенты ряда для $Q(\xi, t, \varepsilon)$.

Регулярная часть асимптотики вносит невязки в граничные условия и на стороне $x = 1$. Эти невязки устраняет функция $Q^* = Q^*(\xi_*, t, \varepsilon)$. Коэффициенты ряда для $Q^* = Q^*(\xi_*, t, \varepsilon)$ определяются аналогично коэффициентам ряда для $Q(\xi, t, \varepsilon)$ и для этих коэффициентов справедливы экспоненциальные оценки убывания вида

$$|Q_k^*(\xi_*, t)| \leq C \exp(-\kappa \xi_*), \quad (9)$$

где C и κ – некоторые положительные постоянные.

Таким образом, погранслоиная часть асимптотики определяется полностью. Однако, каждая в отдельности погранслоиная функция, устраняя невязки на соответствующей стороне, в свою очередь вносит невязки на примыкающие стороны прямоугольника. Так погранслоиные функции $\Pi_k(x, \tau)$, устраняя невязки в начальном условии на стороне $t = 0$, вносят дополнительные невязки в граничные условия на сторонах $x = 0$ и $x = 1$. Эти невязки существенны только вблизи угловых точек $(0, 0)$ и $(1, 0)$, а далее, с ростом t , они экспоненциально затухают. Аналогичное влияние функции $Q_k(\xi, t)$ и $Q_k^*(\xi_*, t)$ оказывают на начальное условие на стороне $x = 0$.

С целью устранения невязок с начальными и граничными условиями вблизи угловых точек $(0, 0)$ и $(1, 0)$ прямоугольника Ω вводятся угловые пограничные функции $P(\xi, \tau, \varepsilon)$ и $P^*(\xi_*, \tau, \varepsilon)$. Эти функции ищутся в виде рядов

$$P(\xi, \tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k P_k(\xi, \tau), \quad P^*(\xi_*, \tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k P_k^*(\xi_*, \tau).$$

Задача для определения $P_0(\xi, \tau)$ ставится в первой четверти \mathbb{R}_+^2 плоскости растянутых переменных (ξ, τ) и имеет вид

$$a^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial \xi^2} - \frac{\partial P_0}{\partial \tau} = F(\bar{u}_0 + \Pi_0 + Q_0 + P_0) - F(\bar{u}_0 + \Pi_0) - F(\bar{u}_0 + Q_0), \quad (10)$$

$$P_0(0, \tau) = -\Pi_0(0, \tau), \quad P_0(\xi, 0) = -Q_0(\xi, 0), \quad (11)$$

$$P_0(\xi, \tau) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \xi + \tau \rightarrow \infty, \quad (12)$$

где для краткости используются обозначения

$$F(u) = F(u, 0, 0, 0), \quad \bar{u}_0 = \bar{u}_0(0, 0), \quad \Pi_k = \Pi_k(0, \tau), \quad Q_k = Q_k(\xi, 0), \quad P_k = P_k(\xi, \tau).$$

Для функций $P_k(\xi, \tau)$, $k \geq 1$, в области \mathbb{R}_+^2 получаются линейные задачи

$$a^2 \frac{\partial^2 P_k}{\partial \xi^2} - \frac{\partial P_k}{\partial \tau} = F'(\bar{u}_0 + \Pi_0 + Q_0 + P_0) P_k + h_k, \quad (13)$$

$$P_k(0, \tau) = -\Pi_k(0, \tau), \quad P_k(\xi, 0) = -Q_k(\xi, 0), \quad (14)$$

$$P_k(\xi, \tau) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \xi + \tau \rightarrow \infty, \quad (15)$$

где неоднородности $h_k = h_k(\xi, \tau)$ удовлетворяют экспоненциальным оценкам убывания вида

$$|h_k(\xi, \tau)| \leq C \exp(-\kappa(\xi + \tau)), \quad (16)$$

если подобным оценкам удовлетворяют функции P_0, \dots, P_{k-1} . Здесь C и κ – некоторые положительные числа.

Задачи для угловых погранфункций $P_k^*(\xi_*, \tau)$, $k \geq 0$, ставятся аналогично.

В дальнейшем для определенности считается, что в каждой угловой точке граничное значение φ больше корня вырожденного уравнения \bar{u}_0 . (Случай $\varphi < \bar{u}_0$ сводится к предыдущему с помощью замены u на $-u$.)

Задача (10)–(12) для определения $P_0(\xi, \tau)$ нелинейна и (линейный) метод угловых пограничных функций перестает работать. Для решения этой задачи удобно пользоваться обозначением

$$L(Z) := a^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial \xi^2} - \frac{\partial Z}{\partial \tau} - F(\bar{u}_0 + \Pi_0 + Q_0 + Z) + F(\bar{u}_0 + \Pi_0) + F(\bar{u}_0 + Q_0).$$

Тогда задача (10)–(12) имеет вид

$$L(P_0) = 0 \quad \text{в области } \mathbb{R}_+^2, \quad (17)$$

$$P_0(0, \tau) = -\Pi_0(0, \tau), \quad P_0(\xi, 0) = -Q_0(\xi, 0), \quad (18)$$

$$P_0(\xi, \tau) \rightarrow 0 \quad \text{при } \xi + \tau \rightarrow \infty. \quad (19)$$

Для доказательства существования решения этой задачи будет использован метод верхних и нижних решений (см. [2] – [4]), который заключается в том, что задача

$$L(Z) = 0 \quad \text{в области } D,$$

$$Z = h \quad \text{на границе } \partial D$$

имеет решение Z в границах

$$Z_- \leq Z \leq Z_+,$$

если в области D выполняются неравенства

$$L(Z_+) \leq 0, \quad L(Z_-) \geq 0, \quad Z_- \leq Z_+,$$

а на ее границе

$$Z_- \leq h \leq Z_+.$$

4. Основные результаты

ТЕОРЕМА 1. *Если в точке $(0, 0)$ прямоугольника Ω функция $F(u) = F(u, 0, 0, 0)$ имеет вид*

$$F(u) = (u - \alpha)(u - \beta)(u - \bar{u}_0), \quad \text{где } \alpha \leq \beta < \bar{u}_0,$$

и граничное значение $\varphi > \bar{u}_0$, то задача (17)–(19) имеет решение $P_0(\xi, \tau)$, удовлетворяющее экспоненциальной оценке убывания вида

$$|P_0(\xi, \tau)| \leq C \exp(-\kappa(\xi + \tau)), \quad (20)$$

где C и κ – некоторые положительные числа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем метод верхних и нижних решений. Построим верхнее и нижнее решения задачи (17)–(19).

ЛЕММА 1. *Если в точке $(0, 0)$ прямоугольника Ω функция $F(u) = F(u, 0, 0, 0)$ имеет вид*

$$F(u) = (u - \alpha)(u - \beta)(u - \bar{u}_0), \quad \text{где } \alpha \leq \beta < \bar{u}_0,$$

и граничное значение $\varphi > \bar{u}_0$, то функция вида

$$Z_+ \equiv 0$$

является верхним решением задачи (17)–(19).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначаем

$$s = \Pi_0(0, \tau), \quad t = Q_0(\xi, 0). \quad (21)$$

Требуется доказать неравенство $L(0) \leq 0$. Имеем

$$L(0) = -F(\bar{u}_0 + s + t) + F(\bar{u}_0 + s) + F(\bar{u}_0 + t).$$

Значения функций $s = \Pi_0(0, \tau)$ и $t = Q_0(\xi, 0)$ принадлежат промежутку $(0, \varphi - \bar{u}_0]$. Рассматриваемая функция $F(u)$ выпукла вниз на промежутке $[\bar{u}_0, \bar{u}_0 + 2(\varphi - \bar{u}_0)]$. Поэтому для любых s и t из промежутка $(0, \varphi - \bar{u}_0]$ выполняется неравенство

$$F(\bar{u}_0 + s + t) \geq F(\bar{u}_0 + s) + F(\bar{u}_0 + t).$$

Таким образом, $L(0) \leq 0$. Лемма 1 доказана.

ЛЕММА 2. Если в точке $(0, 0)$ прямоугольника Ω функция $F(u) = F(u, 0, 0, 0)$ имеет вид

$$F(u) = (u - \alpha)(u - \beta)(u - \bar{u}_0), \quad \text{где } \alpha \leq \beta < \bar{u}_0,$$

и граничное значение $\varphi > \bar{u}_0$, то функция вида

$$Z_-(\xi, \tau) = -2\sqrt{\Pi_0(0, \tau)Q_0(\xi, 0)}$$

является нижним решением задачи (17)–(19).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Требуется доказать неравенство $L(Z_-) \geq 0$. Предполагаемый вид нижнего решения задачи (17)–(19) продиктован соотношением

$$\Pi_0 + Q_0 - 2\sqrt{\Pi_0 Q_0} = \left(\sqrt{\Pi_0} - \sqrt{Q_0}\right)^2,$$

из которого следует, что величина

$$\bar{u}_0 + \Pi_0 + Q_0 + Z_- \in [\bar{u}_0; \varphi),$$

так как $\Pi_0, Q_0 \in (0; \varphi - \bar{u}_0]$.

На границе области \mathbb{R}_+^2 имеем

$$Z_-(0, \tau) = -2\sqrt{(\varphi - \bar{u}_0)\Pi_0} < -\Pi_0,$$

$$Z_-(\xi, 0) = -2\sqrt{(\varphi - \bar{u}_0)Q_0} < -Q_0,$$

$$Z_-(\xi, \tau) \rightarrow 0 \quad \text{при } \xi + \tau \rightarrow \infty,$$

поэтому Z_- может претендовать на роль нижнего барьера.

Внутри области \mathbb{R}_+^2 имеем

$$\begin{aligned} L\left(-2\sqrt{\Pi_0 Q_0}\right) &= -2a^2\sqrt{\Pi_0} \frac{d^2\sqrt{Q_0}}{d\xi^2} - 2\sqrt{Q_0} \frac{d\sqrt{\Pi_0}}{d\tau} - \\ &- F\left(\bar{u}_0 + \Pi_0 + Q_0 - 2\sqrt{\Pi_0 Q_0}\right) + F(\bar{u}_0 + \Pi_0) + F(\bar{u}_0 + Q_0). \end{aligned}$$

Выразим производные:

$$-2a^2\sqrt{\Pi_0} \frac{d^2\sqrt{Q_0}}{d\xi^2} = -2a^2\sqrt{\Pi_0} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{d\sqrt{Q_0}}{d\xi} \right) = -2a^2\sqrt{\Pi_0} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{1}{2\sqrt{Q_0}} \frac{dQ_0}{d\xi} \right) =$$

$$\begin{aligned}
 &= -2a^2 \sqrt{\Pi_0} \left(-\frac{1}{4Q_0 \sqrt{Q_0}} \left(\frac{dQ_0}{d\xi} \right)^2 + \frac{1}{2\sqrt{Q_0}} \frac{d^2 Q_0}{d\xi^2} \right) = \\
 &= -2a^2 \sqrt{\Pi_0} \left(-\frac{1}{4Q_0 \sqrt{Q_0}} \frac{2}{a^2} \int_0^{Q_0} F(\bar{u}_0 + u) du + \frac{1}{2\sqrt{Q_0}} \frac{1}{a^2} F(\bar{u}_0 + Q_0) \right) = \\
 &= \frac{\sqrt{\Pi_0}}{Q_0 \sqrt{Q_0}} \int_0^{Q_0} F(\bar{u}_0 + u) du - \frac{\sqrt{\Pi_0}}{\sqrt{Q_0}} F(\bar{u}_0 + Q_0).
 \end{aligned}$$

Другая производная

$$-2\sqrt{Q_0} \frac{d\sqrt{\Pi_0}}{d\tau} = -\frac{\sqrt{Q_0}}{\sqrt{\Pi_0}} \frac{d\Pi_0}{d\tau} = \frac{\sqrt{Q_0}}{\sqrt{\Pi_0}} F(\bar{u}_0 + \Pi_0).$$

Собирая все вместе, с учетом замены (21) получаем

$$\begin{aligned}
 L(-2\sqrt{st}) &= \frac{\sqrt{s}}{t\sqrt{t}} \int_0^t F(\bar{u}_0 + u) du - \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{t}} F(\bar{u}_0 + t) - \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{s}} F(\bar{u}_0 + s) - \\
 &\quad - F(\bar{u}_0 + s + t - 2\sqrt{st}) + F(\bar{u}_0 + s) + F(\bar{u}_0 + t) = \\
 &= \left(1 - \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{t}}\right) F(\bar{u}_0 + t) + \left(1 - \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{s}}\right) F(\bar{u}_0 + s) - F(\bar{u}_0 + s + t - 2\sqrt{st}) + \frac{\sqrt{s}}{t\sqrt{t}} \int_0^t F(\bar{u}_0 + u) du.
 \end{aligned}$$

Таким образом, функция

$$Z_- = -2\sqrt{\Pi_0 Q_0}$$

будет нижним барьером для решения $P_0 = P_0(\xi, \tau)$ задачи (17)–(19), если при любых значениях s и t из промежутка $(0, \varphi - \bar{u}_0]$ величина

$$\begin{aligned}
 L(Z_-) &= \left(1 - \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{t}}\right) F(\bar{u}_0 + t) + \left(1 - \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{s}}\right) F(\bar{u}_0 + s) - \\
 &\quad - F(\bar{u}_0 + s + t - 2\sqrt{st}) + \frac{\sqrt{s}}{t\sqrt{t}} \int_0^t F(\bar{u}_0 + u) du \geq 0.
 \end{aligned} \tag{22}$$

Здесь

$$\frac{\sqrt{s}}{t\sqrt{t}} \int_0^t F(\bar{u}_0 + u) du \geq 0,$$

поэтому достаточно доказать более сильное неравенство

$$\left(1 - \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{t}}\right) F(\bar{u}_0 + t) + \left(1 - \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{s}}\right) F(\bar{u}_0 + s) - F(\bar{u}_0 + s + t - 2\sqrt{st}) \geq 0,$$

которое эквивалентно неравенству

$$\sqrt{st} \left(1 - \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{t}}\right) F(\bar{u}_0 + t) + \sqrt{st} \left(1 - \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{s}}\right) F(\bar{u}_0 + s) - \sqrt{st} F(\bar{u}_0 + s + t - 2\sqrt{st}) \geq 0,$$

или

$$\left(\sqrt{t} - \sqrt{s}\right) \sqrt{s} F(\bar{u}_0 + t) + \left(\sqrt{s} - \sqrt{t}\right) \sqrt{t} F(\bar{u}_0 + s) - \sqrt{st} F(\bar{u}_0 + s + t - 2\sqrt{st}) \geq 0,$$

или

$$-\sqrt{st} F(\bar{u}_0 + (\sqrt{s} - \sqrt{t})^2) - (\sqrt{s} - \sqrt{t}) \left(\sqrt{s} F(\bar{u}_0 + t) - \sqrt{t} F(\bar{u}_0 + s)\right) \geq 0. \tag{23}$$

Обозначаем

$$x = \sqrt{s}, \quad y = \sqrt{t}.$$

Изменение переменных x, y ограничивается промежутком $(0; \sqrt{\varphi - \bar{u}_0}]$. Неравенство (23) в переменных x, y имеет вид

$$-xyF(\bar{u}_0 + (x - y)^2) - (x - y)(xF(\bar{u}_0 + y^2) - yF(\bar{u}_0 + x^2)) \geq 0. \quad (24)$$

Используем конкретный вид функции $F(u)$:

$$F(u) = (u - \alpha)(u - \beta)(u - \bar{u}_0), \quad \text{где } \alpha \leq \beta < \bar{u}_0.$$

Имеем

$$F(\bar{u}_0 + (x - y)^2) = (\bar{u}_0 + (x - y)^2 - \alpha)(\bar{u}_0 + (x - y)^2 - \beta)(x - y)^2,$$

$$F(\bar{u}_0 + y^2) = (\bar{u}_0 + y^2 - \alpha)(\bar{u}_0 + y^2 - \beta)y^2,$$

$$F(\bar{u}_0 + x^2) = (\bar{u}_0 + x^2 - \alpha)(\bar{u}_0 + x^2 - \beta)x^2,$$

и неравенство (24) принимает вид

$$\begin{aligned} & -xy(\bar{u}_0 + (x - y)^2 - \alpha)(\bar{u}_0 + (x - y)^2 - \beta)(x - y)^2 - \\ & -(x - y)[x(\bar{u}_0 + y^2 - \alpha)(\bar{u}_0 + y^2 - \beta)y^2 - y(\bar{u}_0 + x^2 - \alpha)(\bar{u}_0 + x^2 - \beta)x^2] \geq 0, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} & -xy(x - y)^2(\bar{u}_0 + (x - y)^2 - \alpha)(\bar{u}_0 + (x - y)^2 - \beta) - \\ & -xy(x - y)[y(\bar{u}_0 + y^2 - \alpha)(\bar{u}_0 + y^2 - \beta) - x(\bar{u}_0 + x^2 - \alpha)(\bar{u}_0 + x^2 - \beta)] \geq 0, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} & -xy(x - y)[(x - y)(\bar{u}_0 + (x - y)^2 - \alpha)(\bar{u}_0 + (x - y)^2 - \beta) + \\ & + y(\bar{u}_0 + y^2 - \alpha)(\bar{u}_0 + y^2 - \beta) - x(\bar{u}_0 + x^2 - \alpha)(\bar{u}_0 + x^2 - \beta)] \geq 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Область изменения $D = (0; \sqrt{\varphi - \bar{u}_0}] \times (0; \sqrt{\varphi - \bar{u}_0}]$ переменных s, t диагональю $y = x$ делится на две части D_1 и D_2 :

$$D_1 : 0 < y \leq x \leq \sqrt{\varphi - \bar{u}_0}, \quad D_2 : 0 < x \leq y \leq \sqrt{\varphi - \bar{u}_0}.$$

Неравенство (25) проверим сначала в подобласти D_1 . В этой подобласти значения $-xy(x - y) \leq 0$, поэтому неравенство (25) эквивалентно неравенству

$$\begin{aligned} & (x - y)(\bar{u}_0 + (x - y)^2 - \alpha)(\bar{u}_0 + (x - y)^2 - \beta) + \\ & + y(\bar{u}_0 + y^2 - \alpha)(\bar{u}_0 + y^2 - \beta) - x(\bar{u}_0 + x^2 - \alpha)(\bar{u}_0 + x^2 - \beta) \leq 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Последнее неравенство запишем в виде

$$\begin{aligned} & x[(\bar{u}_0 + (x - y)^2 - \alpha)(\bar{u}_0 + (x - y)^2 - \beta) - (\bar{u}_0 + x^2 - \alpha)(\bar{u}_0 + x^2 - \beta)] - \\ & - y[(\bar{u}_0 + (x - y)^2 - \alpha)(\bar{u}_0 + (x - y)^2 - \beta) - (\bar{u}_0 + y^2 - \alpha)(\bar{u}_0 + y^2 - \beta)] \leq 0. \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} & \frac{x}{y}[(\bar{u}_0 + (x - y)^2 - \alpha)(\bar{u}_0 + (x - y)^2 - \beta) - (\bar{u}_0 + x^2 - \alpha)(\bar{u}_0 + x^2 - \beta)] - \\ & - [(\bar{u}_0 + (x - y)^2 - \alpha)(\bar{u}_0 + (x - y)^2 - \beta) - (\bar{u}_0 + y^2 - \alpha)(\bar{u}_0 + y^2 - \beta)] \leq 0. \end{aligned} \quad (27)$$

В последнем неравенстве значения дроби

$$\frac{x}{y} \geq 1,$$

а выражение в квадратных скобках после этой дроби

$$\begin{aligned} & (\bar{u}_0 + (x - y)^2 - \alpha) (\bar{u}_0 + (x - y)^2 - \beta) - (\bar{u}_0 + x^2 - \alpha) (\bar{u}_0 + x^2 - \beta) = \\ & = -(2x - y)y (2\bar{u}_0 - \alpha - \beta + (x - y)^2 + x^2) < 0. \end{aligned}$$

Таким образом, в подобласти D_1 неравенство (27) будет верным, если будет установлена справедливость более сильного неравенства

$$\begin{aligned} & [(\bar{u}_0 + (x - y)^2 - \alpha) (\bar{u}_0 + (x - y)^2 - \beta) - (\bar{u}_0 + x^2 - \alpha) (\bar{u}_0 + x^2 - \beta)] - \\ & - [(\bar{u}_0 + (x - y)^2 - \alpha) (\bar{u}_0 + (x - y)^2 - \beta) - (\bar{u}_0 + y^2 - \alpha) (\bar{u}_0 + y^2 - \beta)] \leq 0, \end{aligned}$$

которое после преобразований левой части имеет вид

$$-(x^2 - y^2) [2\bar{u}_0 - \alpha - \beta + (x - y)^2 + 2xy] \leq 0,$$

и оказывается верным. Вместе с этим неравенством верными в подобласти D_1 будут неравенства (23) и (22). Из-за симметрии подобластей D_1 и D_2 относительно линии $y = x$ и симметричного вхождения переменных x, y неравенства (23) и (22) будут верными и в подобласти D_2 .

Таким образом, функция

$$Z_- = -2\sqrt{\Pi_0 Q_0}$$

является нижним барьером для решения $P_0 = P_0(\xi, \tau)$ задачи (17)–(19). *Лемма 2 доказана.*

Согласно методу верхних и нижних решений задача (17)–(19) имеет решение P_0 , заключенное между барьерами

$$-2\sqrt{\Pi_0 Q_0} \leq P_0 \leq 0.$$

Оба барьера удовлетворяют экспоненциальной оценке убывания вида (20). Поэтому такой же оценке удовлетворяет и решение $P_0 = P_0(\xi, \tau)$ задачи (17)–(19). **Теорема 1 доказана.**

ТЕОРЕМА 2. *Если в точке $(0, 0)$ прямоугольника Ω функция $F(u) = F(u, 0, 0, 0)$ имеет вид*

$$F(u) = (u - \alpha)(u - \beta)(u - \bar{u}_0), \quad \text{где } \alpha \leq \beta < \bar{u}_0,$$

и граничное значение $\varphi > \bar{u}_0$, то задачи (13)–(15) имеют решения $P_k(\xi, \tau)$, удовлетворяющие экспоненциальным оценкам убывания вида (20).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем положительность коэффициента $F'(\bar{u}_0 + \Pi_0 + Q_0 + P_0)$ в уравнениях (13). Значения $\bar{u}_0 + \Pi_0 + Q_0 + P_0$ расположены в промежутке

$$\bar{u}_0 + \Pi_0 + Q_0 - 2\sqrt{\Pi_0 Q_0} \leq \bar{u}_0 + \Pi_0 + Q_0 + P_0 \leq \bar{u}_0 + \Pi_0 + Q_0.$$

Левый барьер

$$\Pi_0 + Q_0 - 2\sqrt{\Pi_0 Q_0} = \left(\sqrt{\Pi_0} - \sqrt{Q_0} \right)^2,$$

и потому его величина

$$\bar{u}_0 + \Pi_0 + Q_0 - 2\sqrt{\Pi_0 Q_0} \in [\bar{u}_0; \varphi),$$

так как $\Pi_0, Q_0 \in (0; \varphi - \bar{u}_0]$. Производная $F'(u)$ положительна на промежутке $[\bar{u}_0; \varphi)$ и ее значения на этом промежутке

$$F'(u) \geq F'(\bar{u}_0) > 0.$$

Величина правого барьера

$$\bar{u}_0 + \Pi_0 + Q_0 \in [\bar{u}_0, \bar{u}_0 + 2(\varphi - \bar{u}_0)].$$

Производная $F'(u)$ положительна и на промежутке $[\bar{u}_0, \bar{u}_0 + 2(\varphi - \bar{u}_0)]$ и ее значения

$$F'(u) \geq F'(\bar{u}_0) > 0.$$

Таким образом, коэффициент $F'(\bar{u}_0 + \Pi_0 + Q_0 + P_0)$ в уравнениях (13) положителен и его значения

$$F'(\bar{u}_0 + \Pi_0 + Q_0 + P_0) \geq F'(\bar{u}_0) > 0.$$

Вследствие этого задачи (13)–(15) имеют решения $P_k(\xi, \tau)$, удовлетворяющие экспоненциальным оценкам убывания вида (20). **Теорема 2 доказана.**

Задачи для угловых погранфункций $P_k^*(\xi_*, \tau)$, $k \geq 0$, ставятся и решаются аналогично. Асимптотический ряд (5) оказывается полностью построенным. Остается обосновать асимптотическую сходимость этого ряда к решению задачи (1)–(3).

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполнены условия 1–5 и в угловых точках $(k, 0)$ прямоугольника Ω , где $k = 0$ или 1, функция $F(u, k, 0, 0)$ является кубической и имеет вид

$$F(u, k, 0, 0) = (u - \alpha(k))(u - \beta(k))(u - \bar{u}_0(k)), \quad \text{где } \alpha(k) \leq \beta(k) < \bar{u}_0(k),$$

Если граничные значения $\varphi(k) > \bar{u}_0(k)$, то для достаточно малых ε задача (1)–(3) имеет решение $u(x, t, \varepsilon)$, для которого ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \left(\bar{u}_k(x, t) + \Pi_k(x, \tau) + Q_k(\xi, t) + Q_k^*(\xi_*, t) + P_k(\xi, \tau) + P_k^*(\xi_*, \tau) \right)$$

является асимптотическим представлением при $\varepsilon \rightarrow 0$ в замкнутом прямоугольнике $\bar{\Omega}$.

Доказательство теоремы основано на разрешимости задач для пограничных функций Π_k , Q_k , Q_k^* , P_k и P_k^* при $k \geq 1$ и повторяет доказательство соответствующей теоремы из работы [7]. При этом используется метод дифференциальных неравенств (см. [5]).

ЗАМЕЧАНИЕ. Функция F в различных угловых точках не обязательно должна иметь один и тот же вид. Все результаты работ [6] – [15] сохраняются, если в каждой угловой точке функция F имеет один из рассмотренных в этих работах вид.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. - М.: Высшая школа, 1990.
2. Amann H. On the Existence of Positive Solutions of Nonlinear Elliptic Boundary Value Problems // Indiana Univ. Math. J. 1971. Vol.21, №2. P. 125-146.
3. Sattinger D.H. Monotone Methods in Nonlinear Elliptic and Parabolic Boundary Value Problems // Indiana Univ. Math. J. 1972. V. 21, №11. P. 979-1000.
4. Amann H. // Nonlinear Analysis: coll. of papers in honor of E. H. Rothe / Ed. by L. Cesari et al. - New York etc: Acad press, cop. 1978. - XIII. P. 1-29.
5. Неведов Н. Н. Метод дифференциальных неравенств для некоторых сингулярно возмущенных задач в частных производных // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31, №4. С. 719–723. (English transl.: Nefedov N.N. The Method of Differential Inequalities for Some Singularly Perturbed Partial Differential Equations // Differential Equations. 1995. Vol. 31, №4. pp. 668–671.)

6. Денисов И. В. Об асимптотическом разложении решения сингулярно возмущенного эллиптического уравнения в прямоугольнике // Асимптотические методы теории сингулярно - возмущенных уравнений и некорректно поставленных задач: Сб. научн. тр. - Бишкек: Илим, 1991, с. 37.
7. Денисов И. В. Угловой пограничный слой в краевых задачах для сингулярно возмущенных параболических уравнений с квадратичной нелинейностью // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 2017. Т.57, №2. С. 255-274. (English transl.: Denisov I. V. Angular Boundary Layer in Boundary Value Problems for Singularly Perturbed Parabolic Equations with Quadratic Nonlinearity // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2017. Vol. 57, №2. pp. 253-271.)
8. Денисов И. В. Угловой пограничный слой в краевых задачах для сингулярно возмущенных параболических уравнений с монотонной нелинейностью // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 2018. Т.58, №4. С. 575-585. (English transl.: Denisov I. V. Corner Boundary Layer in Boundary Value Problems for Singularly Perturbed Parabolic Equations with Monotonic Nonlinearity // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2018. Vol. 58, №4. pp. 562-571.)
9. Денисов И. В. О некоторых классах функций // Чебышевский сборник. 2009. Т. X, вып. 2 (30). Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого. С. 79-108.
10. Денисов А. И., Денисов И. В. Угловой пограничный слой в краевых задачах для сингулярно возмущенных параболических уравнений с нелинейностями // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 2019. Т. 59, №1. С. 102-117. (English transl.: Denisov I. V., Denisov A. I. Corner Boundary Layer in Boundary Value Problems for Singularly Perturbed Parabolic Equations with Nonlinearities // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2019. Vol. 59, №1. pp. 96-111.)
11. Денисов А. И., Денисов И. В. Угловой пограничный слой в краевых задачах для сингулярно возмущенных параболических уравнений с немонотонными нелинейностями // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 2019. Т. 59, №9. С. 1581-1590. (English transl.: Denisov I. V., Denisov A. I. Corner Boundary Layer in Boundary Value Problems for Singularly Perturbed Parabolic Equations with Nonmonotonic Nonlinearities // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2019. Vol. 59, №9. pp. 1518-1527.)
12. Денисов И. В. Угловой пограничный слой в краевых задачах для сингулярно возмущенных параболических уравнений с кубическими нелинейностями // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 2021. Т. 61, №2. С. 256-267. (English transl.: Denisov I. V. Corner Boundary Layer in Boundary Value Problems for Singularly Perturbed Parabolic Equations with Cubic Nonlinearities // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2021. Vol. 61, №2. pp. 242-253.)
13. Денисов И. В. Угловой пограничный слой в краевых задачах с нелинейностями, имеющими стационарные точки // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 2021. Т. 61, №11. С. 1894-1903. (English transl.: Denisov I. V. Corner Boundary Layer in Boundary Value Problems with Nonlinearities Having Stationary Points // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2021. Vol. 61, №11. pp. 1855-1863.)
14. Денисов А. И., Денисов И. В. Математические модели процессов горения // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2020. Т. 185. ВИНТИ РАН, М., - С. 50-57.

15. Денисов А. И., Денисов И. В. Нелинейный метод угловых пограничных функций в задачах с кубическими нелинейностями // Чебышевский сборник. 2023. Т. 24, Вып. 1 (88). - Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, – С. 27-39.

REFERENCES

1. Vasilyeva, A. V., Butuzov, V. F. 1990, “Asymptotic methods in the theory of singular perturbations”, *M.: Higher school*.
2. Amann, H. 1971, “On the Existence of Positive Solutions of Nonlinear Elliptic Boundary Value Problems”, *Indiana Univ. Math. J.*, vol. 21, no. 2, pp. 125-146.
3. Sattinger, D. H. 1972, “Monotone Methods in Nonlinear Elliptic and Parabolic Boundary Value Problems”, *Indiana Univ. Math. J.*, vol. 21, no. 11, pp. 979-1000.
4. Amann, H. 1978, “Nonlinear Analysis: coll. of papers in honor of E.H. Rothe / Ed. by L. Cesari et al.”, - New York etc: Acad press, cop. – XIII. pp. 1-29.
5. Nefedov, N. N. 1995, “The Method of Differential Inequalities for Some Singularly Perturbed Partial Differential Equations”, *Differential Equations*, vol. 31, no. 4, pp. 668–671.
6. Denisov, I. V. 1991, “On the asymptotic expansion of the solution of a singularly perturbed elliptic equation in a rectangle”, *Asymptotic methods of the theory of singularly perturbed equations and ill-posed problems: Collection of articles*, scientific. tr. - Bishkek: Ilim, p. 37.
7. Denisov, I. V. 2017, “Angular Boundary Layer in Boundary Value Problems for Singularly Perturbed Parabolic Equations with Quadratic Nonlinearity”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, vol. 57, no. 2, pp. 253-271.
8. Denisov, I. V. 2018, “Corner Boundary Layer in Boundary Value Problems for Singularly Perturbed Parabolic Equations with Monotonic Nonlinearity”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, vol. 58, no. 4, pp. 562-571.
9. Denisov, I. V. 2009, “On some classes of functions”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. X, no. 2 (30). - *Tula: Publishing house Tul. state ped. un-ta them. L. N. Tolstoy*, pp. 79-108.
10. Denisov, A. I., Denisov, I. V. 2019, “Corner Boundary Layer in Boundary Value Problems for Singularly Perturbed Parabolic Equations with Nonlinearities”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, vol. 59, no. 1, pp. 96-111.
11. Denisov, A. I., Denisov, I. V. 2019, “Corner Boundary Layer in Boundary Value Problems for Singularly Perturbed Parabolic Equations with Nonmonotonic Nonlinearities”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, vol. 59, no. 9, pp. 1518–1527.
12. Denisov, I. V. 2021, “Corner Boundary Layer in Boundary Value Problems for Singularly Perturbed Parabolic Equations with Cubic Nonlinearities”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, vol. 61, no. 2, pp. 242–253.
13. Denisov, I. V. 2021, “Corner Boundary Layer in Boundary Value Problems with Nonlinearities Having Stationary Points”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, vol. 61, no. 11, pp. 1855-1863.
14. Denisov, A. I., Denisov, I. V. 2020, “Mathematical models of combustion processes”, *Itogi Nauki i Tekhniki. Sovremennaya Matematika i Ee Prilozheniya. Tematicheskie Obzory*, vol. 185. VINITI RAN, Moscow, pp. 82–88.

-
15. Denisov, A.I., Denisov, I.V. 2023, “Nonlinear method of angular boundary functions in problems with cubic nonlinearities”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. XXIV, no. 1 (88). - Tula: Publishing house Tul. state ped. un-ta them. L.N. Tolstoy, pp. 27-39.

Получено: 19.12.2023

Принято в печать: 21.03.2024

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 25. Выпуск 1.

УДК 517.518.5

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-1-42-51

О равномерных оценках осцилляторных интегралов с гладкой фазой

И. А. Икромов, А. Р. Сафаров

Икромов Исроил Акромович — Институт математики им. В. И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан (г. Ташкент, Узбекистан), Самаркандский государственный университет (г. Самарканд, Узбекистан).

e-mail: ikromov1@rambler.ru

Сафаров Акбар Рахманович — Институт математики им. В. И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан (г. Ташкент, Узбекистан), Самаркандский государственный университет (г. Самарканд, Узбекистан).

e-mail: safarov-akbar@mail.ru

Аннотация

Мы рассмотрим задачу о равномерных оценках осцилляторных интегралов с гладкой фазовой функцией, имеющей особенность типа D_∞ . Оценка является точной и является аналогом оценок результата В. Н. Карпушкина.

Ключевые слова: фаза, деформация, особенность.

Библиография: 10 названий.

Для цитирования:

И. А. Икромов, А. Р. Сафаров. О равномерных оценках осцилляторных интегралов с гладкой фазой // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 1, с. 42–51.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 25. No. 1.

UDC 517.518.5

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-1-42-51

Uniform estimates for oscillatory integrals with smooth phase

I. A. Ikromov, A. R. Safarov

Ikromov Isroil Akramovich — V. I. Romanovsky Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan (Tashkent, Uzbekistan), Samarkand State University (Samarkand, Uzbekistan).

e-mail: ikromov1@rambler.ru

Safarov Akbar Rakhmanovich — V. I. Romanovsky Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan (Tashkent, Uzbekistan), Samarkand State University (Samarkand, Uzbekistan).

e-mail: safarov-akbar@mail.ru

Abstract

We consider the problem on uniform estimates for an oscillatory integrals with the smooth phase functions having singularities D_∞ . The estimate is sharp and analogy to estimates of the work of V. N. Karpushkin.

Keywords: phase, deformation, singularity.

Bibliography: 10 titles.

For citation:

I. A. Ikromov, A. R. Safarov, 2024, "Uniform estimates for oscillatory integrals with smooth phase", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 1, pp. 42–51.

1. Введение

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Осцилляторным интегралом с гладкой вещественно-значной фазой f и амплитудой a называется интеграл вида:*

$$J(\lambda, f, a) = \int_{\mathbb{R}^n} a(x) e^{i\lambda f(x)} dx$$

где $a \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $\lambda \in \mathbb{R}$.

Пусть $U \subset V \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченные окрестности начала координат, $\bar{U}(\bar{V})$ замыкание $U(V)$. Допустим, что функция $f : \bar{V} \rightarrow \mathbb{R}$ (где $f \in C^N(\bar{V})$, $(N \geq 8)$) имеет следующий вид:

$$f(x_1, x_2) = x_1 x_2^2 + g(x_1, x_2), \quad (1)$$

где $g \in C^N(V)$, такая, что $D^\alpha g(0, 0) = 0$ для всех $\alpha_1 + \alpha_2 \leq 3$, здесь D^α означает $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2}}$, $\alpha := (\alpha_1, \alpha_2) \in Z_+^2$ – мультииндекс, $Z_+ = \{0\} \cup \mathbb{N}$ неотрицательные целые числа.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Пусть $f \in C^N(\bar{V})$, где $N \geq 0$ некоторое неотрицательное целое число. Деформацией функции f называется $f + F$, где $F \in C^N(\bar{V})$ (см. [7]).*

Пусть $\vartheta_{C^8(\bar{V})}(\varepsilon) := \{F \in C^8(\bar{V}), \|F\|_{C^8(\bar{V})} < \varepsilon\}$. Основным результатом работы является следующая

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $f \in C^8(\bar{V})$ имеет вид (1). Тогда найдутся положительные числа ε, C и окрестность $U \subset V$ начала координат, такие, что для произвольных функций $a \in C_0^1(U)$ и $F \in \vartheta_{C^8(\bar{V})}(\varepsilon)$ справедлива следующая оценка:*

$$\left| \int_U e^{i\lambda(f+F)} a(x) dx \right| \leq \frac{C \|a\|_{C^1}}{|\lambda|^{\frac{1}{2}}}.$$

1) Теорема является аналогом более общей теоремы В.Н.Карпушкина [7] (а также см. [2]) для достаточно гладких функций.

2) Если $g \equiv 0$, то оценка, полученная в теореме, неулучшаема.

3) Для некоторых g функция f может иметь особенность типа D_k . В этом случае из результатов Дюстермаата [5] можно вывести более точную оценку.

4) Инвариантные оценки с полиномиальной фазой рассмотрены в работах [10]–[15].

2. Некоторые вспомогательные утверждения

Сначала мы приведем несколько простых вспомогательных определений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. [1] Рассмотрим арифметическое пространство \mathbb{R}^n с фиксированными координатами x_1, x_2, \dots, x_n . Функция $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ называется квазиоднородной функцией степени d с показателями $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, если при любом $\lambda > 0$ имеем $f(\lambda^{\alpha_1} x_1, \lambda^{\alpha_2} x_2, \dots, \lambda^{\alpha_n} x_n) = \lambda^d f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Показатели α_s называются весами переменных x_s .

Следующая лемма доказана в работе [6].

ЛЕММА 1. Пусть f – гладкая функция в окрестности начала координат, \mathbb{R}^2 с $c > 0$ и α_1, α_2 ($0 < \alpha_1 \leq \alpha_2$) – фиксированные рациональные числа и $m \geq 1$ – натуральное число, причем $\alpha_1 m > c$. Тогда включение

$$M(f) \subset \{(t_1, t_2) : \alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2 \geq c\}$$

справедливо тогда и только тогда, когда существует полином $f_\pi(x_1, x_2)$ удовлетворяющий условию

$$M(f_\pi) \subset \{(t_1, t_2) : \alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2 \geq c\}$$

и гладкие функции $a_{jk}(x_1, x_2)$ такие, что справедливо равенство:

$$f(x_1, x_2) = f_\pi(x_1, x_2) + \sum_{j+k=m} x_1^j x_2^k a_{jk}(x_1, x_2),$$

здесь $f_\pi(x_1, x_2)$ – называется главной частью функции $f(x_1, x_2)$ относительно веса (α_1, α_2) и $M(\cdot)$ – называется носителем Тейлора разложения функции f в ряд в точке 0.

Пусть $C^\infty(V)$ – множество бесконечно дифференцируемых функций, определенных в V , где V некоторая окрестность начала координат \mathbb{R}^n . Очевидно, что это множество образует коммутативное кольцо относительно обычного умножения и сложения функций. Пусть $f \in C^\infty(V)$ данная функция с критической точкой в нуле, т.е. $\nabla f(0) = 0$. Рассмотрим подмножество

$$I_{\nabla f} := \{h \in C^\infty(V) : h(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f(x)}{\partial x_k} h_k(x), h_k \in C^\infty(V)\}.$$

Это множество является подкольцом $C^\infty(V)$. Причем очевидно, что для любого $g \in C^\infty(V)$ выполняется соотношение $gI_{\nabla f} \subset I_{\nabla f}$. Иными словами, $I_{\nabla f}$ является идеалом ("идеальным" подкольцом) кольца $C^\infty(V)$. Этот идеал называется идеалом порожденный частными производными $\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n}$, или градиентным идеалом кольца $C^\infty(V)$ и обозначается через $I_{\nabla f} = \langle \frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \rangle$.

Пусть функция $f(x_1, x_2)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$1) \frac{\partial^{|\alpha|} f(0, 0)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2}} = 0, |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 \leq 2.$$

2) допустим, множество корней уравнения $f_3(x_1, x_2) = 0$ на S_1 (где f_3 отрезок Тейлора функции f порядка 3 и S_1 единичная окружность в \mathbb{R}^2 с центром в начале координат) состоит из одного простого и двукратного корня.

Тогда функция f , линейным преобразованием, приводится к виду $f(x(u)) = u_1 u_2^2 + g_1(u_1, u_2)$, где $g_1(u_1, u_2)$ – некоторая функция удовлетворяющая условию $D^\alpha g_1(0, 0) = 0$,

при всех $|\alpha| \leq 3$, аналогичное утверждение доказано для однородных многочленов третьей степени в работе [1] (стр.147). Главная часть относительно веса $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ функции f обозначается через f_π . Таким образом, без ограничения общности, мы можем считать, что $f_\pi(x_1, x_2) = x_1 x_2^2$.

Следуя [7] обозначим через E_d линейное пространство полиномов степени меньше d относительно веса $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ и $I_{\nabla f_\pi}$ градиентный идеал функции f_π .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Координатное подпространство $B \subset E_1$ называется нижним версальным, если $(I_{\nabla f_\pi} \cap E_1) \oplus B = E_1$ (т.е. $I_{\nabla f_\pi} \cap E_1 \cap B = 0$, $(I_{\nabla f_\pi} \cap E_1) + B = E_1$).

Легко показать, что $B = \langle 1, x_1, x_2, x_1^2 \rangle$ является версальным подпространством B для функции $f_\pi(x_1, x_2) = x_1 x_2^2$.

Пусть $\sum_{\frac{m_1}{3} + \frac{m_2}{3} < d} s_m x^m$ отрезок ряда Тейлора в точке 0 функции F . Положим $\pi_d(F) = \sum s_m x^m$, где $0 \leq \frac{m_1}{3} + \frac{m_2}{3} < d$. Таким образом, π_1 определяет отображение пространства $C^N(V)$ на пространство E_d , где $d \leq \frac{N}{3}$.

Следующее предложение о возможности гладко выбрать замену координат является аналогом теоремы версальности. Аналогом деформации функции f является $f + F$, где $F \in \vartheta_{C^8(\bar{V})}(\varepsilon)$ (деформация с бесконечным числом параметров). Аналогом версальной деформации f является $f + F$, где $F \in \vartheta_{C^8(\bar{V})}(\varepsilon)$, $\pi_1 F \in B$. Здесь B —нижнее версальное подпространство [1].

ЛЕММА 2. Пусть $z \in C^8(\bar{V})$ некоторая вектор-функция. Функция $(f + F)(y + z(y))$ записывается в виде

$$(f + F)(y + z(y)) = f(0) + F(0) + \alpha_{10}(z)y_1 + \alpha_{01}(z)y_2 + \\ + \alpha_{20}(z)y_1^2 + \alpha_{11}(z)y_1 y_2 + \alpha_{02}(z)y_2^2 + \sum_{i_1+i_2=3} \alpha_{i_1 i_2}(z)y_1^{i_1} y_2^{i_2} + y_1 y_2^2,$$

где $\alpha_{10}, \alpha_{01}, \alpha_{20}$ —функционалы от F и $\alpha_{i_1 i_2} : C^3(U) \rightarrow C^3(V)$ операторы причем $2 \leq i_1 + i_2 = 3$, выполняется $\|\alpha_{i_1 i_2}\|_{C^2} \leq C\varepsilon$, при условии $F \in \vartheta_{C^8(\bar{V})}(\varepsilon)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим функцию $f + F$ в следующем виде:

$$f + F = s_{10}x_1 + s_{01}x_2 + s_{20}x_1^2 + 2s_{11}x_1x_2 + s_{02}x_2^2 + s_{30}(x_1, x_2)x_1^3 + \\ + s_{21}(x_1, x_2)x_1^2x_2 + (1 + s_{12}(x_1, x_2))x_1x_2^2 + s_{03}(x_1, x_2)x_2^3,$$

где $s_{10} = \frac{\partial F(0,0)}{\partial x_1}$, $s_{01} = \frac{\partial F(0,0)}{\partial x_2}$, $s_{20} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F(0,0)}{\partial x_1^2}$, $s_{11} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F(0,0)}{\partial x_1 \partial x_2}$, $s_{02} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F(0,0)}{\partial x_2^2}$, $s_{k_1 k_2}(x_1, x_2) := s_{k_1 k_2} = \frac{3!}{k_1! k_2!} \int_0^1 (1-u)^2 \frac{\partial^3 (F+g)(ux_1, ux_2)}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2}} du$, $k_1 + k_2 = 3$.

Сделаем замену $x_1 - z_1(y_1, y_2) = y_1$, $x_2 - z_2(y_1, y_2) = y_2$ и используем следующие разложения

$$z_1(y) = z_1^0 + a_{10}y_1 + a_{01}y_2 + a_{20}y_1^2 + a_{11}y_1 y_2 + a_{02}y_2^2 + r_1(y)$$

и

$$z_2(y) = z_2^0 + b_{10}y_1 + b_{01}y_2 + b_{20}y_1^2 + b_{11}y_1 y_2 + b_{02}y_2^2 + r_2(y),$$

где $z_1^0 = z_1(0, 0)$, $a_{10} = \frac{\partial z_1(0,0)}{\partial y_1}$, $a_{01} = \frac{\partial z_1(0,0)}{\partial y_2}$, $a_{20} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 z_1(0,0)}{\partial y_1^2}$, $a_{02} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 z_1(0,0)}{\partial y_2^2}$, $a_{11} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 z_1(0,0)}{\partial y_1 \partial y_2}$, $z_2^0 = z_2(0, 0)$, $b_{10} = \frac{\partial z_2(0,0)}{\partial y_1}$, $b_{01} = \frac{\partial z_2(0,0)}{\partial y_2}$, $b_{20} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 z_2(0,0)}{\partial y_1^2}$, $b_{02} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 z_2(0,0)}{\partial y_2^2}$, $b_{11} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 z_2(0,0)}{\partial y_1 \partial y_2}$, $r_i(y) := \frac{3!}{k_1! k_2!} \int_0^1 (1-u)^2 \frac{\partial^3 z_i(uy_1, uy_2)}{\partial y_1^{k_1} \partial y_2^{k_2}} du$, $k_1 + k_2 = 3$, $i = 1, 2$.

Разложим функцию $(F + g)(y + z(y))$ по формуле Тейлора в точке $(y_1, y_2) = (0, 0)$

Тогда получим

$$(F + g)(y + z(y)) = \alpha_{00}(z) + \alpha_{10}(z)y_1 + \alpha_{01}(z)y_2 + \\ + \alpha_{20}(z)y_1^2 + \alpha_{11}(z)y_1y_2 + \alpha_{02}(z)y_2^2 + \sum_{i_1+i_2=3} \alpha_{i_1i_2}(z)y_1^{i_1}y_2^{i_2} + y_1y_2^2,$$

где $\alpha_{00}(z) = f(0) + F(0)$, $\alpha_{10}(z)$, $\alpha_{01}(z)$, $\alpha_{20}(z)$ некоторые функционалы от z и $\alpha_{02}(z)$, $\alpha_{11}(z) : C^3(U) \rightarrow C^3(V)$ операторы имеющие вид:

$$\alpha_{02}(z) = z_1 + \tilde{\Phi}_1(z, F), \quad \alpha_{11}(z) = 2z_2 + \tilde{\Phi}_2(z, F),$$

здесь $\tilde{\Phi}_j : C^3(U) \rightarrow C^3(V)$ некоторые гладкие операторы, удовлетворяющие условиям $\tilde{\Phi}_j(z, 0) \equiv 0$, ($j = 1, 2$). \square

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Существует положительное число $\varepsilon > 0$ такое, что для любого $\|F\|_{C^4(\bar{V})} < \varepsilon$ найдется такое отображение $(z_1, z_2) := (z_1(F), z_2(F)) \in C^4(U \rightarrow \mathbb{R}^2)$, определенное в некоторой окрестности U , для которого справедливо следующее равенство*

$$\pi_1(f(y_1 + z_1, y_2 + z_2) + F(y_1 + z_1, y_2 + z_2)) = \tilde{c}_0(F) + \tilde{c}_1(F)y_1 + \tilde{c}_2(F)y_2 + \tilde{c}_3(F)y_1^2,$$

где $\pi_1(\cdot)$ – проектирование пространства $C^4(V)$ на пространство E_1 .

Теперь рассмотрим следующие функциональные уравнения относительно (z_1, z_2) :

$$\Phi_1(y, F, z) := \alpha_{11}(z) = 0, \quad \Phi_2(y, F, z) := \alpha_{02}(z) = 0. \quad (2)$$

Приведем вспомогательную лемму.

ЛЕММА 3. *Для непрерывных операторов $\Phi_1(y, F, z)$, $\Phi_2(y, F, z)$ в пространстве $U_1 \times C^4(V_1) \times U_2$ существует частная производная по z и они дифференцируемы по Фреше в точке θ , где $U_1 \subset \mathbb{R}^2$, $U_2 \subset \mathbb{R}^2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ради определенности, покажем существование частных производных по z и дифференцируемость оператора $\Phi_1(y, F, z)$, для функции $\Phi_2(y, F, z)$ доказательство совершенно аналогично.

Так как функция $F \in C^8(\bar{V})$ то отсюда вытекает дифференцируемость оператора $\Phi_1(y, F, z)$.

Существование производных отображения $\Phi_2(y, F, z)$ рассматривается аналогично. \square

ЛЕММА 4. *Операторы $\Phi_1(y, F, z)$, $\Phi_2(y, F, z)$ удовлетворяют следующим условиям:*

$$1) \Phi_1(y, 0, 0) \equiv 0, \quad \Phi_2(y, 0, 0) \equiv 0. \quad 2) \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial z_1} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial z_2} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial z_1} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial z_2} \end{vmatrix} \neq 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из явного вида операторов Φ_1, Φ_2 вытекает выполнения соотношения $1) \Phi_1(y, 0, 0) \equiv 0, \quad \Phi_2(y, 0, 0) \equiv 0$. Очевидно, что $\left| \frac{\partial \Phi_1(0)}{\partial z_1} \frac{\partial \Phi_2(0)}{\partial z_2} - \frac{\partial \Phi_1(0)}{\partial z_2} \frac{\partial \Phi_2(0)}{\partial z_1} \right| = 2 \neq 0$ и следовательно выполнено второе утверждение. Лемма 4 доказана.

Перейдем к доказательству Предложения 1. Так как операторы $\Phi_1(y, F, z)$ и $\Phi_2(y, F, z)$, согласно лемм 2 и 3, удовлетворяют условиям теоремы о неявных отображениях, то, согласно этой теореме, найдется решение $z_1 = z_1(y_1, y_2, F(y))$, $z_2 = z_2(y_1, y_2, F(y))$ уравнения (2) и они являются гладкими функциями, в зависимости от гладкости отображения F . \square **ЗАМЕЧАНИЕ 1.** Отметим, что если $F \in C^{3+k}$ и $f \in C^{3+k}$ то $z(y) \in C^k$.

3. О разбиении единицы

Осцилляторный интеграл оценивается с помощью разбиения единицы.

Пусть $k = \left(\frac{k_1}{3}, \frac{k_2}{3}\right)$ и $\tau > 0$ фиксированное число. Рассмотрим отображение $\delta_\tau^k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ определенное формулой:

$$\delta_\tau(x) = (\tau x_1, \tau x_2).$$

Введем функцию $\beta(x)$, удовлетворяющую условиям:

- 1) $\beta \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$,
- 2) $0 \leq \beta(x) \leq 1$ для любого $x \in \mathbb{R}^2$,
- 3) $\beta(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } |x| \leq 1, \\ 0, & \text{при } |\delta_{2^{-1}}(x)| \geq 1 \end{cases}$

Существование такой функции доказано в [3] (а также [8]).

Пусть

$$\chi(x) = \beta(x) - \beta(\delta_2(x)).$$

Основные свойства функции $\chi(x)$ содержатся в следующей лемме.

ЛЕММА 5. *Функция $\chi(x)$ удовлетворяет следующим условиям:*

1. *Для произвольного фиксированного x справедливо равенство*

$$\beta(\delta_{2^{-\nu_0}}(x)) + \sum_{\nu=\nu_0}^{\infty} \chi(\delta_{2^{-\nu}}(x)) = 1.$$

2. *Для произвольного $x \neq 0$ существует $\nu_0 = \nu_0(x)$ такое, что при любом $\nu \notin [\nu_0, \nu_0 + 4]$*

$$\chi(\delta_{2^\nu}(x)) = 0.$$

3. *Для произвольного ν_0 существует $\varepsilon > 0$ такое, что $\chi(\delta_{2^\nu}(x)) = 0$ при любом $\nu < \nu_0$ и $|x| \geq \varepsilon$.*

Лемма 5 доказана в работе [8].

ЛЕММА 6. *Функция $\chi(x)$ удовлетворяет следующим условиям: 1) Для произвольного фиксированного $x \neq 0$ справедливо равенство*

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \chi(\delta_{2^\nu}(x)) = 1.$$

- 2) *Существует $N = N(\tau)$ такое, что для произвольного $x \neq 0$ существует $\nu_0 = \nu_0(x)$ такое, что при любом $\nu \in [\nu_0, \nu_0 + N]$*

$$\chi(\delta_{2^\nu}(x)) = 0.$$

- 3) *Для произвольного ν_0 существует ε такое, что*

$$\chi(\delta_{2^\nu}(x)) = 0$$

при любом $\nu < \nu_0$ и $|x| \geq \varepsilon$.

4. Доказательство основного результата

Так как функция имеет вид $f(x_1, x_2) = x_1 x_2^2 + g(x_1, x_2)$, то применяя предложение 1 для $f + F$ и получим

$$f + F = s_{10}y_1 + s_{01}y_2 + s_{20}y_1^2 + y_1y_2^2 + s_{30}y_1^3 + s_{21}y_1^2y_2 + s_{12}y_1y_2^2 + s_{03}y_2^3 + R_4(y_1, y_2), \quad (3)$$

где $R_4(y_1, y_2)$ остаточный член. Теперь оценим интеграл J . Сначала введем «квазирасстояние» $\rho = |s_{10}|^{\frac{3}{2}} + |s_{01}|^{\frac{3}{2}} + |s_{20}|^3$ и в интеграле (1) с фазовой функцией (3) сделаем замену переменных $y_1 = \rho^{\frac{1}{3}}\tau_1$, $y_2 = \rho^{\frac{1}{3}}\tau_2$. Тогда получим:

$$J(\lambda) = \rho^{\frac{2}{3}} \int_{\mathbb{R}^2} a\left(\rho^{\frac{1}{3}}\tau_1, \rho^{\frac{1}{3}}\tau_2\right) e^{i\lambda\rho\Phi} d\tau,$$

где $\Phi = \frac{s_{10}}{\rho^{\frac{2}{3}}}\tau_1 + \frac{s_{01}}{\rho^{\frac{2}{3}}}\tau_2 + \frac{s_{20}}{\rho^{\frac{2}{3}}}\tau_1^2 + \tau_1\tau_2^2 + s_{30}\tau_1^3 + s_{21}\tau_1^2\tau_2 + s_{12}\tau_1\tau_2^2 + s_{03}\tau_2^3 + \frac{1}{\rho}R_4\left(\rho^{\frac{1}{3}}\tau_1, \rho^{\frac{1}{3}}\tau_2\right)$. Применим лемму 5, т.е. разбиение единицы, для интеграла $J(\lambda)$ и получим разложение в следующем виде:

$$J(\lambda) = J_0(\lambda) + \sum_{k=k_0}^{\infty} J_k(\lambda),$$

где

$$J_k(\lambda) = \rho^{\frac{2}{3}} \int_{\mathbb{R}^2} a\left(\rho^{\frac{1}{3}}\tau_1, \rho^{\frac{1}{3}}\tau_2\right) \chi\left(2^{-\frac{k}{3}}\tau_1, 2^{-\frac{k}{3}}\tau_2\right) e^{i\lambda\rho\Phi} d\tau,$$

$$J_0(\lambda) = \rho^{\frac{2}{3}} \int_{\mathbb{R}^2} a\left(\rho^{\frac{1}{3}}\tau_1, \rho^{\frac{1}{3}}\tau_2\right) \beta_0(\delta_{2^{-k_0}}(x)) e^{i\lambda\rho\Phi} d\tau.$$

Сначала оценим интеграл $J_k(\lambda)$. В этом интеграле $J_k(\lambda)$ сделаем замену переменных $2^{-\frac{k}{3}}\tau_1 = t_1$, $2^{-\frac{k}{3}}\tau_2 = t_2$ и получим

$$J_k(\lambda) = 2^{\frac{2k}{3}} \rho^{\frac{2}{3}} \int_{\mathbb{R}^2} a\left(2^{\frac{k}{3}}\rho^{\frac{1}{3}}t_1, 2^{\frac{k}{3}}\rho^{\frac{1}{3}}t_2\right) \chi(t_1, t_2) e^{i\lambda 2^k \rho \Phi_k(t, s, \rho)} dt,$$

где фазовая функция имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi_k(t, s, \rho) = & 2^{-\frac{2k}{3}}\sigma_{10}t_1 + 2^{-\frac{2k}{3}}\sigma_{01}t_2 + 2^{-\frac{k}{3}}\sigma_{20}t_1^2 + t_1t_2^2 + \\ & + s_{30}t_1^3 + s_{21}t_1^2t_2 + s_{12}t_1t_2^2 + s_{03}t_2^3 + 2^{-k}\frac{1}{\rho}R_4\left(2^{\frac{k}{3}}\rho^{\frac{1}{3}}t_1, 2^{\frac{k}{3}}\rho^{\frac{1}{3}}t_2\right), \end{aligned}$$

здесь $\sigma_{10} = \frac{s_{10}}{\rho^{\frac{2}{3}}}$, $\sigma_{01} = \frac{s_{01}}{\rho^{\frac{2}{3}}}$, $\sigma_{20} = \frac{s_{20}}{\rho^{\frac{2}{3}}}$, $R_4\left(2^{\frac{k}{3}}\rho^{\frac{1}{3}}t_1, 2^{\frac{k}{3}}\rho^{\frac{1}{3}}t_2\right) = \frac{2^{\frac{4k}{3}}\rho^{\frac{4}{3}}}{6}(s_{40}t_1^4 + s_{31}t_1^3t_2 + s_{22}t_1^2t_2^2 + s_{13}t_1t_2^3 + s_{04}t_2^4)$,

где $s_{40}(t, s, \rho) = \frac{1}{6} \int_0^1 (1-u)^3 \frac{\partial^4 \Phi_k(ut, s, \rho)}{\partial t_1^4} du$, $s_{31}(t, s, \rho) = \frac{1}{6} \int_0^1 (1-u)^3 \frac{\partial^4 \Phi_k(ut, s, \rho)}{\partial t_1^3 \partial t_2} du$, $s_{22}(t, s, \rho) = \frac{1}{6} \int_0^1 (1-u)^3 \frac{\partial^4 \Phi_k(ut, s, \rho)}{\partial t_1^2 \partial t_2^2} du$, $s_{13}(t, s, \rho) = \frac{1}{6} \int_0^1 (1-u)^3 \frac{\partial^4 \Phi_k(ut, s, \rho)}{\partial t_1 \partial t_2^3} du$, $s_{04}(t, s, \rho) = \frac{1}{6} \int_0^1 (1-u)^3 \frac{\partial^4 \Phi_k(ut, s, \rho)}{\partial t_2^4} du$.

Мы можем считать (в зависимости от носителя амплитуды χ_0 , по лемме 5), что число k_0 достаточно большое.

Сначала рассмотрим случай, когда нет осцилляции. Пусть $|2^k \lambda \rho| \leq L$, где L большое фиксированное число. Тогда из тривиальной оценки интеграла получим:

$$|J_k| \leq \frac{2^{\frac{2k}{3}} \rho^{\frac{2}{3}} A}{|2^k \lambda \rho|^{\frac{1}{2}}} = \frac{2^{\frac{k}{6}} \rho^{\frac{1}{6}} A}{|\lambda|^{\frac{1}{2}}}. \quad (4)$$

Пусть теперь $|2^k \lambda \rho| > L$ и $k > k_0$ достаточно большое число. Тогда, по условию, Φ_k может быть рассмотрена как малая деформация функции $\tau_1 \tau_2^2$, причем $(\tau_1, \tau_2) \in D := \text{supp}(\chi) = \{\frac{1}{2} \leq |\tau| \leq 2\}$. Очевидно, что если $\tau^0 \in D$ фиксированная точка и $\tau_2^0 \neq 0$, то эта точка не является критической. Если χ^0 срезающая функция (т.е. функция носитель которой находится в достаточно малой окрестности этой точки), то интеграл

$$J_k^{\chi^0}(\lambda) := 2^{\frac{2k}{3}} \rho^{\frac{2}{3}} \int_{R^2} a\left(2^{\frac{k}{3}} \rho^{\frac{1}{3}} t_1, 2^{\frac{k}{3}} \rho^{\frac{1}{3}} t_2\right) \chi(t_1, t_2) e^{i\lambda 2^k \rho \Phi_k(t, s, \rho)} \chi^0(t) dt,$$

тривиально оценивается интегрированием по частям и имеет место неравенство (4).

Если $\tau_2^0 = 0$, то $\tau_1^0 \neq 0$. В этом случае, используя лемму Ван дер Корпута [4] (более общее утверждение содержится в [9]), снова имеем оценку вида (4).

Так как на носителе амплитуды $2^{\frac{k}{3}} \rho^{\frac{1}{3}} < 1$, то

$$\frac{1}{|\lambda|^{\frac{1}{2}}} \sum_{|2^k \lambda \rho| \leq 1} |J_k| \leq \frac{c}{|\lambda|^{\frac{1}{2}}} \sum_{2^k \rho \leq 1} 2^{\frac{k}{6}} \rho^{\frac{1}{6}} \leq \frac{c}{|\lambda|^{\frac{1}{2}}}.$$

Теперь рассмотрим оценку интеграла $J_0(\lambda)$. Рассмотрим следующие случаи для параметров σ .

Введем квазисферу $\rho(\sigma) := \{|\sigma_{10}|^{\frac{2}{3}} + |\sigma_{01}|^{\frac{2}{3}} + |\sigma_{20}|^{\frac{1}{3}} = 1\}$ и рассмотрим фазовую функцию

$$\begin{aligned} \Phi_0(\tau, \sigma, \rho) &= \sigma_{10} \tau_1 + \sigma_{01} \tau_2 + \sigma_{20} \tau_1^2 + \tau_1 \tau_2^2 + s_{30} \tau_1^3 + s_{21} \tau_1^2 \tau_2 + s_{12} \tau_1 \tau_2^2 \\ &+ s_{03} \tau_2^3 + \frac{1}{\rho} \frac{\rho^{\frac{4}{3}}}{6} (s_{40} \tau_1^4 + s_{31} \tau_1^3 \tau_2 + s_{22} \tau_1^2 \tau_2^2 + s_{13} \tau_1 \tau_2^3 + s_{04} \tau_2^4). \end{aligned}$$

Отметим, что на квазисфере $c_1 \leq |\sigma| \leq c_2$, где c_1, c_2 — фиксированные положительные числа. Таким образом пространство параметров и $\text{supp}(\beta(\delta_{2-k_0}(\cdot)))$ компактные множества. Пусть, $\sigma = \sigma^0$, $|\sigma^0| = c$ фиксированный вектор и $\tau = \tau^0$ фиксированная точка. Тогда $\Phi_0(\tau, \sigma, \rho)$ — достаточно малая гладкая деформация следующей функции

$$\Phi = \sigma_{10}^0 \tau_1 + \sigma_{01}^0 \tau_2 + \sigma_{20}^0 \tau_1^2 + \tau_1 \tau_2^2.$$

Если $\frac{\partial \Phi(\tau_1^0, \tau_2^0)}{\partial \tau_1} \neq 0$ или $\frac{\partial \Phi(\tau_1^0, \tau_2^0)}{\partial \tau_2} \neq 0$, то при $|\sigma - \sigma_0| < \varepsilon |s_{30}| + |s_{21}| + |s_{12}| + |s_{03}| < \varepsilon$ справедлива следующая оценка: $|\nabla \Phi_0(\tau, \sigma, s)| > \delta > 0$

для некоторого положительного числа δ .

Применяя формулу интегрирования по частям для интеграла J_0^{χ} , получим:

$$|J_0^{\chi}| \leq \frac{c \|a\|_{C^1}}{|\lambda|^{\frac{2}{3}}}, \quad (5)$$

где

$$J_0^{\chi}(\lambda) = \int_{R^2} \chi(\tau) a(\tau_1, \tau_2) \chi_0(\tau_1, \tau_2) e^{i\lambda \rho \Phi_0(\tau, \sigma, s)} d\tau \quad (6)$$

и χ — гладкая функция сосредоточенная в достаточно малой окрестности точки τ^0 . Достаточно рассмотреть случай когда τ^0 — критическая точка.

Так как τ^0 — критическая точка, то справедливо следующее равенство:

$$\sigma_{10}^0 + 2\sigma_{20}^0 \tau_1^0 + 2(\tau_2^0)^2 = 0, \sigma_{01}^0 + 2\tau_1^0 \tau_2^0 = 0.$$

Для функции Φ в точке (τ_1^0, τ_2^0) матрица Гессе имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 2\sigma_{20}^0 & 2\tau_2^0 \\ 2\tau_2^0 & 2\tau_1^0 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что это ненулевая матрица, так как если $\sigma_{20}^0 = 0$, то либо $\sigma_{10}^0 \neq 0$, либо $\sigma_{01}^0 \neq 0$, следовательно $\tau_1^0 \neq 0$ или $\tau_2^0 \neq 0$.

Таким образом, ранг матрицы Гессе $\begin{pmatrix} 2\sigma_{20}^0 & 2\tau_2^0 \\ 2\tau_2^0 & 2\tau_1^0 \end{pmatrix}$ не меньше единицы. Если ранг матрицы равен единице, то, применяя лемму Морса по параметрам, для интеграла J_0 получим следующую оценку

$$|J_0| \leq \frac{c \|a\|_{C^1} \rho^{\frac{1}{6}}}{|\lambda|^{\frac{1}{2}}}.$$

Наконец, суммируя полученные оценки придем к доказательству теоремы 1. Теорема 1 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-заде С.М. Особенности дифференцируемых отображений. Классификация критических точек, каустик и вольновых фронтов // М.:Наука. 1982.
2. Варченко А.Н. Многогранник Ньютона и оценки осциллирующих интегралов // Функц. анализ и его прил., Т.10, вып 5. 1976. С. 13-38.
3. Владимиров В.С. Уравнения математической физики // М.:Наука. 1981.
4. Van der Korput. K.G. Zur Methode der stationaren phase// Compositio Math. V.1. 1934. P. 15-38.
5. Duistermaat J. Oscillatory integrals Lagrange immersions and unfoldings of singularities // Comm. Pure.Appl.Math. - 1974. - V.27, № 2. - P.207-281.
6. Ikromov I.A., Muller D. On adapted coordinate systems // Trans. Amer. Math. Soc., 363(2011), no. 6, P. 2821-2848.
7. В.Н.Карпушкин. Равномерные оценки осциллирующих интегралов с параболической или гиперболической фазой // Труды Семинара имени И.Г.Петровского. вып.9. 1983. С. 3-39.
8. Sogge C.D., Fourier integrals in Classical Analysis // Cambridge university press, Cambridge, 1993. P.105.
9. Carbery A., Christ M., and Wright J. Multidimensional Van der Korput lemma and sublevel set estimates // Journal of AMS, V.12. 1999. P.981-1015.
10. Ruzhansky M., Safarov A. R., Khasanov G. A. Uniform estimates for oscillatory integrals with homogeneous polynomial phases of degree 4 // Analysis and Mathematical Physics, **12(130)**, (2022).
11. Сафаров А. Инвариантные оценки двумерных осцилляторных интегралов // Математические заметки. Т.104, вып 2. 2018. С. 289-300.
12. Safarov A. On the L^p -bound for trigonometric integrals // Analysis mathematica **45**, 2019,153-176 p.
13. Safarov A. On invariant estimates for oscillatory integrals with polynomial phase // J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys. **9** (2016), P.102–107.

14. Safarov A. On a problem of restriction of Fourier transform on a hypersurface // *Russian Mathematics*, 63 (4), 2019, P.57-63.
15. Safarov A. R. Estimates for Mittag–Leffler Functions with Smooth Phase Depending on Two Variables // *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.*, **15(4)** (2022), P.459–466.

REFERENCES

1. Arnold, V.I. & Gusein-Zade, S.M.& Varchenko, A.N. 1985. “Singularities of Differentiable Maps”, *Birkhauser, Boston Basel, Stuttgart*.
2. Varchenko, A.N. 1976. “Newton polyhedra and estimation of oscillating integrals”, *Functional Analysis and Its Applications* vol. 10, pp. 175–196.
3. Vladimirov, V.S. 1981. “Mathematic physics equation”, *M.:Nauka*. (Russian).
4. Van der Korput, 1934. “K.G. Zur Methode der stationaren phase”, *Compositio Math.* V.1., pp. 15–38.
5. Duistermaat, J., 1974. “Oscillatory integrals Lagrange immersions and unfoldings of singularities”, *Comm. Pure.Appl.Math.*, Vol. 27, № 2, pp. 207–281.
6. Ikromov, I.A. & Muller, D. 2011. “On adapted coordinate systems”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol.363, no. 6, pp. 2821-2848.
7. Karpushkin, V.N. 1983, “Uniform estimates for oscillatory integrals with parabolic or hyperbolic phase”, *Proceedings of the I.G.Petrovsky Seminar*. Vol.9. pp. 3-39.(Russian)
8. Sogge, C.D. 1993. “Fourier integrals in Classical Analysis”, *Cambridge, Cambridge university press*, P. 105.
9. Carbery, A., Christ, M., and Wright, J., 1999. “ Multidimensional Van der Korput lemma and sublevel set estimates”, *Journal of AMS*, V.12. pp. 981–1015.
10. Ruzhansky, M., Safarov, A. R., Khasanov, G. A., 2022. “Uniform estimates for oscillatory integrals with homogeneous polynomial phases of degree 4”, *Analysis and Mathematical Physics*, **12(130)**.
11. Safarov, A., 2018. “Invariant estimates for double oscillatory integrals”, *Mathematical Notes*, 104:2, pp. 293–302.
12. Safarov, A., 2019. On the L^p -bound for trigonometric integrals. *Analysis mathematica*, **45**, pp. 153–176.
13. Safarov, A., 2016. “On invariant estimates for oscillatory integrals with polynomial phase”, *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.* **9** (2016), pp. 102–107.
14. Safarov, A., 2019. “On a problem of restriction of Fourier transform on a hypersurface”, *Russian Mathematics*, 63 (4), pp. 57–63.
15. Safarov, A. R., 2022. “Estimates for Mittag–Leffler Functions with Smooth Phase Depending on Two Variables, *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.*, **15(4)**, pp. 459–466.

Получено: 26.07.2023

Принято в печать: 21.03.2024

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 25. Выпуск 1.

УДК 517.518.5

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-1-52-61

Об оценке тригонометрических интегралов с квадратичной фазой¹

И. А. Икромов, А. Р. Сафаров, А. Т. Абсаламов

Икромов Исроил Акрамович — Институт математики им. В. И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан (г. Ташкент, Узбекистан), Самаркандский государственный университет (г. Самарканд, Узбекистан).

e-mail: ikromov1@rambler.ru

Сафаров Акбар Рахманович — Институт математики им. В. И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан (г. Ташкент, Узбекистан), Самаркандский государственный университет (г. Самарканд, Узбекистан).

e-mail: safarov-akbar@mail.ru

Абсаламов Акмал Толлибоевич — Самаркандский государственный университет (г. Самарканд, Узбекистан).

e-mail: absalatomov@samdu.uz

Аннотация

В статье рассматривается проблема суммируемости для тригонометрических интегралов с квадратичной фазой. Аналогичная задача рассмотрена в работах [2], [3], [4] в частных случаях. Наши результаты обобщают результаты этих работ на кратные тригонометрические интегралы.

Ключевые слова: тригонометрический интеграл, экспонент, сумма, фаза, многочлен.

Библиография: 14 названий.

Для цитирования:

И. А. Икромов, А. Р. Сафаров, А. Т. Абсаламов. Об оценке тригонометрических интегралов с квадратичной фазой // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 1, с. 52–61.

¹Исследование выполнено с поддержкой гранта РУз (проект ОТ-Ф4-69).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 25. No. 1.

UDC 517.518.5

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-1-52-61

On estimates for trigonometric integrals with quadratic phase

I. A. Ikromov, A. R. Safarov, A. T. Absalamov

Ikromov Isroil Akramovich — V. I. Romanovsky Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan (Tashkent, Uzbekistan), Samarkand State University (Samarkand, Uzbekistan).

e-mail: ikromov1@rambler.ru

Safarov Akbar Rakhmanovich — V. I. Romanovsky Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan (Tashkent, Uzbekistan), Samarkand State University (Samarkand, Uzbekistan).

e-mail: safarov-akbar@mail.ru

Absalamov Akmal Tolliboevich — Samarkand State University (Samarkand, Uzbekistan).

e-mail: absalamov@mail.ru

Abstract

This paper is devoted to the summation problem for trigonometric integrals with quadratic phase. The particular cases of this problem were considered in [2],[3],[4]. We generalize the results of these papers to the multidimensional exponential integrals.

Keywords: trigonometrical integral, exponent, sums, phase, polynomial.

Bibliography: 14 titles.

For citation:

I. A. Ikromov, A. R. Safarov, A. T. Absalamov, 2024, “On estimates for trigonometric integrals with quadratic phase”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 1, pp. 52–61.

1. Введение

Пусть $P(x, s) \in \mathbb{R}[x]$ многочлен от $x \in \mathbb{R}^k$ с коэффициентами $s \in \mathbb{R}^N$. Через Q обозначается компактное множество в \mathbb{R}^k .

Рассмотрим тригонометрический интеграл

$$T(s) = \int_Q \exp(iP(x, s)) dx. \quad (1)$$

Постановка задачи: Найти точную нижнюю грань p_0 чисел p таких, что $T \in L_p(\mathbb{R}^N)$.

Эта задача впервые была рассмотрена И.М.Виноградовым [15] в связи с проблемой аналитической теории чисел и получена оценка сверху для p_0 в случае $k = 1$. Позднее, оценка И.М.Виноградова была улучшена в работе [5]. В работе [1] указано точное значение p_0 в случае $k = 1$ и доказана конечность этого числа в многомерных случаях. В работе [6] рассмотрены оценки снизу для числа p_0 и указано его точное значение когда коэффициенты многочлена меняются в некотором подпространстве пространства \mathbb{R}^N . Аналогичные задачи рассмотрены в работах [7]-[12].

Аналог этой проблемы рассмотрен в работе [13], для случая когда Q есть единичный шар с центром в начале координат и $P(x, s)$ квадратичный полином удовлетворяющий некоторому условию трансверсальности.

В работе [2] получена оценка снизу для p_0 в случае $k = 2$.

В работах [2] и [4] рассмотрена аналогичная задача в случае $k = 2$. Более того в [2], показано, что если P однородный квадратичный полином и $k = 2$, то $p_0 = 4$ в случае когда $Q = [0, 1]^2$ точнее при $p > 4$ тригонометрический интеграл сходится и при $p \leq 4$ расходится.

В данной работе мы рассмотрим задачу суммируемости тригонометрических интегралов когда $k \geq 1$ и получим точный показатель сходимости p_0 в случае когда $Q = [0, 1]^k$.

В случае когда P однородный многочлен степени два получим точное значение p_0 .

Пусть полином P имеет вид:

$$P(x, A, b) = (Ax, x) + (b, x),$$

где $A = (a_{lm})_{l,m=1}^k$ вещественная симметричная $k \times k$ матрица, $b := (b_1, b_2, \dots, b_k) \in \mathbb{R}^k$ и (\cdot, \cdot) скалярное произведение векторов. Рассмотрим тригонометрический интеграл

$$T(A, b) = \int_{\mathbb{R}^k} \exp(iP(x, A, b)) \chi_K(x) dx,$$

где K —компактное множество и $\chi_K(x)$ —характеристическая функция множества K .

Рассмотрим несобственный интеграл

$$\theta = \int_{\mathbb{R}^N} |T(A, b)|^p db da,$$

где $db = db_1 db_2 \dots db_k$ и $da = \prod_{1 \leq l \leq m \leq k} da_{lm}$.

Справедлива следующая:

ТЕОРЕМА 1. Пусть K компактное множество, тогда интеграл θ сходится при $p > 2k + 2$ и причем если K содержит внутреннюю точку x^0 и существует прямая l проходящая через точку x^0 такая, что множество $\{l \cap K\}$ содержит лишь конечное число точек, то при $p \leq 2k + 2$ интеграл расходится. Таким образом, если K компактное множество с непустой внутренностью, то $p_0 = 2k + 2$.

Доказательство теоремы 1. Оценка сверху для p_0 непосредственно следует из теоремы 1 работы [16]. Рассмотрим следующее подмножество $\Omega(a_{11})$ пространства \mathbb{R}^{N-1} :

$$|a_{12}| + |a_{13}| + \dots + |a_{1k}| < c_1 a_{11}, \quad -\frac{1}{2} < \frac{b_1}{a_{11}} < -\frac{1}{4}, \quad |a_{lj} - \frac{a_{1l} a_{1j}}{a_{11}}| \leq c_2, \quad |b_l - \frac{2b_1 a_{1l}}{a_{11}}| \leq c_2,$$

где $l = 2, \dots, n$ и c_1, c_2 достаточно малые фиксированные положительные числа.

ЛЕММА 1. Существует положительное число c такое, что для меры Лебега множества $\Omega(a_{11})$ справедливо следующее равенство:

$$\mu(\Omega(a_{11})) = c \cdot a_{11}^k.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО Берем следующее отображение

$$\xi_{1l}(A, b_1, \dots, b_k) = a_{1l},$$

$$\xi^1(A, b_1, \dots, b_k) = b_1,$$

$$\begin{aligned}\xi^l(A, b_1, \dots, b_k) &= b_l - \frac{2b_1 a_{1l}}{a_{11}}, \\ \xi_{lj}(A, b_1, \dots, b_k) &= a_{lj} - \frac{a_{1l} a_{1j}}{a_{11}}, \\ j \leq l &= 2, 3, \dots, k.\end{aligned}$$

Оно отображает множество $\Omega(a_{11})$ на множество $\Omega(\xi)$ и Якобиан этого отображения равен единице. Следовательно,

$$\mu(\Omega(a_{11})) = \mu(\Omega(\xi)).$$

Легко показать, что для множества $\Omega(\xi)$:

$$\begin{aligned}|\xi_{12}| + |\xi_{13}| + \dots + |\xi_{1k}| &< c_1 \cdot a_{11}, \\ -\frac{1}{2} &< \frac{\xi^1}{a_{11}} < -\frac{1}{4}, \\ |\xi^l| \leq c_2, \quad |\xi_{lj}| \leq c_2, \quad j < l &= 2, 3, \dots, k,\end{aligned}$$

получим

$$\mu(\Omega(\xi)) = c \cdot a_{11}^k.$$

Следовательно,

$$\mu(\Omega(a_{11})) = c \cdot a_{11}^k.$$

ЛЕММА 2. Существует положительное число L такое, что для любого $a_{11} > L$ и $(A, b) \in \Omega(a_{11})$ для интеграла $T(A, b)$ справедливо следующее асимптотическое равенство

$$T(A, b) = \frac{c(A, b)}{a_{11}^{\frac{1}{2}}} + O\left(\frac{1}{a_{11}}\right)$$

при $a_{11} \rightarrow +\infty$, причем существует положительное число δ такое, что для любого $(A, b) \in \Omega(a_{11})$, выполняется неравенство

$$|c(A, b)| > \delta > 0.$$

Лемма 2 доказывается обычным методом стационарной фазы. Отметим, что для достаточно малых c_1, c_2 при $(A, b) \in \Omega(a_{11})$ и для достаточных больших L , фаза имеет осцилляции только в направлении x_1 по этому, при фиксированных значениях $x_2, \dots, x_n \in [0, 1]$, невырожденная критическая точка $x_1(A, b, x_2, \dots, x_n)$ лежит внутри $(0, 1)$.

Наконец, для интеграла θ , имеем оценку снизу

$$\theta \geq \int_L^\infty \int_{\Omega(a_{11})} |T(A, b)|^p db da \geq \delta c \int_L^\infty a_{11}^{k-\frac{p}{2}} da_{11}.$$

Таким образом при $p \leq 2k + 2$ последний интеграл расходится. Теорема 1 доказана.

2. Случай, когда P однородный многочлен второй степени

Теперь предположим, что $P(x, A) = (Ax, x)$. В работе [4] доказано, что если Q квадратичный полином в \mathbb{R}^2 , то при $p > 4$ интеграл θ сходится и при $p_0 \leq 4$ интеграл θ расходится. В данной работе мы распространяем результаты И.Ш.Джаббарова на случай, когда Q многогранник в \mathbb{R}^{2k} .

Под многогранником мы подразумеваем конечное объединение невырожденных симплексов [18].

ТЕОРЕМА 2. Если $P(x, A) = (Ax, x)$ и Q многогранник, то при $p > 2k$ интеграл θ сходится. Если $Q = [0, 1]^k$, то при $p \leq 2k$ интеграл θ расходится.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В этом случае мы не можем применить результаты работы [16], так как соответствующее множество $\{x_i x_j\}_{i \leq j=1}^n$ не является гладкой поверхностью.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В зависимости от множества Q показатель p может быть меньше чем $2k$. Например, если $k = 2$ и Q достаточно малый квадрат с центром в точке $(1, 1)$, то можно доказать, что при $p > 3$ интеграл θ сходится.

3. Вспомогательные леммы

Сначала рассматривается следующий несобственный интеграл

$$T_\infty(A, b) = \int_{\mathbb{R}^k} \exp(iP(x, A, b) - (x, x)) dx.$$

Очевидно, что последний интеграл абсолютно и равномерно сходится по параметрам и он явно вычисляется [13].

ЛЕММА 3. Справедливо следующее равенство

$$T_\infty(A, b) = (2\pi)^{\frac{k}{2}} (\det(I - iA))^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{((I - iA)^{-1}b, b)}{4}\right),$$

где квадратный корень определяется понимается следующим образом

$$(\det(I - iA))^{-\frac{1}{2}} = (1 - i\lambda_1)^{-\frac{1}{2}} \cdot (1 - i\lambda_2)^{-\frac{1}{2}} \cdot \dots \cdot (1 - i\lambda_k)^{-\frac{1}{2}}$$

здесь $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ собственные значения матрицы A . $z^{-\frac{1}{2}}$ ветвь многозначной функции, определенной на комплексной плоскости с разрезом по нижней части мнимой оси и $1^{-\frac{1}{2}} = 1$.

ЛЕММА 3 ДОКАЗЫВАЕТСЯ приведением A к диагональному виду. Таким образом вычисление интеграла сводится к одномерному интегралу и явно вычисляется (более подробно см. [14]).

Очевидно, что выполняются следующие равенства:

$$\left| \exp\left(-\frac{((I - iA)^{-1}b, b)}{4}\right) \right|^p = \exp\left(-\frac{((I + A^2)^{-1}b, b)p}{4}\right)$$

и

$$\int_{\mathbb{R}^k} \exp\left(-\frac{((I + A^2)^{-1}b, b)p}{4}\right) db = \frac{(8\pi)^{\frac{k}{2}} (\det(I + A^2))^{\frac{1}{2}}}{p^{\frac{k}{2}}}.$$

Введем следующее обозначение:

$$\theta_\infty = \int_{\mathbb{R}^N} |T_\infty(A, b)|^p db da,$$

где

$$N = \frac{k(k+2)}{2}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Интеграл θ_∞ сходится при $p > 2k + 2$ и расходится при $p \leq 2k + 2$.

Заметим, что согласно лемме 3, доказательство предложения сводится к исследованию сходимости следующего интеграла

$$\theta_\infty = c(p) \int_{\mathbb{R}^{N-k}} \frac{da}{(\det(I + A^2))^{\frac{p-2}{4}}}, \quad (2)$$

где $c(p)$ некоторое положительное число, оно явно вычисляется.

Как известно, определитель является инвариантом ортогональной группы. Поэтому естественно интегрировать сначала по орбитам ортогональной группы, затем интегрировать по фактор-пространству.

Пусть M множество вещественных симметричных матриц и SO_k группа специальных ортогональных матриц. Эта группа естественным образом действует в пространстве M , $g(A) = g^t A g$, где $g \in SO_k$ и $A \in M$.

Известно, что для любой вещественной симметричной матрицы A , существует $g \in G$ такое, что $g(A) = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$, где $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ диагональная матрица с диагональными элементами $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. Другими словами, для любой матрицы A существует $g \in SO_k$ такое, что $A = g^t \Lambda g$, где $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ – некоторая диагональная матрица.

Таким образом, если рассмотреть многообразие $\mathbb{R}^k \times SO_k$, то естественно определяется гладкое сюръективное отображение

$$\Phi : \mathbb{R}^k \times SO_k \rightarrow M$$

определенное по формуле $\Phi(\Lambda, g) = g^t \Lambda g$.

Пусть $da = da_{11} \wedge da_{12} \wedge \dots \wedge da_{kk}$ естественная форма объема в пространстве M . Мы можем определить образ этой формы при отображении Φ , обозначаемый через $\Phi^* da \in \wedge^{N-k}(\mathbb{R}^k \times SO_k)$.

ЛЕММА 4. *Справедливо следующее равенство*

$$\Phi^* da = \prod_{1 \leq l < m \leq k} (\lambda_m - \lambda_l) d\lambda_1 \wedge \dots \wedge d\lambda_k \wedge \omega,$$

где ω – форма объема на ортогональной группе SO_k .

Лемма 4 доказывается с использованием нулевого множества якобиана отображения Φ . Отметим, что справедливо равенство $\prod_{1 \leq l < m \leq k} (\lambda_m - \lambda_l)^2 = \rho_A(\lambda)$, где $\rho_A(\lambda)$ – характеристический многочлен матрицы A .

Согласно лемме 3, интеграл (2) записывается в виде

$$\int_{\mathbb{R}^{N-k}} \frac{da}{(\det(I + A^2))^{\frac{p-2}{4}}} = \int_{\mathbb{R}^k} \frac{\prod_{1 \leq l < m \leq k} |\lambda_m - \lambda_l|}{\prod_{1 \leq l \leq k} (1 + \lambda_l^2)^{\frac{p-2}{4}}} d\lambda_1 \wedge \dots \wedge d\lambda_k \int_{SO_k} \omega$$

Из последнего равенства следует, что сходимость интеграла (2) сводится к исследованию сходимости интеграла

$$\int_{\mathbb{R}^k} \frac{\prod_{1 \leq l < m \leq k} |\lambda_m - \lambda_l|}{\prod_{1 \leq l \leq k} (1 + \lambda_l^2)^{\frac{p-2}{4}}} d\lambda_1 \wedge \dots \wedge d\lambda_k.$$

Легко видеть, что этот интеграл сходится при $p > 2k + 2$ и расходится при $p \leq 2k + 2$. Что и доказывает предложение 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. При доказательстве используется классическое неравенство Юнга. Если $f \in L_p(\mathbb{R}^k)$ и $g \in L_r(\mathbb{R}^k)$ произвольные функции, то справедливо следующее неравенство

$$\|f * g\|_{L_q} \leq \|f\|_{L_p} \|g\|_{L_r},$$

где $f * g$ свертка функции f и g , причем постоянные $1 \leq p, q, r \leq \infty$ связаны соотношением

$$\frac{1}{q} + 1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{r}.$$

Пусть K компактный многогранник в \mathbb{R}^k и

$$h(b) = \int_{\mathbb{R}^k} e^{|x|^2} \chi_K(x) e^{-2\pi i(b,x)} dx.$$

ЛЕММА 5. Для любого положительного числа ϵ , имеет место включение $h \in L_{1+\epsilon}(\mathbb{R}^k)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что для любого $\epsilon > 0$ $\hat{\chi}_K \in \mathbb{L}_{1+\epsilon}(\mathbb{R}^k)$ (например, см.[17]). тогда утверждение леммы 3 легко следует из неравенства Юнга.

Теперь вернемся к доказательству теоремы 2. Согласно тождеству Планшареля имеем:

$$T(A) = \int_K e^{i(Ax,x)} dx = \int_{\mathbb{R}^k} e^{i(Ax,x)} \chi_K(x) dx = \int_{\mathbb{R}^k} e^{i(Ax,x)-|x|^2} e^{|x|^2} \chi_K(x) dx = \int_{\mathbb{R}^k} \hat{f}(A,b) \hat{g}(b) db,$$

где $\hat{f}(A,b) = \int_{\mathbb{R}^k} e^{i(Ax,x)-|x|^2-2\pi i(b,x)} dx$ и $\hat{g}(b) = \int_{\mathbb{R}^k} e^{|x|^2} e^{-2\pi i(b,x)} dx$.

Пусть $q > 1$ фиксированное число. Тогда, применяя неравенство Гёльдера, имеем:

$$|T(A)| \leq \|\hat{f}(A, \cdot)\|_{\mathbb{L}^{q'}(\mathbb{R}^k)} \|g\|_{\mathbb{L}^q(\mathbb{R}^k)},$$

где $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$.

Согласно лемме 3 имеем:

$$|T(A)| \leq \frac{c_q}{(\det(I + A^2))^{\frac{p}{4} - \frac{1}{2q}}}.$$

Таким образом, если $p > 2k$, то мы можем выбрать $q' > 1$ так, что $\frac{p}{4} - \frac{1}{2q'} > \frac{k}{2}$.

Отсюда следует, что если $\frac{p}{4} - \frac{1}{2q'} > \frac{k}{2}$, то $T \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R}^k)$.

Осталось доказать точность результата. Рассмотрим следующее подмножество $\Omega^+(a_{11})$ пространства \mathbb{R}^{N-1} , где $N = \frac{k(k+1)}{2}$.

$$a_{11} > 0, |a_{12}| + |a_{13}| + \dots + |a_{1k}| < c_1 a_{11}, \quad \left| a_{lj} - \frac{a_{1l} a_{1j}}{a_{11}} \right| \leq c_2, a_{1l} < 0$$

где $l \leq j = \overline{2, n}, l = 2, \dots, n$ и c_1, c_2 достаточно малые фиксированные положительные числа.

Согласно лемме 1 существуют положительные числа c_1 и c_2 такие, что для меры Лебега множества $\Omega^+(a_{11})$ справедливо следующее равенство:

$$\mu(\Omega^+(a_{11})) = c \cdot a_{11}^{k-1}.$$

ЛЕММА 6. Существуют положительное число L такое, что для любого $a_{11} > L$ и $A \in \Omega^+(a_{11})$ для интеграла $T(A)$ справедливо следующее асимптотическое равенство

$$T(A) = \frac{c(A)}{a_{11}^{\frac{1}{2}}} + O\left(\frac{1}{a_{11}}\right)$$

при $a_{11} \rightarrow +\infty$, причем существует положительное число δ такое, что для любого $(A, b) \in \Omega^+(a_{11})$ выполняется неравенство

$$|c(A)| > \delta > 0.$$

Лемма 6 доказывается обычным методом стационарной фазы. Заметим, что если $\delta_2 > \frac{1}{2}$ и $\delta_1 < 0$ то справедливо следующее соотношение

$$\left| \int_{\delta_1 \sqrt{\lambda}}^{\delta_2 \sqrt{\lambda}} \cos y^2 dy \right| = c(\delta_1, \delta_2, \lambda)$$

причем, существуют $\lambda_0, \varepsilon > 0$ такие, что выполняется неравенство $c(\delta_1, \delta_2, \lambda) \geq \varepsilon > 0$ при всех $\lambda \geq \lambda_0$.

Отметим, что для достаточно малых c_1, c_2 при $A \in \Omega^+(a_{11})$ и для достаточно больших L фаза имеет осцилляции только в направлении x_1 по этому, при фиксированных значениях $x_2, \dots, x_n \in [0, 1]$ невырожденная критическая точка $x_1(A, b, x_2, \dots, x_n)$ лежит внутри $(0, 1)$.

Наконец, для интеграла θ , имеем оценку снизу

$$\theta \geq \int_L^\infty \int_{\Omega(a_{11})} |T(A)|^p da \geq \delta c \int_L^\infty a_{11}^{k-\frac{p}{2}-1} da_{11}.$$

Таким образом при $p \leq 2k$ последний интеграл расходится. Основная теорема 2 доказана.

4. Двумерный случай

Отметим, что в однородном случае результаты [16] неприменимы. При доказательстве теоремы 2 существенно используется свойство $\widehat{\chi}_Q \in \mathbb{L}_{1+0}(\mathbb{R}^k)$.

В работе В.В.Лебедева приведен пример области $\partial D \in C^{1,\omega}$, где ω модуль непрерывности градиента φ , определяющей ∂D , такое что $\widehat{\chi}_Q \in \mathbb{L}_{1+0}(\mathbb{R}^k)$. Поэтому, мы можем считать, что D компактная область с достаточно гладкой границей.

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 3. Пусть D компактная область такая, что $\widehat{\chi}_D \in \mathbb{L}_q(\mathbb{R}^2)$ и $T(A) = \int_D e^{i(Ax,x)} dx$. Тогда $T \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R}^3)$ при $p > 6 - \frac{2}{q}$. Более того, если $\widehat{\chi}_D \in \mathbb{L}_{1+0}(\mathbb{R}^2)$, то, при любом $p > 4$, справедливо включение $T \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R}^3)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Из результатов В.В.Лебедева [17] следует, что существует множество D отличное от многоугольника, такое, что $\widehat{\chi}_Q \in \mathbb{L}_{1+0}(\mathbb{R}^2)$.

СЛЕДСТВИЕ. Если $D \subset \mathbb{R}^2$ компактное множество, такое, что $\partial D \subset C^1$, то при $p > 4, 5$ справедливо соотношение $T \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R}^3)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Архипов, Г. И., Карацуба, А. А., Чубариков, В. Н. Теория кратных тригонометрических сумм // М:Наука, 1987, 357 с.
2. Архипова, Л. Г., Чубариков, В. Н. О показателях сходимости особого интеграла и особого ряда одной многомерной проблемы // Чебышевский сборник, 2019, вып.20, том 4, С.46–57.
3. Чахкиев, М. А. Оценка показателя сходимости особого интеграла проблемы Терри для однородного многочлена степени N от двух переменных // LXI Международные научные чтения (памяти А.Н.Колмогорова) Международной научно-практической конференции 16 декабря, 2019, С.18–21.
4. Джаббаров, И. Ш. Показатель сходимости особого интеграла двумерной проблемы Терри с однородным многочленом степени 2 // Матем. заметки, 2019, том 105, вып. 3, С. 375–382.
5. Hua, Loo-keng. On the number of solutions of Tarry's problem // Acta Sci. Sinica, 1952, vol.1, № 1, pp. 1–76.
6. Ikromov, I. A. On the convergence exponent of trigonometric integrals // Proceedings, MIRAN, 1997, vol, 218, pp.179–189.

7. Safarov, A. On the L^p -bound for trigonometric integrals // *Analysis mathematica*, 2019, **45**, pp.153–176.
8. Сафаров, А. О суммируемости двукратных осцилляторных интегралов с полиномиальной фазой третьей степени // *Узбекский математический журнал*, 2015, **4**, С.108–117.
9. Safarov, A. Invariant estimates of two-dimensional oscillatory integrals // *Math. Notes*, 2018, **104**, pp.293–302.
10. Safarov, A. On invariant estimates for oscillatory integrals with polynomial phase, // *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.* 2016, **9**, pp.102–107.
11. Safarov, A. On a problem of restriction of Fourier transform on a hypersurface // *Russian Mathematics*, 2019, **63**(4), pp.57–63.
12. Safarov, A. R. Estimates for Mittag–Leffler functions with smooth phase depending on two variables // *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.*, 2022, **15**(4), pp.459–466.
13. Makenhaupt, G. Bounds in Lebesgue Spaces of Oscillatory Integral Operators // *Habilitationschrift zur Erlangung der Lehrbefugnis im Fach Mathematik der Gesamthochschule, Siegen*, 1996.
14. Stein, E. M. Harmonic Analysis: real-valued methods, orthogonality and Oscillatory Integrals // *Princeton*, 1993.
15. Виноградов, И.М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел // *М:Наука*, 1980, 158 С.
16. Jong-Guk, Bak, Sanghyuk, Lee. Restriction of the Fourier transform to a quadratic surface in \mathbb{R}^n // *Mathematische Zeitschrift*, 2004, No.247, pp.409–422.
17. Лебедев, В.В. О преобразовании Фурье характеристических функций областей с C^1 –гладкой функцией // *Функц. анализ и его прил.*, 2013, вып.47, том 1. С. 33–46.
18. Лебедев, В.В. Операторы суперпозиции в некоторых пространствах гармонического анализа // *Диссертация на соискание учёной степени физико-математическим наукам*. URL: <https://www.dissercat.com/content/operatoriy-superpozitsii-v-nekotorykh-prostranstvakh-garmonicheskogo-analiza>

REFERENCES

1. Arkhipov, G. I., Karatsuba, A.A. & Chubarikov, V.N., 1987. “Theory of multiple trigonometric sums”, *Moscow. Nauka*, p. 357.
2. Arkhipov, L. G., & Chubarikov, V.N, 2019. “Chebyshevskiy sbornik”, *On the exponents of the convergence of singular integrals and singular series of a multivariate problem*, vol. 20, no. 4, pp.46–57.
3. Chahkiev, M. A., 2019. “Estimation of the convergence index of a singular integral Terry problems for a homogeneous polynomial degree n of two variables”, *LXI International Scientific Readings (in memory of A.N.Kolmogorov) International Scientific and Practical Conference December 16*, pp.18–21.
4. Jabbarov, I.Sh., 2019. “Mathematical Notes”, *Exponent of a special integral in the two-dimensional Terry problem with homogeneous of degree 2*, vol. 105, no. 3, pp. 375–382.

5. Hua Loo-keng, 1952. “On the number of solutions of Tarry’s problem”, *Acta Sci. Sinica*, vol.1, No. 1, pp. 1–76.
6. Kromov, I. A., 1997. “On the convergence exponent of trigonometric integrals”, *Proceedings, MIRAN*, vol.218, pp.179–189.
7. Safarov, A., 2019. “On the L^p -bound for trigonometric integrals”, *Analysis mathematica* no. 45, pp. 153–176.
8. Safarov, A., 2015. “About summation of oscillatory integrals with homogeneous polynomial of third degree”, *Uzbek Mathematical journal* no.4 , pp.108–117.
9. Safarov, A., 2018. “Invariant estimates of two-dimensional oscillatory integrals”, *Math. Notes*, 104, pp.293–302.
10. Safarov, A., 2016. “On invariant estimates for oscillatory integrals with polynomial phase”, *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.*, **9**, pp.102–107.
11. Safarov, A., 2019. “On a problem of restriction of Fourier transform on a hypersurface”, *Russian Mathematics*, 63 (4), pp.57–63.
12. Safarov, A. R., 2022. “Estimates for Mittag–Leffler Functions with Smooth Phase Depending on Two Variables”, *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.*, **15(4)**, pp.459–466.
13. Makenhaupt, G., 1996. “Bounds in Lebesgue Spaces of Oscillatory Integral Operators”, *Habilitationsschrift zur Erlangung der Lehrbefugnis im Fach Matematik der Gesamthochschule, Siegen*.
14. Stein, E. M., 1993. “Harmonic Analysis: real-valued methods, orthogonality and Oscillatory Integrals”, *Princeton*.
15. Vinogradov, I. M., 1980. “Method trigonometric sums in number theory”, *Moscow, Nauka*, pp. 158.
16. Jong-Guk Bak, Sanghyuk Lee, 2004. “Restriction of the Fourier transform to a quadratic surface in \mathbb{R}^n ”, *Mathematische Zeitschrift* № 247, pp.409–422.
17. Lebedev, V. V., 2013. “On the Fourier transform of the characteristic functions of domains with C^1 boundary”, *Func. anal. and its appl.* Vol. 47, no. 1. pp. 33–46.
18. Lebedev, V. V., 2013. “Superposition operators in some spaces of the harmonic analyzer the translator”, *Dissertation to take The dissertation on competition of a scientific degree of physical and mathematical sciences*. URL: <https://www.dissercat.com/content/operatoriy-superpozitsii-v-nekotorykh-prostranstvakh-garmonicheskogo-analiza>

Получено: 23.07.2023

Принято в печать: 21.03.2024

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 25. Выпуск 1.

УДК 517.938.5

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-1-62-102

Исследование структуры слоения Лиувилля интегрируемого эллиптического бильярда с полиномиальным потенциалом¹

С. Е. Пустовойтов

Пустовойтов Сергей Евгеньевич — аспирант, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: pustovoitovse1@mail.ru

Аннотация

В работе рассматривается плоский бильярд, ограниченный эллипсом, в поле потенциальной силы. Была найдена явная формула полиномиального потенциала, сохраняющего интегрируемость такого бильярда. Для него была изучена структура слоения Лиувилля на всех неособых уровнях энергии с помощью метода разделения переменных. А именно, был предложен алгоритм, который строит бифуркационную диаграмму, а также инвариант Фоменко-Цишанга, исходя из значений параметров потенциала. Кроме того, была изучена топология изоэнергетического многообразия и обнаружены случаи динамики твердого тела, лиувиллево эквивалентные нашему бильярду.

Ключевые слова: интегрируемая гамильтонова система, бильярд, полиномиальный потенциал, слоение Лиувилля, инвариант Фоменко-Цишанга.

Библиография: 20 названий.

Для цитирования:

С. Е. Пустовойтов. Исследование структуры слоения Лиувилля интегрируемого эллиптического бильярда с полиномиальным потенциалом // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 1, с. 62–102.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 25. No. 1.

UDC 517.938.5

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-1-62-102

Research of the structure of the Liouville foliation of an integrable elliptical billiard with polynomial potential

S. E. Pustovoitov

Pustovoitov Sergey Evgenievich — postgraduate student, Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: pustovoitovse1@mail.ru

¹Работа выполнена при поддержке гранта РНФ 22-71-10106 в МГУ им. М.В.Ломоносова. Автор является стипендиатом фонда «БАЗИС»

Abstract

In this paper we consider a planar billiard bounded by an ellipse in the potential force field. An explicit formula of the polynomial potential preserving integrability of such a billiard was found. The structure of the Liouville foliation at all non singular energy levels was studied using the method of separation of variables. Namely, an algorithm that constructs the bifurcation diagram and the Fomenko-Zieschang invariants from the values of the parameters of the potential was proposed. In addition, the topology of the isoenergetic manifold was studied and the cases of rigid body dynamics, which are Liouville equivalent to our billiard, were established.

Keywords: integrable Hamiltonian system, billiard, polynomial potential, Liouville foliation, Fomenko-Zieschang invariant.

Bibliography: 20 titles.

For citation:

S. E. Pustovoitov, 2024, “Research of the structure of the Liouville foliation of an integrable elliptical billiard with polynomial potential” *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 1, pp. 62–102.

1. Введение

Под понятием математического бильярда скрывается обширный класс динамических систем. Классическое определение, восходящее к работам Дж. Биркгофа [1] и К. Якоби [2], гласит, что математический бильярд является динамической системой, описывающей равномерное движение материальной точки в плоской области, ограниченной некоторым контуром, с абсолютно упругим отражением от границы. Конечно же, такая система является гамильтоновой системой с двумя степенями свободы, и в качестве ее гамильтониана выступает кинетическая энергия точки. Согласно знаменитой гипотезе, предложенной Дж. Биркгофом, плоский выпуклый бильярд с гладкой границей допускает первый интеграл (т.е. закон сохранения), независимый с гамильтонианом, только если границей бильярда выступает эллипс. В последние годы появился ряд работ, посвященных продвижению в доказательстве этой гипотезы. Так, В. Ю. Калашин и А. Соррентино в [3] показали, что при малом интегрируемом возмущении эллиптического бильярда результирующей границей может быть лишь эллипс. В то же время, А. А. Глюцук в [4], совместно с М. Бялым и А. Е. Мироновым, показал, что бильярд обладает полиномиальным первым интегралом, если и только если он ограничен дугами софокусных коник и допустимых прямых. Дополнительно, случай интегрируемых эллипτικο-гиперболических бильярдов был рассмотрен В. В. Ведюшкиной (Фокичевой) в [5] с точки зрения топологии слоения Лиувилля их фазового четырехмерного пространства и его трехмерного неособого изоэнергетического сечения, т.е. их разбиения на общие поверхности уровней интегралов. А именно, была предложена некоторая конечная классификация таких бильярдов, и для каждого класса был вычислен соответствующий инвариант слоения – инвариант Фоменко-Цишанга, или т.н. меченые молекулы.

Одно из основных преимуществ классических математических бильярдов перед другими динамическими системами состоит в их наглядности. Многие утверждения, требующие громоздких вычислений в системах механики, таких как случаи динамики твердого тела или геодезические потоки, могут быть доказаны из элементарных геометрических соображений. Тем не менее, как было показано, интегрируемых случаев классических бильярдов весьма ограниченное число. В связи с этим, были рассмотрены многие обобщения классических случаев. Например, В. В. Ведюшкиной была предложена конструкция интегрируемой бильярдной книжки, описывающей бильярдное движение на некотором классе конечных двумерных клеточных комплексов. Теория бильярдных книжек была развита в совместных работах В. В. Ведюшкиной, В. А. Кибкало, А. Т. Фоменко и И. С. Харчевой в [6]-[7]. С другой стороны, можно снабдить классический бильярд действием магнитного поля. В работе М. Бялого

и А. Е. Миронова [8] было показано, что почти для всех значений сигнатуры магнитного поля выпуклый магнитный бильярд интегрируем тогда и только тогда, когда он ограничен окружностью. Анализ слоения Лиувилля такого бильярда был проведен В. В. Ведюшкиной и автором в [9].

В настоящей работе мы остановимся на бильярде внутри плоской области, ограниченной эллипсом, в потенциальном поле. Как и в случае других обобщений, встает вопрос интегрируемости такого бильярда. Так, критерий интегрируемости с дополнительным интегралом определенного вида был приведен В. В. Козловым в [10], а интегрируемые потенциалы в форме многочлена Лорана (их общий вид) были описаны В. И. Драговичем в [11]. Мы же ограничимся классом полиномиальных потенциалов и изучим структуру слоения Лиувилля фазового четырехмерного пространства M^4 . Так, анализ слоений неособых изоэнергетических подмногообразий для бильярда с потенциалом второго порядка (упругим потенциалом Гука) провел И. Ф. Кобцев в [12], а четвертого порядка – автор в [13]. Данная же работа является обобщением предыдущих двух для интегрируемого полиномиального потенциала произвольного порядка. Для этого мы используем язык 3-атомов и инвариантов Фоменко-Цишанга, изложенный в [14]. Главным результатом работы является алгоритм, позволяющий вычислить такой инвариант слоения для любого неособого уровня энергии, а также построить бифуркационную диаграмму для каждого конкретного потенциала. Помимо этого, была обнаружена лиувиллева эквивалентность данного бильярда с интегрируемыми системами динамики твердого тела, и установлен топологический тип неособых изоэнергетических многообразий. Таким образом, настоящая работа подводит нас ближе к решению вопроса, сформулированного А. Т. Фоменко, о реализации структур и особенностей произвольной интегрируемой системы с помощью бильярда с точки зрения лиувиллевой эквивалентности.

Автор выражает благодарность А. Т. Фоменко и В. В. Ведюшкиной за многочисленные обсуждения и ценные научные советы, а также В. И. Драговичу за важный комментарий, определивший постановку задачи.

2. Необходимые определения

Пусть на симплектическом многообразии (M^4, ω) задана автономная гамильтонова динамическая система $v = sgrad(H) := \omega^{-1}dH$ с гамильтонианом H . Такая система называется *вполне интегрируемой по Лиувиллю*, если она допускает первый интеграл F , функционально независимый с гамильтонианом, при этом векторные поля $sgrad(H)$ и $sgrad(F)$ полны. *Слоением Лиувилля* в данном случае называется разбиение многообразия M^4 на общие поверхности уровней интегралов $\{H = const, F = const\}$. Отметим, что такие поверхности являются инвариантными для потоков первых интегралов. Согласно знаменитой *теореме Лиувилля*, компактный регулярный слой такого слоения диффеоморфен двумерному тору, называемому *тором Лиувилля*, при этом слоение в четырехмерной окрестности такого тора устроено тривиально. Преимущественно в работе мы изучаем слоение Лиувилля неособого изоэнергетического подмногообразия $Q^3 = \{x \in M^4 : H(x) = const\}$ (т.е. $dH \neq 0$ для любой точки $x \in Q^3$), для которого дополнительный интеграл F является *функцией Ботта*. Это означает, что критические точки функции F на Q^3 организуются либо в систему непересекающихся окружностей, либо в систему двумерных торов, либо в систему бутылок Клейна. Потребуем, что системе соответствуют только критические окружности. Тогда особые слои слоения Лиувилля, на которых лежат эти окружности, вместе со своими трехмерными окрестностями образуют некоторые расслоенные ориентируемые многообразия с краем. Класс эквивалентности таких многообразий с точностью до послыйного диффеоморфизма, сохраняющего их ориентацию и ориентацию критических окружностей, называется *3-атомом*, при этом такое отношение эквивалентности назовем *лиувиллевым*. Определение и свойства 3-атомов см. в ра-

ботах А.Т.Фоменко [17]-[20]. Все 3-атомы были классифицированы А. Т. Фоменко, А. В. Болсиновым и А. А. Ошемковым в [14] и описывают боттовские бифуркации торов Лиувилля. Забегая вперед, отметим, что в нашей работе будут встречаться только 3-атомы A , A^* , атомы серий B_k и C_k , где k – количество критических окружностей (рис. 1). Рассмотрим теперь

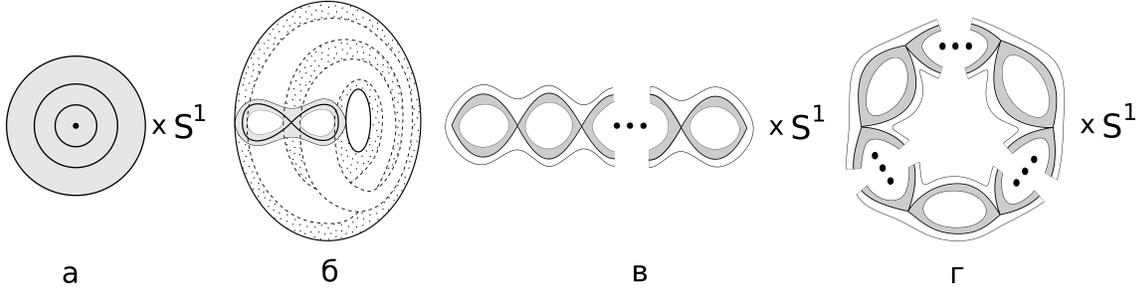


Рис. 1: Примеры 3-атомов. На рис. а изображен атом A , на рис. б – атом A^* , на рис. в – атом серии B_k , на рис. г – атом серии C_k

базу слоения Лиувилля неособого многообразия Q^3 . Такая база является одномерным комплексом и называется *графом Роба*. Вершины графа соответствуют некоторым критическим слоям, а перестройкам торов Лиувилля через эти слои – 3-атомы. Таким образом, соотнесем вершинам соответствующие 3-атомы. Полученный инвариант слоения называется *грубым инвариантом Фоменко* или же *грубой молекулой*. Отметим, что каждой внутренней точке графа Роба соответствует тор Лиувилля. Дополним теперь грубую молекулу числовыми метками, полностью описывающими, как именно граничный тор Лиувилля одного 3-атома переходит в граничный тор другого при движении по ребру, соединяющего эти атомы. Полученный инвариант назовем *инвариантом Фоменко-Цишанга*, или *меченой молекулой*. Более подробно то, как именно определяются метки, описано в [14]. Оказывается, построенный таким образом инвариант является полным инвариантом лиувиллевой эквивалентности. А именно, верна следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. (Фоменко-Цишанг) Системы v_1 и v_2 на Q_1^3 и Q_2^3 лиувиллево эквивалентны тогда и только тогда, когда их меченые молекулы совпадают.

3. Постановка задачи. Интегрируемость

Рассмотрим математический бильярд внутри плоской области Ω , ограниченной эллипсом, заданным уравнением $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$ в декартовых координатах (здесь $a > b > 0$). Попадая на границу, материальная точка отражается от нее абсолютно упруго. Положим, что на точку действует некоторый потенциал $W(x, y) \in C^\infty(\Omega)$. Таким образом, ее движение удовлетворяет следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} \ddot{x} = -W_x \\ \ddot{y} = -W_y \end{cases} \quad (1)$$

Фазовым пространством этой системы является симплектическое многообразие (M^4, ω) . Многообразии M^4 имеет следующий вид:

$$M^4 = T^*\Omega / \{(\vec{x}_b, \vec{p}_i(\vec{x}_b)) \sim (\vec{x}_b, \vec{p}_r(\vec{x}_b))\}, \quad (2)$$

то есть является кокасательным расслоением бильярдной области Ω , факторизованным на своей границе согласно закону отражения (здесь \vec{x}_b – точка на границе бильярда, $\vec{p}_i(\vec{x}_b)$ и $\vec{p}_r(\vec{x}_b)$ – импульсы материальной точки при попадании на границу бильярда в точке \vec{x}_b и при

отражении от нее соответственно). Симплектическая структура ω имеет канонический вид в координатах (x, y, p_x, p_y) :

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Описанная таким образом динамическая система является гамильтоновой на фазовом пространстве (M^4, ω) с гамильтонианом следующего вида:

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2} + W(x, y) \quad (4)$$

В [15] было доказано, что если материальная точка в таком бильярде движется по инерции (т.е. $W \equiv 0$), то система допускает следующий первый интеграл движения:

$$\Lambda = \frac{p_x^2}{a} + \frac{p_y^2}{b} - \frac{(xp_y - p_x y)^2}{ab}, \quad (5)$$

значение которого является параметром каустики $\lambda = \Lambda$, принадлежащей следующему однопараметрическому семейству софокусных квадрик:

$$\frac{x^2}{a + \lambda} + \frac{y^2}{b + \lambda} = 1 \quad (6)$$

Этот первый интеграл функционально независим с гамильтонианом H почти всюду и находится с ним в инволюции относительно симплектической структуры ω . Следовательно, классический бильярд в эллипсе является вполне интегрируемым по Лиувиллю. Топологическим анализом и классификацией такого бильярда, а также бильярдных, ограниченных квадриками софокусного семейства (6), занималась В. В. Ведюшкина в [5].

Однако в общем случае при произвольном потенциале W интегрируемость нарушается. В. В. Козлов в [10] предложил следующий критерий интегрируемости.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1 (В.В.Козлов). *Бильярд в эллипсе с потенциалом $W \in C^\infty(\Omega)$ допускает первый интеграл вида $G = \Lambda + g(x, y)$, если и только если потенциал W удовлетворяет следующему уравнению:*

$$(a - b)W_{xy} + 3(yW_x - xW_y) + W_{xy}(y^2 - x^2) + xy(W_{xx} - W_{yy}) = 0 \quad (7)$$

Примерами таких потенциалов являются квадратичный потенциал Гука $W = \frac{k}{2}(x^2 + y^2)$ и потенциал четвертой степени вида $W = \beta x^2 + \alpha y^2 + \frac{2(\alpha - \beta)}{a - b}x^2 y^2 + \frac{\alpha - \beta}{a - b}(x^4 + y^4)$. Топологический анализ бильярдных с этими потенциалами был проведен И. Ф. Кобцевым в [12] и автором в [13].

Общее решение уравнения (7) в форме полинома Лорана было найдено В. И. Драговичем в работе [11]. В нашей работе мы ограничимся случаем обычного полиномиального потенциала произвольной степени n в декартовой системе координат (примеры таких потенциалов были приведены выше). Опишем сначала некоторые его важные свойства.

ЛЕММА 1. *Общее решение уравнения (7) в виде многочлена*

$$W = \sum_{i+j=n} a_{i,j} x^i y^j \quad (8)$$

удовлетворяет следующим свойствам:

- 1) $a_{i,j} = 0$ при $2 \nmid i$ или $2 \nmid j$;
- 2) пространство решений вида (8) имеет размерность $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставим функцию вида (8) в уравнение (7). В полученном уравнении коэффициент при $x^{i-1}y^{j-1}$ имеет следующий вид:

$$(a-b)ija_{i,j} + i(i+j)a_{i,j-2} - j(i+j)a_{i-2,j} = 0, \quad (9)$$

где $i > 0$, $j > 0$, $i+j \leq n+2$. При этом полагаем, что $a_{-1,i} = a_{i,-1} = a_{i,n+1-i} = a_{i,n+2-i} = 0$ для любого $i \in \overline{0..n+1}$.

Таким образом, дифференциальное уравнение (7) преобразовалось в систему линейных уравнений типа (9) относительно коэффициентов $a_{i,j}$. Заметим, что эта система состоит из четырех независимых подсистем от переменных вида $a_{2k+1,2l+1}$, $a_{2k,2l+1}$, $a_{2k+1,2l}$ и $a_{2k,2l}$ соответственно. Рассмотрим каждую из них по отдельности при условии, что число n четно (для нечетного n доказательство аналогичное).

Начнем с системы на $a_{2k+1,2l+1}$. Рассмотрим уравнение (9) для произвольного нечетного i и $j = n+2-i$. Из условий на систему следует, что $a_{i,j} = 0$. Следовательно, если коэффициент $a_{i-2,j} = 0$, то и $a_{i,j-2} = 0$. Однако, при $i = 1$ и $j = n+1$ коэффициент $a_{-1,n+1}$ равен нулю по условию на систему. Следовательно, коэффициент $a_{2k+1,2l+1} = 0$ при $2k+2l+2 = n$. Рассмотрим теперь уравнение (9) для произвольного нечетного i и $j = n-i$. Из доказанного выше $a_{i,j} = 0$. Проведя аналогичные рассуждения, получим, что $a_{2k+1,2l+1} = 0$ при $2k+2l+2 = n-2$. Таким образом, уменьшая каждый раз значение суммы $i+j$ на два, получим, что $a_{2k+1,2l+1} = 0$ при любых возможных значениях k и l .

Рассмотрим теперь систему на $a_{2k,2l+1}$. Аналогично предыдущему случаю, рассмотрим уравнение (9) при произвольном четном i и $j = n+1-i$. Из условий на систему следует, что $a_{i,j} = 0$. Следовательно, если коэффициент $a_{i,j-2} = 0$, то и $a_{i-2,j} = 0$. Однако, коэффициент $a_{n,-1} = 0$ из условий на систему. Следовательно, $a_{2k,2l+1} = 0$ при $2k+2l+1 = n-1$. Таким образом, проведя рассуждения, аналогичные предыдущему случаю, получим, что $a_{2k,2l+1} = 0$ при любых возможных значениях k и l .

Рассуждения для системы на $a_{2k+1,2l}$ повторяют рассуждения для предыдущего случая с точностью до замены индексов i на j . Следовательно, коэффициенты вида $a_{2k+1,2l}$ также равны нулю, что завершает доказательство первого пункта леммы.

Наконец, рассмотрим систему на $a_{2k,2l}$. При $i = 0$ и $j = n+2$ уравнение (9) становится тождественным $0 = 0$. Обозначим коэффициент $a_{0,n}$ за α_1 . При $i+j = n+2$ коэффициент $a_{i,j} = 0$. Следовательно, значение коэффициента $a_{i,j-2}$ линейно зависит от значения $a_{i-2,j}$, если $i \neq 0$. Таким образом, коэффициент вида $a_{2k,2l}$ является линейной функцией относительно параметра α_1 .

Аналогично, при $i = 0$ и $j = n$ уравнение (9) становится тождественным $0 = 0$. Обозначим коэффициент $a_{0,n-2}$ за α_2 . По доказанному ранее, при $i+j = n$ коэффициент $a_{i,j} = a_{i,j}(\alpha_1)$. Следовательно, значение коэффициента $a_{i,j-2}$ линейно зависит от значения $a_{i-2,j}$ и параметра α_1 , если $i \neq 0$. Таким образом, коэффициент вида $a_{2k,2l}$ является линейной функцией относительно параметров α_1 и α_2 .

Проведя аналогичные рассуждения, несложно доказать, что в общем случае коэффициент вида $a_{2k,2l}$ при $2k+2l = n-2(m-1)$ является линейной функцией от параметров $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, при этом $a_{0,n-2(m-1)} = \alpha_m$ для m от единицы до $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Заметим, что параметры α_m были выбраны независимо друг от друга и в исходной системе линейных уравнений каждое уравнение типа (9) было использовано для вычисления значения коэффициента $a_{i,j-2}$. Следовательно, параметры α_m являются координатами в пространстве решений уравнения (7), а размерность этого пространства равняется $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Лемма доказана. \square

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Используя идеи доказательства леммы 1, несложно восстановить алгоритм решения системы линейных уравнений (9) (был впервые проведен В. И. Драговичем в [11]). Известно, что при $2k + 2l = n$, решение имеет вид $a_{2k,2l} = \binom{k+l}{k} \alpha_1$. Однако, в произвольном случае зависимость коэффициента $a_{2k,2l}$ от параметров α_m имеет более сложный вид. Тем не менее, общий вид решения уравнения (7) в форме многочлена (8) будет приведен в дальнейшем в эллиптических координатах.

Перейдем теперь от используемых ранее декартовых координат (x, y) к эллиптическим координатам (λ_1, λ_2) . Уравнения перехода имеют следующий вид:

$$\begin{cases} x^2 = \frac{(a+\lambda_1)(a+\lambda_2)}{a-b}, \\ y^2 = \frac{(b+\lambda_1)(b+\lambda_2)}{b-a}. \end{cases} \quad (10)$$

Координатными линиями в этой системе координат являются эллипсы и гиперболы, принадлежащие софокусному семейству (6). При этом координата $\lambda_1 \in [-a, -b]$ является параметром гиперболы, а координата $\lambda_2 \in (-b, \infty)$ является параметром эллипса. Уравнение границы биллиарда имеет вид $\lambda_2 = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Эллиптические координаты плохи тем, что матрица Якоби является вырожденной на координатных осях Ox и Oy . Поэтому все формулы, которые будут использоваться в дальнейшем, имеют место при $x \neq 0$ и $y \neq 0$, а поведение системы на осях определяется по непрерывности.

Гамильтониан в эллиптических координатах имеет следующий вид:

$$H = \frac{2(a + \lambda_1)(b + \lambda_1)}{\lambda_1 - \lambda_2} \mu_1^2 + \frac{2(a + \lambda_2)(b + \lambda_2)}{\lambda_2 - \lambda_1} \mu_2^2 + W(\lambda_1, \lambda_2), \quad (11)$$

где μ_1 и μ_2 являются обобщенными импульсами, соответствующими координатам λ_1 и λ_2 соответственно.

Следующая лемма дает общий вид решения уравнения (7) в форме многочлена (8) в эллиптических координатах.

ЛЕММА 2. Уравнение (7) в эллиптических координатах (10) имеет следующий вид:

$$xy \left(\frac{W_1 - W_2}{\lambda_1 - \lambda_2} - W_{12} \right) = 0, \quad (12)$$

где W_i — частная производная функции W по λ_i , и $W_{12} = \frac{\partial^2 W}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2}$.

Общее решение уравнения (7) в форме многочлена (8) имеет следующий вид:

$$W = \frac{P(\lambda_1) - P(\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad (13)$$

где P — произвольный многочлен степени $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, что уравнение (12) равносильно уравнению (7). Обратные формулы перехода от эллиптических координат к декартовым имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - a - b - R(x, y)), \\ \lambda_2 = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - a - b + R(x, y)), \end{cases} \quad (14)$$

где $R(x, y) = \sqrt{(x^2 + y^2 - a + b)^2 + 4(a - b)y^2}$. Из этой системы получим следующие формулы:

$$\begin{aligned} \lambda'_{1x} &= \frac{2x(\lambda_1 + b)}{\lambda_1 - \lambda_2}; & \lambda'_{1y} &= \frac{2y(\lambda_1 + a)}{\lambda_1 - \lambda_2}; \\ \lambda'_{2x} &= -\frac{2x(\lambda_2 + b)}{\lambda_1 - \lambda_2}; & \lambda'_{2y} &= -\frac{2y(\lambda_2 + a)}{\lambda_1 - \lambda_2}; \\ \lambda''_{1xx} &= \frac{2(\lambda_1 + b)}{\lambda_1 - \lambda_2} - \frac{8x^2(\lambda_1 + b)(\lambda_2 + b)}{(\lambda_1 - \lambda_2)^3}; & \lambda''_{1yy} &= \frac{2(\lambda_1 + a)}{\lambda_1 - \lambda_2} - \frac{8y^2(\lambda_1 + a)(\lambda_2 + a)}{(\lambda_1 - \lambda_2)^3}; \\ \lambda''_{2xx} &= -\frac{2(\lambda_2 + b)}{\lambda_1 - \lambda_2} + \frac{8x^2(\lambda_1 + b)(\lambda_2 + b)}{(\lambda_1 - \lambda_2)^3}; & \lambda''_{2yy} &= -\frac{2(\lambda_2 + a)}{\lambda_1 - \lambda_2} + \frac{8y^2(\lambda_1 + a)(\lambda_2 + a)}{(\lambda_1 - \lambda_2)^3}; \\ \lambda''_{1xy} &= \lambda''_{2xy} = -\frac{4xy((\lambda_1 + a)(\lambda_2 + b) + (\lambda_1 + b)(\lambda_2 + a))}{(\lambda_1 - \lambda_2)^3}. \end{aligned}$$

Перепишем уравнение (7) в эллиптических координатах. Получим уравнение вида

$$A_1W_1 + A_2W_2 + A_{11}W_{11} + A_{22}W_{22} + A_{12}W_{12} = 0,$$

где коэффициенты A_{ij} имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} A_1 &= (y^2 - x^2 + a - b)\lambda''_{1xy} + xy(\lambda''_{1xx} - \lambda''_{1yy}) + 3(y\lambda'_{1x} - x\lambda''_{1y}); \\ A_2 &= (y^2 - x^2 + a - b)\lambda''_{2xy} + xy(\lambda''_{2xx} - \lambda''_{2yy}) + 3(y\lambda'_{2x} - x\lambda''_{2y}); \\ A_{11} &= (y^2 - x^2 + a - b)\lambda'_{1x}\lambda'_{1y} + xy((\lambda'_{1x})^2 - (\lambda'_{1y})^2); \\ A_{22} &= (y^2 - x^2 + a - b)\lambda'_{2x}\lambda'_{2y} + xy((\lambda'_{2x})^2 - (\lambda'_{2y})^2); \\ A_{12} &= (y^2 - x^2 + a - b)(\lambda'_{1x}\lambda'_{2y} + \lambda'_{2x}\lambda'_{1y}) + 2xy(\lambda'_{1x}\lambda'_{2x} - \lambda'_{1y}\lambda'_{2y}). \end{aligned}$$

Подставим полученные ранее выражения для частных производных эллиптических координат по декартовым в формулы коэффициентов A_{ij} и получим $A_{11} = A_{22} = 0$, $A_{12} = 4xy(a - b)$, $A_2 = -A_1 = \frac{4xy(a-b)}{\lambda_1 - \lambda_2}$. Таким образом, была доказана равносильность уравнений (12) и (7).

Доказательство того, что функция (13) является решением уравнения (12), состоит в непосредственной подстановке одной формулы в другую. Заметим, что пространство решений вида (13) имеет размерность $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Действительно, свободный коэффициент c_0 многочлена $P(z)$ сокращается сам с собой в формуле (13). Слагаемое c_1z многочлена $P(z)$ изменяет потенциал W на константу. Следовательно, многочлен P определен с точностью до своей линейной части $c_1z + c_0$, а оставшиеся его $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ коэффициентов $c_2, \dots, c_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}$ являются координатами в пространстве решений.

Докажем, что функция $\frac{\lambda_1^{(m+1)} - \lambda_2^{(m+1)}}{\lambda_1 - \lambda_2}$ является многочленом степени $2m$ в декартовых координатах. Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_1^{(m+1)} - \lambda_2^{(m+1)}}{\lambda_1 - \lambda_2} &= \sum_{i=0}^m \lambda_1^i \lambda_2^{m-i} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^m \lambda_1^i \lambda_2^{m-i} + \lambda_1^{m-i} \lambda_2^i, \\ &\lambda_1^k \lambda_2^{k+l} + \lambda_1^{k+l} \lambda_2^k = (\lambda_1 \lambda_2)^k (\lambda_1^l + \lambda_2^l). \end{aligned}$$

Из формул (14) несложно заметить, что функция $\lambda_1 \lambda_2$ является многочленом второй степени, а функция $\lambda_1^l + \lambda_2^l$ является многочленом степени $2l$ для любого l . Следовательно, функция вида (13) является многочленом степени n в декартовых координатах. Таким образом, пространство решений вида (13) является подпространством пространства решений вида (8). Согласно лемме 1 эти два подпространства совпадают в силу размерности.

Лемма доказана. \square

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Заметим, что функция (13) является решением уравнения (12) даже в общем случае $P \in C^\infty(\mathbb{R})$ (также проверяется непосредственной подстановкой). Это дает еще больший класс интегрируемых бильярдов с потенциалом, который будет рассмотрен в будущих работах.

В дальнейшем для определенности положим $c_0 = 0$ и $c_1 = 0$.

ТЕОРЕМА 2. Следующая функция является первым интегралом эллиптического бильярда с потенциалом $W = \frac{P(\lambda_1) - P(\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2}$:

$$F = -H\lambda_1 + 2(a + \lambda_1)(b + \lambda_1)\mu_1^2 + P(\lambda_1) \quad (15)$$

Интегралы H и F находятся в инволюции и функционально независимы почти всюду. Функция F связана с первым интегралом G из утверждения 1 соотношением $F = -\frac{1}{2}G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем, что функция F сохраняется вдоль траекторий между ударами о границу бильярда. Вычислим значение \dot{F}

$$\dot{F} = -H\dot{\lambda}_1 + 2\dot{\lambda}_1(b + \lambda_1)\mu_1^2 + 2\dot{\lambda}_1(a + \lambda_1)\mu_1^2 + 4(a + \lambda_1)(b + \lambda_1)\mu_1\dot{\mu}_1 + P'(\lambda_1)\dot{\lambda}_1$$

Подставим значения $\dot{\lambda}_1$ и $\dot{\mu}_1$ из уравнений Гамильтона

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_i = \frac{\partial H}{\partial \mu_i}, \\ \dot{\mu}_i = -\frac{\partial H}{\partial \lambda_i} \end{cases} \quad (16)$$

Можно убедиться, что после подстановки получим тождественный ноль. А значит, $F = const$ вдоль траекторий между отражениями.

Теперь докажем, что функция F сохраняется при отражении от стенки бильярда. Заметим, что при отражении значение интеграла H и координаты λ_1 не меняются. Следовательно, достаточно проверить лишь неизменность величины μ_1^2 . Отметим, что закон абсолютно упругого отражения от софокусной квадрики в эллиптических координатах можно записать следующим образом: если точка отражается от гиперболы, то вектор скорости изменится по правилу $(\lambda_1, \lambda_2) \rightarrow (-\lambda_1, \lambda_2)$, а если точка отражается от эллипса, то вектор скорости изменится по правилу $(\lambda_1, \lambda_2) \rightarrow (\lambda_1, -\lambda_2)$. Из уравнений Гамильтона (16) вытекает следующая формула:

$$\dot{\lambda}_1 = \frac{4(a + \lambda_1)(b + \lambda_1)}{\lambda_1 - \lambda_2} \mu_1. \quad (17)$$

Следовательно, вектор импульса (μ_1, μ_2) меняется при отражении аналогично вектору скорости, и значение μ_1^2 остается неизменным.

То, что первые интегралы H и F находятся в инволюции и функционально независимы почти всюду и то, что интеграл F имеет вид $-\frac{1}{2}G$, проверяются непосредственно. Опустим соответствующие выкладки.

Теорема доказана. \square

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Определим две следующие функции:

$$H_1 = \frac{2(a + \lambda_1)(b + \lambda_1) + P(\lambda_1)}{\lambda_1 - \lambda_2} \mu_1^2 \quad (18)$$

$$H_2 = \frac{2(a + \lambda_2)(b + \lambda_2) + P(\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2} \mu_2^2. \quad (19)$$

Тогда первые интегралы запишутся в виде $H = H_1 - H_2$, $F = \lambda_1 H_2 - \lambda_2 H_1$. При этом вклад потенциала в интеграл G равен $g = 2 \frac{\lambda_2 P(\lambda_1) - \lambda_1 P(\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2}$ и тоже является многочленом от декартовых переменных x и y , причем каждый его моном имеет также четную степень по обоим переменным.

Таким образом, было доказано, что бильярд в эллипсе с потенциалом типа (13) (который является многочленом в декартовых координатах) вполне интегрируем по Лиувиллю, при этом дополнительный первый интеграл F задан явно. Проведем топологический анализ такой бильярдной системы, используя язык полных инвариантов Фоменко-Цишанга и бифуркационных диаграмм.

4. Геометрическое разделение переменных. Области возможного движения

Зафиксируем уровень интегралов $H = h$ и $F = f$. Вычислим компоненты вектора скорости материальной точки в зависимости от ее координат. Чтобы это сделать, выразим значение μ_1 из формулы (17), подставим его в формулу (15) и выразим из нее значение λ_1 . Аналогичными рассуждениями можно выразить значение λ_2 , заметив, что

$$F = -H\lambda_2 + 2(a + \lambda_2)(b + \lambda_2)\mu_2^2 + P(\lambda_2).$$

Таким образом, была получена следующая формула:

$$\dot{\lambda}_i = \pm \frac{\sqrt{8}}{\lambda_2 - \lambda_1} \sqrt{V(\lambda_i)(a + \lambda_i)(b + \lambda_i)}, \quad (20)$$

где $V(z) = f + hz - P(z)$ —многочлен степени $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$. В декартовых координатах получим следующее:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{d}{\lambda_2 - \lambda_1} \left((-1)^I \sqrt{V(\lambda_1)(a + \lambda_2)(b + \lambda_1)} + (-1)^J \sqrt{V(\lambda_2)(a + \lambda_1)(b + \lambda_2)} \right) \\ \dot{y} = \frac{d}{\lambda_2 - \lambda_1} \left((-1)^I \sqrt{-V(\lambda_1)(a + \lambda_1)(b + \lambda_2)} + (-1)^J \sqrt{-V(\lambda_2)(a + \lambda_2)(b + \lambda_1)} \right) \end{cases} \quad (21)$$

где $I, J \in \{0, 1\}$, $d = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a-b}}$. В силу того, что $-a \leq \lambda_1 \leq -b$ и $-b \leq \lambda_2$, это условие равносильно следующей системе:

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Координаты материальной точки должны удовлетворять следующей системе неравенств:*

$$\begin{cases} V(\lambda_1) \leq 0 \\ V(\lambda_2) \geq 0. \end{cases} \quad (22)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что все четыре подкоренные выражения в системе (21) должны быть не меньше нуля. Пусть $(a + \lambda_1)(b + \lambda_2) \neq 0$. В силу того, что $-a \leq \lambda_1 \leq -b$ и $-b \leq \lambda_2$, $(a + \lambda_1)(b + \lambda_2) > 0$. Но $V(\lambda_2)(a + \lambda_1)(b + \lambda_2) \geq 0$ и $-V(\lambda_1)(a + \lambda_1)(b + \lambda_2) \geq 0$. Следовательно, неравенства системы (22) выполняются.

Аналогичные рассуждения применим для случая $(a + \lambda_2)(b + \lambda_1) \neq 0$. В случае $(a + \lambda_1)(b + \lambda_2) = 0$ и $(a + \lambda_2)(b + \lambda_1) = 0$ имеем $\lambda_1 = \lambda_2 = -b$, т.е. материальная точка находится в фокусе эллипса. В выражениях из системы (21) появляется неопределенность типа $\frac{0}{0}$. Пусть без ограничения общности $V(-b) > 0$. Тогда при $\lambda_1 = -b$ и $\lambda_2 \rightarrow -b + 0$ значение \dot{y} стремится к $\pm\infty$, что невозможно в силу теоремы о непрерывной зависимости решения задачи Коши от начальных условий. Следовательно $V(\lambda_1) = V(\lambda_2) = V(-b) = 0$, что удовлетворяет системе (22).

Утверждение доказано. \square

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Областью возможного (допустимого) движения уровня интегралов $H = h$ и $F = f$ называется образ соответствующего слоя слоения Лиувилля при проекции $p : M^4 \rightarrow \Omega$ на бильярдный стол. Иными словами, это замкнутая область на бильярде, в которой материальная точка может находиться при фиксированных значениях интегралов h и f .

СЛЕДСТВИЕ 1. Система неравенств (22) вместе с условием $\lambda_2 \leq 0$ (условие того, что движение происходит внутри бильярдного стола) задает область возможного движения уровня интегралов $H = h$ и $F = f$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В качестве начальных условий положим точку (λ_1, λ_2) , удовлетворяющей системе (22), и вектор скорости в этой точке, вычисленный по формулам (21). Согласно определению области возможного движения, точка с координатой (λ_1, λ_2) ей принадлежит. При этом по утверждению 2 траектория движения, определенная этими начальными условиями, полностью лежит в области, определенной системой (22).

Следствие доказано. \square

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Такой подход в случае классического бильярда был использован в [15] для описания его регулярных и критических траекторий. В последствии М. П. Харламовым в [16] был разработан общий подход к изучению динамических систем, допускающие уравнения вида (20). Заметим, что любая область возможного движения ограничена софокусными эллипсами и гиперболами, принадлежащими однопараметрическому семейству (6), причем значениями параметров этих границ являются корни многочлена V или ноль. Иными словами, область возможного движения является объединением прямоугольников в эллиптических координатах. В этом смысле формулу (20) и систему (21) называют формулами геометрического разделения переменных.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Также заметим, что если точка с координатами (λ_1, λ_2) не является фокусом граничного эллипса, то из системы (21) вытекает три возможности: 1) точке (λ_1, λ_2) соответствуют две пары взаимно обратных векторов скорости, если ни λ_1 , ни λ_2 не являются корнями многочлена V ; 2) этой точке соответствует одна пара взаимно обратных векторов скорости, если только одно из значений λ_1 или λ_2 является корнем многочлена V (эти вектора являются касательными к квадрике с параметром, равным той координате λ_i , которая является корнем); 3) точке соответствует единственный нулевой вектор скорости, если оба значения λ_1 и λ_2 являются корнями многочлена V .

Рассмотрим теперь случай $\lambda_1 = \lambda_2 = -b$, т.е. точка с координатами (λ_1, λ_2) является фокусом (без ограничения общности, считаем, что это фокус с координатами $x = \sqrt{a-b}$ и $y = 0$). По утверждению 2 многочлен V имеет вид $V(z) = (z+b)R(z)$, где $R(-b) \geq 0$. Рассмотрим точку в окрестности этого фокуса с координатами $x = \sqrt{a-b} + k \cos \phi$ и $y = k \sin \phi$ при некотором значении ϕ . Согласно формулам (21), пределы значений компонент вектора скорости при $k \rightarrow 0$ имеют следующий вид:

$$\lim_{k \rightarrow 0} \dot{x} = C \cos \phi,$$

$$\lim_{k \rightarrow 0} \dot{y} = C \sin \phi,$$

где $C = \sqrt{2W(-b)}$. Следовательно, фокусам соответствует целая окружность равных по длине векторов скорости при $R(-b) \neq 0$ или один нулевой вектор скорости при $R(-b) = 0$.

Следующая теорема позволяет определить регулярные значения первых интегралов H и F .

ТЕОРЕМА 3. Пусть при фиксированных значениях первых интегралов $H = h$ и $F = f$ каждая компонента связности области возможного движения имеет непустую внутренность, и каждой внутренней точке области возможного движения соответствует четыре вектора скорости. Тогда прообраз этой области при проекции p гомеоморфен объединению нескольких двумерных торов. При этом, каждой односвязной компоненте связности области возможного движения соответствует один тор Лиувилля, а каждой не односвязной (кольцевой) компоненте – два тора. Более того, слоение Лиувилля в окрестности этих торов в изоэнергетическом пространстве $Q^3 = \{x \in M^4 : H(x) = const\}$ устроено тривиально.

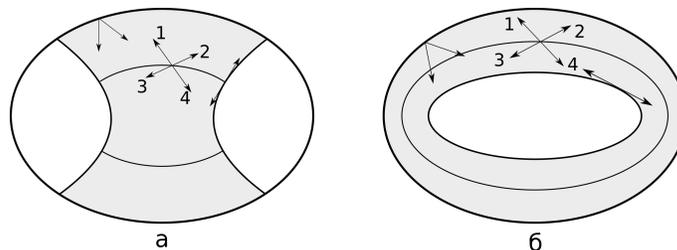


Рис. 2: Регулярные области возможного движения. Стрелками изображены векторы скорости. Внутренним точкам соответствуют четыре вектора, граничным точкам – два. На граничном эллипсе вектора 1-3 и 2-4 склеиваются согласно билиардному закону отражения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из замечания 6 следует, что фокус не принадлежит области возможного движения. Следовательно, согласно утверждению 2 существуют две возможности: 1) каждая компонента связности области возможного движения ограничена двумя дугами софокусных гипербол и дугами эллипсов (рис. 2, а); 2) каждая компонента связности ограничена двумя софокусными эллипсами (рис. 2, б). Рассмотрим случай односвязной области. Разобьем область возможного движения на дуги софокусных эллипсов. Точки этих дуг оснастим векторами скорости согласно формулам (21). По условию теоремы, каждой внутренней точке дуги эллипса соответствуют четыре вектора скорости, обозначенные 1, 2, 3 и 4. Заметим, что на гиперболических границах вектор 1 склеивается с вектором 2, а вектор 3 – с вектором 4. Следовательно, прообраз каждой такой дуги разбиения в Q^3 гомеоморфен двум не пересекающимся окружностям, соответствующим парам векторов 1-2 и 3-4. Таким образом, в прообразе всей компоненты связности области возможного движения лежат два цилиндра, которые склеены друг с другом по границам в силу того, что на эллиптических границах области возможного движения вектор 1 склеивается с вектором 3, а вектор 2 – с вектором 4. При этом ориентация граничных окружностей склейки двух цилиндров одинакова. Следовательно, итоговый прообраз гомеоморфен двумерному тору.

Аналогичные рассуждения проведем в случае не односвязной компоненты связности области возможного движения. Разобьем всю область на софокусные эллипсы и оснастим их точки четырьмя векторами скорости, обозначенными 1, 2, 3 и 4. Прообраз каждого такого эллипса в Q^3 гомеоморфен четырем окружностям, соответствующим векторам скорости. Таким образом, в прообразе всей компоненты связности области возможного движения лежат четыре цилиндра, при этом цилиндры, соответствующие векторам 1 и 3, и цилиндры, соответствующие векторам 2 и 4, склеены друг с другом по своим границам в силу тех же свойств. Следовательно, получили два тора, соответствующие движению по часовой стрелке и против часовой стрелки материальной точки внутри кольцевой области возможного движения.

Заметим, что в силу непрерывности для любого f' , лежащего в достаточно малой окрестности значения f , каждой внутренней точке области возможного движения также соответствуют четыре вектора скорости. Следовательно, слоение Лиувилля в окрестности описанных торов устроено тривиально.

Теорема доказана. \square Таким образом, если при значениях интегралов $H = h$ и $F = f$ область возможного движения удовлетворяет условиям теоремы 3, эти значения являются регулярными.

5. Бифуркационные диаграммы

Согласно следствию 1 изучение областей возможного движения и их бифуркаций (а следовательно, и изучение бифуркаций торов Лиувилля) можно свести к изучению свойств многочлена $V(z)$ на отрезке $[-a, 0]$. А именно, обозначим пять условий на многочлен V :

C1) существует точка $z = e \in (-a, -b)$, которая является точкой экстремума многочлена V , и $V(e) = 0$;

C2) существует точка $z = e \in (-b, 0)$, которая является точкой экстремума многочлена V , и $V(e) = 0$;

C3) $V(0) = 0$, и V возрастает в окрестности нуля;

C4) $V(-a) = 0$;

C5) $V(-b) = 0$.

ЛЕММА 3. *Зафиксируем значение f . Условие теоремы 3 выполнено тогда и только тогда, когда не выполнено ни одно из условий C1 – C5.*

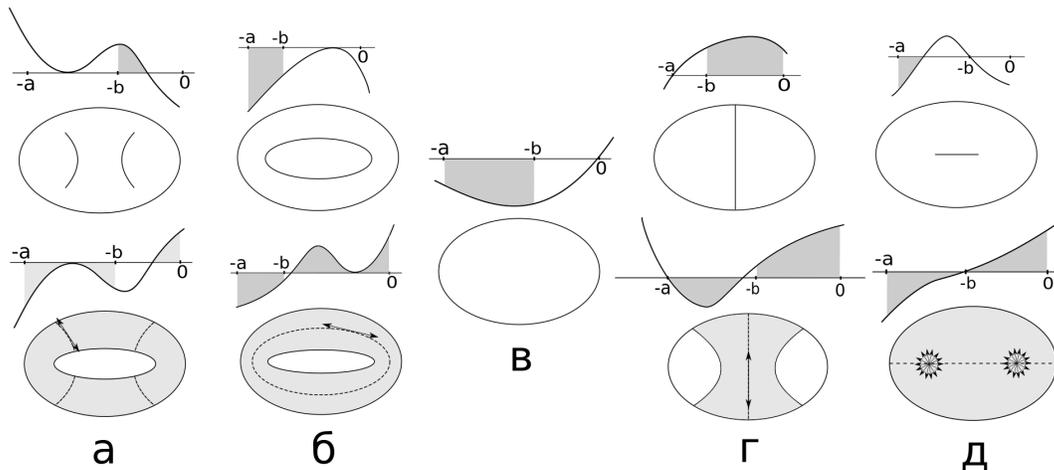


Рис. 3: Примеры критических областей возможного движения. Изображен график многочлена V в координатах $0zV$ и соответствующая область возможного движения. Рисунок а соответствует условию C1, рисунок б – условию C2, рисунок в – условию C3, рисунок г – условию C4, рисунок д – условию C5

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. От противного. Пусть выполнено условие C1, при этом точка $z = e$ является точкой минимума многочлена V . Тогда, по утверждению 2, существует одномерная компонента связности области возможного движения – дуга гиперболы $\lambda_1 = e$. Если же точка $z = e$ является точкой максимума многочлена V , то по замечанию 6 во внутренней области возможного движения существует точка с координатами (e, λ_2) , которой соответствуют лишь два вектора скорости. Получили противоречие (рис. 3, а). Доказательства того, что условия C2 – C4 не выполняются, аналогичны (рис. 3, б, в и г соответственно).

Пусть выполнено условие C5. Если при этом $V'(-b) > 0$, то фокусы принадлежат области возможного движения, при этом им соответствует целая окружность векторов (см. замечание 6). Если $V'(-b) = 0$, то фокусам соответствует один нулевой вектор. Если $V'(-b) < 0$, то по

утверждению 2 существует одномерная компонента связности области возможного движения – отрезок фокальной прямой (рис. 3, д).

Достаточность. Доказательство достаточности повторяет доказательство необходимости, обращенное в противоположную сторону.

Лемма доказана. \square

Построим теперь бифуркационную диаграмму (множество критических значений первых интегралов $H = h$, $F = f$) на плоскости $\mathbb{R}^2(h, f)$ рассматриваемого билиарда. Отметим, что корни многочлена V'' не зависят от значений h и f , а точки экстремумов многочлена V не зависят от значений f (см. формулу (20)). Пусть для некоторого значения $h = h_0$ точка $z = e \in (-a, 0)$ является точкой экстремума многочлена V (то есть $V'(e) = 0$ и $V''(e) \neq 0$). Тогда по теореме о неявной функции существует функция $e(h)$ в окрестности точки h_0 , т.ч. $e(h_0) = e$ и $V'(e(h)) = 0$ (то есть $e(h)$ также является точкой экстремума многочлена V). Функцию $e(h)$ можно продолжить на отрезок $[h_1, h_2]$, где $V''(e(h_1)) = V''(e(h_2)) = 0$ и для любого $h \in (h_1, h_2)$ выполняется следующее: $V''(e(h)) \neq 0$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $e_i(h)$ – построенные выше функции на своих областях определения (экстремумы многочлена $V(z)$ при фиксированном значении h). Тогда бифуркационная диаграмма состоит из дуг следующих кривых (возможно, не всех):

- $d1_i$) $V(e_i(h)) = 0$ при $e_i(h) \in [-a, -b]$;
- $d2_i$) $V(e_i(h)) = 0$ при $e_i(h) \in [-b, 0]$;
- $d3$) $f = 0$ при $h \geq 0$;
- $d4$) $V(-a) = 0$;
- $d5$) $V(-b) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем значение h и f . Заметим, что принадлежность точки (h, f) дуге $d1_i$ эквивалентно выполнению условия $C1$, принадлежности дуге $d2_i$ эквивалентно условию $C2$, дуге $d3$ – условию $C3$, дуге $d4$ – условию $C4$, и дуге $d5$ – условию $C5$. Из леммы 3 и теоремы 3 следует, что точки образа отображения момента $\mathcal{F} : M^4 \rightarrow \mathbb{R}^2(h, f)$, не лежащие на перечисленных дугах, являются регулярными (им соответствует объединение торов в изоэнергетическом пространстве Q^3 , причем слоение Лиувилля в окрестности этих торов устроено тривиально).

Пусть точка (h, f) принадлежит одной из дуг $d1_i$. Следовательно, существует точка на билиарде с координатами $\lambda_1 = e_i$ и $\lambda_2 \neq -b$, для которой $P(\lambda_1) = f + h\lambda_1$, $P'(\lambda_1) = h$. Кроме того, согласно формулам (20) и (17) получим $\mu_1 = 0$. С учетом этого, вычислим полные дифференциалы первых интегралов H и F в точке (λ_1, λ_2) :

$$dH = -\frac{4(a + \lambda_2)(b + \lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2} \mu_2 d\mu_2 + \frac{h}{\lambda_1 - \lambda_2} d\lambda_2$$

$$dF = -\lambda_1 dH.$$

Следовательно, в точке (λ_1, λ_2) ранг матрицы Якоби отображения момента \mathcal{F} падает, т.е. точка (h, f) является особой, а дуга $d1_i$ принадлежит бифуркационной диаграмме. Аналогично можно показать, что дуга $d2_i$ также принадлежит бифуркационной диаграмме.

Рассмотрим теперь точку (h, f) на дуге $d4$. Согласно замечанию 6 на оси Oy найдется точка с координатами $\lambda_1 = -a$ и $\lambda_2 \neq -b$, в которой $p_x = 0$. Вычислим полные дифференциалы первых интегралов H и $G = -2F$:

$$dH = p_y dp_y + W'_y dy$$

$$dG = \frac{2}{a} p_y dp_y + g'_y dy.$$

Напомним, что функции W и g являются многочленами от декартовых координат, при этом их мономы имеют четную степень по обоим переменным. Следовательно $W'_y(0, y) = (W(0, y))'_y$ и $g'_y(0, y) = (g(0, y))'_y$. Из формул на функции W и g , приведенных в лемме 2 и замечании к теореме 2, получим следующее:

$$W(0, y) = \sum_{i=2}^{n/2} c_i \sum_{k=0}^i (-a)^{i-k} (y^2 - b)^k$$

$$g(0, y) = -2 \sum_{i=2}^{n/2} c_i \sum_{k=1}^i (-a)^{i-k-1} (y^2 - b)^k,$$

где c_i – коэффициенты многочлена P . Таким образом, несложно заметить, что $g'_y = \frac{2}{a} W'_y$. Следовательно, в точке (λ_1, λ_2) ранг матрицы Якоби отображения момента \mathcal{F} падает, т.е. точка (h, f) является особой, а дуга $d4$ принадлежит бифуркационной диаграмме. Аналогично можно показать, что дуга $d5$ также принадлежит бифуркационной диаграмме.

Наконец, рассмотрим дугу $d3$. В отличие от предыдущих случаев, на бильярде нет точек падения ранга матрицы Якоби отображения момента \mathcal{F} . Перестройка торов Лиувилля, соответствующая точке (h, f) этой дуги, происходит в силу негладкой природы бильярда на его границе. Более точно, в следующем разделе будет показано, что точкам дуги $d3$ соответствуют несколько минимальных 3-атомов A , образы критической окружности которых при проекции на бильярд являются дугами граничного эллипса (рис. 3, в).

Теорема доказана. \square

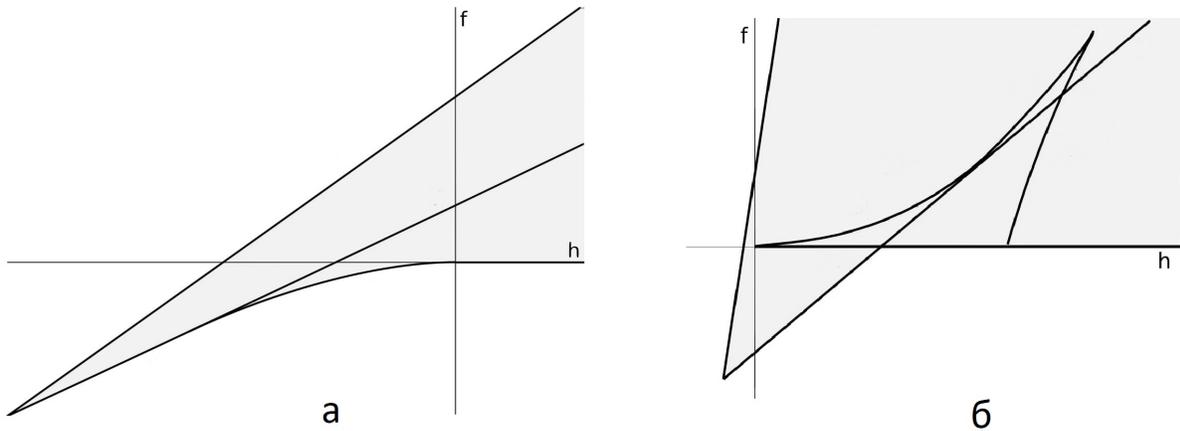


Рис. 4: Примеры бифуркационных диаграмм. На рис. а изображен случай (гуковского) потенциала второй степени, на рис. б – случай потенциала четвертой степени.

СЛЕДСТВИЕ 2. Регулярными областями возможного движения (т.е. образами торов Лиувилля при проекции p на бильярд) являются только области, описанные в теореме 3.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Из неравенств (21) следует, что если при фиксированных значениях первых интегралов h и f движение не происходит, если выполнено одно из двух условий: $V(z) > 0$ для любого $z \in [-a, -b]$; $V(z) < 0$ для любого $z \in [-b, 0]$. Следовательно, образ отображения момента на каждом уровне гамильтониана $H = h$ ограничен двумя кривыми: 1) кривой $d1_i$, если соответствующая ей точка $z = e_i$ является глобальным минимумом многочлена V на полуинтервале $[-a, -b]$, либо кривой $d4$, если им является точка $z = -a$; 2) кривой $d2_i$, если точка $z = e_i$ является глобальным максимумом многочлена V на отрезке $[-b, 0]$, либо кривой $d3$ или $d5$, если им является точка $z = 0$ или $z = -b$ соответственно.

ЗАМЕЧАНИЕ 8 (Вырожденные орбиты и точки ранга 0.). *Найдем теперь наклон дуг $d1_i$ и $d2_i$:*

$$0 = (V(e_i(h)))'_h = f'_h + e_i(h) + e'_i(h)V'(e_i) = f'_h + e_i(h).$$

Таким образом, $f'_h = -e_i(h)$, при этом $e_i(h) \in [-a, 0]$. Следовательно, все дуги $d1_i$ и $d2_i$ монотонно возрастают. Если две дуги $d1_i$ и $d1_j$ (или $d2_i$ и $d2_j$) касаются при некотором значении h_0 , то $e_i(h_0) = e_j(h_0) =: e$. Таким образом, многочлен $V'(z)$ имеет кратный корень $z = e$, и следовательно $V''(e) = 0$. Иными словами, обе функции $e_i(h)$ и $e_j(h)$ определены либо при $h \leq h_0$, либо при $h \geq h_0$, а точка касания является “ключом” (рис. 5, а). Аналогично, точка касания дуг $d2_i$ и $d3$ образует “ключ” (рис. 5, б).

Если дуга $d1_i$ касается дуги da при некотором значении h_0 , то $e_i(h_0) = -a$. Следовательно, функция $e_i(h)$ определена либо при $h \leq h_0$, либо при $h \geq h_0$ (рис. 5, в). При значении h , для которого $e_i(h) = -b$, дуга $d1_i$ переходит в дугу $d2_i$, а точка касания с дугой $d5$ изображена на рис. 5, г. Таким образом, были найдены все точки бифуркационной диаграммы, отвечающие вырожденным орбитам потоков интегралов $sgrad(H)$ и $sgrad(F)$.

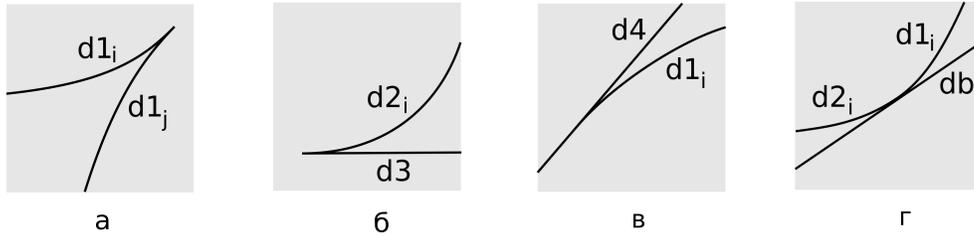


Рис. 5: Образ отображения момента \mathcal{F} в окрестности точки касания дуг бифуркационной диаграммы

Рассмотрим теперь точки пересечения дуг $d1_i$ и $d2_j$ при $i \neq j$. Соответствующие точки $z = e_i(h)$ и $z = e_j(h)$ являются двумя разными корнями многочлена V и одновременно его экстремумами, при этом $e_i(h) \in (-a, -b)$ и $e_j(h) \in (-b, 0)$. Согласно замечанию 6, точке с координатами $\lambda_1 = e_i$ и $\lambda_2 = e_j$ соответствует нулевой вектор скорости. Таким образом, используя формулы (18) и (19), а также вид многочлена $V(z) = f + hz - P(z)$, получим следующие формулы:

$$dH_1 = \frac{f + h\lambda_1}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}(d\lambda_2 - d\lambda_1) + \frac{h}{\lambda_1 - \lambda_2}d\lambda_1$$

$$dH_2 = \frac{f + h\lambda_2}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}(d\lambda_2 - d\lambda_1) + \frac{h}{\lambda_1 - \lambda_2}d\lambda_2$$

Подставляя полученные выражения в формулы $dH = dH_1 - dH_2$, $dF = d(\lambda_1 H_2 - \lambda_2 H_1)$, получим $dF = dH = 0$. Следовательно, точка (h, f) пересечения дуг $d1_i$ и $d2_j$ является точкой ранга 0. Аналогично, точки пересечения дуги $d1_i$ с дугой $d3$ или $d5$, точки пересечения дуги $d2_i$ с дугой $d4$ или $d5$, а также точки пересечения дуги $d5$ с дугой $d3$ или $d4$ являются точками ранга 0.

Оставим пока вне рассмотрения вопросы о классификации слоений Лиувилля в окрестности слоев, содержащих описанные вырожденные орбиты и невырожденные точки ранга 0 нашей системы. Приведем лишь несколько примеров. А именно, в следующем разделе будет показано, что существует конфигурация многочлена V , для которого появляется вырожденная особенность, изображенная на рис. 5, а, причем дуге $d1_j$ соответствует атом A , а дуге $d1_i$ – атом B . Круговая молекула в этом случае имеет вид, изображенный на рис. 6, а, и такая вырожденная особенность является параболической (рис. 6, б). Или же в случае, изображенном на рис. 5, в, существует конфигурация многочлена V , при которой дуге $d1_i$ соответствует

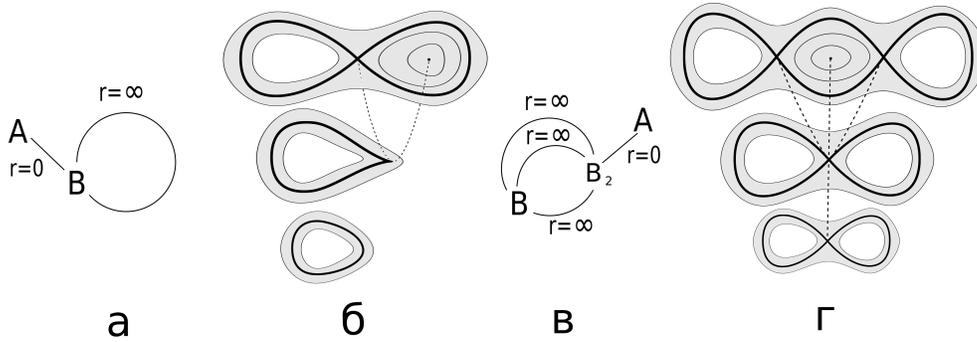


Рис. 6: Примеры круговых молекул и бифуркаций вырожденных особенностей.

атом B_2 , дуге $d4$ до точки касания соответствует атом B , а после нее – атом A . Круговая молекула в этом случае имеет вид, изображенный на рис. 6, в, а такая вырожденная особенность является “вилкой” (рис. 6, г).

Также, в дальнейшем будем рассматривать только те значения гамильтониана h_0 , для которых на соответствующей вертикальной прямой $h = h_0$ в плоскости $0hf$ нет точек касания дуг бифуркационной диаграммы и точек пересечения ранга 0. В частности это означает, что многочлен V не имеет кратных корней. При этом трехмерная поверхность уровня гамильтониана $\{H = h_0\}$ является невырожденным трехмерным многообразием.

6. Бифуркации областей возможного движения. 3-атомы

Следующие три леммы описывают всевозможные перестройки регулярных областей возможного движения и, как следствие, 3-атомы.

ЛЕММА 4. *Зафиксируем значение интегралов $H = h$ и $F = f$, причем точка (h, f) не является вырожденной или ранга 0. Пусть эта точка лежит на кривой $d1_i$, $d4$ или их пересечении. Тогда такому значению интеграла F соответствуют несколько седловых 3-атомов C_{2k} , B_k или максимальных атомов A в изоэнергетическом многообразии $Q^3 = \{x \in M^4 : H(x) = h\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из предположения того, что точка (h, f) не является вырожденной, следует, что она не принадлежит дугам $d2_i$, $d3$ и $d5$. Следовательно, фокусы граничного эллипса не лежат в области возможного движения. Пусть точка (h, f) лежит на пересечении дуг $d1_i$, которым соответствуют различные точки экстремумов e_i многочлена V . Тогда для этой точки выполнено условие $C1$, при этом не выполнены $C2$, $C3$ и $C5$. Согласно замечанию 6, каждой внутренней точке области возможного движения соответствуют четыре вектора скорости, кроме точек дуг гипербол $\lambda_1 = e_i$, которым соответствуют два вектора скорости. Если точка (h, f) также лежит на дуге $d4$, для нее выполнено условие $C4$, и внутренним точкам области возможного движения, лежащим на вертикальной оси $0y$, также соответствуют два вектора скорости.

Пусть в точке $z = e_{i_1} =: e$ достигается локальный минимум многочлена $V(z)$. При $F \rightarrow f - 0$ область возможного движения удовлетворяет условию теоремы 3 и имеет компоненты связности, ограниченные двумя софокусными гиперболами с параметрами $\lambda \rightarrow e - 0$ и $\lambda \rightarrow e + 0$ соответственно (рис. 7, а). Таким образом, в пределе соответствующие компоненты связности области возможного движения становятся одномерными (стягиваются на дуги гиперболы с параметром $\lambda = e$), а прообраз каждой такой компоненты в Q^3 гомеоморфен окружности. Таким образом, слоение Лиувилля в окрестности этой окружности устроено как 3-атом A . Аналогично, если в точке $z = -a$ многочлен $V(z)$ обращается в ноль, при этом в окрестности

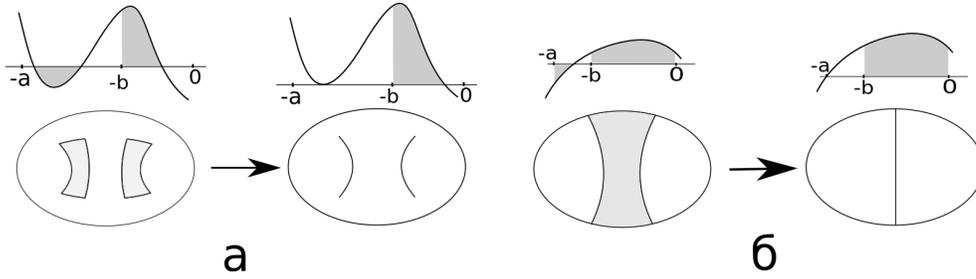


Рис. 7: Перестройки областей возможного движения, соответствующие максимальному атому A . Изображены графики многочлена $V(z)$ на отрезке $[-a, 0]$ и их движение при возрастании значения f , а также соответствующие им области возможного движения.

этого корня он возрастает, соответствующая компонента связности области возможного движения становится одномерной (отрезком оси Oy), а окрестность прообраза этой компоненты в Q^3 гомеоморфна 3-атому A (рис. 7, б).

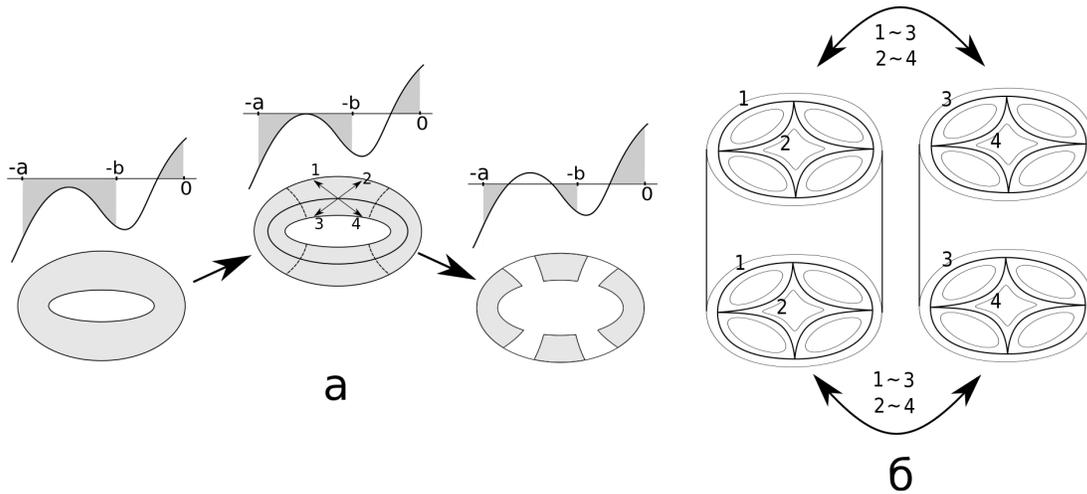


Рис. 8: Перестройка областей возможного движения, соответствующая 3-атому C_4 . На рис. а изображен график многочлена $V(z)$ на отрезке $[-a, 0]$ и соответствующие ему области возможного движения. На рис. б изображен прообраз этих областей в Q^3 , при этом цифрами 1-4 обозначены точки, соответствующие векторам скорости, а двусторонние стрелки обозначают склейки границ “цилиндров”.

Предположим, что в k точках $z = e_i$ многочлен V достигает свои локальные максимумы. Пусть также он не имеет других корней на полуинтервале $[-a, -b)$ (в частности, из этого следует, что точка (h, f) не лежит на дуге $d4$). Согласно следствию 1 областью возможного движения для значений h и f является объединение неодносвязных (кольцевых) областей. Рассмотрим одну из компонент связности. Как и в доказательстве теоремы 3, разобьем ее софокусные эллипсы и оснастим их точки векторами скорости в соответствии с системой (21). Заметим, что прообраз каждого такого эллипса в Q^3 состоит из двух пар окружностей, соответствующих векторам скорости 1-2 и 3-4, и пересекающихся в $4k$ точках согласно тому, что вектора 1 и 2, а также вектора 3 и 4 склеиваются в точках гипербол $\lambda_1 = e_i$. Таким образом, получили два особых слоя 2-атома C_{4k} . Умножим эти два особых слоя на отрезок (дугу софокусной гиперболы) и склеим полученные “цилиндры” друг с другом по границам согласно тому, что вектора скорости 1-3 и 2-4 отождествляются на эллиптической границе области возможного движения (рис. 7, б). Таким образом, получили особый слой 3-атома C_{4k} ,

который и является прообразом рассматриваемой компоненты связности области возможного движения. При этом аналогичными рассуждениями несложно показать, что слоение Лиувилля в окрестности этого слоя устроено как 3-атом C_{4k} . Заметим, что если $z = -a$ является корнем многочлена V (т.е. точка (h, f) лежит на дуге $d4$), при этом он убывает в окрестности этого корня, то область возможного движения также является неодносвязной, при этом прообраз каждой компоненты связности гомеоморфен особому слою 3-атома C_{4k+2} .

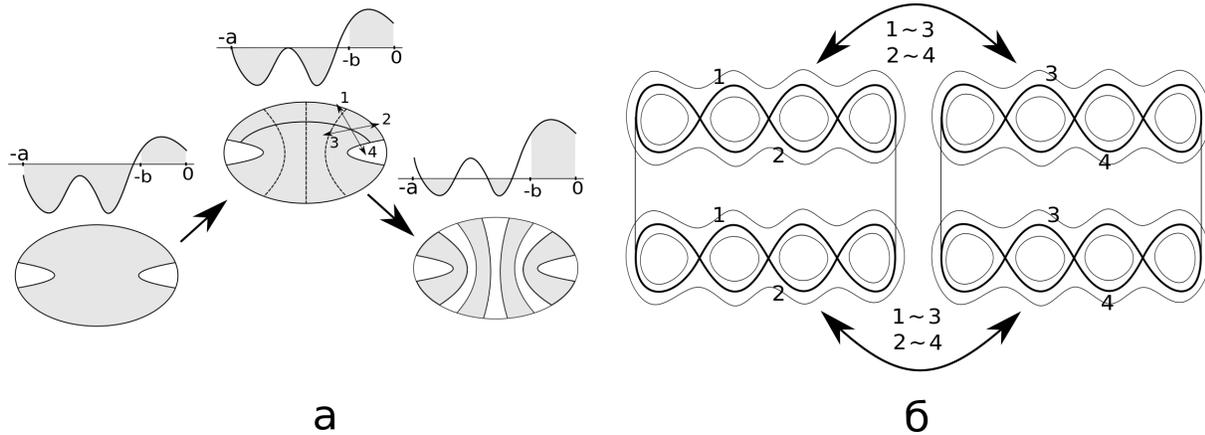


Рис. 9: Перестройка областей возможного движения, соответствующая 3-атому B_3 . На рис. а изображен график многочлена $V(z)$ на отрезке $[-a, 0]$ и соответствующие ему области возможного движения. На рис. б изображен прообраз этих областей в Q^3 , при этом цифрами 1-4 обозначены точки, соответствующие векторам скорости, а двусторонние стрелки обозначают склейки границ “цилиндров”.

Предположим теперь, что на интервале $(-a, -b)$ есть другие корни многочлена V . В этом случае область возможного движения состоит из односвязных компонент, при этом, как и ранее, всем внутренним точкам этой области соответствуют четыре вектора скорости, кроме точек, лежащих на гиперболах $\lambda_1 = e_i$ и (возможно) оси Oy , которым соответствуют только два вектора скорости (рис. 9, а). Заметим, что компоненты связности, которые не содержат точки этих гипербол, удовлетворяют теореме 3. Следовательно, прообразы таких компонент в Q^3 гомеоморфны двумерным торами. Рассмотрим одну из компонент связности, содержащую k критических дуг. Разобьем ее на дуги софокусных эллипсов и оснастим их точки векторами скорости. Заметим, что в прообразе каждой такой дуги лежат две окружности, соответствующие векторам скорости 1-2 и 3-4, стянутые по своим k хордам (особые слои 2-атома B_k). Следовательно, проведя рассуждения, аналогичные предыдущему случаю, прообраз всей области возможного движения гомеоморфен особому слою 3-атома B_k , и более того слоение Лиувилля в окрестности этого особого слоя устроено как 3-атом B_k (рис. 9, б).

Лемма доказана. \square

ЛЕММА 5. *Зафиксируем значение интегралов $H = h$ и $F = f$, причем точка (h, f) не является вырожденной или ранга 0. Пусть эта точка лежит на кривой $d2_i$, $d3$ или их пересечении. Тогда такому значению интеграла F соответствуют несколько седловых 3-атомов B_k или минимальных атомов A в изоэнергетическом многообразии $Q^3 = \{x \in M^4 : H(x) = h\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в прошлой лемме, из предположения того, что точка (h, f) не является вырожденной, следует, что фокусы граничного эллипса не лежат в области возможного движения. Пусть точка (h, f) лежит на пересечении дуг $d2_i$, которым соответствуют различные точки экстремумов e_i многочлена V . Тогда для этой точки выполнено условие $C2$, при

этом не выполнены $C1$, $C4$ и $C5$. Согласно замечанию 6, каждой внутренней точке области возможного движения соответствуют четыре вектора скорости, кроме точек дуг эллипсов $\lambda_2 = e_i$, которым соответствуют два вектора скорости. Если точка (h, f) также лежит на дуге $d3$, для нее выполнено условие $C3$.

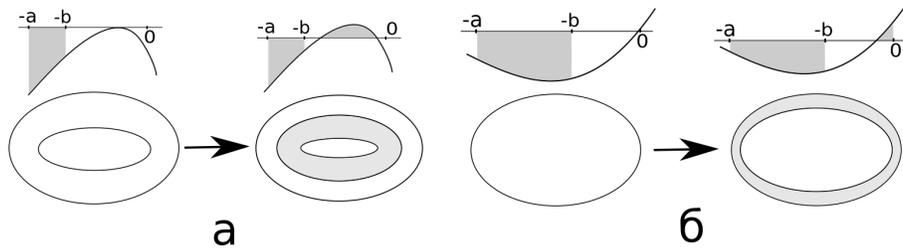


Рис. 10: Перестройки областей возможного движения, соответствующие минимальному атому A . Изображен график многочлена $V(z)$ на отрезке $[-a, 0]$ и соответствующие ему области возможного движения.

Пусть в точке $z = e_{i_1} =: e$ достигается локальный максимум многочлена $V(z)$. Аналогично соответствующему случаю из предыдущей леммы можно показать, что прообраз области возможного движения при $F \rightarrow f + 0$ является объединением двумерных торов (рис. 10, а). В пределе область возможного движения становится одномерной, а в ее прообразе лежат несколько критических окружностей. Таким образом, получили 3-атом A . Аналогично, если многочлен V в точке $z = 0$ обращается в ноль, при этом он возрастает в окрестности этого корня, область возможного движения при убывании значения интеграла F стягивается на границу биллиарда, чему также соответствует 3-атом A . Отметим, что если многочлен V убывает в окрестности точки $z = 0$, то такая точка (h, f) соответствует тому, что одна из границ области возможного движения вышла на границу биллиарда, при этом не происходит никакой качественной перестройки области возможного движения. Следовательно, такая точка (h, f) является регулярной, а луч $f = 0$ при $h < 0$ не принадлежит бифуркационной диаграмме.

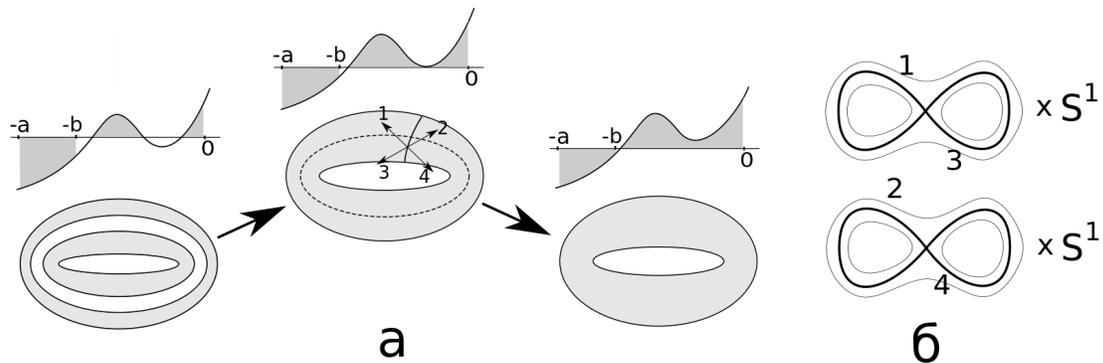


Рис. 11: Перестройка областей возможного движения, соответствующая двум 3-атомам B . На рис. а изображен график многочлена $V(z)$ на отрезке $[-a, 0]$ и соответствующие ему области возможного движения. На рис. б изображен прообраз этих областей в Q^3 .

Пусть теперь в нескольких точках $z = e_i$ многочлен V достигает свои локальные минимумы. Предположим, что $V(z) < 0$ для любого $z \in [-a, -b]$. Таким образом, в силу следствия 1, область возможного движения для значений h и f является объединением неодносвязных (кольцевых) областей. Заметим, что компоненты связности, не содержащие точек эллипсов $\lambda_2 = e_i$, удовлетворяют теореме 3. Прообразы таких компонент в Q^3 гомеоморфны объединению двух торов Лиувилля. Рассмотрим теперь компоненту, содержащую в себе k эллипсов

$\lambda_2 = e_i$. Разобьем ее на дуги софокусных гипербол и оснастим их точки векторами скорости (рис. 11, а). Прообраз такой дуги в Q^3 гомеоморфен двум окружностям, соответствующим векторам скорости 1-3 и 2-4, стянутым по своим k хордам в силу того, что вектора 1 и 3, а также 2 и 4 склеиваются в точках “критических” эллипсов. Получили два особых слоя 2-атома B_k . Следовательно, прообраз всей компоненты связности гомеоморфен этим двум слоям, умноженным на окружность (софокусный эллипс), т.е. двум особым слоям 3-атома B_k (рис. 11, б). Более того, в окрестности этого слоя слоение устроено как 3-атом B_k .

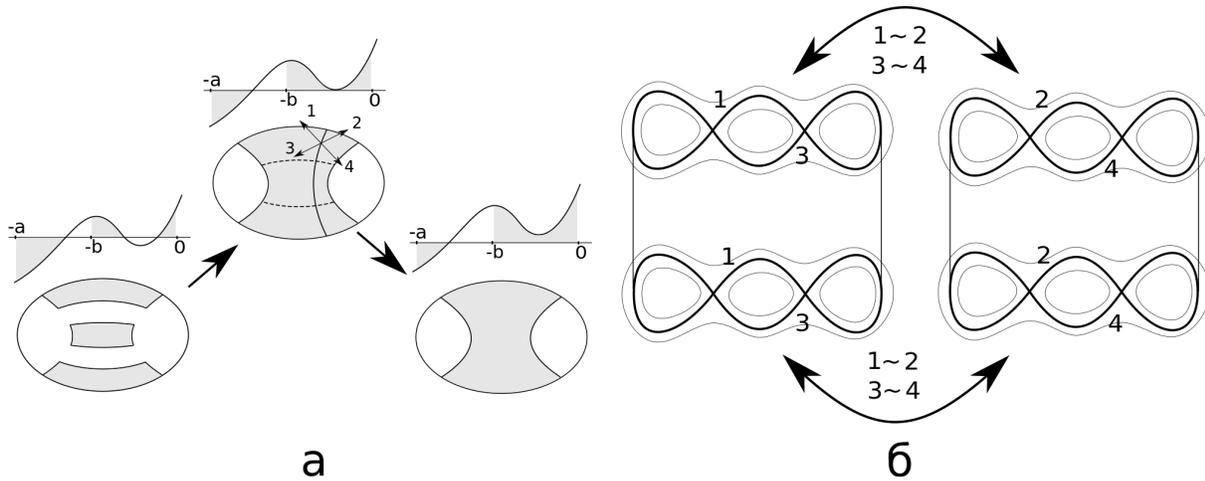


Рис. 12: Перестройка областей возможного движения, соответствующая 3-атому B_2 . На рис. а изображен график многочлена $V(z)$ на отрезке $[-a, 0]$ и соответствующие ему области возможного движения. На рис. б изображен прообраз этих областей в Q^3 , при этом цифрами 1-4 обозначены точки, соответствующие векторам скорости, а двусторонние стрелки обозначают склейки границ “цилиндров”.

Предположим теперь, что на интервале $z \in (-a, -b)$ существуют корни многочлена V , т.е. область возможного движения состоит из односвязных компонент. Опять, прообраз компоненты связности, не содержащей точек эллипсов $\lambda_2 = e_i$, гомеоморфен тору Лиувилля. Рассмотрим компоненту, содержащую k дуг этих эллипсов. Разобьем ее на дуги софокусных гипербол и оснастим их точки векторами скорости (рис. 12, а). Заметим, что как и в аналогичном случае предыдущей леммы прообраз каждой такой дуги в Q^3 гомеоморфен двум особым слоям 2-атома B_k . Умножим эти особые слои на отрезок и склеим полученные “цилиндры” по границам в силу того, что на гиперболических границах вектора 1 склеивается с вектором 2, а вектор 3 – с вектором 4 (рис. 12, б). Таким образом, прообраз рассматриваемой компоненты в Q^3 гомеоморфен особому слою 3-атома B_k , при этом его окрестность также устроена, как 3-атом B_k .

Лемма доказана. \square

ЛЕММА 6. *Зафиксируем значение интегралов $H = h$ и $F = f$, причем точка (h, f) не является вырожденной или ранга 0. Пусть эта точка лежит на кривой $d5$. Если в окрестности точки $z = -b$ многочлен V возрастает, этому критическому значению соответствует несколько 3-атомов S_2, B или два атома A^* в изоэнергетическом многообразии Q^3 . Если в окрестности точки $z = -b$ многочлен V убывает, то ему соответствуют несколько максимальных и минимальных 3-атома A .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно условию на невырожденность и ранг следует, что точка (h, f) не лежит на других дугах бифуркационной диаграммы, кроме дуги $d5$. Согласно замечанию 6, каждой внутренней точке области возможного движения соответствуют четыре вектора

скорости, кроме фокусов, которым соответствуют окружность векторов, и остальных точек фокальной оси Ox , которым соответствуют два вектора скорости.

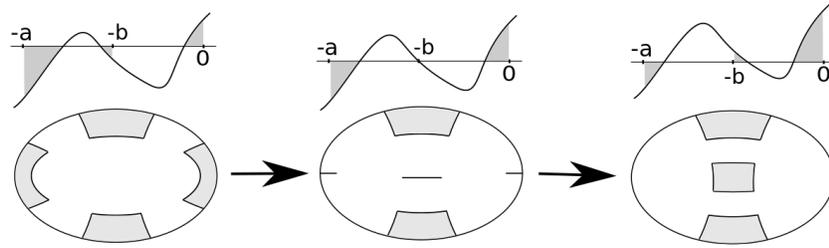


Рис. 13: Перестройка областей возможного движения, соответствующая 3-атомам A . Изображен график многочлена $V(z)$ на отрезке $[-a, 0]$ и соответствующие ему области возможного движения.

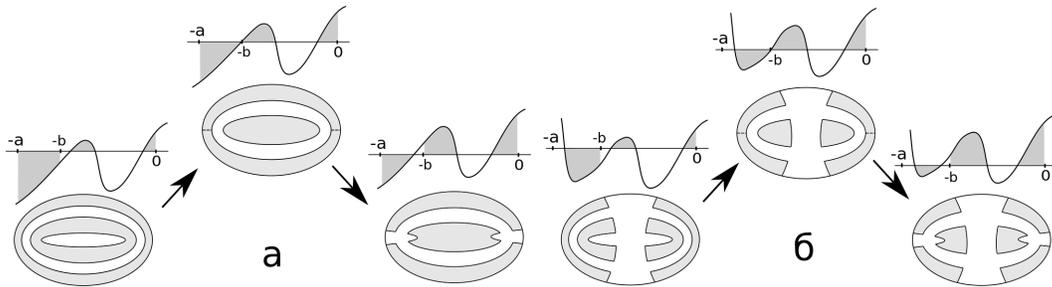


Рис. 14: Перестройка областей возможного движения, дающая 3-атомы C_2 и B .

Пусть в окрестности точки $z = -b$ многочлен V убывает. При $F \rightarrow f - 0$ область возможного движения ограничена дугами одной гиперболы, которая стремится к фокальной оси. В пределе область становится одномерной, а ее прообраз гомеоморфен объединению непересекающихся окружностей. С другой стороны, при $F \rightarrow f + 0$ область возможного движения ограничена дугами эллипса, который также стремится к фокальной оси (рис. 13). В итоге оба случая соответствуют 3-атомам A , при этом первый случай соответствует “исчезновению” торов Лиувилля, а второй – их “появлению”

Пусть теперь в окрестности точки $z = -a$ многочлен V возрастает. Если компонента связности области возможного движения не содержит точек фокальной прямой, она удовлетворяет теореме 3, и ее прообраз в Q^3 гомеоморфен тору. Рассмотрим компоненту связности, которая содержит точки фокальной прямой, но не содержит фокусы. Заметим, что если она содержит точки фокального отрезка $[F_1, F_2]$, такой случай эквивалентен случаю перестройки двух односвязных областей возможного движения в одну односвязную в лемме 5. Следовательно, прообраз такой компоненты в Q^3 гомеоморфен особому слою 3-атома B (рис. 15). Если же она содержит точки лучей $(-\infty, F_1]$ и $[F_2, +\infty)$, такой случай аналогичен случаям перестроек неодносвязных и односвязных областей возможного движения в лемме 4, и прообраз этой компоненты связности гомеоморфен особому слою 3-атома C_2 в неодносвязном случае и B в односвязном (рис. 14).

Предположим, что компонента связности содержит в себе только один фокус. Разобьем область возможного движения на дуги софокусных гипербол и отрезок s , лежащий на фокальной прямой между фокусом и границей биллиарда (рис. 16). Заметим, что прообраз каждой такой дуги гомеоморфен двум “восьмеркам” – особым слоям 2-атома B . Следовательно, прообраз всей области возможного движения без отрезка s гомеоморфен двум таким “восьмеркам”, умноженным на отрезок и склеенным друг с другом по одной из границ полученных “цилиндров” (рис. 19, б). По замечанию 6 фокусу соответствует окружность векторов.

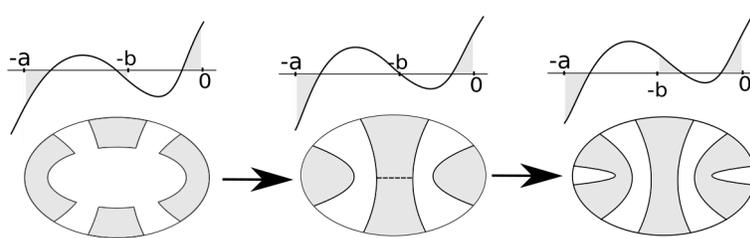


Рис. 15: Перестройка областей возможного движения, соответствующая 3-атому B . Изображен график многочлена $V(z)$ на отрезке $[-a, 0]$ и соответствующие ему области возможного движения.

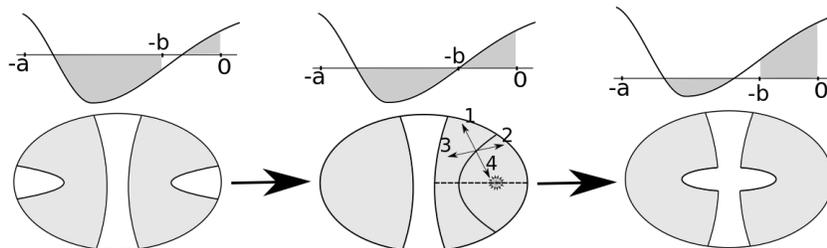


Рис. 16: Перестройка областей возможного движения при условии $C5$. Изображен график многочлена $V(z)$ на отрезке $[-a, 0]$ и соответствующие ему области возможного движения

Следовательно, прообраз отрезка s в Q^3 гомеоморфен окружности вместе со своей хордой, соединяющей две противоположные точки этой окружности (рис. 18). Рассмотрим “восьмер-

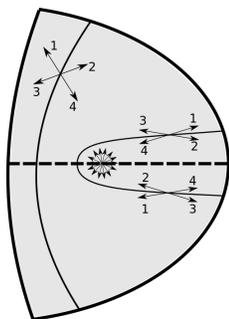


Рис. 17: Область возможного движения, содержащая фокус.

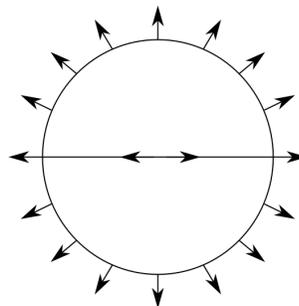


Рис. 18: Прообраз отрезка s в Q^3 .

ку”, соответствующую векторам 2 и 4, образ которой лежит на гиперболе, близкой к отрезку s (рис. 17). Заметим, что при обходе по гиперболе сверху вниз вектор 2 повернется против часовой стрелки, изменив свой угол от нуля до π . При этом вектор 4 повернется против часовой стрелки, изменив свой угол от π до 2π . Следовательно, в окрестности прообраза отрезка s эта “восьмерка” будет иметь вид, изображенный на рис. 19, а. Аналогичные рассуждения проведем для “восьмерки”, соответствующей векторам 1 и 3 (рис. 19, в). Заметим, что в результате склейки границ полученного выше “цилиндра”, изображенной на рис. 19, получим особый слой 3-атома A^* (т.е. особый слой 3-атома B с “перекруткой”). Более того, окрестность этого слоя устроена как 3-атом A^* . Если же область возможного движения содержит два фокуса, то такая “перекрутка” 3-атома B произойдет дважды, и в итоге получим опять 3-атом B .

Лемма доказана. \square

В итоге, были описаны всевозможные 3-атомы, соответствующие нашей системе. Следующая теорема является обобщением полученных результатов.

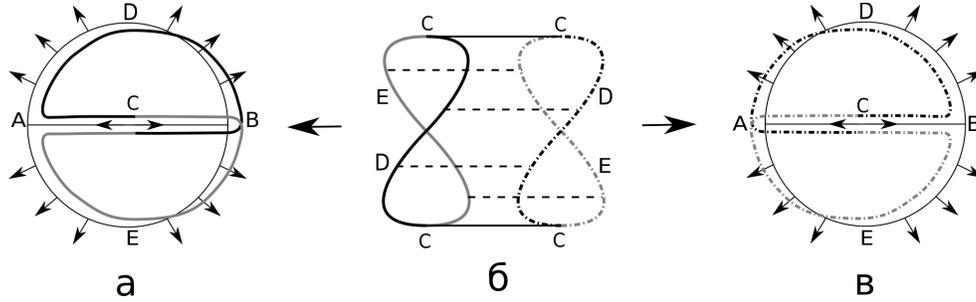


Рис. 19: Склейка границ “цилиндра” по прообразу отрезка s . Оранжевым цветом обозначены точки, соответствующие вектору 1, синим цветом – вектору 2, зеленым – вектору 3 и красным – вектору 4.

ТЕОРЕМА 5 (об атомах). *Существует всего девять типов бифуркаций регулярных областей возможного движения, соответствующих интегрируемому эллиптическому билиарду с полиномиальным потенциалом:*

1) появление неодносвязной (кольцевой) компоненты связности из софокусного эллипса (соответствует двум минимальным \mathcal{I} -атомам A в изоэнергетическом многообразии Q^3);

2) появление односвязной компоненты связности из дуги софокусного эллипса или отрезка фокальной прямой (соответствует минимальному \mathcal{I} -атому A);

3) стягивание односвязной компоненты связности на дугу софокусной гиперболы, либо на отрезок вертикальной оси Oy , либо на отрезок фокальной прямой (соответствует максимальному \mathcal{I} -атому A);

4) слияние k неодносвязных компонент связности в одну неодносвязную компоненту (соответствует двум \mathcal{I} -атомам B_{k-1});

5) разрыв неодносвязной компоненты связности на $2k$ односвязные компоненты (соответствует \mathcal{I} -атому C_{2k});

6) слияние k односвязных компонент связности в одну односвязную (соответствует \mathcal{I} -атому B_{k-1});

7) разрыв односвязной компоненты связности на k односвязных компонент (соответствует \mathcal{I} -атому B_{k-1});

8) перестройка неодносвязной компоненты связности в одну односвязную компоненту через два фокуса (соответствует \mathcal{I} -атому B);

9) перестройка односвязной компоненты связности в одну односвязную компоненту через один фокус (соответствует \mathcal{I} -атому A^*).

7. Грубые молекулы и метки

Зафиксируем уровень гамильтониана $H = h$ и вычислим соответствующую ему грубую молекулу. Напомним, что при вычислении \mathcal{I} -атомов мы следили за изменением многочлена V при локальном изменении значения f . Теперь проследим за его изменением при глобальном возрастании значения f от $-\infty$ до $+\infty$. Когда график многочлена V лежит ниже нуля на отрезке $[-b, 0]$, движения нет. Затем при значении $f = f_{min}$ несколько экстремумов (в количестве m), лежащих справа от точки $-b$, выходят на отрезок $[-a, 0]$. Если при этом график V лежит ниже нуля на отрезке $[-a, -b]$, этому соответствует появление m неодносвязных компонент области возможного движения, или же $2m$ минимальных атомов A согласно теореме 5. Если же график V имеет корни на отрезке $[-a, -b]$, происходит появление $2m(2k + l)$ односвязных компонент, где k – число подотрезков на отрезке $[-a, -b]$, не содержащих точки $-a$ и $-b$, на которых $V < 0$, а l – число таких же подотрезков, но содержащих одну из этих точек. При

дальнейшем росте значения f будем следить за последовательным выходом экстремумов многочлена V и значений $V(-a)$, $V(-b)$ и $V(0)$ на отрезок $[-a, 0]$. Этим выходам соответствуют перестройки области возможного движения, описанные в леммах 4-6 предыдущего раздела. Таким образом, будем строить грубую молекулу снизу, начиная с описанных выше атомов A , и на каждом критическом уровне интеграла f сопоставляя перестройкам области возможного движения атомы согласно теореме 5. При достижении значения $f = f_{max}$ многочлен V становится больше нуля на отрезке $[-a, -b]$, чему соответствует несколько максимальных атомов A , и затем движение снова перестает существовать. На этом заканчивается построение грубой молекулы. Пример вычисления приведен на рис 20.

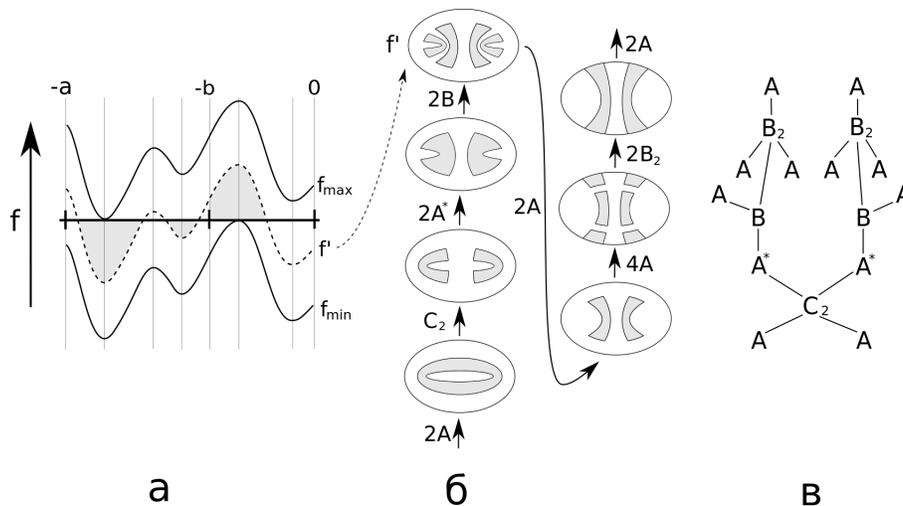


Рис. 20: Вычисление грубой молекулы с помощью графика многочлена V . На рис. а изображено поднятие графика с ростом значения f . На рис. б изображены области возможного движения и их перестройки. На рис. в изображена результирующая грубая молекула.

Таким способом был получен полный список молекул, встречающихся для (гуковского) потенциала второго порядка (работа [12]) и четвертого порядка (работа [13]). Однако, в общем случае возможных грубых молекул, соответствующих потенциалу большого порядка, необозримо много. Поэтому приведем несколько их общих свойств.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Построенная выше грубая молекула удовлетворяет следующим свойствам:

- 1) существует расположение молекулы в плоскости, при котором она является симметричной относительно некоторой оси, причем атомы, переходящие друг в друга под действием этой симметрии, соответствуют одинаковому уровню интеграла F ;
- 2) все атомы вида C_{2k} лежат на некотором одном уровне интеграла F (обозначим его $F = f_C$), причем число k для всех них одинаковое;
- 3) ниже уровня атомов C_{2k} молекула является непересекающимся объединением нескольких симметричных деревьев с корнями в вершине C_{2k} ;
- 4) на фокальном уровне интеграла F , при котором $V(-b) = 0$ (обозначим его $F = f_F$), лежат либо несколько минимаксных атомов A , либо два атома A^* и несколько атомов B_k , либо один атом B и несколько атомов C_{2k} ;
- 5) в общем случае молекула не является деревом, т.е. могут существовать циклы;
- 6) молекула может содержать кратные ребра, причем они могут соединять только атомы C_{2k} с атомами B_k , расположенными не ниже фокального уровня;
- 7) если $V(z_1) < V(-b) < V(z_2)$ для любых $z_1 \in [-a, -b]$ и $z_2 \in (-b, 0]$, молекула является деревом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала пункт 2. Заметим, что если регулярная область возможного движения содержит неодносвязную (кольцевую) компоненту связности, то все ее компоненты также будут кольцевыми (это связано с тем, что при таком условии выполнено неравенство $V(z) < 0$ для любого $z \in [-a, -b]$). Атомы C_{2k} соответствуют разрыву одной такой кольцевой компоненты на $2k$ односвязных компонент по дугам софокусных гипербол, причем такой разрыв одновременно происходит и для всех остальных кольцевых компонент. Из этого и следует пункт 2.

Докажем теперь пункт 3. Согласно предыдущему пункту, все области возможного движения, соответствующие значениям интеграла $F < f_C$ ниже уровня атомов C_{2k} , являются кольцевыми. Следовательно, всю молекулу можно разбить на два изоморфных (одинаковых) подграфа, соответствующих движениям по и против часовой стрелки. При этом каждый атом этих подграфов соответствует слиянию нескольких кольцевых компонент области возможного движения в одну (то есть является атомом B_k согласно теореме 5), что и гарантирует структуру дерева.

Докажем пункт 4. Согласно лемме 6, если многочлен V убывает в окрестности точки $-b$, фокальному уровню $F = f_F$ соответствует несколько минимаксных атомов A . Если же многочлен V возрастает в этой окрестности, обязательно найдутся регулярные компоненты области возможного движения, которые перестраиваются через фокусы. Если область возможного движения ниже фокального уровня состоит из кольцевых компонент, в силу леммы 6 одна из них перестраивается через два фокуса (что соответствует атому B), а все остальные разрываются на две односвязные компоненты (что соответствует атому C_2). Если же компоненты области возможного движения до перестройки являются односвязными, две из них перестраиваются через фокус (что соответствует двум атомам A^*), а оставшиеся либо разрываются, либо сливаются по отрезкам фокальной прямой (что соответствует атому B).

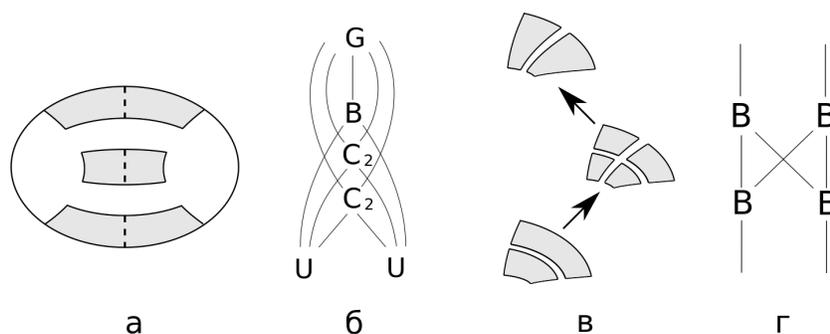


Рис. 21: Иллюстрации к пунктам 1 и 5. Здесь U – некоторое дерево, а G – симметричный граф.

Теперь докажем пункт 1. Согласно тому, что эллиптическая система координат симметрична относительно осей $0x$ и $0y$, а область возможного движения ограничена ее координатными линиями, следует, что эта область симметрична относительно осей $0x$ и $0y$, а также переходит в себя при повороте на угол π . Таким образом, зададим следующую инволюцию τ на вершинах грубой молекулы (атомах): если атом лежит выше уровня атомов C_{2k} , сопоставим ему атом, соответствующий перестройке диаметрально противоположной компоненты области возможного движения; если атом лежит ниже уровня атомов C_{2k} , сопоставим ему его парный атом, соответствующий движению в противоположном направлении, согласно пункту 3; атомы C_{2k} оставим на месте. Заметим, что такая инволюция сопоставляет два атома, лежащие на одном уровне интеграла F , при этом если атом перешел в себя, то это либо C_{2k} , либо он соответствует перестройке компоненты связности области возможного движения, содержащей центр биллиарда, и следовательно единственный на своем уровне (рис. 21, а). Инволюция τ задает

инволюцию ребер грубой молекулы. Также заметим, что если ребро перешло в себя при этой инволюции, оно такое единственное на своем уровне $f_i < F < f_{i+1}$ между двумя соседними критическими уровнями интеграла F . Несложно заметить, что построенная таким образом инволюция порождает необходимую симметрию молекулы в плоскости (пример изображен на рис. 21, б).

Для доказательства пункта 5 приведем пример появления цикла в грубой молекуле. На рис. 21, в, г изображена перестройка области возможного движения и соответствующий ей цикл. Пример перестройки области возможного движения, соответствующей кратному ребру в молекуле, изображен на рис. 22. Рассмотрим теперь два атома R_1 и R_2 , соединенные кратными ребрами. Если атом R_1 принадлежит серии B_k , он соответствует разрыву некоторой односвязной компоненты области возможного движения по дугам гипербол. В результате этого разрыва получим $k+1$ компонент связности, ограниченных дугами одних и тех же софокусных эллипсов. Следовательно, эти компоненты не могут сливаться друг с другом по своим эллиптическим границам (т.к. эти границы должны принадлежать разным эллипсам). Иными словами, такой атом R_1 не может быть соединен кратными ребрами. Если же атом R_1 принадлежит серии C_{2k} , он соответствует разрыву не односвязной компоненты области возможного движения на $2k$ односвязных компонент. Рассмотрим две из них, образующих кратные ребра. Существует две возможности: 1. эти две компоненты слились в одну вдоль фокального отрезка; 2. они слились с некоторой третьей компонентой, содержащей точки фокального отрезка. В первом случае атом R_2 является атомом B , лежащем на фокальном уровне $F = f_F$, во втором он лежит выше фокального уровня, т.к. только для таких значений интеграла F область возможного движения может содержать точки фокального отрезка. Таким образом, был доказан пункт 6.

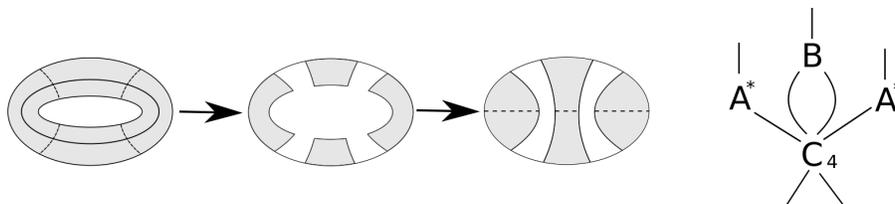


Рис. 22: Пример появления кратных ребер

Пункт 7 почти очевиден. Действительно, ниже фокального уровня $F = f_F$ молекула является деревом, согласно пункту 3. Выше этого уровня каждый атом является “разделяющим” атомом серии B_k , т.е. соответствует разделению области возможного движения по дугам софокусных гипербол. Граф, состоящий из таких разделяющих вершин, заведомо является деревом.

Утверждение доказано. \square

Теперь вычислим метки, тем самым вычислив полные инварианты Фоменко-Цишанга. Для этого разобьем атомы на шесть групп в соответствии с теоремой 5:

- 1) минимальные 3-атомы A из групп 1, 2;
- 2) максимальные 3-атомы A из группы 3;
- 3) седловые 3-атомы из групп 4, 6, соответствующие бифуркациям области возможного движения типа “слияние”;
- 4) седловые 3-атомы из групп 5, 7, соответствующие бифуркациям типа “разрыв”;
- 5) 3-атомы A^* из группы 8;
- 6) 3-атом B из группы 9, соответствующий бифуркации через два фокуса;

ТЕОРЕМА 6 (о метках). *Рассмотрим интегрируемый плоский бильярд, ограниченный эллипсом, в поле полиномиального потенциала. Зафиксируем ориентацию изоэнергетического*

многообразия Q^3 таким образом, чтобы все циклы λ на минимальных атомах A стали согласованными. Таблица на рис. 23 полностью описывает метки, соответствующие ребрам построенной выше грубой молекулы.

Верхний атом / Нижний атом	2	3	4	5	6
1	$r=0 \quad \varepsilon=1$	$r=0 \quad \varepsilon=1$ $\Theta=0$	$r=\infty \quad \varepsilon=1$	$r=0 \quad \varepsilon=1$ $\Theta'=0$	$r=0 \quad \varepsilon=1$ $\Theta'=0$
3	$r=\infty \quad \varepsilon=1$	$r=\infty \quad \varepsilon=1$ $\Theta=0$	$r=0 \quad \varepsilon=-1$ $\Theta=0$	$r=0.5 \quad \varepsilon=-1$ $\Theta=-1 \quad \Theta'=-1$	$r=0.5 \quad \varepsilon=-1$ $\Theta=-1 \quad \Theta'=-1$
4	$r=0 \quad \varepsilon=1$ $\Theta=0$	$r=0 \quad \varepsilon=1$ $\Theta=0$	$r=\infty \quad \varepsilon=1$ $\Theta=0$	$r=0 \quad \varepsilon=1$ $\Theta=2 \quad \Theta'=0$	—————
5	$r=0 \quad \varepsilon=1$ $\Theta'=0$	$r=0 \quad \varepsilon=1$ $\Theta=2 \quad \Theta'=0$	$r=0.5 \quad \varepsilon=-1$ $\Theta=-1 \quad \Theta'=-1$	—————	—————
6	$r=0 \quad \varepsilon=1$ $\Theta'=1$	$r=0 \quad \varepsilon=1$ $\Theta=1 \quad \Theta'=1$	$r=0 \quad \varepsilon=-1$ $\Theta=-1 \quad \Theta'=0$	—————	—————

Рис. 23: Таблица меток. Ячейка таблицы соответствует ребру, соединяющего атомы из обозначенных групп, причем атом из первого столбца всегда стоит на уровень ниже атома из первой строки в грубой молекуле. Здесь Θ обозначает вклад ребра в метку n семьи, не содержащей атомов 5 и 6, а Θ' обозначает вклад в метку n семьи атома 5 или 6.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя леммы 4 - 6 и замечание 6, заметим, что образы критических окружностей при проекции p на бильярд являются дугами софокусного эллипса (в том числе и вырожденного $\lambda_2 = -b$) для атомов из групп 1 и 3, или дугами софокусной гиперболы (в том числе и вырожденной $\lambda_1 = -b$) в случае атомов из групп 2 и 4. Следовательно, согласно правилам выбора допустимого базиса на границах 3-атомов, изложенных в [14], выберем циклы λ и μ следующим образом: образ цикла λ атомов 1 и 4 при проекции на бильярд является дугой софокусной гиперболы, а образ цикла μ – дугой эллипса (рис. 24, а, г); для атомов 2 и 3, наоборот, образ цикла λ является дугой софокусного эллипса, а образ цикла μ – дугой гиперболы (рис. 24, б, в). В качестве циклов λ на границах атомов 5 и 6 выберем такие, образы которых изображены на рис. 24, д, е соответственно (такие циклы, очевидно, стягиваются к критическим), а образы циклов μ (или $\hat{\mu}$ для атома A^*) выберем лежащими на дугах софокусных гипербол. При этом ориентация всех циклов λ седловых атомов и циклов μ атомов A , а также циклов λ минимальных атомов A объявляется согласованной.

Одновременно с доказательством теоремы докажем следующую лемму с помощью индукции по высоте грубой молекулы.

ЛЕММА 7. Пусть атом R принадлежит группе 4. Тогда ориентация цикла μ на его верхней границе (то есть на границе, соответствующей максимальному значению интеграла f) является согласованной. Если же этот атом принадлежит группе 3, ориентация цикла μ на его верхней границе является несогласованной.

Итак, пусть ребро грубой молекулы связывает атомы из групп 1 и 2 (ребро $A - A$). Согласно выбору базисных циклов, с точностью до ориентации цикл λ_1 атома 1 переходит в цикл μ_2 атома 2 и наоборот (рис. 25, а). Согласно тому, что циклы λ_1 и μ_2 согласованные, матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Следовательно, метка $r = 0$, а метка $\varepsilon = 1$.

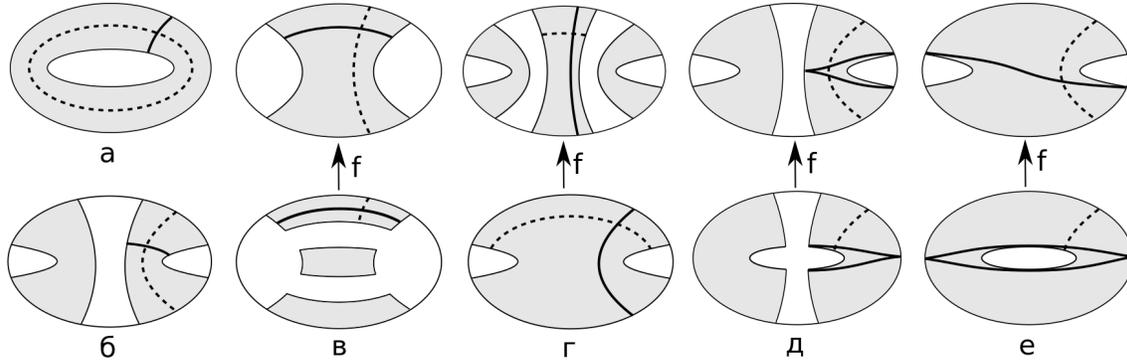


Рис. 24: Примеры выбора допустимого базиса на границах атомов. Красным цветом изображены образы циклов λ при проекции на бильярд, синим цветом изображены образы циклов μ (или $\hat{\mu}$ на рис. д). При этом на рис. в, г, д, е изображены две области – образы двух границ атома, соответствующих минимальному и максимальному значению интеграла F .

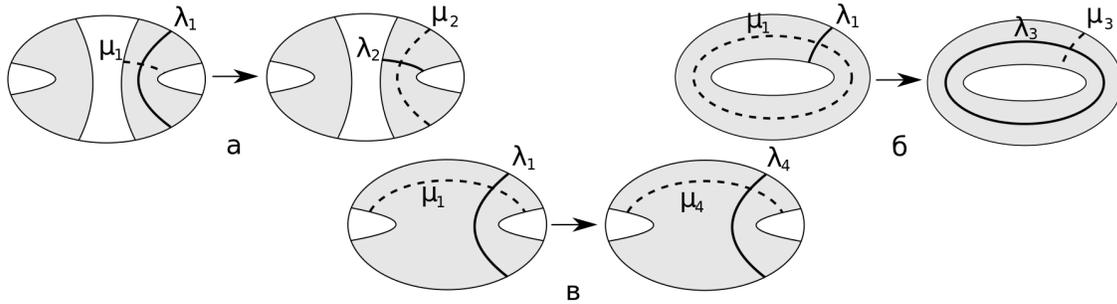


Рис. 25: Образы базисных циклов на границах атомов для ребра $A - A$ (рис. а), $A - R_3$ (рис. б) и $A - R_4$ (рис. в)

Пусть теперь ребро связывает атомы из групп 1 и 3 (ребро $A - R_3$). Аналогично, цикл λ_1 атома A переходит в цикл μ_3 атома R_3 и наоборот с точностью до ориентации (рис. 25, б). Заметим, что циклы λ_3 и μ_1 согласованные. Следовательно, матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Таким образом, метка $r = 0$, метка $\varepsilon = 1$, а вклад в метку n равен 0. Цикл μ_3 обязан быть согласованным. Следовательно, на другой (верхней) границе атома R_3 он станет несогласованным. Этот факт является базой индукции в доказательстве леммы 7.

Пусть ребро связывает атомы из групп 1 и 4 (ребро $A - R_4$). Согласно выбору базисных циклов, с точностью до ориентации цикл λ_1 атома A переходит в цикл λ_4 атома R_4 , а цикл μ_1 переходит в μ_4 (рис. 25, в). Согласно тому, что циклы λ_1 и λ_4 согласованные, матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Следовательно, метка $r = \infty$, а метка $\varepsilon = 1$. Цикл μ_4 при этом несогласованный. Следовательно, на другой (верхней) границе атома R_4 он станет согласованным. Этот факт также является базой индукции в доказательстве леммы 7.

Рассмотрим теперь ребра, соединяющие два атома из группы 3 или 4 (ребра $R_3 - R_3$ и $R_4 - R_4$). Заметим, что в обоих случаях цикл λ_- одного атома переходит в цикл λ_+ другого атома, и то же для циклов μ . При этом оба цикла λ согласованные. Следовательно, матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Метка $r = \infty$, метка $\varepsilon = 1$, а вклад в метку n нулевой. При этом на верхней границе обоих атомов циклы μ сохраняют согласованность (на верхнем атоме R_3 он по прежнему несогласованный, а на верхнем атоме R_4 – согласованный).

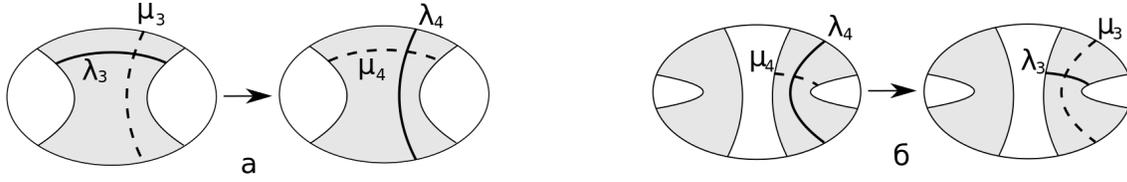


Рис. 26: Образы базисных циклов на границах атомов для ребра $R_3 - R_4$ (рис. а) и $R_4 - R_3$ (рис. б)

Рассмотрим ребро, связывающее атомы из групп 3 и 4 (ребро $R_3 - R_4$). С точностью до ориентации цикл λ_3 атома R_3 переходит в цикл μ_4 атома R_4 и наоборот (рис. 26, а). По лемме 7 цикл μ_3 несогласованный. Следовательно, матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Метка $r = 0$, а метка $\varepsilon = -1$. Это ребро может быть как входящим, так и выходящим для двух семей, причем вклад в метку n каждой из них нулевой. Заметим, что цикл μ_4 имеет несогласованную ориентацию. Следовательно, на верхней границе атома R_4 она станет согласованной.

Аналогично, рассмотрим ребро $R_4 - R_3$. Как и раньше, цикл λ_3 атома R_3 переходит в цикл μ_4 атома R_4 и наоборот (рис. 26, б). Но, согласно лемме 7, цикл μ_4 согласованный. Следовательно, матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Метка $r = 0$, метка $\varepsilon = 1$, а вклад в метку n для каждой из двух возможных семей нулевой. Заметим, что цикл μ_3 имеет согласованную ориентацию. Следовательно, на верхней границе атома R_3 она станет несогласованной.



Рис. 27: Образы базисных циклов на границах атомов для ребра $A - A^*$ (рис. а) и $A - B$ (рис. б)

Пусть теперь ребро соединяет атомы из групп 1 и 5 (ребро $A - A^*$). Заметим, что $\lambda_5 = 2\lambda_1 + \mu_1$ в силу согласованности циклов λ_1 и μ_1 , а циклы λ_1 и μ_5 совпадают с точностью до ориентации (рис. 27, а). Следовательно, матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Таким образом, метка $r = 0$, метка $\varepsilon = 1$, а вклад в метку n семьи атома A^* нулевой. При этом, ориентация цикла μ_5 согласованная. Следовательно, на верхней границе атома A^* ориентация цикла $\hat{\mu}$ является несогласованной.

Аналогичные соотношения на базисные циклы, и, следовательно, аналогичные метки соответствуют ребру $A - B$, соединяющему атомы из групп 1 и 6 (рис. 27, б). Отметим, что на верхней границе атома B ориентация цикла μ , как и в прошлом случае, является несогласованной.

Рассмотрим ребро, соединяющее атомы из 3 и 5 группы (ребро $R_3 - A^*$). В силу леммы 7 соотношения на циклы имеют вид $\lambda_5 = \lambda_3 - 2\mu_3$, при этом циклы μ_3 и μ_5 совпадают с точностью до ориентации (рис. 28, а). Следовательно, матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Таким образом, метка $r = 0.5$, метка $\varepsilon = -1$. Вклад в метку n семьи атома A^* , а также возможной другой семьи, для которой ребро $R_3 - A^*$ является выходящим, равен -1 . При этом заметим, что ориентация цикла μ_5 согласованная. Следовательно, на верхней границе атома A^* ориентация цикла $\hat{\mu}$ также является несогласованной.

И опять, аналогичные соотношения на базисные циклы и метки соответствуют ребру $R_3 -$

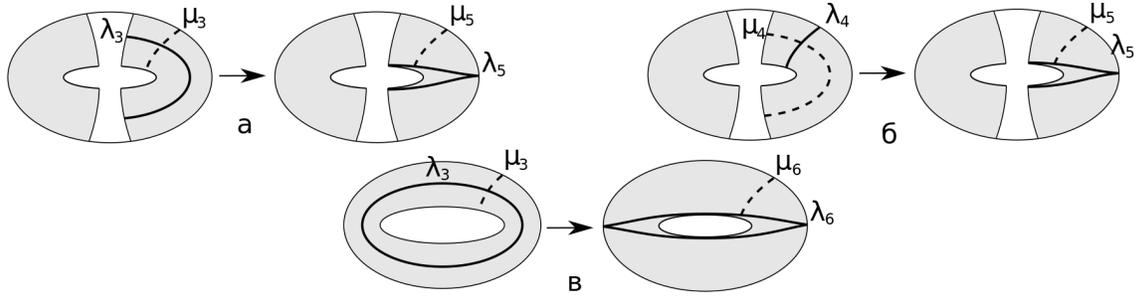


Рис. 28: Образы базисных циклов на границах атомов для ребра $R_3 - A^*$ (рис. а), $R_3 - B$ (рис. б) и $R_4 - A^*$ (рис. в)

B , соединяющему атомы из групп 3 и 6 (рис. 28, б). Отметим, что на верхней границе атома B ориентация цикла μ , как и в прошлом случае, является несогласованной.

Пусть теперь ребро соединяет атомы из групп 4 и 5 (ребро $R_4 - A^*$). В силу леммы 7 соотношения на циклы имеют вид $\lambda_5 = 2\lambda_4 + \mu_4$, при этом циклы λ_4 и μ_5 совпадают с точностью до ориентации (рис. 28, в). Следовательно, матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Таким образом, метка $r = 0$, метка $\varepsilon = 1$. Вклад в метку n семьи атома A^* нулевой, а вклад в метку возможной другой семьи, для которой ребро $R_3 - A^*$ является выходящим, равен 2. И опять, ориентация цикла μ_5 согласованная. Следовательно, на верхней границе атома A^* ориентация цикла $\hat{\mu}$ также является несогласованной.

Заметим, что не существует ребер типа $R_4 - B$, соединяющих атомы из 4 и 6 группы. Действительно, атом B из 6 группы предполагает перестройку односвязной области возможного движения в односвязную. Но атом R_4 из 4 группы соответствует “разрыву” области вдоль дуг софокусных гипербол. После такого “разрыва” область возможного движения в любом случае станет объединением односвязных областей. Также невозможны ребра, соединяющие два атома из группы 5 или 6, или же два атома из групп 5 и 6, так как эти атомы лежат на одном уровне интеграла F .

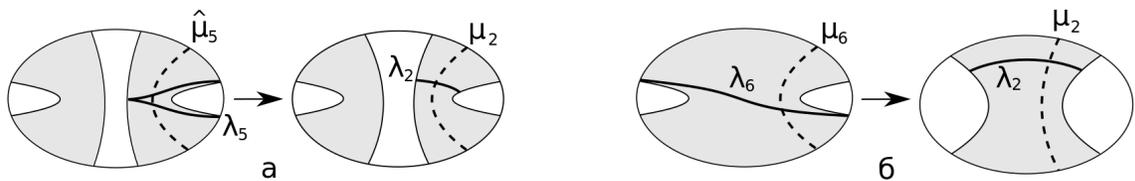


Рис. 29: Образы базисных циклов на границах атомов для ребра $A^* - A$ (рис. а) и $B - A$ (рис. б)

Также отметим, что во всех разобранных случаях на верхней границе атомов из групп 5 и 6 циклы μ (или $\hat{\mu}$) ориентированы несогласованно. Рассмотрим теперь ребро $A^* - A$, соединяющее атомы из групп 2 и 5. В силу согласованности цикла μ_2 , соотношение на цикл λ_5 имеет вид $\lambda_5 = \pm 2\lambda_2 + \mu_2$, при этом $\hat{\mu}_5 = -\mu_2$ (рис. 29, а). Воспользуемся правилом выбора цикла μ на атоме со звездой: $\mu_5 = \frac{1}{2}(\lambda_5 + \hat{\mu}_5) = \pm\lambda_2$. Следовательно, матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Таким образом, метка $r = 0$, метка $\varepsilon = 1$, а вклад в метку n семьи атома A^* нулевой.

Теперь предположим, что ребро связывает атомы из 2 и 6 группы (ребро $B - A$). В силу несогласованности цикла μ_6 , а также соотношения $\lambda_5 = \pm\lambda_2 + \mu_2$ (рис. 29, б), матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Таким образом, метка $r = 0$, метка $\varepsilon = 1$, а вклад в метку n семьи атома

A^* равен 1.

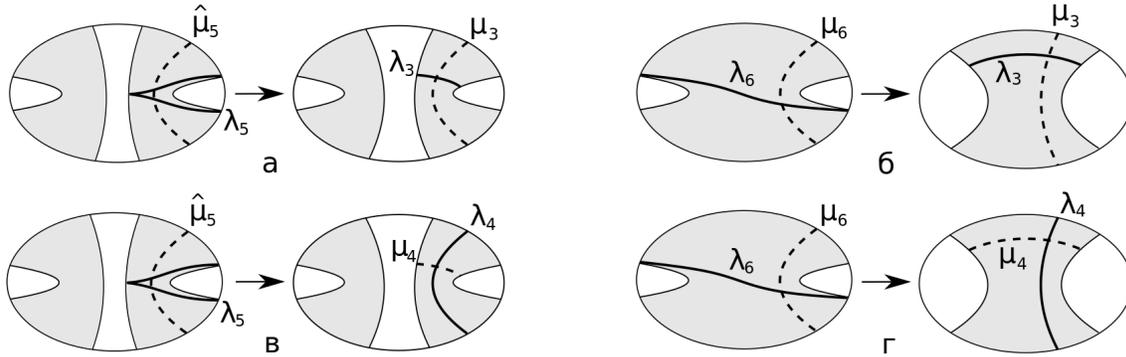


Рис. 30: Образы базисных циклов на границах атомов для ребра $A^* - R_3$ (рис. а), $B - R_3$ (рис. б), $A^* - R_4$ (рис. в) и $B - R_4$ (рис. г)

Рассмотрим ребро вида $A^* - R_3$, соединяющее атомы из 5 и 3 группы. Соотношения на циклы имеют вид $\lambda_5 = 2\lambda_3 \pm \mu_3$, при этом $\hat{\mu}_5 = \mp\mu_3$ в силу несогласованности цикла $\hat{\mu}_5$ (рис. 30, а). Следовательно, цикл μ_5 имеет вид $\mu_5 = \frac{1}{2}(\lambda_5 + \hat{\mu}_5) = \lambda_3$, а матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Таким образом, метка $r = 0$, метка $\varepsilon = 1$. Вклад в метку n семьи атома A^* нулевой, а вклад в метку возможной другой семьи, для которой ребро $R_3 - A^*$ является выходящим, равен 2. Заметим, что выбор положительного знака означает согласованности цикла μ_3 . Следовательно, на верхней границе атома R_3 цикл μ несогласованный.

Аналогично рассмотрим ребро $B - R_3$, соединяющее атомы из 6 и 3 группы. Соотношения на циклы имеют вид $\lambda_6 = \lambda_3 \pm \mu_3$, при этом $\mu_5 = \mp\mu_3$ в силу несогласованности (рис. 30, б). Следовательно, матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Таким образом, метка $r = 0$, метка $\varepsilon = 1$. Вклад в метку n семьи атома B , как и вклад в метку возможной другой семьи, равен 1. Как и в прошлом случае, выбор положительного знака означает согласованности цикла μ_3 . Следовательно, на верхней границе атома R_3 цикл μ также является несогласованным.

Рассмотрим теперь ребро, соединяющее атомы из групп 5 и 4 (ребро $A^* - R_4$). Соотношения на циклы имеют вид $\lambda_5 = \lambda_4 \pm 2\mu_4$, при этом $\hat{\mu}_5 = -\lambda_4$ в силу несогласованности цикла $\hat{\mu}_5$ (рис. 30, в). Следовательно, цикл μ_5 имеет вид $\mu_5 = \frac{1}{2}(\lambda_5 + \hat{\mu}_5) = \pm 2\mu_4$, а матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Таким образом, метка $r = 0.5$, метка $\varepsilon = -1$. Вклад в метку n семьи атома A^* , как и вклад в метку возможной другой семьи, равен -1 . Заметим, что выбор отрицательного знака означает несогласованности цикла μ_3 . Следовательно, на верхней границе атома R_4 цикл μ согласованный.

Наконец, рассмотрим ребро, соединяющее атомы из групп 6 и 4 (ребро $B - R_4$). Соотношения на циклы имеют вид $\lambda_5 = \lambda_4 \pm \mu_4$, при этом $\mu_5 = -\lambda_4$ в силу несогласованности цикла μ_5 (рис. 30, г). Следовательно, матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Таким образом, метка $r = 0$, метка $\varepsilon = -1$. Вклад в метку n семьи атома A^* нулевой, а вклад в метку возможной другой семьи равен -1 . Заметим, что выбор отрицательного знака означает несогласованности цикла μ_3 . Следовательно, на верхней границе атома R_4 цикл μ также является согласованным.

Заметим, что во всех рассмотренных случаях цикл μ на верхней границе атома R_4 является согласованным, а на верхней границе атома R_3 — несогласованным. С учетом базы лемма 7 была доказана с помощью индукции по высоте критических уровней интеграла F .

Пусть теперь ребро соединяет атомы из групп 2 и 3 ($R_3 - A$). Заметим, что циклы λ_2 и λ_3 ,

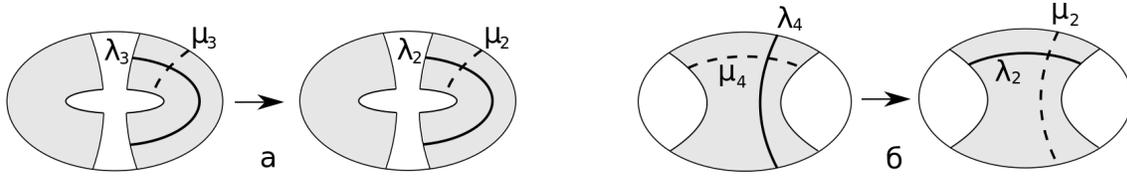


Рис. 31: Образы базисных циклов на границах атомов для ребра $R_3 - A$ (рис. а) и $R_4 - A$ (рис. б)

а также μ_2 и μ_3 совпадают с точностью до ориентации (рис. 31, а). В силу леммы 7 матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Следовательно, метка $r = \infty$, а метка $\varepsilon = 1$.

И наконец, пусть ребро имеет вид $R_4 - A$, соединяющее атомы из групп 2 и 4. Цикл λ_4 переходит в цикл μ_2 и наоборот (рис. 31, б). Следовательно, матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Следовательно, метка $r = 0$, метка $\varepsilon = 1$, а вклад в метку n возможной семьи нулевой.

Теорема доказана. \square

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Заметим, что при выбранной ориентации Q^3 циклы λ на максимальных атомах A также будут ориентированны согласованно.

Также заметим, что каждый атом из групп 5 и 6 (A^* и B) образует семью. В зависимости от соседних атомов, метка n атома A^* может равняться $-2, -1$ или 0 , а метка n атома B может равняться $-2, -1, 0$ или 1 .

Таким образом, были построены всевозможные инварианты Фоменко-Цишанга, соответствующие эллиптическому бильярду с потенциалом.

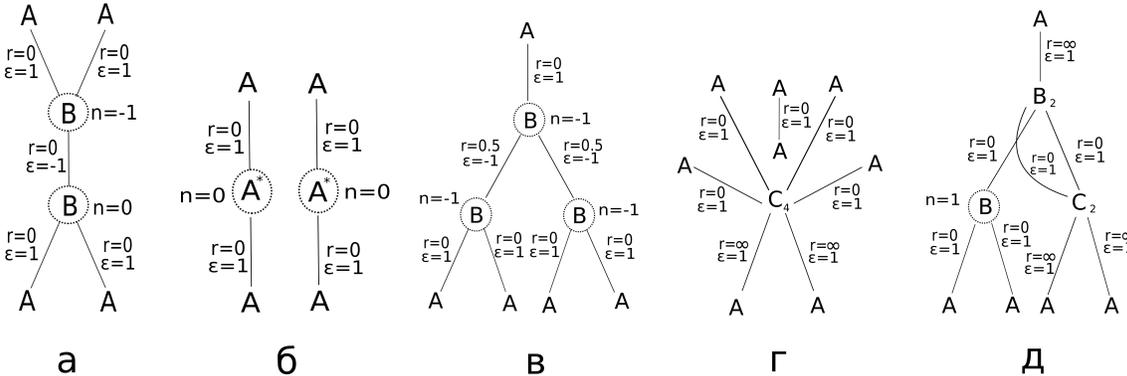


Рис. 32: Примеры меченых молекул с малым количеством критических значений интеграла F (не больше четырех)

8. Изоэнергетическое многообразие Q^3

Определим теперь, чему гомеоморфно изоэнергетическое многообразие $Q^3 = \{x \in M^4 : H(x) = h\}$. Отметим, что единственное ограничение на вектор скорости задает следующая формула:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2(h - W(x, y)),$$

где W является потенциалом. Таким образом, если в точке (x, y) имеем $W(x, y) < h$, то этой точке соответствует целая окружность векторов скорости, если $W(x, y) = h$, ей соответствует

один нулевой вектор, если $W(x, y) > h$, в этой точке не происходит движение. Следовательно, образ изоэнергетического многообразия Q^3 при проекции p на бильярд задается неравенством

$$W(x, y) \leq h \quad (23)$$

ЛЕММА 8. *Все точки, для которых выражение (23) обращается в равенство, являются граничными точками образа изоэнергетического многообразия $p(Q^3)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что по замечанию 6 и замечанию к теореме 4 фокусам всегда соответствует окружность векторов. Следовательно, если фокусы лежат в образе $p(Q^3)$, они удовлетворяют строгому неравенству (23) и являются внутренними точками.

Используя формулу (13) из леммы 2, приведем неравенство (23) к следующему виду:

$$h\lambda_1 - P(\lambda_1) \leq h\lambda_2 - P(\lambda_2).$$

Напомним, что $V(z) = f + hz - P(z)$. Согласно замечанию к теореме 4 о точках ранга 0, не существуют таких двух точек $z = e_1 \in [-a, -b]$ и $z = e_2 \in [-b, 0]$, которые являются локальными экстремумами многочлена $V(z)$ на своих отрезках (либо точками $-a$, $-b$ или 0) и $V(e_1) = V(e_2) = 0$. Следовательно, для любой точки (λ_1, λ_2) , удовлетворяющей равенству (23), для одной из координат λ_i многочлен V является монотонным в окрестности точки $z = \lambda_i$, при этом λ_i не равняется $-a$, $-b$ или 0. Пусть без ограничения общности такой координатой является λ_1 . Тогда в окрестности этой координаты существует значение λ'_1 , для которого $h\lambda'_1 - P(\lambda'_1) > h\lambda_1 - P(\lambda_1) = \lambda_2 - P(\lambda_2)$. Следовательно, точка (λ'_1, λ_2) не принадлежит образу Q^3 , а точка (λ_1, λ_2) является граничной.

Лемма доказана. \square Напомним, что многочлен V не имеет кратных корней по замечанию к теореме 4 о вырожденных орбитах. Следовательно, условие того, что точка $z = e$ является экстремумом, эквивалентно условию $V'(e) = 0$.

ЛЕММА 9. *Любая компонента края образа $p(Q^3)$ гомеоморфна окружности.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства нужно показать, что множество $(x, y) : W = h$ не имеет самопересечений и точек касания с граничным эллипсом. Докажем, что нет самопересечений. Достаточно показать, что для любой точки границы либо $W'_x \neq 0$, либо $W'_y \neq 0$. Вычислим полный дифференциал W в граничной точке (λ_1, λ_2) :

$$dW = \frac{d\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} (P'(\lambda_1) - h) - \frac{d\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} (P'(\lambda_2) - h) = \frac{V'(\lambda_2)d\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} - \frac{V'(\lambda_1)d\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Если точка (λ_1, λ_2) не принадлежит осям $0x$ и $0y$, условие $W'_x = W'_y = 0$ эквивалентно условию $V'(\lambda_1) = V'(\lambda_2) = 0$. Однако, последнее означает, что выполнены условия $C1$ и $C2$, что запрещено замечанием к теореме 4 о точках ранга 0.

Пусть теперь точка (λ_1, λ_2) принадлежит оси $0y$. Тогда $W'_x = 0$ в силу того, что каждый моном многочлена W имеет четную степень по переменной x . При этом

$$W'_y = \frac{2}{\lambda_1 - \lambda_2} y V'(\lambda_2).$$

То, что $V'(\lambda_2) = 0$ и $V(-a) = V(\lambda_2)$, означает, что выполнены условия $C2$ и $C4$, что запрещено замечанием к теореме 4 о точках ранга 0. Если $y = 0$, то точка с координатами $\lambda_1 = -a$ и $\lambda_2 = -b$ принадлежит границе и $V(-a) = V(-b)$. Следовательно, выполнены условия $C4$ и $C5$, что запрещено тем же замечанием. Аналогично рассматривается случай, когда точка (λ_1, λ_2) принадлежит оси $0x$.

Докажем теперь, что нет точек касания с граничным эллипсом. Достаточно показать, что вектора (W'_x, W'_y) и $(\frac{x}{a}, \frac{y}{b})$ линейно независимы. Если точка (λ_1, λ_2) не лежит на осях $0x$ и $0y$, из

условия линейной зависимости вытекает, что $V'(\lambda_1) = 0$. Следовательно, выполнены условия $C1$ и $C3$, что запрещено. Если же точка касания лежит на осях Oy или Ox , то автоматически выполнены условия $C3$ и $C4$ или условия $C3$ и $C5$ соответственно, что также запрещено.

Лемма доказана. \square

В итоге имеем, что образ изоэнергетического многообразия $p(Q^3)$ при проекции p на бильярд ограничен контурами, гомеоморфными окружности, и всем внутренним точкам этого образа соответствует окружность векторов скорости. Компоненты связности этого образа могут быть как односвязным, так и представлять собой “дырявые” диски со сколь угодно большим числом дырок.

ТЕОРЕМА 7. *Изоэнергетическое многообразие Q^3 интегрируемого плоского бильярда в поле полиномиального потенциала состоит из нескольких компонент связности, каждая из которых гомеоморфна либо трехмерной сфере S^3 , либо связной сумме $(S^1 \times S^2) \# \dots \# (S^1 \times S^2)$ нескольких многообразий $S^1 \times S^2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим односвязную компоненту связности образа $p(Q^3)$ (обозначим ее K). Разобьем ее по некоторому внутреннему контуру на две области: дисковую K_1 и кольцевую K_2 (рис. 33, а). По замеченному ранее, каждой точке области K_1 соответствует окружность векторов. Следовательно, прообраз $p^{-1}(K_1)$ в Q^3 гомеоморфен полноторию. На его границе выберем базисные циклы λ_1 и μ_1 так, что цикл $\lambda_1 = p^{-1}(x, y)$, т.е. окружность векторов, соответствующая одной точке (x, y) области Π_1 , а $\mu_1 = \{(x, y, \dot{x}, 0) : (x, y) \in \partial\Pi_1\}$, то есть прообраз границы области Π_1 , каждой точке которой сопоставлен вектор скорости с компонентой $\dot{y} = 0$. Заметим, что цикл λ_1 задает образующую фундаментальной группы полнотория $p^{-1}(\Pi_1)$ (является его параллелью), а μ_1 стягивается в точку (является меридианом).

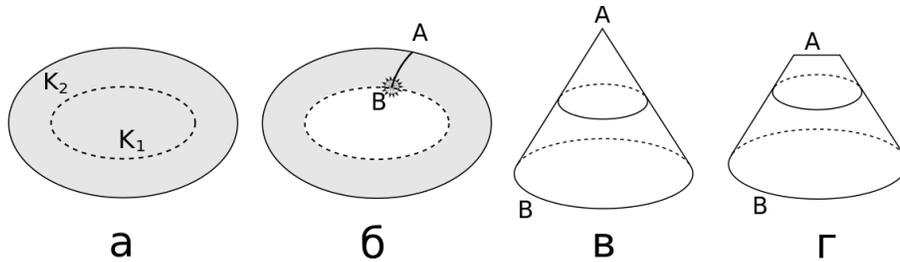


Рис. 33: Случай многообразия S^3

Докажем теперь, что прообраз области K_2 также гомеоморфен полноторию. Действительно, разобьем ее на стягиваемые отрезки, трансверсальные ее границе, начало которых лежит на границе области K (точка A), а конец – на внутренней границе области K_2 (точка B), как изображено на рис. 33, б. Заметим, что если точка A не лежит на границе бильярда, ей соответствует нулевой вектор скорости. Следовательно, в прообразе отрезка AB лежит конус (рис. 33, в), т.е. он гомеоморфен двумерному диску. Если же точка A принадлежит граничному эллипсу, в прообразе отрезка AB лежит цилиндр, одна граница которого стянута на отрезок согласно отождествлению векторов скорости на границе бильярда (рис. 33, г). Таким образом, прообраз отрезка AB опять гомеоморфен двумерному диску. Следовательно, прообраз всей области Π_2 гомеоморфен полноторию. На его границе выберем базисные циклы $\lambda_2 = \mu_1$ и $\mu_2 = \lambda_1$. Заметим, что цикл λ_2 задает образующую фундаментальной группы полнотория $p^{-1}(K_2)$ (является его параллелью), а μ_2 стягивается в точку (является меридианом).

Таким образом, прообраз K состоит из двух полноторий, склеенных по граничному тору по правилу $\lambda_2 = \mu_1$ и $\mu_2 = \lambda_1$. Итоговое трехмерное многообразие гомеоморфно S^3 (см., например, [14], т. I, стр. 201).

Теперь рассмотрим не односвязную компоненту связности образа $p(Q^3)$, гомеоморфную кольцу (обозначим ее U). Как и в случае области K_2 , разобьем ее на стягиваемые отрезки,

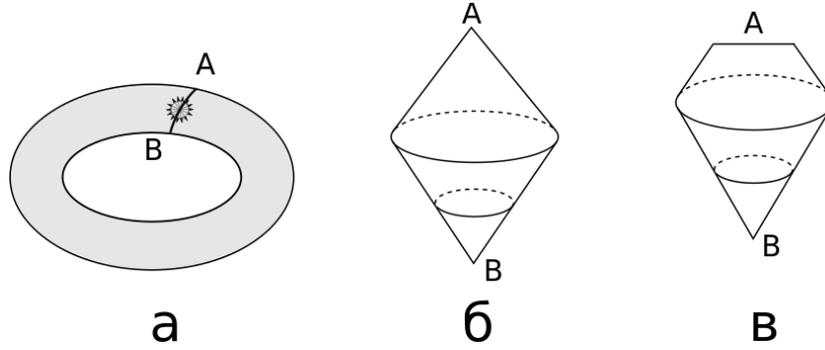


Рис. 34: Случай многообразия $S^1 \times S^2$

трансверсальные ее границы, начало которых лежит на внешней границе области U (точка A), а конец – на внутренней границе (точка B), как изображено на рис. 34, а. Заметим, что если точка A не принадлежит границе биллиарда, ей соответствует нулевой вектор скорости, прообраз отрезка AB гомеоморфен цилиндру, границы которого стянуты в точку (рис. 34, б). Если же точка A принадлежит границе биллиарда, прообраз отрезка AB гомеоморфен цилиндру, одна граница которого стянута в точку, а вторая – на отрезок согласно отождествлению векторов скорости на границе биллиарда (рис. 34, в). Таким образом, прообраз отрезка AB всегда гомеоморфен двумерной окружности S^2 . Следовательно, прообраз всей области U гомеоморфен прямому произведению $S^2 \times S^1$.

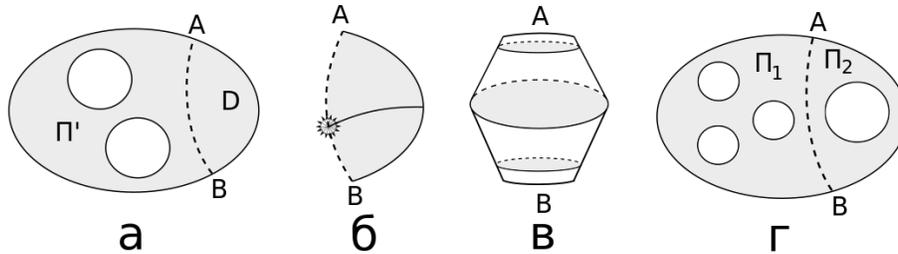


Рис. 35: Случай многообразия $S^2 \times S^1 \# \dots \# S^2 \times S^1$

Наконец, рассмотрим общий случай, при котором компонента связности образа $p(Q^3)$ (обозначим ее Π) содержит произвольное количество компонент края («дырок»). Покажем по индукции, что если Π содержит n «дырок», ее прообраз гомеоморфен связной сумме n пространств $S^2 \times S^1$. Шаг индукции при $n = 1$ был доказан ранее. Предположим, что утверждение доказано для значения $n = k$. Пусть области Π соответствует $k' \leq k$ дырок. Выберем на ее внешней границе точки A и B и разобьем ее на две области Π' и D стягиваемым отрезком AB так, чтобы область D не содержала «дырок» (рис. 35, а). Докажем, что прообраз области D гомеоморфен трехмерному диску. Действительно, ее граница разбивается на два отрезка точками A и B , причем один из них лежит на границе области Π , а каждой точке второго соответствует окружность векторов скорости. Разобьем область $D \setminus \{A, B\}$ на отрезки, начала которых лежат на одной границе, а концы – на другой (рис. 35, б). Как и в случае области K_2 , прообраз каждого такого отрезка разбиения гомеоморфен двумерному диску D^2 . Следовательно, прообраз области D гомеоморфен $D^2 \times [A, B]$, где границы $D^2 \times \{A\}$ и $D^2 \times \{B\}$ стянуты в точку или на отрезок, т.е. трехмерному диску (рис. 35, в). Таким образом, по предположению индукции, прообраз области Π' гомеоморфен

$$\underbrace{S^2 \times S^1 \# \dots \# S^2 \times S^1}_{k'} \setminus D^3.$$

Пусть теперь области Π соответствует $k + 1$ дырка. Выберем на ее внешней границе точки A и B и разобьем ее на две области Π_1 и Π_2 стягиваемым отрезком AB так, чтобы область Π_1 содержала k “дырок”, а область Π_2 – одну “дырку” (рис. 35, г). Согласно доказанному выше, прообразы этих областей гомеоморфны

$$\underbrace{S^2 \times S^1 \# \dots \# S^2 \times S^1}_{k} \setminus D^3$$

и

$$S^2 \times S^1 \setminus D^3$$

соответственно. Следовательно, прообразом области Π является склейка этих двух пространств по граничной сфере, что гомеоморфно связной сумме $\underbrace{S^2 \times S^1 \# \dots \# S^2 \times S^1}_{k+1}$.

Теорема доказана. \square

ЗАМЕЧАНИЕ 10. Эта теорема схожа с теоремой Смейла из динамики твердого тела. Она гласит следующее: рассмотрим образ изоэнергетического многообразия Q^3 при его проекции на сферу Пуассона. Если этот образ покрывает всю сферу, то Q^3 гомеоморфно проективному пространству $\mathbb{R}P^3$; если образ гомеоморфен сфере с одной дыркой, то Q^3 гомеоморфно сфере S^3 ; если образ содержит $m > 1$ дырок, то Q^3 гомеоморфно связной сумме $\underbrace{S^2 \times S^1 \# \dots \# S^2 \times S^1}_{m-1}$

ЗАМЕЧАНИЕ 11. Заметим, что в каждом конкретном случае конфигурации многочлена V мы независимо строим инвариант Фоменко-Цишанга и определяем тип многообразия Q^3 , который в частности и определяется этим инвариантом. Иными словами, мы получили наглядный способ определения типа Q^3 , соответствующего некоторой меченой молекуле (определенного вида), с помощью бильярда в эллипсе.

9. Лиувиллево эквивалентные системы

Определим теперь, какие известные интегрируемые системы с двумя степенями свободы лиувиллево эквивалентны нашей бильярдной системе на некотором значении гамильтониана H . Согласно теореме Фоменко-Цишанга достаточно сравнить меченые молекулы этих двух систем. Таблица 1 сопоставляет меченую молекулу, появляющуюся в нашей бильярдной системе, со случаями систем динамики твердого тела, имеющими эту же молекулу (список меченых молекул для случаев динамики твердого тела был приведен в [14], глава 5). Отметим, что все инварианты Фоменко-Цишанга, встречающиеся в динамике твердого тела, имеют не слишком большое число атомов. Следовательно, эквивалентные им случаи нашего бильярда нужно искать для потенциалов достаточно малого порядка. И действительно, все приведенные инварианты в таблице 1 встречаются уже для потенциалов второй и четвертой степени.

№	Молекула	Случаи динамики твердого тела
1	$A \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} A$	Лагранж (1), Ковалевская (1), Жуковский (7) Эйлер (1), Горячев-Чаплыгин-Сретенский (1)
2	$A \xrightarrow[r=\infty]{\varepsilon=1} B \begin{cases} \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} A \\ \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} A \end{cases}$	Жуковский (8)
3	$A \begin{cases} \xrightarrow[r=\infty]{\varepsilon=1} C_2 \\ \xrightarrow[r=\infty]{\varepsilon=1} C_2 \end{cases} \begin{cases} \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} A \\ \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} A \end{cases}$	Эйлер (2), Клебш (5)
4	$A \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} \overset{\circ}{A} \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} A$ $n=0$	Горячев-Чаплыгин-Сретенский (2)
5	$A \begin{cases} \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} \overset{\circ}{B} \\ \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} \overset{\circ}{B} \end{cases} \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=-1} \overset{\circ}{B} \begin{cases} \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} A \\ \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} A \end{cases}$ $n=0$ $n=-1$	Ковалевская (3)

Таблица 1: Эквивалентные системы динамики твердого тела

10. Заключение

Таким образом, был проведен топологический анализ интегрируемого бильярда в эллипсе, снабженного полиномиальным потенциалом произвольного порядка. В разделе 3 был приведен общий вид интегрируемого потенциала W и его взаимосвязь с первыми интегралами нашей системы. В разделе 5 была построена бифуркационная диаграмма и описаны ее свойства. В разделе 6 были вычислены бифуркации торов Лиувилля (3-атомы), соответствующие точкам дуг бифуркационной диаграммы. В разделах 7 и 8 был вычислен инвариант Фоменко-Цишанга, соответствующий невырожденному изоэнергетическому многообразию Q^3 , а также вид самого Q^3 . Наконец, в разделе 9 был приведен список систем динамики твердого тела, лиувиллево эквивалентного некоторым случаям нашего бильярда.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Биркгоф Дж. Динамические системы М.;Л.; Гостехиздат, 1941.
2. Якоби К. Лекции по динамике. М.; Гостехиздат, 1936.
3. V. Kaloshin, A. Sorrentino, On the local Birkhoff conjecture for convex billiards, Ann. of Math. 2018. 188, No1. 315–380.
4. A. A. Glutsyuk, On polynomially integrable Birkhoff billiards on surfaces of constant curvature, Journal of the European Mathematical Society, 2021. 23, No 3. 995–1049.
5. Фокичева В. В., Топологическая классификация бильярдов в локально плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик, Матем. сб., 206:10 (2015), 127-176.

6. В. В. Ведюшкина, И. С. Харчева, Биллиардные книжки моделируют все трехмерные бифуркации интегрируемых гамильтоновых систем, Матем. сб., 209:12 (2018), 17-56
7. В. А. Кибкало, А. Т. Фоменко, И. С. Харчева, Реализация интегрируемых гамильтоновых систем бильярдными книжками, Тр. ММО, 82:1 (2021), 45–78
8. M. Bialy, A. E. Mironov, Algebraic non-integrability of magnetic billiards / J. Phys. A, 49:45 (2016), 455101, 18 pp.
9. В. В. Ведюшкина, С. Е. Пустовойтов, “Классификация слоений Лиувилля интегрируемых топологических бильярдов в магнитном поле”, Матем. сб., 214:2 (2023), 23–57
10. Козлов В. В. Некоторые интегрируемые обобщения задачи Якоби о геодезических на эллипсоиде. // Прикладная математика и механика, том 59, вып. 1 1995.
11. V. I. Dragovich, Integrable perturbations of a Birkhoff billiards inside an ellipse, J. Appl. Maths Mechs, Vol. 62, No. 1, pp. 159-162, 1998
12. И. Ф. Кобцев, Эллиптический бильярд в поле потенциальных сил: классификация движений, топологический анализ, Матем. сб., 211:7 (2020), 93–120
13. Пустовойтов С. Е. Топологический анализ эллиптического бильярда в потенциальном поле четвертого порядка // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. — 2021.
14. Болсинов А. В., Фоменко А. Т., Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Том I, II— Ижевск: РХД, 1999.
15. В. В. Козлов, Д. В. Трещев, Генетическое введение в динамику систем с ударами, М.: Изд-во МГУ, 1991.
16. Харламов М. П. Топологический анализ и булевы функции: I. Методы и приближения к классическим системам // Нелинейная динамика, 2010, том 6, №4, с.769-805.
17. Фоменко А.Т. Топология поверхностей постоянной энергии интегрируемых гамильтоновых систем и препятствия к интегрируемости. - Известия АН СССР. Серия матем. 1986, т.50, No.6, с.1276-1307.
18. Фоменко А.Т. "Симплектическая топология вполне интегрируемых гамильтоновых систем". - Успехи математических наук, 1989, т.44, вып.1 (265), с.145-173.
19. Фоменко А.Т., Цишанг Х. Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. - Известия АН СССР. 1990, т.54, No.3, с.546-575.
20. Фоменко А.Т. "Теория бордизмов интегрируемых гамильтоновых невырожденных систем с двумя степенями свободы. Новый топологический инвариант многомерных интегрируемых систем". - Известия АН СССР. серия матем. т.55, No.4, 1991, с.747-779.

REFERENCES

1. Birkhoff, G., 1966. “Dynamical systems”, *American Mathematical Society. Colloquium publications*. Vol. IX, 305 pp.

2. Edited by Clebsch, A., 2009. “Jacobi’s lectures on dynamics”, *Hindustan book agency, New Delhi*, 2nd edition, 339 pp.
3. Kaloshin, V., Sorrentino, A., 2018. “On the local Birkhoff conjecture for convex billiards”, *Ann. of Math.*, 188, No 1. pp. 315–380.
4. Glutsyuk, A. A., 2021. “On polynomially integrable Birkhoff billiards on surfaces of constant curvature”, *Journal of the European Mathematical Society*, 23, No 3. pp. 995–1049.
5. Fokicheva, V. V., “A topological classification of billiards in locally planar domains bounded by arcs of confocal quadrics”, *Sb. Math.*, 206:10 (2015), pp. 1463–1507.
6. Vedyushkina, V. V., Kharcheva, I. S., 2021. “Billiard books realize all bases of Liouville foliations of integrable Hamiltonian systems”, *Mat. Sb.*, 212:8, pp. 89–150; *Sb. Math.*, 212:8, pp. 1122–1179.
7. Kibkalo V. A., Fomenko A. T., Kharcheva I. S., 2021. “Realization of integrable Hamiltonian systems by billiard books”, *Transactions of the Moscow Mathematical Society*, **80**.
8. Bialy, M., Mironov, A. E., 2016. “Algebraic non-integrability of magnetic billiards”, *J. Phys. A*, 49:45, 455101, 18 pp.
9. Vedyushkina V. V., Pustovoitov S. E., 2023. “Classification of liouville foliations of integrable topological billiards in magnetic fields”, *Sbornik Mathematics*, Vol. 214, no. 2. pp. 166–196.
10. Kozlov, V. V., 1995. “Some integrable extensions of Jacobi’s problem of geodesics on an ellipsoid”, *Prikl. Mat. Mekh.*, 59:1, pp. 3–9; English transl. in *J. Appl. Math. Mech.*, 59:1, pp. 1–7.
11. Dragovich, V. I., 1998. “Integrable perturbations of a Birkhoff billiards inside an ellipse”, *J. Appl. Maths Mechs*, Vol. 62, No. 1, pp. 159–162.
12. Kobtsev, I. F., 2020. “An elliptic billiard in a potential force field: classification of motions, topological analysis”, *Sb. Math.*, 211:7, pp. 987–1013.
13. Pustovoitov, S. E., 2021. “Topological Analysis of an Elliptic Billiard in a Fourth-Order Potential Field”, *Moscow University Mathematics Bulletin*, Vol. 76, Iss. 5, pp. 193–205.
14. Bolsinov, A. V., Fomenko, A. T., 2004. “Integrable Hamiltonian systems. Geometry, topology, classification”, *Chapman & Hall/CRC, Boca Raton*.
15. Kozlov, V. V., Treshchev, D. V., 1991. “Billiards: A Genetic Introduction to the Dynamics of Systems with Impacts”, *American Mathematical Society. Translations of Mathematical Monographs*. Vol: 89; 171 pp.
16. Kharlamov M.P., 2010. “Topological analysis and Boolean function: I. Methods and applications to the classical systems”, *Non-linear dynamics*, 6:4, pp. 769–805.
17. Fomenko, A. T., 1987. “The topology of surfaces of constant energy in integrable Hamiltonian systems, and obstructions of integrability”, *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, Vol. 29, Iss. 3, pp. 629–658.
18. Fomenko, A. T., 1989. “The symplectic topology of completely integrable Hamiltonian systems”, *Russian Mathematical Surveys*, 44(1): 181.

19. Fomenko, A. T., Zieschang, H., 1990. "A topological invariant and a criterion for the equivalence of integrable Hamiltonian systems with two degrees of freedom", *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 54:3, pp. 546–575; *Math. USSR-Izv.*, 36:3 (1991), pp. 567–596.
20. Fomenko, A. T., 1992. "A bordism theory for integrable nondegenerate Hamiltonian systems with two degrees of freedom. A new topological invariant of higherdimensional integrable systems", *Math. USSR-Izv.*, 39:1 (1992), pp. 731–759.

Получено: 16.11.2023

Принято в печать: 21.03.2024

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 25. Выпуск 1.

УДК 512.579

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-1-103-115

**О решетках конгруэнций алгебр с оператором
и симметрической основной операцией**

В. Л. Усольцев

Усольцев Вадим Леонидович — кандидат физико-математических наук, Волгоградский государственный социально-педагогический университет (г. Волгоград).

e-mail: usl2004@mail.ru

Аннотация

В статье изучаются свойства решеток конгруэнций алгебр с одним оператором и основной операцией меньшинства, определенной специальным образом и называемой симметрической. Операцией меньшинства называется тернарная операция $d(x, y, z)$, удовлетворяющая тождествам $d(x, y, y) = d(y, y, x) = d(y, x, y) = x$. Алгебра называется цепной, если она имеет линейно упорядоченную решетку конгруэнций. Алгебра подпрямая неразложима, если она имеет наименьшую ненулевую конгруэнцию. Алгеброй с операторами называется универсальная алгебра, сигнатура которой состоит из двух непустых непересекающихся частей: основной, которая может содержать произвольные операции, и дополнительной, состоящей из операторов. Операторами называются унарные операции, действующие как эндоморфизмы относительно основных операций, то есть перестановочные с основными операциями. Унарной называется алгебра с одной унарной операцией. Если f — унарная операция из сигнатуры Ω , то унар $\langle A, f \rangle$ называется унарным редуктом алгебры $\langle A, \Omega \rangle$.

Получено описание алгебр с одним оператором и основной симметрической операцией, решетка конгруэнций которых является цепью. Показано, что алгебра данного класса является цепной тогда и только тогда, когда она подпрямая неразложима. Получено описание алгебр данного класса, решетки конгруэнций которых совпадают с решетками конгруэнций унарных редуктов этих алгебр.

Ключевые слова: решетка конгруэнций, алгебра с операторами, унарный редукт алгебры, цепная алгебра, подпрямая неразложимая алгебра.

Библиография: 28 названий.

Для цитирования:

В. Л. Усольцев. О решетках конгруэнций алгебр с оператором и симметрической основной операцией // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 1, с. 103–115.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 25. No. 1.

UDC 512.579

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-1-103-115

On congruence lattices of algebras with an operator and the symmetric main operation

V. L. Usoltsev

Usoltsev Vadim Leonidovich — candidate of physical and mathematical sciences, Volgograd State Pedagogical University (Volgograd).

e-mail: usl2004@mail.ru

Abstract

In this paper we study properties of congruence lattices of algebras with one operator and the main symmetric operation. A ternary operation $d(x, y, z)$ satisfying identities $d(x, y, y) = d(y, y, x) = d(y, x, y) = x$ is called a minority operation. The symmetric operation is a minority operation defined by specific way. An algebra A is called a chain algebra if A has a linearly ordered congruence lattice. An algebra A is called subdirectly irreducible if A has the smallest nonzero congruence. An algebra with operators is an universal algebra whose signature consists of two nonempty non-intersectional parts: the main part which can contain arbitrary operations, and the additional part consisting of operators. The operators are unary operations that act as endomorphisms with respect to the main operations, i.e., one are permutable with the main operations. An unar is an algebra with one unary operation. If f is the unary operation from the signature Ω then the unar $\langle A, f \rangle$ is called an unary reduct of algebra $\langle A, \Omega \rangle$.

A description of algebras with one operator and the main symmetric operation that have a linear ordered congruence lattice is obtained. It shown that algebra of given class is a chain algebra if and only if one is subdirectly irreducible. For algebras of given class we obtained necessary and sufficient conditions for the coincidence of their congruence lattices and congruence lattices of unary reducts these algebras.

Keywords: congruence lattice, algebra with operators, unary reduct of algebra, chain algebra, subdirectly irreducible algebra.

Bibliography: 28 titles.

For citation:

V. L. Usoltsev, 2024, “On congruence lattices of algebras with an operator and the symmetric main operation”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 1, pp. 103–115.

1. Введение

При изучении решеток конгруэнций в различных классах универсальных алгебр значительное внимание уделяется поиску условий, при которых решетка конгруэнций алгебры является цепью. Обычно алгебры с линейно упорядоченной решеткой конгруэнций называют цепными, хотя в наиболее хорошо изученном в этом отношении классе — полугруппах — алгебры такого рода чаще называют Δ -полугруппами. В бесконечном случае коммутативные цепные полугруппы были полностью описаны Т. Тамурой [1] и Б.М. Шейном [2], [3]. Естественным обобщением коммутативных являются перестановочные полугруппы. Цепные алгебры в этом классе были описаны в [4]. Полугруппы, левые конгруэнции которых образуют цепь, были охарактеризованы в работе [5]. В [6] показано, что класс цепных нильполугрупп совпадает с классом нильполугрупп, имеющих дистрибутивную решетку конгруэнций.

Цепные алгебры изучаются и в других классах универсальных алгебр. В [7] охарактеризованы дистрибутивные двойные p -алгебры с данным свойством. В работе [8] описаны унары (алгебры с одной унарной операцией) с линейно упорядоченной решеткой конгруэнций. Цепные алгебры, сигнатура которых состоит из произвольного числа коммутирующих унарных операций были описаны в [9].

В настоящей работе изучаются, в частности, цепные алгебры в классе алгебр $\langle A, s, f \rangle$ с оператором f и основной операцией меньшинства $s(x, y, z)$, определенной специальным образом, описанным ниже. В общем случае, операцией меньшинства (см., например, [10]) называется тернарная операция $d(x, y, z)$, удовлетворяющая тождествам $d(x, y, y) = d(y, y, x) = d(y, x, y) = x$. Из определения следует, что операция меньшинства является мальцевской. Если же для операции $d(x, y, z)$ выполняются тождества $d(x, y, y) = d(y, y, x) = d(y, x, y) = y$, то она называется операцией большинства.

Алгеброй с операторами называется универсальная алгебра, сигнатура которой состоит из двух непустых непересекающихся частей: основной, которая может содержать произвольные операции, и дополнительной, состоящей из операторов. Операторами называются унарные операции, действующие как эндоморфизмы относительно основных операций, то есть перестановочные с основными операциями.

Решетки конгруэнций алгебр с операторами и близких к ним алгебр изучались в [11], [12].

Теория алгебр с операторами имеет очевидную связь с теорией унарных алгебр. Если f — унарная операция из сигнатуры Ω , то унар $\langle A, f \rangle$ называется унарным редуктом алгебры $\langle A, \Omega \rangle$. Естественный интерес вызывают связи между решеткой конгруэнций алгебры с операторами и решеткой конгруэнций ее унарного редукта. В частности, возникает вопрос об условиях, при которых данные решетки совпадают. В настоящей работе этот вопрос решается для класса алгебр $\langle A, s, f \rangle$, указанного выше.

В [13] на произвольном унаре $\langle A, f \rangle$ задается мальцевская операция $p(x, y, z)$, перестановочная с операцией f . Определение операции $p(x, y, z)$ (как и рассматриваемых далее операций $s(x, y, z)$ и $m(x, y, z)$) можно найти в [14]. Основные результаты, полученные при изучении свойств конгруэнций алгебр $\langle A, p, f \rangle$ с оператором f , приводятся в [15]. В их числе указаны необходимые и достаточные условия совпадения решетки конгруэнций алгебры из данного класса и решетки конгруэнций ее унарного редукта. В [16] описаны цепные алгебры в классе алгебр $\langle A, p, f \rangle$.

На основе подхода, предложенного в [13], на произвольном унаре $\langle A, f \rangle$ определяется тернарная операция $s(x, y, z)$, названная *симметрической*. Пусть $\langle A, f \rangle$ — произвольный унар и $x, y \in A$. Для любого элемента z унара $\langle A, f \rangle$ через $f^n(z)$ обозначается результат n -кратного применения операции f к элементу z ; при этом $f^0(z) = z$. Положим

$$M_{x,y} = \{n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid f^n(x) = f^n(y)\},$$

а также $k(x, y) = \min M_{x,y}$, если $M_{x,y} \neq \emptyset$, и $k(x, y) = \infty$, если $M_{x,y} = \emptyset$. Положим далее

$$s(x, y, z) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} z, & \text{если } k(x, y) < k(y, z); \\ y, & \text{если } k(x, y) = k(y, z); \\ x, & \text{если } k(x, y) > k(y, z). \end{cases} \quad (1)$$

Из определения вытекает, что данная операция перестановочна с операцией f . Как следствие, алгебра $\langle A, s, f \rangle$ является алгеброй с оператором f . Кроме того, из (1) следует, что операция s удовлетворяет тождествам $s(x, y, y) = s(y, y, x) = s(y, x, y) = x$, то есть является операцией меньшинства. Таким образом, класс алгебр $\langle A, s, f \rangle$ содержится в многообразии, определенном тождествами операции меньшинства и тождеством перестановочности

$f(s(x, y, z)) = s(f(x), f(y), f(z))$. Отсюда, в свою очередь, вытекает, что данный класс является конгруэнц-модулярным, поскольку операция меньшинства, как отмечалось выше, является мальцевской.

В [17] были описаны простые, абелевы и полиномиально полные алгебры в классе алгебр $\langle A, s, f \rangle$, в [18] — гамильтоновы алгебры данного класса.

Слабой операцией почти единогласия (weak near-unanimity operation) (см., например, [19]) называется идемпотентная n -арная операция d , где $n > 1$, для которой выполняются тождества $d(y, x, \dots, x) = d(x, y, \dots, x) = \dots = d(x, x, \dots, y)$. Алгебры, имеющие термальную слабую операцию почти единогласия находят применение в рамках алгебраического подхода [20] к исследованию вычислительной сложности ограничений задачи CSP (Constraint Satisfaction Problem) и в смежных областях алгебры. Поскольку, по определению (1), $s(x, x, x) = x$ и $s(x, x, y) = s(x, y, x) = s(y, x, x)$ для любых x, y , то операция s является тернарной слабой операцией почти единогласия.

Близким к приведенному выше понятию является операция почти единогласия (near-unanimity operation) (см., например, [21]), то есть, n -арная операция φ , удовлетворяющая тождествам $\varphi(x, \dots, x, y) = \varphi(x, \dots, x, y, x) = \dots = \varphi(y, x, \dots, x) = x$ ($n \geq 3$). В тернарном случае φ является операцией большинства. Алгебрам с термальной операцией почти единогласия уделяется большое внимание в современной универсальной алгебре (см., например, [22]), теории графов и теоретической информатике (в области, связанной с задачей CSP).

Сходным с указанным в (1) способом на произвольном унаре $\langle A, f \rangle$ задается операция большинства $m(x, y, z)$, перестановочная с операцией f (см. [23]). В [24] показано, что используя операцию $m(x, y, z)$, на произвольном унаре $\langle A, f \rangle$ для $n \geq 3$ можно определить семейство n -арных операций почти единогласия $g^{(n)}$, перестановочных с операцией f , по правилам: $g^{(3)}(x_1, x_2, x_3) = m(x_1, x_2, x_3)$ и $g^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = m(g^{(n-1)}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), x_{n-1}, x_n)$ для $n > 3$. Там же получены необходимые и достаточные условия совпадения решетки конгруэнций алгебры $\langle A, g^{(n)}, f \rangle$ и решетки конгруэнций ее унарного редукта $\langle A, f \rangle$.

2. Основные определения и обозначения

Обозначим через $\text{Con}A$ решетку конгруэнций универсальной алгебры A , а через ∇_A и Δ_A — единичную и нулевую конгруэнции алгебры A соответственно. Класс конгруэнции θ , порожденный элементом x , обозначим через $x\theta$.

Для произвольной конгруэнции θ на алгебре A будем называть нетривиальной парой этой конгруэнции пару таких элементов $x, y \in A$, что $x\theta y$ и $x \neq y$.

Конгруэнция $\bar{\alpha}$ произвольной алгебры $\langle A, \Omega \rangle$ называется расширением конгруэнции α подалгебры B алгебры $\langle A, \Omega \rangle$, если условие $x\bar{\alpha}y$ для $x, y \in A$ выполняется тогда и только тогда, когда $x\alpha y$, либо $x = y$.

Для любых чисел $n > 0$, $m \geq 0$ положим $C_n^m = \langle a | f^m(a) = f^{m+n}(a) \rangle$. Унар C_n^0 называется циклом длины n . Элемент унара называется циклическим, если подунар, порожденный этим элементом, является циклом; в противном случае будем называть элемент нециклическим. Через C_n^∞ обозначается объединение возрастающей последовательности унаров $C_n^{t_1} \subseteq C_n^{t_2} \subseteq \dots$, где $n > 0$ и $0 \leq t_1 < t_2 < \dots$. Элемент a унара называется периодическим, если $f^t(a) = f^{t+n}(a)$ для некоторых $t \geq 0$ и $n \geq 1$, и непериодическим в противном случае. Через $T(A)$ и $D(A)$ обозначаются множества всех периодических и непериодических элементов унара A соответственно. Унар $\langle A, f \rangle$ называется периодическим, если $A = T(A)$, и унаром без кручения, если $A = D(A)$. Если a — периодический элемент, то наименьшее из чисел t , для которых $f^t(a) = f^{t+n}(a)$ при некоторых $n \geq 1$, называется глубиной элемента a и обозначается через $t(a)$. Глубиной $t(A)$ унара A называется наибольшая из глубин его периодических элементов, если $T(A) \neq \emptyset$. Если множество $\{t(a) \mid a \in T(A)\}$ не ограничено, глубина унара принима-

ется формально равной бесконечности. Объединение двух непересекающихся унар B и C называется их суммой и обозначается через $B + C$.

Унар $\langle A, f \rangle$ называется связным, если для любых $x, y \in A$ выполняется условие $f^n(x) = f^m(y)$ при некоторых $n \geq 0, m \geq 0$. Максимальный по включению связный подунар унара A называется компонентой связности унара A . Элемент a унара называется узловым, если найдутся такие различные элементы b и c (возможно, циклические), отличные от a , что $f(b) = a = f(c)$. Элемент a унара $\langle A, f \rangle$ называется неподвижным, если $f(a) = a$. Связный унар с неподвижным элементом называется корнем. Корнем без нетривиальных узлов называется корень, не имеющий узловых элементов, кроме, может быть, неподвижного.

Пусть B — подунар произвольного унара $\langle A, f \rangle$. Через θ_B обозначается конгруэнция унара $\langle A, f \rangle$, определенная по правилу [25]: условие $x\theta_B y$ для $x, y \in A$ выполняется тогда и только тогда, когда либо $x = y$, либо $x, y \in B$.

Пусть v — узловый элемент унара $\langle A, f \rangle$. Через θ_v обозначается конгруэнция унара $\langle A, f \rangle$, определенная по правилу [16]: условие $x\theta_v y$ для любых $x, y \in A$ выполняется тогда и только тогда, когда либо $x = y$, либо $x, y \in f^{-1}(v)$.

Пусть $k \in \mathbb{N}$. Через σ_k обозначается конгруэнция $\text{Ker } f^k$ алгебры $\langle A, \Omega \cup \{f\} \rangle$ с оператором f и произвольной основной сигнатурой Ω . Положим также $\sigma_0 = \Delta_A$. Через σ обозначается конгруэнция на $\langle A, \Omega \cup \{f\} \rangle$, определенная как

$$x\sigma y \Leftrightarrow \exists s > 0 (f^s(x) = f^s(y)).$$

Пусть $\langle A, f \rangle$ — произвольный связный унар без кручения, имеющий единственный узловый элемент. Обозначим узловый элемент унара через v и определим на $\langle A, f \rangle$ функцию $r(x)$ для элементов $x \in A$ следующим образом: $r(x) = n$, если $f^n(x) = v$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, $r(x) = -n$, если $f^n(v) = x$ и $r(x) = 0$ при $x = v$.

3. Цепные алгебры в классе $\langle A, s, f \rangle$

Далее везде через $\langle A, s, f \rangle$ обозначается алгебра с оператором f и операцией $s(x, y, z)$, определенной по правилу (1).

ЛЕММА 1. Пусть $\langle A, f \rangle$ — связный периодический унар с единственным узловым элементом v , содержащий цикл неединичной длины h . Тогда решетка конгруэнций алгебры $\langle A, s, f \rangle$ является цепью.

Доказательство. Пусть $\theta \in \text{Con}\langle A, s, f \rangle$, $\theta \neq \nabla_A$. Предположим, что глубины всех элементов A , входящих в нетривиальные пары конгруэнции θ , ограничены глубиной некоторого элемента $c \in A$, и докажем, что $\theta = \sigma_{t(c)}$. Поскольку $\Delta_A = \sigma_0$, то рассмотрим случай $\theta \neq \Delta_A$.

Пусть $x, y \in A$, $x \neq y$ и $x\theta y$. По предположению, $t(x), t(y) \leq t(c)$. Тогда элементы $f^{t(c)}(x), f^{t(c)}(y)$ являются циклическими. Предположим, что $f^{t(c)}(x) \neq f^{t(c)}(y)$. Учитывая инъективность операции f на цикле, получаем, что $f^{t(c)+m}(x) \neq f^{t(c)+m}(y)$ для любого $m > 0$. Отсюда, $k(x, y) = \infty$, что противоречит пункту 2 леммы 11 [26]. Таким образом, $f^{t(c)}(x) = f^{t(c)}(y)$, откуда $x\sigma_{t(c)}y$ и $\theta \subseteq \sigma_{t(c)}$.

Пусть теперь $x\sigma_{t(c)}y$, откуда $f^{t(c)}(x) = f^{t(c)}(y)$. Так как $\sigma_{t(c)} \in \text{Con}\langle A, s, f \rangle$, то, по лемме 2 [27], элементы x, y не могут одновременно быть циклическими. Пусть, для определенности, x — нециклический элемент.

Так как $x\theta y$, то $|x\theta| > 1$. Тогда, по лемме 4 [27], для элемента $a = f^{h-r}(v)$, где r — остаток от деления $t(x)$ на h , выполняется условие $a\theta x$.

Рассмотрим сначала случай, когда элемент y не является циклическим.

Пусть $|y\theta| > 1$. Поскольку из равенства $f^{t(c)}(x) = f^{t(c)}(y)$ вытекает, что элементы x, y удовлетворяют условиям леммы 6 [27], то $t(x) \equiv t(y)(h)$. Тогда остаток от деления $t(y)$ на h равен r , а значит, по лемме 4 [27], имеем $a\theta y$. Отсюда, $x\theta y$.

Положим теперь $|y\theta| = 1$. Поскольку, по предположению, элемент c входит в нетривиальную пару конгруэнции θ , то $|c\theta| > 1$, а значит, по лемме 3 [27], найдется такой циклический элемент d , что $c\theta d$. Из условия $t(y) \leq t(c)$ вытекает, что $t(c) = t(y) + m$ для некоторого $m \geq 0$. Тогда $f^m(c)\theta f^m(d)$. Поскольку y не является циклическим элементом, то $t(y) > 0$, откуда $m < t(c)$, а значит, $f^m(c)$ также не является циклическим. Из условия $t(c) = t(y) + m$ следует, что $t(f^m(c)) = t(y)$.

Если $y = f^m(c)$, то $y\theta f^m(d)$, а поскольку $f^m(d)$ — циклический, то $|y\theta| > 1$, что противоречит условию $|y\theta| = 1$.

Пусть теперь $y \neq f^m(c)$. Так как $f^m(c)\theta f^m(d)$, то по следствию из леммы 6 [16], $k(f^m(c), f^m(d)) = t(f^m(c)) = t(y)$ и $k(y, f^m(c)) = \max\{t(y), t(f^m(c))\} = t(y)$. Тогда $p(y, f^m(c), f^m(d)) = f^m(d)$ и $p(y, f^m(c), f^m(c)) = y$, откуда $y\theta f^m(d)$, что снова приводит к противоречию.

Рассмотрим теперь случай, когда элемент y — циклический.

Из условия $|x\theta| > 1$, по лемме 3 [27], найдется такой циклический элемент a , что $a\theta x$. Отсюда, $f^{t(c)}(a)\theta f^{t(c)}(x)$, и с учетом условия $f^{t(c)}(x) = f^{t(c)}(y)$, имеем $f^{t(c)}(a)\theta f^{t(c)}(y)$. Поскольку оба последних элемента являются циклическими, то, по лемме 2 [27], получаем $f^{t(c)}(a) = f^{t(c)}(y)$. Тогда, с учетом инъективности операции f на цикле, верно равенство $a = y$, откуда $x\theta y$.

Таким образом, $\sigma_{t(c)} \subseteq \theta$, а значит, $\theta = \sigma_{t(c)}$.

Предположим теперь, что глубины элементов, принадлежащих нетривиальным парам конгруэнции θ не ограничены в совокупности, и докажем, что в этом случае $\theta = \sigma$.

Пусть $x, y \in A$, $x \neq y$ и $x\theta y$. Тогда, по пункту 2 леммы 11 [26], $k(x, y) < \infty$ и, следовательно, $f^n(x) = f^n(y)$ для некоторого $n > 0$. Отсюда, по определению конгруэнции σ , имеем $x\sigma y$ и $\theta \subseteq \sigma$.

Пусть теперь $x\sigma y$, то есть $f^n(x) = f^n(y)$ для некоторого $n > 0$. По предположению, найдется такой элемент c , входящий в некоторую нетривиальную пару $(b, c) \in \theta$, что $t(x) < t(c)$, $t(y) < t(c)$, $n < t(c)$. Из последнего неравенства следует, что $t(c) = n + m$ для некоторого $m > 0$. Отсюда, условие $f^n(x) = f^n(y)$ влечет $f^{t(c)}(x) = f^{t(c)}(y)$. Тогда, учитывая условия $t(x) < t(c)$, $t(y) < t(c)$ и рассуждая как выше при доказательстве утверждения $\sigma_{t(c)} \subseteq \theta$, получаем, что $x\theta y$ и, значит, $\sigma \subseteq \theta$. Окончательно, $\theta = \sigma$.

Таким образом, любая нетривиальная конгруэнция алгебры $\langle A, s, f \rangle$ совпадает либо с σ_n для некоторого $n > 0$, либо с конгруэнцией σ . Тогда утверждение леммы вытекает из замечания 2 [28] и того факта, что отношение σ является объединением возрастающей цепи всех конгруэнций вида σ_n . \square

ЛЕММА 2. Пусть $\langle A, f \rangle$ — произвольный связный унар без кручения, имеющий единственный узловой элемент. Тогда для любых различных $x, y \in A$ и любого $n > 0$ условие $x\sigma_n y$ эквивалентно условию $0 < r(x) = r(y) \leq n$.

Доказательство. Пусть $x, y \in A$, $x \neq y$, $n > 0$. Предположим, что выполняется условие $0 < r(x) = r(y) \leq n$. Обозначим $r = r(x) = r(y)$. По условию, $n = r + s$ для некоторого $s \geq 0$. Так как $r > 0$, то $f^r(x) = f^r(y) = v$, где v — узловой элемент унара. Тогда $f^{r+s}(x) = f^{r+s}(y)$, откуда $f^n(x) = f^n(y)$ и, следовательно, $x\sigma_n y$.

Пусть теперь выполнено условие $x\sigma_n y$. Тогда $f^n(x) = f^n(y)$. Предположение о том, что $f^n(x) \notin \langle v \rangle$ приводит к противоречию с условием единственности узлового элемента в унаре $\langle A, f \rangle$. Отсюда, $f^n(x) = f^k(v) = f^n(y)$ для некоторого $k \geq 0$, и по определению функции $r(x)$, имеем $0 < r(x) = r(y) \leq n$. \square

ЛЕММА 3. Пусть $\langle A, f \rangle$ — произвольный связный унар без кручения, имеющий единственный узловой элемент. Тогда решетка конгруэнций алгебры $\langle A, s, f \rangle$ является цепью.

Доказательство. Пусть θ — произвольная нетривиальная конгруэнция алгебры $\langle A, s, f \rangle$ и x, y — произвольные различные элементы множества A .

Предположим, что найдется такая пара элементов $(b, c) \in \theta$, что $r(b) \neq r(c)$. Тогда, по лемме 12 [16], $k(b, c) = \infty$. Отсюда, по определению операции s , имеем $s(x, b, c) \in \{b, c\}$, $s(y, b, c) \in \{b, c\}$. Тогда $s(x, b, c)\theta s(x, b, b)$, откуда $b\theta x$. Аналогично получаем $b\theta y$. Отсюда $\theta = \nabla_A$, что противоречит выбору θ . Таким образом, для любой пары $(b, c) \in \theta$ имеем $r(b) = r(c)$.

Если $r(b) > 0$, то $f^{r(b)}(b) = v = f^{r(b)}(c)$. Тогда $k(b, c) \leq r(b)$. Предположив, что $k(b, c) < r(b)$, получаем противоречие с условием единственности узлового элемента. Отсюда, $k(b, c) = r(b)$.

Если же $r(b) \leq 0$, то $b = c$ и $k(b, c) = 0$.

Пусть $z \in A$ — такой элемент, что $r(z) = r(c) = r(b)$. Рассуждая, как выше, получаем, что при $r(b) > 0$ верно $k(z, b) = r(b)$, а при $r(b) \leq 0$ выполняется $k(z, b) = 0$. Тогда в любом из этих двух случаев имеем $k(z, b) = k(b, c)$, что, по определению операции s , влечет равенство $s(z, b, c) = b$. Тогда $b = p(z, b, c)\theta p(z, b, b) = z$.

Изложенное выше, с учетом леммы 2, показывает, что любая нетривиальная конгруэнция алгебры $\langle A, s, f \rangle$ совпадает с конгруэнцией σ_n при подходящем n . Окончательно, утверждение леммы вытекает из замечания 2 [28]. \square

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\langle A, s, f \rangle$ — алгебра с оператором f и операцией $s(x, y, z)$, определенной по правилу (1). Решетка конгруэнций алгебры $\langle A, s, f \rangle$ является цепью в том и только в том случае, когда данная алгебра подпрямно неразложима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\text{Con}\langle A, s, f \rangle$ — цепь. Тогда, поскольку по теореме 1 [27], решетка $\text{Con}\langle A, s, f \rangle$ является атомной, то в ней существует атом, содержащийся во всех ненулевых конгруэнциях данной алгебры. Отсюда, алгебра $\langle A, s, f \rangle$ подпрямно неразложима.

Пусть теперь алгебра $\langle A, s, f \rangle$ подпрямно неразложима. Тогда, по теореме 3 [27], унар $\langle A, f \rangle$ удовлетворяет одному из условий 1) – 5) этой теоремы. Рассмотрим возникающие случаи.

Случай 1. Операция f на унаре $\langle A, f \rangle$ инъективна.

В этом случае, по теореме 9 [17], алгебра $\langle A, s, f \rangle$ является конгруэнц-простой, и, следовательно, $\text{Con}\langle A, s, f \rangle$ есть цепь.

Случай 2. Унар $\langle A, f \rangle$ изоморфен C_1^t , где $t \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

При этом условии, по следствию 1 из предложения 3 [28], решетка конгруэнций алгебры $\langle A, s, f \rangle$ является цепью длины $1 + t$.

Случай 3. $\langle A, f \rangle$ есть связный периодический унар, имеющий единственный узловой элемент v , который является циклическим.

Здесь из условий связности и периодичности вытекает, что унар $\langle A, f \rangle$ содержит подунар B , изоморфный C_n^0 для некоторого $n > 0$.

Если $n > 1$, то решетка $\text{Con}\langle A, s, f \rangle$ является цепью по лемме 1.

При $n = 1$ унар $\langle A, f \rangle$ является корнем без нетривиальных узлов. Тогда, по пункту 4 леммы 11 [26], любая неединичная конгруэнция алгебры $\langle A, s, f \rangle$ имеет вид σ_n для некоторого $n \geq 0$. В этом случае, по замечанию 2 [28], совокупность всех неединичных конгруэнций образует цепь в решетке $\text{Con}\langle A, s, f \rangle$. По лемме 2 [28], единичная конгруэнция алгебры $\langle A, s, f \rangle$, унарный редукт которой является корнем, совпадает с конгруэнцией σ . Отсюда, решетка $\text{Con}\langle A, s, f \rangle$ является цепью.

Случай 4. $\langle A, f \rangle$ — связный унар без кручения, имеющий единственный узловой элемент.

При этом условии решетка $\text{Con}\langle A, s, f \rangle$ является цепью по лемме 3.

Случай 5. Унар $\langle A, f \rangle$ является суммой одной компоненты связности B , имеющей вид, указанный в одном из случаев 2–4, и произвольного подунара C , операция f на котором инъективна.

В данном случае, по пункту 8 леммы 11 [26], любая нетривиальная конгруэнция θ алгебры $\langle A, s, f \rangle$ является расширением некоторой конгруэнции ее подалгебры $\langle B, s, f \rangle$. Как следствие, решетка конгруэнций алгебры $\langle A, s, f \rangle$ изоморфна решетке $\text{Con}\langle B, s, f \rangle$ с присоединенной внешней единицей, а значит, по доказанному выше в случаях 2–4, $\text{Con}\langle A, s, f \rangle$ является цепью. \square

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\langle A, s, f \rangle$ — алгебра с оператором f и операцией $s(x, y, z)$, определенной по правилу (1). Решетка конгруэнций алгебры $\langle A, s, f \rangle$ является цепью тогда и только тогда, когда унар $\langle A, f \rangle$ удовлетворяет одному из следующих условий:

- 1) $\langle A, f \rangle$ — унар с инъективной операцией;
- 2) $\langle A, f \rangle$ изоморфен C_1^t , где $t \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$;
- 3) $\langle A, f \rangle$ — связный периодический унар, имеющий единственный узловой элемент, который является циклическим;
- 4) $\langle A, f \rangle$ — связный унар без кручения, имеющий единственный узловой элемент;
- 5) $\langle A, f \rangle$ является суммой одной компоненты связности, имеющей вид, указанный в одном из случаев 2–4, и произвольного подунара с инъективной операцией.

Вытекает из теоремы 1 и теоремы 3 [27].

4. Алгебры $\langle A, s, f \rangle$, каждая конгруэнция которых является конгруэнцией их унарного редукта

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\langle A, s, f \rangle$ — алгебра с оператором f и операцией $s(x, y, z)$, определенной по правилу (1). Каждая конгруэнция унара $\langle A, f \rangle$ является конгруэнцией алгебры $\langle A, s, f \rangle$ тогда и только тогда, когда $\langle A, f \rangle$ изоморфен одному из следующих унаров:

- 1) C_p^0 , где p — простое число;
- 2) $C_1^0 + C_1^0$;
- 3) C_1^t , где $t \in \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{\infty\}$.

Доказательство. Достаточность утверждения следует из предложения 2 [24]. Докажем его необходимость.

Пусть унар $\langle A, f \rangle$ не изоморфен ни одному из унаров, перечисленных в условии теоремы. Достаточно найти такую его конгруэнцию, которая не является стабильной относительно операции $s(x, y, z)$.

Пусть $\langle A, f \rangle$ — унар без кручения. Тогда он содержит подунар $B \cong F_1$. Отсюда следует существование на подунаре B нетривиальной конгруэнции θ . Так как операция f инъективна на B , то по теореме 9 [17], алгебра $\langle B, s, f \rangle$ конгруэнц-проста. Таким образом, отношение θ не стабильно относительно операции $s(x, y, z)$, а значит, не будет стабильно и его расширение $\bar{\theta} = \theta \cup \Delta_A$, рассматриваемое, как конгруэнция унара $\langle A, f \rangle$.

Пусть теперь унар $\langle A, f \rangle$ содержит подунар $B \cong C_n^0$ для некоторого $n > 0$.

Положим $n > 1$. Если $B = A$, то, по условию, n — составное число. Так как любая конгруэнция на унаре, являющемся циклом, определяется некоторым делителем длины этого цикла, то, выбрав делитель, не совпадающий с n и 1, получаем, что унар $\langle A, f \rangle$ имеет нетривиальную конгруэнцию θ . В то же время, в силу инъективности операции f на B , как и выше, отношение θ не стабильно относительно операции $s(x, y, z)$.

Если же B — собственный подунар унара $\langle A, f \rangle$, то найдется элемент $a \in A \setminus B$. Кроме того, так как $n > 1$, то для некоторых различных элементов $b, c \in B$ имеем $b\theta_B c$. По лемме 1 [24], $k(b, c) = \infty$. Тогда, по определению операции s , верно утверждение $s(b, c, a) \in \{b, c\}$.

С другой стороны, $s(b, b, a) = a$. Предполагая выполнение утверждения $\theta_B \in \text{Con}\langle A, s, f \rangle$, получаем $a = s(b, b, a)\theta_B s(b, c, a) \in \{b, c\}$, что противоречит выбору элемента a . Таким образом, конгруэнция θ_B унара $\langle A, f \rangle$ не стабильна относительно операции s .

Пусть теперь $n = 1$. Рассмотрим сначала случай, когда унар $\langle A, f \rangle$ содержит более одного одноэлементного подунара. В этом случае в $\langle A, f \rangle$ найдется двухэлементный подунар $D = \{b, c\}$, где $f(b) = b$ и $f(c) = c$. По условию, D будет собственным подунаром унара $\langle A, f \rangle$. Тогда найдется элемент $a \in A \setminus D$. Кроме того, по определению конгруэнции θ_D на унаре $\langle A, f \rangle$ имеем $b\theta_D c$. Так как элементы b и c лежат в разных компонентах связности, то $k(b, c) = \infty$. Отсюда, как и выше, предполагая выполнение утверждения $\theta_D \in \text{Con}\langle A, s, f \rangle$, получаем $a = s(b, b, a)\theta_D s(b, c, a) \in \{b, c\}$, что противоречит выбору элемента a .

Пусть теперь унар $\langle A, f \rangle$ содержит единственный одноэлементный подунар. Предположим сначала, что унар $\langle A, f \rangle$ — связный. Тогда он является корнем. Так как по условию он неизоморфен унару C_1^t ни при каком $t \in \{0\} \cup \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, то $\langle A, f \rangle$ содержит узловой элемент v . Тогда найдутся такие отличные от v элементы $b, c \in A$, что $b \neq c$, $f(b) = v$, $f(c) = v$. Обозначим через K подунар унара $\langle A, f \rangle$, порожденный элементом b . Очевидно, $v \in K$ и $c \notin K$. Отсюда, $v\theta_K b$ и $(c, v) \notin \theta_K$. Поскольку $\langle A, f \rangle$ — корень, то подунар K изоморфен $C_1^{t(b)}$. Тогда, по лемме 10 [28], имеем $k(b, v) = t(b) > 0$. Аналогично получаем $k(v, c) = t(c) > 0$. При этом, из условия $f(b) = v = f(c)$ имеем $t(b) = t(c)$. Отсюда, по определению операции $s(x, y, z)$, получаем $s(b, v, c) = v$. С другой стороны, $s(b, b, c) = c$. Предполагая выполнение утверждения $\theta_K \in \text{Con}\langle A, s, f \rangle$, получаем, что $v = s(b, v, c)\theta_K s(b, b, c) = c$, что противоречит условию $(c, v) \notin \theta_K$. Таким образом, конгруэнция θ_K унара $\langle A, f \rangle$ не стабильна относительно операции $s(x, y, z)$.

Если же унар $\langle A, f \rangle$ несвязный, то кроме компоненты связности S , содержащей его одноэлементный подунар, он имеет и другую компоненту связности P . Тогда, в силу единственности одноэлементного подунара в унаре $\langle A, f \rangle$, компонента связности P имеет либо подунар, изоморфный F_1 , либо подунар B , изоморфный C_n^0 для некоторого $n > 1$, что приводит к одному из рассмотренных выше случаев (за исключением ситуации, когда n является простым числом). Если же n — простое, то рассуждая как выше (в случае, когда B — собственный подунар унара $\langle A, f \rangle$), можно выбрать в качестве элемента $a \in A \setminus B$ любой элемент компоненты связности S , и это снова приводит к тому, что конгруэнция θ_B унара $\langle A, f \rangle$ не стабильна относительно операции s . \square

СЛЕДСТВИЕ 2. Решетка конгруэнций алгебры $\langle A, s, f \rangle$ совпадает с решеткой конгруэнций ее унарного редукта $\langle A, f \rangle$ тогда и только тогда, когда $\langle A, f \rangle$ изоморфен одному из следующих унаров:

- 1) C_p^0 , где p — простое число;
- 2) $C_1^0 + C_1^0$;
- 3) C_1^t , где $t \in \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{\infty\}$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Tamura T. Commutative semigroups whose lattice of congruences is a chain // Bull. Soc. Math. France, 97 (1969), 369–380.
2. Schein B.M. Commutative semigroups where congruences form a chain // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys. 17 (1969), 523–527.
3. Schein B.M. Corrigenda to "Commutative semigroups where congruences form a chain" // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys. 23 (1975), 1247–1248.
4. Nagy A., Jones P.R. Permutative Semigroups Whose Congruences Form a Chain // Semigroup Forum. 2004. Vol. 69. P. 446–456.

5. Kozhukhov I. B. Left chain semigroups // *Semigroup Forum*. 1981. Vol. 22. P. 1–8. <https://doi.org/10.1007/BF02572781>
6. Popovich A. L., Jones P. R. On congruence lattices of nilsemigroups // *Semigroup Forum*. 2017. Vol. 95, No. 2. P. 314–320.
7. Goldberg M. S. Distributive double p-algebras whose congruence lattices are chains // *Algebra Universalis*. 1983. Vol. 17. P. 208–215. <https://doi.org/10.1007/BF01194530>
8. Егорова Д. П. Структура конгруэнций унарной алгебры // Упорядоченные множества и решетки. Вып. 5. Межвуз. науч. сб. Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 1978. С. 11–44.
9. Карташова А. В. Коммутативные унарные алгебры с линейно упорядоченной решеткой конгруэнций // *Мат. заметки*. 2014. Т. 95, № 1. С. 80–92.
10. Szendrei A. Clones in universal algebra. Montréal: Les presses de l'Université de Montréal, 1986. 166 p.
11. Hyndman J., Nation J. B., Nishida J. Congruence lattices of semilattices with operators // *Studia Logica*. 2016. Vol. 104. № 2. P. 305–316.
12. Garcia P., Esteva F. On Ockham Algebras: Congruence Lattices and Subdirectly Irreducible Algebras // *Studia Logica*. 1995. Vol. 55. P. 319–346.
13. Карташов В. К. Об унарах с мальцевской операцией // Универсальная алгебра и ее приложения: Тез. докл. межд. семинара, посв. памяти проф. Л. А. Скорнякова. Волгоград: Перемена, 1999. С. 31–32.
14. Усольцев В. Л. О рисовском замыкании в некоторых классах алгебр с оператором // *Чебышевский сборник*. 2021. Том 22, № 2(78). С. 271–287.
15. Усольцев В. Л. Унары с тернарной мальцевской операцией // *Успехи математических наук*. 2008. Т. 63, вып. 5. С. 201–202.
16. Усольцев В. Л. О подпрямо неразложимых унарах с мальцевской операцией // *Изв. Волгоградского гос. пед. ун-та, сер. "Ест. и физ.-мат. науки"*. 2005. № 4(13). С. 17–24.
17. Усольцев В. Л. О полиномиально полных и абелевых унарах с мальцевской операцией // *Уч. зап. Орловского гос. ун-та*. 2012. Т. 6(50). Ч. 2. С. 229–236.
18. Усольцев В. Л. О гамильтоновых тернарных алгебрах с операторами // *Чебышевский сб.* 2014. Т. 15, вып. 3(51). С. 100–113.
19. Maróti M., McKenzie R. Existence theorems for weakly symmetric operations // *Algebra Universalis*. 2008. Vol. 59. № 3–4. P. 463–489.
20. Bulatov A., Krokhin A., Jeavons P. The complexity of constraint satisfaction: An algebraic approach // *Structural Theory of Automata, Semigroups and Universal Algebra*. Berlin: Springer-Verlag, 2005. P. 181–213.
21. Baker K. A., Pixley A. Polynomial interpolation and the Chinese Remainder Theorem for algebraic systems // *Math. Zeitschrift*. 1975. V. 143. P. 165–174.
22. Marković P., McKenzie R. Few subpowers, congruence distributivity and near-unanimity terms // *Algebra Universalis*. 2008. Vol. 58. P. 119–128.

23. Usol'tsev, V. L. Subdirectly Irreducible Algebras in One Class of Algebras with One Operator and the Main Near-Unanimity Operation // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2021. Vol. 42, № 1. P. 206–216.
24. Усольцев В. Л. О решетках конгруэнций алгебр с одним оператором и основной операцией почти единогласия // *Научно-техн. вестник Поволжья*. 2016. Вып. 2. С. 28–30.
25. Wenzel G. H. Subdirect irreducibility and equational compactness in unary algebras $\langle A; f \rangle$ // *Arch. Math. (Basel)* 1970. Vol. 21. P. 256–264.
26. Лата А. Н. О конгруэнц-когерентных алгебрах Риса и алгебрах с оператором // *Чебышевский сб.* 2017. Т. 18, вып. 2(62). С. 154–172.
27. Усольцев В. Л. Подпрямая неразложимость и атомы решеток конгруэнций алгебр с оператором и симметрической основной операцией // *Чебышевский сб.* 2021. Т. 22, вып. 2(78). С. 257–270.
28. Usoltsev V. L. Simple and pseudosimple algebras with operators // *Journal of Mathematical Sciences*. 2010. Vol. 164, № 2. P. 281–293.

REFERENCES

1. Tamura, T. 1969, “Commutative semigroups whose lattice of congruences is a chain”, *Bulletin de la Société Mathématique de France*, vol. 97, pp. 369–380. DOI: 10.24033/bsmf.1689
2. Schein, B. M. 1969, “Commutative semigroups where congruences form a chain”, *Bulletin L'Académie Polonaise des Science, Série des Sciences Mathématiques, Astronomiques et Physiques*, vol. 17, pp. 523–527.
3. Schein, B. M. 1975, “Corrigenda to “Commutative semigroups where congruences form a chain””, *Bulletin L'Académie Polonaise des Science, Série des Sciences Mathématiques, Astronomiques et Physiques*, vol. 23, pp. 1247–1248.
4. Nagy, A. & Jones, P. R. 2004, “Permutative Semigroups Whose Congruences Form a Chain”, *Semigroup Forum*, vol. 69. pp. 446–456. DOI: 10.1007/s00233-004-0131-3
5. Kozhukhov, I. B. 1981, “Left chain semigroups”, *Semigroup Forum*, vol. 22, pp. 1–8. DOI: 10.1007/BF02572781
6. Popovich, A. L. & Jones, P. R. 2017, “On congruence lattices of nilsemigroups”, *Semigroup Forum*, vol. 95, no. 2, pp. 314–320. DOI: 10.1007/s00233-016-9837-2
7. Goldberg, M. S. 1983, “Distributive double p-algebras whose congruence lattices are chains”, *Algebra Universalis*, vol. 17, pp. 208–215. DOI: 10.1007/BF01194530
8. Egorova, D. P. 1978, “The congruence lattice of a unary algebra”, *Uporyadochennye mnojestva i reshetki: Mezhvuzovskii nauchnii sbornik (Ordered sets and lattices)*, Saratov, no. 5, pp. 11–44. (Russian)
9. Kartashova, A. V. 2014, “On commutative unary algebras with totally ordered congruence lattice”, *Mathematical Notes*, vol. 95, no. 1, pp. 67–77. DOI: 10.1134/S0001434614010076
10. Szendrei, A. 1986, “Clones in universal algebra”, *Les presses de l'Université de Montréal*, Montréal, 166 p.

11. Hyndman J., Nation J.B. & Nishida J. 2016, "Congruence lattices of semilattices with operators", *Studia Logica*, vol. 104, no 2, pp. 305–316. DOI: 10.1007/s11225-015-9641-0
12. Garcia, P. & Esteva, F. 1995, "On Ockham Algebras: Congruence Lattices and Subdirectly Irreducible Algebras", *Studia Logica*, vol. 55, pp. 319–346. DOI: 10.1007/BF01061240
13. Kartashov, V.K. 1999, "On unars with Mal'tsev operation", *Universal'naya algebra i ee prilozheniya: Tezisy soobshcheniy uchastnikov mezhdunarodnogo seminara, posvyashchennogo pamyati prof. Mosk. gos. un-ta L.A. Skorniyakova (Universal algebra and application: theses of Int. workshop dedicated memory of prof. L. A. Skorniyakov)*, Volgograd, pp. 31–32. (Russian)
14. Usoltsev, V.L. 2021, "On Rees closure in some classes of algebras with an operator", *Chebyshevskiy sbornik*, vol. 22, no. 2(78), pp. 271–287. (Russian) DOI: 10.22405/2226-8383-2018-22-2-271-287
15. Usoltsev, V.L. 2008, "Unars with ternary Mal'tsev operation", *Uspekhi matematicheskikh nauk*, vol. 63, no. 5, pp. 201–202; translated in *Russian Mathematical Surveys*, 2008, vol. 63, no. 5, pp. 986–987. DOI: 10.1070/RM2008v063n05ABEH004572
16. Usoltsev, V.L. 2005, "On subdirectly irreducible unars with Mal'tsev operation", *Izvestiya Volgogradskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta. Seriya "Estestvennye i fiziko-matematicheskie nauki"*, vol. 4, pp. 17–24 (Russian).
17. Usoltsev, V.L. 2012, "On polynomially complete and Abelian unars with Mal'tsev operation", *Uchenye Zapiski Orlovskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, vol. 6(50), part 2, pp. 229–236. (Russian)
18. Usoltsev, V.L. 2014, "On Hamiltonian ternary algebras with operators", *Chebyshevskiy sbornik*, vol. 15, no. 3(51), pp. 100–113. (Russian) DOI: 10.22405/2226-8383-2014-15-3-100-113
19. Maróti M., McKenzie R. 2008, "Existence theorems for weakly symmetric operations", *Algebra Universalis*, vol. 59, no. 3-4, pp. 463–489. DOI: 10.1007/s00012-008-2122-9
20. Bulatov A., Krokhin A. & Jeavons P. 2005, "The complexity of constraint satisfaction: An algebraic approach", *Structural Theory of Automata, Semigroups and Universal Algebra*, Berlin, Springer-Verlag, pp.181–213. DOI: 10.1007/1-4020-3817-8_8
21. Baker, K. A. & Pixley, A. 1975, "Polynomial interpolation and the Chinese Remainder Theorem for algebraic systems", *Math. Zeitschrift*, vol. 143, pp. 165–174. DOI: 10.1007/BF01187059
22. Marković, P. & McKenzie, R. 2008, "Few subpowers, congruence distributivity and near-unanimity terms", *Algebra Universalis*, vol. 58, pp. 119–128. DOI: 10.1007/s00012-008-2049-1
23. Usoltsev, V.L. 2021, "Subdirectly Irreducible Algebras in One Class of Algebras with One Operator and the Main Near-Unanimity Operation", *Lobachevskii Journal of Mathematics*, vol. 42, no. 1, pp. 206–216. DOI: 10.1134/S199508022101025X
24. Usoltsev, V.L. 2016, "On congruence lattices of algebras with one operator and basic near-unanimity operation", *Nauchno-tekhnicheskiiy vestnik Povolzhya*, vol. 2, pp. 28–30 (Russian).
25. Wenzel, G.H. 1970, "Subdirect irreducibility and equational compactness in unary algebras $\langle A; f \rangle$ ", *Archiv der Mathematik, Basel*, vol. 21, pp. 256–264. DOI: 10.1007/BF01220912
26. Lata, A.N. 2017, "On congruence coherent Rees algebras and algebras with an operator", *Chebyshevskiy sbornik*, vol. 18, no. 2(62), pp. 154–172. (Russian) DOI: 10.22405/2226-8383-2017-18-2-154-172

-
27. Usoltsev, V.L. 2021, "The subdirect irreducibility and the atoms of congruence lattices of algebras with one operator and the symmetric main operation", *Chebyshevskiy sbornik*, vol. 22, no. 2(78), pp. 257–270. (Russian) DOI: 10.22405/2226-8383-2021-22-2-257-270
 28. Usoltsev, V.L. 2010, "Simple and pseudosimple algebras with operators", *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 164, no. 2, pp. 281-293. DOI: 10.1007/S1095800997306

Получено: 18.12.2023

Принято в печать: 21.03.2024

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 25. Выпуск 1.

УДК 519.713.2

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-1-116-126

О проблеме абстрактной характеристики универсальных графовых автоматов

Р. А. Фарахутдинов

Фарахутдинов Ренат Абуханович — аспирант, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского (г. Саратов).

e-mail: renatfara@mail.ru

Аннотация

Данная работа посвящена алгебраической теории автоматов, являющейся одним из разделов математической кибернетики, в котором изучаются устройства преобразования информации, возникающие во многих прикладных задачах. В зависимости от исследуемых задач рассматриваются автоматы, у которых основные множества наделены дополнительными математическими структурами, согласованными с функциями автомата. В настоящей работе исследуются автоматы над графами — графовые автоматы, множество состояний и множество выходных сигналов которых наделены математическими структурами графов. Для графов G и H универсальный графовый автомат $\text{Atm}(G, H)$ является универсально притягивающим объектом в категории графовых автоматов. Полугруппа входных сигналов такого автомата имеет вид $S = \text{End } G \times \text{Hom}(G, H)$. Естественно возникает интерес к исследованию вопроса абстрактной характеристики универсальных графовых автоматов: при каких условиях абстрактный автомат A будет изоморфен универсальному графовому автомату $\text{Atm}(G, H)$ над графами G из класса \mathbf{K}_1 , H из класса \mathbf{K}_2 ? Целью работы является исследование вопроса элементарной аксиоматизации некоторых классов графовых автоматов. Доказана невозможность элементарной аксиоматизации средствами языка узкого исчисления предикатов некоторых широких классов таких автоматов над рефлексивными графами.

Ключевые слова: автомат, полугруппа, граф, абстрактная характеристика, аксиоматизация.

Библиография: 18 названий.

Для цитирования:

Р. А. Фарахутдинов. О проблеме абстрактной характеристики универсальных графовых автоматов // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 1, с. 116–126.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 25. No. 1.

UDC 519.713.2

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-1-116-126

On the problem of abstract characterization of universal graphic automata

R. A. Farakhutdinov

Farakhutdinov Renat Abukhanovich — postgraduate student, Saratov State University (Saratov).

e-mail: renatfara@mail.ru

Abstract

This work is devoted to the algebraic theory of automata, which is one of the branches of mathematical cybernetics, which studies information transformation devices that arise in many applied problems. Depending on a specific problem, automata are considered, in which the main sets are equipped with additional mathematical structures consistent with the functions of an automaton. In this work, we study automata over graphs — graphic automata, that is, automata in which the set of states and the set of output signals are equipped with the mathematical structure of graphs. For graphs G and H universal graphic automaton $\text{Atm}(G, H)$ is a universally attracting object in the category of semigroup automata. The input signal semigroup of such automaton is $S = \text{End } G \times \text{Hom}(G, H)$. Naturally, interest arises in studying the question of abstract characterization of universal graph automata: under what conditions will the abstract automaton A be isomorphic to the universal graph automaton $\text{Atm}(G, H)$ over graphs G from the class \mathbf{K}_1 , H from class \mathbf{K}_2 ? The purpose of the work is to study the issue of elementary axiomatization of some classes of graphic automata. The impossibility of elementary axiomatization by means of the language of restricted predicate calculus of some wide classes of such automata over reflexive graphs is proved.

Keywords: automaton, semigroup, graph, abstract characterization, axiomatization.

Bibliography: 18 titles.

For citation:

R. A. Farakhutdinov, 2024, “On the problem of abstract characterization of universal graphic automata”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 1, pp. 116–126.

1. Введение

Одним из направлений современной алгебры является исследование автоматов в категориях [1], то есть автоматов у которых множества состояний и выходных сигналов наделены математическими структурами из некоторой категории \mathbf{K} , а функции переходов и выходов являются морфизмами этой категории. Такие алгебраические системы были предметом изучения многих известных алгебраистов, таких как Б. И. Плоткин [2], А. Г. Пинус [3, 4], Л. М. Глушкин [5, 6], Ю. М. Важенин [7, 8], А. В. Михалёв [9] и многих других.

В данной работе исследуются автоматы над графами, которые называются графовыми автоматами. В категории таких автоматов для любых графов $G_1, G_2 \in \mathbf{Gr}$ найдётся универсально притягивающий объект [1] $\text{Atm}(G_1, G_2)$ с полугруппой входных сигналов $\text{End } G_1 \times \text{Hom}(G_1, G_2)$, который называется универсальным графовым автоматом над графами G_1 и G_2 .

В своей широко известной работе [10] С. Улам обозначил проблему характеристики математических объектов с помощью их эндоморфизмов и автоморфизмов. Принимая во внимание результаты Б. Йонссона по проблеме абстрактной характеристики алгебр отношений [11], возникает интерес к исследованию следующей проблемы абстрактной характеристики универсальных графовых автоматов: при каких условиях абстрактный автомат A будет изоморфен некоторому универсальному графовому автомату $\text{Atm}(G_1, G_2)$ над графами G_1 из класса \mathbf{K}_1 , G_2 из класса \mathbf{K}_2 ? Основным результатом данной работы является доказательство невозможности решения этой проблемы средствами языка узкого исчисления предикатов (УИП) для универсальных графовых автоматов над некоторыми широкими классами рефлексивных графов.

2. Основные понятия и определения

В работе используется общепринятая терминология теории автоматов из [1], теории графов из [12] и теории алгебраических систем из [13].

Далее всюду под графом будем понимать рефлексивный ориентированный граф $G = (X, \rho)$, где X — непустое множество вершин и $\rho \subset X \times X$ — множество дуг графа, удовлетворяющее условию $(x, x) \in \rho$ для всех $x \in X$ [12]. Дугу $(x, y) \in \rho$ будем называть собственной, если $(y, x) \notin \rho$. Граф называется квазибесконтурным, если ни одна его собственная дуга не лежит ни в каком контуре.

Графы $G_0(X) = (X, \Delta_X)$, $G_1(X) = (X, X^2)$ будем называть тривиальными рефлексивными графами. Ясно, что любое преобразование множества X является эндоморфизмом этих графов, и, следовательно, их полугруппа эндоморфизмов совпадает с множеством $T(X)$ всех преобразований множества X . Класс тривиальных рефлексивных графов обозначим \mathbf{K}_{tr} .

Полугрупповой автомат $A = (X_1, S, X_2, \star, \diamond)$ называется графовым [1], если множество состояний X_1 и множество выходных сигналов X_2 наделены структурами графов $G_1 = (X_1, \rho_1)$ и $G_2 = (X_2, \rho_2)$, что для любого входного сигнала $s \in S$ функция переходов $\delta_s = x \star s$ ($x \in X_1$) является эндоморфизмом графа G_1 и функция выходов $\lambda_s = x \diamond s$ ($x \in X_1$) является гомоморфизмом графа G_1 в граф G_2 . Символически такие автоматы обозначаются $A = (G_1, S, G_2, \star, \diamond)$.

Графовый автомат $\text{Atm}(G_1, G_2) = (G_1, \text{End } G_1 \times \text{Hom}(G_1, G_2), G_2, \star, \diamond)$ с операциями $x \star \varphi = \varphi(x)$ и $x \diamond \varphi = \psi(x)$ (где $x \in X_1$, $\varphi \in \text{End } G_1$, $\psi \in \text{Hom}(G_1, G_2)$) является универсально притягивающим объектом в категории графовых автоматов [1], поэтому его называют универсальным графовым автоматом.

Мощностью графового автомата $A = (G_1, S, G_2, \star, \diamond)$ над графами $G_1 = (X_1, \rho_1)$ и $G_2 = (X_2, \rho_2)$ называется кардинал $|A| = |X_1| + |S| + |X_2|$. Автомат A называется конечным, счётным или несчётным, если его мощность $|A|$ — конечный, счётный или несчётный кардинал соответственно.

3. Задача элементарной аксиоматизации

Для классов графов \mathbf{K}_1 и \mathbf{K}_2 через $\text{Atm}(\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2)$ обозначим класс всех автоматов, изоморфных универсальным графовым автоматам $\text{Atm}(G_1, G_2)$ для графов $G_1 \in \mathbf{K}_1$ и $G_2 \in \mathbf{K}_2$. Естественно возникает вопрос об абстрактной характеристике автоматов из класса $\text{Atm}(\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2)$, который формулируется следующим образом [11]: при каких условиях абстрактный автомат будет изоморфен некоторому автомату из класса $\text{Atm}(\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2)$? В работах [14, 15] приводятся решения этой задачи для полуавтоматов (автоматов без выходов) над классами графов квазипорядка \mathbf{K}_{qo} и для класса рефлексивных квазибесконтурных графов \mathbf{K}_{rqa} . Оба этих результата, помимо аксиом языка узкого исчисления предикатов, используют условия,

формулируемые на языке исчисления предикатов более высокого порядка. Целью настоящей работы является доказательство невозможности аксиоматизации средствами языка УИП классов автоматов $\text{Atm}(\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2)$ для некоторых широких классов графов \mathbf{K}_1 и \mathbf{K}_2 .

Графовый автомат $A = (G_1, S, G_2, \star, \diamond)$ с графом состояний $G_1 = (X_1, \rho_1)$, полугруппой входных сигналов $S = (S, \cdot)$, графом выходных сигналов $G_2 = (X_2, \rho_2)$, функцией переходов $\star : X_1 \times S \rightarrow X_1$ и функцией выходов $\diamond : X_1 \times S \rightarrow X_2$ рассматривается как многоосновная алгебраическая Ω -система $A = (X_1, S, X_2, \Omega)$ с тремя непустыми базисными множествами X_1, S, X_2 и сигнатурой $\Omega = \{P_1, P_2, \cdot, \star, \diamond\}$. Здесь X_1 — множество вершин графа G_1 , X_2 — множество вершин графа G_2 , P_1 — бинарный предикатный символ отношения смежности вершин графа G_1 , P_2 — бинарный предикатный символ отношения смежности вершин графа G_2 , \cdot — бинарный функциональный символ композиции элементов полугруппы, \star — бинарный функциональный символ функции переходов автомата и \diamond — бинарный функциональный символ функции выходов автомата.

Элементарная теория универсальных графовых автоматов определяется в стиле аксиоматики Гильберта геометрии плоскости с помощью языка УИП с трёхсортными переменными \mathbf{L}_A сигнатуры $\Omega = \{P_1, P_2, \cdot, \star, \diamond\}$. Алфавит такого языка состоит из:

- 1) счётного множества индивидуальных переменных первого сорта для обозначения элементов множества вершин графа состояний автомата;
- 2) счётного множества индивидуальных переменных второго сорта для обозначения входных сигналов автомата;
- 3) счётного множества индивидуальных переменных третьего сорта для обозначения выходных сигналов автомата;
- 4) из двухместного предикатного символа P_1 типа (1,1) для обозначения отношения смежности на множестве вершин графа состояний автомата;
- 5) из двухместного предикатного символа P_2 типа (3,3) для обозначения отношения смежности на множестве вершин графа выходных сигналов автомата;
- 6) из двухместного функционального символа \cdot типа (2,2,2) для обозначения операции композиции полугруппы входных сигналов автомата;
- 7) из двухместного функционального символа \star типа (1,2,1) для обозначения функции переходов автомата;
- 8) из двухместного функционального символа \diamond типа (1,2,3) для обозначения функции выходов автомата;
- 9) из конечного множества логических и технических символов, таких как

$$\neg, \wedge, \vee, \implies, \iff, \forall^1, \exists^1, \forall^2, \exists^2, \forall^3, \exists^3, = \text{ и } (,).$$

Для языка \mathbf{L}_A термы трёх сортов получаются обычным комбинированием символа \cdot с двумя термами второго сорта, символов \star и \diamond с термами первого и второго сорта, т.е. это выражения вида $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, t^{(2)} \cdot t_1^{(2)}, t^{(1)} \star t^{(2)}, t^{(1)} \diamond t^{(2)}$ где $x^{(1)}$ и $t^{(1)}$ — переменная и терм первого сорта, $x^{(2)}$ и $t^{(2)}, t_1^{(2)}$ — переменная и термы второго сорта, $x^{(3)}$ — переменная третьего сорта. При этом получаются термы $t^{(1)} \star t^{(2)}, t^{(2)} \cdot t_1^{(2)}, t^{(1)} \diamond t^{(2)}$ первого, второго и третьего сорта, соответственно.

Атомарные формулы языка \mathbf{L}_A получаются обычным комбинированием символа $=$ с двумя термами одного сорта, символа P_1 — с двумя термами первого сорта и символа P_2 — с двумя

термами третьего сорта, т.е. это выражения вида $t = t', P_1(t_1^{(1)}, t_2^{(1)}), P_2(t_3^{(3)}, t_4^{(3)})$, где t, t' — термы одного и того же сорта, $t_i^{(1)}$ — термы первого сорта (где $i = 1, 2$), $t_j^{(3)}$ — термы третьего сорта (где $j = 3, 4$). Формулы языка \mathbf{L}_A определяются по индукции обычным образом (см., например, [16]).

Для классов графов \mathbf{K}_1 и \mathbf{K}_2 класс графовых автоматов $\text{Atm}(\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2)$ называется элементарно аксиоматизируемым, если существует такое множество предложений Σ языка графовых автоматов \mathbf{L}_A , что класс $\text{Atm}(\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2)$ состоит из тех и только тех графовых автоматов A , на которых истинны все формулы из множества Σ .

Графовый автомат $A = (G_1, S, G_2, \star, \diamond)$ над графами $G_1 = (X_1, \rho_1)$, $G_2 = (X_2, \rho_2)$ может рассматриваться не только как многоосновная алгебраическая система $A = (X_1, S, X_2, \Omega)$ сигнатуры $\Omega = \{P_1, P_2, \cdot, \star, \diamond\}$, но и как обычная алгебраическая система $A_1 = (B, \Omega_1)$ с базисным множеством $B = X_1 \cup S \cup X_2$ и обогащённой сигнатурой $\Omega_1 = \{P_1, P_2, \cdot, \star, \diamond, P_{X_1}, P_S, P_{X_2}\}$ с тремя дополнительными унарными предикатными символами P_{X_1}, P_S, P_{X_2} для обозначения состояний, входных и выходных сигналов автомата A . Поэтому аксиоматизация классов графовых автоматов с помощью языка УИП сигнатуры $\Omega = \{P_1, P_2, \cdot, \star, \diamond\}$ с трёхсортными переменными \mathbf{L}_A сводится к аксиоматизации классов таких автоматов с помощью обычного языка УИП сигнатуры $\Omega_1 = \{P_1, P_2, \cdot, \star, \diamond, P_{X_1}, P_S, P_{X_2}\}$. Следовательно, для графовых автоматов справедливы основные результаты теории моделей монографии Г. Кейслера и Ч. Чэна [16]. В частности, будет справедлива следующая теорема Лёвенгейма-Скулема-Тарского для графовых автоматов.

ТЕОРЕМА 1. *Если аксиоматизируемый класс графовых автоматов \mathbf{K} имеет автоматы некоторой бесконечной мощности, то этот класс \mathbf{K} имеет автоматы произвольной бесконечной мощности.*

Подкласс автоматов $\text{Atm}(\mathbf{K}'_1, \mathbf{K}'_2)$ класса автоматов $\text{Atm}(\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2)$ для классов графов $\mathbf{K}'_1, \mathbf{K}'_2, \mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2$ называется относительно элементарно аксиоматизируемым в классе $\text{Atm}(\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2)$, если существует такое множество предложений Σ' языка УИП сигнатуры Ω , что класс $\text{Atm}(\mathbf{K}'_1, \mathbf{K}'_2)$ состоит из тех и только тех графовых автоматов A класса $\text{Atm}(\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2)$, на которых истинны все формулы из множества Σ' .

ЛЕММА 1. *Если подкласс автоматов $\text{Atm}(\mathbf{K}'_1, \mathbf{K}'_2)$ относительно элементарно аксиоматизируем в классе автоматов $\text{Atm}(\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2)$, и подкласс автоматов $\text{Atm}(\mathbf{K}'_1, \mathbf{K}'_2)$ не может быть элементарно аксиоматизируемым, то и класс $\text{Atm}(\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2)$ не может быть элементарно аксиоматизируемым.*

4. Основной результат

Введём следующие предикаты языка \mathbf{L}_A для переменных первого сорта x, y, u, v :

$$\begin{aligned} \Pi(x, y, u, v) &= (\exists^2 s)(x \star s = u \wedge y \star s = v \wedge (\forall^1 z)(z \star s = u \vee z \star s = v)), \\ Q(x, y) &= \Pi(x, y, x, y) \wedge \neg \Pi(x, y, y, x), \\ E(x, y, u, v) &= (x = u \wedge y = v \vee x = v \wedge y = u), \\ N(x, y, u, v) &= (x \neq u \wedge x \neq v \wedge y \neq u \wedge y \neq v), \\ Q_1(x, y) &= Q(x, y) \wedge (\forall^1 u, v)(Q(u, v) \Rightarrow E(x, y, u, v)). \end{aligned}$$

Используя лемму 2 из работы [17], легко проверить истинность утверждений следующей леммы.

ЛЕММА 2. *Для любого универсального графового автомата $\text{Atm}(G_1, G_2)$ над графами $G_1 = (X_1, \rho_1)$ и $G_2 = (X_2, \rho_2)$ справедливы следующие утверждения:*

- 1) для вершин x, y, u, v графа состояний G_1 предикат $\Pi(x, y, u, v)$ истинен тогда и только тогда, когда в автомате $Atm(G_1, G_2)$ найдётся входной сигнал s , который определяет отображение $\delta_s(x) = x \star s$ ($x \in X$), удовлетворяющее условию $\delta_s(x) = u$, $\delta_s(y) = v$ и $\delta_s(X_1) = \{u, v\}$;
- 2) для вершин a, b нетривиального графа состояний G_1 предикат $Q(a, b)$ истинен тогда и только тогда, когда в графе G_1 вершины a и b соединяются собственной дугой, не лежащей ни в каком контуре;
- 3) для вершин a, b, c, d графа состояний G_1 предикат $E(a, b, c, d)$ истинен тогда и только тогда, когда $\{a, b\} = \{c, d\}$;
- 4) для вершин a, b, c, d графа состояний G_1 предикат $N(a, b, c, d)$ истинен тогда и только тогда, когда $\{a, b\} \cap \{c, d\} = \emptyset$;
- 5) для вершин a, b графа состояний G_1 предикат $Q_1(a, b)$ истинен тогда и только тогда, когда в графе G_1 вершины a, b соединяются собственной дугой, не лежащей ни в каком контуре, и в графе G_1 нет других собственных дуг, не лежащих ни в каких контурах.

Пусть \mathbf{Gr} — класс всех графов, \mathbf{K}_0 — класс рефлексивных графов с одной вершиной. Имеют место следующие леммы.

ЛЕММА 3. Для любого класса графов \mathbf{K} класс автоматов $Atm(\mathbf{K}, \mathbf{K}_0)$ относительно элементарно аксиоматизируем в классе $Atm(\mathbf{K}, \mathbf{Gr})$ с помощью аксиомы

$$A_0 = (\forall^3 x, y) x = y.$$

ЛЕММА 4. Пусть $A = Atm(G_1, G_2)$ — универсальный графовый автомат над тривиальным рефлексивным графом состояний $G_1 = (X_1, \rho_1) \in \mathbf{K}_{tr}$ и одновершинным рефлексивным графом выходных сигналов $G_2 = (X_2, \rho_2) \in \mathbf{K}_0$. Тогда автомат A имеет конечную мощность, если граф G_1 — конечный граф, и автомат A имеет несчётную мощность, если граф G_1 — бесконечный граф.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A = Atm(G_1, G_2)$ — универсальный графовый автомат над тривиальным рефлексивным графом $G_1 = (X_1, \rho_1) \in \mathbf{K}_{tr}$, одновершинным рефлексивным графом $G_2 = (X_2, \rho_2) \in \mathbf{K}_0$ и полугруппой входных сигналов $S = \text{End } G_1 \times \text{Hom}(G_1, G_2)$.

По определению мощность автомата A — это кардинал $|A| = |X_1| + |S| + |X_2|$. Так как $G_1 \in \mathbf{K}_{tr}$, $|X_2| = 1$, то

$$|S| = |\text{End } G_1| \cdot |\text{Hom}(G_1, G_2)| = |X_1^{X_1}| \cdot |X_2^{X_1}| = |X_1^{X_1}|$$

и, следовательно, A имеет конечную мощность, если X_1 — конечное множество, и A имеет несчётную мощность, если X_1 — бесконечное множество. \square

Следующий результат показывает невозможность элементарной аксиоматизации классов универсальных графовых автоматов $Atm(\mathbf{K}, \mathbf{Gr})$ для ряда классов рефлексивных графов \mathbf{K} .

ТЕОРЕМА 2. Для следующих классов графов \mathbf{K} классы универсальных графовых автоматов $Atm(\mathbf{K}, \mathbf{Gr})$ не могут быть элементарно аксиоматизируемы:

- 1) класс $\mathbf{K} = \mathbf{K}_{tr}$ всех тривиальных рефлексивных графов;
- 2) класс $\mathbf{K} = \mathbf{K}_r$ всех рефлексивных графов;
- 3) класс $\mathbf{K} = \mathbf{K}_{rs}$ всех рефлексивных симметричных графов;

- 4) класс $\mathbf{K} = \mathbf{K}_{\mathbf{qo}}$ всех графов квазипорядка;
- 5) класс $\mathbf{K} = \mathbf{K}_{\mathbf{ra}}$ всех рефлексивных бесконтурных графов;
- 6) класс $\mathbf{K} = \mathbf{K}_{\mathbf{re}}$ всех рефлексивных графов, имеющих дугу, не лежащую ни в каком контуре;
- 7) класс $\mathbf{K} = \mathbf{K}_{\mathbf{rqa}}$ всех рефлексивных квазibesконтурных графов;
- 8) класс $\mathbf{K} = \mathbf{K}_{\mathbf{lo}}$ всех графов линейного порядка.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим класс автоматов $\text{Atm}(\mathbf{K}_{\mathbf{tr}}, \mathbf{Gr})$. Аксиома A_0 определяет в этом классе подкласс автоматов $\text{Atm}(\mathbf{K}_{\mathbf{tr}}, \mathbf{K}_0)$, в котором согласно лемме 4 содержатся универсальные графовые автоматы с конечной или несчётной мощностью, значит в классе $\text{Atm}(\mathbf{K}_{\mathbf{tr}}, \mathbf{K}_0)$ нет счётных автоматов и по теореме 1 такой класс не может быть элементарно аксиоматизируем. Согласно лемме 3 класс $\text{Atm}(\mathbf{K}_{\mathbf{tr}}, \mathbf{K}_0)$ относительно элементарно аксиоматизируем в классе $\text{Atm}(\mathbf{K}_{\mathbf{tr}}, \mathbf{Gr})$, и, следовательно, по лемме 1 класс автоматов $\text{Atm}(\mathbf{K}_{\mathbf{tr}}, \mathbf{Gr})$ не может быть элементарно аксиоматизируем.

Из п. 1) леммы 2 следует, что в классах $\text{Atm}(\mathbf{K}_{\mathbf{r}}, \mathbf{Gr})$, $\text{Atm}(\mathbf{K}_{\mathbf{rs}}, \mathbf{Gr})$ и $\text{Atm}(\mathbf{K}_{\mathbf{qo}}, \mathbf{Gr})$ подкласс $\text{Atm}(\mathbf{K}_{\mathbf{tr}}, \mathbf{K}_0)$ определяется аксиомой

$$A_1 = (\forall^1 x, y, z, w)(\forall^3 u, v) ((x \neq y \implies \Pi(x, y, z, w)) \wedge u = v).$$

Следовательно, классы $\text{Atm}(\mathbf{K}_{\mathbf{r}}, \mathbf{Gr})$, $\text{Atm}(\mathbf{K}_{\mathbf{rs}}, \mathbf{Gr})$ и $\text{Atm}(\mathbf{K}_{\mathbf{qo}}, \mathbf{Gr})$ также не могут быть элементарно аксиоматизируемы.

Аналогично аксиома A_1 в классе $\text{Atm}(\mathbf{K}_{\mathbf{ra}}, \mathbf{Gr})$ определяет подкласс автоматов $\text{Atm}(\mathbf{K}_{\mathbf{tr0}}, \mathbf{K}_0)$ для класса $\mathbf{K}_{\mathbf{tr0}}$ тривиальных рефлексивных графов состояний с тождественным отношением смежности. Из леммы 4 следует, что универсальные графовые автоматы над такими графами имеют конечную или несчётную мощность. Следовательно, в классе $\text{Atm}(\mathbf{K}_{\mathbf{tr0}}, \mathbf{K}_0)$ нет счётных автоматов, и по теореме 1 такой класс не может быть элементарно аксиоматизируем. Значит, по лемме 1 класс $\text{Atm}(\mathbf{K}_{\mathbf{ra}}, \mathbf{Gr})$ не является элементарно аксиоматизируемым.

Из п. 5) леммы 1 следует, что в классе $\text{Atm}(\mathbf{K}_{\mathbf{re}}, \mathbf{Gr})$ аксиома

$$A_2 = (\exists^1 x, y)(\forall^3 u, v) (Q_1(x, y) \wedge (\forall^1 z, w)(N(x, y, z, w) \implies \Pi(x, y, z, w)) \wedge u = v)$$

определяет подкласс $\text{Atm}(\mathbf{K}_{\mathbf{re1}}, \mathbf{K}_0)$ универсальных графовых автоматов с рефлексивными графами состояний $G_1 = (X_1, \rho_1)$, имеющих точно одну собственную дугу (a, b) , не лежащую ни в каком контуре, и смежными между собой всеми остальными вершинами $c, d \in X_1$, которые отличны от вершин a, b , и одновершинными рефлексивными графами выходных сигналов $G_2 = (X_2, \rho_2)$, $X_2 = \{z\}$. В таких автоматах любое отображение $\varphi : X_1 \rightarrow X'_1$, где $X'_1 = X_1 \setminus \{a, b\}$, является эндоморфизмом графа G_1 , а пара отображений (φ, c_z) (где c_z — постоянное отображение X_1 в $z \in X_2$) является входным сигналом универсального графового автомата $A = \text{Atm}(G_1, G_2)$ и, значит, такой автомат имеет мощность $|A| \geq |X_1| + |X'_1| \cdot |X_2| + |X_2|$, то есть $|A| \geq |X_1| + |X'_1|$. Очевидно, что для конечных таких автоматов A мощность $|A|$ конечна и для бесконечных таких автоматов A мощность $|A|$ несчётна. Следовательно, в классе $\text{Atm}(\mathbf{K}_{\mathbf{re1}}, \mathbf{K}_0)$ нет счётных автоматов, и по теореме 1 такой класс не может быть элементарно аксиоматизируем. Значит, по лемме 1 класс $\text{Atm}(\mathbf{K}_{\mathbf{re}}, \mathbf{Gr})$ также не является элементарно аксиоматизируемым.

Аналогично в классе $\text{Atm}(\mathbf{K}_{\mathbf{rqa}}, \mathbf{Gr})$ аксиома A_2 определяет подкласс $\text{Atm}(\mathbf{K}_{\mathbf{re1}}, \mathbf{K}_0)$ и, значит, класс $\text{Atm}(\mathbf{K}_{\mathbf{rqa}}, \mathbf{Gr})$ также не может быть элементарно аксиоматизируем.

Класс $\text{Atm}(\mathbf{K}_{\text{lo}}, \mathbf{Gr})$ состоит из универсальных графовых автоматов с графами состояний, являющимися линейно упорядоченными множествами $G = (X, \leq)$. Введём дополнительные предикаты языка \mathbf{L}_A с переменной первого сорта x :

$$M(x) = (\forall^1 y) P(y, x),$$

$$m(x) = (\forall^1 y) P(x, y).$$

Очевидно, что для вершины x графа состояний G предикат $M(x)$ истинен тогда и только тогда, когда в линейно упорядоченном множестве G элемент x является наибольшим элементом, тогда как предикат $m(x)$ истинен в том и только том случае, когда в линейно упорядоченном множестве G элемент x является наименьшим элементом.

В классе графов \mathbf{K}_{lo} аксиома

$$A_2 = (\exists^1 u, v) (m(u) \wedge M(v) \wedge (\forall^1 x)(x \neq v \implies \implies (\exists^1 y)(y \neq x \wedge P(x, y) \wedge (\forall^1 z)(z \neq x \wedge P(x, z) \implies P(y, z))))).$$

определяет подкласс \mathbf{K}_{lo1} линейно упорядоченных множеств $G = (X, \leq)$, которые удовлетворяют условиям:

- 1) G имеет наименьший элемент u и наибольший элемент v ;
- 2) для любого элемента $x \in X$, не являющегося наибольшим элементом, существует единственный следующий за ним элемент y , который будем обозначать x' .

Очевидно, что класс \mathbf{K}_{lo1} содержит все конечные линейно упорядоченные множества и линейно упорядоченное множество \mathbb{N}^∞ натуральных чисел \mathbb{N} с обычным порядком \leq и с внешне присоединенным наибольшим элементом ∞ .

Для любого бесконечного упорядоченного множества $G = (X, \leq)$ из класса \mathbf{K}_{lo1} по индукции определяется упорядоченное подмножество (Z, \leq) :

- 1) элемент $z_1 \in Z$ — это наименьший элемент множества G ;
- 2) для уже определенного элемента $z_n \in Z$ элемент $z_{n+1} \in Z$ является следующим за z_n элементом z'_n .

Очевидно, что множество $Z = \{z_i : i \in \mathbb{N}\}$ в графе G определяет линейно упорядоченное подмножество, изоморфное (\mathbb{N}, \leq) .



Рис. 1: Схематическое изображение отображения $\varphi : X \rightarrow X$ для бесконечного подмножества $Y \subset Z$.

Покажем, что для любого бесконечного подмножества $Y \subset Z$ существует такой эндоморфизм $\varphi \in \text{End } G$, что $\varphi(X) \cap Z = Y$. Ясно, что элементы подмножества $Y \subset Z$ образуют строго возрастающую последовательность $y_1 < y_2 < \dots < y_n < \dots$, с помощью которой можно определить отображение $\varphi : X \rightarrow X$ по правилу (см. рисунок 1):

$$\varphi(x) = \begin{cases} y_1, & \text{если } x \leq y_1, \\ y_i, & \text{если } y_i \leq x < y_{i+1} \text{ для некоторого } i \in \mathbb{N}, \\ v, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Ясно, что отображение φ является эндоморфизмом графа G и выполняется $\varphi(X) \cap Z = Y$.

Следовательно, мощность множества $\text{End } G$ не меньше мощности $\mu(Z)$ множества всех подмножеств счётного множества Z , которое несчётно [18].

Рассмотрим автомат A из класса $\text{Atm}(\mathbf{K}_{\text{lo1}}, \mathbf{K}_0)$ с графом состояний $G_1 = (X_1, \leq_1)$ и одновершинным рефлексивным графом выходных сигналов $G_2 = (X_2, \leq_2)$. Мощность такого автомата — это кардинал

$$\begin{aligned} |A| &= |X_1| + |\text{End } G_1| \cdot |\text{Hom}(G_1, G_2)| + |X_2| = \\ &= |X_1| + |\text{End } G_1| \cdot |X_2^{X_1}| + |X_2| = \\ &= |X_1| + |\text{End } G_1| \cdot |1^{X_1}| + 1. \end{aligned}$$

Таким образом, $|A| \geq |\text{End } G_1| \geq \mu(Z)$, где $\mu(Z)$ — это несчётная мощность множества всех подмножеств счётного множества $Z \subset X_1$.

Отсюда следует, что класс $\text{Atm}(\mathbf{K}_{\text{lo1}}, \mathbf{K}_0)$ не может быть элементарно аксиоматизируемым, значит по лемме 1 весь класс $\text{Atm}(\mathbf{K}_{\text{lo}}, \mathbf{Gr})$ не может быть аксиоматизируемым средствами языка УИП. \square

5. Заключение

В работе изучена проблема абстрактной характеристики универсальных графовых автоматов. В теореме 2 доказано, что классы универсальных графовых автоматов $\text{Atm}(\mathbf{K}, \mathbf{Gr})$ с графами состояний из некоторых важных классов рефлексивных графов \mathbf{K} не допускают аксиоматизации средствами языка узкого исчисления предикатов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Плоткин Б. И., Гринглаз Л. Я., Гварамия А. А. Элементы алгебраической теории автоматов. М.: Высш. шк., 1994. 191 с.
2. Плоткин Б. И. Группы автоморфизмов алгебраических систем. М.: Наука, 1966. 604 с.
3. Пинус А. Г. Об элементарной эквивалентности производных структур свободных полугрупп, унаров и групп // Алгебра и логика. 2004. Т. 43, №6. С. 730–748.
4. Пинус А. Г. Об элементарной эквивалентности производных структур свободных решеток // Изв. вузов. Матем. 2002. №5. С. 44–47.
5. Глушкин Л. М. Полугруппы и кольца эндоморфизмов линейных пространств // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1959. Т. 23. С. 841–870.
6. Глушкин Л. М. Полугруппы изотонных преобразований // УМН. 1961. Т. 16, №5. С. 157–162.
7. Важенин Ю. М. Элементарные свойства полугрупп преобразований упорядоченных множеств // Алгебра и логика. 1970. Т. 9, №3. С. 281–301.
8. Важенин Ю. М. Об элементарной определяемости и элементарной характеризуемости классов рефлексивных графов // Изв. вузов. Матем. 1972. №7. С. 3–11.
9. Михалев А. В. Кольца эндоморфизмов модулей и структуры подмодулей // Итоги науки и техн. Сер. Алгебра. Топол. Геом. 1974. Т. 12. С. 51–76.

10. Улам С. Нерешенные математические задачи. М.: Наука, 1964. 168 с.
11. Jonsson B. Topics in Universal Algebras // Lecture Notes in Math. Springer-Verlag, 1972. Vol. 250. P. 230.
12. Харари Ф. Теория графов. М.: Мир, 1973. 300 с.
13. Мальцев А.И. Алгебраические системы. М.: Наука. Физматлит, 1970. 392 с.
14. Акимова С. А. Абстрактная характеристика полугруппы эндоморфизмов упорядоченного множества // Математика. Механика: сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та. 2004. №6. С. 3–5.
15. Фарахутдинов Р. А. Относительно элементарная определимость класса универсальных графовых полуавтоматов в классе полугрупп // Изв. вузов. Матем. 2022. №1. С. 74–84.
16. Кейслер Г., Чен Ч. Ч. Теория моделей. М.: Мир, 1977. 616 с.
17. Molchanov V. A., Farakhutdinov R. A. On Concrete Characterization of Universal Graphic Automata // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2022. Vol. 43, №3. P. 664–671.
18. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. М.: Мир, 1970. 416 с.

REFERENCES

1. Plotkin, B. I., Greenglaz, L. Ja. & Gvaramija, A. A., 1994, “Elements of algebraic theory of automata”, *Vyshaja Shkola, Moscow*, 191 p. (In Russ.)
2. Plotkin, B. I., 1966, “Groups of automorphisms of algebraic systems”, *Nauka, Moscow*, 604 p. (In Russ.)
3. Pinus, A. G., 2004, “Elementary equivalence of derived structures of free semigroups, unars, and groups”, *Algebra and logic*, vol. 43, no. 6, pp. 408–417 (In Russ.)
4. Pinus, A. G., 2002, “Elementary equivalence of derived structures of free lattices”, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, vol. 5, pp. 44–47 (In Russ.)
5. Gluskin, L. M., 1961, “Semigroups and endomorphism rings of linear spaces”, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, vol. 25, no. 6, pp. 809–814 (In Russ.)
6. Gluskin, L. M., 1961, “Semigroups of isotone transformations”, *Uspekhi Mat. Nauk*, vol. 16, no. 5, pp. 157–162 (In Russ.)
7. Vazhenin, Yu. M., 1970, “Elementary properties of semigroups of transformations of ordered sets”, *Algebra and logic*, vol. 9, no. 3, pp. 281–301 (In Russ.)
8. Vazhenin, Yu. M., 1972, “The elementary definability and elementary characterizability of classes of reflexive graphs”, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, vol. 7, pp. 3–11 (In Russ.)
9. Mikhalev, A. V., 1976, “Endomorphism rings of modules, and lattices of submodules”, *J Math Sci*, vol. 5, no. 6, pp. 786–802.
10. Ulam, S. M., 1960, “A collection of mathematical problems”, *Interscience, New York*, 150 p.
11. Jonsson, B., 1972, “Topics in Universal Algebras”, *Lecture Notes in Math. Springer-Verlag*, vol. 250, 230 p.

12. Harary, F., 1969, “Graph Theory”, *Addison Wesley*, 288 p.
13. Maltzev, A. I., 1970, “Algebraic systems”, *Nauka. Fizmatlit, Moscow*, 392 p. (In Russ.)
14. Akimova, S. A., 2004, “Abstract characterization of endomorphism semigroups of ordered sets”, *Mathematika. Mekhanika: sb. nauch. tr. Saratov: Izd. Saratov State Un.*, no. 6, pp. 3–5. (In Russ.)
15. Farakhutdinov, R. A., 2022, “Relatively elementary definability of the class of universal graphic semiautomata in the class of semigroups”, *Allerton Press*, vol. 66, no. 1, pp. 62–70.
16. Keisler, H. J., Chang, C. C., 2013, “Model theory”, *Dover Publications*, 672 p.
17. Molchanov, V. A., Farakhutdinov, R. A., 2022, “On Concrete Characterization of Universal Graphic Automata”, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, vol. 43, iss. 3, pp. 664–671.
18. Kuratowski, K., Mostowski, A., 1968, “Set theory”, *North-Holland*, 417 p.

Получено: 06.12.2023

Принято в печать: 21.03.2024

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 25. Выпуск 1.

УДК 511

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-1-127-137

Обобщение теоремы Лежандра о трёх квадратах

Х. Аль-Ассад

Хафез Аль-Ассад — Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: 1hbrh0@gmail.com

Аннотация

В данной работе представлено обобщение теоремы Лежандра о трех квадратах на представления двух натуральных чисел в виде сумм трех квадратов, для которых имеется общий квадрат.

Ключевые слова: Теорема Лежандра о трёх квадратах, принцип Хассе для систем двух квадратичных форм.

Библиография: 8 названий.

Для цитирования:

Х. Аль-Ассад. Обобщение теоремы Лежандра о трёх квадратах // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 1, с. 127–137.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 25. No. 1.

UDC 511

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-1-127-137

A generalisation of Legendre's three-square theorem

H. Al-Assad

Hafez Al-Assad — Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: 1hbrh0@gmail.com

Abstract

In this paper a generalisation of Legendre's three-square theorem to representations of two positive integers as sums of three squares for which the first square of each representation is the same is presented.

Keywords: Legendre's three-square theorem, Hasse's Principle for systems of two quadratic forms.

Bibliography: 8 titles.

For citation:

H. Al-Assad, 2024, "A generalisation of Legendre's three-square theorem", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 1, pp. 127–137.

1. Введение и постановка задачи

Основной результат этой работы, теорема 2, приведенная ниже, был предложен с помощью компьютерных расчетов, выполненных Али Дибом (dib_a@spbstu.ru), Высшая школа управления кибер-физическими системами, Институт компьютерных наук и кибербезопасности, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого (СПбПУ).

Проблема представления целого положительного числа в виде суммы трёх целых квадратов решается следующей теоремой Лежандра ([2], ст. 47).

ТЕОРЕМА 1. (ЛЕЖАНДР) Пусть m — целое положительное число. Уравнение

$$m = x^2 + y^2 + z^2$$

имеет решение в $x, y, z \in \mathbb{Z}$ если и только если m удовлетворяет условию

$$m \neq 4^a(8b + 7); a, b \in \mathbb{Z}, a, b \geq 0.$$

Мы обобщим этот классический результат, рассматривая представления двух натуральных чисел в виде сумм трех квадратов, так что эти два представления имели общий квадрат.

Т.е. мы рассматриваем решения системы

$$\begin{aligned} m &= a^2 + b_1^2 + c_1^2, \\ m' &= a^2 + b_2^2 + c_2^2 \end{aligned} \quad (1)$$

в целых числах a, b_1, b_2, c_1, c_2 .

Для удобства будем называть целые числа, представимые в виде суммы трёх квадратов, Лежандровыми.

Кроме того, мы заключаем следующее полезное соглашение: мы говорим, что две пары целых чисел (m_1, m'_1) и (m_2, m'_2) сравнимы по модулю целого числа n , если либо

$$m_1 \equiv m_2 \pmod{n}, \quad m'_1 \equiv m'_2 \pmod{n},$$

или

$$m_1 \equiv m'_2 \pmod{n}, \quad m'_1 \equiv m_2 \pmod{n}.$$

Наш основной результат - следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $m, m' \in \mathbb{Z}$ — пара Лежандровых положительных целых чисел. Система

$$\begin{aligned} q^2 m &= a^2 + b_1^2 + c_1^2, \\ q^2 m' &= a^2 + b_2^2 + c_2^2 \end{aligned} \quad (2)$$

имеет решение в положительных q, a, b_1, b_2, c_1, c_2 тогда и только тогда, когда пара (m, m') не сравнима с $(0, 3)$ или $(3, 4)$ по модулю 8 и не сравнима ни с одной из пар

$$\begin{aligned} &(0, 3 \cdot 2^{k-3}), \\ &(0, 3 \cdot 2^{k-2}), \\ &(0, 7 \cdot 2^{k-3}), \\ &(2^{k-3}, 3 \cdot 2^{k-2}), \\ &(5 \cdot 2^{k-3}, 3 \cdot 2^{k-2}) \end{aligned}$$

по модулю 2^k , для любого четного целого $k \geq 4$.

Более того, существует решение системы (2) такое, что q нечетно и взаимно просто с a .

План доказательства следующий.

Рассматриваем систему (1) в рациональных числах a, b_1, b_2, c_1, c_2 .

Сначала мы покажем, что для любой пары (m, m') , система (1) имеет нетривиальное решение в кольце $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ для любого простого числа p .

Потом мы покажем, что для любой пары (m, m') , система (1) имеет нетривиальное решение в кольце $\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$ для любого нечетного простого числа p и любого целого числа $k > 1$.

Затем мы покажем, что если $v_2(\gcd(m, m')) \leq 1$, то система (1) имеет нетривиальное решение в кольце $\mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z}$ для любого целого числа $k > 1$ тогда и только тогда, тогда пара (m, m') удовлетворяет условиям теоремы 2.

Из этого получим условия нетривиальной разрешимости системы (1) в p -адических полях \mathbb{Q}_p при $v_2(\gcd(m, m')) \leq 1$, и, поскольку разрешимость в \mathbb{R} очевидна, мы используем форму локально-глобального принципа Хассе ([5], ст. 22, теорема 3.2) для перехода к решениям системы (1) в \mathbb{Q} , при $v_2(\gcd(m, m')) \leq 1$.

После этого, мы используем теорему Давенпорта-Касселса ([2], ст. 46) для перехода от решений системы (1) к решениям системы (2), при $v_2(\gcd(m, m')) \leq 1$.

Наконец, воспользуемся леммой для перехода от решений системы (2) в случай, когда $v_2(\gcd(m, m')) \leq 1$ к решениям системы (2) в общем случае.

2. Задача по модулю простого числа

Пусть p — некоторое простое число. Мы рассматриваем систему

$$\begin{aligned} t^2 + x^2 + y^2 &\equiv m \pmod{p}, \\ t^2 + z^2 + w^2 &\equiv m' \pmod{p}, \end{aligned} \tag{3}$$

в $t, x, y, z, w \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Покажем, что (3) разрешимо для всех m, m' .

Разрешимость (3) в случае $p = 2$ тривиальна, а 0 нетривиально представляется как $0 \equiv 1+1 \pmod{2}$. Поэтому предположим, что $p > 2$.

ЛЕММА 1. Если $m \not\equiv 0 \pmod{p}$, то сравнение

$$x^2 + y^2 \equiv m \pmod{p} \tag{4}$$

разрешима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если m — квадратичный вычет по модулю p , то можно взять $y = 0$. Предположим, что m — квадратичный невычет.

Пусть $Q_1 = \{q_i\}_{i=1}^{\frac{p-1}{2}}$ — множество квадратичных вычетов по модулю p .

Покажем, что множество $Q_2 = \{q_i + 1\}_{i=1}^{\frac{p-1}{2}}$ содержит хотя бы один квадратичный невычет.

Действительно, если Q_2 не содержит квадратичных невычетов, то $Q_2 = Q_1$, и мы можем рассматривать элементы Q_2 как перестановку элементов Q_1 .

Рассмотрим цикл перестановки, содержащей элемент q_1

$$q_{i+1} \equiv q_i + 1, \quad 1 \leq i \leq k-1, \quad q_1 \equiv q_k + 1,$$

для некоторого $1 \leq k \leq \frac{p-1}{2}$.

Однако это дает, что

$$q_1 \equiv q_k + 1 \equiv q_{k-1} + 2 \equiv \dots \equiv q_1 + k \implies k \equiv 0 \pmod{p},$$

что является противоречием.

Следовательно, множество Q_2 содержит некоторый квадратичный невычет r , скажем с

$$r = q + 1 = \tilde{r}^2 + 1, \quad (5)$$

для некоторого \tilde{r} .

Пусть g — примитивный корень по модулю p . Поскольку m и r — квадратичные невычеты, мы можем написать

$$m \equiv g^{2a+1}, \quad r \equiv g^{2b+1}, \quad (6)$$

для некоторых $0 \leq a, b \leq \frac{p-3}{2}$.

Из (5) и (6) мы видим, что

$$m \equiv rg^{2(a-b)} \equiv \tilde{r}^2 g^{2(a-b)} + g^{2(a-b)} \equiv x^2 + y^2.$$

□

Теперь докажем основной результат данного раздела.

ТЕОРЕМА 3. Система (3) разрешима для всех m, m' .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $m, m' \not\equiv 0 \pmod{p}$, то берем $t = 0$, и теорема следует из леммы 1.

Если, скажем, $m' \equiv 0$, то берем $t \neq 0$ такой, что $t^2 \not\equiv m$, и теорема опять следует из леммы 1. □

3. Задача по модулю степени нечетного простого числа

Пусть p — нечетное простое число, а $k \geq 2$ — целое число. Мы рассматриваем систему

$$\begin{aligned} t^2 + x^2 + y^2 &\equiv m \pmod{p^k}, \\ t^2 + z^2 + w^2 &\equiv m' \pmod{p^k}, \end{aligned} \quad (7)$$

в $t, x, y, z, w \in \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$.

Покажем, что (7) разрешимо для всех m, m' .

ТЕОРЕМА 4. Система (7) разрешима для всех m, m' .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем действовать индукцией по k . Случай $k = 1$ доказанно в теореме 3.

Предположим сначала, что $m, m' \not\equiv 0 \pmod{p}$. Доказательство теоремы 3 показало, что в этом случае при $k = 1$ система (7) разрешима при $t = 0$.

По индукции мы предполагаем, что это верно по модулю p^{k-1} , так что

$$x^2 + y^2 \equiv m \pmod{p^{k-1}} \implies x^2 + y^2 \equiv m + rp^{k-1} \pmod{p^k}; \quad 0 \leq r \leq p-1, \quad (8)$$

где, поскольку $m \not\equiv 0 \pmod{p}$, мы можем считать, что $x \not\equiv 0 \pmod{p}$.

Следовательно, пусть \tilde{r} — единственное решение сравнения

$$2x\tilde{r} \equiv -r \pmod{p}.$$

Тогда согласно (8) имеем

$$(x + \tilde{r}p^{k-1})^2 + y^2 \equiv x^2 + y^2 + 2x\tilde{r}p^{k-1} \equiv m \pmod{p^k},$$

что завершает индукцию в этом случае и показывает, как и при доказательстве теоремы 3, что система (7) разрешима с $t = 0$, если $m, m' \not\equiv 0 \pmod{p}$.

Предположим теперь, что $m \not\equiv 0 \pmod{p}, m' \equiv 0 \pmod{p}$. Мы выбираем любой $t \not\equiv 0 \pmod{p}$ такой, что $t^2 \not\equiv m \pmod{p}$, и рассматриваем эквивалентную систему

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &\equiv m - t^2 \pmod{p^k}, \\z^2 + w^2 &\equiv m' - t^2 \pmod{p^k},\end{aligned}\tag{9}$$

в x, y, z, w .

По определению t мы знаем, что

$$m' - t^2 \not\equiv 0 \pmod{p}, \quad m - t^2 \not\equiv 0 \pmod{p}$$

и, таким образом, решение (9) сводится к предыдущему случаю.

Наконец, доказательство случая $m, m' \equiv 0 \pmod{p}$ полностью аналогично доказательству предыдущего случая, надо только выбирать любое $t \not\equiv 0 \pmod{p}$. \square

4. Задача по модулю степени 2

Пусть $k \geq 1$ — целое число. Мы рассматриваем систему

$$\begin{aligned}t^2 + x^2 + y^2 &\equiv m \pmod{2^k}, \\t^2 + z^2 + w^2 &\equiv m' \pmod{2^k},\end{aligned}\tag{10}$$

в $t, x, y, z, w \in \mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z}$.

В этом разделе мы будем предполагать, что m, m' — Лежандровы целые числа, и что $v_2(\gcd(m, m')) \leq 1$.

Случай $k = 1$ тривиален (он был рассмотрен в начале раздела 2), и нетрудно видеть, что при $k = 2$ система (10) разрешима для всех (m, m') , не сравнимых с $(0, 3)$ по модулю 4.

В дальнейшем мы будем обозначать m_0 и m_1 соответствующие приведения m и m' по модулю 2^{k-1} и будем рассматривать приведение (10) по модулю 2^{k-1} :

$$\begin{aligned}t^2 + x^2 + y^2 &\equiv m_0 \pmod{2^{k-1}}, \\t^2 + z^2 + w^2 &\equiv m_1 \pmod{2^{k-1}}.\end{aligned}\tag{11}$$

Если (11) имеет решение, то можем записать (10) в виде

$$\begin{aligned}t^2 + x^2 + y^2 &\equiv m_0 + r2^{k-1} \pmod{2^k}, \\t^2 + z^2 + w^2 &\equiv m_1 + s2^{k-1} \pmod{2^k},\end{aligned}\tag{12}$$

где $r, s \in \{0, 1\}$.

Всего существует четыре возможных пар (r, s) , и основная идея, лежащая в основе данного раздела, заключается в том, что решение (11) дает решение (12) ровно для одной пары (r, s) , и мы хотим использовать это решение (12) для перехода к соответствующим решениям (12) для трех оставшихся пар (r, s) .

При необходимости, сделав замена переменных

$$m_0 \rightarrow m_0 + 2^{k-1}, \quad m_1 \rightarrow m_1 + 2^{k-1},$$

можно считать, что данное решение всегда имеет $r = s = 0$.

Для любой компоненты u с

$$v_2(u) < \frac{k-3}{2},\tag{13}$$

замена переменных

$$u' = u + 2^{k-v_2(u)-2}$$

дает

$$u'^2 \equiv u^2 + 2^{k-1} \pmod{2^k}.$$

Кроме того, если

$$k \text{ нечетно, } v_2(u) > \frac{k-3}{2}, \quad (14)$$

тогда замена переменных

$$u' = u + 2^{\frac{k-1}{2}}$$

дает

$$u'^2 \equiv u^2 + 2^{k-1} \pmod{2^k}.$$

Компоненты, удовлетворяющие (13) или (14), мы называем поднимаемыми компонентами.

Решение (12) назовем применимым, если хотя бы одна из t, x, y и одна из t, z, w поднимаемы, а если t поднимаемый, то существует еще один поднимаемый компонент, кроме t .

Определим для поднимаемого вычета u

$$\psi(u) = \begin{cases} k - v_2(u) - 2 & \text{если } u \text{ удовлетворяет (13),} \\ \frac{k-1}{2} & \text{если } u \text{ удовлетворяет (14).} \end{cases}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Если существует применимое решение (12) для $r = s = 0$, то существует решение (12) для любой пары $(r, s) \in J$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $u_0, u_1 \in \{t, x, y, z, w\}$ — разные поднимаемые компоненты данного решения (12), то замена переменных

$$u'_0 = u_0 + \epsilon_0 2^{\psi(u_0)}, u'_1 = u_1 + \epsilon_1 2^{\psi(u_1)}, \quad (15)$$

гдк ϵ_0, ϵ_1 означают либо 0, либо 1, если фиксировать остальные компоненты, как легко видеть, дает решения (12) для различных пар $(r, s) \in J$ при вариациях значений $\epsilon_0, \epsilon_1 \in \{0, 1\}$.
□

ЛЕММА 2. Если t, t' нечетны, то (10) разрешимо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы индуктивно покажем, что существует решение (10) с нечетными x и z и, следовательно, поднимаемыми.

При $k = 3$ это можно проверить вычислительно.

Предположим, что это справедливо для $k-1$, так что (11), а значит, и (12), имеют решение с x и z нечетными.

Замена переменных в (15) при $u_0 = x, u_1 = z$ дает решения (12) для остальных пар $(r, s) \in J$, а u'_0, u'_1 остаются нечетными для всех значений ϵ_0, ϵ_1 . □

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $k \geq 3$. Нечетный вычет $u \in \mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z}$ является квадратичным вычетом тогда и только тогда, когда $u \equiv 1 \pmod{8}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обратное утверждение очевидное из того факта, что 1 — единственный нечетный квадратичный вычет по модулю 8.

Для прямого утверждения, мы знаем, что u может быть выражен однозначно как

$$u \equiv (-1)^{\frac{u-1}{2}} 5^{h(u)}; \quad 0 \leq h(u) < 2^{k-2}.$$

Следовательно, несложно увидеть, что u является квадратичным вычетом тогда и только тогда, когда $\frac{u-1}{2}$ и $h(u)$ четны, что дает ровно $2^{k-3} = \frac{2^k}{8}$ квадратичных вычетов, и с учетом обратной импликации отсюда следует, что любой $u \equiv 1 \pmod{8}$ является квадратичным вычетом.

□

Предложение 3. *Если существует решение (12) при $r = s = 0$ с хотя одним из x, y, z, w нечётным, то существует решение (12) для любой пары $(r, s) \in J$.*

Доказательство. Без ограничения общности предположим, что x нечетно. Это позволяет перейти к решению (12) при $r = 1$ при фиксировании s , применив замену переменных в (15) с $u_0 = z$, без u_1 .

Следовательно, нам достаточно найти решения уравнения (12) для $s = 1$, поскольку мы можем перейти между решениям для $r = 0$ и $r = 1$, сохраняя при этом s фиксированным, как было только что показано.

Если бы одно из t, z, w было поднимаемым, то у нас было бы применимое решение, и предложение следует из предложения 1.

Поэтому предположим, что ни один из t, z, w не поднимается. Рассматриваем два случая.

Случай 1. k четно:

Тогда $t^2, z^2, w^2 \in \{0, 2^{k-2}\}$ и, следовательно, $m_1 \in \{0, 2^{k-2}, 2^{k-1}, 3 \cdot 2^{k-2}\}$, что дает

$$m_1 + 2^{k-1} \in \{0, 2^{k-2}, 2^{k-1}, 3 \cdot 2^{k-2}\}.$$

Следовательно, мы всегда можем взять $t^2 = 0$ или $t^2 = 2^{k-2}$ в представлении $m_1 + 2^{k-1}$, и, таким образом, решение (12) для $s = 1$ всегда можно найти либо взяв $z' = z$, если $t^2 = 0$, либо

$$z'^2 \equiv z^2 - 2^{k-2} \pmod{2^k}$$

если $t^2 = 2^{k-2}$, что возможно по предложению 2, поскольку имеем $z^2 - 2^{k-2} \equiv z^2 \equiv 1 \pmod{8}$, так как $k \geq 5$ и z нечетно.

Случай 2. k нечетно:

Тогда $t^2 = z^2 = w^2 = 2^{k-3}$, и поэтому $m_1 = 3 \cdot 2^{k-3}$, что дает $m_1 + 2^{k-1} \equiv 7 \cdot 2^{k-1}$.

Поскольку k нечетно, мы видим, что $m_1 + 2^{k-1}$ не является Лежандровым, и поэтому $s = 1$ не может быть. □

Сформулируем и докажем основной результат данного раздела.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть m, m' — Лежандровые целые числа, и что $v_2(\gcd(m, m')) \leq 1$.*

Тогда система (10) разрешима если и только если (m, m') не сравнима с $(0, 3)$ или $(3, 4)$ по модулю 8, и не сравнима ни с одной из $(0, 6), (0, 14), (2, 12), (10, 12)$ по модулю 16.

Доказательство. При $k = 3, 4$ это можно проверить непосредственным вычислением.

Предположим, что $k \geq 5$.

Докажем теорему по индукции. Предположим, что (10) разрешимо для $k - 1$, так что нам дано решение (14), которое, не ограничивая общности, можно считать с $r = s = 0$.

Если данное решение поднимается, то теорема следует из предложения 1.

Предположим, что данное решение не является поднимаемым. Если один из x, y, z, w был нечетным, то теорема следует из предложения 3.

Если все x, y, z, w четные, а t нечетно, то m и m' оба нечетны, и теорема следует из леммы 2.

Если бы все t, x, y, z, w были четными, то мы имели бы $v_2(\gcd(m, m')) \geq 2$, что противоречит условиям теоремы. □

5. Доказательство основного результата

Доказательство теоремы 2 займет весь данный раздел.

Сначала докажем третье утверждение теоремы 2. Допустим, что нам дано решение системы (2) такое, что q четно. Тогда $q^2 \equiv 0 \pmod{4}$, а приведение (2) по модулю 4 показывает, что a, b_1, b_2, c_1, c_2 обязательно четны, поэтому мы можем разделить все члены обоих уравнений в (2) на 4. Повторяя этот процесс, мы видим, что если (2) имеет решение, то q можно предположить нечетным. Это доказывает третье утверждение теоремы 2.

Рассмотрим систему двух диагональных квадратичных форм с целыми коэффициентами

$$\begin{aligned} mu^2 - t^2 - x^2 - y^2 &= 0, \\ m'u^2 - t^2 - z^2 - w^2 &= 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Если m и m' оба рациональные квадраты, то (16) имеет нетривиальное решение

$$u = 1, x = \sqrt{m}, z = \sqrt{m'}, t = y = w = 0,$$

и поэтому в дальнейшем мы предполагаем, что хотя бы один из m и m' не является рациональным квадратом.

В разделах 2,3,4 мы рассматривали разрешимость системы (16) в кольцах $\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$ для всех простых p и целых чисел $k \geq 1$, при условии, что $v_2(\gcd(m, m')) \leq 1$.

Для перехода к пересечениям в p -адических полях \mathbb{Q}_p воспользуемся следующей простой леммой ([2], ст. 14, предложение 6).

ЛЕММА 3. Пусть $f_i \in \mathbb{Z}_p[X_1, \dots, X_h]$ — однородные многочлены с целыми p -адическими коэффициентами, и пусть $f_{i,k} \in (\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})[X_1, \dots, X_h]$ обозначают их приведения по модулю p^k . Тогда f_i имеют общий нетривиальный нуль в $(\mathbb{Q}_p)^h$ тогда и только тогда, когда $f_{i,k}$ имеют общий примитивный нуль в $(\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})^h$ для всех $k > 1$.

Чтобы убедиться, что лемма 3 применима к нашему случаю, рассмотрим приведение системы (16) по модулю p^k .

Если p — нечетное простое число, то теорема 4 показала, что система (16) имеет нетривиальное решение в $\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$ для всех пар (m, m') , и существует такое решение содержащее примитивный элемент из $\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$.

Если $p = 2$, то из предположения, что $v_2(\gcd(m, m')) \leq 1$, следует, что хотя бы одно из m и m' не сравнимо с 0 по модулю 2^k при $k > 1$, а теорема 5 показывает, что (16) разрешимо в $\mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z}$ для всех таких пар (m, m') , не сравнимых с исключениями из теоремы 2 (или, что то же самое, исключениями из самой теоремы 5). Такие пары (m, m') обладают тем свойством, что хотя бы одно из m и m' предполагается ненулевым в $\mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z}$, мы всегда можем взять $u = 1$ при решении (16) в $\mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z}$, и это, очевидно, дает примитивное решение.

Таким образом, мы показали, что для пар, не сравнимых с исключениями из теоремы 2, система (16) имеет нетривиальные решения во всех p -адических полях \mathbb{Q}_p , при условии, что $v_2(\gcd(m, m')) \leq 1$.

Система (16), очевидно, нетривиально разрешима в \mathbb{R} .

Теперь нам нужен механизм перехода от решений во всех пополнениях \mathbb{Q} , а именно p -адических полях \mathbb{Q}_p и \mathbb{R} , к решениям в самом \mathbb{Q} .

Для этого воспользуемся следующим результатом Коллио-Телена, Корэ и Сансука ([5], ст. 22, теорема 3.2).

ТЕОРЕМА 6. Пусть \mathbb{K} — числовое поле и ϕ, ϕ_1, ϕ_2 — невырожденные бинарные квадратичные формы с коэффициентами из \mathbb{K} .

Рассмотрим трехмерное \mathbb{K} -многообразие V в проективном пространстве $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^5$, заданное пересечением двух квадратичных уравнений

$$\phi(u_1, v_1) = \phi_1(x, y), \quad \phi(u_2, v_2) = \phi_2(x, y).$$

Предположим, что ϕ_1 или ϕ_2 анизотропны. Тогда если V имеет \mathbb{K}_p -ую точку для каждого пополнения \mathbb{K}_p поля \mathbb{K} , то V имеет \mathbb{K} -ую точку.

Взяв $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ и

$$\phi(u, v) = u^2 + v^2, \quad \phi_1(x, y) = mx^2 - y^2, \quad \phi_2(x, y) = m'x^2 - y^2,$$

мы видим, поскольку в начале данного раздела предполагалось, что хотя бы один из m и m' не является рациональным квадратом, то один из ϕ_1 и ϕ_2 анизотропен.

Следовательно, теорема применима, и мы видим, что (16) имеет нетривиальное рациональное решение, при $v_2(\gcd(m, m')) \leq 1$.

Если $u = 0$ в рациональном решении (16) в \mathbb{Q} , то $t = x = y = z = w = 0$, что является тривиальным решением, и поэтому существует решение системы (16) в \mathbb{Q} с $u \neq 0$. Взяв такое решение и умножив (16) на u^{-2} , получим

$$m = \frac{a^2}{q^2} + \frac{a_1^2}{q_1^2} + \frac{a_2^2}{q_2^2}, \quad m' = \frac{a^2}{q^2} + \frac{a_3^2}{q_3^2} + \frac{a_4^2}{q_4^2},$$

где $a, q, a_i, q_i \in \mathbb{Z}$, при этом можно предположить, что $\gcd(a, q) = 1$, и это все можно записать как

$$q^2m - a^2 = \frac{q^2a_1^2}{q_1^2} + \frac{q^2a_2^2}{q_2^2}, \quad q^2m' - a^2 = \frac{q^2a_3^2}{q_3^2} + \frac{q^2a_4^2}{q_4^2}.$$

Следовательно, целые числа $q^2m - a^2$ и $q^2m' - a^2$ представляются в виде суммы двух рациональных квадратов.

Чтобы показать, что $q^2m - a^2$ и $q^2m' - a^2$ представляются в виде суммы двух целых квадратов, нам нужно одно следствие теоремы Давенпорта-Касселса ([2], ст. 46), которая мы сейчас сформулируем.

ТЕОРЕМА 7. (ДАВЕНПОРТ-КАССЕЛС) Пусть f — положительно определенная квадратичная форма от h переменных с целыми коэффициентами.

Предположим, что для любого $(y_1, \dots, y_h) \in \mathbb{Q}^h$ существует $(x_1, \dots, x_h) \in \mathbb{Z}^h$ такое, что

$$f(\vec{x} - \vec{y}) < 1.$$

Тогда любое целое число, представимое f в \mathbb{Q} , представимо f в \mathbb{Z} .

ЛЕММА 4. Если целое число представляется в виде суммы двух рациональных квадратов, то оно представляется в виде суммы двух целых квадратов.

Лемма непосредственно следует из применения теоремы Давенпорта-Касселса с

$$f(\vec{v}) = v_1^2 + v_2^2, \quad x_i = \|y_i\|,$$

где $\|y_i\|$ обозначает ближайшее целое число к y_i .

Таким образом, применяя лемму мы видим, что $q^2m - a^2$ и $q^2m' - a^2$ оба представляются как сумма двух целых квадратов, что дает (2):

$$q^2m - a^2 = b_1^2 + c_1^2, \quad q^2m' - a^2 = b_2^2 + c_2^2,$$

что доказывает первое утверждение теоремы 2, при условии, что $v_2(\gcd(m, m')) \leq 1$.

Более того, поскольку $\gcd(a, q) = 1$, это доказывает второе утверждение теоремы 2, при условии, что $v_2(\gcd(m, m')) \leq 1$.

Это завершает доказательство теоремы 2 при условии, что $v_2(\gcd(m, m')) \leq 1$.

Для доказательства первого утверждения теоремы 2 в общем случае, воспользуемся следующей леммой.

ЛЕММА 5. Пусть $m, m' \in \mathbb{Z}$ такие, что $4 \mid \gcd(m, m')$. Тогда (2) разрешимо для (m, m') тогда и только тогда, когда оно разрешимо для $(\frac{m}{4}, \frac{m'}{4})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что нам дано решение (2) для (m, m') . Тогда приведение обоих уравнений (2) по модулю 4 показывает, что a, b_1, b_2, c_1, c_2 четные, и поэтому мы можем разделить все члены обоих уравнений в (2) на 4, и получим

$$q^2 \left(\frac{m}{4} \right) = \left(\frac{a}{2} \right)^2 + \left(\frac{b_1}{2} \right)^2 + \left(\frac{c_1}{2} \right)^2,$$

$$q^2 \left(\frac{m'}{4} \right) = \left(\frac{a}{2} \right)^2 + \left(\frac{b_2}{2} \right)^2 + \left(\frac{c_2}{2} \right)^2,$$

что является решением (2) для $(\frac{m}{4}, \frac{m'}{4})$.

Наоборот, если нам дано решение (2) для $(\frac{m}{4}, \frac{m'}{4})$, то умножение всех слагаемых на 4 дает

$$q^2 m = (2a)^2 + (2b_1)^2 + (2c_1)^2,$$

$$q^2 m' = (2a)^2 + (2b_2)^2 + (2c_2)^2,$$

что является решением уравнения (2) для (m, m') . \square

Из утверждения теоремы 2 легко видеть, что исключения для любого четного $k \geq 6$ являются образцами исключений $k - 2$ при умножении на 4. При $k = 4$ все исключения из теоремы 2 входят в теорему 5. Следовательно, лемма 5 показывает, что доказательство первого утверждения теоремы 2 при условии, что $v_2(\gcd(m, m')) \leq 1$, эквивалентно общему случаю.

Для второго утверждения теоремы 2, по лемме 5 можно предположить, что дано решение (2) для $(\frac{m}{4}, \frac{m'}{4})$ с $\gcd(a, q) = 1$, и по третьему утверждению теоремы 2, доказанному в общем случае в начале данного раздела, можно считать, что q нечетно. Доказательство леммы 5 показало, что соответствующее решение (2) для (m, m') есть $(q, 2a, 2b_1, 2b_2, 2c_1, 2c_2)$, и очевидно, что $\gcd(q, 2a) = \gcd(q, a) = 1$. Это завершает доказательство теоремы 2 в общем случае.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Anthony Knapp. Advanced Algebra // Birkhäuser Boston, 2006.
2. Jean-Pierre Serre, A Course in Arithmetic // Springer Verlag, New York 1973.
3. В. Н. Чубариков. Обобщенная формула бинома Ньютона и формулы суммирования // Чебышевский сборник, 2020, т.00, с.1–18.
4. J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc, Sir Peter Swinnerton-Dyer. Intersections of two quadrics and Châtelet surfaces // J. für die reine und angew Math. I, Bd. 373(1987) 37-107; II Bd. 374(1987) 72-168.
5. Colliot-Thélène, Jean-Louis, and Coray, D. Descente et principe de Hasse pour certaines variétés rationnelles // Journal für die reine und angewandte Mathematik 320 (1980): 150-191.
6. Per Salberger On the arithmetic of intersections of two quadrics containing a conic, 2023, arXiv:2305.02109v1 [math.NT].
7. Виноградов И. М. Основы теории чисел // М.: Физ.-мат.лит. 1983.
8. Боревиц З.И., Шафаревич И.Р. Теория Чисел // Москва, 1964.

REFERENCES

1. Anthony, Knapp, 2006. “Advanced Algebra”, *Birkhäuser Boston*.
2. Jean-Pierre, Serre, 1973. “A Course in Arithmetic”, *Springer Verlag, New York*.
3. Chubarikov, V. N., 2020. “A generalized Binomial theorem and a summation formulae”, *Chebyshevskii Sbornik*, Vol.21, Iss. 4, pp. 1–18.
4. Colliot-Thélène, J.-L., Sansuc, J.-J., Sir Peter Swinnerton-Dyer, 1987. “Intersections of two quadrics and Châtelet surfaces”, *J. für die reine und angew. Math. I, Bd.*, 373, pp. 37–107; *II Bd.*, 374, pp. 72–168.
5. Colliot-Thélène, Jean-Louis, and Coray, D., 1980. “Descente et principe de Hasse pour certaines variétés rationnelles”, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 320, pp. 150–191.
6. Per Salberger, 2023. “On the arithmetic of intersections of two quadrics containing a conic”, arXiv:2305.02109v1 [math.NT].
7. Vinogradov, I. M., 1983. “Foundations of Number Theory”, *M.: Fiz.-Mat.lit.*.
8. Borevich, Z. I., Shafarevich, I. R., 1964. “Theory of Numbers”, *M: Moscow*.

Получено: 18.12.2023

Принято в печать: 21.03.2024

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 25. Выпуск 1.

УДК 514.174.5

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-1-138-154

О числе изоэдральных полимино

А. В. Шутов, А. А. Мокрова

Шутов Антон Владимирович — доктор физико-математических наук, Владимирский государственный университет им. Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых (г. Владимир).

e-mail: a1981@mail.ru

Мокрова Альбина Андреевна — кандидат физико-математических наук, Владимирский государственный университет им. Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых (г. Владимир).

e-mail: albina.mokrova@yandex.ru

Аннотация

Полимино представляет собой связную фигуру на плоскости, составленную из конечного числа единичных квадратов, примыкающих друг к другу по сторонам. Разбиение плоскости на полимино называется изоэдральным, если группа симметрий действует на нем транзитивно, то есть если для любых двух полимино разбиения существует глобальная симметрия разбиения, переводящая одно полимино во второе.

В работе рассматривается задача о подсчете числа полимино площади n , порождающих изоэдральные разбиения плоскости. Показано, что число таких полимино не превосходит $C(\varepsilon)n^4(\omega + \varepsilon)^n$, где ω - константа связности квадратной решетки \mathbb{Z}^2 . Известно, что $\omega < 2.7$. Подобные оценки получены также в случае, когда фиксирован периметр, а не площадь полимино. Кроме того, аналогичная оценка справедлива и для числа самих изоэдральных разбиений плоскости при дополнительном условии регулярности разбиений.

Ранее аналогичные результаты были получены в случае решетчатых разбиений плоскости на полимино, для так называемых $p2$ -разбиений, а также для решетчатых разбиений на центрально-симметричные полимино.

Доказательство основано на критерии существования изоэдрального разбиения плоскости на полимино, полученного Лангерманом и Винслоу, а также на подсчете числа самонепересекающихся случайных блужданий на решетке \mathbb{Z}^2 , как стандартных, так и обладающих заданной группой симметрии.

В заключении кратко обсуждаются возможные направления дальнейших исследований и некоторые открытые проблемы.

Ключевые слова: полимино, изоэдральные полимино, разбиения плоскости, критерии изоэдральности.

Библиография: 30 названий.

Для цитирования:

А. В. Шутов, А. А. Мокрова О числе изоэдральных полимино // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 1, с. 138–154.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 25. No. 1.

UDC 514.174.5

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-1-138-154

On the number of isohedral polyominoes

A. V. Shutov, A. A. Mokrova

Shutov Anton Vladimirovich — doctor of physical and mathematical sciences, Vladimir State University named after Alexander and Nikolay Stoletovs (Vladimir).

e-mail: a1981@mail.ru

Mokrova Albina Andreevna — candidate of physical and mathematical sciences, Vladimir State University named after Alexander and Nikolay Stoletovs (Vladimir).

e-mail: albina.mokrova@yandex.ru

Abstract

A polyomino is a connected figure on a plane composed from a finite number of unit squares adjacent to each other on the sides. A tiling of a plane into polyominoes is called isohedral if the symmetry group acts transitively on it, that is, if for any two polyominoes of the tiling there is a global symmetry of the tiling that moves one polyomino into the second.

The paper considers the problem of counting the number of polyominoes of area n that generate isohedral tilings of the plane. It is shown that the number of such polyominoes does not exceed $C(\varepsilon)n^4(\omega + \varepsilon)^n$, where ω is the connective constant of the square lattice \mathbb{Z}^2 . It is known that $\omega < 2.7$. Similar estimates were also obtained in the case where the perimeter rather than the area of the polyomino is fixed. In addition, a similar estimate is valid for the number of isohedral tilings of the plane themselves under the additional condition of regularity of the tilings

Previously, similar results were obtained in the case of lattice tilings of the plane into polyominoes, for the so-called $p2$ -tilings splits, as well as for lattice tilings into centrally symmetric polyominoes.

The proof is based on the criteria for the existence of an isohedral tiling of the plane into polyominoes obtained by Langerman and Winslow, as well as on counting the number of self-avoiding random walks on the lattice \mathbb{Z}^2 , both standard and with a given symmetry group.

In conclusion, possible directions for further research and some open problems are briefly discussed.

Keywords: polyominoes, isohedral polyominoes, plane tilings, isohedrality criteria.

Bibliography: 30 titles.

For citation:

A. V. Shutov, A. A. Mokrova, 2024, “On the number of isohedral polyominoes”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 1, pp. 138–154.

1. Введение

Полимино, как известно, представляет собой фигуру на плоскости, составленную из конечного числа единичных квадратов (клеток), которая сильно связна, то есть из любой клетки в любую другую клетку этого полимино можно попасть, переходя по общим сторонам смежных клеток.

Это понятие и сам термин полимино были введены в 1953 году С. В. Голомбом [1], [2].

Среди многочисленных задач, связанных с полимино, практически сразу начали изучаться задачи, связанные с разбиениями плоскости на полимино. В частности, еще Гарднером [3] перечислены все полимино, разбивающие плоскость, с числом клеток, не превосходящим семи.

Исследования, посвященные разбиениям плоскости на полимино, можно условно разделить на следующие группы:

- 1) Перечисление полимино с малым числом клеток, разбивающих плоскость [4], [6], [5] [7].
- 2) Изучение числа различных разбиений плоскости на одно полимино [8], [9].
- 3) Алгоритмы перечисления специальных разбиений плоскости на полимино [10], [11], [12], [13].
- 4) Алгоритмы, проверяющие существование разбиений плоскости на полимино [14], [15], [16], [17], [18].
- 5) Оценки и асимптотические формулы для числа специальных разбиений плоскости на полимино [19], [20], [21], [22], [23].

Разумеется, приведенный список не претендует на полноту.

Отметим, что в настоящее время неизвестно ни одного алгоритма, позволяющего определить, дает ли заданное полимино разбиение плоскости [24]. Поэтому наибольший интерес в настоящее время сконцентрирован на изучении специальных классов разбиений плоскости на полимино, таких как решетчатые, $p2$ - и $p4$ -разбиения, а также изоэдральные разбиения.

Напомним, что разбиение плоскости называется изоэдральным, если для любых двух тайлов разбиения существует глобальная симметрия разбиения, переводящая один тайл во второй.

Впервые изоэдральные разбиения были упомянуты еще Гильбертом [25]. Интерес к изоэдральным разбиением вызван тем, что они представляют собой наиболее обширный из поддающихся изучению класс разбиений, а также в связи с их важностью для кристаллографии.

Классификация изоэдральных разбиений обычно приписывается Грюнбауму и Шеппарду [26], хотя фактически она была получена еще Хеешем и Кинцлом [27]. В [27] содержится также критерий, позволяющий выяснить, порождает ли заданная фигура изоэдральное разбиение плоскости. Интересно, что многие частные случаи этого критерия многократно переоткрывались впоследствии. Наиболее яркий пример - знаменитый критерий Конвея [3], [28]. В случае полимино критерий из [27] может быть значительно упрощен, так как не все группы симметрий реализуются в разбиениях плоскости на полимино. В частности, разбиение плоскости на полимино не может иметь поворотной симметрии третьего и шестого порядков. Данное упрощение позволило построить эффективные алгоритмы, позволяющие выяснить, порождает ли заданное полимино изоэдральное разбиение плоскости [17], [18].

Будем называть полимино изоэдральным, если оно порождает хотя бы одно изоэдральное разбиение плоскости. В настоящей работе мы на основе критерия из [18] получим оценку для числа изоэдральных полимино из n клеток.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $T(n)$ — общее число изоэдральных полимино площади n . Тогда

$$T(n) \ll_{\varepsilon} (2,7 + \varepsilon)^n n^4.$$

Запись

$$f(n) \ll_{\varepsilon} g_{\varepsilon}(n),$$

означает, что существует $C(\varepsilon)$ такая, что $f(n) \leq C(\varepsilon)g_{\varepsilon}(n)$ для всех n . Здесь $f(n)$ — некоторая функция, $g_{\varepsilon}(n)$ — семейство функций, зависящих от ε .

2. Некоторые вспомогательные результаты

В данном разделе мы изложим некоторые вспомогательные результаты о числе несамопересекающихся ломаных на квадратной решетке.

Пусть $m(l)$ — число самонепересекающихся ломанных длины l на квадратной решетке (*self-avoiding walks*), $m_c(l)$ — число самонепересекающихся центрально симметричных ломанных длины l , $m_{\pi/2}(l)$ — число самонепересекающихся ломанных, обладающих следующим свойством: ломаную можно разделить на две половины, каждая из которых эквивалентна другой повернутой на угол $\frac{\pi}{2}$ (очевидно, что центры таких ломанных лежат в вершинах квадратной решетки).

ЛЕММА 1. Для числа $m(l)$ самонепересекающихся ломанных длины l на квадратной решетке существует предел $\omega = \lim_{l \rightarrow \infty} \sqrt[l]{m(l)}$ [29].

Постоянную ω называют константой связности квадратной решетки \mathbb{Z}^2 .

ЛЕММА 2. Для $m(l)$ $\omega \leq 2,7$ [29].

ЛЕММА 3. Для любого $\varepsilon > 0$ выполняется $m(l) \ll_{\varepsilon} (\omega + \varepsilon)^l$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 1 получаем, для любого $\varepsilon > 0$ существует $C(\varepsilon)$ такая, что $m(l) \leq C(\varepsilon)(\omega + \varepsilon)^l$. Учитывая введенные обозначения, лемма доказана.

Самонепересекающаяся центрально симметричная ломаная полностью определяется своей половиной. Отсюда имеем.

ЛЕММА 4.

$$m_c(l) = \begin{cases} m(l/2), l - \text{четно}; \\ m((l+1)/2), l - \text{нечетно}. \end{cases}$$

Непосредственно из лемм 3 и 4 получаем.

ЛЕММА 5. $m_c(l) \ll_{\varepsilon} (\omega + \varepsilon)^{l/2}$.

Из определения полимино, следует, что ломаная, задающая границу полимино, может изгибаться под углом $\frac{\pi}{2}$ только в вершине квадратной решетки, из чего немедленно получаем следующее утверждение.

ЛЕММА 6.

$$m_{\pi/2}(l) = \begin{cases} m(l/2), l - \text{четно}; \\ 0, l - \text{нечетно}. \end{cases}$$

3. Критерий изоэдральности

В данном мы изложим критерий того, что полимино порождает изоэдральное разбиение плоскости. Данный критерий был получен в работе [18], где он сформулирован на языке комбинаторики слов. Мы будем использовать более геометрическую формулировку критерия.

Данный критерий состоит из 7 независимых критериев, каждый из которых на самом деле отвечает за существование изоэдрального разбиения с конкретной группой симметрии.

Будем использовать обозначения $v_i v_j$, $i, j = 1, 2, \dots, 6$, для самонепересекающейся ломаной, задающей часть границы полимино. Также пусть f_{Θ} — композиция параллельного переноса и отражения относительно горизонтальной оси, а f_{Φ} — композиция параллельного переноса и отражения относительно вертикальной оси.

Критерий 1. Полимино порождает изоэдральное разбиение, когда его границу можно разбить на шесть частей точками $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$, по крайней мере три из них различны, причем существуют параллельные переносы s_1, s_2, s_3 для которых $s_1(v_1) = v_5, s_1(v_2) = v_4$, переводящий ломаную $v_1 v_2$ в ломаную $v_5 v_4$, $s_2(v_2) = v_6, s_2(v_3) = v_5$, переводящий ломаную $v_2 v_3$ в ломаную $v_6 v_5$, $s_3(v_3) = v_1, s_3(v_4) = v_6$, переводящий ломаную $v_3 v_4$ в ломаную $v_1 v_6$.

Критерий 2. Полимино порождает изоэдральное разбиение, когда его границу можно разбить на шесть частей точками $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$, по крайней мере три из них различны, причем существует параллельный перенос s_4 для которого $s_4(v_1) = v_5, s_4(v_2) = v_4$, переводящий ломаную v_1v_2 в ломаную v_5v_4 , а ломаные $v_2v_3, v_3v_4, v_5v_6, v_6v_1$ центрально-симметричны.

Критерий 3. Полимино порождает изоэдральное разбиение, когда его границу можно разбить на три части точками v_1, v_2, v_3 , причем ломаные v_1v_2, v_2v_3 можно разделить на две половины, каждая из которых эквивалентна другой повернутой на угол $\frac{\pi}{2}$, а ломаная v_3v_1 центральносимметрична.

Критерий 4. Полимино порождает изоэдральное разбиение, когда его границу можно разбить на шесть частей точками $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$, по крайней мере три из них различны, причем существует параллельный перенос s_5 для которого $s_5(v_1) = v_5, s_5(v_2) = v_4$, переводящий ломаную v_1v_2 в ломаную v_5v_4 , существует преобразование f_Θ , для которого $f_\Theta(v_2) = v_4, f_\Theta(v_3) = v_3$, переводящее ломаную v_2v_3 в ломаную v_4v_3 , существует преобразование f_Φ , для которого $f_\Phi(v_5) = v_6, f_\Phi(v_6) = v_1$, переводящее ломаную v_5v_6 в ломаную v_6v_1 .

Критерий 5. Полимино порождает изоэдральное разбиение, когда его границу можно разбить на шесть частей точками $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$, по крайней мере три из них различны, причем существует параллельный перенос s_6 для которого $s_6(v_1) = v_5, s_6(v_2) = v_4$, переводящий ломаную v_1v_2 в ломаную v_5v_4 , существует преобразование f_Θ , для которого $f_\Theta(v_2) = v_1, f_\Theta(v_3) = v_6$, переводящее ломаную v_2v_3 в ломаную v_1v_6 , существует преобразование f_Φ , для которого $f_\Phi(v_3) = v_6, f_\Phi(v_4) = v_5$, переводящее ломаную v_3v_4 в ломаную v_6v_5 .

Критерий 6. Полимино порождает изоэдральное разбиение, когда его границу можно разбить на шесть частей точками $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$, по крайней мере три из них различны, причем существует параллельный перенос s_7 для которого $s_7(v_1) = v_5, s_7(v_2) = v_4$, переводящий ломаную v_1v_2 в ломаную v_5v_4 , ломаные v_2v_3, v_3v_4 — центрально-симметричны, существует преобразование f_Φ , для которого $f_\Phi(v_5) = v_6, f_\Phi(v_6) = v_1$, переводящее ломаную v_5v_6 в ломаную v_6v_1 .

Критерий 7. Полимино порождает изоэдральное разбиение, когда его границу можно разбить на шесть частей точками $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$, причем ломаные v_1v_2, v_3v_4 — центрально-симметричны, существует преобразование f_Θ , для которого $f_\Theta(v_2) = v_5, f_\Theta(v_3) = v_6$, переводящее ломаную v_2v_3 в ломаную v_5v_6 , существует преобразование f_Φ , для которого $f_\Phi(v_4) = v_6, f_\Phi(v_5) = v_1$, переводящее ломаную v_4v_5 в ломаную v_6v_1 .

ТЕОРЕМА 2. *Полимино является изоэдральным тогда и только тогда, когда его граница удовлетворяет хотя бы одному из критериев 1-7.*

Каждое разбиение границы из критериев 1–7 порождает разбиение плоскости. Способ построения этого разбиения описан в [18]. Разбиение плоскости, полученное из разбиения границы, удовлетворяющего i -тому критерию удобно называть разбиением i -того типа, $i = 1, 2, \dots, 7$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. *Разбиения первого типа это решетчатые разбиения, а разбиения второго типа это r_2 -разбиения. В работах [21] и [22] для числа соответствующих разбиений были получены оценки, представленные в теоремах 3 и 4 соответственно.*

ЗАМЕЧАНИЕ 2. *Если полимино обладает нетривиальной группой симметрии, то для него может существовать разбиение границы, удовлетворяющее нескольким критериям одновременно. Поэтому тип разбиения, вообще говоря, определен не однозначно. Кроме того, полимино может породить несколько разбиений одного типа.*

ЗАМЕЧАНИЕ 3. *Обычно условия критерия Конвея (критерий 2) формулируются следующим образом. «Две противоположных ломаных, a и d , — “параллельны” в том смысле, что они конгруэнтны и находятся в одной ориентации. Каждая из четырех других ломаных b ,*

c , e и f центросимметрично; то есть они не изменяются поворотом на 180° вокруг средней точки. ... Любое из шести ребер может быть пустым (несуществующим).» [30] В работе [30] приведен контрпример (рисунок 1). На ранее опубликованные в работах [21], [22], [23] доказательства формулировка критерия не влияет.

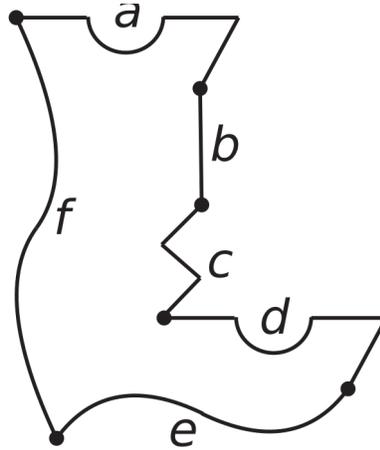


Рис. 1: Контрпример для критерия Конвея

4. Число изоэдральных разбиений плоскости на полимино с заданным полупериметром

Вначале получим оценку для числа изоэдральных полимино в терминах не площади, а полупериметра.

Пусть $t(p)$ – число изоэдральных полимино полупериметра p . Отметим, что данное число, очевидно, не превосходит числа разбиений изоэдральных разбиений плоскости на такие полимино.

При этом на самом деле достаточно ограничиться подсчетом числа разбиений некоторого специального вида, а именно регулярных изоэдральных разбиений. Разбиение плоскости на полимино будем называть регулярным, если любые два полимино разбиения граничат по целому числу клеток целочисленной решетки. Известно [18], что если существует изоэдральное разбиение плоскости на полимино, то существует и регулярное изоэдральное разбиение плоскости на то же самое полимино.

Отметим, что каждому разбиению границы полимино из критериев 1–7 соответствует некоторое изоэдральное разбиение плоскости на полимино. Если ломаные, определяющие разбиение, состоят из отрезков единичной длины, полученное разбиение будет регулярным.

Пусть $t_i(p)$ – число регулярных изоэдральных разбиений типа i ($1 \leq i \leq 7$) на полимино полупериметра p . Эквивалентно, $t_i(p)$ – число способов разбить границы всех полимино полупериметра p на ломаные, состоящие из отрезков единичной длины, и удовлетворяющие i -ому критерию.

В силу сказанного выше, выполняется неравенство

$$t(p) \leq \sum_{i=1}^7 t_i(p).$$

Наша следующая цель состоит в получении верхних оценок для $t_i(p)$ для всех i .

ТЕОРЕМА 3. *Справедливо неравенство*

$$t_1(p) \ll_{\varepsilon} (\omega + \varepsilon)^p p^2. \quad (1)$$

ТЕОРЕМА 4. *Справедливо неравенство*

$$t_2(p) \ll_{\varepsilon} (\omega + \varepsilon)^p p^4. \quad (2)$$

Примеры разбиения границы полимино на части в случае разбиений первого и второго типа представлены на рисунках 2 и 3 соответственно. Концы ломаных, составляющих границу полимино, здесь и далее для удобства отмечены точками.

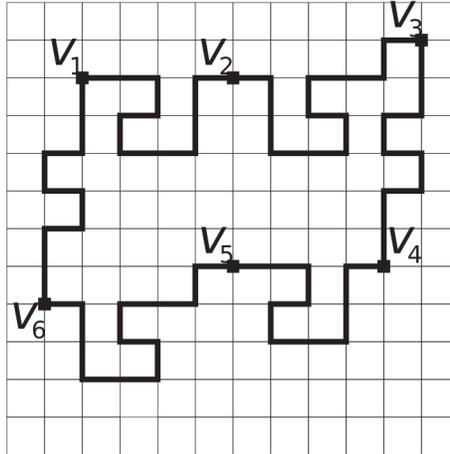


Рис. 2: Пример полимино 1 типа

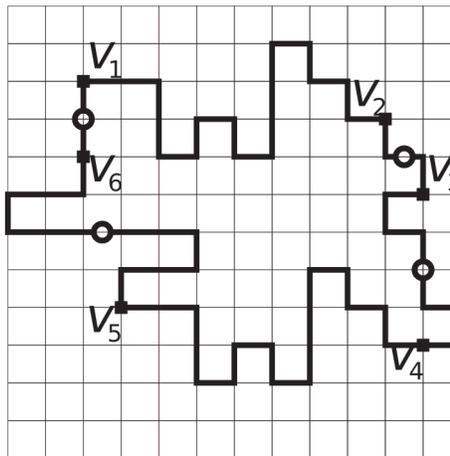


Рис. 3: Пример полимино 2 типа

Теоремы 3 и 4 доказаны в работах [21] и [22] соответственно.

ТЕОРЕМА 5. *Справедливо неравенство*

$$t_3(p) \ll_{\varepsilon} (\omega + \varepsilon)^p p^2. \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Для полупериметра полимино, порождающего регулярное разбиение третьего типа, справедливо равенство

$$p = \frac{1}{2}l_{v_1v_2} + \frac{1}{2}l_{v_2v_3} + \frac{1}{2}l_{v_3v_1}. \quad (4)$$

Учитывая леммы 1 – 6, имеем

$$\begin{aligned}
 t_3(p) &\leq \sum_{\frac{1}{2}l_{v_1v_2} + \frac{1}{2}l_{v_2v_3} + \frac{1}{2}l_{v_3v_1} = p} m_{\pi/2}(l_{v_1v_2})m_{\pi/2}(l_{v_2v_3})m_c(l_{v_3v_1}) \ll_{\varepsilon} \\
 &\ll_{\varepsilon} \sum_{\frac{1}{2}l_{v_1v_2} + \frac{1}{2}l_{v_2v_3} + \frac{1}{2}l_{v_3v_1} = p} (\omega + \varepsilon)^{\frac{1}{2}l_{v_1v_2}} (\omega + \varepsilon)^{\frac{1}{2}l_{v_2v_3}} (\omega + \varepsilon)^{\frac{1}{2}l_{v_2v_3}} \ll_{\varepsilon} \\
 &\ll_{\varepsilon} (\omega + \varepsilon)^p \sum_{\frac{1}{2}l_{v_1v_2} + \frac{1}{2}l_{v_2v_3} + \frac{1}{2}l_{v_3v_1} = p} 1, \tag{5}
 \end{aligned}$$

где $\sum_{\frac{1}{2}l_{v_1v_2} + \frac{1}{2}l_{v_2v_3} + \frac{1}{2}l_{v_3v_1} = p} 1$ — число решений уравнения (4) и $\sum_{\frac{1}{2}l_{v_1v_2} + \frac{1}{2}l_{v_2v_3} + \frac{1}{2}l_{v_3v_1} = p} 1 \ll_{\varepsilon} p^2$. Тогда из (5) получаем (3). Теорема доказана.

Пример полимино, порождающего разбиение третьего типа, представлен на рисунке 4.

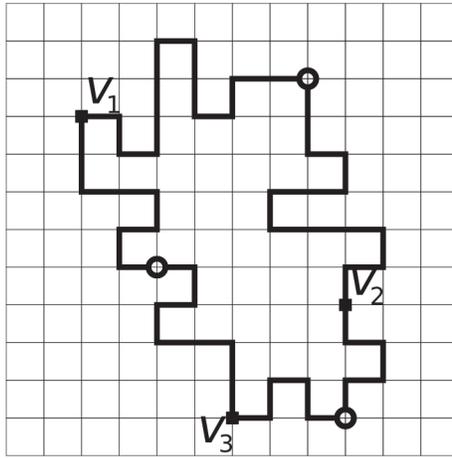


Рис. 4: Пример полимино 3 типа

ТЕОРЕМА 6. *Справедливо неравенство*

$$t_4(p) \ll_{\varepsilon} (\omega + \varepsilon)^p p^2. \tag{6}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Полупериметр полимино, порождающего разбиение четвертого типа, вычисляется как

$$p = l_{v_1v_2} + l_{v_2v_3} + l_{v_5v_6}. \tag{7}$$

Учитывая леммы 1 – 4, имеем

$$\begin{aligned}
 t_4(p) &\leq \sum_{l_{v_1v_2} + l_{v_2v_3} + l_{v_5v_6} = p} m(l_{v_1v_2})m(l_{v_2v_3})m(l_{v_5v_6}) \ll_{\varepsilon} \\
 &\ll_{\varepsilon} \sum_{l_{v_1v_2} + l_{v_2v_3} + l_{v_5v_6} = p} \ll_{\varepsilon} (\omega + \varepsilon)^{l_{v_1v_2}} (\omega + \varepsilon)^{l_{v_2v_3}} (\omega + \varepsilon)^{l_{v_5v_6}} \ll_{\varepsilon} \\
 &\ll_{\varepsilon} (\omega + \varepsilon)^p \sum_{l_{v_1v_2} + l_{v_2v_3} + l_{v_5v_6} = p} 1, \tag{8}
 \end{aligned}$$

где $\sum_{l_{v_1v_2} + l_{v_2v_3} + l_{v_5v_6} = p} 1$ — число решений уравнения (7) и $\sum_{l_{v_1v_2} + l_{v_2v_3} + l_{v_5v_6} = p} 1 \ll_{\varepsilon} p^2$. Тогда из (8) получаем (6). Теорема доказана.

Пример полимино, порождающего разбиение четвертого, типа представлен на рисунке 5.

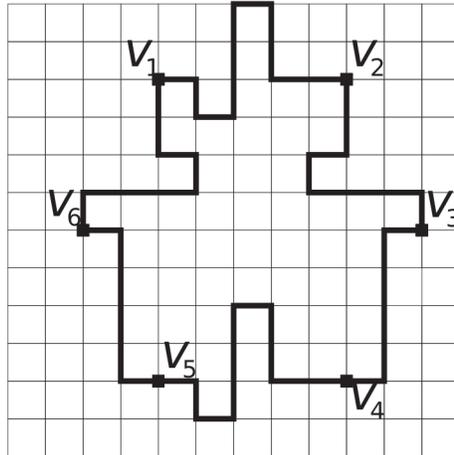


Рис. 6: Пример полимино 5 типа

Учитывая леммы 1 – 5, имеем

$$\begin{aligned}
 t_6(p) &\leq \sum_{l_{v_1 v_2} + \frac{1}{2}l_{v_2 v_3} + \frac{1}{2}l_{v_3 v_4} + l_{v_5 v_6} = p} m(l_{v_1 v_2})m_c(l_{v_2 v_3})m_c(l_{v_3 v_4})m(l_{v_5 v_6}) \ll_\varepsilon \\
 &\ll_\varepsilon \sum_{l_{v_1 v_2} + \frac{1}{2}l_{v_2 v_3} + \frac{1}{2}l_{v_3 v_4} + l_{v_5 v_6} = p} (\omega + \varepsilon)^{l_{v_1 v_2}} (\omega + \varepsilon)^{\frac{1}{2}l_{v_2 v_3}} (\omega + \varepsilon)^{\frac{1}{2}l_{v_3 v_4}} (\omega + \varepsilon)^{l_{v_5 v_6}} \ll_\varepsilon \\
 &\ll_\varepsilon (\omega + \varepsilon)^p \sum_{l_{v_1 v_2} + \frac{1}{2}l_{v_2 v_3} + \frac{1}{2}l_{v_3 v_4} + l_{v_5 v_6} = p} 1, \tag{14}
 \end{aligned}$$

где $\sum_{l_{v_1 v_2} + \frac{1}{2}l_{v_2 v_3} + \frac{1}{2}l_{v_3 v_4} + l_{v_5 v_6} = p} 1$ — число решений уравнения (13) и

$$\sum_{l_{v_1 v_2} + \frac{1}{2}l_{v_2 v_3} + \frac{1}{2}l_{v_3 v_4} + l_{v_5 v_6} = p} 1 \ll_\varepsilon p^3.$$

Тогда из (14) получаем (12). Теорема доказана.

Пример полимино, порождающего разбиение шестого типа, представлен на рисунке 7.

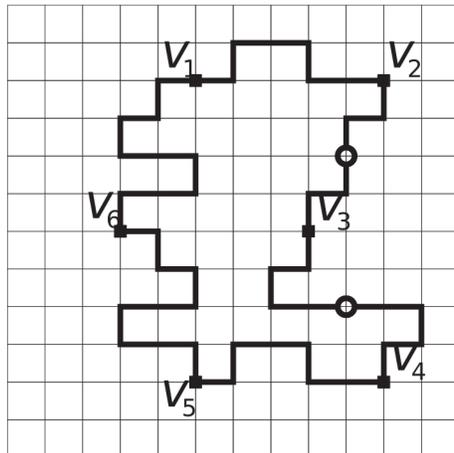


Рис. 7: Пример полимино 6 типа

ТЕОРЕМА 9. *Справедливо неравенство*

$$t_7(p) \ll_\varepsilon (\omega + \varepsilon)^p p^3. \tag{15}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Полупериметр полимино, порождающего разбиение седьмого типа, равен

$$p = \frac{1}{2}l_{v_1v_2} + l_{v_2v_3} + \frac{1}{2}l_{v_3v_4} + l_{v_4v_5}. \tag{16}$$

Учитывая леммы 1 – 5, имеем

$$\begin{aligned} t_7(p) &\leq \sum_{\frac{1}{2}l_{v_1v_2} + l_{v_2v_3} + \frac{1}{2}l_{v_3v_4} + l_{v_4v_5} = p} m_c(l_{v_1v_2})m(l_{v_2v_3})m_c(l_{v_3v_4})m(l_{v_4v_5}) \ll_\varepsilon \\ &\ll_\varepsilon \sum_{\frac{1}{2}l_{v_1v_2} + l_{v_2v_3} + \frac{1}{2}l_{v_3v_4} + l_{v_4v_5} = p} (\omega + \varepsilon)^{\frac{1}{2}l_{v_1v_2}} (\omega + \varepsilon)^{l_{v_2v_3}} (\omega + \varepsilon)^{\frac{1}{2}l_{v_3v_4}} (\omega + \varepsilon)^{l_{v_4v_5}} \ll_\varepsilon \\ &\ll_\varepsilon (\omega + \varepsilon)^p \sum_{\frac{1}{2}l_{v_1v_2} + l_{v_2v_3} + \frac{1}{2}l_{v_3v_4} + l_{v_4v_5} = p} 1, \end{aligned} \tag{17}$$

где $\sum_{\frac{1}{2}l_{v_1v_2} + l_{v_2v_3} + \frac{1}{2}l_{v_3v_4} + l_{v_4v_5} = p} 1$ — число решений уравнения (16) и

$$\sum_{\frac{1}{2}l_{v_1v_2} + l_{v_2v_3} + \frac{1}{2}l_{v_3v_4} + l_{v_4v_5} = p} 1 \ll_\varepsilon p^3.$$

Тогда из (17) получаем (15). Теорема доказана.

Пример полимино, порождающего разбиение седьмого типа, представлен на рисунке 8.

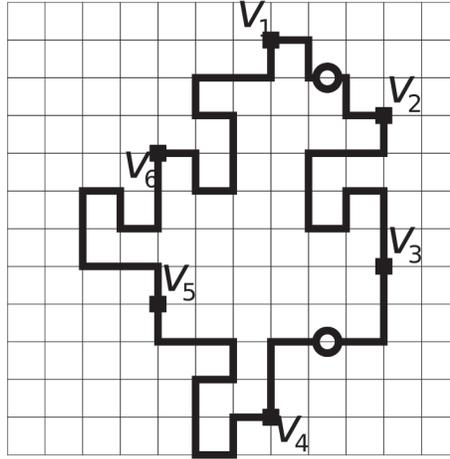


Рис. 8: Пример полимино 7 типа

5. Результаты

Обобщим результаты теорем 3 – 9.

ТЕОРЕМА 10. *Пусть $t_i(p)$ — число регулярных изоздральных разбиений плоскости на полимино типа i с полупериметром p , $i = 1, 2, \dots, 7$. Верхняя оценка числа таких разбиений для каждого типа полимино определяется одним из неравенств*

$$\begin{cases} t_i(p) \ll_\varepsilon (\omega + \varepsilon)^p p^2, & \text{при } i = 1, 3, 4, 5; \\ t_i(p) \ll_\varepsilon (\omega + \varepsilon)^p p^4, & \text{при } i = 2; \\ t_i(p) \ll_\varepsilon (\omega + \varepsilon)^p p^3, & \text{при } i = 6, 7. \end{cases} \tag{18}$$

Таким образом для числа изоэдральных полимино заданного полупериметра имеем оценку

$$t(p) \ll_{\varepsilon} (\omega + \varepsilon)^p p^4.$$

Данная оценка справедлива также для числа регулярных изоэдральных разбиений плоскости на полимино заданного полупериметра.

Перейдем к площади. Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 11. Пусть $T_i(n)$ — число регулярных изоэдральных разбиений плоскости на полимино типа i площади n , $i = 1, 2, \dots, 7$. Верхняя оценка числа таких разбиений для каждого типа полимино определяется одним из неравенств

$$\begin{cases} T_i(n) \ll_{\varepsilon} (\omega + \varepsilon)^n n^2, & \text{при } i = 1, 3, 4, 5; \\ T_i(n) \ll_{\varepsilon} (\omega + \varepsilon)^n n^4, & \text{при } i = 2; \\ T_i(n) \ll_{\varepsilon} (\omega + \varepsilon)^n n^3, & \text{при } i = 6, 7. \end{cases} \quad (19)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценки для разбиений порожденных полимино первого и второго типа получены в работах [21] и [22].

Методом математической индукции можно получить неравенство связывающее полупериметр p полимино и его площадь n : $2p \leq 2n + 2$. Тогда для получения верхней оценки числа изоэдральных разбиений плоскости на полимино заданной площади $T(n)$ просуммируем оценки (18) для случаев 1, 3, 4 и 5, полученные для числа изоэдральных разбиений на полимино с полупериметром p от 1 до $n + 1$: $T_i(n) \leq \sum_1^{n+1} t(p) \ll_{\varepsilon} \sum_1^{n+1} (\omega + \varepsilon)^p p^2$. Заменяя последнюю сумму

на интеграл $\int_1^{n+2} C(\varepsilon)(\omega + \varepsilon)^x x^2 dx$ и учитывая, что $\int x^2 e^{ax} dx = e^{ax}(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3})$, получаем

$$T_i(n) \ll_{\varepsilon} (\omega + \varepsilon)^n n^2. \quad (20)$$

Для случаев 6, 7 просуммируем оценки (18) от 1 до $n + 1$: $T_i(n) \leq \sum_1^{n+1} t(p) \ll_{\varepsilon} \sum_1^{n+1} (\omega + \varepsilon)^p p^3$.

Заменяя последнюю сумму на интеграл $\int_1^{n+2} C(\varepsilon)(\omega + \varepsilon)^x x^3 dx$ и учитывая, что $\int x^3 e^{ax} dx = e^{ax}(\frac{x^3}{a} - \frac{3x^2}{a^2} + \frac{6x}{a^3} - \frac{6}{a^4})$, получаем

$$T_i(n) \ll_{\varepsilon} (\omega + \varepsilon)^n n^3. \quad (21)$$

Для случая 2 просуммируем оценки (18) от 1 до $n + 1$: $T_i(n) \leq \sum_1^{n+1} t(p) \ll_{\varepsilon} \sum_1^{n+1} (\omega + \varepsilon)^p p^4$.

Заменяя последнюю сумму на интеграл $\int_1^{n+2} C(\varepsilon)(\omega + \varepsilon)^x x^4 dx$ и учитывая $\int x^4 e^{ax} dx = e^{ax}(\frac{x^4}{a} - \frac{4x^3}{a^2} + \frac{12x^2}{a^3} - \frac{24x}{a^4} + \frac{24}{a^5})$, получаем

$$T_i(n) \ll_{\varepsilon} (\omega + \varepsilon)^n n^4. \quad (22)$$

Обобщив формулы (20) — (22), получим (19). Теорема доказана.

Окончательно имеем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 12. Пусть $T(n)$ — общее число изоэдральных полимино площади n . Верхняя оценка общего числа таких разбиений определяется неравенством

$$T(n) \ll_{\varepsilon} (\omega + \varepsilon)^n n^4. \quad (23)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Результат немедленно вытекает из предыдущей теоремы и неравенства

$$T(n) \leq \sum_{i=1}^7 T_i(n).$$

Отметим, что аналогичная оценка также имеет место для числа регулярных изоэдральных разбиений плоскости на полимино площади n .

6. Заключение

В работе получена оценка для числа $T(n)$ полимино, порождающих изоэдральные разбиения плоскости. Эта оценка имеет порядок $C(\varepsilon)n^4(\omega + \varepsilon)^n$. Близкие по порядку (точнее отличающиеся на полиномиальный множитель) оценки ранее были получены Шутовым и Коломейкиной для более узких классов разбиений. Отметим, что лучшая на данный момент нижняя оценка для $T(n)$ получена в работе [21] и имеет порядок $T(n) \geq c2^n$. Было бы крайне интересно преодолеть или хотя бы уменьшить разрыв между верхней и нижней оценкой, однако эта задача представляется крайне сложной и требующей привлечения принципиально новых идей.

Еще более сложной представляется задача расширения результатов работы на другие классы разбиений. В частности, известны примеры так называемых анизотрапальных полимино, то есть полимино, порождающих исключительно неизотрапальные разбиения плоскости, однако не известно каких-либо достаточно общих критериев существования таких разбиений. Также остается открытым вопрос о существовании полимино, порождающего только непериодические разбиения плоскости.

Более перспективной представляется задача обобщения представленных результатов на полигексы и полиамонды, то есть на фигуры, составленные из правильных шестиугольников и треугольников.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Golomb S. W. Checker boards and polyominoes // American Mathematical Monthly. 1954. Vol. 61. P. 672–682.
2. Голлоб С.В. Полимино М.: Мир. 1975. 207 с.
3. Gardner M. More about tiling the plane: the possibilities of polyominoes, polyiamonds, and polyhexes // Scientific American. 1975. P. 112–115.
4. Rhoads G. C. Planar tilings by polyominoes, polyhexes, and polyiamonds // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2005. Vol. 174. P. 329–353.
5. Rawsthorne D. Tiling complexity of small n-ominoes ($n < 10$) // Discrete Math. 1988. Vol. 70, no. 1. P. 71–75
6. Rhoads G. C. Planar Tilings and the Search for an Aperiodic Prototile. PhD dissertation. Rutgers University. 2003.
7. Myers J. Polyomino, polyhex and polyiamond tiling. Available at: <https://www.polyomino.org.uk/mathematics/polyform-tiling/>
8. Fontaine A., Martin G. Polymorphic polyominoes // Math. Mag. 1984. Vol. 57, no. 5. P. 275–283.

9. Kazuyuki A., Yoshinobu H. On the number of p4-tilings by an n -omino // *Internat. J. Comput. Geom. Appl.* 2018. Vol. 29, no. 1. P. 3–19.
10. Малеев А. В. Алгоритм и компьютерная программа перебора вариантов упаковок полимино в плоскости // *Кристаллография.* 2013. Т. 58. Вып. 5. С. 749–756.
11. Fukuda H., Mutoh N., Nakamura G. Schattschneider D. A method to generate polyominoes and polyiamonds for tilings with rotational symmetry // *Graphs and Combinatorics.* 2007. Vol. 23, Supplement 1. P. 259–267.
12. Fukuda H., Mutoh N., Nakamura G. Schattschneider D. Enumeration of polyominoes, polyiamonds and polyhexes for isohedral tilings with rotational symmetry // *Computational Geometry and Graph Theory - International Conference. KyotoCGGT.* Kyoto, Japan. June 11–15, 2007. Revised Selected Papers. Springer. P. 68–78.
13. Horiyama T., Samejima M. Enumeration of polyominoes for p4 tiling // *Proc. 21st Canadian Conf. Computational Geometry. CCCG, 2009.* P. 29–32.
14. Beauquier D., Nivat M. On translating one polyomino to tile the plane // *Discrete Comput. Geom.* 1991. Vol. 6, no. 6. P. 575–592.
15. Brlek S., Provencal X. Fedou J.-M. On the tiling by translation problem // *Discrete Applied Mathematics.* 2009. Vol. 157, no. 3, P. 464–475.
16. Gambini I. Vuillon L. An algorithm for deciding if a polyomino tiles the plane by translations // *RAIRO Theoretical Informatics and Applications.* 2007. Vol. 41, no. 2. P. 147–155.
17. Keating K., Vince A. Isohedral polyomino tiling of the plane // *Discrete Comput. Geom.* 1999. Vol. 21, no. 4. P. 615–630.
18. Langerman S., Winslow A. A Quasilinear-Time Algorithm for Tiling the Plane Isohedrally with a Polyomino // *Proc. of 32nd International Symposium on Computational Geometry (SoCG 2016).* 2016. P. 50:1–50:15.
19. Brlek S., Frosini A., Rinaldi S. Vuillon L. Tilings by translation: enumeration by a rational language approach // *The electronic journal of combinatorics.* 2006. Vol. 13. P. 15.
20. Малеев А. В., Шутов А. В. О числе трансляционных разбиений плоскости на полимино // *Труды IX Всероссийской научной школы “Математические исследования в естественных науках”.* Апатиты. 2013. С. 101–106.
21. Шутов А. В., Коломейкина Е. В. Оценка числа решетчатых разбиений плоскости на полимино заданной площади // *Моделирование и анализ информационных систем.* 2013. Т. 20. Вып. 5. С. 148–157.
22. Шутов А. В., Коломейкина Е. В. Оценка числа решетчатых разбиений плоскости на центрально-симметричные полимино заданной площади // *Моделирование и анализ информационных систем.* 2015. Т. 22. Вып. 2. С. 295–303.
23. Шутов А.В., Коломейкина Е.В. Оценка числа p2-разбиений плоскости на полимино заданной площади // *Чебышевский сборник.* 2016. Т.17. Вып. 3. С. 204–214.
24. Goodman-Strauss C. Can’t decide? undecide! // *Notices of the American Mathematical Society.* 2010. Vol. 57(3). P. 343–356.

25. Hilbert D. Mathematical problems // Bulletin of the American Mathematical Society. 1902. Vol. 8(10). P. 437-479.
26. Grunbaum B., Shephard G.C. The eighty-one types of isohedral tilings in the plane // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1977. Vol. 82(2). P. 177–196.
27. Heesch H., Kienzle O. Flachenschluss: System der Formen lückenlos aneinanderschliessender Flachteile. Springer. 1963.
28. Schattschneider D. Will it tile? try the Conway criterion! // Mathematics Monthly. 1980. Vol. 53(4). P. 224-233.
29. Bauerschmidt R., Duminil-Copin H., Goodman J., Slade G. “Lectures on selfavoiding walks”, Probability and Statistical Physics in Two and More Dimensions // Clay Mathematics Proceedings. 2010. Vol. 15. P. 395–476.
30. Schattschneider D. John Conway, Tilings, and Me! // Mathematical Intelligencer. 1921. Vol. 43(2). P. 124–129.

REFERENCES

1. Golomb S. W. 1954, “Checker boards and polyominoes”, *American Mathematical Monthly*, vol. 61, pp. 672–682. (<https://doi.org/10.2307/2307321>)
2. Golomb S. W. 1994, “Polyominoes, 2nd edition”, *Princeton University Press, New Jersey*, 196 p. (<https://doi.org/10.1515/9780691215051>)
3. Gardner M. 1975, “More about tiling the plane: the possibilities of polyominoes, polyiamonds, and polyhexes”, *Scientific American*, pp 112–115. (<https://doi.org/10.1038/scientificamerican0875-112>)
4. Rhoads G. C. 2005, “Planar tilings by polyominoes, polyhexes, and polyiamonds” *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 174, pp. 329–353. (<https://doi.org/10.1016/j.cam.2004.05.002>)
5. Rhoads G. C. 2003, “Planar Tilings and the Search for an Aperiodic Prototile”, *PhD dissertation, Rutgers University*.
6. Rawsthorne D. 1988, “Tiling complexity of small n-ominoes ($n < 10$)”, *Discrete Math.*, vol. 70, no. 1, pp. 71–75. ([https://doi.org/10.1016/0012-365X\(88\)90081-7](https://doi.org/10.1016/0012-365X(88)90081-7))
7. Myers J. 2016, “Polyomino, polyhex and polyiamond tiling”, Available at: <https://www.polyomino.org.uk/mathematics/polyform-tiling/>
8. Fontaine A. & Martin G. 1984, “Polymorphic polyominoes”, *Math. Mag.*, vol. 57, no. 5, pp. 275–283. (<https://doi.org/10.1080/0025570X.1984.11977126>)
9. Kazuyuki A. & Yoshinobu H. 2018, “On the number of p4-tilings by an n -omino”, *Internat. J. Comput. Geom. Appl.*, vol. 29, no. 1, pp. 3–19. (<https://doi.org/10.1142/S0218195919400016>)
10. Maleev A. V. 2013, “Algorithm and computer-program search for variants of polyomino packings in plane”, *Kristallografija*, vol. 58, no. 5, pp. 749–756. (<https://doi.org/10.7868/S0023476113040140>)

11. Fukuda H. & Mutoh N. & Nakamura G. & Schattschneider D. 2007, “A method to generate polyominoes and polyiamonds for tilings with rotational symmetry”, *Graphs and Combinatorics*, vol. 23, no. 1, pp. 259–267. (<https://doi.org/10.1007/s00373-007-0719-y>)
12. Fukuda H. & Mutoh N. & Nakamura G. & Schattschneider D. 2008, “Enumeration of polyominoes, polyiamonds and polyhexes for isohedral tilings with rotational symmetry”, *Computational Geometry and Graph Theory - International Conference, KyotoCGGT 2007, Kyoto, Japan, June 11–15, 2007. Revised Selected Papers, Springer*, pp. 68–78. (https://doi.org/10.1007/978-3-540-89550-3_7)
13. Horiyama T. & Samejima M. 2009, “Enumeration of polyominoes for p4 tiling”, *Proc. 21st Canadian Conf. Computational Geometry (CCCG 2009)*, pp. 29–32.
14. Beauquier D. & M. Nivat M. 1991, “On translating one polyomino to tile the plane”, *Discrete Comput. Geom.*, vol. 6, no. 6, pp. 575–592. (<https://doi.org/10.1007/BF02574705>)
15. Brlek S. & Provencal X & Fedou J.-M. 2009, “On the tiling by translation problem”, *Discrete Applied Mathematics*, vol. 157, no. 3, pp. 464–475. (<https://doi.org/10.1016/j.dam.2008.05.026>)
16. Gambini I. & Vuillon L. 2007, “An algorithm for deciding if a polyomino tiles the plane by translations”, *RAIRO Theoretical Informatics and Applications*, vol. 41, no. 2, pp. 147–155. (<https://doi.org/10.1051/ita:2007012>)
17. Keating K. & Vince A. 1999, “Isohedral polyomino tiling of the plane”, *Discrete Comput. Geom.*, vol. 21, no. 4, pp. 615–630. (<https://doi.org/10.1007/PL00009442>)
18. Langerman S. & Winslow A. 2016, “A Quasilinear-Time Algorithm for Tiling the Plane Isohedrally with a Polyomino”, *Proc. of 32nd International Symposium on Computational Geometry (SoCG 2016)*, vol. 50, pp. 1–50. (<https://doi.org/10.4230/LIPIcs.SocG.2016.50>)
19. Brlek S. & Frosini A. & Rinaldi S. & Vuillon L. 2006, “Tilings by translation: enumeration by a rational language approach”, *The electronic journal of combinatorics*, vol. 13, p. 15. (<https://doi.org/10.37236/1041>)
20. Maleev A. V. & Shutov A. V. 2013, “On the number of translational plane tilings by polyomino”, *Trudy IX Vserossiiskoi nauchnoi shkoly "Matematicheskie issledovaniya v estestvennykh naukah" (Proc. IX All-Russian scientific school "Mathematical Research in Natural sciences Apatity)*, pp. 101–106.
21. Shutov A. V. & Kolomeykina E. V. 2013, “The Estimation of the Number of Lattice Tilings of a Plane by a Given Area Polyomino”, *Model. Anal. Inform. Sist.*, vol. 20, no. 5, pp. 148–157. (<https://doi.org/10.18255/1818-1015-2013-5-148-157>)
22. Shutov A. V. & Kolomeykina E. V. 2015, “The estimating of the number of lattice tilings of a plane by a given area centrosymmetrical polyomino”, *Model. Anal. Inform. Sist.*, vol. 22, no. 2, pp. 295–303. (<https://doi.org/10.18255/1818-1015-2015-2-295-303>)
23. Shutov A. V. & Kolomeykina E. V. 2016, “The estimation of the number of p2-tilings of a plane by a given area polyomino”, *Chebyshevskii Sbornik.*, vol. 17, no. 3, pp. 204–214. (<https://doi.org/10.22405/2226-8383-2016-17-3-204-214>)
24. Goodman-Strauss C. 2010, “Can’t decide? undecide!”, *Notices of the American Mathematical Society*, vol. 57, no. 3, pp. 343–356.

25. Hilbert D. 1902, “Mathematical problems”, *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 8, no. 10, pp. 437-479. (<https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1902-00923-3>)
26. Grunbaum B. & Shephard G. C. 1977, “The eighty-one types of isohedral tilings in the plane”, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 82, no. 2, pp. 177–196. (<https://doi.org/10.1017/S0305004100053810>)
27. Heesch H. & Kienzle O. 1963, “Flachenschluss: System der Formen luckenlos aneinanderschliessender Flachteile”, *Springer*.
28. Schattschneider D. 1980, “Will it tile? try the Conway criterion!”, *Mathematics Monthly*, vol. 53, no. 4, pp. 224-233. (<https://doi.org/10.2307/2689617>)
29. Bauerschmidt R. & Duminil-Copin H. & Goodman J. & Slade G. 2010, “Lectures on selfavoiding walks”, *Probability and Statistical Physics in Two and More Dimensions. Clay Mathematics Proceedings*, vol. 15, pp. 395–476.
30. Schattschneider D. 1921, “John Conway, Tilings, and Me!”, *Mathematical Intelligencer*, vol. 43, no. 2, pp. 124–129. (<https://doi.org/10.1007/s00283-021-10062-0>)

Получено: 18.12.2023

Принято в печать: 21.03.2024

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 25. Выпуск 1.

УДК 511.524

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-1-155-163

Расстояние Wt - над метрическим пространством b -

Э. Альмухур, М. Кусини, А. Абир, А. Манал

Альмухур Эман — факультет фундаментальных и гуманитарных наук, Частный университет прикладных наук (г. Амман, Иордания).

email: e_almuhur@asu.edu.jo

Кусини Майсун — кафедра математики, Иорданский университет Аль-Зайтуна (г. Амман, Иордания).

email: M.qousini@zuj.edu.jo

Альнана Абир — факультет математики, Университет принца Саттама бин Абдулазиза (г. Аль-Хардж, Саудовская Аравия).

email: a.alnana@psau.edu.sa

Аль-Лабади Манал — кафедра математики, Университет Петры (г. Амман, Иордания).

email: Manal.allabadi@uop.edu.jo

Аннотация

В этой работе мы исследуем характеристики wt -расстояния характеристики над b -метрическим пространством и условия, необходимые для обеспечения наличие неподвижной точки, если позволить β -функции соответствующим образом. Кроме того, мы доказываем некоторые теоремы о неподвижной точке.

Ключевые слова: wt - метрика, b - метрика, β - функция, неподвижная точка.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:

Э. Альмухур, М. Кусини, А. Алнана, М. Аль-Лабади. Расстояние Wt - над метрическим пространством b - // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 1, с. 155–163.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 25. No. 1.

UDC 511.524

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-1-155-163

***Wt*– Distance over *b*– Metric Space**

E. Almukhur, M. Kusini, A. Alnana, M. Al-Labadi

Almukhur Eman — department of basic science and humanities, Applied Science Private University (Amman, Jordan).

e-mail: e_almukhur@asu.edu.jo

Qousini Maysoon — department of mathematics, Al-Zaytoonah University of Jordan (Amman, Jordan).

e-mail: M.qousini@zuj.edu.jo

Alnana Abeer — department of mathematics, Prince Sattam Bin Abdulaziz University (Al-Kharj, Saudi Arabia).

e-mail: a.alnana@psau.edu.sa

Al-Labadi Manal — department of mathematics, University Of Petra (Amman, Jordan).

e-mail: Manal.allabadi@uop.edu.jo

Abstract

In this paper, we examine the *wt*–distance characteristics over *b*–metric space and the conditions required to ensure the presence of the fixed point by letting β –function appropriately. In addition, we prove some fixed point theorems.

Keywords: *wt*– metric, *b*– metric, β – function, fixed point.

Bibliography: 15 titles.

For citation:

E. Almukhur, M. Kusini, A. Alnana, M. Al-Labadi, 2024, "On the exceptional set of a system of linear equations with prime numbers", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 1, pp. 155–163.

1. Introduction

One of the first ideas that humans developed was the concept of distance. Distance was initially conceptualized by (Euclid). Felix Hausdorff later redefined "metric space" as the general form and more axiomatic version that was first discussed by Maurice René Fréchet as "*L*–space." The concept of distance has since been explored, improved upon, and broadly applied in numerous contexts. In this paper, we concentrate on two of these generalizations: *b*-metric and *wt*-distance. We'll set up some notations and ideas before we begin to investigate the topic in depth. We assume that all sets and subsets examined in this paper are non-empty throughout. The function d defined on $X \times X$ to \mathbb{R}^+ is the distance function if the following axioms are satisfied for all u, v and ω in X :

(i) $d(u, v) = d(v, u)$.

(ii) $d(u, v) = 0$ if $u = v$.

(iii) $d(u, v) + d(v, \omega) \geq d(u, \omega)$ the triangle inequality as it states that the sum of a triangle's two sides is at least as large as the third side when applied to \mathbb{R}^2 with the usual metric.

A non-empty set X together with a function d is a metric space. We short (X, d) by X .

The space (X, d) is complete if none of its points are missed from its inside or boundary. For example, the sequence $(x_n)_{n=1}^\infty$ in the metric space X is complete if $\forall n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{Z} : \forall x_1, x_2 > k, d(x_1, x_2) < n$.

On the other side, the set of rational numbers is not complete since we cannot construct a Cauchy sequence of rational numbers that converges to a rational number.

The hyperbolic metric space, introduced by Mikhael Gromov [3], is defined as: X is d -hyperbolic iff all $x, y, z, \omega \in X$ we have:

$$\min((x, y)_\omega, (y, z)_\omega) - d \leq (x, z)_\omega \dots (1)$$

If (1) is satisfied $\forall \omega_o$ a fixed base point and $\forall x, y, z \in X$, then it is satisfied for all with a constant $2d$.

A space (X, d) is called a pseudometric if $\forall x, y \in X$, for $x \neq y$, one may have $d(x, y) = 0$. This notion is introduced by Đuro Kurepa [4]. Typically, every metric space is pseudometric. The pseudometric topology is generated by open balls defined as $B_r(a) = \{x \in X : d(a, x) < r\}$.

A space (X, d) is said to be a ν -generalized metric space [5] if $\forall x \neq y$ in X , we have the following:

- i) $d(x, y) = 0$.
- ii) $d(x, y) = d(y, x)$.
- iii) $d(x, y) \leq d(x, z_1) + d(z_1, z_2) + \dots + d(z_\nu, y) \forall z_1 \neq z_2 \neq \dots \neq z_\nu \in X$.

If X is a non-empty set, then the partial metric is the function $p : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ such that $\forall a, b, c \in X$, the following conditions hold:

- i) $a = b$ iff $p(a, a) = p(a, b) = p(b, b)$
- ii) $p(a, a) = p(a, b)$
- iii) $p(a, b) = p(b, a)$
- iv) $p(a, b) \leq p(a, c) + p(z, b) - p(c, c)$

The partial metric space is the couple (X, p) .

In 1998, Czerwik [1] and Bakhtin [2] introduced the extension b -metric space. The metric space (X, d) is a b -metric space over the constant k if the following hold $\forall x, y, z \in X$:

- (i) $d(x, y) = d(y, x)$.
- (ii) $d(x, y) = 0$ iff $x = y$.
- (iii) If the relaxed triangle inequality holds for some constant $k \geq 1$:
 $d(x, z) \leq k[d(x, y) + d(y, z)]$.

We see that any b -metric space is unquestionably a metric space under the scenario where $k = 1$. So, this idea is less strong than the concept of metric space.

2. b -MetricSpace

LEMMA 1. If (X, d) is a b -metric space, then for then natural number n and $(x_0, x_1, \dots, x_n) \in X^{n+1}$, we have

$$d(x_0, x_n) \leq \sum_{i=1}^{n-2} k^{i+1}d(x_i, x_{i+1}) + k^{n-1}d(x_{n-1}, x_n) \dots (2)$$

In Euclidean space, the convergence of a sequence $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ to the point x is defined as [6]: if $\forall \epsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N} : \forall n > N, d(x_n, x) < \epsilon$.

Such concept in topology is defined as: the sequence $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ converges to the point x if U open set containing $x, \exists n \in \mathbb{N} : \forall n > N, x_n \in U$.

Both of these concepts are valid and equivalent in metric spaces.

DEFINITION 1. For the sequence $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ in the b -metric space (X, d) and a subset A in X [6]:

- (i) $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ converges to x if $\lim_n d(x_n, x) = 0$.
- (ii) $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ is Cauchy if $\lim_n \sup\{d(x_n, x_m)\} = 0 \forall m > n$.

(iii) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ is complete if every Cauchy sequence converges.

(iv) A is closed if for any convergent sequence $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$,

$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) \in A$.

(v) A is bounded if $\sup\{d(x, y)\} < \infty \forall x, y \in A$.

LEMMA 2. The sequence $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ in the b -metric space (X, d) is Cauchy [7] if $\exists m \in [0, \frac{1}{k}] : d(x_{n+1}, x_{n+2}) \leq md(x_n, x_{n+1}) \forall n \in \mathbb{N}$.

Note that every b -metric space is metrizable, even though not all ν -generalized metric spaces are metrizable. As a result, we observe that definition 2.2 above leaves no opportunity for ambiguity.

Let $CB(X) = \{F \subset X : F \neq \phi \text{ closed and bounded}\}$ and $\forall x \in X$, then $\forall A, B \subset X$, if $d(x, A) = \inf\{d(x, y) : y \in A\}$, then the Hausdorff metric space or Pompeiu-Hausdorff distance (H, d) [8] is defined by

$$H(A, B) = \max\{\sup\{d(x, B) : x \in A\}, \sup\{d(y, A) : y \in B\}\}.$$

REMARK 1. Define the function $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ by

$$f(n) = -[-\log_2 n] \dots (3)$$

If $n \in \mathbb{N}$ and $(x_0, x_1, \dots, x_n) \leq k^{f(n)} \sum_{i=0}^{n-1} d(x_i, x_{i+1})$ and the following hold:

$$(i) f(2n) = f(n) + 1$$

$$(ii) f(n+1) \in \{f(n), f(n) + 1\}$$

(iii) f is non-decreasing.

LEMMA 3. If $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ is a sequence in the b -metric space (X, d) , and $r \in [0, 1) :$ $d(x_{n+1}, x_{n+2}) \leq r \cdot d(x_n, x_{n+1}) \forall n \in \mathbb{N}$, then $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ is a Cauchy sequence [6].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. If $r = 0$, the result holds.

If $0 < r < 1$, then for some $s \in \mathbb{N} : kr^{2^s} < 1$.

Define the function f be defined as (3).

For $n, m \in \mathbb{N} : m < n < m + 2$, by remark 2.4 we have:

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &< k^{f(n-m)} \cdot \sum_{i=m}^{n-1} d(x_i, x_{i+1}) \\ &< k^s \cdot \sum_{i=m}^{n-1} d(x_1, x_2) \\ &< k^s \cdot \sum_{i=m}^{\infty} r^{i-1} d(x_1, x_n) \\ &< k^s r^m A \end{aligned}$$

where $A = \frac{d(x_1, x_2)}{r(1-r)}$

Now, $m + 2^s < n$ and $\nu = \lfloor \frac{n-m}{2^s} \rfloor$, so

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &< \sum_{i=0}^{\nu} k^{i+1} d(x_{m+2^s i}, x_{m+(i+1)2^s}) + k^{\nu} d(x_{m+\nu 2^s}, x_n) \\ &< \sum_{i=0}^{\nu} k^{i+s+1} \cdot r^{m+i2^s} \cdot A + k^{\nu+s} \cdot r^{m+\nu 2^s} \cdot A \\ &< r^m \cdot A \sum_{i=0}^{\nu} k^{i+s+1} \cdot r^{m+i2^s} \\ &< r^m \cdot A \sum_{i=m}^{\infty} k^{i+s+1} \cdot r^{m+i2^s} \\ &< r^m A \frac{k^{s+1}}{1-kr^{2^s}} \end{aligned}$$

Thus, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ is a Cauchy sequence. \square

ТЕОРЕМА 1. If (X, d) is a b -metric space and the function

$g : \mathbb{N} \cup \{0\} \rightarrow [0, \infty)$ defined as:

$$g(n) = 0 \text{ if } n = 0 \text{ and } g(n) = (2n - 2^{f(n)})k^{f(n)} + (2^{f(n)} - n)k^{f(n)-1} \forall n \in \mathbb{N}$$

g is strictly increasing.

$$g(n) = kg \left[\frac{n}{2} \right] + g(n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor) \dots (4)$$

$$0 < g(n-1) - g(n-2) \leq g(n) - g(n-1) \dots (5)$$

$$g(n) \leq k(g(k) + g(n-k)) \dots (6)$$

$\forall k \in \mathbb{N}$ and $2 \leq n$ where $k < n$ [6].

ТЕОРЕМА 2. If (X, d) is a complete b -metric space and $f : X \rightarrow CB(X)$, and $\exists r \in [0, \frac{1}{k}]$ such that $\forall x, y \in X$,

$$H(f(x), f(y)) \leq rd(x, y) \dots (7)$$

we have the following:

(i) [1] $\exists z \in X : z \in f(z)$.

(ii) [6] $\exists \epsilon > 0 : d(x, y) < \epsilon$.

(iii) [6] $\exists x \in X : d(x, f(x)) < \epsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. If $p = \frac{1+r}{2} \in (0, 1)$, then $\forall x, y \in X$ and $u \in f(x)$ with $d(x, y) < \epsilon$, $\exists \nu \in f(y) : d(u, \nu) \leq pd(x, y)$.

Then, if $\{u_n\}_{n=1}^\infty \in X : d(u_1, f(u_1)) \leq d(u_1, u_2) < \epsilon$

so, $u_{n+1} \in f(u_n)$ and $d(u_{n+1}, u_{n+2}) \leq pd(u_n, u_{n+1})$.

$\forall n \in \mathbb{N}$ and by lemma 2.3, $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ is Cauchy.

But, X is complete, so $\{u_n\}_{n=1}^\infty \rightarrow z$ in X and

$$\begin{aligned} d(z, f(z)) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} k(d(z, u_{n+1}) + d(u_{n+1}, f(z))) \\ &= k \lim_{n \rightarrow \infty} d(z, f(z)) \\ &\leq k \lim_{n \rightarrow \infty} H(f(u_n), f(z)) \\ &\leq kp \lim_{n \rightarrow \infty} d(u_n, z) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Hence, $f(z)$ is closed and $z \in f(z)$. \square

COROLLARY 1. If (X, d) is a complete b -metric space and

$f : X \rightarrow CB(X)$. Define a bijective function $l : [0, \infty) \rightarrow [0, 1)$ such that $\forall x, y \in X$ we have $H(f(x), f(y)) \leq l(d(x, y))d(x, y)$ and

$\lim_{\alpha \rightarrow t+0} \sup l(\alpha) < 1 \forall t \in [0, \infty)$, then $\exists z \in X : z \in f(z)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $\limsup_{\alpha \rightarrow 0} l(\alpha) < 1$, so we can choose $\epsilon > 0$ and $r \in [0, 1) :$

$$l(t) \leq r \forall t \in [0, \epsilon).$$

Now, for $t \in [0, \infty)$, we define $h : [0, \infty) \rightarrow (0, 1)$ by $h(t) = \frac{l(t)+1}{2}$.

Let $\{x_n\}_{n=1}^\infty \in X : x_{n+1} \in f(x_n)$ and $\forall n \in \mathbb{N} :$

$$d(x_{n+1}, x_{n+2}) \leq h(d(x_{n+1}, x_{n+2})) \cdot d(x_{n+1}, x_{n+2})$$

Typically, $\forall t \in [0, \infty)$, we have $h(t) < 1$ and $\{d(x_{n+1}, x_{n+2})\}_{n=0}^\infty$ is non-increasing.

So, $\{d(x_{n+1}, x_{n+2})\}_{n=0}^\infty$ converges to some point $\beta \in [0, \infty)$.

Since $\limsup_{\alpha \rightarrow \beta+0} \beta(\alpha) < 1$ and $h(\beta) < 1$, $\exists p \in [0, 1)$ and $\delta > 0 :$

$\forall \alpha \in [\beta, \beta + \delta]$ we have $h(\alpha) \leq p$.

$d(x_\nu, x_{\nu+1}) \leq \beta + \delta$ for some $\nu \leq n \in \mathbb{N}$

$$d(x_{n+1}, x_{n+2}) \leq (h(d(x_n, x_{n+1})) \cdot d(x_n, x_{n+1})) \leq pd(x_n, x_{n+1})$$

Then, $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0$ and so $d(x_n, x_{n+1}) \leq d(x_n, f(x_n)) < \epsilon$. \square

DEFINITION 2. (i) The function $\mu : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ is called auxiliary distance.

(ii) If μ is a non-decreasing auxiliary distance function such that

$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu^n(t) = 0 \forall t \in [0, \infty)$, then μ is a comparison [9] if it is continuous at $t = 0$, and $\mu(t) < t \forall t > 0$.

(iii) If $r \in [1, \infty)$ and there exist positive integers $k_0, s \in (0, 1)$ and a convergent series $\sum_{k=1}^\infty u_k$ with $u_k \geq 0$:

$r^{k+1} \mu^{k+1}(t) \leq sr^k \mu^k(t) + u_k \forall k_0 \leq k$, then $\forall t \in [0, \infty)$, the monotonic auxiliary distance function μ is called b -comparison [10].

We denote the set of all b -comparison functions by B .

LEMMA 4. If μ is a b -comparison function, then $\sum_{k=0}^\infty r^k \mu^k(t)$ is convergent, increasing and continuous at $t = 0 \forall t \in [0, \infty)$ [9].

REMARK 2. Each b -comparison function is comparison [11].

DEFINITION 3. (i) The function $f : X \rightarrow X$ is β -orbital admissible where

$\beta : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ if $\forall u \in X$

$$1 \leq \beta(u, f(u)) \Rightarrow 1 \leq \beta(f(u), f^2(u)) \dots\dots(8)$$

(ii) If $\forall u, v \in X$, we have $1 \leq \beta(u, v)$ and

$$1 \leq \beta(v, f(v)) \Rightarrow 1 \leq \beta(v, f^2(v)) \dots\dots(9)$$

(iii) If (8) and (9) are fulfilled, then f is called triangular β -orbital admissible [12].

LEMMA 5. If $f : (X, d, a) \rightarrow (X, d, a)$ is a triangular β -orbital admissible function and $\exists v_0 \in X : 1 \leq \beta(v_0, f(v_0))$, then $1 \leq \beta(v_n, v_m)$ and $f(v_n) = v_{n+1} \forall n, m \in \mathbb{N}$ [12]

ТЕОРЕМА 3. In the context of a whole metric space, every Σ -contraction permits a distinct fixed point [13].

3. wt -Distance over b -Metric Space

DEFINITION 4. The metric $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ is a wt -distance over (X, d, a) if the following hold [11]:

(i) $\forall u, v, \omega \in X$, a -weighted triangle inequality $d(v, \omega) \leq a[d(u, v) + d(v, \omega)]$ holds

(ii) If $v_n \rightarrow v$ in X and $d(v, \cdot) : X \rightarrow [0, \infty)$ such that $d(u, v) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} ad(u, v_n) \forall v \in X$, then d is a -lower semicontinuous.

(iii) $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \text{if } d(u, v) \leq \delta \text{ and } d(v, \omega) \leq \delta, \text{ then } d(u, \omega) \leq \epsilon.$

LEMMA 6. If $p : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ be a wt -distance over (X, d, a) and the sequences $(a_n), (b_n)$ in X and $(u_n), (v_n)$ in $[0, \infty)$ converging to 0, then [11]:

i) d is a wt -distance over (X, d, a) .

ii) if $p(a_n, b_n) \leq kn$ and $p(b_n, c) \leq un, \forall n \in \mathbb{N}$, then $a = c$.

iii) if $p(a_n, b_n) \leq kn$ and $p(b_n, c) \leq un, \forall n \in \mathbb{N}$, then (b_n) converges to c .

ТЕОРЕМА 4. Let p be a wt -distance over (X, d, a) and $f : X \rightarrow X$, then:

i) f is continuous.

ii) f is triangular β -orbital admissible.

iii) $\exists \alpha_0 \in X$ such that $1 \leq \beta(\alpha_0, f(\alpha_0))$.

iv) $\forall u \in X, 1 \leq \beta(u, f(u))$

iv) $\forall u \in X$ with $1 \leq \beta(u, f(u))$ such that $u \neq f(u)$, we have

$\inf\{p(u, v) + p(u, f(v))\} > 0$, then f has a fixed point.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. i) If $a_0 \in X$ and a sequence $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ is given by $a_n = f^n(a_0)$, then $\exists b_0 \in \mathbb{N} : f(a_{b_0}) = a_{b_0} + 1$. Hence, a_{b_0} is a fixed point of the function f . \square

COROLLARY 2. If conditions of 3.3 hold and for $r, s \in \text{Fix}(f)$ we have $1 \leq \beta(r, s)$, then $r = s$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Let $r, s \in \text{Fix}(f)$ such that $r \neq s$, then by 3.3 we have

$$\begin{aligned} p(r, s) &\leq \beta(r, s)p(f(r), f(s)) \\ &\leq \frac{1}{a}\mu(p(r, s)) \\ &< \mu(p(r, s)) \\ &< p(r, s) \end{aligned}$$

which is a contradiction. Therefore, f has a unique fixed point. \square

COROLLARY 3. If conditions of 3.3 hold and $p : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ is a wt -distance on $(X^*, d, a), \forall u, v \in X, \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ such that $\epsilon < \mu(d(u, v)) < \epsilon + \delta$ implies

$0 \leq \sigma(\beta(u, v))p(f(u), f(v), \epsilon)$ for some $\sigma \in \Sigma$ and $\mu \in \beta$ where $\mu(t) < \frac{t}{a} \forall t > 0$, then a function f has a fixed point.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Let $\{v_n\}_{n=1}^\infty$ be a sequence defined as $v_n = f^n(v_0) \forall n \in \mathbb{N}$.

If $v_n = v_{n-1}$ and because f is a triangular β -orbital admissible, we have

$$1 \leq \beta(v_{n-1}, v_n).$$

$$0 \leq \sigma(\beta(u, v)p(f(u), f(v)), \epsilon)$$

$$< \epsilon - \beta(u, v)p(f(u), f(v))$$

$$< \mu(d(u, v) - \beta(u, v)p(f(u), f(v)), f(v))$$

Then $\forall u \neq v$ we get,

$$\beta(u, v)p(f(u), f(v)) < \mu(p(u, v)) < p(u, v) \dots (10)$$

Considering $u = v_{n-1}$ and $v = v_n$,

Hence, (10) holds and $p(u, v)$ is a decreasing sequence that converges to the positive real number l . \square

COROLLARY 4. If conditions of 3.4 hold and $r, s \in \text{Fix}(f)$ such that

i) $1 \leq \beta(r, s)$

ii) $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ such that $\epsilon \leq \mu(d(r, s)) < \epsilon + \delta$, then, $r = s$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Suppose that $r \neq s$ in $\text{Fix}(f)$ such that $1 \leq \beta(r, s)$

By (ii) and (10) we get a contradiction, hence f has a unique fixed point. \square

ТЕОРЕМА 5 (15). If (X, \leq) is a partially ordered set such that $\forall (x, y)$ and $(z, t) \in X \times X, \exists (a, b) \in X \times X$ such that

$a \leq x, z$ and $b \leq y, t$, and if (X, p) is a complete partial metric space,

$g : X \times X \rightarrow X$ is a function with the mixed monotone property on X .

Assuming that for some $\sigma \in \Sigma, \psi \in \Psi$ we have

$$\sigma(p(g(x, y), g(a, b))) \leq \sigma(\alpha p(x, a) + \beta p(y, b)) - \psi(\alpha p(x, a) + \beta p(y, a))$$

$\forall \alpha + \beta < 1$, if $\exists x_0, y_0 \in X$ such that $x_0 \leq g(x_0, y_0)$ and $g(y_0, x_0) \leq y_0$

then, $\exists x, y \in X$ such that g has a coupled fixed point, that is; $g(x, y) = x$ and $g(y, x) = y$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Czerwik S. Nonlinear set-valued contraction mappings in b - metric spaces // Atti del Seminario Matematico e Fisico dell'Universita di Modena, 46, (1998), 263–276.
2. Bakhtin I.A. The contraction mapping principle in quasimetric spaces // Journal of Functional Analysis, 1989, 30, pp. 26–37.
3. Gromov M. Groups of polynomial growth and expanding maps // Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques. 53, 1981, pp. 53–73.
doi:10.1007/BF02698687. MR 0623534. S2CID 121512559. Zbl 0474.20018.
4. Kurepa, D.J. Tableaux ramifiés d'ensembles, espaces pseudodistanciés // Comptes Rendus de l'Académie des Sciences . Paris. 198, 1934, pp. 1563–1565.
5. Branciari A. A fixed point theorem of Banach-Caccioppoli type on a class of generalized metric spaces // Publicationes Mathematicae Debrecen, 57, 2000, pp. 31–37. MR1771669.
6. Suzuki T. Journal of Inequalities and Applications, 256, 2017, pp. 1–11. <http://dx.doi.org/10.1186/s13660-017-1528-3>.
7. Singh SL, Czerwik S, Król, K and Singh. A Coincidences and fixed points of hybrid contractions. Tamsui Oxford Journal of Information and Mathematical Sciences. 24, pp. 401-416.
8. Rockafellar R, Tyrrell; Wets, Roger J-B. Variational Analysis // Springer-Verlag, 2005, p. 117.

9. Berinde, V. Generalized contractions in quasimetric spaces // *Semin. Fixed Point Theory*, 3, 1993, pp. 3–9.
10. Rus, I.A. Generalized Contractions and Applications // Cluj University Press: Cluj-Napoca, Romania, 2001.
11. Karapinar E, Chifu C. Results in wt-Distance over b -Metric Spaces // *SIGMA Mathematics*, 220(8), 2020, pp. 1–10.
12. Popescu, O. Some new fixed point theorems for β -Geraghty contractive type maps in metric spaces // *Fixed Point Theory and Applications*, 190 p. (2014). <https://doi.org/10.1186/1687-1812-2014-190>.
13. Khojasteh, F.; Shukla, S.; Radenovi C, S. A new approach to the study of fixed point theorems via simulation functions // *Filomat*, 29, 2015, pp. 1189–1194.
14. Aydi, H. Fixed point results for weakly contractive mappings in ordered partial metric spaces // *Journal of Advanced Mathematical Studies*, 4(2), 2011, pp. 1–12.
15. Al-Sharif, S., Al-Khaleel, M., Khandaqji, M. Coupled Fixed Point Theorems for Nonlinear Contractions in Partial Metric Spaces // *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 2012, pp. 1-12.

REFERENCES

1. Czerwik S. 1998, “Nonlinear set-valued contraction mappings in b -metric spaces”, *Atti del Seminario Matematico e Fisico dell’Universita di Modena*, 46, pp. 263–276.
2. Bakhtin, I.A., 1989. “The contraction mapping principle in quasimetric spaces”, *Journal of Functional Analysis*, 30, pp. 26–37.
3. Gromov M.,1981. “Groups of polynomial growth and expanding maps”, *Publications Mathématiques de l’Institut des Hautes Études Scientifiques*, 53: pp. 53–73.
doi:10.1007/BF02698687. MR 0623534. S2CID 121512559. Zbl 0474.20018.
4. Kurepa, D.J., 1934. “Tableaux ramifiés d’ensembles, espaces pseudodistanciés”, *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences . Paris*, 198, pp. 1563–1565.
5. Branciari A., 2000. “A fixed point theorem of Banach-Caccioppoli type on a class of generalized metric spaces”, *Publicationes Mathematicae Debrecen*, 57, pp. 31–37. MR1771669.
6. Suzuki T.,2017. “Journal of Inequalities and Applications”, 256, pp. 1–11. <http://dx.doi.org/10.1186/s13660-017-1528-3>.
7. Singh SL, Czerwik S, Król, K. & Singh, 2008. “A Coincidences and fixed points of hybrid contractions”, *Tamsui Oxford Journal of Information and Mathematical Sciences*, 24, pp. 401–416.
8. Rockafellar R, Tyrrell; Wets, Roger J-B, 2005. “Variational Analysis”, *Springer-Verlag*, p. 117.
9. Berinde, V., 1993. “Generalized contractions in quasimetric spaces”, *Semin. Fixed Point Theory*, 3, pp. 3–9.
10. Rus, I.A.,2001. “Generalized Contractions and Applications”, *Cluj University Press: Cluj-Napoca, Romania*.

11. Karapinar E, Chifu C., 2020. “Results in wt -Distance over b -Metric Spaces”, *SIGMA Mathematics*, 220(8), pp. 1–10.
12. Popescu, O., 2014. “Some new fixed point theorems for β -Geraghty contractive type maps in metric spaces”, *Fixed Point Theory and Applications*, 190 p.. <https://doi.org/10.1186/1687-1812-2014-190>.
13. Khojasteh, F., Shukla, S., Radenovi, C. S., 2015. “A new approach to the study of fixed point theorems via simulation functions”, *Filomat*, 29, pp. 1189–1194.
14. Aydi, H., 2011. “Fixed point results for weakly contractive mappings in ordered partial metric spaces”, *Journal of Advanced Mathematical Studies*, 4(2), pp. 1–12.
15. Al-Sharif, S., Al-Khaleel, M., Khandaqji, M., 2012. “Coupled Fixed Point Theorems for Nonlinear Contractions in Partial Metric Spaces”, *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, pp. 1-12.

Получено: 18.04.2023

Принято в печать: 21.03.2024

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 25. Выпуск 1.

УДК 511.35, 517.15

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-1-164-169

О взаимной простоте элементов последовательности Битти

А. В. Бегунц, Д. В. Горяшин

Бегунц Александр Владимирович — кандидат физико-математических наук, доцент, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: alexander.begunts@math.msu.ru

Горяшин Дмитрий Викторович — кандидат физико-математических наук, доцент, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: dmitry.goryashin@math.msu.ru

Аннотация

В заметке рассматриваются два приложения доказанной авторами асимптотической формулы для числа значений последовательности Битти в арифметической прогрессии с растущей разностью: получены асимптотические формулы для количества элементов последовательности Битти, взаимно простых с (возможно, растущим) натуральным числом a , а также для количества пар взаимно простых элементов двух последовательностей Битти. Сформулируем основные результаты.

Пусть $\alpha > 1$ — иррациональное число и N — достаточно большое натуральное число. Тогда если неполные частные непрерывной дроби числа α ограничены, то для количества $S_{\alpha,a}(N)$ элементов последовательности Битти $[\alpha n]$, $1 \leq n \leq N$, взаимно простых с числом a , справедлива асимптотическая формула

$$S_{\alpha,a}(N) = N \frac{\varphi(a)}{a} + O\left(\min(\sigma(a) \ln^3 N, \sqrt{N} \tau(a) (\ln \ln N)^3)\right),$$

где $\tau(a)$ — число натуральных делителей числа a , $\sigma(a)$ — сумма делителей числа a .

Пусть $\alpha > 1$ и $\beta > 1$ — иррациональные числа и N — достаточно большое натуральное число. Тогда если неполные частные непрерывных дробей чисел α и β ограничены, то для количества $S_{\alpha,\beta}(N)$ пар взаимно простых элементов последовательностей Битти $[\alpha m]$, $1 \leq m \leq N$, и $[\beta n]$, $1 \leq n \leq N$, справедлива асимптотическая формула

$$S_{\alpha,\beta}(N) = \frac{6}{\pi^2} N^2 + O\left(N^{3/2} (\ln \ln N)^6\right).$$

Ключевые слова: последовательность Битти, взаимно простые числа, асимптотическая формула.

Библиография: 4 названия.

Для цитирования:

А. В. Бегунц, Д. В. Горяшин. О взаимной простоте элементов последовательности Битти // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 1, с. 164–169.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 25. No. 1.

UDC 511.35, 517.15

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-1-164-169

On coprime elements of the Beatty sequence

A. V. Begunts, D. V. Goryashin

Begunts Alexander Vladimirovich — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: alexander.begunts@math.msu.ru

Goryashin Dmitry Viktorovich — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: dmitry.goryashin@math.msu.ru

Abstract

This note discusses two applications of the asymptotic formula obtained by the authors for the number of values of the Beatty sequence in an arithmetic progression with increasing difference: asymptotic formulas are obtained for the number of elements of the Beatty sequence that are coprime to the (possibly growing) natural number a , as well as for the number of pairs of coprime elements of two Beatty sequences. Here are the main results.

Let $\alpha > 1$ be an irrational number and N be a sufficiently large natural number. Then if the partial quotients of the continued fraction of the number α are limited, then for the number $S_{\alpha,a}(N)$ of elements of the Beatty sequence $[\alpha n]$, $1 \leq n \leq N$, coprime to the number a , the following asymptotic formula holds

$$S_{\alpha,a}(N) = N \frac{\varphi(a)}{a} + O\left(\min(\sigma(a) \ln^3 N, \sqrt{N} \tau(a) (\ln \ln N)^3)\right),$$

where $\tau(a)$ is the number of divisors of a and $\sigma(a)$ is the sum of the divisors of a .

Let $\alpha > 1$ and $\beta > 1$ be irrational numbers and N be a sufficiently large natural number. Then if the incomplete quotients of continued fractions of the numbers α and β are bounded, then for the number $S_{\alpha,\beta}(N)$ of pairs of coprime elements of Beatty sequences $[\alpha m]$, $1 \leq m \leq N$, and $[\beta n]$, $1 \leq n \leq N$, the following asymptotic formula holds

$$S_{\alpha,\beta}(N) = \frac{6}{\pi^2} N^2 + O\left(N^{3/2} (\ln \ln N)^6\right).$$

Keywords: Beatty sequence, coprime numbers, asymptotic formula.

Bibliography: 4 titles.

For citation:

A. V. Begunts, D. V. Goryashin, 2024, “On coprime elements of the Beatty sequence”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 1, pp. 164–169.

1. Введение

В данной заметке рассматриваются два приложения доказанной авторами (см. [1]) асимптотической формулы для числа значений последовательности Битти (см., например, [2]) в арифметической прогрессии с растущей разностью: получены асимптотические формулы

для количества элементов последовательности Битти, взаимно простых с (возможно, растущим) натуральным числом a , а также для количества пар взаимно простых элементов двух последовательностей Битти.

Известно (см. задачу 19 к гл. II книги [3]), что среди первых N натуральных чисел доля взаимно простых с данным натуральным числом a асимптотически эквивалентна $\frac{\varphi(a)}{a}$, где $\varphi(a)$ — функция Эйлера. Действительно, пользуясь равенством

$$\sum_{k|m} \mu(k) = \begin{cases} 1, & m = 1, \\ 0, & m > 1, \end{cases} \quad (1)$$

где $\mu(k)$ — функция Мёбиуса, имеем

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{1 \leq n \leq N \\ (a,n)=1}} 1 &= \sum_{1 \leq n \leq N} \sum_{k|(a,n)} \mu(k) = \sum_{k|a} \mu(k) \sum_{\substack{1 \leq n \leq N \\ n \equiv 0 \pmod{k}}} 1 = \sum_{k|a} \mu(k) \left(\frac{N}{k} + O(1) \right) = \\ &= N \sum_{k|a} \frac{\mu(k)}{k} + O \left(\sum_{k|a} 1 \right) = N \frac{\varphi(a)}{a} + O(\tau(a)). \end{aligned}$$

Ответ на аналогичный вопрос для последовательности Битти, соответствующей иррациональному числу с ограниченными неполными частными, даёт следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\alpha > 1$ — иррациональное число и N — достаточно большое натуральное число. Тогда если неполные частные непрерывной дроби числа α ограничены, то для количества $S_{\alpha,a}(N)$ элементов последовательности Битти $[\alpha n]$, $1 \leq n \leq N$, взаимно простых с числом a , справедлива асимптотическая формула

$$S_{\alpha,a}(N) = N \frac{\varphi(a)}{a} + O \left(\min(\sigma(a) \ln^3 N, \sqrt{N} \tau(a) (\ln \ln N)^3) \right),$$

где $\tau(a)$ — число натуральных делителей числа a , $\sigma(a)$ — сумма делителей числа a .

Нам потребуется следующее утверждение.

ЛЕММА 1. Пусть $\alpha > 1$ — иррациональное число и β — вещественное число из промежутка $[0; \alpha)$, a и d — целые числа, $2 \leq d \leq \sqrt{x/2}$, $0 \leq a < d$, x — достаточно большое натуральное число. Обозначим через

$$N_d(x) = N(x; \alpha, \beta; d, a) = \sum_{\substack{1 \leq n \leq x \\ [\alpha n + \beta] \equiv a \pmod{d}}} 1$$

число значений последовательности Битти $[\alpha n + \beta]$, $1 \leq n \leq x$, принадлежащих арифметической прогрессии $(a + kd)$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда если неполные частные непрерывной дроби числа α ограничены, то справедлива асимптотическая формула

$$N_d(x) = \frac{x}{d} + O \left(d \ln^3 \frac{x}{d^2} \right).$$

Доказательство леммы проводится так же, как в работе [1], при этом для величины остатка $R_d(x) = N_d(x) - \frac{x}{d}$ получается оценка

$$R_d(x) \ll d \ln^3 L + \frac{x}{dL} \ln L,$$

где $L \geq 2$ — параметр. Выбирая $L = \frac{x}{d^2}$, получаем утверждение леммы.

Утверждением леммы 1 мы будем пользоваться при условии $d \leq \sqrt{x/2}$, а для больших значений d — применять следующую простейшую оценку.

ЛЕММА 2. Пусть $\alpha > 1$. Тогда величина $N_d(x)$ удовлетворяет неравенству

$$N_d(x) \leq \frac{\alpha x + \beta - a}{d}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\alpha > 1$, каждому числу n , для которого выполнено равенство $[\alpha n + \beta] = ld + a$, соответствует ровно одно натуральное число l , причём $l \leq \frac{\alpha x + \beta - a}{d}$. Отсюда следует требуемое.

Перейдём к доказательству теоремы 1. Рассмотрим величину

$$S_{\alpha,a}(N) = |\{n \mid 1 \leq n \leq N, ([\alpha n], a) = 1\}|,$$

равную количеству элементов последовательности Битти $[\alpha n]$, $1 \leq n \leq N$, взаимно простых с числом a . Тогда, применяя равенство (1) и леммы 1 и 2, получаем

$$\begin{aligned} S_{\alpha,a}(N) &= \sum_{\substack{1 \leq n \leq N \\ ([\alpha n], a) = 1}} 1 = \sum_{1 \leq n \leq N} \sum_{k | ([\alpha n], a)} \mu(k) = \sum_{k|a} \mu(k) \sum_{\substack{1 \leq n \leq N \\ [\alpha n] \equiv 0 \pmod{k}}} 1 = \\ &= \sum_{\substack{k|a \\ k \leq \sqrt{N/2}}} \mu(k) \left(\frac{N}{k} + O\left(k \ln^3 \frac{N}{k^2}\right) \right) + \sum_{\substack{k|a \\ k > \sqrt{N/2}}} O\left(\frac{N}{k}\right) = N \sum_{k|a} \frac{\mu(k)}{k} + O\left(\ln^3 N \sum_{\substack{k|a \\ k \leq \sqrt{N/2}}} k\right) + \\ &+ O\left(\sum_{\substack{k|a \\ k > \sqrt{N/2}}} k\right) = N \sum_{k|a} \frac{\mu(k)}{k} + O\left(\ln^3 N \sum_{k|a} k\right) = N \frac{\varphi(a)}{a} + O(\sigma(a) \ln^3 N). \end{aligned}$$

Получим вторую оценку остаточного члена. Разобьём сумму по делителям

$$S_{\alpha,a}(N) - N \frac{\varphi(a)}{a} = \sum_{k|a} \mu(k) \left(\sum_{\substack{1 \leq n \leq N \\ [\alpha n] \equiv 0 \pmod{k}}} 1 - \frac{N}{k} \right)$$

на две, соответствующие условиям $k \leq \sqrt{N/2}$ и $k > \sqrt{N/2}$. Тогда для первой суммы по лемме 1 будем иметь

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{\substack{k|a \\ k \leq \sqrt{N/2}}} \mu(k) \left(\sum_{\substack{1 \leq n \leq N \\ [\alpha n] \equiv 0 \pmod{k}}} 1 - \frac{N}{k} \right) \right| \ll \sum_{\substack{k|a \\ k \leq \sqrt{N/2}}} k \ln^3 \frac{N}{k^2} = \\ &= \sum_{\substack{k|a \\ k \leq \sqrt{N} \ln^{-3} N}} k \ln^3 N + \sum_{\substack{k|a \\ \sqrt{N} \ln^{-3} N < k \leq \sqrt{N/2}}} k \ln^3 \frac{N}{k^2} \ll \sqrt{N} \tau(a) (\ln \ln N)^3, \end{aligned}$$

а для второй суммы по лемме 2 получаем

$$\left| \sum_{\substack{k|a \\ k > \sqrt{N/2}}} \mu(k) \left(\sum_{\substack{1 \leq n \leq N \\ [\alpha n] \equiv 0 \pmod{k}}} 1 - \frac{N}{k} \right) \right| \ll \sum_{\substack{k|a \\ k > \sqrt{N/2}}} \frac{N}{k} \ll \sqrt{N} \tau(a).$$

Теорема 1 доказана.

Отметим, что при малых значениях a (меньше по порядку, чем \sqrt{N}) более сильной является первая оценка остаточного члена, а при больших значениях a — вторая.

Известно также (см. задачу 21 к гл. II книги [3]), что среди всех пар натуральных чисел, каждое из которых не превосходит N , доля взаимно простых асимптотически эквивалентна $\frac{1}{\zeta(2)} = \frac{6}{\pi^2}$. В самом деле,

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{1 \leq m, n \leq N \\ (m, n) = 1}} 1 &= \sum_{1 \leq m, n \leq N} \sum_{k | (m, n)} \mu(k) = \sum_{k \leq N} \mu(k) \sum_{\substack{1 \leq m, n \leq N \\ m \equiv 0 \pmod{k}, \\ n \equiv 0 \pmod{k}}} 1 = \sum_{k \leq N} \mu(k) \left(\sum_{\substack{1 \leq n \leq N \\ n \equiv 0 \pmod{k}}} 1 \right)^2 = \\ &= \sum_{k \leq N} \mu(k) \left(\frac{N}{k} + O(1) \right)^2 = N^2 \sum_{k \leq N} \frac{\mu(k)}{k^2} + O(N \ln N) = \frac{6}{\pi^2} N^2 + O(N \ln N), \end{aligned}$$

так как

$$\sum_{k \leq N} \frac{\mu(k)}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k^2} - \sum_{k > N} \frac{\mu(k)}{k^2} = \frac{1}{\zeta(2)} + O\left(\frac{1}{N}\right).$$

Ответ на аналогичный вопрос для пар членов последовательностей Битти содержится в следующем утверждении.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\alpha > 1$ и $\beta > 1$ — иррациональные числа и N — достаточно большое натуральное число. Тогда если неполные частные непрерывных дробей чисел α и β ограничены, то для количества $S_{\alpha, \beta}(N)$ пар взаимно простых элементов последовательностей Битти $[\alpha t]$, $1 \leq t \leq N$, и $[\beta n]$, $1 \leq n \leq N$, справедлива асимптотическая формула

$$S_{\alpha, \beta}(N) = \frac{6}{\pi^2} N^2 + O\left(N^{3/2} (\ln \ln N)^6\right).$$

Докажем теорему 2. Без ограничения общности можно считать, что $\alpha \geq \beta$. Рассмотрим число пар взаимно простых элементов последовательностей Битти

$$S_{\alpha, \beta}(N) = |\{(m, n) \mid 1 \leq m \leq N, 1 \leq n \leq N, ([\alpha m], [\beta n]) = 1\}|.$$

Тогда ввиду тождества (1) имеем

$$\begin{aligned} S_{\alpha, \beta}(N) &= \sum_{\substack{1 \leq m, n \leq N \\ ([\alpha m], [\beta n]) = 1}} 1 = \sum_{1 \leq m, n \leq N} \sum_{k | ([\alpha m], [\beta n])} \mu(k) = \sum_{k \leq \alpha N} \mu(k) \sum_{\substack{1 \leq m, n \leq N \\ [\alpha m] \equiv 0 \pmod{k}, \\ [\beta n] \equiv 0 \pmod{k}}} 1 = \\ &= \sum_{k \leq \alpha N} \mu(k) \sum_{\substack{1 \leq m \leq N \\ [\alpha m] \equiv 0 \pmod{k}}} 1 \sum_{\substack{1 \leq n \leq N \\ [\beta n] \equiv 0 \pmod{k}}} 1. \end{aligned}$$

Разобьём внешнюю сумму по k на две суммы, соответствующие условиям $k \leq \sqrt{\alpha N/2}$ и $\sqrt{\alpha N/2} < k \leq \alpha N$. Для первой из них, применяя лемму 1, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{k \leq \sqrt{\alpha N/2}} \mu(k) \sum_{\substack{1 \leq m \leq N \\ [\alpha m] \equiv 0 \pmod{k}}} 1 \sum_{\substack{1 \leq n \leq N \\ [\beta n] \equiv 0 \pmod{k}}} 1 &= \sum_{k \leq \sqrt{\alpha N/2}} \mu(k) \left(\frac{N}{k} + O\left(k \ln^3 \frac{N}{k^2}\right) \right)^2 = \\ &= \sum_{k \leq \sqrt{\alpha N/2}} \mu(k) \left(\frac{N^2}{k^2} + O\left(N \ln^3 \frac{N}{k^2}\right) + O\left(k^2 \ln^6 \frac{N}{k^2}\right) \right) = \end{aligned}$$

$$= N^2 \sum_{k \leq \sqrt{\alpha N/2}} \frac{\mu(k)}{k^2} + O\left(N^{3/2}(\ln \ln N)^3\right) + O\left(N^{3/2}(\ln \ln N)^6\right).$$

Для второй суммы применим оценки каждой из внутренних сумм из леммы 2:

$$\left| \sum_{\sqrt{\alpha N/2} < k \leq \alpha N} \mu(k) \sum_{\substack{1 \leq m \leq N \\ [\alpha m] \equiv 0 \pmod{k}}} 1 \sum_{\substack{1 \leq n \leq N \\ [\beta n] \equiv 0 \pmod{k}}} 1 \right| \leq \sum_{k > \sqrt{\alpha N/2}} \frac{\alpha \beta N^2}{k^2} \ll N^{3/2}.$$

Окончательно получаем

$$S_{\alpha, \beta}(N) = \frac{6}{\pi^2} N^2 + O\left(N^{3/2}(\ln \ln N)^6\right).$$

Теорема 2 доказана.

Отметим также, что для случая почти всех $\alpha > 1$ в смысле меры Лебега можно доказать аналог теоремы 1 с оценкой остаточного члена $O\left(\min(\sigma(a) \ln^4 N, \sqrt{N} \tau(a) (\ln \ln N)^4)\right)$. Помимо того, асимптотические формулы теорем 1 и 2 справедливы и для неоднородных последовательностей Битти $[\alpha n + \delta]$, где $\delta \in (0; \alpha)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бегунц А. В., Горяшин Д. В. О значениях последовательности Битти в арифметической прогрессии // Чебышевский сборник. **21**. Вып. 1. 2020. 361–367. doi: 10.22405/2226-8383-2020-21-1-364-367
2. Бегунц А. В., Горяшин Д. В. Актуальные задачи, связанные с последовательностями Битти // Чебышевский сборник. **18**. Вып. 4. 2017. 97–105. doi: 10.22405/2226-8383-2017-18-4-97-105
3. Виноградов И. М. Основы теории чисел // М.: Наука, 1981. 176 с.

REFERENCES

1. Begunts, A. V., Goryashin, D. V., 2020, “On the values of Beatty sequence in an arithmetic progression”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 21, no. 1, pp. 364–367. doi: 10.22405/2226-8383-2018-21-1-364-367
2. Begunts, A. V., Goryashin, D. V., 2017, “Topical problems concerning Beatty sequences”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 18, no. 4, pp. 97–105. doi: 10.22405/2226-8383-2017-18-4-97-105
3. Vinogradov, I. M., 1981, “Fundamentals of Number Theory”, *Nauka, Moscow*, 176 pp.

Получено: 14.11.2023

Принято в печать: 21.03.2024

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 25. Выпуск 1.

УДК 512.542

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-1-170-175

О некотором произведении SM-групп¹

Д. В. Грицук, А. А. Трофимук

Грицук Дмитрий Владимирович — кандидат физико-математических наук, Брестский государственный университет им. А. С. Пушкина (г. Брест, Беларусь).

e-mail: dmitry.gritsuk@gmail.com

Трофимук Александр Александрович — доктор физико-математических наук, Брестский государственный университет им. А. С. Пушкина (г. Брест, Беларусь).

e-mail: alexander.trofimuk@gmail.com

Аннотация

Подгруппа A группы G называется тсс-подгруппой в G , если существует подгруппа Y группы G такая, что $G = AY$ и для любого $X \leq A$ и $Z \leq Y$ существует элемент $u \in \langle X, Z \rangle$ такой, что $XZ^u \leq G$. Запись $H \leq G$ означает, что H является подгруппой группы G . В этой статье доказано, что класс всех SM-групп замкнут относительно произведения тсс-подгрупп. Здесь SM-группой называется группа, у которой каждая субнормальная подгруппа перестановочна с каждой максимальной подгруппой.

Ключевые слова: факторизуемая группа, тсс-подгруппа, SM-группа.

Библиография: 18 названий.

Для цитирования:

Д. В. Грицук, А. А. Трофимук. О некотором произведении SM-групп // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 1, с. 170–175.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 25. No. 1.

UDC 512.542

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-1-170-175

On some product of SM-groups

D.V. Gritsuk, A.A. Trofimuk

Gritsuk Dmitry Vladimirovich — candidate of physical and mathematical sciences, A. S. Pushkin Brest State University (Brest, Belarus).

e-mail: dmitry.gritsuk@gmail.com

Trofimuk Alexander Aleksandrovich — doctor of physical and mathematical sciences, A. S. Pushkin Brest State University (Brest, Belarus).

e-mail: alexander.trofimuk@gmail.com

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республика Беларусь (ГПНИ «Конвергенция-2025», № гос. рег. 20211467).

Abstract

A subgroup A of a group G is called *tcc-subgroup* in G , if there is a subgroup T of G such that $G = AT$ and for any $X \leq A$ and $Y \leq T$ there exists an element $u \in \langle X, Y \rangle$ such that $XY^u \leq G$. The notation $H \leq G$ means that H is a subgroup of a group G . In this paper we proved that the class of all SM-groups is closed under the product of tcc-subgroups. Here an SM-group is a group where each subnormal subgroup permutes with every maximal subgroup.

Keywords: factorizable group, tcc-subgroup, SM-group.

Bibliography: 18 titles.

For citation:

D. V. Gritsuk, A. A. Trofimuk, 2024, "On some product of SM-groups", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 1, pp. 170–175.

1. Введение

Рассматриваются только конечные группы. Используемая терминология соответствует [1, 2].

Напомним, что подгруппы A и B группы G называются *тотально перестановочными*, если $UV = VU$ для всех $U \leq A$ и $V \leq B$. Запись $H \leq G$ означает, что H является подгруппой группы G .

А. Н. Скиба [3] обратил внимание на то, что в группе G две подгруппы A и B могут быть *неперестановочными*, но существует элемент $x \in G$ такой, что A и B^x перестановочны. Например, в разрешимой группе G силовские подгруппы G_p и G_q не всегда перестановочны, но всегда существует элемент $x \in G$ такой, что $G_p G_q^x = G_q^x G_p$. На основе этого факта А. Н. Скиба предложил называть подгруппы A и B *X -перестановочными*, если A перестановочна с B^x для некоторого $x \in X$, где X — некоторое непустое множество элементов группы. Если $X = \langle A, B \rangle$, то X -перестановочные подгруппы A и B называются *сс-перестановочными* подгруппами. Кроме того, если каждая подгруппа из A сс-перестановочна с каждой подгруппой из B , то подгруппы A и B называются *тотально сс-перестановочными*.

Напомним, что *добавлением* к подгруппе A в группе G называется подгруппа T такая, что $G = AT$. Если $A \cap T = 1$, то добавление T называется *дополнением*. Поскольку для каждой подгруппы A в группе G существует добавление, то вполне естественно исследовать перестановочность между подгруппами из A и подгруппами из добавления к A .

Используя понятие сс-перестановочности, в работе [4] было введено следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Подгруппа A группы G называется тсс-подгруппой в G , если:*

- (1) *в G существует подгруппа Y такая, что $G = AY$;*
- (2) *подгруппа A тотально сс-перестановочна с подгруппой Y .*

Подгруппу Y в дальнейшем будем называть *тсс-добавлением* к подгруппе A в группе G .

В теореме 1 установлена замкнутость насыщенной формации \mathfrak{F} , содержащей формацию сверхразрешимых групп \mathfrak{U} , относительно произведения тсс-подгрупп.

ТЕОРЕМА 1 ([5, теорема 2]). *Пусть $G = AB$, где A и B — тсс-подгруппы группы G . Пусть \mathfrak{F} — насыщенная формация и $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{F}$. Если $A \in \mathfrak{F}$ и $B \in \mathfrak{F}$, то $G \in \mathfrak{F}$.*

СЛЕДСТВИЕ 1 ([4, теорема 4.1]). *Пусть A и B — тсс-подгруппы группы G и $G = AB$. Если A и B сверхразрешимы, то G сверхразрешима.*

Из теоремы 1 и следствия 1 вытекают ключевые результаты теории тотально перестановочных и тотально сс-перестановочных подгрупп [6, 7, 8], вошедшие в монографии [2, 9].

Дж. Байдлмен и Х. Хайнекен в [10] исследовали *SM-группы*, т.е. группы, в которых каждая субнормальная подгруппа перестановочна с каждой максимальной подгруппой. Из [10, теорема А] следует, что класс сверхразрешимых групп совпадает с классом всех разрешимых SM-групп. Заметим, что класс всех SM-групп является гомоморфом.

В настоящей работе получено развитие теоремы 1 и следствия 1 на случай SM-сомножителей. В частности, доказано, что класс всех SM-групп замкнут относительно произведения тсс-подгрупп.

2. Вспомогательные результаты

Запись $H \triangleleft G$ означает, что H — нормальная подгруппа группы G . Через $F(G)$ обозначается подгруппа Фиттинга группы G ; $A \times B$ — полупрямое произведение нормальной подгруппы A и подгруппы B .

Напомним, что класс групп \mathfrak{F} называется замкнутым относительно фактор-групп или гомоморфом, когда выполняется требование: если $G \in \mathfrak{F}$ и $N \triangleleft G$, то $G/N \in \mathfrak{F}$.

Класс \mathfrak{F} называется замкнутым относительно подпрямых произведений, когда выполняется требование: если $G/N_1 \in \mathfrak{F}$ и $G/N_2 \in \mathfrak{F}$, то $G/N_1 \cap N_2 \in \mathfrak{F}$.

Формацией называется класс групп, замкнутый относительно фактор-групп и подпрямых произведений. Формация \mathfrak{F} называется насыщенной, если из $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ следует, что $G \in \mathfrak{F}$.

Группа G называется примитивной, если в G существует максимальная подгруппа M с единичным ядром $M_G = \bigcap_{x \in G} M^x = 1$. В этом случае подгруппа M называется примитиватором группы G .

ЛЕММА 1 ([4, лемма 3.1]). Пусть A — тсс-подгруппа группы G и Y — тсс-добавление к A в G . Тогда справедливы следующие утверждения:

- (1) A — тсс-подгруппа в H для каждой подгруппы H группы G такой, что $A \leq H$;
- (2) AN/N — тсс-подгруппа в G/N для каждой $N \trianglelefteq G$;
- (3) для каждой $A_1 \trianglelefteq A$ и $X \leq Y$ существует $y \in Y$ такой, что $A_1 X^y \leq G$. В частности, $A_1 M \leq G$ для некоторой максимальной подгруппы M группы Y и $A_1 H \leq G$ для некоторой π -холловой подгруппы H разрешимой группы Y и любого $\pi \subseteq \pi(G)$;
- (4) $A_1 K \leq G$ для каждой субнормальной подгруппы K в Y и для каждой $A_1 \trianglelefteq A$;
- (5) если $T \trianglelefteq G$ такая, что $T \leq A$ и $T \cap Y = 1$, то $T_1 \trianglelefteq G$ для каждой $T_1 \trianglelefteq A$ такой, что $T_1 \leq T$;
- (6) если $T \trianglelefteq G$ такая, что $T \cap A = 1$ и $T \leq Y$, то $A_1 \leq N_G(T_1)$ для каждой $T_1 \trianglelefteq T$ и для каждой $A_1 \trianglelefteq A$.

ЛЕММА 2 ([5, лемма 5]). Пусть G — примитивная группа и N — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G . Если G имеет собственную неединичную тсс-подгруппу A , то N абелева.

ЛЕММА 3 ([5, лемма 6]). Пусть A — собственная неединичная тсс-подгруппа примитивной группы G и Y — ее тсс-добавление в G , N — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G . Если $N \cap A = 1$ и $N \leq Y$, то A — циклическая группа порядка, делящего $p - 1$.

ЛЕММА 4 ([11, теорема 1, предложения 1-2]). Пусть $G = AB$ — произведение totally сс-перестановочных подгрупп A и B . Тогда для минимальной нормальной подгруппы N группы G справедливы следующие утверждения:

- (1) $\{A \cap N, B \cap N\} \subseteq \{1, N\}$;
- (2) если $N \leq A \cap B$ или $N \cap A = N \cap B = 1$, то $|N| = p$, где p — простое число.

ЛЕММА 5 ([8, Теорема 4]). Пусть $G = AB$ является произведением totally сс-перестановочных подгрупп A и B . Тогда $[A, B] \leq F(G)$.

3. Произведение тсс-подгрупп, которые являются SM-группами

ТЕОРЕМА 2. Пусть группа $G = AB$ — произведение тсс-подгрупп A и B . Если A и B — SM-группы, то G является SM-группой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что теорема неверна и пусть G — контрпример минимального порядка. Пусть N — неединичная нормальная в G подгруппа. Подгруппы $AN/N \simeq A/A \cap N$ и $BN/N \simeq B/B \cap N$ — тсс-подгруппы группы G/N по лемме 1 (2), $AN/N \simeq A/A \cap N$ и $BN/N \simeq B/B \cap N$ — SM-группы. Поэтому фактор-группа $G/N = (AN/N)(BN/N)$ является SM-группой по индукции.

Пусть H — субнормальная подгруппа группы G наименьшего порядка такая, что H не перестановочна с некоторой максимальной подгруппой M группы G .

Предположим, что $M_G \neq 1$. Тогда по доказанному выше G/M_G — SM-группа. Значит,

$$(HM_G/M_G)(M/M_G) \leq G/M_G,$$

ввиду выбора H . Поэтому $HM = HM_G M \leq G$, противоречие. Следовательно $M_G = 1$ и G — примитивная группа с примитиватором M .

Предположим, что в группе G существует две различные минимальные нормальные подгруппы N_1 и N_2 . По [1, теорема 4.41] $N_1 = C_G(N_2)$ и $N_2 = C_G(N_1)$. По лемме 5 и [1, лемма 4.21 (3)]

$$[A, Y] \leq F(G) \leq C_G(N_1) \cap C_G(N_2) = N_2 \cap N_1 = 1.$$

Поэтому A и Y нормальны в G . По лемме 4

$$\{A \cap N_1, Y \cap N_1\} \subseteq \{1, N_1\}.$$

Если $N_1 \leq A \cap Y$ или $N_1 \cap A = N \cap Y = 1$, то по лемме 4 $|N_1| = p$ и $N_1 = N_2$, противоречие. Пусть $N_1 \leq A$ и $N_1 \cap Y = 1$. Тогда $Y \leq C_G(N_1) = N_2$ и $N_2 = Y$. Поскольку $A \leq C_G(Y)$, то $A \leq C_G(N_2) = N_1$ и $A = N_1$. Аналогично и для случая $N_1 \leq Y$ и $N_1 \cap A = 1$.

Таким образом, возможны следующие варианты: либо $A = N_1$ и $Y = N_2$, либо $A = N_2$, $Y = N_1$, либо $B = N_1$ и $X = N_2$, либо $B = N_2$, $X = N_1$. Если $A = B = N_1$ или $A = B = N_2$, то $G = N_1$ или $G = N_2$. Тогда G является SM-группой. Если $A = N_1$, $B = N_2$ или $A = N_2$, $B = N_1$, то $G = AB = N_1 \times N_2$. Тогда G — SM-группа. Значит, группа G содержит единственную минимальную нормальную подгруппу N . По лемме 2 N абелева. Тогда по [1, теорема 4.41] $G = N \rtimes M$ и $N = C_G(N)$.

Очевидно, что $H \cap N$ субнормальная подгруппа G . Предположим, что $H \not\leq N$. Тогда

$$(H \cap N)M \leq G,$$

ввиду выбора H . Так как M — максимальная подгруппа в G , то либо $(H \cap N)M = G$, либо $(H \cap N)M = M$. Если $(H \cap N)M = G$, то $HM = G$, противоречие. Поэтому $H \cap N \leq M$. Так как $N \cap M = 1$, то $H \cap N = 1$. По [1, лемма 2.42, лемма 4.7] $N \leq N_G(H)$ и $[H, N] \leq H$. Тогда $[H, N] \leq H \cap N = 1$ и $H \leq C_G(N) = N$, противоречие. Значит, $H \leq N$. Очевидно, что $H \neq N$.

По лемме 4

$$\{A \cap N, Y \cap N\} \subseteq \{1, N\}.$$

Если $N \leq A \cap Y$ или $N \cap A = N \cap Y = 1$, то по лемме 4 $|N| = p$, где p — простое число. Значит, G сверхразрешима, а следовательно, G является SM-группой, противоречие.

Пусть $N \leq A$ и $N \cap Y = 1$. Тогда по лемме 1 (5) $N_1 \triangleleft G$, где N_1 — минимальная нормальная в A подгруппа такая, что $N_1 \leq N$. Значит, $N = N_1$. Очевидно, что $N < A$. Так как $G = NM$, то

$$A = A \cap NM = N \rtimes (A \cap M)$$

и $A \cap M$ — максимальная подгруппа группы A . Учитывая $H < N$, получим, что H субнормальна в A и $H(A \cap M) \leq G$, поскольку A — SM-группа. Следовательно,

$$A \cap M < H(A \cap M) < N(A \cap M) = A,$$

противоречие.

Тогда можно считать, что $N \leq Y \cap X$ и $N \cap A = 1 = N \cap B$, где X — тсс-добавление к подгруппе B в G . По лемме 3 A и B циклические. Тогда $G = AB$ сверхразрешима, а следовательно, G является SM-группой, противоречие.

Теорема доказана.

Очевидно, что если $G = AB$ — произведение totally перестановочных (totally сс-перестановочных) подгрупп A и B , то A и B будут тсс-подгруппами в группе G . Обратное неверно, см. [4, пример 1.1]. Поэтому справедливо следующее

СЛЕДСТВИЕ 2 ([11, теорема 3], [12, теорема В]). *Пусть $G = AB$ — произведение totally перестановочных (totally сс-перестановочных) подгрупп A и B . Если A и B — SM-группы, то G — SM-группа.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Монахов В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов. Минск: Вышэйшая школа, 2006. 207 с.
2. Ballester-Bolinches A., Esteban-Romero R., Asaad M. Products of finite groups. Berlin: Walter de Gruyter, 2010.
3. Скиба А. Н. H -перестановочные подгруппы // Изв. Гом. гос. ун-та имени Ф. Скорины. 2003. № 4. С. 37-39.
4. Trofimuk A.A. On the supersolubility of a group with some тсс-subgroups // Journal of Algebra and Its Applications. 2021. 2150020 (18 pages).
5. Трофимук А. А. Замечание о произведении двух формационных тсс-подгрупп // Чебышевский сборник. 2021. Vol. 22, № 1. С. 495-501.
6. Guo W., Shum K. P., Skiba A. N. Criteria of supersolubility for products of supersoluble groups // Publ. Math. Debrecen. 2006. Vol. 68, №3-4. P. 433-449.
7. Asaad M., Shaalan A. On the supersolubility of finite groups // Arch. Math. 1989. Vol. 53. P. 318-326.
8. Arroyo-Jorda M., Arroyo-Jorda P., Martinez-Pastor A., Perez-Ramos M. D. On conditional permutability and factorized groups // Annali di Matematica Pura ed Applicata. 2014. Vol. 193. P.1123-1138.
9. Guo W. Structure theory for canonical classes of finite groups. Berlin; Heidelberg; New York : Springer, 2015. 359 p.
10. Beidleman J. C., Heineken H. Pronormal and subnormal subgroups and permutability // Boll. Un. Mat. Ital. 2003. Vol. 6, № 8. P. 605-615.
11. Arroyo-Jorda M., Arroyo-Jorda P. Conditional permutability of subgroups and certain classes of groups // Journal of Algebra. 2017. Vol. 476. P. 395-414.
12. Beidleman J. C., Heineken H., Hauck P. Totally permutable products of certain classes of finite groups // J. Algebra. 2004. Vol. 276. P. 826-835.

REFERENCES

1. Monakhov, V. S. 2006. "Introduction to the Theory of Finite Groups and Their Classes", *Vysh. Shkola, Minsk*, [in Russian].
2. Ballester-Bolinches, A., "Esteban-Romero, R. & Asaad, M. 2010. "Products of finite groups", Walter de Gruyter, Berlin.
3. Skiba, A. N., 2003. " H -permutable subgroups", *Izv. Gom. state F. Skaryna University*, no. 4, pp. 37–39.
4. Trofimuk, A. A., 2021. "On the supersolubility of a group with some tcc-subgroups", *Journal of Algebra and Its Applications*, 2150020 (18 pages).
5. Trofimuk, A. A., 2021. "A remark on a product of two tcc-subgroups", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 1, pp. 495–501.
6. Guo, W., Shum, K. P. & Skiba, A. N., 2006. "Criteria of supersolubility for products of supersoluble groups", *Publ. Math. Debrecen*, vol. 68, no. 3-4, pp. 433–449.
7. Asaad, M. & Shaalan, A., 1989. "On the supersolubility of finite groups", *Arch. Math.*, vol. 53, pp. 318–326.
8. Arroyo-Jorda, M., Arroyo-Jorda, P., Martinez-Pastor, A. & Perez-Ramos, M. D., 2014. "On conditional permutability and factorized groups", *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, vol. 193, pp. 1123–1138.
9. Guo, W., 2015. Structure theory for canonical classes of finite groups, Springer, Berlin, Heidelberg, New York.
10. Beidleman, J. C. & Heineken, H., 2003. "Pronormal and subnormal subgroups and permutability", *Boll. Un. Mat. Ital.*, vol. 6, no. 8, pp. 605–615.
11. Arroyo-Jorda, M. & Arroyo-Jorda, P., 2017. "Conditional permutability of subgroups and certain classes of groups", *J. Algebra*, vol. 476, pp. 395–414.
12. Beidleman, J. C., Heineken, H. & Hauck, P., 2004. "Totally permutable products of certain classes of finite groups", *J. Algebra*, vol. 276, pp. 826–835.

Получено: 11.12.2023

Принято в печать: 21.03.2024

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 25. Выпуск 1.

УДК 512.623

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-1-176-183

Устранение максимальных скачков

И. Б. Жуков, О. Ю. Иванова

Жуков Игорь Борисович — доктор физико-математических наук, Санкт-Петербургский государственный университет (г. Санкт-Петербург).

e-mail: i.zhukov@spbu.ru

Иванова Ольга Юрьевна — кандидат физико-математических наук, Санкт-Петербургский государственный университет (г. Санкт-Петербург).

e-mail: olgaiv80@mail.ru

Аннотация

Данная статья продолжает цикл работ, посвящённых явным конструкциям расширений Галуа полных дискретно нормированных полей характеристики 0 с полем вычетов простой характеристики p , см. [5], [6], [7], [8], [4], [10] а также обзор [9].

В статье доказано, что любое p -расширение Галуа полного дискретно нормированного поля, содержащего первообразный корень p -й степени из единицы, можно вложить в башню расширений Артина–Шрайера, и получена оценка на высоту башни. Этот результат показывает, что любое такое расширение можно вложить в расширение Инабы, т. е. в расширение, задаваемое конструкцией из работы [2]; при этом также получается оценка для порядка матрицы в соответствующем уравнении Инабы.

Также доказано, что p -расширение Галуа такого поля можно разложить в башню расширений Галуа степени p , в которой несколько верхних этажей имеют максимальный скачок ветвления, а нижние этажи являются расширениями Артина–Шрайера.

Ключевые слова: дискретно нормированное поле, скачок ветвления, уравнение Артина–Шрайера.

Библиография: 12 названий.

Для цитирования:

И. Б. Жуков, О. Ю. Иванова. Устранение максимальных скачков // Чебышевский сборник, 2024, т.25, вып.1, с. 176–183.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 25. No. 1.

UDC 512.623

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-1-176-183

Elimination of maximal jumps

I. B. Zhukov, O. Yu. Ivanova

Zhukov Igor Borisovich — doctor of physical and mathematical sciences, Saint Petersburg State University (St. Petersburg).

e-mail: i.zhukov@spbu.ru

Ivanova Olga Yur'evna — candidate of physical and mathematical sciences, Saint Petersburg State University (St. Petersburg).

e-mail: olgaiv80@mail.ru

Abstract

This article continues a series of papers devoted to explicit constructions of Galois extension of complete discrete valuation fields of characteristic 0 with the residue field of prime characteristic p , see [5], [6], [7], [8], [4], [10] and a survey article [9].

It is proved that any p -extension of a complete discrete valuation field containing a primitive p th root of unity can be embedded into a tower of Artin-Schreier extensions; an estimate for the height of this tower is obtained. This result also shows that such an extension can be embedded into Inaba extension, i. e., an extension obtained by the construction from [2]; an estimate for the order of the corresponding matrix is also obtained.

Next, it is proved that any Galois p -extension of such field can be decomposed into a tower of Galois extensions of degree p such that several upper levels have the maximal ramification jump whereas the lower ones are Artin-Schreier extensions.

Keywords: discrete valuation field, ramification jump, Artin-Schreier equation

Bibliography: 12 titles.

For citation:

I. B. Zhukov, O. Yu. Ivanova, 2024, "Elimination of maximal jumps", *Chebyshevskii sbornik*, vol.25, no.1, pp. 176–183.

1. Обозначения и предварительные сведения

Через p будем обозначать фиксированное простое число.

Для дискретно нормированного поля K обозначим через v_K его нормирование. Унифицирующей поля K будем называть такой элемент π , что $v_K(\pi) = 1$. Если $\text{char } K = 0$, а $\text{char } \bar{K} = p$, обозначим через e_K число $v_K(p)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть L/K – расширение Галуа дискретно нормированных полей, $|L : K| = p$, и σ – порождающий элемент группы $\text{Gal}(L/K)$. Число

$$h(L/K) = \min \left\{ v_L \left(\frac{\sigma a}{a} - 1 \right) \mid v_L(a) \geq 0, a \neq 0 \right\}$$

называется скачком ветвления расширения L/K .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть K – дискретно нормированное поле, L – его конечное сепарабельное расширение. Глубиной ветвления расширения L/K называется

$$d(L/K) = \frac{1}{e_L} \min \left\{ v_L \left(\frac{\text{Tr}_{L/K} a}{a} \right) \mid a \in L^* \right\}.$$

ЛЕММА 1. Пусть $K \subset M \subset L$ – дискретно нормированные поля, M/K и L/M – конечные сепарабельные расширения. Тогда

$$d(L/K) = d(L/M) + d(M/K).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [1], лемма 2-4. ■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть K – полное дискретно нормированное поле, $\text{char } K = 0$, $\text{char } \bar{K} = p$. Конечное расширение L/K называется

- неразветвленным, если $e_{L/K} = 1$, и расширение \bar{L}/\bar{K} сепарабельно;
- свирепым, если $e_{L/K} = 1$, и расширение \bar{L}/\bar{K} чисто несепарабельно;
- вполне разветвленным, если $e_{L/K} = |L : K|$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Уравнением Артина–Шрайера называется уравнение вида

$$X^p - X - a = 0.$$

Расширение L/K будем называть расширением Артина–Шрайера, если $L \neq K$, и L получено из K присоединением некоторого корня некоторого уравнения Артина–Шрайера, такого, что $a \in K$.

ЛЕММА 2. Пусть K — полное дискретно нормированное поле,

$$\text{char } K = 0, \quad \text{char } \bar{K} = p,$$

и L/K — расширение Галуа степени p , такое, что $h(L/K) < \frac{e_L}{p-1}$. Тогда L/K является расширением Артина–Шрайера.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [11] и [3], а также §3 в [9]. ■

ЛЕММА 3. Пусть K — полное дискретно нормированное поле, $\text{char } K = 0$, $\text{char } \bar{K} = p$, K содержит первообразный корень p -й степени из единицы ζ , элемент π является униформизирующей поля K . Пусть L/K — циклическое расширение степени p . Тогда существует $x \in L$, такой, что $L = K(x)$, $x^p \in K$, и выполнено одно из условий:

- 1) $x^p = u\pi^s$, где $v_K(u) = 0$, $p \nmid s$;
- 2) $x^p = u$, где $v_K(u) = 0$, $u \notin \bar{K}^p$;
- 3) $x^p = 1 + u\pi^s$, где $v_K(u) = 0$, $0 < s < \frac{pe_K}{p-1}$, $p \nmid s$;
- 4) $x^p = 1 + u\pi^{ps}$, где $0 < s < \frac{e_K}{p-1}$, $\bar{u} \notin \bar{K}^p$;
- 5) $x^p = 1 + u(1 - \zeta)^p$, где $\bar{u} \notin \{y^p - u \mid y \in \bar{K}\}$.

В случаях 1) и 3) расширение вполне разветвлённое, в случаях 2) и 4) свирепое, в случае 5) неразветвлённое.

В случаях 1) и 2) выполнено $h(L/K) = \frac{e_L}{p-1}$, $d(L/K) = 1$ в случаях 3) и 4) выполнено $0 < h(L/K) < \frac{e_L}{p-1}$, $0 < d(L/K) < 1$, в случае 5) выполнено $h(L/K) = 0$, $d(L/K) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [1], лемма 2-16. ■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть $K \subset L$ — дискретно нормированные поля, и L/K — расширение Галуа полей степени p . Будем называть его максимально разветвленным, если $d(L/K) = 1$.

2. Вложение расширения в башню расширений Артина–Шрайера

Здесь и далее до конца статьи мы предполагаем, что K — полное дискретно нормированное поле, $\text{char } K = 0$, $\text{char } \bar{K} = p$, и K содержит первообразный корень p -й степени из единицы.

ЛЕММА 4. Пусть L/K — расширение Галуа степени p , и $h(L/K) = \frac{e_L}{p-1}$. Предположим, что $e_K \neq p-1$ или расширение L/K вполне разветвлено. Тогда существует расширение Галуа F/K степени p такое, что

$$h(FL/F) < \frac{e_{FL}}{p-1}, \quad h(F/K) < \frac{e_F}{p-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 3 расширение L/K не является неразветвленным.

Случай 1: расширение L/K свирепое. В этом случае существует $t \in K$, такой, что

$$v_K(t) = 0, \quad L = K(\sqrt[p]{t}).$$

Пусть π — произвольная униформизирующая поля K . Обозначим через u произвольный корень уравнения $u^p = 1 + \pi^p t$. Докажем, что подойдет $F = K(u)$.

Расширение F/K свирепое, и $h(F/K) = \frac{e_F}{p-1} - 1$. Элемент π является униформизирующей поля F . Положим $t_1 = \pi^{-1}(u - 1)$. Тогда

$$v_F(t_1) = 0, \quad \bar{t}_1 \notin \bar{F}^p.$$

Имеем

$$t = \frac{(1 + \pi t_1)^p - 1}{\pi^p} = t_1^p + p\pi^{1-p}t_1 + a,$$

и

$$FL = F\left(\sqrt[p]{\pi t_1^{-p}}\right) = F\left(\sqrt[p]{1 + p\pi^{1-p}t_1^{-p} + a}\right),$$

где $v_L(a) > v_L(p\pi^{1-p})$. Приедем лемму 3. Число $v_L(p\pi^{1-p})$ положительно. Если оно не кратно p , то расширение FL/F — вполне разветвлённое, а если кратно p — свирепое; в обоих случаях скачок меньше, чем $\frac{e_{FL}}{p-1}$.

Случай 2: Расширение L/K вполне разветвлённое. В этом случае существует униформизирующая π поля K , такая, что $L = K(\sqrt[p]{\pi})$. Обозначим через u произвольный корень уравнения $u^p = 1 + \pi$ и докажем, что подойдёт $F = K(u)$. Расширение F/K вполне разветвлённое, и $h(F/K) = \frac{e_F}{p-1} - 1$. Элемент $\pi_1 = u - 1$ является униформизирующей поля F . Имеем

$$\pi = (1 + \pi_1)^p - 1 = \pi_1^p + p\pi_1 + a,$$

$$FL = F\left(\sqrt[p]{\pi \pi_1^{-p}}\right) = F\left(\sqrt[p]{1 + p\pi_1^{1-p} + b}\right),$$

где $v_F(a) > v_F(p\pi_1)$, $v_F(b) > v_F(p\pi_1^{1-p})$. Далее, $p \nmid v_F(p\pi_1^{1-p})$, следовательно, по лемме 3, выполнено $h(FL/F) < \frac{e_{FL}}{p-1}$. ■

ТЕОРЕМА 1. 1) Для любого p -расширения Галуа L/K существует поле E , такое, что $K \subset L \subset E$, расширение E/K раскладывается в башню расширений Артина-Шрайера, и $|E : K| \leq p|L : K|^2$.

2) Если $e_K \neq p - 1$ или существует поле K' , такое, что $K \subset K' \subset L$, и расширение K'/K вполне разветвлено, то существует поле E , удовлетворяющее описанным условиям, для которого выполнено $|E : K| \leq |L : K|^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем второе утверждение, а затем первое.

2) Используем индукцию по $|L : K|$. Выберем поле K_0 так, что

$$K \subset K_0 \subset L, \quad |K_0 : K| = p,$$

и в случае $e_K = p - 1$ расширение K_0/K вполне разветвлено. По леммам 4 и 2 существует поле K_1 , совпадающее с K_0 , или являющееся расширением K_0 степени p , такое, что расширение K_1/K раскладывается в башню расширений Артина-Шрайера. Положим $L_1 = LK_1$. Поле K_1 удовлетворяет условию 2), поэтому к расширению L_1/K_1 можно применить индукционное предположение. Поле E , подходящее для расширения L_1/K_1 подойдет и для расширения L/K .

1) Обозначим через K_1 произвольное поле, полученное из K вполне разветвленным расширением Артина-Шрайера, и положим $L_1 = K_1L$. Для расширения L_1/K_1 выполнены условия 2). Применим к нему доказанное утверждение. Построенное поле E удовлетворяет условию теоремы для расширения L/K . ■

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Условия в пункте 2) являются существенными, как нетрудно видеть из примера $K = \mathbb{Q}_p\{\{t\}\}(\zeta_p)$, $L = K(\sqrt[p]{t})$. Действительно, у L/K нет свирепых расширений Артина-Шрайера, откуда следует, что не существует расширения E/K степени p^2 , удовлетворяющего условиям теоремы.

3. Вложение расширения в расширение Инабы

Уравнением Инабы с матрицей A называется уравнение $X^{(p)} = AX$, где X, A — унипотентные матрицы, то есть верхнетреугольные матрицы, у которых все элементы главной диагонали равны 1, и через $X^{(p)}$ обозначена матрица, полученная из X возведением всех элементов в степень p .

Расширением Инабы поля K будем называть расширение, полученное присоединением всех элементов некоторой матрицы X , удовлетворяющей уравнению Инабы с некоторой матрицей A , элементы которой принадлежат полю K .

Известно, что башню расширений Артина-Шрайера можно вложить в расширение Инабы, а именно, доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. Пусть поля

$$K = K_0 \subset K_1 \subset K_2 \cdots \subset K_n = L$$

таковы, что K_{i+1}/K_i — расширения степени p , заданные уравнениями Артина-Шрайера. Тогда существуют расширения Инабы L_I/K и M_I/K , заданные матрицами порядка $p^{n-1} + 2$ и $p^{n-1} + 1$ соответственно, такие, что $M_I L = L_I$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [8], теорема 3.3. ■

Из этой теоремы и теоремы 1 получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 3. Пусть K — полное дискретно нормированное поле, $\text{char } K = 0$, $\text{char } \bar{K} = p$, и K содержит первообразный корень p -й степени из единицы. Пусть L/K — расширение Галуа степени p^n . Тогда:

1) существуют расширения Инабы L_I/K и M_I/K , заданные матрицами порядка $p^{2n} + 2$ и $p^{2n} + 1$ соответственно, такие, что $M_I L = L_I$;

2) если $e_K \neq p - 1$ или существует поле K' такое, что $K \subset K' \subset L$, и расширение K'/K вполне разветвлено, то существуют описанные расширения Инабы, заданные матрицами порядка $p^{2n-1} + 2$ и $p^{2n-1} + 1$ соответственно.

4. Подрасширение, являющееся башней расширений Артина-Шрайера

ЛЕММА 5. Пусть L/K — расширение Галуа степени p^2 . Тогда существует поле M такое, что $K \subset M \subset L$, $|L : M| = |M : K| = p$, и выполнено одно из двух условий:

1) $h(M/K) < \frac{e_M}{p-1}$;

2) $h(M/K) = \frac{e_M}{p-1}$, $h(L/M) = \frac{e_L}{p-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае циклического расширения L/K утверждение следует из неравенства Хиюдо, см [1], лемма 4-1. В случае нециклического расширения утверждение леммы вытекает из предложения 3.8 в [12]. ■

Из этой леммы получается следующий результат:

ТЕОРЕМА 4. Пусть L/K — p -расширение Галуа. Тогда существует поле M , такое, что $K \subset M \subset L$, расширение M/K раскладывается в башню расширений Артина-Шрайера, и у расширения L/M все промежуточные расширения Галуа степени p максимально разветвлены.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $|L : K| = p^n$. Тогда существует набор полей M_i такой, что

$$K = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_{n-1} \subset M_n = L,$$

M_{i+1}/M_i — расширение Галуа степени p при всех i . Для каждого такого набора положим

$$N(M_1, \dots, M_n) = \sum x_i(n - i),$$

где $x_i = 1$, если расширение M_{i+1}/M_i является максимально разветвленным, и $x_i = 0$ в противном случае. Будем рассматривать набор M_1, \dots, M_n , для которого величина $N(M_1, \dots, M_n)$ принимает наименьшее возможное значение.

Докажем, что ни для какого i не могут выполняться условия

$$h(M_{i+1}/M_i) = \frac{e_{M_{i+1}}}{p-1}, \quad h(M_{i+2}/M_{i+1}) < \frac{e_{M_{i+2}}}{p-1}.$$

Предположим, что они выполняются. Применим к расширению M_{i+2}/M_i лемму 5. Пусть M' — промежуточное поле из этой леммы. Если бы оно удовлетворяло условию 1), то замена поля M_{i+1} на поле M' уменьшила бы значение величины $N(M_1, \dots, M_n)$. Следовательно, M' удовлетворяет условию 2). По лемме 1 выполнено

$$d(M_{i+2}/M_{i+1}) + d(M_{i+1}/M_i) = d(M_{i+2}/M') + d(M'/M_i)$$

По лемме 3 в правой части оба слагаемых равны 1, а в левой — одно слагаемое меньше 1, второе не превосходит 1. Противоречие. Получаем, что для некоторого s все при $i < s$ выполнено $h(M_{i+1}/M_i) < \frac{e_{M_{i+1}}}{p-1}$, и при $i \geq s$ выполнено $h(M_{i+1}/M_i) = \frac{e_{M_{i+1}}}{p-1}$.

Докажем, что поле M_s подойдет в качестве M . По лемме 2 расширения M_{i+1}/M_i являются расширениями Артина-Шрайера при $i < s$, следовательно, расширение M/K удовлетворяет условию. Предположим, что расширение L/M не удовлетворяет условию. Тогда существуют поля F, E , такие, что

$$M \subset F \subset E \subset L, \quad |E : F| = p, \quad d(E/F) < 1.$$

Разложим расширения M/F и L/E в башни расширений степени p . Получим, что расширение L/M разложено в башню из $n - s$ расширений степени p , причем по лемме 3 глубина хотя бы одного подрасширения меньше 1, а остальных — не больше 1. По лемме 1 из этого следует, что $d(L/M) < n - s$. С другой стороны, применяя леммы 3 и 1 к башне из полей M_i , получаем, что $d(L/M) = n - s$. ■

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hyodo, O. Wild ramification in the imperfect residue field case/ O. Hyodo// Adv. Stud. Pure Math. - 1987. - Vol. 12 - P. 287-314.
2. Inaba, E. On matrix equations for Galois extensions of fields with characteristic p / E. Inaba//Natur. Sci. Rep. Ochanomizu Univ. - 1961. - Vol. 12 - P. 26-36.
3. Востоков, С. В., Жуков, И. Б., Фесенко И. Б. К теории многомерных локальных полей. Методы и конструкции/ С. В. Востоков, И. Б. Жуков, И. Б. Фесенко // Алгебра и анализ. - 1990. - Т. 2 - № 4. - С. 91-118.
4. Иванова, О. Ю. Задание свирепого циклического расширения уравнением Инабы/ О. Ю. Иванова//Записки научных семинаров С.-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова РАН (ПОМИ) 2022. -Т. 513 - С. 74-84.

5. Востоков, С. В., Жуков И. Б. Некоторые подходы к построению абелевых расширений для p -адических полей/ С. В. Востоков, И. Б. Жуков// Труды С.-Петерб. мат. общ. - 1995 - Т.3 - С. 194-214.
6. Востоков, С. В., Жуков, И. Б., Иванова, О. Ю. Расширения Инабы полных полей характеристики 0/ С. В. Востоков, И. Б. Жуков, О. Ю. Иванова// Чебышёвский сб. - 2019 - Т. 20 - № 3 - С. 124-133.
7. Жуков, И. Б., Лысенко, Е. Ф. Построение циклического расширения степени p^2 полного поля/ И. Б. Жуков, Е. Ф. Лысенко//Записки научных семинаров С.-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова РАН (ПОМИ) - 2017. - Т. 455 - С. 52-66.
8. Жуков, И. Б., Иванова, О. Ю. О расширениях Инабы двумерных локальных полей смешанной характеристики/ И. Б. Жуков, О. Ю. Иванова// Записки научных семинаров С.-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова РАН (ПОМИ) - 2022. - Т. 513 - С. 57-73.
9. Жуков, И. Б., Иванова, О. Ю. Явные конструкции расширений полных полей характеристики 0// И. Б. Жуков, О. Ю. Иванова// Чебышёвский сб., в печати
10. Zhukov, I. Explicit abelian extensions of complete discrete valuation fields// in book: Fesenko, I., Kurihara, M. (eds.) Invitation to Higher Local Fields. Geometry and Topology Monographs - 2000. Vol. 3 - P. 117-122.
11. MacKenzie, R. E., Whaples, G. Artin–Schreier equations in characteristic zero// R. E. MacKenzie, G. Whaples// Amer. J. Math. 1956 Vol. 78, P. 473-485.
12. Востоков, С. В., Жуков, И. Б., Пак, Г. К. Расширения с почти максимальной глубиной ветвления/ С. В. Востоков, И. Б. Жуков, Г. К. Пак// Записки научных семинаров С.-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова РАН (ПОМИ) - 1999. - Т. 265 - С. 77-109.

REFERENCES

1. Hyodo, O., 1987, “Wild ramification in the imperfect residue field case”, *Adv. Stud. Pure Math.*, vol. 12, pp. 287-314.
2. Inaba, E., 1961, “On matrix equations for Galois extensions of fields with characteristic p ”, *Natur. Sci. Rep. Ochanomizu Univ.*, vol. 12, pp. 26-36.
3. Fesenko, I. B., Vostokov, S. V., Zhukov I. B. 1990, “On the theory of multidimensional local fields. Methods and constructions”, *Algebra i Analiz* vol. 2, № 4. pp. 91-118.
4. Ivanova, O. Yu. 2022 “Construction of a cyclic ferocious extension by means of an Inaba equation”, *J. Math. Sci.*, vol. 513, № 4. pp. 74-84.
5. Vostokov, S. V., Zhukov, I. B. 1995, “Some approaches to the construction of abelian extensions for p -adic fields”, *Proceedings of the St. Petersburg Mathematical Society*, vol. III, pp. 157–174, *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, 166, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.
6. Vostokov, S. V., Zhukov, I. B., Ivanova, O. Yu. 2019 “Inaba extensions of complete fields of characteristic 0” *Chebyshevskii sbornik* vol. 20, № 3, pp. 124-133

7. Zhukov, I. B., Lysenko, E. F. 2018, “Construction of cyclic extensions of degree p^2 for a complete field”, *J. Math. Sci.*, vol. 234(2), pp. 148–157
8. Zhukov I. B., Ivanova, O. Yu. 2022 “On Inaba extensions for two-dimensional local fields of mixed characteristic”, *J. Math. Sci.*, vol. 513, № 4, pp. 57-73.
9. Zhukov, I. B., Ivanova, O. Yu. “Explicit constructions of extensions of complete fields of characteristic 0” *Chebyshevskii sbornik*, to appear.
10. Zhukov, I., 2000, “Explicit abelian extensions of complete discrete valuation fields”, in book: Fesenko, I., Kurihara, M. (eds.) *Invitation to Higher Local Fields. Geometry and Topology Monographs*, vol. 3, pp. 117-122.
11. MacKenzie, R. E., Whaples, G., 1956, “Artin–Schreier equations in characteristic zero”, *Amer. J. Math.*, vol. 78, pp. 473-485.
12. Vostokov, S. V., Zhukov, I. B., Pak, G. K. 1999, “Extensions with almost maximal depth of ramification”, *J. Math. Sci.*, vol. 112, № 3, pp. 4285-4302

Получено: 13.12.2023

Принято в печать: 21.03.2024

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 25. Выпуск 1.

УДК 511.361

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-1-184-191

**О совместных приближениях значений некоторых
гипергеометрических функций**

П. Л. Иванков

Иванков Павел Леонидович — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана (г. Москва).

e-mail: ivankovpl@mail.ru

Аннотация

В статье предлагается эффективное построение совместных приближений для некоторых гипергеометрических функций специального вида и их производных по параметру. Предложенное построение используется для получения оценки снизу числовой линейной формы от значений таких функций; при этом некоторые из параметров функций могут быть иррациональными.

Ключевые слова: гипергеометрические функции, эффективная конструкция, совместные приближения, линейные формы

Библиография: 10 названий.

Для цитирования:

П. Л. Иванков. О совместных приближениях значений некоторых гипергеометрических функций // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 1, с. 184–191.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 25. No. 1.

UDC 511.361

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-1-184-191

On simultaneous approximations of some hypergeometric functions

P. L. Ivankov

Ivankov Pavel Leonidovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Bauman Moscow State Technical University (Moscow).

e-mail: ivankovpl@mail.ru

Abstract

In this paper we propose effective construction of simultaneous approximations for some hypergeometric functions of a special type and their derivatives with respect to parameter. This construction is made use of for the achievement of the lower estimates of numerical linear forms of the values of such functions. Some parameters of these functions can be irrational.

Keywords: hypergeometric functions, effective construction, simultaneous approximations, linear forms

Bibliography: 10 titles.

For citation:

P. L. Ivankov, 2024, “On simultaneous approximations of some hypergeometric functions”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 1, pp. 184–191.

1. Введение

Рассмотрим функции

$$F_{klj}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu} \nu^{j-1} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{\beta+x} \frac{\partial^l}{\partial \lambda_k^l} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{\lambda_k + \vartheta + x}{\lambda_k + x}, \quad (1)$$

где $k = 1, \dots, t$, $l = 0, 1$, $j = 1, 2$; $\vartheta \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$. Предположим, что

$$\lambda_k + \vartheta - \beta \text{ и } \lambda_{k_1} - \lambda_{k_2} \quad (2)$$

не являются целыми рациональными числами, а все числа λ_k рациональны, $j = 1, 2$, $k, k_1, k_2 = 1, \dots, t$, $k_1 \neq k_2$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть \mathbb{I} — мнимое квадратичное поле или поле рациональных чисел \mathbb{Q} , и пусть $\beta \in \mathbb{I}$. Будем считать также, что выполнены все сделанные выше предположения относительно параметров функций (1). Тогда для любого ненулевого числа $\xi \in \mathbb{I}$ выполняется неравенство

$$\left| h_0 + \sum_{k=1}^t \sum_{l=0}^1 \sum_{j=1}^2 h_{klj} F_{klj}(\xi) \right| > H^{-8t-1-\epsilon}, \quad (3)$$

где h_0, h_{klj} — произвольный нетривиальный набор целых чисел из поля \mathbb{I} , причём число $H = \max_{k,l,j} |h_{klj}|$ достаточно велико (нижняя граница зависит от параметров функций (1) и от числа ϵ).

Формулировка этой теоремы опубликована в [9]. В предшествующих работах (см., например, [1], [2]), относящихся к данной тематике, параметр, по которому производилось дифференцирование, входил либо только в числитель, либо только в знаменатель общего члена соответствующих рядов. Для функций, рассматриваемых в данной статье, ранее предлагались конструкции аппроксимаций Паде первого рода (см. [3]), но такие аппроксимации не позволяют получать арифметические результаты в случае иррациональных параметров.

Аналогичные оценки, которые можно было бы получить с помощью известного в теории трансцендентных чисел метода Зигеля (в его классической форме), возможны лишь для случая рациональных параметров, и в этом последнем случае они оказываются менее точными. О применении метода Зигеля для исследования арифметической природы продифференцированных по параметру гипергеометрических функций см. [4, гл. 7, § 3; замечания к гл. 3].

2. Конструкция совместных приближений

Построение эффективной конструкции совместных приближений проведем в более общем случае по сравнению с тем, что требуется для доказательства теоремы 1.

Пусть

$$F_{klj}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu} \nu^{j-1} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{b(x)} \frac{\partial^l}{\partial \lambda_k^l} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{\lambda_k + \vartheta + x}{\lambda_k + x}, \quad (4)$$

где $b(x) = (x + \beta_m)$, $k = 1, \dots, t$, $l = 0, 1, \dots, \tau - 1$, $j = 1, \dots, m + 1$; τ — некоторое натуральное число; $\vartheta \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$. Предположим, что

$$\lambda_k + \vartheta - \beta_j \text{ и } \lambda_{k_1} - \lambda_{k_2} \quad (5)$$

не являются целыми рациональными числами, а все числа λ_k рациональны, $j = 1, \dots, m$, $k, k_1, k_2 = 1, \dots, t$, $k_1 \neq k_2$.

Пусть $T = t\tau$, и пусть при натуральном n

$$N_1 = \left[\frac{n}{T} \right], \quad u = m + 1, \quad N_2 = \left[\frac{n}{uT} \right] - 1,$$

Пусть, далее,

$$P(z) = \sum_{s=0}^n z^s p_s \prod_{x=N_2+1}^{N_2+n-s} b(x) \quad (6)$$

— многочлен с неопределенными коэффициентами p_s . Рассмотрим произведение

$$P(z)F_{klj}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{klj\nu} z^\nu,$$

для которого запишем и преобразуем коэффициент $c_{klj\nu}$ при $n \leq \nu \leq n + N_2$; имеем

$$\begin{aligned} c_{klj\nu} &= \sum_{s=0}^n p_s \prod_{x=N_2+1}^{N_2+n-s} b(x) \cdot (\nu - s)^{j-1} \prod_{x=1}^{\nu-s} \frac{1}{b(x)} \frac{\partial^l}{\partial \lambda^l} \prod_{x=1}^{\nu-s} \frac{\lambda_k + \vartheta + x}{\lambda_k + x} = \\ &= \prod_{x=1}^{N_2} \frac{1}{b(x)} \sum_{\mu=0}^l \binom{l}{\mu} \sum_{s=0}^n p_s C_{kl\mu}(s) \frac{\partial^\mu}{\partial \lambda_k^\mu} \prod_{x=1}^{n-s} \frac{\lambda_k + \vartheta + x}{\lambda_k + N_2 + x}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} C_{kl\mu}(s) &= (\nu - s)^{j-1} \times \\ &\times \prod_{x=\nu+1}^{n+N_2} b(x-s) \frac{\partial^{l-\mu}}{\partial \lambda_k^{l-\mu}} \left(\prod_{x=1}^{N_2} \frac{1}{\lambda_k + x} \prod_{x=\nu+1}^{n+N_2} (\lambda_k + x - s) \prod_{x=n+1}^{\nu} (\lambda_k + \vartheta + x - s) \right), \end{aligned}$$

т.е. $C_{kl\mu}(s)$ — многочлен степени не выше N_1 . Таким образом, для построения совместных приближений с порядком нуля, лишь на константу отличающимся от максимально возможного, достаточно подобрать коэффициенты многочлена $P(z)$ так, чтобы равенство

$$\sum_{s=0}^n p_s C(s) \frac{\partial^\mu}{\partial \lambda_k^\mu} \prod_{x=1}^{n-s} \frac{\lambda_k + \vartheta + x}{\lambda_k + N_2 + x} = 0$$

выполнялось при $\mu = 0, \dots, \tau - 1$ для любого многочлена $C(s)$, степень которого не выше N_1 . Совместные приближения при этом имеют вид

$$r_{klj}(z) = P_{klj}(z) + P(z)F_{klj}(z), \quad \text{где } P_{klj}(z) = - \sum_{s=0}^{n-1} c_{kljs} z^s, \quad (7)$$

и порядок нуля при $z = 0$ функции r_{klj} будет не меньше, чем $n + N_2$.

ЛЕММА 1. Пусть $n \in \mathbb{Z}$ — неотрицательное целое число. Справедливо равенство

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta - z} \prod_{x=1}^n \frac{z + \alpha + x}{\zeta + \alpha + x} &= \sum_{s=0}^n \frac{K_s(\zeta)}{\zeta + n - s} \prod_{x=1}^{n-s} \frac{z + \alpha + x}{\zeta + \alpha + x} \prod_{x=0}^{s-1} \frac{z + n - x}{\zeta + n - x} + \\ &+ \frac{1}{\zeta - z} \prod_{x=0}^n \frac{z + n - x}{\zeta + n - x}, \quad (8) \end{aligned}$$

где

$$K_s(\zeta) = \begin{cases} 1, & \text{если } s = 0, \\ \frac{\alpha+1}{\zeta+\alpha+n-s+1}, & \text{если } s = 1, \dots, n. \end{cases}$$

Равенство (8) можно доказать по индукции. При этом удобнее доказывать индукцией по q , $0 \leq q \leq n$, более общее равенство

$$\frac{1}{\zeta - z} \prod_{x=1}^n \frac{z + \alpha + x}{\zeta + \alpha + x} = \sum_{s=0}^q \frac{K_s(\zeta)}{\zeta + n - s} \prod_{x=1}^{n-s} \frac{z + \alpha + x}{\zeta + \alpha + x} \prod_{x=0}^{s-1} \frac{z + n - x}{\zeta + n - x} + \frac{1}{\zeta - z} \prod_{x=1}^{n-q} \frac{z + \alpha + x}{\zeta + \alpha + x} \prod_{x=0}^q \frac{z + n - x}{\zeta + n - x}.$$

ЛЕММА 2. Пусть

$$\alpha \notin \mathbb{Z}, \tag{9}$$

и пусть $R(z)$ – многочлен степени не выше n . Положим при $s = 0, 1, \dots, n$,

$$v_s = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{K_s(\zeta)R(\zeta) d\zeta}{\prod_{x=0}^s (\zeta + n - x) \prod_{x=1}^{n-s} (\zeta + \alpha + x)}, \tag{10}$$

где Γ – простой замкнутый кусочно гладкий положительно ориентированный контур, который охватывает все нули многочлена $\prod_{x=0}^n (\zeta + n - x)$, а все нули многочлена

$$\prod_{x=1}^n (\zeta + \alpha + x) \tag{11}$$

лежат в его внешности; такой контур существует в силу условия (9). Тогда тождественно по z выполняется равенство

$$R(z) = \sum_{s=0}^n v_s \prod_{x=0}^{s-1} (z + n - x) \prod_{x=1}^{n-s} (z + \alpha + x) \tag{12}$$

Доказательство. Пусть сначала z лежит внутри контура Γ . Умножим обе части (8) на $R(\zeta)/(2\pi i)$ и проинтегрируем получившееся равенство по контуру Γ . При этом

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{R(\zeta)}{\zeta - z} \prod_{x=1}^n \frac{z + \alpha + x}{\zeta + \alpha + x} d\zeta = Q(z),$$

и

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{R(\zeta)}{\zeta - z} \prod_{x=0}^n \frac{z + n - x}{\zeta + n - x} d\zeta = 0.$$

Первое из этих равенств очевидно, а второе справедливо потому, что контур интегрирования охватывает все полюсы подынтегральной функции, и степень числителя на две единицы меньше степени знаменателя. Из сделанных замечаний следует, что после указанной выше процедуры мы получим равенство (12), в котором коэффициенты v_s вычисляются по формулам (10). Мы доказали (12) для z , лежащих внутри Γ . Ясно, что в этом случае (12) будет справедливо и при всех прочих z . Лемма доказана.

В равенстве (12) положим

$$R(z) = \prod_{k=1}^t \prod_{\sigma=0}^{N_1-1} (\zeta - \lambda_k - N_2 + \sigma)^\tau, \tag{13}$$

$\alpha = \vartheta + N_1 - N_2$. Тогда, если $\vartheta \notin \mathbb{Z}$, то выполняется равенство

$$\frac{R(z)}{\prod_{x=1}^n (z + x)} = \sum_{s=0}^n w_s \prod_{x=1}^{n-s} \frac{z + \vartheta + N_1 - N_2 + x}{z + x}, \tag{14}$$

где числа w_s вычисляются по формуле (10) при указанных $R(\zeta)$ и α .

ЛЕММА 3. Пусть $\vartheta \notin \mathbb{Z}$. Тогда справедливо равенство

$$\sum_{s=0}^n w_s \frac{\partial^{l_k}}{\partial \lambda_k^{l_k}} \prod_{x=1}^{n-s} \frac{\lambda_k + \vartheta + N_1 - \sigma + x}{\lambda_k + N_2 - \sigma + x} = 0, \quad (15)$$

$k = 1, \dots, t$, $l_k = 0, 1, \dots, \tau_k - 1$, $\sigma = 0, 1, \dots, N_1 - 1$.

Доказательство. Если продифференцировать равенство (14) l раз, $0 \leq l \leq \tau - 1$ по z и подставить $z = \lambda_k + N_2 - \sigma$, то мы получим требуемое. Лемма доказана.

ЛЕММА 4. Если $\lambda - \alpha \notin \mathbb{Z}$, то многочлены

$$G_\sigma(z) = \prod_{x=0}^{\sigma-1} (z + \lambda - x) \prod_{x=1}^{N_1-\sigma} (z + \alpha + x), \quad \sigma = 0, 1, \dots, N_1,$$

образуют базис пространства многочленов степени не выше N_1 .

Доказательство. Достаточно проверить, что определитель

$$|G_\sigma(z)|_{\sigma, z=0,1,\dots,N_1}$$

отличен от нуля. Определитель более общего вида вычислен в [5, лемма 1, с. 193]. Из доказанной там формулы следует требуемое. Лемма доказана.

ЛЕММА 5. При $1 \leq k \leq t$, $0 \leq l \leq \tau - 1$ выполняется равенство

$$\sum_{s=0}^n g_s B(s) \frac{\partial^l}{\partial \lambda^l} \prod_{x=1}^{n-s} \frac{\lambda_k + \vartheta + x}{\lambda_k + N_2 + x} = 0, \quad (16)$$

где $B(s)$ – произвольный многочлен степени не выше N_1 .

Доказательство. Индукция по l . Пусть $l = 0$. Заметим, что при $0 \leq \sigma \leq N_1$ выполняется равенство

$$\prod_{x=1}^{n-s} \frac{\lambda_k + \vartheta + N_1 - \sigma + x}{\lambda_k + N_2 - \sigma + x} = B_\sigma(s) \prod_{x=1}^{n-s} \frac{\lambda_k + \vartheta + x}{\lambda_k + N_2 + x},$$

где

$$B_\sigma(s) = \prod_{x=0}^{\sigma-1} \frac{\lambda_k + N_2 + n - s - x}{\lambda_k + N_2 - x} \prod_{x=1}^{N_1-\sigma} \frac{\lambda_k + \vartheta + n - s + x}{\lambda_k + \vartheta + x}.$$

Отсюда и из (15) при $l = 0$ получаем, что

$$\sum_{s=0}^n w_s B_\sigma(s) \prod_{x=1}^{n-s} \frac{\lambda_k + \vartheta + x}{\lambda_k + N_2 + x} = 0. \quad (17)$$

Из (17) в силу леммы 4 следует, что (16) верно при $l_k = 0$ для любого многочлена степени не выше N_1 . Пусть (при фиксированном k) равенство (16) верно для производных в левой части этого равенства порядков $0, 1, \dots, l_k - 1$, при некотором l_k , $1 \leq l_k \leq \tau_k - 1$, при любом многочлене $B(s)$ степени не выше N_1 . Преобразуем (16); имеем

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{s=0}^n w_s \frac{\partial^l}{\partial \lambda^l} \left(B_\sigma(s) \prod_{x=1}^{n-s} \frac{\lambda_k + \vartheta + x}{\lambda_k + N_2 + x} \right) = \sum_{\mu=0}^{l-1} \binom{l}{\mu} \sum_{s=0}^n \frac{\partial^{l-\mu} B_\sigma(s)}{\partial \lambda_k^{l-\mu}} \times \\ &\quad \times \frac{\partial^\mu}{\partial \lambda_k^\mu} \prod_{x=1}^{n-s} \frac{\lambda_k + \vartheta + x}{\lambda_k + N_2 + x} + \sum_{s=0}^n B_\sigma(s) \frac{\partial^l}{\partial \lambda_k^l} \prod_{x=1}^{n-s} \frac{\lambda_k + \vartheta + x}{\lambda_k + N_2 + x}. \end{aligned}$$

В последнем выражении двойная сумма равна нулю по предположению индукции (т.к. степень $B_\sigma(s)$ не может увеличиться при дифференцировании по λ_k), а тогда равна нулю и последняя сумма, и индуктивный переход завершается так же, как и начало индукции. Лемма доказана.

3. Замечания о доказательстве теоремы

В предыдущем разделе было установлено, что требуемые совместные приближения (7) будут построены, если в равенстве (6) положить $p_s = w_s$,

$$w_s = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{K_s(\zeta) \prod_{k=1}^t \prod_{\sigma=0}^{N_1-1} (\zeta - \lambda_k - N_2 + \sigma)^\tau d\zeta}{\prod_{x=0}^s (\zeta + n - x) \prod_{x=1}^{n-s} (\zeta + \vartheta + N_1 + N_2 + x)}, \quad (18)$$

где контур интегрирования Γ охватывает все нули многочлена $\prod_{x=0}^s (\zeta + n - x)$ от ζ , а все нули многочлена $\prod_{x=1}^{n-s} (\zeta + \vartheta + N_1 + N_2 + x)$ лежат в его внешности. Рассуждая как при доказательстве [3, лемма 2, с. 186], нетрудно доказать, что общий наименьший знаменатель чисел w_s , $s = 0, 1, \dots, n$, оценивается сверху величиной e^γ , где через γ обозначена постоянная, зависящая от параметров функций (4). Очевидно, аналогичная оценка будет верна и для коэффициентов многочленов (6). Для доказательства теоремы важно также получить и оценку общего наименьшего знаменателя коэффициентов многочленов $P_{klj}(z)$, определяемых последним из равенств (7). Здесь потребуются дополнительные соображения. Для коэффициента c_{kljs} многочлена $P_{klj}(z)$ при z^s имеем, очевидно, формулу

$$\begin{aligned} c_{kljs} &= - \sum_{r=0}^s p_r \prod_{x=N_2+1}^{N_2+n-r} b(x) (s-r)^{j-1} \prod_{x=1}^{s-r} \frac{1}{b(x)} \frac{\partial^l}{\partial \lambda_k^l} \prod_{x=1}^{s-r} \frac{\lambda_k + \vartheta + x}{\lambda + x} = \\ &= - \sum_{r=0}^s p_r \frac{\prod_{x=s+1}^{N_2+n} b(x-r)}{\prod_{x=1}^{N_2} b(x)} (s-r)^{j-1} \frac{\partial^l}{\partial \lambda_k^l} \prod_{x=1}^{s-r} \frac{\lambda_k + \vartheta + x}{\vartheta_k + x} \end{aligned}$$

Основная проблема здесь в оценке общего наименьшего знаменателя дробей

$$\prod_{x=s+1}^{N_2+n} b(x-r) \prod_{x=1}^{s-r} \frac{1}{b(x)}, \quad 0 \leq s \leq n, \quad 0 \leq r \leq s. \quad (19)$$

Привлекая соображения, изложенные в статье [6], можно доказать, что модуль общего наименьшего знаменателя чисел (19) в случае функции (1) оценивается сверху при любом $\epsilon > 0$ величиной $(n!)^{\frac{1}{2}+\epsilon}$. При этом общим наименьшим знаменателем некоторого множества чисел из поля \mathbb{I} называется наименьшее по модулю отличное от нуля целое число из этого поля, после умножения на которое все числа из упомянутого множества становятся целыми в поле \mathbb{I} . Дальнейшие рассуждения, доказывающие неравенство (3), стандартны. Их можно скопировать с доказательства лемм 4 и 5 работы [1]; схема соответствующих рассуждений была впервые предложена в [7]. Существенную роль в этих рассуждениях играет линейная независимость над полем рациональных дробей функций (4); по этому поводу см. работу [8]. Более подробно доказательство теоремы 1 не рассматриваем.

4. Заключение

Рассмотренной теоремой возможности применения предложенной эффективной конструкции совместных приближений не исчерпываются. Можно, например, попробовать рассмотреть случай, когда некоторые из чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_t$ иррациональны. Возможно, новые результаты удастся получить также и в случае, когда в правой части равенства (4) дробь $1/b(x)$ заменяется на $a(x)/b(x)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иванков П. Л. Об использовании совместных приближений для изучения арифметической природы значений гипергеометрических функций // Наука и образование, **12** (2012), С. 135–143.
2. Иванков П. Л. Об использовании теории делимости в квадратичных полях для получения оценок некоторых линейных форм // Наука и образование, **11** (2013), С. 129–138.
3. Иванков П. Л. О дифференцировании по параметру гипергеометрических функций специального вида // Известия вузов. Математика, **12** (2019), С. 71–81.
4. Шидловский А. Б. Трансцендентные числа // Наука, М., 1987.
5. Иванков П. Л. О линейной независимости значений некоторых функций // Фундаментальная и прикладная математика **1:1** (1995), С. 191–206.
6. Галочкин А. И. Об арифметических свойствах значений некоторых целых гипергеометрических функций // Сибирский математический журнал, **17:6** (1976), С. 1220–1235.
7. Chudnovsky, D. W., Chudnovsky G.W. Applications of Pade approximation to diophantine inequalities of G-functions // Lecture Notes in Math., v. 1135 (1985), pp. 9–51.
8. Иванков П. Л. О линейной независимости значений некоторых гипергеометрических функций над мнимым квадратичным полем // Чебышевский сборник, **20:4** (2020), С. 155–166.
9. Иванков П. Л. Эффективная конструкция совместных приближений для гипергеометрических функций специального вида // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории. Материалы XVIII Международной конференции, посвящённой 100-летию со дня рождения профессоров Б.М.Бредихина, В.И.Нечаева и С.Б.Стечкина, Тула 2020, С. 255–256.

REFERENCES

1. Ivankov, P. L., 2012. “On the use of joint approximations for studying the arithmetic nature of values of hypergeometric functions”, *Science and Education*, **12**, pp. 135–143.
2. Ivankov, P. L., 2013. “On the use of divisibility theory in quadratic fields to On the use of the theory of divisibility in quadratic fields for obtaining estimates of some linear forms”, *Science and Education*, **11**, pp. 129–138.
3. Ivankov, P. L., 2019. “On differentiation on the parameter of hypergeometric functions of the of special kind”, *Izvestiya Vuzov. Mathematics*, **12**, pp. 71–81.
4. Shidlovsky, A. B., 1987. “Transcendental numbers”, *Nauka, M.*
5. Ivankov, P. L., 1995. “On linear independence of values of some functions”, *Fundamental and Applied Mathematics*, **1:1**, pp. 191–206.
6. Galochkin, A. I., 1976. “On arithmetic properties of values of some integer hypergeometric functions”, *Siberian Mathematical Journal*, **17:6**, pp. 1220–1235.
7. Chudnovsky, D. W., Chudnovsky, G. W., 1985. “Applications of Pade approximation to diophantine inequalities of G-functions”, *Lecture Notes in Math.*, Vol. 1135, pp. 9–51.

8. Ivankov, P. L., 2020. “On linear independence of values of some hypergeometric functions over an imaginary quadratic field”, *Chebyshevskii Sbornik*, **20**:4, pp. 155–166.
9. Ivankov, P. L., 2020. “Efficient construction of joint approximations for hypergeometric functions of special kind”, *Algebra, number theory and discrete geometry: modern problems, applications and problems of history. Proceedings of the XVIII International Conference on the 100-th Anniversary of the Birth of Professors B. M. Bredikhin, V. I. Nechaev and S. B. Stechkin, Tula*, pp. 255–256.

Получено: 29.06.2023

Принято в печать: 21.03.2024

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 25. Выпуск 1.

УДК 378.14

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-1-192-204

**Пример построения математической модели решения
практико-ориентированной задачи**

С. В. Даниленко, Ю. М. Мартынюк, И. Ю. Реброва

Даниленко Софья Валерьевна — кандидат педагогических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: sv.danilenko@gmail.com

Мартынюк Юлия Михайловна — кандидат педагогических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: juliamart@ya.ru

Реброва Ирина Юрьевна — кандидат физико-математических наук, доцент, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: i_rebrova@mail.ru

Аннотация

В статье обосновывается значимость математического моделирования при решении практико-ориентированных задач студентами направления подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки) профили Математика и Информатика. Приводится обзор актуальных исследований в области стандартизации содержания предметной области «Математика и информатика»; дидактических возможностей прикладных задач, изучаемых в школьном курсе математики и информатики; потенциала подобных задач в раскрытии межпредметных связей школьных учебных дисциплин; значения математического моделирования в процессе их решения. На основе анализа приведенных источников отмечаются сложность и многогранность создаваемых в настоящее время математических моделей, соединяющих элементы теории из различных областей знания и требующих подключения инструментов нескольких информационных технологий и технических решений.

Авторами подробно описаны и проиллюстрированы на примерах основные этапы построения математической модели. Теоретические положения конкретизированы на примере решения практико-ориентированной задачи о моделировании биоритмов человека. Представленная задача предлагается студентам в рамках изучения темы «Школьные учебные задачи» курса «Теория и методика обучения информатике». Решение подобного рода задач будущими учителями математики и информатики направлено на достижение нескольких целей: развить навыки математического моделирования; применить на практике сформированные ранее навыки владения информационными технологиями, необходимые для эффективного выполнения задания; расширить кругозор в плане смежных областей науки (биология, физиология). Данный подход к процессу обучения будущих учителей, по мнению авторов, позволяет студентам не только оценить значимость математического моделирования, но и развить необходимые навыки для решения задач с практическим содержанием.

Ключевые слова: математика и информатика, математическое моделирование, практико-ориентированная задача, межпредметные связи, педагогическое образование, подготовка учителя математики и информатики, математическая культура.

Библиография: 30 названий.

Для цитирования:

С. В. Даниленко, Ю. М. Мартынюк, И. Ю. Реброва. Пример построения математической модели решения практико-ориентированной задачи // Чебышевский сборник, 2024, т.25, вып.1, с. 192–204.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 25. No. 1.

UDC 378.14

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-1-192-204

An example of constructing a mathematical model for solving a practice-oriented problem

S. V. Danilenko, J. M. Martynyuk, I. Yu. Rebrova

Danilenko Sofya Valerievna — candidate of pedagogical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: sv.danilenko@gmail.com

Martynyuk Julia Mikhailovna — candidate of pedagogical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: juliamart@ya.ru

Rebrova Irina Yuryevna — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: i_rebrova@mail.ru

Abstract

The article substantiates the importance of mathematical modeling in solving practice-oriented problems by students of the training direction 44.03.05 Pedagogical education of the Mathematics and Computer Science profiles. An overview of current research in the field of standardization of the content of the subject area «Mathematics and Computer Science» is provided; didactic possibilities of applied problems studied in the school course of mathematics and computer science; the potential of such tasks in revealing interdisciplinary connections of school academic disciplines; the meanings of mathematical modeling in the process of solving them. Based on the analysis of the cited sources, the complexity and versatility of the currently created mathematical models are noted, connecting elements of theory from various fields of knowledge and requiring the connection of tools from several information technologies and technical solutions.

The authors describe in detail and illustrate with examples the main stages of constructing a mathematical model. The theoretical provisions are concretized using the example of solving a practice-oriented problem of modeling human biorhythms. The presented problem is offered to students as part of the study of the topic «School educational tasks» of the course «Theory and Methods of Teaching Computer Science». The solution of this kind of problems by future mathematics and computer science teachers is aimed at achieving several goals: to develop mathematical modeling skills; apply in practice previously developed information technology skills necessary to effectively complete the task; broaden your horizons in terms of related fields of science (biology, physiology). This approach to the process of training future teachers, according to the authors, allows students not only to appreciate the importance of mathematical modeling, but also to develop the necessary skills for solving problems with practical content.

Keywords: mathematics and computer science, mathematical modeling, practice-oriented problem, interdisciplinary connections, teacher education, training of mathematics and computer science teachers, mathematical culture.

Bibliography: 30 titles.

For citation:

S. V. Danilenko, J. M. Martynyuk, I. Yu. Rebrova, 2024, "An example of constructing a mathematical model for solving a practice-oriented problem", *Chebyshevskii sbornik*, vol.25, no.1, pp. 192–204.

1. Введение

Актуальность

Построение моделей в процессе решения практико-ориентированных задач является одним из наиболее важных этапов, которому в ходе подготовки учителя математики и информатики зачастую уделяется недостаточно внимания. Между тем, качество и эффективность действий, предпринимаемых на основе правильно подобранной математической модели, определяют уровень профессионализма любого специалиста. В этих обстоятельствах учитель математики и информатики должен не только сам уметь строить правильные модели решения учебных задач, но и грамотно и эффективно учить этому своих учеников. В подготовке учителя математики и информатики практико-ориентированные задачи играют важную роль. Это, в первую очередь, связано с практической направленностью школьного курса информатики. Кроме того, подобного рода задачи позволяют глубже понять современные процессы цифровизации всех сфер человеческой жизни. Особое место в ряду практико-ориентированных занимают задачи, относящиеся к межпредметному знанию, включающие положения различных наук. Одной из таких задач является задача о моделировании биоритмов человека.

Изученность проблемы

На протяжении всей истории школьного курса информатики неоднократно менялись его цели и задачи, а также структура, содержание, направленность, оснащение. Неизменным оставалось, и хочется надеется, останется одно – неразрывная связь информатики и математики, на которой основаны не только все существовавшие прежде концепции школьного образования, но и существующий на сегодняшний день порядок вещей, определяемый школьными стандартами нового поколения. Тезис подтверждается, в первую очередь, тем положением, что по новому стандарту математика и информатика по-прежнему объединены в одну предметную область «Математика и информатика» [1]. Согласно стандарту основного общего образования «изучение предметной области «Математика и информатика» должно обеспечить: осознание значения математики и информатики в повседневной жизни человека; формирование представлений о социальных, культурных и исторических фактора становления математической науки; понимание роли информационных процессов в современном мире; формирование представлений о математике как части общечеловеческой культуры, универсальном языке науки, позволяющем описывать и изучать реальные процессы и явления» [1]. Стандарт среднего общего образования добавляет к данным целям изучения выделенной предметной области «сформированность основ логического, алгоритмического и математического мышления; сформированность умений применять полученные знания при решении различных задач» [2].

В рамках данной предметной области развивается логическое и математическое мышление и формируется представление о математических моделях во всем их многообразии. В стандарте особо выделена необходимость формирования умения «применять математические знания при решении различных задач и оценивать полученные результаты», а также представления «об основных информационных процессах в реальных ситуациях» [1]. Кроме того, среди предметных результатов освоения предметной области четко обозначено «развитие умений применять изученные понятия, результаты, методы для решения задач практического характера и задач из смежных дисциплин» [1], а также «сформированность представлений о

компьютерно-математических моделях и необходимости анализа соответствия модели и моделируемого объекта (процесса)» [2].

Прикладная задача обладает большим потенциалом дидактических возможностей. В разное время их исследованием занимались многие ученые и практики. В частности, со второй половины 20-го века школам неоднократно предлагались сборники математических задач с практическим содержанием П. Т. Апанасова [3], С. С. Варданяна [4], Ю. М. Колягина [5] и др. В методических трудах и разработках Н. А. Терешина [6], А. К. Артемова [7], В. А. Гусева [8], М. И. Зайкина [9], [10], А. В. Пчелина [9], [10], Л. М. Фридмана [11], Т. А. Ивановой [12] и других было обосновано активное использование практико-ориентированных заданий при изучении дисциплин математического и естественно-научного циклов как одного из важнейших средств формирования у учащихся необходимых теоретических и практических результатов обучения.

Задачи с практическим содержанием выступают тем средством, при помощи которого наиболее эффективно раскрываются межпредметные связи школьных учебных дисциплин. В разное время вопросы формирования межпредметных связей в процессе изучения предметной области «Математика и информатика» изучались в работах В. Г. Болтянского [13], В. Н. Максимовой [14], В. А. Далингера [15], И. Д. Зверева [16], М. П. Лапчика [17], А. Р. Есаяна [18] и др. Сегодня вопросам обучения решению задач с практическим содержанием будущих учителей математики и информатики уделяется большое внимание в педагогическом и методическом сообществе. Значимость и необходимость развития математической культуры в ходе данного процесса рассматриваются в работах Сергеева Р. С. [19], Мирзоева М. С. [20], Мадудина В. Н. [21] и др.

Построение математической модели решения практико-ориентированной задачи является важнейшим этапом в данном процессе. Вопросы математического моделирования постоянно находятся в поле зрения исследователей и педагогов. Здесь уместно отметить исследования Г. М. Генералова [22], А. Д. Нахмана [23], И. И. Баврина [24], Д. Д. Михайлова [25], Н. Н. Красовского [26], О. С. Бабанской [27], В. С. Голубева [28], Б. М. Рустамова [29] и др. В современных исследованиях отмечается отличительная особенность создаваемых математических моделей, связанная со сложностью моделируемых объектов, которые зачастую соединяют в себе теоретические положения и практические свойства из различных областей знания. Кроме того, такие объекты моделирования требуют использования всего спектра передовых информационных технологий и технических разработок для получения адекватного результата моделирования. Данная постановка вопроса предполагает включение в процесс обучения будущих учителей математики и информатики таких задач с практическим содержанием, которые помогли бы подрастающему поколению адаптироваться к постоянно усложняющимся требованиям технико-технологического развития общества, в котором им предстоит жить и работать.

2. Основная часть

Основные этапы моделирования.

При построении и исследовании моделей, в первую очередь, необходимо определить задачу моделирования. Процесс *постановки задачи* включает в себя следующие этапы: описание задачи, определение цели моделирования, анализ объекта.

Описание задачи. Задача моделирования формулируется на естественном языке. Главная цель данного этапа – определить объект моделирования и понять, что должен представлять собой результат. Например: задача моделирования – спроектировать оснащение учебного кабинета информатики в школе при условии, что расходы на его оборудование не превысят заданной суммы.

Цель моделирования. Под целью понимается некая проблема, которую необходимо решить. В зависимости от характера поставленной цели ее можно отнести к одной из следующих групп:

1. определение последствий воздействия на объект с целью принятия верного варианта решения задачи (тип задач «*Что будет, если...*». Например: что будет, если увеличить расходы на периферийное оборудование и сэкономить на наглядных пособиях?);
2. моделирование объекта в соответствии с заданными свойствами (тип задач «*Как сделать, чтобы...*». Например: каким эргономическим требованиям должна соответствовать школьная мебель в кабинете информатики, чтобы каждое рабочее место было комфортным и отвечало требованиям СанПиН?);
3. изучение реального объекта. Данная цель предполагает изучение основных свойств объекта для установления законов его развития и способов взаимодействия с другими объектами (например: изучение готовых вариантов оборудования кабинета информатики и сопоставление с результатами опроса руководителей школ и учителей информатики).

В приведенном примере с кабинетом информатики цель моделирования сформулирована в общем виде и нуждается в уточнении: каким должно быть «комфортное» рабочее место, требования каких документов и нормативных актов необходимо соблюсти, какие позиции по закупкам должны быть в приоритете, каковы предпочтения и правила школы и т.п.

Анализ объекта предполагает описание основных свойств объекта, существенных для данного варианта и цели моделирования.

Например, если рабочее место учащегося должно быть комфортным для решения непосредственно учебных задач, то, в первую очередь, необходимо уделить внимание подбору компьютерной техники и специальной мебели. Будет решаться задача «*Как сделать, чтобы... ?*». Среди важных параметров анализируемых объектов будут достаточно мощный системный блок, эргономичная клавиатура, оптимальная модель дисплея, эргономичные стол и стул, высокоскоростное интернет-соединение и т. п. Возможно также дооснащение кабинета дополнительным освещением и средствами для создания искусственного затемнения в солнечное время.

Таким образом, процесс постановки задачи позволяет четко определить исходные данные, существенные свойства объекта и те свойства, которыми можно пренебречь, а также конкретный конечный результат.

Вторым этапом моделирования является *формализация и построение модели*.

Выявленные на предыдущем этапе существенные свойства, параметры, состояния и отношения объекта представляют собой информационную модель. Для эффективного ее отображения используются графические методы свертывания информации: таблицы, схемы, кластер, денотатный граф, ментальные карты и т.п. Моделируемый объект (процесс) представляется в определенной форме (образной, смешанной, знаковой). Также на данном этапе подбираются соответствующие методы моделирования: математические или статистические. Итогом данного этапа является построение математической или компьютерной модели, реализованной соответствующими программными средствами.

Третий этап моделирования предполагает проведение *эксперимента*, включающего две стадии: тестирование и исследование.

При *тестировании* модели необходимо проверить корректность ее построения путем сравнения полученных результатов с реальными объектами или другими независимыми моделями. Для проверки правильности построения модели подготавливаются тестовые данные, для которых итоговый результат заранее рассчитан (т.е. уже известен). На данном этапе необходимо проверить соответствие полученной модели объекта цели моделирования.

Исследование модели. Этот этап моделирования, к которому следует переходить только после успешного прохождения тестирования, предполагает изучение модели для анализа ситуаций, принятия решений и предсказания результатов.

На заключительном этапе моделирования выполняется *анализ результатов*. Данный этап является ключевым для процесса моделирования, по результатам которого принимается решение о продолжении исследования. Если полученные результаты не соответствуют поставленным задачам исследования, то на предыдущих этапах были допущены ошибки, и требуется их корректировка.

Решение практико-ориентированной задачи по моделированию биоритмов человека.

Описание задачи. Согласно теории Г. Свободы, Ф. Тельчера и В. Флисса [30], у каждого человека существует три основных биоритма, влияющих на его физическое, эмоциональное и интеллектуальное состояние. Эти три биоритма имеют периоды в 23, 28 и 33 дня соответственно и предполагают циклические изменения в уровне энергии, настроения и когнитивных способностей. Стоит отметить, что научное сообщество не признает теорию о трех биоритмах как научно обоснованную. Многие исследования не обнаружили убедительных доказательств существования таких циклических изменений в физиологии и психологии человека. В то же время, некоторые люди все же могут замечать периодические колебания в своем физическом и эмоциональном состоянии. Более того, в некоторых странах людям, профессии которых связаны с повышенным уровнем риска, в неблагоприятные по биоритмам дни даже предоставляют выходные.

Задача моделирования: построить модель биоритмов человека за определенный промежуток времени.

Цель моделирования: на основе модели биоритмов спрогнозировать благоприятные неблагоприятные дни для осуществления разного рода деятельности.

Анализ объекта. Биоритмы уникальны для каждого человека, так как точкой отсчета для всех биоритмов считается его день рождения.

Физический биоритм (23-дневный цикл) предполагает, что уровень физической энергии и выносливости у человека проходит через циклические фазы, включая периоды высокой и низкой активности.

Эмоциональный биоритм (28-дневный цикл) связан с изменениями в эмоциональном состоянии человека, предполагает периоды высокого и низкого настроения.

Интеллектуальный биоритм (33-дневный цикл) предполагает, что уровень когнитивных способностей и концентрации проходит через циклические фазы, включая периоды высокой и низкой продуктивности.

Считается, что графики биоритмов представляют собой синусоидальную зависимость. Дни, соответствующие экстремуму функции, считаются наиболее благоприятными для соответствующего вида деятельности. Дни, расположенные ниже оси абсцисс, считаются менее благоприятными.

Формализация задачи, построение модели. Опишем основные параметры, исходные данные и данные для расчета в виде таблицы:

Параметры (свойства) модели	Значения
Дата рождения человека	Исходные данные
Начальный день отсчета	Исходные данные
Физический биоритм	Расчетные данные: $\sin(2\pi x/23)$
Эмоциональный биоритм	Расчетные данные: $\sin(2\pi x/28)$
Интеллектуальный биоритм	Расчетные данные: $\sin(2\pi x/33)$, где x — количество дней с даты рождения

Таблица 1: Формализация задачи

Оптимальным средством реализации компьютерной модели в данном случае может являться табличный процессор. Определим области ввода исходных данных в таблицу и формулы расчета искомых параметров (см. рис. 1).

Произведем расчеты по следующим параметрам:

	A	B	C	D
1	Расчет биоритмов			
2				
3	Исходные данные			
4	Дата рождения			
5	Дата отсчета			
6				
7	Результаты:			
8	Порядковый день	Физический	Эмоциональный	Интеллектуальный
9	=B\$5	=SIN(2*ПИ()* (A9-\$B\$4)/23)	=SIN(2*ПИ()* (A9-\$B\$4)/28)	=SIN(2*ПИ()* (A9-\$B\$4)/33)
10	=A9+1			

Рис. 1: Компьютерная модель «Биоритмы»

Дата рождения: 06.03.2002

Дата отсчета: 01.01.2024

Длительность прогноза: 30 дней

Результаты расчетов представлены на рисунке 2:

Проведение эксперимента. Тестирование. Для проведения процедуры тестирования произведем расчеты вручную для следующих исходных данных (см. табл. 2):

Дата рождения: 06.03.2002

Даты определения расчетных параметров: 01.01.2024, 07.01.2024, 20.01.2024, 30.01.2024.

Дата	Физический	Эмоциональный	Интеллектуальный
01.01.2024	$\sin(2 \cdot 3.14 \cdot 7971) / 23 =$ = -0,40	$\sin(2 \cdot 3.14 \cdot 7971) / 28 =$ = -0,90	$\sin(2 \cdot 3.14 \cdot 7971) / 33 =$ = 0,28
07.01.2024	$\sin(2 \cdot 3.14 \cdot 7977) / 23 =$ = -0,89	$\sin(2 \cdot 3.14 \cdot 7977) / 28 =$ = -0,62	$\sin(2 \cdot 3.14 \cdot 7977) / 33 =$ = -0,99
20.01.2024	$\sin(2 \cdot 3.14 \cdot 7990) / 23 =$ = 0,63	$\sin(2 \cdot 3.14 \cdot 7990) / 28 =$ = 0,78	$\sin(2 \cdot 3.14 \cdot 7990) / 33 =$ = 0,69
30.01.2024	$\sin(2 \cdot 3.14 \cdot 8000) / 23 =$ = -0,89	$\sin(2 \cdot 3.14 \cdot 8000) / 28 =$ = -0,97	$\sin(2 \cdot 3.14 \cdot 8000) / 33 =$ = 0,46

Таблица 2: Расчетные параметры для тестирования

Сравнив расчетные показатели с экспериментальными результатами, приходим к выводу, что тестирование пройдено успешно и можно приступать к этапу исследования.

Расчет биоритмов				
Исходные данные				
Дата рождения	06.03.2002			
Дата отсчета	01.01.2024			
Результаты:				
Порядковый день	Физический	Эмоциональный	Интеллектуальный	
01.01.2024	-0,40	-0,90	-0,28	-0,28
02.01.2024	-0,63	-0,97	-0,46	-0,46
03.01.2024	-0,82	-1,00	-0,63	-0,63
04.01.2024	-0,94	-0,97	-0,78	-0,78
05.01.2024	-1,00	-0,90	-0,87	-0,87
06.01.2024	-0,98	-0,78	-0,95	-0,95
07.01.2024	-0,89	-0,62	-0,99	-0,99
08.01.2024	-0,73	-0,43	-1,00	-1,00
09.01.2024	-0,51	-0,22	-0,97	-0,97
10.01.2024	-0,27	0,00	-0,91	-0,91
11.01.2024	0,00	0,22	-0,81	-0,81
12.01.2024	0,27	0,43	-0,69	-0,69
13.01.2024	0,52	0,62	-0,54	-0,54
14.01.2024	0,75	0,78	-0,37	-0,37
15.01.2024	0,89	0,90	-0,19	-0,19
16.01.2024	0,98	0,97	0,00	0,00
17.01.2024	1,00	1,00	0,19	0,19
18.01.2024	0,94	0,97	0,37	0,37
19.01.2024	0,82	0,90	0,54	0,54
20.01.2024	0,63	0,78	0,69	0,69
21.01.2024	0,40	0,62	0,81	0,81
22.01.2024	0,14	0,43	0,91	0,91
23.01.2024	-0,14	0,22	0,97	0,97

Рис. 2: Результаты расчетов в табличном процессоре

Исследование модели. Для наглядного представления полученных результатов и проведения дальнейшего исследования построим графики соответствующих функций (см. рис. 3).

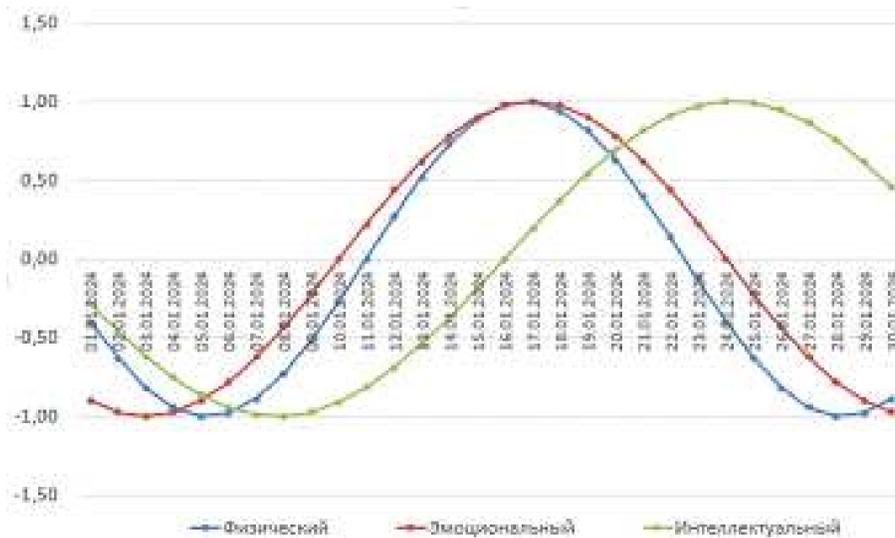


Рис. 3: Результаты построения графиков функций

Проведем исследование. Для этого определим по графику дни, оптимальные для положительного настроения и отношения к событиям (см. рис. 4). В данном случае это интервал с

11.01.2024 по 23.01.2024. Пик активности выпадает на 17.01.2024.

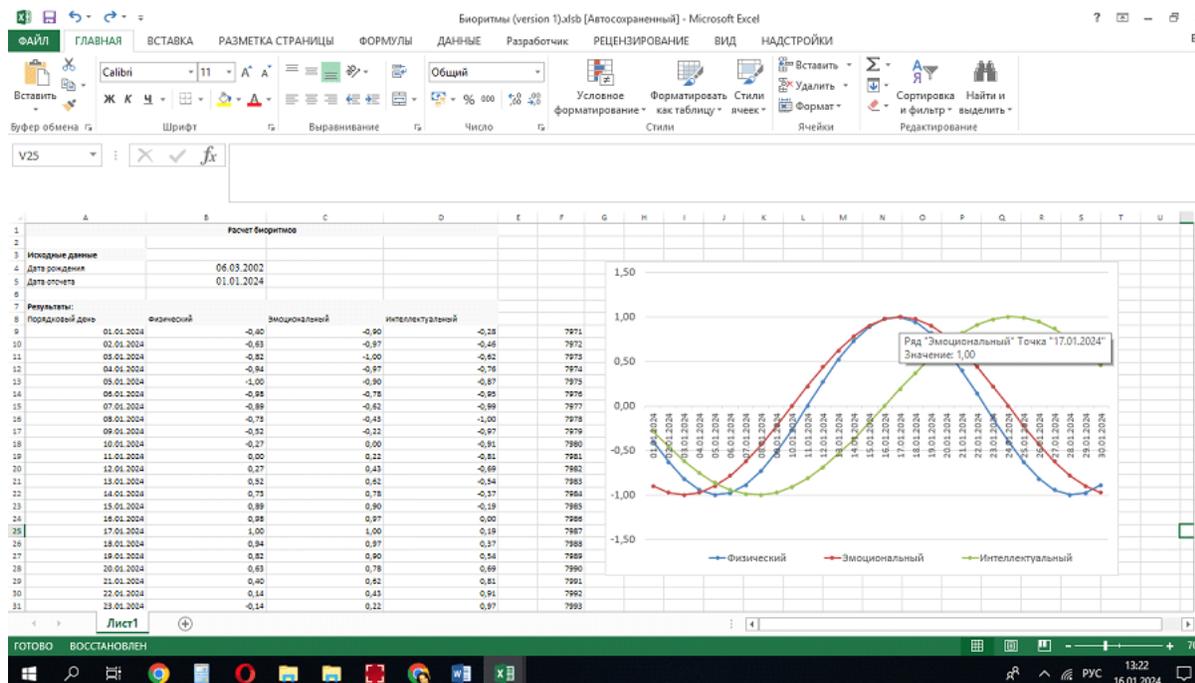


Рис. 4: Исследование модели

Аналогичным образом можно определить благоприятные/неблагоприятные дни для занятий, требующих физической или умственной нагрузки.

Анализ результатов. Результаты исследования показали, что предложенная модель биоритмов дает возможность прогнозировать благоприятные/неблагоприятные дни для осуществления разного рода деятельности. В этой связи возможны дальнейшие исследования.

3. Заключение

Представленная задача является примером практико-ориентированных задач, решение которых будущими учителями математики и информатики направлено не только на развитие навыков математического моделирования с целью их применения в новых условиях, но и на выработку умений использовать на практике средства и инструменты изученных ранее информационных технологий, необходимых для эффективного выполнения задания. Кроме того, подобного рода задачи помогут существенно расширить кругозор будущего специалиста в непрофильных областях науки, что является необходимым условием развития общей эрудиции учителя. Данные обстоятельства, по мнению авторов, дадут возможность студентам оценить значимость математического моделирования и по-новому взглянуть на его применение в различных областях научного знания и повседневной жизни человека.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. ФГОС Основное общее образование. [Электронный документ] Режим доступа: <https://fgos.ru/fgos/fgos-ooo/>
2. ФГОС Среднее общее образование. [Электронный документ] Режим доступа: <https://fgos.ru/fgos/fgos-soo/>

3. Апанасов П. Т., Апанасов Н. П. Сборник математических задач с практическим содержанием: Кн. для учителя. — М: Просвещение, 1987. 110 с.
4. Варданын С. С. Задачи по планиметрии с практическим содержанием: Кн. для уч-ся 6-8 кл. сред. шк. (под ред. В.А.Гусева). — М: Просвещение, 1989. 144 с.
5. Колягин Ю. М. Решение задач по математике с ответами и советами: учеб. пособие для уч-ся 7-9 кл./ Ю.М.Колягин. — М: ООО «Издательство Астрель», 2002. 126 с.
6. Терешин Н. А. Прикладная направленность школьного курса математики: Кн.для учителя. — М.: Просвещение, 1990. 95 с.
7. Артемов А. К. Развивающее обучение математике в начальных классах: учебное пособие для учителей и студентов ФНО. — Самара: СамГПУ, 1995. 118 с.
8. Гусев В. А. Теория и методика обучения математике: психолого-педагогические основы/ В.А.Гусев. — М:БИНОМ Лаборатория знаний, 2014. 456 с.
9. Зайкин М. И., Пчелин А. В. Об изучении функциональной направленности сюжетных задач в профессиональной подготовке будущих учителей математики // Интеграционная стратегия становления профессионала в условиях многоуровневого образования: Сб. стат. Междунар. научно-практич. конф. Т. 2 — Котлас: СПГУВК, 2007. С. 329-339.
10. Зайкин М. И., Пчелин А. В. Визуализация вербальных, графических и символических характеристик сюжетных математических задач в образовательном процессе // Вестник Костромского государственного университета. Серия: Педагогика. Психология. Социоконетика. Т.14, 2008. С.35-39
11. Фридман Л. М. Сюжетные задачи по математике. История, теория, методика: учеб. пос. для учителей и студентов педвузов и колледжей. — М: Школьная Пресса, 2002. 20 с.
12. Иванова Т. А., Перевощикова Е. Н., Кузнецова Л. И., Григорьева Т. П. Теория и технология обучения математике в средней школе: Учебное пособие для студентов математических специальностей педагогических вузов// / Под ред. Т. А. Ивановой, 2-е изд. испр. и доп. — Н. Новгород: ННГУ, 2009. 355 с.
13. Болтынский В. Г., Савин А. П. Беседы о математике. Книга 1. Дискретные объекты. М.: ФИМА, МЦНМО, 2002. 368 с.
14. Максимова В. Н. Сущность и функции межпредметных связей в целостном процессе обучения: дис. на соиск.уч.степ. д-ра пед.наук по спец. 13.00.01 Теория и история педагогики. — Ленинград, 1981.
15. Далингер В. А. Избранные вопросы информатизации школьного математического образования: монография/ В. А. Далингер; науч. ред. М. П. Лапчик. — М: Флинта, 2021. 150 с.
16. Зверев И. Д. Взаимная связь учебных предметов / И.Д. Зверев. — М: Знание, 1977. 64 с.
17. Лапчик М. П. Теория и методика обучения информатике. Учебник./ М. П. Лапчик, И. Г. Семакин, Е. К. Хеннер, М. И. Рагулина. — М: ИЦ «Академия», 2008. 592 с
18. Есаян А. Р. Обучение алгоритмизации на основе рекурсии: учеб. пособие для студентов пед. вузов. Тула: Изд-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого, 2001. 215 с.

19. Сергеев Р. С. Рекурсия как феномен моделирования объектов и явлений реального мира // Инженерная мысль: сборник докладов V Городской научно-практической конференции, посвященной году науки и технологий. — Казань: Казанский государственный технический университет им. А. Н. Туполева, 2021. С. 83-85.
20. Мирзоев М. С. Межпредметные связи математических дисциплин с информатикой как основа формирования математической культуры будущего учителя информатики // Преподаватель XXI века. 2008. №3. С.7-15.
21. Мадудин В. Н. Особенности содержания математических дисциплин при подготовке бакалавров прикладной информатики // Бакалавриат прикладной информатики: практика реализации основной образовательной программы: монография. / В. Н. Мадудин, Е. В. Морозова, И. В. Сафронова. — Челябинск: Уральский государственный университет физической культуры, 2020. С.109-115.
22. Генералов Г. М. Математическое моделирование (профильная школа) Учебное пособие 10-11 классы/ Г. М. Генералов. — М: Просвещение, 2022. 160 с.
23. Нахман А. Д. Основные аспекты обучения математическому моделированию в системе «школа-вуз» // Научное обозрение. Педагогические науки. 2016. № 5. С. 41-56
24. Баврин И. И. Начала анализа и математические модели в естествознании и экономике: кн. для уч-ся 10-11 кл./ И. И. Баврин. — М: Просвещение, 2000.
25. Михайлов Д. Д. Основы математического моделирования// Вестник Казанского технологического университета. 2015, № 2. С. 374-376.
26. Красовский Н. Н. Математическое моделирование в школе/ Н. Н. Красовский // Известия Уральского государственного университета. — 1995. № 4. С. 12-24.
27. Бабанская О. С. Метод математического моделирования в обучении учащихся решению прикладных задач в средней школе // Universum: психология и образование : электрон. научн. журн. 2019. № 12. [Электронный документ]. Режим доступа: <https://7universum.com/ru/psy/archive/item/8410>
28. Голубев В. С. О математическом моделировании истории// История и современность. 2010, №1. С.28-34.
29. Рустамов Б. М. Искусственный интеллект и математическое моделирование// Символ науки. 2023, №5-2. С.141-142.
30. Алпатов А. М. Толковый словарь терминов хронобиологии// Хронобиология и хрономедицина. Под ред. Ф. И. Комарова и С. М. Рапопорт. — М: Триада-Х, 2000. С. 482-488.

REFERENCES

1. Federal State Educational Standard Basic general education. [Electronic document] Access mode: <https://fgos.ru/fgos/fgos-ooo/>
2. Federal State Educational Standard Secondary general education. [Electronic document] Access mode: <https://fgos.ru/fgos/fgos-soo/>
3. Apanasov, P. T., Apanasov, N. P. 1987, "Collection of mathematical problems with practical content: Book. for the teacher" , *M: Education*, 110 p.

4. Vardanyan, S. S. 1989, "Problems in planimetry with practical content: Book. for students 6-8 grades. avg. school" , (edited by V.A. Gusev), *M: Education*, 144 p.
5. Kolyagin, Yu. M. 2002, "Solving problems in mathematics with answers and tips: textbook. manual for students of 7-9 grades" , *M: Astrel Publishing House LLC*, 126 p.
6. Tereshin, N. A. 1990, "Applied orientation of the school mathematics course: Book for teachers" , *M.: Education*, 95 p.
7. Artemov, A. K. 1995, "Developmental teaching of mathematics in the primary grades: a textbook for teachers and students of the Federal Educational Institution" , *Samara: SamSPU*, 118 p.
8. Gusev, V. A. 2014, "Theory and methodology of teaching mathematics: psychological and pedagogical foundations" , *M: BINOM Knowledge Laboratory*, 456 p.
9. Zajkin, M. I., Pchelin, A. V. 2007, "On the study of the functional orientation of plot problems in the professional training of future mathematics teachers" , *Integration strategy for becoming a professional in the context of multi-level education: Collection. stat. Intl. beginning-practical conf.*, T. 2, Kotlas: SPGUVK, P. 329-339.
10. Zajkin, M. I., Pchelin, A. V. 2008, "Visualization of verbal, graphic and symbolic characteristics of plot mathematical problems in the educational process" , *Bulletin of Kostroma State University. Series: Pedagogy. Psychology. Sociokinetics*, T.14, P.35-39.
11. Fridman, L. M. 2002, "Plot problems in mathematics. History, theory, methodology: textbook. village for teachers and students of pedagogical universities and colleges" , *M: School Press*, 20 p.
12. Ivanova, T. A., Perevoshchikova, E. N., Kuznetsova, L. I., Grigorieva, T. P. 2009, "Theory and technology of teaching mathematics in secondary school: A textbook for students of mathematical specialties of pedagogical universities" , Ed. T. A. Ivanova, *2-nd ed. corr. and additional*, N. Novgorod: NPGU, 355 p.
13. Boltyansky, V. G., Savin, A. P. 2002, "Conversations about mathematics. Book 1. Discrete objects" , *M.: FIMA, MSNMO*, 368 p.
14. Maksimova, V. N. 1981, "The essence and functions of interdisciplinary connections in the holistic learning process" , dis. for a degree candidate Doctor of Pedagogical Sciences, Specialist 13.00.01 Theory and history of pedagogy, Leningrad.
15. Dalinger, V. A. 2021, "Selected issues of informatization of school mathematical education: monograph" , scientific ed. M. P. Lapchik, *M: Flinta*, 150 p.
16. Zverev, I. D. 1977, "Mutual connection of educational subjects" , *M: Knowledge*, 64 p.
17. Lapchik, M. P., Semakin, I. G., Henner, E. K., Ragulina, M. I., 2008, "Theory and methodology of teaching computer science. Textbook" , *M: IC "Academy"*, 592 p.
18. Esayan, A. R., 2001, "Training in algorithmization based on recursion: textbook manual for pedagogical universities students" , *Tula: Publishing house TSPU by L. N. Tolstoy*, 215 p.
19. Sergeev, R. S., 2021, "Recursion as a phenomenon of modeling objects and phenomena of the real world" , *Engineering thought: collection of reports of the V City scientific and practical conference dedicated to the year of science and technology*, Kazan: Kazan State Technical University named after A. N. Tupolev, P. 83-85.

20. Mirzoev, M. S., 2008, "Interdisciplinary connections of mathematical disciplines with computer science as the basis for the formation of the mathematical culture of a future computer science teacher", *Teacher of the XXI century*, No. 3. P.7-15.
21. Madudin, V. N., Morozova, E. V. , Safronova, I. V., 2020, "Features of the content of mathematical disciplines in the preparation of bachelors of applied informatics", *Bachelor of applied informatics: practice of implementing the main educational program: monograph, Chelyabinsk: Ural State University of Physical Culture*, P.109-115.
22. Generalov, G. M., 2022, "Mathematical modeling (specialized school) Textbook for grades 10-11" , *M: Education*, 160 p.
23. Nakhman, A. D., 2016, "Main aspects of teaching mathematical modeling in the school-university system" , *Scientific review. Pedagogical sciences*. No. 5. P. 41-56
24. Bavrin, I. I., 2000, "Principles of analysis and mathematical models in natural science and economics: a book for students of grades 10-11" , *M: Enlightenment*.
25. Mikhailov, D. D., 2015, "Fundamentals of mathematical modeling" , *Bulletin of the Kazan Technological University*. no. 2. pp. 374-376.
26. Krasovsky, N. N. 1995, "Mathematical modeling at school" , *News of the Ural State University*, No. 4. P. 12-24.
27. Babanskaya, O. S., 2019, "Method of mathematical modeling in teaching students to solve applied problems in secondary school" , *Universum: psychology and education: electron. scientific magazine*, No. 12, (66). [Electronic document]. Access mode: <https://7universum.com/ru/psy/archive/item/8410>
28. Golubev, V. S., 2010, "On mathematical modeling of history" , *History and modernity*, no. 1. P. 28-34.
29. Rustamov, B. M., 2023, "Artificial intelligence and mathematical modeling" , *Symbol of science*, No. 5-2. P. 141-142.
30. Alpatov, A. M., 2000, "Explanatory dictionary of chronobiology terms. Chronobiology and chronomedicine" , Ed. F. I. Komarova and S. M. Rapoport, *M: Triada-X*, P. 482-488.

Получено: 06.11.2023

Принято в печать: 21.03.2024

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 25. Выпуск 1.

УДК 539.3:534.26

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-1-205-214

Акустическое излучение сфероида, обтекаемого стационарным потоком идеальной жидкости¹

Л. А. Толоконников, С. Л. Толоконников

Толоконников Лев Алексеевич — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: TolokonnikovLA@mail.ru

Толоконников Сергей Львович — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: tolsl@mail.ru

Аннотация

В статье рассматривается задача об акустическом излучении сфероида, обтекаемого стационарным потоком идеальной жидкости.

Полагается, что скорость набегающего потока значительно меньше скорости звука. Часть поверхности сфероида совершает гармонические колебания, а остальная часть является абсолютно жесткой.

Задача решается в вытянутой сфероидальной системе координат. Получено приближенное аналитическое решение задачи, построенное с использованием потенциала скорости набегающего на тело потока и потенциала скорости акустического поля неподвижного излучателя.

Представлены результаты численных расчетов полярных диаграмм распределения акустического давления на поверхности сфероида при разных значениях отношения скорости потока к скорости звука и различной конфигурации сфероида.

Ключевые слова: акустическое излучение, сфероид, идеальная жидкость, потенциальное течение

Библиография: 12 названий.

Для цитирования:

Л. А. Толоконников, С. Л. Толоконников. Акустическое излучение сфероида, обтекаемого стационарным потоком идеальной жидкости // Чебышевский сборник, 2024, т.25, вып.1, с. 205–214.

¹Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства просвещения РФ соглашение № 073-00033-24-01 от 09.02.2024 тема научного исследования «Теоретико-числовые методы в приближенном анализе и их приложения в механике и физике».

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 25. No. 1.

UDC 539.3:534.26

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-1-205-214

Acoustic radiation of a spheroid streamlined by a stationary flow of an ideal liquid

L. A. Tolokonnikov, S. L. Tolokonnikov

Tolokonnikov Lev Alexeevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State University (Tula).

e-mail: TolokonnikovLA@mail.ru

Tolokonnikov Sergey Lvovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: tolsl@mail.ru

Abstract

In the article the problem of the acoustic radiation of a spheroid streamlined by a stationary flow of an ideal liquid is considered.

It is assumed that the velocity of the incoming flow is significantly lower than the speed of sound. Part of the surface of the spheroid makes harmonic vibrations and the rest part is absolutely rigid.

The problem is solved in a prolate spheroidal coordinate system. An approximate analytical solution of the problem was obtained with using the speed potential of the oncoming on the body flow and the speed potential of the stationary radiator acoustic field.

The results of numerical calculations of polar diagrams of the acoustic pressure distribution on the surface of a spheroid at different values of the ratio of the flow velocity to the speed of sound and different configurations of the spheroid are presented.

Keywords: acoustic radiation, spheroid, ideal fluid, potential flow

Bibliography: 12 titles.

For citation:

L. A. Tolokonnikov, S. L. Tolokonnikov, 2024, “Acoustic radiation of a spheroid streamlined by a stationary flow of an ideal liquid”, *Chebyshevskii sbornik*, vol.25, no.1, pp. 205–214.

1. Введение

Излучение звука вытянутыми и сплюснутыми эллипсоидами вращения — сфероидами рассматривалось в ряде работ, например, [1 - 5]. При этом исследовались акустические свойства неподвижных сфероидальных излучателей в идеальной жидкости, находящейся в состоянии покоя. В [1] решена задача об акустическом излучении вытянутого сфероида, поверхность которого колеблется произвольным образом. Получены аналитические выражения для акустического давления, скорости, импеданса излучения. Проведены численные расчеты для случая колебаний тонкого сфероида. В [2] с использованием сфероидальной геометрии анализируется акустическое излучение поршней эллиптического профиля. В [3] рассматривается излучение вытянутых и сплюснутых сфероидов. Определены направленность излучения и энергетические характеристики таких излучателей при произвольном распределении колебательной скорости на их поверхности. В [4, 5] исследуется акустическое поле, генерируемое колеблющимися с постоянной амплитудой участками поверхности абсолютно жесткого сфероида (вытянутого

[4] и сплюснутого [5]), имеющими форму колпачков и колец. Проведены численные расчеты акустического импеданса излучения.

В настоящей работе рассматривается задача об акустическом излучении сфероида, обтекаемого стационарным потоком идеальной жидкости, скорость которого значительно меньше скорости звука.

2. Постановка задачи

Рассмотрим сфероид, на который вдоль оси вращения набегаёт стационарный поток идеальной сжимаемой жидкости. Жидкость характеризуется плотностью ρ и скоростью звука c . Полагаем, что скорость потока много меньше скорости звука ($u \ll c$). Поэтому будем считать, что в результате обтекания сфероида потоком вихреобразование не происходит и поток является потенциальным.

Пусть осью вращения сфероида является ось z прямоугольной декартовой системы координат x, y, z с началом в центре сфероида, а поток набегаёт в направлении, противоположном оси z . Для определенности считаем сфероид вытянутым.

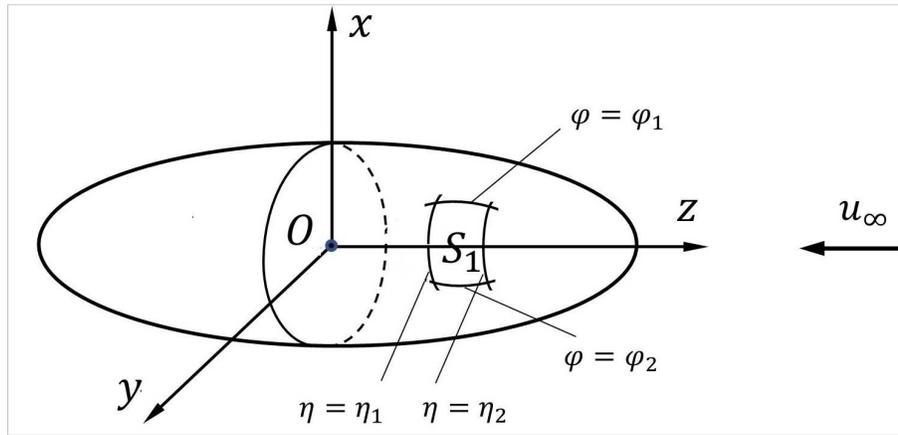


Рис. 1: Геометрия задачи

Свяжем с координатами x, y, z вытянутые сфероидальные координаты ξ, η, φ [6]

$$x = h [(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)]^{1/2} \cos \varphi, \quad y = h [(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)]^{1/2} \sin \varphi, \quad z = h\xi\eta$$

$$(1 \leq \xi < \infty, \quad -1 \leq \eta \leq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi),$$

где h — половина межфокусного расстояния сфероида.

Уравнение поверхности сфероида в вытянутой сфероидальной системе координат записывается через радиальную сфероидальную координату в виде $\xi = \xi_0$. Поверхность $\xi = \xi_0$ является вытянутым эллипсоидом вращения с большой осью, равной $2h\xi_0$, и малой осью, равной $2h(\xi_0^2 - 1)^{1/2}$.

На поверхности сфероида S находится излучатель гармонических звуковых волн. Часть поверхности сфероида S_1 , ограниченная кривыми $\eta = \eta_1$ и $\eta = \eta_2$, $\varphi = \varphi_1$ и $\varphi = \varphi_2$, пульсирует с нормальной колебательной скоростью постоянной амплитуды U

$$V_n = \begin{cases} U \exp(-i\omega t) & \text{на } S_1, \\ 0 & \text{на } S_2, \end{cases} \quad (1)$$

а остальная часть поверхности сфероида S_2 является абсолютно жесткой (рис. 1). Здесь ω — круговая частота; t — время. Без ограничения общности будем полагать, что $\varphi_2 = 2\pi - \varphi_1$

(соответствующим поворотом координатной системы x, y, z относительно оси z всегда можно получить разделение плоскостью xOz поверхности S_1 на две симметричные части).

Определим акустическое поле сфероидального излучателя.

3. Аналитическое решение задачи

Получим приближенное аналитическое решение задачи методом Блохинцева [7].

Согласно [7] распространения звука в стационарном потоке идеальной жидкости описывается уравнением

$$\Delta\Psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} - \frac{2}{c} (\nabla\Phi \cdot \nabla \frac{\partial\Psi}{\partial t}) = 0. \quad (2)$$

Здесь Ψ — потенциал скорости акустического поля ($\mathbf{v} = \nabla\Psi$); Φ — потенциал скорости невозмущенного звуком потока ($\mathbf{u} = \nabla\Phi$). Уравнение (2) получено при пренебрежении членами порядка u^2/c^2 .

Положив $\Psi = \psi \exp(-i\omega t)$, из (1) получаем

$$\Delta\psi + k^2\psi + 2i\frac{k}{c} (\nabla\Phi \cdot \nabla\psi) = 0, \quad (3)$$

где $k = \omega/c$ — волновое число.

Искомый потенциал скорости акустического поля ψ , являющийся решением уравнения (3), должен удовлетворять граничному условию на поверхности тела $v_n|_S = V_n|_S$, то есть

$$\frac{\partial\psi}{\partial n}\Big|_S = \begin{cases} U & \text{на } S_1, \\ 0 & \text{на } S_2 \end{cases} \quad (4)$$

и условию излучения на бесконечности [8].

Так как скорость потока $u \ll c$, то будем полагать, что жидкость является несжимаемой [7].

Потенциал Φ является решением уравнения Лапласа

$$\Delta\Phi = 0 \quad (5)$$

и должен удовлетворять граничному условию, которое заключается в равенстве нулю нормальной скорости частиц жидкости на поверхности абсолютно жесткого тела

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n}\Big|_S = 0, \quad (6)$$

а в бесконечно удаленной точке (в координатной системе x, y, z) $\nabla\Phi = (0, 0, -u_\infty)$, где $-u_\infty$ — скорость потока на бесконечности.

Выражение для потенциала Φ имеет вид [9]

$$\Phi = hu_\infty\tilde{\Phi}, \quad \tilde{\Phi} = -\eta \left[\xi - \left(\frac{1}{2}\xi \ln \frac{\xi+1}{\xi-1} - 1 \right) / \left(\frac{1}{2} \ln \frac{\xi_0+1}{\xi_0-1} - \frac{\xi_0}{\xi_0^2-1} \right) \right]. \quad (7)$$

Приближенное аналитическое решение уравнения (3) будем искать в виде

$$\psi = \psi_0 \exp(-ikc^{-1}\Phi), \quad (8)$$

где ψ_0 — потенциал скорости акустического поля сфероидального излучателя в отсутствии потока.

Потенциал ψ_0 , являющийся решением уравнения Гельмгольца

$$\Delta\psi_0 + k^2\psi_0 = 0, \quad (9)$$

удовлетворяющий граничному условию (произвольное распределение колебательной скорости на поверхности сфероида)

$$\left. \frac{\partial\psi_0}{\partial n} \right|_{\xi=\xi_0} = f(\eta, \varphi) \quad (10)$$

и условию излучения на бесконечности, в случае симметричных колебаний поверхности относительно плоскости xOz будем искать в виде

$$\psi_0 = U h \tilde{\psi}_0, \quad \tilde{\psi}_0 = \sum_{n=m}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_{mn} S_{mn}(q, \eta) R_{mn}^{(3)}(q, \xi) \cos m\varphi, \quad (11)$$

где $S_{mn}(q, \eta)$ и $R_{mn}^{(3)}(q, \xi)$ — угловая первого рода и радиальная третьего рода вытянутые сфероидальные функции; $q = kh$ — волновой размер сфероида; $f(\eta, \varphi)$ — функция распределения нормальной колебательной скорости на поверхности сфероида.

Подставим (11) в (10), учитывая, что $\frac{\partial}{\partial n} = \frac{1}{H_\xi} \frac{\partial}{\partial \xi}$. Воспользовавшись условиями ортогональности косинусов и вытянутых угловых сфероидальных функций, находим

$$A_{mn} = \frac{(2 - \delta_{0m})}{2\pi U N_{mn}(q) R_{mn}^{(3)'}(q, \xi_0)} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \left(\frac{\xi_0^2 - \eta^2}{\xi_0^2 - 1} \right)^{1/2} f(\eta, \varphi) S_{mn}(q, \eta) \cos m\varphi d\eta d\varphi. \quad (12)$$

Здесь $H_\xi = h \left(\frac{\xi^2 - \eta^2}{\xi^2 - 1} \right)^{1/2}$ — коэффициент Ламе координаты ξ ; $N_{mn}(q)$ — норма угловых сфероидальных функций; δ_{0m} — символ Кронекера.

Подставляя выражение (8) в уравнение (3) и принимая во внимание (5) и (9), убеждаемся, что (8) удовлетворяет (3) при пренебрежении членами порядка u^2/c^2 .

Подставим (8) в граничное условие (4). С учетом условий (6) и (10) находим, что (8) удовлетворяет условию (4) тогда, когда

$$f(\eta, \varphi) = \begin{cases} U \exp(ikc^{-1}\Phi|_{\xi=\xi_0}) & \text{на } S_1, \\ 0 & \text{на } S_2. \end{cases} \quad (13)$$

Подставляя (13) в (12), находим

$$A_{mn} = \frac{(2 - \delta_{0m})}{2\pi N_{mn}(q) R_{mn}^{(3)'}(q, \xi_0) (\xi_0^2 - 1)^{1/2}} \int_{\eta_1}^{\eta_2} (\xi_0^2 - \eta^2)^{1/2} S_{mn}(q, \eta) \exp(ikc^{-1}\Phi|_{\xi=\xi_0}) d\eta \times \\ \times \begin{cases} (\varphi_2 - \varphi_1)/2 & \text{при } m = 0, \\ (\sin m\varphi_2 - \sin m\varphi_1)/m & \text{при } m \neq 0. \end{cases} \quad (14)$$

Согласно [7] акустическое давление в каждой точке пространства определяется по формуле

$$p = \rho [i\omega\psi_0 - (\nabla\Phi \cdot \nabla\psi_0)] \exp(-ikc^{-1}\Phi), \quad (15)$$

которую с учетом (7) и (11) перепишем в виде

$$p = \rho c U \left[iq\tilde{\psi}_0 - h^2 \frac{u_\infty}{c} (\nabla\tilde{\Phi} \cdot \nabla\tilde{\psi}_0) \right] \exp\left(-iq \frac{u_\infty}{c} \tilde{\Phi}\right). \quad (16)$$

Учитывая, что в системе координат ξ, η, φ $\nabla = \frac{1}{H_\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{H_\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{1}{H_\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi}$,

где $H_\xi = h \left(\frac{\xi^2 - \eta^2}{\xi^2 - 1} \right)^{1/2}$, $H_\eta = h \left(\frac{\xi^2 - \eta^2}{1 - \eta^2} \right)^{1/2}$, $H_\varphi = h [(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)]$ — коэффициенты Ламе, имеем

$$\begin{aligned} (\nabla \tilde{\Phi} \cdot \nabla \tilde{\psi}_0) = & \frac{1}{h^2(\xi^2 - \eta^2)} \left\{ -(\xi^2 - 1)\eta \left[1 - \left(\frac{1}{2} \ln \frac{\xi + 1}{\xi - 1} - \frac{\xi}{\xi^2 - 1} \right) / \left(\frac{1}{2} \ln \frac{\xi_0 + 1}{\xi_0 - 1} - \frac{\xi_0}{\xi_0^2 - 1} \right) \right] \times \right. \\ & \times \sum_{n=m}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_{mn} S_{mn}(q, \eta) R_{mn}^{(3)'}(q, \xi) \cos m\varphi - \\ & - (1 - \eta^2) \left[\xi - \left(\frac{1}{2} \xi \ln \frac{\xi + 1}{\xi - 1} - 1 \right) / \left(\frac{1}{2} \ln \frac{\xi_0 + 1}{\xi_0 - 1} - \frac{\xi_0}{\xi_0^2 - 1} \right) \right] \times \\ & \left. \times \sum_{n=m}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_{mn} S'_{mn}(q, \eta) R_{mn}^{(3)}(q, \xi) \cos m\varphi \right\}. \end{aligned}$$

На поверхности сфероида акустическое давление определяется по формуле

$$p = \rho c U \left[i q \tilde{\psi}_0|_{\xi=\xi_0} + \frac{2u_\infty(1 - \eta^2)}{c(\xi_0^2 - \eta^2) \left((\xi_0^2 - 1) \ln \frac{\xi_0 + 1}{\xi_0 - 1} - 2\xi_0 \right)} \frac{\partial \tilde{\psi}_0}{\partial \eta} \Big|_{\xi=\xi_0} \right] \exp \left(-i q \frac{u_\infty}{c} \tilde{\Phi}|_{\xi=\xi_0} \right), \quad (17)$$

где

$$\tilde{\Phi}|_{\xi=\xi_0} = 2\eta \left[(\xi_0^2 - 1) \ln \frac{\xi_0 + 1}{\xi_0 - 1} - 2\xi_0 \right]^{-1}.$$

Волновые сфероидальные функции представляются следующими разложениями [5, 10 – 12]:

$$S_{mn}(q, \eta) = \sum_{r=0,1}^{\infty} {}'d_r^{mn}(q) P_{m+r}^m(\eta), \quad (18)$$

$$N_{mn}(q) = 2 \sum_{r=0,1}^{\infty} \frac{{}'(2m+r)! [d_r^{mn}(q)]^2}{(2m+2r+1)r!},$$

$$R_{mn}^{(3)} = \left[\sum_{r=0,1}^{\infty} \frac{{}'(2m+r)!}{r!} d_r^{mn}(q) \right]^{-1} \left(\frac{\xi^2 - 1}{\xi^2} \right)^{m/2} \sum_{r=0,1}^{\infty} {}'i^{r+m-n} \frac{(2m+r)!}{r!} d_r^{mn}(q) h_{m+r}(q\xi). \quad (19)$$

Здесь $P_n^m(\eta)$ — присоединенный многочлен Лежандра степени n порядка m ; $h_m(q\xi)$ — сферическая функция Ганкеля первого рода порядка m ; штрих над знаком суммы указывает на то, что суммирование производится по четным r , если $(n - m)$ четное, и по нечетным r , если $(n - m)$ нечетное.

Коэффициенты $d_r^{mn}(q)$ находятся из рекуррентного соотношения [10 – 12]

$$\alpha_r d_{r+2}^{mn}(q) + [\beta_r - \lambda_{mn}(q)] d_r^{mn}(q) + \gamma_r d_{r-2}^{mn}(q) = 0, \quad r \geq 0, \quad (20)$$

где

$$\alpha_r = \frac{(2m+r+2)(2m+r+1)}{(2m+2r+3)(2m+2r+5)} q^2;$$

$$\beta_r = (m+r)(m+r+1) + \frac{2(m+r)(m+r+1) - 2m^2 - 1}{(2m+2r-1)(2m+2r+3)} q^2;$$

$$\gamma_r = \frac{r(r-1)}{(2m+2r-3)(2m+2r-1)} q^2; \quad d_{-2}^{mn} = d_{-1}^{mn} = 0.$$

Собственные значения $\lambda_{mn}(q)$ параметра разделения λ уравнения Гельмгольца в вытянутой сфероидальной системе координат являются решениями трансцендентного уравнения, имеющего вид непрерывной дроби [6, 11].

Соотношения (20) связывают коэффициенты $d_r^{mn}(q)$, имеющие индексы r одной и той же четности. Для сходимости ряда (18) необходимо, чтобы при $r \rightarrow \infty$ отношение $\frac{d_{r+2}^{mn}(q)}{d_r^{mn}(q)}$ убывало как $q^2/4r^2$ [12].

Система (20) определяет коэффициенты $d_r^{mn}(q)$ с точностью до множителя, который задается нормировкой вытянутых угловых сфероидальных функций. При нормировке Фламмера [6] имеют место соотношения [11, 12]

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^{r/2} (r+2m)!}{2^r \left(\frac{r}{2}\right)! \left(\frac{r+2m}{2}\right)!} d_r^{mn}(q) = \frac{(-1)^{(n-m)/2} (n+m)!}{2^{n-m} \left(\frac{n-m}{2}\right)! \left(\frac{n+m}{2}\right)!}, \quad (21)$$

когда $(n-m)$ — четное, и

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(r-1)/2} (r+2m+1)!}{2^r \left(\frac{r-1}{2}\right)! \left(\frac{r+2m+1}{2}\right)!} d_r^{mn}(q) = \frac{(-1)^{(n-m-1)/2} (n+m+1)!}{2^{n-m} \left(\frac{n-m-1}{2}\right)! \left(\frac{n+m+1}{2}\right)!}, \quad (22)$$

когда $(n-m)$ — нечетное.

4. Численные исследования

По формуле (17) были проведены расчеты полярных диаграмм распределения акустического давления $|p|/\rho c U$ на поверхности сфероида. При расчетах полагалось $\xi_0 = 1.02$ и $\xi_0 = 1.1$ (что соответствует отношению большой оси к малой, равному 5.1 и 2.4 соответственно), волновой размер сфероида $q = 1$. Поверхность S_1 задана параметрами $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 2\pi$, $\eta_2 = 1$, а значение η_1 полагалось равным 0 и 0.5. S_1 представляет собой колпачок в носовой части сфероида, в основании которого лежит окружность, образованная пересечением гиперболоида вращения $\eta = \eta_1$ с поверхностью сфероида $\xi = \xi_0$. Сфероид находится в воде ($\rho = 10^3$ кг/м³, $c = 1485$ м/с), $u_\infty/c = 0, 0.1, 0.2$.

Для рассматриваемой области S_1 задача является осесимметричной ($m = 0$). Тогда будем иметь

$$\tilde{\psi}_0 = \sum_{n=0}^{\infty} A_{0n} S_{0n}(q, \eta) R_{0n}^{(3)}(q, \xi),$$

где

$$A_{0n} = \frac{1}{2(\xi_0^2 - 1)^{1/2} N_{0n}(q) R_{0n}^{(3)'}(q, \xi_0)} \int_{\eta_1}^{\eta_2} (\xi_0^2 - \eta^2)^{1/2} S_{0n}(q, \eta) \exp\left(iq \frac{u_\infty}{c} \tilde{\Phi}|_{\xi=\xi_0}\right) d\eta.$$

При проведении расчетов для нахождения собственных значений $\lambda_{0n}(q)$ использовалось степенное разложение [9]

$$\lambda_{mn}(q) = \sum_{s=0}^{\infty} l_{2s} q^{2s},$$

где коэффициенты l_{2s} приведены в [9].

Процесс вычисления коэффициентов $d_r^{0n}(q)$ был организован следующим образом. Выбиралось достаточно большое значение $r = N$ и полагалось $\frac{d_{N+2}^{0n}(q)}{d_N^{0n}(q)} = q^2/4N^2$. Затем из системы (20) последовательно находились коэффициенты $d_N^{0n}(q), d_{N-2}^{0n}(q), d_{N-4}^{0n}(q), \dots, d_0^{0n}(q)$ или $d_1^{0n}(q)$ (при четном и нечетном N соответственно), выраженные через коэффициент $d_{N+2}^{0n}(q)$. Последний определялся из (21) или (22). В результате были вычислены две последовательности коэффициентов $d_r^{0n}(q)$ по четным и нечетным значениям индекса r . При расчетах выбирались $N = 100$ ($N = 101$) и $N = 200$ ($N = 201$), что приводит к практически одинаковым значениям быстро убывающих коэффициентов $d_r^{0n}(q)$. Вытянутые сфероидальные функции рассчитывались по формулам (18) и (19).

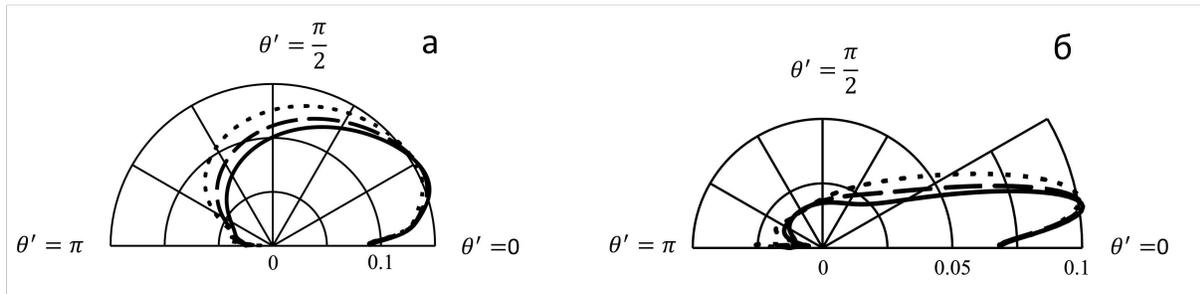


Рис. 2: Распределение акустического давления на поверхности сфероида $\xi_0 = 1.02$, а — $\eta_1 = 0$, б — $\eta_1 = 0.5$

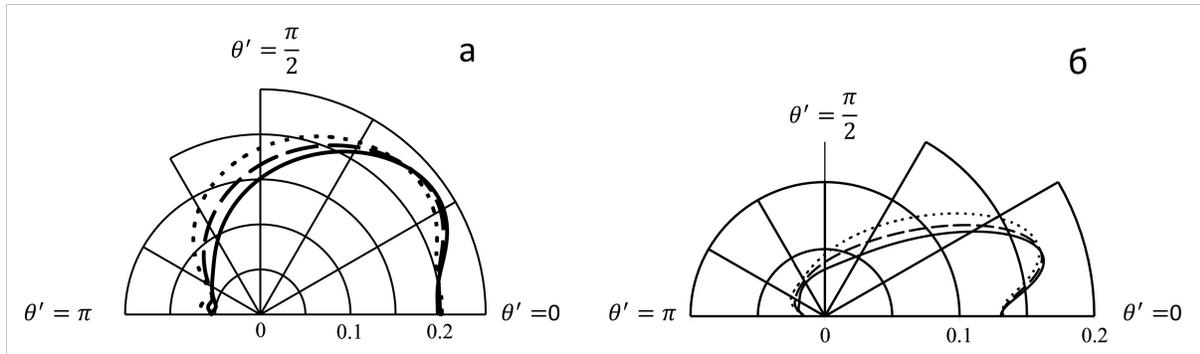


Рис. 3: Распределение акустического давления на поверхности сфероида $\xi_0 = 1.1$, а — $\eta_1 = 0$, б — $\eta_1 = 0.5$

На рис. 2 и рис. 3 представлены полярные диаграммы распределения акустического давления на поверхности сфероида при $\xi_0 = 1.02$ и $\xi_0 = 1.1$ соответственно. Величины $|p|/\rho c U$ откладывались на лучах θ' , проведенных из начала системы координат в расчетные точки кривой, образованной пересечением сфероидальной поверхности $\xi = \xi_0$ и плоскости xOz . Сферическая координата θ' связана со сфероидальными координатами соотношением $\operatorname{tg} \theta' = \frac{[(\xi_0^2 - 1)(1 - \eta^2)]^{1/2}}{\xi_0 \eta}$. Отсюда получаем следующее соотношение между углом наблюдения

θ' и координатой η , используемое при проведении расчетов: $\eta = \frac{\cos \theta' \sqrt{\xi_0^2 - 1}}{\sqrt{\xi_0^2 - \cos^2 \theta'}}$. На рисунках сплошные линии соответствуют случаю $u_\infty/c = 0$, штриховые — $u_\infty/c = 0.1$, пунктирные — $u_\infty/c = 0.2$.

Как видно из полярных диаграмм на характер распределения акустического давления по поверхности движущегося сфероида существенно влияют размер и расположение колеблю-

щейся части поверхности тела, конфигурация сфероида и значение отношения u_∞/c .

5. Заключение

В настоящей работе получено приближенное аналитическое решение задачи об акустическом излучении сфероида, обтекаемого стационарным потоком идеальной жидкости, скорость которого значительно меньше скорости звука. Полученное решение можно распространить на случай сплюснутого сфероидального излучателя, если провести формальную замену ξ на $i\xi$ и h на $-ih$, переводящую вытянутую сфероидальную систему в сплюснутую. В пределе, когда фокусное расстояние стремится к нулю ($h \rightarrow 0$), обе сфероидальные координатные системы сводятся к сферической системе координат r, θ, φ . Таким образом, найденное решение позволяет исследовать акустические поля излучателей, обтекаемых стационарным потоком идеальной жидкости, форма поверхности которых изменяется в широком диапазоне от иглы ($\xi_0 = 1$ в вытянутой сфероидальной системе координат) до диска ($\xi_0 = 0$ в сплюснутой сфероидальной системе координат).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Chertock G. Sound radiation from prolate spheroids // J. Acoust. Soc. Amer. 1961. Vol. 33. No. 7. P. 871 – 876.
2. Silbiger A. Radiation from circular pistons of elliptical profile // J. Acoust. Soc. Amer. 1961. Vol. 33. No. 11. P. 1515 – 1522.
3. Андебур В.А. Акустические свойства сфероидальных излучателей // Акустический журн. 1969. Т.15. № 4. С. 512 – 522.
4. Van Buren A.L. Acoustic radiation impedance of caps and rings on prolate spheroids // J. Acoust. Soc. Amer. 1971. Vol. 50. No. 5. Part 2. P. 1343 – 1356.
5. Baier R.V. Acoustic radiation impedance of caps and rings on oblate spheroidal baffles // J. Acoust. Soc. Amer. 1972. Vol. 51. No. 5. Part 2. P. 1705 – 1716.
6. Фламмер К. Таблицы волновых сфероидальных функций. М.: ВЦ АН СССР, 1062. 140 с.
7. Блохинцев Д.И. Акустика неоднородной движущейся среды. М.: Наука, 1981. 208 с.
8. Шендеров Е.Л. Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 352 с.
9. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Дрофа 2003. 840 с.
10. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 832 с.
11. Иванов Е.А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск: Наука и техника, 1968. 584 с.
12. Комаров И.В., Пономарев Л.И., Славянов С.Ю. Сфероидальные и кулоновские сфероидальные функции. М.: Наука, 1976. 320 с.

REFERENCES

1. Chertock, G. 1961, "Sound radiation from prolate spheroids", *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 33, no. 7, pp. 871 – 876.
2. Silbiger, A. 1961, "Radiation from circular pistons of elliptical profile", *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 33, no. 11, pp. 1515 – 1522.
3. Andebura, V. A. 1969, "Acoustic properties of spheroidal emitters", *Acoust. journal*, vol. 15, no. 4, pp. 512 – 522, [in Russian].
4. Van Buren, A. L. 1971, "Acoustic radiation impedance of caps and rings on prolate spheroids", *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 50, no. 5, part 2, pp. 1343 – 1356.
5. Baier, R. V. 1972, "Acoustic radiation impedance of caps and rings on oblate spheroidal baffles", *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 51, no. 5, part 2, pp. 1705 – 1716.
6. Flammer, C. 1957, "Spheroidal Wave Functions", *Stanford University Press, Stanford*, 220 p. 840 p., [in Russian].
7. Blohintsev, D. I. 1981, "Acoustics of an inhomogeneous moving medium", *Nauka, Moscow*, 208 p., [in Russian].
8. Shenderov, E. L. 1972, "Wave problems of underwater acoustics", *Sudostroenie, Leningrad*, 352 p. [in Russian].
9. Loystanskii, L. Ġ. 2003, "Mechanics of fluid and gas", *Drofa, Moscow*, 840 p., [in Russian].
10. Abramowitz, M., Stegun I. A. 1965, "Handbook of Mathematical Functions", *Dover Publications, Inc, New York*, 1046 p.
11. Ivanov, E. A. 1968, "Diffraction of electromagnetic waves by two bodies", *Nauka i tekhnika, Minsk*, 584 p., [in Russian].
12. Komarov, I. V., Ponomarev, L. I., Slavyanov, S. Yu. 1976, "Spheroidal and Coulomb's spheroidal functions", *Nauka, Moscow*, 320 p., [in Russian].

Получено: 30.11.2023

Принято в печать: 21.03.2024

РЕДКОЛЛЕГИЯ

Том 25 Выпуск 1

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Чубариков Владимир Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математических и компьютерных методов анализа, президент механико-математического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.

e-mail: chubarik2020@mail.ru

ЗАМЕСТИТЕЛИ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

Добровольский Николай Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой алгебры, математического анализа и геометрии Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого.

e-mail: dobrovol@tspu.ru

Нижников Александр Иванович — доктор педагогических наук, профессор, заведующий кафедрой математической физики Московского педагогического государственного университета, заслуженный работник высшей школы РФ.

e-mail: ainizhnikov@mail.ru, nizhnikov.ai@mail.ru

ОТВЕТСТВЕННЫЕ СЕКРЕТАРИ

Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры прикладной математики и информатики Тульского государственного университета; доцент кафедры алгебры, математического анализа и геометрии Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого.

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Реброва Ирина Юрьевна — кандидат физико-математических наук; декан факультета математики, физики и информатики; доцент кафедры алгебры, математического анализа и геометрии Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого.

e-mail: i_rebrova@mail.ru

ЧЛЕНЫ РЕДКОЛЛЕГИИ

Боровков Алексей Иванович — доктор технических наук, профессор, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого.

e-mail: borovkov@spbstu.ru

Быковский Виктор Алексеевич — доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, заместитель директора по научной работе Института прикладной математики Дальневосточного отделения Российской академии наук (ИПМ ДВО РАН), директор Хабаровского отделения ИПМ ДВО РАН.

e-mail: vab@iam.khv.ru

Востоков Сергей Владимирович — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры алгебры и теории чисел Санкт-Петербургского университета, президент фонда им. Л. Эйлера.

e-mail: sergei.vostokov@gmail.com

Георгиевский Дмитрий Владимирович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теории упругости механико-математического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.

e-mail: georgiev@mech.math.msu.su

Горбачёв Владимир Иванович — доктор физико-математических наук, профессор, механико-математический факультет Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.

e-mail: vigorby@mail.ru

Гриценко Сергей Александрович — доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики 1-го Финансового университета при Правительстве РФ; профессор механико-математического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.

e-mail: s.gritsenko@gmail.com

Демидов Сергей Сергеевич — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры теории вероятностей механико-математического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова; заведующий кабинетом истории и методологии математики и механики, заведующий отделом истории физико-математических наук Института истории естествознания и техники РАН; главный редактор журнала «Историко-математические исследования»; президент Международной академии истории науки.

e-mail: serd42@mail.ru

Дурнев Валерий Георгиевич — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой компьютерной безопасности и математических методов обработки информации Ярославского государственного университета.

e-mail: durnev@univ.uniyar.ac.ru

Зубков Андрей Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математической статистики и случайных процессов механико-математического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова; заведующий отделом дискретной математики Математического института им. В. А. Стеклова РАН.

e-mail: zubkov@mi.ras.ru

Иванов Александр Олегович — доктор физико-математических наук, механико-математический факультет Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.

e-mail: aoiva@mech.math.msu.su

Иванов Валерий Иванович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики и информатики Института прикладной математики и компьютерных наук Тульского государственного университета.

e-mail: ivaleryi@mail.ru

Королёв Максим Александрович — доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Математического института им. В. А. Стеклова РАН.

e-mail: korolevma@mi-ras.ru

Кузнецов Валентин Николаевич — доктор технических наук, профессор, Саратовский государственный технический университет им. Ю. А. Гагарина.

e-mail: kuznetsovvn@info.sgu.ru

Матиясевич Юрий Владимирович — доктор физико-математических наук, профессор, академик Российской академии наук, советник РАН Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова РАН, президент Санкт-Петербургского математического общества.

e-mail: yumat@pdmi.ras.ru

Мищенко Сергей Петрович — доктор физико-математических наук, профессор, Ульяновский государственный университет.

e-mail: mishchenkosp@mail.ru

Нестеренко Юрий Валентинович — доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН, заведующий кафедрой теории чисел механико-математического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.

e-mail: nester@mi.ras.ru

Панин Владимир Алексеевич — доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАЕН, действительный член Академии информатизации образования, президент Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого.

e-mail: tgpu@tula.net

Пачев Урусби Мухамедович — доктор физико-математических наук, профессор кафедры алгебры и дифференциальных уравнений Кабардино-Балкарского государственного университета им. Х. М. Бербекова.

e-mail: urusbi@rambler.ru

Семёнов Алексей Львович — доктор физико-математических наук, профессор, академик Российской академии наук, академик Российской академии образования, заведующий кафедрой математической логики и теории алгоритмов Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.

e-mail: alsemno@ya.ru

Толоконников Лев Алексеевич — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет.

e-mail: tolokonnikovla@mail.ru

Чирский Владимир Григорьевич — доктор физико-математических наук, доцент, профессор механико-математического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ.

e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Аллаков Исмаил — доктор физико-математических наук, профессор, профессор Термезского государственного университета (Узбекистан).

e-mail: iallakov@mail.ru

Белов Алексей Яковлевич — доктор физико-математических наук, федеральный профессор математики, профессор университета Бар-Илана (Израиль).

e-mail: Kanelster@gmail.com

Берник Василий Иванович — доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Института математики НАН Беларуси (Белоруссия).

e-mail: bernik@im.bas-net.by

Лауринчикас Антанас — доктор физико-математических наук, профессор, действительный член АН Литвы, заведующий кафедрой теории вероятностей и теории чисел Вильнюсского университета (Литва).

e-mail: antanas.laurincikas@mif.vu.lt

Лю Юнпин — доктор наук, профессор, руководитель Исследовательского центра современного математического анализа Пекинского педагогического университета (Китай).

e-mail: ypliu@bnu.edu.cn

Мисир Джумаил оглы Марданов — доктор физико-математических наук, профессор, директор Института математики и механики Национальной академии наук Азербайджана (Азербайджан).

e-mail: rmi@lan.ab.az

Мусин Олег Рустамович — доктор физико-математических наук, профессор факультета математики Техасского университета в Браунсвилле (США).

e-mail: oleg.musin@utb.edu, omusin@gmail.com

Рахмонов Зарулло Хусейнович — доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент АН Республики Таджикистан, директор Института математики Таджикской АН (Таджикистан).

e-mail: zarullo_r@tajik.net, zarullo-r@rambler.ru

Салиба Холем Мансур — кандидат физико-математических наук, доцент факультета естественных и прикладных наук университета Нотр-Дам-Луэз (Ливан).

e-mail: qwe123@rocketmail.com

Табари Абдулло Хабибулло — доктор физико-математических наук, профессор, член корреспондент Академии наук Таджикистана; ректор Кулябского государственного университета им. Абуабдуллаха Рудаки (Таджикистан).

e-mail: rektor@kgu.tj

Фукшанский Леонид Евгеньевич — доктор математических наук, профессор, Колледж Клермонт Маккенна (США).

e-mail: lenny@cmc.edu

Шяучюнас Дарюс — доктор математических наук, профессор, старший научный сотрудник Научного института Шяуляйского университета (Литва).

e-mail: darius.siauciunas@su.lt

THE EDITORIAL BOARD

Volume 25 Issue 1

THE MAIN EDITOR

Chubarikov Vladimir Nikolaevich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Chair of Mathematical and Computer Methods of Analysis, President of the Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

e-mail: chubarik2020@mail.ru

THE ASSISTANTS OF THE MAIN EDITOR:

Dobrovolsky Nikolai Mihailovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Chair of Algebra, Mathematical Analysis and Geometry, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University.

e-mail: dobrovol@tspu.ru

Nijnikov Alexander Ivanovich — Dr. Sci. in Pedagogy, Professor, Head of the Chair of Mathematical Physics, Moscow Pedagogical State University; Honored Worker of Higher Education of the Russian Federation.

e-mail: ainizhnikov@mail.ru, nizhnikov.ai@mail.ru

EXECUTIVE SECRETARIES

Dobrovolsky Nikolai Nikolaevich — PhD in Physics and Mathematics, Junior Lecturer of the Chair of Applied Mathematics and Computer Science, Tula State University; Associate Professor of the Chair of Algebra, Mathematical Analysis and Geometry, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University.

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Rebrova Irina Yuryevna — PhD in Physics and Mathematics, Dean of the Department of Mathematics, Physics and Computer Science, Associate Professor of the Chair of Algebra, Mathematical Analysis and Geometry, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University.

e-mail: i_rebrova@mail.ru

EDITORIAL BOARD

Borovkov Aleksey Ivanovich — Dr. Sci. in Engineering, Professor, Peter the Great St.Petersburg Polytechnic University.

e-mail: borovkov@spbstu.ru

Bykovsky Victor Alekseevich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Deputy Director for Research, Institute for Applied Mathematics, Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences (IAM FEB RAS), Director of the Institute of Applied Mathematics, Khabarovsk Division.

e-mail: vab@iam.khv.ru

Vostokov Sergey Vladimirovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Professor of the Chair of Algebra and Number Theory, St. Petersburg State University, President of Euler Foundation.

e-mail: sergei.vostokov@gmail.com

Georgievsky Dmitry Vladimirovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Chair of Elasticity Theory, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

e-mail: georgiev@mech.math.msu.su

Gorbachev Vladimir Ivanovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

e-mail: vigorby@mail.ru

Gritsenko Sergey Alexandrovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor of the Chair of Mathematics, Financial University; Professor, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

e-mail: s.gritsenko@gmail.com

Demidov Sergey Sergeevich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Professor of the Chair of Probability Theory, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University; Head of the Department of History and Methodology of Mathematics and Mechanics, Head of the Department of History of Physics and Mathematics, S.I.Vavilov Institute for the History of Science and Technology, RAS (IHST RAS); Editor-in-chief of the journal «Istoriko-Matematicheskie Issledovaniya»; President of the International Academy of the History of Science.

e-mail: serd42@mail.ru

Durnev Valery Georgievich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Chair of Computer Security and Mathematical Methods of Information Processing, P.G. Demidov Yaroslavl State University.

e-mail: durnev@univ.uniyar.ac.ru

Zubkov Andrey Mihailovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Chair of Mathematical Statistics and Random Processes, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University; Head of the Department of Discrete Mathematics, Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences.

e-mail: zubkov@mi.ras.ru

Ivanov Aleksandr Olegovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

e-mail: aoiva@mech.math.msu.su

Ivanov Valery Ivanovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Chair of Applied Mathematics and Computer Science, Institute of Applied Mathematics and Computer Science, Tula State University.

e-mail: ivaleryi@mail.ru

Korolev Maxim Aleksandrovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Leading Researcher, Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences.

e-mail: korolevma@mi-ras.ru

Kuznetsov Valentin Nikolaevich — Dr. Sci. in Engineering, Professor, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov.

e-mail: kuznetsovvn@info.sgu.ru

Matiyasevich Yuri Vladimirovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Academician of the Russian Academy of Sciences, Adviser at the Russian Academy of Sciences, St. Petersburg Department of Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, President of the St. Petersburg Mathematical Society.

e-mail: yumat@pdmi.ras.ru

Mishchenko Sergey Petrovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Ulyanovsk State University.

e-mail: mishchenkosp@mail.ru

Nesterenko Yuri Valentinovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Head of the Chair of Number Theory, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

e-mail: nester@mi.ras.ru

Panin Vladimir Alexeyevich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Corresponding Member of the Russian Academy of Natural Sciences, Full Member of the Academy of

Informatization of Education, President of Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University.

e-mail: tgpu@tula.net

Pachev Urusbi Mukhamedovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor of the Chair of Algebra and Differential Equations, Kabardino-Balkarian State University named after H. M. Berbekov.

e-mail: urusbi@rambler.ru

Semenov Alexey Lvovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Academician of the Russian Academy of Sciences, Academician of the Russian Academy of Education, Head of the Chair of Mathematical Logic and Theory of Algorithms, Lomonosov Moscow State University.

e-mail: alsemno@ya.ru

Tolokonnikov Lev Alekseevich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Tula State University.

e-mail: tolokonnikovla@mail.ru

Fomin Aleksandr Aleksandrovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Department of Algebra of the Moscow Pedagogical State University.

Chirsky Vladimir Grigoryevich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Associate Professor, Professor of the Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University, The Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration.

e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Allakov Ismail — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Professor of Termez Davlat University (Uzbekistan).

e-mail: iallakov@mail.ru

Belov Alexey Yakovlevich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Federal Professor of Mathematics, Professor, Bar-Ilan University (Israel).

e-mail: Kanelster@gmail.com

Bernik Vasily Ivanovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Principal Researcher of the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (Belarus).

e-mail: bernik@im.bas-net.by

Laurinchikas Antanas — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Full Member of the Lithuanian Academy of Sciences, Head of the Chair of Probability Theory and Number Theory, Vilnius University (Lithuania).

e-mail: antanas.laurincikas@mif.vu.lt

Liu Yongping — Dr. Sci., Professor, Head of the Research Center for Modern Mathematical Analysis (School of Mathematical Sciences), Beijing Normal University (China).

e-mail: ypliu@bnu.edu.cn

Mardanov Misir Jumayil oglu — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Director of the Institute of Mathematics and Mechanics, Azerbaijan National Academy of Science (Azerbaijan).

e-mail: rmi@lan.ab.az

Musin Oleg Rustamovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Department of Mathematics, University of Texas Rio Grande Valley (UTRGV) (USA)

e-mail: oleg.musin@utb.edu, omusin@gmail.com

Rahmonov Zarullo Huseinovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Corresponding Member of the Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan, Director of the Institute of Mathematics, Tajik Academy of Sciences (Tajikistan).

e-mail: zarullo_r@tajik.net, zarullo-r@rambler.ru

Mansour Saliba Holem — PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor, Faculty of Natural and Applied Sciences, Notre Dame University–Louaize (Lebanon).

e-mail: qwe123@rocketmail.com

Habibullo Abdullo — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Corresponding Member of the Academy of Sciences of Tajikistan; Rector of Higher education institution «Kulob State University named after Abuabdullo Rudaki» (Tajikistan).

e-mail: rektor@kgu.tj

Fukshansky Leonid — Dr. Sci. in Mathematics, Professor, Claremont McKenna College (USA).

e-mail: lenny@cmc.edu

Šiaučiūnas Darius — Professor, Dr. Sci. in Mathematics, Senior Researcher, Institute of Regional Development, Šiauliai University (Lithuania).

e-mail: darius.siauciunas@su.lt

TABLE OF CONTENTS

Volume 25 Issue 1

M. G. Bashmakova, N. V. Sycheva. On some methods of evaluating irrationality measure of the function $\arctan x$ values	5
O. Kh. Gulomov. Quadratic forms corresponding to the faces of the Voronoi domain of perfect form in six variables	16
A. I. Denisov, I. V. Denisov. Nonlinear method of angular boundary functions for singularly perturbed parabolic problems with cubic nonlinearities	26
I. A. Ikromov, A. R. Safarov. Uniform estimates for oscillatory integrals with smooth phase	42
I. A. Ikromov, A. R. Safarov, A. T. Absalamov. On estimates for trigonometric integrals with quadratic phase	52
S. E. Pustovoitov. Research of the structure of the Liouville foliation of an integrable elliptical billiard with polynomial potential	62
V. L. Usoltsev. On congruence lattices of algebras with an operator and the symmetric main operation	103
R. A. Farakhutdinov. On the problem of abstract characterization of universal graphic automata	116
H. Al-Assad. A generalisation of Legendre's Three-Square Theorem	127
A. V. Shutov, A. A. Mokrova. On the number of isohedral polyominoes	138
BRIEF MESSAGE	
E. Almukhur, M. Kusini, A. Alnana, M. Al-Labadi. On the exceptional set of a system of linear equations with prime numbers	155
A. V. Begunts, D. V. Goryashin. On coprime elements of the Beatty sequence	164
D. V. Gritsuk, A. A. Trofimuk. On some product of SM-groups	170
I. B. Zhukov, O. Yu. Ivanova. Elimination of maximal jumps	176
P. L. Ivankov. On simultaneous approximations of some hypergeometric functions	184
HISTORY OF MATHEMATICS AND APPLICATIONS	
S. V. Danilenko, J. M. Martynyuk, I. Yu. Rebrova. An example of constructing a mathematical model for solving a practice-oriented problem	192
L. A. Tolokonnikov, S. ,L. Tolokonnikov. Acoustic radiation of a spheroid streamlined by a stationary flow of an ideal liquid	205
РЕДКОЛЛЕГИЯ	215
THE EDITORIAL BOARD	219
TABLE OF CONTENTS	223